ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 197

Москва 2021

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 197

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

Москва 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 3–11
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-3-11

УДК 517.98

СЛАБАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ КОСОЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ИДЕАЛАХ

© 2021 г. **Б. Р. АМИНОВ, В. И. ЧИЛИН**

Аннотация. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное комплексное гильбертово пространство, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — C^*-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$ — совершенный банахов идеал компактных операторов в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{I}^h = \{x \in \mathcal{I},\ x = x^*\}$. Доказано, что любой косоэрмитов оператор $T : \mathcal{I}^h \to \mathcal{I}^h$ непрерывен в слабой топологии $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$, где $\mathcal{I}^\times = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid xy \in \mathcal{C}_1\ \forall y \in \mathcal{I}\}$ — ассоциированный банахов идеал для $\mathcal{I}$.

Ключевые слова: банахов идеал компактных операторов, слабая топология, косоэрмитов оператор.

WEAK CONTINUITY OF SKEW-HERMITIAN OPERATORS IN BANACH IDEALS

© 2021 **B. R. AMINOV, V. I. CHILIN**

Abstract. Let $\mathcal{H}$ be a separable complex Hilbert space, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ be the C^*-algebra of all bounded linear operators acting in $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$ be the perfect Banach ideal of compact operators in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, and $\mathcal{I}^h = \{x \in \mathcal{I},\ x = x^*\}$. We prove that any skew-Hermitian operator $T : \mathcal{I}^h \to \mathcal{I}^h$ is continuous in the weak topology $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$, where $\mathcal{I}^\times = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid xy \in \mathcal{C}_1\ \forall y \in \mathcal{I}\}$ is the associated Banach ideal for $\mathcal{I}$.

Keywords and phrases: Banach ideal of compact operators, weak topology, skew-Hermitian operator.

AMS Subject Classification: 46L52, 47B10, 47C15

1. Введение. Описание линейных изометрий симметричных пространств $E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ комплексных измеримых функций (равные почти всюду функции отождествляются), заданных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ с полной σ-конечной мерой, как правило, использует свойства эрмитовых операторов, действующих в $E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (см. [13]). Так, например, с помощью свойств эрмитовых операторов М. Г. Зайденбергом (см. [3, 19]) получен явный вид всех сюръективных линейных изометрий комплексных симметричных пространств $E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ в случае непрерывной меры μ. Описание сюръективных линейных изометрий комплексных сепарабельных (соответственно, комплексных со свойством Фату) симметричных пространств последовательностей с использованием свойств эрмитовых операторов был получен в [9] (соответственно, в [1]). Аналогичный метод, использующий явный вид эрмитовых операторов, применялся в [6, 16] при описании сюръективных линейных изометрий в сепарабельных и совершенных банаховых идеалах $\mathcal{I}$ компактных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве. Важным звеном в доказательстве, устанавливающем структуру изометрий в совершенном банаховом идеале $\mathcal{I}$, является свойство $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$-непрерывности эрмитовых операторов $T : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}^\times$ — ассоциированный банахов идеал для $\mathcal{I}$. Естественно, что при решении аналогичной задачи о явном виде изометрий в действительном банаховом пространстве $(\mathcal{I}^h, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$, где $\mathcal{I}^h = \{x \in \mathcal{I} :\ x = x^*\}$, необходимо описание косоэрмитовых операторов, действующих в $(\mathcal{I}^h, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$, для чего, в свою очередь, требуется свойство $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$-непрерывности этих операторов.

Основным результатом в настоящей работе является следующая теорема.

Теорема 1. *Если $\mathcal{I}$ — совершенный банахов симметричный идеал, то каждый косоэрмитов оператор $T\mathcal{I}^h \to \mathcal{I}^h$ является $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$-непрерывным.*

2. Предварительные сведения. Пусть $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — сепарабельное комплексное гильбертово пространство. Через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ обозначаются, соответственно, $*$-алгебры всех ограниченных, компактных и конечномерных операторов, действующих в $\mathcal{H}$. Известно, что для любого двустороннего собственного идеала $\mathcal{I}$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ верны включения $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (см., например, [15, Proposition 2.1]. Двусторонний собственный идеал $\mathcal{I}$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется банаховым симметричным идеалом, если в $\mathcal{I}$ определена такая банахова норма $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, что

(i) $\|xzy\|_{\mathcal{I}} \leqslant \|x\|_\infty \|y\|_\infty \|z\|_{\mathcal{I}}$ для всех $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $z \in \mathcal{I}$, где $\|\cdot\|_\infty$ — операторная норма в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$;
(ii) $\|x\|_{\mathcal{I}} = \|x\|$ для всех $x \in \mathcal{I}$ с рангом, равным 1.

В банаховых симметричных идеалах $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ всегда верно равенство $\|uxv\|_{\mathcal{I}} = \|x\|_{\mathcal{I}}$ для всех унитарных $u, v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $x \in \mathcal{I}$.

Рассмотрим идеал Шаттена $\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|x\|_1 = \mathrm{Tr}(|x|) < \infty\}$, где $\mathrm{Tr}(\cdot)$ — канонический след в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, т.е.

$$\mathrm{Tr}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x\varphi_n, \varphi_n\rangle, \quad x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

$\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$ (см., например, [17, Chap. 7, Sec. 7.5]). Для банахова симметричного идеала $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ положим

$$\mathcal{I}^\times = \big\{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \ xy \in \mathcal{C}_1 \text{ для всех } y \in \mathcal{I}\big\}.$$

Известно (см. [11]), что $\mathcal{I}^\times$ есть двусторонний идеал в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, при этом $\mathcal{I}^\times = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid yx \in \mathcal{C}_1$ при всех $y \in \mathcal{I}\}$. Каждый элемент $y \in \mathcal{I}^\times$ определяет непрерывный линейный функционал $f_y(x) = \mathrm{Tr}(xy)$, $x \in \mathcal{I}$, на банаховом пространстве $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ (см. [11]); отождествляя y и f_y, можно считать, что $\mathcal{I}^\times$ есть линейное подпространство в сопряженном пространстве $\mathcal{I}^*$.

Предложение 1. *$\mathcal{I}^\times$ — тотальное подпространство в $\mathcal{I}^*$.*

Доказательство. Пусть $y \in \mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$ и $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ для всех $x \in \mathcal{I}^\times$. Согласно разложению Шмидта для компактного оператора y (см., например, [2, Гл. II, § 2]) имеем, что

$$y(\xi) = \sum_{n=1}^{r(y)} s_n(y)\langle \xi, \varphi_n\rangle \psi_n, \quad \xi \in \mathcal{H},$$

где $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ — некоторые ортонормированные системы в $\mathcal{H}$, а $\{s_n(y)\}$ — множество s-чисел для оператора y, т.е. множество всех собственных значений положительного компактного оператора $|y| = (yy^*)^{1/2}$, расположенных в убывающем порядке,

Поскольку одномерный оператор $x(\xi) = \langle \xi, \psi_1\rangle \varphi_1$, $\xi \in \mathcal{H}$, принадлежит $\mathcal{I}^\times$, то

$$0 = \mathrm{Tr}(xy) = s_1(y) = \|y\|_\infty,$$

т.е. $y = 0$. □

Из предложения 1 вытекает, что слабая топология $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$, называемая топологией Кете, является хаусдорфовой топологией.

Симметричный банахов идеал $\mathcal{I}$ называется совершенным, если $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\times\times}$. Для каждого ненулевого совершенного идеала $\mathcal{I}$ всегда верно включение $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{I}$; при этом $\|x\|_{\mathcal{I}} \leqslant \|x\|_1$ для всех $x \in \mathcal{C}_1$ (см. [11]).

Действительное линейное пространство $\mathcal{B}(\mathcal{H})^h = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : x = x^*\}$ является упорядоченным линейным пространством относительно естественного частичного порядка

$$x \leqslant y \iff \langle x(\xi), \xi\rangle \leqslant \langle y(\xi), \xi\rangle \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

При этом, если $x_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^h$, $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^h$, то существует такое $x_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, для которого $x_n \uparrow x_0$. В этом случае последовательность x_n сходится к x_0 в слабой операторной топологии, т.е. $\langle x_n(\xi), \eta\rangle \to \langle x_0(\xi), \eta\rangle$ при $n \to \infty$ для любых $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. То же самое относится и к записи $x_n \downarrow x_0$.

Пусть $\mathcal{I}$ — банахов симметричный идеал. Линейный непрерывный функционал $f \in \mathcal{I}^*$ называется нормальным, если из $0 \leqslant x_n \downarrow 0$ следует $f(x_n) \to 0$. Известен следующий критерий нормальности f.

Предложение 2 (см. [10, Proposition 2.8])**.** *Линейный непрерывный функционал $f \in \mathcal{I}^*$ является нормальным тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{I}^\times$.*

Абсолютно выпуклое ограниченное множество A в действительном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ называется множеством Розенталя, если любая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ из A имеет слабо фундаментальную подпоследовательность. Обозначим через b_X шаровую топологию (см. [12]) в X, т.е. слабейшую топологию среди тех топологий в X, относительно которых замкнутый шар $B(x,\varepsilon) = \{y \in X : \|y - x\|_X \leqslant \varepsilon\}$ замкнут в $(X, \|\cdot\|_X)$; здесь $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Каждая точка $x_0 \in X$ имеет следующий базис окрестностей в топологии b_X:

$$V = X \setminus \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_i), \text{ где } x_i \in X, \quad \|x_0 - x_i\|_X > \varepsilon_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Следовательно, $x_\alpha \xrightarrow{b_X} x_0$, $x_\alpha, x_0 \in X$, в том и только в том случае, когда

$$\liminf \|x_\alpha - x\|_X \geqslant \|x_0 - x\|_X \quad \text{для всех } x \in X$$

(см. [12]). В частности, любая сюръективная линейная изометрия $V\colon X \to X$ непрерывна в шаровой топологии b_X.

Следует отметить, что топология b_X, вообще говоря, не является хаусдорфовой. Однако верна следующая теорема.

Теорема 2 (см. [12])**.** *В банаховом пространстве X сужение топологии b_X на любом множестве Розенталя $A \subset X$ является хаусдорфовой.*

Ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty x_n$ называется слабо безусловно сходящимся в банаховом пространстве X, если для любого $f \in X^*$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty f(x_n)$ сходится абсолютно (см. [18, гл. II.D, § 3]). Известен следующий критерий для слабой безусловной сходимости ряда.

Предложение 3 (см. [18, гл. II.D, § 3])**.** *Ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty x_n$ в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ сходится слабо безусловно в том и только в том случае, когда существует такая константа $C > 0$, что*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^k t_n x_n \right\|_X \leqslant C \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_n|$$

для всех ограниченных числовых последовательностей $\{t_n\}_{n=1}^\infty$.

Следствие 1. *Если V — ограниченный линейный оператор, действующей в банаховом пространстве X, и ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty x_n$ слабо безусловно сходится в X, то ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty V(x_n)$ также слабо безусловно сходится в X.*

Ниже в разделе 3 при доказательстве нужного нам свойства шаровой топологии используется следующий известный факт.

Предложение 4 (см. [5, раздел 3, гл. 1, § 5])**.** *Пусть p_{nk}, $n, k \in \mathbb{N}$, — действительные числа, удовлетворяющие условию*

$$\sum_{k=1}^n |p_{nk}| = 1$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, и для каждого фиксированного k существует предел

$$\lim_{n\to\infty} p_{nk} = p_k.$$

Тогда для любой сходящейся последовательности действительных чисел r_n последовательность

$$s_n = p_{n1}r_1 + p_{n2}r_2 + \ldots + p_{nn}r_n$$

также сходится.

3. Сравнение топологий $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$ и $b_{\mathcal{I}^h}$. Для любого подмножества $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ положим $\mathcal{A}^h = \{x \in \mathcal{A} : x = x^*\}$.

Предложение 5. *Если $\mathcal{I}$ — собственный идеал в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, то $\mathcal{I}^h$ замкнуто в $\mathcal{I}$ относительно слабой топологии $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$.*

Доказательство. Для любых $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ определим одномерный оператор

$$\xi \otimes \eta \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad (\xi \otimes \eta)(h) = \langle h, \eta\rangle \xi, \quad h \in \mathcal{H}.$$

Ясно, что $\mathrm{Tr}((\eta \otimes \xi) \cdot x) = \langle x(\eta), \xi\rangle$ для всех $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^h$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Пусть $\{x_\alpha\} \subset \mathcal{I}^h$ и

$$x_\alpha \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} x_0 \in \mathcal{I}.$$

Так как одномерный оператор $\xi \otimes \eta$ принадлежит $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I}^\times$, то

$$\langle x_0(\xi), \eta\rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{Tr}(x_0 \cdot (\xi \otimes \eta)) = \lim_\alpha \mathrm{Tr}(x_\alpha \cdot (\xi \otimes \eta)) = \lim_\alpha \langle x_\alpha(\xi), \eta\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Это означает, что сеть $\{x_\alpha\}$ сходится к x_0 относительно слабой операторной топологии. Следовательно, $x_0 = x_0^*$, т.е. $x_0 \in \mathcal{I}^h$. □

Замечание 1. Хорошо известно, что идеал $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ конечномерных операторов всюду плотен в C^*-алгебре $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ относительно равномерной топологии, порожденной операторной нормой $\|\cdot\|_\infty$, и, следовательно, $\mathcal{F}(\mathcal{H})^h$ всюду плотно в $(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h, \|\cdot\|_\infty)$. Поскольку слабая топология $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$ слабее равномерной топологии, то $\mathcal{F}(\mathcal{H})^h$ плотно в $\mathcal{I}^h$ относительно топологии $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$ для любого банахова симметричного идеала в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Для оператора $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ положим

$$\mathrm{Re}(x) = \frac{x + x^*}{2}, \quad \mathrm{Im}(x) = \frac{x - x^*}{2i},$$

где $i^2 = -1$. Поскольку $x = \mathrm{Re}(x) + i\,\mathrm{Im}(x)$ и $(\mathcal{I}, \sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times))$ — локально выпуклое пространство, то из сходимостей

$$\mathrm{Re}(x_\alpha) \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} \mathrm{Re}(x_0), \quad \mathrm{Im}(x_\alpha) \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} \mathrm{Im}(x_0), \quad \{x_\alpha\} \subset \mathcal{I},$$

следует, что $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} x_0$.

Согласно определению топологии $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$ сходимость $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} x_0$ влечет сходимость

$$\mathrm{Tr}(x_\alpha^* y^*) = \mathrm{Tr}((y x_\alpha)^*) = \overline{\mathrm{Tr}(y x_\alpha)} \longrightarrow \overline{\mathrm{Tr}(y x_0)} = \mathrm{Tr}(x_0^* y^*)$$

для любых $y \in \mathcal{I}^\times$. Поэтому в силу равенства $(\mathcal{I}^\times)^* = \mathcal{I}^\times$ получим, что $x_\alpha^* \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} x_0^*$, т.е. инволюция $x \mapsto x^*$ непрерывна в топологии $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$; в частности, верно следующее предложение.

Предложение 6. *Если $\{x_\alpha\} \subset \mathcal{I}$ и $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} x_0$, то*

$$\mathrm{Re}(x_\alpha) \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} \mathrm{Re}(x_0), \quad \mathrm{Im}(x_\alpha) \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} \mathrm{Im}(x_0).$$

Пусть $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ — банахов симметричный идеал. Через $B(\mathcal{I}^h)$ обозначим действительное банахово пространство всех линейных ограниченных операторов $T\colon \mathcal{I}^h \to \mathcal{I}^h$ с нормой

$$\|T\|_{B(\mathcal{I}^h)} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{I}} \leqslant 1} \|T(x)\|_{\mathcal{I}}.$$

Поскольку $(\mathcal{I}, \sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times))$ — локально выпуклое пространство, то множество всех линейных операторов $T\colon \mathcal{I}^h \to \mathcal{I}^h$, непрерывных относительно топологии $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$, является подалгеброй в алгебре всех линейных операторов, действующих в $\mathcal{I}^h$.

Предложение 7. *Пусть $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ — банахов симметричный идеал. Если $T_n \in B(\mathcal{I}^h)$, $n \in \mathbb{N}$, — $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$-непрерывные операторы, $T \in B(\mathcal{I}^h)$ и $\|T_n - T\|_{B(\mathcal{I}^h)} \to 0$ при $n \to \infty$, то оператор T также $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$-непрерывен.*

Доказательство. Для каждого T_n и T определим линейные операторы

$$\tilde{T}_n\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}, \quad \tilde{T}_n(x) = T_n(\mathrm{Re}(x)) + iT_n(\mathrm{Im}(x)),$$
$$\tilde{T}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}, \quad \tilde{T}(x) = T(\mathrm{Re}(x)) + iT(\mathrm{Im}(x)), \quad x \in \mathcal{I}.$$

Поскольку $\|T_n - T\|_{B(\mathcal{I}^h)} \to 0$, то $\|\tilde{T}_n - \tilde{T}\|_{B(\mathcal{I})} \to 0$ при $n \to \infty$.

Покажем, что операторы $\tilde{T}_n$ непрерывны относительно топологии $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$. Если $\{x_\alpha\} \subset \mathcal{I}$ и $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} x_0$, то

$$\mathrm{Re}(x_\alpha) \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} \mathrm{Re}(x_0), \quad \mathrm{Im}(x_\alpha) \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} \mathrm{Im}(x_0)$$

(см. предложение 6). Следовательно,

$$\tilde{T}_n(x_\alpha) = T_n(\mathrm{Re}(x_\alpha)) + iT_n(\mathrm{Im}(x_\alpha)) \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} T_n(\mathrm{Re}(x_0)) + iT_n(\mathrm{Im}(x_0)) = \tilde{T}_n(x_0).$$

Поскольку $\|\tilde{T}_n - \tilde{T}\|_{B(\mathcal{I})} \to 0$, то из предложения 4 (см. [6]) следует, что оператор $\tilde{T}$ также непрерывен относительно топологии $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$. Осталось заметить, что оператор T является сужением $\tilde{T}$ на $\mathcal{I}^h$, и поэтому T непрерывен относительно топологии $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$. $\square$

Нам понадобятся следующие свойства совершенных банаховых симметричных идеалов из [10].

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{I}$ — совершенный банахов симметричный идеал.*

1. *Для каждого $x \in \mathcal{I}$ верно равенство*

$$\|x\|_{\mathcal{I}} = \sup_{\substack{y \in \mathcal{I}^\times, \\ \|y\|_{\mathcal{I}^*} \leqslant 1}} |\operatorname{Tr}(xy)|.$$

2. *$\mathcal{I}$ является $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$-секвенциально полным, т.е. если для каждого $f \in \mathcal{I}^\times$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, то найдется такое $x_0 \in \mathcal{I}$, что $x_n \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} x_0$.*

Из теоремы 3 (п. 2) и предложения 5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Если $\mathcal{I}$ — совершенный банахов симметричный идеал, то $\mathcal{I}^h$ является $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$-секвенциально полным множеством.*

Отметим еще одно важное свойство слабой топологии $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$, вытекающее из теоремы 3 (п. 1).

Предложение 8. *Если $\mathcal{I}$ — совершенный банахов симметричный идеал, $x, x_n \in \mathcal{I}^h$, $n \in \mathbb{N}$, и $x_n \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} x$, то $x_n \xrightarrow{b_{\mathcal{I}^h}} x$.*

Доказательство. Покажем, что замкнутый шар в $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ является замкнутым в топологии $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$. Поскольку алгебраические операции в топологии $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$ непрерывны, то достаточно доказать $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^\times)$-замкнутость единичного шара $B_{\mathcal{I}} = \{x \in \mathcal{I} : \|x\|_{\mathcal{I}} \leqslant 1\}$. Пусть $x_n \in B_{\mathcal{I}}$ и $x_n \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} x \in \mathcal{I}$. Предположим, что $x \notin B$, т.е. $\|x\| = q > 1$. Зафиксируем $\epsilon > 0$, для которого $q - \epsilon > 1$. В силу теоремы 3 (п. 1) существует такое $y \in \mathcal{I}^\times$, $\|y\|_{\mathcal{I}^*} \leqslant 1$, что $q \geqslant |\operatorname{Tr}(xy)| > q - \epsilon$.

С другой стороны, из сходимости $x_n \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} x$ следует $|\operatorname{Tr}(x_n y)| \to |\operatorname{Tr}(xy)|$. Так как $x_n \in B_{\mathcal{I}}$, то верно неравенство $|\operatorname{Tr}(x_n y)| \leqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и поэтому $|\operatorname{Tr}(xy)| \leqslant 1$, что противоречит выбору ϵ. Таким образом, всякий замкнутый шар в $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ является замкнутым в топологии $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$, а это означает, что слабая топология $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$ на $\mathcal{I}^h$ сильнее, чем шаровая топология $b_{\mathcal{I}^h}$. $\square$

Следующая теорема описывает важное свойство шаровой топологии $b_{\mathcal{I}^h}$ для банаховых симметричных идеалов.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{I}$ — банахов симметричный идеал, $x_n \in \mathcal{I}^h$ и $x_n \downarrow 0$. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ может сходиться в шаровой топологии $b_{\mathcal{I}^h}$ не более чем к одному элементу.*

Доказательство. Обозначим через A абсолютно выпуклую оболочку в $\mathcal{I}^h$ для последовательности $\{0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Поскольку $x_n \downarrow 0$, то множество A ограничено по норме. Покажем, что A является множеством Розенталя.

Используя неравенства $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$ и разложение линейного функционала $f \in (\mathcal{I}^h)^*$ в конечную линейную комбинацию положительных функционалов из $(\mathcal{I}^h)^*$ [8], получим существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = r_n$ для любого $f \in (\mathcal{I}^h)^*$. Для произвольной последовательности $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ имеем, что

$$y_n = p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \ldots + p_{nk(n)}x_{k(n)}, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{k(n)} |p_{ni}| = 1,$$

в частности, $p_{ni} \in [-1, 1]$ для всех $i \in 1, \ldots, k(n)$. Рассмотрим последовательность

$$q_n = (p_{n1}, p_{n2} \ldots, p_{nk(n)}, 0, 0 \ldots) \in \prod_{i=1}^\infty [-1, 1].$$

По теореме Тихонова о произведении компактов множество $\prod\limits_{i=1}^\infty [-1, 1]$ есть компакт относительно топологии прямого произведения. Кроме того, согласно [4, гл. 4, теорема 17] компакт $\prod\limits_{i=1}^\infty [-1, 1]$ является метризуемым. Следовательно, из последовательности $\{q_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{q_{n_i}\}_{i=1}^\infty$. В частности, для всех $k \in \mathbb{N}$ существуют пределы $\lim\limits_{n_i\to\infty} p_{n_i k}$, т.е. для любого $f \in (\mathcal{I}^h)^*$ последовательность

$$f(y_{n_i}) = \sum_{j=1}^k p_{n_i j} f(x_j)$$

удовлетворяет всем условиям предложения 3, что влечет сходимость этой последовательности. Таким образом, последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ имеет слабо фундаментальную подпоследовательность y_{n_i}. Это означает, что A есть множество Розенталя.

В силу теоремы 2 топологическое пространство $(A, b_{\mathcal{I}^h})$ является хаусдорфовым, а это означает, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ может иметь не более чем один предел в топологии $b_{\mathcal{I}^h}$. $\square$

4. $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$-Непрерывность косоэрмитовых операторов. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — действительное банахово пространство. Линейный ограниченный оператор $T\colon X \to X$ называется косоэрмитовым, если $\operatorname{Re}(f(T(x))) = 0$ для всех $f \in X^*$ и $x \in X$, удовлетворяющих условию $f(x) = \|f\|_{X^*}\|x\|_X$ (см. [14]).

Известен следующий критерий косоэрмитовости ограниченного линейного оператора.

Предложение 9 (см. [14])**.** *Для ограниченного линейного оператора T в действительном банаховом пространстве X следующие условия эквивалентны*:

1. *T — косоэрмитов оператор*;
2. *e^{tT} — сюръективная линейная изометрия пространства X для всех действительных чисел t.*

Для доказательства основной теоремы 1 нам понадобится свойство $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$-непрерывности сюръективных линейных изометрий $V\colon \mathcal{I}^h \to \mathcal{I}^h$ в случае совершенных банаховых симметричных идеалов $\mathcal{I}$.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{I}$ — совершенный банахов симметричный идеал и $V\colon \mathcal{I}^h \to \mathcal{I}^h$ — сюръективная линейная изометрия. Тогда V является $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$-непрерывным.*

Доказательство. Условие 1. Определим отображение

$$\tilde V\colon \mathcal{I}\to\mathcal{I},\quad \tilde V(x)=V(\mathrm{Re}(x))+iV(\mathrm{Im}(x)),\quad x\in\mathcal{I}.$$

Ясно, что $\tilde V$ — линейный биективный ограниченный оператор на $\mathcal{I}$; при этом $\tilde V(\mathcal{I}^h)\subset\mathcal{I}^h$. Покажем, что $\tilde V$ является непрерывным отображением относительно топологии $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$. Для этого достаточно показать, что $\tilde V^*(f)\in\mathcal{I}^\times$ для каждого функционала $f\in\mathcal{I}^\times$. Согласно предложению 2 следует установить, что сходимость $x_n\downarrow 0$, $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{I}^h$, влечет сходимость

$$f(\tilde V(x_n))=\tilde V^*(f)(x_n)\to 0.$$

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{I}^h$ и $x_n\downarrow 0$. Покажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^\infty (x_n-x_{n+1})$$

слабо безусловно сходится. Для каждого положительного линейного функционала $f\in\mathcal{I}^*$ из неравенства $x_n-x_{n+1}\geqslant 0$ следует, что

$$\sum_{n=1}^m |f(x_n-x_{n+1})| = f\left(\sum_{n=1}^m (x_n-x_{n+1})\right)=f(x_1-x_{m+1})\leqslant f(x_1)$$

при всех $m\in\mathbb{N}$. Это означает, что числовой ряд

$$\sum_{n=1}^\infty f(x_n-x_{n+1})$$

сходится абсолютно. Поскольку каждый функционал $f\in\mathcal{I}^*$ есть конечная линейная комбинация положительных функционалов из $\mathcal{I}^*$, то ряд

$$\sum_{n=1}^\infty (x_n-x_{n+1})$$

слабо безусловно сходится. Согласно следствию 1 ряд

$$\sum_{n=1}^\infty (\tilde V(x_n)-\tilde V(x_{n+1}))$$

также слабо безусловно сходится.

Следовательно, для любого $f\in\mathcal{I}^*$, сходится ряд

$$\sum_{n=1}^\infty f(\tilde V(x_n)-\tilde V(x_{n+1}))=f(\tilde V(x_1))-\lim_{n\to\infty} f(\tilde V(x_n)),$$

и поэтому для любого $f\in\mathcal{I}^*$ существует предел $\lim_{n\to\infty} f(\tilde V(x_n))$. Так как пространство $\mathcal{I}$ является $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$-секвенциально полным (см. теорему 3, п. 2), а V — биекция, то существует такое $x_0\in\mathcal{I}^h$, что

$$V(x_n)=\tilde V(x_n)\xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)}\tilde V(x_0)=V(x_0)$$

(см. предложение 5).

Покажем теперь, что $V(x_0)=0$; тем самым непрерывность V относительно топологии $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$ будет установлена.

Так как сходимость в слабой топологии $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$ влечет сходимость в топологии $b_{\mathcal{I}^h}$ (см. предложение 8), то $V(x_n) \xrightarrow{b_{\mathcal{I}^h}} V(x_0)$. Последнее означает, что для любого $V(y) \in \mathcal{I}^h$ верно равенство
$$\liminf_{n\to\infty} \|V(x_n) - V(y)\|_{\mathcal{I}} \geqslant \|V(x_0) - V(y)\|_{\mathcal{I}}.$$
Так как V — изометрия, то
$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|_{\mathcal{I}} \geqslant \|x_0 - y\|_{\mathcal{I}}$$
для любого $y \in \mathcal{I}^h$, т.е. $x_n \xrightarrow{b_{\mathcal{I}^h}} x_0$.

С другой стороны, из сходимости $x_n \downarrow 0$ следует, что $x_n \xrightarrow{\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)} 0$, и поэтому $x_n \xrightarrow{b_{\mathcal{I}^h}} 0$ (см. предложение 8). В силу теоремы 4 получим, что $x_0 = 0$. Таким образом, V непрерывно относительно топологии $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию
$$\alpha(t) = \|e^{tT} - \mathbf{1}\|_{B(\mathcal{I})},$$
где $\mathbf{1}$ — тождественный оператор, t — действительное число. Так как $\alpha(0) = 0$, то существует такое t_0, что $\alpha(t_0) < 1$. Поскольку оператор T косоэрмитов, то оператор $V = e^{t_0 T}$ является изометрией (см. предложение 9). В силу равенства $V^{-1} = e^{-t_0 T}$ имеем, что V — сюръективная линейная изометрия. Согласно теореме 5 оператор $S = (V - \mathbf{1})$ является $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$-непрерывным; при этом верно неравенство $\|S\| = \alpha(t_0) < 1$. Используя теперь равенство
$$t_0 T = \ln(\mathbf{1} + S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} S^n}{n}$$
и предложение 7, получим, что оператор $t_0 T$ является $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$-непрерывным. Следовательно, оператор T также $\sigma(\mathcal{I},\mathcal{I}^\times)$-непрерывен. $\square$

В заключение отметим, что в [7] с помощью теоремы 1 получено следующее явное описание всех косоэрмитовых операторов, действующих в самосопряженной части банахова симметричного идеала.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{I}$ — совершенный банахов симметричный идеал, отличный от $\mathcal{C}_2$, а $T\colon \mathcal{I}^h \to \mathcal{I}^h$ — косоэрмитов оператор. Тогда существует такой самосопряженный оператор $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, что $T(x) = i(ax - xa)$ для всех $x \in \mathcal{I}^h$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аминов Б. Р., Чилин В. И.* Изометрии и эрмитовы операторы в комплексных симметричных пространствах последовательностей// Мат. тр. — 2017. — *20*, № 1. — С. 21–42.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
3. *Зайденберг М. Г.* Докл. АН СССР.// — 1977. — *234*, № 2. — С. 283–286.
4. *Келли Д. Л.* Общая топология. — М.: Наука, 1968.
5. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. — М.: Наука, 1978.
6. *Aminov B. R., Chilin V. I.* Isometries of perfect norm ideals of compact operators// Stud. Math. — 2018. — *241*, № 1. — P. 87–99.
7. *Aminov B. R., Chilin V. I.* Isometries of real subspaces of self-adjoint operators in banach symmetric ideals// Владикавказ. мат. ж. — 2019. — *21*, № 4. — С. 11–24.
8. *Ando N.* On fundamental properties of a Banach space with a cone// Pac. J. Math. — 1962. — *12*, № 4. — P. 1163–1169.
9. *Arazy J.* Isometries on complex symmetric sequence spaces// Math. Z. — 1985. — *188*. — P. 427–431.
10. *Dodds P. G., Lennard C. J.* Normality in trace ideals, I// Operator Theory. — 1986. — *16*. — P. 127–145.
11. *Garling D. J. H.* On ideals of operators in Hilbert space// Proc. London Math. Soc. — 1967. — *17*. — P. 115–138.
12. *Godefroy G., Kalton N. J.* The ball topology and its applications// Contemp. Math. — 1989. — *85*. — P. 195–237.

13. *Lumer G.* On the isometries of reflexive Orlicz spaces// Ann. Inst. Fourier. — 1963. — *13.* — P. 99–109.
14. *Rosenthal H.* The Lie algebra of a Banach space// Lect. Notes Math. — 1985. — *1166.* — P. 129–157.
15. *Simon B.* Trace Ideals and Their Applications. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2005.
16. *Sourour A.* Isometries of norm ideals of compact operators// J. Funct. Anal. — 1981. — *43.* — P. 69–77.
17. *Stratila S., Zsido L.* Lectures on von Neumann Algebras. — Bucharest: Editura Academiei, 1979.
18. *Wojtaszczyk P.* Banach Spaces for Analysts. — Cambridge Univ. Press, 1991.
19. *Zaidenberg M. G.* A representation of isometries of function spaces// Мат. физ. анал. геом. — 1997. — *4*, № 3. — С. 339–347.

Аминов Бехзод Расулович
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: `aminovbehzod@gmail.com`

Чилин Владимир Иванович
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: `vladimirchil@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 12–27
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-12-27

УДК 515.12

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РАСПОЛОЖЕННОСТИ ПОДПРОСТРАНСТВ ПРОСТРАНСТВА ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

© 2021 г. **Ш. А. АЮПОВ, Т. Ф. ЖУРАЕВ**

Аннотация. Изучаются геометрические и топологические свойства типа всюду плотности, выпуклости, граничности, гомотопической плотности, пренебрежимости и гомеоморфности пар подпространств пространства вероятностных мер, определенных в бесконечном компакте X. Установлено, в каких случаях выпуклые всюду плотные подпространства пространства вероятностных мер $P(X)$ являются граничными множествами.

Ключевые слова: вероятностная мера, гомотопически плотное подмножество, гомотопически пренебрежимое множество.

GEOMETRIC PROPERTIES OF THE LOCATION OF SUBSPACES OF THE SPACE OF PROBABILITY MEASURES

© 2021 **Sh. A. AYUPOV, T. F. ZHURAEV**

Abstract. For pairs of subspaces of the space of probability measures defined in an infinite compact set X, we examine various geometric and topological properties such as everywhere density, convexity, boundedness, homotopy density, negligibility, and homeomorphism. Also, we establish conditions under which convex, everywhere dense subspaces of the space of probability measures $P(X)$ are boundary sets.

***Keywords and phrases*:** probability measure, homotopically dense subset, homotopically negligible set.

***AMS Subject Classification*:** 54Bxx, 54Cxx, 54D30

1. Введение. Пусть $C(X)$ — пространство всех действительных непрерывных функции на компакте X с компактно-открытой топологией. Обозначим через

$$\varphi = \Delta\{\varphi_\alpha : \varphi_\alpha \in C(X)\} \colon X \to \mathbb{R}^{C(X)}$$

диагональное произведение непрерывных функции пространства $C(X)$, где $\varphi_\alpha \in C(X)$. Диагональное отображение $\varphi \colon X \to \mathbb{R}^{C(X)}$ является вложением, т.е.

$$X \underset{i}{\subsetneq} \prod\{\mathbb{R}_\varphi : \varphi \in C(X)\}.$$

Рассмотрим замкнутую выпуклую оболочку $\overline{\operatorname{conv}\varphi(X)}$ образа $\varphi(X)$ в $\mathbb{R}^{C(X)}$, которую обозначим через $P(X)$. Значит, $P(X)$ есть подмножество бесконечного произведения

$$\prod_{f\in C(X)} [a_f, b_f],$$

где $a_f = \min\{f(x) : x \in X\}$, $b_f = \max\{f(x) : x \in X\}$. Компакт $P(X)$ называется пространством вероятностных мер, определенным на компакте X.

2. Ковариантные функторы в категории Comp**-компактов и их непрерывных отображений в себя.** Приведем определения понятия нормального функтора в категории топологических компактных пространств и их непрерывных отображений в себя.

Определение 2.1. Функтор F называется непрерывным, если для любого обратного спектра $S = \{X_\alpha, P^\alpha_\beta : A\}$ определен обратный спектр $F(S) = \{F(X_\alpha), F(P^\alpha_\beta) : A\}$ и отображение $\varprojlim F(P_\alpha)$ из пространства $F(\varprojlim S)$ в пространство $\varprojlim F(S)$, порождаемое отображениями

$$F(P^\alpha_\beta)\colon F(\varprojlim S) \to F(X_\alpha),$$

где P_α — сквозные проекции из $\varprojlim S$ в X_α, является гомеоморфизмом.

Определение 2.2. Говорят, что функтор F сохраняет вес, если $\omega F(X) = \omega X$ для любого бесконечного бикомпакта X.

Определение 2.3. Функтор F называется мономорфным, если для любого вложения i бикомпакта X в бикомпакт Y отображение $F(i)\colon F(X) \to F(Y)$ также является вложением.

Условие мономорфности функтора F позволяет считать $F(A)$ подпространством $F(X)$, если $A \subseteq X$. Отождествление $F(A)$ с подпространством $F(X)$ осуществляется вложением $F(i)$, где $i\colon A \to X$ — тождественное вложение. В дальнейшем будем рассматривать только мономорфные функторы.

Определение 2.4. Функтор F называется эпиморфным, если он сохраняет сюръективность отображений бикомпактов.

Определение 2.5. Говорят, что функтор F сохраняет пересечения, если для любого семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств произвольного бикомпакта имеем

$$\bigcap_\alpha F(X_\alpha) = F\Big(\bigcap_\alpha X_\alpha\Big).$$

Определение 2.6. Говорят, что функтор F сохраняет прообразы, если для любого непрерывного отображения f бикомпакта X в бикомпакт Y и для всякого замкнутого подмножества $B \subseteq Y$ имеем

$$F(f^{-1}B) = (F(f))^{-1}(F(B)).$$

Определение 2.7 (см. [5]). Ковариантный функтор $F\colon \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ называется нормальным, если он непрерывен, сохраняет вес, пересечения и прообразы, мономорфен и эпиморфен и переводит одноточечное пространство в одноточечное, а пустое — в пустое.

Однако, как показал М. М. Заричный (см. [3]), не все условия, составляющие определения нормального функтора, являются независимыми: можно отказаться от условий мономорфности и сохранения пересечений.

Теорема 2.8 (см. [3]). *Если функтор $F : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ непрерывен, эпиморфен, сохраняет вес, прообразы, точку и пустое множество, то он нормален.*

Определение 2.9 (см. [5]). Пусть X — некоторый бикомпакт, F — функтор и точка $x \in F(X)$. Степенью $\deg(x)$ точки x называется такое наименьшее натуральное число n, что $x \in F(f)\ (F(K))$ для некоторого отображения $f\colon K \to X$ n-точечного пространства K.

Степенью функтора F называется число (конечное или ∞)

$$\deg F := \sup\big\{\deg(x) : x \in F(X),\ X \text{ — компакт}\big\}.$$

Условия сохранения пересечений и прообразов обеспечивают связь функтора F с экспонентой exp. Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначается через $\exp X$. Семейство всех множеств вида

$$O(U_1, U_2, \dots, U_n) = \Big\{F : F \in \exp X,\ F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ F \cap U_i = \varnothing,\ i = 1, 2, \dots, n\Big\},$$

где $U_1, U_2, \dots, U_n$ — последовательность открытых подмножеств пространства X, порождает топологию Виеториса на множестве $\exp X$.

Определение 2.10 (см. [5]). Носителем точки $x \in F(X)$ называется замкнутое подмножество $\operatorname{supp}_{F(X)}(x) \subseteq X$, для которого соотношения $A \supseteq \operatorname{supp}_{F(X)}(x)$ и $x \in F(A)$ эквивалентны для любого замкнутого $A \subseteq X$.

Условие сохранения прообразов для сохраняющего пересечения функтора равносильно условию сохранения носителей при отображениях, т.е. условию, что при любом отображении f и любом x выполняется соотношение $f(\operatorname{supp}(x)) = \operatorname{supp} F(f)(x)$. Таким образом, для сохраняющего прообраза и пересечения функтора F носитель $\operatorname{supp}_F(x)$ осуществляет естественное преобразование этого функтора F в экспоненту exp, т.е. $\operatorname{supp}_{F(X)}(x)\colon F(X) \to \exp X$.

В случае произвольного нормального функтора F можно утверждать лишь, что отображение $\operatorname{supp}_{F(X)}(x)\colon F(X) \to \exp X$ полунепрерывно снизу (см. [5]), т.е. для любого открытого множества Y в X множество $\{x \in F(X) \mid \operatorname{supp}(x) \cap Y \neq \varnothing\}$ открыто в $F(X)$.

3. Функтор вероятностных мер P в категории Comp**-компактов и их непрерывных отображений в себя.** Напомним, что функтор P вероятностных мер является ковариантным функтором, действующим из категории бикомпактов и непрерывных отображений в себя, $P(X)$ — это выпуклое подпространство линейного пространства $M(X)$, сопряженного к пространству $C(X)$ непрерывных функций на X и взятого в слабой топологии, состоящее из всех неотрицательных функционалов μ (т.е. $\mu(\varphi) \geqslant 0$ для всякой неотрицательной функции $\varphi \in C(X)$) единичной нормы. Для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ отображение $P(f)\colon P(X) \to P(Y)$ определяется равенством

$$(P(f)(\mu))\varphi = \mu(\varphi \circ f).$$

Пространство $P(X)$ естественно вложено в $\mathbb{R}^{C(X)}$. Поэтому базу окрестностей меры $\mu \in P(X)$ образуют всевозможные множества вида

$$O(\mu, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \varepsilon) = \Big\{\mu' \in P(X) :\ \big|\mu(\varphi_i) - \mu'(\varphi_i)\big| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, k\Big\},$$

где $\varepsilon > 0$, а $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C(X)$ — произвольные функции.

Теорема 3.1 (см. [4]). *P — нормальный функтор.*

Нормальным подфунктором P_n функтора является функтор вероятностных мер, носители которых состоят не более чем из n точек (см. [4]). Точки пространства $P_n(X)$ — это линейные комбинации

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \delta_{x_i}, \quad k \leqslant n,$$

мер Дирака δ_x ($\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$) с неотрицательными коэффициентами, сумма которых равна 1. Их можно трактовать как наборы точек $x_1, \dots, x_k$, в которых помещены массы $m_1, m_2, \dots, m_k$. Базу окрестностей точки

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} m_i \delta_{x_i}$$

образуют множества вида

$$O(\mu, U_1, \dots, U_k, \varepsilon) = \Big\{\mu' \in P_n(X) : \mu' = \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i,$$

$$\operatorname{supp}\mu_i \subset U_i,\ \bigl|m_i - \|\mu_i\|\bigr| < \varepsilon\ (i=1,\dots,k),\ \operatorname{supp}\mu'_{k+1} \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i,\ \|\mu'_{k+1}\| < \frac{\varepsilon}{2}\Bigr\},$$

где

$$\mu'_i = \sum_{j=1}^{e_i} m^i_j \delta_{x^i_j}, \quad \|\mu'_i\| = \sum_{j=1}^{e_i} m^i_j$$

и U_i $(i=1,\dots,k)$ — окрестности точек x_i с попарно непересекающимся замыканиями.

Определим один интересный подфунктор P_f функтора P, обладающий следующим свойством: если носитель меры μ состоит из n точек $x_1, x_2, \dots, x_n$, то мера по крайней мере одной из этих точек не меньше $1 - 1/(n+1)$. Он впервые приведен в [2], и функтор интересен тем, что является функтором с конечными носителями, не имеющим конечной степени.

Для произвольного компакта X и любого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$P_{f,n}(x) = \bigl\{\mu \in P_f(X) : |\operatorname{supp}(\mu)| \leqslant n\bigr\}.$$

Очевидно, что $P_{f,n}$ является подфунктором функтора P_n для каждого $n \in \mathbb{N}$. Функтор P^C впервые определен В. В. Федорчуком в [4]. Для произвольного компакта X введем обозначение

$$P_\omega(X) := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(X) \subset P(X).$$

С другой стороны, из определения этих пространств для произвольного компакта X имеет место равенство

$$P_f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X).$$

Напомним, что топологическое пространство Y называется абсолютным (окрестностным) ретрактом в классе K (записывается $Y \in A(N)R(K)$), если $Y \in K$ и для всякого гомеоморфизма h, отображающего Y на замкнутое подмножество $h(Y)$ пространства X из класса K, множество $h(y)$ является ретрактом (окрестностным) пространства X.

Из результатов Келлера и Кэли (см. [2]) вытекает, что пространство $P(X)$ вероятностных мер на бесконечном компакте X гомеоморфно гильбертовому кирпичу Q', где

$$Q' = \prod_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{2^n}\right].$$

Q-Многообразием называют сепарабельное метрическое пространство, локально гомеоморфное гильбертовому кубу Q, где

$$Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1,1]_i.$$

Множество $W_i^{\pm} = \{(g_j) \in Q \mid g_i = \pm 1\}$ представляет собой i-ю грань гильбертова куба Q,

$$\operatorname{Bd} Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i^{\pm}$$

называется псевдогреницей куба Q, а $S = Q \setminus \operatorname{Bd} Q$ — псевдовнутренностью куба Q (см. [8]).

В теории бесконечномерных многообразий важную роль играют три объекта: гильбертов куб Q, сепарабельное гильбертово пространство ℓ_2 и Σ — линейная оболочка стандартного кирпича в гильбертовом пространстве ℓ_2. По теореме Андерсона—Кадеца ℓ_2 гомеоморфно S. Из результатов Бессаги и Пелчинского следует, что Σ гомеоморфно $\operatorname{rint} Q$ (см. [7]); здесь через $\operatorname{rint} Q$ обозначается множество $\{x = (x_n) \in Q : |x_n| < t < 1 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}$. Далее, $\operatorname{rint} Q \approx \operatorname{Bd} Q$ (см. [7]); значит, $\operatorname{Bd} Q \approx \Sigma$. Через ℓ_2^f обозначается линейное подпространство гильбертова пространства ℓ_2, состоящее из всех точек, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля.

Определение 3.2 (см. [6])**.** Замкнутое множество A пространства X называется Z-множеством в X, если тождественное отображение id_X пространства X может быть сколь угодно близко аппроксимировано отображениями $f\colon X \to X \setminus A$.

Счетное объединение Z-множеств в X называется σ-Z-множеством в X.

Следуя [8], будем называть σ-Z-множество B гильбертова куба Q граничным множеством в Q (обозначение $B(Q)$), если $Q \setminus B \approx \ell_2$. Более общим образом, граничным множеством в Q-многообразии называют σ-Z-множество, дополнение до которого является ℓ_2-многообразием.

Из приведенного выше следует, что псевдограница $\mathrm{Bd}\, Q$ гильбертова куба Q является граничным множеством для гильбертова куба Q.

4. Топологии на подпространстве пространства вероятностных мер. Пусть F — подфунктор функтора P, имеющий конечные носители. Тогда базу окрестностей меры

$$\mu_0 = m_1^0\delta(x_1) + \ldots + m_s^0\delta(x_s) \in \overline{f(X)}$$

образуют множества вида

$$O\langle\mu_0, U_1, \ldots, U_s, \varepsilon\rangle = \left\{\mu \in F(X) : \mu = \sum_{i=1}^{s+1}\mu_i\right\},$$

где $\mu_i \in M^+(X)$ — множество всех неотрицательных функционалов и $\|\mu_{i+1}\| < \varepsilon$, $\operatorname{supp}\mu_i \subset U_i$, $\bigl|\|\mu_i\| - m_i^0\bigr| < \varepsilon$ для $i = 1, \ldots, s$, где $U_1, \ldots, U_s$ — окрестности точек $x_1, x_2, \ldots, x_s$ с дизъюнктными замыканиями.

В самом деле, сначала покажем, что множество $O\langle\mu_0, U_1, \ldots, U_s, \varepsilon\rangle$ содержит окрестность меры μ_0 в слабой топологии. Для каждого $i = 1, \ldots, s$ возьмем функцию $\varphi_i\colon X \to I$, удовлетворяющую условиям

$$\varphi_i([U_i]) = 1, \quad \varphi_i\Bigl(\bigcup_{j\neq 1}[U_j]\Bigr) = 0.$$

Кроме того, возьмем функцию $\varphi_{s+1}\colon X \to I$ так, чтобы

$$\varphi_{s+1}(X \setminus U_1 \cup \ldots \cup U_s) = 1, \quad \varphi_{s+1}(\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}) = 0.$$

Теперь проверим включение

$$O(\mu_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s+1}, \varepsilon/2) \subset O\Bigl\langle\mu_0, U_1 \cup \ldots \cup U_s, \varepsilon\Bigr\rangle. \tag{1}$$

Меру $\mu \in O(\mu_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s+1}, \varepsilon/2)$ представим в виде $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_s + \mu_{s+1}$, где $\operatorname{supp}\mu_i \subset U_i$ для $i = 1, \ldots, s$ и $\operatorname{supp}\mu_{s+1} \subset X \setminus U_1 \cup \ldots \cup U_s$. Тогда $\mu_{s+1} \leqslant \mu$, откуда $\mu_{s+1}(\varphi_{s+1}) < \varepsilon/2$. В то же время по определению функции φ_{s+1} имеем

$$\mu_{s+1}(\varphi_{s+1}) = \mu_{s+1}(1_x) = \|\mu_{s+1}\|.$$

Итак, $\|\mu_{s+1}\| < \varepsilon/2 < \varepsilon$; для проверки (1) осталось показать, что $\bigl|\|\mu_i\| - m_i^0\bigr| < \varepsilon$. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2} &> \bigl|\mu_0(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)\bigr| \geqslant \bigl|\mu_0(\varphi_i)\bigr| - \bigl|\mu(\varphi_i)\bigr| = \\ &= m_i^0 - \Bigl|b\bigl(\mu_1 + \ldots + \mu_s + \mu_{s+1}\bigr)(\varphi_i)\Bigr| = (\text{по определению функции } \varphi_i) \\ &= m_i^0 - (\mu_i + \mu_{s+1})(\varphi_i) = m_i^0 - \mu_i(\varphi_i) - \mu_{s+1}(\varphi_i) = m_i^0 - \|\mu_i\| - \mu_{s+1}(\varphi_i).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$m_i^0 - \|\mu_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + \mu_{s+1}(\varphi_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \mu_{s+1}(1_x) = \frac{\varepsilon}{2} + \|\mu_{s+1}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\frac{\varepsilon}{2} > \mu_i(\varphi_i) + \mu_{s+1}(\varphi_i) - m_i^0 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Неравенство $\bigl|\|\mu_i\| - m_i^0\bigr| < \varepsilon$, а вместе с ним и включение (1) доказаны. Теперь покажем, что во всякой базисной окрестности $O(\mu_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \varepsilon)$ содержится окрестность вида $O\langle\mu_0, U_1, \ldots, U_s, \delta\rangle$.

Для этого достаточно рассмотреть окрестность вида $O(\mu_0,\varphi,\varepsilon)$, поскольку семейство окрестностей меры μ_0 вида $O\langle\mu_0,U_1,\dots,U_s,\delta\rangle$ направлено вниз по включению (пересечение конечного числа окрестностей такого вида содержит окрестность такого вида). Это вытекает из справедливости включения

$$O\Big\langle\mu_0,\ U_1^1\cap U_1^2,\ \dots,\ U_s^1\cap U_s^2,\ \frac{1}{2}\min\{\delta_1,\delta_2\}\Big\rangle\subset \\ \subset O\Big\langle U_0,\ U_1^1,\ \dots,\ U_s^1,\ \delta_1\Big\rangle\cap O\Big\langle\mu_0,\ U_1^2,\ \dots,\ U_s^2,\ \delta\Big\rangle, \quad (2)$$

основная часть проверки которого состоит в следующем:

$$\mu(U_i^j)=\mu(U_i^1\cap U_i^2)+\mu(U_i^j\setminus U_i^1\cap U_i^2)\leqslant\mu(U_i^1\cap U_i^2)+\mu\bigg(X\setminus\bigcup_{e=1}^{s}(U_e^1\cap U_e^2)\bigg)< \\ <\mu(U_i^1\cap U_i^2)+\frac{1}{2}\min\{\delta_1,\delta_2\}\leqslant\mu(U_i^1\cap U_i^2)+\frac{1}{2}\delta_j.$$

Поэтому для меры μ, принадлежащей левой части доказанного включения (2), имеем

$$\mu_0(U_i^j)-\mu(U_i^j)\leqslant\mu_0(U_i^j)-\mu(U_i^1\cap U_i^2)=m_i^0-\mu(U_i^1\cap U_i^2)\leqslant\frac{1}{2}\min\{\delta_1,\delta_2\}<\delta_j,$$

а с другой стороны,

$$\mu(U_i^j)-\mu_0(U_i^j)<\mu(U_i^j\cap U_i^j)+\frac{1}{2}\delta_j-m_i^0<\frac{1}{2}\min\{\delta_1,\delta_2\}+\frac{1}{2}\delta_j\leqslant\delta_j.$$

Осталось в окрестности $O(\mu_0,\varphi,\varepsilon)$ найти окрестность вида $O\langle\mu_0,U_1,\dots,U_s,\delta\rangle$. Поскольку $O(\mu_0,\alpha\varphi,\alpha\varepsilon)=O(\mu_0,\varphi,\varepsilon)$ для $\alpha>0$, можно считать, что $\|\varphi\|\leqslant 1$. Кроме того, можно считать, что $\varphi\geqslant 0$. Для $\delta>0$ возьмем непересекающиеся окрестности U_i точек x_i так, чтобы колебания функции φ на U_i было меньше δ. Тогда

$$|\mu_0(\varphi)-\mu(\varphi)|\leqslant\bigg|m_1^0\varphi(x_1)-\int\limits_{u_1}\varphi d\mu\bigg|+\ldots+\bigg|m_s^0\varphi(x_s)-\int\limits_{u_s}\varphi d\mu\bigg|+\bigg|\int\limits_{X\setminus U_1\cup\ldots\cup U_s}\varphi d\mu\bigg|.$$

Далее,

$$\bigg|m_i^0\varphi(x_i)-\int\limits_{u_i}\varphi d\mu\bigg|=\bigg|m_i^0\varphi(x_s)-\int\limits_{u_i}\varphi(x_i)d\mu+\int\limits_{u_i}\varphi(x_i)d\mu-\int\limits_{u_i}\varphi d\mu\bigg|\leqslant \\ \leqslant\bigg|m_i^0\varphi(x_i)-\int\limits_{u_i}\varphi(x_i)d\mu\bigg|+\bigg|\int\limits_{u_i}[\varphi(x_i)-\varphi]d\mu\bigg|\leqslant \\ \leqslant\varphi(x_i)\cdot\big|m_i^0-\|\mu_i\|\big|+\bigg|\int\limits_{u_i}[\varphi(x_i)-\varphi]d\mu\bigg|\leqslant\varphi(x_i)\delta+\delta\|\mu_i\|\leqslant 2\cdot\delta.$$

Поэтому для $\delta<\varepsilon/(2s+1)$ выполняется включение

$$O\langle\mu_0,U_1,\dots,U_s,\delta\rangle\subset O(\mu_0,\varphi,\varepsilon).$$

5. Топологические, геометрические и гомотопические свойства расположенности пространства вероятностных мер, определенных в бесконечном компакте. Напомним некоторые понятия из теории шейпов, которые нам нужны в дальнейшем. Пусть A и B — компакты, лежащие в гильбертовом кубе Q. Шейповым отображением компакта A в компакт B называется такая последовательность отображений $f_n\colon Q\to Q$, что для любой окрестности V компакта B найдутся такие окрестность U компакта A и натуральное N_0, что $f_n(U)\subset V$ и $f_n|_U\simeq f_{n+1}|_U(n\circ V)$ при $n\in\mathbb{N}_0$ (т.е. отображения $f_n|_U$ и $f_{n+1}|_U$ гомотопны как отображения в пространство V). Это шейповое отображение обозначим через $f=\{f_n,A,B\}\colon A\to B$. Два шейповых отображения $f = \{f_n, A, B\}$ и $g = \{g_n A, B\}$ компакта A в компакт B называются гомотопными ($f \simeq g$), если для любой окрестности V компакта B найдутся такие окрестность U компакта A и натуральное число N_0, что при $n \geqslant N_0$, $f_n|_U \simeq g_n|_u$ (по V). Шейповое отображение $\mathrm{id}_A = \{\mathrm{id}_A, A, A\}\colon A \to A$ называется тождественным. Если f и g — два шейповых отображения, лежащих в гильбертовом кубе Q компактов, то их композицией называется отображение $gf = \{g_n, f_n, A, C\}\colon A \to C$, где $f = \{f_n, A, B\}$, $g = \{g_n, B, C\}\colon B \to C$.

Шейповое отображение $f\colon A \to B$ называется шейповой эквивалентностью, если существует такое отображение $g\colon B \to A$, что $fg \simeq \mathrm{id}_B$ и $gf \simeq \mathrm{id}_A$. Если существует удовлетворяющее этому условию отображение компакта A на компакт B, то говорим, что компакты A и B имеют одинаковые шейпы, и пишем $\mathrm{Sh}(A) = \mathrm{Sh}(B)$.

Пусть X — произвольный компакт и $Y \subset X$, $Y \neq X$. Для любого функтора $F\colon \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ положим $S_F = \{x \in F(X) \mid \mathrm{supp}_F(x) \cap Y \neq \varnothing\}$. Для вполне регулярных пространств Z полагаем: $F(Z) = \{Z \in F(\beta Z) \mid \mathrm{supp}_F(Z) \subset Z$, где βZ — расширение Стоуна—Чеха пространства Z (см. [4]). Очевидно, что всегда $S_F(Y) \subset F(X)$, причем

$$S_F(Y) = \{a \in F(X) : \mathrm{supp}_F(a) \cap Y \neq \varnothing\}.$$

В силу полунепрерывности снизу отображения $\mathrm{supp}_F(a)\colon F(X) \to \exp X$ множество $S_F(Y) \subset F(X)$ всюду плотно в $F(X)$. Подпространство $S_F(Y)$ открыто, если Y открыто в X.

Лемма 5.1. *Для любого нормального функтора* $F\colon \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ *и любого* $Y \subset X$, $Y \neq X$, *имеет место равенство*

$$F(X \setminus Y) = F(X) \setminus S_F(Y).$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathrm{Comp}$, $Y \subset X$ и $Y \neq X$. Носитель $\mathrm{supp}(\mu)$ меры $\mu \in P(X)$ в пространстве X можно определить следующем образом: $x \notin \mathrm{supp}(\mu)$, если существует такая окрестность U точки x, что $\mu(f) = 0$, где $f \in C(X)$ и $f|_{X \setminus U} = 0$.

Возьмем точку $a \in F(X \setminus Y)$; тогда

$$\mathrm{supp}_F(a) \subset X \setminus Y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{supp}_F(a) \cap Y = \varnothing \quad \Rightarrow \quad a \notin S_P(Y) \quad \Rightarrow \quad a \in F(X) \setminus S_F(Y).$$

Возьмем точку $a \in F(X) \setminus S_F(Y)$; тогда

$$a \notin S_F(Y) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{supp}_F(a) \cap Y = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \mathrm{supp}(a) \subset X \setminus Y \quad \Rightarrow \quad a \in F(X \setminus Y).$$

Лемма 5.1 доказана. □

Необходимо отметить, что если Y открыто в X и $Y \neq X$, то множество $S_F(Y)$ открыто в $F(X)$. Это следует из полунепрерывности снизу отображения $\mathrm{supp}_F(x)\colon F(X) \to \exp X$.

Лемма 5.2. *Пусть* X *— произвольный компакт и* $Y \subset X$, $Y \neq X$. *Тогда* $S_p(Y) \in AR$ *и* $P(Y) \in AR(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Пусть $Y \subset X$, $Y \neq X$. Тогда множество $S_P(Y)$ выпукло, так как для разных $\mu_1 \in S_P(Y)$ и $\mu_2 \in S_P(Y)$ отрезок $[\mu_1, \mu_2]$ целиком лежит в $S_P(Y)$. Пусть $\mathrm{supp}\,\mu_i = K_i$ — компакт и $\mathrm{supp}\,\mu_1 \cup \mathrm{supp}\,\mu_2 = K_1 \cup K_2 = K$, $K \cap Y = \varnothing$. Отрезок из точек вида $\mu_t = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$, где $t \in [0,1]$. Очевидно, что для любого $t \in [0,1]$ μ_t есть вероятностная мера и множество $\mathrm{supp}\,\mu_t$ с множеством K пересекается, т.е. $\mathrm{supp}\,\mu_t \cap Y = \varnothing$; отсюда получим, что отрезок $[\mu_1, \mu_2]$ целиком лежит в $S_P(Y)$, т.е. множество $S_P(Y)$ выпукло. Далее, для любой меры μ_0 существует окрестность $O(\mu_0)$, которая является выпуклым множеством. Таким образом, выпуклое и локально выпуклое множество является $AR(\mathfrak{M})$-пространством.

Таким же образом можно показать, что подпространство $P(Y)$ выпукло и локально выпукло. Поэтому $P(Y)$ — $AR(\mathfrak{M})$-пространство.

С другой стороны, если Y — открытое, всюду плотное множество в X, отличное от X, то подпространство $P(Y)$ и $S_P(Y)$ тоже открыто и всюду плотно в $P(X)$. В самом деле, пусть Y открыто в X и $Y \neq X$. Тогда $X \setminus Y = A$ замкнуто в X. В силу леммы 5.1 имеем равенство $P(X \setminus Y) = P(X) \setminus S_P(Y)$. Отсюда следует, что $P(X \setminus Y)$ и $P(X) \setminus S_P(Y)$ компактны. Подпространство $S_P(Y)$ всюду плотно в $P(X)$. Лемма 5.2 доказана. □

В частном случае имеем $P(\mathrm{Bd}\,Q)$, $S_P(\mathrm{Bd}\,Q)$, $P(S)$, $S_P(S) \in AR(\mathfrak{M})$.

Лемма 5.3. *Пусть X — произвольный бесконечный компакт, а $A_i \subseteq A_{i+1}$ — последовательность замкнутых подмножеств компакта X. Тогда*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i) \in AR.$$

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ — последовательность его замкнутых подмножеств. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ имеем $P(A_i) \subseteq P(A_{i+1})$, т.е.

$$P(A_1) \subseteq P(A_2) \subseteq \ldots \subseteq P(A_n) \subseteq \ldots$$

— последовательность выпуклых компактных подмножеств пространства $P(X)$. В этом случае подпространство $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ пространства $P(X)$ выпукло и локально выпукло в $P(X)$. Но такие пространства являются $AR(\mathfrak{M})$-пространствами, т.е.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i) \in AR(\mathfrak{M}).$$

Лемма 5.3 доказана. □

Лемма 5.4. *Для произвольного непустого замкнутого подмножества A любого компакта X, где $A \neq X$, подпространство $P(A)$ есть Z-множество в $P(X)$.*

Доказательство. Пусть $A \subset X$ замкнуто в X и $A \neq X$; тогда существует точка $x_0 \in X \setminus A$. В этом случае для произвольного $\varepsilon > 0$ определим непрерывное отображение

$$f_\varepsilon(\mu)\colon P(X) \to P(X), \quad f_\varepsilon(\mu) = (1-\varepsilon)\mu + \varepsilon \cdot \delta_{x_0},$$

где $\mu \in P(X)$, δ_{x_0} — мера Дирака в точке x_0. В силу выпуклости компакта $P(X)$, если $\mu \in P(A)$, то $f_\varepsilon(\mu) \notin P(A)$ и $f_\varepsilon(\mu) \in P(X) \setminus P(A)$, поскольку $x_0 \in \operatorname{supp} f_\varepsilon(\mu)$. Более того,

$$\|f_\varepsilon(\mu) - \mu\| = \|(1-\varepsilon)\mu + \varepsilon\delta_{x_0} - \mu\| = \|\mu - \varepsilon\mu + \varepsilon\delta_{x_0} - \mu\| = \|\varepsilon(\delta_{x_0} - \mu)\| = \varepsilon \cdot \|\delta_{x_0} - \mu\| \leqslant 2\varepsilon.$$

Предложение 5.5 (см. [4]). *Пусть M — такое множество непрерывных отображений бикомпакта $P(X)$ в себя, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется отображение $f \in M$, являющееся ε-сдвигом относительно метрики d. Тогда тождественное отображение $\mathrm{id}_{P(X)}$ может быть аппроксимировано в компактно-открытой топологии отображениями из M.*

Согласно предложению 5.5 (см. [4]) отображение $\mathrm{id}_{P(X)}$ аппроксимируется отображениями

$$f_\varepsilon(\mu)\colon P(X) \to P(X),$$

т.е. $P(A)$ является Z-множеством в $P(X)$. Лемма 5.4 доказана. □

Лемма 5.6. *Для произвольного непустого подмножества A пространства X подпространство $S_P(A)$ всюду плотно в $P(X)$.*

Доказательство. Пусть X — компактное пространство и $A \subset X$. Возможны следующие случаи:

(a) $A = X$;
(b) $A \neq X$;
(c) X конечен;
(d) X бесконечен;

Случай (a): $S_P(A) = P(X)$ т.е. $S_P(A)$ всюду плотно в $P(X)$.

Случай (b). Имеем $P(A) \subset S_P(A)$. Возьмем произвольную точку $\mu_0 \in S_P(A) \setminus P(A)$. В этом случае точки вида $x(t) = t\mu_0 + (1-t)\mu_1$ принадлежат пространству $S_P(A)$ для любого $t < 1$ и для любого $\mu_1 \in P(A)$, т.е. $x([0,1)) \in S_P(A)$. Очевидно, что $\overline{x([0,1))}$ содержит точку μ_1. Это означает, что $S_P(A)$ всюду плотно в $P(X)$.

Случай (c). Если X — конечное множество, то $P(X)$ гомеоморфно симплексу $\delta^{|x|-1}$. Очевидно, что $P(A) \subset S_P(A)$ и $\overline{S_P(X)} = P(X)$.

Случай (d). Если X — бесконечный компакт, то $P(X)$ гомеоморфно Q. Остальное вытекает из случая b. Лемма 5.6 доказана. □

Лемма 5.7. *Если A замкнуто в X и $A \neq X$, то $S_P(A)$ является G_δ-множеством в $P(X)$.*

Доказательство. Пусть множество A замкнуто в компакте X и $A \neq X$; тогда

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} [U_n], \tag{3}$$

где U_n — открытое множество в X. Очевидно

$$S_p(A) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} S_p(U_n).$$

С другой стороны, в силу (3), для любой меры

$$\mu \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_p(U_n)$$

имеем $\mu \in S_p(A)$, так как в противном случае носитель этой меры $\operatorname{supp}_p \mu \subset X \setminus A$ и, следовательно, $\operatorname{supp}_p \mu \subset X \setminus [U_n]$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$, откуда $\mu \in S_P(U_n)$. Итак, выполнено равенство

$$S_p(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_p(U_n).$$

В силу полунепрерывности снизу многозначного отображения $\operatorname{supp}_p(\mu)\colon P(X) \to \exp X$ каждое множество $S_P(U_n)$, как уже говорилось, всегда открыто в $P(X)$. Значит, всюду плотное выпуклое множество $S_P(A)$ есть G_δ-множество в $P(X)$. Лемма 5.7 доказана. □

Замечание 5.8. Если A — незамкнутое G_δ-множество в компакте X, то множество $S_P(A)$ не всегда будет G_δ-множеством в $P(X)$. Например, псевдовнутренность S гильбертова куба Q есть G_δ-множество в $P(Q)$, а $S_p(S)$ не будет G_δ-множеством в $P(Q)$.

Лемма 5.9. *Пусть X — бесконечный компакт и $Y \subset X$, $Y \neq X$. Тогда $P(Y)$ является σ-Z-множеством в $P(X)$, если множество Y открыто в X.*

Доказательство. Пусть X — бесконечный компакт, множество Y открыто в X и $Y \neq X$. Тогда

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

где каждое F_n замкнуто и $F_n \subset \operatorname{Int} F_{n+1}$. В этом случае

$$P(Y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P(F_n)$$

и применение леммы 5.4 завершает доказательство. □

Напомним определения следующих двух понятий.

Пусть $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ — компактные подмножества пространства X. Следуя [4], будем называть множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ скелетоидом для произвольных компактов (соответственно для конечномерных компактов), если для любого компакта A (соответственно конечномерного компакта A) и любого отображения $f\colon A \to X$, для которого $f|_B\colon B \to X_m$ — вложение (здесь B замкнуто в A) и любого $\varepsilon > 0$ существует такое вложение $h\colon A \to X_n$ при некотором $h \geqslant m$, что $h|_B = f|_B$ и $d(f(a), h(a)) < \varepsilon$. Система множеств $\{X_i\}$ называется сильно универсальной для произвольных компактов (соответственно, для конечномерных компактов). Если в этом определении X_i является Z-множеством в X для каждого $i \in \mathbb{N}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ называется Z-скелетоидом для произвольных компактов (соответственно, для конечномерных компактов; см. [7]). Далее, если в этом определении $X - ANR(\mathfrak{M})$-пространство, то само пространство X называется сильно универсальным для произвольных компактов (соответственно для конечномерных компактов; см. [11]).

Следующее утверждение является общеизвестным фактом теории множеств.

Лемма 5.10. *Пусть X — множество и $U = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — его точечно-конечное покрытие. Тогда существует такое подпокрытие $U_0 = \{U_\beta : \beta \in B\}$ покрытия U (где $B \subset A$), что $U_\beta \setminus \cup\{U_{\beta'} : \beta' \in B \setminus \{\beta\} = \varnothing\}$ для любого $\beta \in B$.*

Доказательство. Доказать лемму 5.10 можно в два этапа. После первого этапа из покрытия U удаляются все элементы, не являющиеся максимальными, т.е. содержащимися в других элементах. Точечная конечность покрытия U гарантирует, что остаток также будет покрытием. Поэтому с самого начала можно считать покрытие U состоящим только из максимальных элементов. После этого, перенумеровав элементы покрытия порядковыми числами, мы последовательно выкидываем элементы, содержащиеся в сумме элементов с меньшими номерами, что и дает нам искомое покрытие U_0. □

Подмножество Y метрического пространства X назовем ε-плотным в X (или ε-сетью), если для любой точки X найдется такая точка $y \in Y$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Лемма 5.11. *Пусть X — выпуклый компакт, лежащий в локально выпуклом нормированном пространстве. Тогда для всякого выпуклого компакта $Y \subset X$, ε-плотного в X, существует ретракция $r \colon X \to Y$, 2ε-близкая к id_X.*

Доказательство. Используя локальную выпуклость и локальную компактность множества $X \setminus Y$ с применением леммы 5.10 строим открытое покрытие ω множества $X \setminus Y$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) покрытие ω локально конечно в $X \setminus Y$;
(ii) его элементы выпуклые;
(iii) если $x \in U \in \omega$, то $\operatorname{diam} U < \rho(x, Y)$;
(iv) покрытие ω неприводимо, т.е. $U \setminus \{U' : U' \in \omega, U' \neq U\} \neq \varnothing$ для всякого $U \in \omega$.

Для каждого $U \in \omega$ возьмем точку $x_u \in U \setminus \cup\{U' : U' \neq U\}$, которая существует согласно условию (iv). После этого построим геометрическую реализацию нерва $N(\omega)$ покрытия ω в пространстве X, считая вершинами этого нерва точки x_u. В качестве симплексов нерва $N(\omega)$ берем обычные аффинные симплексы в выпуклом компакте X. Тело нерва $N(\omega)$ обозначим через Z. Через f обозначим барицентрическое отображение пространства $X \setminus Y$ в политоп Z. Для произвольной точки $x \in X \setminus Y$, если $U_1, \ldots, U_k$ — это все элементы покрытия ω, содержащие точку x, то $f(x)$ лежит в симплексе $T(x_{u_1}, \ldots, x_{u_k}) \subset \operatorname{conv}(\mathrm{St}_\omega x)$. Поэтому согласно условию (iii) имеем $f(x) \in O_{b(x)}(x)$, где $b(x) = \rho(x, Y)$. Следовательно, $\rho(x, f(x)) < \rho(x, Y)$; поэтому отображение $f \colon X \setminus Y \to Z$ тождественное отображение компакта Y дополняется до непрерывного отображения $g \colon X \to Y \cup Z$.

Теперь для каждой вершины x и нерва $N(\omega)$ ближайшую к ней точку y_u компакта Y. Тем самым мы определим отображение нульмерного остова z_0 политопа Z в Y. Пользуясь выпуклостью компакта Y отображение h_0 аффинно продолжается до отображения $h \colon Z \to Y$, из аффинности отображения h вытекает, что для всякой точки $x \in Z$ имеем

$$\rho(x, h(x)) < \rho(x_u, y_u) = \rho(x_u, Y), \tag{4}$$

где x_u — одна из вершин остова z_0, для которых $x \in U$. Условие (4) наряду с условием (iii) гарантирует нам, что

$$\lim_{x \to y} \rho(x, h(x)) = 0.$$

Поэтому отображение h тождественным отображением id_Y дополняется до непрерывного отображения $\overline{h} \colon Y \cup Z \to Y$. То же условие (4) гарантирует нам, что

$$\rho(x, \bar{h}(x)) < \varepsilon \tag{5}$$

для всех $x \in Y \cup Z$. Остается положить $r = \bar{h} \circ g$. Тогда ε-плотность множества Y в X, условие (iii) и (5) гарантируют нам 2ε-близость ретракции r к тождественному отображению. Лемма 5.11 доказана. □

Лемма 5.12. *Пусть X — выпуклый бесконечномерный компакт, а Y_i — такая растущая последовательность его выпуклых бесконечномерных подкомпактов, что*

(i) *Y_i является Z-множество в Y_{i+e};*

(ii) *множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$ всюду плотно в X.*

Тогда пара $\Big(X, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Y_i\Big)$ гомеоморфна паре $(Q, \operatorname{rint} Q)$.

Доказательство. Надо показать, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$ есть Z-скелетоид в X. Отметим сначала, что из (i) вытекает, что Y_i является ε_i-плотным в X, где $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$. Поэтому из леммы 5.11 вытекает наличие ретракций $r_i\colon X \to X_i$, стремящихся к id_X при $i \to \infty$. Значит, из условия (i) получаем, что Y_i есть Z-множество в X. Остается проверить, что $[Y_i]$ — скелетоид. Пусть компакт $A \subset X$, $\varepsilon > 0$, отображение f и целое число $m > 0$ фиксированы и пусть $f|_{A \cap Y_m} = \mathrm{id}$. По свойству ретракций r_i существует такое $n \geqslant m + 1$, что r_n является $\varepsilon/2$-близким к тождественному. Отображение $r_n \circ f\colon A \to Y_n$ является тождественным Z-вложением на $A \cap Y_m$, а Y_n гомеоморфно Q по теореме Келлера—Кэли. Следовательно, согласно теореме Чепмэна (см. [1, теорема 11.2]) существует $\varepsilon/2$-близкое к $r_n \circ f$ отображение $g\colon A \to Y_n$, являющееся Z-вложением и совпадающее с тождественным на $A \cap Y_m$. В этом случае пара $\Big(X, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Y_i\Big)$ гомеоморфна паре $(Q, \operatorname{rint} Q)$, поскольку $\operatorname{rint} Q$ является Z-скелетоидом и все Z-скелетоиды эквивалентны (см. [7]). Лемма 5.12 доказана. □

Определение 5.13. Топологические пространство X называется многообразием, моделированным на пространстве Y, или Y-многообразием, если всякая точка пространства X имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y.

Теорема 5.14 (см. [1]). *Если компакты X и Y являются Z-множествами гильбертова куба Q, то их шейпы совпадают* ($\operatorname{Sh} X = \operatorname{Sh} Y$) *тогда и только тогда, когда гомеоморфны их дополнения* ($Q \setminus X \simeq Q \setminus Y$).

Из этого определения и из определения пространства $P(X)$ вытекает, что для любого бесконечного компакта X пространство $P(X)$ является Q-многообразием.

Теорема 5.15. *Пусть X и Y — произвольные бесконечные компакты, X_0 и Y_0 — их произвольные замкнутые подмножества, отличные соответственно от X и Y. Тогда*

$$P(X) \setminus P(X_0) \simeq P(Y) \setminus P(Y_0).$$

Доказательство. В силу бесконечности компактов X и Y по теореме Келлера—Кэли заключаем, что $P(X) \simeq Q$ и $P(Y) \simeq Q$. В силу леммы 5.4 подпространство $P(X_0)$ есть Z-множество в $P(Y)$.

Подмножества $P(X_0)$ и $P(Y_0)$ являются выпуклыми $AR(\mathfrak{M})$-компактами. Следовательно, согласно результатам [1] имеет место равенство $\operatorname{Sh} P(X_0) = \operatorname{Sh} P(Y_0)$. В данном случае из теоремы 5.14 получаем, что $P(X) \setminus P(X_0) \simeq P(Y) \setminus P(Y_0)$ (см. [1]). Обратная часть этого гомеоморфизма очевидна. Теорема 5.15 доказана. □

Следствие 5.16. *Пусть X и Y — бесконечные компакты, X_0 и Y_0 — такие их замкнутые подмножества, отличные соответственно от X и Y, что $P(X_0)$ гомеоморфно $P(Y_0)$. Тогда пространство $P(X) \setminus P(X_0)$ гомеоморфно пространству $P(Y) \setminus P(Y_0)$.*

Следствие 5.17. *Для любых конечных подмножеств X_0 и Y_0 соответственно пространства $P(X) \setminus P(X_0)$ и $P(Y) \setminus P(Y_0)$ гомеоморфны.*

Пусть X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ называется гомотопически плотным, если существует такая гомотопия $h(x,t)\colon X\times[0,1] \to X$, что $h(x,0) = \mathrm{id}_X$ и $h(X\times(0,1]) \subset A$. Множество $A \subset X$ называется гомотопически пренебрежимо, если $X \setminus A$ гомотопически плотно в X.

Вложение $e\colon Y \to X$ гомотопически плотно (соответственно, гомотопически пренебрежимо), если $e(Y)$ — гомотопически плотное множество (соответственно, гомотопически пренебрежимо) в X.

Предложение 5.18 (см. [6]). *Допустим, что X является ANR-пространством и $Y \subset X$ гомотопически плотно в X. Тогда Y является ANR-пространством.*

Теорема 5.19 (см. [6]). *Пусть K — локально компактное AR-пространство, а $K_1 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$ — такая растущая последовательность компактных подмножеств K, что $K = \bigcup K_n$, $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что подмножество $K \setminus K_n$ стягиваемо для любого $n \in \mathbb{N}$ и K_∞ — одноточечная компактификация множества K. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *K гомотопически плотно в K_∞;*
(ii) *K_∞ является AR-пространством;*
(iii) *$K_\infty \simeq Q$, если K является Q-многообразием.*

Определение 5.20. Множество $A \subset X$ называется стягиваемым в пространстве X по множеству $B \subset X$, если вложение $i\colon A \to X$ гомотопно некоторому отображению $f\colon A \to X$, для которого $f(A) \subset B$. Если B состоит из одной точки, то говорят, что A стягиваемо по X. Другими словами, стягиваемое пространство — это пространство, гомотопически эквивалентное точке.

Определение 5.21. Подмножество $A \subset X$ топологического пространства X называется его сильным деформационным ретрактом, если существует такая ретракция $r\colon X \to A$, что $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X\colon X \to X$. Другими словами, A — сильный деформационный ретракт пространства X, если существует такая гомотопия $h(x,t)\colon X \times I \to X$, что $F(x,0) = x$ для всех $x \in X$, $F(a,t) = a$ для всех $a \in A$, $t \in I$, и $F(x,1) \in A$ для всех $x \in X$.

Теорема 5.22. *Для любого компакта X и любого его подмножества A, отличного от X, подпространство $S_P(A)$ гомотопически плотно в $P(X)$.*

Доказательство. Пусть X — компакт, $A \subset X$ и $A \neq X$. Возьмем меру $\mu_0 \in P(A)$, т.е. $\operatorname{supp}\mu_0 \subseteq A$. Искомую непрерывную гомотопию $h(\mu,t)\colon P(X) \times [0,1] \to P(X)$ построим, полагая $h(\mu,t) = t\mu_0 + (1-t)\mu$:

(i) если $t = 0$, то $h(\mu,0) = 0\cdot\mu_0 + (1-0)\mu = \mu$. Это означает, что $h(\mu,0) = \mathrm{id}_{P(X)}$;
(ii) если $t > 0$, то $h(\mu,t) = t\cdot\mu_0 + (1-t)\mu = t\mu_0 + \mu - t\mu = \mu + t(\mu_0 - \mu)$.

Заметим, что $\operatorname{supp} h(\mu,t) \cap A \neq \varnothing$, откуда $h(\mu,t) \in S_P(A)$, т.е. $h(\mu,(0,1]) \subset S_p(A)$. Теорема доказана. □

Следствие 5.23. *Для любого компакта X и любого его подмножества A, отличного от X, подпространство $P(X) \setminus S_P(A) = P(X \setminus A)$ гомотопически пренебрежимо в $P(X)$.*

Теорема 5.24. *Для любого бесконечного компакта X и любого его непустого подмножества $A \neq X$, для которого $X \setminus A$ всюду плотно в X, множество $P(X \setminus A)$ гомотопически пренебрежимо в $P(X)$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in A$. Искомую непрерывную гомотопию $h(\mu,t)\colon P(X) \times [0,1] \to P(X)$ построим, полагая

$$h(\mu,t) = t\cdot\delta_{x_0} + (1-t)\mu = t(\delta_{x_0} - \mu) + \mu, \quad \operatorname{supp} h(\mu,t) \supset X \setminus A.$$

Отсюда $(\mu,t) \in S_P(A)$. Это означает, что подпространство $S_P(A)$ гомотопически плотно в $P(X)$. Тогда его дополнение $P(X) \setminus S_P(A) = P(X \setminus A)$ по определению гомотопически пренебрежимо в $P(X)$. Теорема 5.24 доказана. □

Следствие 5.25. *Для любого бесконечного компакта X и любой точки $x_0 \in X$ подпространство $P(X \setminus x_0)$ гомотопически пренебрежимо в $P(X)$.*

Теорема 5.26. *Пусть $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ — такая последовательность замкнутых бесконечных подмножеств бесконечного компакта X, что*

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq X, \quad \operatorname{Int} A_i \subset A_{i+1}.$$

Тогда одноточечное расширение $P_\infty(A)$ подпространства

$$P(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

в компакте гомеоморфно гильбертовому кубу Q.

Доказательство. Имеем

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Из $A \neq X$ вытекает, что $P(A) \neq X$ и $P(A) \subset X$. В силу бесконечности множества A_i для каждого $i \in \mathbb{N}$ подпространство $P(A_i)$ гомеоморфно гильбертовому кубу Q.

С другой стороны, заметим, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i) \setminus P(A_i)$ — выпуклое множество для любого $n \in \mathbb{N}$. В этом случае (см. [6]) одноточечная компактификация $P_\infty(A)$ пространства $P(A)$ является AR-пространством, $P(A)$ гомотопически плотно в $P_\infty(A)$ и $P_\infty(A) \simeq Q$. Теорема доказана. □

Пусть X — бесконечный компакт и A — такое его замкнутое подмножество, что $A \neq X$. Тогда A есть множество типа G_δ, т.е.

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_n,$$

где G_n — открытое множество в X. В этом случае

$$X \setminus A = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus G_n).$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через K_n множество $X \setminus G_n$. Можно предположить, что

(i) $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$ и $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset K_{n+1} \subset \ldots$,

(ii) K_n замкнуто и бесконечно.

Из теоремы 5.26 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.27. *Для любого бесконечного компакта X и любого его открытого бесконечного подмножества U, отличного от X, одноточечная компактификация $P_\infty(U)$ гомеоморфна Q.*

Было отмечено, что подпространства $P(\operatorname{Bd} Q)$, $S_P(\operatorname{Bd} Q)$, $P(S)$ и $S_P(S)$ гильбертова куба $P(Q) = Q$, выпуклы и локально выпуклы. Поэтому эти подпространства являются AR-пространствами.

С другой стороны, согласно лемме 5.1 имеем следующие равенства:

$$P(\operatorname{Bd} Q) = P(Q \setminus S) = P(Q) \setminus S_p(S), \tag{6}$$

$$S_P(\operatorname{Bd} Q) = S_P(Q \setminus S), \tag{7}$$

$$P(S) = P(Q \setminus \operatorname{Bd} Q) = P(Q) \setminus S_P(\operatorname{Bd} Q), \tag{8}$$

$$S_P(S) = S_P(Q \setminus \operatorname{Bd} Q). \tag{9}$$

Рассмотрим (a). Для числа $k \in \mathbb{N}$ положим

$$W_k = \bigcup_{i=1}^{k} W_i^{\pm} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Bd} Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k,$$

W_k — компактно для любого $k \in \mathbb{N}$ и $W_k \subset W_{k+1}$. В этом случае

$$P(\operatorname{Bd} Q) = P\biggl(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k\biggr) = \bigcup_{k=1}^{\infty} P(W_k).$$

Очевидно, что $P(W_k) \simeq Q$ для любого $k \in \mathbb{N}$. В этом случае согласно [9, предложение 3.4] пространство $P(\operatorname{Bd} Q)$ содержит скелетоид для произвольных компактов. В силу [2, лемма 5.4] для любого $k \in \mathbb{N}$ подпространство $P(W_k)$ есть Z-множество в $P(\operatorname{Bd} Q)$. Согласно теореме Кертиса—Добровольского—Могильского (см. [9, лемма 5.4]) каждое компактное подмножество A пространства $P(\operatorname{Bd} Q)$. В этом случае пространство $P(\operatorname{Bd} Q)$ сильно универсально для произвольных компактов. Применяя теоремы из [11], получаем, что $P(\operatorname{Bd} Q) \simeq \Sigma$. Значит, имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.28. *Пространство $P(\operatorname{Bd} Q)$ гомеоморфно Σ.*

Рассмотрим (7):

$$S_P(\operatorname{Bd} Q) = S_P\biggl(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k^{\pm}\biggr) = S_P\biggl(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k\biggr) = S_P\biggl(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k\biggr).$$

Согласно [2, следствие 5.5] для любого $k \in \mathbb{N}$ выпуклое AR-пространство $S_P(W_k)$ гомеоморфно гильбертовому пространству ℓ_2, т.е. $S_P(W_k) \simeq \ell_2$; тогда выпуклое всюду плотное AR-подпространство $S_P(\operatorname{Bd} Q)$ есть счетное объединение гильбертовых пространств. С другой стороны, согласно теореме 5.22 выпуклое подмножество $S_P(\operatorname{Bd} Q)$ является гомотопически плотным подмножеством гильбертова куба $P(Q)$.

Теперь рассмотрим (c):

$$P(S) = P(Q \setminus \operatorname{Bd} Q) = P(Q) \setminus S_P(\operatorname{Bd} Q) = P(Q) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} S_P(W_k) =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{k} (P(Q) \setminus S_P(W_k)) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (P(Q \setminus W_k)).$$

Из этого равенства получается, что $P(S)$ есть F_σ-множество в $P(Q)$. Очевидно, что $P(S) \cup P(\operatorname{Bd} Q) \neq P(Q)$.

Теперь рассмотрим (d):

$$S_P(S) = S_P(Q \setminus \operatorname{Bd} Q) = S_P\biggl(Q \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k\biggr) = S_P\biggl(\bigcap_{i=1}^{k} (Q \setminus W_k)\biggr) = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_P(Q \setminus W_k).$$

Известно, что имеется следующая цепочка замкнутых множеств: $W_1 \supseteq W_2 \supseteq \ldots \supseteq W_n \supseteq \ldots$. Получаем последовательность открытых множеств $Q \setminus W_1 \subseteq Q \setminus W_2 \subseteq \ldots \subseteq Q \setminus W_n \subseteq \ldots$. Следовательно, $S(Q \setminus W_1) \subseteq S(Q \setminus W_2) \subseteq \ldots \subseteq S(Q \setminus W_n) \subseteq \ldots$ — последовательность открытых, всюду плотных в $P(Q)$, выпуклых AR-подпространств.

Имеем

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_P(Q \setminus W_n) = S_P(Q \setminus W_1).$$

Значит, $S_P(Q \setminus W_1)$ является Q-многообразием, причем $\overline{S_P(Q \setminus W_1)} \simeq Q$. Таким образом, X — бесконечный компакт, а X_0 — его счетное всюду плотное подмножество, отличное от X. т.е. $X_0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots : x_i \in X\} \subset X$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ получим $X_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$. Тогда $X_k \subset X$ и

$$X_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Имеем $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_k \subset \ldots$. Известно, что $P(X_k) = \sigma^k$, где σ^k — k-мерный симплекс. Каждое $P(X_k)$ есть Z-множество в $P(X)$ (см. [2]). Следовательно, выпуклое множество

$$P(X_0) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} P(X_k)$$

есть σ-Z-множество в $P(X)$, а $P(X_0)$ всюду плотно в $P(X)$, т.е. $\overline{P(X_0)} = P(X)$.

Из [10, теорема 2] получим следующее утверждение.

Теорема 5.29. *Для любого бесконечного компакта X и его всюду плотного счетного подмножества X_0, отличного от компакта X, пара $(P(X), P(X_0))$ гомеоморфна паре (Q, ℓ_2^f).*

Следствие 5.30. *Для любого бесконечного компакта X и его любого счетного незамкнутого подмножества A подпространство $P(A)$ гомеоморфно ℓ_2^f.*

Теорема 5.31 (см. [10]). *Каждое бесконечномерное σ-компактное метрическое выпуклое множество, не содержащее гильбертова куба, обладает компактным Z-свойством.*

Из этого результата получаем следующую теорему.

Теорема 5.32. *Для любого бесконечного компакта X и любого его всюду плотного, счетного, незамкнутого подмножества A подпространство $P(A)$ обладает компактным Z-свойством.*

Следствие 5.33 (см. [10]). *Пусть W — бесконечномерное σ-компактное выпуклое подмножество полного линейного пространства. Если W не содержит гильбертова куба Q и $\bar{W} \in AR$, то $\tilde{W} \setminus W \simeq \ell_2$.*

Следствие 5.34. *Для любого бесконечного компакта X и любого его всюду плотного, счетного, незамкнутого подмножества A имеем $P(X) \setminus P(A) \simeq \ell_2$.*

Пусть X — бесконечный компакт и A — его счетное, всюду плотное, незамкнутое, отличное от X подмножество, $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Для произвольного $k \in \mathbb{N}$ положим $A_k = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Получим такую последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ конечных подмножеств множества A, что $A_k \subset A_{k+1}$ и

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Известно, что $A_k \subset X$ и $P(X)$ гомеоморфно Q. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ через cA_k обозначим выпуклую оболочку компакта A_k в $P(X)$. Согласно [10, следствие 3] выпуклая оболочка $\operatorname{conv} A_k$ содержит гильбертов куб Q и в силу выпуклости является стягиваемым AR-пространством. Следовательно, $\operatorname{conv} A_k \simeq Q$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\operatorname{conv} A_k \subset P(X)$, $\operatorname{conv} A_k \subset \operatorname{conv} A_{k+1}$.

В силу леммы 5.12 получим следующую теорему.

Теорема 5.35. *Для любого бесконечного компакта X и любого его счетного, всюду плотного подмножества A, отличного от X, имеет место гомеоморфизм*

$$\left(P(X), \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{conv} A_k\right) \simeq (Q, \operatorname{Bd} Q).$$

Кроме того, $\operatorname{conv}_\infty A \simeq Q$ *и* $c_\infty A = c_\infty \cup A_k$, *где*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = X, \quad \operatorname{conv}_\infty(A) = \operatorname{conv}_\infty\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_k\right).$$

Теорема 5.36. *Для любого бесконечного компакта и любого его замкнутого подмножества A, отличного от X, подпространство $P(A)$ является сильным деформационным ретрактом компакта $P(X)$.*

Доказательство. Пусть X — бесконечный компакт и A замкнуто в X, $A \neq X$. Тогда $P(X) \simeq Q$, $P(A) \subset P(X)$ и $P(A) \neq P(X)$. Было показано, что $P(A)$ замкнуто и выпукло.

Построим гомотопию

$$h(\mu, t)\colon P(X) \times [0,1] \to P(X), \quad h(\mu, t) = (1-t)\mu + t \cdot r(\mu),$$

где $r(\mu)\colon P(X) \to P(A)$ — ретракция, так как $P(A) \in AR(\mathfrak{M})$, $t \in [0,1]$. Для любого $t \in [0,1]$ элемент $h(\mu, t)$ принадлежит пространству $P(X)$.

Если $t = 0$, то $h(\mu, 0) = (1-0)\mu + 0 \cdot r(\mu) = \mu$, т.е. $h(\mu, t) = \mathrm{id}_{P(X)}$.

Если $t > 0$, то $h(\mu, t) \in P(X)$.

Если $t > 0$ и $\mu \in P(A)$, то $h(\mu, t) = \mu$, так как $r(\mu) = \mu$.

Значит, подпространство $P(A)$ есть сильный деформационный ретракт компакта $P(X)$. Теорема 5.36 доказана. □

Если подмножество $A \subset X$ — сильный деформационный ретракт компакта X, то $\operatorname{Sh} A = \operatorname{Sh} A$ (см. [1]). Из этого факта, теоремы 5.36 и теоремы 5.15 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.37. *Для любых замкнутых подмножеств A и B бесконечного компакта X, отличных от X, пространства $P(X) \setminus P(A)$ и $P(X) \setminus P(B)$ гомеоморфны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борсук К.* Теория шейпов. — М.: Мир, 1976.
2. *Жураев Т. Ф.* Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1989.
3. *Заричный М. М.* О свойствах нормальных функторов// в кн.: Тираспольский симпозиум по общей топологии ее приложениям. — Кишинев: Штиинца, 1985. — С. 96–97.
4. *Федорчук В. В.* Вероятностные меры в топологии// Усп. мат. наук. — 1991. — *46*, № 277. — С. 41–80.
5. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов// Усп. мат. наук. — 1986. — *36*, № 3. — С. 3–62.
6. *Banakh T., Radul T., Zarichnyi M.* Absorbing Sets in Infinite-Dimensional Manifolds. — Lviv: VNTL, 1996.
7. *Bessaga G., Pelzunski A.* Selected Topics in Infinite Dimensional Topology. — Warszawa: P.W.N., 1975.
8. *Curtis D. W.* Boundary sets of the Hilbert cube// Topology Appl. — 1985. — *20*, № 2. — P. 201–221.
9. *Curtis D. W., Dobrovolski T., Mogilski J.* Some applications of the topological characterizations of the sigma-compact spaces ℓ_2^f and Σ// Trans. Am. Math. Soc. — 1984. — *284*, № 2. — P. 837–846.
10. *Dobrovolski T.* The compact Z-property in convex sets// Topology Appl. — 1986. — *23*, № 2. — P. 163–172.
11. *Mogilski J.* Characterizing the topology of infinite dimensional manifolds// Proc. Am. Math. Soc. — 1984. — *92*, № 1. — P. 111–118.

Аюпов Шавкат Абдуллаевич
Институт математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: sh_ayupov@gmail.ru

Жураев Турсунбой Файзиевич
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: tursunzhuraev@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 28–35
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-28-35

УДК 517.936, 517.925.53

СТАБИЛЬНОСТЬ ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

© 2021 г. **А. Я. НАРМАНОВ**

Аннотация. Предметом настоящей работы является вопрос о стабильности вполне управляемых систем, заданных на гладком многообразии. Известно, что множества управляемости симметричных систем порождают сингулярные слоения. В случае, когда множества управляемости имеют одинаковую размерность, возникает регулярное слоение. Таким образом, возникает возможность применения методов теории слоений в задачах теории управления. В данной работе излагаются некоторые результаты о возможности применения теорем о стабильности слоев для задачи о стабильности вполне управляемых систем.

Ключевые слова: система управления, множество управляемости, орбита, вполне управляемая система, сингулярное слоение.

STABILITY OF COMPLETELY CONTROLLABLE SYSTEMS

© 2021 **A. Ya. NARMANOV**

Abstract. In this work, we discuss the stability of completely controllable systems defined on smooth manifolds. It is known that the controllability sets of symmetric systems generate singular foliations. In the case where the controllability sets have the same dimension, regular foliation arise. Thus, we can apply the methods of foliation theory to problems in control theory. In this paper, we present some results on the possibility of applying theorems on the stability of layers to the problem on the stability of completely controllable systems.

Keywords and phrases: control system, controllability set, orbit, completely controllable system, singular foliation.

AMS Subject Classification: 37C10, 57R27

1. Введение. В этой работе рассматривается система управления

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где M — связное гладкое (класса C^∞) многообразие размерности n, U — компакт, при каждом $u \in U$ векторное поле $f(\cdot, u)$ является гладким (класса C^∞), а отображение $f\colon M \times U \to TM$ непрерывно. Допустимыми управлениями считаются кусочно постоянные функции $u\colon [0,T] \to U$, где $0 < T < \infty$.

Траекторией системы (1) называется кусочно гладкое отображение $x\colon [0,T] \to M$, удовлетворяющее равенству

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

для всех $t \in [0,T] \setminus E$, где $u\colon [0,T] \to U$ — некоторое допустимое управление с множеством точек разрыва E, которое состоит из конечного числа точек.

Будем говорить, что из точки $x_1 \in M$ можно попасть в точку $x_2 \in M$ за время T, если существует такая траектория $x\colon [0,T] \to M$ системы (1), что $x(0) = x_1$ и $x(T) = x_2$.

Пусть $\eta \in M$. Множество точек M, из которых можно попасть в η, будем называть множеством управляемости с целевой точкой η и обозначим через G_η. По определению полагаем $\eta \in G_\eta$ для всех $\eta \in M$.

Пусть M — гладкое многообразие размерности n, D — семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M. Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей. Для точки $x \in M$ через $t \to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x)$, которая в общем случае зависит не только от поля X, но и от начальной точки x.

Определение 1. Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют такие действительные числа $t_1, t_2, \dots, t_k$ и векторные поля $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$ из D (где k произвольное натуральное число), что

$$y = X_{i_k}^{t_k}\Big(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}\big(\dots(X_{i_1}^{t_1}(x))\dots\big)\Big).$$

Ясно, что орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием), если D состоит из одного векторного поля.

В [19, 20] доказано, что каждая орбита семейства гладких векторных полей обладает дифференциальной структурой, по отношению которой она является гладким многообразием, гладко погруженным в M.

Напомним, что подмногообразие $N \subset M$ называется погруженным в M, если каноническая инъекция $i\colon N \to M$ является дифференцируемым отображением максимального ранга.

На каждой орбите возникают две топологии: ее собственная топология как погруженного подмногообразия и индуцированная топология из M. Собственная топология орбиты является более сильной, чем топология, индуцированная из M.

Действительно, если $x \in L(x_0)$, где $x \in M$, $V(x)$ — открытое множество в M, содержащее x, то $L(x_0) \cap V(x)$ является открытым множеством в индуцированной топологии $L(x_0)$. Для каждой точки $y \in L(x_0) \cap V(x)$ образ точки y при $i\colon L(x) \to M$ содержится в $V(x)$, и в силу непрерывности отображения i существует окрестность $U(y)$ точки в топологии $L(x_0)$ такая, что $U(y) \subset V(x)$. Отсюда следует, что $L(x_0) \cap V(x)$ открыто в топологии $L(x_0)$.

Как показывают примеры, даже когда D состоит из одного векторного поля, эти две топологии не всегда совпадают.

Например, для иррациональной обмотки тора для всех траекторий эти топологии различны. Изучению геометрии и топологии орбит векторных полей посвящены многочисленные исследования (см. [1–9].

Определение 2. Орбита L называется собственной, если каноническая инъекция $i\colon L \to M$ является вложением, т.е. когда топология слоя совпадает с индуцированной топологией из M.

Орбиты семейства векторных полей класса C^r порождают сингулярное слоение класса C^r. Это следует из работ П. Стефана [19] и Г. Суссманна [20].

Пусть $V(M)$ — множество всех гладких (класса C^∞) векторных полей, определенных на M. Множество $V(M)$ является алгеброй Ли, в которой коммутатором двух векторных полей $X, Y \in V(M)$ служит их скобка Ли $[X, Y]$. Обозначим через $A(D)$ наименьшую подалгебру Ли, содержащую D, и положим $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}$ для всех $x \in M$. Возникшее распределение $x \to A_x(D)$ является инволютивным, и если $\dim A_x(D) = \text{const}$ для всех $x \in M$, то по теореме Фробениуса является вполне интегрируемым. В этом случае каждая орбита является слоем k-мерного слоения F (см. [3]).

Система управления (1) порождает семейство векторных полей

$$D = \{f(\cdot, u) : u \in U\}. \tag{2}$$

Если $u\colon [0, T] \to U-$ допустимое управление с точками разрыва $t_1, t_2, \dots, t_m$, где $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < T$, и $x\colon [0, T] \to M$ — соответствующая траектория системы (1), то сужение x на

$[t_i, t_{i+1}]$, где $i = 0, 1, 2, \dots, m$, $t_0 = 0$, $t_{m+1} = T$, является интегральной кривой некоторого векторного поля X_{i+1} из D. Поэтому, если $x(0) = x_1$, $x(T) = x_2$, то имеет место равенство

$$x_2 = X_m^{\tau_m}\Big(X_{m-1}^{\tau_{m-1}}\big(\dots X_1^{\tau_1}(x_1)\dots\big)\Big), \tag{3}$$

где $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, множество G_η является подмножеством орбиты $L(\eta)$ семейства D для каждого $\eta \in M$.

Определение 3. Система (1) называется симметричной, если для каждого $u \in U$ существует такое $v \in U$, что $f(x, v) = -f(x, u)$ для всех $x \in M$.

Очевидно, если система (1) симметрична, то множество G_η совпадает с орбитой $L(\eta)$ семейства D. Таким образом, множества управляемости симметричной системы управления (1) порождают сингулярное слоение F. Если $\dim A_x(D) = k$ для всех $x \in M$, то каждая орбита является слоем k-мерного слоения F (см. [20]).

Определение 4. Будем говорить, что система (1) управляема из точки η, если выполнено $G_\eta = L(\eta)$.

Определение 5. Будем говорить, что система (1) вполне управляема на $L(\eta_0)$, где $\eta_0 \in M$, если $G_\eta = L(\eta_0)$ для каждого $\eta \in L(\eta_0)$.

По определению орбиты, для каждого $\eta \in M$ множество $L(\eta)$ является инвариантным множеством системы (1), т.е. ни одна траектория системы (1), начинающаяся на нем, его не покидает. Поэтому, если целью управления является приведение системы (1) в точку $\eta \in M$, то систему достаточно рассматривать лишь на $L(\eta)$, так как из точек $M \setminus L(\eta)$ невозможно попасть в точку η.

Пусть $L = L(\eta_0)$ — некоторая орбита семейства D, и система (1) вполне управляема на L.

Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях вполне управляемая на $L(\eta_0)$ система (1) будет вполне управляемой на орбитах $L(\eta)$, если точка η достаточно близка к η_0.

В случае, когда орбита L является компактным множеством, этот вопрос решен в [13]. В [13] доказано, что если слоение F регулярно, L — компактный слой с конечной группой голономии, то из вполне управляемости системы (1) на L вытекает, что система (1) вполне управляема на всех слоях, достаточно близких к L.

В этой работе мы рассмотрим этот вопрос, когда орбита $L(\eta_0)$ не является компактным множеством. Оказывается, этот вопрос тесно связан с вопросом о стабильности слоя L слоения F так же, как и непрерывность отображения $\eta \to L(\eta)$.

В разделе 2 обсуждаются теоремы стабильности для слоев слоения F. В разделе 3 получены достаточные условия «стабильности» вполне управляемой системы (1).

В разделе 4 рассматривается система управления, правая часть которой непрерывно зависит от некоторого параметра и изучается вопрос о достаточных условиях стабильности вполне управляемой системы относительно параметра.

2. Теоремы стабильности для слоений. Пусть F является k-мерным слоением. Следующая теорема о стабильности компактного слоя доказана Ж. Рибом в 1944 г. (см. [12]).

Теорема 1. *Пусть L — компактный слой слоения F. Если группа голономии слоя L конечна, то для каждого открытого множества V, содержащего L, существует открытое инвариантное множество V_0 такое, что $L \subset V_0 \subset V$, каждый слой из V_0 есть компакт и имеет конечную группу голономии.*

В 1976 г. на международной конференции в Рио-де-Жанейро Гектором был поставлен вопрос о возможности обобщения теоремы Риба на некомпактные слои (см. [18]).

В 1977 г. японский математик Т. Инаба построил пример, который показывает, что когда коразмерность слоения больше единицы, то теорема Ж. Риба нельзя обобщить для некомпактных собственных слоев (см. [15]). Таким образом, вопрос Гектора об обобщении теоремы Риба на некомпактные слои нужно рассмотреть только для слоений коразмерности один.

Пусть $\dim A_x(D) = n-1$ для всех $x \in M$. Тогда F является слоением размерности $n-1$ (коразмерности один).

Предположим, что слоения F трансверсально ориентируемо, т.е. существует невырожденное гладкое векторное поле X на M, которое трансверсально к слоям F.

Пусть L_0 — собственный слой слоения слоения F, и $r > 0$. Положим $U_r = \{y \in M : \rho(y, L_0) < r\}$, где $\rho(y, L_0)$ — расстояние от точки y до слоя L_0. Очевидно, что для каждого $r > 0$ множество U_r является открытым множеством.

В 1977 г. Т. Инаба в той же работе [15] доказал следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть M — компактное многообразие размерности 3, F — трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один, L_0 — собственный слой F. Тогда, если фундаментальная группа слоя L_0 конечнопорожденна, и группа голономии $H(L_0)$ тривиальна, то для каждого $r > 0$ существует открытое инвариантное множество V такое, что $L_0 \subset V \subset U_r$, каждый слой из V диффеоморфен слою L_0, сужение F на V является расслоением со слоем L_0.*

Пусть L_0– — собственный слой слоения F. Предположим, что для каждой точки $x \in L_0$ существует такое число $r_x > 0$, что для каждой горизонтальной кривой $h\colon [0,1] \to U_{r_x} = \{z \in M : \rho(z, L_0) < r_x\}$ с началом в точке x, и для каждого пути $v\colon [0,1] \to L_0$ с началом в $x = h(0)$ существует непрерывное отображение (вертикально-горизонтальная гомотопия) $\psi\colon [0,1] \times [0,1] \to M$, такое, что $\psi(t, 0) = v(t)$ для $t \in [0,1]$, $\psi(0, s) = h(s)$ при $s \in [0,1]$.

Кривую $h\colon [0,1] \to M$ назовем горизонтальной, если $\frac{dh(s)}{ds} \in H(h(s))$, где $H(x) = \{\lambda X(x) : \lambda \in \mathbb{R}^1\}$, X — трансверсальное к F векторного поля на M.

При этом условии имеет место следующее обобщение теоремы Ж. Риба (см. [8]).

Теорема 3. *Пусть F — трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один на M, L_0 — относительно компактный собственный слой с конечнопорожденной фундаментальной группой. Тогда, если группа голономии слоя L_0 тривиальна, то для каждого $r > 0$ существует открытое инвариантное множество V такое, что $L_0 \subset V \subset U_r$, каждый слой из V диффеоморфен слою L_0, а сужение F на V является расслоением над $\mathbb{R}^1$ со слоем L_0.*

Замечание 1. Компактный слой всегда вложен в M, т.е. является собственным слоем. Известно, что фундаментальная группа компактного многообразия является конечнопорожденной группой.

Далее предположим, что слоение является римановым.

Определение 6. Слоение F называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F, остается ортогональной ко всем слоям F во всех своих точках.

Регулярные римановы слоения введены Рейнхартом в [17] и изучались многими авторами, в частности, в [14, 16, 22]. Сингулярные римановы слоения были введены П. Молино в монографии [16].

Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n, F — сингулярное риманово слоение на M. В этом случае имеет место следующее обобщение теоремы Ж. Риба (см. [8]).

Теорема 4. *Пусть (M, g) — полное риманово многообразие размерности n, L-собственный слой слоения F. Тогда для каждого $r > 0$ существует открытая инвариантная окрестность V слоя L такая, что $L \subset V \subset U_r$ и сужение F на V является гладким расслоением с базой L.*

В случае, когда F — регулярное слоение коразмерности верна следующая теорема (см. [8]).

Теорема 5. *Пусть F является римановым слоением коразмерности один на полном римановом многообразии (M, g), L — компактный слой. Тогда для каждого открытого множества V, содержащего L, существует открытая инвариантная окрестность U слоя F такая, что $L \subset U \subset V$, и U состоит из компактных слоев, диффеоморфных L.*

3. Стабильность вполне управляемых систем. В этом параграфе с использованием результатов первого параграфа получены достаточные условия «стабильности» вполне управляемой системы (1). Допустимыми управлениями считаются кусочно постоянные функции, принимающие значения из U.

Теорема 6 (см. [13]). *Пусть L_0 — компактный слой слоения F с конечной группой голономии. Тогда, если система* (1) *вполне управляема на L_0, то она вполне управляема на слоях, достаточно близких к L_0.*

По теореме Ж. Риба, если L_0 — компактный слой с конечной группой голономии, то для каждого открытого множества V, содержащего L_0, существует открытое инвариантное множество U, такое, что $L_0 \subset U \subset V, U$ состоит из компактных слоев.

Таким образом, теорема Ж. Риба позволяет получить достаточное условие для локальной стабильности вполне управляемой системы в случае, когда L_0 — компакт.

Как показывают следующие примеры, это теорема неверна, если L_0 — некомпактный слой, или L_0 — компактный слой, группа голономии которого не является конечной группой.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ с декартовыми координатами x, y, семейство состоит из одного векторного поля

$$X(x,y) = ((1-\rho)x - y)\frac{\partial}{\partial x} + (x + (1-\rho)y)\frac{\partial}{\partial y},$$

где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Окружность $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ является предельным циклом для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + (1-\rho)x, \\ \dot{y} = x + (1-\rho)y, \end{cases} \tag{4}$$

так как векторное поле X касается S^1 в каждой точке окружности S^1. Если в качестве компактного слоя L_0 возьмем S^1, то система (4) вполне управляема на L_0.

Другие траектории не замкнуты, поэтому система (4) не является вполне управляемой на других траекториях. Группа голономии слоя L_0 является циклической группой.

Пример 2. Пусть $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 = x_2 = 0\}$ с декартовыми координатами (x_1,x_2,x_3), $D = \{X_1, X_2, X_3\}$, где

$$X_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_2 = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = -\varphi(x)x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \varphi(x)x_2\frac{\partial}{\partial x_2};$$

здесь $\varphi(x) = \psi((x_1^2+x_2^2)x_3^2)$, $\psi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — такая гладкая функция класса C^∞, что $\psi(t) > 0$ при $-1 < t < 1$, и $\psi(t) = 0$ при $|t| \geqslant 1$.

Орбиты семейства D определяют двумерное слоение F на M, где для точки $\eta_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ орбита $L(\eta_0)$ совпадает с пересечением $M \cap \Pi(x_3^0)$, где $\Pi(x_3^0)$ — плоскость в $\mathbb{R}^3$, определяемая уравнением $x_3 = x_3^0$.

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = f(x,u), \quad u \in U = \{u_1, u_2, u_3\}, \tag{5}$$

где $f(x,u_i) = X_i(x)$, $i = 1,2,3$.

Положим $B_1 = \{x \in M : X_3(x) \neq 0\}$, $B_2 = M \setminus B_1$. При $\eta_0 = (x_1^0, x_2^0, 0)$ слой $L(\eta_0)$ не пересекается с B_1, и поэтому система (5) вполне управляема на $L_0 = L(\eta_0)$.

Для каждого слоя L такого, что пересечение $L \cap B_2 \neq \varnothing$, из точек $L \cap B_2$ нельзя попасть в точки множества $L \cap B_1 \neq \varnothing$. Следовательно, система (5) не является вполне управляемой на слоях L, отличных от L_0. Группа голономии слоя L_0 тривиальна, но L_0 не является компактным слоем.

В примере 2 слой L_0, хотя не является относительно компактным, но является локально стабильным. Этот факт показывает, что если система (1) вполне управляема на слое L_0, удовлетворяющим заключению теоремы 3, то отсюда не вытекает вполне управляемость системы (1) на близких слоях. Поэтому в случае, когда L_0 — некомпактный слой, нужны дополнительные условия на систему (1), которые гарантировали бы «стабильность» вполне управляемой на L_0 системы (1).

Определение 7. Система управления (1) называется нормально-локально управляемой (короче N-локально управляемой) вблизи точки $p \in L(\eta)$, если по любому $T > 0$ существует такая окрестность V точки p в $L(\eta)$, что из каждой точки множества V можно попасть в точку p за время, меньшее T.

Определение 8. Будем говорить, что система (1) вполне управляема (или N-локально управляема) на инвариантном множестве $S \subset M$, если она вполне управляема (или N-локально управляема) на каждом слое из S.

Теорема 3 второго параграфа позволяет доказать следующую теорему (см. [8]).

Теорема 7. *Пусть* $\dim A_x(D) = n - 1$ *для всех* $x \in M$, *и* F *является трансверсально ориентируемым слоением, слой* L_0 *удовлетворяет условия теоремы 3. Тогда если система* (1) N-*локально управляема на* $\overline{L_0}$ *(замыкание в* M*), то существует инвариантная окрестность* V *слоя* L_0 *такая, что система* (1) *вполне управляема на каждом слое из* V.

Теперь вернемся к случаю $\dim A_x(D) = k$ для всех $x \in M$, где $0 < k < n$. В этом случае F является k-мерным слоением.

Предположим, что слоение F является римановым слоением по отношению к римановой метрике. Необходимое и достаточное условие того, чтобы F было римановым, дано в [6]. Это условие относится к векторным полям из $A(D)$ и римановой метрике g. В [8] получен следующий результат.

Теорема 8. *Пусть* (M, g) *— полное риманово многообразие,* L_0 *— относительно компактный слой слоения* F. *Тогда, если система* (1) N-*локально управляема на* $\overline{L_0}$, *то существует инвариантная окрестность* V *слоя* L_0 *такая, что на каждом слое из* V *система* (1) *вполне управляема.*

4. Стабильность вполне управляемых систем относительно параметра. Рассмотрим систему уравнений с параметром

$$\dot{x} = f(x, u, \alpha), \quad x \in M, \quad u \in U, \tag{6}$$

где M — гладкое (класса C^{r+1}) связное многообразие размерности n с некоторой римановой метрикой g, U — непустое компактное подмножество $\mathbb{R}^p$, параметр α принимает значения из некоторого открытого множества $A \subset \mathbb{R}^q$.

Предполагается, что при каждом $\alpha \in A$ отображение $f(\cdot,\cdot,\alpha)\colon M \times U \to TM$ непрерывно, а векторные поля $\{f(\cdot, u, \alpha) : u \in U\}$ принадлежат классу C^r, где TM — касательное расслоение многообразия M, $r \geqslant 1$.

Допустимыми управлениями считаются кусочно постоянные функции $u\colon [0, T] \to U$, где $0 < T < \infty$.

Пусть $\eta \in M$, $G_\eta(\alpha_0)$ — множество управляемости системы (6) с целевой точкой η при $\alpha = \alpha_0$, т.е. системы управления

$$\dot{x} = f(x, u, \alpha_0), \quad x \in M, \quad u \in U, \tag{7}$$

которая получена из (6), полагая $\alpha = \alpha_0$.

Напомним, что $G_\eta(\alpha_0)$ есть множество точек M, из которых можно попасть в точку η вдоль траекторий системы (7).

В дальнейшем всюду будем предполагать, что правая часть системы (6) непрерывно зависит от α.

В [11] рассмотрен вопрос о том, что если система (7) N-локально управляема вблизи точки η, то при каких условиях система (6) будет N-локально управляемой вблизи точки η для α, достаточно близких к α_0.

Из результатов работ [10, 11] вытекает следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть система* (7) *N-локально управляема вблизи точки η_0. Тогда если множество $D^0(\eta_0) = \{f(\eta_0, u, \alpha_0) : u \in U\}$ содержит положительный базис касательного пространства $T_{\eta_0}M$ многообразия M в точке η_0, то существует окрестность V точки α_0 такая, что система* (6) *N-локально управляема вблизи точки η_0 при каждом $\alpha \in V$.*

Напомним, что семейство векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ называется положительным базисом в $\mathbb{R}^n$, если для каждого $a \in \mathbb{R}^n$ существуют неотрицательные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ такие, что $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m$ (см. [10]).

Известно, что для того чтобы векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ составляли положительный базис в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого единичного вектора a нашелся такой a_i, что $(a, a_i) < 0$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение (см. [10]).

Используя этот критерий положительного базиса и непрерывность отображения $f(x, u, \alpha)$, нетрудно показать, что в условиях теоремы 9 существует такое $\delta > 0$, что при $\rho(\eta, \eta_0) < \delta$ и $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ множество $D(\eta) = \{f(\eta, u, \alpha) : u \in U\}$ содержит положительный базис касательного пространства $T_\eta M$.

Здесь $\rho(\eta, \eta_0)$ — расстояние между точками η_0 и η, определенное римановой метрикой g на M, $|\alpha - \alpha_0|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^q$. В силу того, что множество $D(\eta)$ содержит положительный базис, система (6) N-локально управляема вблизи каждой точки множества $B(\delta) = \{\eta \in M : \rho(\eta, \eta_0) < \delta\}$ при каждом α, если $|\alpha - \alpha_0| < \delta$.

Как отмечено в [11], если множество $D(\eta)$ не содержит положительный базис, то система (6) может не быть N-локально управляемой при $\alpha \neq \alpha_0$, если даже α достаточно близко к α_0.

Теперь предположим, что система (7) вполне управляема и рассмотрим вопрос: при каких условиях система (6) будет вполне управляемой для α, достаточно близких к α_0?

В случае, когда M — компактное многообразие и f гладко зависит от α, из результатов работы [21] можно получить следующее: существует такое $\delta > 0$, что система (1) вполне управляема при каждом α из $\{\alpha \in A : |\alpha - \alpha_0| < \delta\}$.

Следующая теорема является обобщением вышеуказанного утверждения на случай, когда f непрерывно зависит от α, доказана в [8].

Теорема 10. *Пусть $K \subset M$ — компактное связное подмногообразие размерности n, и система* (7) *вполне управляема на K. Тогда существует такое $\delta > 0$, что система* (6) *вполне управляема на K при каждом α из множества $\{\beta \in A : |\beta - \alpha_0| < \delta\}$.*

Напомним, что система (6) вполне управляема на подмножестве $S \subset M$, если для каждой пары $(x, y) \in S \times S$ из точки x можно попасть в точку y вдоль траектории системы (6).

Замечание 2. Утверждение теоремы 10 неверно, если размерность K меньше n. Например, если U состоит из одной точки, мы имеем семейство векторных полей $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Предположим, что векторное поле X_{α_0} имеет замкнутую траекторию K. Ясно, что система (1) при $\alpha = \alpha_0$ вполне управляема на K. Но если $\dim M > 1$ и векторные поля X_α не касательны к K при $\alpha \neq \alpha_0$, то система не является вполне управляемой на K для $\alpha \neq \alpha_0$.

Напомним, что множество $V(M)$ гладких векторных полей класса C^∞ является алгеброй Ли относительно скобки Ли $[X, Y]$ векторных полей $X, Y \in V(M)$. Положим $D_\alpha = \{f(\cdot, u, \alpha) : u \in U\}$ и обозначим через P_α наименьшую подалгебру Ли, содержащую множество векторных полей D_α.

Теперь предположим, что при каждом α система (6) симметрична, а при каждом $u \in U$ отображение $f(\cdot, u, \cdot)\colon M \times A \to TM$ класса C^∞. Симметричность означает, что если $X \in D_\alpha$, то $-X \in D_\alpha$.

В [8] доказана следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть $P_\alpha(x) = \{X(x) : X \in P_\alpha\}$, где $x \in M$. Предположим, что система* (7) *N-локально управляема вблизи точки η. Тогда, если $\dim P_{\alpha_0}(\eta) = n$, то существует такое число $\delta > 0$, что система* (7) *N-локально управляема вблизи точки η при каждом α из $B_\delta(\alpha_0) = \{\alpha \in A : |\alpha - \alpha_0| < \delta\}$.*

Теперь предположим, что размерность $\dim P_\alpha(x)$ не зависит от x, а зависит от α. В этом случае получен следующий результат (см. [8]).

Теорема 12. *Пусть система* (6) *вполне управляема при* $\alpha = \alpha_0$. *Тогда существует такое* $\delta > 0$, *что система* (6) *вполне управляема при каждом* α *из* $B_\delta(\alpha_0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азамов А. А., Нарманов А. Я.* О предельных множествах орбит систем векторных полей// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 2. — С. 257–260.
2. *Нарманов А. Я.* О множествах управляемости систем управления, являющихся слоями слоения коразмерности один// Диффер. уравн. — 1983. — *19*, № 9. — С. 1627–1630.
3. *Нарманов А. Я.* Теорема стабильности для некомпактных слоев слоения коразмерности один// Вестн. ЛГУ. — 1983. — № 9. — С. 100–102.
4. *Нарманов А. Я.* О зависимости множества управляемости от целевой точки// Диффер. уравн. — 1985. — *21*, № 9. — С. 1504–1508.
5. *Нарманов А. Я.* О зависимости множества управляемости от целевой точки// Диффер. уравн. — 1995. — *31*, № 4. — С. 597–600.
6. *Нарманов А. Я.* О трансверсальной структуре множества управляемости симметричных систем управления// Диффер. уравн. — 1996. — *32*, № 6. — С. 780–783.
7. *Нарманов А. Я.* О зависимости множества управляемости от целевой точки// Диффер. уравн. — 1997. — *33*, № 10. — С. 1334–1338.
8. *Нарманов А. Я.* О стабильности вполне управляемых систем// Диффер. уравн. — 2000. — *36*, № 10. — С. 1336–1344.
9. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Диффер. уравн. — 2014. — *50*, № 12. — С. 1582–1589.
10. *Петров Н. Н.* Об управляемости автономных систем// Диффер. уравн. — 1968. — *4*, № 4. — С. 606–617.
11. *Петров Н. Н.* Управляемые системы, подобные системам с выпуклой вектограммой// Вестн. ЛГУ. — 1974. — № 1. — С. 63–69.
12. *Тамура И.* Топология слоений. — М.: Мир, 1979.
13. *Gauthier J. P., Bornard G.* An openness condition for the controllability of nonlinear systems// J. Control Optim. — 1982. — *20*, № 6. — P. 708–714.
14. *Hermann R.* On the differential geometry of foliations// Ann. Math. — 1960. — *72*, № 3. — P. 445–457.
15. *Inaba T.* On the stability of proper leaves of codimension one foliations// J. Math. Soc. Jpn. — 1977. — *29*, № 4. — P. 771–778.
16. *Molino P.* Riemaninan Foliations. — Boston–Basel: Birkhäuser, 1988.
17. *Reinhart B.* Foliated manifolds with bundle-like metrics// Ann. Math. — 1959. — *69*, № 1. — P. 119–132.
18. *Schweitzer P. A.* Some problems in foliation theory and related areas// Lect. Notes Math. — 1978. — *652*. — P. 240–252.
19. *Stefan P.* Accessibility and foliations with singularities// Bull. Am. Math. Soc. — 1974. — *80*, № 6. — P. 1142–1145.
20. *Sussmann H.* Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities// Bull. Am. Math. Soc. — 1973. — *79*. — P. 197–199.
21. *Sussmann H.* Some properties of vector field systems that are not altered by small perturbations// J. Differ. Equations. — 1976. — *20*. — P. 292–315.
22. *Tondeur Ph.* Foliations on Riemannian Manifolds. — New York: Springer-Verlag, 1988.

Нарманов Абдигаппар Якубович
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: `narmanov@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 36–45
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-36-45

УДК 515.12; 515.142.2

О ФУНКТОРЕ СЛАБО АДДИТИВНЫХ τ-ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

© 2021 г. **А. А. ЗАИТОВ**

Аннотация. В работе установлены категорные свойства функтора слабо аддитивных τ-гладких функционалов и топологические свойства пространства слабо аддитивных τ-гладких функционалов. Указаны направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: слабо аддитивный τ-гладкий функционал, функтор, категория тихоновских пространств.

FUNCTOR OF WEAKLY ADDITIVE τ-SMOOTH FUNCTIONALS

© 2021 **A. A. ZAITOV**

Abstract. In this paper, categorical properties of the functor of weakly additive τ-smooth functionals and the topological properties of the space of weakly additive τ-smooth functionals are established. Directions for further research are indicated.

Keywords and phrases: weakly additive τ-smooth functional, functor, category of Tikhonov spaces.

AMS Subject Classification: 54C45, 54B30, 18B30

1. Введение. Как известно, финансовый рынок рискует многими типами неопределенных потерь, включая риск рынка, кредитный риск, риск ликвидности, эксплуатационный риск, и т. д. В 1988 г. Базельский комитет по банковскому надзору предложил меры по контролю кредитного риска в банковской сфере. Мера риска, называемая *value-at-risk* (аббревиатура VaR), стала в 1990-х гг. важным инструментом для оценки рисков и управления банками, компаний ценных бумаг, инвестиционными фондами и другими финансовыми учреждениями при распределении активов и оценке эффективности. VaR-мера, связанная с заданным уровнем доверия для капитала предприятия, является верхним пределом возможных потерь в последующий определенный период времени. В 1996 г. Базельский комитет по банковскому надзору одобрил VaR в качестве одного из приемлемых методов для внутренней оценки рисков банка. Однако из-за недостатков VaR-мер появились разнообразные новые меры риска. Более обзорное изложение приведено, например, в [21].

Предположим, что всевозможные состояния и события, которые могут произойти в предельное время, известны, а именно, дано измеримое пространство $(X, \mathcal{F})$. Финансовое положение (в данном случае речь идет о затратах на инвестиции, вычитаемых из состояния) обычно описывается измеримой функцией φ на $(X, \mathcal{F})$. Если предположить, что для измеримого пространства $(X, \mathcal{F})$ дана вероятностная мера $\mathbb{P}$, финансовые позиции описываются обычно случайными переменными: $\widetilde{\varphi}$ на $(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Для простоты используем обозначение $\varphi = -\widetilde{\varphi}$ для *потенциального убытка* на момент завершения торгов. Отметим, что потенциальный убыток — относительный в зависимости от контрольной точки в условиях. Если φ — отрицательная функция, то она означает *избыток.*

Мерой риска является численное значение $\mu(\varphi)$ для количественной оценки риска финансового положения (потенциального убытка или избытка) φ. Если через $\mathcal{G}$ обозначим множество всех финансовых положений, то мера риска μ представляет собой отображение из $\mathcal{G}$ в $\mathbb{R}$. Обычно принимают $L^\infty(X,\mathcal{F},\mathbb{P})$ — множество всех ограниченных $\mathcal{F}$-измеримых функций на $(X,\mathcal{F})$, снабженное равномерной нормой $\|\cdot\|_\infty$, или $L^\infty(X,\mathcal{F})$ — множество классов эквивалентности $L^\infty(X,\mathcal{F},\mathbb{P})$ по мере $\mathbb{P}$, в качестве множества всех финансовых положений $\mathcal{G}$ или $\mathcal{G}(\mathbb{R})$.

Известно, что алгебра $L^\infty(X,\mathcal{B}(X),\mathbb{P})$ изоморфна алгебре $C(X)$ всех непрерывных функций на так называемом гиперстоунском компакте X. Таким образом, приведённое выше понятие финансового положения можно интерпретировать как элемент алгебры $C(X)$, в то же время меру риска можно рассматривать как отображение из $C(X)$ в $\mathbb{R}$. В статье рассмотрим более общий случай — алгебру $C(X)$ непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве X, и алгебру $C_b(X)$ ограниченных непрерывных функций на тихоновском пространстве X.

Отметим, что в [2, 3, 6, 7, 12–20, 22–31] нормированные меры риска названы как слабо аддитивными, сохраняющими порядок, нормированными функционалами, и множество таких функционалов обозначено через $O(X)$.

Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, $C(X)$ — алгебра непрерывных функций $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$, с обычными алгебраическими операциями и sup-нормой. Для каждого $c\in\mathbb{R}$ через c_X обозначим постоянную функцию, т.е. функцию, определяемую равенством $c_X(x)=c$, $x\in X$. Пусть $\varphi,\psi\in C(X)$. Будем писать $\varphi\leqslant\psi$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x)\leqslant\psi(x)$ для всех $x\in X$.

Определение 1 (см. [19])**.** Функционал $\mu\colon C(X)\to\mathbb{R}$ называется

(i) слабо аддитивным, если $\mu(\varphi+c_X)=\mu(\varphi)+c$ для любых $\varphi\in C(X)$ и $c\in\mathbb{R}$;
(ii) сохраняющим порядок, если для любой пары функций $\varphi,\psi\in C(X)$ неравенство $\varphi\leqslant\psi$ влечет $\mu(\varphi)\leqslant\mu(\psi)$;
(iii) нормированным, если $\mu(1_X)=1$.

Для компактного хаусдорфова пространства X через $O(X)$ обозначим множество всех функционалов, обладающих свойствами (i)—(iii). Ясно, что имеет место включение $O(X)\subset\mathbb{R}^{C(X)}$. Множество $O(X)$ снабжается топологией поточечной сходимости. Эта топология совпадает с топологией, индуцированной из тихоновского произведения $\mathbb{R}^{C(X)}$. Следовательно, топологическое пространство $O(X)$ является тихоновским пространством. Базу окрестностей функционала $\mu\in O(X)$ относительно этой топологии образуют множества вида

$$\langle\mu;\varphi_1,\dots,\varphi_n;\varepsilon\rangle=\{\nu\in O(X):|\nu(\varphi_i)-\mu(\varphi_i)|<\varepsilon,\ i=1,\dots,n\},$$

где $\varphi_i\in C(X)$, $i=1,\dots,n$, и $\varepsilon>0$.

Для компактного хаусдорфова пространства X топологическое пространство $O(X)$ является компактным хаусдорфовым пространством (см. [19]). Более того, операция O перехода из компактного хаусдорфова пространства X в компактное хаусдорфово пространство $O(X)$ является ковариантным функтором в категории компактов и их непрерывных отображений. При этом для непрерывного отображения $f\colon X\to Y$ компактных хаусдорфовых пространств отображение $O(f)\colon O(X)\to O(Y)$ определяется по правилу $O(f)(\mu)(\varphi)=\mu(\varphi\circ f)$, $\varphi\in C(X)$.

Функтор O слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов в категории компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений не сохраняет прообразы, т.е. не является нормальным. Многие свойства этого функтора установлены Т. Радулом (см. [19]). Но он ограничился рассмотрением функтора O только на категории компактов. Естественной является задача о распространении функтора O с категории компактных хаусдорфовых пространств на категорию тихоновских пространств. Для краткости назовем O функтором слабо аддитивных функционалов.

В настоящей работе приведены результаты автора по теории слабо аддитивных функционалов. Приведено понятие слабо аддитивного τ-гладкого функционала и изложено одно из распространений функтора слабо аддитивных функционалов, действующего в категории компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений на категорию тихоновских пространств и их непрерывных отображений — функтор слабо аддитивных τ-гладких функционалов. Непосредственным применением теории слабо аддитивных функционалов исследовано пространство слабо аддитивных τ-гладких функционалов. Установлен критерий τ-гладкости слабо аддитивных функционалов. Доказано, что функтор τ-гладких слабо аддитивных функционалов сохраняет совершенность отображений. Доказано, если непрерывное отображение между тихоновскими пространствами таково, что порожденное им отображение между соответствующими пространствами слабо аддитивных функционалов открыто, то заданное отображение также является открытым. Справедливость обратного утверждения показывается при дополнительном условии. Кроме того, приведены понятия слабо аддитивного радонового функционала и слабо аддитивного σ-гладкого функционала и предложены направления дальнейших исследований по теории слабо аддитивных функционалов.

2. Продолжение функтора слабо аддитивных функционалов на категорию тихоновских пространств. Для открытого подмножества U, а также для замкнутого подмножества F компактного хаусдорфова пространства X, вещественных чисел α и c положим

$$\mu(\alpha\chi_U + c_X) = \begin{cases} \sup\{\mu(\varphi) : \varphi \in C(X) : 0_X \leqslant \varphi \leqslant \alpha\chi_U\} + c, & \text{если } \alpha > 0, \\ \inf\{\mu(\varphi) : \varphi \in C(X) : 0_X \geqslant \varphi \geqslant \alpha\chi_U\} + c, & \text{если } \alpha < 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\mu(\alpha\chi_F + c_X) = \begin{cases} \inf\{\mu(\varphi) : \varphi \in C(X) : \alpha\chi_F \leqslant \varphi \leqslant 1_X\} + c, & \text{если } \alpha > 0, \\ \sup\{\mu(\varphi) : \varphi \in C(X) : \alpha\chi_F \geqslant \varphi \geqslant -1_X\} + c, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Легко показать, что для слабо аддитивного, нормированного функционала μ имеем $\mu(0_X) = 0$.

Для открытого подмножества U компактного хаусдорфово пространства X, чисел α и $\varepsilon > 0$ определим следующие множества:

1. $\langle U, \alpha; \varepsilon\rangle = \{\mu \in O(X) : \mu(\alpha\chi_U) > \varepsilon\}$, если $\alpha > 0$,
2. $\langle U, \alpha; -\varepsilon\rangle = \{\mu \in O(X) : \mu(\alpha\chi_U) < -\varepsilon\}$, если $\alpha < 0$.

Предложение 1. *Для всякого открытого подмножества U компактного хаусдорфова пространства X и произвольного $\varepsilon > 0$ множества $\langle U, 1; \varepsilon\rangle$ и $\langle U, -1; -\varepsilon\rangle$ являются открытыми в $O(X)$ множествами относительно топологии поточечной сходимости.*

Доказательство. Для $\varphi \in C(X)$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$\langle\varphi; \varepsilon\rangle = \{\mu \in O(X) : \mu(\varphi) > \varepsilon\}.$$

Из определения поточечной сходимости следует, что множество $\langle\varphi; \varepsilon\rangle$ открыто в $O(X)$. Введем следующее обозначение

$$\Phi_{\langle U;\varepsilon\rangle} = \{\varphi \in C(X) : 0_X \leqslant \varphi \leqslant \chi_U \text{ и существует } \mu \in O(X), \text{ такой, что } \mu(\varphi) > \varepsilon\}.$$

Ясно, что $\Phi_{\langle U;\varepsilon\rangle} \neq \varnothing$ для открытого $U \subset X$ и ε, $0 < \varepsilon < 1$.

Имеем

$$\langle U, 1; \varepsilon\rangle = \bigcup_{\varphi \in \Phi_{\langle U;\varepsilon\rangle}} \langle\varphi; \varepsilon\rangle,$$

т.е. множество $\langle U, 1; \varepsilon\rangle$ открыто в $O(X)$. Аналогично устанавливается, что множество $\langle U, -1; -\varepsilon\rangle$ также открыто в $O(X)$. Предложение 1 доказано. □

Следствие 1. *Для всякого открытого подмножества U компактного хаусдорфова пространства X, каждого ненулевого числа α и произвольного $\varepsilon > 0$ множества $\langle U, \alpha; \varepsilon\rangle$ (в случае $\alpha > 0$) и $\langle U, \alpha; -\varepsilon\rangle$ (в случае $\alpha < 0$) являются открытыми в $O(X)$ множествами относительно топологии поточечной сходимости.*

Функтор $O\colon \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ слабо аддитивных функционалов можно продолжить по конструкции А. Ч. Чигогидзе (см. [10]) до функтора $O_\beta\colon \mathrm{Tych} \to \mathrm{Tych}$, или до функтора $O \circ \beta\colon \mathrm{Tych} \to \mathrm{Comp}$ аналогично конструкции В. В. Федорчука (см. [8]), рассмотренной для функтора P вероятностных мер, где было отмечено, что функтор $P \circ \beta$, ставящий в соответствии тихоновскому пространству X компакт $P(\beta X)$, также продолжает функтор $P\colon \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ вероятностных мер.

Пусть X — тихоновское пространство. По определению множество $O_\beta(X)$ задается равенством
$$O_\beta(X) = \{\mu \in O(\beta X) : \operatorname{supp}\mu \subset X\}.$$
Элементы множества $O_\beta(X)$ называются слабо аддитивными функционалами с компактными носителями. Множество $O_\beta(X)$ рассматривается как подпространство компактного хаусдорфова пространства $O(\beta X)$. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение тихоновских пространств, то можно показать, что $O(\beta f)(O_\beta(X)) \subset O_\beta(Y)$, где βf — (единственное) продолжение отображения f на βX. Поэтому естественно определить отображение $O_\beta(f)\colon O_\beta(X) \to O_\beta(Y)$ как сужение $O_\beta(f) = O(\beta f)|_{O_\beta(X)}$. Таким образом, построено одно из естественных распространений функтора O с категории компактных хаусдорфовых пространств на категорию тихоновских пространств.

Другим естественным распространением функтора O является функтор $O \circ \beta$, который исследован в работах автора. Этот функтор строится следующим образом: каждому тихоновскому пространству соотносится компакт $O(\beta X)$, а непрерывному отображению $f\colon X \to Y$ тихоновских пространств — отображение $O(\beta f)\colon O(\beta X) \to O(\beta Y)$, определенное как $O(\beta f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ \beta f)$, $\varphi \in C(\beta X)$.

Пространство $O_\beta(X)$, рассмотренное в [2,3], слишком узкое и не содержит многих естественных функционалов, например, носители которых не компактны. Пространство $O(\beta X) = O \circ \beta(X)$, категорные свойства которого были изучены автором (см. [22]), напротив, слишком широкое, и в результате функтор $O \circ \beta$ не сохраняет многих специфических свойств пространства X, переводя тихоновское пространство X в компакт $O(\beta X)$. Поэтому естественно рассматривать пространства функционалов, заключенных между пространствами $O_\beta(X)$ и $O(\beta X)$.

Пусть X — тихоновское пространство, $C_b(X)$ — алгебра ограниченных непрерывных функций $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ с поточечными алгебраическими операциями. Алгебры $C_b(X)$ и $C(\beta X)$ изометрически изоморфны (см. [9]).

Определение 2 (см. [6])**.** Функционал $\mu \in O(\beta X)$ называется радоновым, если $\mu(\pm\varphi_\alpha) \to 0$ для любой направленности $\{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$ равномерно на компактах стремящейся к нулю и состоящей из функций, ограниченных в совокупности.

Рассмотрим некоторую сеть $\{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$. Если для каждой точки $x \in X$ имеет место соотношение $\varphi_\alpha(x) \leqslant \varphi_\beta(x)$ при $\alpha \prec \beta$ и
$$\lim_\alpha \varphi_\alpha(x) = 0,$$
то говорят (см. [4]), что сеть $\{\varphi_\alpha\}$ есть монотонно убывающая направленность, поточечно сходящаяся к нулю на X (обозначение $\varphi_\alpha \downarrow 0_X$). Аналогично определяются монотонно возрастающая направленность $\{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$, поточечно сходящаяся к нулю на X, а также монотонно убывающая (или возрастающая) направленность, поточечно сходящаяся к некоторой функции $\varphi \in C(\beta X)$ на X.

Определение 3 (см. [15])**.** Функционал $\mu \in O(\beta X)$ называется τ-гладким, если $\mu(\pm\varphi_\alpha) \to 0$ для любой монотонно убывающей направленности $\{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$, поточечно сходящейся к нулю на X.

Определение 4 (см. [5])**.** Функционал $\mu \in O(\beta X)$ называется σ-гладким, если $\mu(\pm\varphi_n) \to 0$ для любой монотонно убывающей последовательности $\{\varphi_n\} \subset C(\beta X)$, поточечно сходящейся к нулю на X.

Отметим, что сходимость $\mu(\varphi_\alpha) \to 0$ (или $\mu(\varphi_n) \to 0$) не обеспечивает сходимость $\mu(-\varphi_\alpha) \to 0$ (соответственно, $\mu(-\varphi_n) \to 0$), и наоборот.

Пример 1. Рассмотрим пространство $W_0 = \{x : x < \omega_1\}$ всех счетных ординалов, где ω_1 — первый несчетный ординал. Известно, что $\beta W_0 = W_1 = \{x : x \leqslant \omega_1\}$. Рассмотрим семейство функций $\{\varphi_\alpha\} \subset C(W_1)$, каждая функция φ_α которого определена по формуле
$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \alpha, \\ 1, & \text{если } x \geqslant \alpha. \end{cases}$$

Ясно, что функции φ_α составляют убывающую и поточечно сходящуюся к нулю на тихоновском пространстве X сеть. Тогда для функционала $\mu = \min\{\delta_x : x \in X\} \in O(W_1)$ и для всех $\alpha > 0$ справедливы равенства $\mu(\varphi_\alpha) = 0$. Поэтому $\mu(\varphi_\alpha) \to 0$. Но, как легко видеть, $\mu(-\varphi_\alpha) \not\to 0$.

Аналогично, рассматривая функционал $\mu = \max\{\delta_x : x \in X\} \in O(W_1)$, убеждаемся в том, что $\mu(\varphi_\alpha) \not\to 0$ и $\mu(-\varphi_\alpha) \to 0$.

Для тихоновского пространства X через $O_R(X)$ (соответственно, через $O_\tau(X)$, $O_\sigma(X)$) обозначим множество всех радоновых (соответственно, всех τ-гладких, всех σ-гладких) функционалов $\mu \in O(\beta X)$. Рассмотрим множества $O_R(X)$, $O_\tau(X)$ и $O_\sigma(X)$ как подпространства пространства $O(\beta X)$, т.е. снабдим эти множества топологией поточечной сходимости.

Предложение 2 (см. [5, 6, 15]). *Множества $O_R(X)$, $O_\tau(X)$ и $O_\sigma(X)$ являются тихоновскими пространствами относительно топологии поточечной сходимости.*

Для тихоновского пространства X имеют место следующие включения

$$O_\beta(X) \subset O_R(X) \subset O_\tau(X) \subset O_\sigma(X) \subset O(\beta X). \tag{3}$$

Для компактного хаусдорфова пространства X справедливы равенства

$$O_\beta(X) = O_R(X) = O_\tau(X) = O_\sigma(X) = O(\beta X).$$

Отметим, что существуют примеры тихоновских пространств, что выполняются строгие включения в (3).

Непосредственной проверкой можно установить, что $O(\beta f)(O_R(X)) \subset O_R(Y)$, $O(\beta f)(O_\tau(X)) \subset O_\tau(Y)$ и $O(\beta f)(O_\sigma(X)) \subset O_\sigma(Y)$. Полагая

$$O_R(f) = O(\beta f)|_{O_R(X)}, \quad O_\tau(f) = O(\beta f)|_{O_\tau(X)} \text{ и } O_\sigma(f) = O(\beta f)|_{O_\sigma(X)},$$

получим отображения

$$O_R(f)\colon O_R(X) \to O_R(Y), \quad O_\tau(f)\colon O_\tau(X) \to O_\tau(Y) \text{ и } O_\sigma(f)\colon O_\sigma(X) \to O_\sigma(Y).$$

Теорема 1 (см. [5, 6, 15]). *Конструкции O_R, O_τ и O_σ являются ковариантными функторами в категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений, продолжающими функтор O.*

3. Функтор слабо аддитивных τ-гладких функционалов. Пусть $F \subset X$ — замкнутое подмножество. Число $\mu(\lambda\chi_F)$ определим по правилу (2).

Теорема 2 (критерий τ-гладкости). *Функционал $\mu \in O(\beta X)$ является τ-гладким тогда и только тогда, когда $\mu(\lambda\chi_K) = 0$ для всякого компакта $K \subset \beta X \setminus X$ и для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $\mu \in O(\beta X)$ — произвольный τ-гладкий функционал и K — некоторый компакт, $K \subset \beta X \setminus X$. Возьмем убывающую направленность $\Phi = \{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$ такую, что $\varphi_\alpha \geqslant \lambda\chi_K$, $\inf\{\mu(\varphi_\alpha) : \varphi_\alpha \in \Phi\} = \mu(\lambda\chi_K)$ и $\sup\{\mu(-\varphi_\alpha) : \varphi_\alpha \in \Phi\} = \mu(-\lambda\chi_K)$, где $\lambda > 0$. По выбору $\varphi_\alpha \downarrow 0_X$. Следовательно, $\mu(\pm\varphi_\alpha) \to 0$. Поэтому пределы числовых направленностей $\mu(\varphi_\alpha)$ и $\mu(-\varphi_\alpha)$ есть ноль. Таким образом, равенство $\mu(\lambda\chi_K) = 0$ справедливо для всякого компакта $K \subset \beta X \setminus X$ и для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Обратно, пусть $\mu \in O(\beta X)$ — такой функционал, что $\mu(\lambda\chi_K) = 0$ для любого компакта $K \subset \beta X \setminus X$ и для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольную направленность $\Phi = \{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$, $\varphi_\alpha \downarrow 0_X$. Достаточно рассмотреть значение $\lambda = 1$ и, не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi_\alpha \leqslant 1_{\beta X}$ для всех α.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выделим множество

$$Z_\alpha = \{x \in \beta X : \varphi_\alpha \geqslant \varepsilon\}.$$

Ясно, что

$$\bigcap_\alpha Z_\alpha \subset \beta X \setminus X.$$

Введем обозначение
$$K_\varepsilon = \bigcap_\alpha Z_\alpha.$$
Справедливо включение $Z_\alpha \supset Z_\beta$ при $\alpha \prec \beta$. Поэтому $\chi_{Z_\alpha} \geqslant \chi_{Z_\beta}$ при $\alpha \prec \beta$. Следовательно, $\mu(\chi_{Z_\alpha}) \geqslant \mu(\chi_{Z_\beta})$. Получили числовую убывающую сеть $\{\mu(\chi_{Z_\alpha})\}$, которая ограничена снизу числом $\mu(\chi_{K_\varepsilon})$. В силу непрерывности μ имеем $\mu(\chi_{Z_\alpha}) \to \mu(\chi_{K_\varepsilon})$. Теперь последовательно будем получать
$$\mu(\varphi_\alpha) = \mu(\varphi_\alpha\chi_{Z_\alpha} + \varphi_\alpha\chi_{\beta X\setminus Z_\alpha}) \leqslant \text{ (так как } \mu \text{ сохраняет порядок) } \leqslant$$
$$\leqslant \mu(\chi_{Z_\alpha} + \varepsilon_{\beta X}) = \text{ (в силу слабой аддитивности } \mu) = \mu(\chi_{Z_\alpha}) + \varepsilon,$$
т.е. $\mu(\varphi_\alpha) \leqslant \mu(\chi_{Z_\alpha}) + \varepsilon$. Но так как $\mu(\chi_{Z_\alpha}) \to \mu(\chi_{K_\varepsilon})$ и по предположению $\mu(\chi_{K_\varepsilon}) = 0$, то устремляя ε к нулю, получим $\mu(\varphi_\alpha) \to 0$.

Аналогично устанавливается, что $\mu(-\varphi_\alpha) \to 0$. Теорема 2 доказана □

Согласно критерию τ-гладкости (теорема 2) имеем
$$O_\tau(X) = \{\mu \in O(\beta X) : \mu(\lambda\chi_K) = 0 \text{ для всякого компакта } K \subset \beta X,$$
$$\text{такого, что } K \cap X = \varnothing \text{ и для каждого } \lambda \in \mathbb{R}\}. \quad (4)$$

Следующая теорема дает эквивалентное определение τ-гладкости слабо аддитивных функционалов, доказательство которой проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 3. *Функционал $\mu \in O(\beta X)$ является τ-гладким тогда и только тогда, когда $\mu(\pm\varphi_\alpha) \to \mu(\pm\varphi)$ для любой монотонно возрастающей направленности непрерывных функций $\{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$, поточечно на X сходящейся к $\varphi \in C_b(X)$.*

Пусть X и Y — тихоновские пространства. Напомним, что вложение $i\colon X \to Y$ называется C^*-*вложением* (см. [1]), если всякая функция $\varphi \in C_b(X)$ продолжается до некоторой функции $\widetilde{\varphi} \in C_b(Y)$.

Следующее утверждение хорошо известно.

Предложение 3. *Отображение $f\colon X \to Y$ является C^*-вложением тогда и только тогда, когда отображение $\beta f\colon \beta X \to \beta Y$ является вложением.*

Получены следующие результаты.

Предложение 4 (см. [6])**.** *Функтор O_τ переводит C^*-вложения во вложения.*

Предложение 5 (см. [6])**.** *Если $f\colon X \to Y$ — замкнутое C^*-вложение, то множество $O_\tau(X)$ замкнуто в $O_\tau(Y)$.*

Предложение 6 (см. [6])**.** *Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение, для которого образ $f(X)$ всюду плотен и C^*-вложен в Y. Тогда образ $O_\tau(f)(O_\tau(X))$ всюду плотен в $O_\tau(Y)$.*

Пусть A — направленное частично упорядоченное множество. Пусть $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta; A\}$ — обратный спектр, индексированный элементами множества A и состоящий из тихоновских пространств. Обозначим через
$$\lim_\alpha X_\alpha$$
предел этого спектра, а через
$$p_\beta\colon \lim_\alpha X_\alpha \to X_\beta \text{ —}$$
предельные проекции.

Обратный спектр $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta; A\}$ порождает обратный спектр $\{O_\tau(X_\alpha), O_\tau(p_\alpha^\beta); A\}$, предел которого мы обозначим через
$$\lim_\alpha O_\tau(X_\alpha),$$
а предельные проекции обозначим через
$$pr_\beta\colon \lim_\alpha O_\tau(X_\alpha) \to O_\tau(X_\beta).$$

Отображения

$$O_\tau(p_\beta)\colon O_\tau\big(\lim_\alpha X_\alpha\big) \to O_\tau(X_\beta)$$

порождают отображение

$$R\colon O_\tau\big(\lim_\alpha X_\alpha\big) \to \lim_\alpha O_\tau(X_\alpha).$$

Известно (см. [18]), что если все X_α, $\alpha \in A$ компактны, то отображение R гомеоморфизм. Для случая тихоновских пространств получен следующий результат.

Теорема 4 (см. [12])**.** *Пусть предельные проекции p_β являются C^*-вложениями. Тогда отображение*

$$R\colon O_\tau\big(\lim_\alpha X_\alpha\big) \to \lim_\alpha O_\tau(X_\alpha)$$

является вложением. Кроме того, если предельные проекции p_α плотны, то образ

$$R\big(O_\tau\big(\lim_\alpha X_\alpha\big)\big)$$

всюду плотен в

$$\lim_\alpha O_\tau(X_\alpha).$$

Функтор O сохраняет пересечения, т.е. для компактного хаусдорфова пространства X и семейства $\{F_\alpha\}$ замкнутых его подмножеств выполнено равенство

$$O\Big(\bigcap_\alpha F_\alpha\Big) = \bigcap_\alpha O(F_\alpha).$$

Для функтора O_τ получен следующий результат.

Теорема 5 (см. [24])**.** *Функтор O_τ сохраняет непустые пересечения замкнутых подмножеств нормального пространства. Иными словами, для семейства $\{F_\alpha\}$ замкнутых подмножеств нормального пространства имеет место*

$$O_\tau\Big(\bigcap_\alpha F_\alpha\Big) = \bigcap_\alpha O_\tau(F_\alpha).$$

Напомним, что непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется *открытым* (*замкнутым*) отображением (см. [11]), если для каждого открытого (замкнутого) в X множества A образ $f(A)$ открыт (замкнут) в Y. Отображения, которые одновременно открыты и замкнуты, называются *открыто-замкнутыми* отображениями. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *совершенным* (см. [11]), если X — хаусдорфово пространство, f — замкнутое отображение и все прообразы $f^{-1}(y)$ являются компактными подмножествами в X.

Из известной теоремы Брауэра—Титце—Урысона (см. [8]) и из результатов работы [17] получим следующее утверждение.

Предложение 7. *Функтор O_τ переводит замкнутые вложения нормальных пространств в замкнутые вложения.*

Теорема 6 (см. [16])**.** *Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение тихоновских пространств. Тогда отображение $O_\tau(f)\colon O_\tau(X) \to O_\tau(Y)$ также совершенно.*

Доказательства следующих двух лемм проводятся аналогично результатам работы [19].

Лемма 1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение тихоновских пространств, $y_0 \in Y$, $\varphi \in C_b(X)$. Тогда существует функция $\psi \in C_b(X)$, такая, что $\psi \circ f \leqslant \varphi$ и $\psi(y_0) = \min\{\varphi(x) : x \in f^{-1}(y_0)\}$.*

Из леммы 1 вытекает

Следствие 2. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение тихоновских пространств, $y_0 \in Y$, $\varphi \in C_b(X)$. Тогда существует функция $\psi \in C_b(X)$, такая, что $\psi \circ f \leqslant \varphi$ и $\psi(y_0) = \inf\{\varphi(x) : x \in f^{-1}(y_0)\}$.*

Для точки $x \in X$ через $\delta_x\colon C_b(X) \to \mathbb{R}$ обозначим (линейный) функционал, определенный как $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C_b(X)$. Функционалы вида δ_x называются мерами Дирака.

Лемма 2. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение тихоновских пространств, $y_0 \in Y$ — произвольная точка, $\nu \in O_\tau(X)$ — некоторый функционал такой, что $O_\tau(f)(\nu) = \delta_{y_0}$, и $\varphi \in C_b(X)$ — некоторая функция. Тогда если $\nu(\varphi) < c$ (соответственно, $\nu(\varphi) > c$), то существует $x \in f^{-1}(y_0)$ такая, что $\varphi(x) < c$ (соответственно, $\varphi(x) > c$).*

Теорема 7. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение тихоновских пространств. Если отображение $O_\tau(f)\colon O_\tau(X) \to O_\tau(Y)$ открыто, то отображение f также открыто.*

Доказательство. Пусть непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ тихоновских пространств таково, что отображение $O_\tau(f)\colon O_\tau(X) \to O_\tau(Y)$ открыто. Возьмём произвольную точку $x_0 \in X$, и пусть $y_0 = f(x_0)$. Пусть $\varphi \in C(\beta X)$ — функция такая, что $\varphi(x_0) = 0$. Положим $V = \{x \in X : -1 < \varphi(x) < 1\}$. Поскольку множества V образуют базу окрестностей точки x_0 в пространстве X, то в силу [11, теорема 1.4.13] достаточно показать, что образ $f(V)$ открыт в Y. Рассмотрим открытую окрестность $W = \{\mu \in O_\tau(X) : -1 < \mu(\varphi) < 1\}$ функционала $\delta_{x_0} \in O_\tau(X)$. Тогда образ $O_\tau(f)(W)$ — открытая окрестность функционала $\delta_{y_0} \in O_\tau(Y)$. Поэтому существует базисная окрестность $H = \langle \delta_{y_0}; \psi_1, \dots, \psi_n; \varepsilon\rangle$ такая, что $H \subset O_\tau(f)(W)$. Не теряя общности, можно считать, что $\psi_i(y_0) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$ и ε, $0 < \varepsilon < 1$. Тогда имеем $H = \{\nu \in O_\tau(Y) : -\varepsilon < \mu(\varphi) < \varepsilon\}$.

Пусть $G = \{y \in Y : -\varepsilon < \psi_i(y) < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$. Ясно, что G — открытая окрестность точки y_0 в Y. Возьмем произвольную точку $y \in G$. Имеем $\delta_y \in H$. Следовательно, $O_\tau(f)(\mu) = \delta_y$ для некоторого $\mu \in W$. По определению множества W имеем $-1 < \mu(\varphi) < 1$. В силу леммы 2 существует точка $x \in f^{-1}(y)$ такая, что $-1 < \varphi(x) < 1$. Но тогда $x \in V$, т.е. $y \in f(V)$. Таким образом, $G \subset f(V)$, и, следовательно, отображение f открыто. Теорема 7 доказана. $\square$

Теорема 8. *Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение тихоновских пространств. Если отображение f открыто, то отображение $O_\tau(f)\colon O_\tau(X) \to O_\tau(Y)$ также открыто.*

Доказательство. Рассмотрим продолжение $\beta f\colon \beta X \to \beta Y$ отображения f. Так как для открыто-замкнутого отображения f тихоновских пространств отображение βf открыто (см. [1]), то в силу [19, теорема 1] отображение $O(\beta f)\colon O(\beta X) \to O(\beta Y)$ открыто.

Пусть U — открытое в $O_\tau(X)$ множество. Тогда в $O(\beta X)$ существует открытое множество U_β такое, что $O_\tau(X) \cap U_\beta = U$. В силу открытости отображения $O(\beta f)$ образ $O(\beta f)(U_\beta)$ открыт в $O(\beta Y)$. По теореме 6 имеем $O(\beta f)^{-1}(O_\tau(Y)) \subset O_\tau(X)$ (это показано в [16]). Откуда

$$O(\beta f)^{-1}(O_\tau(Y) \cap O(\beta f)(U_\beta)) \subset O_\tau(X) \cap U_\beta = U \subset O(\beta f)^{-1}(O(\beta f)(U)).$$

Следовательно, $O_\tau(Y) \cap O(\beta f)(U_\beta) \subset O(\beta f)(U)$. С другой стороны, имеет место включение $O(\beta f)(U) \subset O_\tau(Y) \cap O(\beta f)(U_\beta)$, поскольку $O(\beta f)(U) \subset O_\tau(Y)$ и $O(\beta f)(U) \subset O(\beta f)(U_\beta)$. Поэтому $O_\tau(Y) \cap O(\beta f)(U_\beta) = O(\beta f)(U)$. Но $O_\tau(f)(U) = O(\beta f)(U)$, поскольку $O_\tau(f)$ — сужение отображения $O(\beta f)$. Значит, множество $O_\tau(f)(U)$ открыто в $O_\tau(Y)$ как пересечение открытого в $O(\beta Y)$ множества $O(\beta f)(U_\beta)$ и пространства $O_\tau(Y)$. Таким образом, отображение $O_\tau(f)$ открыто. Теорема 8 доказана. $\square$

Для тихоновских пространств X и Y определим отображение $j_{XY}\colon O_\tau(X) \times Y \to O_\tau(X \times Y)$ по формуле

$$j_{XY}(\mu, y) = O_\tau(i_y)(\mu),$$

где $i_y\colon X \to X \times Y$ — вложение пространства X в произведение $X \times Y$ в качестве слоя: $i_y(x) = (x, y)$, $x \in X$.

Теорема 9 (см. [25]). *Отображение j_{XY} является замкнутым вложением.*

Следствие 3. *Функтор O_τ сохраняет гомотопии, т.е. для любой гомотопии $H_{(\cdot)} = \{H_t\colon X \to Y | t \in [0,1]\}$ семейство $O_\tau(H)_{(\cdot)} = \{O_\tau(H)_t\colon O_\tau(X) \to O_\tau(Y) | t \in [0,1]\}$, где $O_\tau(H)_t = O_\tau(H_t) \circ j_{X[0,1]}$, является гомотопией и непрерывна как отображение $O_\tau(H)_{(\cdot)}\colon O_\tau(X) \times [0,1] \to O_\tau(Y)$.*

Определим вложение $\delta_X\colon X\to O_\tau(X)$ тихоновского пространства X в пространство $O_\tau(X)$ равенством $\delta_X(x)=\delta_x$, $x\in X$.

Теорема 10 (см. [25]). *Семейство* $\delta=\{\delta_X : X\in Tych\}$ *определяет естественное преобразование тождественного функтора* $\mathrm{Id}\colon Tych\to Tych$ *в функтор* $O_\tau\colon Tych\to Tych$*, причем каждая компонента* $\delta_X\colon X\to O_\tau(X)$ *является замкнутым вложением.*

Теорема 11 (см. [25]). *Функтор* O_τ *является монадичным в категории* Tych.

Приведем некоторые открытые задачи.

Задача 1. Остаётся открытой задача о полноте различного типа пространств вида $O_\varepsilon(X)$, где $\varepsilon=\beta$, R, τ и σ.

Задача 2. Установить категорные свойства функторов вида O_ε, где $\varepsilon=R$ и σ.

Задача 3. Как ведут себя непрерывные отображения тихоновских пространств при воздействии на них функторами вида O_ε, где $\varepsilon=R$ и σ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архангельский А. В.* Пространства функций в топологии поточечной сходимости и компакты// Усп. мат. наук. — 1984. — *39*, № 5. — С. 11–50.
2. *Бешимов Р. Б.* Продолжение функтора слабо аддитивных нормированных и сохраняющих порядок функционалов на категорию тихоновских пространств// Докл. АН РУз. — 2003. — *4*. — С. 11–15.
3. *Бешимов Р. Б.* Некоторые свойства функтора O_β// Уч. зап. ПОМИ. — 2004. — *313*. — С. 131–134.
4. *Варадараян В. С.* Меры на топологических пространствах// Мат. сб. — 1961. — *55*, № 1. — С. 35–100.
5. *Жиемуратов Р. Е., Заитов А. А.* О вещественной полноте пространства слабо аддитивных σ-гладких функционалов// Владикавказ. мат. ж. — 2009. — *11*, № 1. — С. 22–28.
6. *Заитов А. А.* Некоторые категорные свойства функторов O_τ и O_R слабо аддитивных функционалов// Мат. заметки. — 2006. — *79*, № 5. — С. 681–693.
7. *Заитов А. А.* Теорема об открытом отображении пространств слабо аддитивных однородных функционалов// Мат. заметки. — 2010. — *88*, № 5. — С. 683–688.
8. *Федорчук В. В.* Вероятностные меры в топологии// Усп. мат. наук. — 1991. — *46*, № 1. — С. 41–80.
9. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. — М.: МГУ, 1988.
10. *Чигогидзе А. Ч.* О продолжении нормальных функторов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — *6*. — С. 23–26.
11. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
12. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., Zaitov A. A.* On certain properties of the spaces of order-preserving functionals// Topol. Appl. — 2008. — *155*, № 16. — P. 1792–1799.
13. *Ayupov Sh. A., Zaitov A. A.* Uniform boundness principle for order-preserving operators// Uzbek Math. J. — 2006. — *4*. — P. 3–10.
14. *Ayupov Sh. A., Zaitov A. A.* Order-preserving functionals on linear spaces// Докл. АН РУз. — 2006. — *4–5*. — С. 7–12.
15. *Ayupov Sh. A., Zaitov A. A.* Functor of weakly additive τ-smooth functionals and mappings// Ukr. Math. J. — 2009. — *61*. — P. 1380–1386.
16. *Ayupov Sh. A., Zaitov A. A.* On some topological properties of order-preserving functionals// Uzbek Math. J. — 2011. — *4*. — P. 36–51.
17. *Radul T. N.* A functional representation of the hyperspace monad// Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1997. — *38*, № 1. — P. 165–168.
18. *Radul T. N.* On the functor of order-preserving functionals// Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1998. — *39*, № 3. — P. 609–615.
19. *Radul T. N.* Topology of the spaces of order-preserving functionals// Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 1999. — *47*, № 1. — P. 53–60.
20. *Radul T. N.* A functional representation of capacity monad// Topology. — 2009. — *48*, № 2–4. — P. 100–104.
21. *Yan J. A.* Introduction to Stochastic Finance. — Singapore: Springer, 2018.
22. *Zaitov A. A.* Some properties of order-preserving functionals and signed measures// Uzbek Math. J. — 2000. — *5–6*. — P. 21–25.

23. *Zaitov A. A.* Cellularity and (weakly-)density of the space of order-preserving functionals// Uzbek Math. J. — 2003. — *2*. — P. 16–21.
24. *Zaitov A. A.* On categorical properties of the functor of order-preserving functionals// Meth. Funct. Anal. Topol. — 2003. — *9*, № 4. — P. 357–364.
25. *Zaitov A. A.* On monad of order-preserving functionals// Meth. Funct. Anal. Topol. — 2005. — *11*, № 3. — P. 206–209.
26. *Zaitov A. A.* On extension of order-preserving functionals// Докл. АН РУз. — 2005. — *5*. — С. 3–7.
27. *Zaitov A. A.* The functor of order-preserving functionals of finite degree// J. Math. Sci. — 2006. — *133*, № 5. — P. 1602–1603.
28. *Zaitov A. A.* Order-preserving variants of the basic principles of functional analysis// Fundam. J. Math. Appl. — 2019. — *2*, № 1. — P. 10–17.
29. *Zaitov A. A.* On dimension of the space of monetary risk measures// Proc. Conf. “Science, Technology, Education, Mathematics, and Medicine” (May 16, 2019). — National University of Uzbekistan.
30. *Zaitov A. A., Jiemuratov R. E.* On the weight of the space of order-preserving σ-smooth functionals// Uzbek Math. J. — 2009. — *4*. — P. 61–69.
31. *Zaitov A. A., Jiemuratov R. E.* Tensor product of oreder-preserving positive-homegeneous functionals// Вестн. Каракалпак. ун-та. — 2009. — *2*. — С. 5–8.

Заитов Адилбек Атаханович
Ташкентский архитектурно-строительный институт, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `adilbek_zaitov@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 46–55
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-46-55

УДК 514.7

ИНВАРИАНТЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ ГРУППЫ $\mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$ ДВУМЕРНОГО БИЛИНЕЙНО-МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

© 2021 г. **Д. ХАДЖИЕВ, Г. Р. БЕШИМОВ**

Аннотация. Пусть $\mathbb{Q}$ — двумерное векторное пространство над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + px_2y_2$ — билинейная форма над $\mathbb{Q}^2$, где $p = 1$ или $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$; здесь p_j — такие простые числа, что $p_k \neq p_l$ для $k \neq l$, $k \leqslant n$, $l \leqslant n$. Через $\mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$ обозначим группу всех линейных преобразований $\mathbb{Q}^2$, сохраняющих форму $\langle x, y\rangle$. Положим $\mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q}) = \{g \in \mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q}) : \det(g) = 1\}$. Настоящая статья посвящена решению задачи G-эквивалентности конечных последовательностей точек в $\mathbb{Q}^2$ для группы $\mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$. Получена полная система G-инвариантов конечных последовательностей точек в $\mathbb{Q}^2$ для группы $G = \mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$.

Ключевые слова: инвариант, метрическое пространство, группа.

INVARIANTS OF SEQUENCES FOR THE GROUP $\mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$ OF A TWO-DIMENSIONAL BILINEAR METRIC SPACE OVER THE FIELD OF RATIONAL NUMBERS

© 2021 **D. KHADJIEV, G. R. BESHIMOV**

Abstract. Let $\mathbb{Q}$ ne the two-dimensional vector space over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ and $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + px_2y_2$ be a bilinear form on $\mathbb{Q}^2$, where $p = 1$ or $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$; here p_j are prime numbers such that $p_k \neq p_l$ for $k \neq l$, $k \leqslant n$, and $l \leqslant n$. We denote by $\mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$ the group of all linear transformations of $\mathbb{Q}^2$ that preserve the form $\langle x, y\rangle$ and set $\mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q}) = \{g \in \mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q}) : \det(g) = 1\}$. This paper is devoted to the problem on the G-equivalence of finite sequences of points in $\mathbb{Q}^2$ for the group $\mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$. We obtain a complete system of G-invariants of finite sequences of points in $\mathbb{Q}^2$ for the group $G = \mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$.

Keywords and phrases: invariant, metric space, group.

AMS Subject Classification: 14L24, 15A63, 15A72

1. Введение. Общая теория инвариантов систем конечного числа точек исследована в работах по теории инвариантов (см. [1, 3, 10, 17, 18] и др.). Пусть L — конечномерное векторное пространство над полем Λ и φ — невырожденная билинейная форма на L. Обозначим через $\mathrm{O}(\varphi, \Lambda)$ группу всех преобразований пространства L, сохраняющих форму φ. Через $\mathrm{MO}(\varphi, \Lambda)$ обозначим группу преобразований L, порожденную элементами группы $\mathrm{O}(\varphi, \Lambda)$ и параллельными переносами в L. В [6] исследованы инварианты конечных последовательностей в евклидовой, сферической, гиперболической геометриях. В [2] дана полная система инвариантов конечных последовательностей для группы $\mathrm{MO}(\varphi, \Lambda)$ в евклидовом пространстве. В [9, 14] найдены полные системы инвариантов конечных последовательный для основных групп в двумерном псевдоевклидовом пространстве. Инварианты конечных последовательностей возникают также в теории кривых Безье (см. [5, 13]), в теории распознавания образов (см. [11, 15]) и в вычислительной геометрии (см. [12]). В [8] анонсирован результат о полной системе инвариантов отображений фиксированного множества в двумерное евклидово пространство. В [7] найдена полная система инвариантов конечных последовательностей в одномерном проективном пространстве.

2. Линейное представление поля $\mathbb{Q}\sqrt{-p}$ в двумерном пространстве $\mathbb{Q}^2$. Пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел и p — фиксированное число: $p = 1$ или $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, где p_j — такие простые числа, что $p_k \neq p_l$ для $k \neq l$, $k \leqslant n$, $l \leqslant n$. Обозначим через $\mathbb{Q}\sqrt{-p}$ множество всех чисел вида $a + b\sqrt{-p}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Пусть $a = a_1 + \sqrt{-p}a_2, b = b_1 + \sqrt{-p}b_2 \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$. Тогда умножение в $\mathbb{Q}\sqrt{-p}$ имеет вид

$$\big(a_1 + \sqrt{-p}a_2\big)\big(b_1 + \sqrt{-p}b_2\big) = \big(a_1b_1 - pa_2b_2\big) + \sqrt{-p}\big(a_1b_2 + a_2b_1\big);$$

$\mathbb{Q}\sqrt{-p}$ есть подполе поля комплексных чисел и является двумерным векторным пространством над полем $\mathbb{Q}$.

Пусть $a = a_1 + \sqrt{-p}a_2$. Обозначим через M_a матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & -pa_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $M(\mathbb{Q}\sqrt{-p})$ — множество всех матриц M_a, где $a \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$. Рассмотрим на множестве $M(\mathbb{Q}\sqrt{-p})$ стандартные матричные операции: покомпонентное сложение и умножение матриц. Тогда $M(\mathbb{Q}\sqrt{-p})$ — поле, в котором единичная матрица является единичным элементом. Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 1. *Отображение $M\colon \mathbb{Q}\sqrt{-p} \to M(\mathbb{Q}\sqrt{-p})$, где $M\colon a \to M_a$, $\forall a \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$, является изоморфизмом полей $\mathbb{Q}\sqrt{-p}$ и $M(\mathbb{Q}\sqrt{-p})$.*

Для $a = a_1 + \sqrt{-p}a_2, b = b_1 + \sqrt{-p}b_2 \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$ положим

$$\langle a, b\rangle = a_1b_1 + pa_2b_2.$$

Тогда $\langle a, b\rangle$ является билинейной формой в $\mathbb{Q}\sqrt{-p}$, а $\langle a, a\rangle = a_1^2 + pa_2^2$ — квадратичной формой в $\mathbb{Q}\sqrt{-p}$. Для удобства введем обозначение $K(a) = \langle a, a\rangle$. Пара $(\mathbb{Q}^2, \langle a, b\rangle)$ является билинейно-метрическим пространством над $\mathbb{Q}^2$.

Следующие предложения 2—7 легко доказываются.

Утверждение 2. *Пусть $M\colon \mathbb{Q}\sqrt{-p} \to M(\mathbb{Q}\sqrt{-p})$ — изоморфизм $M\colon x \to M_x$ полей $\mathbb{Q}\sqrt{-p}$ и $M(\mathbb{Q}\sqrt{-p})$. Тогда $K(x) = \det(M_x)$ и $K(xy) = K(x)K(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$.*

Для элемента $a = a_1 + \sqrt{-p}a_2 \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$ положим $W(a) = \overline{a} = a_1 - \sqrt{-p}a_2$.

Утверждение 3. *Отображение $a \to \overline{a}$ является инволюцией поля $\mathbb{Q}\sqrt{-p}$. Кроме того, для элемента $a = a_1 + \sqrt{-p}a_2 \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$ имеем*

$$a + \overline{a} = 2a_1, \quad \langle a, a\rangle = a\overline{a} = a_1^2 + pa_2^2 \in \mathbb{Q}$$

для всех $a \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$.

Утверждение 4. *Функция $K(x)$ обладает следующими свойствами:*

(i) *$K(\lambda x) = \lambda^2 K(x)$ для всех $\lambda \in \mathbb{Q}$ и всех $x \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$;*
(ii) *$K(e) = 1$ для единичного элемента $e \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$;*
(iii) *$K(x) = x\overline{x} = \overline{x}x$ для всех $x \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$;*
(iv) *$K(x) = K(W(x)) = K(\overline{x})$ для всех $x \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$.*

Утверждение 5. *Пусть $x \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$. Элемент x^{-1} существует тогда и только тогда, когда $K(x) \neq 0$. В случае $K(x) \neq 0$ выполнены равенства*

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{K(x)}, \quad K(x^{-1}) = \frac{1}{K(x)}.$$

Введем обозначение $\mathbb{Q}^*\sqrt{-p} = \{x \in \mathbb{Q}\sqrt{-p} \mid K(x) \neq 0\}$. Множество $\mathbb{Q}^*\sqrt{-p}$ является группой относительно операции умножения в поле $\mathbb{Q}\sqrt{-p}$. Обозначим через $M(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p})$ множество всех матриц M_a, где $a \in \mathbb{Q}^*\sqrt{-p}$. Рассмотрим элементы $a = a_1 + \sqrt{-p}a_2 \in \mathbb{Q}^*\sqrt{-p}$ и $x = x_1 + \sqrt{-p}x_2 \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$ как векторы-столбцы

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$M_a = \begin{pmatrix} a_1 & -pa_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $a \in \mathbb{Q}^*\sqrt{-p}$, имеем $K(a) = a_1^2 + pa_2^2 \neq 0$ и $K(a) = \det(M_a) \neq 0$. Тогда равенство

$$ax = \bigl(a_1 + \sqrt{-p}a_2\bigr)\bigl(x_1 + \sqrt{-p}x_2\bigr) = \bigl(a_1x_1 - pa_2x_2\bigr) + \sqrt{-p}\bigl(a_1x_2 + a_2x_1\bigr)$$

имеет следующий вид:

$$ax = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 - pa_2x_2 \\ a_1x_2 + a_2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -pa_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M_ax, \tag{1}$$

где M_ax — произведение матриц M_a и x. Отображение $M\colon \mathbb{Q}^*\sqrt{-p} \to M(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p})$, где $M(a) = M_a$, является линейным представлением группы $\mathbb{Q}^*\sqrt{-p}$ в $\mathbb{Q}^2$.

Утверждение 6. *Множество $M(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p})$ является группой относительно операции умножения в поле $M(\mathbb{Q}\sqrt{-p})$.*

Введем обозначение $S(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p}) = \{x \in \mathbb{Q}\sqrt{-p} \mid K(x) = 1\}$. Это подгруппа группы $\mathbb{Q}^*\sqrt{-p}$. Положим $M(S(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p})) = \{M_a \in M(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p}) \mid \det(M_a) = 1\}$.

Утверждение 7. *Пусть $M\colon \mathbb{Q}\sqrt{-p} \to M(\mathbb{Q}\sqrt{-p})$ — изоморфизм $M\colon x \to M_x$ полей $\mathbb{Q}\sqrt{-p}$ и $M(\mathbb{Q}\sqrt{-p})$. Тогда $M(S(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p}))$ является подгруппой группы $M(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p})$ и отображение $M\colon S(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p}) \to M(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p})$, где $M(a) = M_a$, является линейным представлением группы $S(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p})$ в $\mathbb{Q}^2$.*

3. Основные группы преобразований двумерного билинейно-метрического пространства $(\mathbb{Q}^2, \langle a, b\rangle)$.

Определение 1. Отображение $F\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ называется *ортогональным*, если $\langle Fx, Fy\rangle = \langle x, y\rangle$ для всех $x, y \in \mathbb{Q}^2$.

Обозначим множество всех ортогональных преобразований пространства $\mathbb{Q}^2$ через $\mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$. Пусть $I\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ — единичное преобразование $I(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{Q}^2$. Тогда $I \in \mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$. Пусть $T_1, T_2 \in \mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$ и $T_1 \cdot T_2\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ таков, что $(T_1 \cdot T_2)(x) = T_1(T_2(x))$ для всех $x \in \mathbb{Q}^2$. Легко видеть, что $T_1 \cdot T_2 \in \mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$.

Следующие предложения 8—10 легко доказываются.

Утверждение 8. *Множество $\mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$ является группой относительно операции композиции $T_1 \cdot T_2$.*

Утверждение 9 (см. [4, с. 221])**.** *Каждое ортогональное преобразование $T \in \mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$ является линейным.*

Пусть $a = a_1 + \sqrt{-p}a_2$, $b = b_1 + \sqrt{-p}b_2 \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$. Обозначим матрицу билинейной формы $\langle a, b\rangle = a_1b_1 + pa_2b_2$ через $\Delta = \|\delta_{ij}\|_{i,j=1,2}$, где $\delta_{11} = 1$, $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$, $\delta_{22} = p$. В силу предложения 9 элемент $\mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$ можно рассматривать как (2×2)-матрицу. Пусть $H \in \mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$, где $H = \|h_{ij}\|_{i,j=1,2}$. Пусть H^T — транспонированная матрица для H. Известно, что равенство $\langle Hx, Hy\rangle = \langle x, y\rangle$ для всех $x, y \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$ эквивалентно равенству

$$H^T\Delta H = \Delta. \tag{2}$$

Утверждение 10. . *Пусть $H \in \mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$. Тогда* $\det(H) = 1$ *или* $\det(H) = -1$.

Обозначим через $\mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$ множество $\{H \in \mathrm{O}(2,p,\mathbb{Q}) : \det(H) = 1\}$. Множество $\mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$ является подгруппой в $\mathrm{O}(2,p,\mathbb{Q})$.

Теорема 1. *Имеет место равенство* $\mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q}) = M(S(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p}))$.

Доказательство. $\Leftarrow$. Предположим, что $H \in M(S(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p}))$. Тогда этот элемент имеет вид $H = \|h_{ij}\|_{i,j=1,2}$, где $h_{11} = h_{22} = c$, $h_{21} = d$, $h_{12} = -pd$, $c, d \in \mathbb{R}$ и $\det(H) = c^2 + pd^2 = 1$. Докажем, что $H \in \mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$. Пусть

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2.$$

Имеем

$$H(x) = \begin{pmatrix} cx_1 - pdx_2 \\ dx_1 + cx_2 \end{pmatrix}, \quad H(y) = \begin{pmatrix} cy_1 - pdy_2 \\ dy_1 + cy_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Используя равенство $c^2 + pd^2 = 1$, получим

$$\begin{aligned} \langle H(x), H(y)\rangle = (cx_1 - pdx_2)(cy_1 - pdy_2) + p(dx_1 + cx_2)(dy_1 + cy_2) = \\ = (c^2 + pd^2)(x_1y_1 + px_2y_2) = \langle x, y\rangle. \end{aligned} \tag{4}$$

Следовательно, $H \in \mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$.

$\Rightarrow$. Предположим, что $H \in \mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$, где $H = \|h_{ij}\|_{i,j=1,2}$. Тогда $\det(H) = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1$ и $\langle H(x), H(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ для всех $x, y \in \mathbb{Q}^2$. Эти равенства эквивалентны следующей системе равенств:

$$h_{11}^2 + ph_{21}^2 = 1, \tag{5}$$

$$h_{11}h_{12} + ph_{21}h_{22} = 0, \tag{6}$$

$$h_{12}^2 + ph_{22}^2 = p, \tag{7}$$

$$h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1. \tag{8}$$

Возможны только следующие два случая:

(I) $h_{12} = 0$ и

(II) $h_{12} \neq 0$.

Пусть $h_{12} = 0$. Тогда из (6) следует $h_{22}^2 = 1$. Следовательно, $h_{22} = 1$ или $h_{22} = -1$.

Пусть $h_{22} = 1$. Тогда из равенств $h_{22} = 1$, $h_{12} = 0$ и (6) следует $h_{21} = 0$. Используя равенства $h_{21} = 0$ и (5), получаем $h_{11}^2 = 1$. Следовательно, $h_{11} = 1$ или $h_{11} = -1$. Таким образом, в случае $h_{12} = 0$ и $h_{22} = 1$ получаем $h_{21} = 0$ и $h_{11} = 1$ или $h_{11} = -1$. Следовательно, в этом случае получаем только следующие две матрицы:

$$A_1 = \{h_{11} = 1, h_{12} = 0, h_{21} = 0, h_{22} = 1\}, \quad A_2 = \{h_{11} = -1, h_{12} = 0, h_{21} = 0, h_{22} = 1\}. \tag{9}$$

Очевидно, что $A_1 \in \mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$ и $A_2 \notin \mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$.

Пусть $h_{22} = -1$. Тогда из равенств $h_{22} = -1$, $h_{12} = 0$ и (6) следует $h_{21} = 0$. Используя равенства $h_{21} = 0$ и (5), получаем $h_{11}^2 = 1$. Следовательно, $h_{11} = 1$ или $h_{11} = -1$. Таким образом, в случае $h_{12} = 0$ и $h_{22} = -1$ мы получаем $h_{21} = 0$ и $h_{11} = 1$ или $h_{11} = -1$. Следовательно, в этом случае мы получаем только следующие две матрицы:

$$A_3 = \{h_{11} = 1, h_{12} = 0, h_{21} = 0, h_{22} = -1\}, \quad A_4 = \{h_{11} = -1, h_{12} = 0, h_{21} = 0, h_{22} = -1\}.$$

Очевидно, что $A_4 \in \mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$ и $A_3 \notin \mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$.

Пусть $h_{12} \neq 0$. Используя (6), получим

$$h_{11} = -\frac{ph_{21}h_{22}}{h_{12}}.$$

Используя это равенство и равенства (5), (7), находим

$$\left(-\frac{ph_{21}h_{22}}{h_{12}}\right)^2 + ph_{21}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad p^2h_{21}^2h_{22}^2 + ph_{12}^2h_{21}^2 = h_{12}^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad ph_{21}^2(ph_{22}^2 + h_{12}^2) = h_{12}^2 \quad \Rightarrow \quad p^2h_{21}^2 = h_{12}^2 \quad \Rightarrow \quad h_{12}^2 - p^2h_{21}^2 = 0.$$

Следовательно, получаем $h_{12} - ph_{21} = 0$ или $h_{12} + ph_{21} = 0$. Рассмотрим два случая: $h_{12} - ph_{21} = 0$ и $h_{12} + ph_{21} = 0$.

Пусть $h_{12} - ph_{21} = 0$. Тогда $h_{12} = ph_{21}$. Поскольку $h_{12} \neq 0$, получаем $h_{21} \neq 0$. Используя равенство $h_{12} = ph_{21}$ и (6), находим $ph_{11}h_{21} + ph_{21}h_{22} = 0$. Следовательно, $ph_{21}(h_{11} + h_{22}) = 0$. Поскольку $h_{21} \neq 0$, из этого равенства следует $h_{11} = -h_{22}$. Таким образом, приходим к равенствам $h_{12} = ph_{21}$ и $h_{11} = -h_{22}$. Используя (8), получаем $-h_{11}^2 - ph_{21}^2 = 1$. Поскольку $-(h_{11}^2 + ph_{21}^2) = 1$, имеем противоречие. Следовательно, этот случай невозможен.

Рассмотрим случай $h_{12} + ph_{21} = 0$. Это равенство означает, что $h_{12} = -ph_{21}$. Используя это равенство и равенство (6) ($h_{11}h_{12} + ph_{21}h_{22} = 0$), получаем $-ph_{11}h_{21} + ph_{21}h_{22} = 0$. Следовательно, $ph_{21}(h_{11} - h_{22}) = 0$. Поскольку $h_{21} \neq 0$, из этого равенства следует $h_{11} = h_{22}$. Следовательно, выполняются равенства $h_{12} = -ph_{21}$, $h_{11} = h_{22}$, которые вместе с (5) означают, что матрица H имеет вид

$$\begin{pmatrix} h_{11} & -ph_{21} \\ h_{21} & h_{11} \end{pmatrix},$$

где $\det(H) = 1$. Следовательно, $H \in M(S(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p}))$. ☐

В силу теоремы 1 группа $\mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$ состоит из всех матриц $M_x \in M(S(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p}))$ вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & -px_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

где $(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2$ таков, что $x_1^2 + px_2^2 = 1$. Таким образом, для полного описания группы $\mathrm{SO}(2, p, Q)$ осталось найти все решения уравнения $x_1^2 + px_2^2 = 1$ в рациональных числах x_1, x_2.

Теорема 2. *Описание элементов группы* $\mathrm{SO}(2, p, Q)$ *выглядит следующим образом.*

1. *Не существует такого элемента* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2$, *что* $x_1 = 0$ *и* $M_x \in \mathrm{SO}(2, p, Q)$. *Существуют только два элемента* $(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2$, *удовлетворяющих условиям* $x_2 = 0$ *и* $M_x \in \mathrm{SO}(2, p, Q)$; *это* $(1, 0)$ *и* $(-1, 0)$.
2. *Предположим, что* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2$ *таков, что* $x_2 \neq 0$ *и* $M_x \in \mathrm{SO}(2, p, Q)$. *Тогда существует такое число* $r \in \mathbb{Q}$, *где* $r \neq 0$, *что выполнены равенства*
$$x_1 = \frac{p - r^2}{p + r^2}, \quad x_2 = \frac{2r}{p + r^2}. \tag{10}$$
3. *Обратно, предположим, что* r *является произвольным ненулевым элементом в* $\mathbb{Q}$ *и для элемента* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2$ *выполнены равенства* (10). *Тогда* $M_x \in \mathrm{SO}(2, p, Q)$.

Доказательство. Утверждение 1 очевидно.

Для доказательства утверждения 1 предположим, что $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}$ таков, что $x_2 \neq 0$ и $x_1^2 + px_2^2 = 1$. Сначала докажем, что в этом случае $x_1^2 \neq 1$. Предположим, что $x_1^2 = 1$. Тогда из уравнения $x_1^2 + px_2^2 = 1$ заключаем, что $px_2^2 = 0$. Так как $p \neq 0$, отсюда следует, что $x_2 = 0$. Это противоречит предположению $x_2 \neq 0$. Следовательно $x_1^2 \neq 0$, т.е. $x_1 \neq 1$ и $x_1 \neq -1$.

Из уравнения $x_1^2 + px_2^2 = 1$ и из неравенств $x_1 \neq 1$, $x_1 \neq -1$ получаем следующие равенства:

$$px_2^2 = 1 - x_1^2 \quad \Rightarrow \quad px_2^2 = (1 - x_1)(1 + x_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{px_2}{1 + x_1} = \frac{1 - x_1}{x_2}.$$

Положим

$$r = \frac{px_2}{1 + x_1}.$$

Тогда имеем

$$r = \frac{1 - x_1}{x_2}.$$

Из этих двух равенств получаем

$$\frac{1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{p}{r}, \quad \frac{1}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} = r.$$

Отсюда

$$\frac{2}{x_2} = \frac{p}{r} + r, \quad \frac{2x_1}{x_2} = \frac{p}{r} - r.$$

Из этих двух равенств находим

$$x_1 = \frac{p - r^2}{p + r^2}, \quad x_2 = \frac{2r}{p + r^2}.$$

Утверждение 2 доказано.

Докажем утверждение 3. Пусть $r \in \mathbb{Q}$ — произвольное рациональное число, отличное от нуля. Положим

$$x_1 = \frac{p - r^2}{p + r^2}, \quad x_2 = \frac{2r}{p + r^2}.$$

Имеем

$$x_1^2 + px_2^2 = \left(\frac{p - r^2}{p + r^2}\right)^2 + p\left(\frac{2r}{p + r^2}\right)^2 = \frac{p^2 - 2pr^2 + r^4 + 4pr^2}{(p + r^2)^2} = \frac{p^2 + 2pr^2 + r^4}{(p + r^2)^2} = 1.$$

Следовательно, $M_x \in \mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$. □

4. Полная система инвариантов m-последовательности в $\mathbb{Q}^2$ для группы $\mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$**.** Пусть $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$. Положим $\mathbb{N}_m = \{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant j \leqslant m\}$. Отображение $u\colon \mathbb{N}_m \to \mathbb{Q}^2$ будем называть m-последовательностью в $\mathbb{Q}^2$ и обозначать $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Множество всех m-последовательностей в $\mathbb{Q}^2$ обозначим через $(\mathbb{Q}^2)^m$. Пусть G — подгруппа группы $\mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$.

Определение 2. Две m-последовательности $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ и $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ в $\mathbb{Q}^2$ называются G-эквивалентными, если существует $g \in G$, для которого $v_j = gu_j$ при всех $j \in \mathbb{N}_m$. Обозначение $v = g(u)$ или $u \overset{G}{\sim} v$.

Определение 3. Подмножество $B \subseteq (\mathbb{Q}^2)^m$ называется G-инвариантным, если $g(u) \in B$ при всех $u \in B$ и всех $g \in G$.

Определение 4. Пусть B — G-инвариантное подмножество в $(\mathbb{Q}^2)^m$. Функция $f\colon B \to \mathbb{R}$ называется G-инвариантной на B, если из $u, v \in B$ и $u \overset{G}{\sim} v$ следует $f(u) = f(v)$. Множество всех G-инвариантных функций $f\colon B \to Q$ на B обозначим через $\mathrm{Map}(B, Q)^G$.

Пример 1. Из определений групп $G = \mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$, $\mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$ следует, что квадратичная форма $K(x) = \langle x, x\rangle$ является G-инвариантной функцией на множестве $\mathbb{Q}^2$.

Пример 2. Из определения групп $G = \mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$, $\mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$ следует, что билинейная форма $\langle x, y\rangle$ является G-инвариантной функцией на множестве $(\mathbb{Q}^2)^2$.

Пример 3. Для векторов $x, y \in \mathbb{Q}^2$ обозначим через $[x, y]$ составленный из них определитель:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [x, y] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Поскольку $\det(g) = 1$ для всех $g \in \mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$, имеем $[(gx)(gy)] = \det(g)[xy] = [xy]$ для всех $g \in \mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$ и всех $x, y \in (\mathbb{Q}^2)^2$. Следовательно, $[xy]$ является $\mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$-инвариантной функцией на множестве $(\mathbb{Q}^2)^2$.

Определение 5 (см. [16, 1.1])**.** Пусть B — G-инвариантное подмножество в $(\mathbb{Q}^2)^m$. Система $\{f_j \mid j \in J\}$, где $f_j \in \mathrm{Map}(B, Q)^G$, называется *полной системой* G-инвариантных функций на B, если из $u, v \in B$ и равенств $f_j(u) = f_j(v)$ при всех $j \in J$ следует $u \overset{G}{\sim} v$.

Положим $\theta = (0,0) \in \mathbb{Q}^2$. Обозначим m-последовательность $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in (\mathbb{R}^2)^m$, где $u_j = \theta$ для всех $j \in \mathbb{N}_m$, через θ_m. Определим функцию $D\colon (\mathbb{Q}^2)^m \to \mathbb{N}$ следующим образом. Положим $D(0_m) = 0$. Пусть $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in (\mathbb{Q}^2)^m$ такова, что $u \neq \theta_m$. В этом случае положим $D(u) = k$, где $k \in \mathbb{N}_m$ удовлетворяет условиям $u_j = \theta$ для всех $j = 1, \dots, k-1$ и $u_k \neq \theta$.

Нетрудно доказать следующие утверждения.

Утверждение 11. *Пусть G — подгруппа в $\mathrm{O}(2,p,\mathbb{Q})$. Функция $D(u)$ является G-инвариантной функцией на $(\mathbb{Q}^2)^m$.*

Обозначим через $U(m;0)$ множество $\{\theta_m\}$. Пусть $k \in \mathbb{N}_m$. Обозначим через $U(m;k)$ множество $\{u \in (\mathbb{Q}^2)^m \mid D(u) = k\}$.

Утверждение 12. *Пусть G — подгруппа в $\mathrm{O}(2,p,\mathbb{Q})$.*

1. *Множество $U(m;k)$ является G-инвариантным подмножеством $(\mathbb{Q}^2)^m$ для $k = 0$ и всех $k \in \mathbb{N}_m$.*
2. *$U(m;0) \cap U(m;l) = \varnothing$ при всех $l \in \mathbb{N}_m$ и $U(m;k) \cap U(m;l) = \varnothing$ при всех $k, l \in \mathbb{N}_m$, $k \neq l$.*
3. $U(m;0) \cup \left(\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}_m} U(m;k)\right) = (\mathbb{Q}^2)^m$.

Утверждение 13. *Пусть $x \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$, $x \neq 0$.*

1. Для любого $y \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$ элемент yx^{-1} существует, причем

$$yx^{-1} = \frac{\langle x, y\rangle}{K(x)} + \sqrt{-p}\frac{[xy]}{K(x)}$$

и имеет место равенство

$$M_{yx^{-1}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\langle x, y\rangle}{K(x)} & -\dfrac{p[xy]}{K(x)} \\ \dfrac{[xy]}{K(x)} & \dfrac{\langle x, y\rangle}{K(x)} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

2. Определитель

$$\det(M_{yx^{-1}}) = \left(\frac{\langle x, y\rangle}{K(x)}\right)^2 + p\left(\frac{[xy]}{K(x)}\right)^2$$

отличен от нуля тогда и только тогда, когда $K(y) \neq 0$.

Доказательство. 1. Пусть $x = x_1 + \sqrt{-p}x_2 \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$, $x \neq 0$. Тогда x^{-1} существует. Отсюда следует, что для любого $y \in \mathbb{Q}\sqrt{-p}$ элемент yx^{-1} существует. В силу утверждения 5 имеем $x^{-1} = W(x)/K(x)$. Используя соотношение $W(x) = x_1 - \sqrt{-p}x_2$ и умножение в поле $\mathbb{Q}\sqrt{-p}$, получаем равенство

$$yx^{-1} = \frac{\langle x, y\rangle}{K(x)} + \sqrt{-p}\frac{[xy]}{K(x)}$$

и уравнение (11).

2. Пусть $K(x) \neq 0$. Используя утверждение 2 и (11), получаем

$$\left(\frac{\langle x, y\rangle}{K(x)}\right)^2 + \left(\frac{p[xy]}{K(x)}\right)^2 = \det(M_{yx^{-1}}) = K(yx^{-1}) = K(y)K(x^{-1}) = \frac{K(y)}{K(x)}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\langle x, y\rangle}{K(x)}\right)^2 + \left(\frac{p[xy]}{K(x)}\right)^2 = \frac{K(y)}{K(x)}.$$

Это равенство означает, что

$$\det(M_{yx^{-1}}) = \frac{K(y)}{K(x)} \neq 0$$

тогда и только тогда, когда $K(y) \neq 0$. □

Теперь рассмотрим проблему G-эквивалентности m-последовательностей для группы $\mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$.

Утверждение 14. *Пусть G — подгруппа в $\mathrm{O}(2, p, \mathbb{Q})$ и $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, \ldots, v_m) \in (\mathbb{Q}^2)^m$ — такие m-последовательности, что $u \overset{G}{\sim} v$. Тогда $D(u) = D(v)$.*

Доказательство. Предположим, что $u \overset{G}{\sim} v$. Согласно утверждению 11 функция $D(u)$ является G-инвариантной. Из G-эквивалентности u, v и G-инвариантности $D(u)$ получаем $D(u) = D(v)$. □

Пусть $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, \ldots, v_m) \in (\mathbb{Q}^2)^m$ — такие m-последовательности, что $D(u) = D(v) = 0$. Тогда $u = v = \theta_m$. Следовательно, в этом случае $u \overset{G}{\sim} v$. Теперь рассмотрим случай $D(u) = D(v) \neq 0$.

Теорема 3. *Пусть $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \in (\mathbb{Q}^2)^m$ — такие m-последовательности в $\mathbb{Q}^2$, что $D(u) = D(v) = k$, где $1 \leqslant k \leqslant m$.*

A. *Предположим, что $u \overset{\mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})}{\sim} v$.*
1. *В случае $k = m$ выполняется равенство $K(u_k) = K(v_k)$.*
2. *В случае $k < m$ выполняются следующие равенства*:

$$\begin{cases} K(u_k) = K(v_k); \\ \langle u_k, u_j \rangle = \langle v_k, v_j \rangle \quad \forall j = k+1, \ldots, m; . \\ [u_k u_j] = [v_k v_j] \quad \forall j = k+1, \ldots, m. \end{cases} \tag{12}$$

B. *Обратно, предположим, что равенство $K(u_k) = K(v_k)$ имеет место в случае $k = m$ и равенства* (12) *имеют место в случае $k < m$. В этих случаях существует единственная матрица $F \in \mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$, для которой $v_j = F u_j$ при всех $j = 1, \ldots, m$. В этих случаях F имеет следующий вид*:

$$F = \begin{pmatrix} \dfrac{\langle u_k, v_k \rangle}{K(u_k)} & \dfrac{-p[u_k v_k]}{K(u_k)} \\ \dfrac{[u_k v_k]}{K(u_k)} & \dfrac{\langle u_k, v_k \rangle}{K(u_k)} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$\det(F) = \left(\frac{\langle u_k, v_k \rangle}{K(u_k)}\right)^2 + p\left(\frac{[u_k v_k]}{K(u_k)}\right)^2 = 1.$$

Доказательство. I. Предположим, что $u \overset{\mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})}{\sim} v$. В случае A1 функция $K(u_k)$ является $\mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$-инвариантной. Следовательно, имеет место равенство $K(u_k) = K(v_k)$.

В случае A2 функции $K(u_k)$, $\langle u_k, u_j \rangle$ и $[u_k u_j]$ также $\mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$-инвариантны для всех $j = k+1, \ldots, m$. Следовательно, имеют место равенства (12).

II. Обратно, предположим, что равенство $K(u_k) = K(v_k)$ имеет место в случае $k = m$, а равенства (12) имеют место в случае $k < m$.

Пусть $k = m$. Рассмотрим элемент $g = v_k u_k^{-1} \in \mathbb{Q}^* \sqrt{-p}$. Так как $v_k = v_k(u_k^{-1} u_k) = (v_k u_k^{-1}) u_k$, имеем $v_k = g u_k$. Тогда по формуле (1) получаем, что $v_k = M_g u_k$, где $M_g \in M(\mathbb{Q}^* \sqrt{-p})$. Используя равенство $K(u_k) = K(v_k)$ и утверждения 2, 5, получаем

$$\det(M_g) = K(g) = K(v_k u_k^{-1}) = K(v_k) K(u_k^{-1}) = K(v_k) K(u_k)^{-1} = 1.$$

Следовательно, $g \in S(\mathbb{Q}^* \sqrt{-p})$. По теореме 1 имеем $M_g \in \mathrm{SO}(2, p, \mathbb{Q})$. Поэтому $v_j = M_g u_j$ для всех $j = 1, \ldots, m$. Следовательно, $u \overset{\mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})}{\sim} v$ в случае $k = m$. В силу $g = v_k u_k^{-1}$ и утверждения 13 матрица M_g имеет вид (13). Из равенства $\det(M_g) = 1$ и утверждения 13 получаем равенство

$$\det(M_g) = \left(\frac{\langle u_k, v_k \rangle}{K(u_k)}\right)^2 + p\left(\frac{[u_k v_k]}{K(u_k)}\right)^2 = 1.$$

Пусть $k < m$. Используя равенства (12), равенства

$$u_k^{-1} u_j = \frac{\langle u_k, u_j \rangle}{K(u_k)} + \sqrt{-p} \frac{[u_k u_j]}{K(u_k)}, \quad \forall j = k+1, \ldots, m,$$

и равенства

$$v_k^{-1}v_j = \frac{\langle v_k, v_j\rangle}{K(v_k)} + \sqrt{-p}\frac{[v_k v_j]}{K(v_k)}, \quad \forall j = k+1,\dots,m,$$

в утверждении 13, получаем

$$u_k^{-1}u_j = v_k^{-1}v_j, \quad \forall j = k+1,\dots,m. \tag{14}$$

Рассмотрим элемент $g = v_k u_k^{-1} \in \mathbb{Q}^*\sqrt{-p}$. Так как $v_k = v_k(u_k^{-1}u_k) = (v_k u_k^{-1})u_k$, имеем $v_k = gu_k$. Используя равенства (14), получаем

$$v_k(u_k^{-1}u_j) = v_k(v_k^{-1}v_j), \quad \forall j = k+1,\dots,m.$$

Используя эти равенства и соотношение $g = v_k u_k^{-1}$, получаем

$$v_j = (v_k v_k^{-1})v_j = v_k(v_k^{-1}v_j) = v_k(u_k^{-1}u_j) = (v_k u_k^{-1})u_j = gu_j, \quad \forall j = k+1,\dots,m.$$

Таким образом, получаем $v_j = gu_j$ для всех $j = k, k+1,\dots,m$, где $g = v_k u_k^{-1} \in \mathbb{Q}^*\sqrt{-p}$. Тогда по формуле (1) находим, что $v_j = M_g u_j$ для всех $j = k,\dots,m$, где $M_g \in M(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p})$. Используя эти равенства и равенства $u_j = v_j = 0$, $j = 1,\dots,k-1$, заключаем, что $v_j = M_g u_j$ для всех $j = 1,\dots,m$. Как и выше, получаем, что $\det(M_g) = 1$. Поскольку $\det(M_g) = 1$, из теоремы 1 следует, что $M_g \in \mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$. Отсюда вытекает, что $u \overset{\mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})}{\sim} v$.

Докажем единственность матрицы $U \in \mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$, удовлетворяющей условиям $v_j = Uu_j$, $j = 1,\dots,m$. Предположим, что $U \in \mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$ такова, что $v_j = Uu_j$, $j = 1,\dots,m$. Согласно (1) и теореме 1 существует единственный элемент $b \in S(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p})$ для которого $U = M_b$. Следовательно, имеем $v_j = M_b u_j$ для всех $j = 1,\dots,m$. Из уравнения (1) получаем $v_j = bu_j$, $j = k\dots,m$. Поскольку $K(u_k) \neq 0$, равенство $v_k = bu_k$ означает, что $b = v_k u_k^{-1} = g \in S(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p})$. Отсюда следует, что $M_b = M_g$. Единственность матрицы U доказана.

Получим явную форму M_g. Согласно утверждению 13 элемент $g = v_k u_k^{-1}$ равен

$$\frac{\langle u_k, v_k\rangle}{K(u_k)} + \sqrt{-p}\frac{[u_k v_k]}{K(u_k)}.$$

Следовательно, матрица M_g имеет вид (13). Так как $g \in S(\mathbb{Q}^*\sqrt{-p})$, по теореме 1 получаем, что $\det(M_g) = 1$. ☐

Замечание 1. Пусть $k, m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$. По теореме 3 функции $K(u_k)$ образуют полную систему $\mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$-инвариантных функций на множестве $U(k;k)$ в случае $D(u) = k = m$. Согласно теореме 3 система

$$\{K(u_k), \langle u_k, u_j\rangle, [u_k u_j],\ j = k+1,\dots,m\} \tag{15}$$

является полной системой $\mathrm{SO}(2,p,\mathbb{Q})$-инвариантных функций на множестве $U(m;k)$ в случае $D(u) = k < m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хаджиев Дж.* Приложение теории инвариантнов к дифференциальной геометрии кривых. — Ташкент: Фан, 1988.
2. *Berger M.* Geometry. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.
3. *Dieudonné J. A., Carrell J. B.* Invariant Theory. — New York–London: Academic Press, 1971.
4. *Greub W. H.* Linear Algebra. — New York: Springer-Verlag, 1967.
5. *Gürsoy O., Incesu M.* LS(2)-equivalence conditions of control points and application to planar Bezier curves// New Trends Math. Sci. — 2017. — *3*, № 5. — P. 70–84.
6. *Höfer R.* m-Point invariants of real geometries// Beitrage Alg. Geom. — 1999. — *40*. — P. 261–266.
7. *Khadjiev D.* Projective invariants of m-tuples in the one-dimensional projective space// Uzbek Math. J. — 2019. — *1*. — P. 60–72.
8. *Khadjiev D., Beshimov G.* Complete systems of $SO(2,\mathbb{R})$-invariants of mappings of a fixed set to the two-dimensional Euclidean space// Proc. Int. Conf. “Modern Problems of Geometry and Topology and Their Applications”. — Tashkent, Uzbekistan, 2019.

9. *Khadjiev D., Göksal Y.* Applications of hyperbolic numbers to the invariant theory in two-dimensional pseudo-Euclidean space// Adv. Appl. Clifford Alg. — 2016. — *26.* — P. 645–668.
10. *Mumford D., Fogarty J.* Geometric Invariant Theory. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.
11. *Mundy J. L., Zisserman A., Forsyth D. D.* Applications of Invariance in Computer Vision. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1994.
12. *O'Rourke J.* Computational Geometry in C. — Cambridge Univ. Press, 1997.
13. *Ören I.* Equivalence conditions of two Bézier curves in the Euclidean geometry// Iran. J. Sci. Technol. Trans. Sci. — 2018. — *42*, № 3. — P. 1563–1577.
14. *Ören I.* On invariants of m-vectors in Lorentzian geometry// Int. Electron. J. Geom. — 2016. — *9*, № 1. — P. 38–44.
15. *Reiss T. H.* Recognizing Planar Objects Using Invariant Image Features. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1993.
16. *Sibirskii K. S.* Introduction to the Algebraic Invariants of Differential Equations. — New York: Manchester Univ. Press, 1988.
17. *Springer T. A.* Invariant Theory. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1977.
18. *Weyl H.* The Classical Groups: Their Invariants and Representations. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1946.

Хаджиев Джавват
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: `khdjavvat@gmail.com`

Бешимов Гайрат Рузиназарович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `gayratbeshimov@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 56–61
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-56-61

УДК 514.7

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ОРБИТ СЕМЕЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ КИЛЛИНГА В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2021 г. **С. С. САИТОВА**

Аннотация. Пусть $D \subset V(M)$ — семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M. Исследованы свойства орбит семейства векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах, и доказано существование двух таких векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах, что орбита семейства, состоящая из этих векторных полей, покрывает все евклидово пространство. Приведена предварительная классификация орбит векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах.

Ключевые слова: гладкое многообразие, векторное поле Киллинга, алгебра Ли, скобка Ли, орбита, управляемость.

GEOMETRIC CLASSIFICATION OF ORBITS OF A FAMILY OF KILLING VECTOR FIELDS IN EUCLIDEAN SPACES

© 2021 **S. S. SAITOVA**

Abstract. Let $D \subset V(M)$ be a family of smooth vector fields defined on a manifold M. We examine properties of orbits of a family of Killing vector fields in Euclidean spaces and prove the existence of two Killing vector fields in Euclidean spaces such that the orbit of a family consisting of these vector fields covers the whole Euclidean space. A classification of orbits of Killing vector fields in Euclidean spaces is given.

Keywords and phrases: smooth manifold, Killing vector field, Lie algebra, Lie bracket, orbit, controllability.

AMS Subject Classification: 46L52, 47B10, 47C15

1. Введение. Геометрия векторных полей является одним из основных объектов в современной римановой геометрии. Изучению геометрии векторных полей посвящены многочисленные работы [4, 6]. Один из первых результатов в этом направлении, полученный П. К. Рашевским в 1938 г., — достаточное условие существования внутренних точек множества достижимости семейства векторных полей. Фундаментальным результатом в этом направлении стала теорема Суссманна, которая утверждает, что если векторные поля и многообразие, на котором они заданы, гладкие, то каждая орбита также является погруженным гладким подмногообразием.

Векторные поля Киллинга в физике указывают на симметрию физической модели и помогают найти сохраняющиеся величины, такие как энергия, импульс. Например, в теории относительности, если метрический тензор не зависит от времени, то в пространстве-времени существует времениподобный вектор Киллинга, с которым связана сохраняющаяся величина — энергия гравитационного поля. Название дано в честь немецкого математика В. Киллинга, открывшего группы Ли и многие их свойства параллельно с Софусом Ли (см. [14]). В. Киллинг рассматривал геометрические объекты, которые соответствуют законам сохранения в физике.

В. Н. Берестовский и с Ю. Г. Никоноров (см. [2]) рассматривали киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях и нашли условия, налагаемые на структуру многообразий, при которых траектория векторного поля Киллинга постоянной длины представляет собой геодезическую. Ш. Кобаяси доказал, что множество неподвижных точек группы изометрий является вполне геодезическим подмногообразием четной коразмерности (см. [16]). Как известно, инфинитезимальные преобразования, порожденные векторным полем Киллинга, образуют однопараметрическую группу изометрий. В работах К. Яно и К. Номидзу изучаются вопросы существования векторных полей Киллинга на заданном римановом многообразии в локальном и глобальном смысле (см. [3]).

2. Предварительные сведения. Пусть M — гладкое многообразие размерности n, а $V(M)$ — множество всех гладких векторных полей на многообразии M. Множество $V(M)$ является линейным пространством над полем действительных чисел и является алгеброй Ли относительно скобки Ли векторных полей.

Для векторного поля $X \in D$ через $X^t(p)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку $p \in M$ при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(p)$ определено в некоторой области $I(x)$, которая в общем случае зависит не только от поля X, но и от начальной точки p.

В дальнейшем всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$. Если для всех точек $p \in M$ область определения $I(x)$ кривой $t \to X^t(p)$ совпадает с числовой осью, то векторное поле X называется полным векторным полем. В статье всюду под гладкостью понимается гладкость класса C^∞.

Пусть $D \subset V(M)$ — семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M.

Определение 1. Орбита $L(p)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку $p \in M$, — это множество таких точек q из M, для которых существуют такие действительные числа $t_1, t_2, \dots, t_k$ и векторные поля $X_1, X_2, \dots, X_k$ из D (k — произвольное натуральное число), что

$$q = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(p))\dots)).$$

Ясно, что если D состоит из одного векторного поля, орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием).

Определение 2. Векторное поле X на римановом многообразии M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований (инфинитезимальные преобразования) $p \to X^t(p)$, порожденная полем X, состоит из изометрий многообразия M.

Отметим, что скобка Ли двух полей Киллинга дает опять поле Киллинга, и линейная комбинация полей Киллинга над полем действительных чисел тоже является полем Киллинга. Поэтому множество всех векторных полей Киллинга на многообразии M, обозначаемое $K(M)$, образует алгебру Ли над полем действительных чисел. Кроме того, известно, что алгебра Ли $K(M)$ векторных полей Киллинга связного риманова многообразия M имеет размерность не более чем $n(n+1)/2$, где $n = \dim M$. Если $\dim K(M) = n(n+1)/2$, то M — многообразие постоянный кривизны (см. [3, с. 282]).

3. Классификация орбит семейства неприводимых векторных полей Киллинга. Обозначим через $A(D)$ наименьшую подалгебру Ли алгебры $K(M)$, содержащую множество D. Так как алгебра $K(M)$ конечномерна, то существуют такие векторные поля $X_1, X_2, \dots, X_m$ из $A(D)$, что векторы $X_1(p), X_2(p), \dots, X_m(p)$ образуют базис для подпространства $A_p(D)$ для каждой точки $p \in M$.

Пример 1. Рассмотрим на двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ векторные поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Для произвольной точки p преобразования $p \to X^t(p)$ первого векторного поля являются параллельными переносами по направлению оси Ox, а для второго поля — вращениями вокруг начала координат. Указанные отображения являются изометрическими отображениями евклидовой плоскости, поэтому эти векторные поля являются векторными полями Киллинга, и их интегральные кривые являются соответственно параллельными прямыми и концентрическими окружностями с центром в начале координат.

Определение 3. Векторное поле Киллинга называется неприводимым, если оно не может быть выражено через линейную комбинацию каких-либо векторных полей Киллинга над полем действительных чисел.

Замечание 1. Неприводимое векторное поле Киллинга является либо параллельным переносом вдоль координатных осей, либо вращением вокруг $(n-2)$-мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$ (см. [9]).

Пример 2. В $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ рассмотрим семейство D, состоящее из двух неприводимых векторных полей Киллинга, точнее, из двух вращений:

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}.$$

Подалгебра Ли $A(D)$ в этом примере состоит из всевозможных линейных комбинаций этих векторных полей и векторного поля, являющегося их скобкой Ли. Скобка Ли векторных полей X и Y имеет вид

$$Z = [X,Y] = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Эти векторные поля являются базисом (причем неприводимым) подалгебры Ли $A(D)$. Кроме того, $k = \dim A(D) = 2$, так как $\dim(\operatorname{lin}\{X,Y\}) = 2$, в чем можно удостовериться непосредственно.

Пусть D — семейство, состоящее из векторных полей Киллинга в $\mathbb{R}^n$, $A(D)$ — минимальная подалгебра Ли алгебры $K(M)$, содержащая D, а семейство $B(D) = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ образует базис подалгебры $A(D)$. В [5] доказана следующая теорема, которая показывает, что каждая точка из орбиты $L(p)$ достижима из p с помощью конечного числа «переключений» с использованием векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_m$ в определенном порядке.

Теорема 1. *Множество точек вида $y = X_m^{t_m}(X_{m-1}^{t_{m-1}} \ldots (X_1^{t_1}(p) \ldots))$, где $(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$, совпадает с орбитой $L(p)$.*

Кроме того, из результатов работы [5] следует, что в каждой точке q орбиты $L(p)$ подпространство, порожденное векторами $X_1(p), X_2(p), \ldots, X_m(p)$, совпадает с касательным пространством орбиты в этой точке.

В [10] приведена теорема о геометрии орбит векторных полей Киллинга в евклидовом пространстве при предположении, что семейство $B(D)$ состоит из неприводимых вращений и переносов.

Теорема 2. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ задано семейство D векторных полей Киллинга, а базисное семейство состоит из m неприводимых векторных полей. Тогда орбита L_p произвольной точки $p \in \mathbb{R}^n$ является одним из следующих подмногообразий евклидова пространства*:

(1) *k-мерной плоскостью, где $0 \leqslant k \leqslant \min(m,n)$;*
(2) *k-мерным тором $T^k = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$, где $1 \leqslant k \leqslant \min(m,[n/2])$;*
(3) *k-мерной сферой S^k, где $0 \leqslant k \leqslant \min(m, n-1)$;*
(4) *k-мерным торическим цилиндром $T^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$, где $k = k_1 + k_2$ и $k_2 \leqslant k \leqslant \min(m,[n/2])$;*
(5) *k-мерным сферическим цилиндром $S^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$, где $k = k_1 + k_2$ и $k_2 \leqslant k \leqslant \min(m, n-1)$.*

Доказательство. Для векторного поля $X \in B(D)$ обозначим через N_X множество неподвижных точек, т.е. $N_X = \{p : X(p) = 0\}$. Известно, что для векторных полей Киллинга множество N_X является подпространством четной коразмерности (см. [16]). Ортогональное дополнение $N_X^{\perp}$ является инвариантным подпространством векторного поля X, как и само множество N_X. В случае переносов множество неподвижных точек пусто, а инвариантное подпространство состоит из параллельных прямых. Из этих инвариантных прямых только одна содержит начало координат, т.е. в этом случае они представляют собой соответствующие координатные оси. В дальнейшем будем рассматривать только инвариантные подпространства, которые содержат начало координат. В случае неприводимых вращений множество неподвижных точек представляет собой $(n-2)$-мерные координатные подпространства, а инвариантные подпространства представляют собой соответствующие 2-мерные координатные плоскости. $\square$

Пример 3.

A. Рассмотрим орбиты семейства векторных полей из примера 1. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x, y заданы неприводимые и некоммутирующие вращение и перенос:
$$X(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}.$$
Скобка Ли $Z = [X,Y]$ этих векторных полей имеет вид $Z(x,y) = \partial/\partial y$. В этом случае орбита произвольной точки совпадает с плоскостью (случай E).

B. В четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ с декартовыми координатами x, y, z, w рассмотрим неприводимые векторные поля $X_1 = \{-y,x,0,0\}$ и $X_2 = \{0,0,-w,z\}$. Очевидно, что они коммутируют. Орбита точки $p \in \mathbb{R}^4$ представляет собой либо точку $L(p) = O(0,0,0,0)$, если $p = O$, либо окружность $L(p) = S^1$, если $p \in Oxy$ или $p \in Ozw$, либо двумерный тор $L(p) = S^1 \times S^1$ в противном случае (случай B).

C. В $\mathbb{R}^5$ с декартовыми координатами x, y, z, w, s рассмотрим неприводимые векторные поля $X_1 = \{-y,x,0,0,0\}$, $X_2 = \{0,0,-w,z,0\}$, $X_3 = \{0,0,0,0,1\}$. Очевидно, что они коммутируют. Орбита точки $p \in \mathbb{R}^4$ представляет собой либо $L(p) = Os$, если $p = O$, либо $L(p) = S^1 \times \mathbb{R}^1$, если $p \in Oxy$ или $p \in Ozw$, либо $L(p) = S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^1$ в противном случае (случай D).

D. В четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ с декартовыми координатами x, y, z, w рассмотрим неприводимые векторные поля $X_1 = \{-y,x,0,0\}$, $X_2 = \{-z,0,x,0\}$, $X_3 = \{0,0,0,1\}$. Очевидно, что они не коммутируют. Согласно теореме орбита точки $p \in \mathbb{R}^4$ представляет собой либо $L(p) = Ow$, если $p \in Ow$, либо $L(p) = S^2 \times \mathbb{R}^1$ в противном случае (случай C).

E. Если рассматривать орбиты семейства векторных полей Киллинга из примера 1, то согласно теореме (случай D) орбиты в этом примере суть либо точка (начало координат — общая неподвижная точка), либо концентрические сферы с центром в начале координат.

В общем случае, когда базисное семейство $B(D)$ состоит не обязательно из неприводимых векторных полей, классификация орбит является более сложной задачей, к которой мы еще вернемся.

4. Управляемость в евклидовых пространствах и векторные поля Киллинга. Как известно, исследование свойств векторных полей, а также алгебры Ли, порожденных семейством векторных полей, в этом исследовании векторных полей Киллинга, играют важную роль в теории оптимального управления (см. [1, 11–13, 15, 18–20]).

На основе проведенных исследований по изучению геометрической структуры орбит семейства векторных полей Киллинга, а также свойства алгебры Ли, порожденной такими семействами, в [4, 5, 7], было доказано существование двух таких векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах, что орбита семейства, состоящая из этих векторных полей, покрывает все евклидово пространство.

Теорема 3. *В $\mathbb{R}^n$ существует такая пара векторных полей Киллинга X, Y, что орбита семейства $D = \{X,Y\}$ совпадает с $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Для построения искомой пары векторных полей Киллинга X, Y используем неприводимые векторные поля Киллинга (см. подробнее в [10]) в евклидовом пространстве с декартовой системой координат. Пусть X_i — неприводимое вращение вокруг координатных (аффинных) подпространств размерности $n-2$ в координатной плоскости $O_{i,i+1}$, $i = 1,\dots,n-1$; Y_i — неприводимый перенос вдоль координатной оси O_{x_i}.

Например, в $\mathbb{R}^3$ получим $X_1 = \{-y,x,0\}$ — вращение вокруг оси Oz, $X_2 = \{0,-z,y\}$ — вращение вокруг оси Ox, $Y_1 = \{1,0,0\}$, $Y_2 = \{0,1,0\}$, $Y_3 = \{0,0,1\}$.

Пусть $n = 2$; тогда $X = X_1$ и $Y = Y_2$. Непосредственное вычисление показывает, что $[X, Y] = \pm Y_1$. Согласно теореме 2 получим, что $L(p) = \mathbb{R}^2$ для любой точки $p \in \mathbb{R}^2$.

Пусть $n = 3$; тогда $X = X_1$ и $Y = Y_2 + Y_3$. Непосредственное вычисление показывает, что $[X, Y] = \pm Y_1$, а $[X, Y_1] = \pm Y_2$, $Y \mp Y_2 = Y_3$. Согласно теореме 2 получим, что $L(p) = \mathbb{R}^3$ для любой точки $p \in \mathbb{R}^3$.

Пусть $n = 4$; тогда $X = X_1 + X_3$ и $Y = Y_2 + Y_3 + Y_4$. Непосредственное вычисление показывает, что посредством скобки можно получить все неприводимые переносы Y_i. Согласно теореме 2 получим, что $L(p) = \mathbb{R}^4$ для любой точки $p \in \mathbb{R}^4$.

Теорема 3 непосредственно доказывается методом математической индукции. □

Полученные выше результаты дают возможность привести предварительную классификацию орбит семейства векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах.

Следствие 1. *Пусть D — семейство, состоящее из векторных полей Киллинга в $\mathbb{R}^n$. Тогда орбиты L_p произвольной точки $p \in \mathbb{R}^n$ обладают следующими свойствами*:

(1) *орбита является гладким подмногообразием неотрицательной кривизны* (см. [5, 17]);

(2) *если заданное семейство состоит из неприводимых векторных полей, то орбиты классифицируются по теореме* 2;

(3) *если заданное семейство включает в себя векторные поля, приведенные в теореме* 3, *то орбита совпадает со всем пространством*;

(4) *если заданное семейство приводимо, то базисное семейство включает в себя данное семейство и, следовательно, орбита заданного семейства является гладким подмногообразием неотрицательной кривизны орбиты базисного семейства.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. — М.: Физматлит, 2005.
2. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях// Сиб. мат. ж. — 2008. — *49*, № 3. — С. 497–514.
3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1984.
4. *Нарманов А. Я., Аслонов Ж. О.* Геометрия орбит векторных полей Киллинга// Узбек. мат. ж. — 2012. — *2*. — С. 77–85.
5. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Диффер. уравн. — 2014. — *50*, № 12. — С. 1582–1589.
6. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии множества достижимости векторных полей// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 3. — С. 321–328.
7. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии векторных полей// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *144*. — С. 81-–87.
8. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр 3. Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987.
9. *Саитова С. С.* Коммутирующие векторные поля Киллинга// Узбек. мат. ж. — 2013. — *1*. — С. 109–117.
10. *Саитова С. С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Узбек. мат. ж. — 2016. — *4*. — С. 106–112.
11. *Brockett R. W., Millman R. S., Sussmann H. J.* (eds.). Differential Geometric Control Theory. — Boston: Birkhäuser, 1983.
12. *Jakubczyk B., Respondek W.* (eds.). Geometry of Feedback and Optimal Control. — New York: Marcel Dekker, 1997.
13. *Jurdjevic V.* Geometric Control Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
14. *Killing W.* Über die Grundlagen der Geometrie// J. Reine Angew. Math. — 1892. — *109*. — P. 121–186.
15. *Kleinsteuber M., Hueper K., Silva Leite F.* Complete Controllability of the N-sphere: A constructive proof// Proc. 3rd IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control (Nagoya, Japan, 19–21 July, 2006). — Austr. Natl. Univ., 2006. — P. 143–146.
16. *Kobayashi S.* Fixed points of isometries// Nagoya Math. J. — 1958. — *13*. — P. 63–68.
17. *Narmanov A. Ya., Saitova S. S.* Foliations defined by closed differential 1-forms// Int. J. Geom. — 2014. — *3*, № 1. — P. 37–43.
18. *Sachkov Yu.* Control Theory on Lie Groups// J. Math. Sci. — 2009. — *156*, № 3. — P. 381–439.

19. *Sussmann H. J.* (ed.). Nonlinear Controllability and Optimal Control. — New York: Marcel Dekker, 1990.
20. *Zimmerman J.* Optimal control of the sphere S^n rolling on E^n// Math. Control Signals Syst. — 2005. — *17.* — P. 14–37.

Саитова Сайёра Собиржоновна
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: sayorass1985@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 62–68
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-62-68

УДК 517.12

ФУНКТОР OS_σ-ПОЛУАДДИТИВНЫХ σ-ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

© 2021 г. **Н. К. МАМАДАЛИЕВ**

Аннотация. Введено понятие функтора OS_σ полуаддитивных σ-гладких функционалов в категорию тихоновских пространств Tych, который продолжит функтор $\mathrm{OS} : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ полуаддитивных функционалов. Доказано, что функтор $\mathrm{OS}_\sigma : \mathrm{Tych} \to \mathrm{Tych}$ переводит Z-вложения во вложения и что пространство $\mathrm{OS}_\sigma(X)$ замкнуто в пространстве слабо аддитивных σ-гладких функционалов, в частности, $\mathrm{OS}_\sigma(X)$ полно по Хьюитту для любого тихоновского пространства $X \in \mathrm{Tych}$.

Ключевые слова: категория, нормальный функтор, полуаддитивный функционал, пространство σ-гладких функционалов.

FUNCTOR OF OS_σ-SEMIADDITIVE, σ-SMOOTH FUNCTIONALS

© 2021 **N. K. MAMADALIEV**

Abstract. In this paper, we introduce the functor OS_σ of semiadditive σ-smooth functionals into the category of Tikhonov spaces Tych, which extends the functor $\mathrm{OS} : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ of semiadditive functionals. We prove that the functor $\mathrm{OS}_\sigma : \mathrm{Tych} \to \mathrm{Tych}$ maps Z-embeddings into embeddings and the space $\mathrm{OS}_\sigma(X)$ is closed in the space of weakly additive σ-smooth functionals; in particular, $\mathrm{OS}_\sigma(X)$ is Hewitt-complete for any Tikhonov space $X \in \mathrm{Tych}$.

Keywords and phrases: category, normal functor, semiadditive functional, space of σ-smooth functionals.

AMS Subject Classification: 18B20, 18A05, 46A63, 46E27, 54A25

Напомним определение нормального функтора. Функтор $F : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ называется *непрерывным*, если для любого обратного спектра $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta, \Omega\}$ определен обратный спектр $F(S) = \{F(X_\alpha), F(p^\alpha_\beta), \Omega\}$, порождаемый отображениями $F(p^\alpha_\beta) : F(\varprojlim S) \to F(X_\alpha)$, где p_α — сквозные проекции из $\varprojlim S$ в X_α, и отображение $\varprojlim F(p_\alpha)$ из пространства $F(\varprojlim S)$ в пространство $\varprojlim F(S)$ является гомеоморфизмом (см. [5, 6]).

Функтор $F : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ называется

(i) *сохраняющим вес*, если $wF(X) = w(X)$ для любого бесконечного компакта X;
(ii) *мономорфным*, если для любого вложения i компакта X в компакт Y отображение $F(i) : F(X) \to F(Y)$ также является вложением;
(iii) *эпиморфным*, если он сохраняет сюръективность отображений компактов;
(iv) *сохраняющим пересечения*, если для любого семейства $\{X_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ замкнутых подмножеств произвольного компакта имеем $\cap\{F(X_\alpha) : \alpha \in \Omega\} = F(\cap\{X_\alpha : \alpha \in \Omega\})$.
(v) *сохраняющим прообразы*, если для любого непрерывного отображения f компакта Y и для всякого замкнутого подмножества $B \subseteq Y$ имеем $F(f^{-1}B) = F(f)^{-1}F(B)$.

Работа выполнена при поддержке гранта ОТ-Ф-4-42 РУз.

Ковариантный функтор $F : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ называется *нормальным*, если он непрерывен, сохраняет вес, пересечения и прообразы, мономорфен и эпиморфен и переводит одноточечное пространство в одноточечное, а пустое множество — в пустое.

Ковариантный функтор $F : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ называется *слабо нормальным*, если он удовлетворяет всем условиям нормальности, кроме сохранения прообразов (см. [12]).

Пусть $F : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ — произвольный нормальный функтор и $X \in Ob(\mathrm{Tych})$. Положим $F^\beta(X) = \{x \in F(\beta X) : \mathrm{supp}(x) \subseteq X\}$. Если же $f : X \to Y$ — морфизм категории Tych, то положим $F^\beta(f) = F(\beta f)|F^\beta(X)$, где $\beta f : \beta X \to \beta Y$ — стоун-чеховское продолжение отображения f. Используя нормальность функтора F, можно показать, что определение $F^\beta(f)$ корректно, т.е. $F(\beta f)(F^\beta(X)) \subseteq F^\beta(Y)$. Нетрудно видеть также, что F^β является ковариантным функтором категории Tych в себя (см. [4]).

В [9] был изучен функтор $P_\sigma(X)$ σ-аддитивных вероятностных мер на категории тихоновских пространств. Для тихоновского пространства X и его компактификации βX справедливы следующие утверждения:

(i) $P_R(X) = \big\{\mu \in P(\beta X) : \mu(K) = 1$ для некоторого σ-компактного множества $K \subset X \subset \beta\big\}$;

(ii) $P_\tau(X) = \big\{\mu \in P(\beta X) : \mu(K) = 0$ для любого компактного множества $K \subset \beta X \setminus X\}$;

(iii) $P_\sigma(X) = \big\{\mu \in P(\beta X) : \mu(K) = 0$ для любого замкнутого G_δ-множества $K \subset \beta X, K \cap X = \varnothing\big\}$.

Для любого тихоновского пространства X имеем

$$P_\tau(X) \subset P_R(X) \subset P_\sigma(X) \subset P(\beta X);$$

кроме того, $P_\tau(X)$, $P_R(X)$ и $P_\sigma(X)$ — всюду плотные подпространства в $P(\beta X)$. Ясно, что

$$P_\tau(X) = P_R(X) = P_\sigma(X) = P(\beta X)$$

для любого компакта X.

Пусть X — компакт. Обозначим через $C(X)$ пространство всех непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с обычными (поточечными) операциями и sup-нормой: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Для каждого $c \in \mathbb{R}$ обозначим через c_X постоянную функцию, определяемую по формуле $c_X(x) = c$, $x \in X$. Пусть $\varphi, \psi \in C(X)$. Неравенство $\varphi \leqslant \psi$ означает, что $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ для всех $x \in X$.

Функционал $\nu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется

(i) *слабо аддитивным*, если равенство $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c \cdot \nu(1_X)$ выполняется для всех $c \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$;

(ii) *сохраняющим порядок*, если для функций $\varphi, \psi \in C(X)$ из $\varphi \leqslant \psi$ вытекает $\nu(\varphi) \leqslant \nu(\psi)$;

(iii) *нормированным*, если $\nu(1_X) = 1$;

(iv) *положительно-однородным*, если $\nu(\lambda\varphi) = \lambda\nu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$;

(v) *полуаддитивным*, если $\nu(f + g) \leqslant \nu(f) + \nu(g)$ для всех $f, g \in C(X)$.

Для компакта X через $W(X)$ обозначается множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок функционалов (см. [1]), через $\mathrm{O}(X)$ — множество всех нормированных функционалов из $W(X)$ (см. [12]), через $\mathrm{OS}(X)$ — множество всех положительно-однородных полуаддитивных функционалов из $\mathrm{O}(X)$ (см. [11]). Множество $W(X)$ снабжается топологией поточечной сходимости. Базу окрестностей функционала $\mu \in W(X)$ образуют множества вида

$$O(\mu; \varphi_1, \dots, \varphi_k; \varepsilon) = \big\{\nu \in W(X) : |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \dots, k\big\},$$

где $\varphi_i \in C(X)$, $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$.

Во множествах $\mathrm{O}(X)$ и $\mathrm{OS}(X)$ рассматривается топология, индуцированная из $W(X)$. Очевидно, что для каждого компакта X пространство $P(X)$ вероятностных мер (т.е. пространство всех линейных, неотрицательных, нормированных функционалов) является подпространством пространства $\mathrm{OS}(X)$.

Пусть A — непустое выпуклое компактное подмножество пространства $P(X)$ и $f \in C(X)$. Тогда $|\mu(f)| \leqslant \|f\|$ для любого $\mu \in A$, и поэтому множество $\{\mu(f) : \mu \in A\}$ ограничено сверху. Следовательно, для любого $f \in C(X)$ существует число

$$\nu_A(f) = \sup\{\mu(f) : \mu \in A\}.$$

В [11] доказано, что для любого непустого выпуклого компактного подмножества A пространства $P(X)$ функционал $\nu : C(X) \to \mathbb{R}$ принадлежит $\mathrm{OS}(X)$ и наоборот, для всякого $\nu \in \mathrm{OS}(X)$ существует единственный непустой выпуклый компакт в $P(X)$, для которого $\nu = \nu_A$. Другими словами, если A и B — непустые выпуклые компакты в $P(X)$, то $\nu_A = \nu_B$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

Пусть X и Y — компакты, а $f : X \to Y$ — непрерывное отображение между ними. Отображение $\mathrm{OS}(f) : \mathrm{OS}(X) \to \mathrm{OS}(Y)$ определим по формуле

$$\mathrm{OS}(f)(\nu)(\varphi) = \nu(\varphi \circ f),$$

где $\nu \in \mathrm{OS}(X)$ и $\varphi \in C(Y)$.

Операция OS задает ковариантный нормальный функтор, действующий в категории Comp, являющаяся подфунктором функтора $O : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ (см. [11]).

В дальнейшем нам понадобятся следующие известные факты.

Теорема 1 (см. [11])**.** *Если A и B — непустые выпуклые компакты в $P(X)$, то $\nu_A = \nu_B$ тогда и только тогда, когда $A = B$.*

Утверждение 1 (см. [11])**.** *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, $\nu_A \in \mathrm{OS}(X)$. Тогда имеет место формула*

$$\mathrm{OS}(f)(\nu_A) = \nu_{P(f)(A)}.$$

Пусть X — тихоновское пространство и $C_b(X)$ — пространство всех непрерывных ограниченных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с обычными (поточечными) операциями и sup-нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

Определение 1 (см. [2])**.** Функционал $\mu \in W(\beta X)$ называется *σ-гладким*, если $\mu(\varphi_n) \to 0$ любой монотонно убывающей последовательности $\{\varphi_n\} \subset C(\beta X)$, поточечно сходящейся к нулю на X.

Для тихоновского пространства X через $\mathrm{OS}_\sigma(X)$ обозначим множество всех σ-гладких функционалов $\mu \in \mathrm{OS}(\beta X)$. В $\mathrm{OS}_\sigma(X)$ рассматривается индуцированная из $\mathrm{OS}(\beta X)$ топология. Ясно, что $P_\sigma(X) \subset \mathrm{OS}_\sigma(X) \subset \mathrm{O}_\sigma(X)$ для любого тихоновского пространства X.

Имеют место включения

$$\mathrm{OS}_\beta(X) \subset \mathrm{OS}_\sigma(X) \subset \mathrm{OS}(\beta X) \tag{1}$$

для любого тихоновского пространства X и равенства

$$\mathrm{OS}_\beta(X) = \mathrm{OS}_\sigma(X) = \mathrm{OS}(\beta X)$$

для любого компактного пространства X.

Покажем, что конструкция $\mathrm{OS}_\sigma(X)$ порождает ковариантный функтор, действующий на категории Tych. Так как имеют место включения (1), для проверки функториальности конструкции OS_σ достаточно показать, что для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ тихоновских пространств X и Y имеет место включение

$$\mathrm{OS}(\beta f)(\mathrm{OS}_\sigma(X)) \subset \mathrm{OS}_\sigma(Y).$$

Из результатов [11] получим $\mathrm{OS}(\beta f)(\mathrm{OS}(\beta X)) \subset \mathrm{OS}(\beta Y)$, где $\beta f : \beta X \to \beta Y$ — стоун-чеховское продолжение отображения f.

Для любого элемента $\mu \in \mathrm{OS}_\sigma(X)$ имеем $\mu(\varphi_n) \to 0$, где $\{\varphi_n\} \subset C(\beta X)$ — произвольная монотонно убывающая последовательность, поточечно сходящаяся к нулю на X. Пусть $\{\psi_n\} \subset C(\beta Y)$ — монотонно убывающая последовательность, состоящая из функций, поточечно сходящихся к нулю на Y. Тогда и последовательность $\{\psi_n \circ f\} \subset C(\beta X)$ монотонно убывает и состоит из функций, поточечно сходящихся к нулю на X. Отсюда имеем $\mathrm{OS}(\beta f)(\mu)(\psi_n) \to 0$. Значит, $\mathrm{OS}(\beta f)(\mu) \in \mathrm{OS}_\sigma(Y)$.

Таким образом, доказано, что OS_σ является ковариантным функтором в категорию Tych тихоновских пространств, продолжающим функтор $\mathrm{OS} : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$.

Для каждого компакта X определим множество $\chi(X) = C(X) \cup \big\{\alpha\chi_A + c_X : \alpha, c \in \mathbb{R},\ A$ — открытое или замкнутое множество в $X\big\}$, где χ_A — характеристическая функция множества A.

Каждой слабо аддитивный, сохраняющий порядок функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ может быть продолжен на множество $\chi(X)$ следующим образом: для замкнутого F и открытого U подмножеств компакта X, вещественных чисел α и c положим:

(a) если $\alpha \geqslant 0$, то $\mu(\alpha\chi_F + c_X) = \inf\{\mu(f) : f \in C(X),\ f \geqslant \alpha\chi_F\} + c\mu(1_X)$,
(b) если $\alpha < 0$, то $\mu(\alpha\chi_F + c_X) = \sup\{\mu(f) : f \in C(X),\ f \leqslant \alpha\chi_F\} + c\mu(1_X)$,
(c) если $\alpha \geqslant 0$, то $\mu(\alpha\chi_U + c_X) = \sup\{\mu(f) : f \in C(X),\ f \leqslant \alpha\chi_U\} + c\mu(1_X)$,
(d) если $\alpha < 0$, то $\mu(\alpha\chi_U + c_X) = \inf\{\mu(f) : f \in C(X),\ f \geqslant \alpha\chi_U\} + c\mu(1_X)$.

Всякий слабо аддитивный, сохраняющий порядок функционал $\mu : \chi(X) \to \mathbb{R}$ допускает продолжение на пространство $B(X)$ ограниченных функций компакта X, обеспеченной топологией равномерной сходимости (см. [1]).

В силу [11] всякий функционал $\nu \in \mathrm{OS}(\beta X)$ может быть записан в виде $\nu = \nu_A$, где A некоторый (единственный) выпуклый компакт в $P(\beta X)$. Оказывается, верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Полуаддитивный функционал $\nu_A \in \mathrm{OS}(\beta X)$ является σ-гладким тогда и только тогда, когда $A \subset P_\sigma(X)$.*

Доказательство. Пусть $\nu_A \in \mathrm{OS}_\sigma(X)$ — произвольный σ-гладкий функционал. Предположим, что $A \not\subset P_\sigma(X)$ и $\mu \in A \setminus P_\sigma(X)$. Тогда существует такая монотонно убывающая последовательность $\{\varphi_n\} \subset C_b(X)$, поточечно сходящаяся к нулю, что $\{\mu(\varphi_n)\}$ не стремится к нулю. С другой стороны, имеем
$$\mu(\varphi_n) \leqslant \sup\{\lambda(\varphi_n) : \lambda \in A\} = \nu_A(\varphi_n).$$
Так как $\nu_A(\varphi_n) \to 0$, то $\mu(\varphi_n) \to 0$. Полученное противоречие доказывает, что $A \setminus P_\sigma(X) = \varnothing$. Значит, $A \subset P_\sigma(X)$.

Теперь берем произвольный непустой выпуклый компакт $A \subset P_\sigma(X)$. Предположим, что $\nu_A \notin \mathrm{OS}_\sigma(X)$. Тогда существует такое G_δ-множество $K \subset \beta X \setminus X$ (см. [2]), что
$$\nu_A(\chi_K) = \inf\{\mu(\varphi) : \varphi \geqslant \chi_K\} = \inf_{\varphi \geqslant \chi_K} \sup_{\mu \in A} \mu(\varphi) = \varepsilon > 0.$$

Положим $I = \{\varphi \in C(X) : \varphi \geqslant \chi_K\}$. Тогда $(I, \succ)$ является направленным вверх множеством относительно порядка $\succ$, где $\varphi \succ \phi$ означает $\varphi \leqslant \phi$. Так как
$$\inf_{\varphi \geqslant \chi_K} \sup_{\mu \in A} \mu(\varphi) = \varepsilon,$$
то
$$\sup_{\mu \in A} \mu(\varphi) \geqslant \varepsilon$$
для всех $\varphi \in I$. Тогда для каждого $\varphi \in I$ существует такой элемент $\mu_\varphi \in A$, что
$$\mu_\varphi(\varphi) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
Так как A компактно, то существует сходящая поднаправленность $\{\mu_\varphi : \varphi \in J\}$ направленности $\{\mu_\varphi : \varphi \in I\}$. Тогда $\lim \mu_\phi = \mu \in A$. Пусть $\varphi \in I$. Существует такой элемент $\varphi_1 \in J$, что
$$\mu_\phi \in O(\mu, \varphi, \varepsilon/4)$$
для любого $\phi \in J$, удовлетворяющего условию $\phi \succ \varphi_1$. Пусть $\phi \succ \varphi$ и $\phi \succ \varphi_1$. Тогда
$$\mu(\varphi) \geqslant \mu_\phi(\varphi) - \frac{\varepsilon}{4} \geqslant \mu_\phi(\phi) - \frac{\varepsilon}{4} \geqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$
Поэтому
$$\mu(\chi_K) = \inf_{\varphi \in I} \mu(\varphi) \geqslant \varepsilon/4 > 0,$$
что противоречит $\mu \in A \subset P_\sigma(X)$. Полученное противоречие доказывает, что $\nu_A \in \mathrm{OS}_\tau(X)$. Теорема 2 доказана. □

Утверждение 2. *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение тихоновских пространств и $\nu_A \in \mathrm{OS}_\sigma(X)$. Тогда имеет место формула*
$$\mathrm{OS}_\sigma(f)(\nu_A) = \nu_{P_\sigma(f)(A)}.$$

Доказательство. Для $\varphi \in C(\beta Y)$ имеем
$$\mathrm{OS}_\sigma(f)(\nu_A)(\varphi) = \nu_A(\varphi \circ \beta f) = \sup\{\lambda(\varphi \circ \beta f) : \lambda \in A\} = \sup\{\mu(\varphi) : \mu \in P(\beta f)(A)\}.$$
В силу предложения 3 имеем $P(\beta f)(A) = P_\sigma(f)(A)$. Отсюда
$$\mathrm{OS}_R(f)(\nu_A)(\varphi) = \sup\{\mu(\varphi) : \mu \in P_R(f)(A)\}.$$
Значит, $\mathrm{OS}_\sigma(f)(\nu_A)(\varphi) = \nu_{P_\sigma(f)(A)}$. □

Утверждение 3. *Пусть X — бесконечное тихоновское пространство. Тогда пространство $\mathrm{OS}_\sigma(X)$ замкнуто в пространстве $\mathrm{O}_\sigma(X)$.*

Доказательство. Для произвольного функционала $\nu \in \mathrm{O}_\sigma(X) \setminus \mathrm{OS}_\sigma(X)$ докажем, что ν имеет окрестность, не пересекающуюся с $\mathrm{OS}_\sigma(X)$. Рассмотрим два случая.

1. Существуют такие неотрицательное число λ и функция $\varphi \in C(\beta X)$, что $\nu(\lambda\varphi) \neq \lambda\nu(\varphi)$. Тогда $|\nu(\lambda\varphi) - \lambda\nu(\varphi)| = a$ для некоторого положительного числа a. Не нарушая общности, можно предполагать
$$\nu(\lambda\varphi) - \lambda\nu(\varphi) = a. \tag{2}$$
Докажем, что окрестность
$$O\Big(\nu; \varphi; \lambda\varphi; \frac{a}{\lambda+1}\Big)$$
функционала ν не пересекается $\mathrm{OS}_\sigma(X)$. Предположим, что существует элемент
$$\mu \in O\Big(\nu; \varphi; \lambda\varphi; \frac{a}{\lambda+1}\Big) \cap \mathrm{OS}_\sigma(X).$$
Тогда
$$\mu(\lambda\varphi) = \lambda\mu(\varphi), \tag{3}$$
$$-\frac{a}{\lambda+1} < \mu(\varphi) - \nu(\varphi) < \frac{a}{\lambda+1} \tag{4}$$
$$-\frac{a}{\lambda+1} < \mu(\lambda\varphi) - \nu(\lambda\varphi) < \frac{a}{\lambda+1}.$$
Отсюда в силу (2) имеем
$$-\frac{a}{\lambda+1} < \mu(\lambda\varphi) - \lambda\nu(\varphi) - a < \frac{a}{\lambda+1}, \quad -\frac{\lambda a}{\lambda+1} < \mu(\lambda\varphi) - \lambda\nu(\varphi) < \frac{(\lambda+2)a}{\lambda+1}.$$
Учитывая (3), получаем
$$\frac{a}{\lambda+1} < \mu(\varphi) - \nu(\varphi) < \frac{a(\lambda+2)}{\lambda(\lambda+1)}$$
что невозможно в силу (4). Значит,
$$O\Big(\nu; \varphi; \lambda\varphi; \frac{a}{\lambda+1}\Big) \cap \mathrm{OS}_R(X) = \varnothing.$$

2. Существуют такие функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C_b(X)$, что $\nu(\varphi_1 + \varphi_2) > \nu(\varphi_1) + \nu(\varphi_2)$. Пусть
$$\nu(\varphi_1 + \varphi_2) - \nu(\varphi_1) - \nu(\varphi_2) = c > 0; \tag{5}$$
тогда окрестность $O\big(\nu; \varphi_1; \varphi_2; \varphi_1 + \varphi_2; c/3\big)$ функционала ν не пересекается с $\mathrm{OS}_\sigma(X)$. Предположим, что это не так, т.е. существует элемент
$$\mu \in O\Big(\nu; \varphi_1; \varphi_2; \varphi_1 + \varphi_2; \frac{c}{3}\Big) \cap \mathrm{OS}_\sigma(X).$$
Имеем
$$-\frac{c}{3} < \nu(\varphi_1) - \mu(\varphi_1) < \frac{c}{3}, \tag{6}$$
$$-\frac{c}{3} < \nu(\varphi_2) - \mu(\varphi_2) < \frac{c}{3}, \tag{7}$$
$$-\frac{c}{3} < \nu(\varphi_1 + \varphi_2) - \mu(\varphi_1 + \varphi_2) < \frac{c}{3}. \tag{8}$$

Почленно складывая (6) и (7), получаем

$$-\frac{2c}{3} < \nu(\varphi_1) + \nu(\varphi_2) - \mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2) < \frac{2c}{3}. \tag{9}$$

Из (5), (8) и полуаддитивности μ получим

$$\nu(\varphi_1) + \nu(\varphi_2) + c - \mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2) < \frac{c}{3},$$

или

$$\nu(\varphi_1) + \nu(\varphi_2) - \mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2) < -\frac{2c}{3}.$$

Это противоречит (9). Значит,

$$\mu \in O\Big(\nu; \varphi_1; \varphi_2; \varphi_1 + \varphi_2; \frac{c}{3}\Big) \cap \mathrm{OS}_\tau(X) = \varnothing.$$

Предложение 3 доказано. □

Из [2, теорема 4] получаем следующий факт.

Следствие 1. *Пусть X — произвольное бесконечное тихоновское пространство. Тогда $P_\sigma(X)$ замкнуто в $\mathrm{OS}_\sigma(X)$.*

Напомним, что пространство X называется полным по Хьюитту, если оно гомеоморфно замкнутому подмножеству произведения $\mathbb{R}^\tau$ для некоторого кардинала τ. Полное по Хьюитту пространство может быть определено как тихоновское пространство X, имеющее такую компактификацию γX, что каждая точка $x \in \gamma X \setminus X$ лежит в замкнутом G_δ-множестве $F \subset \gamma X \setminus X$ (см. [7]).

Подпространство X пространства Y называется *C-вложенным* в Y, если каждая функция $f : X \to \mathbb{R}$ допускает непрерывное продолжение $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}$. Согласно [7, теорема 3.1.16] всякое тихоновское пространство X имеет единственное (с точностью до гомеоморфизма) полное по Хьюитту пространство νX, содержащее X в качестве всюду плотного C-вложенного подпространства, которое можно отождествлять с подпространством

$$\nu X = \big\{x \in \beta X : \ F \cap X \neq \varnothing \ \forall \text{ замкнутого } G_\delta\text{-множества } F \subset \beta X, \text{ содержащего } x\big\} \subset \beta X.$$

Пространство νX называется хьюиттовым пополнением пространства X (см. [7]).

В [2] было показано, что пространства $O_R(X)$ радоновых слабо аддитивных функционалов и $\mathrm{O}_\tau(X)$ τ-гладких слабо аддитивных функционалов в общем случае не обязаны быть полными по Хьюитту. Из этого замечания, предложения 3.4 из [10] и теоремы 3.11.4 из [7] (которая гласит, что полнота по Хьюитту наследуется по замкнутым подпространствам) вытекает, что пространства $\mathrm{OS}_R(X)$ радоновых полуаддитивных функционалов и $\mathrm{OS}_\tau(X)$ τ-гладких полуаддитивных функционалов в общем случае не обязаны быть полным по Хьюитту. Но из [7, теорема 3.11.4], [2, теорема 3] и предложения 3 получим следующий факт.

Следствие 2. *Для всякого тихоновского пространства X пространство $\mathrm{OS}_\sigma(X)$ является полным по Хьюитту.*

Из [2, теорема 4] непосредственно получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Замыкание $[X] = \beta X \cap \mathrm{OS}_\sigma(X)$ тихоновского пространства X в $\mathrm{OS}_\sigma(X)$ является хьюиттовым пополнением пространства X.*

В [10] было доказано, что функтор OS_τ сохраняет вложения. Оказывается, для функтора OS_σ такое утверждение неверно.

Пусть $f : X \to Y$ — такое вложение тихоновских пространств X и Y, что его хьюиттово пополнение $\nu f : \nu X \to \nu Y$ не является вложением. Так как $\nu f = \mathrm{OS}_\sigma(\nu f)|\nu X$, то отображение $\mathrm{OS}_\sigma(f) = \mathrm{OS}_\sigma(\nu f)$ также не является вложением.

Этот пример может создать впечатление, что функтор OS_σ сохраняет вложение полных по Хьюитту пространств. Однако из [9, предложение 1.3] сразу вытекает, что существует такое вложение $f : X \to Y$ полных по Хьюитту пространств, что отображение $\mathrm{OS}_\sigma(f) : \mathrm{OS}_\sigma(X) \to \mathrm{OS}_\sigma(Y)$ не является вложением.

Напомним, что вложение $f : X \to Y$ называется *Z-вложением*, если для каждого функционального открытого множества $U \subset X$ существует такое функциональное открытое множество $V \subset Y$, что $U = V \cap X$ (см. [3]). Заметим, что каждое вложение линделёфова пространства в тихоновское пространство есть Z-вложение (см. [3]).

Утверждение 4. *Если $f : X \to Y$ — Z-вложение тихоновских пространств, то отображение* $\mathrm{OS}_\sigma(f) : \mathrm{OS}_\sigma(X) \to \mathrm{OS}_\sigma(Y)$ *является вложением.*

Доказательство. Возьмем произвольно такие два элемента $\nu_A, \nu_B \in \mathrm{OS}_\sigma(X)$, что $\nu_A \neq \nu_B$. В силу [9, предложение 1.4] отображение $P_\sigma(f) : P_\sigma(X) \to P_\sigma(Y)$ является вложением. Поэтому из теоремы 1 получим

$$\mathrm{OS}_\sigma(f)(\nu_A) = \nu_{P_\sigma(f)(A)} \neq \nu_{P_\sigma(f)(B)} = \mathrm{OS}_\sigma(f)(\nu_B).$$

Предложение 4 доказано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аюпов Ш. А., Заитов А. А.* О некоторых топологических свойствах слабо аддитивных функционалов// Узбек. мат. ж. — 2011. — *4*. — С. 36–51.
2. *Жиемуратов Р. Е., Заитов А. А.* О вещественной полноте пространства слабо аддитивных σ-гладких функционалов// Владикавказ. мат. ж. — 2009. — *11*, № 1. — С. 22–28.
3. *Федорчук В. В., Чигогидзе А. Ч.* Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. — М.: Наука, 1992.
4. *Чигогидзе А. Ч.* О продолжении нормальных функторов// Вестн. МГУ. Сер. мат. мех. — 1984. — *6*. — С. 23–26.
5. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 3. — С. 3–62.
6. *Щепин Е. В.* Топология предельных пространств несчетных обратных спектров// Усп. мат. наук. — 1976. — *31*, № 5. — С. 191–226.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
8. *Banakh T.* The topology of spaces of probability measures, I: Functors P_τ and P_R// Mat. Stud. — 1995. — *5*, № 1–2.
9. *Banakh T., Chigogidze A., Fedorchuk V.* On spaces of σ-additive probability measures// Topology Appl. — 2003. — *133*, № 2. — P. 139–155.
10. *Beshimov R. B., Mamadaliev N. K.* On the functor of semiadditive τ-smooth functionals// Topology Appl. — 2017. — *221*. — P. 167–177.
11. *Davletov D. E., Djabbarov G. F.* Functor of semiadditive functionals// Meth. Funct. Anal. Topol. — 2008. — *14*, № 4. — P. 314–322.
12. *Radul T.* On the functor of order-preserving functionals// Comm. Math. Univ. Carol. — 1998. — *39*, № 3. — P. 609–615.

Мамадалиев Нодирбек Камолдинович
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: nodir_88@bk.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 69–77
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-69-77

УДК 514.76

ГЕОМЕТРИЯ ОРБИТ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

© 2021 г. **Ж. О. АСЛОНОВ**

Аннотация. В статье изучается геометрия и топология векторных полей, в том числе, векторных полей Киллинга, заданных на римановых многообразиях постоянной и неотрицательной кривизны. Построена вполне интегрируемое семейство векторных полей, орбиты которого образуют слоение, регулярные слои которого являются двумерными торами, а множество сингулярных слоев состоит из двух окружностей. Также доказана соленоидальность векторных полей Киллинга на трехмерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: векторное поле, векторное поле Киллинга, грубость векторных полей.

GEOMETRY OF ORBITS OF VECTOR FIELDS

© 2021 **Zh. O. ASLONOV**

Abstract. In this paper, we study geometric and topological properties of vector fields on Riemannian manifolds of constant and nonnegative curvature, including Killing vector fields. We construct a completely integrable family of vector fields such that its orbits form a foliation whose set of singular fibers consists of two circles and regular fibers are two-dimensional tori. The solenoidal character of Killing vector fields on three-dimensional Euclidean space is also proved.

Keywords and phrases: vector field, Killing vector field, roughness of vector fields.

AMS Subject Classification: 58K45, 17B66, 32S65

В современной римановой геометрии основными объектами исследований являются гладкие многообразия с фиксированной римановой метрикой. На многообразиях отсутствует глобальная система координат, и, естественно, для изучения подмногообразий и кривых мы не можем писать их уравнения. Поэтому для исследования геометрических объектов необходима инвариантная форма изложения, которая не зависит от локальной системы координат. В этом основную роль играет понятие векторного поля. Все основные объекты современной геометрии, такие как связность, расслоения, параллельный перенос, геодезические, описываются на языке векторных полей.

Как показывает история развития науки, физические законы явлений стали записываться векторными полями. Небесная механика явилась первой областью науки, в которой соответствующие законы (взаимодействие между телами по закону всемирного тяготения) были записаны векторными полями. Рассмотрение интегральных кривых этих векторных полей позволило на основании сведений о расположении и скоростях тел в данной момент времени с большой точностью предсказать расположение их во всякий момент времени, например, точное время солнечных и лунных затмений, расположение планет в то или другое время и т. д.

Изучение преобразований, которые сохраняют метрику пространства-времени, играет исключительно важную роль в математической физике. Достаточно сказать, что с такими преобразованиями связаны наиболее важные законы сохранения. Эти преобразования порождают так называемое векторное поле Киллинга. Векторные поля Киллинга в физике указывают на симметрию физической модели и помогают найти сохраняющиеся величины, такие как энергия, импульс. В теории относительности, например, если метрический тензор не зависит от времени, то в пространстве-времени существует времениподобный вектор Киллинга, с которым связана сохраняющаяся величина — энергия гравитационного поля.

Название дано в честь немецкого математика Вильгельма Киллинга (Wilhelm Killing, 1847—1923), открывшего группы Ли и многие их свойства параллельно с Софусом Ли.

Геометрия векторных полей Киллинга изучена в работах W. Killing, В. Н. Берестовского, T. Adachi, Ю. Г. Никонорова, М. О. Катанаева, C. Beetle, M. Gurses, S. Maeda, S. Z. Nemeth, K. Nomizu, T. Oprea, K. Yano, S. Kobayashi и других авторов.

Как отметили выше, в целом ряде областей физики, например, в теории электромагнитного поля, в теории тепла, в статической физике и в теории оптимального управления, нужно рассматривать не векторные поля, а семейство векторных полей. В этом случае основным объектом исследования является орбита семейства векторных полей.

В настоящее время изучение геометрических и топологических свойств орбит векторных полей является одной из актуальных задач современной геометрии. Изучению геометрии орбит семейства гладких векторных полей посвящены исследования многих математиков в связи с её важностью в различных разделах математики, таких как теория оптимального управления, дифференциальные игры и геометрия сингулярных слоений.

В частности, в работах P. Stefan, H. Sussman, С. И. Алешникова, С. Мейера, С. Х. Арансона, Н. Н. Петрова, T. Nagano, V. Jurdjevic, P. Molino, M. Чешковой, А. Нарманова и Н. А. Азамовой изучены различные топологические и геометрические свойства орбит векторных полей.

Фундаментальным результатом в этом направлении стала теорема Сусманна, которая утверждает, что если векторные поля и многообразие M, на котором они заданы, из класса C^∞, то каждая орбита является погруженным подмногообразием M класса C^∞. Более точно, этот результат формулируется таким образом: существует вполне интегрируемое распределение P на M такое, что для каждой точки $x \in M$ орбита $L(x)$ совпадает с максимальным интегральным подмногообразием P, проходящим через точку x.

П. Стефан доказал, что в случае, когда M и векторные поля из D имеют гладкость класса C^r, $r \geqslant 1$, то орбита является погруженным подмногообразием класса C^r. Известно, что если векторные поля из D класса C^0, то орбита не обязана быть многообразием. Примером может служить непрерывное векторное поле, когда нет единственности решения соответствующего дифференциального уравнения.

Обозначим через $V(M)$ множество всех гладких векторных полей класса C^∞, заданных на многообразии M размерности n. Это линейное пространство является алгеброй Ли относительно скобки Ли векторных полей.

Пусть D — семейство гладких векторных полей на многообразии M. Обозначим через $A(D)$ минимальную подалгебру Ли, содержащую D, $A_x(D)$ — подпространство касательного пространства в точке $x \in M$, состоящее из всех векторов $\{X(x) : X \in A(D)\}$.

Из результатов [13] следует, что если M и векторные поля из D аналитичны, то распределение $P_D \colon x \to A_x(D)$ вполне интегрируемо, причем каждая орбита является интегральным подмногообразием для распределения P_D. Таким образом, в этом случае размерность орбиты $L(x)$ равна $\dim A_x(D)$ для всех $x \in M$. В общем случае имеет место $\dim A_x(D) \leqslant \dim L(x)$ для всех $x \in M$.

В [16] показано, что на каждом связном многообразии M размерности n существуют два векторных поля X, Y такие, что для каждой точки $x \in M$ положительная полуорбита $L^+(x)$, проходящая через точки x, совпадает с многообразием M.

Поскольку структура орбит векторных полей является достаточно сложной, в существующей многочисленной литературе исследована структура орбит для специального класса векторных полей.

Одним из важнейших вопросов в современной теории управления является вопрос о том, как меняются основные характеристики при малых изменениях целевой точки. Так как множество управляемости является одной из основных характеристик систем управления, то вопрос о его зависимости от целевой точки входит в ряд основных вопросов теории управления. В случае симметричных систем этот вопрос совпадает с вопросом о зависимости орбиты $L(x)$ от x. Поэтому вопрос о зависимости $L(x)$ от x, в частности, непрерывность многозначного отображения $x \to L(x)$, является актуальным.

Работа А. Нарманова [7] посвящена достаточным условиям непрерывности многозначного отображения $x \to L(x)$. Им показано, что это отображение полунепрерывно снизу в каждой точке многообразия M. Простые примеры показывают, что отображение $x \to L(x)$ в общем случае не является полунепрерывным сверху.

Пусть M — гладкое многообразие размерности n, T_xM — касательное пространство в точке $x \in M$, TM — касательное расслоение многообразия M. Отображение $\pi\colon TM \to M$, при котором $X \in T_xM$ переходит в $\pi(X) = x$ (и, следовательно, $\pi(T_xM) = x$) называется проекцией.

Определение 1. Пусть M — гладкое многообразие размерности n. Отображение $X\colon M \to TM$, при котором $\pi \circ X(x) = x$ называется векторным полем на M.

Таким образом, векторное поле это такое отображение, которое каждой точке $x \in M$ сопоставляет касательный вектор $X(x) \in T_xM$. Если при этом векторное поле $X\colon M \to TM$ является гладким отображением двух гладких многообразий M, TM, то оно называется гладким векторным полем.

Пусть X — гладкое векторное поле на многообразии M. Гладкая кривая $\varphi\colon (a,b) \to M$ называется интегральной кривой векторного поля X, если для каждого $t \in (a,b)$ имеет место равенство:

$$\dot{\varphi}(t) = X(\varphi(t)),$$

где $\dot{\varphi}(t)$ — касательный вектор кривой $\varphi\colon (a,b) \to M$ в точке $\varphi(t)$.

Для точки $x \in M$ через $X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x)$, которая в общем случае зависит не только от поля X, но и от начальной точки x. В дальнейшем всюду в работе в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$.

Далее определим орбиту семейства векторных полей.

Определение 2. Орбитой $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящей через точку x, называется множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля $X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}, \ldots, X_{i_k}$ из D (где k — произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_{i_k}^{t_k}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}(\ldots(X_{i_1}^{t_1}(x))\ldots)).$$

Ясно, что если D состоит из одного векторного поля, орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием).

Определение 3. Отображение P, ставящее каждой точке $x \in M$ некоторое подпространство $P(x) \subset T_xM$, называется распределением. Если $\dim P(x) = k$ для всех $x \in M$, то P называется k-мерным распределением.

Определение 4. Распределение P называется вполне интегрируемым, если для каждой точки $x \in M$ существуют подмногообразие N_x многообразия M такое, что $T_yN_x = P(y)$ для всех $y \in N_x$.

Подмногообразие N_x называется интегральным подмногообразием распределения P.

Если дано семейство D гладких векторных полей, то естественным образом возникает гладкое распределение. Действительно, если D состоит из гладких векторных полей, то для каждой точки $x \in M$ множество векторов $D(x) = \{X(x) : X \in D\}$ порождает некоторое подпространство $P(x)$ касательного пространства T_xM. Это распределение обозначим через P_D. Говорят, что семейство D вполне интегрируемо, если распределение P_D- вполне интегрируемо. В [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть семейство D гладких векторных полей вполне интегрируемо. Тогда каждая орбита семейства D является интегральным подмногообразием распределения P_D.*

В [3] рассматривается вопрос о грубости векторных полей на торе.

Определение 5. Векторные поля $X, Y \in V(M)$ называются C^r-эквивалентными, если существует C^r-диффеоморфизм $h\colon M \to M$, который переводит траектории поля X в траектории поля Y, сохраняя их ориентации.

Определение 6. Векторное поле $X \in V(M)$ называется C^r-грубым, если существует такая окрестность V поля X в $V(M)$, что любое $Y \in V$ C^r-эквивалентно полю X.

Известно, что грубость векторных полей играет важнейшую роль в приложениях. В [10] получена теорема, показывающая степень негрубости иррациональной обмотки тора. При доказательстве теоремы в явном виде построено векторное поле, достаточно близкое к иррациональной обмотке тора.

Теорема 2. *Пусть X — иррациональная обмотка двумерного тора. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует векторное поле X_ε такое, что $\|X - X_\varepsilon\|_r < \varepsilon$ и поле X_ε имеет конечное число замкнутых траекторий, где $\|X - X_\varepsilon\|_r$ — расстояние в пространстве $V(T^2)$.*

В этой работе также доказана теорема о существование векторного поля из заданной окрестности в $V(T^2)$ иррациональной обмотки на многомерном торе, которое имеет заданное число замкнутых интегральных кривых:

Теорема 3. *Пусть X — иррациональная обмотка n-мерного тора T^n. Тогда для любых $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует векторное поле $X_{m,\varepsilon}$ такое, что поле $X_{m,\varepsilon}$ имеет ровно m замкнутых траекторий и*

$$\|X - X_{m,\varepsilon}\|_r < \varepsilon.$$

В [4] введено понятие грубости семейства векторных полей, заданных на многомерном торе.

Семейства векторных полей $D_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ и $D_2 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ называются C^r-эквивалентными, если существует C^r-диффеоморфизм $h\colon M \to M$, который переводит орбиту семейства $D_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ на орбиту семейства $D_2 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$.

Семейство векторных полей $D = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ называется C^r-грубым, если существует такая окрестность U семейства D, что любое семейство из этой окрестности C^r-эквивалентно семейству D.

Рассмотрим дифференциальную форму $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_n dx_n$ в $\mathbb{R}^n$, где a_i — действительные числа.

Дифференциальная форма ω индуцирует дифференциальную форму на n-мерном торе $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, которая получается при факторизации $\mathbb{R}^n$ по $\mathbb{Z}^n$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. С помощью этой дифференциальной формы ω определим семейство векторных полей D класса C^∞ на торе следующим образом:

$$D = \{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} : \omega(X_i) = 0\},$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ — векторные поля класса C^∞, линейно независимые в каждой точке.

Обозначим через V линейную оболочку векторов $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_{n-1}(x)$, т.е. $P(x) = L \in \{X_1(x), X_2(x), \ldots, X_{n-1}(x)\}$, $x \in T^n$. Получим $(n-1)$-мерное распределение $P\colon x \to P(x)$ на торе T^n. В силу того, что дифференциальная форма ω замкнута, т.е. $d\omega = 0$, по теореме Фробениуса распределение $P\colon x \to P(x)$ вполне интегрируемо. Следовательно, максимальные интегральные подмногообразия P порождают некоторое слоение F коразмерности 1 на T^n.

Теорема 4 (см. [5])**.** *Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Тогда семейство векторных полей D на T^n является не грубым, т.е. существуют векторные поля $X_1', X_2', \ldots, X_{n-1}'$ на T^n, которые достаточно близки к $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ соответственно, и семейство не является C^r-эквивалентным $D = \{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}\}$ при каждом $r \geqslant 0$.*

Напомним определение векторных полей Киллинга.

Определение 7. Векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная полем X, состоит из изометрий многообразия M.

Доказана следующая вспомогательная теорема, которая дает необходимое и достаточное условие того, чтобы векторное поле, заданное в евклидовом пространстве, было векторным полем Киллинга:

Теорема 5 (см. [2]). *Векторное поле*

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

в $\mathbb{R}^n$ является векторным полем Киллинга тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}=0,\quad i\neq j,\quad \frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}=0,\quad i=\overline{1,n}.$$

В. Н. Берестовский и Ю. Г. Никоноров доказали, что если длина векторного поля Киллинга постоянна на всем многообразии, то интегральные кривые являются геодезическими линиями (см. [6]). В [2] доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Интегральная кривая каждого гладкого векторного поля Киллинга на двумерном круговом цилиндре является геодезической линией.*

Пусть D — семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M. Известно, что разбиение многообразия на орбиты семейства векторных полей D является сингулярным слоением.

Напомним, что сингулярное слоение называется римановым, если геодезическая, ортогональная в одной точке слою слоения, остаётся ортогональной ко всем слоям слоения во всех своих точках. Сингулярные римановы слоения изучены в работах P. Molino [11,12], А. Нарманова [14,15] и других авторов.

Следующая теорема показывает, что орбиты семейства векторных полей Киллинга порождают сингулярное риманово слоение

Теорема 7. *Пусть D — семейство гладких векторных полей Киллинга, заданных на гладком римановом многообразии M размерности n и орбиты семейства D имеют размерности меньшие чем n. Тогда разбиение многообразия на орбиты является сингулярным римановым слоением.*

Рассмотрим векторные поля X и Y в $\mathbb{R}^4$, которые в декартовых координатах имеют следующий вид:

$$X=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}-w\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial w},$$
$$Y=z\frac{\partial}{\partial x}+w\frac{\partial}{\partial y}-x\frac{\partial}{\partial z}-y\frac{\partial}{\partial w}.$$

По теореме 5 легко проверить, что эти поля являются векторными полями Киллинга. Обозначим через S^3 единичную сферу с индуцированной метрикой из $\mathbb{R}^4$, которая задана уравнением $x^2+y^2+z^2+w^2=1$.

Нетрудно проверить, что эти векторные поля касаются сферы S^3. Значит, эти поля являются векторными полями Киллинга на сфере S^3.

Теорема 8. *Семейство $D=\{X,Y\}$ — вполне интегрируемо. Регулярные слои слоения F являются двумерными торами. Множество сингулярных слоев состоит из двух окружностей.*

Доказательство. Известно, что для размерности слоев $L(x)$ слоения F имеет место $0\leqslant\dim L(x)\leqslant n$. Слой максимальной размерности называется регулярным, а остальные слои — сингулярными. Если векторные поля X и Y в координатах заданы формулами:

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},\quad Y=\sum_{i=1}^{n}\eta_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

то i-координатная функция скобки (коммутатора) Ли $[X, Y]$ имеет следующий вид:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right).$$

С помощью нетрудных вычислений можно показать, что для наших векторных полей

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0,$$

т.е. $[X, Y] = 0$. Отсюда следует, что семейство $D = \{X, Y\}$ является инволютивным, соответственно, по теореме Фробениуса—Херманна семейство векторных полей $D = \{X, Y\}$ вполне интегрируемо. Теперь покажем, что каждая регулярная орбита семейства векторных полей является двумерным тором. Рассмотрим соответствующие системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x, \\ \dot{z} = -w, \\ \dot{w} = z \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = w, \\ \dot{z} = -x, \\ \dot{w} = -y. \end{cases}$$

Для точки $p_0 = (x_0, y_0, z_0, w_0)$ сферы S^3 интегральная кривая γ_0^1 векторного поля X, проходящая через точки p_0 при $t = 0$, задаются следующими параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \\ y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t, \\ z(t) = z_0 \cos t - w_0 \sin t, \\ w(t) = z_0 \sin t + w_0 \cos t. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что интегральная кривая γ_0^1 является замкнутой кривой. Интегральная кривая γ_0^2 векторного поля Y, проходящая через точки p_0 при $t = 0$, задаются следующими параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = -x_0 \cos t + z_0 \sin t, \\ y(t) = -y_0 \cos t + w_0 \sin t, \\ z(t) = x_0 \sin t + z_0 \cos t, \\ w(t) = y_0 \sin t + w_0 \cos t. \end{cases}$$

Интегральная кривая γ_0^2 также является замкнутой кривой. Векторные поля X и Y коллинеарны только на двух окружностях, которые являются пересечениями сферы с двумерными плоскостями

$$\begin{cases} x = w, \\ y = -z \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x = -w, \\ y = z. \end{cases}$$

соответственно. Эти окружности задаются уравнениями

$$\begin{cases} x = w, \\ y = -z, \\ 2x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x = -w, \\ y = z, \\ 2z^2 + 2w^2 = 1. \end{cases} \quad .$$

Покажем, что эти окружности являются интегральными кривыми для векторных полей X и Y. Пусть точка $P_0(x_0, y_0, z_0, w_0)$ принадлежит первой окружности. Тогда $x_0 = w_0$, $y_0 = -z_0$ и интегральная кривая векторного поля X, выходящая из точки P_0, имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \\ y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t, \\ z(t) = -y_0 \cos t - x_0 \sin t, \\ w(t) = -y_0 \sin t + x_0 \cos t. \end{cases} \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что $x(t) = w(t)$, $y(t) = -z(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что окружность, определенная уравнениями (1), является интегральной кривой для векторного поля X.

Теперь рассмотрим интегральную кривую векторного поля Y, выходящую из точки P_0. Она задается следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \\ y(t) = -y_0 \cos t + w_0 \sin t, \\ z(t) = -x_0 \sin t - y_0 \cos t, \\ w(t) = -y_0 \sin t + x_0 \cos t. \end{cases} \tag{2}$$

Как нетрудно видеть, $x(t) = w(t)$, $y(t) = -z(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что окружность, определенная уравнениями (2), является интегральной кривой для векторного поля Y. Аналогично доказывается, что вторая окружность также является интегральной кривой для векторных полей X и Y.

Теперь рассмотрим точку P на сфере, которая не принадлежит выше рассмотренным окружностям. Обозначим через $\gamma_1(t)$ интегральную кривую векторного поля X, выходящую из точки P. В точках $\gamma_1(t)$ векторы X и Y линейно независимы. Рассмотрим отображение $(t, s) \to X^t(Y^s(P))$ для всех $(t, s) \in \mathbb{R}^2$.

Ясно, что образ двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$ является орбитой семейства D, проходящей через точку P. Так как векторы X и Y линейно независимы в точке P, ранг этого отображения в точке P равен двум. Таким образом, орбита, проходящая через точку P, является двумерным многообразием.

Равенство $[X, Y] = 0$ означает, что $X^t(Y^s(P)) = Y^s(X^t(P))$ для всех $(t, s) \in \mathbb{R}^2$. следовательно, поток векторного поля X переводит интегральные кривые векторного поля Y в интегральные кривые векторного поля Y (соответственно, поток векторного поля Y переводит интегральные кривые векторного поля X в интегральные кривые векторного поля X).

Так как интегральная кривая $\gamma_2(s) = Y^s(X^t(P))$ векторного поля Y, выходящая из точки $\gamma_1(t) = X^t(P)$ при $s = 0$, является замкнутой кривой, выпуская интегральную кривую $\gamma_2(s) = Y^s(X^t(P))$ из каждой точки $\gamma_1(t) = X^t(P)$, мы получим двумерный тор. Оба векторных поля X и Y касаются полученного тора. Как следует из теоремы, если X и Y всюду касаются подмногообразия N, то их скобка Ли $[X, Y]$ также всюду касаются этого многообразия. Поэтому, находясь на этом торе, мы не можем покинуть его и, следовательно, орбита нашего семейства, проходящая через точку P, содержится в этом торе. Так как из точки P мы можем прийти в любую точку этого тора, двигаясь вдоль интегральных кривых векторных полей X и Y, орбита семейства D, содержащая точку P, является двумерным тором. То, что орбиты порождают риманово слоение, вытекает из теоремы 7. Теорема доказана. $\square$

Известно, что векторное поле X, ротор которого равен нулю, называется безвихревым. В этом случае, если $X = X^1\partial_1 + X^2\partial_2 + X^3\partial_3$ (здесь $\partial_1 = \{1, 0, 0\}$, $\partial_2 = \{0, 1, 0\}$, $\partial_3 = \{0, 0, 1\}$ базисные векторные поля) то

$$\operatorname{rot}_x X = \frac{\partial X^3}{\partial y} - \frac{\partial X^2}{\partial z} = 0, \quad \operatorname{rot}_y X = \frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^3}{\partial x} = 0, \quad \operatorname{rot}_z X = \frac{\partial X^2}{\partial x} - \frac{\partial X^1}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Заметим, что условия (3) совпадают с условиями потенциальности поля X. Это означает, что существует скалярное поле $u(x, y, z)$, градиент которого равен X: $X = \operatorname{grad} u$.

Таким образом, уравнение $\operatorname{rot} X = 0$ выражает условие потенциальности поля X.

Утверждение 1. *Если X является векторным полем сферического скалярного поля, то оно является безвихревым.*

Доказательство. Заметим, что скалярное поле, зависящее только от расстояния точки до начала координат, называется сферическим. Рассмотрим сферическое векторное поле $X = f(r)\boldsymbol{r}$,

$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$. По определению ротора находим

$$\operatorname{rot} X = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f(r)x & f(r)y & f(r)z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} f(r)z - \frac{\partial}{\partial z} f(r)y\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} f(r)x - \frac{\partial}{\partial x} f(r)z\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} f(r)y - \frac{\partial}{\partial y} f(r)x\right)\boldsymbol{k} =$$

$$= f'(r)\left(\frac{yz}{r} - \frac{zy}{r}\right)\boldsymbol{i} + f'(r)\left(\frac{xz}{r} - \frac{zx}{r}\right)\boldsymbol{j} + f'(r)\left(\frac{yx}{r} - \frac{xy}{r}\right)\boldsymbol{k} = 0.$$

Из этого следует, что ротор любого сферического векторного поля равен нулю, т.е. сферическое векторное поле является безвихревым. □

Напомним, что векторное поле X называется соленоидальным, если оно является вихрем некоторого поля Y, т.е. $X = \operatorname{rot} Y$. При этом векторное поле называется векторным потенциалом поля Y. Необходимым условием такого соотношения является равенство $\operatorname{div} X = \operatorname{div} \operatorname{rot} Y$. Следовательно, поток соленоидального поля через замкнутую поверхность равен нулю. Если векторное поле есть поле скоростей сплошной среды или жидкости, то поток этого поля через замкнутую поверхность характеризует суммарную мощность источников или стоков.

В [9] доказана соленоидальность векторных полей Киллинга.

Теорема 9 (см. [9])**.** *Векторные поля Киллинга, заданные на трехмерном евклидовом пространстве, являются соленоидальными.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аслонов Ж. О.* Об одной негрубой динамической системе на торе// Вестн. Удмурт. ун-та. — 2008. — *2*. — С. 25–26.
2. *Аслонов Ж. О.* Геометрия орбит векторных полей// Докл. АН РУз. — 2011. — *2*. — С. 5–7.
3. *Аслонов Ж. О. Нарманов А. Я.* О грубости иррациональной обмотки// Вестн. Нац. ун-та Узбекистана. — 2009. — *2*. — С. 48–51.
4. *Аслонов Ж. О. Нарманов А. Я.* О грубости динамических полисистем// Вестн. Нац. ун-та Узбекистана. — 2010. — *2*. — С. 148–151.
5. *Аслонов Ж. О. Нарманов А. Я.* О грубости динамических полисистем// Тез. докл. Междунар. науч. конф. «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников» (Москва, 18–21 августа 2010 г.). — М., 2010. — С. 8–9.
6. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях// Сиб. мат. ж. — 2008. — *49*, № 2. — С. 497–514.
7. *Нарманов А. Я.* О трансверсальной структуре множества управляемости симметричных систем управления// Диффер. уравн. — 1996. — *32*, № 6. — С. 780–783.
8. *Нарманов А. Я., Аслонов Ж. О.* Об одной динамической системе на двумерном торе// Вестн. Нац. ун-та Узбекистана. — 2006. — *2*. — С. 48–51.
9. *Aslonov J.* Second-order vector-differeneial operations// Тр. Междунар. конф. «Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения» (Ташкент, 21–23 ноября 2019 г.). — Ташкент, 2019. — С. 21–23.
10. *Aslonov J. O., Narmanov A. Ya.* On the roughness of the irrational winding of a high -dimensional torus// Proc. 3rd Congr. World Math. Soc. of Turkic Countries (Almaty, June 30—July 4, 2009), 2009. — P. 47–48.
11. *Molino P.* Riemannian Foliations. — Boston: Birkhäuser, 1988.
12. *Molino P.* Orbit-like foliations// in: Geometric Study of Foliations. — Tokyo: World Scientific, 1993. — P. 97–119.
13. *Nagano T.* Linear differential systems with singularities and application to transitive Lie algebras// J. Math. Soc. Jpn. — 1968. — *18*. — P. 338–404.
14. *Narmanov A., Kaypnazarova G.* Foliation theory and its applications// TWMS J. Pure Appl. Math. — 2011. — *2*, № 1. — P. 112–126.

15. *Narmanov A., Sharipov A.* On the isometries of foliated manifold// TWMS J. Pure Appl. Math. — 2011. — *2*, № 1. — P. 127–133.
16. *Sussmann H., Levitt N.* On controllability by means of two vector fields// SIAM J. Control — 1975. — *13*, № 6. — P. 1271–1281.

Аслонов Жасурбек Орзиевич
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: `jasurbek05@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 78–87
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-78-87

УДК 515.122

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА G-СИММЕТРИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ

© 2021 г. **Р. Б. БЕШИМОВ, Р. М. ЖУРАЕВ**

Аннотация. В этой работе изучается вес, характер, локально слабая плотность и метризуемость пространства G-симметрической степени. Доказано, что отображение $\pi^s_{n,G}$ является открыто-замкнутым, а функтор SP^n_G сохраняет вес, сетевой вес, характер, локальную слабую плотность, сохраняет хаусдорфовость, регулярность, вполне регулярность, метризуемость и связность топологических пространств.

Ключевые слова: открыто-замкнутое отображение, метризуемость, вес, слабая плотность, связность, характер.

TOPOLOGICAL PROPERTIES OF THE SPACE OF G-SYMMETRIC DEGREE

© 2021 **R. B. BESHIMOV, R. M. ZHURAEV**

Abstract. In this paper, we examine the weight, character, locally weak density, and metrizability of the space of G-symmetric degree. We proved that the mapping $\pi^s_{n,G}$ is open-closed, and the functor SP^n_G preserves weight, net weight, character, local weak density, the Hausdorff property, regularity, completely regularity, metrizability, and connectedness.

Keywords and phrases: open-closed mapping, metrizability, weight, weak density, connectedness, character.

AMS Subject Classification: 54A25, 54B15, 54B20, 54C05

На Пражском топологическом симпозиуме в 1981 году В. В. Федорчук поставил следующие общие проблемы теории ковариантных функторов, определившие новое направление для исследований в области топологии (см. [3]).

Пусть P — некоторое геометрическое свойство, а F — некоторый ковариантный функтор. Если топологическое пространство X обладает свойством P, то имеет ли $F(X)$ то же свойство P? Напротив, если $F(X)$ обладает свойством P, для каких функторов F из этого следует, что топологическое пространство X обладает тем же свойством P?

В нашем случае X — топологическое T_1-пространство и $F = SP^n_G$ ковариантный функтор G-симметрической степени.

Пусть X — топологическое T_1-пространство. Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначим через $\exp X$. Напомним, что база топологии Вьеториса (см. [5]) в $\exp X$ вводится следующим образом: для открытых множеств $U_1, \ldots, U_n \subset X$ положим

$$O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = \left\{F : F \in \exp X,\ F \in \exp X,\ F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ F \cap U_1 \neq \varnothing, \ldots, F \cap U_n \neq \varnothing\right\}$$

или

$$O\langle U_1,\ldots,U_n\rangle=\left\{F: F\in\exp X,\ F\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i\right\}\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{F: F\in\exp X,\ F\cap U_i\neq\varnothing\}\right).$$

Если множества $U_1,\ldots,U_n$ открыты, то множества

$$\left\{F: F\in\exp X, F\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i\right\}=\exp\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_i, X\right),$$
$$\{F: F\in\exp X,\ F\cap U_i\neq\varnothing\}=\exp X\setminus\exp(X\setminus U_i,X)$$

открыты в пространстве замкнутых подмножеств, по определению топологии Вьеториса, поэтому открытым является множество $O\langle U_1,\ldots,U_n\rangle$. С другой стороны, такой вид имеют и элементы предбазы, указанной нами при определении топологии Вьеториса

$$\exp(U,X)=O\langle U\rangle,\quad \exp X\setminus\exp(X\setminus U,X)=O\langle U,X\rangle.$$

Таким образом, семейство всех множеств вида $O\langle U_1,\ldots,U_n\rangle$, где множества $U_1,\ldots,U_n\subset X$ открыты в пространстве X, является предбазой топологии Вьеториса. Множество $\exp X$ с топологией Вьеториса называется экспоненциальным пространством (или гиперпространством) пространства X.

Обозначим через $\exp_n X$ множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства X мощности, не превосходящей кардинального числа n, т.е.

$$\exp_n X=\{F\in\exp X: |F|\leqslant n\}.$$

Положим

$$\exp_\omega X=\bigcup\{\exp_n X: n=1,2,\ldots\},\quad \exp_c X=\{F\in\exp X: F\text{ — компакт в } X\}.$$

Ясно, что

$$\exp_n X\subset\exp_\omega X\subset\exp_c X\subset\exp X$$

для любого топологического T_1-пространства X.

Пусть X — бесконечный компакт. Рассмотрим отображение

$$\pi_n\colon X^n\to\exp_n X,$$

ставящее в соответствие точке $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in X^n$ множество ее координат $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. Тогда π_n — непрерывное отображение компакта X^n на компакт $\exp_n X$. Таким образом, гиперсимметрическая n-степень компакта X является факторпространством его n-й степени относительно разбиения, порождаемого следующим отношением эквивалентности: точки $x,y\in X^n$ эквивалентны, если они имеют одинаковые множества координат.

На n-й степени X^n компакта X действует симметрическая группа S_n всех перестановок как группа перестановок координат. Множество орбит этого действия с фактортопологией обозначим через SP^nX. Рассмотрим в качестве факторотображения

$$\pi_n^s\colon X^n\to SP^nX,$$

ставящее в соответствие точке $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in X^n$ орбиту этой точки. Таким образом, точки пространства SP^nX — это конечные подмножества (классы эквивалентности) произведения X^n. При этом две точки $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ считаются эквивалентными, если существует такая перестановка $\sigma\in S_n$, что $y_i=x_{\sigma(i)}$ для всех $i=1,2,\ldots,n$.

Пространство SP^nX называется n-й симметрической степенью пространства X. Назовем отношения эквивалентности, посредством которых пространства SP^nX и $\exp_n X$ получаются из X^n соответственно отношениями симметрической и гиперсимметрической эквивалентности. Всякие симметрично эквивалентные точки из X^n будут и гиперсимметрично эквивалентны. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Так, для $x\neq y$ точки (x,x,y), $(x,y,y)\in X^3$ гиперсимметрично эквивалентны, но не эквивалентны симметрично.

Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение компактов X и Y. Для класса эквивалентности $[(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \in SP^n X$ положим

$$SP^n f[(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = [(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))].$$

Тем самым определено отображение

$$SP^n f\colon SP^n X \to SP^n Y.$$

Легко проверить, что так построенная операция SP^n является ковариантным функтором в категории компактов. Этот функтор называется функтором n-й симметрической степени. В самом деле, класс симметрической эквивалентности $[(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ однозначно определяет содержащий его класс гиперсимметрической эквивалентности $[(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^{hc}$. Тем самым определено отображение

$$\pi_n^h\colon SP^n X \to \exp_n X,$$

представляющее функтор $\exp_n$ в качестве факторфунктора функтора SP^n.

Понятие симметрической степени допускает обобщения. Пусть G — произвольная подгруппа группы S_n. Тогда она также действует на X^n как группа перестановок координат. Соответственно на X^n возникает отношение G-симметрической эквивалентности. Факторпространство произведения X^n по отношению G-симметрической эквивалентности называется G-симметрической степенью пространства X и обозначается через $SP^n_G X$. Операция SP^n_G также является ковариантным функтором в категории компактов, называемым функтором G-симметрической степени. Если $G = S_n$, то $SP^n_G = SP^n$. Если же группа G состоит только из единичного элемента, то $SP^n_G = \Pi^n$. Более того, если G_1, G_2 — такие подгруппы симметрической группы S_n, что $G_1 \subset G_2$, то возникает следующая последовательность естественно определяемых факторизаций функторов (см. [4]):

$$\Pi^n \to SP^n_{G_1} \to SP^n_{G_2} \to SP^n.$$

В этом случае факторотображения $\pi^s_{n,G}\colon X^n \to SP^n_G X$ определяют следующим образом (см. [2]):

$$\pi^s_{n,G}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1, x_2, \ldots, x_n]_G.$$

Наименьшее кардинальное число вида $|B|$, где B — база топологического пространства X, называется *весом* топологического пространства X и обозначается через $w(X)$.

Семейство $N = \{M_s\}_{s \in S}$ подмножеств топологического пространства X называется *сетью* пространства X, если для каждой точки $x \in X$ и каждой окрестности U точки x найдется такое $s \in S$, что $x \in M_s \subset U$. *Сетевой вес* пространства X определяется как наименьший кардинал вида $|N|$, где N — сеть пространства X. Этот кардинал обозначается через $nw(X)$ (см. [6]).

Наименьшее кардинальное число $\tau \geqslant \aleph_0$, такое, что каждое подмножество пространства X, состоящее только из изолированных точек, имеет мощность $\leqslant \tau$, называется *спредом* пространства X и обозначается $s(X)$.

Наименьшее кардинальное число $\tau \geqslant \aleph_0$, такое, что каждое замкнутое подмножество пространства X, состоящее только из изолированных точек, имеет мощность $\leqslant \tau$, называется *экстентом* пространства X и обозначается $e(X)$.

Наименьшее кардинальное число $\tau \geqslant \aleph_0$, такое, что любое семейство попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X имеет мощность $\leqslant \tau$, называется *числом Суслина* или клеточностью пространства X и обозначается $c(X)$.

Наименьший кардинал τ, такой, что из каждого открытого покрытия пространства X можно выбрать подпокрытие мощности $\leqslant \tau$, называется *числом Линделёфа* пространства X и обозначается через $l(X)$ (см. [6]).

Мы говорим, что топологическое пространство X *локально τ-плотно в точке* $x \in X$, если τ — наименьшее кардинальное число такое, что x имеет окрестность плотности τ в X. Локальную плотность в точке $x \in X$ обозначим через $ld(x)$. *Локальная плотность пространства* X — это точная верхняя грань всех кардинальных чисел $ld(x)$ для $x \in X$. Это кардинальное число обозначим через $ld(X)$, т.е. $ld(X) = \sup\{ld(x) : x \in X\}$.

Топологическое пространство X называется *локально слабо τ-плотным в точке* $x \in X$, если τ — наименьшее кардинальное число такое, что x имеет окрестность слабой плотности τ в X.

Локальную слабую плотность в точке $x \in X$ обозначим через $lwd(x)$. *Локальная слабая плотность пространства* X — это точная верхняя грань всех кардинальных чисел $lwd(x)$ для $x \in X$. Это кардинальное число обозначим через $lwd(X)$, т.е. $lwd(X) = \sup\{lwd(x) : x \in X\}$ (см. [9]).

Теорема 1 (см. [9])**.** *Пусть X, Y топологические T_1-пространства. Если $f\colon X \to Y$ — открытое отображение и $f(X) = Y$, то*

$$ld(Y) \leqslant ld(X), \quad lwd(Y) \leqslant lwd(X).$$

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *замкнутым* (*открытым*) отображением, если для каждого замкнутого (открытого) множества $A \subset X$ образ $f(A)$ замкнут (открыт) в Y. Отображения, которые одновременно замкнуты и открыты, называются открыто-замкнутыми отображениями (см. [6]).

Теорема 2. *Пусть X — T_1-пространство, n натуральное число и G — произвольная подгруппа группы перестановки S_n. Тогда отображение*

$$\pi^s_{n,G}\colon X^n \to SP^n_G X$$

является открыто-замкнутым.

Доказательство. Сначала покажем открытость отображения $\pi^s_{n,G}$. Возьмем произвольное открытое подмножество U пространства X^n. Покажем, что множество $\pi^s_{n,G}(U)$ открыто в $SP^n_G X$. По определению факторпространства достаточно показать, что множество $(\pi^s_{n,G})^{-1}(\pi^s_{n,G}(U))$ открыто в $SP^n_G X$. Выберем произвольную точку

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\pi^s_{n,G})^{-1}(\pi^s_{n,G}(U));$$

тогда $\pi^s_{n,G}(x) \in \pi^s_{n,G}(U)$. Отсюда следует, что существует такая перестановка $\sigma \in G$, что $y_i = x_{\sigma(i)}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in U$. Поэтому существуют такие окрестности $U_1, U_2, \ldots, U_n \subset X$ точек $y_1, y_2, \ldots, y_n$, что для множества $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \subset U$ имеем

$$\pi^s_{n,G}(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) \subset \pi^s_{n,G}(U).$$

Рассмотрим след $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$; поскольку $V_i \subset X$, ясно, что $V_i = U_{\theta(i)}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, где $\theta = \sigma^{-1} \in G$. Множество V_i открыто в X и $x_i \in V_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Известно, что множество $Ox = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ будет окрестностью точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В этом случае отображение $\pi^s_{n,G}$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\pi^s_{n,G}(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) = \pi^s_{n,G}(V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n).$$

Имеем

$$\pi^s_{n,G}(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) = \pi^s_{n,G}(V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n) = \pi^s_{n,G}(Ox) \subset \pi^s_{n,G}(U).$$

Отсюда следует, что

$$Ox \subset (\pi^s_{n,G})^{-1}(\pi^s_{n,G}(U)).$$

Значит, множество $(\pi^s_{n,G})^{-1}(\pi^s_{n,G}(U))$ открыто в X^n, т.е. множество $\pi^s_{n,G}(U)$ открыто в $SP^n_G X$. Таким образом, открытость отображения $\pi^s_{n,G}$ доказана.

Теперь докажем замкнутость отображения $\pi^s_{n,G}$. Выберем произвольное замкнутое подмножество F пространства X^n. Покажем, что множество $\pi^s_{n,G}(F)$ замкнуто в $SP^n_G X$. По определению факторпространства достаточно показать, что множество $(\pi^s_{n,G})^{-1}(\pi^s_{n,G}(F))$ замкнуто в X^n или множество $X^n \setminus (\pi^s_{n,G})^{-1}(\pi^s_{n,G}(F))$ открыто в X^n. Выберем произвольную точку

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n \setminus (\pi^s_{n,G})^{-1}(\pi^s_{n,G}(F));$$

тогда $\pi^s_{n,G}(x) \notin \pi^s_{n,G}(F)$. Отсюда следует, что для каждой перестановки $\sigma \in G$, $y_i = x_{\sigma(i)}$, $y_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$, выполняется условие $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \notin F$. Тогда $y \in X^n \setminus F$; ясно, что $X^n \setminus F$ открыто в X^n. В силу открытости множества $X^n \setminus F$ существуют такие окрестности $U^\sigma_1, U^\sigma_2, \ldots, U^\sigma_n \subset X$ точек $y_1, y_2, \ldots, y_n$, что

$$U^\sigma_1 \times U^\sigma_2 \times \ldots \times U^\sigma_n \subset X^n \setminus F,$$

т.е. $(U_1^\sigma \times U_2^\sigma \times \ldots \times U_n^\sigma) \cap F = \varnothing$. Рассмотрим системы множеств

$$U_1 = \bigcap_{\sigma \in S_n} U_{\sigma_1}^\sigma, \quad U_2 = \bigcap_{\sigma \in S_n} U_{\sigma_2}^\sigma, \quad \ldots, \quad U_n = \bigcap_{\sigma \in S_n} U_{\sigma_n}^\sigma,$$

где $x_1 \in U_{\sigma_1}^\sigma$, $x_2 \in U_{\sigma_2}^\sigma, \ldots, x_n \in U_{\sigma_n}^\sigma$ для всех $\sigma \in G$. Тогда множества $U_1, U_2, \ldots, U_n \subset X$ являются окрестностями точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно. Имеем

$$\pi_{n,G}^s(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) \cap \pi_{n,G}^s(F) = \varnothing.$$

Значит,

$$(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) \cap (\pi_{n,G}^s)^{-1}(\pi_{n,G}^s(F)) = \varnothing.$$

Следовательно,

$$(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) \subset X^n \setminus (\pi_{n,G}^s)^{-1}(\pi_{n,G}^s(F)).$$

Легко видеть, что множество $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ является окрестностью точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Таким образом, замкнутость отображения $\pi_{n,G}^s$ доказана. Теорема 2 доказана. $\square$

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *совершенным*, если X — хаусдорфово пространство, f — замкнутое отображение, и все прообразы $f^{-1}(y)$ являются компактными подмножествами в X (см. [6]).

Следствие 1. *Пусть X — хаусдорфово пространство, G — произвольная подгруппа группы S_n. Тогда отображение*

$$\pi_{n,G}^s\colon X^n \to SP_G^n X$$

является совершенным.

Семейство $\Re(A)$ открытых подмножеств пространства X называется *базой множества A в пространстве X*, если все элементы семейства $\Re(A)$ содержат A, и для любого открытого множества V, содержащего A, существует множество $U \subset \Re(A)$, такое, что $A \subset U \subset V$. *Характером множества A в топологическом пространстве X* называется наименьшее кардинальное число вида $|\Re(A)|$, где $\Re(A)$ — база множества A в X. Это кардинальное число обозначается $\chi(A, X)$. *Характер топологического пространства X* — это точная верхняя грань всех кардинальных чисел $\chi(x, X)$ для $x \in X$. Это кардинальное число обозначается через $\chi(X)$ (см. [6]).

Теорема 3. *Для любого бесконечного топологического T_1-пространства X и любого подгруппы G группы перестановки S_n верны следующие равенства*:
(1) $w(X) = w(SP_G^n X)$;
(2) $\chi(X) = \chi(SP_G^n X)$;
(3) $lwd(X) = lwd(SP_G^n X)$.

Доказательство. 1. Сначала покажем, что

$$w(SP_G^n X) \leqslant w(X^n).$$

Предположим, что $w(X^n) = \tau \geqslant \aleph_0$; пусть семейство $\Im = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ является базой в X^n. Рассмотрим семейство $\Im' = \{\pi_{n,G}^s(U_\alpha) : \alpha \in A\}$ в $SP_G^n X$. Ясно, что $|\Im'| \leqslant \tau$. Покажем, что $\Im'$ является базой в $SP_G^n X$. Каждый элемент семейства $\Im'$ является открытым множеством, так как $\pi_{n,G}^s$ — открытое отображение. Пусть $y \in SP_G^n X$ — произвольная точка и V — непустое открытое подмножество в $SP_G^n X$, содержащее точку y. Тогда существует такая точка $x \in X^n$, что $y = \pi_{n,G}^s(x)$. Множество $(\pi_{n,G}^s)^{-1}(G)$ открыто в X^n, так как отображение $\pi_{n,G}^s$ непрерывно. Тогда существует такое $U_\alpha \in \Im$, что $x \in U_\alpha \subset (\pi_{n,G}^s)^{-1}(V)$. Имеем

$$y = \pi_{n,G}^s(x) \in \pi_{n,G}^s(U_\alpha) \subset V.$$

Значит, система $\Im'$ является базой в пространстве $SP_G^n X$. Тогда $w(SP_G^n X) \leqslant w(X^n)$. Известно, что $w(X^n) \leqslant w(X)$. Покажем обратное неравенство $w(X) \leqslant w(SP_G^n X)$. Действительно, $w(X) \leqslant w(SP_G^n X)$, так как X является подпространством $SP_G^n X$, и вес наследуется всякому подпространству. Следовательно,

$$w(X^n) \leqslant w(X) \leqslant w(SP_G^n X) \leqslant w(X^n).$$

Поэтому $w(X) = w(SP^n_G X)$.

2. Покажем, что

$$\chi(SP^n_G X) \leqslant \chi(X^n).$$

Предположим, что $\chi(X^n) = \tau \geqslant \aleph_0$. Возьмем произвольную точку $y \in SP^n_G X$. Тогда существует такая точка $x \in X^n$, что $y = \pi^s_{n,G}(x)$. Пусть семейство $\Im = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ является базой X^n в точке x. Рассмотрим семейство $\Im' = \{\pi^s_{n,G}(U_\alpha) : \alpha \in A\}$ в $SP^n_G X$. Ясно, что $|\Im'| \leqslant \tau$. Покажем, что $\Im'$ является базой $SP^n_G X$ в точке y. Каждый элемент семейства $\Im'$ является открытым множеством и содержит точку y, так как отображение $\pi^s_{n,G}$ является открытым. Пусть V — непустое открытое подмножество в $SP^n_G X$, содержащее точку y; тогда множество $(\pi^s_{n,G})^{-1}(V)$ является открытым множеством и содержит точку x. Поэтому существует такое $U_\alpha \in \Im$, что $U_\alpha \subset (\pi^s_{n,G})^{-1}(V)$. Имеем $\pi^s_{n,G}(U_\alpha) \subset V$. Значит, система $\Im'$ является базой $SP^n_G X$ в точке y. В этом случае $\chi(y, SP^n_G X) \leqslant \tau$. Тогда

$$\chi(SP^n_G X) \leqslant \chi(X^n).$$

Ясно, что

$$\chi(X^n) \leqslant \chi(X).$$

Докажем обратное неравенство

$$\chi(X) \leqslant \chi(SP^n_G X).$$

Так как X является подпространством пространства $SP^n_G X$ и характер наследуется всякому подпространству, имеем $\chi(X) \leqslant \chi(SP^n_G X)$. Следовательно,

$$\chi(X^n) \leqslant \chi(X) \leqslant \chi(SP^n_G X) \leqslant \chi(X^n).$$

Значит, $\chi(X) = \chi(SP^n_G X)$.

3. Покажем, что

$$lwd(SP^n_G X) \leqslant lwd(X^n).$$

Рассмотрим отображение

$$\pi^s_{n,G}\colon X^n \to SP^n_G X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что отображение $\pi^s_{n,G}$ открыто. Тогда в силу теоремы 1 имеем

$$lwd(SP^n_G X) \leqslant lwd(X^n).$$

Докажем обратное неравенство

$$lwd(X^n) \leqslant lwd(SP^n_G X).$$

Отображение $\pi^s_{n,G}\colon X^n \to SP^n_G X$ является конечнократным, потому что для каждого $y \in SP^n_G X$ выполняется соотношение

$$|(\pi^s_{n,G})^{-1}(y)| \leqslant n!.$$

Тогда верно неравенство

$$lwd(X^n) \leqslant lwd(SP^n_G X).$$

Теперь покажем, что

$$lwd(X^n) \leqslant lwd(X).$$

Пусть $lwd(X) = \tau \geqslant \aleph_0$; возьмем произвольную точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$, где $x_i \in X$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае существуют такие окрестности $O_1 x_1, O_2 x_2, \ldots, O_n x_n$ точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, что $wd(O_i x_i) \leqslant \tau$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. В силу аналога теоремы Хьюитта—Марчевского—Пондицери для слабой плотности топологических пространств (см. [7]) имеем

$$wd\biggl(\prod_{i=1}^{n} O_i x_i\biggr) \leqslant \tau.$$

Множество $\prod\limits_{i=1}^{n} O_i x_i$ является окрестностью точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно,

$$lwd(X^n) \leqslant \tau,$$

так как $lwd(x) \leqslant \tau$ для каждой точки $x \in X^n$. Значит,

$$lwd(X^n) \leqslant lwd(X), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Докажем обратное неравенство

$$lwd(X) \leqslant lwd(X^n).$$

Ясно, что проекция

$$\mathrm{pr}\colon X^n \to X, \quad \mathrm{pr}(x) = x_1,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$, является открытым отображением. В силу теоремы 1 получаем

$$lwd(X) \leqslant lwd(X^n).$$

Значит,

$$lwd(X) = lwd(X^n).$$

Тогда верно равенство

$$lwd(X) = lwd(X^n) = lwd(SP^n_G X).$$

Теорема 3 доказана. □

Замечание 1. В [13] доказано, что $ld(X) = ld(SP^n_G X)$.

Теорема 4. *Пусть X — топологическое пространство, n — натуральное число и G — произвольная подгруппа группы S_n. Топологическое пространство X является T_i-пространством тогда и только тогда, когда пространство $SP^n_G X$ является T_i-пространством, где $i = 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$.*

Доказательство. Пусть X — T_i-пространство. Тогда произведение n экземпляров пространства X также является T_i-пространством ($i = 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$). Известно, что свойства отделимости T_1 и T_3 сохраняются при замкнутых отображениях, свойство хаусдорфовости сохраняется при совершенных отображениях, а свойство вполне регулярности сохраняется при открыто-замкнутых отображениях. Следовательно, G-симметрическое пространство $SP^n_G X$ является T_i-пространством ($i = 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$). Обратное утверждение очевидно: так как X является подпространством $SP^n_G X$ и T_i-пространство наследует всякому подпространству, то X является T_i-пространством ($i = 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$). □

Замечание 2. Функтор SP^n_G не сохраняет нормальность топологических пространств. Это следует из того, что пространства $SP^2 X$ и $\exp_2 X$ гомеоморфны. Действительно, рассмотрим пространство «стрелка П. С. Александрова» $X^* = [0, 1)$, базу которой образуют подмножества вида $[\alpha, \beta)$, где $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$. Ясно, что пространство X^* нормально. В этом случае пространство $\exp_2 X^*$ не является нормальным (см. [8]).

Топологическое пространство X называется *локально компактным* (см. [6]), если для каждого $x \in X$ существует такая окрестность U точки x, что $\overline{U}$ является компактным подпространством пространства X.

Теорема 5. *Пусть X — локально компактное пространство и G — произвольная подгруппа группа S_n. Тогда пространство $SP^n_G X$ также локально компактно.*

Доказательство. Предположим, что пространство X локально компактно; тогда X^n тоже локально компактно. Пусть y — любая точка из $SP^n_G X$. Рассмотрим отображение

$$\pi^s_{n,G}\colon X^n \to SP^n_G X.$$

Возьмем произвольную точку $x \in (\pi^s_{n,G})^{-1}(y)$ и окрестность U точки x в X^n, для которой $[U]$ компактное подпространство пространства X^n. Образ $\pi^s_{n,G}(U)$ является окрестностью точки y в $SP^n_G X$, так как отображение $\pi^s_{n,G}$ открыто. В силу замкнутости отображения $\pi^s_{n,G}$ получаем

$$[\pi^s_{n,G}(U)] = \pi^s_{n,G}([U]).$$

Следовательно, множество $[\pi^s_{n,G}(U)]$ компактно. Теорема 5 доказана. □

Утверждение 1. *Пусть X — бесконечное топологическое пространство и G — произвольная подгруппа группы S_n. Тогда*

$$nw(X) = nw(SP^n_G X).$$

Доказательство. Пусть $nw(X) = \tau \geqslant \aleph_0$, ясно, что сетевой вес сохраняет при любом произведения, т.е. $nw(X^n) \leqslant \tau$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Мы имеем, $nw(SP^n_G X) \leqslant nw(X^n)$, так как отображение $\pi^s_{n,G}$ — непрерывно. Таким образом,

$$nw(SP^n_G X) \leqslant nw(X).$$

С другой стороны,

$$nw(X) \leqslant nw(SP^n_G X),$$

так как X является подпространством $SP^n_G X$, а сетевой вес наследуется всякому подпространству. Следовательно, $nw(X) = nw(SP^n_G X)$. Утверждение 1 доказано. □

Замечание 3. Пусть X — наследственно нормальное пространство. Тогда пространство $SP^n X$, $n \geqslant 2$, не всегда является наследственно нормальным пространством (см. [10]).

Топологическое пространство X *метризуемо*, если существует такая метрика ρ на множестве X, что индуцированная этой метрикой топология совпадает с исходной топологией пространства X. Те метрики, которые индуцируют исходную топологию пространства X, называются *метриками на пространстве* X (см. [6]).

Теорема 6. *Пусть G — произвольная подгруппа группы S_n. Пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда пространство $SP^n_G X$ метризуемо.*

Доказательство. Пусть X — метризуемое пространство; тогда произведение X^n также метризуемо для любого $n = 1, 2, \ldots$. В этом случае пространство X^n регулярно и имеет σ-локально конечную базу по теореме Нагаты—Смирнова (см. [6]). В силу теоремы 4 пространство $SP^n_G X$ регулярно. Пусть семейство

$$\Im = \bigcup_{w=1}^{\infty} \Im_w$$

является базой в X^n, где $\Im_w = \{M^w_\alpha : \alpha \in A_w\}$ локально конечно для каждого $w \in N$. В силу открытости отображения $\pi^s_{n,G}$ семейство $\pi^s_{n,G}(\Im)$ является базой в $SP^n_G X$. Более того,

$$\pi^s_{n,G}(\Im) = \bigcup_{w=1}^{\infty} \pi^s_{n,G}(\Im_w).$$

Покажем, что семейство $\pi^s_{n,G}(\Im_w)$ локально конечно для каждого $w \in N$. Возьмем произвольную точку $y \in SP^n_G X$. Рассмотрим прообраз этой точки y при отображения $\pi^s_{n,G}$; ясно, что множество $(\pi^s_{n,G})^{-1}(y)$ конечно. Пусть $(\pi^s_{n,G})^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Тогда существует такая окрестность $U(x_j)$ точки x_j, что множество $I_j = \{\alpha_j \in A_w : U(x_j) \cap M_{\alpha_j} \neq \varnothing\}$ конечно для каждого $j = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно,

$$U(y) = \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)$$

— открытое множество в X^n и для каждого

$$\alpha \in A_w \setminus \bigcup_{i=1}^{k} I_i$$

имеем $U(y) \cap M^w_\alpha = \varnothing$. Значит, найдется открытое множество $U(y) \subset X^n$, содержащее $(\pi^s_{n,G})^{-1}(y)$ и пересекающееся лишь с конечным числом элементов семейства $\Im_w$. Из условия $(\pi^s_{n,G})^{-1}(y) \subset U(y)$ вытекает, что

$$y \in SP^n_G X \setminus \pi^s_{n,G}(X^n \setminus U(y)).$$

Так как отображение $\pi^s_{n,G}$ замкнуто, то множество

$$V(y) = SP^n_G X \setminus \pi^s_{n,G}(X^n \setminus U(y))$$

открыто в $SP^n_G X$ и является окрестностью точки y. Кроме того,

$$(\pi^s_{n,G})^{-1}(V(y)) = X^n \setminus (\pi^s_{n,G})^{-1}\pi^s_{n,G}(X^n \setminus U(y)) \subset U(y).$$

Очевидно, окрестность $V(y)$ пересекается лишь с конечным числом элементов семейства $\pi^s_{n,G}(\Im_w)$. Значит, семейство $\pi^s_{n,G}(\Im)$ является σ-локально конечной базой в $SP^n_G X$. Следовательно, пространство $SP^n_G X$ метризуемо в силу теоремы Нагаты—Смирнова. Обратное очевидно, так как X является подпространством $SP^n_G X$, и метризуемость наследует всякому подпространству. Теорема 6 доказана. □

Топологическое пространство X называется *счетно компактным* (см. [6]), если из каждого счетного открытого покрытия пространства X можно выбрать конечное подпокрытие.

Следствие 2. *Пусть пространство X метризуемое, n натуральное число, G — произвольная подгруппа группы перестановок S_n. Топологическое пространство X счетно компактно тогда и только тогда, когда пространство $SP^n_G X$ счетно компактно.*

Нам потребуется следующая теорема.

Теорема 7 (см. [1])**.** *Пусть X — метрическое пространство и τ — произвольный бесконечный кардинал. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *пространство X имеет π-сеть мощности $\leqslant \tau$;*
(2) *пространство X имеет π-базу мощности $\leqslant \tau$;*
(3) *пространство X имеет базу мощности $\leqslant \tau$;*
(4) *пространство X имеет сеть мощности $\leqslant \tau$;*
(5) *каждое открытое покрытие пространства X имеет подпокрытие мощности $\leqslant \tau$;*
(6) *каждое замкнутое дискретное подпространство пространства X имеет мощность $\leqslant \tau$;*
(7) *каждое дискретное подпространство пространства X имеет мощность $\leqslant \tau$;*
(8) *каждое семейство попарно не пересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X имеет мощность $\leqslant \tau$;*
(9) *пространство X имеет слабую плотность мощности $\leqslant \tau$;*
(10) *пространство X имеет всюду плотное подмножество мощности $\leqslant \tau$.*

Утверждение 2. *Пусть X — метризуемое пространство и G — произвольная подгруппа группы S_n. Тогда имеет место равенство:*

$$\varphi(X) = \varphi(SP^n_G X).$$

где $\varphi \in \{\pi w, s, e, c, l\}$.

Доказательство. Пусть X — метризуемое пространство, тогда пространство $SP^n_G X$ также метризуемое. В силу теоремы 7 мы имеем $w(X) = \varphi(X)$ и $w(SP^n_G X) = \varphi(SP^n_G X)$, где $\varphi \in \{\pi w, s, e, c, l\}$. Известно, что $w(X) = w(SP^n_G X)$ (см. теорему 3). Отсюда следует $\varphi(X) = \varphi(SP^n_G X)$. Утверждение 2 доказано. □

Топологическое пространство X называется *связным* (см. [6]), если X нельзя представить в виде объединение двух непустых открытых дизъюнктных подмножеств.

Теорема 8 (см. [12])**.** *Пусть X — T_1-пространство. Тогда экспоненциальное пространство $\exp X$ и пространство $\exp_c X$ всех непустых замкнутых компактных подмножеств пространства X связны в том и только том случае, если X связно.*

Теорема 9. *Пусть X — T_1-пространство, n — натуральное число, G — произвольная подгруппа группы S_n. Пространство X связно тогда и только тогда, когда пространство $SP^n_G X$ связно.*

Доказательство. Пусть X — связно, тогда произведение n экземпляров пространства X тоже связно. В этом случае пространство G-симметрической степени $SP^n_G X$ будет связно, так как отображения $\pi^s_{n,G}$ непрерывны. Теперь докажем обратное утверждение. Предположим, что для любого натурального числа n пространство $SP^n_G X$ связно. Тогда гиперсимметрическое пространство $\exp_n X$ тоже связно для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$, так как отображения $\pi^h_{n,G}$ непрерывны. Следовательно, пространство $\exp_w X$, состоящее из всех конечных подмножеств пространства X, связно. Это следует из того, что

$$\exp_w X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \exp_n X$$

и каждое из подпространств $\exp_n X$ связно с непустым пересечением. Значит, гиперпространство $\exp X$ — связно, так как $\exp_w X$ всюду плотно в $\exp X$. Из теоремы 8 следует, что пространство X связно. Теорема 9 доказана. □

Следствие 3. *Пусть X — T_1-пространство. Тогда X связно в том и только том случае, если пространство $F(X)$ связно, где $F \in \{SP^n_G, \exp_n, \exp_w, \exp_c, \exp\}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бешимов Р. Б.* О слабой плотности непрерывных отображений// Узбек. мат. ж. — 2001. — *1*. — С. 3–8.
2. *Заричный М. М.* Характеризация функторов G-симметрической степени и продолжения функторов на категории Клейсли// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 5. — С. 42–48.
3. *Федорчук В. В.* Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия// Усп. мат. наук. — 1981. — *3 (36)*. — С. 177–195.
4. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Топология гиперпространств и ее приложения. — М.: Знание, 1989.
5. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. — М.: Физматлит, 2006.
6. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
7. *Beshimov R. B.* Some cardinal properties of topological space connected with weakly density// Meth. Funct. Anal. Topol. — 2004. — *10*, № 3. — P. 17–22.
8. *Beshimov R. B.* On some cardinal invariants of hyperspaces// Mat. Stud. — 2005. — *24*, № 2. — P. 197–202.
9. *Beshimov R. B., Mukhamadiev F. G. and Mamadaliev N. K.* The local density and the local weak density of hyperspaces// Int. J. Geom. — 2015. — *4*, № 1. — P. 42–49.
10. *Beshimov R. B., Safarova D. T.* Normal functors and two P. S. Aleksandrov's arrows// Caspian J. Appl. Math. — 2013. — *1*, № 2. — P. 50–59.
11. *Beshimov R. B., Zhuraev R. M.* Separation axioms of space of the permutation degree// Тр. Междунар. конф. «Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения» (Ташкент, 21–23 ноября 2019 г.). — Ташкент, 2019. — С. 30–31.
12. *Michael E.* Topologies on spaces of subsets// Trans. Am. Math. Soc. — 1951. — *71*. — P. 152–182.
13. *Mukhamadiev F.* Some cardinal and topological properties of the n-permutation degree of a topological spaces and locally τ-density of hyperspaces// Bull. Natl. Univ. Uzbekistan. Math. Nat. Sci. — 2018. — *1*, № 1. — P. 3–25.

Бешимов Рузиназар Бебутович
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: `rbeshimov@mail.ru`

Жураев Рустам Мехриддинович
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: `rmjurayev@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 88–94
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-88-94

УДК 515.12

МЕТРИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА СЛАБО АДДИТИВНЫХ СОХРАНЯЮЩИХ ПОРЯДОК ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

© 2021 г. Г. Ф. ДЖАББАРОВ, М. М. ЖАББОРОВ

Аннотация. Работа посвящена изучению пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных и однородных функционалов на метрическом компакте. Для метрического компакта X приведена формула вычисления метрики Канторовича—Рубинштейна на пространстве слабо аддитивных сохраняющих порядок однородных функционалов $S(X)$. Показано, что суперрасширение $\lambda(X)$ компакта X изометрически вложено в пространство $S(X)$.

Ключевые слова: слабо аддитивный функционал, метрика Канторовича—Рубинштейна, гиперпространство, суперрасширение.

METRIZATION OF THE SPACE OF WEAKLY ADDITIVE ORDER-PRESERVING HOMOGENEOUS FUNCTIONALS

© 2021 G. F. DJABBAROV, M. M. JABBOROV

Abstract. The work is devoted to the study of the space of weakly additive, order-preserving, normalized, and homogeneous functionals on a compact metric space. For a metric compact space X, we propose a formula for calculating the Kantorovich–Rubinstein metric on the space of weakly additive, order-preserving, homogeneous functionals $S(X)$. Also, we prove that the superextension $\lambda(X)$ of the compact set X is isometrically embedded in the space $S(X)$.

Keywords and phrases: weakly additive functional, Kantorovich–Rubinstein metric, hyperspace, superextension.

AMS Subject Classification: 46A55, 46E10

1. Введение. Существуют различные метрики на пространстве вероятностных мер, индуцирующие топологию слабой сходимости. Такие метрики имеют приложения в теории предельных теорем и измерений близости в вероятностных аппроксимациях. Метрика Канторовича—Рубинштейна является одним из примеров таких метрик. Эта метрика была введена для компактных метрических пространствах в [5, 6].

В [8] В. В. Федорчук ввел понятие метризуемого, равномерно метризуемого, совершенно метризуемого функтора и определил тройку $(\mathcal{F}^\omega, \mathcal{F}^{++}, \mathcal{F}^+)$ функторов как результат бесконечной итерации совершенно метризуемого функтора $\mathcal{F}$. Он изучил геометрические свойства таких функторов, когда $\mathcal{F}$ — функтор вероятностных мер P и гиперпространства exp. В [7] Ю. В. Садовничий изучил проблему метризации функтора U_τ, ставящего каждому тихоновскому пространству X пространство $U_\tau(X)$ всех τ-аддитивных мер μ на X с $\mu(X) \leqslant 1$. В [11] был введен аналог метрики Канторовича—Рубинштейна на пространстве слабо аддитивных положительно-однородных функционалов на метрическом компакте, в частности, был дан положительный ответ на вопрос 1 из [4] о метризуемости функтора слабо аддитивных положительно-однородных функционалов OH.

Настоящая работа посвящена изучению пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных и однородных функционалов на метрическом компакте. Для метрического компакта X приводим формулу вычисления метрики Канторовича—Рубинштейна на пространстве слабо аддитивных сохраняющих порядок однородных функционалов $S(X)$. Также покажем, суперрасширение $\lambda(X)$ компакта X изометрически вложено в пространство $S(X)$.

2. Предварительные сведения. В этом параграфе мы приведем необходимые определения и факты о функторе слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, положительно-однородных функционалов из [2, 12].

Пусть X — компактное пространство. Через $C(X)$ обозначим пространство всех вещественнозначных непрерывных функций $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ с поточечными алгебраическими операциями и sup-нормой, т.е. с нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(x)| : x \in X\}$. Для каждого $c \in \mathbb{R}$ через c_X обозначим постоянную функцию, определенную как $c_X(x) = c$, $x \in X$. Пусть $\varphi, \psi \in C(X)$. Неравенство $\varphi \leqslant \psi$ означает, что $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ при всех $x \in X$.

Функционал $\nu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ называется (см. [12])

(i) слабо аддитивным, если $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c\nu(1_X)$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}$;
(ii) сохраняющим порядок, если для всех $\varphi, \psi \in C(X)$ из $\varphi \leqslant \psi$ следует, что $\nu(\varphi) \leqslant \nu(\psi)$;
(iii) нормированным, если $\nu(1_X) = 1$;
(iv) положительно-однородным, если $\nu(t\varphi) = t\nu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$;
(v) однородным, если $\nu(t\varphi) = t\nu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X)$, $t \in \mathbb{R}$;
(vi) полуаддитивным, если $\nu(\varphi + \psi) \leqslant \nu(\varphi) + \nu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$.

Для каждого компакта X положим

$$V(X) = \prod_{\varphi \in C(X)} [\min \varphi, \max \varphi].$$

Для всякого отображения $f\colon X \to Y$ через $V(f)$ обозначим отображение из $V(X)$ в $V(Y)$, определенное по правилу

$$V(f)(\nu)(\varphi) = \nu(\varphi \circ f), \quad \nu \in V(X), \quad \varphi \in C(X).$$

Для компакта X введем следующие обозначения:

(i) $O(X)$ — множество всех слабо аддитивных, сохраняющий порядок и нормированных функционалов на $C(X)$;
(ii) $OH(X)$ — множество всех положительно-однородных функционалов из $O(X)$;
(iii) $S(X)$ — множество всех однородных функционалов из $O(X)$;
(iv) $OS(X)$ — множество всех полуаддитивных функционалов из $OH(X)$;
(v) $P(X)$ — множество всех положительных, нормированных и линейных функционалов на $C(X)$.

Рассмотрим $\mathcal{F}(X)$ ($\mathcal{F} \in \{O, OH, S, OS, P\}$) как подпространство пространства $V(X)$, снабженное топологией поточечной сходимости; в частности, базу окрестностей функционала $\nu \in \mathcal{F}(X)$ образуют множества вида

$$\langle \nu; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \varepsilon \rangle = \Big\{\nu' \in \mathcal{F}(X) : |\nu'(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i \in \overline{1, k}\Big\},$$

где $\varepsilon > 0$, $\varphi_i \in C(X)$, $i \in \overline{1, k}$, $k \in \mathbb{N}$. Для каждого компакта X пространство $\mathcal{F}(X)$ является выпуклым компактом.

Пусть X и Y — компакты, $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Отображение $\mathcal{F}(f)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$, где $\mathcal{F} \in \{O, OH, S, OS, P\}$, определяется как сужение $V(f)$ на $\mathcal{F}(X)$.

Функтор O впервые был рассмотрен Т. Радулом (см. [12]), функтор S был введен В. Валовым (см. [1]), а функторы OH и OS были изучены в [3] и [10], соответственно.

Все указанные выше функторы порождают монады. Если $\mathcal{F}$ один из этих функторов O, OH, OS, S, P, то единица и оператор умножения определяются следующим образом. Естественное преобразование $\eta\colon \mathrm{Id} \to \mathcal{F}$ задается как $\eta_X(x)(\varphi) = \varphi(x)$ при всех $x \in X$ и $\varphi \in C(X)$, и естественное преобразование $\psi\colon \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}$ задается как $\psi_X(\nu)(\varphi) = \nu(\pi_\varphi)$, где $\pi_\varphi\colon \mathcal{F}(X) \to \mathbb{R}$, $\pi_\varphi(\lambda) = \lambda(\varphi)$.

Всякий функционал $\mu \in O(X)$ является нерасширяющим, т.е.

$$|\mu(\varphi) - \mu(\psi)| \leqslant \|\varphi - \psi\|$$

для всех $\varphi, \psi \in C(X)$ (см. [12]). В частности, $|\mu(\varphi)| \leqslant \|\varphi\|$ для всех $\varphi \in C(X)$.

Заметим, что для n-точечного компакта $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, пространство $C(n)$ гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$, и гомеоморфизм задается по формуле

$$\varphi \in C(n) \to (\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)) \in \mathbb{R}^n.$$

В [2] было показано, что пространство $OH(2)$ аффинно гомеоморфно квадрату и $OH(n)$, является бесконечномерным для всех $n \geqslant 3$. Также в [3] показано, что функтор OH является полунормальным и монадичным.

3. Изометрическое вложение суперрасширения и пространство $S(X)$ в пространство $OH(X)$. В этом параграфе мы приводим формулы вычисления для метрики Канторовича—Рубинштейна на пространстве слабо аддитивных сохраняющих порядок однородных функционалов $S(X)$, а также покажем, что для произвольного метрического компакта X суперрасширение $\lambda(X)$ компакта X изометрически вложено в пространство положительно-однородных функционалов $OH(X)$.

Пусть (X, ρ) — метрический компакт. Положим

$$\mathrm{Lip}(X) = \Big\{\varphi : X \to \mathbb{R}\ \exists k > 0,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant k\rho(x,y),\ \forall x, y \in X\Big\},$$
$$\mathrm{Lip}_1(X) = \Big\{\varphi : X \to \mathbb{R},\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \rho(x,y),\ \forall x, y \in X\Big\}.$$

Определим метрику Канторовича—Рубинштейна на $OH(X)$ по правилу

$$\rho_{OH}(\mu, \nu) = \sup\Big\{|(\mu - \nu)(\varphi)| : \varphi \in \mathrm{Lip}_1(X)\Big\}, \quad \mu, \nu \in OH(X). \tag{1}$$

В [11, теорема 3.4] было доказано, что функция ρ_{OH}, определенная по правилу (1), является метрикой на $OH(X)$ и порождает топологию поточечной сходимости на $OH(X)$. В [11, теорема 3.7] было также доказано, что функтор OH является метризуемым, т.е.

(1) для всякого изометрического вложения $i\colon (X_1, \rho^1) \to (X_2, \rho^2)$ отображение

$$OH(i)\colon (OH(X_1), \rho^1_{OH(X_1)}) \to (OH(X_2), \rho^2_{OH(X_2)})$$

также является изометрическим вложением;

(2) отображение $\eta_X : (X, \rho) \to (OH(X), \rho_{OH(X)})$ является изометрией;

(3) $\operatorname{diam} OH(X) = \operatorname{diam}(X)$.

3.1. Метрика Канторовича—Рубинштейна на $S(X)$. Для $f, g \in C(X)$ положим

$$(f \oplus g)(x, y) = f(x) + g(y), \quad x, y \in X.$$

Тогда $f \oplus g \in C(X \times X)$.

Пусть $f \oplus g \leqslant h \oplus q$. Тогда

$$\mu_1(f) + \mu_2(g) \leqslant \mu_1(h) + \mu_2(q), \tag{2}$$

где $\mu_1, \mu_2 \in O(X)$. Действительно, $f(x) + g(y) \leqslant h(x) + q(y)$ при всех $x, y \in X$. Отсюда

$$f(x) - h(x) \leqslant q(y) - g(y).$$

Следовательно,

$$\inf_{x \in X}(f(x) - h(x)) \leqslant \sup_{y \in X}(q(y) - g(y)).$$

Это означает, что найдется такое число $c \in \mathbb{R}$, что

$$f - h \leqslant c_X \leqslant q - g.$$

Отсюда

$$\mu_1(f) + \mu_2(g) \leqslant \mu_1(h + c_X) + \mu_2(q - c_X) = \mu_1(h) + \mu_2(q).$$

Определим метрику Канторовича—Рубинштейна ρ_S на $S(X)$ как сужение метрики ρ_{OH} на $S(X)$:

$$\rho_S(\mu,\nu) = \sup\Big\{|(\mu-\nu)(\varphi)| : \varphi \in \mathrm{Lip}_1(X)\Big\}, \quad \mu,\nu \in S(X).$$

Теорема 1. *Для метрики Канторовича—Рубинштейна на $S(X)$ имеет место равенство*

$$\rho_S(\mu_1,\mu_2) = \sup\{\mu_1(f)+\mu_2(g) : f \oplus g \leqslant \rho\}, \quad \mu_1,\mu_2 \in S(X).$$

Доказательство. Введем обозначение $c = \sup\big\{\mu_1(f)+\mu_2(g) : f\oplus g \leqslant \rho\big\}$. Возьмем $f \in \mathrm{Lip}_1(X)$. Тогда $f \oplus -f \leqslant \rho$ потому, что

$$(f \oplus -f)(x,y) = f(x) - f(y) \leqslant \rho(x,y).$$

Имеем

$$\rho_S(\mu_1,\mu_2) = \sup\Big\{\mu_1(f)-\mu_2(f) : f \in \mathrm{Lip}_1(X)\Big\} = \\ = \sup\Big\{\mu_1(f)+\mu_2(-f) : f \oplus -f \leqslant \rho\Big\} \leqslant \sup\Big\{\mu_1(f)+\mu_2(g) : f\oplus g \leqslant \rho\Big\} = c,$$

т.е. $\rho_S(\mu_1,\mu_2) \leqslant c$.

Докажем обратное неравенство. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем такую функцию $f \oplus g \leqslant \rho$, что

$$c - \varepsilon < \mu_1(f) + \mu_2(g).$$

Положим

$$h(x) = \inf_{y\in X}(\rho(x,y) - g(y)).$$

Тогда

$$h(x) - h(x') = \inf_{y\in X}(\rho(x,y)-g(y)) - \inf_{y'\in X}(\rho(x',y')-g(y')) = \\ = \inf_{y\in X}\sup_{y'\in X}(\rho(x,y)-\rho(x',y')-g(y)+g(y')) \leqslant \sup_{y'\in X}(\rho(x,y')-\rho(x',y') \leqslant \rho(x,x').$$

Отсюда

$$h(x) - h(x') \leqslant \rho(x,x'), \quad h(x') - h(x) \leqslant \rho(x',x).$$

Это означает, что $|h(x)-h(x')| \leqslant \rho(x,x')$, и поэтому $h \in \mathrm{Lip}_1(X)$. Далее,

$$h(x) \geqslant \rho(x,y) - g(y) \geqslant f(x), \quad h(x) \geqslant \rho(x,x) - g(x) \geqslant -g(x).$$

Поэтому $f \oplus g \leqslant h \oplus -h$. Учитывая неравенство (2) и однородность функционалов, имеем

$$c - \varepsilon < \mu_1(f) + \mu_2(g) \leqslant \mu_1(h) + \mu_2(-h) = \mu_1(h) - \mu_2(h) = \rho_S(\mu_1,\mu_2).$$

Отсюда $c \leqslant \rho_S(\mu_1,\mu_2)$. Теорема доказана. □

Покажем, что теорема 1 не верна для метрики ρ_{OH} на пространстве $OH(X)$. Сначала заметим, что если $f \oplus g \leqslant \rho$, то

$$f \oplus g \leqslant f \oplus -f. \tag{3}$$

Действительно, так как $f(x) + g(x) \leqslant \rho(x,x) = 0$, то $g \leqslant -f$. Это неравенство влечет (3).

Пусть X — метрический компакт, содержащий три различные точки x_1, x_2, x_3. Определим функционалы μ, ν по правилу

$$\mu(f) = \min\{f(x_1), f(x_2)\}, \quad \nu(f) = \min\{f(x_2), f(x_3)\},$$

где $f \in C(X)$. Непосредственно проверяется, что $\mu,\nu \in OH(X)$. Покажем, что

$$\sup\Big\{\mu(f) + \nu(g) : f \oplus g \leqslant \rho\Big\} = 0.$$

Учитывая неравенство (3), достаточно показать, что $\mu(f) + \nu(-f) \leqslant 0$.

Достаточно рассмотреть следующие возможные случаи.

Случай 1. $f(x_1) \leqslant f(x_i)$, где $i = 2,3$. Имеем

$$\mu(f) + \nu(-f) = \min\{f(x_1), f(x_2)\} + \min\{-f(x_2), -f(x_3)\} = f(x_1) - f(x_i) \leqslant 0, \quad i = 2,3.$$

Случай 2. $f(x_2) \leqslant f(x_i)$, где $i = 1, 3$. Тогда

$$\mu(f) + \nu(-f) = \min\{f(x_1), f(x_2)\} + \min\{-f(x_2), -f(x_3)\} = f(x_2) - f(x_3) \leqslant 0.$$

Случай 3. $f(x_3) \leqslant f(x_i)$, где $i = 1, 2$. Имеем

$$\mu(f) + \nu(-f) = \min\{f(x_1), f(x_2)\} + \min\{-f(x_2), -f(x_3)\} = f(x_i) - f(x_2) \leqslant 0, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда

$$\sup\Big\{\mu(f) + \nu(g) : f \oplus g \leqslant \rho\Big\} = 0.$$

С другой стороны, так как $\mu \neq \nu$, то $\rho_{OH}(\mu, \nu) > 0$. Таким образом,

$$\rho_{OH}(\mu, \nu) > \sup\Big\{\mu(f) + \nu(g) : f \oplus g \leqslant \rho\Big\}.$$

3.2. Вложение суперрасширения. Для каждого компакта X обозначим через $\exp(X)$ пространство всех непустых замкнутых подмножеств X, снабженное топологией Вьеториса. Напомним (см. [8]), что базу этой топологии образуют множества вида

$$\big\langle U_1, \dots, U_n\big\rangle = \Big\{A \subseteq \exp(X) : A \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n \text{ и } A \cap U_i \neq \varnothing \text{ при всех } i\Big\},$$

где $U_1, \dots, U_n$ пробегают топологию пространства X, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь (X, ρ) — метрический компакт. Метрика Хаусдорфа ρ_H на $\exp X$ определяется по правилу

$$\rho_H(A, B) = \max\Big\{\max_{x \in A} \min_{y \in B} \rho(x, y), \max_{y \in B} \min_{x \in A} \rho(x, y)\Big\} \tag{4}$$

для $A, B \in \exp X$.

Отображение $e_X \colon \exp(X) \to OH(X)$, определенное по правилу

$$e_X(A)(\varphi) = \max_{x \in A} \varphi(x), \quad \varphi \in C(X)$$

является изометрическим вложением пространства $(\exp X, \rho_H)$ в $(OH(X), \rho_{OH})$ (см. [11, лемма 4.1]).

Напомним, что элемент $\xi \in \exp^2 X \equiv \exp(\exp(X))$ называется гиперпространством включений, если для $A \in \xi$ и $B \in \exp X$ с $A \subset B$ имеем $B \in \xi$. Введем обозначение

$$G(X) = \{\xi \in \exp^2 X : \xi \text{ — гиперпространство включений}\}.$$

Рассмотрим $G(X)$ как подпространство пространства $\exp^2 X$.

Через $N(X)$ обозначим подпространство в $G(X)$, содержащее все сцепленные системы замкнутых подмножеств X (система называется сцепленной, если пересечение произвольных двух подмножеств этой системы непусто). Сцепленная система называется максимальной, если она максимальна относительно включения. Подпространство всех максимальных сцепленных систем из $N(X)$ назовем суперрасширением пространства X (обозначение $\lambda(X)$.

Отображение $\ell_X \colon \lambda(X) \to OH(X)$, определенное по правилу

$$\ell_X(\xi)(\varphi) = \sup_{A \in \xi} \inf_{x \in A} \varphi(x), \quad \xi \in \lambda(X), \quad \varphi \in C(X)$$

является топологическим (см. [9]). Учитывая, что ξ сцепленная система, мы можем проверить, что

$$\ell_X(\xi)(\varphi) = \inf_{A \in \xi} \sup_{x \in A} \varphi(x), \quad \varphi \in C(X)$$

Отсюда

$$\ell_X(\xi)(-\varphi) = \sup_{A \in \xi} \inf_{x \in A} \{-\varphi(x)\} = \sup_{A \in \xi}\Big\{-\sup_{x \in A} \varphi(x)\Big\} = -\inf_{A \in \xi} \sup_{x \in A} \varphi(x) = -\ell_X(\xi)(\varphi).$$

Это означает, что функционал $\ell_X(\xi)$ — однороден, и поэтому $\ell_X(\xi) \in S(X)$. Таким образом, ℓ_X является вложением $\lambda(X)$ в $S(X)$.

Для метрического компакта (X,ρ) топология пространства $\lambda(X)$ порождается метрикой ρ_λ (см. [13]):

$$\rho_\lambda(\xi,\zeta)=\sup_{A\in\xi}\inf_{B\in\zeta}\rho_H(A,B),\quad \xi,\zeta\in\lambda(X),$$

где ρ_H — метрика Хаусдорфа на $\exp(X)$. Из (4) непосредственно получим, что

$$\rho_\lambda(\xi,\zeta)=\max\Big\{\sup_{A\in\xi}\inf_{B\in\zeta}\max_{x\in A}\min_{y\in B}\rho(x,y),\sup_{A\in\xi}\inf_{B\in\zeta}\max_{y\in B}\min_{x\in A}\rho(x,y)\Big\},\tag{5}$$

для всех $\xi,\zeta\in\lambda(X)$.

Теорема 2. *Вложение ℓ_X является изометрическим из $(\lambda(X),\rho_\lambda)$ в $(S(X),\rho_S)$, т.е.*

$$\rho_\lambda(\xi,\zeta)=\rho_S(\ell_X(\xi),\ell_X(\zeta))$$

для всех $\xi,\zeta\in\lambda(X)$.

Доказательство. Пусть $\xi,\zeta\in\lambda(X)$. Возьмем $\varphi\in\mathrm{Lip}_1(X)$ и $B_0\in\zeta$. Положим $\psi=\varphi-c_X$, где

$$c=\max_{y\in B_0}\varphi(y).$$

Тогда

$$\psi(x)\leqslant\psi(x)-\psi(y)\leqslant|\psi(x)-\psi(y)|\leqslant\rho(x,y),$$

потому что $\psi(y)\leqslant 0$ для всех $y\in B_0$. Отсюда

$$\psi(x)\leqslant\min_{y\in B_0}\rho(x,y).$$

Это означает, что

$$\psi\leqslant\rho_{B_0}=\min_{y\in B_0}\rho(x,y).$$

Теперь покажем, что

$$\inf_{B\in\zeta}\sup_{y\in B}\psi(y)=0.$$

Так как $\psi(y)\leqslant 0$ при $y\in B_0$, то получим, что $\inf\limits_{B\in\zeta}\sup\limits_{y\in B}\psi(y)\leqslant 0$. По определению существует точка $y_0\in B_0$ такая, что $\psi(y_0)=0$, что влечет требуемое равенство. Далее,

$$\begin{aligned}\ell_X(\xi)(\varphi)-\ell_X(\zeta)(\varphi)=\ell_X(\xi)(\psi)-\ell_X(\zeta)(\psi)=\inf_{A\in\xi}\sup_{x\in A}\psi(x)-\inf_{B\in\zeta}\sup_{y\in B}\psi(y)=\\ =\inf_{A\in\xi}\sup_{x\in A}\psi(x)\leqslant\inf_{A\in\xi}\sup_{x\in A}\rho_{B_0}(x).\end{aligned}$$

Поскольку B_0 — произволен, то последнее неравенство влечет, что

$$\ell_X(\xi)(\varphi)-\ell_X(\zeta)(\varphi)\leqslant\inf_{A\in\xi}\sup_{x\in A}\rho_B(x).$$

Аналогично,

$$\ell_X(\zeta)(\varphi)-\ell_X(\xi)(\varphi)\leqslant\inf_{A\in\xi}\sup_{x\in A}\rho_B(x).$$

Отсюда

$$|\ell_X(\xi)(\varphi)-\ell_X(\zeta)(\varphi)|\leqslant\inf_{A\in\xi}\sup_{x\in A}\rho_B(x).$$

Таким образом,

$$\sup_{\varphi\in\mathrm{Lip}_1(X)}|\ell_X(\xi)(\varphi)-\ell_X(\zeta)(\varphi)|\leqslant\sup_{B\in\zeta}\inf_{A\in\xi}\sup_{x\in A}\rho_B(x).$$

Аналогично,

$$\sup_{\varphi\in\mathrm{Lip}_1(X)}|\ell_X(\xi)(\varphi)-\ell_X(\zeta)(\varphi)|\leqslant\sup_{A\in\xi}\inf_{B\in\zeta}\sup_{y\in B}\rho_A(y).$$

Следовательно,

$$\rho_S(\ell_X(\xi),\ell_X(\zeta))\leqslant\max\Big\{\sup_{B\in\zeta}\inf_{A\in\xi}\sup_{x\in A}\rho_B(x),\sup_{A\in\xi}\inf_{B\in\zeta}\sup_{y\in B}\rho_A(y)\Big\}.$$

Теперь, поскольку $\rho_A, \rho_B \in \mathrm{Lip}_1(X)$, имеем, что

$$\sup_{\varphi\in \mathrm{Lip}_1(X)} |\ell_X(\xi)(\varphi) - \ell_X(\zeta)(\varphi)| \geqslant \sup_{B\in\zeta} \inf_{A\in\xi} \sup_{x\in A} \rho_B(x),$$
$$\sup_{\varphi\in \mathrm{Lip}_1(X)} |\ell_X(\xi)(\varphi) - \ell_X(\zeta)(\varphi)| \geqslant \sup_{A\in\xi} \inf_{B\in\zeta} \sup_{y\in B} \rho_A(y).$$

Таким образом,

$$\rho_S(\ell_X(\xi), \ell_X(\zeta)) = \max\Big\{\sup_{B\in\zeta} \inf_{A\in\xi} \sup_{x\in A} \rho_B(x), \sup_{A\in\xi} \inf_{B\in\zeta} \sup_{y\in B} \rho_A(y)\Big\}.$$

Так как правая часть этого равенства совпадает с правой частью равенства с (5), получаем требуемое равенство. Теорема доказана. $\square$

В [11, теорема 3.7] было доказано, что функтор OH является метризуемым. Таким образом, имеем следующий факт.

Следствие 1. *S и λ — метризуемые функторы.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вълов В.* Экстендеры и $\varkappa$-метризуемые компакты// Мат. заметки. — 2011. — *89.* — С. 319–327.
2. *Джаббаров Г. Ф.* Описание экстремальных точек пространства слабо аддитивных положительно-однородных функционалов двухточечного множества// Узбек. мат. ж. — 2005. — *3.* — С. 17–25.
3. *Джаббаров Г. Ф.* Категорные свойства функтора слабо аддитивных положительно однородных функционалов// Узбек. мат. ж. — 2006. — *2.* — С. 20–28.
4. *Заитов А. А.* Теорема об открытом отображении пространств слабо аддитивных однородных функционалов// Мат. заметки. — 2010. — *88*, № 5. — С. 683–688.
5. *Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш.* Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах// Докл. АН СССР. — 1957. — *115*, № 6. — С. 1058–1061.
6. *Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш.* О пространстве вполне аддитивных функций// Вестн. Ленинград. ун-та. Мат. — 1958. — *13.* — С. 52–59.
7. *Садовничий Ю. В.* Поднятие функторов U_τ и U_R на категорию ограниченных метрических пространств и категорию равномерных пространств// Мат. сб. — 2000. — *191*, № 11. — С. 79–104.
8. *Федорчук В. В.* Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — *54*, № 2. — С. 396–417.
9. *Шапиро Л. Б.* Об операторах продолжения функций и нормальных функторах// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1992. — № 1. — С. 35–42.
10. *Davletov D. E., Djabbarov G. F.* Functor of semi-additive functionals// Meth. Funct. Anal. Topol. — 2008. — *14*, № 4. — P. 317–322.
11. *Djabbarov G. F.* Metrization of the space of weakly additive positively homogeneous functionals// Topology Appl. — 2017. — *221.* — P. 133–143.
12. *Radul T.* On the functor of order-preserving functionals// Comment. Math. Univ. Carol. — 1998. — *39*, № 3. — P. 609–615.
13. *Verbeek A.* Superextensions of Topological Spaces. — Amsterdam, 1972.

Джаббаров Гайратбай Фархадович
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан
E-mail: gayrat_77@bk.ru

Жабборов Мухаммади Мусурмонович
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан
E-mail: muhammadij@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 95–100
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-95-100

УДК 517.12

ЧИСЛО ХЬЮИТТА–НАХБИНА ПРОСТРАНСТВА ТОНКИХ ПОЛНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ

© 2021 г. **Ф. Г. МУХАМАДИЕВ**

Аннотация. В работе изучено число Хьюитта—Нахбина q пространства тонких полных сцепленных систем N^*X топологического пространства X. Доказано, что число Хьюитта—Нахбина q пространства тонких полных сцепленных систем N^*X топологического пространства X не превосходит плотности топологического пространства X, т.е. $q(N^*X) \leqslant d(X)$.

Ключевые слова: плотность, число Хьюитта—Нахбина, пространство полных сцепленных систем.

HEWITT–NACHBIN NUMBER OF THE SPACE OF THIN COMPLETE LINKED SYSTEMS

© 2021 **F. G. MUHAMADIEV**

Abstract. In this paper, we examine the Hewitt–Nakhbin number q of the space of thin complete linked systems N^*X of a topological space X. We prove that the Hewitt–Nakhbin number q of the space of thin complete systems N^*X of a topological space X does not exceed the density of the topological space X, i.e., $q(N^*X) \leqslant d(X)$.

Keywords and phrases: density, Hewitt–Nachbin number, space of complete linked systems.

AMS Subject Classification: 54B20, 54A25

1. Введение. Система $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств пространства X называется *сцепленной*, если любые два элемента из ξ пересекаются (см. [5]).

Сцепленную систему η замкнутых подмножеств пространства X назовем *полной сцепленной системой* (ПСС), если для любого замкнутого множества $F \subset X$ условие: любая окрестность OF множества F содержит некоторый элемент $G \in \eta$ влечет $F \in \eta$ (см. [2]).

Пространством полных сцепленных систем пространства X назовем множество NX всех полных сцепленных систем, наделенное топологией, открытую базу которой образуют множества вида $E = O(U_1, U_2, \dots, U_n)\langle V_1, V_2, \dots, V_s\rangle = \Big\{\eta \in NX$: для любого $i = 1, 2, \dots, n$ существует такое $F_i \in \eta$, что $F_i \subset U_i$, и для любого $j = 1, 2, \dots, s$ и любого $F \in \eta$ имеем $V_j \cap F \neq \varnothing\Big\}$.

Определение 1 (см. [3])**.** Полную сцепленную систему η пространства X назовем *тонкой полной сцепленной системой* (ТПСС), если система η содержит хотя бы один конечный элемент.

N-Тонким ядром топологического пространства назовем пространство

$$N^*X = \big\{\eta \in NX : \eta - \text{ТПСС}\big\}.$$

Работа выполнена при поддержке гранта ОТ-Ф-4-42 РУз.

Топологическое пространство X назовем *N-плотным*, если в N^*X существует такое всюду плотное в NX множество $\mathcal{B}$, что $|\mathcal{B}| = d(NX)$.

Предложение 1 (см. [3]). *Если X — топологическое T_1-пространство то $[N^*X]_{NX} = NX$.*

Пусть η — ТПСС. Фундаментом ТПСС η в X назовем семейство

$$\mathfrak{F}(X) = \{F \in \eta : |F| < \aleph_0\}.$$

Определение 2 (см. [7]). Полную сцепленную систему η пространства X назовем *компактной полной сцепленной системой* (КПСС), если система η содержит хотя бы один компактный элемент.

N-Компактным ядром топологического пространства назовем пространство

$$N_cX = \{\eta \in NX : \eta \text{ — КПСС}\}.$$

Определение 3 (см. [7]). Полную сцепленную систему η пространства X назовем *метризуемой компактной полной сцепленной системой* (МКПСС), если система η содержит хотя бы один метризуемый компактный элемент.

N-Метризуемым компактным ядром топологического пространства назовем пространство

$$N_{cm}X = \{\eta \in NX : \eta \text{ — МКПСС}\}.$$

Ясно, что $N^*X \subseteq N_{cm}X \subseteq N_cX \subseteq NX$ для всякого топологического пространства X. Также ясно, что если X — дискретное пространство, то $N^*X = N_cX$, а если X — компактно, то $N_cX = NX$.

Семейство ν непустых подмножеств топологического пространства X называется *π-сетью*, если для любого непустого открытого подмножества U пространства X найдется элемент семейства ν, лежащий в множестве U.

π-Сетевой вес $n\pi w(X)$ пространства X — это минимум мощностей его π-сетей (см. [6]). Наименьшее из кардинальных чисел, являющихся мощностями всюду плотных подмножеств пространства X, называется *плотностью* $d(X)$ пространства X (см. [6]). Если $d(X) \leqslant \aleph_0$, то говорят, что X *сепарабельно.*

В [7] доказана следующая теорема.

Теорема 1 (см. [7]). *Если X — топологическое T_1-пространство, то*

(i) $\pi w(N^*X) = \pi w(N_{cm}X) = \pi w(N_cX) = \pi w(X)$;
(ii) $d(N^*X) = d(N_{cm}X) = d(X)$;
(iii) $n\pi w(N^*X) = n\pi w(N_{cm}X) = n\pi w(X)$;
(iv) *если X — бесконечное тихоновское пространство, то* $c(N^*X) = c(N_{cm}X) = c(N_cX) = c(NX) = \sup\{c(X^*) : n \in N\}$;
(v) *если X — бесконечное тихоновское пространство, то* $wd(N^*X) = wd(N_{cm}X) = wd(N_cX) = wd(NX) \leqslant wd(X)$.

Множество $A \subset X$ назовем *τ-расположенным* в X, если для каждой точки $x \in X \setminus A$ найдется такое множество P типа G_τ в X, что $x \in P \subset X \setminus A$.

Числом Хьюитта—Нахбина пространства X назовем кардинал $q(X) = \min\{\tau \geqslant \aleph_0 : X\ \tau\text{-расположено в } \beta X\}$ (см. [1]).

Каноническим замкнутым множеством называется замыкание открытого множества.

Пространство X назовем *m_τ-пространством*, где τ — фиксированный кардинал, если для каждого канонического в X множества F и каждой точки $x \in F$ найдется такое множество P типа G_τ в X, что $x \in P \subset F$.

Положим $m(X) = \min\{\tau \geqslant \aleph_0 : X \text{ является } m_\tau\text{-пространством}\}$.

Пространство X называется *московским*, если $m(X) \leqslant \aleph_0$ (см. [1]).

Основным результатом в настоящей работе является следующая теорема.

Теорема 2. *Если X — компакт, то $q(N^*X) \leqslant d(X)$.*

2. Предварительные сведения. Приведем некоторые необходимые понятые и факты.

Теснота $t(x, X)$ пространства X в точке $x \in X$ — наименьшее из кардинальных чисел τ, удовлетворяющих следующему условию: если $A \subset X$ и $x \in [A]$ (где $[A]$ — замыкание A в X), то существует $A' \subset A$, для которого $|A'| \leqslant \tau$ и $x \in [A']$.

Теснота $t(X)$ пространства X — наименьшее из кардинальных чисел τ, для которых $t(x, X) \leqslant \tau$ для любой точки $x \in X$. Пространство X *имеет счетную тесноту*, если $t(X) \leqslant \aleph_0$ (см. [8]).

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *τ-непрерывным* (где τ — фиксированный кардинал), если для всякого подпространства $A \subset X$, мощность которого не превосходит τ, сужение $f|A\colon A \to Y$ отображения f на A непрерывно.

Функциональной теснотой $t_\theta(X)$ пространства X называется такой наименьший (бесконечный) кардинал τ, что каждая τ-непрерывная вещественная функция на X непрерывна (см. [1]).

Слабой теснотой $t_c(X)$ пространства X назовем наименьший бесконечный кардинал τ, удовлетворяющий следующему условию: если множество $A \subset X$ не замкнуто в X, то найдутся точки $x \in [A] \setminus A$, множество $B \subset A$ и множество $C \subset X$, для которых $x \in [B]$, $B \subset [C]$ и $|C| \leqslant \tau$.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется строго *τ-непрерывным*, если для каждого множества $A \subset X$, удовлетворяющего условию $|A| \leqslant \tau$, найдется непрерывное отображение $g\colon X \to Y$, для которого $g|A = f|A$ (т.е. $f(x) = g(x)$ при всех $x \in X$).

Слабой функциональной теснотой (или R-теснотой) $t_R(X)$ пространства X называется наименьший бесконечный кардинал τ, для которого каждая строго τ-непрерывная вещественная функция на X непрерывна (см. [1]).

Определение 4 (см. [1])**.** Пусть X — топологическое пространство и A — непустое подмножество множества X. *Теснотой* пространства X относительно подмножества A называется кардинал $t_A(X) = \min\bigl\{\tau \geqslant \aleph_0\colon x \in [A] \Rightarrow \exists A' \subset A : |A'| \leqslant \tau,\ x \in [A']\bigr\}$, где $[A]$ — замыкание A в X.

Очевидно, что $t_A(X) \leqslant t(X)$ для любого $A \subset X$.

Теперь положим $H^*(NX) = \bigl\{\mu \subset N^*X : [\mu]_{NX} = NX\bigr\}$. Ясно, что $H^*(NX)$ непусто, ибо $N^*X \in H^*(NX)$. Положим

$$H^*_\tau(NX) = \bigl\{\mu \in H^*(NX) : t_\mu(NX) \leqslant \tau\bigr\}.$$

Предложение 2. *Пусть X — такое нормальное пространство, что $H^*_\tau(NX) \neq \varnothing$. Тогда каждая ПСС η пространства X содержит хотя бы один элемент F, плотность которого не превосходит τ.*

Доказательство. Фиксируем $\mu \in H^*_\tau(NX)$; пусть η — произвольная ПСС в X. Так как $\eta \in [\mu]$ и $t_\mu(NX) \leqslant \tau$, то существует такое подмножество μ_η множества μ, что

$$|\mu_\eta| \leqslant \tau, \quad \eta \in [\mu_\eta].$$

Положим $\mu_\eta = \{\eta_i : i \in \theta\}$. Выбрав по одному элементу F_i из фундамента $\mathfrak{F}(\eta_i)$ каждой ПСС $\eta_i \in \mu_\eta$, получим множество $H = \{F_i : i \in \theta\}$. Так как $|H| \leqslant \tau$ и $F_i < \aleph_0$ для любого $F_i \in H$, имеем

$$|\widetilde{H}| = \Bigl|\bigcup_{i\in\theta} F_i\Bigr| \leqslant \tau.$$

Положим $G = [\widetilde{H}]_X$; очевидно, $d(G) \leqslant \tau$. Теперь покажем, что $\eta \in G^+$, где $G^+ = \{\eta' \in NX : G \in \eta'\}$. Предположим обратное; тогда существует элемент такой $F \in \eta$, что $F \cap G = \varnothing$. В силу нормальности пространства X найдется такая окрестность $V(F)$ точки F_i, что $G \cap V(F) = \varnothing$. Так как множество $O = O(U)\langle V\rangle$ (где U открыто в X и $F \subset U$) является окрестностью точки η в NX и $\eta \in [\mu_\eta]$, то $O(U)\langle V\rangle \cap \mu_\eta \neq \varnothing$. Пусть $\eta_i \in O(U)\langle V\rangle \cap \mu_\eta$; тогда выбранный элемент $F_i \in H$ пересекается с множеством V. Следовательно, $G \cap V \neq \varnothing$. Полученное противоречие доказывает, что $\eta \in G^+$. В силу произвольности точки η в NX заключаем, что любая ПСС в NX содержит элемент, плотность которого не превосходит τ. Предложение 2 доказано. $\square$

3. Некоторые кардинальные инварианты пространства полных сцепленных систем. Обозначим через $C(X,Y)$ множество всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y, а через $C(X)$ — множество $C(X,R)$, наделенное топологией поточечной сходимости.

Для плотности и π-сетевого веса пространства полных сцепленных систем получены следующие результаты.

Предложение 3. *Пусть X — такое нормальное пространство, что $H^*_\tau(NX) \neq \varnothing$, где $\tau = d(NX)$. Тогда*

(i) $d(X) = d(NX)$;
(ii) $n\pi w(X) = n\pi w(NX)$.

Доказательство. (i) Согласно предложению 2 любая ПСС η в X содержит элемент, плотность которого не превосходит τ. Теперь пусть $\mu = \{\eta_i : i \in \theta\}$ — такое всюду плотное в NX множество, что $|\mu| = d(NX) = \tau$. Из каждого ПСС $\eta_i \in \mu$ выберем такой один элемент F_i, что $d(F_i) \leqslant \tau$; тогда получаемое множество $H = \{F_i : i \in \theta\}$ имеет мощность, равную τ. Теперь в каждом множестве F_i из H фиксируем такое одно всюду плотное в F_i множество G_i, что $|G_i| \leqslant \tau$; тогда получим множество $H' = \{G_i : i \in \theta\}$. Положим

$$X_0 = \bigcup H' = \bigcup_{i\in\theta} G_i;$$

очевидно, что $|X_0| = \tau$. Теперь покажем, что множество X_0 всюду плотно в X. Пусть W, W' — произвольные открытые множества в X; тогда множество $O = O(W)\langle W'\rangle$ открыто в NX. В силу плотности множества μ в NX найдется хотя бы один элемент η_i из μ, лежащий в $O(W)\langle W'\rangle$. Следовательно, выбранный элемент F_i пересекается с W' и $F_i \subset W$, т.е. $\zeta = F_i \cap W' \neq \varnothing$ и $F_i \subset W$. Так как ζ открыто в F_i, а G_i — всюду плотное множество в F_i, получаем, что $G_i \cap \zeta \neq \varnothing$; следовательно, $G_i \cap W' \neq \varnothing$, $G_i \subset W$ и $W \cap X_0 \neq \varnothing$. В силу произвольности W, W' в X заключаем, что множество X_0 всюду плотно в X. Так как $|X_0| = \tau$, получаем, что $d(X) \leqslant d(NX)$. Так как $d(NX) \leqslant d(X)$, получаем, что $d(X) = d(NX)$.

(ii) Так как для любого пространства X справедливо равенство $n\pi w(X) = d(X)$, то из утверждения (i) вытекает, что $n\pi w(X) = n\pi w(NX)$. Предложение 3 доказано. □

Следствие 1. *Пусть X — такое нормальное пространство, что $H^*_\tau(NX) \neq \varnothing$, где $\tau = d(NX)$. Тогда*

(i) $d(X) = d(N^*X) = d(N_{cm}X) = d(NX)$;
(ii) $n\pi w(X) = n\pi w(N^*X) = n\pi w(N_{cm}X) = n\pi w(NX)$.

Известно (см. [1]), что если X — компакт, то $q(X) \leqslant \aleph_0$ ($q(X)$ — число Хьюитта—Нахбина пространства X). Итак, если X — нормальное пространство, то всегда $q(NX) \leqslant \aleph_0$.

Для числа Хьюитта—Нахбина пространства N^*X имеем следующий результат.

Теорема 3. *Если X — компакт, то $q(N^*X) \leqslant d(X)$.*

Доказательство. Известно (см. [1]), что

$$q(X) = t_R(C_p(X)) = t_\theta(C_p(X)), \quad t_\theta(X) \leqslant t_c(X) \leqslant d(X)$$

для любого тихоновского пространства X. Итак, имеем

$$q(N^*X) = t_R(C_p(N^*X)) = t_\theta(C_p(N^*X)) \leqslant t_c(C_p(N^*X)) \leqslant d(C_p(N^*X)) \leqslant d(N^*X) = d(X).$$

Теорема 3 доказана. □

Следствие 2. *Если X — сепарабельный компакт, то $q(N^*X) \leqslant \aleph_0$.*

Теперь рассмотрим следующий вопрос: Когда N-тонкое ядро N^*X τ-расположено в NX?

Предложение 4. *Если $q(N^*X) \leqslant \tau$ и $m(NX) \leqslant \tau$, то N^*X τ-расположено в NX.*

Доказательство. А. Ч. Чигогидзе показал, что если $X \subset Y$, $q(X) \leqslant \tau$, $[X] = Y$ и $m(Y) \leqslant \tau$, то X τ-расположено в Y (см. [1]). Так как $[N^*X] = NX$, $q(N^*X) \leqslant \tau$ и $m(NX) \leqslant \tau$, получаем, что N^*X τ-расположено в NX. □

Из теоремы 3 и предложения 4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *Если $m(NX) \leqslant \tau = d(X)$, то N-тонкое ядро N^*X τ-расположено в NX.*

Следствие 4. *Если NX — московское пространство и X сепарабельно, то N-тонкое ядро N^*X $\aleph_0$-расположено в NX.*

4. Число Хьюитта—Нахбина N_τ^φ-ядра пространства X. В этом разделе исследуем число Хьюитта—Нахбина N_τ^φ-ядра пространства X.

Определение 5 (см. [4]). Пусть X — T_1-пространство, φ — кардинальнозначная функция, τ — любое кардинальное число. *N_τ^φ-Ядром* пространства X назовем пространство

$$N_\tau^\varphi X = \bigl\{\mathfrak{M} \in NX : \exists F \in \mathfrak{M} : \varphi(F) \leqslant \tau\bigr\}.$$

Определение 6 (см. [4]). Пусть $\mathfrak{M} \in N_\tau^\varphi X$. *$N_\tau^\varphi$-Фундаментом* ПСС $\mathfrak{M}$ назовем семейство

$$\mathfrak{F}_\tau^\varphi(\mathfrak{M}) = \bigl\{F \in \mathfrak{M} : \varphi(F) \leqslant \tau\bigr\}.$$

Определение 7 (см. [4]). Топологическое пространство X назовем *N_τ^φ-ядерным*, если

$$N_\tau^\varphi X = NX.$$

В качестве функции φ возьмем функцию плотности d и положим $\tau = \aleph_0$.

Из определения непосредственно вытекает, что любое пространство X является N_τ^d-ядерным, где $\tau = d(X)$; в частности, любое сепарабельное пространство X является $N_{\aleph_0}^\varphi$-ядерным.

Очевидно, что $N^*X \subset N_{\aleph_0}^\varphi X \subset NX$.

В [4] для N_τ^φ-ядра пространства X получены следующие результаты.

Теорема 4 (см. [4]). *Если X — бесконечное T_1-пространство, то*

(i) $\pi w(N_{\aleph_0}^d X) = \pi w(X)$;

(ii) $d(N_{\aleph_0}^d X) = d(X)$.

Следствие 5 (см. [4]). *Если X — бесконечное T_1-пространство, то*

$$[N_{\aleph_0}^d X]_{NX} = NX.$$

Теперь положим

$$H^{**}(NX) = \bigl\{\mu \subset N_{\aleph_0}^d X : [\mu]_{NX} = NX\bigr\}.$$

Ясно, что $H^{**}(NX)$ не пусто, ибо $N_{\aleph_0}^d X \in H^{**}(NX)$. Положим

$$H_\tau^{**}(NX) = \bigl\{\mu \in H^{**}(NX) : t_\mu(NX) \leqslant \tau\bigr\}.$$

Предложение 5. *Пусть X — такое нормальное пространство, что $H_\tau^{**}(NX) \neq \varnothing$, где $\tau = d(NX)$. Тогда*

(i) $d(X) = d(NX)$;

(ii) $n\pi w(X) = n\pi w(NX)$.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 3.

Из теоремы 4, следствия 1 и предложения 5 вытекает следующий результат.

Следствие 6. *Пусть X — такое нормальное пространство, что*

$$H_\tau^*(NX) \neq \varnothing, \quad H_\tau^{**}(NX) \neq \varnothing,$$

где $\tau = d(NX)$. Тогда

(i) $d(X) = d(N^*X) = d(N_{cm}X) = d(N_{\aleph_0}^d X) = d(NX)$;

(ii) $n\pi w(X) = n\pi w(N^*X) = n\pi w(N_{cm}X) = \pi w(N_{\aleph_0}^d X) = n\pi w(NX)$.

Из теоремы 3 и следствия 6 получаем следующее утверждение.

Следствие 7. *Если X — компакт, то $q(N^d_{\aleph_0}X) \leqslant d(X)$.*

Следствие 8. *Если X — сепарабельный компакт, то $q(N^d_{\aleph_0}X) \leqslant \aleph_0$.*

Предложение 6. *Если $q(N^d_{\aleph_0}X) \leqslant \tau$ и $m(NX) \leqslant \tau$, то $N^d_{\aleph_0}X$ τ-расположено в NX.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 4.
Из предложения 6 и следствия 7 вытекает следующее утверждение.

Следствие 9. *Если $m(NX) \leqslant \tau = d(X)$, то $N^d_{\aleph_0}$-ядро $N^d_{\aleph_0}X$ τ-расположено в NX.*

Следствие 10. *Если NX — московское пространство и X сепарабельно, то $N^d_{\aleph_0}$-ядро $N^d_{\aleph_0}X$ $\aleph_0$-расположено в NX.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архангельский А. В.* Топологические пространства функций. — М.: МГУ, 1989.
2. *Иванов А. В.* Кардинальнозначные инварианты и функторы в категории бикомпактов/ Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-мат. наук — Петрозаводск, 1985.
3. *Махмуд Т.* О кардинальных инвариантах пространств сцепленных систем// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1995. — № 4. — С. 14–19.
4. *Мухамадиев Ф. Г.* Некоторые кардинальные свойства N^{φ}_{τ}-ядра пространства X// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *144*. — С. 117–121.
5. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. — М.: МГУ, 2006.
6. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
7. *Beshimov R. B., Mukhamadiev F. G.* Some cardinal properties of complete linked systems with compact elements and absolute regular spaces// Math. Aeterna. — 2013. — *3*, № 8. — P. 625–633.
8. *Juhasz I.* Cardinal Functions in Topology. Ten Years Later. — Amsterdam: Math. Centrum, 1980.

Мухамадиев Фарход Гафуржанович
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: farhod8717@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 101–107
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-101-107

УДК 514.76

СВОЙСТВА РИМАНОВЫХ СУБМЕРСИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

© 2021 г. А. Н. ЗОЙИДОВ

Аннотация. В работе построены субмерсии на многообразиях неотрицательной кривизны и изучены свойства этих субмерсий. Доказано, что если риманова субмерсия задана над плоским многообразием, то многообразие изометрично евклидову пространству.

Ключевые слова: субмерсия, многообразие, кривизна.

PROPERTIES OF RIEMANNIAN SUBMERSIONS ON MANIFOLDS OF NONNEGATIVE CURVATURE

© 2021 A. N. ZOYIDOV

Abstract. In this paper, submersions on manifolds of nonnegative curvature are constructed and properties of these submersions are examined. We prove that if a Riemannian submersion is defined over a flat manifold, then the manifold is isometric to the Euclidean space.

Keywords and phrases: submersion, manifold, curvature.

AMS Subject Classification: 57R45, 32Q10

Пусть M — гладкое риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g, ∇ — связность Леви-Чивиты, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, определенное римановой метрикой g. Обозначим через $V(M)$ множество всех гладких векторных полей, определенных на M, через $[X, Y]$ — скобку Ли векторных полей $X, Y \in V(M)$. Множество $V(M)$ является алгеброй Ли относительно скобки Ли. Гладкость в данной работе означает гладкость класса C^∞.

Определение 1 (см. [3])**.** Дифференцируемое отображение $\pi\colon M \to B$ максимального ранга, где B — гладкое многообразие размерности m, называется субмерсией при $n > m$.

По теореме о ранге дифференцируемой функции для каждой точки $p \in B$ полный прообраз $\pi^{-1}(p)$ является подмногообразием размерности $k = n - m$. Таким образом, субмерсия $\pi\colon M \to B$ порождает слоение F размерности $k = n - m$ на многообразии M, слоями которого являются подмногообразия $L_q = \pi^{-1}(q)$, $p \in B$.

Изучению геометрии субмерсий посвящены многочисленные исследования (см. [**?**, 4, 8, 9]); в частности, в [10] получены фундаментальные уравнения субмерсии.

Пусть F — слоение размерности k, где $0 < k < n$ (см. [8]). Обозначим через L_p слой слоения F, проходящий через точку $p \in M$, через T_qF — касательное пространство слоя L_p в точке $q \in L_p$, через $H(q)$ — ортогональное дополнение подпространства T_qF. В результате возникают подрасслоения $TF = \{T_qF\}$, $TH = \{H(q)\}$ касательного расслоения TM; имеет место ортогональное разложение $TM = TF \oplus TH$. Таким образом, каждое векторное поле X представимо в виде $X = X^v + X^h$, где $X^v \in TF$, $X^h \in TH$. Если $X^h = 0$ (соответственно $X^v = 0$), то поле X называется вертикальным (соответственно горизонтальным) векторным полем. Напомним, что слоение F называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой точке к слоению, остается ортогональной к слоению во всех своих точках.

Кривая называется горизонтальной, если ее касательный вектор является горизонтальным.

Пусть $\gamma\colon (a,b) \to B$ — гладкая кривая в B, $\gamma(a) = p$. Горизонтальная кривая $\widetilde{\gamma}\colon (a,b) \to M$, $\widetilde{\gamma}(a) \in \pi^{-1}(p)$, называется горизонтальным поднятием кривой $\gamma(a,b) \to B$, если $\pi(\widetilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ для всех $t \in (a,b)$.

Отображение $S\colon V(F) \times H(F) \to V(F)$, заданное формулой $S(X,U) = \nabla^v_X U$, называется вторым основным тензором, где $V(F)$, $H(F)$— множества всех вертикальных и горизонтальных векторных полей соответственно.

При фиксированном поле нормалей $U \in HF$ отображение $S(X,U)$ является тензорным полем S_U типа $(1,1)$:

$$S(X,U) = S_U X = \nabla^v_X U,$$

где $\nabla^v_X U$— вертикальная компонента векторного поля $\nabla^v_X U$.

Тензорное поле S_U определяет билинейную форму l_U:

$$l_U(X,Y) = \langle S_U X, Y\rangle.$$

Тензорное поле S_U называется вторым основным тензором, форма $l_U(X,Y)$ — второй основной формой по отношению к нормальному векторному полю U. Тензорное поле S_U является линейным отображением и поэтому задается матрицей $S(X,U) = AX$.

Горизонтальное векторное поле U называется слоеным, если для каждого поля $Y \in V(F)$ поле $[Y,U]$ также является вертикальным. В случае, когда поле U является слоеным, собственные значения матрицы A называется главными кривизнами слоения F. Если главные кривизны локально постоянны вдоль слоев, то слоение F называется изопараметрическим.

Определение 2. Пусть $\pi\colon M \to B$ — субмерсия, L — многообразие размерности $k = n - m$ класса C^s. Тройка (M,π,B) называется C^s-расслоением с тотальным пространством M, базой B и слоем L, если выполнены следующие условия:

(i) $\pi\colon M \to B$ — субмерсия класса C^s;
(ii) для каждой точки $y \in B$ множество $L_y = \pi^{-1}(y)$ является C^s-гомеоморфным слою L;
(iii) для многообразия B существует такое открытое покрытие U_β, что существует такой C^s-гомеоморфизм $\varphi_\beta\colon \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times L$, что $\varphi_\beta(\pi^{-1}(y)) = \{y\} \times L$.

Отображение π называется проекцией расслоения (M,π,B). Таким образом, если (M,π,N) — расслоение со слоем L, то на M возникает слоение F размерности $k = n - m$, каждый слой которого диффеоморфен L, т.е. все слои диффеоморфны между собой.

В общем случае субмерсия не порождает расслоения. Следующая теорема дает достаточные условия, при выполнении которых субмерсия порождает расслоение (см. [8, с. 91]).

Теорема 1 (см. [8])**.** *Пусть $\pi\colon M \to B$ — субмерсия класса C^s, $s \geqslant 2$, M — компактное многообразие, B — связное многообразие. Тогда субмерсия $\pi\colon M \to B$ порождает расслоение класса C^s.*

Определение 3 (см. [1])**.** Субмерсия $\pi\colon M \to B$ называется римановой, если ее дифференциал $d\pi$ сохраняет длину горизонтальных векторов.

В данной работе мы изучим геометрию некоторых расслоений, которые возникают при исследовании геометрии орбит векторных полей. Геометрия орбит векторных полей является объектом многочисленных исследований в связи с ее важностью в геометрии и других областях математики (см. [13]).

Рассмотрим некоторое множество $D \subset V(M)$, которое содержит конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Для точки $x \in M$ обозначим через $t \to X^t(x)$ интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x) \subset \mathbb{R}$, которая в общем случае зависит от поля X и от начальной точки x. В дальнейшем всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$.

Определение 4 (см. [2]). Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют такие действительные числа $t_1, t_2, \dots, t_k$ и векторные поля $X_1, X_2, \dots, X_k$ из D (где k — произвольное натуральное число), что

$$y = X_k^{t_k}\Big(X_{k-1}^{t_{k-1}}\big(\dots\big(X_1^{t_1}(x)\big)\dots\big)\Big).$$

В [12,13] доказано, что каждая орбита семейства векторных полей класса C^r, $r \geqslant 1$, с топологией Суссмана обладает дифференциальной структурой класса C^r погруженного подмногообразия M при $r \geqslant 1$.

В [7] изучается геометрия орбит векторных полей Киллинга. Напомним, что векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований $x \to X^t(x)$, порожденная полем X, состоит из изометрий (см. [7]).

Отметим, что скобка Ли двух полей Киллинга дает поле Киллинга, а линейная комбинация полей Киллинга над полем действительных чисел тоже является полем Киллинга. Поэтому множество всех векторных полей Киллинга на многообразии M, обозначаемое $K(M)$, образует алгебру Ли над полем действительных чисел. Известно, что алгебра Ли $K(M)$ является конечномерной. Обозначим через $A(D)$ наименьшую подалгебру Ли алгебры $K(M)$, содержащую множество D.

Так как алгебра $K(M)$ конечномерна, то существуют такие векторные поля $X_1, X_2, \dots, X_m$ из $A(D)$, что векторы $X_1(x), X_2(x), \dots, X_m(x)$ образуют базис для подпространства $A_x(D)$ для каждого $x \in M$.

В [7] доказана следующая теорема, которая показывает, что каждая точка из орбиты $L(x_0)$ достижима из x_0 с помощью конечного числа «переключений» с использованием векторных полей $X_1, X_2, \dots, X_m$ в определенном порядке.

Теорема 2. *Множество точек вида*

$$y = X_m^{t_m}\Big(X_{m-1}^{t_{m-1}} \dots \big(X_1^{t_1}(x_0)\dots\big)\Big),$$

где $(t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$, совпадает с орбитой $L(x_0)$.

Эта теорема позволяет построить различные субмерсии на $\mathbb{R}^m$ с помощью векторных полей $X_1, X_2, \dots, X_m$, полагая

$$\pi(t_1, t_2, \dots, t_m) = X_m^{t_m}\Big(X_{m-1}^{t_{m-1}}\big(\dots(X_1^{t_1}(x_0)\dots)\big)\Big),$$

базой которых служит орбита $L(x_0)$.

Рассмотрим векторные поля Киллинга

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Нетрудно проверить, что базисом минимальной алгебры $A(D)$ являются векторные поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

и поэтому орбита для каждой точки семейства совпадает со всей плоскостью.

Полагая $\pi(t_1, t_2, t_3) = X_3^{t_3}(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O)))$, определим отображение $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, где O — начало координат в $\mathbb{R}^2$, следующим образом.

Теорема 3. *Существует такая риманова метрика $\widetilde{g}$ на $\mathbb{R}^2$, что*

(1) *отображение $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ является римановой субмерсией*;
(2) *субмерсия $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ порождает на $\mathbb{R}^3$ изопараметрическое слоение*;
(3) *$(\mathbb{R}^2, \widetilde{g})$ является многообразием строго положительной кривизны.*

Доказательство. (1) Отображение π имеет вид

$$\pi(t_1, t_2, t_3) = \big\{t_1\cos t_3 - t_2\sin t_3,\ t_1\sin t_3 + t_2\cos t_3\big\}.$$

Покажем, что ранг отображения $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ в каждой точке $t^0 = (t_1, t_2, t_3)$ равен 2. Матрица Якоби имеет вид

$$\left(\frac{\partial\pi}{\partial t_1}, \frac{\partial\pi}{\partial t_2}, \frac{\partial\pi}{\partial t_3}\right).$$

Нетрудные вычисления показывают, что

$$\frac{\partial\pi}{\partial t_1}\bigg|_{t^0} = d\big(X_3^{t_3} \circ X_2^{t_2}\big)\big|_{z_1}(X_1(z_1)), \quad \frac{\partial\pi}{\partial t_2}\bigg|_{t^0} = d\big(X_3^{t_3}\big)\big|_{z_2}(X_2(z_2)), \quad \frac{\partial\pi}{\partial t_3}\bigg|_{t^0} = X_3(z_3).$$

Здесь $d(X_m^{t_m} \circ X_{m-1}^{t_{m-1}} \circ \ldots \circ X_i^{t_i})$ — дифференциал диффеоморфизма

$$p \to X_m^{t_m} \circ X_{m-1}^{t_{m-1}} \circ \ldots \circ X_i^{t_i}(p)$$

в точке z_{i-1}, $i = 2, 3$, и

$$z_1 = X_1^{t_1}(O), \quad z_2 = X_2^{t_2}(z_1), \quad z_3 = X_3^{t_3}(z_2).$$

Поскольку в каждой точке p два из трех векторов $X_1(p)$, $X_2(p)$, $X_3(p)$ линейно независимы, ранг матрицы Якоби равен двум.

Так как для каждой точки $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ полный прообраз $\pi^{-1}(p)$ имеет вид

$$\pi^{-1}(p) = L_p(u) = \big\{x_0 \cos u + y_0 \sin u,\ -x_0 \sin u + y_0 \cos u,\ u\big\},$$

слоение F, порожденное субмерсией $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, состоит из винтовых линией. Вертикальное поле $V = \{t_2, -t_1, 1\}$ является полем Киллинга. Поэтому слоение является F римановым.

Покажем, что для каждой гладкой кривой $\gamma\colon (a, b) \to \mathbb{R}^2$ имеем $\gamma(a) = p$ и для каждой точки $q \in \pi^{-1}(p)$ существует такое ее горизонтальное поднятие $\widetilde{\gamma}\colon (a, b) \to M$, что $\widetilde{\gamma}(a) = q$.

Не ограничивая общности, предположим, что кривая γ является регулярной кривой и положим $N = \pi^{-1}(\gamma)$. Рассмотрим двумерное многообразие N с индуцированной метрикой из $\mathbb{R}^3$. Пусть X — единичное горизонтальное векторное поле на $L = \pi^{-1}(q)$ такое, что $X(p) \in T_pN, p \in L$.

Рассмотрим геодезическую h_q с начальной точкой q и с начальной скоростью $X(q)$, т.е. $h_q(s) = \exp_q(sX(q))$, где $\exp_q$ — экспоненциальное отображение в точке q. Если $h_q(s) \in L_\tau = \pi^{-1}(\gamma(\tau))$, то расстояние от точки до слоя $L_\tau = \pi^{-1}(\gamma(\tau))$ равно s, и так как векторное поле $V = \{t_2, -t_1, 1\}$ является полем Киллинга, зависит только от τ, т.е. $s = s(\tau)$ и не зависит от точки q. Поэтому, если положим $\widetilde{\gamma}(\tau) = h_q(s(\tau))$, то имеет место $\pi(\widetilde{\gamma}(\tau)) = \gamma(\tau)$ для всех $\tau \in (a, b)$, т.е. $\widetilde{\gamma}$ является горизонтальным поднятием кривой γ.

Пусть X, Y — векторные поля на $\mathbb{R}^2$, а X^*, Y^* — горизонтальные поднятия векторных полей, т.е. X^*, Y^* являются горизонтальными векторными полями на $\mathbb{R}^3$ и имеют место равенства

$$d\pi(X^*) = X, \quad d\pi(Y^*) = Y.$$

Так как векторное поле $V = \{t_2,\ -t_1,\ 1\}$ является полем Киллинга, скалярное произведение $\langle X^*, Y^*\rangle$ постоянно вдоль $L_q = \pi^{-1}(q)$. Следовательно, если положим $\langle X, Y\rangle(q) = \langle X^*, Y^*\rangle(p)$, то величина $\langle X, Y\rangle$ корректно определена и тем самым определена риманова метрика $\widetilde{g}$ на $\mathbb{R}^2$. Относительно этой римановой метрики субмерсия $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ будет римановой.

(2) Векторные поля $H_1 = \{t_1,\ t_2,\ 0\}$ и $H_2 = \{-t_2,\ t_1,\ t_1^2 + t_2^2\}$ являются слоеными полями, так как

$$[V, H_1] = 0, \quad [V, H_2] = 0.$$

Вычислим второй основной тензор по отношению к полям S_{H_1}, S_{H_2} и соответствующие вторые основные формы $l_{H_1}(V, V)$, $l_{H_2}(V, V)$:

$$S_{H_1}V = \nabla_V H_1 = \{-t_2, t_1, 0\}, \quad S_{H_2}V = \nabla_V H_2 = \{t_1, t_2, 0\},$$

$$l_{H_1}(V, V) = \langle V, \nabla_V H_1\rangle = t_1^2 + t_1^2, \quad l_{H_2}(V, V) = \langle V, \nabla_V H_2\rangle = 0.$$

В этом случае собственные значения λ_1 и λ_2 соответственно матрицы A_1 и A_2 равны

$$\lambda_1 = \frac{\langle V, \nabla_V H_1\rangle}{V^2} = \frac{t_1^2 + t_1^2}{t_1^2 + t_1^2 + 1}, \quad \lambda_2 = \frac{\langle V, \nabla_V H_2\rangle}{V^2} = 0.$$

Можно проверить, что $V(\lambda_1) = 0$. Таким образом, слоение F является изопараметрическим.

(3) Для вычисления кривизны многообразия $(\mathbb{R}^2, \widetilde{g})$ рассмотрим линейно независимые горизонтальные векторные поля $H_1 = \{1, 0, -t_2\}$, $H_2 = \{0, 1, t_1\}$.

Определим векторные поля $u = d\pi(H_1)$, $v = d\pi(H_2)$ на $(\mathbb{R}^2, \widetilde{g})$. В силу того, что отображение $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ имеет максимальный ранг, векторные поля u, v линейно независимы в каждой точке многообразия $(\mathbb{R}^2, \widetilde{g})$.

Вычислим секционную кривизну многообразия $(\mathbb{R}^2, \widetilde{g})$ в двумерном направлении, определенного векторами $u(q)$, $v(q)$ в точке $q \in \mathbb{R}^2$. По формуле О'Нейла (см. [10]) для римановой субмерсии $\pi\colon M \to B$ секционные кривизны K, K_* многообразий M и B связаны соотношением

$$K(H_1, H_2) = K_*(u, v) - \frac{3}{4} \frac{|[H_1, H_2]^v|^2}{|H_1 \wedge H_2|^2},$$

где $[H_1, H_2]^v$ — вертикальная компонента скобки Ли $[H_1, H_2]$, $H_1 \wedge H_2$ — бивектор, построенный на векторах H_1, H_2. Так как $K(H_1, H_2) = 0$, получим следующее выражение для кривизны:

$$K_*(u, v)(q) = \frac{3}{(t_1^2 + t_2^2 + 1)^2}.$$

Таким образом, в этом случае многообразие $(\mathbb{R}^2, \widetilde{g})$ является двумерным многообразием строго положительной кривизны. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Пусть $\pi\colon \mathbb{R}^n \to B$ — риманова субмерсия, B — гладкое связное многообразие нулевой секционной кривизны. Тогда риманово многообразие B изометрично евклидову пространству $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Сначала напомним понятие секционной кривизны (см. [3]). Риманова метрика g индуцирует метрическую связность (связность Леви-Чивиты) ∇. Напомним, что связностью называется отображение $\nabla\colon V(M) \times V(M) \to V(M)$, обозначаемое $(X, Y) \to \nabla_X Y$ и обладающее следующими свойствами:

(i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
(ii) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,
(iii) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$,
(iv) $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$, где f — гладкая функция.

Связность Леви-Чивиты ∇ и скобка Ли $[X, Y]$ связаны соотношением

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Линейное отображение

$$R\colon V(M) \times V(M) \times V(M) \to V(M), \quad R_{XY} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

называется тензором кривизны, а скалярная величина $k(X, Y) = \langle R_{XY} Y, X\rangle$ — кривизной Римана (см. [3]).

Секционная кривизна риманова многообразия M в точке p в двумерном направлении σ, определяемых векторами u, $v \in T_p M$, определяется по правилу

$$K_{u,v} = \frac{k(u, v)}{|u|^2 |v|^2 - \langle u, v\rangle^2} = \frac{\langle R_{uv} v, u\rangle}{|u|^2 |v|^2 - \langle u, v\rangle^2}.$$

Известно, что если многообразие является двумерной поверхностью, погруженной в трехмерное евклидово пространство, то секционная кривизна совпадает с гауссовой кривизной поверхности.

Если секционная кривизна $K_{u,v}$ постоянна для всех плоскостей σ в $T_p M$ и всех точек $p \in M$, то многообразие M называется многообразием постоянной кривизны.

Теперь докажем, что горизонтальное распределение $H\colon x \to H(x)$ вполне интегрируемо. Будем писать $X \in H$ для векторного поля, если $X(q) \in H(q)$ для всех $q \in M$. По известной теореме Фробениуса, для того чтобы распределение $q \to H(q)$ было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы распределение $q \to H(q)$ было инволютивным. (Распределение называется инволютивным, если для всех $X, Y \in H$ имеем $[X, Y] \in H$.)

Покажем, что распределение H инволютивно. Пусть X, Y — горизонтальные векторные поля, т.е. $X, Y \in H$. Для произвольной точки $q \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим секционные кривизны $K_{u,v}$, $K^*_{u^*,v^*}$ многообразий $\mathbb{R}^n$ и B соответственно. Здесь $u = X(q)$, $v = Y(q)$, $u^* = d\pi_q(u)$, $v^* = d\pi_q(v)$. В [10] показано, что имеет место соотношение

$$K_{u,v} = K^*_{u_*,v_*} - \frac{3\|A_u v\|^2}{|u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle^2},$$

где тензор A определяется по формуле

$$A_E F = \nabla^h_{E^h} F^v + \nabla^v_{E^h} F^h.$$

Так как многообразия $\mathbb{R}^n$, B является многообразиями постоянной нулевой секционной кривизны, имеют место равенства

$$K_{u,v} = 0, \quad K^*_{u^*,v^*} = 0.$$

Поэтому из вышеприведенной формулы следует, что $A_u v = 0$, т.е. $\nabla^v_X Y = 0$ в точке q. Другими словами, векторное поле $\nabla_X Y$ является горизонтальным векторным полем. В силу равенства $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ векторное поле $[X, Y]$ также является горизонтальным. Это означает, что ортогональное распределение инволютивно, т.е. оно вполне интегрируемо. Следовательно, распределение порождает слоение $F^\perp$.

В силу того, что $\pi\colon \mathbb{R}^n \to B$ — риманова субмерсия, слоение F является римановым (см. [11]). Напомним, что слоение F называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F, остается ортогональной ко всем слоям F во всех своих точках. Поэтому каждый слой слоения $F^\perp$ является вполне геодезическим подмногообразием. Вполне геодезическое m-мерное подмногообразие $\mathbb{R}^n$ является m-мерной плоскостью.

Пусть $q_0 \in B$, $L^\perp$ — слой слоения $F^\perp$, проходящий через точку $p \in \pi^{-1}(q_0)$. Рассмотрим для точки $q \in B$ кривую $\gamma\colon [0,1] \to B$, соединяющую точку q_0 с точкой $q \in B$. Существует единственное горизонтальное поднятие $\gamma^h\colon [0,1] \to L^\perp$ кривой γ с началом в точке p, длина которой равна длине $\gamma\colon [0,1] \to B$ (см. [11]). Если точке q поставим в соответствие точку $\gamma^h(1)$, то образ точки q не зависит от кривой γ. Поэтому мы получим корректно определенно отображение $\pi^\perp\colon B \to L^\perp$, которое является изометрией по определению. Это означает, что многообразие B изометрично $\mathbb{R}^m$. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдишукурова Г. М., Нарманов А. Я.,* О геометрии римановых субмерсий// Узбек. мат. ж. — 2016. — *2.* — С. 3–8.
2. *Аслонов Ж. О.* Геометрия орбит векторных полей// Докл. АН РУз. — 2011. — *2.* — С. 5–7.
3. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Введение в риманову геометрию. — СПб.: Наука, 1994.
4. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971.
5. *Зойидов А. Н.* О геометрии римановых субмерсий над плоскими многообразиями// Тр. Междунар. конф. «Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения» (Ташкент, 21–23 ноября 2019 г.). — Ташкент, 2019. — С. 194–195.
6. *Нарманов А. Я., Норжигитов Ш.* О геометрии многообразий неотрицательной кривизны// Узбек. мат. ж. — 2014. — *3.* — С. 83–88.
7. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Диффер. уравн. — 2014. — *50*, № 12. — С. 1582–1589.
8. *Тамура И.* Топология слоений.. — М.: Мир, 1979.
9. *Hermann R.* A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle// Proc. Am. Math. Soc. — 1960. — *11.* — P. 236–242.
10. *O'Neil B.* The fundamental equations of a submersion// Michigan Math. J. — 1966. — *13.* — P. 459–469.
11. *Reinhart B. L.* Foliated manifolds with bundle-like metrics// Ann. Math. — 1959. — *69*, № 1. — P. 119–132.
12. *Stefan P.* Accessible sets, orbits, and foliations with singularities// Proc. London Math. Soc. — 1974. — *29.* — P. 694–713.

13. *Sussmann H.* Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities// Bull. Am. Math. Soc. — 1973. — *79*. — P. 197–199.

Зойидов Азам Нуруллоевич
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: zoyid.azam.math@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 108–116
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-108-116

УДК 515.12

РАВНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО И ЕГО ГИПЕРПРОСТРАНСТВО

© 2021 г. **Р. Б. БЕШИМОВ, Д. Т. САФАРОВА**

Аннотация. В работе изучены некоторые топологические свойства равномерных пространств и их гиперпространств. Установлено, что равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ является равномерно предкомпактным тогда и только тогда, когда $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ равномерно предкомпактно. Также доказано, что равномерное гиперпространство $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ сохраняет равномерно локальную компактность, равномерную связность, равномерную паракомпактность, равномерную R-паракомпактность.

Ключевые слова: равномерное пространство, равномерность, равномерно связное пространство, равномерно паракомпактное пространство, равномерно R-паракомпактное пространство.

UNIFORM SPACE AND ITS HYPERSPACE

© 2021 **R. B. BESHIMOV, D. T. SAFAROVA**

Abstract. In this paper, we examine some topological properties of uniform spaces and their hyperspaces. We prove that a uniform space $(X, \mathscr{U})$ is uniformly precompact if and only if $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ is uniformly precompact. Also we prove that the uniform hyperspace $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ preserves uniformly local compactness, uniform connection, uniform paracompactness, and uniform R-paracompactness.

Keywords and phrases: uniform space, uniformity, uniformly connected space, uniformly paracompact space, uniformly R-paracompact space.

AMS Subject Classification: 54E15, 54D45, 54D20, 54B20

В работе доказаны следующие утверждения:

(1) равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ предкомпактно тогда и только тогда, когда равномерное пространство $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ предкомпактно (теорема 2),
(2) если равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ равномерно локально компактно, то равномерное пространство $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ также равномерно локально компактно (теорема 3);
(3) если равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ равномерно паракомпактно, то равномерное пространство $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ равномерно паракомпактно (теорема 5).

Приведем некоторые определения и предложения, необходимые для изложения результатов. Пусть X — непустое множество, α и β — покрытия множества X. Говорят, что покрытие α *вписано* в покрытие β (обозначение $\alpha > \beta$), если для любого $A \in \alpha$ существует такое $B \in \beta$, что $A \subset B$. Если $\{\alpha_a : a \in M\}$ — произвольное семейство покрытий множества X, то *внутренним пересечением* семейства $\{\alpha_a : a \in M\}$ покрытий называется покрытие, состоящее из всех множеств вида $\bigcap\{A_a : a \in M\}$, где $A_a \in \alpha_a$ для любого $a \in M$; обозначение $\bigwedge\{\alpha_a : a \in M\}$ или $\bigwedge\limits_{a\in M} \alpha_a$. Если α и β — два покрытия множества X, то их внутреннее пересечение определяется следующим образом: $\alpha \wedge \beta = \{A \cap B : A \in \alpha,\ B \in \beta\}$.

Пусть α — покрытие множества X и $Y \subset X$. Множество $\alpha(Y) = \bigcup\{A \in \alpha : A \cap Y \neq \varnothing\}$ называется *звездой* множества относительно покрытия α. Если $Y = \{x\}$, то вместо $\alpha(\{x\})$ пишут $\alpha(x)$.

Далее, положим

$$\alpha^{\triangle} = \{\alpha(x) : x \in X\}, \quad \alpha^{*} = \{\alpha(A) : A \in \alpha\}.$$

Говорят, что покрытие α *звездно вписано* в β, если $\alpha^{\triangle} > \beta$. Если $\alpha^{*} > \beta$, то говорят, что α *сильно звездно вписано* в β. Заметим, что если покрытие α звездно вписано в β, а покрытие β звездно вписано в покрытие γ, то покрытие α сильно звездно вписано в покрытие γ.

Определение 1 (см. [2]). Пусть X — непустое множество. Семейство $\mathscr{U}$ покрытий множества X называется *равномерностью* на X, если выполняются следующие условия:

(P1) если $\alpha \in \mathscr{U}$ и α вписано в некоторое покрытие β множества X, то $\beta \in \mathscr{U}$;
(P2) для любых $\alpha_1 \in \mathscr{U}$, $\alpha_2 \in \mathscr{U}$ существует $\alpha \in \mathscr{U}$, которое вписано и в α_1, и в α_2;
(P3) для любого $\alpha \in \mathscr{U}$ существует $\beta \in \mathscr{U}$, сильно звездно вписанное в α;
(P4) для любой пары x, y различных точек X существует такое $\alpha \in \mathscr{U}$, что ни один элемент α не содержит одновременно x и y.

Семейство $\mathscr{U}$, состоящее из множества X, удовлетворяющего условиям 1—3, называется *псевдоравномерностью* на X, а пара $(X, \mathscr{U})$ — *псевдоравномерным пространством.*

Семейство $\mathscr{U}$, состоящее из множества X, удовлетворяющего условиям 1—4, называется *равномерностью* на X, а пара $(X, \mathscr{U})$ — *равномерным пространством.*

Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{U}$ называется *базой* равномерности $\mathscr{U}$, если для любого $\alpha \in \mathscr{U}$ существует такое $\beta \in \mathscr{B}$, что β вписано в α. Очевидно, что равномерность может иметь много баз. Наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью какой-либо базы равномерности $\mathscr{U}$, называется её *весом* и обозначается $w(\mathscr{U})$.

Утверждение 1 (см. [2]). *Семейство $\mathscr{B}$ покрытий множества X является базой некоторой равномерности $\mathscr{U}$ на X тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

(B1) *для любой пары $\beta_1, \beta_2 \in \mathscr{B}$ существует $\beta \in \mathscr{B}$, которое вписано в β_1 и в β_2*;
(B2) *для всякого $\beta \in \mathscr{B}$ существует $\gamma \in \mathscr{B}$, сильно звездно вписанное в β*;
(B3) $\bigcap\{\beta(x) : \beta \in \mathscr{B}\} = \{x\}$ *для любой точки $x \in X$.*

Утверждение 2 (см. [2]). . *Для любой равномерности $\mathscr{U}$ на X семейство $\tau_{\mathscr{U}} = \{O \subset X\}$, удовлетворяющее условию*

$$\textit{для каждого } x \in O \textit{ существует такое } \alpha \in \mathscr{U}, \textit{ что } \alpha(x) \subset O,$$

является топологией на X, а топологическое пространство $(X, \tau_{\mathscr{U}})$ является T_1-пространством.

Топология $\tau_{\mathscr{U}}$ называется *топологией, порожденной* (или *индуцированной*) равномерностью $\mathscr{U}$.

Внутренность множества $H \subset X$ относительно топологии, индуцированной равномерностью $\mathscr{U}$ на множестве X, определяется следующим образом:

$$\langle H\rangle = \big\{x \in X : \text{ существует такое } \alpha \in \mathscr{U}, \text{ что } \alpha(x) \subset H\big\}.$$

Для каждой точки $x \in X$ и каждого $\alpha \in \mathscr{U}$ множество $\langle\alpha(x)\rangle$ есть окрестность точки x относительно топологии $\tau_{\mathscr{U}}$. Если топология пространства X индуцирована равномерностью $\mathscr{U}$, то для каждого $x \in X$ и каждого $H \subset X$ имеем $x \in [H]$ тогда и только тогда, когда $H \cap \alpha(x) \neq \varnothing$ для каждого $\alpha \in \mathscr{U}$. Замыкание множества $H \subset X$ относительно топологии, индуцированной равномерностью $\mathscr{U}$ на множестве X, определяется следующим образом: $[H] = \bigcap\{\alpha(H) : \alpha \in \mathscr{U}\}$.

Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ называется *компактом*, если множество X с топологией, индуцированной равномерностью $\mathscr{U}$, есть компакт (см. [3]).

Пусть $(X, \mathscr{U})$ — равномерное пространство, а $\exp X$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства $(X, \tau_{\mathscr{U}})$. Для каждого $\alpha \in \mathscr{U}$ положим

$$P(\alpha) = \big\{\langle\alpha'\rangle : \alpha' \subseteq \alpha\big\},$$

где $\langle\alpha'\rangle = \big\{F \in \exp X : F \subseteq \bigcup\alpha'\big\}$ и $F \cap A \neq \varnothing$ для каждого $A \in \alpha'$.

Утверждение 3 (см. [2])**.** *Если $\mathscr{B}$ — база равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$, то $P(\mathscr{B}) = \{P(\alpha) : \alpha \in \mathscr{B}\}$ образует базу некоторой равномерности* $\exp \mathscr{U}$ *на* $\exp X$*.*

Равномерное пространство $(\exp X, \exp \mathscr{U})$ называется *гиперпространством замкнутых подмножеств* равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$, а равномерность $\exp \mathscr{U}$ — *равномерностью Хаусдорфа* на $\exp X$.

Следствие 1 (см. [11])**.** *Пусть $(X, \mathscr{U})$ — равномерное пространство. Тогда $w(\mathscr{U}) = w(\exp \mathscr{U})$.*

Следствие 2 (см. [11])**.** *Если равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ метризуемо, то его гиперпространство $(\exp X, \exp \mathscr{U})$ также является метризуемым.*

Теорема 1 (см. [2])**.** *Равномерное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда $w(\mathscr{U}) \leqslant \aleph_0$.*

Замечание 1 (см. [2]). Пусть $\exp_c X$ — множество всех непустых компактных подмножеств равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$. Для каждого $\alpha \in \mathscr{U}$ положим

$$K(\alpha) = \bigl\{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha,\ \alpha' \text{ конечно}\bigr\}.$$

Заметим, что $K(\alpha)$ — покрытие множества $\exp_c X$.

Псевдоравномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ называется *предкомпактным*, если псевдоравномерность $\mathscr{U}$ имеет базу $\mathscr{B}$, состоящую из конечных покрытий (см. [2]).

Теорема 2. *Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ предкомпактно тогда и только тогда, когда равномерное пространство $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ предкомпактно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $(X, \mathscr{U})$ — предкомпактное пространство и рассмотрим произвольное покрытие

$$P(\alpha) = \bigl\{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha\bigr\},$$

где

$$\langle \alpha' \rangle = \Bigl\{F \in \exp_c X : F \subseteq \bigcup \alpha'\Bigr\}$$

и $F \cap A \neq \varnothing$ для каждого $A \in \alpha'$ в $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$. Рассмотрим след $\alpha \in \mathscr{U}$ в пространстве $(X, \mathscr{U})$. Ясно, что $\alpha \in \mathscr{U}$ есть покрытие пространства $(X, \mathscr{U})$. Так как $(X, \mathscr{U})$ предкомпактно, то для любого $\alpha \in \mathscr{U}$ существует конечное подпокрытие α_0 покрытия α, принадлежащее $\mathscr{U}$ и $\alpha_0 = \{A_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ покрывает пространство $(X, \mathscr{U})$, т.е.

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Рассмотрим всевозможные конечные комбинации покрытие α_0 и положим

$$P(\alpha_0) = \bigl\{\langle \alpha_0' \rangle : \alpha_0' \subseteq \alpha_0\bigr\},$$

где

$$\langle \alpha_0' \rangle = \Bigl\{F \in \exp_c X : F \subseteq \bigcup \alpha_0',\ F \cap A_i \neq \varnothing,\ A_i \in \alpha_0',\ i = 1, 2, \ldots, n\Bigr\}.$$

Ясно, что $P(\alpha_0)$ есть покрытие пространства $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$. Значит, $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ предкомпактно.

Достаточность. Пусть $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ предкомпактно; тогда существует конечное покрытие $P(\alpha_0)$ пространства $\exp_c X$. В силу предложения 3 пространство $(X, \mathscr{U})$ является замкнутым равномерным подпространством пространства $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$. Значит,

$$P(\alpha_0) = \bigl\{\langle \alpha_0' \rangle : \alpha_0' \subseteq \alpha_0\bigr\}$$

покрывает пространство $(X, \mathscr{U})$. Отсюда следует, что $X \subset \bigcup \alpha_0'$, где α_0' — конечное покрытие. Значит, $(X, \mathscr{U})$ предкомпактно. Теорема 2 доказана. □

Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ называется *равномерно локально компактным*, если существует покрытие $\alpha \in \mathscr{U}$, состоящее из компактных подмножеств (см. [2]).

Теорема 3. *Если равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ равномерно локально компактно, то равномерное пространство $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ тоже равномерно локально компактно.*

Доказательство. Пусть равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ равномерно локально компактно. Покажем, что $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ равномерно локально компактно. Поскольку $(X, \mathscr{U})$ равномерно локально компактно, то существует покрытие $\alpha \in \mathscr{U}$, состоящее из компактных подмножеств, т.е. $\alpha = \{U_a : a \in M\}$, где U_a — компактные подмножества в X и $\bigcup\limits_{a \in M} U_a$ покрывает пространство X. Ясно, что α — покрытие пространства X. Рассмотрим всевозможные конечные комбинации множеств U_a, $a \in M$, т.е.

$$P(\alpha) = \bigl\{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha,\ \alpha' \text{ компактно}\bigr\}$$

— покрытие пространства $\exp_c X$. Ясно, что $P(\alpha)$ — покрытие, состоящее из конечных объединений компактных подмножеств. Отсюда получим, что

$$\langle \alpha' \rangle = \Bigl\{F \in \exp_c X : F \subset \bigcup \alpha',\ F \cap U_a \neq \varnothing,\ U_a \in \alpha'\Bigr\}$$

является компактным множеством, где U_a — компактные подмножества в X для любого $a \in M$. Значит, $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ равномерно локально компактно. Теорема 3 доказана. □

Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ называется *равномерно связным*, а равномерность $\mathscr{U}$ — *связной*, если всякое равномерно непрерывное отображение $f\colon (X, \mathscr{U}) \to (D, \mathscr{U}_D)$ равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ в любое дискретное равномерное пространство $(D, \mathscr{U}_D)$ является постоянным (см. [2]).

Конечная последовательность $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ подмножеств множества X называется *сцепленной*, если $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ (см. [2]).

Утверждение 4 (см. [2])**.** *Для равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ следующие условия равносильны*:

(i) *равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ равномерно связно*;

(ii) *равномерность $\mathscr{U}$ не содержит дизъюнктных покрытий, состоящих из не более чем одного элемента*;

(iii) *для любого $\alpha \in \mathscr{U}$ и для любой точки $x \in X$ имеет место соотношение*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha^n(x) = X;$$

(iv) *для любого $\alpha \in \mathscr{U}$ и для любых точек $x, y \in X$ найдется такая конечная сцепленная последовательность $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \subset \alpha$, что $x \in A_1$, $y \in A_k$.*

Теорема 4. *Для равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ следующие условия равносильны*:

(1) *для любого $\alpha \in \mathscr{U}$ и для любых двух точек $x, y \in X$ найдется такая конечная сцепленная последовательность $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \subset \alpha$, что $x \in A_1$, $y \in A_k$*;

(2) *для любого $P(\alpha) \in \exp_c \mathscr{U}$ и для любых двух множеств $F_1, F_k \in \exp_c X$ найдется такая конечная сцепленная последовательность $\{\langle \alpha'_1 \rangle, \langle \alpha'_2 \rangle, \ldots, \langle \alpha'_k \rangle\} \subset P(\alpha)$, что $F_1 \in \langle \alpha'_1 \rangle$, $F_k \in \langle \alpha'_k \rangle$.*

Доказательство. Докажем импликацию (1)⇒(2). Для любого $P(\alpha) \in \exp_c \mathscr{U}$ и для любых компактов $F_1, F_k \in \exp_c X$ выберем произвольные точки $x \in F_1$, $y \in F_k$. Покажем, что существует такая конечная сцепленная последовательность

$$\bigl\{\langle \alpha'_1 \rangle,\ \langle \alpha'_2 \rangle,\ \ldots,\ \langle \alpha'_k \rangle\bigr\} \subset P(\alpha),$$

что $F_1 \in \langle \alpha'_1 \rangle$, $F_k \in \langle \alpha'_k \rangle$. Пусть точка x_α пробегает компакт F_1, а y_α — компакт F_k. Получаем такую конечную сцепленную последовательность $\{A_1^\alpha, A_2^\alpha, \ldots, A_k^\alpha\} \subset \alpha$, что $x_\alpha \in A_1^\alpha$ и $y_\alpha \in A_k^\alpha$. Так как F_1, F_k — компакты, то существуют конечные множества $\{A_1^{\alpha_1}, A_1^{\alpha_2}, \ldots, A_1^{\alpha_n}\}$, покрывающие компакт F_1, и $\{A_k^{\alpha_1}, A_k^{\alpha_2}, \ldots, A_k^{\alpha_n}\}$, покрывающие компакт F_k. Тогда существуют конечные сцепленные системы множеств

$$A_1^{\alpha_1},\ A_2^{\alpha_1},\ \ldots,\ A_k^{\alpha_1};\ A_1^{\alpha_2},\ A_2^{\alpha_2},\ \ldots,\ A_k^{\alpha_2};\ \ldots;\ A_1^{\alpha_n},\ A_2^{\alpha_n},\ \ldots,\ A_k^{\alpha_n}$$

точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и точек $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Тогда системы

$\langle\alpha_1'\rangle = \langle A_1^{\alpha_1},\ A_1^{\alpha_2},\ \ldots,\ A_1^{\alpha_n}\rangle,\quad \langle\alpha_2'\rangle = \langle A_2^{\alpha_1},\ A_2^{\alpha_2},\ \ldots,\ A_2^{\alpha_n}\rangle,\quad \ldots,\quad \langle\alpha_k'\rangle = \langle A_k^{\alpha_1},\ A_k^{\alpha_2},\ \ldots,\ A_k^{\alpha_n}\rangle$

— такие сцепленные системы в $\exp_c X$, что $F_1 \in \langle\alpha_1'\rangle$ и $F_k \in \langle\alpha_k'\rangle$.

Докажем импликацию (2)⇒(1). Пусть x и y — произвольные точки равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$. Тогда $F_1 = \{x_1\}$ и $F_k = \{x_k\}$ — замкнутые компактные множества и $F_1, F_k \in \exp_c X$. В силу (2) существует такая конечная сцепленная последовательность

$$\left\{\langle\alpha_1'\rangle,\ \langle\alpha_2'\rangle,\ \ldots,\ \langle\alpha_k'\rangle\right\} \subset P(\alpha),$$

что $F_1 \in \langle\alpha_1'\rangle$ и $F_k \in \langle\alpha_k'\rangle$. Пусть

$$\langle\alpha_1'\rangle = \langle A_1^1,\ A_2^1,\ \ldots,\ A_{n_1}^1\rangle,\quad \langle\alpha_2'\rangle = \langle A_1^2,\ A_2^2,\ \ldots,\ A_{n_2}^2\rangle,\quad ,\ldots,\quad \langle\alpha_k'\rangle = \langle A_1^k,\ A_2^k,\ \ldots,\ A_{n_k}^k\rangle.$$

Так как

$$F_1 = \{x_1\} \in \langle A_1^1, A_2^1, \ldots, A_{n_1}^1\rangle,\quad F_k = \{x_k\} \in \langle A_1^k, A_2^k, \ldots, A_{n_k}^k\rangle,$$

имеем $x_1 \in A_i^1$, $i = 1, 2, \ldots, n_1$ и $x_k \in A_i^k$, $i = 1, 2, \ldots, n_k$. Ясно, что

$$\langle\alpha_i'\rangle \cap \langle\alpha_{i+1}'\rangle \neq \varnothing \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n_k - 1.$$

Выберем по точке

$$F_1 \in \langle\alpha_1'\rangle \cap \langle\alpha_2'\rangle,\quad F_2 \in \langle\alpha_2'\rangle \cap \langle\alpha_3'\rangle,\quad \ldots,\quad F_{k-1} \in \langle\alpha_{k-1}'\rangle \cap \langle\alpha_k'\rangle$$

в силу (2). Из условия $F_1 \in \langle\alpha_1'\rangle \cap \langle\alpha_2'\rangle$ имеем, что существует, например, такое $A_1^2 \in \langle\alpha_2'\rangle$, что $A_1^1 \cap A_1^2 \neq \varnothing$. Из $F_2 \in \langle\alpha_2'\rangle \cap \langle\alpha_3'\rangle$ имеем, что существует, например, такое $A_1^3 \in \langle\alpha_3'\rangle$, что $A_1^2 \cap A_1^3 \neq \varnothing$, и т. д.; из $F_{k-1} \in \langle\alpha_{k-1}'\rangle \cap \langle\alpha_k'\rangle$ имеем, что существует, например, такое $A_1^k \in \langle\alpha_k'\rangle$, что $A_1^{k-1} \cap A_1^k \neq \varnothing$. Значит, мы нашли такие сцепленные системы $F_1, F_2, \ldots, F_k$, что $x_1 \in F_1$ и $x_k \in F_k$. Значит, условие (1) выполняется. Теорема 4 доказана. □

Определение 2 (см. [2]). Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ называется *равномерно сцепленным*, если для любого покрытия $\alpha \in \mathscr{U}$ существует такое натуральное число n, что ко всякой паре $x, y \in X$ можно подобрать такую сцепленную последовательность $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \subset \alpha$, что $k \leqslant n$, $x \in A_1$, $y \in A_k$.

Из предложения 4 следует, что всякое равномерно сцепленное равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ является равномерно связным.

Следствие 3. *Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ равномерно сцеплено тогда и только тогда, когда равномерное пространство $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ равномерно сцеплено.*

Следствие 4. *Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ равномерно связно тогда и только тогда, когда равномерное пространство $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ равномерно связно.*

Пусть γ — покрытие множества X. Положим

$$\gamma^< = \left\{\bigcup \gamma' : \gamma' \text{ — конечное подмножество покрытия } \gamma\right\}.$$

Покрытие γ называется *аддитивным*, если $\gamma^< > \gamma$.

Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ называется *равномерно паракомпактным*, если для любого аддитивного открытого покрытия γ пространства $(X, \mathscr{U})$ существует такая последовательность $\{a_n\} \subset \mathscr{U}$, что выполняется следующее условие:

$$\text{для любой точки } x \in X \text{ найдутся такие номер } n \in \mathbb{N} \text{ и элемент } \Gamma \in \gamma, \text{ что } a_n(x) \subset \Gamma. \qquad (\mathscr{U}P)$$

Следующее предложение показывают широту класса равномерно паракомпактных пространств.

Утверждение 5 (см. [2]). *Всякое метризуемое равномерное пространство является равномерно паракомпактным.*

Напомним определение топологического пространства «стрелка П. С. Александрова» X^* (см. [1]). На полуинтервале $[0, 1)$ числовой введем топологию, базу которой образуют все полуинтервалы $[\alpha, \beta)$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 < \beta \leqslant 1$.

Пример 1. «Стрелка П. С. Александрова» X^* является неметризуемым пространством, так как X^* не имеет счетной базы. Известно, что $\exp_n X^*$ с топологией Виеториса не является паракомпактным пространством. Но в X^* можно ввести такую равномерность $\mathscr{U}$, что $(\exp X^*, \exp\mathscr{U})$ является равномерно паракомпактным пространством.

Действительно, пусть X^* — стрелка П. С. Александрова. Положим $\alpha_n = \{O_{1/n}(x) : x \in X^*\}$. Заметим, что семейство $\mathscr{B} = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых покрытий является базой равномерности $\mathscr{U}$. Значит, равномерное пространство $(X^*, \mathscr{U})$ имеет счетную базу. Из теоремы 1 следует, что равномерное пространство $(X^*, \mathscr{U})$ является равномерно метризуемым пространством. Из следствия 2 вытекает, что $(\exp X^*, \exp\mathscr{U})$ — равномерное метризуемое пространство. В силу предложения 5 получаем, что $(\exp X^*, \exp\mathscr{U})$ — равномерно паракомпактное пространство.

Теорема 5. *Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ равномерно паракомпактно тогда и только тогда, когда равномерное пространство $(\exp_c X, \exp_c\mathscr{U})$ равномерно паракомпактно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ равномерно паракомпактно. Покажем, что $(\exp_c X, \exp_c\mathscr{U})$ равномерно паракомпактно. Поскольку $(X, \mathscr{U})$ равномерно паракомпактно, то для любого аддитивного открытого покрытия γ пространства $(X, \mathscr{U})$ существует такая последовательность $\{\alpha_n\} \subset \mathscr{U}$, что выполняется следующее условие: для любой точки $x \in X$ найдутся такие номер $n \in \mathbb{N}$ и элемент $\Gamma \in \gamma$, что $\alpha_n(x) \subset \Gamma$. Тогда ясно, что для аддитивного открытого покрытия γ пространства $(X, \mathscr{U})$ семейство

$$P(\gamma) = \bigl\{\langle\gamma'\rangle : \gamma' \subseteq \gamma;\ \gamma' \text{ конечно}\bigr\},$$

является аддитивным открытым покрытием пространства $(\exp_c X, \exp_c\mathscr{U})$; здесь

$$\langle\gamma'\rangle = \Bigl\{F \in \exp_c X : F \subseteq \bigcup \gamma'\Bigr\}$$

и $F \cap A \neq \varnothing$ для каждого $A \in \gamma'$.

Покажем, что для любого компакта $F \in \exp_c X$ найдутся такие номер $n \in \mathbb{N}$ и элемент $\langle\gamma'\rangle \in P(\gamma)$, что $P(a_n)(F) \subset \langle\gamma'\rangle$. Пусть точка x_a пробегает компакт F; получаем последовательность $\{\alpha_n\} \subset \mathscr{U}$, для которой $\alpha_n(x_a) \subset \Gamma_{x_a}$, $\Gamma_{x_a} \in \gamma$. Поэтому

$$F \subset \bigcup_{a \in M} \bigl\{\alpha_n(x_a) : n \in \mathbb{N},\ x_a \in F\bigr\}.$$

Так как F — компакт, то существуют такие $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, что

$$F \subset \alpha_{n_1}(x_{a_1}) \cup \alpha_{n_2}(x_{a_2}) \cup \ldots \cup \alpha_{n_k}(x_{a_k}).$$

Отсюда получаем, что

$$P(\alpha_n)(F) \subset \Bigl\langle \alpha_{n_1}(x_{a_1}),\ \alpha_{n_2}(x_{a_2}),\ \ldots,\ \alpha_{n_k}(x_{a_k}) \Bigr\rangle = \langle\gamma'\rangle \in P(\gamma).$$

Значит, пространство $(\exp_c X, \exp_c\mathscr{U})$ равномерно паракомпактно.

Достаточность. Пусть $(\exp_c X, \exp_c\mathscr{U})$ равномерно паракомпактно. Покажем, что $(X, \mathscr{U})$ равномерно паракомпактно. Пусть γ — произвольное аддитивное открытое покрытие равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$, т.е. $\gamma^< > \gamma$. Тогда ясно, что покрытие $P(\gamma^<)$ аддитивно относительно покрытия $P(\gamma)$, т.е. $P(\gamma^<) > P(\gamma)$. Так как пространство $(\exp_c X, \exp_c\mathscr{U})$ равномерно паракомпактно, то существует такая последовательность $\{P(\alpha_n)\} \subset \exp_c\mathscr{U}$, что для любой точки $F \in \exp_c X$ найдутся такие номер $n \in \mathbb{N}$ и элемент $\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle \in P(\gamma)$, что

$$P(\alpha_n)(F) \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle.$$

Пусть

$$P(\alpha_n) = \Bigl\{\bigl\langle V^n_{\beta_1},\ V^n_{\beta_2},\ \ldots,\ V^n_{\beta_k}\bigr\rangle : \beta_i \in A_n,\ i = 1, 2, \ldots, k\Bigr\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим след покрытия $P(\alpha_n)$ в $(X, \mathscr{U})$. Покажем, что покрытие $\alpha_n = \bigl\{V^n_{\beta_1},\ V^n_{\beta_2},\ \ldots,\ V^n_{\beta_k}\bigr\}$, где $\beta_i \in A_n$, $i = 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяет условию $(\mathscr{U}P)$. Действительно, пусть $x \in X$ —

произвольная точка; тогда $\{x\} \in \exp_c X$. Тогда существуют такие номер $n \in \mathbb{N}$ и элемент $\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle \in P(\gamma)$, что

$$P(\alpha_n)(\{x\}) \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle;$$

здесь

$$P(\alpha_n)(\{x\}) = \bigcup \Big\{ \big\langle V^n_{\beta_1},\ V^n_{\beta_2},\ \ldots,\ V^n_{\beta_k}\big\rangle : \{x\} \in \big\langle V^n_{\beta_1},\ V^n_{\beta_2},\ \ldots,\ V^n_{\beta_k}\big\rangle \Big\}.$$

Тогда

$$\alpha_n(x) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

Значит, покрытие α_n удовлетворяет условию $(\mathscr{U}P)$, и пространство $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ равномерно паракомпактно. Теорема 5 доказана. □

Покрытие γ равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ называется *равномерно локально конечным*, если существует такое равномерное покрытие $\alpha \in \mathscr{U}$, что каждый элемент A покрытия α пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия γ. Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ называется *равномерно R-паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать равномерно локально конечное открытое покрытие.

Следствие 5 (см. [2]). *Всякое равномерно R-паракомпактное пространство является равномерно паракомпактным.*

Утверждение 6 (см. [2]). *Всякое равномерно локально компактное пространство является равномерно R-паракомпактным.*

Теорема 6. *Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ равномерно R-паракомпактно тогда и только тогда, когда равномерное пространство $(\exp_c X, \exp_c \mathscr{U})$ равномерно R-паракомпактно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$P(\gamma) = \Big\{ \big\langle \gamma' \big\rangle : \gamma' \subseteq \gamma,\ \gamma' \text{ конечно} \Big\}$$

— произвольное открытое покрытие в пространстве $(\exp_c X, \exp_c U)$; здесь

$$\langle \gamma' \rangle = \Big\{ F \in \exp_c X : F \subseteq \bigcup \gamma' \Big\}$$

и $F \cap A \neq \varnothing$ для каждого $A \in \gamma'$. Рассмотрим след $P(\gamma)$ в пространстве $(X, \mathscr{U})$. Пусть $\langle B_1, B_2, \ldots, B_n\rangle \in P(\gamma)$ — произвольный элемент из покрытия $P(\gamma)$. Рассмотрим след этого множества в пространстве $(X, \mathscr{U})$, т.е. $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \gamma$ — открытые множества в $(X, \mathscr{U})$. Так как $(X, \mathscr{U})$ — равномерно R-паракомпактное пространство, то существует такое равномерное локально конечное покрытие $\alpha \in \mathscr{U}$, что каждый элемент A покрытия α пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия γ. Так как α — покрытие равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$, то существуют множества $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \alpha$, позволяющие провести следующие рассуждения.

Первый случай. Предположим, что открытое множество A_1 пересекается с множествами $B_1, B_2, \ldots, B_k$, открытое множество A_2 пересекается с множествами $B_{k+1}, B_{k+2}, \ldots, B_{k+s}$, и т. д., открытое множество A_k пересекается с множествами $B_{k+s+1}, B_{k+s+2}, \ldots, B_n$.

Положим

$$\begin{gathered} A_1 \cap B_1 = U_{11}, \quad A_1 \cap B_2 = U_{12}, \quad \ldots, \quad A_1 \cap B_k = U_{1k}, \\ A_2 \cap B_{k+1} = U_{2,k+1}, \quad A_2 \cap B_{k+2} = U_{2,k+2}, \quad \ldots, \quad A_2 \cap B_{k+s} = U_{2,k+s}, \ldots, \\ A_k \cap B_{k+s+1} = U_{k,k+s+1}, \quad A_k \cap B_{k+s+2} = U_{k,k+s+2}, \quad \ldots, \quad A_k \cap B_n = U_{k,n}. \end{gathered}$$

Положим

$$\langle \gamma_0 \rangle = \big\langle U_{11},\ U_{12},\ \ldots,\ U_{1k},\ U_{2,k+1},\ U_{2,k+2},\ \ldots,\ U_{2,k+s},\ U_{k,k+s+1},\ U_{k,k+s+2},\ \ldots,\ U_{k,n} \big\rangle.$$

Покажем, что $\langle\gamma_0\rangle \cap \{B_1, B_2, \dots, B_n\} \neq \varnothing$. Действительно, пусть

$$x_1 \in U_{11} \cap B_1, \quad x_2 \in U_{12} \cap B_2, \quad \dots, \quad x_k \in U_{1k} \cap B_k,$$
$$x_{k+1} \in U_{2,k+1} \cap B_{k+1}, \quad x_{k+2} \in U_{2,k+2} \cap B_{k+2}, \quad \dots, \quad x_{k+s} \in U_{2,k+s} \cap B_{k+s}, \quad \dots,$$
$$x_{k+s+1} \in U_{k,k+s+1} \cap B_{k+s+1}, \quad x_{k+s+2} \in U_{k,k+s+2} \cap B_{k+s+2}, \quad \dots, \quad x_n \in U_{k,n} \cap B_n.$$

Тогда

$$F = \Big\{x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_k,\ x_{k+1},\ x_{k+2},\ \dots,\ x_{k+s},\ x_{k+s+1},\ x_{k+s+2},\ \dots,\ x_n\Big\}$$

таково, что

$$F \in \langle\gamma_0\rangle \cap \langle B_1, B_2, \dots, B_n\rangle \neq \varnothing.$$

Второй случай. Пусть открытое множество B_1 пересекается с множествами $A_1, A_2, \dots, A_s$, открытое множество B_2 пересекается с множествами $A_{s+1}, A_{s+2}, \dots, A_{s+l}$ и т. д., открытое множество B_n пересекается с множествами $A_{s+l+1}, A_{s+l+2}, \dots, A_k$. Положим

$$B_1 \cap A_1 = U_{11}, \quad B_1 \cap A_2 = U_{12}, \quad \dots, \quad B_1 \cap A_s = U_{1s},$$
$$B_2 \cap A_{s+1} = U_{2,s+1}, \quad B_2 \cap A_{s+2} = U_{2,s+2}, \quad \dots, \quad B_2 \cap A_{s+l} = U_{2,s+l}, \quad \dots,$$
$$B_n \cap A_{s+l+1} = U_{n,s+l+1}, \quad B_n \cap A_{s+l+2} = U_{n,s+l+2}, \quad \dots, \quad B_n \cap A_k = U_{n,k}.$$

Тогда семейство

$$P(\gamma_0) = \Big\{\langle U_{11},\ U_{12},\ \dots,\ U_{1s}\rangle,\ \langle U_{2,s+1},\ U_{2,s+2},\ \dots,\ U_{2,s+l}\rangle,\ \dots,\ \langle U_{n,s+l+1},\ U_{n,s+l+2},\ \dots,\ U_{n,k}\rangle\Big\}$$

конечно и каждое открытое множество из системы $P(\gamma_0)$ пересекается с множеством $\langle B_1, B_2, \dots, B_n\rangle$.

Действительно, пусть $\langle U_{1s}, U_{2,s+l}, \dots, U_{n,k}\rangle \in P(\gamma_0)$ — произвольный элемент. Выберем по точке

$$x_1 \in U_{1s} = B_1 \cap A_s, \quad x_2 \in U_{2,s+1} = B_2 \cap A_{s+1}, \quad \dots, \quad x_n \in U_{n,k} = B_n \cap A_k.$$

Тогда

$$F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \langle B_1, B_2, \dots, B_n\rangle \cap \langle U_{1s}, U_{2,s+l}, \dots, U_{n,k}\rangle.$$

Значит, пространство $(\exp_c X, \exp_c U)$ равномерно R-паракомпактно.

Достаточность. Пусть $(\exp_c X, \exp_c U)$ равномерно R-паракомпактно. Покажем, что пространство $(X, \mathscr{U})$ также равномерно R-паракомпактно. Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in M\}$ — произвольное открытое покрытие равномерного пространства (X, U). Тогда семейство

$$P(\gamma) = \Big\{\langle\gamma'\rangle : \gamma' \subseteq \gamma,\ \gamma' \text{ конечно}\Big\}$$

является открытым покрытием пространства $(\exp_c X, \exp_c U)$; здесь

$$\langle\gamma'\rangle = \Big\{F \in \exp_c X : F \subseteq \bigcup \gamma'\Big\}$$

и $F \cap U_\alpha \neq \varnothing$ для каждого $U_\alpha \in \gamma'$. Так как пространство $(\exp_c X, \exp_c U)$ равномерно R-паракомпактно, то существует такое равномерное локально конечное открытое покрытие $P(\alpha) \in \exp_c U$, что каждый элемент $\langle\alpha'\rangle$ покрытия $P(\alpha)$ пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $P(\gamma)$. Ясно, что покрытие α вписано в покрытие γ. Покажем, что покрытие γ равномерно локально конечно. Так как покрытие $P(\gamma)$ равномерно локально конечно, каждый элемент $\langle\alpha'\rangle = \langle G_1, G_2, \dots, G_n\rangle$ пересекается с конечным элементов покрытия $P(\gamma)$, т.е.

$$\langle U_1^1, U_2^1, \dots, U_{e_1}^1\rangle, \quad \langle U_1^2, U_2^2, \dots, U_{e_2}^2\rangle, \quad \dots, \quad \langle U_1^s, U_2^s, \dots, U_{e_s}^s\rangle.$$

По условию

$$\langle U_1^1, U_2^1, \dots, U_{e_1}^1\rangle \cap \langle G_1, G_2, \dots, G_n\rangle \neq \varnothing,$$
$$\langle U_1^2, U_2^2, \dots, U_{e_2}^2\rangle \cap \langle G_1, G_2, \dots, G_n\rangle \neq \varnothing, \quad \dots,$$
$$\langle U_1^s, U_2^s, \dots, U_{e_s}^s\rangle \cap \langle G_1, G_2, \dots, G_n\rangle \neq \varnothing.$$

Выберем по точке

$$F_1 \in \langle U_1^1,\ U_2^1,\ \dots,\ U_{e_1}^1 \rangle \cap \langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle,$$
$$F_2 \in \langle U_1^2,\ U_2^2,\ \dots,\ U_{e_2}^2 \rangle \cap \langle G_1,\ G_2,\ \dots,\ G_n \rangle, \quad \dots$$
$$F_s \in \langle U_1^s,\ U_2^s,\ \dots,\ U_{e_s}^s \rangle \cap \langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle.$$

Отсюда следует, что

$$F_1 \subset \bigcup_{i=1}^{e_1} U_i^1, \quad F_1 \cap U_i^1 \neq \varnothing, \quad i = 1, 2, \dots, e_1; \quad F_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i, \quad F_1 \cap G_i \neq \varnothing, \quad i = 1, 2, \dots, n; \tag{1}$$

$$F_2 \subset \bigcup_{i=1}^{e_2} U_i^2, \quad F_2 \cap U_i^2 \neq \varnothing, \quad i = 1, 2, \dots, e_2; \quad F_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i, \quad F_2 \cap G_i \neq \varnothing, \quad i = 1, 2, \dots, n; \tag{2}$$

. . . .

$$F_s \subset \bigcup_{i=1}^{e_s} U_i^s, \quad F_s \cap U_i^s \neq \varnothing, \quad i = 1, 2, \dots, e_s; \quad F_s \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i, \quad F_s \cap G_i \neq \varnothing, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3}$$

Из (1) легко видеть, что множество G_1 пересекается, например, с множеством, U_1^1, из (2) вытекает, что множество G_1 пересекается с множеством U_1^2, и т. д., из уравнения (3) вытекает, что G_1 пересекает с множеством U_1^s. Мы получим, что множество G_1 пересекается с множеством $U_1^1, U_1^2, \dots, U_1^s$, т.е. покрытие α равномерно локально конечно. Теорема 6 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1974.
2. *Борубаев А. А.* Равномерная топология. — Бишкек: Илим, 2013.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
4. *Beshimov R. B., Safarova D. T.* Uniform space and its hyperspace// Тр. Междунар. конф. «Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения» (Ташкент, 21–23 ноября 2019 г.). — Ташкент, 2019. — С. 29–30.
5. *Chi-Keung Ng.* Coarse metric and uniform metric// Topology Appl. — 2019. — *260.* — P. 1–12.
6. *Fedorchuk V. V.* On a preservation of completeness of uniform spaces by the functor P_τ// Topology Appl. — 1999. — *91.* — P. 25–45.
7. *Fedorchuk V. V., Sadovnichii Yu. V.* On some categorical properties of uniform space of probability measures// Topology Appl. — 1998. — *82.* — P. 131–151.
8. *Isbell J. R.* Uniform spaces. — Am. Math. Soc., 1964.
9. *James I. M.* Topological and Uniform Spaces. — New York: Springer, 1987.
10. *Salvador R., Miguel A., Sanchez G.* Compactifications of quasi-uniform hyperspaces// Topology Appl. — 2003. — *127.* — P. 409–423.
11. *Michael E.* Topologies on spaces of supsets// Trans. Am. Math. Soc. — 1951. — *71*, № 1. — P. 152–172.
12. *Mizakami T.* On hyperspaces of generalized metric spaces// Topology Appl. — 1997. — *76.* — P. 169–173.

Бешимов Рузиназар Бебутович
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: `rbeshimov@mail.ru`

Сафарова Дилнора Тешабоевна
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: `safarova.dilnora87@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 117–123
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-117-123

УДК 514.763.23

ГРУППА ИЗОМЕТРИЙ СЛОЕНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2021 г. **А. С. ШАРИПОВ**

Аннотация. В работе исследуется группа изометрий слоеных многообразий. Доказано, что существует слоение, для которого существует элемент группы изометрий слоеного многообразия, не являющийся элементом группы изометрий.

Ключевые слова: слоение, диффеоморфизм слоеного многообразия, F-компактно открытая топология, группа изометрий слоеного многообразия.

ISOMETRY GROUPS OF FOLIATED MANIFOLDS

© 2021 **A. S. SHARIPOV**

Abstract. In this paper, we study the group of isometries of foliated manifolds. We prove that there is a foliation for which there exists an element of the isometry group of the foliated manifold, which is not an element of the isometry group.

Keywords and phrases: foliation, diffeomorphism of foliated manifold, F-compactly open topology, isometry group of a foliated manifold.

AMS Subject Classification: 58K45, 17B66, 32S65

Многообразие M с некоторым фиксированным слоением F на нем называется слоеным многообразием и обозначается через (M, F). Слоеные римановы многообразия изучаются в рамках теории слоений, которая является относительно новым направлением математики, возникшем на стыке теории дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и дифференциальной топологии во второй половине XX в.

В формировании и развитии теории слоения большой вклад внесли французские математики, такие как C. Ehresmann [15], G. Reeb [25], H. Lawson [19], P. Molino [20], A. Haefliger [16], R. Langevin, H. Rosenberg [18], G. Lamoureux [17]. Основные работы Ж. Риба (G. Reeb), одного из основоположников теории слоений, посвящены задачам качественной теории слоений. Ж. Рибом доказано (см. [25]), что если компактный слой имеет конечную фундаментальную группу, то существует окрестность этого слоя, состоящая из слоев, диффеоморфных данному слою.

Исследование группы изометрий слоения является новой задачей в теории слоеных многообразий. Понятие изометрии слоения было введено А. Я. Нармановым (см. [22]). Им же доказано, что для некоторого класса слоений существует изометрия слоения, которая не является изометрией многообразия. Группа изометрий слоения является подгруппой группы диффеоморфизмов слоеного многообразия. Группа диффеоморфизмов слоеного многообразия изучена в работах С. Х. Арансона (см. [1]). Им получено необходимое и достаточное условие топологической сопряженности таких диффеоморфизмов. Для компактных многообразий различные подгруппы и группы диффеоморфизмов изучены P. L. Antonelli, D. Burghelea, P. J. Kahn (см. [13]).

ISSN 0233–6723

Классической задачей римановой геометрии является изучение группы изометрий. Изометрии n-мерного риманова многообразия M на себя образуют подгруппу группы $\mathrm{Diff}\, M$ всех диффеоморфизмов M на себя. Как показали S. B. Myers, N. Steenrod (см. [21]), группа изометрий $G(M)$ с компактно-открытой топологией имеет естественную структуру группы Ли.

Пусть M — риманово многообразие и $G(M)$ — множество всех изометрий многообразия M. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in G(M)$. Композиция отображений $\varphi_1 \circ \varphi_2$ снова является изометрией. Если положить $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2$, то $G(M)$ станет группой. Мы здесь рассматриваем $G(M)$ с компактно-открытой топологией, определяемой следующим образом.

Пусть C и U — соответственно компактное и открытое подмножества в M и

$$W(C,U) = \{\varphi \in G(M) \mid \varphi(C) \subset U\}.$$

Компактно-открытая топология в $G(M)$ определяется как самая слабая топология в $G(M)$, для которой все множества $W(C,U)$ открыты. Известно, что $G(M)$ — хаусдорфово пространство со счетной базой.

Объект, состоящий из дифференцируемого многообразия и заданной на нем групповой структуры, называется группой Ли, если групповая операция совместима с дифференциальной структурой, т.е. отображение $\mu\colon G{\times}G \to G$, заданное формулой $\mu(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1{\circ}\varphi_2^{-1}$, дифференцируемо. Иными словами, групповая операция

$$\mu(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1 \circ \varphi_2, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in G$$

и взятие обратного

$$i\colon G \to G, \quad i(\varphi) = \varphi^{-1}, \quad \varphi \in G,$$

являются гладкими отображениями многообразий.

Пусть M, N — гладкие многообразия размерности n, на которых заданы гладкие k-мерные слоения F_1, F_2 соответственно (здесь $0 < k < n$).

Определение 1. Если при некотором C^r-диффеоморфизме $\varphi\colon M \to N$ образ $\varphi(L_\alpha)$ любого слоя L_α слоения F_1 является слоем слоения F_2, то говорят, что пары (M, F_1) и (N, F_2) *C^r-диффеоморфны*; обозначение $(M, F_1) \approx (N, F_2)$.

Отображение φ из (M, F_1) в (N, F_2) называется *C^r-диффеоморфизмом, сохраняющим слоение*; обозначение $\varphi\colon (M, F_1) \to (N, F_2)$. В случае, когда $M = N$ и $F_1 = F_2$, говорят о диффеоморфизме слоеного многообразия (M, F).

Диффеоморфизмы, сохраняющие слоение, изучены в работах С. Х. Арансона [1], В. З. Гринеса [2,3], О. В. Починка [8], I. Tamura [11].

Группа $\mathrm{Diff}^r(M)$ диффеоморфизмов гладкого многообразия имеет важное значение в дифференциальной геометрии и анализе. Фундаментальными работами в этой области являются исследования В. И. Арнольда [14], H. Omori [23, 24], А. М. Лукацкого [4, 5].

Интенсивное развитие теории группы диффеоморфизмов началось с работы В. И. Арнольда [14], в которой доказано, что движения идеальной несжимающийся жидкости являются геодезическими на группе диффеоморфизмов, сохраняющих объем элемента.

Рассмотрим слоеное многообразие с некоторым слоением и исследуем некоторые подгруппы группы диффеоморфизмов слоеного многообразия.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y). Пусть слои L_α слоения F задаются уравнениями $x^2 - y = \alpha = \mathrm{const}$. Тогда диффеоморфизм плоскости

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x,y) = (x, y + \lambda f(x,y)),$$

является диффеоморфизмом слоеной плоскости $(\mathbb{R}^2, F)$, для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$, где $f(x,y) = x^2 - y$. Оно отображает каждый слой L_α на слой $L_{(1-\lambda)\alpha}$.

Пример 2. Пусть (M, F) — слоеное многообразие, где F — гладкое слоение размерности k, $0 < k < n$. Напомним, что векторное поле X называется слоеным полем, если для каждого векторного поля Y, касательного к слоению F, скобка Ли $[X, Y]$ также является касательным к F. Известно, что поток каждого слоеного поля состоит из диффеоморфизмов слоеного многообразия (M, F).

Для слоеной плоскости из примера 1 векторное поле

$$X = (x^2 - y)\frac{\partial}{\partial y}$$

является слоеным полем, а его поток состоит из диффеоморфизмов

$$\phi^t\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (x, x^2 - e^{-t}(x^2 - y)) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

слоеной плоскости $(\mathbb{R}^2, F)$. Каждый диффеоморфизм (1) отображает каждый слой L_α на слой $L_{e^{-t}\alpha}$.

Следующий пример показывает, что понятие диффеоморфизма слоеного многообразия определено корректно.

Пример 3. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x,y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x,y). Слои L_α слоения F задаются уравнениями $y = \alpha = \mathrm{const}$. Тогда гомеоморфизм плоскости

$$\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \phi(x,y) = \left(x + y, y^{\frac{1}{3}}\right)$$

является изометрией слоения F, но не является диффеоморфизмом плоскости.

Обозначим через $\mathrm{Diff}_F(M)$ множество всех C^r-диффеоморфизмов слоеного многообразия (M,F), где $r \geqslant 0$. Группа $\mathrm{Diff}_F(M)$ образует подгруппу в $\mathrm{Diff}(M)$; она является топологической группой в компактно-открытой топологии.

Определение 2. Диффеоморфизм $\phi \in \mathrm{Diff}_F(M)$ слоеного многообразия называется *изометрией* слоения F, если сужение $\varphi\colon L_\alpha \to \varphi(L_\alpha)$ является изометрией, где L_α — слой слоения F.

Вопросу об изометрических отображениях слоений посвящены работы А. Я. Нарманова [7], Д. Скоробогатова [10]. В этих работах изучены вопросы, при каких условиях всякая изометрия слоения является изометрией многообразия. В [7] доказано существование диффеоморфизма многообразия на себя, который является изометрией слоения, но не является изометрией многообразия. Построен пример диффеоморфизма на трехмерной сфере, который является изометрией слоения Хопфа, но не является изометрией трехмерной сферы.

Обозначим через $G_F^r(M)$ множество всех C^r-изометрий слоеного многообразия (M,F), где $r \geqslant 0$. Следующие замечания показывают, что понятие изометрии слоения корректно определено.

Замечание 1. Если $r \geqslant 1$, то для каждого элемента $\phi \in G_F^r(M)$ дифференциал $d\phi$ сохраняет длину каждого касательного вектора $v \in T_pF$, т.е. имеет место равенство $|d\phi_p(v)| = |v|$ при любом p.

Замечание 2. Если же $r = 0$, то каждый элемент φ из $G_F^r(M)$ является гомеоморфизмом многообразия M. Риманова метрика многообразия M индуцирует на каждом слое L_α риманову метрику, которая определяет на нем расстояние. В этом случае φ является изометрией между метрическими пространствами L_α и $\varphi(L_\alpha)$. Тогда по известной теореме φ является диффеоморфизмом L_α на $\varphi(L_\alpha)$ для каждого слоя L_α (см. [26]).

Множество $G_F(M)$ является подмножеством множества всех диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(M)$ многообразия M на себя. Множество $\mathrm{Diff}(M)$ является группой по отношению к суперпозиции и обратного отображения. Множество $G_F(M)$ является подгруппой группы $\mathrm{Diff}(M)$.

Известно, что если многообразие M компактно, то группа $\mathrm{Diff}(M)$ является топологической группой в компактно-открытой топологии (см. [9]). С другой стороны, группа $G(M)$ изометрий с компактно-открытой топологией всегда является топологической группой (см. [12]).

В настоящей работе приводятся результаты автора по исследованию группы $G_F(M)$ с компактно-открытой топологией и введенной ниже топологией, зависящей от слоения F и совпадающей с компактно-открытой топологией в случае, когда F является n-мерным слоением. Если коразмерность слоения равна n, то сходимость в этой топологии совпадает с поточечной сходимостью.

Пусть $\{K_\lambda\}$ — семейство всех компактных множеств, где каждое K_λ принадлежит какому-либо слою слоения F, и пусть $\{U_\beta\}$ — семейство всех открытых множеств на M. Рассмотрим для каждой пары $K_\lambda \subset L_\alpha$ и любого U_β совокупность всех отображений $f \in G_F(M)$, для которых $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. Эту совокупность отображений будем обозначать через

$$[K_\lambda, U_\beta] = \{f\colon M \to M \mid f(K_\lambda) \subset U_\beta\}.$$

Пусть $\sigma_1 = \{[K_\lambda, U_\beta]\}$. Рассмотрим семейство

$$\sigma_2 = \left\{\bigcap_{i=1}^{k}[K_{\lambda_i}, U_{\beta_i}]\right\} \cup \varnothing.$$

Покажем, что это семейство образует базу для некоторой топологии.

1. Возьмем произвольное $f \in G_F(M)$ и произвольный компакт $K \subset L_\alpha$. Известно, что образ $f(K)$ содержится в некотором открытом множестве U, т.е. $f(K) \subset U$. Значит,

$$f \in [K, U] \subset \bigcup_{\nu}\left(\bigcap_{i=1}^{k(\nu)}[K^{\nu}_{\lambda_i}, U^{\nu}_{\beta_i}]\right).$$

2. Пусть

$$B_1 = \bigcap_{i=1}^{k}[K_{\lambda_i}, U_{\beta_i}], \quad B_2 = \bigcap_{i=1}^{m}[K_{\mu_i}, U_{\delta_i}], \quad f \in B_1 \cap B_2;$$

тогда

$$B_1 \cap B_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{k}[K_{\lambda_i}, U_{\beta_i}]\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m}[K_{\mu_i}, U_{\delta_i}]\right) = \bigcap_{i=1}^{k+m}[K_{\lambda_i}, U_{\beta_i}] = B_3,$$

где $\lambda_{i+k} = \mu_i$, $\beta_{i+k} = \delta_i$. Отсюда следует, что $f \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Согласно известному критерию в $G_F(M)$ существует топология, для которой семейство σ_2 является базой, причем эта топология единственна. Эту топологию будем называть послойной компактно-открытой топологией, или F-компактно-открытой топологией.

Утверждение 1. *Множество $G_F(M)$ с F-компактно-открытой топологией является хаусдорфовым пространством.*

Доказательство. Возьмем произвольные $f_1 \in G_F(M)$ и $f_2 \in G_F(M)$, $f_1 \neq f_2$. Это означает, что существует точка $x \in M$, образы которой при f_1 и f_2 различны; иными словами, если обозначить значения $x_1 = f_1(x)$, $x_2 = f_2(x)$, то $x_1 \neq x_2$. Так как M — хаусдорфово пространство, существуют непересекающиеся окрестности U_1 и U_2, которые содержат соответственно точки $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$. Положим $C = \{x\}$. Тогда по определению F-компактно-открытой топологии $W(C, U_1)$ множества $W(C, U_2)$ открыты и не пересекаются, т.е. $W(C, U_1) \cap W(C, U_2) = \varnothing$. Действительно, если предположить, что они пересекаются, $W(C, U_1) \cap W(C, U_2) \neq \varnothing$, то найдется $f \in G_F(M)$, содержащееся в $f \in W(C, U_1) \cap W(C, U_2)$. Следовательно, $f(C) \subset U_1$, $f(C) \subset U_2$. Отсюда $f(C) \in U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Это противоречие доказывает хаусдорфовость пространства $G_F(M)$. $\square$

Группа диффеоморфизмов многообразия изучена многими математиками. В частности, в монографии В. А. Рохлина, Д. Б. Фукса [9] доказано, что если многообразие компактно или является евклидовым пространством, то группа диффеоморфизмов является топологической группой относительно компактно-открытой топологии.

Следующая теорема является обобщением приведенного выше результата.

Теорема 1. *Пусть M — гладкое связное многообразие конечной размерности. Тогда группа его гомеоморфизмов* $\mathrm{Homeo}(M)$ *является топологической группой относительно компактно-открытой топологии. В частности, подгруппы* $\mathrm{Diff}(M)$, $G_F(M)$ *также являются топологическими группами в этой топологии.*

Пусть M — гладкое связное риманово многообразие конечной размерности.

Определение 3. Изометрия $\phi\colon M \to M$ называется *изометрией слоеного многообразия* (M, F), если она является диффеоморфизмом слоеного многообразия (M, F).

Пример 4. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x,y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x,y). Пусть слоения задаются уравнениями $x^2 - y = \alpha = \mathrm{const}$. Тогда изометрия плоскости

$$\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \phi_\lambda(x,y) = (x, y+\lambda)$$

является изометрией слоеной плоскости $(\mathbb{R}^2, F)$ для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$. Оно отображает каждый слой L_α на слой $L_{\alpha-\lambda}$. Семейство изометрий ϕ_λ является потоком векторного поля Киллинга $X = \partial/\partial y$. Нетрудно проверить, что диффеоморфизм слоеной плоскости из примера 1 является изометрией слоеной плоскости, но не является потоком векторного поля.

Напомним, что векторное поле X на римановом многообразии (M,g) называется векторным полем Киллинга, если поток состоит из изометрий риманова многообразия (M,g), т.е. $L_X g = 0$, где g — риманова метрика, а $L_X g$ — производная Ли метрики по направлению X. Геометрия орбит семейства векторных полей Киллинга изучена в [6]. Если X — слоеное векторное поле Киллинга, то его поток состоит из изометрий слоеного многообразия (M,F).

Группа изометрий слоеного многообразия $G_F(M)$ в общем случае не является подгруппой группы изометрий многообразия $G(M)$, и наоборот, группа изометрий многообразия $G(M)$ тоже не является подгруппой группы изометрий слоеного многообразия $G_F(M)$. Но конечно, эти группы имеют непустое пересечение, т.е. $I \in G_F(M) \cap G(M) \neq \varnothing$. Следовательно, возникает вопрос о существовании отображений, которые входят в группу изометрий слоеного многообразия, но не являются изометрией многообразия.

Нами построено отображение, которое является элементом группы изометрий слоеного многообразия, но не является элементом группы изометрий.

Теорема 2. *Существует $f\colon M \to B$ субмерсия, для которой группа изометрий $G_F(M)$ слоеного многообразия (M,F) содержит отображения, не являющиеся элементами группы изометрий $G(M)$ риманова многообразия (M,g).*

Доказательство. Доказательство теоремы носит конструктивный характер: мы явно построим пример такой субмерсии. Рассмотрим на многообразии $M = \mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x, y слоение F, порожденное линиями уровня функции

$$f(x,y) = x^2 - y.$$

Построим изометрию слоеного многообразия $\varphi\colon M \to M$ по формуле

$$\varphi(x,y) = (x, y + \lambda(x,y)).$$

Если λ постоянна, то это отображение является изометрией плоскости и изометрией слоеного многообразия. Если $\lambda(x,y) = -f(x,y)$, то отображение φ не является изометрией плоскости, но является изометрией слоеного многообразия.

Действительно, если (x,y) лежит на параболе $x^2 - y = c$, то точка $(x, y + \lambda(x,y))$ лежит на параболе $x^2 - y = 2c$. Это отображение сохраняет длину кривых на параболе. Действительно, если точки (x_1,y_1), (x_2,y_2) лежат на параболе $x^2 - y = c$, то расстояние между ними на параболе равно

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Так как образы этих точек лежат на параболе $x^2 - y = 2c$, расстояние между образами $\varphi(x_1,y_1) = (x_1, y_1 + \lambda(x_1,y_1))$ и $\varphi(x_2,y_2) = (x_2, y_2 + \lambda(x_2,y_2))$ точек (x_1,y_1), (x_2,y_2) также равно этому же интегралу. Таким образом, отображение

$$\varphi(x,y) = (x, y + \lambda(x,y))$$

является элементом группы $G_F(M)$, но не является элементом группы изометрий $G(M)$ риманова многообразия (M,g).

Теперь приведем многомерный аналог этого примера. Функция

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n-1})^2 - x^n$$

является субмерсией на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, причем она не является метрической. Поверхности уровня порождают слоение F, состоящее из параболоидов.

Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n + \lambda),$$

где $\lambda(x, y, z)$ — некоторая функция. Как выше, если $\lambda = \mathrm{const}$, то отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является одновременно изометрией слоеного многообразия и евклидова пространства. Если же $\lambda = cf$ и $c \neq 1$, то отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является изометрией слоеного многообразия, но не является изометрией евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. □

Пример 5. Рассмотрим метрическую функцию

$$f(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \exp(A_1x^1 + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n),$$

заданную в евклидовом пространстве, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — постоянные. Поверхности уровня этой функции порождают слоение F, состоящее из параллельных плоскостей. Отображение

$$\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \bigl(\lambda x^1,\ \lambda x^2,\ \ldots,\ \lambda x^n\bigr),$$

где $\lambda \neq 0$ — постоянное, является диффеоморфизмом слоеного многообразия $(\mathbb{R}^n, F)$.

Введем такую систему декартовых координат $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, что поверхности уровня этой функции задаются уравнениями $y^n = \mathrm{const}$. Диффеоморфизм $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенный формулой

$$\varphi(y^1, y^2, \ldots, y^n) = (y^1, y^2, \ldots, y^{n-1}, \lambda y^n)$$

является изометрией слоеного многообразия $(\mathbb{R}^n, F)$, но он не является изометрией евклидова пространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арансон С. Х.* Топология векторных полей, слоений с особенностями и гомеоморфизмов с инвариантными слоениями на замкнутых поверхностях. — М., 1992.
2. *Гринес В. З., Левченко Ю. А., Починка О. В.* О топологической классификации структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов с двумерными базисными множествами// Мат. заметки. — 2015. — *97*, № 2. — С. 318-–320.
3. *Гринес В. З., Починка О. В.* Каскады Морса—Смейла на 3-многообразиях// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 1 (409). — С. 129–188.
4. *Лукацкий А. М.* Конечнопорожденность групп диффеоморфизмов// Усп. мат. наук. — 1978. — *33*, № 1 (199). — С. 219–220.
5. *Лукацкий А. М.* Исследование геодезического потока на бесконечномерной группе Ли с использованием оператора коприсоединенного действия// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2009. — *267*. — С. 204–213.
6. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Диффер. уравн. — 2014. — *50*, № 12. — С. 1582–1589.
7. *Нарманов А. Я., Скоробогатов Д.* Изометрические отображения слоений// Докл. АН РУз. — 2004. — *4*. — С. 12–16.
8. *Починка О. В.* Классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла на 3-многообразиях// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 6. — С. 34-–37.
9. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. — М.: Наука, 1977.
10. *Скоробогатов Д.* Задача об изометрии слоений коразмерности один// Узбек. мат. ж. — 2000. — *5–6*. — С. 55–62.
11. *Тамура И.* Топология слоений.. — М.: Мир, 1979.
12. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. — М.: Факторал Пресс, 2005.
13. *Antonelli P. L., Burghelea D., Kahn P. J.* The non-finite type of some diffeomorphism groups// Topol. — 1972. — *11*. — P. 1–49.
14. *Arnold V.* Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimenzion infnite et ses applications à l'hidrodynamique des uides parfaits// Ann. Inst. Fourier. — 1966. — *16*, № 1. — P. 319–361.

15. *Ehresmann C.* Structures feuilletées// in: Proceedings of the Fifth Canadian Mathematical Congress. University of Montreal, 1961. — University of Toronto Press, 1963. — P. 109–172.
16. *Haefliger A.* Varietes feuilletées// Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa. — 1962. — *16.* — P. 367–397.
17. *Lamoureux G.* Variétés feuilletées — Transversales fermées// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1970. — *270.* — P. 1659–1662.
18. *Langevin R., Rosenberg H.* Feuilletages de codimension 1// Topol. — 1977. — *16.* — P. 107–111.
19. *Lawson H.* Foliations// Bull. Am. Math. Soc. — 1974. — *80.* — P. 369–418.
20. *Molino P.* Riemannian Foliations. — Boston: Birkhäuser, 1988.
21. *Myers S. B., Steenrod N.* The group of isometries of Riemannian manifold// Ann. Math. — 1939. — *40.* — P. 400–416.
22. *Narmanov A. Ya., Sharipov A. S.* On the group of foliation isometries// Meth. Funct. Anal. Topol. — 2009. — *15.* — P. 195–200.
23. *Omori H.* On the group of diffeomorphisms on a compact manifold// Proc. Symp. Pure Math. — 1970. — *15.* — P. 167–183.
24. *Omori H.* Group of diffeomorphisms and thier subgroups// Trans. Am. Math. Soc. — 1973. — *79*, № 1. — P. 85–122.
25. *Reeb G.* Sur certains proprietes topoloiques des variétés feuilletées. — Paris: Hermann, 1952.
26. *Tondeur Ph.* Foliations on Riemannian Manifolds. — New York: Springer-Verlag, 1988.

Шарипов Анваржон Солиевич
Национальный Университет Узбекистана
E-mail: `asharipov@inbox.ru`