ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 193

Москва 2021

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 193

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ
ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXX»

ВОРОНЕЖ, 3–9 МАЯ 2019 г.

Часть 4

Москва 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 3–10
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-3-10

УДК 517.956

ТЕОРЕМА ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2021 г. **А. Д. БАЕВ, А. А. БАБАЙЦЕВ, В. Д. ХАРЧЕНКО**

Аннотация. Статья посвящена доказательству теоремы об ограниченности для одного класса псевдодифференциальных уравнений с вырождением. Рассматривается новый класс переменных символов, зависящих также от комплексного параметра. Псевдодифференциальные операторы построены по специальному интегральному преобразованию. Теорема об ограниченности таких операторов доказывается в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор с вырождением, теорема об ограниченности, весовое пространство Соболева.

BOUNDEDNESS THEOREM FOR ONE CLASS OF PSEUDODIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATION

© 2021 **A. D. BAEV, A. A. BABAITSEV, V. D. KHARCHENKO**

Abstract. In this paper, we prove a boundedness theorem for one class of pseudodifferential equations with degeneration. We consider a new class of variable symbols depending on a complex parameter. Pseudodifferential operators are constructed by a special integral transformation. The boundedness theorem for these operators is proved in special weighted Sobolev-type spaces.

Keywords and phrases: pseudodifferential operator with degeneration, boundedness theorem, weighted Sobolev space.

AMS Subject Classification: 35S05

1. Введение. Вырождающиеся дифференциальные уравнения используются при моделировании различных физических процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок. Такие уравнения используются при исследовании стационарных процессов конвекции — диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде процессов фильтрации двухфазных жидкостей, в том числе, процессов вытеснения нефти водой из пористой среды. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 14.Z50.31.0037) и Российского научного фонда (проект № 19.11.00197).

стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются также обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции — диффузии. Кроме того, известно, что нахождение решения краевой задачи для эллиптического уравнения эквивалентно минимизации некоторого функционала. В теории управления задача о минимуме некоторого функционала соответствует задаче об оптимальном управлении. Вырождающимся эллиптическим уравнениям соответствуют вырожденные или особые оптимальные управления.

Краевые задачи для вырождающихся уравнений относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Основная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [15]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [18]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С. Г. Михлина [17] и М. И. Вишика [12]. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при «степенном» характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [13]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [14], С. З. Левендорским [16], А. Д. Баевым, Р. А. Ковалевским, А. А. Бабайцевым [1–5, 7, 9, 10].

Настоящая работа посвящена доказательству теоремы об ограниченности одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим также от комплексного параметра.

В работе систематически используется специальное интегральное преобразование F_α, введенное в [1]. Преобразование F_α позволяет ввести в рассмотрение специальный класс весовых псевдодифференциальных операторов. Весовые псевдодифференциальные операторы с постоянным по y символом были изучены в [1], а в [6, 8, 11] были исследованы некоторые классы весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом.

В работе исследуются весовые псевдодифференциальные операторы с переменным по t символом, зависящим от комплексного параметра, из класса $S^{\sigma}_{\alpha,p}$, $p \in Q = \{p \in \mathbb{C}, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$. Доказывается теорема об ограниченности таких операторов в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in \mathbb{R}^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp\left[i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right] \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

которое определено первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_+)$. Здесь $C_0^\infty(\mathbb{R}^1_+)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит $\mathbb{R}^1_+$. Преобразование (1) и преобразование Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \exp(i\eta\tau) d\tau, \quad \eta \in \mathbb{R}^1$$

связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции

$$\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}.$$

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} = \sqrt{2\pi}\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^1_+)}. \tag{3}$$

Равенство (3) дает возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(\mathbb{R}^1)$ и $L_2(\mathbb{R}^1_+)$, а также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\big|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что для функции $u(t) \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}^1_+)$ справедливы равенства

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), \quad j = 1, 2, \dots,$$

где

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)} \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определим пространства $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$, $H_{s,\alpha,q}(\mathbb{R}^n_+)$ следующим образом.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций пространства $L_2(\mathbb{R}^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v, |p|\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2\Big)^s \Big|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,y)]\Big|^2 d\xi d\eta, \tag{4}$$

зависящая от комплексного параметра $p \in Q = \big\{p \in \mathbb{C},\ |\arg p| < \pi/2,\ |p| > 0\big\}$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(\mathbb{R}^n_+)$ ($s \geqslant 0, q > 1$) состоит из всех функций $v(x,y) \in H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v, |p|\|_{s,\alpha,q} = \left\{ \sum_{l=0}^{[s/q]} \Big\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_\alpha \Big[\big(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2\big)^{(s-ql)/2} F_\alpha F_{x\to\xi}\big[\partial^l_y v\big]\Big] \Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n_+)} \right\}^{1/2}, \tag{5}$$

зависящая от комплексного параметра. Здесь $\big[s/q\big]$ — целая часть числа s/q.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует такое число $\nu \in (0,1]$, что

$$\big|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)\big| \leqslant c < \infty, \quad t \in [0, +\infty).$$

Кроме того, $\alpha(y) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где

$$N \geqslant \max_{0\leqslant p_1\leqslant l} \left\{ 2p_1 + \frac{l - p_1 + 3/2}{\nu} + 1,\ \sigma + 1,\ \sigma + \frac{l}{2} \right\}, \quad l = 1, 2, \dots,$$

σ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\dots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$G^{(\sigma)}(p, t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[g(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{6}$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $g(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $G^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,y})$ принадлежит классу символов $S^{\sigma,p}_{\alpha,\rho}(\Omega)$, где $\Omega\subset\bar{\mathbb{R}}^1_+$, $\sigma\in\mathbb{R}^1$, $p\in Q=\{p\in\mathbb{C},\ |\arg p|<\pi/2,\ |p|>0\}$, если функция $g(p,t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t\in\Omega$ и по переменной $\eta\in\mathbb{R}^1$, причем при всех $j=0,1,2,\ldots$, $l=0,1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$\Big|(\alpha(t)\partial_t)^j\partial^l_\eta\lambda(p,t,\xi,\eta)\Big|\leqslant c_{jl}\big(|p|^2+|\xi|+|\eta|\big)^{\sigma-\rho l} \tag{7}$$

с константами $c_{jl}>0$, не зависящими от $p\in Q$, $\xi\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\eta\in\mathbb{R}^1$, $\rho\in(0;1]$, $t\in K$, где $K\subset\Omega$ — произвольный отрезок. Здесь σ — действительное число.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $g(p,t,\xi,\eta)\in S^{m,p}_{\alpha,\rho}(\Omega)$, m — действительное число, $p\in Q=\{p\in\mathbb{C},\ |\arg p|<\pi/2,\ |p|>0\}$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $G(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m,\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ в $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$.*

2. Схема доказательства теоремы 1. Заметим, что

$$\big\|G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^1_+)}=\int\limits_0^\infty\Big|F^{-1}_\alpha\big[g(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[u]\big]\Big|^2dt=$$
$$=\int\limits_0^\infty\left|\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}\Big[g\big(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta\big)F_{\tau\to\eta}\big[u_\alpha(\tau)\big]\Big]\right|^2\Bigg|_{\tau=\varphi(t)}dt.$$

Сделав замену переменной $t=\varphi^{-1}(\tau)$, получим $dt=(\varphi^{-1}(\tau))'_\tau d\tau=-\alpha(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}d\tau$. Таким образом, получаем равенство

$$\big\|G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^1_+)}=\int\limits_{-\infty}^\infty\Big|F^{-1}_{\eta\to\tau}\Big[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}\big[u_\alpha(\tau)\big]\Big]\Big|^2d\tau=$$
$$=\Big\|F^{-1}_{\eta\to\tau}\Big[g\big(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta\big)F_{\tau\to\eta}\big[u_\alpha(\tau)\big]\Big]\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^1)}=\Big\|G\big(p,\tau,\xi,D_\tau\big)u_\alpha(\tau)\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^1)}. \tag{8}$$

Следовательно, норма оператора $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1_+)$ равна норме оператора $G(p,\tau,\xi,D_\tau)$, определенного в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $g(p,t,\xi,\eta)\in S^{0,p}_{\alpha,\rho}(\Omega)$, $\Omega\subset\bar{\mathbb{R}}^1_+$, $p\in Q=\{p\in\mathbb{C},\ |\arg p|<\pi/2,\ |p|>0\}$. Тогда существует такая константа $c>0$, что для любой функции $u(t)\in C^\infty_0(\mathbb{R}^1_+)$ справедлива оценка*

$$\big\|G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u\big\|_{L_2(\mathbb{R}^1_+)}\leqslant c\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^1_+)} \tag{9}$$

с константой $c>0$, не зависящей от параметра p.

Доказательство. Докажем вначале теорему 2 при следующем дополнительном предположении. Будем считать, что $g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)=0$ при $|\tau-a|>A$, где $A>0$ — некоторое число, $a\in\mathbb{R}^1$.

Рассмотрим равенство

$$f(\tau)=\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-i\tau\eta}p(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]d\eta.$$

Перейдя в этом равенстве к преобразованию Фурье, получим

$$\tilde{f}(z)=\int\limits_{-\infty}^\infty\tilde{g}_1(p,z-\eta,\xi,\eta)\tilde{u}_\alpha(\eta)d\eta, \tag{10}$$

где

$$g_1(p,\tau,\xi,\eta)=g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta),\quad \tilde g_1(p,z,\xi,\eta)=F_{\tau\to z}[g_1(p,\tau,\xi,\eta)],\quad \tilde u_\alpha(\eta)=F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)].$$

С помощью интегрирования по частям в интеграле

$$\tilde g_1(p,z,\xi,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z} g_1(p,\tau,\xi,\eta)d\tau$$

получим, что с некоторыми константами $c>0$ выполняются неравенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\tilde g_1(p,z-\eta,\xi,\eta)|\,d\eta\leqslant c\int\frac{d\eta}{(|p|+|\eta|)^2},\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}|\tilde g_1(p,z-\eta,\xi,\eta)|\,dz\leqslant c\int\frac{dz}{(|p|+|z|)^2}.$$

Отсюда и из (10) выводим неравенство

$$\|\tilde f(z)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}\leqslant c\|u_\alpha(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}. \tag{11}$$

Заметив, что

$$\|u_\alpha(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}=\|u(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^1_+)}, \tag{12}$$

получаем из (11) утверждение теоремы 2 при дополнительном предположении.

Докажем теперь теорему 2 в общем случае. Выберем некоторое $A>0$ и установим, что для любого $a\in\mathbb{R}^1$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{|\tau-a|\leqslant A}\bigl|G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)\bigr|^2d\tau\leqslant$$

$$\leqslant c\left\{\int\limits_{|\tau-a|\leqslant 3A}|u_\alpha(\tau)|^2\,d\tau+\int\limits_{|\tau-a|\leqslant A}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}r(p,\tau-y)|u(y)|dy\right)^2d\tau\right\}, \tag{13}$$

где $r(p,z)=(|p|+|z|)^{-2}$. Константа c не зависит от выбора функции $u(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_+)$ и $a\in\mathbb{R}^1$. Пусть $\varphi(\tau)$ — такая основная функция с носителем в шаре $|\tau|\leqslant 3A$, что $\varphi(\tau)=1$ в шаре $|\tau|\leqslant 2A$, причем $|\varphi(\tau)|\leqslant 1$. Тогда для оператора $\varphi(\tau-a)P(\tau,\xi,D_\tau)$ символ равен нулю при $|\tau-a|>3A$ и мы можем воспользоваться доказанной только что оценкой:

$$\bigl\|\varphi(\tau-a)G(p,\tau,\xi,D_\tau)v_\alpha(\tau)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}\leqslant c\|v_\alpha(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}=c\|v(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^1_+)}, \tag{14}$$

причем из предыдущих рассуждений видно, что константа $c>0$ не зависит от $v(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_+)$ и $a\in\mathbb{R}^1$.

Обозначим $f(p,\tau)=G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)$ и заметим, что при $|\tau-a|\leqslant 2A$ справедливо равенство

$$f(p,\tau)=\varphi(\tau-a)G(p,\tau,\xi,D_\tau)\bigl[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)\bigr]+G(p,\tau,\xi,D_\tau)\bigl[(1-\varphi(\tau-a))u_\alpha(\tau)\bigr].$$

Воспользовавшись неравенством (14), получим оценку

$$\Bigl\|\varphi(\tau-a)G(p,\tau,\xi,D_\tau)\bigl[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)\bigr]\Bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}\leqslant c\bigl\|\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^1)};$$

следовательно,

$$\int\limits_{|\tau-a|\leqslant A}\Bigl|g(p,\tau,\xi,D_\tau)\bigl[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)\bigr]\Bigr|^2d\tau\leqslant c\int\limits_{|\tau-a|\leqslant 3A}|u_\alpha(\tau)|^2d\tau. \tag{15}$$

Так как $1-\varphi(\tau-a)=0$ в шаре $|\tau-a|\leqslant 2A$, то

$$G(p,\tau,\xi,D_\tau)\bigl[(1-\varphi(\tau-a))u_\alpha(\tau)\bigr]=\int\limits_{|y-a|>2A}k(p,\tau,\xi,\tau-y)(1-\varphi(y-a))u_\alpha(y)dy,$$

где $k(p,\tau,\xi,z)$ — ядро псевдодифференциального оператора $G(p,\tau,\xi,D_\tau)$.

Заметим, что

$$\left|\partial_\tau^i \partial_\eta^l g(p, \varphi^{-1}(\tau), \xi, \eta)\right| \leqslant c_{il}\big(|p| + |\xi| + |\eta|\big)^{m-\rho l}.$$

По определению ядра имеем

$$k(p, \tau, \xi, z) = F^{-1}_{\eta\to z}\big[g(p, \varphi^{-1}(\tau), \xi, \eta)\big].$$

Так как преобразование Фурье любой абсолютно интегрируемой функции является непрерывной и ограниченной функцией, то можно утверждать, что функция $z^q \partial_\tau^i \partial_z^j k(p, \tau, \xi, z)$ для любых i, j при $q > m + j + 1$ будет непрерывной и ограниченной функцией при всех $\tau \in \mathbb{R}^1$, $z \in \mathbb{R}^1$ и

$$|z|^q |\partial_\tau^i \partial_z^j k(p, \tau, \xi, z)| \leqslant c_{ij} < \infty,$$

т.е. при всех $z \neq 0$ справедливо неравенство

$$\left|\partial_\tau^i \partial_z^j k(p, \tau, \xi, z)\right| \leqslant c_{ij} |z|^{-q}. \tag{16}$$

Из (16) получим, что

$$|k(p, \tau, \xi, \tau - y)| \leqslant c(|p| + |\tau - y|)^{-2} \quad \text{при } |\tau - y| \geqslant A.$$

Отсюда при $|\tau - a| \geqslant A$ получаем, что

$$\Big|G\big(p, \tau, \xi, D_\tau\big)\big[(1 - \varphi(\tau - a))u_\alpha(\tau)\big]\Big| \leqslant c \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(|p| + |\tau - y|\big)^{-2} |u(y)|dy. \tag{17}$$

Неравенство (13) вытекает теперь из неравенств (15) и (17).

Чтобы закончить доказательство теоремы, достаточно в неравенстве (13) выбрать $A = 1$ и просуммировать неравенства (13) по всем a, принадлежащим множеству целых чисел. Так как отрезки $|\tau - a| \leqslant 1$ покрывают все $\mathbb{R}^1$, причем каждая точка $\tau \in \mathbb{R}^1$ принадлежит не более чем двум таким отрезкам, то получим, что с некоторой константой выполняется неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|G(p, \tau, \xi, D_\tau)u_\alpha(\tau)\big|^2 d\tau \leqslant c\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u_\alpha(\tau)|^2 d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (|p| + |\tau - y|)^{-2} |u_\alpha(y)|dy\right)^2 d\tau\right\}.$$

Остается заметить, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(|p| + |\tau - y|\big)^{-2} |u_\alpha(y)|dy\right)^2 d\tau \leqslant c\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u_\alpha(\tau)|^2 d\tau = c\int\limits_{0}^{\infty} |u(t)|^2 dt. \qquad \square$$

Теорема 3. *Пусть* $g(p, t, \xi, \eta) \in S^m_{\alpha,p}(\Omega)$ $(m \in \mathbb{R})$, $\Omega \subset \bar{\mathbb{R}}^1_+$, $p \in Q = \big\{p \in \mathbb{C},\ |\arg p| < \pi/2,\ |p| > 0\big\}$. *Тогда весовой псевдодифференциальный оператор* $G(p, t, \xi, D_{\alpha,t})$ *для любого действительного* s *есть ограниченный оператор из* $H_{s+m,\alpha}(\mathbb{R}^1_+)$ *в* $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^1_+)$.

Доказательство. Из (8) вытекает, что достаточно доказать, что оператор $G(p, \tau, \xi, D_\tau)$, определенный в (11), является ограниченным оператором из $H_{s+m}(\mathbb{R}^1)$ в $H_s(\mathbb{R}^1)$.

Обозначим через $\Lambda^s(p, \xi, D_\tau)$ псевдодифференциальный оператор вида

$$\Lambda^s(p, \xi, D_\tau)u_\alpha(\tau) = F^{-1}_{\eta\to\tau}\Big[\big(|p| + |\xi| + |\eta|\big)^s F_{\tau\to\eta}\big[u_\alpha(\tau)\big]\Big]. \tag{18}$$

Заметим, что для функции $u(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_+)$ справедливо равенство

$$\big\|G(p, \tau, \xi, D_\tau)u_\alpha(\tau)\big\|_s = \Big\|\Lambda^s(p, \xi, D_\tau)G(p, \tau, \xi, D_\tau)\Lambda^{-m-s}(p, \xi, D_\tau)v(\tau)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}, \tag{19}$$

где $v(\tau) = \Lambda^{s+m}(p, \xi, D_\tau)u_\alpha(\tau)$, $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве $H_s(\mathbb{R}^1)$.

Заметим, что $\Lambda^s(p,\xi,D_\tau)G(p,\tau,\xi,D_\tau)\Lambda^{-m-s}(p,\xi,D_\tau)$ — псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S^{0,p}_\rho$. Таким образом, из (19) в силу теоремы 2 получим

$$\begin{aligned}\big\|G(p,\tau,\xi,D_{\alpha,t})u\big\|_{s,\alpha} &= \big\|G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)\big\|_s = \\ &= \Big\|\Lambda^s(p,\xi,D_\tau)G(p,\tau,\xi,D_\tau)\Lambda^{-m-s}(p,\xi,D_\tau)v(\tau)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} \leqslant \\ &\leqslant c\|v(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} \leqslant c\|u(t),|p|\|_{s+m,\alpha}.\end{aligned}$$

Теорема 3 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баев А. Д.* Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы// Докл. АН СССР. — 1982. — *265*, № 5. — С. 1044–1046.
2. *Баев А. Д.* Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка// Докл. РАН. — 2008. — *422*, № 6. — С. 727–728.
3. *Баев А. Д., Бахтина Ж. И., Бунеев С. С., Ковалевский Р. А., Бабайцев А. А.* О существовании решений граничных задач в полупространстве для некоторых классов вырождающихся псевдодифференциальных уравнений// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — *2*. — С. 64–76.
4. *Баев А. Д., Бахтина Ж. И., Бунеев С. С., Ковалевский Р. А., Бабайцев А. А.* Об априорных оценках решений граничных задач для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — *2*. — С. 77–92.
5. *Баев А. Д., Бахтина Ж. И., Бунеев С. С., Ковалевский Р. А., Бабайцев А. А., Леженина И. Ф., Глушко А. В.* Об априорных оценках решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — *3*. — С. 64–76.
6. *Баев А. Д., Кобылинский П. А.* О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов// Докл. РАН. — 2015. — *460*, № 2. — С. 133–135.
7. *Баев А. Д., Ковалевский Р. А., Бабайцев А. А., Харченко В. Д.* О существовании решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — *4*. — С. 51–66.
8. *Баев А. Д., Ковалевский Р. А., Кобылинский П. А.* О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 4. — С. 387–390.
9. *Баев А. Д., Найдюк Ф. О., Бабайцев А. А., Харченко В. Д., Леженина И. Ф., Плетнева О. К.* О некоторых начально-краевых задачах для вырождающихся параболических уравнений// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2019. — *1*. — С. 59–69.
10. *Баев А. Д., Панков В. В., Харченко В. Д.* Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — *4*. — С. 161–171.
11. *Баев А. Д., Работинская Н. И.* О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 1. — С. 7–10.
12. *Вишик М. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области// Мат. сб. — 1954. — *35 (77)*, № 33. — С. 513–568.
13. *Вишик М. И., Грушин В. В.* Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 4. — С. 29–56.
14. *Глушко В. П.* Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка// в кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. Тр. семин. акад. С. Л. Соболева. — Новосибирск, 1978. — С. 49–68.
15. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области// Докл. АН СССР. — 1951. — *77*, № 2. — С. 181–183.
16. *Левендорский С. З.* Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе// Мат. сб. — 1980. — *111 (153)*, № 4. — С. 483–501.

17. *Михлин С. Г.* Вырождающиеся эллиптические уравнения// Вестн. Ленинград. ун-та. — 1954. — *8.* — С. 19–48.
18. *Олейник О. А.* Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области// Докл. АН СССР. — 1952. — *87*, № 6. — С. 885–887.

Баев Александр Дмитриевич
Воронежский государственный университет
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Бабайцев Андрей Александрович
Воронежский государственный университет
E-mail: 259608@mail.ru

Харченко Виктория Дмитриевна
Воронежский государственный университет
E-mail: dmitrieva9696@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 11–16
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-11-16

УДК 517.925

ГОЛОМОРФНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

© 2021 г. **М. И. БЕСОВА**

Аннотация. Метод голоморфной регуляризации сингулярных возмущений применен для изучения краевой задачи для уравнения второго порядка. Доказано, что после точного описания сингулярностей регулярная часть решения аналитически зависит от параметра.

Ключевые слова: тихоновская система, голоморфная регуляризация, аналитический интеграл, псевдоголоморфное решение.

HOLOMORPHIC REGULARIZATION IN THE THEORY OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

© 2021 **M. I. BESOVA**

Abstract. The method of holomorphic regularization of singular perturbations is applied to a boundary-value problem for a second-order equation. We prove that after an precise description of singularities, the regular part of the solution depends analytically on the parameter.

Keywords and phrases: Tikhonov system, holomorphic regularization, analytic integral, pseudoholomorphic solution.

AMS Subject Classification: 34B15

1. Введение. В настоящее время для решения краевых сингулярно возмущенных задач наиболее широко используется метод погранфункций Васильевой—Бутузова—Нефедова (см. [1]). Для доказательства существования решения на всем промежутке задания уравнения в нем применяется метод дифференциальных неравенств, в основе которого заложены идеи Чаплыгина и Нагумо [2, 9] о верхних и нижних решениях. Для построения решения краевой задачи используется «метод стрельбы», законность применения которого фактически означает существование решения соответствующей начальной задачи на всем промежутке. В данной работе изложен подход, связанный с голоморфной регуляризацией сингулярно возмущенных задач [3,4]. Этот подход является продолжением идей С. А. Ломова о существовании, при определенных условиях, решений, представимых сходящимися в обычном смысле рядами по степеням малого параметра [6–8]. Такие решения называются псевдоаналитическими (псевдоголоморфными) и ранее строились преимущественно для начальных задач, причем локально [3–5], поэтому в работе применяется алгоритм псевдоголоморфного продолжения решений.

2. Метод голоморфной регуляризации и аналитические по параметру интегралы. Исследуем на отрезке $[0,1]$ следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered}\varepsilon y'' = f(x,y,y'), \quad 0<x<1,\\ a_1y(0)-a_2y'(0)=a, \quad b_1y(1)+b_2y'(1)=b,\\ a_2\geqslant 0, \quad b_2\geqslant 0, \quad a_1^2+a_2^2>0, \quad b_1^2+b_2^2>0\end{gathered} \tag{1}$$

с малым положительным параметром ε. Сведем задачу (1) к краевой задаче для тихоновской системы [1, 5] с одной быстрой и одной медленной переменной:

$$\begin{cases} y' = v, \\ \varepsilon v' = f(x, y, v), \end{cases} \tag{2}$$
$$a_1 y(0) - a_2 v(0) = a, b_1 y(1) + b_2 v(1) = b.$$

В соответствии с методом голоморфной регуляризации, перейдем от нелинейной системы к линейному уравнению ее интегралов [3, 5]:

$$\varepsilon LU + f(x, y, v)U_v = 0, \tag{3}$$

где $L = \partial_x + v\partial_y$ — дифференциальный оператор первого порядка в частных производных. Будем считать оператор L подчиненным оператору $f\partial_v$, и в этом случае решение уравнения (3) ищем в виде регулярного ряда по степеням малого параметра:

$$U(x, y, v, \varepsilon) = U_0(x, y, v) + \varepsilon U_1(x, y, v) + \ldots + \varepsilon^n U_n(x, y, v) + \ldots \tag{4}$$

Применив метод неопределенных коэффициентов, получаем следующую серию задач:

$$\begin{aligned} &(f\partial_v)U_0 = 0 \\ &(f\partial_v)U_1 = -LU_0 \\ &(f\partial_v)U_2 = -LU_1 \\ &\qquad\ldots \\ &(f\partial_v)U_n = -LU_{n-1} \\ &\qquad\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Зададим для функции $f(x, y, v)$ условия (α): $f(x, y, v)$ аналитична на ограниченной замкнутой области $\overline{\Omega}_{xyv} \subset \mathbb{R}^3$, $f(x, y, v) \neq 0\ \forall (x, y, v) \in \Omega_{xyv}$ и обращается в нуль на ее границе Λ. Предположим также, что отрезок $[0, 1]$ принадлежит $\overline{\Omega}_{xyv}$ и ее проекции $\overline{\omega_{xy}}$ на пространство $\mathbb{R}^2$. В качестве решения первого уравнения серии (5) рассмотрим произвольную функцию $\psi(x, y)$, аналитическую на замкнутой области $\overline{\omega_{xy}}$. Обозначим через $\widetilde{v}$ значение быстрой переменной w на левом конце отрезка задания уравнения и потребуем, чтобы $U_n(x, y, \widetilde{v}) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ В результате имеем:

$$\begin{aligned}
&U_1(x, y, v) = -\int\limits_{\widetilde{v}}^{v} \frac{L_1\psi dv_1}{f(x, y, v_1)}, \quad L_1 = \partial_x + v_1\partial_y; \\
&U_2(x, y, v) = \int\limits_{\widetilde{v}}^{w} \left[L_1 \int\limits_{\widetilde{v}}^{v_1} \frac{L_2\psi dv_2}{f(x, y, v_2)} \right] \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)}, \quad L_2 = \partial_x + v_2\partial_y; \\
&U_3(x, y, v) = -\int\limits_{\widetilde{v}}^{v} \left[L_1 \int\limits_{\widetilde{v}}^{v_1} \left[L_2 \int\limits_{\widetilde{v}}^{v_2} \frac{L_3\psi dv_3}{f(x, y, v_3)} \right] \frac{dv_2}{f(x, y, v_2)} \right] \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)}, \quad L_3 = \partial_x + v_3\partial_y; \\
&\qquad\ldots
\end{aligned} \tag{6}$$

Перепишем формулы (6), введя следующие обозначения:

$$I_k g = \int\limits_{\widetilde{v}}^{v_k} \frac{g(x, y, v_{k+1})dv_{k+1}}{f(x, y, v_{k+1})}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где положим $v_0 = v$. В этих обозначениях

$$U(x, y, v, \widetilde{v}, \varepsilon) = \psi - \varepsilon I_0(L_1\psi) + \varepsilon^2 I_0(L_1 I_1(L_2\psi)) - \varepsilon^3 I_0(L_1 I_1(L_2 I_2(L_3\psi))) + \ldots \tag{7}$$

Сходимость этого степенного ряда доказана в работе [5]. Таким образом, установлено существование в области Ω_{xyw} аналитических по малому параметру интегралов системы (2). В данной работе будет рассмотрен случай, когда $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = a = b = 0$ (задача Дирихле). Пусть $v = F(x,y)$ является корнем уравнения $f(x,y,v) = 0$, аналитическим в области $\overline{\omega_{xy}}$, а $\overline{y}(x)$ — решением задачи Коши

$$y' = F(x,y), \quad y(0) = 0,$$

которое аналитично на отрезке $[0,1]$. Положив $\psi(x,y)$ равной $\varphi(x)$, аналитической на отрезке $[0,1]$ и такой, что $\varphi(0) = 0$, а затем равной $y - \overline{y}(x)$, построим два независимых интеграла:

$$\begin{aligned} &U^{[1]}(x,y,v,\widetilde{v},\varepsilon) = \varphi(x) - \varepsilon(I_0\varphi') + \varepsilon^2 I_0(L_1(I_1\varphi')) - \varepsilon^3 I_0(L_1 I_1(L_2(I_2\varphi'))) + \ldots \\ &U^{[2]}(x,y,v,\widetilde{v},\varepsilon) = y - \overline{y}(x) - \varepsilon I_0(v_1 - \overline{y}') + \varepsilon^2 I_0(L_1 I_1(v_2 - \overline{y}')) - \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

3. Псевдоголоморфные решения и их продолжения.

Определение 1. Решение $y(x,\varepsilon)$ краевой задачи (1) называется псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$, если существует функция $Y(x,\eta,\varepsilon)$, аналитическая по третьей переменной в точке $\varepsilon = 0$ при каждом $x \in [0,1]$ и каждом η из некоторого неограниченного множества T, и такая, что для некоторой функции $\varphi(x)$ выполняется равенство для

$$y(x,\varepsilon) = Y(x,\varphi(x)/\varepsilon,\varepsilon), \quad \forall x \in [0,1],$$

когда ε принадлежит достаточно малой окрестности значения $\varepsilon = 0$.

Сформулируем достаточные условия существования псевдоголоморфного решения у краевой задачи.

Теорема 1. *Пусть аналитическая на отрезке* $[0,1]$ *функция* $\varphi(x)$ *такова, что* $\varphi(0) = 0$, *и уравнение*

$$\varphi'(x) \int\limits_{\widetilde{v}}^{v} \frac{dv_1}{f(x,\overline{y}(x),v_1)} = \varphi(x)/\varepsilon$$

имеет решение вида

$$v = V_0(x,\Psi(\varphi(x)/\varepsilon),\widetilde{v}),$$

в котором $q = \Psi(\eta)$ — *целая функция с асимптотическим значением, равным* p_0, *и функция* $V_0(x,q,\widetilde{v})$ *является аналитической на параллелепипеде* $\Pi_0 = [0,1] \times Q \times G$, *где* Q *и* G — *отрезки, причем* Q *содержит точки* $\Psi(0)$ *и* p_0. *Тогда решение* $y(x,\varepsilon)$ *краевой задачи* (1) *является псевдоголоморфным в точке* $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Вначале необходимо доказать, что при любом $\widetilde{v} \in G$ на всем отрезке $[0,1]$ существует решение задачи Коши

$$\varepsilon y'' = f(x,y,y'); \quad y(0,\varepsilon) = 0, \quad y'(0,\varepsilon) = \widetilde{v} \tag{9}$$

при достаточно малом положительном ε. Сведем задачу (9) к начальной задаче для системы

$$\begin{cases} y' = v, \\ \varepsilon v' = f(x,y,v); \\ y(0,\varepsilon) = 0, \\ v(0,\varepsilon) = \widetilde{v}, \end{cases} \tag{10}$$

и запишем первые интегралы этой системы:

$$\begin{cases} \widetilde{U}^{[1]}(x,y,v,\widetilde{v},\varepsilon) = \varphi(x)/\varepsilon \\ y = \overline{y}(x) + \varepsilon\widetilde{U}^{[2]}(x,y,v,\widetilde{v},\varepsilon), \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\widetilde{U}^{[1]} = I_0\varphi' - \varepsilon I_0(L_1(I_1\varphi')) + \varepsilon^2 I_0(L_1 I_1(L_2(I_2\varphi'))) - \ldots;$$
$$\widetilde{U}^{[2]} = I_0(v_1 - \overline{y}') - \varepsilon I_0(L_1 I_1(v_2 - \overline{y}')) + \ldots$$

Вычислим значения функции Ψ от левой и правой частей первого из уравнений системы (11):

$$\Psi(\widetilde{U}^{[1]}(x,y,v,\widetilde{v},\varepsilon)) = \Psi(\varphi(x)/\varepsilon).$$

Обозначим правую часть через q и в левой части выделим главный член. В итоге имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \Psi(I_0\varphi') + \varepsilon\Phi(x,y,v,\widetilde{v},\varepsilon) = q, \\ y = \overline{y}(x) + \varepsilon\widetilde{U}^{[2]}(x,y,v,\widetilde{v},\varepsilon). \end{cases} \tag{12}$$

Возьмем $p > p_0$ очень близким к p_0, предположим, что $p_0 < \Psi(0)$ и построим параллелепипед $\Pi = [0,1] \times [p,\Psi(0)] \times G$. Поскольку $W_0(x,q,\widetilde{v})$ аналитична на замкнутом параллелепипеде Π_0, то оценка ее модуля не зависит от p. Нетрудно видеть, что для системы (12) выполняются все условия теоремы о неявной функции и при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{cases} v = V_0(x,q,\widetilde{v}), \\ y = \overline{y}(x). \end{cases}$$

Отсюда можно утверждать, что в некой окрестности $\sigma_{xq\widetilde{w}}$ каждой точки $(x,q,\widetilde{v}) \in \Pi$ существует решение

$$\begin{cases} v = V(x,q,\widetilde{v},\varepsilon), \\ y = Y(x,q,\widetilde{v},\varepsilon), \end{cases} \tag{13}$$

системы (12), аналитическое в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$. Выберем из покрытия $\{\sigma_{xq\widetilde{v}}\}$ параллелепипеда Π конечное подпокрытие, тогда функции (13) будут аналитическими в наименьшей окрестности $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, соответствующей этому подпокрытию. Обозначим через $\widetilde{\Pi}$ прямоугольник, являющийся проекцией Π на плоскость переменных (x,q). Если величина параметра ε в уравнении (1) удовлетворяет неравенству $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, и кривая Γ, описываемая уравнением $q = \Psi(\varphi(x)/\varepsilon)$, целиком принадлежит $\widetilde{\Pi}$, то решение $(y(x,\varepsilon), v(x,\varepsilon))$ системы (10) представимо в виде рядов:

$$\begin{cases} y(x,\varepsilon) = \overline{y}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n Y_n(x,\Psi(\varphi(x)/\varepsilon),\widetilde{v}), \\ w(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x,\Psi(\varphi(x)/\varepsilon),\widetilde{v}), \end{cases} \tag{14}$$

равномерно сходящихся на отрезке $[0,1]$. В случае, если прямоугольнику $\widetilde{\Pi}$ принадлежит только часть кривой Γ, соответствующая $x \in [0,x_1]$ $(0 < x_1 < 1)$, то ряды (14) сходятся равномерно лишь на $[0,x_1]$. Обозначим это решение через $(y^{[0]}(x,\varepsilon), v^{[0]}(x,\varepsilon))$. В этом случае его нужно продолжить вправо, для чего применим алгоритм псевдоголоморфного продолжения. Решим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{dy^{[1]}}{dx} = v^{[1]}, \\ \varepsilon\frac{dv^{[1]}}{dx} = f(x,y^{[1]},v^{[1]}), \\ y^{[1]}(x_1,\varepsilon) = y^{[0]}(x_1,\varepsilon), \\ v^{[1]}(x_1,\varepsilon) = v^{[0]}(x_1,\varepsilon)). \end{cases} \tag{15}$$

Запишем систему, аналогичную системе (11) первых интегралов:

$$\begin{cases} \widetilde{U}^{[1]}(x,y^{[1]},v^{[1]},v(x_1,\varepsilon),\varepsilon) = (\varphi(x) - \varphi(x_1))/\varepsilon, \\ y = \overline{y}(x) + \varepsilon\widetilde{U}^{[2]}(x,y^{[1]},v^{[1]},v(x_1,\varepsilon),\varepsilon). \end{cases} \tag{16}$$

Она задает неявно решение $(y^{[1]}(x,\varepsilon), v^{[1]}(x,\varepsilon))$ системы (16). В итоге решение $(y^{[0]}(x,\varepsilon), v^{[0]}(x,\varepsilon))$ продолжится на некоторый отрезок $[x_1,x_2]$, причем псевдоголоморфным образом, и т. д. Не ограничивая общности, будем предполагать, что регуляризирующая функция $\varphi(x)$, описывающая погранслой, строго монотонно убывает на промежутке $[0,1]$ (например, в методе погранфункций $\varphi(x) = -x$), а функция Ψ, напротив, на интервале $(p_0,\Psi(0))$ строго возрастает (в большинстве случаев это экспонента) [1,7]. При продолжении с помощью систем, аналогичных (16), получим цепочку следующих равенств:

$$\frac{\varphi(x_1)}{\varepsilon}=\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{\varepsilon}=\dots=\frac{\varphi(x_m)-\varphi(x_{m-1})}{\varepsilon}=\dots,\quad m=2,3,\dots,j.$$

По формуле Лагранжа $\varphi'(\widetilde{x_m})(x_m-x_{m-1})=\varphi(x_1)$, где $\widetilde{x}_m\in(x_{m-1},x_m)$, $m=\overline{2,j}$. Так как $\varphi(x)$ голоморфна на отрезке $[0,1]$, то $|\varphi'(x)|\leqslant l\ \forall x\in[0,1]$ для некоторой константы l, а значит, $x_m-x_{m-1}\geqslant|\varphi(x_1)|/l$ при каждом $m\in\{1,2,3,\dots,j\}$. Таким образом, точки $x=1$ можно достичь за конечное число шагов. В итоге решение $y^{[0]}(x,\varepsilon)$ будет продолжено на весь отрезок, а под решением начальной задачи (10) будем понимать совокупность элементов $(y^{[0]}(x,\varepsilon),y^{[1]}(x,\varepsilon),\dots,y^{[j]}(x,\varepsilon))$.

Поскольку каждый элемент зависит от $\widetilde{v}$, то

$$y^{[j]}(x,\varepsilon)=T^{[j]}(x,(\varphi(x)-\varphi(x_{j-1}))/\varepsilon),\widetilde{v}),$$

откуда вытекает уравнение для определения $\widetilde{v}$:

$$T^{[j]}(1,(\varphi(1)-\varphi(x_{j-1}))/\varepsilon),\widetilde{v})=0.$$

Одно из найденных значений подставим в формулы для $y^{[m]}(x,\varepsilon)(\overline{m}=\overline{1,j})$ и получим псевдоголоморфное решение $y(x,\varepsilon)$ краевой задачи (1). Теорема доказана. □

Приведем пример нахождения $y^{[0]}(x,\varepsilon)$ первого порядка, удовлетворяющего краевым условиям. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon y''=x^2+y^2/4+(y')^2-4,\quad x\in[0,1],\quad y(0,\varepsilon)=y(1,\varepsilon)=0.$$

Здесь предельная задача

$$y'=\sqrt{4-x^2-y^2/4},\quad x\in[0,1],\quad y(0)=0.$$

Докажем существование решения этой задачи на всем отрезке с помощью теоремы Чаплыгина [2]. Поскольку $0\leqslant y'(x)\leqslant 2$, то $0\leqslant y(x)\leqslant 2$. Далее, $\widetilde{f}(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2/4}$ аналитична вместе со своей частной производной по y на прямоугольнике $[0,1]\times[0,2]$, и легко построить нижнее и верхнее решения: $\overline{y}_{\text{н}}=2\sqrt{3}sin(x/2)$, $\overline{y}_{\text{в}}=4sin(x/2)$. Значит, решение $\overline{y}(x)$ существует на всем промежутке. Вернемся к исходной задаче и сведем ее к системе:

$$\begin{cases} y'=v,\\ \varepsilon v'=x^2+y^2/4+v^2-4;\\ y(0,\varepsilon)=y(1,\varepsilon)=0.\end{cases}$$

Здесь поверхностью Λ служит эллипсоид $x^2+y^2/4+v^2=4$. Будем строить интегралы этой системы в области $\Omega_{xyv}=\{(x,y,v): x^2+y^2/4+v^2<4\}$, в которой $f(x,y,v)<0$. В результате, применив метод голоморфной регуляризации, получим решение $y_1^{[0]}(x,\varepsilon)$ первого порядка поставленной краевой задачи:

$$y_1^{[0]}(x,\varepsilon)=\overline{y}(x)+\varepsilon\ln\frac{2A(x)}{\widetilde{v}+A(x)-(\widetilde{v}-A(x))e^{2\overline{y}(x)/\varepsilon}},$$

где

$$A(x)=\sqrt{4-x^2-\overline{y}^2(x)/4},\widetilde{v}=A(1)th(\overline{y}(1)/2\varepsilon).$$

В заключение следует отметить, что развитие метода голоморфной регуляризации может существенно оптимизировать решение нелинейных сингулярно возмущенных задач, так как данный метод применим также для уравнений и систем уравнений высших порядков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
2. *Васильева А. Б., Нефедов Н. Н.* Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина. — М.: Изд-во МГУ, 2007.
3. *Качалов В. И.* Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач// Вестн. МЭИ/ — 2010. — *6*. — С. 54–62.
4. *Качалов В. И.* О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 4. — С. 64–71.
5. *Качалов В. И.* Об одном методе решения сингулярно возмущенных систем тихоновского типа// Изв. вузов. Мат. — 2018. — *6*. — С. 25–30.
6. *Качалов В. И., Ломов С. А.* Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач// Докл. РАН. — 1994. — *334*, № 6. — С. 694–695.
7. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
8. *Ломов С. А., Ломов И. С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011.
9. *Chang K. W, Howes F. A* Nonlinear singular perturbation phenomena: theory and applications. — New York: Springer-Verlag, 1984.

Бесова Маргарита Ильинична
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва
E-mail: besova.margarita@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 17–24
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-17-24

УДК 517.984

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА—ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ НА ГРАФЕ

© 2021 г. **Е. И. БИРЮКОВА**

Аннотация. В работе исследуются вопросы сходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$, который задан на геометрическом графе, состоящем из двух ребер, одно из которых образует цикл-петлю. Получены достаточные условия равномерной сходимости ряда Фурье по собственным функциям оператора (аналог теоремы Жордана—Дирихле).

Ключевые слова: функционально-дифференциальный оператор, инволюция, геометрический граф, ряд Фурье.

AN ANALOG OF THE JORDAN–DIRICHLET THEOREM FOR AN OPERATOR WITH INVOLUTION ON A GRAPH

© 2021 **E. I. BIRYUKOVA**

Abstract. In this paper, we examine the convergence of eigenfunction expansions of a functional-differential operator with involution $\nu(x) = 1 - x$, which is defined on a geometric graph consisting of two edges, one of which is a loop. Sufficient conditions are obtained for the uniform convergence of the Fourier series in the eigenfunctions of the operator (an analog of the Jordan–Dirichlet theorem).

Keywords and phrases: functional-differential operator, involution, geometric graph, Fourier series.

AMS Subject Classification: 34L10, 34K08

1. Введение. Пусть Γ — геометрический граф, состоящий из двух ребер γ_1 и γ_2, и γ_2 образует цикл-петлю. Параметризуя каждое ребро графа отрезком $[0,1]$, зададим на Γ оператор как оператор в пространстве вектор-функций:

$$(Ly)(x) = \big(y_1'(1-x),\ y_2'(x)\big)^T, \quad y = (y_1, y_2)^T, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) \tag{2}$$

(T — знак транспонирования). Считаем, что область определения D_L оператора L включает вектор-функции с непрерывно дифференцируемыми компонентами, удовлетворяющими условиям (2) (условие непрерывности в узле графа).

Оператор L относится к классу функционально-дифференциальных операторов с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$ и является невозмущенным для операторов более общего вида, задаваемых дифференциальным выражением вида

$$l(y) = \alpha y'(x) + \beta y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad x \in [0,1].$$

Такие операторы активно изучаются (см., например, [1–5, 7, 9–11]). Для операторов с такой инволюцией на графах исследовались вопросы равносходимости с тригонометрическим рядом, базисность по Риссу системы собственных и присоединенных функций (см. [1, 4]). Отметим, что граф рассматриваемой структуры является базовым для моделей более сложных структур (см. [1]). Методами из [5] результаты могут быть обобщены на случай оператора общего вида.

Целью работы является получение условий, при которых ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора L равномерно сходится к заданной функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ при $x \in [0,1]$. Будем использовать представление частичной суммы ряда Фурье по с.п.ф. оператора L через контурные интегралы от резольвенты оператора (см. [8]).

2. Краевая задача для резольвенты оператора L. Пусть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор). Для $y = R_\lambda f$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ имеем следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} y_1'(1-x) = \lambda y_1(x) + f_1(x), \\ y_2'(x) = \lambda y_2(x) + f_2(x), \\ y_1(0) = y_2(0) = y_2(1). \end{cases}$$

Как и в [4, лемма 1], эта задача сводится к задаче в пространстве вектор-функций с бо́льшим числом компонент. Дальнейшее преобразование полученной системы и ее решение проводится аналогично [4].

Лемма 1. *Если λ таково, что резольвента R_λ оператора L существует и*

$$y_1(x) = [R_\lambda f]_1(x), \quad y_2(x) = [R_\lambda f]_2(x)$$

($[\ ]_k$ означает k-ю компоненту вектора), то вектор-функция $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x))^T$, где $z_1(x) = y_1(x)$, $z_2(x) = y_1(1-x)$, $z_3(x) = y_2(x)$, является решением краевой задачи

$$Bz'(x) - \lambda z(x) = F(x), \tag{3}$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0, \tag{4}$$

где $F(x) = (f_1(x), f_1(1-x), f_2(x))^T$ и

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет (3), (4) и задача (3), (4) невырожденна, то R_λ существует и $[R_\lambda f]_1(x) = z_1(x)$, $[R_\lambda f]_2(x) = z_3(x)$, где z_1 и z_3 — первая и третья компоненты решения системы (3), (4).

Преобразуем (3) к диагональному виду. Положим

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $B\Gamma = \Gamma D^{-1}$, где

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполнив в (3), (4) замену $z(x) = \Gamma u(x)$, получим следующую задачу для $u(x)$;

$$u'(x) - \mu D_1 u(x) = \Phi(x), \tag{5}$$

$$U_0(u) = M_0 \Gamma u(0) + M_1 \Gamma u(1) = 0, \tag{6}$$

где $\mu = -i\lambda$, $D_1 = \operatorname{diag}(1, -1, i)$, $\Phi(x) = D\Gamma^{-1} F(x)$.

Лемма 2. *Если μ таково, что обратима матрица $\Delta_0(\mu) = U_0(V(x,\mu))$, где $V(x,\mu) = \operatorname{diag}(e^{\mu x}, e^{-\mu x}, e^{i\mu x})$, то краевая задача (5), (6) однозначно разрешима при любой $\Phi(x)$ с компонентами из $L[0,1]$, и ее решение $u(x) = u(x,\mu)$ имеет вид*

$$u(x,\mu) = R_{0\mu}\Phi(x) = -V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu \Phi) + g_\mu \Phi(x), \tag{7}$$

где

$$g_\mu\Phi(x)=\int\limits_0^1 g(x,t,\mu)\Phi(t)dt,\quad U_0(g_\mu\Phi)=\int\limits_0^1 U_{0x}(g(x,t,\mu))\Phi(t)dt,$$

(*символ* U_{0x} *означает, что* U_0 *применяется к* g *по переменной* x),

$$g(x,t,\mu)=\operatorname{diag}\big(g_1(x,t,\mu),g_2(x,t,\mu),g_3(x,t,\mu)\big),$$

$$g_k(x,t,\mu)=\begin{cases}-\varepsilon(t,x)\exp\{\omega_k\mu(x-t)\}, & \operatorname{Re}\mu\omega_k\geqslant 0,\\ \ \ \varepsilon(x,t)\exp\{\omega_k\mu(x-t)\}, & \operatorname{Re}\mu\omega_k\leqslant 0,\end{cases}\qquad \varepsilon(x,t)=\begin{cases}1, & \text{если } x\geqslant t,\\ 0, & \text{если } x<t,\end{cases}$$

$\omega_1=1$, $\omega_2=-1$, $\omega_3=i$.

Таким образом, $z(x)=\Gamma u(x,\mu)=\Gamma R_{0\mu}\Phi(x)$, и тем самым по лемме 1

$$[R_\lambda f]_1=[\Gamma R_{0\mu}\Phi]_1,\quad [R_\lambda f]_2=[\Gamma R_{0\mu}\Phi]_3. \tag{8}$$

3. Исследование резольвенты. Пусть непрерывные функции ограниченной вариации $f(x)=(f_1(x),f_2(x))^T$, $f_k(x)\in C[0,1]\cap V[0,1]$ удовлетворяют условиям

$$f_1(0)=f_2(0)=f_2(1). \tag{9}$$

Исследуем компоненты решения в (7) при условии $\operatorname{Re}\mu\geqslant 0$, $\operatorname{Im}\mu\geqslant 0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично).

Лемма 3. *При* $\operatorname{Re}\mu\geqslant 0$, $\operatorname{Im}\mu\geqslant 0$ *имеет место формула*

$$g_\mu\Phi(x)=\frac{1}{\mu}\big\{G_1(x)+G_2(x,\mu)+G_3(x,\mu)\big\},$$

где

$$G_1(x)=\big(-\Phi_1(x),\ \Phi_2(x),\ i\Phi_3(x)\big)^T,$$

$$G_2(x,\mu)=\big(e^{\mu(x-1)}\Phi_1(1),\ -e^{-\mu x}\Phi_2(0),\ -ie^{i\mu x}\Phi_3(0)\big)^T,$$

$$G_3(x,\mu)=\left(-\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}d\Phi_1(t),\ -\int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}d\Phi_2(t),\ -i\int\limits_0^x e^{i\mu(x-t)}d\Phi_3(t)\right)^T.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$(g_\mu\Phi(x))_1=\int\limits_0^1 g_1(x,t,\mu)\Phi_1(t)dt=-\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}\Phi_1(t)dt$$
$$=\frac{1}{\mu}\left[e^{\mu(x-1)}\Phi_1(1)-\Phi_1(x)-\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}d\Phi_1(t)\right],$$

$$(g_\mu\Phi(x))_2=\int\limits_0^1 g_2(x,t,\mu)\Phi_2(t)dt=\int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}\Phi_2(t)dt$$
$$=\frac{1}{\mu}\left[\Phi_2(x)-e^{-\mu x}\Phi_2(0)-\int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}d\Phi_2(t)\right],$$

$$(g_\mu\Phi(x))_3 = \int_0^1 g_3(x,t,\mu)\Phi_1(t)dt = \int_0^x e^{i\mu(x-t)}\Phi_3(t)dt$$

$$= \frac{i}{\mu}\left[\Phi_3(x) - e^{i\mu x}\Phi_3(0) - \int_0^x e^{i\mu(x-t)}d\Phi_3(t)\right],$$

откуда следует утверждение леммы. □

Так как $\Phi(x) = D\Gamma^{-1}F(x)$, $F(x) = \big(f_1(x), f_1(1-x), f_2(x)\big)^T$ в (5), то очевидна следующая лемма.

Лемма 4. *Для компонент вектора* $\Phi(x) = \big(\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)\big)^T$ *в* (5) *имеют место формулы*

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2}\big[-if_1(x) + f_1(1-x)\big], \quad \Phi_2(x) = \frac{1}{2}\big[-f_1(x) + if_1(1-x)\big], \quad \Phi_3(x) = f_2(x).$$

Отсюда и из (9) вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Для функций* $\Phi_k(x)$ *справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(x) = -\Phi_1(1-x), && \Phi_1(1) = -\Phi_2(0),\\
&\Phi_1(0) = \frac{1}{2}(-if_1(0) + f_1(1)), && \Phi_2(0) = \frac{1}{2}(-f_1(0) + if_1(1)),\\
&\Phi_1(1) = \frac{1}{2}(-if_1(1) + f_1(0)), && \Phi_2(1) = \frac{1}{2}(-f_1(1) + if_1(0)),\\
&\Phi_3(0) = f_2(0), && \Phi_3(1) = f_2(1).
\end{aligned}$$

Лемма 5. *При* $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\mu \geqslant 0$ *для компонент* $U_0(g_\mu\Phi)$ *имеют место соотношения*

$$U_0(G_1) = (0,0,0)^T, \quad U_0(G_2) = (i - e^{-\mu})\begin{pmatrix}\Phi_2(0)\\ 0\\ \Phi_2(0)\end{pmatrix} + i\Phi_3(0)\begin{pmatrix}1\\ e^{i\mu}-1\\ 1\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Доказательство. Имеем

$$M_0\Gamma = \begin{pmatrix}1 & -i & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \quad M_1\Gamma = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -i & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Учитывая (9) и соотношения из следствия 1, получим:

$$U_0(G_1) = M_0\Gamma G_1(0) + M_1\Gamma G_1(1) = \begin{pmatrix}1 & -i & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\Phi_1(0)\\ \Phi_2(0)\\ i\Phi_3(0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -i & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\Phi_1(1)\\ \Phi_2(1)\\ i\Phi_3(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Далее, пользуясь тем, что $\Phi_1(1) = -\Phi_2(0)$, имеем

$$U_0(G_2) = M_0\Gamma G_2(0) + M_1\Gamma G_2(1) = \begin{pmatrix}-e^{-\mu}\Phi_2(0) + i\Phi_2(0) + i\Phi_3(0)\\ -i\Phi_3(0) + ie^{i\mu}\Phi_3(0)\\ i\Phi_3(0) + i\Phi_2(0) - e^{-\mu}\Phi_2(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Phi_2(0)(i - e^{-\mu}) + i\Phi_3(0)\\ i\Phi_3(0)(e^{i\mu}-1)\\ \Phi_2(0)(i - e^{-\mu}) + i\Phi_3(0)\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем второе соотношение в (10). □

Лемма 6. *Имеет место формула*

$$\Delta_0^{-1}(\mu) = \frac{1}{\delta_0(\mu)}\begin{pmatrix}e^{-\mu}(e^{i\mu}-1) & -i - e^{-\mu} & -i(1-e^{i\mu})\\ ie^{\mu}(e^{i\mu}-1) & -1 - ie^{\mu} & e^{i\mu}-1\\ 0 & -e^{\mu} - e^{-\mu} & 0\end{pmatrix},$$

где $\delta_0(\mu) = \det\Delta_0(\mu) = -(1 - e^{i\mu})(e^{\mu} + e^{-\mu})$.

Доказательство. Действительно,

$$\Delta_0(\mu) = U_0(V(x,\mu)) = M_0\Gamma V(0,\mu) + M_1\Gamma V(1,\mu) = M_0\Gamma + M_1\Gamma\operatorname{diag}(e^{\mu}, e^{-\mu}, e^{i\mu}) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1-e^{i\mu} \\ -ie^{\mu} & e^{-\mu} & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получается явное выражение для $\delta_0(\mu)$. Вычисляя алгебраические дополнения, получим утверждение леммы. □

Из леммы 6 непосредственно выводится формула

$$V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu) = \frac{1}{\delta_0(\mu)}\begin{pmatrix} e^{\mu(x-1)}(e^{i\mu}-1) & e^{\mu x}(-i-e^{-\mu}) & e^{\mu x}i(e^{i\mu}-1) \\ ie^{\mu(1-x)}(e^{i\mu}-1) & e^{-\mu x}(-1-ie^{\mu}) & e^{-\mu x}(e^{i\mu}-1) \\ 0 & -e^{i\mu x}(e^{\mu}+e^{-\mu}) & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Из (11) и леммы 5 получаем следующее утверждение.

Лемма 7. *При* $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\mu \geqslant 0$ *имеют место соотношения*

$$V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_1) = (0,0,0)^T, \quad V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_2) = \begin{pmatrix} -\Phi_2(0)e^{\mu(x-1)} \\ -\Phi_2(0)e^{-\mu x} \\ -i\Phi_3(0)e^{i\mu x} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Если* $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\mu \geqslant 0$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_k(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ *и* $f_1(0) = f_2(0) = f_2(1)$, *то*

$$y_1 = \big[R_\lambda f\big]_1 = -\frac{f_1(x)}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\left(-\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}d\Phi_1(t) + i\int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}d\Phi_2(t)\right) - \frac{1}{\mu}\big[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_3)\big]_1,$$

$$y_2 = \big[R_\lambda f\big]_3 = -\frac{f_2(x)}{\lambda} - \frac{i}{\mu}\int\limits_0^x e^{i\mu(x-t)}d\Phi_3(t) - \frac{1}{\mu}\big[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_3)\big]_3.$$

Доказательство. Имеем в силу (8) и (7)

$$\big[R_\lambda f\big]_1 = \big[\Gamma R_{0\mu}\Phi\big]_1 = \Big[\Gamma(g_\mu\Phi(x) - V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu\Phi))\Big]_1,$$
$$\big[R_\lambda f\big]_2 = \big[\Gamma R_{0\mu}\Phi\big]_3 = \Big[\Gamma(g_\mu\Phi(x) - V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu\Phi))\Big]_3.$$

Из лемм 3 и 4 получаем:

$$\big[\Gamma G_1(x)\big]_1 = -\Phi_1(x) - i\Phi_2(x) = \frac{1}{2}\big[-if_1(x) + f_1(1-x)\big] - \frac{i}{2}\big[-f_1(x) + if_1(1-x)\big] = if_1(x),$$
$$\big[\Gamma G_1(x)\big]_3 = i\Phi_3(x) = if_2(x),$$
$$\big[\Gamma G_2(x,\mu)\big]_1 = e^{\mu(x-1)}\Phi_1(1) + ie^{-\mu x}\Phi_2(0), \quad \big[\Gamma G_2(x,\mu)\big]_3 = -ie^{i\mu x}\Phi_3(0),$$
$$\big[\Gamma G_3(x,\mu)\big]_1 = \left(-\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}d\Phi_1(t) + i\int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}d\Phi_2(t)\right), \quad \big[\Gamma G_3(x,\mu)\big]_3 = \int\limits_0^x e^{i\mu(x-t)}d\Phi_3(t).$$

Далее, по лемме 7

$$\big[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_1)\big]_1 = \big[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_1)\big]_3 = 0,$$
$$\big[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_2)\big]_1 = e^{\mu(x-1)}\Phi_1(1) + ie^{-\mu x}\Phi_2(0),$$
$$\big[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_2)\big]_3 = ie^{i\mu x}\Phi_3(0).$$

Из этих соотношений, учитывая $\mu = -i\lambda$, вытекает утверждение теоремы. □

4. Аналог теоремы Жордана—Дирихле. Для получения основного результата потребуется следующее утверждение (см. также [2]).

Лемма 8. *Если* $\varphi(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$*, то при* $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$*,* $\operatorname{Im}\mu \geqslant 0$ *справедливы следующие асимптотические формулы*:

$$\int_0^x e^{\mu t} d\varphi(t) = O\big(e^{\mu x} e^{-\mu\delta}\big) + o_\delta(1) e^{\mu x}, \tag{12}$$

$$\int_x^1 e^{-\mu t} d\varphi(t) = O\big(e^{-\mu x} e^{-\mu\delta}\big) + o_\delta(1) e^{-\mu x}, \tag{13}$$

$$\int_0^x e^{-i\mu t} d\varphi(t) = O\big(e^{-i\mu x} e^{-i\mu\delta}\big) + o_\delta(1) e^{-i\mu x}, \tag{14}$$

где $o_\delta(1) \to 0$ *при* $\delta \to 0$ *равномерно по* $x \in [0,1]$*,* $O(\cdot)$ *не зависит от* δ*.*

Доказательство. В силу непрерывности $\varphi(x)$ функция

$$\bigvee_0^x(\varphi) = \int_0^x |d\varphi(x)|$$

также непрерывна на отрезке $[0,1]$ (см. [6, с. 110]) и, следовательно, равномерно непрерывна на нем и

$$\bigvee_x^{x+\delta}(\varphi) = o_\delta(1) \quad \forall x \in [0,1].$$

Если $x \geqslant \delta$, то

$$\left|\int_0^x e^{\mu t} d\varphi(t)\right| = \left|\int_0^{x-\delta} e^{\mu t} d\varphi(t) + \int_{x-\delta}^x e^{\mu t} d\varphi(t)\right| \leqslant \left|\int_0^{x-\delta} e^{\mu t} d\varphi(t)\right| + \left|\int_{x-\delta}^x e^{\mu t} d\varphi(t)\right|. \tag{15}$$

Рассмотрим первый интеграл в (15). Пользуясь тем, что

$$|e^{\mu t}| = e^{\operatorname{Re}\mu t} \leqslant e^{\operatorname{Re}\mu(x-\delta)} = |e^{\mu(x-\delta)}|,$$

получаем:

$$\left|\int_0^{x-\delta} e^{\mu t} d\varphi(t)\right| \leqslant \int_0^{x-\delta} |e^{\mu t}||d\varphi(t)| \leqslant \int_0^{x-\delta} |e^{\mu(x-\delta)}||d\varphi(t)| \leqslant |e^{\mu(x-\delta)}| \bigvee_0^1(\varphi).$$

Рассмотрим второй интеграл в (15). Учитывая, что

$$|e^{\mu t}| = e^{\operatorname{Re}\mu t} \leqslant e^{\operatorname{Re}\mu x} = |e^{\mu x}|,$$

имеем

$$\left|\int_{x-\delta}^x e^{\mu t} d\varphi(t)\right| \leqslant \int_{x-\delta}^x |e^{\mu t}||d\varphi(t)| \leqslant |e^{\mu x}| \bigvee_{x-\delta}^x(\varphi) = |e^{\mu x}| o_\delta(1).$$

Если $x \leqslant \delta$, то

$$\left|\int_0^x e^{\mu t} d\varphi(t)\right| \leqslant |e^{\mu x}| \int_0^x |d\varphi(t)| \leqslant |e^{\mu x}| \int_0^\delta |d\varphi(t)| = |e^{\mu x}| \bigvee_0^\delta(\varphi).$$

Отсюда и из двух предыдущих оценок следует (12). Оценка (13) получается из (12) с помощью замены переменной $t = 1 - \tau$, а (14) — с помощью замены $-i\mu = \lambda$. □

Теорема 2. *Если* $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ *такова, что* $f_k(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ *и* $f_1(0) = f_2(0) = f_2(1)$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) - S_r(f,x)\| = 0,$$

где $S_r(f,x)$ — *частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора* L, *включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям* λ_k, *для которых*

$$|\lambda_k| < r, \quad \|u\| = \max_{k=1,2} \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |u_k(x)|.$$

Доказательство. Воспользуемся представлением частичной суммы ряда Фурье через контурный интеграл от резольвенты:

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda f)(x)d\lambda.$$

По теореме 1 для первой компоненты имеем:

$$[S_r(f,x)]_1 = f_1(x) + I_1 + I_2 + I_3, \tag{16}$$

где

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \left(\frac{1}{\mu}\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t)\right) d\lambda, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \left(\frac{i}{\mu}\int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)} d\Phi_2(t)\right) d\lambda,$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \left(\frac{i}{\mu}[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_3)]_1\right) d\lambda.$$

Оценим интегралы в I_1. Имеем, учитывая, что $\lambda = i\mu$:

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{1\leqslant s\leqslant 4} \int\limits_{l_s} \left(\frac{1}{\mu}\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t)\right) d\mu,$$

где $l_s = \big\{\mu : |\mu| = r,\ \arg\mu \in [\pi(s-1)/2, \pi s/2]\big\}$, $s = \overline{1,4}$. На контуре l_1 выполняются неравенства $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\mu \geqslant 0$, поэтому, используя оценки из леммы 8, получим:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_1} \frac{1}{\mu} e^{\mu x} \int\limits_x^1 e^{-\mu t} d\Phi_1(t) d\mu\right| \leqslant c \int\limits_{l_1} \frac{1}{r}|e^{\mu x}|(|e^{-\mu x}||e^{-\mu\delta}| + o_\delta(1)|e^{-\mu x}|)|d\mu| =$$

$$= \frac{c}{r}\left(\int\limits_{l_1} |e^{-\mu\delta}||d\mu| + o_\delta(1)\int\limits_{l_1}|d\mu|\right) \leqslant \frac{c}{r}\int\limits_{l_1} |e^{-\mu\delta}||d\mu| + o_\delta(1). \tag{17}$$

Докажем ограниченность интеграла в первом слагаемом. Выполняя замену $\mu = re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi/2]$, учитывая, что при $\varphi \in [0,\pi/2]$ справедлива оценка $\sin\varphi \geqslant 2\varphi/\pi$, получим:

$$\int\limits_{l_1} |e^{-\mu\delta}||d\mu| = \int\limits_{l_1} e^{-\operatorname{Re}\mu\delta}|d\mu| = r\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\varphi\delta} d\varphi \leqslant r\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rc\varphi\delta} d\varphi \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_0^{\infty} e^{-\xi\delta} d\xi \leqslant c$$

(здесь одним символом c обозначаются различные константы). Отсюда, из (17) и оценок, аналогичных леммам 3, 5, 7 при остальных комбинациях знаков $\operatorname{Re}\mu$ и $\operatorname{Im}\mu$ (т.е. по остальным контурам l_s), следует, что

$$|I_1| \leqslant \frac{c}{r} + c\varepsilon.$$

В силу леммы 8 такую же оценку получаем для I_2, а из соотношения $V(x,\mu)\Delta^{-1}(\mu) = O(1)$, следующего из (11), — и для интегралов в I_3. В силу произвольности ε следует, что $I_k \to 0$ при $r \to \infty$. Отсюда и из (16) следует, что $[S_r(f,x)]_1 = f_1(x) + o(1)$. Аналогично доказывается, что $[S_r(f,x)]_2 = f_2(x) + o(1)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлуцкая М. Ш.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций одного класса функционально-дифференциальных операторов на графе// Диффер. уравн. — 2009. — *45*, № 6. — С. 763–771.
2. *Бурлуцкая М. Ш.* Теорема Жордана—Дирихле для функционально-дифференциального оператора с инволюцией// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. — 2013. — *13*, № 3. — С. 9–14.
3. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией// Докл. РАН. — 2007. — *414*, № 4. — С. 1309–1312.
4. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл// Диффер. уравн. — 2007. — *43*, № 12. — С. 1597–1605.
5. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. — 2009. — *9*, № 4. — С. 3–10.
6. *Дьяченко М. И., Ульянов П. Л.* Мера и интеграл. — М.: Факториал, 1998.
7. *Платонов С. С.* Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов// Тр. Петрозавод. гос. ун-та. Сер. мат. — 2004. — *11*. — С. 15–35.
8. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964.
9. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Romanova E. Yu.* Spectral analysis of a differential operator with an involution// J. Evolut. Equat. — 2017. — *17*. — P. 669–684.
10. *Kritskov L. V., Sarsenbi A. M.* Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution// Differ. Equations. — 2015. — *51*, № 8. — P. 984–990.
11. *Wiener J.* Generalized Solutions of Functional-Differential Equations. — World Scientific, 1993.

Бирюкова Елена Игоревна
Воронежский государственный университет
E-mail: `elenabiryukova2010@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 25–27
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-25-27

УДК 517.927

ОБ ОДНОЙ АПРИОРНОЙ МАЖОРАНТЕ НАИМЕНЬШИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

© 2021 г. **А. А. ВЛАДИМИРОВ, Е. С. КАРУЛИНА**

Аннотация. Изучается вопрос о точной априорной мажоранте $M_\gamma = \sup\limits_{q\in A_\gamma} \lambda_0(q)$ наименьшего собственного значения задачи Штурма—Лиувилля $-y'' + qy = \lambda y$, $y(0) = y(1) = 0$, с потенциалом $q \in C[0,1]$ класса A_γ, выделенного условиями $q \leqslant 0$ и $\int\limits_0^1 |q|^\gamma dx = 1$, где $\gamma \in (0, 1/2)$. Показано, что эта мажоранта подчиняется строгой оценке $M_\gamma < \pi^2$. Ранее справедливость последней оценки была известна лишь для случая $\gamma < 1/3$.

Ключевые слова: задача Штурма—Лиувилля, оценка собственных значений.

ON AN A PRIORI MAJORANT OF THE LEAST EIGENVALUES OF THE STURM–LIOUVILLE PROBLEM

© 2021 **A. A. VLADIMIROV, E. S. KARULINA**

Abstract. We examine the exact a priori majorant $M_\gamma = \sup\limits_{q\in A_\gamma} \lambda_0(q)$ of the least eigenvalue of the Sturm–Liouville problem $-y'' + qy = \lambda y$, $y(0) = y(1) = 0$, with a potential $q \in C[0,1]$ of the class A_γ determined by the conditions $q \leqslant 0$ and $\int\limits_0^1 |q|^\gamma dx = 1$, where $\gamma \in (0, 1/2)$. For this majorant, we prove the strict estimate $M_\gamma < \pi^2$. The last estimate was known earlier in the case where $\gamma < 1/3$.

Keywords and phrases: Sturm–Liouville problem, estimate of eigenvalues.
AMS Subject Classification: 34L15, 34L40

Рассмотрим граничную задачу

$$-y'' + qy = \lambda y, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

где потенциал выбирается внутри семейства

$$A_\gamma = \left\{ q \in C[0,1] : q \leqslant 0, \ \int\limits_0^1 |q|^\gamma dx = 1 \right\}.$$

Свяжем с указанной задачей априорную мажоранту $M_\gamma = \sup\limits_{q\in A_\gamma} \lambda_0(q)$ наименьшего собственного значения. Как было установлено в [1, теорема 1.2] (см. также [3, Theorem 2], [2, теорема 2.1], [4, Theorem 2.4]), при $\gamma \geqslant 1/2$ выполняется равенство $M_\gamma = \pi^2$, а при $\gamma < 1/3$ справедлива строгая оценка $M_\gamma < \pi^2$. Целью настоящей заметки является установление справедливости строгой оценки $M_\gamma < \pi^2$ также в случае $\gamma \in [1/3, 1/2)$. Иначе говоря, нами доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *При любом выборе значения $\gamma \in (0, 1/2)$ справедлива оценка $M_\gamma < \pi^2$.*

Доказательство. Далее мы всегда будем предполагать величину $\gamma \in (0, 1/2)$ каким-либо образом зафиксированной. Пусть $q \in C[0,1]$ — неположительный потенциал, удовлетворяющий соотношению $\lambda_0(q) > (\pi - \varepsilon)^2$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое достаточно малое число. Рассмотрим связанные с соответствующей собственной функцией $y \in C^2[0,1]$ функции $\varrho, \vartheta \in C^1[0,1]$ и $\sigma \in C[0,1]$ вида

$$\varrho \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y'/\sqrt{\lambda_0(q)} \end{pmatrix}, \qquad \sigma = |q| \sin^2\vartheta.$$

Функция ϑ подчиняется уравнению

$$\vartheta' = \frac{1}{\varrho} \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ y''/\sqrt{\lambda_0(q)} \end{pmatrix} = \frac{\lambda_0(q) + \sigma}{\sqrt{\lambda_0(q)}}$$

и пробегает, строго возрастая, отрезок $[0, \pi]$. Соотношения

$$\int\limits_0^1 \frac{\sigma\vartheta'}{\lambda_0(q) + \sigma} dx = \int\limits_0^1 \left[\vartheta' - \sqrt{\lambda_0(q)}\right] dx = \pi - \sqrt{\lambda_0(q)} < \varepsilon$$

означают при этом, что множество

$$E_\varepsilon = \left\{ x \in [0,1] : \sigma(x) > \varepsilon^{(1-2\gamma)/(1-\gamma)} \right\}$$

подчиняется оценке

$$\int\limits_{E_\varepsilon} \vartheta' dx < \mu(\varepsilon),$$

где положено $\mu(\varepsilon) = \pi^2 \varepsilon^{\gamma/(1-\gamma)} + \varepsilon$. Далее мы, не ограничивая общности рассмотрения, всегда будем предполагать выполненным неравенство $\mu(\varepsilon) < \pi$. В этом случае справедливы оценки

$$\int\limits_{E_\varepsilon} \sin^{-2\gamma}\vartheta \cdot \vartheta' dx \leqslant 2 \int\limits_0^{\mu(\varepsilon)/2} \sin^{-2\gamma} x dx \leqslant 2 \int\limits_0^{\pi^2\varepsilon^{\gamma/(1-\gamma)}} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{-2\gamma} dx = \\ = \frac{2\pi^2 \cdot (2\pi)^{-2\gamma}}{1 - 2\gamma} \varepsilon^{(1-2\gamma)\gamma/(1-\gamma)} < \frac{2\pi^2}{1-2\gamma} \varepsilon^{(1-2\gamma)\gamma/(1-\gamma)}, \tag{1}$$

$$\int\limits_{\overline{E_\varepsilon}} \sin^{-2\gamma}\vartheta \cdot \vartheta' dx \leqslant \int\limits_0^\pi \sin^{-2\gamma} x dx \leqslant 2 \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{-2\gamma} dx < \frac{4}{1-2\gamma}. \tag{2}$$

Кроме того, в случае $\sigma(x) \geqslant 1$ справедливы оценки

$$2\sqrt{\lambda_0(q)}\sigma^\gamma(x) \leqslant \lambda_0(q) + \sigma^{2\gamma}(x), \tag{3}$$

а в случае $\sigma(x) < 1$ справедливы обусловленные неравенством $\lambda_0(q) > 4$ оценки

$$2\sqrt{\lambda_0(q)}\sigma^\gamma(x) \leqslant \lambda_0(q). \tag{4}$$

Объединяя (3) и (4) в единую оценку

$$2\sqrt{\lambda_0(q)}\sigma^\gamma(x) \leqslant \lambda_0(q) + \sigma(x)$$

и учитывая ранее полученные оценки (1) и (2), устанавливаем справедливость соотношений

$$\int\limits_0^1 |q|^\gamma dx = \sqrt{\lambda_0(q)} \cdot \int\limits_0^1 \frac{\sigma^\gamma \sin^{-2\gamma} \vartheta}{\lambda_0(q)+\sigma} \cdot \vartheta' dx =$$

$$= \sqrt{\lambda_0(q)} \cdot \left[\int\limits_{E_\varepsilon} \frac{\sigma^\gamma \sin^{-2\gamma} \vartheta}{\lambda_0(q)+\sigma} \cdot \vartheta' dx + \int\limits_{\overline{E_\varepsilon}} \frac{\sigma^\gamma \sin^{-2\gamma} \vartheta}{\lambda_0(q)+\sigma} \cdot \vartheta' dx \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{E_\varepsilon} \sin^{-2\gamma} \vartheta \cdot \vartheta' dx + \frac{\varepsilon^{(1-2\gamma)\gamma/(1-\gamma)}}{\sqrt{\lambda_0(q)}} \cdot \int\limits_{\overline{E_\varepsilon}} \sin^{-2\gamma} \vartheta \cdot \vartheta' dx \leqslant \frac{\pi^2+2}{1-2\gamma} \cdot \varepsilon^{(1-2\gamma)\gamma/(1-\gamma)}.$$

Тем самым справедливость соотношения $q \in A_\gamma$ несовместима с предположением о значительной малости параметра $\varepsilon > 0$. Это и означает выполнение искомой оценки $M_\gamma < \pi^2$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ежак С. С.* Оценки первого собственного значения задачи Штурма—Лиувилля с условиями Дирихле// в кн.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. — С. 517–559.
2. *Ежак С. С.* Об одной задаче минимизации функционала, порожденного задачей Штурма—Лиувилля с интегральным условием на потенциал// Вестн. СамГУ. — 2015. — *6 (128)*. — С. 57–61.
3. *Ezhak S. S.* On estimates for the first eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with Dirichlet boundary conditions and integral condition// in: Differential and Difference Equations with Applications. — New York: Springer-Verlag, 2013. — P. 387–394.
4. *Ezhak S., Telnova M.* On estimates for the first eigenvalue of some Sturm–Liouville problems with Dirichlet boundary conditions and a weighted integral condition// Proc. Int. Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations “QUALITDE-2016”. — Tbilisi, Georgia: A. Razmadze Math. Inst., 2016. — P. 81–85.

Владимиров Антон Алексеевич
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, Москва
E-mail: `vladimirov@shkal.math.msu.su`

Карулина Елена Сергеевна
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва
E-mail: `karulinaes@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 28–32
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-28-32

УДК 519.175.3

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ НЕПЛАНАРНЫХ ПЕНТАЦИКЛИЧЕСКИХ БЛОКОВ

© 2021 г. **В. А. ВОБЛЫЙ**

Аннотация. Планарный граф — это граф, который можно уложить на плоскости без пересечения ребер. Пентациклическим графом называется связный граф с n вершинами и $n+4$ ребрами. Получена явная формула для числа помеченных непланарных пентациклических блоков с заданным числом вершин, а также найдена соответствующая асимптотика для числа таких графов с большим числом вершин. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что помеченный пентациклический блок является непланарным графом, асимптотически равна 80/539.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, блок, планарный граф, асимптотика, вероятность.

ENUMERATION OF LABELED NONPLANAR PENTACYCLIC BLOCKS

© 2021 **V. A. VOBLYI**

Abstract. An planar graph is a graph that can be drawn on a plane without intersecting edges. A pentacyclic graph is a connected graph with n vertices and $n+4$ edges. We obtain an explicit formula for the number of labeled nonplanar pentacyclic blocks with a given number of vertices and found the corresponding asymptotics for the number of such graphs with a large number of vertices. We prove that under the uniform probability distribution, the probability that the labeled pentacyclic block is a nonplanar graph is asymptotically equal to 80/539.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, block, planar graph, asymptotics, probability.

AMS Subject Classification: 05C30

1. Введение.

Определение 1. Для связного графа *точкой сочленения* называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным. *Блок* — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения (см. [9, с. 41].

Определение 2. *Цикломатическим числом* связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин; k-*циклический граф* — это граф с цикломатическим числом, равным k.

Определение 3. Граф называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости без пересечения ребер (см. [9, с. 127]).

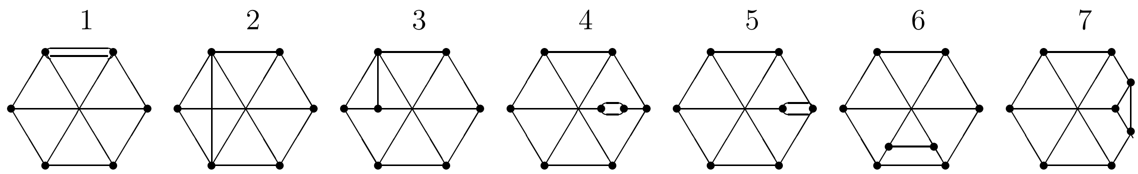

Рис. 1

Планарные графы применяются при проектировании СБИС (см. [7,10]), в теории кодирования (см. [12]), в физике при нахождении статистической суммы (см. [4]) и в компьютерном зрении (см. [14]).

В [1] была найдена асимптотика для чисел помеченных связных и 2-связных планарных графов с большим количеством вершин. В [2] получена явная формула для числа помеченных связных непланарных тетрациклических графов с заданным числом вершин.

В данной статье получена явная формула для числа помеченных связных планарных пентациклических блоков с заданным числом вершин, а также найдена асимптотика для числа таких графов с большим количеством вершин. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что помеченный пентациклический блок является непланарным графом, асимптотически равна 80/539.

2. Перечисление графов.

Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Теорема 1. *Число $\bar{B}_5(n)$ помеченных непланарных пентациклических блоков с n вершинами при $n \geqslant 6$ равно*

$$\bar{B}_5(n) = \frac{n!}{380160}\binom{n+1}{7}(10n^4 + 118n^3 + 72n25 - 1232n - 1968). \tag{1}$$

Доказательство. Гомеоморфный тип — это общий граф (возможно содержащий петли или кратные ребра) без вершин степени 2, из которого все графы из заданного класса гомеоморфных графов получаются вставкой вершин степени 2 (см. [8, 11]). Из 118 гомеоморфных типов пентациклических блоков из списка Хипа только 7 являются графами с пересечениями ребер (см. [13]). Диаграммы этих блоков представлены на рис. 1.

Однако граф, изображенный на плоскости с пересечением ребер, может оказаться планарным. Например, планарный граф K_4 может быть изображен в виде квадрата с пересекающимися диагоналями. Поэтому непланарность графов на рис. 1, являющихся простыми графами, была проверена с помощью пакета программ Maple. Кроме того, каждый граф на рис. 1 содержит в качестве подграфа или минора граф-шестиугольник, у которого проведены все диагонали. Но такой граф изоморфен непланарному графу $K_{3,3}$. Следовательно, согласно теореме Понтрягина—Куратовского или по теореме Вагнера, все графы на рис. 1 непланарны.

Пусть H — гомеоморфный тип с a вершинами, b ребрами, b_0 петлями, b_i — число пучков ребер кратности i , $A(H)$ — порядок вершинно-реберной группы автоморфизмов графа H. Тогда число помеченных графов C_n с n вершинами и гомеоморфным типом H равно (см. [8, лемма 2])

$$C_n = \frac{n!}{2^{b_0}A(H)}\mathrm{Coef}_{x^{n-a}}\frac{x^{b+b_0-\sum\limits_{i=1}^{b} b_i}\prod\limits_{i=1}^{b}(x+i(1-x))^{b_i}}{(1-x)^b}.$$

В нашем случае имеем (так как все графы — блоки, то $b_0 = 0$)

(i) $a = 6$, $b = 10$, $b_1 = 8$, $b_2 = 1$, $A(H) = 16$ и

$$C_n^{(1)} = \frac{n!}{16}\mathrm{Coef}_{x^{n-6}}\frac{x(x+(1-x))}{(1-x)^{10}} = \frac{n!}{16}\mathrm{Coef}_{x^{n-6}}\left(\frac{x^2}{(1-x)^{10}} + 2\frac{x}{(1-x)^9}\right).$$

С помощью разложения (см. [4, с. 709])

$$(1-x)^{-m-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{m}x^n$$

получим

$$C_n^{(1)}=\frac{n!}{16}\mathrm{Coef}_{x^{n-6}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+9}{9}x^{k+2}+2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+8}{8}x^{k+1}\right)=\frac{n!}{16}\left(\binom{n+1}{9}+2\binom{n+1}{8}\right).$$

Аналогично, для остальных гомеоморфных типов графов найдем:

(ii) $a=6$, $b=b_1=10$, $A(H)=12$:

$$C_n^{(2)}=\frac{n!}{12}\mathrm{Coef}_{x^{n-6}}\frac{1}{(1-x)^11}=\frac{n!}{12}\mathrm{Coef}_{x^{n-6}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+9}{9}x^k=\frac{n!}{12}\binom{n+3}{9};$$

(iii) $a=7$, $b=b_1=11$, $A(H)=4$:

$$C_n^{(3)}=\frac{n!}{4}\mathrm{Coef}_{x^{n-7}}\frac{1}{(1-x)^11}=\frac{n!}{4}\mathrm{Coef}_{x^{n-7}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+10}{10}x^k=\frac{n!}{4}\binom{n+3}{10};$$

(iv) $a=8$, $b=12$, $b_1=10$, $b_2=1$, $A(H)=16$:

$$C_n^{(4)}=\frac{n!}{16}\mathrm{Coef}_{x^{n-8}}\frac{x(x+2(1-x))}{(1-x)^{12}}=$$

$$=\frac{n!}{16}\mathrm{Coef}_{x^{n-8}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+11}{11}x^{k+2}+2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+10}{10}x^{k+1}\right)=\frac{n!}{16}\left(\binom{n+1}{11}+2\binom{n+1}{10}\right);$$

(v) $a=7$, $b=11$, $b_1=9$, $b_2=1$, $A(H)=8$:

$$C_n^{(5)}=\frac{n!}{8}\mathrm{Coef}_{x^{n-7}}\frac{x(x+2(1-x))}{(1-x)^{11}}=$$

$$=\frac{n!}{8}\mathrm{Coef}_{x^{n-7}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+10}{10}x^{k+2}+2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+9}{9}x^{k+1}\right)=\frac{n!}{8}\left(\binom{n+1}{10}+2\binom{n+1}{9}\right);$$

(vi) $a=8$, $b=b_1=12$, $A(H)=16$:

$$C_n^{(6)}=\frac{n!}{16}\mathrm{Coef}_{x^{n-8}}\frac{1}{(1-x)^12}=\frac{n!}{16}\mathrm{Coef}_{x^{n-8}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+11}{11}x^k=\frac{n!}{16}\binom{n+3}{11};$$

(vii) $a=8$, $b=b_1=12$, $A(H)=12$:

$$C_n^{(7)}=\frac{n!}{12}\mathrm{Coef}_{x^{n-8}}\frac{1}{(1-x)^12}=\frac{n!}{12}\mathrm{Coef}_{x^{n-8}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+11}{11}x^k=\frac{n!}{12}\binom{n+3}{11}.$$

Таким образом,

$$\bar{B}_5(n)=C_n^{(1)}+C_n^{(2)}+C_n^{(3)}+C_n^{(4)}+C_n^{(5)}+C_n^{(6)}+C_n^{(7)}=$$

$$=\frac{n!}{16}\left(\binom{n+1}{9}+2\binom{n+1}{8}\right)+\frac{n!}{12}\binom{n+3}{9}+\frac{n!}{4}\binom{n+3}{10}+$$

$$+\frac{n!}{16}\left(\binom{n+1}{11}+2\binom{n+1}{10}\right)+\frac{n!}{8}\left(\binom{n+1}{10}+2\binom{n+1}{9}\right)+\frac{n!}{16}\binom{n+3}{11}+\frac{n!}{12}\binom{n+3}{11}.$$

Представляя биномиальные коэффициенты в виде многочленов от n, после вынесения линейных множителей и приведения подобных членов в полученном многочлене, найдем для $\bar{B}_5(n)$ компактную формулу (1).

Порядки групп автоморфизмов для графов на рис. 1 были определены с помощью программы GRIN (GRaph INterface), разработанной В. В. Печенкиным (см. [5]). $\square$

В следующей таблице представлены числа $\bar{B}_5(n)$, вычисленные с помощью теоремы 1 и пакета программ Maple:

n	6	7	8	9	10	11	12
$\bar{B}_5(n)$	60	6090	359520	16541280	664372800	24670245600	875415340800

3. Асимптотика и вероятность.

Теорема 2. *Для числа $\bar{B}_5(n)$ помеченных непланарных пентациклических блоков с n вершинами при $n \to \infty$ имеет место асимптотика*

$$\bar{B}_5(n) \sim n! \frac{n^{11}}{191600640}.$$

Доказательство. Так как асимптотика многочлена от n при $n \to \infty$ совпадает с асимптотикой его старшего члена, имеем

$$\bar{B}_5(n) \sim \frac{n!}{380160} \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)(n-6)}{7!} 10n^4 \sim n! \frac{n^{11}}{191600640}. \qquad \square$$

Зададим на множестве помеченных пентациклических блоков с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 1. *Вероятность P_n того, что помеченный пентациклический блок является непланарным графом, асимптотически равна* $80/539$.

Доказательство. Пусть $u(n, n+k)$ — число помеченных блоков с n вершинами и $n+k$ ребрами. Райт нашел следующую асимптотику при $n \to \infty$ и $k = O(k^{1/2})$ (см. [15]):

$$u(n, n+k) \sim b_k \frac{(n+3k-1)!}{(3k-1)!}, \quad b_1 = \frac{1}{12}, \quad b_2 = \frac{5}{24},$$

$$B_k = \sum_{s=1}^{k-1} s(k-s) b_s b_{k-s}, \quad k \geqslant 2, \quad 2(k+1)b_{k+1} = (3k+2)(kb_k + 3B_k), \quad k \geqslant 2.$$

Поэтому имеем

$$B_2 = b_1^2, \quad 6b_3 = 8(2b_2 + 3B_2), \quad b_3 = \frac{11}{36}, \quad B_3 = 4b_1b_2, \quad 8b_4 = 11(3b_3 + 3B_3), \quad b_4 = \frac{539}{384},$$

$$u(n, n+4) \sim b_4 \frac{(n+11)!}{11!} \sim \frac{539n^{11}}{11!384} n!, \quad P_n = \frac{\bar{B}_5(n)}{u(n, n+4)} \sim \frac{80}{539} \quad \text{при } n \to \infty. \qquad \square$$

В заключение отметим, что Е. Ф. Дмитриев (см. [3]) другим способом перечислял помеченные непланарные пентациклические блоки, но не опубликовал доказательства своих результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bender E. A.* The number of labeled 2-connected planar graphs// Electron. J. Combin. — 2002. — *9*. — R43.
2. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных непланарных тетрациклических графов// Мат. XVIII Междунар. семин. «Комбинаторные конфигурации и их приложения». — Кировоград, 2016. — С. 33–36.
3. *Дмитриев Е. Ф.* Перечисление отмеченных графов с данными структурными свойствами/ Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Минск: Ин-т мат. АН БССР, 1986.
4. *Карандашев Я. М., Мальсагов М. Ю.* Полиномиальный алгоритм точного вычисления статистической суммы для модели бинарных спинов на планарных графах// Тр. НИИСИ РАН.. — *7*, № 1. — С. 18–24.
5. *Печенкин В. В.* GRIN — программное обеспечение для создания, редактирования и исследования графов и сетей. — `http://ecsocman.hse.ru/text/19282339`.
6. *Прудников А. П. и др.* Интегралы и ряды. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
7. *Рихтер М. Р.* Алгоритм трассировки при проектировании СБИС// Науч.-техн. вед. СПбГПУ. — 2011. — № 5. — С. 111–118.

8. *Степанов В. Е.* О некоторых особенностях строения случайного графа вблизи критической точки// Теор. вероятн. примен. — 1987. — *32*, № 4. — С. 633–657.
9. *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973.
10. *Aggarwal A., Klawe M., Shor P.* Multilayer grid embedding for VLSI// Algorirhmica. — 1991. — *6.* — P. 129–151.
11. *Ford G. W., Uhlenbeck G. E.* Combinatorial problems in theory graphs, IV// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1957. — *43.* — P. 163–167.
12. *Haymaker K., O'Pella J.* Locally recoverable codes from planar graphs// J. Algebra Comb. Discrete Appl. — 2020. — *7*, № 1. — P. 35–53.
13. *Heap B. R.* Enumeration homeomorphically irreducible star graphs// J. Math. Phys. — 1966. — *7*, № 7. — P. 1582–1587.
14. *Schmidt F. R., Toppe E., Cremers D.* Efficient planar graphs cuts with applications in computer vision// IEEE Computer Society Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (Miami, Florida), 2009. — P. 1–6.
15. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs// J. Graph Theory. — 1978. — *2*, № 4. — P. 299–305.

Воблый Виталий Антониевич
Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 33–44
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-33-44

УДК 517.968

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА СО СЛАБО СИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ

© 2021 г. **М. ГИАТ, С. КАМУШ, А. ХЕЛЛАФ, В. МЕРЧЕЛА**

Аннотация. В работе исследуется существование и единственность решений системы интегральных уравнений Вольтерра со слабо сингулярным ядром. Аппроксимация решения производится при помощи метода интегрирования произведения. Точность и эффективность метода проиллюстрированы на некоторых численных примерах.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение Вольтерра, интегро-дифференциальное уравнение, неподвижная точка, метод интегрирования произведения.

ON A SYSTEM OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS WITH A WEAKLY SINGULAR KERNEL

© 2021 **M. GHIAT, S. KAMOUCHE, A. KHELLAF, W. MERCHELA**

Abstract. In this paper, we examine the existence and uniqueness of solutions for a system of Volterra integral equations with a weakly singular kernel. We approximate the solution of this system using the product integration method. The accuracy and efficiency of this method are illustrated in some numerical examples.

Keywords and phrases: nonlinear Volterra integral equation, integro-differential equation, fixed point, product integration method.

AMS Subject Classification: 45D05, 65D07, 65R20.

1. Введение. Многие физические процессы и математические модели описываются нелинейными интегральными уравнениями Вольтерры (см. [1, 2, 6–8]). Уравнения этого типа привлекают внимание многих исследователей. В данной работе рассматриваются нелинейные интегральные уравнения Вольтерры со *слабо-сверточными сингулярными ядрами*, которые определяются следующим образом: найти функции $x(t)$ и $y(t)$, определенные для всех $t \in [a, b]$ и удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} x(t) = \int\limits_a^t p_1(t-s)K_1(t,s,x(s),y(s))ds + f_1(t), \\ y(t) = \int\limits_a^t p_2(t-s)K_2(t,s,x(s),y(s))ds + f_2(t), \end{cases} \tag{P1}$$

где f_1, f_2, p_1, p_2, K_1, K_2 — заданные функции. Отметим, что многие интегральные уравнения типа Вольтерры, возникающие в прикладных задачах, имеют сверточные ядра (см. [3]).

Отметим, что интегро-дифференциальные нелинейные уравнения Вольтерры вида

$$u(t) = f(t) + \int_0^t k(s, u(s), u'(s))ds, \quad t \in [0, 1], \tag{1}$$

рассматривались в [5, 9], а уравнения вида

$$u(t) = f(t) + \int_0^t p(t-s)k(s, u(s), u'(s))ds, \quad t \in [0, 1], \tag{2}$$

— в [4]; здесь f, k и p — заданные функция, u — неизвестная. В [4] при исследовании условий на функцию $p(\cdot)$ было установлено, что уравнение (1) эквивалентно системе нелинейных интегральных уравнений вида

$$\begin{cases} u(t) = \displaystyle\int_a^t p(t-s)k(t, s, u(s), u'(s))ds + f(t), \\ u'(t) = \displaystyle\int_a^t p'(t-s)k(s, u(s), u'(s))ds + \int_a^t p(t-s)\frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s))ds + f'(t), \end{cases} \tag{P2}$$

для всех $t \in [a, b]$, причем *сингулярность определяется только функцией* $p'(\cdot)$.

В данной работе мы получим условия на функции $p_1(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$ в системе (P1), обобщающие аналитическое и численное исследование системы (P2), и, как следствие, уравнение (1). Отметим, что сингулярность задается для $p_1(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$.

Далее система (P1) исследуется аналитически; существование решения доказано при помощи теоремы Шаудера о неподвижной точке, а единственность — при помощи методов, предложенных в [4]. Далее приводятся результаты численных экспериментов, проведенных при помощи метода интегрирования произведения (см. [6]).

Отметим, что использование классических методов (например, метод Нистрома) для поиска приближенного решения системы (P1) в рассматриваемом случае невозможно, в то время как применение метода интегрирования произведения позволяет обойти сингулярности функций $p_1(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$. Кроме того, этот метод позволяет обобщить рассмотрение на случай системы типа (P1) с n неизвестными функциями, $n \geqslant 2$.

Пусть p_1, p_2, f_1, f_2, K_1, K_2 — вещественные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} p_i &\colon [a-b, b-a] \to \mathbb{R}, && t \mapsto p_i(t), \\ f_i &\colon [a, b] \to \mathbb{R}, && t \mapsto f_i(t), \\ K_i &\colon [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, && (t, s, x, y) \mapsto K_i(t, s, x, y), \end{aligned}$$

где $i = 1, 2$. Также предположим, что

$$\begin{gathered} f_1, f_2 \in \mathcal{C}([a, b]), \quad K_1, K_2 \in \mathcal{C}([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ \exists M_1, M_2 > 0 \ \forall t, s \in [a, b] \ \forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |K_1(t, s, x, y)| \leqslant M_1, \quad |K_2(t, s, x, y)| \leqslant M_2; \end{gathered} \tag{H1}$$

$$\begin{gathered} p_1, p_2 \in L^1(a-b, b-a), \quad \lim_{\tau \to 0} p_1(\tau)ds = +\infty, \quad \lim_{\tau \to 0} p_2(\tau)ds = +\infty, \\ \forall t \in [a, b] : \lim_{\delta \to 0^+} \int_t^{t+\delta} |p_1(t+\delta-s)|ds = 0, \quad \lim_{\delta \to 0^+} \int_t^{t+\delta} |p_2(t+\delta-s)|ds = 0. \end{gathered} \tag{H2}$$

Условие (H2) объясняет сингулярность в системе (P1): эта сингулярность является слабой, поскольку для всех $t \in [a,b]$

$$\int_a^t |p_i(t-s)|ds \leqslant \int_0^{t-a} |p_i(\tau)|d\tau \leqslant \int_{a-b}^{b-a} |p_i(\tau)|d\tau < \infty, \quad i=1,2. \tag{3}$$

Наша задача — найти условия, обеспечивающие существование и единственность решения системы (P1) и разработать численный алгоритм поиска этого решения. Отметим, что предположение (H1) аналогично условиям, наложенным в [4,5]. В дальнейшем будем обозначать через $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_1$ нормы банаховых пространств $\mathcal{C}([a,b])$ и $L^1(a-b,b-a)$, соответственно.

2. Аналитическое исследование. Докажем, что система (P1) имеет единственное решение в $\mathcal{C}([a,b])\times\mathcal{C}([a,b])$. Введем некоторые определения.

Модуль непрерывности функции x в $\mathcal{C}([a,b])$:

$$\omega_0(x,h) = \sup_{|t-\sigma|\leqslant h} |x(t)-x(\sigma)|. \tag{4}$$

Колебание функции q в $L^1(a-b,b-a)$:

$$\omega_1(q,h) = \sup_{|t-\sigma|\leqslant h} \int_{a-b}^{b-a} |q(t-s)-q(\sigma-s)|ds. \tag{5}$$

Модуль переноса функции q in $L^1(a-b,b-a)$:

$$\tau(q,h) = \int_t^{t+h} |q(t+h-s)|ds. \tag{6}$$

Докажем некоторые вспомогательные факты.

Лемма 1. *Если $x\in\mathcal{C}([a,b])$, то* $\lim\limits_{h\to 0}\omega_0(x,h)=0$.

Доказательство. Это утверждение вытекает из равномерной непрерывности функции x на компакте $[a,b]$. □

Лемма 2. *Если $q\in L^1(a-b,b-a)$, то* $\lim\limits_{h\to 0}\omega_1(q,h)=0$.

Доказательство. Используем тот факт, что $\mathcal{C}([a-b,b-a])$ плотно в $L^1(a-b,b-a)$ и затем применим лемму 1. □

Из (H2) при $i=1,2$ имеем

$$\lim_{h\to 0}\tau(p_i,h)=0. \tag{7}$$

Теорема 1. *При выполнении условий* (H1) *и* (H2) *система* (P1) *имеем решение* $(x,y)\in\mathcal{C}([a,b])\times\mathcal{C}([a,b])$.

Доказательство. Для $f_1,f_2\in\mathcal{C}([a,b])$ рассмотрим множество

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y)\in\mathcal{C}([a,b])\times\mathcal{C}([a,b]): \quad \begin{matrix} x(a)=f_1(a), \|x-f_1\|_\infty \leqslant M_1\|p_1\|_1 \\ y(a)=f_2(a), \|y-f_2\|_\infty \leqslant M_2\|p_2\|_1 \end{matrix}\right\}. \tag{8}$$

Для всех $(x,y)\in\mathcal{D}$ определим функционал

$$\Phi(x,y)(t) = \begin{pmatrix}\Phi_{f_1}(x,y)(t)\\ \Phi_{f_2}(x,y)(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) + \int_a^t p_1(t-s)K_1(t,s,x(s),y(s))ds \\ \\ f_2(t) + \int_a^t p_2(t-s)K_2(t,s,x(s),y(s))ds \end{pmatrix} \tag{9}$$

Ясно, что множество $\mathcal{D}$ замкнуто и выпукло в $\mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b])$. Далее, для всех $(x,y) \in \mathcal{D}$, $t \in [a,b]$, $i = 1,2$ имеем

$$\Phi_{f_i}(x,y)(a) = f_i(a), \tag{10}$$

$$|\Phi_{f_i}(x,y)(t) - f_i(t)| = \left|\int_a^t p_i(t-s)K_i(t,s,x(s),y(s))ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^t |p_i(t-s)|\Big|K_i\big(t,s,x(s),y(s)\big)\Big|ds \leqslant M_i \int_a^t |p_i(t-s)|ds \leqslant M_i\|p_i\|_1. \tag{11}$$

Отсбда заключаем, что $\Phi(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Пусть $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность в $\mathcal{D}$, сходящаяся к $(x,y) \in \mathcal{D}$. для всех $t \in [a,b]$ и $i = 1,2$ имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\Phi_{f_i}(x_n,y_n)(t) = \lim_{n\to+\infty}\int_a^t p_i(t-s)K_i\big(t,s,x_n(s),y_n(s)\big)ds + f_i(t) =$$

$$= \int_a^t \lim_{n\to+\infty} p_i(t-s)K_i\big(t,s,x_n(s),y_n(s)\big)ds + f_i(t) =$$

$$= \int_a^t p_i(t-s)K_i\left(t,s,\lim_{n\to+\infty}x_n(s),\lim_{n\to+\infty}y_n(s)\right)ds + f_i(t) =$$

$$= \int_a^t p_i(t-s)K_i\big(t,s,x(s),y(s)\big)ds + f_i(t) = \Phi_{f_i}(x,y)(t),$$

откуда следует, что функционал Φ непрерывен на $\mathcal{D}$. С другой стороны, для $t \in [a,b]$ и $(x,y) \in \mathcal{D}$ имеем

$$\Big|\Phi_{f_i}(x,y)(t+h) - \Phi_{f_i}(x,y)(t)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^t \Big|p_i(t+h-s)K_i\big(t+h,s,x(s),y(s)\big) - p_i(t-s)K_i\big(t,s,x(s),y(s)\big)\Big|ds +$$

$$+ \int_t^{t+h} \Big|p_i(t+h-s)K_i\big(t+h,s,x(s),y(s)\big)\Big|ds + \big|f_i(t+h) - f_i(t)\big|.$$

Таким образом,

$$\int_a^t \Big|p_i(t+h-s)K_i\big(t+h,s,x(s),y(s)\big) - p_i(t-s)K_i\big(t,s,x(s),y(s)\big)\Big|ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^t \big|p_i(t-s)\big|\Big|K_i\big(t+h,s,x(s),y(s)\big) - K_i\big(t,s,x(s),y(s)\big)\Big|ds +$$

$$+ \int_a^t \Big|p_i(t+h-s) - p_i(t-s)\Big| \cdot \Big|K_i\big(t+h,s,x(s),y(s)\big)\Big|ds.$$

Используя условие (H1), можем найти такую точку $(\tilde{s},\tilde{x},\tilde{y}) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2$, что

$$\Big|K_i\big(t+h,s,x(s),y(s)\big) - K_i\big(t,s,x(s),y(s)\big)\Big| \leqslant \Big|K_i\big(t+h,\tilde{s},\tilde{x},\tilde{y}\big) - K_i\big(t,\tilde{s},\tilde{x},\tilde{y}\big)\Big|$$

для всех $t \in [a,b]$. Если ввести обозначение $\tilde{K}_i(t) = K_i(t,\tilde{s},\tilde{x},\tilde{y})$ для $t \in [a,b]$, то

$$\Big|K_i\big(t+h,s,x(s),y(s)\big) - K_i\big(t,s,x(s),y(s)\big)\Big| \leqslant \omega_0(\tilde{K}_i,h). \tag{12}$$

Кроме того, нетрудно видеть, что

$$\int\limits_a^t \Big|p_i(t+h-s)-p_i(t-s)\Big| \cdot \Big|K_i\big(t+h,s,x(s),y(s)\big)\Big| ds \leqslant M_i \int\limits_a^t \big|p_i(t+h-s)-p_i(t-s)\big| ds \leqslant$$
$$\leqslant M_i \int\limits_0^{t-a} \big|p_i(\sigma+h)-p_i(\sigma)\big| d\sigma \leqslant M_i \int\limits_{a-b}^{b-a} \big|p_i(\sigma+h)-p_i(\sigma)\big| d\sigma \leqslant M_i\omega_1(p_i,h). \tag{13}$$

Из (12) и (13) заключаем

$$\int\limits_a^t \Big|p_i(t+h-s)K_i\big(t+h,s,x(s),y(s)\big) - p_i(t-s)K_i\big(t,s,x(s),y(s)\big)\Big| ds \leqslant$$
$$\leqslant \omega_0\big(\tilde{K}_i,h\big)\|p_i\|_1 + M_i\omega_1(p_i,h).$$

Итак,

$$\Big|\Phi_{f_i}(x,y)(t+h) - \Phi_{f_i}(x,y)(t)\Big| \leqslant \omega_0(\tilde{K}_i,h)\|p_i\|_1 + M_i\omega_1(p_i,h) + M_i\tau(p_i,h) + \omega_0(f_i,h).$$

Согласно леммам 1 и 2, принимая во внимание последнее равенство, заключаем, что функционал $\Phi(x,y)(\cdot)$ равномерно непрерывен на $\mathcal{D}$. Окончательно, используя теорему Шаудера, получаем, что Φ_f имеем неподвижную точку в $\mathcal{D}$, а Это и означает, что система (P1) имеет решение в $\mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b])$. □

Отметим, что в [4] было наложено больше условий и использовалась теорема Банаха о неподвижной точке. Таким образом, теорема 1 с условием (H1) является более общей.

Для доказательства единственности наложим следующие условия:

$$\exists L_i, \tilde{L}_i \in \mathbb{R}_+^* \ \forall t,s \in [a,b], \ \forall x,y,\tilde{x},\tilde{y} \in \mathbb{R}:$$
$$\big|K_i(t,s,x,y) - K_i(t,s,\tilde{x},\tilde{y})\big| \leqslant L_i|x-\tilde{x}| + \tilde{L}_i|y-\tilde{y}|, \quad i=1,2. \tag{H3}$$

Пусть $\{T_j\}_{0\leqslant j\leqslant k}$ — такое разбиение

$$a = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \ldots \leqslant T_k = b \tag{14}$$

интервала $[a,b]$, что существует $\rho > 0$ для которого при всех $t,s \in [T_j,T_{j+1}]$ имеем

$$\max(L_i,\tilde{L}_i) \int\limits_{T_j}^{\min(t,T_{j+1})} |p_i(t-s)| ds \leqslant \rho < \frac{1}{2}. \tag{H2'}$$

Отметим, что условие (H2') сожно вывести из условия (H2). Сначала докажем единственность решения системы (P1) на интервале $[T_0,T_1]$, затем продолжим это решение на $[T_1,T_2]$ и т. д.

Теорема 2. *При выполнении условий* (H3) *решение системы* (P1) *единственно на* $\mathcal{C}([T_0,T_1]) \times \mathcal{C}([T_0,T_1])$.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения (x, y) и $(\tilde{x}, \tilde{y})$ системы (P1). Тогда для $t \in [T_0, T_1]$ имеем

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leqslant \int\limits_a^t |p_1(t-s)| \Big| K_1\big(t, s, x(s), y(s)\big) - K_1\big(t, s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s)\big)\Big| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^t |p_1(t-s)| \Big[L_1 |x(s) - \tilde{x}(s)| + \tilde{L_1} |y(s) - \tilde{y}(s)|\Big] ds \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\max_{T_0 \leqslant t \leqslant T_1} |x_1(t) - x_2(t)| + \max_{T_0 \leqslant t \leqslant T_1} |y_1(t) - y_2(t)|\Big] \max(L_1, \tilde{L_1}) \int\limits_a^t |p_1(t-s)| ds \leqslant$$

$$\leqslant \rho \Big[\max_{T_0 \leqslant t \leqslant T_1} |x(t) - \tilde{x}(t)| + \max_{T_0 \leqslant t \leqslant T_1} |y(t) - \tilde{y}(t)|\Big].$$

Аналогично,

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leqslant \int\limits_a^t |p_2(t-s)| \Big| K_2\big(t, s, x(s), y(s)\big) - K_2\big(t, s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s)\big)\Big| ds \leqslant$$

$$\leqslant \rho \Big[\max_{T_0 \leqslant t \leqslant T_1} |x(t) - \tilde{x}(t)| + \max_{T_0 \leqslant t \leqslant T_1} |y(t) - \tilde{y}(t)|\Big].$$

Таким образом,

$$\max_{T_0 \leqslant t \leqslant T_1} |x(t) - \tilde{x}(t)| + \max_{T_0 \leqslant t \leqslant T_1} |y(t) - \tilde{y}(t)| \leqslant 2\rho \Big[\max_{T_0 \leqslant t \leqslant T_1} |x(t) - \tilde{x}(t)| + \max_{T_0 \leqslant t \leqslant T_1} |y(t) - \tilde{y}(t)|\Big].$$

Поскольку $\rho < 1/2$, заключаем, что $(1 - 2\rho) > 0$; следовательно, $x(t) = \tilde{x}(t)$ и $y(t) = \tilde{y}(t)$ при $t \in [T_0, T_1]$. □

Продолжим найденное решение на весь интервал $[a, b]$.

Теорема 3. *Система* (P1) *имеем единственное решение* $(x, y) \in \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$.

Доказательство. Обозначим через (x_0, y_0) решение системы (P1) на $[T_0, T_1]$, а через (x_1, y_1) — решение системы (P1) на $t \in [T_1, T_2]$:

$$\begin{cases} x_1(t) = f_1(t) + \int\limits_{T_0}^{T_1} p_1(t-s) K_1\big(t, s, x_0(s), y_0(s)\big) ds + \int\limits_{T_1}^{t} p_1(t-s) K_1\big(t, s, x_1(s), y_1(s)\big) ds, \\ y_1(t) = f_2(t) + \int\limits_{T_0}^{T_1} p_2(t-s) K_2\big(t, s, x_0(s), y_0(s)\big) ds + \int\limits_{T_1}^{t} p_2(t-s) K_2\big(t, s, x_1(s), y_1(s)\big) ds. \end{cases} \tag{15}$$

Доказательство существования и единственности решения (x_1, y_1) на $[T_1, T_2]$ проводится так же, как и выше. Определим теперь решение системы (P1) на $[T_0, T_2]$ следующим образом:

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [T_0, T_1], \\ x_1(t), & t \in [T_1, T_2], \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} y_0(t), & t \in [T_0, T_1], \\ y_1(t), & t \in [T_1, T_2]. \end{cases}$$

Ясно, что $(x, y) \in \mathcal{C}([T_0, T_2]) \times \mathcal{C}([T_0, T_2])$, откуда следует, что система (P1) имеет единственное решение на $[T_0, T_2]$. Продолжая аналогичным образом, можно построить решение на $[a, b]$. □

3. Численный эксперимент. Система (P1) содержит ядра, состоящие из двух слагаемых: регулярных K_i и слабо сингулярных p_i, $i = 1, 2$. Для устранения сингулярностей применим метод интегрирования произведения. Построим приближения регулярных частей K_1, K_2.

Пусть $\{t_j\}_{0\leqslant j\leqslant n}$ — разбиение интервала, где $t_j = a + jh$ и $h = (b - a)/n$. Введем следующие обозначения:

$$P_{n,1}[K_1](t,s,x(s),y(s)) = \frac{s-t_j}{h}K_1(t,t_{j+1},x(t_{j+1}),y(t_{j+1})) + \frac{t_{j+1}-s}{h}K_1(t,t_j,x(t_j),y(t_j)),$$
$$P_{n,1}[K_2](t,s,x(s),y(s)) = \frac{s-t_j}{h}K_2(t,t_{j+1},x(t_{j+1}),y(t_{j+1})) + \frac{t_{j+1}-s}{h}K_2(t,t_j,x(t_j),y(t_j)),$$

где $t_j \leqslant s \leqslant t_{j+1}$; получим приближение следующих интегралов:

$$\int\limits_a^{t_i} p_1(t_i-s)K_1(t_i,s,x(s),y(s))ds \simeq \gamma_{i,1}K_1(t_i,t_0,x(t_0),y(t_0)) + \lambda_{i,i}K_1(t_i,t_i,x(t_i),y(t_i)) + \\ + \sum_{j=1}^{i-1}(\gamma_{i,j+1}+\lambda_{i,j})K_1(t_i,t_j,x(t_j),y(t_j)), \quad (16)$$

$$\int\limits_a^{t_i} p_2(t_i-s)K_2(t_i,s,x(s),y(s))ds \simeq \tilde\gamma_{i,1}K_2(t_i,t_0,x(t_0),y(t_0)) + \tilde\lambda_{i,i}K_2(t_i,t_n,x(t_i),y(t_i)) + \\ + \sum_{j=1}^{i-1}(\tilde\gamma_{i,j+1}+\tilde\lambda_{i,j})K_2(t_i,t_j,x(t_j),y(t_j)), \quad (17)$$

где

$$\begin{cases} \gamma_{i,j+1} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} p_1(t_i-s)(t_{j+1}-s)ds, & \lambda_{i,j+1} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} p_1(t_i-s)(s-t_j)ds, \\ \tilde\gamma_{i,j+1} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} p_2(t_i-s)(t_{j+1}-s)ds, & \tilde\lambda_{i,j+1} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} p_2(t_i-s)(s-t_j)ds \end{cases}$$

для всех $0 \leqslant j \leqslant i-1$.

Приближенная система для (P1) получается следующим образом:

$$\begin{cases} X_i = f_1(t_i) + \gamma_{i,1}K_1(t_i,t_0,X_0,Y_0) + \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}(\gamma_{i,j+1}+\lambda_{i,j})K_1(t_i,t_j,X_j,Y_j) + \lambda_{i,i}K_1(t_i,t_i,X_i,Y_i), \\ Y_i = f_2(t_i) + \tilde\gamma_{i,1}K_2(t_i,t_0,X_0,Y_0) + \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}(\tilde\gamma_{i,j+1}+\tilde\lambda_{i,j})K_2(t_i,t_j,X_j,Y_j) + \tilde\lambda_{i,i}K_2(t_i,t_i,X_i,Y_i), \\ X_0 = f_1(a), \quad Y_0 = f_2(a), \end{cases} \quad (\Gamma)$$

для всех $0 \leqslant j \leqslant i-1$, где X_i, Y_i — приближения для $x(t_i)$ и $y(t_i)$.

Теорема 4. *При достаточно малых h система* (Γ) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Введем обозначение

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\| = |X| + |Y|.$$

Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ положим

$$\Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S_1 + \lambda_{i,i}K_1(t_i,t_i,X,Y) \\ S_2 + \tilde\lambda_{i,i}K_2(t_i,t_i,X,Y) \end{pmatrix},$$

где

$$S_1 = f_1(t_i) + \gamma_{i,1}K_1(t_i, t_0, X_0, Y_0) + \sum_{j=1}^{i-1}(\gamma_{i,j+1} + \lambda_{i,j})K_1(t_i, t_j, X_j, Y_j),$$

$$S_2 = f_2(t_i) + \tilde{\gamma}_{i,1}K_2(t_i, t_0, X_0, Y_0) + \sum_{j=1}^{i-1}(\tilde{\gamma}_{i,j+1} + \tilde{\lambda}_{i,j})K_2(t_i, t_j, X_j, Y_j).$$

Предположив, что $X_0, X_1, \ldots, X_{i-1}$ и $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{i-1}$ известны, получим систему неявных уравнений

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \Psi_i \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Докажем, что Ψ_i имеет единственную неподвижную точку,

$$\left\| \Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \right\|,$$

$$\eta_1 = \lambda_{i,i}(K_1(t_i, t_i, X, Y) - K_1(t_i, t_i, X', Y')), \quad \eta_2 = \tilde{\lambda}_{i,i}(K_2(t_i, t_i, X, Y) - K_2(t_i, t_i, X', Y')).$$

При достаточно малом h имеем

$$|\eta_1| \leqslant \lambda_{i,i}(L_1|X - X'| + \tilde{L}_1|Y - Y'|) \leqslant \max(L_1, \tilde{L}_1)\lambda_{i,i}(|X - X'| + |Y - Y'|),$$

$$|\eta_2| \leqslant \tilde{\lambda}_{i,i}(L_2|X - X'| + \tilde{L}_2|Y - Y'|) \leqslant \max(L_2, \tilde{L}_2)\tilde{\lambda}_{i,i}(|X - X'| + |Y - Y'|).$$

Таким образом,

$$\left\| \Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_i \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\| \leqslant \max(L_1, \tilde{L}_1, L_2, \tilde{L}_2) \max(\lambda_{i,i}, \tilde{\lambda}_{i,i}) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|.$$

Следовательно, $\lim\limits_{h\to 0} \max(\lambda_{i,i}, \tilde{\lambda}_{i,i}) = 0$. Согласно теореме Банаха о неподвижной точке Ψ_i является сжимающим отображением при достаточно малом h. Таким образом, система (Г) имеет единственное решение $\{(X_i, Y_i)\}_{1\leqslant i\leqslant n}$. □

Докажем сходимость этого метода. Сначала установим согласованность. Ошибка согласованности — это величина

$$\Delta(h, t_i) = \begin{pmatrix} \delta(h, t_i) \\ \hat{\delta}(h, t_i) \end{pmatrix},$$

где

$$\delta(h, t_i) = \int_a^{t_i} p_1(t_i - s)K_1(t_i, s, x(s), y(s))ds - \sum_{j=0}^{i} \mu_{ij}K_1(t_i, t_j, x(t_j), y(t_j)),$$

$$\hat{\delta}(h, t_i) = \int_{t_0}^{t_i} p_2(t_i - s)K_2(t_i, s, x(s), y(s))ds - \sum_{j=0}^{i} \hat{\mu}_{ij}K_2(t_i, t_j, x(t_j), y(t_j)),$$

причем

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \gamma_{i,1} & \text{при } j = 0, \\ \gamma_{i,j+1} + \lambda_{i,j} & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant i - 1, \\ \lambda_{i,i} & \text{при } j = i; \end{cases} \qquad \hat{\mu}_{ij} = \begin{cases} \tilde{\gamma}_{i,1} & \text{при } j = 0, \\ \tilde{\gamma}_{i,j+1} + \tilde{\lambda}_{i,j} & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant i - 1, \\ \tilde{\lambda}_{i,i} & \text{при } j = i. \end{cases}$$

Предложение 1. *Если $\Delta(h, t_i)$ — непрерывная функция, то для всех $t \in [a, b]$ и $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |\Delta(h, t_i)| \leqslant \max_{\substack{a\leqslant t\leqslant b; \\ x,y\in\mathbb{R}}} \omega_0(h, K_1(t, \cdot, x, y))\|p_1\|_1 + \max_{\substack{a\leqslant t\leqslant b; \\ x,y\in\mathbb{R}}} \omega_0(h, K_2(t, \cdot, x, y))\|p_2\|_1 + $$
$$+ 2\rho(\omega_0(h, f_1) + \omega_0(h, f_2) + \omega(h, H_1) + \omega(h, H_2)),$$

где

$$H_1(t)=\int_a^t p_1(t-s)K_1(t,s,x(s),y(s))ds, \quad H_2(t)=\int_a^t p_2(t-s)K_2(t,s,x(s),y(s))ds.$$

Доказательство. Известно, что

$$\begin{aligned}|\delta(h,t_i)| \leqslant \max_{|\tau-\theta|<h}\Big|K_1\big(t_i,\tau,x(\tau),y(\tau)\big)-K_1\big(t_i,\tau,x(\theta),y(\theta)\big)\Big|+\\ +\Big|K_1\big(t_i,\tau,x(\theta),y(\theta)\big)-K_1\big(t_i,\theta,x(\theta),y(\theta)\big)\Big|\int_a^{t_n}|p_1(t_i-s)|\,ds\leqslant\\ \leqslant \max_{\substack{a\leqslant t\leqslant b;\\ x,y\in\mathbb{R}}}\Big|K_1\big(t,\tau,x,y\big)-K_1\big(t,\theta,x,y\big)\Big|\int_a^{t_i}|p_1(t_i-s)|\,ds+\rho\left(\omega_0(h,x)+\omega_0(h,y)\right),\end{aligned}$$

но

$$x(\theta)-x(\tau)=f_1(\theta)-f_1(\tau)+\int_a^{\theta}p_1(\theta-s)K_1\big(\theta,s,x(s),y(s)\big)ds-\int_a^{\tau}p_1(\tau-s)K_1\big(\tau,s,x(s),y(s)\big)ds.$$

Тогда

$$\max_{|\tau-\theta|<h}|x(\theta)-x(\tau)|\leqslant\max_{|\tau-\theta|<h}|f_1(\theta)-f_1(\tau)|+\max_{|\tau-\theta|<h}|H_1(\theta)-H_1(\tau)|,$$
$$\omega_0(h,x)\leqslant\omega_0(h,f_1)+\omega_0(h,H_1);$$

получаем

$$\omega_0(h,y)\leqslant\omega_0(h,f_2)+\omega_0(h,H_2).$$

Таким образом,

$$|\delta(h,t_i)|\leqslant\rho(\omega_0(h,f_1)+\omega_0(h,f_2)+\omega_0(h,H_1)+\omega_0(h,H_2))+\max_{a\leqslant t\leqslant b;\ x,y\in\mathbb{R}}\omega_0(h,K_1(t,\cdot,x,y))\|p_1\|_1.$$

Повторяя аналогичные шаги для $\hat{\delta}(h,t_i)$, получим

$$|\hat{\delta}(h,t_i)|\leqslant\rho(\omega_0(h,f_1)+\omega_0(h,f_2)+\omega_0(h,H_1)+\omega_0(h,H_2))+\max_{a\leqslant t\leqslant b;\ x,y\in\mathbb{R}}\omega_0(h,K_2(t,\cdot,x,y))\|p_2\|_1,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta(h,t_i)|\leqslant\max_{\substack{a\leqslant t\leqslant b;\\ x,y\in\mathbb{R}}}\omega_0(h,K_1(t,\cdot,x,y))\|p_1\|_1+\max_{\substack{a\leqslant t\leqslant b;\\ x,y\in\mathbb{R}}}\omega_0(h,K_2(t,\cdot,x,y))\|p_2\|_1+\\ +2\rho(\omega_0(h,f_1)+\omega_0(h,f_2)+\omega(h,H_1)+\omega(h,H_2)).\end{aligned}$$ □

Таким образом, метод согласован, если

$$\lim_{h\to0}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|\Delta(h,t_i)\|\right)=0.$$

Далее, докажем сходимость; для этого определим ошибку дискретизации следующим образом:

$$\zeta_i=\begin{pmatrix}\xi_i\\ \hat{\xi}_i\end{pmatrix},\quad\text{где}\quad\begin{cases}\xi_i=X_i-x(t_i),\\ \hat{\xi}_i=Y_i-y(t_i).\end{cases}$$

Метод называется сходящимся, если

$$\lim_{h\to0}\left(\max_{0\leqslant i\leqslant n}\|\zeta_i\|\right)=0.$$

Теорема 5. *Предположим, что выполнены условия* (H1), (H2) *и* (H3), *а интервал* $[a,b]$ *разбит на конечно число подынтервалов* $[a = T_0, T_1]$, $[T_1, T_2]$, $\ldots$, $[T_{m-1}, T_m = b]$. *причем* $j_v \leqslant T_v/h$ — *наибольшее целое число,* $\mu_{ij} = \hat{\mu}_{ij} = 0$ *при* $j > i$, *а веса* μ_{ij}, $\hat{\mu}_{ij}$ *удовлетворяют следующим условиям*:

$$\sum_{j=j_v}^{j_{v+1}-1} \left| \frac{\max(L_1, \tilde{L}_1)\mu_{ij} + \max(L_2, \tilde{L}_2)\hat{\mu}_{ij}}{1 - [\max(L_1, \tilde{L}_1)\mu_{ii} + \max(L_2, \tilde{L}_2)\hat{\mu}_{ii}]} \right| \leqslant 2\rho < 1, \quad i \geqslant 1, \ 0 \leqslant v \leqslant m.$$

Если указанное разбиение не зависит от h, *то*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\zeta_i\| \leqslant \left(\frac{1}{1-2\rho}\right)^m \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\Delta(h, t_i)\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\xi_i = \sum_{j=0}^{i} \mu_{ij} \Big[K_1\big(t_i, t_j, X_j, Y_j\big) - K_1\big(t_i, t_j, x(t_j), y(t_j)\big)\Big] - \delta(h, t_i),$$

$$\hat{\xi}_i = \sum_{j=0}^{i} \hat{\mu}_{ij} \Big[K_2\big(t_i, t_j, X_j, Y_j\big) - K_2\big(t_i, t_j, x(t_j), y(t_j)\big)\Big] - \hat{\delta}(h, t_i).$$

Следовательно,

$$\|\zeta_i\| \leqslant \sum_{j=0}^{i} \Big[\max(L_1, \tilde{L}_1)\mu_{ij} + \max(L_2, \tilde{L}_2)\hat{\mu}_{ij}\Big] \|\zeta_j\| + \|\Delta(h, t_i)\|.$$

Для малых h имеем

$$\|\zeta_i\|_1 \leqslant \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\max(L_1, \tilde{L}_1)\mu_{ij} + \max(L_2, \tilde{L}_2)\hat{\mu}_{ij}}{1 - [\max(L_1, \tilde{L}_1)\mu_{ii} + \max(L_2, \tilde{L}_2)\hat{\mu}_{ii}]} \|\zeta_j\| + \frac{\|\Delta(h, t_i)\|}{1 - [\max(L_1, \tilde{L}_1)\mu_{ii} + \max(L_2, \tilde{L}_2)\hat{\mu}_{ii}]}.$$

Для завершения доказательства остается применить [6, Theorem 8.1]. □

4. Численные примеры.

Пример 1. Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений Вольтерры со слабо сингулярным ядром:

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_a^t (t-s)^{-1/8} \frac{t^2(2e^{-s}+1)}{e^{-x(s)} + e^{-y(s)} + 1} ds + f_1(t), \\ y(t) = \displaystyle\int_a^t (t-s)^{-2/7} \frac{e^{-t}(t+s)}{\sin(x(s))^2 + \cos(y(s))^2 + 1} ds + f_2(t); \end{cases} \tag{P1}$$

здесь $t \in [0,1]$, а ядра, имеющие вид

$$K_1(t,s,x,y) = \frac{t^2(2e^{-s}+1)}{x^2+y^2+t^2}, \quad K_2(t,s,x,y) = \frac{e^{-t}(t+s)}{\sin(x)^2 + \cos(y)^2 + 1},$$
$$p_1(t,s) = (t-s)^{-1/8}, \qquad p_2(t,s) = (t-s)^{-2/7}.$$

удовлетворяют условиям (H1), (H2) и (H3) при $L_1 = \tilde{L}_1 = M_1 = 3$, $L_2 = \tilde{L}_2 = M_2 = 2$. Если положить

$$f_1(t) = t - \frac{8}{7} t^{23/8}, \quad f_2(t) = t - \frac{133}{120} e^{-t} t^{12/7},$$

получим $x(t) = t$, $y(t) = t$.

Величины X_i и Y_i не поддаются точному вычислению, но могут быть найдены приближенно при помощи итерационного метода Банаха при условии остановки $\|X_{\text{new}} - X_{\text{old}}\| \leqslant 10^{-7}$.

Таблица 1. Численные результаты для примера 1

n	$E(h)$
10	$6{,}4097 \cdot 10^{-3}$
50	$6{,}4419 \cdot 10^{-4}$
100	$2{,}4559 \cdot 10^{-4}$
500	$2{,}6617 \cdot 10^{-5}$
1000	$1{,}0250 \cdot 10^{-5}$
1500	$5{,}8676 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2. Численные результаты для примера 2

n	$E(h)$
10	$2{,}9003 \cdot 10^{-3}$
50	$2{,}4063 \cdot 10^{-4}$
100	$8{,}4262 \cdot 10^{-5}$
500	$7{,}4798 \cdot 10^{-6}$
1000	$2{,}6421 \cdot 10^{-6}$
1500	$1{,}4377 \cdot 10^{-6}$

В таблице 1 приведены оценки ошибки, т.е. разности точного и приближенного решений:

$$E(h) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} \bigl|X_i - x(t_i)\bigr| + \max_{0\leqslant i\leqslant n} \bigl|Y_i - y(t_i)\bigr|, \tag{19}$$

Отметим, что разность точного и приближенного решением стремится к нулю при $n \to \infty$; это показывает сходимость и эффективность нашего метода.

Пример 2. Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений Вольтерры со слабо сингулярными ядрами:

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_a^t (t-s)^{-1/2} \frac{2s\ln(1+t)}{\sqrt{x^2(s)+y^2(s)+1}} ds + f_1(t), \\ y(t) = \displaystyle\int_a^t (t-s)^{-1/5} (t+s^2) \cos\left(\frac{1}{x^2(s)+y^2(s)+1}\right) \sin(t) ds + f_2(t); \end{cases} \tag{P1}$$

здесь $t \in [0,1]$, а ядра, имеющие вид

$$K_1(t,s,x,y) = \frac{2s\ln(1+t)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \quad K_2(t,s,x,y) = (t+s^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2+1}\right)\sin(t),$$
$$p_1(t,s) = (t-s)^{-1/2}, \qquad p_2(t,s) = (t-s)^{-1/5}$$

удовлетворяют условиям (H1), (H2) и (H3) при $L_1 = \tilde{L_1} = 2\sqrt{2}$, $M_1 = \ln 2$, $L_2 = \tilde{L_2} = 4$, $M_2 = 2$. Если положить

$$f_1(t) = \sin(t) - \frac{4\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \ln(1+t), \quad f_2(t) = \cos(t) - \frac{5}{252}\cos\left(\frac{1}{2}\right)\sin(t)(25t^2+63)t^{4/5}.$$

получим $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$.

Величины X_i и Y_i не поддаются точному вычислению, но могут быть найдены приближенно при помощи итерационного метода Банаха при условии остановки $\|X_{\text{new}} - X_{\text{old}}\| \leqslant 10^{-7}$.

В таблице 2 приведены оценки ошибки (19). На рис. 1 показаны графики точного и приближенного решений. Как и в предыдущем примере, разность точного и приближенного решением стремится к нулю при $n \to \infty$, что подтверждает сходимость и эффективность метода.

5. Заключение. В данной работе проведено обобщение результатов, полученных в [4] для нелинейного слабо сингулярного интегрального уравнения Вольтерра, на систему уравнений. Для доказательства существования и единственности решения использована теорема Шаудера о неподвижной точке. Для численного исследования применен метод интегрирования произведения, позволяющий устранить сингулярность ядер, что дает возможность аппроксимировать решение этой системы.

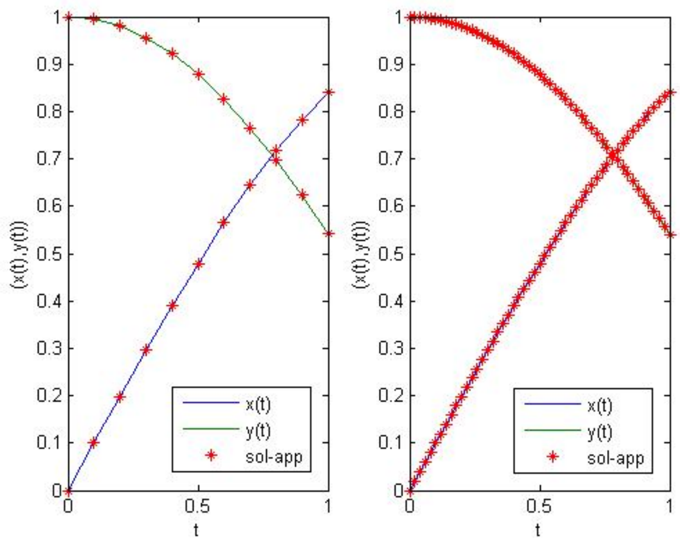

Рис. 1. Точное и приближенное решения системы (P1) при $n = 10$ и $n = 50$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ahues M., Largillier A., Titaud O.* The roles of a weak singularity and the grid uniformity in relative error bounds// Numer. Funct. Anal. Optim. — 2001. — *22*, № 7. — P. 789–814.
2. *Atkinson K., Han W.* Theoretical Numerical Analysis. — New York: Springer-Verlag, 2009.
3. *Brunner H., van der Houwen P. J.* The numerical solution of Volterra equations// Math. Comput. — 1988. — *51*, № 183. — P. 379.
4. *Ghiat M., Guebbai H.* Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear equation with weakly singular kernel// Comput. Appl. Math. — 2018. — *37*, № 4. — P. 4661–4674.
5. *Guebbai H., Aissaoui M. Z., Debbar I., Khalla B.* Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation// Appl. Math. Comput. — 2014. — *229*. — P. 367–373.
6. *Linz P.* Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. — Philadelphia: SIAM, 1985.
7. *Maleknejad K., Torabi P., Sauter S.* Numerical solution of a nonlinear Volterra integral equation// Vietnam J. Math. — 2015. — *44*, № 1. — P. 1–24.
8. *Maleknejad K., Torabi P., Mollapourasl R.* Fixed point method for solving nonlinear quadratic Volterra integral equations// Comp. Math. Appl. — 2011. — *62*, № 6. — P. 2555–2566.
9. *Segni S., Ghiat M., Guebbai H.* New approximation method for Volterra nonlinear integro-differential equation// Asian-Eur. J. Math. — 2019. — *12*, № 1. — 1950016.

Ghiat Mourad
Universite 8 Mai 1945, Guelma, Algeria
E-mail: mourad.ghi24@gmail.com; ghiat.mourad@univ-guelma.dz

Kamouche Soumia
Universite 8 Mai 1945 Guelma, Algeria
E-mail: soumia.kamouche@gmail.com

Khellaf Ammar
Universite 8 Mai 1945, Guelma, Algeria
E-mail: amarlasix@gmail.com; khellaf.ammar@univ-guelma.dz

Merchela Wassim
Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина
E-mail: merchela.wassim@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 45–68
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-45-68

УДК 517.927.2

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ НА КРИВОЙ С ПАРАМЕТРОМ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ И УСЛОВИЯХ РАЗРЫВОВ РЕШЕНИЙ

© 2021 г. **А. А. ГОЛУБКОВ**

Аннотация. При больших значениях модуля спектрального параметра получена и исследована асимптотика решений уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида с кусочно целым потенциалом на лежащей в комплексной плоскости спрямляемой кривой произвольной формы с конечным числом точек, в которых решения и (или) их производные претерпевают разрывы, полиномиально зависящие от спектрального параметра. Для распадающихся краевых условий, также полиномиально зависящих от спектрального параметра, изучен спектр соответствующего оператора Штурма—Лиувилля.

Ключевые слова: уравнение Штурма—Лиувилля на кривой, условия разрыва решений, кусочно целый потенциал, асимптотика решений, асимптотика спектра.

SPECTRUM OF THE STURM–LIOUVILLE OPERATOR ON A CURVE WITH PARAMETERS IN THE BOUNDARY CONDITIONS AND DISCONTINUITY CONDITIONS FOR SOLUTIONS

© 2021 **A. A. GOLUBKOV**

Abstract. For large values of the modulus of the spectral parameter, we obtain and analyze the asymptotics of solutions of the standard Sturm–Liouville equation with a piecewise integer potential on a general rectifiable curve lying in the complex plane and having a finite number of points at which the solutions and/or their derivatives have discontinuities polynomially depending on the spectral parameter. For decaying boundary conditions that also depend on the spectral parameter polynomially, we examine the spectrum of the corresponding Sturm–Liouville operator.

Keywords and phrases: Sturm–Liouville equation on a curve, discontinuity condition for solutions, piecewise integral potential, asymptotics of solutions, asymptotics of the spectrum.

AMS Subject Classification: 34B24, 34L20, 34M45

1. Введение. Постановка задачи и основные результаты. Уравнения Штурма—Лиувилля общего вида на отрезке часто встречаются в различных приложениях. Например, распространение света в одномерно неоднородной пластине толщиной d, обладающей магнитными свойствами, может быть описано уравнением вида

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p^2(x)}{\theta(x)}\frac{dv}{dx}\right)+\theta(x)p^2(x)(q(x)-\lambda^2)v(x)=0 \quad (x\in[0,d]), \tag{1.1}$$

где комплекснозначные функции p, θ и q — кусочно аналитичны на отрезке действительной оси $[0,d]$, причем $p\neq 0$ и $\theta\neq 0$ на этом отрезке.

Спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке активно изучались и изучаются в различных постановках, в том числе в случае краевых условий, полиномиально зависящих от спектрального параметра и при наличии разрывов решений во внутренних точках (см., например, работы [11, 14, 17–19, 24, 25, 27] и библиографию в них). Однако, несмотря на это, отсутствуют результаты, которые можно было бы непосредственно использовать при исследовании краевых задач для уравнения (1.1), не накладывая на его коэффициенты ограничений, дополнительных к перечисленным выше. Во многом это связано с принципиальными трудностями, возникающими в этом случае при попытке применить классические методы (см. [2, 9]) получения асимптотики решений дифференциальных уравнений при больших значениях $|\lambda|$. Результаты настоящей работы показывают, что одним из возможных путей преодоления этих трудностей является использование известной подстановки (см. [11]), которая в наших обозначениях принимает вид

$$u(z) := p(x)v(x), \quad z = V(x) = \int\limits_0^x \theta(\tau)d\tau \quad (x \in [0, d]). \tag{1.2}$$

Замена (1.2) преобразует уравнение (1.1) в уравнение Штурма—Лиувилля стандартного вида

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \tag{1.3}$$

на спрямляемой кривой γ с параметризацией $z = V(x)$ $(x \in [0, d])$. При этом потенциал Q связан с функциями p, θ и q следующим соотношением:

$$Q(z) := q(x) - \frac{1}{p(x)\theta(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\theta(x)}\frac{dp}{dx}\right) \quad (z = V(x),\ x \in [0, d]).$$

У кривой γ могут быть участки (точки), которые проходятся более одного раза, т. е. соответствуют двум или более интервалам значений (значениям) параметра t. Такие участки (точки) различаются очередностью прохождения, а геометрически совпадающие кривые с различным порядком прохождения участков считаются различными. Если функция θ действительная и знакопостоянная на отрезке $[0, d]$, то γ является отрезком действительной оси.

В (1.3) и далее штрих по умолчанию обозначает производную по z вдоль некоторой спрямляемой кривой. Иными словами, считается, что если эта кривая задана параметрически функцией $z = V(x)$, то

$$f'(z) \equiv f'(V(x)) := \lim_{\delta\to 0}\frac{f(V(x+\delta)) - f(V(x))}{V(x+\delta) - V(x)}.$$

Заметим, что если функция $f(z)$ аналитична в некоторой области комплексной плоскости, то в любой точке этой области она имеет производные вдоль любой проходящей через эту точку спрямляемой кривой, которые совпадают между собой и равны обычной производной $df(z)/dz$ функции $f(z)$ в этой точке.

Производную по действительной переменной x будем обозначать штрихом и нижним индексом x. Пусть нас интересовали непрерывные решения v уравнения (1.1), такие, что функции $p^2v'_x/\theta$ также непрерывны. Тогда в силу (1.2), если функции p и (или) pp'_x/θ имеют разрывы при некотором значении переменной $x \in [0, d]$, то в соответствующей точке $z = V(x)$ кривой γ решения уравнения (1.3) и (или) их производные вдоль кривой γ также имеют разрывы:

$$\begin{pmatrix} u(V(x+0)) \\ u'(V(x+0)) \end{pmatrix} = \hat\eta(V(x))\begin{pmatrix} u(V(x-0)) \\ u'(V(x-0)) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

При этом матрица перехода $\hat\eta$ в этой точке кривой γ определяется формулой

$$\hat\eta(V(x)) = \begin{pmatrix} \dfrac{p(x+0)}{p(x-0)} & 0 \\ \dfrac{p'_x(x+0)}{p(x-0)\theta(x+0)} - \dfrac{p'_x(x-0)}{p(x+0)\theta(x-0)} & \dfrac{p(x-0)}{p(x+0)} \end{pmatrix},$$

не зависит от спектрального параметра и имеет определитель, равный единице. В (1.4) и далее

$$f(V(x \pm 0)) := \lim_{\delta \to 0, \delta > 0} f(V(x \pm \delta)).$$

Если уравнение (1.1) дополнить при некоторых значениях переменной x полиномиально зависящими от спектрального параметра $\rho := \lambda^2$ условиями разрыва решений v и функций $p^2 v'_x/\theta$, то в соответствующих точках $z = V(x)$ кривой γ решения уравнения (1.3) и их производные вдоль кривой γ также будут иметь разрывы, которые полиномиально зависят от ρ; то же самое относится и к граничным условиям.

Исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений на комплексной плоскости посвящено большое число работ (см. книги [2, 9, 16] и библиографию в них). Однако асимптотическое поведение при $|\lambda| \to \infty$ решений уравнений Штурма—Лиувилля на кривых и спектры краевых задач для таких уравнений изучены только при достаточно жестких ограничениях на форму кривой (см. [5, 7, 8]) и (или) на коэффициенты уравнения (см. [2, 4, 16]). Например, в [7] рассмотрены задачи с простейшими краевыми условиями для уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида (1.3) на выпуклой кривой γ с параметризацией $z(x) = x + is(x)$ ($x \in [0, 1]$, $s(0) = s(1) = 0$, функция $s(x)$ непрерывно дифференцируема, s' не убывает, $s'(0) < 0 < s'(1)$, i — мнимая единица) и исследованы необходимые и достаточные условия (на потенциал $Q \in L^1(\gamma)$) локализации спектра этих задач около одного луча. В [4] получена асимптотика решений уравнения (1.3), непрерывно дифференцируемых на спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbb{C}$ произвольной формы с заданным на ней потенциалом Q, который является кусочно целым. Последнее означает, что кривую можно разбить N точками на $N + 1$ таких участков, что на каждом из них потенциал совпадает почти всюду с какой-либо целой функцией, причем на соседних участках эти целые функции различны. Краевые задачи на кривых (и даже ломаных) произвольной формы для уравнения (1.3) с граничными условиями и условиями разрыва решений, полиномиально зависящими от параметра, ранее не рассматривались.

В настоящей работе полученная в [4] асимптотика решений уравнения (1.3) с кусочно целым потенциалом обобщена на случай, когда на произвольной спрямляемой кривой γ задано конечное число точек, в которых эти решения и (или) их производные вдоль кривой претерпевают разрывы. Изучена краевая задача для такого уравнения с распадающимися граничными условиями. При этом на элементы матриц перехода и коэффициенты в граничных условиях накладываются следующие ограничения — полиномиальная зависимость от спектрального параметра ρ и независимость от ρ определителей матриц перехода во внутренних точках кривой. Доказано, что в зависимости от формы кривой γ, а также значений элементов матриц перехода и коэффициентов в граничных условиях, спектр краевой задачи может быть только одного из четырех типов: совпадающий со всей комплексной плоскостью, пустой, конечный или счетный, локализованный около конечного числа лучей. Сформулированы необходимые и достаточные условия реализации каждого из случаев и исследованы асимптотические свойства счетного спектра.

Перейдем к формализации исследуемой задачи и изложению основных результатов работы.

В работе будут использованы следующие обозначения: $O(1)$ и $\hat{O}(1)$ — соответственно функции и матрицы функций параметра λ, вид которых для нас не важен, ограниченные при $|\lambda| > \lambda_{cr}$, где λ_{cr} обозначает некоторую конечную величину (разную для разных функций и матриц),

$$\hat{\sigma}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{I} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть на непрерывной спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbb{C}$ с параметризацией $z = V(t)$ ($t \in [t_0, t_f]$) определена кусочно целая функция Q и заданы точки, в которых решения уравнения (1.3) и (или) их производные имеют разрывы, полиномиально зависящие от спектрального параметра. Иными словами, пусть существуют такие целое число $N \geqslant 0$ и набор чисел $T = \{t_j\}_0^{N+1}$: $t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} \equiv t_f$, что

$$Q(z) \overset{\text{п.в.}}{=} Q_m(z), \text{ если } z = V(t), \ t \in [t_m, t_{m+1}] \quad (m = \overline{0, N}), \tag{1.5}$$

где все Q_m — целые функции. Кроме того, функции $u(z)$ и $u'(z)$ удовлетворяют следующим условиям разрыва в точках $z_j := V(t_j)$ ($j = \overline{0, N+1}$) кривой γ:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u(V(t_0+0)) \\ u'(V(t_0+0)) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(0)} \begin{pmatrix} u(V(t_0)) \\ u'(V(t_0)) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u(V(t_n+0)) \\ u'(V(t_n+0)) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(n)} \begin{pmatrix} u(V(t_n-0)) \\ u'(V(t_n-0)) \end{pmatrix} \quad (n=\overline{1,N} \text{ при } N \geqslant 1), \\ \begin{pmatrix} u(V(t_{N+1})) \\ u'(V(t_{N+1})) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(N+1)} \begin{pmatrix} u(V(t_{N+1}-0)) \\ u'(V(t_{N+1}-0)) \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Здесь матрицы перехода $\hat{\eta}^{(j)}$ полиномиально зависят от ρ ($\rho = \lambda^2$), и, следовательно, их элементы могут быть записаны в виде

$$\eta^{(j)}_{\alpha\beta}(\rho) = \eta^{(j)}_{\alpha\beta,0}\rho^{N^{(j)}_{\alpha\beta}}\left(1+\frac{O(1)}{\rho}\right) \quad \bigl(\alpha,\beta\in\{1,2\},\ j=\overline{0,N+1},\ \eta^{(j)}_{\alpha\beta,0}\in\mathbb{C}\bigr), \tag{1.7}$$

где $N^{(j)}_{\alpha\beta}$ — целые неотрицательные числа, а $\eta^{(j)}_{\alpha\beta,0} = 0$ тогда и только тогда, когда $\eta^{(j)}_{\alpha\beta}(\rho) \equiv 0$. Будем также считать, что выполнены следующие условия:

$$\det \hat{\eta}^{(n)}(\rho) \equiv B_n \quad (B_n \in \mathbb{C},\ n=\overline{1,N} \text{ при } N \geqslant 1), \tag{1.8}$$

$$\hat{\eta}^{(n)}(\rho) \not\equiv \hat{I} \text{ или (и) } Q_n \not\equiv Q_{n-1} \quad (n=\overline{1,N} \text{ при } N \geqslant 1). \tag{1.9}$$

Определение 1.1. При выполнении условий (1.5), (1.7)–(1.9) будем называть рассматриваемое на непрерывной спрямляемой кривой γ уравнение (1.3), дополненное условиями разрыва решений (1.6), уравнением класса H на кривой γ, а точки $z_j = V(t_j)$ ($j=\overline{0,N+1}$) — характеристическими точками кривой γ и уравнения (1.3) класса H на γ. При этом упорядоченное множество

$$W \coloneqq \{N, \{z_j, \hat{\eta}^{(j)}\}_0^{N+1}, \{Q_m\}_0^N\} \tag{1.10}$$

будем называть набором характеристических данных кривой γ и уравнения (1.3) класса H на γ.

Определение 1.2. Будем называть $u(z)$ решением уравнения (1.3) класса H на кривой γ, если функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению (1.3) почти всюду на γ, является непрерывно дифференцируемой во всех ее точках, кроме, возможно, характеристических, и удовлетворяет всем условиям разрыва (1.6).

Определение 1.3. Пусть $u_1(z)$, $u_2(z)$ — решения уравнения (1.3) класса H на кривой γ с характеристическими точками z_j ($j=\overline{0,N+1}$) и

$$u_1(z_b)=1,\quad u_1'(z_b)=0,\quad u_2(z_b)=0,\quad u_2'(z_b)=1 \quad (z_b\in\gamma,\ z_b\notin\{z_j\}_1^N \text{ при } N\geqslant 1). \tag{1.11}$$

Назовем передаточной матрицей уравнения (1.3) класса H между точками z_b и z кривой γ матрицу

$$\hat{P}(\gamma,z,z_b) \coloneqq \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{pmatrix} \quad (z\in\gamma,\ z\notin\{z_j\}_1^N \text{ при } N\geqslant 1).$$

Передаточной матрицей вдоль кривой будем называть передаточную матрицу между начальной и конечной точками кривой.

В настоящей статье кусочная целостность потенциала Q используется для деформации кривой γ в ломаную с вершинами в характеристических точках без изменения передаточной матрицы вдоль нее. Поэтому все полученные результаты справедливы также, если каждая из функций Q_m ($m=\overline{0,N}$) в (1.5) ограничена на участке γ_m кривой γ, соединяющем характеристические точки z_m и z_{m+1}, и является безмонодромным потенциалом (см. [7, 21]) уравнения Штурма—Лиувилля (1.3) в некоторой достаточно большой области G_m, зависящей от формы кривой и набора характеристических данных (1.10). Так, если кривая γ полностью лежит на некоторой прямой, то достаточно, чтобы каждая из функций Q_m была аналитична на отрезке γ_m. В наиболее важном случае простого набора характеристических данных (см. определение 1.4 и теорему 1.1) область G_m должна быть выпуклой и содержать γ_m.

Лемма 1.1. *Элементы передаточной матрицы $\hat{P}$ уравнения* (1.3) *класса H вдоль кривой γ однозначно определяются заданием набора характеристических данных* (1.10) *этой кривой и являются целыми функциями спектрального параметра ρ ($\rho = \lambda^2$); определитель*

$$\det \hat{P} = \prod_{j=0}^{N+1} \det \hat{\eta}^{(j)}$$

не зависит от ρ и

$$\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0) = \hat{\eta}^{(N+1)} \hat{P}_0^{(N)} \hat{\eta}^{(N)} \ldots \hat{P}_0^{(0)} \hat{\eta}^{(0)}, \tag{1.12}$$

где

$$\hat{P}_0^{(m)} \coloneqq \lim_{\delta \to 0, \delta > 0} \hat{P}(\gamma, V(t_{m+1} - \delta), V(t_m + \delta)) \quad (m \in \{0, \ldots, N\})$$

— передаточная матрица уравнения (1.3) *между точками z_m и z_{m+1} кривой γ в отсутствии разрывов решений.*

Доказательство. Пусть $u_\alpha^{(m)}(z)$ ($\alpha \in \{1, 2\}$, $m \in \{0, \ldots, N\}$) — целые решения вспомогательного уравнения Штурма—Лиувилля

$$\frac{d^2 u^{(m)}}{dz^2} + (Q_m - \lambda^2) u^{(m)} = 0 \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{1.13}$$

с начальными условиями (1.11) в точке z_m. Определим функции $v_\alpha^{(s)}(z)$ ($s \in \{-1, 0, \ldots, N\}$) и $\widetilde{v}_\alpha^{(p)}(z)$ ($p \in \{-1, 0, \ldots, N-1\}$) следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} v_\alpha^{(-1)}(z) := u_\alpha^{(0)}(z), \\ \begin{pmatrix} \widetilde{v}_\alpha^{(m-1)}(z) \\ \dfrac{d\widetilde{v}_\alpha^{(m-1)}(z)}{dz} \end{pmatrix} := \hat{\eta}^{(m)} \begin{pmatrix} v_\alpha^{(m-1)}(z) \\ \dfrac{dv_\alpha^{(m-1)}(z)}{dz} \end{pmatrix} \quad (m \in \{0, \ldots, N\}), \\ v_\alpha^{(m)}(z) := \widetilde{v}_\alpha^{(m-1)}(z_m) u_1^{(m)}(z) + \left.\dfrac{d\widetilde{v}_\alpha^{(m-1)}(z)}{dz}\right|_{z=z_m} u_2^{(m)}(z). \end{cases} \tag{1.14}$$

Тогда, если γ_m ($m \in \{0, \ldots, N\}$) — участок кривой γ, соединяющий точки z_m и z_{m+1}, то в силу определений 1.1 и 1.2 функции $u_\alpha(z)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} u_1(z_0) = 1, \quad u_1'(z_0) = 0, \quad u_2(z_0) = 0, \quad u_2'(z_0) = 1, \\ u_\alpha(z) := v_\alpha^{(m)}(z), \quad z \in \gamma_m \setminus \{z_m, z_{m+1}\} \quad (m \in \{0, \ldots, N\}), \\ \begin{pmatrix} u_\alpha(z_{N+1}) \\ u_\alpha'(z_{N+1}) \end{pmatrix} := \hat{\eta}^{(N+1)} \begin{pmatrix} v_\alpha^{(N)}(z_{N+1}) \\ \left.\dfrac{dv_\alpha^{(N)}(z)}{dz}\right|_{z=z_{N+1}} \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{1.15}$$

будут решениями уравнения (1.3) класса H на γ, удовлетворяющими условиям (1.11) в точке z_0. При этом формула (1.12) следует из определения 1.3 передаточной матрицы и соотношений (1.14), (1.15), а остальные утверждения леммы 1.1 следуют из формулы (1.12), определения 1.1 и соответствующих свойств решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами (см. [2, § 2, 24]). □

Определение 1.4. Набор характеристических данных (1.10) уравнения (1.3) класса H будем называть простым, если $N = 0$ или выполнены следующие условия

$$\hat{\eta}^{(n)} \notin \Omega \coloneqq \{A\hat{I}, A_1\hat{\sigma}_3 \mid A \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, A_1 \in \mathbb{C}\} \quad (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geqslant 1), \tag{1.16}$$

$$\Delta z_m \coloneqq z_{m+1} - z_m \neq 0 \quad (m = \overline{0, N}). \tag{1.17}$$

Соотношение (1.16) означает, например, что $\hat{\eta}^{(n)} \not\equiv A_1\hat{\sigma}_3$ ($A_1 \in \mathbb{C}$), но не исключает существования такого $\rho_0 \in \mathbb{C}$, что $\hat{\eta}^{(n)}(\rho_0) = A_1\hat{\sigma}_3$. Подчеркнем также, что в силу условий (1.8) матрицы перехода могут иметь вид $A\hat{I}$ или $A\hat{\sigma}_3$ только если A не зависит от ρ.

Теорема 1.1. *Пусть уравнение* (1.3) *класса* H *с набором характеристических данных* (1.10) *имеет вдоль кривой* γ *передаточную матрицу* $\hat{P}$. *Тогда на некоторой кривой* $\widetilde{\gamma}$ *существует уравнение* (1.3) *класса* H *с такими простым набором характеристических данных* $\widetilde{W} = \{\widetilde{N}$, $\{\widetilde{z}_j, \hat{\widetilde{\eta}}^{(j)}\}_0^{\widetilde{N}+1}$, $\{\widetilde{Q}_m\}_0^{\widetilde{N}}\}$ ($\widetilde{N} \leqslant N$) *и передаточной матрицей* $\hat{\widetilde{P}}$ *вдоль кривой* $\widetilde{\gamma}$, *что*

$$\hat{\widetilde{\eta}}^{(\widetilde{N}+1)}(\rho)\ldots\hat{\widetilde{\eta}}^{(0)}(\rho) = \hat{\eta}^{(N+1)}(\rho)\ldots\hat{\eta}^{(0)}(\rho), \quad \hat{\widetilde{P}}(\rho) = \hat{P}(\rho) \quad (\rho \in \mathbb{C}). \tag{1.18}$$

Теорема 1.1 позволяет далее рассматривать уравнения (1.3) класса H только с простыми наборами характеристических данных. При ее доказательстве в конце раздела 2 описан алгоритм построения простого набора характеристических данных $\widetilde{W}$, удовлетворяющего условиям (1.18), из произвольного набора характеристических данных W за конечное число элементарных действий.

Определение 1.5. Простой набор характеристических данных (1.10) с $N = 0$ и $z_1 = z_0$ будем называть точечным.

Лемма 1.2. *Точечный набор характеристических данных* (1.10) *соответствует уравнению* (1.3) *класса* H *на произвольной замкнутой кривой* γ *с целым потенциалом* Q_0. *Передаточная матрица* $\hat{P}$ *этого уравнения вдоль кривой* γ *равна* $\hat{\eta}^{(1)}\hat{\eta}^{(0)}$, *причем кривую* γ *можно стянуть в точку* z_0 *без измененияЁ*$\hat{P}$.

Доказательство. Лемма следует из определений 1.1, 1.5, формулы (1.12) и того факта, что передаточная матрица уравнения (1.3) с целым потенциалом вдоль произвольной замкнутой кривой без разрывов решений равна $\hat{I}$ (см. [2, 9]). □

Определение 1.6. Будем называть кривую простой, если на ней задано уравнение (1.3) класса H с простым набором характеристических данных (1.10), отличным от точечного.

Свойства передаточной матрицы уравнения (1.3) класса H вдоль кривой с точечным набором характеристических данных описаны в лемме 1.2. Асимптотика элементов передаточной матрицы вдоль простой кривой получена в разделе 3, и с ее помощью в конце этого раздела доказана теорема 1.2.

Теорема 1.2. *Элемент* $p_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \in \{1, 2\}$) *передаточной матрицы* $\hat{P}$ *уравнения* (1.3) *класса* H *вдоль простой кривой с набором характеристических данных* (1.10) *является целой функцией* ρ *порядка* 1/2 *и нормального типа* (*тождественно равен нулю*) *тогда и только тогда, когда выполнены оба* (*не выполнено хотя бы одно*) *из следующих условий:*

$$\left|\eta_{1\beta}^{(0)}(\rho)\right| + \left|\eta_{2\beta}^{(0)}(\rho)\right| \not\equiv 0, \quad \left|\eta_{\alpha1}^{(N+1)}(\rho)\right| + \left|\eta_{\alpha2}^{(N+1)}(\rho)\right| \not\equiv 0. \tag{1.19}$$

В разделах 4 и 5 статьи исследован спектр краевой задачи с распадающимися граничными условиями

$$\Theta_{21}(\rho)u(z_0) - \Theta_{11}(\rho)u'(z_0) = 0, \quad \mu_{11}(\rho)u(z_{N+1}) + \mu_{12}(\rho)u'(z_{N+1}) = 0 \tag{1.20}$$

для уравнения (1.3) класса H с простым набором характеристических данных (1.10). В (1.20) коэффициенты $\Theta_{\alpha1}(\rho)$, $\mu_{1\alpha}(\rho)$ ($\alpha \in \{1, 2\}$) полиномиально зависят от спектрального параметра. Основные результаты этого исследования сформулированы ниже в теоремах 1.3–1.5.

Положим

$$\Theta_{12}(\rho) = \Theta_{22}(\rho) = \mu_{21}(\rho) = \mu_{22}(\rho) \equiv 0, \tag{1.21}$$

$$\hat{\widetilde{\mu}}(\rho) := \hat{\mu}\hat{\eta}^{(N+1)}, \quad \hat{\widetilde{\Theta}}(\rho) := \hat{\eta}^{(0)}\hat{\Theta}, \quad r_0(\rho) := \widetilde{\mu}_{11}\widetilde{\Theta}_{11} + \widetilde{\mu}_{12}\widetilde{\Theta}_{21}. \tag{1.22}$$

Очевидно, что элементы матриц $\hat{\widetilde{\mu}}$ и $\hat{\widetilde{\Theta}}$, а также функция r_0 являются полиномами от ρ.

Теорема 1.3. *Спектр краевой задачи с граничными условиями* (1.20) *для уравнения* (1.3) *класса* H *на кривой* γ *с простым набором характеристических данных*:

(a) *пуст тогда и только тогда, когда набор характеристических данных точечный, и определенный в* (1.22) *полином* $r_0(\rho) \equiv R_0 \neq 0$;

(b) *не пуст и конечен тогда и только тогда, когда набор характеристических данных точечный, и полином* $r_0(\rho)$ *отличен от константы, при этом число собственных значений краевой задачи с учетом их кратности равно степени полинома*;

(c) *счетен тогда и только тогда, когда кривая* γ *простая и выполнены следующие условия*:

$$|\widetilde{\Theta}_{11}(\rho)| + |\widetilde{\Theta}_{21}(\rho)| \not\equiv 0, \quad |\widetilde{\mu}_{11}(\rho)| + |\widetilde{\mu}_{12}(\rho)| \not\equiv 0. \tag{1.23}$$

В остальных случаях спектр указанной краевой задачи совпадает со всей комплексной плоскостью.

Доказательство теоремы 1.3 приведено в разделе 4 после леммы 4.2.

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия* (1.23) *и* $D_0(\rho)$ — *характеристическая функция* (4.3) *краевой задачи с граничными условиями* (1.20) *для уравнения* (1.3) *класса* H *на простой кривой* γ. *Тогда угловая плотность* (4.17) *нулей функции* $D_0(\rho)$ *равна* $\chi_j^{(0)}/\pi$ *в любом угловом секторе комплексной* ρ*-плоскости, содержащем внутри себя ровно один луч из семейства лучей, задаваемых параметрически функциями* $\rho = -t\exp\{-2i\omega_j\}$ ($t \geqslant 0$, $j = \overline{1, J}$), *где величины* J, ω_j *определены в соотношении* (4.13) *и перед ним, а* $\chi_j^{(0)}$ — *в* (4.14).

Теорема 1.4 следует из формул (4.9), (4.18) и предложения 4.1. Заметим, что величины ω_j и $\chi_j^{(0)}$ ($j \in \{1, \dots, J\}$) имеют простой геометрический смысл: в силу (4.8), (4.10), (4.13) и (4.14) величина $\chi_j^{(0)}$ равна сумме длин тех из отрезков, соединяющих последовательные характеристические точки простой кривой γ, которые параллельны прямой с параметризацией $z = t\exp\{i\omega_j\}$ ($t \in \mathbb{R}$, $\omega_j \in [0; \pi)$).

Результаты, аналогичные изложенным в теореме 1.4, были получены в работе [8], где рассматривалась краевая задача с граничными условиями $u(0) = u(1) = 0$ для уравнения (1.3) на выпуклой вниз кривой γ, соединяющей точки 0 и 1, с параметризацией $z(x) = x + is(x)$. При этом действительная функция $s(x)$ предполагалась кусочно непрерывно дифференцируемой с неубывающей производной ($s'(0) < 0 < s'(1)$), а на потенциал накладывались ограничения, позволяющие деформировать кривую в выпуклую ломаную, в вершинах которой потенциал испытывает скачок, а все ее звенья параллельны различным прямым. В этом смысле теорему 1.4 можно рассматривать как обобщение соответствующей части результатов работы [8] на случай уравнений (1.3) вдоль ломаной произвольной формы, в каждой вершине которой имеют место разрывы решений (1.6) или (и) скачки какой-либо конечной производной потенциала, а разные (не обязательно соседние) звенья ломаной могут быть параллельны одной прямой.

Кроме общих асимптотических свойств спектра, похожих на описанные в теореме 1.4, в [8] были найдены и более тонкие детали его асимптотики, учитывающие особенности рассмотренной там задачи. Аналогичные детали спектра краевых задач с граничными условиями (1.20) для уравнения (1.3) класса H на простой кривой при выполнении условий (1.23) могут быть получены с помощью теоремы 1.5.

Теорема 1.5. *Пусть выполнены условия* (1.23) *и* $D_0(\rho)$ — *характеристическая функция* (4.3) *краевой задачи с граничными условиями* (1.20) *для уравнения* (1.3) *класса* H *на простой кривой. Тогда в окрестности каждого луча с параметризацией* $\rho = -t\exp\{-2i\omega_j\}$ ($t \geqslant 0$, $j \in \{1, \dots, J\}$; *величины* J, ω_j *определены в соотношении* (4.13) *и перед ним*), *нули функции* $D_0(\rho)$ *при* $|\rho| \to \infty$ *асимптотически совпадают с квадратами нулей квазиполинома* $r^{(j)}(\lambda)$, *задаваемого формулой* (5.13).

Доказательство теоремы 1.5 приведено в начале раздела 5 после леммы 5.1. В конце раздела 5 дано краткое описание возможных типов асимптотики спектра краевой задачи с граничными условиями (1.20) для уравнения (1.3) класса H на простой кривой. Отмечено, что дальнейшее изучение связи условий реализации каждого из типов асимптотики спектра с параметрами набора характеристических данных (1.10) кривой представляет особый интерес с точки зрения исследования обратных спектральных задач для уравнения (1.3) класса H, и, прежде всего, с точки зрения формулировки и доказательства условий существования их решений.

2. Переход к уравнению с простым набором характеристических данных.

Определение 2.1. Петлей кривой γ с узлом в точке $z^{(d)}$ назовем участок кривой γ, начинающийся и кончающийся в точке ее самопересечения $z^{(d)}$.

Определение 2.2. Пусть на кривой γ задано уравнение (1.3) класса H. Тогда петля кривой γ называется «невидимой петлей», если ее узел совпадает с двумя последовательными характеристическими точками кривой γ.

Лемма 2.1. *На кривой γ с набором характеристических данных* (1.10) *«невидимые петли» отсутствуют тогда и только тогда, когда выполнены условия* (1.17).

Доказательство. Лемма следует непосредственно из определения 2.2. □

Лемма 2.2. *Пусть на кривой γ задан набор характеристических данных* (1.10) *и узел $z^{(d)}$ «невидимой петли» кривой γ совпадает с ее характеристическими точками z_j и z_{j+1}* ($j \in \{0, \ldots, N\}$). *Тогда удаление из кривой этой «невидимой петли» с заменой двух матриц перехода в точке $z^{(d)}$ ($\hat{\eta}^{(j)}$ и $\hat{\eta}^{(j+1)}$) на одну матрицу перехода $\hat{\eta}^{(j+1)}\hat{\eta}^{(j)}$ не меняет начальную и конечную точки кривой, а также передаточную матрицу уравнения* (1.3) *класса H вдоль нее и уменьшает число характеристических точек кривой на одну или две.*

Доказательство. Лемма следует из определения 1.1, формулы (1.12) и того, что передаточная матрица уравнения (1.3) с целым потенциалом вдоль петли без разрывов решений равна $\hat{I}$ (см. [2, 9]). Число характеристических точек уменьшается на две, если $1 \leqslant j \leqslant N-1$, $\hat{\eta}^{(j+1)}\hat{\eta}^{(j)} \equiv \hat{I}$ и $Q^{(j-1)} \equiv Q^{(j+1)}$. □

Заметим, что лемма 2.2 подтверждает обязательность рассмотрения случая, когда матрицы перехода $\hat{\eta}^{(0)}$ и $\hat{\eta}^{(N+1)}$ отличны от тождественно единичных. Ведь даже если на исходной кривой γ выполнено: $\hat{\eta}^{(0)}(\rho) \equiv \hat{\eta}^{(N+1)}(\rho) \equiv \hat{I}$, но при этом γ имеет «невидимую петлю» с узлом в начальной (конечной) точке, $N \geqslant 1$ и $\hat{\eta}^{(1)}(\rho) \not\equiv \hat{I}$ ($\hat{\eta}^{(N)}(\rho) \not\equiv \hat{I}$), то после удаления из кривой γ этой «невидимой петли» получится кривая с матрицей перехода в начальной (конечной) точке, отличной от $\hat{I}$.

После удаления у исходной кривой γ с заданным на ней уравнением (1.3) класса H всех «невидимых петель» с соответствующей заменой матриц перехода в их узлах (см. лемму 2.2) у новой кривой также могут обнаружиться «невидимые петли». Например, кривая γ с набором характеристических данных

$$\Big\{2,\ \Big\{z_0,\ \hat{\eta}^{(0)};\ z_1,\ \hat{\eta}^{(1)};\ z_2 = z_1,\ \hat{\eta}^{(2)} = \big(\hat{\eta}^{(1)}\big)^{-1};\ z_3 = z_0,\ \hat{\eta}^{(3)}\Big\},\ \big\{Q_0, Q_1,\ Q_2 = Q_0\big\}\Big\}$$

имеет одну «невидимую петлю» с узлом в точке z_1. Кривая, получающаяся после удаления этой «невидимой петли» и замены матрицы перехода в точке z_1 на матрицу $\hat{\eta}^{(2)}\hat{\eta}^{(1)} \equiv \hat{I}$, будет представлять из себя «невидимую петлю» с узлом в точке z_0. В силу леммы 1.2 передаточная матрица вдоль этой петли будет равна $\hat{\eta}^{(3)}\hat{\eta}^{(0)}$, и «невидимую петлю» можно стянуть в точку z_0 (удалить) без изменения передаточной матрицы.

Определение 2.3. Поэтапное удаление «невидимых петель» с заменой матриц перехода в их узлах в соответствии с леммой 2.2, производимое до полного устранения «невидимых петель», будем называть последовательным удалением всех «невидимых петель».

В результате последовательного удаления всех «невидимых петель» исходная кривая γ с набором характеристических данных (1.10) либо переходит в кривую без «невидимых петель», либо может быть стянута в точку (см. лемму 1.2). В последнем случае в силу леммы 2.2 передаточная матрица $\hat{P}$ вдоль кривой γ равна $\hat{\eta}^{(N+1)} \ldots \hat{\eta}^{(0)}$.

Лемма 2.3. *При последовательном удаления всех «невидимых петель» передаточная матрица сохраняется, не меняются также начальная и конечная точки кривой, либо точка, в которую стягивается кривая, совпадает с ними. Если при этом исходный набор характеристических данных* (1.10) *уравнения* (1.3) *класса* H *преобразуется к виду*

$$\widetilde{W} = \bigl\{\widetilde{N}, \{\widetilde{z}_j, \hat{\widetilde{\eta}}^{(j)}\}_0^{\widetilde{N}+1}, \{\widetilde{Q}_m\}_0^{\widetilde{N}}\bigr\},$$

то

$$\widetilde{N} \leqslant N-1, \quad \hat{\widetilde{\eta}}^{(\widetilde{N}+1)} \ldots \hat{\widetilde{\eta}}^{(0)} = \hat{\eta}^{(N+1)} \ldots \hat{\eta}^{(0)},$$

и либо $\widetilde{N} = 0$, $\widetilde{z}_0 = \widetilde{z}_1$, *либо для всех* $\widetilde{z}_m$ $(m \in \{0, \ldots, \widetilde{N}\})$ *выполнены соотношения вида* (1.17).

Доказательство. Лемма 2.3 следует из лемм 1.2, 2.1, 2.2 и определения 2.3. □

Лемма 2.4. *Пусть* $\hat{P}$ *и* $\hat{\widetilde{P}}$ — *передаточные матрицы уравнений* (1.3) *класса* H *вдоль кривых* γ *и* $\widetilde{\gamma}$ *с наборами характеристических данных*

$$W = \bigl\{N, \{z_j, \hat{\eta}^{(j)}\}_0^{N+1}, \{Q_m\}_0^N\bigr\} \text{ и } \widetilde{W} = \bigl\{N, \{\widetilde{z}_j, \hat{\widetilde{\eta}}^{(j)}\}_0^{N+1}, \{\widetilde{Q}_m\}_0^N\bigr\}$$

соответственно. Причем $N \geqslant 1$ *и существует такое число* $p \in \{0, \ldots, N\}$, *что*

$$\widetilde{z}_m = z_m, \quad \widetilde{Q}_m = Q_m, \quad \hat{\widetilde{\eta}}^{(m)} = \hat{\eta}^{(m)} \quad (m = \overline{0, p-1} \text{ при } p \geqslant 1),$$
$$\widetilde{z}_p = z_p, \quad \widetilde{Q}_p(z) = Q_p(2z_p - z), \quad \hat{\widetilde{\eta}}^{(p)} = A\hat{\sigma}_3\hat{\eta}^{(p)},$$
$$\widetilde{z}_n = 2z_p - z_n, \quad \widetilde{Q}_n(z) = Q_n(2z_p - z), \quad \hat{\widetilde{\eta}}^{(n)} = \hat{\sigma}_3\hat{\eta}^{(n)}\hat{\sigma}_3 \quad (n = \overline{p+1, N},\ p < N),$$
$$\widetilde{z}_{N+1} = 2z_p - z_{N+1}, \quad \hat{\widetilde{\eta}}^{(N+1)} = \hat{\eta}^{(N+1)}\hat{\sigma}_3/A,$$

где $A = 1$, *если* $\hat{\eta}^{(p)} \not\equiv \hat{\sigma}_3$ *и* $A = 2$, *если* $\hat{\eta}^{(p)} \equiv \hat{\sigma}_3$. *Тогда*

$$\hat{\widetilde{P}} = \hat{P}, \quad \hat{\widetilde{\eta}}^{(N+1)} \ldots \hat{\widetilde{\eta}}^{(0)} = \hat{\eta}^{(N+1)} \ldots \hat{\eta}^{(0)}.$$

Доказательство. Заметим, что формулировка корректна: если точка z_j $(j \in \{0, \ldots, N+1\})$ — характеристическая точкой кривой γ, то определенная в лемме точка $\widetilde{z}_j$ обязательно является характеристической точкой кривой $\widetilde{\gamma}$. Для $j = \overline{0, p}$ это так, поскольку по условию леммы наборы характеристических данных участков кривых γ и $\widetilde{\gamma}$, соединяющих точки z_0 и z_p, совпадают кроме матриц перехода в точке z_p, но $\hat{\widetilde{\eta}}^{(p)} \not\equiv \hat{I}$, и, значит, условия (1.9) для точки $\widetilde{z}_p$ также выполнены. Для $n = \overline{p+1, N}$ (при $p < N$) соотношения $\widetilde{Q}_n \not\equiv \widetilde{Q}_{n-1}$ и $Q_n \not\equiv Q_{n-1}$, а также $\hat{\widetilde{\eta}}^{(n)} \not\equiv \hat{I}$ и $\hat{\eta}^{(n)} \not\equiv \hat{I}$ равносильны, а точка $\widetilde{z}_{N+1}$ — конечная точка кривой $\widetilde{\gamma}$, и, значит, ее характеристическая точка.

Пусть кривая γ задается параметрически соотношением $z = V(t)$ $(t \in [t_0, t_f])$. Рассмотрим кривую $\gamma^{(1)}$ с параметризацией

$$z := \begin{cases} V(t), & \text{если } t \in [t_0, t_p]; \\ 2z_p - V(t), & \text{если } t \in (t_p, t_f] \end{cases} \tag{2.1}$$

и набором характеристических данных $\widetilde{W}$ (очевидно, что кривая $\gamma^{(1)}$ проходит через все характеристические точки кривой $\widetilde{\gamma}$). Тогда подстановка в уравнение (1.3) доказывает, что если $u(z)$ — решение уравнения (1.3) класса H на кривой γ с набором характеристических данных W, то функция $w(z)$, определяемая соотношениями

$$w(z) := \begin{cases} u(z), & \text{если } z = V(t),\ t \in (t_0, t_p); \\ Au(2z_p - z), & \text{если } z = 2z_p - V(t),\ t \in (t_p, t_f); \end{cases} \tag{2.2}$$
$$w(z_0) := u(z_0), \quad w'(z_0) := u'(z_0), \quad w(2z_p - z_{N+1}) := u(z_{N+1}), \quad w'(2z_p - z_{N+1}) := u'(z_{N+1}),$$

является решением уравнения (1.3) класса H на кривой $\gamma^{(1)}$ с набором характеристических данных $\widetilde{W}$. При этом в силу (2.2) $\hat{P}^{(1)} = \hat{P}$, где $\hat{P}^{(1)}$ — передаточная матрица вдоль кривой $\gamma^{(1)}$. Но $\hat{P}^{(1)} = \hat{\tilde{P}}$ по лемме 1.1, и значит, $\hat{\tilde{P}} = \hat{P}$.

Равенство $\hat{\tilde{\eta}}^{(N+1)} \ldots \hat{\tilde{\eta}}^{(0)} = \hat{\eta}^{(N+1)} \ldots \hat{\eta}^{(0)}$ проверяется подстановкой приведенных в условии леммы формул, связывающих матрицы перехода $\hat{\tilde{\eta}}^{(j)}$ и $\hat{\eta}^{(j)}$ $(j \in \{0, \ldots, N+1\})$. □

Перейдем к доказательству теоремы 1.1, сформулированной в разделе 1.

Доказательство. Опишем алгоритм, позволяющий за конечное число шагов из данного набора характеристических данных W построить простой набор $\widetilde{W}$, удовлетворяющий условиям теоремы 1.1. Рассмотрим шаги трех типов.

Шаг типа 1. Пусть существует такое число $p \in \{1, \ldots, N\}$, что матрицы перехода из набора характеристических данных $W_p^{(s)}$ вида (1.10) на кривой $\gamma_p^{(s)}$ удовлетворяют условиям

$$\hat{\eta}^{(n)} \notin \Omega_\sigma := \bigl\{A_1\hat{\sigma}_3,\ A_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\bigr\}\ (n = \overline{1, p-1},\ p \geqslant 2), \quad \hat{\eta}^{(p)} \equiv A_p\hat{\sigma}_3 \quad (A_p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Тогда в качестве набора характеристических данных $W_{p+1}^{(s)}$ возьмем указанный в лемме 2.4 набор $\widetilde{W}$ на кривой $\gamma_{p+1}^{(s)}$, получающейся из кривой $\gamma_p^{(s)}$ с помощью соотношений (2.1). Нетрудно убедиться, что $\hat{\tilde{\eta}}^{(p)} \equiv A_p\hat{I}$, если $A_p \neq 1$, и $\hat{\tilde{\eta}}^{(p)} \equiv 2\hat{I}$, если $A_p = 1$, и, значит, $\hat{\tilde{\eta}}^{(n)} \notin \Omega_\sigma$ $(n = \overline{1, p})$. Повторяя это действие не более N раз, построим кривую $\gamma_{N+1}^{(s)}$ с набором характеристических данных $W_{N+1}^{(s)}$ таким, что $\hat{\tilde{\eta}}^{(n)} \notin \Omega_\sigma$ $(n = \overline{1, N})$. В силу леммы 2.4 при каждом переходе от $W_p^{(s)}$ к $W_{p+1}^{(s)}$ передаточная матрица, число характеристических точек и упорядоченное произведение вида (1.18) всех матриц перехода сохраняются, и, значит, они сохраняются на всем шаге типа 1.

Шаг типа 2. Пусть существует такое число $p \in \{1, \ldots, N\}$, что матрицы перехода из набора характеристических данных $W_p^{(s)}$ вида (1.10) на кривой $\gamma^{(s)}$ удовлетворяют условиям

$$\hat{\eta}^{(n)} \notin \Omega_I := \bigl\{A\hat{I},\ A \in \mathbb{C} \setminus \{1\}\bigr\}\ (n = \overline{1, p-1},\ p \geqslant 2), \quad \hat{\eta}^{(p)} \equiv A_p\hat{I}\ (A_p \in \mathbb{C} \setminus \{1\}).$$

На шаге этого типа кривая не меняется, а при изменении набора характеристических данных возможны два случая:

(i) $Q_{p-1} \not\equiv Q_p$. В качестве набора характеристических данных $W_{p+1}^{(s)}$ возьмем набор $\widetilde{W}$, отличающийся от $W_p^{(s)}$ только двумя матрицами перехода, а именно, $\hat{\tilde{\eta}}^{(p)} \equiv \hat{I}$, $\hat{\tilde{\eta}}^{(N+1)} = A_p\hat{\eta}^{(N+1)}$. Количество характеристических точек при этом не меняется (т. к. $Q_{p-1} \not\equiv Q_p$);

(ii) $Q_{p-1} \equiv Q_p$. Умножим матрицу перехода в конечной точке кривой на число A_p и заменим матрицу перехода в точке z_p с $A_p\hat{I}$ на $\hat{I}$. Такая замена превратит точку z_p из характеристической в обычную, что приведет к уменьшению номеров всех последующих характеристических точек на единицу.

В обоих случаях передаточная матрица не изменится в силу формулы (1.12) (кривая $\gamma^{(s)}$ не меняется, потенциал на ней сохраняется), а упорядоченное произведение вида (1.18) всех матриц перехода не изменится по построению.

Повторяя такое изменение набора характеристических данных не более N раз, получим набор, в котором все матрицы перехода (кроме, возможно, матриц в начальной и конечной точках кривой) не будут принадлежать множеству Ω_I. Поскольку при каждом описанном выше переходе от $W_p^{(s)}$ к $W_{p+1}^{(s)}$ число матриц перехода из множества Ω_σ, передаточная матрица и упорядоченное произведение вида (1.18) всех матриц перехода сохраняются, то они сохраняются и на всем шаге типа 2. Число характеристических точек при этом не возрастает.

Шаг типа 3. Пусть набор характеристических данных $W^{(s)}$ вида (1.10) на кривой $\gamma^{(s)}$ не удовлетворяет условиям (1.17), т. е. в силу леммы 2.1 кривая $\gamma^{(s)}$ содержит «невидимые петли». Последовательно удалим все «невидимые петли» кривой $\gamma^{(s)}$. В результате согласно лемме 2.3

получим новую кривую с набором характеристических данных либо удовлетворяющим всем условиям (1.17), либо в котором $N = 0$, $z_0 = z_1$. При этом сохранятся передаточная матрица и упорядоченное произведение вида (1.18) всех матриц перехода, а число характеристических точек уменьшится минимум на одну.

Опишем теперь весь алгоритм построения простого набора характеристических данных $\widetilde{W}$, удовлетворяющего условиям теоремы 1.1. Для краткости матрицы перехода во внутренних характеристических точках кривой будем называть внутренними.

Пусть в исходном наборе характеристических данных W вида (1.10) есть внутренние матрицы перехода из множества Ω_σ. С помощью шага типа 1 получим набор характеристических данных W_1, имеющий такое же число N характеристических точек, но не имеющий внутренних матриц перехода из множества Ω_σ.

Если в наборе данных W_1 есть внутренние матрицы перехода из множества Ω_I, то с помощью шага типа 2 получим набор характеристических данных W_2, не имеющий внутренних матриц перехода из множеств Ω_σ и Ω_I, количество характеристических точек N_2 в котором не более их числа в наборе W_1.

Если $N_2 = 0$ или набор W_2 удовлетворяет всем условиям вида (1.17), то процедура построения простого набора характеристических данных $\widetilde{W}$ завершена.

Если $N_2 \geqslant 1$ и набор характеристических данных W_2 не удовлетворяет хотя бы одному условию вида (1.17), то с помощью шага типа 3 получим набор W_3, либо удовлетворяющий всем условиям вида (1.17) и имеющий меньшее число N_3 характеристических точек, чем набор W_2, и, значит, W, либо набор, в котором $N_3 = 0$. Если $N_3 = 0$, то процедура построения простого набора данных $\widetilde{W}$ завершена.

Если $N_3 \neq 0$ и в наборе данных W_3 есть внутренние матрицы перехода из множества $\Omega = \Omega_\sigma \cup \Omega_I$, то проделаем еще раз цикл из шагов типа 1–3. Поскольку каждый раз после выполнения шага типа 3 число характеристических точек в наборе обязательно уменьшается хотя бы на единицу, то простой набор данных $\widetilde{W}$ будет построен не более чем через N таких циклов.

Шаги всех трех типов, как отмечалось при их описании, сохраняют передаточную матрицу и упорядоченное произведение вида (1.18) всех матриц перехода. Поэтому найденный описанным способом простой набор характеристических данных $\widetilde{W}$ будет удовлетворять всем условиям (1.18). Теорема 1.1 доказана. □

3. Асимптотика передаточной матрицы вдоль простой кривой.

Лемма 3.1. *Для любых $m \in \{0, \dots, N\}$ и $K \in \mathbb{N}$ существуют положительные числа $\lambda_{m,K}$, $C^{(0)}_{m,K}$ и два непрерывно дифференцируемых решения $F^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)$ соответствующего уравнения* (1.13), *которые при всех $\lambda \neq 0$ и $z \in \mathbb{C}$ могут быть представлены в следующем виде*:

$$F^{(m)}_{\pm K} = C^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)\exp\{\pm\lambda(z - z_m)\}, \quad \frac{dF^{(m)}_{\pm K}}{dz} = \pm\lambda E^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)\exp\{\pm\lambda(z - z_m)\}, \tag{3.1}$$

$$C^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda) := 1 + \sum_{k=1}^{K}\left(\pm\frac{1}{\lambda}\right)^k C_{m,k}(z) + \frac{B^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)}{\lambda^{K+1}}, \tag{3.2}$$

$$E^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda) := 1 + \sum_{k=1}^{K}\left(\pm\frac{1}{\lambda}\right)^k \left(C_{m,k}(z) + \frac{dC_{m,k-1}(z)}{dz}\right) + \frac{H^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)}{\lambda^{K+1}}, \tag{3.3}$$

где $B^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)$, $H^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)$ и все $C_{m,k}(z)$ — целые функции z, $C_{m,0}(z) := 1$,

$$C_{m,k}(z_m) := 0, \quad \frac{dC_{m,k}}{dz} := -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2C_{m,k-1}}{dz^2} + Q_m(z)C_{m,k-1}(z)\right) \quad (k = \overline{1,K}). \tag{3.4}$$

Если при этом $|\lambda| \geqslant \lambda_{m,K}$, *то* $F^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)$ *являются линейно независимыми решениями* (1.13) *в* $\mathbb{C}$ *и для всех* $z \in L_m$ (L_m *— отрезок, соединяющий точки* z_m *и* z_{m+1}) *справедливы неравенства*

$$\left|B^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)\right| \leqslant C^{(0)}_{m,K}, \quad \left|H^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)\right| \leqslant C^{(0)}_{m,K}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Формулы (3.1)–(3.4) проверяются подстановкой в (1.13), а оценки (3.5) на отрезке L_m следуют из известных результатов по асимптотическому разложению решений уравнений (1.13) на отрезке действительной оси при больших значениях модуля параметра λ (см. [9]). □

Лемма 3.2. *Существует такое целое число* $K_0 \geqslant 2$, *что для любого целого* $K \geqslant K_0$ *существует такое конечное* $\lambda_K > 0$, *что при* $|\lambda| \geqslant \lambda_K$ *передаточную матрицу* $\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0)$ *уравнения* (1.3) *класса* H *с набором характеристических данных* (1.10) *можно записать в следующем виде:*

$$\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0) = \hat{\eta}^{(N+1)}\hat{C}^{(f)}\hat{T}^{(N)}\hat{T}^{(N-1)}\dots\hat{T}^{(2)}\hat{T}^{(1)}\hat{T}^{(0)}\hat{A}^{(0)}\hat{\eta}^{(0)}, \tag{3.6}$$

где $\hat{T}^{(0)} := \hat{I}$,

$$\hat{A}^{(0)} := -\frac{1}{D^{(0)}_K}\begin{pmatrix} \lambda E^{(0)}_{-K}(z_0,\lambda) & C^{(0)}_{-K}(z_0,\lambda) \\ \lambda E^{(0)}_{+K}(z_0,\lambda) & -C^{(0)}_{+K}(z_0,\lambda)\end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

$$\hat{C}^{(f)} := \begin{pmatrix} C^{(N)}_{+K}(z_{N+1},\lambda)\exp(\lambda\Delta z_N) & C^{(N)}_{-K}(z_{N+1},\lambda)\exp(-\lambda\Delta z_N) \\ \lambda E^{(N)}_{+K}(z_{N+1},\lambda)\exp(\lambda\Delta z_N) & -\lambda E^{(N)}_{-K}(z_{N+1},\lambda)\exp(-\lambda\Delta z_N)\end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

$$\hat{T}^{(n)} := \begin{pmatrix} t^{(n)}_{1+}\exp(\lambda\Delta z_{n-1}) & t^{(n)}_{-}\exp(-\lambda\Delta z_{n-1}) \\ t^{(n)}_{+}\exp(\lambda\Delta z_{n-1}) & t^{(n)}_{1-}\exp(-\lambda\Delta z_{n-1})\end{pmatrix} \quad (n = \overline{1,N},\ N \geqslant 1), \tag{3.9}$$

$$\begin{pmatrix} t^{(n)}_{1+} & t^{(n)}_{-} \\ t^{(n)}_{+} & t^{(n)}_{1-}\end{pmatrix} = -\frac{1}{D^{(n)}_K}\begin{pmatrix} C^{(n-1)}_{+K}(z_n,\lambda)\tau^{(n)}_{1+} & C^{(n-1)}_{-K}(z_n,\lambda)\tau^{(n)}_{-} \\ C^{(n-1)}_{+K}(z_n,\lambda)\tau^{(n)}_{+} & C^{(n-1)}_{-K}(z_n,\lambda)\tau^{(n)}_{1-}\end{pmatrix} + \frac{\hat{O}(1)}{\lambda^K}. \tag{3.10}$$

Здесь Δz_m ($m = \overline{0,N}$) *определены в* (1.17),

$$D^{(m)}_K := -\lambda\big(C^{(m)}_{+K}(z_m,\lambda)E^{(m)}_{-K}(z_m,\lambda) + C^{(m)}_{-K}(z_m,\lambda)E^{(m)}_{+K}(z_m,\lambda)\big) = -2\lambda\left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \quad (m = \overline{0,N}), \tag{3.11}$$

$$\tau^{(n)}_{1\pm} := \left(\pm\lambda^2\eta^{(n)}_{12}\varphi^{(n-1)}_{\pm K}(z_n)\varphi^{(n)}_{\mp K}(z_n) + \lambda\eta^{(n)}_{11}\varphi^{(n)}_{\mp K}(z_n) + \lambda\eta^{(n)}_{22}\varphi^{(n-1)}_{\pm K}(z_n) \pm \eta^{(n)}_{21}\right), \tag{3.12}$$

$$\tau^{(n)}_{\pm} := \left(\pm\lambda^2\eta^{(n)}_{12}\varphi^{(n-1)}_{\pm K}(z_n)\varphi^{(n)}_{\pm K}(z_n) + \lambda\eta^{(n)}_{11}\varphi^{(n)}_{\pm K}(z_n) - \lambda\eta^{(n)}_{22}\varphi^{(n-1)}_{\pm K}(z_n) \mp \eta^{(n)}_{21}\right), \tag{3.13}$$

$$\varphi^{(n)}_{\pm K}(z,\lambda) := \frac{E^{(n)}_{\pm K}(z,\lambda)}{C^{(n)}_{\pm K}(z,\lambda)} \quad (n = \overline{1,N},\ N \geqslant 1). \tag{3.14}$$

Доказательство. В силу леммы 3.1 для любого $K \in \mathbb{N}$ и всех $m \in \{0,\dots,N\}$ существуют такие числа $\lambda_{m,K} > 0$, что при $|\lambda| \geqslant \lambda_{m,K}$ решения $u^{(m)}_1(z)$, $u^{(m)}_2(z)$ соответствующего уравнения (1.13) можно представить как линейную комбинацию решений $F^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)$. Подставляя эти комбинации в формулу (1.12), получим, что при $|\lambda| \geqslant \lambda_K := \max\{\lambda_{m,K}, m = \overline{0,N}\}$ ее можно записать в виде (3.6), где матрицы $\hat{A}^{(0)}$, $\hat{C}^{(f)}$ и $\hat{T}^{(n)}$ ($n = \overline{1,N}$, $N \geqslant 1$) удовлетворяют формулам (3.7)–(3.10). При этом оценка в (3.11) следует из соотношений (3.2), (3.3) и (3.5). □

Лемма 3.3. *Пусть* $N \geqslant 1$, *и матрица перехода* $\hat{\eta}^{(n)}(\rho)$ ($n \in \{1,\dots,N\}$) *удовлетворяет условиям* (1.8), (1.16). *Тогда в условиях леммы* 3.2 *существует такое целое число* $K_1 \geqslant K_0$, *что* *для любого целого $K \geqslant K_1$ и при $|\lambda| \geqslant \lambda_K$ для $t_{1\pm}^{(n)}$, $t_{\pm}^{(n)}$ справедливы следующие соотношения:*

$$t_{1\pm}^{(n)} = \begin{cases} \lambda^{N_{1\pm}^{(n)}} \delta_{1\pm}^{(n)} \left(1 + \dfrac{O(1)}{\lambda}\right), & \hat{\eta}^{(n)}(\rho) \not\equiv \hat{I}; \\ 1 + \left(\mp\dfrac{1}{2\lambda}\right)^{m_n+2} \delta_n \left(1 + \dfrac{O(1)}{\lambda}\right), & \hat{\eta}^{(n)}(\rho) \equiv \hat{I}, \end{cases} \tag{3.15}$$

$$t_{\pm}^{(n)} = \begin{cases} \lambda^{N_{\pm}^{(n)}} \delta_{\pm}^{(n)} \left(1 + \dfrac{O(1)}{\lambda}\right), & \hat{\eta}^{(n)}(\rho) \not\equiv \hat{I}; \\ -\left(\mp\dfrac{1}{2\lambda}\right)^{m_n+2} \delta_n \left(1 + \dfrac{O(1)}{\lambda}\right), & \hat{\eta}^{(n)}(\rho) \equiv \hat{I}, \end{cases} \tag{3.16}$$

где целые числа $N_{1\pm}^{(n)}$, m_n, $N_{\pm}^{(n)}$ и отличные от нуля комплексные числа $\delta_{1\pm}^{(n)}$, δ_n, $\delta_{\pm}^{(n)}$ не зависят от λ.

Доказательство. Если $\hat{\eta}^{(n)} \equiv \hat{I}$, то по определению 1.1 (в силу (1.9)) $Q_n \not\equiv Q_{n-1}$, и соотношения (3.15), (3.16) следуют из сравнения формул (7), (12), (14) работы [4] с формулой (3.9) настоящей работы.

Пусть $\hat{\eta}^{(n)} \not\equiv \hat{I}$. В силу (3.2), (3.3) и (3.5) определенные в (3.14) функции $\varphi_{\pm K}^{(n)}(z,\lambda)$ можно записать в виде

$$\varphi_{\pm K}^{(n)}(z,\lambda) = \sigma^{(n)}(z,\lambda) \pm \frac{\Upsilon^{(n)}(z,\lambda)}{\lambda^3}, \tag{3.17}$$

где $\sigma^{(n)}(z,\lambda)$ и $\Upsilon^{(n)}(z,\lambda)$ при $|\lambda| \geqslant \lambda_K$ представимы в виде

$$\sigma^{(n)} = 1 + \frac{\sigma_1^{(n)}}{\lambda^2} + \frac{\sigma_3^{(n)}}{\lambda^4} + \ldots + \frac{O(1)}{\lambda^{K+1}}, \quad \Upsilon^{(n)} = \sigma_2^{(n)} + \frac{\sigma_4^{(n)}}{\lambda^2} + \frac{\sigma_6^{(n)}}{\lambda^4} + \ldots + \frac{O(1)}{\lambda^{K-2}}. \tag{3.18}$$

Подставляя соотношения (3.17) в формулы (3.12) и (3.13), получим:

$$\tau_{1\pm}^{(n)} = \pm\tau_0^{(n)} + \lambda\tau_1^{(n)}, \quad \tau_{\pm}^{(n)} = \pm\tau_2^{(n)} + \lambda\tau_3^{(n)}, \tag{3.19}$$

где

$$\begin{aligned} \tau_0^{(n)} &:= \eta_{12}^{(n)}\lambda^2 \left\{\sigma_f^{(n-1)}\sigma_0^{(n)} - \frac{\Upsilon_f^{(n-1)}\Upsilon_0^{(n)}}{\lambda^6}\right\} + \eta_{21}^{(n)} - \eta_{11}^{(n)}\frac{\Upsilon_0^{(n)}}{\lambda^2} + \eta_{22}^{(n)}\frac{\Upsilon_f^{(n-1)}}{\lambda^2}, \\ \tau_1^{(n)} &:= \frac{\eta_{12}^{(n)}}{\lambda^2}\left\{\Upsilon_f^{(n-1)}\sigma_0^{(n)} - \Upsilon_0^{(n)}\sigma_f^{(n-1)}\right\} + \eta_{11}^{(n)}\sigma_0^{(n)} + \eta_{22}^{(n)}\sigma_f^{(n-1)}, \\ \tau_2^{(n)} &:= \eta_{12}^{(n)}\lambda^2 \left\{\sigma_f^{(n-1)}\sigma_0^{(n)} + \frac{\Upsilon_f^{(n-1)}\Upsilon_0^{(n)}}{\lambda^6}\right\} - \eta_{21}^{(n)} + \eta_{11}^{(n)}\frac{\Upsilon_0^{(n)}}{\lambda^2} - \eta_{22}^{(n)}\frac{\Upsilon_f^{(n-1)}}{\lambda^2}, \\ \tau_3^{(n)} &:= \frac{\eta_{12}^{(n)}}{\lambda^2}\left\{\Upsilon_f^{(n-1)}\sigma_0^{(n)} + \Upsilon_0^{(n)}\sigma_f^{(n-1)}\right\} + \eta_{11}^{(n)}\sigma_0^{(n)} - \eta_{22}^{(n)}\sigma_f^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь

$$\sigma_0^{(n)}(\lambda) := \sigma^{(n)}(z_n,\lambda), \quad \sigma_f^{(n-1)}(\lambda) := \sigma^{(n-1)}(z_n,\lambda),$$
$$\Upsilon_0^{(n)}(\lambda) := \Upsilon^{(n)}(z_n,\lambda), \quad \Upsilon_f^{(n-1)}(\lambda) := \Upsilon^{(n-1)}(z_n,\lambda).$$

Подставляя в формулы (3.20) выражения для элементов матрицы перехода $\hat{\eta}^{(n)}$ и соотношения (3.18), после приведения подобных членов получим, что для величин $\tau_l^{(n)}$ $(l = \overline{0,3})$ справедливы следующие асимптотические выражения:

$$\tau_l^{(n)} = \tau_{l,0}^{(n)}\lambda^{2N_l^{(n)}} + \tau_{l,1}^{(n)}\lambda^{2N_l^{(n)}-2} + \ldots + \lambda^{J_l^{(n)}}O(1) \quad (l = \overline{0,3}). \tag{3.21}$$

Здесь

$$J_0^{(n)} = J_1^{(n)} + 1 = J_2^{(n)} = J_3^{(n)} + 1 := \max\{2N_{12}^{(n)} + 1, 2N_{11}^{(n)}, 2N_{22}^{(n)}\} - K,$$

$$N_0^{(n)} = N_2^{(n)} := \max\bigl\{N_{12}^{(n)}+1, N_{21}^{(n)}, N_{11}^{(n)}-1, N_{22}^{(n)}-1\bigr\},$$
$$N_1^{(n)} = N_3^{(n)} := \max\bigl\{N_{12}^{(n)}-1, N_{11}^{(n)}, N_{22}^{(n)}\bigr\},$$

$N_{\alpha\beta}^{(n)}$ $(\alpha,\beta\in\{1,2\})$ — степени полиномиальных выражений для $\eta_{\alpha\beta}^{(n)}(\rho)$ (см. (1.7)).

В (3.21) коэффициенты $\tau_{l,p}^{(n)}$ $(l=\overline{0,3},\ p\in\{0,1,\dots,p_{l,K}^{(n)}\}$, где $p_{l,K}^{(n)}$ определяются условиями $J_l^{(n)} < 2(N_l^{(n)}-p_{l,K}^{(n)}) \leqslant J_l^{(n)}+2)$, выражаются явным образом через коэффициенты в полиномиальных выражениях для элементов матрицы перехода $\hat\eta^{(n)}$ и в асимптотических выражениях вида (3.18) для $\sigma_f^{(n-1)}$, $\sigma_0^{(n)}$, $\Upsilon_f^{(n-1)}$ и $\Upsilon_0^{(n)}$. Существенно, что в формуле (3.21) с увеличением K к старым слагаемым, которые не меняются, добавляются новые слагаемые с меньшей степенью λ. При этом некоторые или даже все коэффициенты $\tau_{l,p}^{(n)}$ могут равняться нулю. Из формул (3.19) и (3.21) с учетом соотношений (3.2), (3.5), (3.10) и (3.11) следует, что если при каком-то минимальном значении $K\geqslant K_0$, которое мы обозначим K_1, хотя бы один из коэффициентов $\tau_{0,p}^{(n)}$, $\tau_{1,p}^{(n)}$ ($\tau_{2,p}^{(n)}$, $\tau_{3,p}^{(n)}$) при $p\in\{0,1,\dots,p_{l,K}^{(n)}\}$ не равен нулю, то справедливо соотношение (3.15) ((3.16)) и оно сохраняется при любых $K\geqslant K_1$. Остается доказать, что такое число K_1 всегда существует. Для этого воспользуемся методом доказательства от противного.

Предположим, что при любых значениях $K\geqslant K_0$ все коэффициенты $\tau_{0,p}^{(n)}$, $\tau_{1,p}^{(n)}$ или $\tau_{2,p}^{(n)}$, $\tau_{3,p}^{(n)}$ равны нулю, т. е.

$$\tau_0^{(n)} = \frac{O(1)}{\lambda^L},\quad \tau_1^{(n)} = \frac{O(1)}{\lambda^L}\quad (\text{для любых } L\in\mathbb{N}) \tag{3.22}$$

или

$$\tau_2^{(n)} = \frac{O(1)}{\lambda^L},\quad \tau_3^{(n)} = \frac{O(1)}{\lambda^L}\quad (\text{для любых } L\in\mathbb{N}). \tag{3.23}$$

Здесь и далее L — целое число, которое может принимать сколь угодно большие положительные значения, в том числе различные в различных формулах.

Подставляя соотношения (3.22) или (3.23) в соответствующие формулы в (3.20), получим систему двух уравнений относительно компонент матрицы перехода $\hat\eta^{(n)}$. Выражая из нее элементы $\eta_{11}^{(n)}$ и $\eta_{21}^{(n)}$, получим:

$$\sigma_0^{(n)}\eta_{11}^{(n)} = \frac{\eta_{12}^{(n)}}{\lambda^2}\Bigl\{\pm\Upsilon_0^{(n)}\sigma_f^{(n-1)} - \Upsilon_f^{(n-1)}\sigma_0^{(n)}\Bigr\} \mp \sigma_f^{(n-1)}\eta_{22}^{(n)} + \frac{O(1)}{\lambda^L}, \tag{3.24}$$

$$\sigma_0^{(n)}\eta_{21}^{(n)} = \mp\eta_{12}^{(n)}\lambda^2\sigma_f^{(n-1)}\left\{\bigl(\sigma_0^{(n)}\bigr)^2 - \frac{\bigl(\Upsilon_0^{(n)}\bigr)^2}{\lambda^6}\right\} \mp \frac{\eta_{22}^{(n)}}{\lambda^2}\Bigl\{\Upsilon_0^{(n)}\sigma_f^{(n-1)} \pm \Upsilon_f^{(n-1)}\sigma_0^{(n)}\Bigr\} + \frac{O(1)}{\lambda^L}, \tag{3.25}$$

$$\pm\frac{\sigma_0^{(n)}}{\sigma_f^{(n-1)}}\det\hat\eta^{(n)} = \bigl(\eta_{12}^{(n)}\bigr)^2\lambda^2\left\{\bigl(\sigma_0^{(n)}\bigr)^2 - \frac{\bigl(\Upsilon_0^{(n)}\bigr)^2}{\lambda^6}\right\} + 2\eta_{12}^{(n)}\eta_{22}^{(n)}\frac{\Upsilon_0^{(n)}}{\lambda^2} - \bigl(\eta_{22}^{(n)}\bigr)^2 + \frac{O(1)}{\lambda^L}, \tag{3.26}$$

где верхний знак (плюс или минус) относится к случаю, когда выполнены соотношения (3.22), а нижний знак — к случаю, когда выполнены соотношения (3.23). Заметим, что в силу (3.18)

$$\lim_{|\rho|\to\infty}\frac{\sigma_0^{(n)}}{\sigma_f^{(n-1)}} = 1. \tag{3.27}$$

Если $\eta_{12}^{(n)} = \eta_{22}^{(n)} \equiv 0$, то в силу (1.7), (3.18), (3.24) и (3.25) $\hat\eta^{(n)}\equiv 0$, что противоречит (1.16).

Допустим, что $\eta_{12}^{(n)}\equiv 0$, $\eta_{22}^{(n)}\not\equiv 0$. Тогда в силу (1.7), (1.8), (3.26) и (3.27) получаем, что $\eta_{22}^{(n)}$ не зависит от ρ, и, значит, $\sigma_0^{(n)} = \sigma_f^{(n-1)}$ (т. к. $\eta_{22}^{(n)}\not\equiv 0$). Поскольку $\eta_{12}^{(n)}\equiv 0$ и $\eta_{22}^{(n)}$ не зависит от ρ, то в силу (3.18), (3.25) имеем: $\eta_{21}^{(n)}\equiv 0$. И наконец, поскольку $\sigma_0^{(n)} = \sigma_f^{(n-1)}$, то из (3.24) получаем, что $\eta_{11}^{(n)} = \mp\eta_{22}^{(n)}$. Таким образом, если $\eta_{12}^{(n)}\equiv 0$, $\eta_{22}^{(n)}\not\equiv 0$, то в силу предположений (3.22) или (3.23) соответственно $\hat\eta^{(n)}\equiv A\hat\sigma_3$ или $\hat\eta^{(n)}\equiv A\hat I$, где $A\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Но оба эти случая противоречат либо условию (1.16), либо предположению $\hat\eta^{(n)}\not\equiv\hat I$. Еще проще убедиться, что соотношения (3.26), (3.27), и, значит, предположения (3.22) или (3.23) противоречат условию (1.8) при $\eta_{12}^{(n)} \not\equiv 0$, $\eta_{22}^{(n)} \equiv 0$. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда оба этих элемента отличны от тождественного нуля. В силу соотношений (1.8) и (3.27) асимптотическое разложение левой части равенства (3.26) может иметь только члены нулевой и отрицательной степеней ρ. Допустим, что $N_{12}^{(n)} \geqslant N_{22}^{(n)}$ (см. (1.7)). Тогда в первом слагаемом в правой части (3.26) старший по ρ член будет иметь степень $2N_{12}^{(n)}+1$, во втором слагаемом — не выше $N_{12}^{(n)}+N_{22}^{(n)}-1 \leqslant 2N_{12}^{(n)}-1$, а в третьем: $2N_{22}^{(n)} \leqslant 2N_{12}^{(n)}$. Отсюда следует, что в правой части (3.26) обязательно будет присутствовать старший по ρ член, имеющий степень $2N_{12}^{(n)}+1>0$ и, следовательно, равенство (3.26) не может быть выполнено при $|\rho| \to \infty$.

Пусть теперь $N_{22}^{(n)} \geqslant N_{12}^{(n)}+1>0$. Тогда в третьем слагаемом в правой части (3.26) старший по ρ член будет иметь степень $2N_{22}^{(n)}>0$, во втором слагаемом — не выше $N_{12}^{(n)}+N_{22}^{(n)}-1 \leqslant 2N_{22}^{(n)}-2$, а в первом: $2N_{12}^{(n)}+1 \leqslant 2N_{22}^{(n)}-1$. Отсюда следует, что в правой части (3.26) обязательно будет присутствовать старший по ρ член, имеющий степень $2N_{22}^{(n)}>0$, и, следовательно, равенство (3.26) опять не может быть выполнено при $|\rho| \to \infty$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

Заметим, что входящие в формулы (3.15) и (3.16) для случая $\hat{\eta}^{(n)} \equiv \hat{I}$ ($n \in \{1,\dots,N\}$ при $N \geqslant 1$) числа m_n и δ_n равны соответственно минимальному порядку производной от потенциала вдоль кривой γ, которая имеет скачок в точке z_n, и величине этого скачка (см. [4, формулы (18), (19)]).

Лемма 3.4. *При выполнении* (1.19) *в условиях леммы* 3.2 *элементы* $c_{\eta,\alpha\nu}^{(f)}$ ($\nu \in \{1,2\}$) *и* $a_{\eta,\kappa\beta}^{(0)}$ ($\kappa \in \{1,2\}$) *соответственно матриц* $\hat{C}_\eta^{(f)} := \hat{\eta}^{(N+1)}\hat{C}^{(f)}$ *и* $\hat{A}_\eta^{(0)} := \hat{A}^{(0)}\hat{\eta}^{(0)}$ *при* $|\lambda| \geqslant \lambda_K$ *можно представить в виде*

$$c_{\eta,\alpha\nu}^{(f)}(\lambda) = \exp\{-(-1)^\nu \lambda \Delta z_N\}\biggl[\eta_{\alpha 1,0}^{(N+1)}\lambda^{2N_{\alpha 1}^{(N+1)}}\biggl(1+\frac{O(1)}{\lambda}\biggr)- \tag{3.28}$$

$$-(-1)^\nu \eta_{\alpha 2,0}^{(N+1)}\lambda^{2N_{\alpha 2}^{(N+1)}+1}\biggl(1+\frac{O(1)}{\lambda}\biggr)\biggr] \neq 0 \quad (\nu \in \{1,2\}), \tag{3.29}$$

$$a_{\eta,\kappa\beta}^{(0)}(\lambda) = \frac{\eta_{1\beta,0}^{(0)}}{2}\lambda^{2N_{1\beta}^{(0)}}\biggl(1+\frac{O(1)}{\lambda}\biggr) - \frac{(-1)^\kappa}{2}\eta_{2\beta,0}^{(0)}\lambda^{2N_{2\beta}^{(0)}-1}\biggl(1+\frac{O(1)}{\lambda}\biggr) \neq 0 \quad (\kappa \in \{1,2\}). \tag{3.30}$$

Доказательство. С учетом соотношений (1.7), (1.19), (3.2), (3.3), (3.5) формулы (3.28) и (3.30) следуют из формул (3.8) и (3.7), (3.11) соответственно. □

Будем обозначать $(N+1)$-мерные векторы буквой со стрелкой сверху, а их скалярное произведение — круглыми скобками. Например,

$$\overrightarrow{\Delta z} := (\Delta z_0, \Delta z_1, \dots, \Delta z_N), \quad (\overrightarrow{\alpha^{(s)}}, \overrightarrow{\Delta z}) := \sum_{m=0}^{N} \alpha_m^{(s)} \Delta z_m, \quad \overrightarrow{\alpha^{(s)}} := \bigl(\alpha_0^{(s)}, \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_N^{(s)}\bigr).$$

Здесь

$$s = 1 + \sum_{m=0}^{N} \bigl(1+\alpha_m^{(s)}\bigr)2^{m-1}, \quad \alpha_m^{(s)} \in \{\pm 1\} \quad (m = \overline{0,N}), \tag{3.31}$$

т. е. $s \in \{1,\dots,2^{N+1}\}$, и существует взаимно однозначное соответствие значения индекса s и значений всех компонент вектора $\overrightarrow{\alpha^{(s)}}$ (как в двоичной системе счисления).

Из лемм 3.2–3.4 имеем следующее следствие.

Следствие 3.1. *При выполнении условий* (1.8), (1.16) *и* (1.19) *существует такое конечное* $\lambda_0 > 0$, *что при* $|\lambda| \geqslant \lambda_0$ *элемент* $p_{\alpha\beta}$ *передаточной матрицы* $\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0)$ *уравнения* (1.3) *класса H с набором характеристических данных* (1.10) *можно записать в виде:*

$$p_{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^{2^{N+1}} d_{\alpha\beta}^{(s)}(\lambda)\exp\{\lambda h_s\}. \tag{3.32}$$

Здесь коэффициенты $h_s := (\overrightarrow{\alpha^{(s)}}, \overrightarrow{\Delta z})$ *не зависят от* λ *и все функции* $d_{\alpha\beta}^{(s)}(\lambda)$ *можно представить в виде:*

$$d_{\alpha\beta}^{(s)}(\lambda) = \lambda^{m_{\alpha\beta}^{(s)}}\delta_{\alpha\beta}^{(s)}\left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \quad (s = \overline{1, 2^{N+1}}),$$

где целые числа $m_{\alpha\beta}^{(s)}$ *и комплексные числа* $\delta_{\alpha\beta}^{(s)} \neq 0$ *не зависят от* λ.

Часть показателей экспонент в правых частях равенств (3.32) может совпадать, и возникает вопрос: не сокращаются ли в (3.32) коэффициенты при экспонентах, наиболее быстро растущих с ростом $|\lambda|$? Отрицательный ответ на этот вопрос для элементов передаточной матрицы уравнения (1.3) класса H вдоль простой кривой дает лемма 3.5, аналогичная лемме 4 работы [4].

Лемма 3.5. *Пусть* $h_{max} := \max\{|h_s|, s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$, *где* $h_s = (\overrightarrow{\alpha^{(s)}}, \overrightarrow{\Delta z})$. *Тогда существуют хотя бы два различных числа* $l_0 \in \{1, \dots, 2^{N+1}\}$ *такие, что* $|h_{l_0}| = h_{\max}$, *причем если* $\overrightarrow{\Delta z} \neq \overrightarrow{0}$, *то* $h_{\max} > 0$. *Кроме того, при выполнении условий* (1.17) *для любого коэффициента* h_{l_0} *такого, что* $|h_{l_0}| = h_{\max}$, *и для любого числа* $s \in \{1, \dots, 2^{N+1}\} \setminus \{l_0\}$ *справедливо неравенство* $h_{l_0} \neq h_s$.

Перейдем к доказательству теоремы 1.2, сформулированной в конце раздела 1.

Доказательство теоремы 1.2. По условию теоремы кривая γ является простой. Поэтому из следствия 3.1 и леммы 3.5 получаем, что при выполнении обоих условий (1.19) существует минимум два противоположно направленных луча, исходящих из нуля комплексной плоскости параметра λ (и, значит, минимум один луч, исходящий из нуля комплексной плоскости спектрального параметра ρ), такие, что среди 2^{N+1} слагаемых в (3.32) для элемента $p_{\alpha\beta}$ матрицы $\hat{P}$ существует ровно одно слагаемое, имеющее наибольший экспоненциальный рост с показателем $h_{\max} > 0$ при $\lambda \to \infty$ ($\rho \to \infty$) вдоль каждого из этих лучей. С учетом леммы 1.1 получаем, что в этом случае элемент $p_{\alpha\beta}$ передаточной матрицы $\hat{P}$ является целой функцией ρ порядка 1/2 и нормального типа (см. [10, гл. I, § 1]). Если нарушено первое или второе из условий (1.19), то $p_{\alpha\beta}(\lambda) \equiv 0$ в силу (1.12). С учетом вышеизложенного в обратную сторону теорема 1.2 легко доказывается методом от противного. □

4. Виды спектров краевых задач с распадающимися граничными условиями. Угловая плотность счетного спектра. Рассмотрим краевую задачу с распадающимися граничными условиями (1.20) для уравнения (1.3) класса H на кривой γ. Будем называть ее краевой задачей H и искать ее нетривиальное решение в виде

$$u(z) = \upsilon_1 u_1(z) + \upsilon_2 u_2(z), \quad |\upsilon_1| + |\upsilon_2| \neq 0, \tag{4.1}$$

где $u_1(z)$, $u_2(z)$ — решения уравнения (1.3) класса H на кривой γ, удовлетворяющие условиям (1.11) в ее начальной точке z_0. Подставляя (4.1) в граничные условия (1.20), получим следующую систему уравнений для коэффициентов υ_1, υ_2:

$$\Theta_{21}\upsilon_1 - \Theta_{11}\upsilon_2 = 0, \quad (\mu_{11}p_{11} + \mu_{12}p_{21})\upsilon_1 + (\mu_{11}p_{12} + \mu_{12}p_{22})\upsilon_2 = 0. \tag{4.2}$$

Здесь $p_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \in \{1, 2\}$) — элементы передаточной матрицы $\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0)$ уравнения (1.3) класса H вдоль кривой γ. Система уравнений (4.2) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее дискриминант D_0 равен нулю:

$$D_0(\rho) := \Theta_{21}\mu_{11}p_{12} + \Theta_{21}\mu_{12}p_{22} + \Theta_{11}\mu_{11}p_{11} + \Theta_{11}\mu_{12}p_{21} = 0. \tag{4.3}$$

Функцию D_0 назовем характеристической функцией краевой задачи H.

Очевидно, что если $\Theta_{21}(\rho) = \Theta_{11}(\rho) \equiv 0$ или $\mu_{11}(\rho) = \mu_{12}(\rho) \equiv 0$, то краевая задача вырождается в неполную начальную. Условие (4.3) при этом выполнено тождественно.

Пусть справедливы соотношения (1.21). Рассмотрим матрицу

$$\hat{R}(\gamma, z_{N+1}, z_0) := \hat{\mu}\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0)\hat{\Theta}, \tag{4.4}$$

которую будем называть характеристической матрицей краевой задачи H, т. к. ее элемент r_{11} совпадает с характеристической функцией D_0.

В силу (3.6) и (4.4) в условиях леммы 3.2 матрицу $\hat{R}$ можно представить в виде

$$\hat{R}(\gamma, z_{N+1}, z_0) = \hat{\hat{\mu}}\hat{C}^{(f)}\hat{T}^{(N)}\hat{T}^{(N-1)}\ldots\hat{T}^{(2)}\hat{T}^{(1)}\hat{T}^{(0)}\hat{A}^{(0)}\hat{\hat{\Theta}}, \tag{4.5}$$

где $\hat{\hat{\mu}}$, $\hat{\hat{\Theta}}$ определены в (1.22), а все остальные величины описаны в лемме 3.2.

Формула (4.5) получается из формулы (3.6) заменой матриц $\hat{\eta}^{(0)}$ и $\hat{\eta}^{(N+1)}$ на матрицы $\hat{\hat{\Theta}}$ и $\hat{\hat{\mu}}$ соответственно. Поэтому для элемента r_{11} матрицы $\hat{R}$ справедливы леммы 4.1 и 4.2, аналогичные следствию 3.1 и теореме 1.2 соответственно.

Лемма 4.1. *При выполнении условий* (1.8)*,* (1.16) *и* (1.23) *существует такое конечное* $\lambda_0 > 0$*, что при* $|\lambda| \geqslant \lambda_0$ *элемент* r_{11} *характеристической матрицы* (4.4) *краевой задачи* H *может быть записан в виде:*

$$r_{11} = \sum_{s=1}^{2^{N+1}} d_r^{(s)}(\lambda)\exp\{\lambda h_s\}. \tag{4.6}$$

Здесь коэффициенты $h_s = (\overrightarrow{\alpha^{(s)}}, \overrightarrow{\Delta z})$ *не зависят от* λ*, и все функции* $d_r^{(s)}(\lambda)$ *можно представить в виде:*

$$d_r^{(s)}(\lambda) = \lambda^{m_r^{(s)}}\delta_r^{(s)}\left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \quad (s = \overline{1, 2^{N+1}}), \tag{4.7}$$

где целые числа $m_r^{(s)}$ *и комплексные числа* $\delta_r^{(s)} \neq 0$ *не зависят от* λ*.*

Лемма 4.2. *Элемент* r_{11} *характеристической матрицы* (4.4) *краевой задачи с граничными условиями* (1.20) *для уравнения* (1.3) *класса* H *на простой кривой* γ *с набором характеристических данных* (1.10) *является целой функцией* ρ *порядка* $1/2$ *и нормального типа* (*тождественно равен нулю*) *тогда и только тогда, когда выполнены оба* (*не выполнено хотя бы одно*) *из условий* (1.23)*.*

Докажем теперь теорему 1.3, сформулированную в разделе 1.

Доказательство теоремы 1.3. Как уже указывалось, $D_0 = r_{11}$. Рассмотрим оба возможных типа простого набора характеристических данных (1.10) кривой γ.

Пусть набор W — точечный. Тогда в силу леммы 1.2 и формул (1.22), (4.4) $r_{11} = r_0(\rho)$, причем $r_0(\rho)$ — полином ρ. Если степень этого полинома N_r больше нуля, то число нулей D_0 с учетом их кратности, очевидно, равно N_r. Если $N_r = 0$, т. е. $r_0(\rho) \equiv R_0$, где R_0 — комплексное число, то возможны два случая. При $R_0 \neq 0$ спектр краевой задачи пуст, а при $R_0 = 0$ он совпадает со всей комплексной плоскостью.

Если набор W отличен от точечного, т. е. кривая γ — простая, то в силу леммы 4.2 и свойств целых функций порядка $1/2$ и нормального типа (см. [10]) спектр рассматриваемой краевой задачи совпадает со всей комплексной плоскостью (счетный) тогда и только тогда, когда не выполнено хотя бы одно (выполнены оба) из условий (1.23).

Комбинируя перечисленные случаи, получаем теорему 1.3. $\square$

Выражения вида (4.6) часто возникают в различных ситуациях, и поэтому методы их исследования хорошо разработаны, причем с разными целями и с разных точек зрения (см. [1,10,12,24]). Обычно эти методы начинаются с построения на комплексной плоскости λ выпуклого многоугольника, содержащего все точки, соответствующие коэффициентам h_s $(s = \overline{1, 2^{N+1}})$ в показателях экспонент (точнее, их комплексно сопряженным величинам). Однако в нашем случае, учитывая большое число этих коэффициентов и их особую структуру, на начальном этапе удобнее не пользоваться геометрической интерпретацией, а из формул (4.6) и (4.7) сразу найти индикатор целой функции $D_0(\lambda)$ (см. [10]).

Для простой кривой определенные в (1.17) числа $\Delta z_m \neq 0$, и их можно представить в виде

$$\Delta z_m = \chi_m \exp\{i\psi_m\}, \quad \psi_m \in [-\pi;\pi), \quad \chi_m > 0 \quad (m \in \{0,\dots,N\}), \tag{4.8}$$

где i — мнимая единица. Положим также

$$\lambda = |\lambda| \exp\{i\psi\}, \quad \psi \in (-\pi/2; 3\pi/2] \quad (\text{при } \lambda \neq 0); \tag{4.9}$$

$$(\widetilde{\psi}_m, \widetilde{\alpha}_m^{(s)}) \coloneqq \begin{cases} (\psi_m, \alpha_m^{(s)}), & \text{если } \psi_m \in [0;\pi); \\ (\pi + \psi_m, -\alpha_m^{(s)}), & \text{если } \psi_m \in [-\pi;0) \end{cases} \quad (m \in \{0,\dots,N\}), \tag{4.10}$$

где $\alpha_m^{(s)} \in \{\pm 1\}$. Очевидно, что $\widetilde{\psi}_m \in [0;\pi)$, $\widetilde{\alpha}_m^{(s)} \in \{\pm 1\}$.

В силу (4.8)–(4.10) при $\lambda \neq 0$ имеем:

$$\widetilde{h}_s(\psi) \coloneqq \frac{\mathrm{Re}\{\lambda h_s\}}{|\lambda|} = \sum_{m=0}^{N} \alpha_m^{(s)} \chi_m \cos(\psi + \psi_m) = \sum_{m=0}^{N} \widetilde{\alpha}_m^{(s)} \chi_m \cos(\psi + \widetilde{\psi}_m) \quad (s = \overline{1, 2^{N+1}}), \tag{4.11}$$

где коэффициенты h_s были определены в следствии 3.1.

Лемма 4.3. *Пусть $\lambda \neq 0$, $\widetilde{h}_{\max}(\psi) \coloneqq \max\{\widetilde{h}_s(\psi), s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$, где величины ψ и $\widetilde{h}_s(\psi)$ определены в* (4.9) *и* (4.11) *соответственно, и*

$$H(\psi) \coloneqq \sum_{m=0}^{N} \chi_m |\cos(\psi + \widetilde{\psi}_m)| \geqslant 0. \tag{4.12}$$

Тогда для любого $\psi \in (-\pi/2; 3\pi/2] \setminus \{\pi/2 - \widetilde{\psi}_m, 3\pi/2 - \widetilde{\psi}_m\}_0^N$ выполнено $\widetilde{h}_{\max}(\psi) = H(\psi)$, и существует ровно одно зависящее от ψ число $s_0 \in \{1,\dots,2^{N+1}\}$, такое, что $\widetilde{h}_{s_0}(\psi) = H(\psi) > 0$.

Доказательство. Для всех $m \in \{0,\dots,N\}$ по условию леммы $\cos(\psi + \widetilde{\psi}_m) \neq 0$, и, значит, в силу соотношений (4.10) $\cos(\psi + \psi_m) \neq 0$. Положим $\alpha_m^{(s_0)}(\psi) = \mathrm{sign}\{\cos(\psi + \psi_m)\}$. Тогда из (3.31), (4.10)–(4.12) имеем $\widetilde{h}_{s_0}(\psi) = H(\psi)$, где

$$s_0(\psi) \coloneqq 1 + \sum_{m=0}^{N} \big(1 + \alpha_m^{(s_0)}(\psi)\big) 2^{m-1}.$$

В выражении (4.12) для $H(\psi)$ все слагаемые положительны. Если же индекс $s \in \{1,\dots,2^{N+1}\} \setminus \{s_0(\psi)\}$, то в силу (3.31) в сумме (4.11), слагаемые в которой равны по модулю соответствующим слагаемым в выражении (4.12), будет как минимум одно отрицательное слагаемое, и, значит, $\widetilde{h}_s(\psi) < H(\psi)$. □

Лемма 4.4. *Пусть на простой кривой γ задано уравнение* (1.3) *класса H. Тогда при выполнении условий* (1.19) *или* (1.23) *соответственно элемент $p_{\alpha\beta}$ передаточной матрицы $\hat{P}$ вдоль кривой γ или элемент r_{11} характеристической матрицы* (4.4) *краевой задачи H является целой функцией параметра $\lambda = |\lambda| \exp\{i\psi\}$ первого порядка и вполне регулярного роста с индикатором $H(\psi)$, задаваемым формулой* (4.12).

Доказательство. В силу следствия 3.1 и лемм 4.1, 4.3 для любого числа $\psi \in (-\pi/2; 3\pi/2] \setminus \{\pi/2 - \widetilde{\psi}_m, 3\pi/2 - \widetilde{\psi}_m\}_0^N$ при выполнении условий (1.19) среди 2^{N+1} слагаемых в формуле (3.32) для элемента $p_{\alpha\beta}$ матрицы $\hat{P}$, а при выполнении условий (1.23) в формуле (4.6) для элемента r_{11} матрицы $\hat{R}$, существует ровно одно слагаемое, имеющее наибольший экспоненциальный рост с показателем $H(\psi) > 0$ при $|\lambda| \to \infty$ вдоль луча $|\lambda| \exp\{i\psi\}$, и, значит, каждый из указанных элементов при выполнении сформулированных условий является функцией вполне регулярного роста (см. [10, гл. III]) на всех этих лучах с индикатором $H(\psi)$. Утверждение леммы следует из непрерывности функции $H(\psi)$ и индикатора целой функции (см. [10, гл. I, § 16]), а также того, что целая функция вполне регулярного роста на лучах, образующих всюду плотное множество, есть функция вполне регулярного роста на всей плоскости (см. [10, гл. III, § 1]). □

Пусть множество определенных в (4.10) чисел $\{\widetilde{\psi}_m\}_0^N$ содержит J различных значений ω_j ($j=\overline{1,J}$, $1\leqslant J\leqslant N+1$), которые пронумерованы так, что

$$0\leqslant\omega_1<\ldots<\omega_J<\pi. \tag{4.13}$$

Тогда множество чисел $\{0,\ldots,N\}$ можно разбить на J непересекающихся непустых подмножеств N_j таким образом, что $\widetilde{\psi}_n=\omega_j$ тогда и только тогда, когда $n\in N_j$. В этих обозначениях выражение (4.12) для индикатора $H(\psi)$ примет вид:

$$H(\psi)=\sum_{j=1}^{J}\chi_j^{(0)}|\cos(\psi+\omega_j)|,\quad \chi_j^{(0)}=\sum_{n\in N_j}\chi_n. \tag{4.14}$$

Из (4.14) очевидно, что $H(\psi+\pi)=H(\psi)$. Поэтому в дальнейшем можно рассмотреть любой интервал значений ψ, превышающий π, например, интервал $(-\pi/2-\omega_1;3\pi/2-\omega_J)$. Заметим, что ни один из косинусов в формуле (4.14) не обращается в ноль при $\psi\in\Gamma_j:=(\pi/2-\omega_j;\pi/2-\omega_{j-1})$ ($j\in\{1,\ldots,J+1\}$), где

$$\omega_0:=\omega_J-\pi,\quad \omega_{J+1}:=\pi+\omega_1. \tag{4.15}$$

Поэтому, раскрывая в формуле (4.14) модули, используя формулу косинуса суммы и приводя подобные члены, получим, что

$$H(\psi)=a_j\cos\psi+b_j\sin\psi,\quad \psi\in[\pi/2-\omega_j;\pi/2-\omega_{j-1}]\quad (j\in\{1,\ldots,J+1\}), \tag{4.16}$$

где a_j, b_j — некоторые действительные числа.

В силу леммы 4.4 в случае простой кривой и выполнения условий (1.23) характеристическая функция D_0 — целая функция λ первого порядка и вполне регулярного роста с индикатором, задаваемым равносильными формулами (4.12), (4.14) и (4.16). Пусть $n(r,\theta_1,\theta_2)$ — число нулей функции $D_0(\lambda)$ в секторе $\theta_1\leqslant\arg\lambda\leqslant\theta_2$, $|\lambda|\leqslant r$, где $\theta_1\in\Gamma_{j+1}$, $\theta_2\in\Gamma_j$. Тогда, пользуясь теоремой 3 главы III работы [10] и формулами (4.14), (4.16) получим, что для угловой плотности

$$\Delta(\theta_1,\theta_2):=\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\theta_1,\theta_2)}{r} \tag{4.17}$$

нулей функции $D_0(\lambda)$ внутри угла $\theta_1\leqslant\arg\lambda\leqslant\theta_2$ комплексной плоскости λ справедливы следующие формулы

$$\Delta(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{dH}{d\psi}\bigg|_{\psi=\pi/2-\omega_j+0}-\frac{dH}{d\psi}\bigg|_{\psi=\pi/2-\omega_j-0}\right)=\frac{\chi_j^{(0)}}{\pi}. \tag{4.18}$$

Здесь первое равенство получается после подстановки (4.16) в формулы (3.25), (3.26) работы [10], а второе равенство следует из того, что в силу (4.14) для любого $j\in\{1,\ldots,J\}$

$$H(\psi)=h^{(j)}(\psi)+\begin{cases}\chi_j^{(0)}\cos(\psi+\omega_j), & \text{если } \psi\in(\pi/2-\omega_{j+1};\pi/2-\omega_j);\\ -\chi_j^{(0)}\cos(\psi+\omega_j), & \text{если } \psi\in(\pi/2-\omega_j;\pi/2-\omega_{j-1}),\end{cases}$$

где функция $h^{(j)}(\psi)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(\pi/2-\omega_{j+1};\pi/2-\omega_{j-1})$.

Предложение 4.1. *Пусть $F_0(\rho)$ — целая функция ρ порядка $1/2$. Тогда если $\rho=\lambda^2$, то функция $F_1(\lambda):=F_0(\lambda^2)$ — четная целая функция λ первого порядка. Если при этом в секторе $\theta_1\leqslant\arg\lambda\leqslant\theta_2$ ($0\leqslant\theta_2-\theta_1<\pi$), $0<|\lambda|\leqslant r$ комплексной λ-плоскости функция F_1 имеет некоторое число нулей какой-то кратности, то столько же нулей такой же кратности функция $F_0(\rho)$ имеет в секторе $2\theta_1\leqslant\arg\rho\leqslant2\theta_2$, $0<|\rho|\leqslant r^2$ комплексной ρ-плоскости.*

Формула (4.18) с учетом формулы (4.9) и предложения 4.1 доказывает теорему 1.4, сформулированную в конце раздела 1.

5. Типы асимптотики счетного спектра. Из формул (4.9) и (4.18) следует, что при выполнении условий (1.23) нули характеристической функции $D_0(\lambda)$ краевой задачи класса H на простой кривой γ асимптотически (при $|\lambda| \to \infty$) лежат в окрестностях конечного числа J ($1 \leqslant J \leqslant N+1$) прямых, параметрически задаваемых функциями $\lambda = \lambda^{(j)}(t) := t\exp\{i(\pi/2-\omega_j)\}$ ($t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,J}$), где величины ω_j определены в соотношении (4.13) и перед ним.

Заметим, что в силу формул (4.8) и (4.10), а также по определению величин ω_j множество прямых, заданных параметрически соотношениями $z = t\exp\{i\omega_j\}$ ($t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,J}$) совпадает с множеством всех прямых, проходящих через начало координат комплексной плоскости z, каждая из которых параллельна хотя бы одному из отрезков L_m ($m = \overline{0,N}$), соединяющих последовательные характеристические точки простой кривой.

Для изучения особенностей асимптотики спектра вблизи конкретной прямой $\lambda = \lambda^{(j)}(t)$ ($t \in \mathbb{R}$, $j \in \{1,\ldots,J\}$) полезно выделить в формуле (4.6) члены, которые являются главными в некоторой окрестности этой прямой. Поскольку $D_0(\lambda)$ является четной функцией λ, то можно ограничиться рассмотрением окрестности луча $\lambda = t\exp\{i(\pi/2-\omega_j)\}$, $t > 0$.

Лемма 5.1. *Пусть*

$$\varepsilon_1^{(j)} := \min\{\omega_j - \omega_{j-1}, \quad \omega_{j+1} - \omega_j\}, \quad \delta \in \big[-\varepsilon_1^{(j)}/2, \varepsilon_1^{(j)}/2\big] \quad (j \in \{1,\ldots,J\}),$$

где $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{J+1}$ *были определены в* (4.13), (4.15). *Тогда для любого числа* $\kappa \in \{1,\ldots,J\} \setminus \{j\}$ *при* $J \geqslant 2$

$$|\sin(\omega_j - \delta - \omega_\kappa)| \geqslant \sin\big(\varepsilon_1^{(j)}/2\big) > 0. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть для определенности $j > \kappa$. Тогда, учитывая соотношения (4.13), (4.15), определение величины $\varepsilon_1^{(j)}$ и ограничение на область изменения переменной δ, имеем:

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\varepsilon_1^{(j)}}{2} \leqslant \frac{\omega_j - \omega_{j-1}}{2} \leqslant \frac{\omega_j - \omega_{j-1}}{2} + \omega_{j-1} - \omega_\kappa = \omega_j - \frac{\omega_j - \omega_{j-1}}{2} - \omega_\kappa \leqslant \\ \leqslant \omega_j - \frac{\varepsilon_1^{(j)}}{2} - \omega_\kappa \leqslant \omega_j - \delta - \omega_\kappa \leqslant \omega_j + \frac{\varepsilon_1^{(j)}}{2} - \omega_\kappa \leqslant \omega_j + \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{2} - \omega_\kappa = \\ = \omega_{j+1} - \omega_\kappa - \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{2} \leqslant \omega_{J+1} - \omega_1 - \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{2} = \pi - \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{2} \leqslant \pi - \frac{\varepsilon_1^{(j)}}{2} < \pi. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\omega_j - \delta - \omega_\kappa \in \big[\varepsilon_1^{(j)}/2, \pi - \varepsilon_1^{(j)}/2\big] \subset (0,\pi),$$

что и доказывает лемму. Аналогично рассматривается случай $j < \kappa$. □

Перейдем к доказательству теоремы 1.5, сформулированной в конце раздела 1.

Доказательство теоремы 1.5. Пусть

$$\begin{gathered} \lambda = |\lambda|\exp\{i(\pi/2 - \omega_j + \delta)\}, \quad j \in \{1,\ldots,J\}, \quad |\lambda| \geqslant \lambda_0 > 0, \\ \delta \in [-\varepsilon^{(j)}, \varepsilon^{(j)}], \quad 0 < \varepsilon^{(j)} \leqslant \varepsilon_1^{(j)}/2. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Положим

$$\alpha_{m,j}^{(0)} := \operatorname{sign}\{\sin(\omega_j - \psi_m)\}, \quad S_0^{(j)} := 1 + \sum_{m=0, m\notin N_j}^{N} \big(1 + \alpha_{m,j}^{(0)}\big)2^{m-1}.$$

Заметим, что $S_0^{(1)} = 1$ при $J = 1$. Если $s \in S_j$, где

$$S_j := \left\{S_0^{(j)} + \sum_{n \in N_j} \big(1 + \alpha_n^{(s)}\big)2^{n-1}, \alpha_n^{(s)} \in \{-1, 1\}\right\}, \tag{5.3}$$

то, учитывая формулу (3.31), устанавливающую взаимно однозначное соответствие значения индекса s со значениями всех компонент вектора $\overrightarrow{\alpha^{(s)}}$, получим, что коэффициент $h_s = (\overrightarrow{\alpha^{(s)}}, \overrightarrow{\Delta z})$

можно представить в виде

$$h_s = \sum_{m=0, m\notin N_j}^{N} \alpha_{m,j}^{(0)} \Delta z_m + \sum_{n\in N_j} \alpha_n^{(s)} \Delta z_n = H_0^{(j)} + \Delta h_s^{(j)} \quad (s \in S_j), \tag{5.4}$$

где

$$H_0^{(j)} \coloneqq \sum_{m=0, m\notin N_j}^{N} \alpha_{m,j}^{(0)} \Delta z_m - \sum_{n\in N_j} \beta_n \Delta z_n, \tag{5.5}$$

$$\beta_n \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_n \in [0;\pi); \\ -1, & \text{если } \psi_n \in [-\pi;0), \end{cases}$$

$$\Delta h_s^{(j)} \coloneqq \sum_{n\in N_j} \bigl(\alpha_n^{(s)} + \beta_n\bigr)\Delta z_n = \exp\{i\omega_j\}\Psi_s^{(j)}, \quad \Psi_s^{(j)} \coloneqq \sum_{n\in N_j} \bigl(\widetilde{\alpha}_n^{(s)} + 1\bigr)\chi_n \quad (s \in S_j). \tag{5.6}$$

При получении последней формулы учтены соотношения (4.8), (4.10) и определение множества чисел N_j, данное после (4.13).

При $J \geqslant 2$ наложим на $\varepsilon^{(j)}$ дополнительное к (5.2) ограничение:

$$0 < \varepsilon^{(j)} \leqslant \varepsilon_2^{(j)}. \tag{5.7}$$

Здесь

$$\varepsilon_2^{(j)} \coloneqq \arcsin\left(\min\left\{1, \frac{\chi_j^{(out)}}{2\chi_j^{(0)}} \sin\left(\frac{\varepsilon_1^{(j)}}{2}\right)\right\}\right) > 0, \quad \chi_j^{(out)} \coloneqq \min\{\chi_m, m \in \{0,\dots,N\} \setminus N_j\} > 0,$$

где величины $\varepsilon_1^{(j)}$ и $\chi_j^{(0)}$ были определены в лемме 5.1 и формуле (4.14) соответственно.

Пусть $p \in \{1,\dots,2^{N+1}\} \setminus S_j$. Тогда по построению множества S_j (см. формулы (3.31), (5.3)) существует минимум одно значение $m \in N_\kappa$ ($\kappa \neq j$) такое, что $\alpha_m^{(s)} = -\alpha_{m,j}^{(0)}$, и, значит, при выполнении условий (5.2), (5.7) из неравенства (5.1) и соотношений (4.8), (4.10), (4.11), (4.13), (4.14), (5.5) получим

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re}\{\lambda(h_p - H_0^{(j)})\}}{|\lambda|} &\leqslant -2\chi^{(m)}|\cos(\pi/2 - \omega_j + \delta + \psi_m)| + \sum_{n\in N_j} 2\chi^{(n)}|\cos(\pi/2+\delta)| = \\ &= -2\chi^{(m)}|\sin(\omega_j - \delta - \omega_\kappa)| + 2\chi_j^{(0)}|\sin\delta| \leqslant -2\chi_j^{(out)}\sin\bigl(\varepsilon_1^{(j)}/2\bigr) + 2\chi_j^{(0)}|\sin\delta| \leqslant -\delta^{(j)}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

где $\delta^{(j)} = \chi_j^{(out)} \sin\bigl(\varepsilon_1^{(j)}/2\bigr) > 0$.

Из (4.10), (4.14) и (5.6) следует, что $\Psi_s^{(j)}$ — действительные неотрицательные числа, не превышающие $2\chi_j^{(0)}$. Часть из них может совпадать между собой. Однако существуют ровно одно число $k_{0,j} \in S_j$, такое, что $\Psi_{k_{0,j}}^{(j)} = 0$, и ровно одно число $k_{1,j} \in S_j$, такое, что $\Psi_{k_{1,j}}^{(j)} = 2\chi_j^{(0)}$.

Пусть множество определенных в (5.6) чисел $\{\Psi_s^{(j)},\ s \in S_j\}$ содержит I_j различных значений $\beta_p^{(j)}$ ($p = \overline{1, I_j}$), которые пронумерованы так, что

$$0 = \beta_1^{(j)} < \beta_2^{(j)} < \ldots < \beta_{I_j}^{(j)} = 2\chi_j^{(0)}. \tag{5.9}$$

Тогда множество чисел S_j можно разбить на I_j непересекающихся непустых подмножеств $S_p^{(j)}$ ($p = \overline{1, I_j}$) таким образом, что $\Psi_l^{(j)} = \beta_p^{(j)}$ тогда и только тогда, когда $l \in S_p^{(j)}$. Положим

$$d_p^{(j)}(\lambda) \coloneqq \sum_{s\in S_p^{(j)}} d_r^{(s)}(\lambda), \tag{5.10}$$

где $d_r^{(s)}$ — коэффициенты перед экспонентами в (4.6), которые могут быть асимптотически представлены в виде (4.7). Из сказанного выше имеем

$$S_1^{(j)} = \{k_{0,j}\}, \quad S_{I_j}^{(j)} = \{k_{1,j}\}.$$

Поэтому

$$d_1^{(j)} := d_r^{(k_{0,j})}, \quad d_{I_j}^{(j)} := d_r^{(k_{1,j})}.$$

Пусть

$$m_{\min}^{(j)} := \min\left\{m_r^{(k_{0,j})}, m_r^{(k_{1,j})}\right\}.$$

Тогда из (4.7) и (5.10) следует, что либо $d_p^{(j)}$ можно представить в виде:

$$d_p^{(j)}(\lambda) = \lambda^{m_p^{(j)}} \delta_p^{(j)} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0, \quad m_p^{(j)} \geqslant m_{\min}^{(j)}, \quad \delta_p^{(j)} \neq 0 \quad (p \in \{1, \ldots, I_j\}), \tag{5.11}$$

либо $d_p^{(j)} = \lambda^{m_{\min}^{(j)}-1} O(1)$. В последнем случае при выполнении условий (5.2) в силу (5.9) справедливо следующее соотношение

$$d_p^{(j)}(\lambda) \exp\left\{\beta_p^{(j)} \lambda_1\right\} = \frac{O(1)}{\lambda} \begin{cases} d_1^{(j)}(\lambda) \exp\left\{\beta_1^{(j)} \lambda_1\right\}, & \text{если } \delta \geqslant 0; \\ d_{I_j}^{(j)}(\lambda) \exp\left\{\beta_{I_j}^{(j)} \lambda_1\right\}, & \text{если } \delta \leqslant 0. \end{cases} \tag{5.12}$$

где $\lambda_1 := \lambda \exp\{i\omega_j\} = i|\lambda| \exp\{i\delta\}$, а величины $\beta_p^{(j)}$ были определены в соотношении (5.9) и перед ним.

Выделим из множества чисел $\{1, \ldots, I_j\}$ такое подмножество $L^{(j)}$, что $d_p^{(j)}(\lambda)$ удовлетворяет условию (5.11) тогда и только тогда, когда $p \in L^{(j)}$. Заметим, что по построению $\{1, I_j\} \subset L^{(j)}$. Пусть

$$r^{(j)}(\lambda) := \sum_{p \in L^{(j)}} \lambda_1^{m_p^{(j)}} \delta_{p,0}^{(j)} \exp\{\beta_p^{(j)} \lambda_1\}, \quad \delta_{p,0}^{(j)} := \delta_p^{(j)} \exp\{-i m_p^{(j)} \omega_j\}, \tag{5.13}$$

Пользуясь соотношениями (5.4), (5.6), (5.8)–(5.13), получим, что при выполнении условий (5.2) и (5.7) формулу (4.6) для $r_{11} = D_0$ можно записать в виде:

$$r_{11} \exp\{-\lambda H_0^{(j)}\} = \sum_{p \in L^{(j)}} \lambda_1^{m_p^{(j)}} \delta_{p,0}^{(j)} \exp\{\beta_p^{(j)} \lambda_1\} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right), \quad m_p^{(j)} \geqslant m_{\min}^{(j)}. \tag{5.14}$$

Теорема 1.5 является прямым следствием формулы (5.14) и [1, гл. 12, § 8, теорема 12.10]. □

Выражения вида (4.6), (5.13) и (5.14) часто называют квазиполиномами. В результате их детального изучения, которое имеет давнюю историю (см. [20,22,23,26]), было установлено, в каких случаях расположение корней квазиполиномов асимптотически определено, получены формулы для первых членов соответствующих асимптотических разложений по $1/|\lambda|$ (см., например, [1, гл. 12]) и рекуррентные формулы для последующих членов (см. [13, 15]).

Поэтому представляет интерес не столько анализ асимптотики нулей целых функций, представимых в виде (4.6), (5.13) или (5.14), сколько установление связи конкретных особенностей спектра краевой задачи H с особенностями характеристических данных (1.10) простой кривой γ, на которой она рассматривается. Наиболее простая и общая связь такого типа следует из теоремы 1.4: при выполнении условий (1.23) спектр на комплексной плоскости параметра λ асимптотически локализуется в направлениях перпендикулярных отрезкам $z_n^* z_{n+1}^*$, где $\{z_n\}_0^{N+1}$ — набор характеристических точек кривой γ, а звездочка означает комплексное сопряжение. Однако характер этой локализации может быть разным.

Если среди отрезков L_m ($m = \overline{0, N}$), соединяющих последовательные характеристические точки z_m и z_{m+1} простой кривой, нет параллельных, то $J = N + 1$, и, значит, при любом значении $j \in \{1, \ldots, N + 1\}$ множество N_j состоит ровно из одного элемента, множество S_j — из двух, и в формуле (5.13) присутствует ровно два слагаемых. В этом случае в окрестности каждого луча $\rho = -t\exp\{-2i\omega_j\}$ $(t > 0)$ спектр краевой задачи H является асимптотически определенным и состоит из одной асимптотической последовательности точек (см. [1]). Как уже говорилось в конце раздела 1, одна из возможных реализаций этого случая была подробно исследована в [8].

Пусть теперь среди отрезков L_m $(m = \overline{0,N})$ есть параллельные, и, например, два или более отрезка параллельны прямой с параметризацией $z = t\exp\{i\omega_{j_0}\}(t \in \mathbb{R}, j_0 \in \{1,\ldots,J\})$. В этом случае N_{j_0} содержит более одного числа, и спектр краевой задачи H в окрестности луча $\rho = -t\exp\{-2i\omega_{j_0}\}$ $(t > 0)$ может состоять из нескольких, возможно, разнотипных последовательностей точек. При этом особенности его асимптотического поведения сильно зависят от соотношений величин всех коэффициентов $\beta_p^{(j_0)}$ $(p \in L^{(j_0)})$, а также целых чисел $m_p^{(j_0)}$ и комплексных чисел $\delta_{p,0}^{(j_0)}$, входящих в формулу (5.13). Более того, при определенных соотношениях между значениями всех коэффициентов $\beta_p^{(j_0)}$ и всех чисел $m_p^{(j_0)}$ $(p \in L^{(j_0)})$ указанный спектр может содержать последовательность точек, которая не будет асимптотически определенной, не считая, конечно, локализации в окрестности указанного луча. Эту локализацию в этом случае можно лишь слегка уточнить, зажав асимптотически неопределенную последовательность точек между двумя прямыми, параллельными лучу $\rho = -t\exp\{-2i\omega_{j_0}\}$ $(t > 0)$.

Подробный разбор всех описанных выше ситуаций и соответствующие формулы для первых членов асимптотического разложения приведены в [1, гл. 12]. Однако для установления связи условий реализации каждого из этих случаев с особенностями набора характеристических данных простой кривой γ необходимо более конкретно связать числа $m_p^{(j_0)}$, $\delta_{p,0}^{(j_0)}$ $(p \in L^{(j_0)})$ с числами $N_{1\pm}^{(n)}$, $N_{\pm}^{(n)}$, m_n, $\delta_{1\pm}^{(n)}$, $\delta_{\pm}^{(n)}$, δ_n $(n = \overline{1,N})$ (см. формулы (3.15), (3.16)). В конкретных ситуациях это можно сделать с помощью формулы (4.5) и лемм 3.2–3.4, 4.1, но намного больший интерес представлял бы анализ указанной связи в общем случае краевых задач класса H или хотя бы для каких-то подклассов этих задач. Напомним, что как следует из доказательства леммы 3.3, величина целых чисел $N_{1\pm}^{(n)}$, $N_{\pm}^{(n)}$ и комплексных чисел $\delta_{1\pm}^{(n)}$, $\delta_{\pm}^{(n)}$ зависит от целых функций $Q^{(n-1)}$, $Q^{(n)}$ и вида зависимостей элементов матрицы перехода $\hat{\eta}^{(n)}$ от спектрального параметра ρ, а числа m_n и δ_n равны соответственно минимальному порядку производной от потенциала вдоль кривой γ, которая имеет скачок в точке z_n, и величине этого скачка (см. [4, формулы (18), (19)]). При этом случай $m_n = 0$ соответствует скачку самого потенциала.

Общий анализ связи особенностей спектра с параметрами набора характеристических данных простой кривой, на которой рассматривается краевая задача, представляет интерес, прежде всего, с точки зрения решения обратных задач. При этом особенно ценными его результаты могут оказаться при формулировании и доказательстве теорем существования решений обратных задач для уравнения (1.3) класса H по спектрам, поскольку для доказательства теорем единственности в [3] был разработан значительно более простой и очень эффективный метод единичной передаточной матрицы, который с небольшими изменениями может быть обобщен на рассматриваемый в настоящей работе случай уравнения (1.3) класса H.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
3. *Голубков А. А.* Обратная задача для операторов Штурма—Лиувилля в комплексной плоскости// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2018. — *18*, № 2. — С. 144—156.
4. *Голубков А. А.* Асимптотика передаточной матрицы уравнения Штурма—Лиувилля с кусочно целым потенциалом на кривой// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2019. — *2*. — С. 37–41.
5. *Ишкин Х. К.* О локализации спектра задачи с комплексным весом// Фундам. прикл. мат. — 2006. — *12*, № 5. — С. 49-–64.
6. *Ишкин Х. К.* О критерии безмонодромности уравнения Штурма—Лиувилля// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 4. — С. 552–568.
7. *Ишкин Х. К.* Критерий локализации спектра оператора Штурма—Лиувилля на кривой// Алгебра анал. — 2016. — *28*, № 1. — С. 52-–88.

8. *Ишкин Х. К., Резбаев А. В.* К формуле Дэвиса о распределении собственных чисел несамосопряженного дифференциального оператора// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *153*. — С. 84-–93.
9. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
10. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
11. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988.
12. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1983.
13. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций// Мат. сб. — 1968. — *75 (117)*, № 4. — С. 558—566.
14. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.
15. *Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белаббаси Ю.* О нулях целых функций одного класса// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 1982. — *8*. — С. 211—217.
16. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.
17. *Юрко В. А.* О краевых задачах с условиями разрыва внутри интервала// Диффер. уравн. — 2000. — *36*, № 8. — С. 1139—1140.
18. *Юрко В. А.* Спектральный анализ дифференциальных операторов высших порядков с условиями разрыва во внутренней точке// Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — *63*, № 2. — С. 362–372.
19. *Amirov R. Kh., Ozkan A. S.* Discontinuous Sturm–Liouville problems with eigenvalue dependent boundary conditions// Math. Phys. Anal. Geom. — 2014. — *17*, № 3–4. — P. 483—491.
20. *Dickson D. G.* Expansions in Series of Solutions of Linear Difference-Differential and Infinite Order Differential Equations with Constant Coefficients. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1957.
21. *Duistermaat J. J., Grünbaum F. A.* Differential equations in the spectral parameter// Commun. Math. Phys. — 1986. — *103*, № 2. — P. 177–240.
22. *Horn J.* Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung, II// Math. Ann. — 1897. — *49*, № 3–4. — P. 473—496.
23. *Langer R. E.* On the zeros of exponential sums and integrals// Bull. Am. Math. Soc. — 1931. — *37*. — P. 213—239.
24. *Mennicken R., Möller M.* Non-Self-Adjoint Boundary Eigenvalue Problems. — Amsterdam: Elsevier, 2003.
25. *Tretter C.* Boundary eigenvalue problems with differential equations $N\eta = \lambda P\eta$ with λ-polynomial boundary conditions// J. Differ. Equations. — 2001. — *170*, № 2. — P. 408—471.
26. *Turrittin H. L.* Asymptotic distribution of zeros for certain exponential sums// Am. J. Math. — 1944. — *66*, № 2. — P. 199—228.
27. *Walter J.* Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition// Math. Z. — 1973. — *133*, № 4. — P. 301–312.

Голубков Андрей Александрович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: andrej2501@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 69–86
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-69-86

УДК 517.984.4

О НАПОЛНЕННОСТИ ПОДАЛГЕБРЫ ЛОКАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ГИЛЬБЕРТА—ШМИДТА

© 2021 г. **Е. Ю. ГУСЕВА**

Аннотация. Под локальным оператором Гильберта—Шмидта понимается оператор вида

$$(Tx)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t,s)x(s)ds$$

с измеримым ядром $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ в предположении, что при всех $-\infty < a < b < +\infty$

$$\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt < \infty.$$

При некоторых дополнительных условиях, обеспечивающих, в частности, действие оператора T в $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, устанавливается, что если оператор $\mathbf{1} + T$ обратим, то обратный оператор имеет вид $\mathbf{1} + T_1$, где T_1 — также локальный оператор Гильберта—Шмидта, причем ядро S удовлетворяет тем же условиям.

Ключевые слова: оператор Гильберта—Шмидта, наполненная подалгебра, разностный оператор, сверточный оператор, мажорируемый сверткой оператор.

ON THE INVERSE CLOSEDNESS OF THE SUBALGEBRA OF LOCAL HILBERT–SCHMIDT OPERATORS

© 2021 **E. YU. GUSEVA**

Abstract. A local Hilbert–Schmidt operator is an operator of the form

$$(Tx)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t,s)x(s)ds$$

with a measurable kernel $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ under the condition that

$$\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt < \infty$$

for all $-\infty < a < b < +\infty$. We prove that, under some additional conditions that provide the action of the operator T in $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, the invertibility of the operator $\mathbf{1} + T$ implies that the inverse operator has the form $\mathbf{1} + T_1$, where T_1 is also a local Hilbert–Schmidt operator whose kernel S satisfies the same conditions.

Keywords and phrases: Hilbert–Schmidt operator, full subalgebra, difference operator, convolution operator, operator majorized by a convolution.

AMS Subject Classification: 47L80, 47B10, 35P05

1. Введение. Для многих классов $\mathfrak{T}$ интегральных операторов справедливо следующее свойство (см., например, [10, теорема 2.3]): если оператор $\mathbf{1}+T$, где $T\in\mathfrak{T}$, обратим, то обратный оператор $(\mathbf{1}+T)^{-1}$ имеет вид $\mathbf{1}+T_1$, где T_1 принадлежит тому же классу $\mathfrak{T}$. Например, таким свойством обладает класс $\mathfrak{S}_2$ операторов Гильберта—Шмидта (см. [10, 14, 40]). В спектральной теории (см. [8]) это свойство называют наполненностью. Наполненность различных классов интегральных операторов T обычно тесно связана с тем, что входящие в класс операторы являются компактными, и поэтому их спектр состоит из изолированных точек (за исключением нуля).

В настоящей работе рассматривается случай, когда интегральный оператор

$$(Tx)(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k(t,s)x(s)ds$$

с измеримым ядром $k:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, является оператором Гильберта—Шмидта лишь *локально*, т.е. операторами Гильберта—Шмидта являются лишь операторы $P_{[a,b]}TP_{[a,b]}$ для конечных a и b; здесь $P_{[a,b]}$ — оператор умножения на характеристическую функцию отрезка $[a,b]$. Такой оператор T, как правило, не является компактным. Дополнительно мы требуем, чтобы ядро $k(t,s)$ оператора T убывало при $t-s\to\infty$ определенным образом.

В более точной формулировке условие убывания ядра на бесконечности заключается в следующем. Представим область определения $\mathbb{R}$ функций $x\in L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ в виде $\mathbb{R}=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[k,k+1)$. В соответствии с этим представлением отождествим пространство $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ с $l_2(\mathbb{Z},L_2([0,1),\mathbb{C}))$, а оператору T поставим в соответствие бесконечную матрицу $\{b_{km}:k,m\in\mathbb{Z}\}$, состоящую из операторов b_{km}, действующих из $L_2([0,1),\mathbb{C})$ в $L_2([0,1),\mathbb{C})$ и связанную с оператором T посредством равенства

$$(Tx)_k=\sum_{m\in\mathbb{Z}}b_{km}x_{k-m}.$$

Элементы $b_{km}:L_2([0,1),\mathbb{C})\to L_2([0,1),\mathbb{C})$ матрицы с одним и тем же значением m образуют m-ю диагональ матрицы; все они являются операторами Гильберта—Шмидта. Убывание ядра k на бесконечности описывается в терминах убывания диагоналей: предполагается, что коэффициенты $b_{km}\in\mathbf{B}(X)$ удовлетворяют оценке

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}g(m)\sup_{k\in\mathbb{Z}}\|b_{km}\|_{\mathfrak{S}_2}<\infty$$

для некоторого специального (подробнее см. раздел 3) веса g на $\mathbb{Z}$, здесь $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}_2}$ — норма Гильберта—Шмидта.

Мы рассматриваем два случая. В первом $b_{km}=a_{k-m}$, и тем самым ядро k оказывается периодическим: $k(t+1,s+1)=k(t,s)$. Во втором случае дополнительных условий не накладывается. Установлено (см. теоремы 5.10 и 6.6), что оператор T_1 из представления $(\mathbf{1}+T)^{-1}=\mathbf{1}+T_1$ наследует свойство быть локальным оператором Гильберта—Шмидта, и его ядро убывает на бесконечности с той же скоростью, что и ядро исходного оператора T. Сохранение скорости убывания диагоналей при переходе к обратному оператору изучалось многими авторами (см., например, [1–6, 11, 12, 23–25, 28–31, 34, 35, 40]); чтобы сделать изложение замкнутым, мы приводим некоторые из их результатов в удобной для наших целей интерпретации.

Отметим также работы [19, 20, 26, 33, 35–37], в которых изучалась наполненность других классов некомпактных интегральных операторов.

Разделы 2–4 посвящены изложению вспомогательных определений, конструкций и фактов. В разделах 5 и 6 излагаются основные результаты: в теоремах 5.8 и 6.5 рассматривается общий абстрактный случай, а в теоремах 5.10 и 6.6 — его конкретизация для интегральных операторов.

2. Банаховы алгебры. *Линейной алгеброй* или просто *алгеброй* называют (см. [8, гл. 1, § 1], [15, гл. 10, § 10.1], [18, гл. 4, § 1.13]) линейное пространство $\mathbf{B}$ над полем комплексных чисел, в котором задана операция умножения, обладающая свойствами

$$A(BC) = (AB)C, \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B),$$
$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC.$$

Если алгебра $\mathbf{B}$ является нормированным пространством и при этом выполнена аксиома

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|,$$

то говорят, что $\mathbf{B}$ — *нормированная алгебра.* Если нормированная алгебра является полным, т.е. банаховым пространством, то ее называют *банаховой алгеброй.*

Если в $\mathbf{B}$ выделен элемент $\mathbf{1}$, обладающий свойством $A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A$, то говорят, что алгебра $\mathbf{B}$ *имеет единицу*, при этом элемент $\mathbf{1}$ называют *единицей* алгебры, а саму алгебру называют *унитальной.* Если алгебра нормирована и при этом выполнена аксиома $\|\mathbf{1}\| = 1$, то говорят, что $\mathbf{B}$ — *нормированная унитальная алгебра.*

Пусть $\mathbf{B}$ — унитальная алгебра и $A \in \mathbf{B}$. Элемент $B \in \mathbf{B}$ называют *обратным* к A, если $AB = BA = \mathbf{1}$. Обратный к A обозначают символом A^{-1}. Если элемент A имеет обратный, его называют *обратимым* (в алгебре $\mathbf{B}$).

Пусть $\mathbf{B}$ — унитальная алгебра и $A \in \mathbf{B}$. Множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых элемент $\lambda\mathbf{1} - A$ не имеет обратного, называют *спектром* A (в алгебре $\mathbf{B}$) и обозначают символом $\sigma(A)$ или $\sigma_{\mathbf{B}}(A)$.

Дополнение $\rho(A) = \rho_{\mathbf{B}}(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ называют *резольвентным множеством* A. Функцию $R_\lambda = (\lambda 1 - A)^{-1}$ называют *резольвентой* A; областью определения резольвенты является множество $\rho(A)$. Число

$$R(A) = R_{\mathbf{B}}(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

называют *спектральным радиусом* элемента A.

Предложение 2.1 (см. [15, теорема 10.13])**.** *Спектр любого элемента A унитальной банаховой алгебры $\mathbf{B}$ есть замкнутое ограниченное непустое подмножество $\mathbb{C}$, причем*

$$R(A) \leqslant \|A\|.$$

Подмножество $\mathbf{R}$ алгебры $\mathbf{A}$ называют *подалгеброй*, если все три алгебраические операции (сложение, умножение на скаляры и умножение элементов) из $\mathbf{R}$ не выводят. Если $\mathbf{A}$ содержит единицу и $\mathbf{1_A} \in \mathbf{R}$, то говорят, что $\mathbf{R}$ — *унитальная подалгебра.* Очевидно, подалгебра сама является алгеброй. Очевидно также, что замыкание подалгебры (нормированной алгебры) является подалгеброй.

Пусть $\mathbf{B}$ — неунитальная алгебра (или унитальная алгебра, единица которой по каким-либо соображениям нам не подходит; см., например, определение подалгебры $\widetilde{l_{1,g}}(\mathbb{Z}, \mathbf{R})$ в разделе 5). Пусть $\widetilde{\mathbf{B}}$ — алгебра, состоящая из всевозможных упорядоченных пар (α, A) и $\alpha \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbf{A}$, с операциями

$$(\alpha, A) + (\beta, B) = (\alpha + \beta, A + B), \quad \lambda(\alpha, A) = (\lambda\alpha, A), \quad (\alpha, A)(\beta, B) = (\alpha\beta, \alpha B + \beta A + AB).$$

Нетрудно видеть, что элемент $(1, \mathbf{O})$ является единицей алгебры $\widetilde{\mathbf{B}}$. Если $\mathbf{B}$ — нормированная алгебра, то норму в алгебре $\widetilde{\mathbf{B}}$ можно задать следующим образом:

$$\|(\alpha, A)\| = |\alpha| + \|A\|.$$

Очевидно, $\widetilde{\mathbf{B}}$ банахова, если $\mathbf{B}$ банахова. Алгебру $\widetilde{\mathbf{B}}$ называют (см. [15, гл. 10, § 10.1, с. 256], [36, гл. 1, § 1.4.1, с. 21]) *алгеброй* $\mathbf{B}$ *с присоединенной единицей.* Если $\mathbf{B}$ — унитальная алгебра, то под $\widetilde{\mathbf{B}}$ условимся понимать саму алгебру $\mathbf{B}$.

В частном случае, когда алгебра $\mathbf{B}$ является подалгеброй некоторой алгебры $\mathbf{A}$, имеющей единицу, алгебру с присоединенной единицей можно реализовать как подалгебру

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \{\alpha\mathbf{1_A} + A \in \mathbf{A} : \ A \in \mathbf{B}, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

алгебры $\mathbf{A}$. Нетрудно видеть, что эта реализация изоморфна описанной выше, но может иметь другую норму, тем не менее, эквивалентную норме $\|(\alpha, A)\| = |\alpha| + \|A\|$.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — алгебры. Говорят (см. [8, гл. 1, § 1, с. 7]), что отображение $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ является *морфизмом алгебр*, если

$$\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B), \quad \varphi(\alpha A) = \alpha\varphi(A), \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$$

для всех $A, B \in \mathbf{A}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — унитальные алгебры и дополнительно $\varphi(\mathbf{1_A}) = \mathbf{1_B}$, то говорят, что φ — *морфизм унитальных алгебр*. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — банаховы (нормированные) алгебры и морфизм φ непрерывен, то говорят, что φ — *морфизм банаховых* (*нормированных*) *алгебр*. Если φ^{-1} существует и также является соответствующим морфизмом, то говорят, что φ — *изоморфизм*, а $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ *изоморфны*. Изоморфизм φ нормированных алгебр называют *изометрическим*, если $\|\varphi(A)\| = \|A\|$ для всех A.

Предложение 2.2 (см. [17, гл. 5, § 2, предложение 3])**.** *Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — унитальные алгебры и $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ — морфизм унитальных алгебр. Если $A \in \mathbf{A}$ обратим, то $\varphi(\mathbf{A})$ также обратим.*

Следствие 2.3 (см. [17, гл. 5, § 2, предложение 4])**.** *Рассмотрим унитальные алгебры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и морфизм унитальных алгебр $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Для любого $A \in \mathbf{A}$ имеет место включение*

$$\sigma_{\mathbf{B}}(\varphi(A)) \subseteq \sigma_{\mathbf{A}}(A).$$

Унитальную подалгебру $\mathbf{B}$ унитальной алгебры $\mathbf{A}$ называют (см. [8, гл. 1, § 4, с. 11]) *наполненной*, если всякий $A \in \mathbf{B}$, обратимый в $\mathbf{A}$, также обратим и в $\mathbf{B}$. В силу единственности обратного это определение эквивалентно следующему: если существует такой $A^{-1} \in \mathbf{A}$, что $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}$, то $A^{-1} \in \mathbf{B}$.

Теорема 2.4 (см. [15, гл. 10, § 10.18], [8, гл. 3, § 2, с. 29])**.** *Пусть $\mathbf{B}$ — унитальная банахова алгебра и $\mathbf{R}$ — ее замкнутая унитальная подалгебра. Тогда для любого $R \in \mathbf{R}$ множество $\sigma_{\mathbf{R}}(R)$ является объединением $\sigma_{\mathbf{B}}(R)$ и отделенного подмножества множества $\rho_{\mathbf{B}}(R)$. В частности, граница $\sigma_{\mathbf{R}}(R)$ содержится в границе $\sigma_{\mathbf{B}}(R)$. Кроме того, для любого $R \in \mathbf{R}$ справедливо равенство*

$$R_{\mathbf{R}}(R) = R_{\mathbf{B}}(R).$$

(*Двусторонним*) *идеалом* в алгебре $\mathbf{B}$ называют [16, гл. 1, § 3] подпространство $\mathbf{J}$, обладающее свойством: $AJ, JA \in \mathbf{J}$ для всех $A \in \mathbf{B}$ и $J \in \mathbf{J}$. Если $\mathbf{J}$ — идеал, то фактор-пространство $\mathbf{B}/\mathbf{J}$ является алгеброй.

Алгебру $\mathbf{B}$ называют *коммутативной*, если $AB = BA$ для любых $A, B \in \mathbf{B}$.

Пусть $\mathbf{B}$ — коммутативная унитальная банахова алгебра. *Характером* алгебры $\mathbf{B}$ называют (см. [8, гл. 1, § 1.5]) всякий морфизм алгебр $\chi : \mathbf{B} \to \mathbb{C}$, т. е. всякое отображение $\chi : \mathbf{B} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее условиям

$$\chi(A+B) = \chi(A) + \chi(B), \quad \chi(AB) = \chi(A)\chi(B),$$
$$\chi(\lambda A) = \lambda\chi(A), \quad \chi(\mathbf{1_B}) = 1_{\mathbb{C}}$$

для всех $A, B \in \mathbf{B}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Множество всех характеров алгебры $\mathbf{B}$ обозначают символом $X(\mathbf{B})$. Множество $X(\mathbf{B})$ будем называть *пространством характеров* алгебры $\mathbf{B}$.

Предложение 2.5. *Пусть $\mathbf{B}$ — коммутативная унитальная алгебра, а χ — ее характер. Если элемент $A \in \mathbf{B}$ обратим, то*

$$\chi(A^{-1}) = \frac{1}{\chi(A)}.$$

Доказательство вытекает из свойств характера. □

Предложение 2.6 (см. [8, гл. 1, § 3.1, теорема 1])**.** *Норма любого характера коммутативной унитальной банаховой алгебры равна* 1.

Теорема 2.7 (см. [9, с. 31, теорема 3'], [15, теорема 11.9(c)], [8, с. 33, предложение 3])**.** *Пусть $\mathbf{B}$ — коммутативная унитальная банахова алгебра. Элемент $A \in \mathbf{B}$ обратим тогда и только тогда, когда $\chi(A) \neq 0$ для всех характеров χ алгебры $\mathbf{B}$.*

Следствие 2.8. *В условиях теоремы* 2.7

$$\sigma(A) = \{\chi(A) : \chi \in X(\mathbf{B})\}.$$

3. Алгебра $l_{1,g}(\mathbb{Z})$. Символом $\mathbb{Z}$ будем обозначать группу целых чисел. *Весом* на группе $\mathbb{Z}$ называют произвольную функцию $g : \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$. Всегда будем предполагать, что вес на $\mathbb{Z}$ обладает следующими свойствами:

(a) $g(0) = 1$,
(b) $g(m + n) \leqslant g(m)g(n)$,
(c) $g(-n) = g(n)$,
(d) $g(n) \geqslant 1$,
(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln g(n)}{|n|} = 0$.

Примеры весов, обладающих этими свойствами:

$$g(n) = 1; \quad g(n) = (1 + |n|)^s,\ s \geqslant 0; \quad g(n) = e^{a|n|^b}(1 + |n|)^s,\ 0 \leqslant b < 1,\ a \geqslant 0;$$
$$g(n) = e^{a|n|^b}(1 + |n|)^s \ln^t(e + |n|),\ t \geqslant 0.$$

Пусть g — вес на $\mathbb{Z}$, а $\mathbf{B}$ — банахова алгебра. *Пространством $l_{1,g}$ на $\mathbb{Z}$ со значениями в $\mathbf{B}$ с весом g* называют множество $l_{1,g} = l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$, состоящее из семейств $a = \{a_m \in \mathbf{B} : m \in \mathbb{Z}\}$, для которых

$$\|a\| = \|a\|_{l_{1,g}} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} g(m)\|a_m\| < \infty.$$

В частности, символом $l_1 = l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ будем обозначать пространство $l_{1,g}$, соответствующее весу $g(m) \equiv 1$.

Предложение 3.1 (см. [30, с. 196, лемма 5.22])**.** *Пространство $l_{1,g} = l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ является банаховой алгеброй относительно операции свертки*

$$(a * b)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m b_{k-m},$$

взятой в качестве умножения. Если $\mathbf{B}$ унитальна, то $l_{1,g}$ также унитальна; при этом единицей алгебры $l_{1,g}$ является семейство δ, определяемое по формуле

$$\delta_k = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

Если $\mathbf{B} = \mathbb{C}$, то алгебра $l_{1,g}$ коммутативна.

Найдем все характеры алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Обозначим через $\varepsilon \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ семейство

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 1, \\ 0, & \text{при } k \neq 1, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Вычислим степени ε (относительно операции свертки). Заметим, что ε^m при $m \geqslant 1$ состоит из чисел

$$\varepsilon_k^{(m)} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = m, \\ 0, & \text{при } k \neq m, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

По определению положим $\varepsilon^0 = \delta$. Проверим, что ε^{-1} представляет собой семейство

$$\varepsilon_k^{(-1)} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = -1, \\ 0, & \text{при } k \neq -1, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, имеем

$$(\varepsilon^{(-1)} * \varepsilon)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \varepsilon_m^{(-1)} \varepsilon_{k-m} = \delta_k, \quad (\varepsilon * \varepsilon^{(-1)})_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \varepsilon_m \varepsilon_{k-m}^{(-1)} = \delta_k.$$

Теперь понятно, что при всех $m \in \mathbb{Z}$ семейство ε^m состоит из чисел

$$\varepsilon_k^{(m)} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = m, \\ 0, & \text{при } k \neq m, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Предложение 3.2. *Для семейства $\varepsilon \in l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ имеет место равенство*

$$\|\varepsilon^m\|_{l_{1,g}} = g(m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Предложение 3.3. *Всякое семейство $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ представимо в виде*

$$a = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \varepsilon^m, \tag{1}$$

где $a_m \in \mathbb{C}$ — координаты семейства a, при этом ряд (1) сходится абсолютно.

Теорема 3.4. *Общий вид характера χ алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ задается формулой*

$$\chi(a) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k u^k, \tag{2}$$

где u пробегает множество $\mathbb{U} = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$. Иными словами, всякая формула вида (2) с $u \in \mathbb{U}$ задает характер; и обратно, всякий характер представим в таком виде. В частности, пространство характеров алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ не зависит от g.

Доказательству теоремы 3.4 предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 3.5. *Любой характер χ алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ задается формулой (2), где $u = \chi(\varepsilon)$, а элемент $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ имеет вид (1). При этом $u \neq 0$.*

Доказательство. Имеем

$$\chi(a) = \chi\Bigl(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\varepsilon^k\Bigr) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(a_k\varepsilon^k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\chi(\varepsilon^k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k[\chi(\varepsilon)]^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k u^k. \qquad \square$$

Предложение 3.6. *Пусть $\chi : l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ — характер. Тогда*

$$\|\chi\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|u|^k}{g(k)},$$

где $u = \chi(\varepsilon)$.

Доказательство. Введем обозначение

$$\gamma = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|u|^k}{g(k)}.$$

Покажем, что $\gamma \leqslant \|\chi\|$. Для этого заметим, что в силу предложения 3.2 $\|\varepsilon^k\| = g(k)$. В то же время, $\chi(\varepsilon^k) = u^k$. Отсюда

$$\|\chi\| \geqslant \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|u|^k}{g(k)}.$$

Докажем обратное неравенство $\|\chi\| \leqslant \gamma$. Возьмем произвольное $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$; по определению

$$\|a\| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| g(k).$$

Имеем

$$\frac{|\chi(a)|}{\|a\|} = \frac{\Bigl|\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k u^k\Bigr|}{\|a\|} \leqslant \frac{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|\cdot|u|^k}{\|a\|} \leqslant \frac{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|\gamma g(k)}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| g(k)} = \gamma.$$

Переходя к супремуму по $a \neq 0$, получаем $\|\chi\| \leqslant \gamma$. $\square$

Следствие 3.7. *Для того чтобы комплексное число $u \neq 0$ порождало характер алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ по формуле (2), необходимо и достаточно, чтобы оно обладало свойством*

$$|u|^k \leqslant g(k)$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$. При этом ряд (2) сходится абсолютно.

Доказательство. Рассмотрим $\varepsilon \in l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$; очевидно, также $\varepsilon^{-1} \in l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. Из формулы $\chi(\varepsilon)\chi(\varepsilon^{-1}) = \chi(\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}) = \chi(\delta) = 1$ получаем, что $u = \chi(\varepsilon) \neq 0$.

Пусть формула (2) определяет характер. Тогда в силу того, что $\|\chi\| = 1$ (предложение 2.6), и согласно предложению 3.6 имеем

$$\frac{|u|^k}{g(k)} \leqslant 1,$$

или $|u|^k \leqslant g(k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Обратно, пусть $|u|^k \leqslant g(k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Покажем, что формула (2) определяет характер. Сначала проверим, что ряд (2) абсолютно сходится. Имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k u^k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|\cdot|u|^k \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| g(k) = \|a\|_{l_{1,g}} < \infty.$$

Проверим выполнение свойств характера. Не является очевидным только третье свойство:

$$\chi(a)\chi(b) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m u^m \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n u^n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m u^m \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_{k-m} u^{k-m} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_m u^m b_{k-m} u^{k-m} =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Bigl(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m b_{k-m}\Bigr) u^{k-m} u^m = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Bigl(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m b_{k-m}\Bigr) u^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a*b)_k u^k = \chi(a*b). \quad \square$$

Предложение 3.8. *Пределы* $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \dfrac{\ln g(n)}{n}$ *существуют и*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln g(n)}{n} = \inf_{n>0} \frac{\ln g(n)}{n}, \qquad \lim_{n\to-\infty} \frac{\ln g(n)}{n} = \sup_{n<0} \frac{\ln g(n)}{n}.$$

Доказательство. Докажем первую формулу. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\frac{\ln g(n_\varepsilon)}{n_\varepsilon} \leqslant \inf_{n>0} \frac{\ln g(n)}{n} + \varepsilon.$$

Возьмем произвольное $k \in \mathbb{N}$. Представим его в виде $k = ln_\varepsilon + m$, где $m = 0, 1, \ldots, n_\varepsilon - 1$, а $l \in \mathbb{Z}$. Тогда по свойству (b) веса имеем

$$g(k) = g(ln_\varepsilon + m) \leqslant \underbrace{g(n_\varepsilon)g(n_\varepsilon)\ldots g(n_\varepsilon)}_{l \text{ штук}} \cdot g(m) = [g(n_\varepsilon)]^l g(m).$$

Следовательно,

$$\ln g(k) \leqslant l \ln g(n_\varepsilon) + \ln g(m).$$

Отсюда

$$\frac{\ln g(k)}{k} = \frac{\ln g(k)}{ln_\varepsilon + m} \leqslant \frac{l}{ln_\varepsilon + m} \ln g(n_\varepsilon) + \frac{\ln g(m)}{ln_\varepsilon + m} \underset{l\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln g(n_\varepsilon)}{n_\varepsilon}.$$

Поэтому при достаточно больших k имеем

$$\frac{\ln g(k)}{k} \leqslant \frac{\ln g(n_\varepsilon)}{n_\varepsilon} + \varepsilon < \inf_{n>0} \frac{\ln g(n)}{n} + 2\varepsilon.$$

В то же время по определению инфимума при всех $k > 0$

$$\inf_{n>0} \frac{\ln g(n)}{n} \leqslant \frac{\ln g(k)}{k}.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln g(k)}{k} = \inf_{n>0} \frac{\ln g(n)}{n}.$$

Докажем вторую формулу. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем по нему номер $n_\varepsilon \in -\mathbb{N}$ так, чтобы

$$\frac{\ln g(n_\varepsilon)}{n_\varepsilon} \geqslant \sup_{n<0} \frac{\ln g(n)}{n} - \varepsilon.$$

Возьмем произвольное $k \in -\mathbb{N}$. Представим его в виде $k = ln_\varepsilon + m$, где $m = 0, -1, \dots, -n_\varepsilon + 1$, а $l \in \mathbb{Z}$. Рассуждая как и выше, получаем

$$\frac{\ln g(k)}{k} = \frac{\ln g(k)}{ln_\varepsilon + m} \geqslant \frac{l}{ln_\varepsilon + m} \ln g(n_\varepsilon) + \frac{\ln g(m)}{ln_\varepsilon + m} \underset{l \to +\infty}{\to} \frac{\ln g(n_\varepsilon)}{n_\varepsilon}.$$

Поэтому при больших по модулю отрицательных k имеем

$$\frac{\ln g(k)}{k} \geqslant \frac{\ln g(n_\varepsilon)}{n_\varepsilon} - \varepsilon > \sup_{n<0} \frac{\ln g(n)}{n} - 2\varepsilon.$$

В то же время

$$\sup_{n<0} \frac{\ln g(n)}{n} \geqslant \frac{\ln g(k)}{k}.$$

Следовательно,

$$\lim_{k \to -\infty} \frac{\ln g(k)}{k} = \sup_{n<0} \frac{\ln g(n)}{n}. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 3.4. Пусть χ — характер алгебры $l_{1,g}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Согласно предложению 3.5 он имеет вид (2), причем в силу следствия 3.7 $|u|^k \leqslant g(k)$ или $k \ln |u| \leqslant \ln g(k)$ или $\ln |u| \leqslant \ln g(k)/k$ при $k > 0$ и $\ln |u| \geqslant \ln g(k)/k$ при $k < 0$. Переходя к пределу при $k \to +\infty$ в неравенстве $\ln |u| \leqslant \ln g(k)/k$, получаем

$$\ln |u| \leqslant \lim_{k \to +\infty} \frac{\ln g(k)}{k} = 0.$$

Аналогичным образом переходя к пределу при $k \to -\infty$ в неравенстве $\ln |u| \geqslant \ln g(k)/k$, получаем

$$\ln |u| \geqslant \lim_{k \to -\infty} \frac{\ln g(k)}{k} = 0.$$

Отсюда $\ln |u| = 0$ или $|u| = 1$.

Обратно, пусть $|u| = 1$. Покажем, что формула (2) задает характер алгебры $l_{1,g}$. Воспользуемся вновь следствием 3.7. Условие $|u|^k \leqslant g(k)$ из следствия 3.7 выполняется благодаря условию (d) из определения веса. $\square$

Следствие 3.9 (ср. [30, следствие 5.27])**.** *Подалгебра $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ наполнена в алгебре $l_1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.*

Доказательство. Пусть $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ имеет обратный $b \in l_1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Тогда в силу предложения 2.2 $\chi(b) \neq 0$ для любого характера χ алгебры l_1. Но в силу теоремы 3.4 у $l_1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ и $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ характеры одинаковые. Значит, $\chi(b) \neq 0$ для любого характера χ алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Следовательно, по теореме 2.7 b обратим в $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. $\square$

4. Теорема Бохнера—Филлипса. (*Алгебраическое*) *тензорное произведение* (см. [7, гл. 3, § 1], [16, гл. 0, § 3.2, с. 38], [17, гл. 2, § 7]) $X \otimes Y$ линейных пространств X и Y есть линейное пространство всех формальных конечных сумм

$$z = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k, \quad x_k \in X, \ y_k \in Y,$$

в котором отождествляются следующие выражения:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y, \\ x \otimes (y_1 + y_2) &= x \otimes y_1 + x \otimes y_2, \\ \alpha(x \otimes y) &= (\alpha x) \otimes y = x \otimes (\alpha y). \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть X и Y — банаховы пространства. Невырожденную норму $\alpha(\cdot) = \|\cdot\|_\alpha$ в $X \otimes Y$ называют *кросс-нормой* (см. [22, 33, 39]), если для всех $x \in X$ и $y \in Y$

$$\|x \otimes y\|_\alpha = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Обозначим пространство $X \otimes Y$, снабженное кросс-нормой α, символом $X \otimes_\alpha Y$. Если X и Y являются бесконечномерными, то пространство $X \otimes_\alpha Y$ не полное. Обозначим пополнение $X \otimes_\alpha Y$

символом $X\overline{\otimes}_\alpha Y$ и назовем его (*топологическим*) *тензорным произведением* X и Y. Кросс-норма в $X\otimes Y$ не является единственной. Поэтому возможны различные пополнения $X\otimes Y$. В настоящей работе нам потребуется только так называемая *проективная кросс-норма*

$$\pi(v)=\|v\|_\pi=\inf\left\{\sum_{k=1}^n\|e_k\|\cdot\|x_k\| : v=\sum_{k=1}^n e_k\otimes x_k\right\},$$

где инфимум берется по всевозможным представлениям

$$v=\sum_{k=1}^n e_k\otimes x_k.$$

Теорема 4.1 (см. [33, гл. 1], [39, гл. 4, § 6], [36, теорема 1.7.4 (c)])**.** *Пусть* $\mathbf{B}$ — *банахово пространство, а* T — *локально компактное топологическое пространство с положительной мерой. Тогда*

$$\mathbf{B}\,\overline{\otimes}_\pi\, L_1(T,\mathbb{C})\simeq L_1(T,\mathbf{B}).$$

Этот изоморфизм является естественным (*в том смысле, что элементу* $a\otimes f$ *соответствует функция* $t\mapsto af(t)$) *и изометрическим.*

В соответствии с этой теоремой символом $a\otimes f$ будем обозначать не только элемент тензорного произведения, но и соответствующую ему функцию $t\mapsto af(t)$.

Следствие 4.2. *Для любого банахова пространства* $\mathbf{B}$ *имеет место канонический изоморфизм* $l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbf{B})\simeq\mathbf{B}\,\overline{\otimes}_\pi\, l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$.

Отметим, что в силу нашего соглашения символ $b=a_k\otimes\varepsilon^k$ означает как элемент тензорного произведения, так и семейство из $l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbf{B})$, состоящее из элементов

$$b_m=\begin{cases}a_k, & \text{при } m=k,\\ 0, & \text{при } m\neq k,\end{cases}\qquad m\in\mathbb{Z}.$$

Предложение 4.3. *Всякий элемент* $a\in l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbf{B})\simeq\mathbf{B}\,\overline{\otimes}_\pi\, l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ *представи́м в виде абсолютно сходящегося ряда*

$$a=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k\otimes\varepsilon^k,\tag{4}$$

где $a_k\in\mathbf{B}$ — *элементы семейства* a.

Доказательство. Возьмем $a\in l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbf{B})$. По определению a имеет вид

$$a=(\dots,a_{-1},a_0,a_1,\dots),$$

где $a_k\in\mathbf{B}$. При этом

$$\|a\|_{l_{1,g}}=\sum_{m\in\mathbb{Z}}g(m)\|a_m\|.\tag{5}$$

Проверим, что ряд (4) абсолютно сходится. Действительно, имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|a_k\otimes\varepsilon^k\|=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|a_k\|\|\varepsilon^k\|=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|a_k\|g(k)=\|a\|_{l_{1,g}}.$$

Рассмотрим остаток ряда (4):

$$a-\sum_{k\in[-n,n]}a_k\otimes\varepsilon^k=(\dots,a_{-n-1},0,\dots,0,a_{n+1},\dots).$$

Применяя (5), приходим к равенству

$$\left\|a-\sum_{k\in[-n,n]}a_k\otimes\varepsilon^k\right\|=\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus[-n,n]}g(k)\|a_k\|.$$

Поскольку ряд (5) при любом порядке суммирования сходится, его остаток (при любом порядке суммирования) стремится к нулю. Значит, суммой ряда (4) является элемент a. $\square$

Пусть X, X_1, Y и Y_1 — линейные пространства, а $A : X \to X_1$ и $B : Y \to Y_1$ — линейные операторы. Символом $A \otimes B$ обозначают линейный оператор, действующий из $X \otimes Y$ в $X_1 \otimes Y_1$ и определенный по правилу

$$(A \otimes B)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (Ax_k) \otimes (By_k).$$

Нетрудно показать, что это определение корректно в том смысле, что оно согласуется с отождествлениями (3).

Предположим дополнительно, что пространства X, X_1, Y и Y_1 являются банаховыми, а операторы A и B — ограниченными. Введем на $X \otimes Y$ и $X_1 \otimes Y_1$ кросс-норму π. Нетрудно показать, что

$$\|A \otimes B\|_{X \otimes_\pi Y \to X_1 \otimes_\pi Y_1} \leqslant \|A\| \cdot \|B\|.$$

Поэтому оператор $A \otimes B$ расширяется по непрерывности до оператора

$$A \otimes B : X \mathbin{\overline{\otimes}_\pi} Y \to X_1 \mathbin{\overline{\otimes}_\pi} Y_1,$$

который будем обозначать тем же символом $A \otimes B$.

Например, в приводимой ниже теореме 4.4

$$\mathbf{1_B} \otimes \chi : \mathbf{B} \mathbin{\overline{\otimes}_\pi} \mathbf{M} \to \mathbf{B} \mathbin{\overline{\otimes}_\pi} \mathbb{C} \simeq \mathbf{B} \otimes_\pi \mathbb{C} \simeq \mathbf{B}.$$

Теорема 4.4 (см. [21], [36, гл. 1, § 1.7, теорема 1.7.10])**.** *Пусть $\mathbf{B}$ — унитальная банахова алгебра, $\mathbf{M}$ — коммутативная унитальная банахова алгебра, а $X = X(\mathbf{M})$ — пространство характеров алгебры $\mathbf{M}$. В этих условиях элемент $T \in \mathbf{B} \mathbin{\overline{\otimes}_\pi} \mathbf{M}$ обратим слева (справа) в алгебре $\mathbf{B} \mathbin{\overline{\otimes}_\pi} \mathbf{M}$ тогда и только тогда, когда элемент*

$$(\mathbf{1_B} \otimes \chi)(T)$$

обратим слева (справа) в алгебре $\mathbf{B} \simeq \mathbf{B} \otimes \mathbb{C}$ для всех $\chi \in X(\mathbf{M})$.

Предложение 4.5. *Пусть $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ имеет вид $a = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$, где $a_i \in \mathbf{B}$, $i \in \mathbb{Z}$, а характер χ алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ задается формулой (2). Тогда*

$$(\mathbf{1_B} \otimes \chi)(a) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k a_k.$$

Доказательство. В силу предложения 4.3 представим элемент a в виде (4). В силу определения тензорного произведения операторов и соображений непрерывности имеем

$$(\mathbf{1_B} \otimes \chi)\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \otimes \varepsilon^k\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathbf{1_B} a_k) \otimes \chi(\varepsilon^k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \otimes u^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k a_k. \qquad \square$$

Теорема 4.6. *Пусть $\mathbf{B}$ — унитальная банахова алгебра. Элемент $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ обратим тогда и только тогда, когда элемент*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k a_k$$

обратим в алгебре $\mathbf{B}$ для всех $u \in \mathbb{U}$.

Доказательство вытекает из теоремы 4.4 и предложения 4.5. $\square$

Следствие 4.7. *Подалгебра $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ наполнена в алгебре $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$.*

Доказательство. В силу теоремы 4.6 обратимость $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ в $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ и $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ означает одно и то же. $\square$

Следствие 4.8 (см. ср. [36, теорема 4.5.7])**.** *Пусть $\mathbf{B}$ — унитальная банахова алгебра. Тогда спектр любого элемента $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ можно вычислить по формуле*

$$\sigma(a) = \bigcup \left\{ \sigma\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k a_k\right) : |u| = 1 \right\}.$$

5. Сверточные операторы. Пусть X — банахово пространство и $l_p = l_p(\mathbb{Z}, X)$, $1 \leqslant p < \infty$, — банахово пространство, состоящее из всех семейств $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1 \dots)$, элементами которых являются векторы $x_k \in X$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|x_k\|^p < \infty,$$

с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|x_k\|^p\right)^{1/p}.$$

Через $l_\infty = l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ обозначим банахово пространство, состоящее из всех ограниченных семейств $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1 \dots)$, элементами которых являются векторы $x_k \in X$, с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{l_\infty} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|x_k\|.$$

Рассмотрим алгебру (предложение 3.1) $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$, где $\mathbf{B}(X)$ — алгебра всех операторов, действующих в банаховом пространстве X. Для каждого семейства $a \in l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ рассмотрим оператор свертки $T_a \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$, определяемый по формуле

$$(T_a x)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Множество всех таких операторов обозначим через $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$.

Для каждого $m \in \mathbb{Z}$ введем в рассмотрение *оператор сдвига*

$$(S_m x)_k = x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, он действует из $l_p(\mathbb{Z}, X)$ в себя при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и имеет единичную норму.

Предложение 5.1. *Для любого $a \in l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ во всех пространствах $l_p = l_p(\mathbb{Z}, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, оператор* (6) *допускает представление в виде абсолютно сходящегося ряда*

$$T_a = \sum_{m\in\mathbb{Z}} A_m S_m,$$

где

$$(A_m x)_k = a_m x_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

— оператор умножения на $a_m \in \mathbf{B}(X)$. При этом для любого $a \in l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ справедливо неравенство

$$\|T_a\|_{\mathbf{B}(l_p)} \leqslant \|a\|_{l_1}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Предложение 5.2 (см. [36, гл. 4, § 4.4, теорема 4.4.4])**.** *При любом $1 \leqslant p \leqslant \infty$ отображение $a \mapsto T_a$ из $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ в $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$ является непрерывным морфизмом унитальных алгебр. В частности, для любых $a, b \in l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ имеем*

$$T_a T_b = T_{a*b}.$$

Теорема 5.3 (см. [36, гл. 4, § 4.5, теорема 4.5.5 (g)])**.** *Элемент $a \in l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ обратим в алгебре $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ тогда и только тогда, когда оператор T_a обратим в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$ для некоторого* (*а, следовательно, и для всех*) $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Следствие 5.4. *Семейство $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ обратимо в $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ тогда и только тогда, когда оператор T_a обратим в $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$.*

Доказательство. Пусть семейство $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ — обратимо, $b \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ — обратное к нему. Тогда из предложения 5.2 следует, что $T_a T_b = T_{a*b} = \mathbf{1}$. Это означает, что $T_b = (T_a)^{-1}$; иными словами, T_b является обратным к T_a; ср. с предложением 2.2.

Обратно. Пусть для некоторого $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ оператор T_a обратим в $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$. Покажем, что семейство a обратимо в $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$. По теореме 5.3 семейство a обратимо в $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$. А по следствию 4.7 обратимость в алгебре $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ эквивалентна обратимости в алгебре $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$. Значит, $a^{-1} \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$. □

Пусть $\mathbf{B}$ — унитальная банахова алгебра, а $\mathbf{R}$ — ее подалгебра, являющаяся банаховой относительно своей нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{R}}$, причем существует такая константа C, что $\|R\|_{\mathbf{B}} \leqslant C\|R\|_{\mathbf{R}}$ для всех $R \in \mathbf{R}$. Тогда, очевидно, $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{R})$ является подалгеброй алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$. Если $\mathbf{R}$ не содержит единицу алгебры $\mathbf{B}$, обозначим через $\widetilde{\mathbf{R}}$ подалгебру $\mathbf{R}$ с присоединенной единицей, реализованную как подалгебра алгебры $\mathbf{B}$, а через $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathbf{R}})$ соответствующую подалгебру алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$; если $\mathbf{R}$ содержит единицу алгебры $\mathbf{B}$, обозначим через $\widetilde{\mathbf{R}}$ и $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathbf{R}})$ сами подалгебры $\mathbf{R}$ и $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{R})$ соответственно.

Теорема 5.5. *Пусть подалгебра $\widetilde{\mathbf{R}}$ наполнена в алгебре $\mathbf{B}$. Тогда подалгебра $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathbf{R}})$ наполнена в алгебре $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$.*

Доказательство. Предположим, что элемент $\lambda\mathbf{1}_{l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbf{B})} + a$, где $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{R})$, обратим в алгебре $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$. Согласно теореме 4.4 отсюда следует, что для любого характера χ алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ элемент $(\mathbf{1} \otimes \chi)(\lambda\mathbf{1} + a)$ обратим в алгебре $\mathbf{B}$. Представим a в виде семейства

$$a = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots).$$

В силу предложения 4.5

$$(\mathbf{1} \otimes \chi)(\lambda\mathbf{1}_{l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbf{B})} + a) = \lambda\mathbf{1}_{\mathbf{B}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k u^k \in \widetilde{\mathbf{R}}, \tag{7}$$

где u соответствует характеру χ в соответствии с теоремой 3.4. Но в силу наполненности подалгебры $\widetilde{\mathbf{R}}$ из обратимости элемента (7) в алгебре $\mathbf{B}$ вытекает его обратимость в алгебре $\widetilde{\mathbf{R}}$, которая, в свою очередь, в силу теоремы 4.4 означает обратимость $\lambda\mathbf{1}_{l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbf{B})} + a$ в алгебре $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathbf{R}})$. $\square$

Пусть H — сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство. Оператор $A \in \mathbf{B}(H)$ называют [14, гл. 7, § 7, с. 170–174], [40], [13, гл. 2, § 2.4, с. 81] *оператором Гильберта—Шмидта*, если для некоторого ортонормированного базиса $\{e_i\} \in H$

$$\|A\|_{\mathfrak{S}_2} = \sqrt{\sum_i \|Ae_i\|^2} < \infty.$$

Множество всех операторов Гильберта—Шмидта $A \in \mathbf{B}(H)$ обозначим символом $\mathfrak{S}_2(H)$.

Предложение 5.6 (см. [14, гл. 7, § 8, с. 170, лемма 1])**.** *Величина $\|A\|_{\mathfrak{S}_2}$ не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{e_i\}$.*

Предложение 5.7 (см. [14, гл. 7, § 8, с. 174, теорема 2])**.** *Множество $\mathfrak{S}_2(H)$ является идеалом в $\mathbf{B}(H)$. При этом*

$$\|JA\|_{\mathfrak{S}_2}, \|AJ\|_{\mathfrak{S}_2} \leqslant \|J\|_{\mathfrak{S}_2}\|A\|_{\mathbf{B}(H)}, \quad J \in \mathfrak{S}(H),\ A \in \mathbf{B}(H).$$

Поскольку H бесконечномерно, $\mathfrak{S}_2(H)$ не содержит единицу. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{S}_2(H)}$ подалгебру $\mathfrak{S}_2(H)$ алгебры $\mathbf{B}(H)$, к которой присоединена единица алгебры $\mathbf{B}(H)$. Обозначим через $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ множество всех операторов вида (6) с $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$, а через $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ множество всех операторов вида (6) с $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$. В силу предложения 3.1 множество $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ является банаховой алгеброй. Поскольку соответствие $a \mapsto T_a$ является морфизмом алгебр (предложение 5.2), $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ является унитальной подалгеброй алгебры $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, H))$ при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Теорема 5.8. *Подалгебра $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ наполнена в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, H))$ при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку морфизмов унитальных алгебр:

$$l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)}) \to l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H)) \to l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H)) \to \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, H)).$$

Первый морфизм является вложением. В силу теоремы 5.5 он сохраняет обратимость: для любого $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ из обратимости a в $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathbf{B}(H)})$ вытекает его обратимость в $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$.

Второй морфизм также является вложением. Он корректно определен в силу условия (d) из определения веса. А в силу следствия 4.7 он также сохраняет обратимость.

Наконец, последнее отображение является морфизмом в силу предложения 5.2. Оно сохраняет обратимость в силу теоремы 5.3.

Сохранение обратимости композицией рассматриваемых морфизмов означает, что для любого $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ из обратимости соответствующего оператора T_a в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, H))$ вытекает обратимость элемента a в алгебре $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ и, следовательно, принадлежность T_a^{-1} алгебре $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$. □

Предложение 5.9. *Подалгебра $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ является идеалом в алгебре $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H))$.*

Доказательство. Пусть $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$, а $b \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H))$. Покажем, что $a*b \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$. Вначале проверим, что величина

$$\|a*b\|_{l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathfrak{S}_2(H))} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^c} g(k) \Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_m b_{k-m} \Big\|_{\mathfrak{S}_2(H)}$$

конечна. Согласно предположению

$$\|a\|_{l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathfrak{S}_2(H))} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} g(m)\|a_m\|_{\mathfrak{S}_2(H)} < \infty,$$
$$\|b\|_{l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathbf{B}(H))} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^c} g(n)\|b_n\|_{\mathbf{B}(H)} < \infty.$$

Далее имеем

$$\infty > \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} g(m)\|a_m\|_{\mathfrak{S}_2(H)} \sum_{n\in\mathbb{Z}^c} g(n)\|b_n\|_{\mathbf{B}(H)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c}\sum_{n\in\mathbb{Z}^c} g(m)g(n)\|a_m\|_{\mathfrak{S}_2(H)}\|b_n\|_{\mathbf{B}(H)}.$$

Сделаем в суммировании по n замену $n = k - m$:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^c}\sum_{n\in\mathbb{Z}^c} g(m)g(n)\|a_m\|_{\mathfrak{S}_2(H)}\|b_n\|_{\mathbf{B}(H)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c}\sum_{k\in\mathbb{Z}^c} g(m)g(k-m)\|a_m\|_{\mathfrak{S}_2(H)}\|b_{k-m}\|_{\mathbf{B}(H)}.$$

По свойству (b) веса и в силу предложения 5.7 имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^c}\sum_{m\in\mathbb{Z}^c} g(m)g(k-m)\|a_m\|_{\mathfrak{S}_2(H)}\|b_{k-m}\|_{\mathbf{B}(H)} \geqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^c}\sum_{m\in\mathbb{Z}^c} g(k)\|a_m b_{k-m}\|_{\mathfrak{S}_2(H)}.$$

Так как $g(k)$ не зависит от m, вынесем его из под внутреннего знака суммы:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^c}\sum_{m\in\mathbb{Z}^c} g(k)\|a_m b_{k-m}\|_{\mathfrak{S}_2(H)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^c} g(k) \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} \|a_m b_{k-m}\|_{\mathfrak{S}_2(H)}.$$

Используя неравенство треугольника, имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^c} g(k) \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} \|a_m b_{k-m}\|_{\mathfrak{S}_2(H)} \geqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^c} g(k) \Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_m b_{k-m} \Big\|_{\mathfrak{S}_2(H)}.$$

Последнее выражение и есть $\|a*b\|_{l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathfrak{S}_2(H))}$. Следовательно, $\|a*b\|_{l_{1,g}(\mathbb{Z},\mathfrak{S}_2(H))} < \infty$. Аналогично проверяется, что $b*a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$. □

Обозначим через $\mathbf{SA}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$ множество всех операторов, действующих в $L_2 = L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, вида

$$(Tx)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(t,s)x(s)ds,$$

где $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ — измеримая функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 ds dt < \infty, \quad -\infty < a < b < +\infty, \tag{8}$$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} g(m) \sup_{k+l=m} \sqrt{\int_k^{k+1} \int_l^{l+1} |k(t,s)|^2 ds dt} < \infty, \tag{9}$$

$$k(t+1, s+1) = k(t,s). \tag{10}$$

Теорема 5.10. *Пусть оператор* $\mathbf{1} + T : L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, *где* $T \in \mathbf{SA}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$, *обратим. Тогда обратный оператор* $(\mathbf{1}+T)^{-1}$ *имеет вид* $\mathbf{1} + T_1$, *где* $T_1 \in \mathbf{SA}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$.

Доказательство. Представим пространство $L_2 = L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ в виде $l_2(\mathbb{Z}, L_2[0,1))$. Для этого разобьем область определения $\mathbb{R}$ функций $x \in L_2$ на промежутки $[k, k+1)$. Каждой функции $x \in L_2$ сопоставим последовательность функций $x_k(t) = x(k+t)$, $t \in [0,1)$; очевидно $x_k \in L_2[0,1)$, а соответствие $x \mapsto \{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ является изометрическим изоморфизмом из $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ в $l_2(\mathbb{Z}, L_2[0,1))$ (подробнее см. [28], [36, 1.6.3]). Покажем, что класс операторов $T \in \mathbf{B}(L_2)$, соответствующих в силу этого изоморфизма классу $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(L_2[0,1)))$, совпадает с $\mathbf{SA}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$.

В соответствии с описанным изоморфизмом будем задавать операторы $T \in \mathbf{B}(L_2)$ матрицами. Очевидно, условие (8) равносильно принадлежности блоков b_{km} матрицы оператора T идеалу $\mathfrak{S}_2(L_2[0,1))$, условие (9) означает принадлежность матрицы $\{b_{km}\}$ оператора T классу $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(L_2[0,1)))$, а условие (10) эквивалентно тому, что в матричном представлении оператор T является сверточным.

Обозначим пространство $L_2[0,1)$ сокращенно через H. Обозначим через $T_a \in \mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ оператор вида (6), соответствующий оператору T. Очевидно, алгебра $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$. Более того, в силу предложения 5.9 $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ является идеалом в $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$.

Рассмотрим фактор-морфизм алгебр

$$\varphi : \mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)}) \to \mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)}) / \mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H)).$$

По определению фактор-морфизма $\varphi(\mathbf{1} + T_a) = \mathbf{1}$. В силу теоремы 5.8

$$(\mathbf{1} + T_a)^{-1} \in \mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)}).$$

Следовательно, $\varphi((\mathbf{1} + T_a)^{-1})$ определено и

$$\varphi((\mathbf{1} + T_a)^{-1}) = (\varphi(\mathbf{1} + T_a))^{-1} = (\mathbf{1})^{-1} = \mathbf{1}.$$

Отсюда $(\mathbf{1} + T_a)^{-1} = \mathbf{1} + T_b$, где $T_b \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$. □

6. Операторы, мажорируемые сверткой. Пусть X — банахово пространство. Обозначим через $\mathbf{s}_{1,g} = \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ множество всех операторов $T \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, имеющих вид

$$(Tx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_{km} x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

где коэффициенты $b_{km} \in \mathbf{B}(X)$ удовлетворяют оценке $\|b_{km}\| \leqslant \beta_m$ для некоторого $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Напомним, что для каждого $m \in \mathbb{Z}$ мы рассматриваем *оператор сдвига*

$$(S_m x)_k = x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Он действует из $l_p(\mathbb{Z}, X)$ в себя при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и имеет единичную норму.

Пусть $a \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$, т. е. $a = \{a_k \in \mathbf{B}(X) : k \in \mathbb{Z}\}$, причем

$$\|a\| = \|a\|_{l_\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\|_{\mathbf{B}(X)} < \infty.$$

Сопоставим этому семейству *a оператор умножения*

$$(Ax)_k = a_k x_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

рассматриваемый как действующий из $l_p(\mathbb{Z}, X)$ в себя. Очевидно,

$$\|A\|_{\mathbf{B}(l_p)} = \|a\|_\infty.$$

Представим оператор (11) в виде

$$T = \sum_{m\in\mathbb{Z}} B_m S_m,$$

где B_m — операторы умножения

$$(B_m x)_k = b_{km} x_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно,

$$\|B_m S_m\| \leqslant \beta_m.$$

Предложение 6.1. *Для всех* $1 \leqslant p \leqslant \infty$

$$\|T\|_{\mathbf{B}(l_p)} \leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}} \beta_m.$$

Предложение 6.2. *Подмножество* $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ *образует унитальную подалгебру алгебры* $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$.

Доказательство. Доказательство очевидно. □

Теорема 6.3 (см. [12], [11, теорема 2.2.7], [36, гл. 5, § 5.2, теорема 5.2.6])**.** *При всех* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *подалгебра* $\mathbf{s}_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ *наполнена в алгебре* $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$.

Теорема 6.4 (см. [1–3])**.** *При всех* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *подалгебра* $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ *наполнена в алгебре* $\mathbf{s}_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$.

Доказательство. Предположим, что оператор $T \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ обратим в $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$. Покажем, что $T^{-1} \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$.

Обозначим оператор T^{-1} сокращенно через D. В силу теоремы 6.3 имеем $D \in \mathbf{s}_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$. Поэтому D можно представить в виде

$$D = \sum_{m\in\mathbb{Z}} A_m S_m,$$

где $A_m \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$ — некоторые операторы умножения $(A_m x)_k = a_{km} x_k$, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} \|A_m\| < \infty$. Отметим, что равенства $TD = \mathbf{1}$ и $DT = \mathbf{1}$ равносильны тому, что

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Z}} B_m S_m A_{k-m} S_{k-m} &= \begin{cases} \mathbf{1}_{\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z},X))}, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0, \end{cases} \\
\sum_{m\in\mathbb{Z}} A_m S_m B_{k-m} S_{k-m} &= \begin{cases} \mathbf{1}_{\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z},X))}, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим семейства

$$\mathfrak{t} = \bigl\{B_m S_m \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)) : m \in \mathbb{Z}\bigr\}, \qquad \mathfrak{d} = \bigl\{A_m S_m \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)) : m \in \mathbb{Z}\bigr\}.$$

Будем интерпретировать их как элементы банаховой алгебры $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)))$. Более того, по предположению $\mathfrak{t} \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)))$.

В силу определения умножения в алгебре $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)))$ и в соответствии с (12) имеем

$$\mathfrak{t}\mathfrak{d} = \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} B_m S_m A_{k-m} S_{k-m} \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)) : k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbf{1}_{l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z},X)))},$$

$$\mathfrak{d}\mathfrak{t} = \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} A_m S_m B_{k-m} S_{k-m} \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)) : k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbf{1}_{l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z},X)))}.$$

Таким образом, семейство $\mathfrak{d}$ является обратным к $\mathfrak{t}$ в алгебре $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)))$. Поэтому в силу следствия 4.7 $\mathfrak{d} \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)))$. Но это означает, что $T^{-1} \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$. □

Пусть H — сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство. Обозначим через $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ множество всех операторов $T \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$ вида

$$(Tx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_{km} x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $b_{km} \in \mathfrak{S}_2(H)$, причем

$$\|b_{km}\|_{\mathfrak{S}_2} \leqslant \beta_m$$

для некоторого $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ подалгебру $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$, к которой присоединена единица алгебры $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, H))$.

Теорема 6.5. *Подалгебра $\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ является наполненной в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, H))$ для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Доказательство. Покажем, что подалгебра $\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ наполнена в алгебре $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H))$.

Пусть элемент $\lambda\mathbf{1} + T$, где $T \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$, обратим в $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H))$. В силу предложения 5.9 существует фактор-морфизм алгебр $\varphi : \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H)) \to \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H))/\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$. По определению морфизма φ имеем $\varphi(\lambda\mathbf{1} + T) = \lambda\mathbf{1}$. В силу предложения 2.2, поскольку элемент $\lambda\mathbf{1} + T$ обратим, элемент $\lambda\mathbf{1}$ также обратим. В частности, $\lambda \neq 0$. Следовательно,

$$\varphi((\lambda\mathbf{1} + T)^{-1}) = (\varphi(\lambda\mathbf{1} + T))^{-1} = (\lambda\mathbf{1})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{1}.$$

Отсюда $(\lambda\mathbf{1}+T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{1}+T_1$, где $T_1 \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$. Это означает, что $(\lambda\mathbf{1}+T)^{-1} \in \widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$.

Для завершения доказательства остается напомнить, что подалгебра $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H))$ наполнена в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$ в силу теоремы 6.4. □

Обозначим через $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$ множество всех операторов, действующих в $L_2 = L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, вида

$$(Tx)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, s)x(s)ds,$$

где $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ — измеримая функция, удовлетворяющая условиям (8) и (9) (без условия (10)).

Теорема 6.6. *Пусть оператор $\mathbf{1} + T : L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, где $T \in \mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$, обратим. Тогда обратный оператор $(\mathbf{1} + T)^{-1}$ имеет вид $\mathbf{1} + T_1$, где $T_1 \in \mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 5.10, представим пространство $L_2 = L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ в виде $l_2(\mathbb{Z}, L_2[0, 1))$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 5.10, видим, что класс операторов $T \in \mathbf{B}(L_2)$, соответствующих в силу этого изоморфизма классу $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(L_2[0, 1)))$, совпадает с $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А. Г.* Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц// Функц. анал. прилож. — 1990. — *24*, № 3. — С. 64–65.
2. *Баскаков А. Г.* Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ// Сиб. мат. ж. — 1997. — *38*, № 1. — С. 14–28.
3. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов// Совр. мат. Фундам. напр. — 2004. — *9*. — С. 3–151.

4. *Блатов И. А.* Алгебра обобщенной дискретной свертки операторов с осциллирующими коэффициентами. — Деп. в ВИНИТИ АН СССР, № 5852-В90.
5. *Блатов И. А.* Об оценках элементов обратных матриц и модернизации метода матричной прогонки// Сиб. мат. ж. — 1992. — *32*, № 2. — С. 10–21.
6. *Блатов И. А.* О методах неполной факторизации для систем с разреженными матрицами// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1993. — *33*, № 6. — С. 819–836.
7. *Бурбаки Н.* Алгебра I. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. — М.: ГИФМЛ, 1962.
8. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. — М.: Мир, 1972.
9. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. — М.: ГИФМЛ, 1960.
10. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
11. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990.
12. *Курбатов В. Г.* Об алгебрах разностных и интегральных операторов// Функц. анал. прилож. — 1990. — *24*, № 2. — С. 87–88.
13. *Мерфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. — М.: Факториал, 1997.
14. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965.
15. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
16. *Хелемский А. Я.* Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. — М.: Наука, 1989.
17. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. — М.: МЦНМО, 2004.
18. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
19. *Beltiţă I., Beltiţă D.* Erratum to: Inverse-closed algebras of integral operators on locally compact groups// Ann. H. Poincaré. — 2015. — *16*, № 5. — P. 1307–1309.
20. *Beltiţă I., Beltiţă D.* Inverse-closed algebras of integral operators on locally compact groups// Ann. H. Poincaré. — 2015. — *16*, № 5. — P. 1283—1306.
21. *Bochner S., Phillips R. S.* Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings// Ann. Math. (2). — 1942. — *43*. — P. 409–418.
22. *Defant A., Floret K.* Tensor Norms and Operator Ideals. — Amsterdam–London–New York: North-Holland, 1993.
23. *Demko S.* Inverses of band matrices and local convergence of spline projections// SIAM J. Numer. Anal. — 1977. — *14*, № 4. — P. 616–619.
24. *Demko S.* Spectral bounds for $\|A^{-1}\|_\infty$// J. Approx. Theory — 1986. — *48*, № 2. — P. 207–212.
25. *Demko S., Moss W. F., Smith Ph. W.* Decay rates for inverses of band matrices// Math. Comp. — 1984. — *43*, № 168. — P. 491–499.
26. *Farrell B., Strohmer Th.* Inverse-closedness of a Banach algebra of integral operators on the Heisenberg group// J. Oper. Theory. — 2010. — *64*, № 1. — P. 189–205.
27. *Fendler G., Gröchenig K., Leinert M.* Convolution-dominated operators on discrete groups// Integral Equations Operator Theory. — 2008. — *61*, № 4. — P. 493–509.
28. *Fournier J. J. F., Stewart J.* Amalgams of L^p and l^q// Bull. Am. Math. Soc. (N.S.). — 1985. — *13*, № 1. — P. 1–21.
29. *Gohberg I., Kaashoek M. A., Woerdeman H. J.* The band method for positive and strictly contractive extension problems: an alternative version and new applications// Integral Equations Operator Theory. — 1989. — *12*, № 3. — P. 343–382.
30. *Gröchenig K.* Wiener's lemma: theme and variations. An introduction to spectral invariance// in: Four Short Courses on Harmonic Analysis: Wavelets, Frames, Time-Frequency Methods, and Applications to Signal and Image Analysis. — Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2010. — P. 175–244.
31. *Gröchenig K., Klotz A.* Noncommutative approximation: inverse-closed subalgebras and off-diagonal decay of matrices// Constr. Approx. — 2010. — *32*, № 3. — P. 429–466.
32. *Gröchenig K., Leinert M.* Symmetry and inverse-closedness of matrix algebras and functional calculus for infinite matrices// Trans. Am. Math. Soc. — 2006. — *358*, № 6. — P. 2695–2711.
33. *Grothendieck A.* Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1966.

34. *Guseva E. Yu., Kurbatov V. G.* Inverse-closedness of subalgebras of integral operators with almost periodic kernels/ `arXiv:1810.02682 [math.FA]`.
35. *Jaffard S.* Propriétés des matrices “bien localisées” près de leur diagonale et quelques applications// Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire. — 1990. — *7*, № 5. — P. 461–476.
36. *Kurbatov V. G.* Functional differential operators and equations. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
37. *Kurbatov V. G.* Some algebras of operators majorized by a convolution// Funct. Differ. Equations. — 2001. — *8*, № 1. — P. 323–333.
38. *Kurbatov V. G., Kuznetsova V. I.* Inverse-closedness of the set of integral operators with L_1-continuously varying kernels// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *436*, № 1. — P. 322–338.
39. *Schatten R.* A Theory of Cross-Spaces. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1950.
40. *Schatten R. A.* Norm Ideals of Completely Continuous Operators. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1970.
41. *Sjöstrand J.* Wiener-Type Algebras of Pseudodifferential Operators. — Palaiseau: École Polytech., 1994–1995.

Гусева Елена Юрьевна
Воронежский государственный университет
E-mail: `elena.guseva.01.06@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 87–98
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-87-98

УДК 517.5

О ПЕРВОМ СОБСТВЕННОМ ЗНАЧЕНИИ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА ПОТЕНЦИАЛ

© 2021 г. **С. С. ЕЖАК, М. Ю. ТЕЛЬНОВА**

Аннотация. В статье рассматривается задача Штурма—Лиувилля на отрезке $[0,1]$ с краевыми условиями Дирихле и весовым интегральным условием на потенциал, разрешающим потенциалу иметь разные порядки особенностей на концах отрезка $[0,1]$. Устанавливается, какому дополнительному интегральному условию должен удовлетворять потенциал для того, чтобы первое собственное значение задачи существовало, и при тех значениях параметров весового интегрального условия, при которых существуют потенциалы, удовлетворяющие одновременно двум интегральным условиям, изучаются оценки первого собственного значения задачи.

Ключевые слова: задача Штурма—Лиувилля, экстремальная оценка, первое собственное значение, вариационный принцип, минимизация функционала, спектральная задача, краевая задача, условия Дирихле, весовое интегральное условие.

ON THE FIRST EIGENVALUE OF THE STURM–LIOUVILLE PROBLEM WITH A WEIGHTED INTEGRAL CONDITION ON THE POTENTIAL

© 2021 **S. S. EZHAK, M. YU. TEL'NOVA**

Abstract. In this paper, we consider the Sturm–Liouville problem on the segment $[0,1]$ with the Dirichlet boundary conditions and a weighted integral condition on the potential, which allows the potential to have different orders of singularities at the endpoints of the segment $[0,1]$. We obtain an additional integral condition for the potential under which the first eigenvalue of the problem exists. For values of the parameters of the weighted integral condition that provide the existence of potentials satisfying both integral conditions, we examine estimates of the first eigenvalue of the problem.

Keywords and phrases: Sturm–Liouville problem, extremal estimate, first eigenvalue, variational principle, minimization of a functional, spectral problem, boundary-value problem, Dirichlet conditions, weighted integral condition.

AMS Subject Classification: 34L15

1. Введение. Данная работа является продолжением исследований оценок первого собственного значения задач Штурма—Лиувилля с интегральным условием на потенциал, начало которым было положено Ю. В. Егоровым и В. А. Кондратьевым в [3, 12]. Исследования, посвященные задаче Штурма—Лиувилля с интегральным условием на потенциал, можно найти, например, в [1–7, 12–17].

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля

$$y'' + Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где Q принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ измеримых неотрицательных локально интегрируемых на $(0,1)$ функций, удовлетворяющих интегральным условиям

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x)dx = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0, \tag{3}$$

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx < +\infty. \tag{4}$$

Функция y называется *решением задачи* (1), (2), если она абсолютно непрерывна на $[0,1]$, удовлетворяет условиям (2), ее производная y' абсолютно непрерывна на любом отрезке $[\rho, 1-\rho]$, где $0 < \rho < 1/2$, и равенство (1) выполняется почти всюду в интервале $(0,1)$.

В данной работе доказывается, что если не выполняется условие (4), то не существует решения y уравнения (1), обладающего свойствами $y(0) = 0$, $y'(0) = \beta$ ни для какого $0 \leqslant \beta \leqslant +\infty$. Условие (4) не выполняется при $\gamma < 0$, $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$ или $\beta \leqslant 2\gamma - 1$. Таким образом, при данных значениях параметров интегрального условия (3) первое собственное значение задачи (1), (2) не существует. При других значениях параметров α, β, γ, $\gamma \neq 0$, существуют функции Q, удовлетворяющие условиям (3), (4). Выполнения условия (4) достаточно для того, чтобы функционал

$$R[Q,y] = \left(\int_0^1 y'^2 dx - \int_0^1 Q(x)y^2 dx\right) \Big/ \left(\int_0^1 y^2 dx\right),$$

порожденный задачей (1), (2), был ограничен снизу. В работе доказано, что для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ первое собственное значение задачи (1), (2) есть

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} R[Q,y].$$

Изучаются оценки величин

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q), \quad M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q).$$

2. Основные результаты. К. З. Куралбаева (см. [6]), рассматривая, в частности, задачу Штурма—Лиувилля

$$y'' + \lambda Q(x)y = 0, \quad x \in (0,1),$$

$$y(0) = y(1) = 0,$$

где Q принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ измеримых неотрицательных на $(0,1)$ функций, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx < \infty, \quad \int_0^1 x^\alpha Q^\gamma(x)dx = 1, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0,$$

показала (см. [6, гл. 1, § 2, теорема 3]), что при $\gamma < 0$, $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$ множество $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ пусто, в остальных же случаях оно непусто. Следующая теорема 1 является вспомогательной для того чтобы показать, что при $\gamma < 0$, $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$, $-\infty < \beta < +\infty$ или $\gamma < 0$, $\beta \leqslant 2\gamma - 1$, $-\infty < \alpha < +\infty$, а именно при тех значениях параметров интегрального условия, при которых множество $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ пусто, минимальное собственное значение задачи (1)–(4) не существует.

Теорема 1. *Для произвольного действительного числа λ рассмотрим уравнение* (1), *где Q — такая измеримая, неотрицательная, локально интегрируемая на* $(0,1)$ *функция, что*

$$\int_0^1 xQ(x)dx = +\infty.$$

Тогда не существует такой функции y, решения уравнения (1), *что $y(0)=0$, $y'(0)=p$ ни для какого $0 \leqslant p \leqslant +\infty$.*

Для доказательства теоремы воспользуемся замечанием 2.1 к теореме 2 из [6, гл. 1, § 1].

Замечание 1. Пусть существует функция y — решение уравнения $y''+Q(x)y=0$, где функция Q измерима, неотрицательна, суммируема на любом отрезке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ для любого $0<\varepsilon<1/2$. Пусть решение y определено на $[0,\delta]$, $0<\delta\leqslant 1$, и $y(0)=0$, $y'(0)=p$, $p>0$. Тогда выполнено условие

$$\int_0^1 xQ(x)dx < +\infty.$$

Доказательство. Предположим сначала, что существует такая функция y, решение уравнения (1), что $y(0)=0$, $y'(0)=p$ для некоторого $p>0$. Тогда в некоторой правой δ-полуокрестности нуля $y(x)>px/2$. Имеем

$$y'(\delta) = p + \int_0^\delta -(Q(x)+\lambda)y\,dx.$$

Тогда $\int_0^\delta -(Q(x)+\lambda)y\,dx = y'(\delta)-p<\infty$, $\int_0^\delta \lambda y\,dx<\infty$, и, следовательно, $\int_0^\delta Q(x)y\,dx<\infty$, но

$$\int_0^\delta Q(x)ydx > \frac{p}{2}\int_0^\delta Q(x)xdx = +\infty.$$

Таким образом, если при условии бесконечности интеграла $\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx$ существует первая собственная функция задачи (1), (2), то либо $y'(0)=+\infty$, либо $y'(0)=0$.

Если $y'(0)=+\infty$, то существует некоторая правая δ-полуокрестность точки 0, в которой $y''\leqslant 0$. Тогда в этой окрестности $Q(x)+\lambda\geqslant 0$ и $\int_0^\delta xQ(x)dx<+\infty$ согласно замечанию 1, что противоречит условию.

Пусть теперь $y'(0)=0$. Поскольку $y(0)=0$ и функция y неотрицательна, в некоторой правой δ-полуокрестности точки 0 функция y может быть выпукла вниз и $y''\geqslant 0$. Тогда в этой окрестности $Q(x)+\lambda\leqslant 0$, и из условия $0\leqslant Q(x)\leqslant -\lambda$ следует, что функция Q ограничена на отрезке $[0,\delta]$, и опять

$$\int_0^\delta xQ(x)dx < +\infty.$$

При условиях $y(0)=0$ и $y'(0)=0$ возможно, что в некоторой правой δ-полуокрестности точки 0 вторая производная y'' меняет знак, причем не найдется интервала $(0,\delta_1)$, $\delta_1<\delta$, во всех точках которого $y''(x)>0$.

Проинтегрируем равенство (1) в пределах от 0 до δ. Получим равенство

$$-y'(\delta) - \int_0^\delta \lambda y dx = \int_0^\delta Q(x) y dx. \tag{5}$$

Если равенство (5) имеет место, то $-y'(\delta) - \int_0^\delta \lambda y dx$ есть некоторое положительное число M. Если вторая производная y'' постоянно меняет знак, а y' существует на интервале $(0,1)$, то найдутся точки в δ-полуокрестности точки 0, в которых функция y имеет минимум. Пронумеруем точки минимума, выбирая в качестве x_1 самую правую точку, меньшую δ, получим последовательность точек минимума, сходящуюся к нулю справа. Будем соединять отрезками соседние точки графика функции, в которых функция имеет минимум. На каждом отрезке Δ_i между соседними точками минимума x_{i+1} и x_i, $i \geqslant 1$, график функции располагается выше отрезка, соединяющего точки $(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$ и $(x_i, y(x_i))$, а также выше одной прямой, соединяющей точки $(0,0)$ и $(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$ или точки $(0,0)$ и $(x_i, y(x_i))$. Уравнение данной прямой имеет вид $y = p_i x$, где $p_i = \min\{y(x_{i+1}), y(x_i)\}$.

По свойству интеграла Лебега [10, теорема 8], если $f(x)$ — суммируемая на множестве E функция, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любого множества $e \subset E$ из того, что его мера $\mu(e) < \delta$, следует, что

$$\left| \int_e f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Поскольку $\int_0^\delta Q(x) x dx = +\infty$, то существует такое положительное число $\varepsilon = M/p_*$, что для любого $\delta > 0$ существует такое множество $e \subset E$, что $\mu(e) < \delta$ и

$$\left| \int_e Q(x) x dx \right| \geqslant \varepsilon.$$

Таким образом, выбирая множество e принадлежащим одному из отрезков Δ_i и обозначая через p_* соответствующее p_i, получим

$$\int_0^\delta Q(x) y dx > \sum_{i=1}^\infty \int_{\Delta_i} Q(x) p_i x dx > p_* \int_e Q(x) x dx \geqslant M,$$

и равенство (5) не выполняется.

Получаемое всякий раз противоречие доказывает теорему. □

Теорема 2. *Для любых* $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$ *и* $\gamma > 0$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$, *для любой функции* $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ *имеем*

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} R[Q, y],$$

где

$$R[Q, y] = \left(\int_0^1 y'^2 dx - \int_0^1 Q(x) y^2 dx \right) \Big/ \left(\int_0^1 y^2 dx \right).$$

Доказательство. Для произвольной функции $y \in H_0^1(0,1)$ в силу неравенства Гельдера для $x \in (0,1)$ имеем

$$y^2(x) = \left(\int_0^x y'(t) dt \right)^2 \leqslant x \int_0^x y'^2(t) dt, \quad y^2(x) = \left(-\int_x^1 y'(t) dt \right)^2 \leqslant (1-x) \int_x^1 y'^2(t) dt.$$

Тогда

$$\frac{y^2}{x(1-x)} = \frac{y^2}{x} + \frac{y^2}{1-x} \leqslant \int\limits_0^x y'^2(t)dt + \int\limits_x^1 y'^2(t)dt = \int\limits_0^1 y'^2(t)dt, \quad y^2(x) \leqslant x(1-x)\int\limits_0^1 y'^2(t)dt.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^1 Q(x)y^2dx \leqslant \left(\int\limits_0^1 y'^2dx\right)\int\limits_0^1 x(1-x)Q(x)dx$$

и

$$R[Q,y] = \left(\int\limits_0^1 {y'}^2dx - \int\limits_0^1 Q(x)y^2dx\right)\Big/\left(\int\limits_0^1 y^2dx\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(\int\limits_0^1 {y'}^2dx\left(1 - \int\limits_0^1 x(1-x)Q(x)dx\right)\right)\Big/\left(\int\limits_0^1 y^2dx\right).$$

Поскольку $R[Q,y] = R[Q,|y|]$, мы можем считать, что функция y неотрицательна. Если функция $y \in H_0^1(0,1)$ выпукла вниз на каком-то подотрезке отрезка $[0,1]$, мы можем привести другую функцию y_1, выпуклую вверх на $[0,1]$, и, следовательно, положительную на $(0,1)$, такую, что $R[Q,y_1] \leqslant R[Q,y]$. Для этого соединим отрезком точки графика функции y, самую левую и самую правую, между которыми функция выпукла вниз. Таким образом, при исследовании на ограниченность снизу функционала R мы можем рассматривать только функции, положительные и выпуклые вверх на $(0,1)$. Пусть

$$\Gamma_* = \left\{ y \in H_0^1(0,1) \;\middle|\; \int\limits_0^1 y^2dx = 1 \right\}, \quad I[Q,y] = \int\limits_0^1 {y'}^2dx - \int\limits_0^1 Q(x)y^2dx.$$

Поскольку для любого $y \in H_0^1(0,1)$

$$R[Q,y] = R\left[Q,\ y\Big/\left(\int\limits_0^1 y^2dx\right)\right],$$

то

$$\inf_{y\in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} R[Q,y] = \inf_{y\in\Gamma_*} I[Q,y].$$

Для любого $y \in H_0^1(0,1)$ имеем

$$\int\limits_0^1 y^2dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^1 {y'}^2dx.$$

Тогда для любого $y \in \Gamma_*$

$$\int\limits_0^1 {y'}^2dx \geqslant 2.$$

Если функция $y \in \Gamma_*$ выпукла вверх, то

$$y(x) \geqslant \begin{cases} 2y(1/2)\cdot x, & x \in [0,1/2], \\ 2y(1/2)\cdot(1-x), & x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{y}(x) = \begin{cases} 2y(1/2)\cdot x, & x \in [0,1/2], \\ 2y(1/2)\cdot(1-x), & x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Поскольку y положительна на $(0,1)$, мы можем написать соотношения

$$\int\limits_0^1 Q(x)y^2dx \leqslant \sup_{[0,1]} \frac{y^2}{x(1-x)} \int\limits_0^1 Q(x)x(1-x)dx = \sup_{[0,1]} \frac{1}{\frac{x(1-x)}{y^2}} \int\limits_0^1 Q(x)x(1-x)dx.$$

Далее,

$$\sup_{[0,1]} \frac{1}{\frac{x(1-x)}{y^2}} < \sup_{[0,1]} \frac{1}{\frac{x(1-x)}{\widetilde{y}^2}} = \frac{1}{\inf\limits_{[0,1]} \frac{x(1-x)}{\widetilde{y}^2}}.$$

На отрезке $[0,1/2]$

$$\inf_{[0,1/2]} \frac{x(1-x)}{\widetilde{y}^2} = \inf_{[0,1/2]} \frac{x(1-x)}{4y^2(1/2)x^2} = \inf_{[0,1/2]} \frac{1-x}{4y^2(1/2)x} = \frac{1}{4y^2(1/2)}.$$

На отрезке $[1/2,1]$

$$\inf_{[1/2,1]} \frac{x(1-x)}{\widetilde{y}^2} = \inf_{[1/2,1]} \frac{x(1-x)}{4y^2(1/2)(1-x)^2} = \inf_{[1/2,1]} \frac{x}{4y^2(1/2)(1-x)} = \frac{1}{4y^2(1/2)}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 Q(x)y^2dx \leqslant 4y^2\left(\frac{1}{2}\right) \int\limits_0^1 Q(x)x(1-x)dx.$$

Функция y выпукла вверх, следовательно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции y и осью Ox, больше, чем площадь треугольника с вершинами $(0,0)$, $(1/2, y(1/2))$, $(1,0)$. Следовательно,

$$1 = \left(\int\limits_0^1 y^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \int\limits_0^1 ydx > \frac{1}{2}y\left(\frac{1}{2}\right), \quad y\left(\frac{1}{2}\right) < 2.$$

Тогда

$$4y^2\left(\frac{1}{2}\right) \int\limits_0^1 Q(x)x(1-x)dx < 16 \int\limits_0^1 Q(x)x(1-x)dx = \mathrm{const},$$

$$\int\limits_0^1 y'^2dx - \int\limits_0^1 Q(x)y^2dx \geqslant \int\limits_0^1 y'^2dx - 4y^2\left(\frac{1}{2}\right) \int\limits_0^1 Q(x)x(1-x)dx > 2 - 16\int\limits_0^1 Q(x)x(1-x)dx.$$

Если интеграл

$$\int\limits_0^1 x(1-x)Q(x)dx$$

конечен, то функционал $I[Q,y]$ ограничен снизу в Γ_* и функционал $R[Q,y]$ ограничен снизу в $H_0^1(0,1)$. Таким образом, при $\gamma < 0$, $\alpha,\beta > 2\gamma - 1$ и $\gamma > 0$, $-\infty < \alpha,\beta < +\infty$ при любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ функционал $R[Q,y]$ ограничен снизу в $H_0^1(0,1)$ и существует конечная величина

$$\inf_{y \in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} R[Q,y] = m.$$

Лемма 1. *Для любых $\gamma < 0$, $\alpha,\beta > 2\gamma - 1$ и $\gamma > 0$, $-\infty < \alpha,\beta < +\infty$, для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ существует такая положительная на $(0,1)$ функция $u \in \Gamma_*$, что*

$$R[Q,u] = \inf_{y \in \Gamma_*} I[Q,y].$$

Доказательство. Пусть $\{\widetilde{g}_k\}$ — минимизирующая последовательность функционала $R[Q,y]$ в $H_0^1(0,1)$. Тогда последовательность $\{g_k\} = \left\{\widetilde{g}_k/C_k^{1/2}\right\}$, является минимизирующей последовательностью для функционала $I[Q,y]$ в Γ_*, т.е.

$$I[Q,g_k] \to m \text{ при } k \to \infty;$$

здесь

$$C_k = \int\limits_0^1 \widetilde{g}_k{}^2 dx, -$$

Можем считать, что функция g_k неотрицательна. Если функция g_k выпукла вниз на некотором подотрезке отрезка $[0,1]$, мы можем привести такую функцию y_k, выпуклую вверх на $[0,1]$ и, следовательно, положительную на $(0,1)$, что $I[Q,y_k] \leqslant I[Q,g_k]$. Таким образом, будем считать, что новая минимизирующая последовательность функционала $\{y_k\}$ состоит из положительных, выпуклых вверх на $(0,1)$ функций.

Покажем, что последовательность $\{y_k\}$ ограничена в $H_0^1(0,1)$. На основании рассуждений, приведенных при доказательстве ограниченности функционала $I[Q,y]$ в Γ_*, можно показать, что для любого k

$$\int\limits_0^1 Q(x)y_k^2 \leqslant 16\int\limits_0^1 Q(x)x(1-x)dx.$$

Для любого достаточно большого k имеем

$$\int\limits_0^1 y_k'^2 dx - \int\limits_0^1 Q(x)y_k^2 dx < m+1, \quad \int\limits_0^1 y_k'^2 dx < m+1+16\int\limits_0^1 Q(x)x(1-x)dx = \mathrm{const}\,.$$

Поскольку при $\gamma < 0$, $\alpha,\beta > 2\gamma - 1$ и $\gamma > 0$, $-\infty < \alpha,\beta < +\infty$ последовательность $\{y_k\}$ ограничена в $H_0^1(0,1)$, она содержит подпоследовательность $\{z_k\}$, которая слабо сходится в $H_0^1(0,1)$ к некоторой функции u, причем квадрат нормы $\|u\|^2_{H_0^1(0,1)}$ ограничен сверху той же константой, что и $\|z_k\|^2_{H_0^1(0,1)}$.

Пространство $H_0^1(0,1)$ компактно вкладывается в $C[0,1]$, следовательно, существует подпоследовательность $\{s_k\}$ последовательности $\{y_k\}$, которая сходится в $C[0,1]$. Поскольку $C[0,1]$ вкладывается в $L_2(0,1)$, последовательность $\{s_k\}$ сходится в $L_2(0,1)$ к функции u. Следовательно, для функционала $R[Q,y]$ имеем

$$\int\limits_0^1 s_k^2 dx \to \int\limits_0^1 u^2 dx \text{ при } k\to\infty, \quad \int\limits_0^1 u^2 dx = 1. \tag{6}$$

Поскольку последовательность $\{s_k\}$ ограничена $H_0^1(0,1)$, по определению нормы $\|s_k\|_{H_0^1(0,1)}$ последовательность $\{s_k'\}$ ограничена в $L_2(0,1)$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{w_k\}$ последовательности $\{s_k\}$, что последовательность $\{w_k'\}$ слабо сходится к функции u' в $L_2(0,1)$. Тогда (см. [8, с. 217])

$$\|u'\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \|w_k'\|^2_{L_2(0,1)} = A.$$

Таким образом,

$$\|u'\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant A. \tag{7}$$

Пусть $\{v_k\}$ — такая подпоследовательность $\{w_k\}$, что

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_0^1 v_k'^2 dx = \varliminf_{k\to\infty}\int\limits_0^1 w_k'^2 dx = A.$$

Поскольку m является пределом последовательности $\{I[Q,v_k]\}$, $m-A$ является пределом последовательности

$$\left\{-\int_0^1 Q(x)v_k^2dx\right\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер K, что для любого $k\geqslant K$ выполняется неравенство

$$-\left(\int_0^1 Q(x)v_k^2dx\right)<m-A+\varepsilon \quad \text{или} \quad \left(\int_0^1 Q(x)v_k^2dx\right)>A-m-\varepsilon. \tag{8}$$

Применим теорему Лебега (см. [11, с. 5]). Поскольку последовательность $\{v_k^2\}$ сходится к функции u^2 в пространстве $L_1(0,1)$, существует такая подпоследовательность $\{r_k\}$ последовательности $\{v_k\}$, что последовательность $\{Q(x)r_k^2\}$ сходится к функции $Q(x)u^2$ при $k\to\infty$ почти всюду на $[0,1]$.

Мы показали, что найдется такая константа C, что для любой функции r_k выполняется неравенство

$$\int_0^1 Q(x)r_k^2dx\leqslant\int_0^1 r_k'^2dx\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx\leqslant C\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx=\mathrm{const}\,.$$

Тогда

$$Q(x)u^2\in L_1(0,1), \quad \int_0^1 Q(x)r_k^2dx\to\int_0^1 Q(x)u^2dx \text{ при } k\to\infty.$$

Если для любого $k\geqslant K$ выполняется неравенство (8), то

$$\int_0^1 Q(x)u^2dx\geqslant A-m-\varepsilon.$$

Поскольку ε может быть сколь угодно малым числом, получаем

$$\int_0^1 Q(x)u^2dx\geqslant A-m \quad \text{и} \quad -\int_0^1 Q(x)u^2dx\leqslant m-A. \tag{9}$$

В силу (7) и (9) получим $I[Q,u]\leqslant m$. Поскольку $m=\inf\limits_{y\in\Gamma_*}I[Q,y]$, имеем $I[Q,u]=m$. В силу (6), получим $u\in\Gamma_*$.

Поскольку $I[Q,u]=I[Q,|u|]$, можем считать, что $u\geqslant 0$ на $[0,1]$. Докажем, что функция u выпукла вверх и, следовательно, положительна на $(0,1)$.

Пусть существуют такие точки $x_1,x_2\in[0,1]$ и число $0<\mu<1$, что

$$u(\mu x_1+(1-\mu)x_2)<\mu u(x_1)+(1-\mu)u(x_2).$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde u(x)=\begin{cases} u, & x\in[0,1]\setminus[x_1,x_2],\\ u(x_1)+(x-x_1)\dfrac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}, & x\in[x_1,x_2].\end{cases}$$

Тогда $u(x_1)=\tilde u(x_1)$, $u(x_2)=\tilde u(x_2)$.

Пусть $x_3=\mu x_1+(1-\mu)x_2$. Тогда $u(x_3)<\tilde u(x_3)$. Положим

$$\tilde x_1=\sup_{\substack{u(x)\geqslant\tilde u(x),\\ x_1\leqslant x<x_3}}x, \quad \tilde x_2=\inf_{\substack{u(x)\geqslant\tilde u(x),\\ x_3<x\leqslant x_2}}x.$$

Тогда для любого $x\in(\tilde x_1,\tilde x_2)$ имеем $u(x)<\tilde u(x)$.

Положим
$$\widehat{u}(x)=\begin{cases}u, & x\in[0,1]\setminus[\tilde{x}_1,\tilde{x}_2],\\ u(\tilde{x}_1)+(x-\tilde{x}_1)\dfrac{u(\tilde{x}_2)-u(\tilde{x}_1)}{\tilde{x}_2-\tilde{x}_1}, & x\in[\tilde{x}_1,\tilde{x}_2].\end{cases}$$
Покажем, что $R[Q,\widehat{u}]<R[Q,u]$. Действительно,
$$\int\limits_0^1 \widehat{u}^2dx>\int\limits_0^1 u^2dx,\quad \int\limits_0^1 Q(x)\widehat{u}^2dx>\int\limits_0^1 Q(x)u^2dx,\quad \int\limits_0^1 \widehat{u}'^2dx\leqslant\int\limits_0^1 u'^2dx.$$
Последнее неравенство следует из равенства
$$\int\limits_0^1 \widehat{u}'^2dx-\int\limits_0^1 u'^2dx=\int\limits_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2}\widehat{u}'^2dx-\int\limits_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2}u'^2dx$$
и утверждения, что функционал
$$J[y]=\int\limits_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2}y'^2dx$$
при условиях $y(\tilde{x}_1)=u(\tilde{x}_1), y(\tilde{x}_2)=u(\tilde{x}_2)$ достигает минимума на функции вида $y=C_1x+C_2=\widehat{u}$, где C_1, C_2 — константы. Следовательно, $R[Q,\widehat{u}]<R[Q,u]$.

Поскольку функция $\widehat{u}$ также принадлежит $H_0^1(0,1)$ и $R[Q,\widehat{u}]<R[Q,u]$, мы получаем противоречие с тем, что $\inf\limits_{H_0^1(0,1)\setminus\{0\}}R[Q,y]=R[Q,u]$. Следовательно, функция u положительна и выпукла вверх на $(0,1)$. □

Лемма 2. *Пусть функция u удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда u является решением уравнения*
$$y''+Q(x)y+\lambda y=0,$$
где $\lambda=m$ — минимальное собственное значение задачи (1), (2).

Доказательство. Пусть функция $z\in H_0^1(0,1)$. Рассмотрим функцию переменной $t\in\mathbb{R}$
$$g(t)=\left(\int\limits_0^1(u'+tz')^2dx-\int\limits_0^1 Q(x)(u+tz)^2dx\right)\Bigg/\left(\int\limits_0^1(u+tz)^2dx\right).$$
Поскольку
$$g(0)=\inf_{H_0^1(0,1)\setminus\{0\}}R[Q,y]=R[Q,u],$$
то $g'(0)=0$. Так как $u\in\Gamma_*$ и $I[Q,u]=m$, то для любого $z\in H_0^1(0,1)$ имеет место равенство
$$\int\limits_0^1 u'z'dx-\int\limits_0^1 Q(x)uzdx=m\int\limits_0^1 uzdx.$$

Заметим, что при $\gamma<0$, $\alpha,\beta>2\gamma-1$ и $\gamma>0$, $-\infty<\alpha,\beta<+\infty$ для любой функции $z\in H_0^1(0,1)$ интеграл $\int\limits_0^1 Q(x)uzdx$ абсолютно сходится, поскольку
$$\int\limits_0^1 Q(x)|uz|dx\leqslant\left(\int\limits_0^1 Q(x)u^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^1 Q(x)z^2dx\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\int\limits_0^1 u'^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^1 z'^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^1 x(1-x)Q(x)dx\right).$$

Если $z \in C_0^\infty(0,1)$, то u' имеет обобщенную производную

$$u'' = -Q(x)u - mu.$$

Согласно [9, следствие 2.6.1, с. 41], если $u, v \in L_p(a,b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и интервал (a,b) конечен, $v(x)$ есть k-я обобщенная производная от $u(x)$, то функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема $k-1$ раз на сегменте $[a,b]$ и почти всюду на нем имеет обычную k-ю производную $u^{(k)}(x) = v(x)$. При этом производная $u^{(k-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[a,b]$.

Поскольку Q — локально интегрируемая на интервале $(0,1)$ функция, она является интегрируемой на любом отрезке $[\rho, 1-\rho]$, где $0 < \rho < 1/2$. Тогда в силу следствия 1 из теоремы 2.6.1 (см. [9, с. 41]) функция u непрерывно дифференцируема на любом отрезке $[\rho, 1-\rho]$, где $0 < \rho < 1/2$, и почти всюду на нем имеет классическую производную второго порядка

$$u'' = -Q(x)u - mu.$$

При этом u' абсолютно непрерывна на отрезке $[\rho, 1-\rho]$.

Таким образом, почти всюду на любом отрезке $[\rho, 1-\rho]$, $0 < \rho < 1/2$, обобщенная производная второго порядка функции u является классической производной второго порядка функции u, и равенство (1) имеет место почти всюду в интервале $(0,1)$. Выполнение граничных условий следует из принадлежности функции u пространству $H_0^1(0,1)$. Следовательно, u является решением задачи (1), (2) с собственным значением $\lambda = m$.

Для любого решения z задачи (1), (2) умножим левую и правую части уравнения (1) на z_1, где

$$z_1(x) = \begin{cases} z, & x \in (\rho, 1-\rho), \\ 0, & x \in [0,\rho] \cup [1-\rho, 1], \end{cases}$$

и, проинтегрировав по частям в пределах от ρ до $1-\rho$, получим:

$$\int\limits_{\rho}^{1-\rho} z'^2 dx - \int\limits_{\rho}^{1-\rho} Q(x) z^2 dx = \lambda \int\limits_{\rho}^{1-\rho} z^2 dx.$$

Перейдя к пределу при $\rho \to 0$, получим равенство

$$\int\limits_0^1 z'^2 dx - \int\limits_0^1 Q(x) z^2 dx = \lambda \int\limits_0^1 z^2 dx.$$

Здесь использован факт, что $z_1(\rho) = z_1(1-\rho) = 0$, $z'(\rho)$, $z'(1-\rho)$ конечны. Тогда в силу того, что

$$m = \inf_{y \in H_0^1 \setminus \{0\}} R[Q,y],$$

мы получаем неравенство $\lambda \geqslant m$, из которого следует, что m — минимальное собственное значение задачи (1), (2). Лемма 2 доказана. $\square$

Теорема 2 доказана. $\square$

Теорема 3. *Для любых α, β, γ, $\gamma \neq 0$, имеем $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \pi^2$.*

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$V[y] = \left(\int\limits_0^1 y'^2 dx \right) \Big/ \left(\int\limits_0^1 y^2 dx \right).$$

Пусть α, β, γ, $\gamma \neq 0$ — произвольные действительные числа. Для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ выполняется неравенство

$$\inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} R[Q,y] \leqslant \inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} V[y] = \pi^2,$$

Таким образом,

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \inf_{y \in H_0^1(0,1)} R[Q,y] \leqslant \pi^2. \qquad \square$$

Теорема 4. *Если $\gamma < 0$ или $0 < \gamma < 1$, $\alpha, \beta > 3\gamma - 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} < \pi^2$.*

Доказательство. В силу неравенства Гельдера для любых функций $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $y \in H_0^1(0,1)$ при $\gamma < 0$ имеем

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \leqslant \left(\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta Q^\gamma(x)dx\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(\int_0^1 Q(x)y^2dx\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

при $0 < \gamma < 1$ имеем

$$1 = \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta Q^\gamma(x)dx \leqslant \left(\int_0^1 Q(x)y^2dx\right)^\gamma \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{1-\gamma}.$$

Тогда

$$\int_0^1 Q(x)y^2dx \geqslant \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{10}$$

и

$$\inf_{y\in H_0^1(0,1)} R[Q,y] \leqslant \inf_{y\in H_0^1(0,1)} G[y],$$

где

$$G[y] = \left[\int_0^1 {y'}^2dx - \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \Big/ \left(\int_0^1 y^2dx\right).$$

При $\alpha, \beta > 3\gamma - 1$ интеграл

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}(\sin\pi x)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx$$

конечен. Тогда для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$

$$\inf_{y\in H_0^1(0,1)} R[Q,y] \leqslant \inf_{y\in H_0^1(0,1)} G[y] \leqslant G[\sin\pi x] < \pi^2$$

и $M_{\alpha,\beta,\gamma} < \pi^2$. □

В [5, 14] изучались оценки первого собственного значения задачи (1), (2) при выполнении интегрального условия на потенциал (3). Оценки для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $m_{\alpha,\beta,\gamma}$, полученные в этих работах, верны и для первого собственного значения задачи (1)–(4). Приведем соответствующие теоремы.

Теорема 5. *Если $\gamma < -1$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$, то существуют такие функции $Q_* \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $u \in H_0^1(0,1)$, $u > 0$ на $(0,1)$, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} = R[Q_*, u]$, причем u удовлетворяет уравнению*

$$u'' + mu = -x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tag{11}$$

и интегральному условию

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx = 1. \tag{12}$$

Теорема 6. *Если $\gamma > 1$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ и если $0 < \gamma \leqslant 1$, $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$, $-\infty < \beta < +\infty$ или $\beta \leqslant 2\gamma - 1$, $-\infty < \alpha < +\infty$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$. Если $0 < \gamma < 1/2$, $2\gamma - 1 < \alpha$, $\beta \leqslant \min\{0, 3\gamma - 1\}$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \pi^2$. Если $0 < \gamma < 1/2$, $\alpha, \beta > \min\{0, 3\gamma - 1\}$ и если $1/2 \leqslant \gamma < 1$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} < \pi^2$.*

Теорема 7. *Если $\gamma < 0$ или $0 < \gamma < 1$, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} = -\infty$. Если $\gamma \geqslant 1$, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} > -\infty$. Если $\gamma > 1$, $\alpha, \beta < 2\gamma - 1$, то существуют такие функции $Q_* \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $u \in H_0^1(0,1)$, $u > 0$ на $(0,1)$, что $m_{\alpha,\beta,\gamma} = R[Q_*, u]$, причем u удовлетворяет уравнению (11) и интегральному условию (12).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* О границах изменения собственного значения при изменении потенциала// Докл. РАН. — 2003. — *392*, № 5. — С. 592–597.
2. *А. А. Владимиров* О мажорантах собственных значений задач Штурма–Лиувилля с потенциалами из шаров весовых пространств// Мат. сб. — 2017. — *208*, № 9. — С. 42–55.
3. *Егоров Ю. В., Кондратьев В. А.* Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма—Лиувилля// Усп. мат. наук. — 1996. — *51*, № 3. — С. 73–144.
4. *Ежак С. С., Карулина Е. С., Тельнова М. Ю.* Оценки первого собственного значения некоторых задач Штурма—Лиувилля с интегральным условием на потенциал. Ч. 4// в кн.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа (*Асташова И. В.*, ред.). — М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012. — С. 506–647.
5. *Ежак С. С., Тельнова М. Ю.* Об оценках первого собственного значения задачи Штурма—Лиувилля с потенциалами из весовых пространств// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2019. — *32*. — С. 162–190.
6. *Куралбаева К. З.* Некоторые оптимальные оценки собственных значений задач Штурма–Лиувилля/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, 1996.
7. *Куралбаева К. З.* Об оценках первого собственного значения оператора Штурма—Лиувилля// Диффер. уравн. — 1996. — *32*, № 6. — С. 852–853.
8. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.
9. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высшая школа, 1977.
10. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
11. *Осмоловский В. Г.* Нелинейная задача Штурма—Лиувилля. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003.
12. *Egorov Yu., Kondratiev V.* Spectral Theory of Elliptic Operators. — Basel: Birkhäuser, 1996.
13. *Ezhak S.* On estimates for the first eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with dirichlet boundary conditions and integral condition// in: Differential and Difference Equations with Applications. — New York: Springer-Verlag, 2013. — P. 387–394.
14. *Ezhak S. S., Telnova M. Yu.* On one upper estimate for the first eigenvalue of a Sturm–Liouville problem with Dirichlet boundary conditions and a weighted integral condition// Mem. Differ. Equations Math. Phys. — 2018. — *73*. — P. 55–64.
15. *Karulina E.* Some estimates for the minimal eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with third-type boundary conditions// Math. Bohem. — 2011. — *136*, № 4. — P. 377–384.
16. *Karulina E. S., Vladimirov A. A.* The Sturm–Liouville problem with singular potential and the extrema of the first eigenvalue// Tatra Mount. Math. Publ. — 2013. — *54*, № 1. — P. 101–118.
17. *Telnova M.* Some estimates for the first eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with a weight integral condition// Math. Bohem. — 2012. — *137*, № 2. — P. 229–238.

Ежак Светлана Сергеевна
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва
E-mail: `svetlana.ezhak@gmail.com`

Тельнова Мария Юрьевна
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва
E-mail: `mytelnova@ya.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 99–103
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-99-103

УДК 517.925

ГЛАДКОСТЬ ПО ВЯЗКОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2021 г. **В. И. КАЧАЛОВ**

Аннотация. Аналитические свойства решений дифференциальных уравнений с малым параметром составляют основу аналитической теории возмущений. В случае регулярной теории имеют место теоремы Пуанкаре о разложении или утверждения, вытекающие из концепции аналитического семейства в смысле Като. Когда речь идет о сингулярно возмущенных задачах, то здесь плодотворным является подход, основанный на методе регуляризации С. А. Ломова, центральным понятием которого является понятие псевдоаналитического (псевдоголоморфного) решения, т.е. такого решения, которое представимо в виде сходящегося в обычном смысле ряда по степеням малого параметра.

***Ключевые слова*:** уравнение типа Навье—Стокса, псевдоголоморфное решение, монотонная система норм.

SMOOTHNESS IN THE VISCOSITY OF SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A BANACH SPACE

© 2021 **V. I. KACHALOV**

Abstract. The analytical properties of solutions of differential equations with a small parameter form the basis of analytical perturbation theory. In the case of a regular theory, Poincaré's decomposition theorems or statements that follow from the concept of an analytic family in the sense of Kato hold. For singularly perturbed problems, the approach based on S. A. Lomov's regularization method is useful; the central concept of this method is the concept of a pseudoanalytic (pseudoholomorphic) solution, i.e., a solution, which can be represented in the form of a series converging in the usual sense in powers of a small parameter.

***Keywords and phrases*:** Navier–Stokes-type equation, pseudoholomorphic solution, monotone system of norms.

***AMS Subject Classification*:** 34E05, 34K26

1. Введение. Вопрос о гладкости по малому параметру решений дифференциальных уравнений является актуальным как в теории регулярных возмущений, так и в сингулярной теории. В первом случае аналитичность решений начальных задач вытекает либо из теорем Пуанкаре о разложении (см. [5]), либо из понятия подчиненности одного оператора другому (аналитическое семейство в смысле Като (см. [2]). Теория сингулярных возмущений имеет дело в основном с асимптотическими разложениями и поэтому часто называется теорией асимптотического интегрирования (см. [1, 6]). Установленная С. А. Ломовым возможность обычной сходимости рядов, представляющих решения сингулярно возмущенных задач и введенная им концепция псевдоаналитического (псевдоголоморфного) решения легли в основу так называемой аналитической теории сингулярных возмущений (см. [3, 7]).

Здесь будет рассмотрено в банаховом пространстве E уравнение, содержащее как линейный, так и билинейный операторы со специальным начальным условием, зависящим от малого параметра.

2. Случай ограниченного билинейного оператора.

Будем изучать задачу Коши

$$u_t - Au = B(u,u), \quad t \in [0,T], \qquad u(0) = \nu w_0(\nu). \tag{1}$$

Наложим на данные задачи следующие условия (α):

(i) замкнутый неограниченный оператор A является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы $U(t)$ и его область определения $D(A)$ всюду плотна в банаховом пространстве E;

(ii) $B(u,v)$ — билинейный ограниченный оператор, определенный на $E \times E$;

(iii) вектор $w_0(\nu)$ аналитичен в точке $\nu = 0$.

Введем замену $u = \nu w$, тогда получим начальную задачу уже для $w(t)$:

$$w_t - Aw = \nu B(w,w), \quad t \in [0,T], \qquad w(0,\nu) = w_0(\nu), \tag{2}$$

решение которой будем искать в виде регулярного ряда по степеням малого параметра:

$$w(t,\nu) = W_0(t,\nu) + \nu W_1(t,\nu) + \ldots + \nu^n W_n(t,\nu) + \ldots \tag{3}$$

В соответствии с методом неопределенных коэффициентов получим серию начальных задач

$$\begin{aligned} &W_{0,t} - AW_0 = 0, && W_0(0,\nu) = w_0(\nu),\\ &W_{1,t} - AW_1 = B(W_0,W_0), && W_1(0,\nu) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &W_{n,t} - AW_n = \sum_{k=0}^{n-1} B(W_k, W_{n-k-1}), && W_n(0,\nu) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Найдем решения этих задач, пользуясь условием (ii):

$$\begin{aligned} &W_0(t,\nu) = U(t)w_0(\nu),\\ &W_1(t,\nu) = \int_0^t U(t-\tau)B(W_0(\tau,\nu),W_0(\tau,\nu))d\tau,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &W_n(t,\nu) = \int_0^t U(t-\tau)\left[\sum_{k=0}^{n-1} B(W_k(\tau,\nu), W_{n-k-1}(\tau,\nu))\right] d\tau,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Чтобы обеспечить выполнение условия (iii), будем считать, что $\|B(u,v)\| \leqslant b\|u\|\|v\|$, при некотором $b > 0$ и любых $u, v \in E$. Пусть $\|W_0(t,\nu)\| \leqslant a$ в некоторой окрестности значения $\nu = 0$ при $t \in [0,T]$ и $\|U(t)\| \leqslant q$ на заданном отрезке. Тогда в указанной окрестности $\nu = 0$ при всех $t \in [0,T]$ выполнены неравенства

$$\|W_1(t,\nu)\| \leqslant Tqba^2, \quad \|W_2(t,\nu)\| \leqslant T^2q^2b^2a^3, \quad \ldots, \quad \|W_n(t,\nu)\| \leqslant T^nq^nb^na^{n+1}, \quad \ldots, \tag{6}$$

откуда и следует сходимость ряда (3) в некоторой окрестности значения $\nu = 0$.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Если выполнены условия (α), то задача Коши (1) имеет единственное аналитическое в точке $\nu = 0$ решение, представимое равномерно сходящимся на отрезке $[0,T]$ рядом.*

Заметим, что единственность следует из способа построения решения, а аналитичность — из аналитичности коэффициентов ряда (3).

В следующем разделе статьи аналогичный результат будет получен для случая неограниченного билинейного оператора.

3. Уравнения типа Навье—Стокса. Снова рассмотрим начальную задачу

$$u_t - Au = B(u,u), \quad t \in [0,T], \qquad u(0,\nu) = \nu w_0(\nu), \tag{7}$$

но уже в ситуации, когда билинейный оператор $B(u,v)$ ограничен по первой переменной и является замкнутым неограниченным по второй переменной, с областью определения $D(A) \times D(A)$. Так выглядит уравнение Навье—Стокса, записанное как эволюционное в банаховом пространстве (см. [8]).

После того как сделана замена $u = \nu w$, осуществляется переход к задаче Коши вида (2), для решения которой применяется метод малого параметра и справедливы формулы (4) и (5). Однако оценки вида (6) уже не имеют места из-за неограниченности билинейного оператора. Чтобы доказать утверждение, аналогичное теореме 1, придется на части области определения $D(B)$ вводить топологию, определяемую счетной системой норм. Пусть D_0 такое линейное многообразие, содержащееся в D, что выполнено следующее условие (β):

(a) на D_0 можно ввести счетную монотонную систему норм $\|\cdot\|_k$ так, что $\|v\|_1 \leqslant \|v\|_2 \leqslant \dots$ для всех $v \in D_0$ и из сходимости по каждой из них вытекает сходимость по норме E;
(b) D_0 состоит из таких множеств Y^C $(C > 0)$, что $\|v\|_k \leqslant e^{kC}$ для всех $v \in Y^C$ и всех $k \in \mathbb{N}$;
(c) если $u \in Y^{C_1}$ и $v \in Y^{C_2}$, то $\|B(u,v)\|_k \leqslant C_2 e^{k(C_1+C_2)}$;
(d) оператор $U(t)$ равномерно по $t \in [0,T]$ ограничен в счетно-нормированном пространстве D_0, т.е. найдется такое $q > 0$, что $\|U(t)v\|_k \leqslant q\|v\|_k$ для всех $v \in D_0$ и $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия (β) и $w_0(\nu) \in D_0$ при $0 \leqslant \nu \leqslant \nu_0$, то задача Коши (7) имеет аналитическое в точке $\nu = 0$ решение.*

Доказательство. Будем считать, не ограничивая общности, что $q = 1$. Заметим, что неравенство в условии (c) можно переписать в виде

$$\|B(u,v)\|_k \leqslant e^{C_1 x}\big(\partial_x e^{C_2 c}\big)\big|_{x=k}.$$

Определим функции $P_n(k,t)$, мажорирующие $\|W_n(t,\nu)\|_k$ рекуррентным образом:

$$\begin{aligned}
&P_0(k,t) = e^{Cx}|_{x=k},\\
&P_1(k,t) = \int_0^t P_0 P_{0,x}\, d\tau|_{x=k} = Cte^{2Cx}|_{x=k},\\
&P_2(k,t) = \int_0^t (P_0P_{1,x} + P_1P_{0,x})\, d\tau|_{x=k} = \frac{3}{2}C^2t^2e^{3Cx}|_{x=k},\\
&\dots\dots\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&P_n(k,t) = \int_0^t (P_0P_{n-1,x} + P_1P_{n-2,x} + \ldots + P_{n-1}P_{0,x})\, d\tau|_{x=k} = \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}C^nt^ne^{(n+1)Cx}|_{x=k},\\
&\dots\dots\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{8}$$

Эти формулы можно доказать методом математической индукции, а так как ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu^n P_n(k,T)$$

при каждом натуральном k сходится в некоторой окрестности значения $\nu = 0$, то и теорему 2 можно считать доказанной. $\square$

Замечание. В случае, если и оператор A зависит от малого параметра ν, то коэффициенты $W_n(t,\nu)$ ряда вида (3) могут зависеть от ν нерегулярным образом. Утверждение теоремы 2 все равно будет верно, поскольку оценки для $\|W_n(t,\nu)\|$, произведенные с помощью формулы (8), не зависят от ν, и решение $w(t,\nu)$ уже будет псевдоаналитическим (псевдоголоморфным).

4. Пример. Сначала приведем утверждение о гладкости по ν решения задачи Коши в $\mathbb{R}^m$ для уравнения диффузии

$$u_t = \nu\Delta u + f(t,x), \quad u(0,x) = \varphi(x), \tag{9}$$

где $x = (x_1,\ldots,x_m)$, $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_m}^2$.

Теорема 3. *Если функции $f(t,x)$ и $\varphi(x)$ допускают аналитические продолжения на $\mathbb{C}^m$, которые являются целыми функциями порядка $0 < \rho \leqslant 2$, т.е.*

$$|f(t,z)| \leqslant M_0(t)e^{|z|^\rho}, \quad |\varphi(z)| \leqslant M_1 e^{|z|^\rho}$$

для всех $z \in \mathbb{C}^m$, то для любого $T > 0$ в полосе $[0,T]\times\mathbb{R}^m$ существует единственное аналитическое в точке $\nu = 0$ решение задачи (9), к тому же принадлежащее тихоновскому классу корректности параболических задач.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ задачу Коши

$$\begin{cases} u_t - \nu(u_{xx} + u_{yy}) = -uu_x - vu_y, & u|_{t=0} = \nu\varphi(x,y,\nu), \\ v_t - \nu(v_{xx} + v_{yy}) = -uv_x - vv_y, & v|_{t=0} = \nu\psi(x,y,\nu). \end{cases} \tag{10}$$

Сделаем замену $u = \nu\widetilde{u}$, $v = \nu\widetilde{v}$, тогда

$$\begin{cases} \widetilde{u}_t - \nu(\widetilde{u}_{xx} + \widetilde{u}_{yy}) = -\nu(\widetilde{u}\widetilde{u}_x + \widetilde{v}\widetilde{u}_y), & \widetilde{u}|_{t=0} = \varphi(x,y,\nu), \\ \widetilde{v}_t - \nu(\widetilde{v}_{xx} + \widetilde{v}_{yy}) = -\nu(\widetilde{u}\widetilde{v}_x + \widetilde{v}\widetilde{v}_y), & \widetilde{v}|_{t=0} = \psi(x,y,\nu). \end{cases} \tag{11}$$

Решение системы (11) будем искать в виде рядов по степеням вязкости:

$$\widetilde{u} = \widetilde{u}_0 + \nu\widetilde{u}_1 + \ldots, \quad \widetilde{v} = \widetilde{v}_0 + \nu\widetilde{v}_1 + \ldots \tag{12}$$

Пусть продолжения $\varphi(z_1,z_2,\nu)$ и $\psi(z_1,z_2,\nu)$ аналитичны в точке $\nu = 0$ и являются функциями экспоненциального типа, т.е. существует такое $C > 0$, что

$$|\varphi(z_1,z_2,\nu)| \leqslant e^{C(|z_1|+|z_2|)}, \quad |\psi(z_1,z_2,\nu)| \leqslant e^{C(|z_1|+|z_2|)} \quad \forall z_1,z_2 \in \mathbb{C}^2.$$

Члены $\widetilde{u}_0$ и $\widetilde{v}_0$ найдем без использования формулы Пуассона, применив к уравнениям

$$\widetilde{u}_{0,t} = \nu\Delta\widetilde{u}_0, \qquad \widetilde{u}_0|_{t=0} = \varphi(x,y,\nu),$$
$$\widetilde{v}_{0,t} = \nu\Delta\widetilde{v}_0, \qquad \widetilde{v}_0|_{t=0} = \psi(x,y,\nu)$$

теорему 3.

Функции $\widetilde{u}_0(t,x,y,\nu)$ и $\widetilde{v}_0(t,x,y,\nu)$ будут аналитическими в точке $\nu = 0$ в каждой полосе $[0,T]\times\mathbb{R}^2$ и принадлежать тому же экспоненциальному типу, что и начальные функции.

Рассмотрим пространство $E = C(\mathbb{R}^2)$ с нормой

$$\|g\| = \sup_{\mathbb{R}^2} |g(x,y)|$$

и пусть D_0 состоит из целых функций экспоненциального типа с системой норм

$$\|g\|_k = \max_{|z_1|,|z_2|\leqslant k} |g(z_1,z_2)|,$$

а билинейный оператор B определяется правой частью системы (10). Для определения $\widetilde{u}_1$ и $\widetilde{v}_1$ имеем систему

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{1,t} = \nu\Delta\widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_0\widetilde{u}_{0,x} - \widetilde{v}_0\widetilde{u}_{0,y}, & \widetilde{u}_1|_{t=0} = 0, \\ \widetilde{v}_{1,t} = \nu\Delta\widetilde{v}_1 - \widetilde{u}_0\widetilde{v}_{0,x} - \widetilde{v}_0\widetilde{v}_{0,y}, & \widetilde{v}_1|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

которую решим с помощью формулы Пуассона (в скобках аргументы):

$$\widetilde{u}_1(t,x,y,\nu) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} [-\widetilde{u}_0\widetilde{u}_{0,x} - \widetilde{v}_0\widetilde{u}_{0,y}](\tau, x + 2\sqrt{\nu(t-\tau)}\xi, y + 2\sqrt{\nu(t-\tau)}\eta)e^{-\xi^2-\eta^2} d\xi d\tau,$$

$$\widetilde{v}_1(t,x,y,\nu) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} [-\widetilde{u}_0\widetilde{v}_{0,x} - \widetilde{v}_0\widetilde{v}_{0,y}](\tau, x + 2\sqrt{\nu(t-\tau)}\xi, y + 2\sqrt{\nu(t-\tau)}\eta)e^{-\xi^2-\eta^2} d\xi d\tau,$$

и т. д.

Видно, что $\widetilde{u}_1$ и $\widetilde{v}_1$ не зависят от вязкости регулярным образом, следовательно, построенное таким образом решение будет псевдоголоморфным в точке $\nu = 0$.

5. Заключение. Весьма важным является изучение аналитических свойств решений и других классов нелинейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, содержащих малый параметр. Итогом этой работы должно стать построение аналитической теории возмущений, охватывающей широкий спектр как регулярных, так и сингулярных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных задач. — М.: Наука, 1973.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
3. *Качалов В. И.* О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 4. — С. 64–71.
4. *Качалов В. И., Федоров Ю. С.* О методе малого параметра в нелинейной математической физике// Сиб. электрон. мат. изв. — 2018. — *15*. — С. 1680–1686.
5. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
6. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
7. *Ломов С. А., Ломов И. С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011.
8. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Т. II. — М.: Мир, 1984.

Качалов Василий Иванович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва
E-mail: vikachalov@rambler.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 104–109
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-104-109

УДК 517.44

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПЭЛИ—ВИНЕРА ДЛЯ K_γ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ПРИ ЦЕЛОМ $|\gamma|$

© 2021 г. **Л. Н. ЛЯХОВ, М. Г. ЛАПШИНА**

Аннотация. Изучение преобразования Радона на основе весовых плоских волн инициировано И. А. Киприяновым. В этой статье приведены необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяет K_γ-преобразование Радона гладких, быстро убывающих вместе со всеми производными.

Ключевые слова: теорема Пэли—Винера, преобразование Радона, преобразование Радона—Киприянова, обращение преобразования Радона, обращение преобразования Радона—Киприянова.

AN ANALOG OF THE PALEY–WIENER THEOREM FOR THE RADON K_γ-TRANSFORM FOR INTEGER $|\gamma|$

© 2021 **L. N. LYAKHOV, M. G. LAPSHINA**

Abstract. The study of the Radon transformation based on weighted plane waves was initiated by I. A. Kipriyanov. In this paper, we obtain necessary and sufficient conditions satisfied by the Radon K_γ-transform of smooth functions that decrease together with all their derivatives.

Keywords and phrases: Paley–Wiener theorem, Radon transform, Radon–Kipriyanov transform, inversion of the Radon transform, inversion of the Radon–Kipriyanov transform.

AMS Subject Classification: 44A12, 42A38

Идея использования конструкций весовых плоских волн для работы с дифференциальными операторами, содержащими сингулярный дифференциальный оператор Бесселя

$$B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1}$$

принадлежит И. А. Киприянову (1960–1970-е гг.). Такие конструкции плоских волн (см. [3]) определены как действие оператора Пуассона на «плоскую волну» (см. [6]):

$$\phi(x,\xi) = \mathcal{P}^\gamma_{x'} f(\langle x,\xi\rangle), \quad \langle x,\xi\rangle = \sum_{i=1}^N x_i, \xi_i,$$

где многомерный оператор Пуассона $\mathcal{P}^\gamma_{x'}$ определен по формуле

$$\mathcal{P}^\gamma_{x'} g(x',x'') = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times \int_0^\pi \dots \int_0^\pi g(x_1\cos\alpha_1,\dots,x_n\cos\alpha_n,x'') \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1}\alpha_i d\alpha_1\dots d\alpha_n. \tag{2}$$

Одномерные операторы Пуассона изучались в [7]. Отметим особенность действия оператора Пуассона: он уничтожает нечетные функции. В частности,

$$\mathcal{P}_{x'}^{\gamma}\langle x,\xi\rangle=\sum_{i=n+1}^{N}x_i,\xi_i.$$

Поэтому далее мы предполагаем, что скалярное произведение N-мерных векторов определено в n-полупространстве, а рассматриваемые функции допускают четное продолжение по тем переменным, по которым действует оператор Пуассона. Это приводит к следующему определению четности функций (см. [4, с. 21]): функция $f=f(x',x'')$, определенная в n-полупространстве

$$\mathbb{R}_N^+=\mathbb{R}_N^+\times\mathbb{R}_{N-n},\quad x'\in\mathbb{R}_n^+=\{x_1>0,\dots,x_n>0\},\quad x''\in\mathbb{R}_{N-n},\quad n<N$$

называется x'-четной по Киприянову, если для всех производных нечетного порядка $l=2k+1$ справедливо равенство $f_{x_i}^{(l)}(0,x^i)=0$, $i=1,2,\dots,n$ (используем обозначение $x=(x_i,x^i)$, $x^i=(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x^n)$).

Преобразование Радона на основе весовых плоских волн введено в [5,11]. Пусть x'-четная функция $f(x)$ принадлежит пространству Шварца. Ее преобразование Радона—Киприянова определяется формулой (см. [5])

$$K_\gamma[f](\xi;p):=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}f(x)\mathcal{P}_{x'}^{\gamma}\delta(p-\langle x,\xi\rangle)(x')^\gamma dx,\tag{3}$$

где $\delta(P)$ — дельта-функция, сосредоточенная на $(N-1)$-мерной поверхности $P(x)=0$. Конструкция (3) называется *преобразованием Радона—Киприянова* (сокращая, говорим K_γ-преобразование Радона или K_γ-преобразование). Это интегральное преобразование мы будем рассматривать на классе функций, определенных в области $\mathbb{R}_N^+$, бесконечно дифференцируемых, x'-четных и быстро убывающих в следующем смысле:

$$\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}_N^+}}\left||x'|^{\beta'}|x''|^{\beta''}B_\gamma^{\alpha'}D_{x''}^{\alpha''}f(x',x'')\right|\leqslant\infty,\quad\forall\alpha=(\alpha',\alpha''),\ \beta=(\beta',\beta''),\tag{4}$$

где α и β — целочисленные мультииндексы, $B_\gamma^{\alpha'}=B_{\gamma_1}^{\alpha_1}\dots B_{\gamma_n}^{\alpha_n}$, B_{γ_i} — оператор Бесселя (1), $D_{x''}^{\alpha''}=D_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}\dots D_{x_N}^{\alpha_N}$, $D_{x_i}=\partial/\partial x_i$. Класс функций, удовлетворяющих условию (4), будем обозначать $S_{ev}=S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$.

1. Необходимые свойства. Если функция $f=f(x',x'')$ принадлежит классу x'-четных функций, быстро убывающих вместе со всеми производными, то ее K_γ-преобразование удовлетворяет следующим условиям (известны из работ [5,11]):

(i) однородность:

$$K_\gamma[f](\lambda\xi,\lambda p)=|\lambda|^{-1}K_\gamma[f](\xi,p);$$

(ii) функция $K_\gamma[f](\xi,p)$ бесконечно дифференцируема по ξ и по p при $\xi\neq0$;

(iii) при $|p|\to\infty$ для любого $k>0$ справедлива равномерная по ξ оценка

$$|K_\gamma[f](\xi,p)|=O(|p|^{-k}),$$

когда ξ пробегает ограниченную замкнутую область, не содержащую точки $\xi=0$.

Докажем еще одно, необходимое в дальнейшем, свойство о представлении интеграла от $p^kK_\gamma[f](\xi,p)$ однородном многочленом.

(iv) *Для любого $k>0$ интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_\gamma[f](\xi;p)p^kdp\tag{5}$$

является однородным многочленом от ξ порядка k.

Доказательство. Наличие оператора Пуассона в определении K_γ-преобразования позволяет, используя процедуру вращения $x_i \to \sqrt{z_{2i-1}^2 + z_{2i}^2}$, привести определение (3) к виду

$$K_\gamma[f](\xi;p) := \int\limits_{\mathbb{R}^+_{N+n}} \widetilde{f}(z)\delta(p - \langle z, \widehat{\xi}\rangle) \prod_{i=1}^{n} z_{2i}^{\gamma_i - 1} dz, \tag{6}$$

где

$$\widetilde{f}(z) = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \ldots, \sqrt{z_{2n-1}^2 + z_{2n}^2}, x''\right),$$
$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_{2n-1}, z_{2n}, x'') \in \mathbb{R}^+_{N+n} = \{z : z_{2i} > 0, i = 1, 2, \ldots, n\},$$
$$\widetilde{\xi} = (\xi_1, 0, \xi_3, 0, \ldots, \xi_{2n-1}, 0, \xi'') \in \overline{\mathbb{R}^+_{N+n}},$$

причем все нечетные координаты вектора $\widetilde{\xi}$ совпадают с координатами вектора ξ: $\xi_{2i-1} = \xi_i$ и $|\widetilde{\xi}| = |\xi|$.

По определению преобразования Радона—Киприянова (6) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[f](\xi;p) p^k dp = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p^k dp \int\limits_{\Gamma = \{p = \langle \widetilde{\xi}, z\rangle\}^+} \tilde{f}(z) \prod_{i=1}^{n} z_{2j}^{\gamma_j - 1} d\Gamma,$$

где $\{p = \langle \widetilde{\xi}, z\rangle\}^+ = \{p = \langle \widetilde{\xi}, z\rangle\} \cap \mathbb{R}^+_{N+n}$. Ось интегрирования Op ортогональна плоскости интегрирования Γ, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[f](\xi;p) p^k dp = \int\limits_{\mathbb{R}^+_{N+n}} \langle \widetilde{\xi}, z\rangle^k \tilde{f}(z) \prod_{i=1}^{n} z_{2j}^{\gamma_j - 1} dz.$$

Так как

$$\langle \Theta, z\rangle^k = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha \xi^\alpha,$$

то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[f](\xi;p) p^k dp = \sum_{|\alpha|=k} \xi^\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^+_{N+n}} z^\alpha \widetilde{f}(z) \prod_{i=1}^{n} z_{2j}^{\gamma_j - 1} dz = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha \xi^\alpha,$$

где коэффициенты A_α зависят от функции f и от параметров N, n и γ. $\square$

2. О формулах обращения. Преобразование Радона—Киприянова, определенное в виде

$$\breve{f}(\xi;p) = K_\gamma[f](\xi;p) = \int\limits_{\mathbb{R}_N} f(x) \mathcal{P}^\gamma_{x'} \delta(p - \langle x, \xi\rangle)(x')^\gamma dx,$$

удалось обратить, используя методы обращения B-потенциалов Рисса (см. [9]).

Известны формулы обращения преобразования Радона—Киприянова (см. [2, 10, 11]). Наиболее общей из приведенных в этих работах формул является формула

$$f(x) = \frac{2^{2n - |\gamma| - N} \pi^{n+1-N}}{i^{N + |\gamma| - 1} \prod_{i=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right)} \mathbf{D}_\gamma^{\frac{N + |\gamma| - 1}{2}} \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}^\gamma_{x'} K_\gamma[f](\xi; \langle x, \xi\rangle)(\xi')^\gamma dS(\xi), \tag{7}$$

полученная применением B-гиперсингулярного интеграла смешанного типа (введены в [8])

$$\mathbf{D}^\alpha_\gamma \varphi(x) = \frac{1}{d_{N,\gamma,l}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^+_N} \frac{\square^l_t \varphi(x)}{t^{N+\gamma+\alpha}} (t')^\gamma dt,$$

где $\Box_t^l$ — конечная разность, порожденная обобщенным сдвигом Пуассона, нормирующая константа $d_{N,\gamma,l}$ выбрана так, чтобы в образах Фурье—Бесселя этот оператор имел символ $|\xi|^\alpha$.

Если же число $|\gamma|$ — целое, то B-гиперсингулярный интеграл есть сингулярный дифференциальный оператор

$$\mathbf{D}_\gamma^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}} = \Delta_B^m, \quad \Delta_B = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i} + \sum_{j=n+1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad m = N + |\gamma| - 1,$$

дробного (вообще говоря) порядка.

Если $N+|\gamma|$ — нечетное, то $(N+|\gamma|-1)/2 = m$ — натуральное число, и формула обращения (7) принимает более простой вид:

$$f(x) = C_1(N,\gamma)\Delta_B^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}} \int\limits_{C^+(N)} K_\gamma[f](\Theta;\langle x,\Theta\rangle)(\Theta')^\gamma dS(\Theta), \tag{8}$$

где C^+ — произвольная поверхность, охватывающая начало координат.

Если же число $N+|\gamma|$ — четное, то

$$f(x) = C_2(N,\gamma)\Delta_B^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}} \int\limits_{C^+(N)} (\Theta')^\gamma dS(\Theta) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_{x'}^\gamma \left[\frac{1}{\langle x,\Theta\rangle} - p\right] d_p K_\gamma[f](\Theta;p).$$

Отметим, что если числа γ_i — натуральные, то K_γ-преобразование — это преобразование Радона функций от сферических симметрий (см. [12, теорема 1]). Для примера докажем теорему для случая, когда число $N+|\gamma|$ нечетно.

Многомерный оператор Пуассона сплетает оператор Бесселя B_γ и вторую производную $\partial^2/\partial x^2$ в следующем смысле (см. [6]):

$$B^m \mathcal{P}_t^\gamma f(t) = \mathcal{P}_t^\gamma \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} f(t), \quad t \in \mathbb{R}_1^+.$$

Отсюда вытекает формула

$$\Delta_B \mathcal{P}_t^\gamma f(t) = \mathcal{P}_t^\gamma \sum_{i=1}^N \frac{d^2}{dx_i^2} f(x',x'') = \mathcal{P}_t^\gamma \Delta f(x), \quad x \in \mathbb{R}_N^+.$$

Поэтому

$$\Delta_B \mathcal{P}_t^\gamma \breve{f}(\xi;\langle x,\xi\rangle) = \mathcal{P}_t^\gamma \sum_{i=1}^N \frac{d^2}{dx_i^2} \breve{f}(\xi,\langle x,xi\rangle) = \mathcal{P}_t^\gamma \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \breve{f}_p''(\xi,\langle x,\xi\rangle) = \mathcal{P}_t^\gamma \breve{f}_p''(\xi,\langle x,\xi\rangle),.$$

Мы учли, что $|\xi|^2 = 1$. Из формулы (8) имеем

$$f(x) = C_1(N,\gamma) \int\limits_{C^+(N)} \mathcal{P}_{x'}^\gamma \breve{f}_p^{(N+|\gamma|-1)}(\xi;p)(\Theta')^\gamma dS(\Theta), \tag{9}$$

где $p = \langle x,\Theta\rangle$, $|\Theta| = 1$.

3. Аналог теоремы Пэли—Винера. Условия (i)–(iv) являются необходимыми условиями для принадлежности прообраза преобразования Радона—Киприянова подпространству S_{ev} пространства Шварца, состоящего из x'-четных функций, удовлетворяющих условию (1). На самом деле условия (i)–(iv) являются и достаточными, что доказывается в следующем утверждении, которое и является аналогом известной теоремы Пэли—Винера для преобразования Фурье и преобразования Радона.

Теорема 1. *Всякая функция, удовлетворяющая условиям* (i)–(iv) *является преобразованием Радона—Киприянова функции* $f(x) \in S_{ev}$.

Доказательство. Мы следуем подходу к доказательству аналогичной теоремы для преобразования Радона из [1], поэтому приведем его кратко, выделяя наиболее принципиальные для этих исследований места в доказательстве. Нужно доказать, что $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая и быстро убывающая функция вместе со всеми B-производными (по x') и производными (по x''), а преобразование Радона—Киприянова функции $f(x)$ совпадает с $K_\gamma[f](\Theta, p)$. Из условия (ii) бесконечной дифференцируемости функции $K_\gamma[f](\xi, p)$ по ξ и по p при $\xi \neq 0$ и из формулы (7) следует бесконечная дифференцируемость функции $f(x)$.

Докажем, что функция $f(x)$ быстро убывающая. Идея простая, достаточно доказать убывание функции $f(x)$ в направлении вектора Ox_0, т.е. рассмотреть функцию $\Phi(t) = f(tx_0)$ при $t \to \infty$. Точка x_0 при этом произвольная. Положим $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Принципиально то, что ненулевая координата выбранной нами точки x_0 является весовой. Введем обозначение

$$\Psi(\xi_1, \dots, \xi_N; p) = C_1(N, \gamma) \mathcal{P}^\gamma_{x'} \breve{f}_p^{(N+|\gamma|-1)}(\xi; p).$$

В данном случае $p = \langle tx_0, \xi \rangle = t\xi_1$ и из (9) получим равенство

$$f(tx_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^+_{N-1}} \Psi(\xi_1, \dots, \xi_{N-1}, 1; t\xi_1)(\xi')^\gamma d\xi.$$

Заменой переменной $\xi_1 = \frac{p}{t}$, $d\xi_1 = \frac{dp}{t}$ приходим к выражению

$$f(tx_0) = t^{-\gamma-1} \int\limits_{\mathbb{R}^+_{N-1}} \Psi\left(\frac{p}{t}, \xi_2 \dots, \xi_{N-1}, 1; p\right) p^{\gamma_1} dp d\xi_2 \dots d\xi_{N-1}.$$

Подынтегральная функция, как функция от t^{-1}, бесконечно дифференцируема и может быть представлена в окрестности точки $t^{-1} = 0$ разложением в ряд Тейлора по степеням t^{-1}. Это приведет к следующему асимптотическому ряду для функции $\Phi(t) = f(tx_0)$:

$$\Phi(t) = f(tx_0) \sim t^{-\gamma_1-1} \int\limits_{\mathbb{R}^+_{N-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{-k}p^k}{k!} \Psi^{(k)}_{\xi_1}(0, \xi_2 \dots, \xi_{N-1}, 1; p) \prod_2^N \xi_i^{\gamma_i} p^{\gamma_1} dp d\xi_2 \dots d\xi_{N-1} =$$

$$= t^{-\gamma_1-1} \int\limits_{\mathbb{R}^+_{N-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{-k}p^{k+\gamma_1}}{k!} \Psi^{(k)}_{\xi_1}(0, \xi_2 \dots, \xi_{N-1}, 1; p) \prod_2^N \xi_i^{\gamma_i} dp d\xi_2 \dots d\xi_{N-1}.$$

Здесь выделим переменную интегрирования p и введем обозначения $\tilde{\xi} = (\xi_2, \dots, \xi_{N-1})$ и $\tilde{\gamma} = (\gamma_2, \dots, \gamma_n)$. Тогда

$$\Phi(t) = f(tx_0) \sim \int\limits_{\tilde{\xi}} \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\gamma-1-k} \frac{\partial^k}{\partial \xi_1^k} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^{k+\gamma_1}}{k!} \frac{\partial^{N+|\gamma|-1}}{\partial p^{N+|\gamma|-1}} K_\gamma[f](\xi, p) dp \Big|_{\xi_1=0} (\tilde{\xi})^{\tilde{\gamma}} d\tilde{\xi}.$$

Во внутреннем интеграле можем совершить интегрирование по частям:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^{k+\gamma_1}}{k!} \frac{\partial^{N+|\gamma|-1}}{\partial p^{N+|\gamma|-1}} K_\gamma[f](\xi, p) dp = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{N+|\gamma|-1} p^{k+\gamma_1}}{\partial p^{N+|\gamma|-1}} K_\gamma[f](\xi, p) dp.$$

Ясно, что $\dfrac{\partial^{N+|\gamma|-1}p^{k+\gamma_1}}{\partial p^{N+|\gamma|-1}} = 0$ при $N+|\tilde{\gamma}|-1>k$. В результате получим соотношение

$$\Phi(t) = f(tx_0) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\gamma-1-k} \int\limits_{\tilde{\xi}} \frac{(\tilde{\xi})^\gamma}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \xi_1^k} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p^{k+\gamma_1-N-\gamma_1-|\tilde{\gamma}|+1} K_\gamma[f](\xi,p)dp =$$

$$= \sum_{k=N+|\gamma|}^{\infty} t^{-\gamma-1-k} \int\limits_{\tilde{\xi}} \frac{(\tilde{\xi})^\gamma}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \xi_1^k} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p^{k-N-|\tilde{\gamma}|+1} K_\gamma[f](\xi,p)dpd\tilde{\xi}.$$

Здесь по условию (iv) внутренний интеграл есть однородный многочлен по ξ степени $k-N-|\tilde{\gamma}|+1$. Но поскольку $k>N+|\tilde{\gamma}|-1$ (т.е. порядок производной выше степени дифференцируемого многочлена), то это выражение равно нулю. Отсюда следует быстрое убывание $\Psi(t)$ и, следовательно, соответствующее асимптотическое поведение функции Φ при $|x|\to\infty$. $\square$

Быстрое убывание функции $B_\gamma^{\alpha'} D_{x''}^{\alpha''} f$ доказывается по той же схеме, что и быстрое убывание f, поскольку производные функции $B_\gamma^{\alpha'} D_{x''}^{\alpha''}$ инвариантны по отношению к свойству x'-четности функции f.

Доказательство того, что функция f, полученная по формуле обращения преобразование Радона—Киприянова, единственна, стандартно и мы его не приводим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М.: ГИФМЛ, 1962.
2. *Гоц Е. Г., Ляхов Л. Н.* Обращение преобразования Радона—Киприянова посредством дробного дифференцирования Грюнвальда—Летникова—Рисса// Докл. РАН. — 2006. — *412*, № 1. — С. 11—14.
3. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. — М.: Мир, 1958.
4. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1987.
5. *Киприянов И. А.* О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона// Докл. РАН. — 1998. — *360*, № 2. — С. 157–160.
6. *Киприянов И. А., Кононенко В. И.* О фундаментальных решениях некоторых сингулярных уравнений в частных производных// Диффер. уравн. — 1969. — *5*, № 8. — С. 1471–1483.
7. *Левитан Б. М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя// Усп. мат. наук. — 1951. — *6*, № 2. — С. 102–143.
8. *Ляхов Л. Н.* Об одном классе гиперсингулярных интегралов// Докл. АН СССР. — 1990. — *315*, № 2. — С. 291–296.
9. *Ляхов Л. Н.* Обращение B-потенциалов Рисса// Докл. РАН. — 1991. — *321*, № 3. — С. 466–469.
10. *Ляхов Л. Н.* Обращение преобразования Киприянова—Радона// Докл. РАН. — 2004. — *399*, № 5. — С. 153–163.
11. *Ляхов Л. Н.* Преобразование Киприянова—Радона// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2005. — *248*. — С. 144–152.
12. *Ляхов Л. Н.* Преобразование Радона—Киприянова обобщенного сферического среднего значения функции// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 1. — С. 100–112.

Ляхов Лев Николаевич
Воронежский государственный университет
E-mail: levnlya@mail.ru

Лапшина Марина Геннадьевна
Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского
E-mail: marina.lapsh@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 110–121
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-110-121

УДК 517.95

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЗАДАЧИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

© 2021 г. **Ю. И. СКАЛЬКО, С. Ю. ГРИДНЕВ**

Аннотация. В работе построено приближение фундаментального решения оператора задачи для гиперболической системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Предложен алгоритм приближенного решения обобщенной задачи Римана о распаде разрыва при наличии дополнительных условий на границах. Предложенный алгоритм сводит задачу нахождения значений переменных по обе стороны поверхности разрыва начальных данных к решению системы алгебраических уравнений с правой частью, зависящей от значений переменных в начальный момент времени в конечном числе точек. На основе этих решений построен вычислительный алгоритм приближенного решения начально-краевой задачи для гиперболической системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Алгоритм реализован для системы уравнений упругой динамики и использован для решения некоторых прикладных задач, связанных с нефтедобычей.

Ключевые слова: распад разрыва, условия сопряжения, гиперболическая система, обобщенная функция, задача Коши, матрица-функция Грина, характеристика, инвариант Римана, уравнения упругой динамики.

FUNDAMENTAL SOLUTION OF AN OPERATOR AND ITS APPLICATION FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

© 2021 **YU. I. SKALKO, S. YU. GRIDNEV**

Abstract. In this paper, we construct an approximation of the fundamental solution of a problem for a hyperbolic system of first-order linear differential equations with constant coefficients. We propose an algorithm for the approximate solution of the generalized Riemann problem on the discontinuity of a decay under additional conditions on the boundaries. This algorithm reduces the problem of finding values of variables on both sides of the discontinuity surface of the initial data to solving a system of algebraic equations whose right-hand sides depend on the values of the variables at the initial moment of time at a finite number of points. Based on these solutions, we develop a computational algorithm for the approximate solution of the initial-boundary-value problem for a hyperbolic system of first-order linear differential equations. The algorithm is implemented for a system of equations of elastic dynamics; moreover, we use it to solve some applied problems related to oil production.

Keywords and phrases: decay of a discontinuity, conjugation conditions, hyperbolic system, generalized function, Cauchy problem, matrix Green function, characteristic, Riemann invariant, equations of elastic dynamics.

AMS Subject Classification: 35L40, 35L67, 35L45, 35L50

1. Постановка задачи. Данная работа возникла из попыток решения конкретной прикладной задачи. Эта прикладная задача и обусловила особенности постановки математической задачи. Поэтому сначала несколько слов о прикладной задаче.

В многочисленных промышленных экспериментах на нефтеносных месторождениях убедительно показано, что установка на поверхности виброисточника и продолжительная его работа в течение нескольких месяцев ведет к существенному повышению нефтеотдачи нефтяного пласта. В ряде случаев эффект достигает 40%. Механизмы и процессы, ведущие к такому повышению нефтеотдачи, остаются и на сегодня неясными. В частности, не понятно, каким образом энергия упругих волн, сгенерированных виброисточником, достигает значительных глубин (1 километр и более), избегая существенного рассеяния. Виброисточник с характерной мощностью 30 кВт и пятном контакта с породой порядка 1 м^2 генерирует упругую волну. Если порода однородная, то энергия виброисточника рассеивается по полусфере и на глубинах порядка 1 км плотность энергии упругих волн убывает в 10^6 раз даже при отсутствии поглощения в породе. Ожидать, что упругая волна такой малой плотности энергии вызовет какие-то значимые процессы в нефтеносном пласте, не приходится. Поскольку эффект увеличения нефтеотдачи в результате продолжительной работы поверхностного виброисточника многократно зафиксирован, то следует предположить, что при определенных условиях упругие волны распространяются в геологической породе, избегая существенного рассеяния. Мы попытались методами математического моделирования исследовать вопрос, может ли наличие трещин в геологической породе, в которых соприкасающиеся части могут смещаться друг относительно друга, приводить к тому, что упругая волна, сгенерированная виброисточником, не рассеивается по полусфере, а распространяется достаточно узким пучком так, что и на существенных глубинах ее плотность энергии остается значимой, чтобы вызвать те или иные физико-химические процессы.

Состояние геологической породы, в которой распространяется упругая волна, описывается векторным полем скорости смещений и тензором напряжений. Поскольку на трещине может происходить смещение частей породы друг относительно друга, то следовательно, при переходе через границу компоненты вектора скорости смещений и тензора напряжений могут претерпевать разрывы. Конечно, эти разрывы не могут быть произвольными, а обязаны удовлетворять определенным условиям, отражающим физические условия на границе соприкасающихся сред. Поскольку части геологической породы могут смещаться друг относительно друга только вдоль трещины, то компоненты вектора скорости смещений, направленные вдоль нормали к границе должны быть непрерывными при переходе через границу. Также в силу третьего закона Ньютона сила, действующая со стороны одной части породы на другую, равна и противоположно направлена силе, действующей со стороны второй части породы на первую. То есть нормальные к границе компоненты тензора напряжений должны быть равны по обе стороны границы. Если проскальзывание происходит без трения, то тангенциальные компоненты тензора напряжений должны быть равны нулю по обе стороны границы.

С другой стороны, всюду, кроме трещины, разделяющей части породы, геологическая порода является сплошной. Следовательно вектор смещений должен быть всюду (кроме трещины) непрерывным. Также требование выполнения третьего закона Ньютона в любом сечении ведет к непрерывности тензора напряжений. То есть всюду, кроме трещины, и вектор смещений и тензор напряжений непрерывны.

Исходя из сказанного, рассмотрим задачу: необходимо найти решение задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{A}_i \frac{\partial \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \tag{1}$$

с начальными данными

$$\boldsymbol{u}(t=0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

которые всюду непрерывны, кроме гиперплоскости Γ: $x_1 = 0$. Решение должно быть всюду непрерывным, кроме гиперплоскости Γ. Также должны выполняться заданные соотношения (условия сопряжения), связывающие значения переменных по обе стороны гиперплоскости Г:

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}(t, x_1 = -0, x_2, \ldots, x_N) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}(t, x_1 = +0, x_2, \ldots, x_N) = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Сформулированную постановку будем, следуя [5], называть обобщенной задачей Римана о распаде разрыва с условиями сопряжения на границах.

В случае одной пространственной переменной различными авторами [5–8] предложен ряд методов решения задачи Римана. По сути, все эти методы связаны с наличием у гиперболических систем характеристик. В случае многих пространственных переменных методы, основанные на наличии характеристик, уже не работают. И задача Римана чаще всего решается в предположении, что вблизи разрыва решение представляет собой плоскую волну, движущуюся вдоль нормали к поверхности разрыва [5,8,9]. Понятно, что такой подход далеко не во всех случаях является обоснованным.

В работе сформулирована постановка обобщенной задачи Римана о распаде разрыва с условиями сопряжения на границах для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с произвольным количеством пространственных переменных и приведен алгоритм построения ее решения. Этот алгоритм основан на нахождении фундаментального решения оператора задачи. Построенное решение обобщенной задачи Римана ляжет в основу вычислительного алгоритма нахождения приближенного решения начально-краевой задачи для описанного класса систем дифференциальных уравнений.

2. Обобщенные вектор-функции. В дальнейшем изложении будут использоваться понятия и утверждения теории обобщенных функций, изложение которой можно найти, например, в [2–4] или [1].

Определим пространство основных вектор-функций $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^N)$. Элементами этого пространства будут M-мерные вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_M)$, компоненты которых $\varphi_1(\boldsymbol{y}), \ldots, \varphi_M(\boldsymbol{y})$ принадлежат пространству $S(\mathbb{R}^N)$, которое состоит из функций класса $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, убывающих при $|y| \to \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|y|^{-1}$.

Определение 1. Обобщенными вектор-функциями $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_M) \in \boldsymbol{S'}(\mathbb{R}^N)$ будем называть линейные непрерывные функционалы на векторном основном пространстве $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^N)$. При этом функционал $\boldsymbol{f}$ действует на основную вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_M)$ по формуле $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}) = (f_1, \varphi_1) + \ldots + (f_M, \varphi_M)$.

Определение 2. Обобщенным решением для системы уравнений

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{A}_i \frac{\partial \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

будем называть обобщенную функцию $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{S'}(\mathbb{R}^{N+1})$, удовлетворяющую этому уравнению в обобщенном смысле, т. е. для произвольной основной функции $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}^{N+1})$ выполняется равенство

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi}\right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{A}_i \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}, \boldsymbol{\varphi}\right) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi})$$

$\boldsymbol{A}_i$ — матрицы коэффициентов системы уравнений (4), размера $(M \times M)$.

В дальнейшем будем полагать, что каждая из матриц $\boldsymbol{A}_i$ имеет полный набор левых собственных векторов и, следовательно, представима в виде

$$\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{\Lambda}_i \boldsymbol{\Omega}_i, \tag{5}$$

$\boldsymbol{\Lambda}_i$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $\boldsymbol{A}_i$, упорядоченных по не убыванию, $\boldsymbol{\Omega}_i$ — матрица, строки которой являются левыми собственными векторами матрицы $\boldsymbol{A}_i$, соответствующие собственным числам $\boldsymbol{\Lambda}_i$, $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{\Omega}_i^{-1}$ — матрица, столбцы которой являются правыми собственными векторами матрицы $\boldsymbol{A}_i$.

Определение 3. Фундаментальным решением оператора задачи (4) или матрицей-функцией Грина называется обобщенная матрица-функция $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{S'}(\mathbb{R}^{N+1})$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{A}_i \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x_i} = \boldsymbol{I}\delta(t,\boldsymbol{x}), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{I}$ — единичная диагональная матрица $(M \times M)$.

Определение 4. Сверткой $\boldsymbol{G} * \boldsymbol{f}$ обобщенной матрицы-функции $\boldsymbol{G} = G_{ij} \in \boldsymbol{S'}$ и обобщенной вектор-функции $\boldsymbol{f} = f_j \in \boldsymbol{S'}$ будем называть такую обобщенную вектор-функцию $\boldsymbol{u} = u_i \in \boldsymbol{S'}$, что

$$u_i = \sum_{j=1}^{M} G_{i,j} * f_j,$$

где $G_{i,j} * f_j$ — свертка $G_{i,j}$ и f_j, рассматриваемых как обобщенные функции из S'.

Сформулируем несколько лемм, доказательство которых приведено в [6].

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{S'}$ таково, что свертка $\boldsymbol{G} * \boldsymbol{f}$ существует в $\boldsymbol{S'}$. Тогда решение уравнения (4) существует в $\boldsymbol{S'}$ и дается формулой*

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G} * \boldsymbol{f}. \tag{7}$$

Это решение единственно в классе тех функций из $\boldsymbol{S'}$, для которых существует свертка с $\boldsymbol{G}$.

Лемма 2. *Пусть $u(\boldsymbol{x})$ — локально интегрируемая функция в $\mathbb{R}^N$. Тогда*

$$\theta(t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}t) * u(\boldsymbol{x})\delta(t) = \theta(t)u(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}t)$$

Замечание 1. Как следует из доказанной леммы, значение свертки $\theta(t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}t) * u(\boldsymbol{x})\delta(t)$ в точке $(\boldsymbol{x},t)$ равно значению функции $u(\boldsymbol{x})$ в точке пересечения прямой $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{a}$, проведенной через точку $(\boldsymbol{x},t)$, с гиперплоскостью $t = 0$.

Лемма 3. *Пусть $v(t,\boldsymbol{x})$ — локально интегрируемая функция в $\mathbb{R}^{N+1}$ и $v(t,\boldsymbol{x}) = 0$ при $t \leqslant 0$, тогда если $a_1 \neq 0$, то*

$$\theta(t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}t) * v(t,\boldsymbol{x})\delta(x_1) = \frac{1}{|a_1|}\theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right) v\left(t - \frac{x_1}{a_1}, \boldsymbol{x} - \frac{x_1}{a_1}\boldsymbol{a}\right),$$

если $a_1 = 0$, то

$$\theta(t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}t) * v(t,\boldsymbol{x})\delta(x_1) = 0.$$

Замечание 2. Проведем через точку $(t > 0, \boldsymbol{x})$ прямую линию $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{a}$. Эта прямая пересекает гиперплоскость $x_1 = 0$ в момент времени $t^* = t - x_1/a_1$. Если этот момент времени лежит вне интервала $0 \leqslant t^* \leqslant t$, то $\theta(t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}t) * \theta(t)v(t,\boldsymbol{x})\delta(x_1) = 0$ в точке $(t > 0, \boldsymbol{x})$.

3. Фундаментальное решение. Построим фундаментальное решение оператора задачи (4). Обозначим через $\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{\xi}) = F_{\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{G}]$ — преобразование Фурье $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x})$ по пространственным переменным. Выполним преобразование Фурье уравнений (6) по пространственным переменным. Учитывая, что $F_{\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{G}] = -i\xi_j F_{\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{G}]$, для обобщенной функции $\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{\xi})$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} - i\sum_{j=1}^{N} \xi_j \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}\delta(t). \tag{8}$$

Решение уравнения (8) имеет вид

$$\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{\xi}) = \theta(t)\exp\left(i\sum_{j=1}^{N} \xi_j \boldsymbol{A}_j t\right),$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

По определению матричной экспоненты

$$\exp\left(i\sum_{j=1}^{N}\xi_j \boldsymbol{A}_j t\right) = \prod_{j=1}^{N}\exp(i\xi_j\boldsymbol{A}_j t) + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\alpha}}\prod_{j=1}^{N}(-i\xi_j)^{\alpha_j}.$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ — целочисленный вектор с неотрицательными составляющими α_j (мультииндекс), $|\boldsymbol{\alpha}| = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_N)$, $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$ — матрицы размера $M \times M$, являющиеся полиномами матриц $\boldsymbol{A}_j$ степени $|\boldsymbol{\alpha}|$. Учтем (5); тогда

$$\exp(i\xi_j\boldsymbol{A}_j t) = \boldsymbol{R}_j\exp(i\xi_j\boldsymbol{\Lambda}_j t)\boldsymbol{\Omega}_j.$$

Следовательно,

$$\exp\left(i\sum_{j=1}^{N}\xi_j \boldsymbol{A}_j t\right) = \prod_{j=1}^{N}\boldsymbol{R}_j\exp(i\xi_j\boldsymbol{\Lambda}_j t)\boldsymbol{\Omega}_j + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\alpha}}\prod_{j=1}^{N}(-i\xi_j)^{\alpha_j}.$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получим матрицу-функцию Грина

$$\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}) = \theta(t)\left(\prod_{j=1}^{N}\boldsymbol{R}_j\delta(\boldsymbol{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)\boldsymbol{\Omega}_j + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\alpha}}D^{\boldsymbol{\alpha}}\delta(\boldsymbol{x})\right).$$

Здесь $\delta\big(\boldsymbol{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t\big)$ — диагональные матрицы, в k-й строке которых стоит обобщенная функция $\delta\big(x_j - \lambda_j^k t\big)$, λ_j^k — k-е собственное число матрицы $\boldsymbol{A}_j$,

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}$$

— оператор дифференцирования по пространственным переменным.

Рассмотрим сомножитель $\boldsymbol{R}_j\delta(\boldsymbol{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)\boldsymbol{\Omega}_j$. Обозначим через $\boldsymbol{D}^k$ квадратную матрицу размера $M \times M$, все элементы которой равны 0, кроме k-го элемента главной диагонали, равного 1. Тогда

$$\boldsymbol{R}_j\delta(\boldsymbol{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)\boldsymbol{\Omega}_j = \sum_{k=1}^{M}\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{D}^k\boldsymbol{\Omega}_j\delta\big(x_j - \lambda_j^k t\big) = \sum_{k=1}^{M}\boldsymbol{C}_j^k\delta\big(x_j - \lambda_j^k t\big).$$

Следовательно,

$$\prod_{j=1}^{N}\boldsymbol{R}_j\delta(\boldsymbol{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)\boldsymbol{\Omega}_j = \sum_{k_1=1}^{M}\sum_{k_2=1}^{M}\ldots\sum_{k_N=1}^{M}\boldsymbol{C}_1^{k_1}\boldsymbol{C}_2^{k_2}\ldots\boldsymbol{C}_N^{k_N}\delta\big(x_1 - \lambda_1^{k_1}t\big)\delta\big(x_2 - \lambda_2^{k_2}t\big)\ldots\delta\big(x_N - \lambda_N^{k_N}t\big).$$

Если ввести мультииндекс $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_N)$, т.е. целочисленный вектор с составляющими $k_j = 1, \ldots, M$, многоиндексный массив матриц $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{C}_1^{k_1}\boldsymbol{C}_2^{k_2}\ldots\boldsymbol{C}_N^{k_N}$, многоиндексный массив векторов $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} = \big(\lambda_1^{k_1}, \lambda_2^{k_2}, \ldots, \lambda_N^{k_N}\big)$, то

$$\prod_{j=1}^{N}\boldsymbol{R}_j\delta(\boldsymbol{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)\boldsymbol{\Omega}_j = \sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}t).$$

Тогда

$$\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}) = \theta(t)\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}t) + \boldsymbol{O}(t^2).$$

В случае двух пространственных переменых

$$\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}) = \theta(t)\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{C}_1^{k_1}\boldsymbol{C}_2^{k_2}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}t) + \frac{\theta(t)}{2}t^2(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)\frac{\partial^2\delta(\boldsymbol{x})}{\partial x_1\partial x_2} + \boldsymbol{O}(t^3). \tag{9}$$

Если поменять нумерацию пространственных переменных, то можем записать

$$\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}) = \theta(t)\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{C}_2^{k_2}\boldsymbol{C}_1^{k_1}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}t) - \frac{\theta(t)}{2}t^2(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)\frac{\partial^2\delta(\boldsymbol{x})}{\partial x_1\partial x_2} + \boldsymbol{O}(t^3). \tag{10}$$

Сопоставляя (9) и (10), получаем

$$\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}) = \theta(t)\sum_{\boldsymbol{k}} \bar{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{k}}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}t) + \boldsymbol{O}(t^3);$$

здесь использовано обозначение $\bar{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{k}} = (\boldsymbol{C}_1^{k_1}\boldsymbol{C}_2^{k_2} + \boldsymbol{C}_2^{k_2}\boldsymbol{C}_1^{k_1})/2$.

Обратим внимание на следующий факт, который будет использован в дальнейшем. Поскольку $\boldsymbol{C}^{k_j} = \boldsymbol{R}_j\boldsymbol{D}^{k_j}\boldsymbol{\Omega}_j$, то

$$\sum_{k_j=1}^{M}\boldsymbol{C}^{k_j} = \boldsymbol{R}_j\left(\sum_{k_j=1}^{M}\boldsymbol{D}^{k_j}\right)\boldsymbol{\Omega}_j = \boldsymbol{R}_j\boldsymbol{I}\boldsymbol{\Omega}_j = \boldsymbol{I}. \tag{11}$$

4. Задача Римана. Пусть $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ — решение задачи Римана (1), (2), (3). Введем обозначение

$$\mathbf{yv}(t,\boldsymbol{x}) = \theta(t)(\boldsymbol{u}(t,x_1=+0,x_2,\dots,x_N) - \boldsymbol{u}(t,x_1=-0,x_2,\dots,x_N)).$$

Покажем, что $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$, рассматриваемая как обобщенная функция из $\boldsymbol{S'}$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{A}_i\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_i} = \boldsymbol{u}_0\delta(t) + \boldsymbol{A}_1\mathbf{yv}\delta(x_1). \tag{12}$$

Действительно, при всех $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{S}$ имеем цепочку равенств:

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{A}_i\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_i},\boldsymbol{\varphi}\right) = -\int\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial t}\boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial x_i}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{u}\right)dt\,d\boldsymbol{x} = \dots$$

$$\dots = \int\left(\boldsymbol{\varphi}^T\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{A}_i\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right)\right)dt\,d\boldsymbol{x} + \int(\boldsymbol{\varphi}^T(0,\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(0,\boldsymbol{x}))\,d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma}(\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{A}_1\mathbf{yv})\,dt\,d\Gamma,$$

откуда и вытекает равенство (12).

Решение уравнения (12) представимо в виде свертки

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G} * \boldsymbol{u}_0\delta(t) + \boldsymbol{G} * \boldsymbol{A}_1\mathbf{yv}\delta(x_1).$$

На основании лемм 2 и 3 для точек $\boldsymbol{x} = (x_1 \leqslant 0, x_2,\dots,x_N)$, лежащих в левой полуплоскости, с точностью до $\boldsymbol{O}(t^2)$ можем записать

$$\boldsymbol{u}(t,x_1\leqslant 0,x_2,\dots,x_N) = \sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}t) - \sum_{\boldsymbol{k}:x_1>\lambda_-^{k_1}t}\frac{\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{A}_1}{\lambda^{k_1}}\mathbf{yv}\left(t-\frac{x_1}{\lambda^{k_1}},\boldsymbol{x}-\frac{x_1}{\lambda^{k_1}}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}\right). \tag{13}$$

Переходя в (13) к пределу $x_1 \to -0$, получаем

$$\boldsymbol{u}(t,x_1=-0,x_2,\dots,x_N) = \sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{u}_0(-\lambda^{\mathbf{k_1}}\mathbf{t},\mathbf{x_2}-\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k_2}}\mathbf{t},\dots,\mathbf{x_N}-\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k_N}}\mathbf{t}) - \sum_{\boldsymbol{k}:\lambda^{\mathbf{k_1}}<\mathbf{0}}\frac{\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{A}_\mathbf{1}}{\lambda^{\mathbf{k_1}}}\mathbf{yv}. \tag{14}$$

Учитывая (11), имеем

$$\sum_{\boldsymbol{k}:\lambda^{k_1}<0}\frac{1}{\lambda^{k_1}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{A}_1 = \sum_{k_1:\lambda^{k_1}<0}\frac{1}{\lambda^{k_1}}\boldsymbol{C}^{k_1}\boldsymbol{A}_1.$$

Поскольку $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Omega}_1$ и $\boldsymbol{C}^{k_1} = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{D}^{k_1}\boldsymbol{\Omega}_1$, то $(1/\lambda^{k_1})\boldsymbol{C}^{k_1}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{C}^{k_1}$. Равенство (14) принимает вид

$$\boldsymbol{u}(t,x_1=-0,x_2,\dots,x_N) = \sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{u}_0\left(-\boldsymbol{\lambda}^{k_1}t,x_2-\boldsymbol{\lambda}^{k_2}t,\dots,x_N-\boldsymbol{\lambda}^{k_N}t\right) - \sum_{k_1:\lambda^{k_1}<0}\boldsymbol{C}^{k_1}\mathbf{yv}. \tag{15}$$

Аналогично, для точек $\boldsymbol{x} = (x_1 \geqslant 0, x_2, \ldots, x_N)$, лежащих в правой полуплоскости, с точностью до $\boldsymbol{O}(t^2)$ можем записать

$$\boldsymbol{u}(t, x_1 \geqslant 0, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} t) + \sum_{\boldsymbol{k}: x_1 < \lambda_-^{k_1} t} \frac{\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{A}_1}{\lambda^{k_1}} \mathbf{yv} \left(t - \frac{x_1}{\lambda^{k_1}}, \boldsymbol{x} - \frac{x_1}{\lambda^{k_1}} \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} \right). \tag{16}$$

Переходя в (16) к пределу $x_1 \to +0$, аналогично (15) получаем

$$\boldsymbol{u}(t, x_1 = +0, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{u}_0(-\boldsymbol{\lambda}^{k_1} t, x_2 - \boldsymbol{\lambda}^{k_2} t, \ldots, x_N - \boldsymbol{\lambda}^{k_N} t) + \sum_{k_1: \lambda^{k_1} > 0} \boldsymbol{C}^{k_1} \mathbf{yv}. \tag{17}$$

Подставим выражения (15) и (17) в условия сопряжения (3). Получим систему уравнений, которым должен удовлетворять скачок переменных $\mathbf{yv}(t, \boldsymbol{x})$ при переходе через гиперплоскость $\Gamma = \{x_1 = 0\}$:

$$\sum_{k_1: \lambda^{k_1} > 0} \boldsymbol{P} \boldsymbol{C}^{k_1} \mathbf{yv} - \sum_{k_1: \lambda^{k_1} < 0} \boldsymbol{L} \boldsymbol{C}^{k_1} \mathbf{yv} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}}. \tag{18}$$

Здесь

$$\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}} = -\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{u}_0\big(+0 - \boldsymbol{\lambda}^{k_1} t, x_2 - \boldsymbol{\lambda}^{k_2} t, \ldots, x_N - \boldsymbol{\lambda}^{k_N} t \big) - \\ - \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{L} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{u}_0\big(-0 - \boldsymbol{\lambda}^{k_1} t, x_2 - \boldsymbol{\lambda}^{k_2} t, \ldots, x_N - \boldsymbol{\lambda}^{k_N} t \big).$$

Вычтем из уравнения (17) уравнение (15). Получим систему уравнений, которым также должен удовлетворять скачок значений переменных: $\mathbf{yv}(t, \boldsymbol{x})$

$$\sum_{k_1: \lambda^{k_1} = 0} \boldsymbol{C}^{k_1} \mathbf{yv} = \sum_{\boldsymbol{k}: \lambda^{k_1} = 0} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{d}^{\boldsymbol{k}}; \tag{19}$$

здесь

$$\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{u}_0(+0, x_2 - \boldsymbol{\lambda}^{k_2} t, \ldots, x_N - \boldsymbol{\lambda}^{k_N} t) - \boldsymbol{u}_0(-0, x_2 - \boldsymbol{\lambda}^{k_2} t, \ldots, x_N - \boldsymbol{\lambda}^{k_N} t).$$

Количество линейно независимых уравнений системы (19) равно кратности нулевого собственного числа матрицы $\boldsymbol{A}_1$. Умножим равенство (19) на левые собственные векторы-строки матрицы $\boldsymbol{A}_1$, соответствующие нулевому собственному числу:

$$\boldsymbol{l}^{k_1} \mathbf{yv} = \sum_{\boldsymbol{k}: \lambda^{k_1} = 0} \boldsymbol{l}^{k_1} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{d}^{\boldsymbol{k}}, \quad k_1 \text{ таково, что } \lambda^{k_1} = 0. \tag{20}$$

Объединим равенства (18) и (20), получим систему линейных алгебраических уравнений, которым должен удовлетворять скачок переменных $\mathbf{yv}(t, \boldsymbol{x})$ при переходе через гиперплоскость $\Gamma = \{x_1 = 0\}$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k_1: \lambda^{k_1} > 0} \boldsymbol{P} \boldsymbol{C}^{k_1} \mathbf{yv} - \sum_{k_1: \lambda^{k_1} < 0} \boldsymbol{L} \boldsymbol{C}^{k_1} \mathbf{yv} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}}, \\ \boldsymbol{l}^{k_1} \mathbf{yv} = \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}: \lambda^{k_1} = 0} \boldsymbol{l}^{k_1} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{d}^{\boldsymbol{k}}, \quad k_1 \text{ таково, что } \lambda^{k_1} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Для однозначного решения обобщенной задачи Римана о распаде разрыва с условиями сопряжения на границе необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (21) имела единственное решение. Решим систему уравнений (21) и определим значение $\mathbf{yv}(t, \boldsymbol{x})$. Формулы (13) и (16) с полученными зависимостями $\mathbf{yv}(t, \boldsymbol{x})$ дают полное решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для случая многих пространственных переменных.

Построенное приближение решения обобщенной задачи Римана с дополнительными условиями сопряжения на разрыве в случае одной пространственной переменой является точным. Также это решение будет точным и в случае многих пространственных переменных, если начальные данные заданы линейными функциями по обе стороны гиперплоскости $\Gamma = \{x_1 = 0\}$.

Для точек, не лежащих на внутренних или внешних границах, при достаточно малых $t > 0$, в соответствии с формулами (13) и (16)

$$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} t) + \boldsymbol{O}(t^2).$$

Обозначим через $\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}/|\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}|$ единичный вектор вдоль направления $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}$. Тогда

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(t=+0,\boldsymbol{x}) = -\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}} \left(\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}(\boldsymbol{x} - 0 \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}) \right);$$

здесь

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(t=+0,\boldsymbol{x}) = \lim_{t\to+0} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}), \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}(\boldsymbol{x} - 0 \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}) = \lim_{t\to+0} \frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} t).$$

Последнее равенство позволяет утверждать, что в указанных точках выполняется равенство

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) = -\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}} \left(\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}(t, \boldsymbol{x} - 0 \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}) \right). \tag{22}$$

Для точек, лежащих на внутренних границах, введем обозначения

$$\boldsymbol{u}_-(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(t, x_1 = -0, x_2, \ldots, x_N), \quad \boldsymbol{u}_+(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(t, x_1 = +0, x_2, \ldots, x_N).$$

В соответствии с описанным выше алгоритмом, решение задачи Римана по обе стороны границы можно выразить в виде линейной комбинации значений $\boldsymbol{u}_0$ в близлежащих точках

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_-(t,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{S}_-^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} t) + \boldsymbol{O}(t^2), \\ \boldsymbol{u}_+(t,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{S}_+^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} t) + \boldsymbol{O}(t^2). \end{cases}$$

$\boldsymbol{S}_-^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{S}_+^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ — матрицы коэффициентов этих линейных комбинаций, получаемые в результате решения задачи Римана. В этих матрицах указана зависимость от точки на внутренней границе, поскольку на разных частях границы могут быть поставлены различные условия сопряжения. Тогда, аналогично (22), в точках внутренних границ выполняются равенства

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_-}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) = -\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{S}_-^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \left(\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}(t, \boldsymbol{x} - 0 \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}) \right), \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_+}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) = -\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{S}_+^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \left(\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}(t, \boldsymbol{x} - 0 \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}) \right). \end{cases} \tag{23}$$

5. Граничные условия. Рассмотрим еще одну задачу, которая далее будет использована при построении вычислительного алгоритма. Необходимо найти в полупространстве $x_1 \leqslant 0$ решение начально-краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами (1), с начальными данными (2). Решение должно быть непрерывным в полупространстве $x_1 \leqslant 0$ и удовлетворять заданным граничным условиям на гиперплоскости $\Gamma = \{x_1 = 0\}$:

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x} \in \Gamma) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x} \in \Gamma). \tag{24}$$

Полагаем, что начальные данные удовлетворяют граничным условиям. Эту задачу будем называть обобщенной задачей Римана с граничными условиями.

Пусть $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ — решение этой задачи. Доопределим $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ нулем для $t < 0$ и $t \geqslant 0$, $x_1 > 0$. Также доопределим нулем $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$ для $x_1 > 0$. Обозначим $\mathbf{yv}(t,\boldsymbol{x}) = -\theta(t)\boldsymbol{u}(t, x_1 = -0, x_2, \ldots, x_N)$.

Как было показано выше, $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$, рассматриваемая как обобщенная функция из $\boldsymbol{S'}$, удовлетворяет уравнению (12). Решение этого уравнения задается формулой (13). Вектор $\mathbf{yv}(t,\boldsymbol{x})$ с точностью $\boldsymbol{O}(t^2)$ удовлетворяет равенствам (15), которые можно переписать в виде

$$-\sum_{k_1:\lambda^{k_1}\geqslant 0} \boldsymbol{C}^{k_1} \mathbf{yv} = \sum_{\boldsymbol{k}:\lambda^{k_1}\geqslant 0} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{u}_0(-\boldsymbol{\lambda}^{k_1} t, x_2 - \boldsymbol{\lambda}^{k_2} t, \ldots, x_N - \boldsymbol{\lambda}^{k_N} t). \tag{25}$$

Количество линейно независимых уравнений системы (25) равно количеству линейно независимых собственных векторов матрицы $\boldsymbol{A}_1$, соответствующих неотрицательным собственным числам. Умножим равенство (25) на левые собственные векторы-строки матрицы $\boldsymbol{A}_1$, соответствующие неотрицательным собственным числам

$$-\boldsymbol{l}^{k_1}\mathbf{yv} = \sum_{\boldsymbol{k}:\lambda^{k_1}\geqslant 0} \boldsymbol{l}^{k_1}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{u}_0(-\boldsymbol{\lambda}^{k_1}t, x_2-\boldsymbol{\lambda}^{k_2}t,\ldots,x_N-\boldsymbol{\lambda}^{k_N}t), \quad k_1 \text{ таково, что } \lambda^{k_1}\geqslant 0. \tag{26}$$

Объединим равенства (26) и (24), получим систему линейных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять значения решения задачи на границе $\Gamma=\{x_1=0\}$:

$$\begin{cases} -\boldsymbol{l}^{k_1}\mathbf{yv} = \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}:\lambda^{k_1}\geqslant 0} \boldsymbol{l}^{k_1}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{u}_0(-\boldsymbol{\lambda}^{k_1}t, x_2-\boldsymbol{\lambda}^{k_2}t,\ldots,x_N-\boldsymbol{\lambda}^{k_N}t), & k_1 \text{ таково, что } \lambda^{k_1}\geqslant 0,\\ \boldsymbol{L}\mathbf{yv} = -\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}\in\Gamma). \end{cases} \tag{27}$$

Решим систему уравнений (27) и определим значение $\mathbf{yv}(t,\boldsymbol{x})$ при $t>0$ на гиперплоскости $x_1=0$. Формулы (13) с полученными зависимостями $\mathbf{yv}(t,\boldsymbol{x})$ дают полное решение обобщенной задачи Римана с граничными условиями для случая многих пространственных переменных с точностью до $\boldsymbol{O}(t^2)$. Опять же, если начальные данные $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$ являются линейными функциями, то полученное решение является точным решением этой задачи.

В частности, если граничные условия имеют вид

$$\sum_{\boldsymbol{k}:\lambda^{-}_{k_1}<0} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}\mathbf{yv} = \boldsymbol{0},$$

что означает, что любые волны проходят через границу, не отражаясь, то такие условия называются «прозрачными». В этом случае, если умножить уравнения граничных условий слева на левые собственные векторы-строки матрицы $\boldsymbol{A}_1$, то система уравнений (27) принимает вид

$$\begin{cases} -\boldsymbol{l}^{k_1}\mathbf{yv} = \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}:\lambda^{k_1}\geqslant 0} \boldsymbol{l}^{k_1}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{u}_0(-\boldsymbol{\lambda}^{k_1}t, x_2-\boldsymbol{\lambda}^{k_2}t,\ldots,x_N-\boldsymbol{\lambda}^{k_N}t), & k_1 \text{ таково, что } \lambda^{k_1}\geqslant 0,\\ \boldsymbol{l}^{k_1}\mathbf{yv} = \boldsymbol{0}, & k_1 \text{ таково, что } \lambda^{k_1}< 0. \end{cases} \tag{28}$$

Поскольку система уравнений (1) гиперболична и матрица $\boldsymbol{A}_1$ имеет полный набор линейно независимых левых собственных векторов, система уравнений (28) совместна и обобщенная задача Римана с прозрачными граничными условиями имеет единственное решение.

Итак, для точек $\boldsymbol{x}\in\Gamma$, лежащих на внешних границах, в соответствии с описанным выше алгоритмом, решение задачи можно выразить в виде линейной комбинации значений $\boldsymbol{u}_0$ в близлежащих точках и линейной комбинации компонент вектора $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{u} = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}t) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{O}(t^2),$$

где $\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ — матрицы коэффициентов этих линейных комбинаций, получаемые в результате решения задачи. Тогда, аналогично (22), в точках внешних границ выполняются равенства

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) = -\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}(\boldsymbol{x}-0\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}})\right) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}). \tag{29}$$

6. Распространение упругих волн в блочно-трещиноватой среде. Построение вычислительного алгоритма, основанного на приведенных выше результатах, продемонстрируем на задаче распространения упругих волн в неоднородной блочно-трещиноватой среде.

6.1. Математическая модель. Систему уравнений, описывающую распространение упругих волн, для случая двух пространственных переменных, следуя [8], можно записать в виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{11} - (\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}v_1 - \lambda\frac{\partial}{\partial x_2}v_2 = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{22} - \lambda\frac{\partial}{\partial x_1}v_1 - (\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}v_2 = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{12} - \mu\frac{\partial}{\partial x_1}v_2 - \mu\frac{\partial}{\partial x_2}v_1 = 0,\\
&\rho\frac{\partial}{\partial t}v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11} - \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{1\,2} = 0,\\
&\rho\frac{\partial}{\partial t}v_2 - \frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{12} - \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{2\,2} = 0,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

где λ и μ коэффициенты Ламе, ρ массовая плотность среды, σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} компоненты тензора напряжений, v_1, v_2 компоненты вектора скорости смещений. Введя вектор переменных $\boldsymbol{u} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, v_1, v_2)^T$ и матрицы

$$
\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(\lambda+2\mu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu\\ -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda+2\mu)\\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

эту систему уравнений можно записать в виде (1).

Система уравнений (30) является гиперболической, матрицы $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ имеют полный набор линейно независимых собственных векторов и представимы в виде (5).

Далее все размерные величины заданы в системе единиц СИ. Поставим для этой системы уравнений следующую задачу. В области $\Omega = \{-30 < x_1 < 30,\ -600 < x_2 < 0\}$ необходимо найти решение начально-краевой задачи для системы уравнений (30). Уравнения (30) должны выполняться всюду в Ω, кроме внутренних границ Γ_γ, $\gamma = 1, 2$, задаваемых условием $\Gamma_1 = \{x_1 = -15\}$ и $\Gamma_2 = \{x_1 = 15\}$. На этих границах должны выполняться «условия проскальзывания без трения», состоящие в том, что при переходе через эти границы непрерывны нормальные к границам компоненты вектора смещений, нормальные к границе компоненты силы с разных сторон границы равны по величине и противоположно направлены, тангенциальные компоненты сил, действующих по обе стороны границы, равны 0:

$$
\begin{aligned}
v_1\left(t, \boldsymbol{x}\in\Gamma_\gamma^-\right) - v_1\left(t, \boldsymbol{x}\in\Gamma_\gamma^+\right) = 0, &\qquad \sigma_{12}\left(t, \boldsymbol{x}\in\Gamma_\gamma^-\right) = 0,\\
\sigma_{11}\left(t, \boldsymbol{x}\in\Gamma_\gamma^-\right) - \sigma_{11}\left(t, \boldsymbol{x}\in\Gamma_\gamma^+\right) = 0, &\qquad \sigma_{12}\left(t, \boldsymbol{x}\in\Gamma_\gamma^+\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

На внешних границах $x_1 = -30$, $x_2 = -600$, $x_1 = 30$ должны выполняться прозрачные граничные условия. На границе $x_2 = 0$ работает источник вибровоздействия, который действует на геологическую среду с усилием $F_j \sin\omega t$, $j = 1, 2$. Это усилие распределено по границе с плотностью $P_j(x_1)\sin\omega t$, так что

$$\int P_j dx_1 = F_j.$$

В соответствии с третьим законом Ньютона во всех точках этой границы должны выполняться условия

$$\sigma_{12} = -P_1 \sin\omega t, \quad \sigma_{22} = -P_2 \sin\omega t. \tag{32}$$

6.2. Численный алгоритм. Внутренними границами область Ω разбивается на подобласти

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \big\{-30 < x_1 < -15,\ -600 < x_2 < 0\big\};\\
\Omega_2 &= \big\{-15 < x_1 < 15,\ -600 < x_2 < 0\big\};\\
\Omega_3 &= \big\{15 < x_1 < 30,\ -600 < x_2 < 0\big\}.
\end{aligned}
$$

Построим в каждой из подобластей прямоугольную сетку со сторонами, параллельными осям координат, так, чтобы узлы, лежащие на внутренних границах, совпадали для обеих прилегающих подобластей. Сетку строим равномерной по каждой из координат и h_j, $j = 1, 2$, шаг сетки по соответствующим направлениям. Пусть индекс $p1$ нумерует узлы сетки в первой подобласти Ω_1, индекс $p2$ нумерует узлы во второй подобласти Ω_2 и индекс $p3$ нумерует узлы сетки в третьей подобласти Ω_3. Далее для нумерации узлов сетки в подобласти будем использовать, там где это не вызовет недоразумения, индекс p, каждый раз подразумевая, что в каждой подобласти этот индекс пробегает свой набор значений.

Будем полагать, что усилие, создаваемое виброисточником, направлено по вертикали, т. е. $P_1(x_1) = 0$, а распределение $P_2(x_1)$ является кусочно линейной функцией, равной 0 во всех узлах границы $x_2 = 0$, кроме узла с координатами $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. В этом узле P_1 принимает значение F_2/h_1.

В каждой подобласти построим систему базисных полиномов $H_p(\boldsymbol{x})$, каждый из которых равен 1 в узле, соответствующем индексу p, равен 0 во всех остальных узлах сетки и в каждой ячейке сетки является билинейной (линейной по каждой переменой) функцией.

Решение в каждой подобласти будем аппроксимировать линейной комбинацией

$$\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) = \sum_p H_p(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}^p(t).$$

Как следует из результатов приведенных в предыдущих главах и отраженных в формулах (22), (23) и (29), функции $\boldsymbol{u}^p(t)$ удовлетворяют системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^p}{\partial t}(t) = -\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}^p) \sum_r \left(\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}(\boldsymbol{x}^p - 0 \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}) \right) \boldsymbol{u}^r(t) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}^p) \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}^p).$$

Добавляя к этой системе ОДУ начальные условия

$$\boldsymbol{u}^p(t = 0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}^p),$$

получаем задачу Коши для системы ОДУ. Решая эту систему тем или иным численным методом, находим значение $\boldsymbol{u}^p(t)$ в произвольный момент времени t и по формулам

$$\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) = \sum_p H_p(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}^p(t)$$

определяем приближенное решение исходной начально-краевой задачи.

На основании изложенного выше был построен вычислительный алгоритм и реализован в системе Mathlab. Проведенные расчеты показали высокую эффективность этого алгоритма. Выполненные расчеты позволили подтвердить гипотезу, что наличие трещин в геологической породе, в которых соприкасающиеся части могут смещаться друг относительно друга, может приводить к тому, что упругая волна, сгенерированная виброисточником, не рассеивается по полусфере, а распространяется достаточно узким пучком так, что и на существенных глубинах ее плотность энергии остается значимой, чтобы вызвать те или иные физико-химические процессы. Внутренние границы (трещины) ведут себя как стенки волновода. Упругая волна практически не проходит сквозь них, и возмущение источника достигает значительной глубины без рассеяния. Эти и другие результаты вычислительных экспериментов будут подробно изложены в последующих публикациях.

7. Заключение. В работе для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, с произвольным количеством пространственных переменных построено приближенное решение обобщенной задачи Римана с условиями сопряжения на разрыве. Также приведено приближенное решение обобщенной задачи Римана с граничными условиями. Для этого построено фундаментальное решение оператора задачи. Это, в свою очередь, позволило свести задачу Римана к решению системы алгебраических уравнений с правой частью, зависящей от значений переменных в начальный момент времени в конечном числе точек.

На основе этих решений задачи Римана построен и реализован вычислительный алгоритм нахождения решения начально-краевой задачи для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. При этом постановка задачи допускает существование внутренних границ, на которых решение может иметь разрывы значений переменных модели и должны выполняться заданные условия, связывающие значения переменных по обе стороны этих границ.

Построенный вычислительный алгоритм был применен для исследования характера распространения упругих волн, сгенерированных периодически действующим виброисточником, в блочно-трещиноватой геологической среде. Существование трещин отражено в модели наличием внутренних границ, на которых выполняются «условия проскальзывания без трения». Проведенные численные эксперименты показали высокую эффективность этого вычислительного алгоритма и его потенциал, как инструмента для исследования практических прикладных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: ГИФМЛ, 1958.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: ГИФМЛ, 1959.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — М.: ГИФМЛ, 1958.
5. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
6. *Скалько Ю. И.* Задача Римана о распаде разрыва в случае многих пространственных переменных// Тр. МФТИ. — 2016. — *8*, № 4. — С. 169–182.
7. *Скалько Ю. И.* Корректные условия на границе, разделяющей подобласти// Компьют. иссл. модел. — 2014. — *6*, № 3. — С. 347–356.
8. *LeVeque R. L.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
9. *Kaser M., Dumbser M.* An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes. I. The two-dimensional isotropic case with external source terms// Geophys. J. Int. — 2006. — *166*. — P. 855–877.

Скалько Юрий Иванович
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
E-mail: `skalko@mail.mipt.ru`

Гриднев Сергей Юрьевич
Воронежский государственный технический университет
E-mail: `gridnev_s_y@rambler.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 122–129
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-122-129

УДК 517.95, 517.958

О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИФФУЗИИ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ ОСТРО СФОКУСИРОВАННЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ЗОНДОМ В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ МАТЕРИАЛЕ

© 2021 г. **М. А. СТЕПОВИЧ, Д. В. ТУРТИН, Е. В. СЕРЕГИНА**

Аннотация. Проведено сравнительное исследование качественных свойств двумерной и трехмерной математических моделей диффузии частиц (неравновесных неосновных носителей заряда, экситонов), генерируемых остро сфокусированным электронным зондом в однородном полупроводниковом материале. Показано, что рассматриваемые математические модели являются математически корректными и могут быть применены для оценки электрофизических параметров однородных полупроводниковых мишеней по результатам экспериментальных измерений.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальное уравнение, частная производная, задача Коши, электронный зонд, полупроводник, корректность, единственность, непрерывная зависимость от данных, идентификация.

ON THE WELL-POSEDNESS OF MATHEMATICAL MODELS OF DIFFUSION DUE TO A SHARPLY FOCUSED ELECTRON PROBE IN A HOMOGENEOUS SEMICONDUCTOR MATERIAL

© 2021 **M. A. STEPOVICH, D. V. TURTIN, E. V. SEREGINA**

Abstract. In this paper, we compare qualitative properties of two- and three-dimensional mathematical models of the diffusion of particles (nonequilibrium minority charge carriers, excitons) generated by a sharply focused electron probe in a homogeneous semiconductor material. We show that the mathematical models considered are well posed and can be used for estimating electrophysical parameters of homogeneous semiconductor targets based on the results of experimental measurements.

Keywords and phrases: mathematical model, differential equation, partial derivative, Cauchy problem, electron probe, semiconductor, well-posedness, uniqueness, continuous dependence on data, identification.

AMS Subject Classification: 35G16, 35A02, 78A35

1. Введение. Значительное число различных процессов описывается начальными или краевыми задачами для уравнений с частными производными. При математическом моделировании таких процессов необходимо не только адекватно описать суть изучаемых явлений, но и исследовать проблемы существования решения рассматриваемых задач, доказать единственность решения, обосновать непрерывную зависимость решения от данных задачи (начальных и граничных данных, свободного члена, коэффициентов операторного уравнения). Задачи, удовлетворяющие

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Калужской области (проекты № 19-03-00271, № 18-41-400001).

вышеуказанным требованиям, называются корректно поставленными. Вопросы существования и единственности решения задачи Коши и краевых задач являются традиционными и имеют богатую историю в теории уравнений в частных производных (см., например, [2,13]). Исследование таких задач очень актуально, поскольку в реальных задачах начальные данные и параметры задачи имеют погрешность измерения, и, как показывает классический пример Ж. Адамара (см., например, [2]), при незначительных изменениях начальных данных решения задачи могут резко различаться. Однако проблемы корректности подобных математических моделей изучаются довольно редко в связи с большими трудностями логического и технического характера, что так же делает такие исследования весьма актуальными.

В настоящей работе в качестве исходных моделей, подлежащих рассмотрению, использованы двумерная и трехмерная математические модели диффузии частиц (экситонов или неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ, см. [1, 6]), генерированных остро сфокусированным электронным пучком (электронным зондом) в однородном полупроводниковом материале.

В [9–11,14] приведены исходные формулы, количественно описывающие двумерную диффузию частиц, генерированных электронным зондом в полупроводниковом монокристаллическом нитриде галлия для стационарного случая постоянного облучения полупроводника и нестационарного процесса, возникающего после прекращения облучения. Приведены некоторые результаты расчетов с использованием этих формул и сравнение с экспериментом с целью идентификации электрофизических параметров исследуемого полупроводникового материала. Однако математически корректного анализа предложенных двумерных математических моделей в этих работах не проводилось. Результаты такого рассмотрения для двумерной диффузии экситонов, генерированных в монокристаллическом нитриде галлия, изложены в [12,15]. В этих работах рассмотрены узловые вопросы, связанные с единственностью в плоскости и непрерывной зависимостью решения задачи от члена в правой части дифференциальных уравнений стационарной и нестационарной диффузии, описывающего распределение частиц, генерированных электронным зондом. Подробное рассмотрение такой математической модели с доказательством ее корректности изложено в [17].

Использование модели двумерной диффузии можно считать приемлемым для низких энергий электронов зонда, примерно до $6 \dots 8$ кэВ. При этом толщина приповерхностного слоя мишени, в котором теряется основная часть энергии электронов, составляет не более $0{,}4 \dots 0{,}5$ мкм для легких полупроводниковых мишеней, например, кремния, не более 0,1 мкм для полупроводников со средними атомными номерами, например, для арсенида галлия, и не более 0,03 мкм для тяжелых полупроводников, например, теллурида кадмия (см. [3–5,16]. В большинстве вышеуказанных работ при моделировании процесса потерь энергии первичными электронами при их взаимодействии с конденсированным веществом использовалась модель, описывающая плотность потерь энергии в мишени $\rho^*(M)$ (а, следовательно, и распределение генерированных частиц) в виде двумерного нормального распределения Гаусса. В связи с этим отметим, что лучшее согласие с экспериментом достигается при использовании математической модели, основанной на раздельном описании потерь энергии электронами, испытавшими малоугловое рассеяние и поглощенными мишенью и электронами, испытавшими отражение на большие углы и покинувшие мишень (см. [3–5]). Такой подход для описания плотности потерь энергии электронным зондом в твердом теле (а, значит, и области генерации неравновесных частиц) лучше отвечает реальным потерям энергии пучком первичных электронов в твердом теле и его применение наиболее оправдано для трехмерных моделей диффузии. В то же время и подход, основанный на использовании функции Гаусса, для ряда задач является вполне приемлемым, потому он используется и в настоящей работе. Отметим также, что в настоящее время имеются математические модели, описывающие трехмерную диффузию экситонов, генерированных электронным зондом в полупроводниковой мишени (см. [7, 8]), однако математически корректный анализ предлагаемых моделей в этих работах не проводился.

Оценка корректности двумерной и трехмерной математических моделей диффузии частиц, генерированных электронным зондом в полупроводниковой мишени и учитывающих основные особенности потерь энергии в конденсированном веществе и составляет предмет рассмотрения в настоящей работе.

2. Математические модели изучаемых процессов диффузии. В общем случае при использовании электронного зонда реализуется трехмерная диффузия неравновесных ННЗ. Соответствующее уравнение стационарной диффузии для ННЗ имеет вид (см. [7, 8]):

$$a^2 \operatorname{div}[\operatorname{grad} \Delta p(M)] - \Delta p(M) = -\rho(M) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$D \frac{d\Delta p(M)}{dz}\bigg|_{z=0} = v_s \Delta p(x, y, 0), \quad \Delta p(\infty, \infty, \infty) = 0. \tag{2}$$

Функция $\Delta p(M)$ описывает распределение диффундирующего вещества; $M(x, y, z)$ — произвольная точка мишени; $x, y \in (-\infty, \infty)$, $z \in [0, \infty)$, $a = \mathrm{const}$, а коэффициент диффузии D и скорость поверхностной рекомбинации ННЗ v_s для однородного полупроводника также постоянные величины. Отметим, что при моделировании процесса диффузии в правой части уравнения (1) должна находиться концентрация генерированных в полупроводнике ННЗ $\rho(M)$, что достигается делением $\rho^*(M)$ на энергию образования частицы: электронно-дырочной пары или экситона (см. [1, 6]).

Будем рассматривать отдельно математические модели, описывающие двумерную и трехмерную диффузию ННЗ для стационарного (количество генерированных и рекомбинировавших частиц в единицу времени постоянно и равно друг другу, что соответствует состоянию квазиравновесия) и нестационарного (электронный пучок выключается, генерации частиц нет, имеется лишь их рекомбинации) процессов. Поскольку двумерная модель диффузии и вопросы ее корректности достаточно подробно рассмотрены ранее (см. ссылки на литературу в разделе «Введение»), за основу изложения полученных результатов сравнительного анализа примем трехмерную модель, параметры которой в декартовой прямоугольной системе координат будут зависеть от трех переменных: x, y и z. В соответствующих выражениях для двумерной модели будет отсутствовать третья переменная: переменная z.

2.1. Стационарный процесс. Пусть функция $n(x, y, z)$ описывает плотность ННЗ, находящихся в точке x, y, z после их диффузии в полупроводнике. Она удовлетворяет стационарному дифференциальному уравнению, описывающему диффузию ННЗ в состоянии квазиравновесия:

$$\Delta n(x, y, z) - \frac{n(x, y, z)}{\lambda^2} = -\rho(x, y, z) \tag{3}$$

и граничным условиям

$$D \frac{\partial n(x, y, 0)}{\partial z} = v_s n(x, y, 0), \tag{4}$$

$$\lim_{z \to +\infty} n(x, y, z) = 0, \quad \lim_{x \to \pm\infty} n(x, y, z) = 0, \quad \lim_{y \to \pm\infty} n(x, y, z) = 0. \tag{5}$$

Здесь $\lambda = \sqrt{D\tau}$ — диффузионная длина ННЗ.

Следуя [8], в рассматриваемом случае область генерации ННЗ будем описывать функцией Гаусса $\rho(x, y, z) = G_0 \tau \phi(x, y, z)/\lambda^2$, где G_0 — частота пульсирующего электронного зонда (и равная ей частота генерации ННЗ), а $\phi(x, y, z)$ — плотность трехмерного нормального распределения Гаусса. В дальнейшем будем считать, что $\rho(x, y, z) = c_2 \exp\{-c_1(x^2 + y^2 + z^2)\}$, $c_1 = 1/2\sigma^2$, $c_2 = G_0\tau/\lambda^2(\sigma\sqrt{2\pi})^3$. Пульсирующий электронный пучок используется для повышения отношения «сигнал/шум» при регистрации слабых сигналов люминесценции, возникающей в полупроводниках при их облучении пучком ускоренных электронов или электромагнитным излучением.

Вопрос о существовании решения задачи (3)–(5) изучался в [7,8]. Построением функцию Грина было найдено решение, которое описывается формулой

$$n(x,y,z) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} \rho(\xi,\eta,\zeta)\left(\frac{e^{-\chi R}}{4\pi R} + \frac{e^{-\chi R_1}}{4\pi R_1} - \beta\int_{\zeta}^{+\infty}\frac{\exp\{\alpha(\zeta - s) - \chi\sqrt{\rho^2 + (z+s)^2}\}}{\sqrt{\rho^2+(z+s)^2}}ds\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad (6)$$

где $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, $R_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}$, $\chi = 1/\lambda$, $\alpha = v_s/D$, $\beta = \alpha/2\pi$, $\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$.

2.2. Нестационарный процесс. После того как электронный пучок будет выключен, новые ННЗ генерироваться не будут и будет происходить диффузия имевшихся ННЗ. Этот процесс описывается при помощи следующего дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial c(x,y,z,t)}{\partial t} = D\Delta c(x,y,z,t) - \frac{c(x,y,z,t)}{\tau} \quad (7)$$

с начальным условием

$$c(x,y,z,0) = n(x,y,z), \quad (8)$$

где $c(x,y,z,t)$ — концентрация ННЗ в точке с координатами (x,y,z) в момент времени t, τ — время жизни ННЗ, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа, а функция $n(x,y,z)$ определяется выражением (6).

Использованием формулы [8] было получено решение задачи (7), (8):

$$c(x,y,z,t) = \frac{\exp(-t/\tau)}{(2\sqrt{D\pi t})^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} n(\xi,\eta,\zeta)\exp\left\{-\frac{r^2(\xi,\eta,\zeta)}{4Dt}\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad (9)$$

$r(\xi,\eta,\zeta) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$.

Ввиду того, что решение задачи (3)–(5) фактически является составной частью решения задачи (7)–(8), будем рассматривать их как решение одной задачи (3)–(5), (7)–(8).

Для дальнейшего рассмотрения обозначим

$$\Pi_{xyz} = \{(x,y,z) : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, 0 \leqslant z < +\infty\},$$
$$\Pi = \{(t,x,y,z) : t > 0, (x,y,z) \in \Pi_{xyz}\}.$$

3. Результаты.

3.1. Существование и единственность решения задачи диффузии. Следующие теоремы устанавливают единственность задач (3)–(5) и (7)–(8), а, следовательно, и общей задачи (3)–(5), (7)–(8).

Теорема 1. *Решение задачи* (3)–(5) *единственно.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть n_1 и n_2 — два различных решения задачи (3)–(5). Рассмотрим функцию $u = n_2 - n_1$, которая удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению $\Delta u - u/\lambda^2 = 0$ и граничным условиям (4)–(5).

Применив к полученной задаче формулу (6) с $\rho(x,y,z) = 0$, получим $u = 0$, откуда следует, что $n_2 = n_1$. Полученное противоречие и доказывает единственность решения задачи (3)–(5). $\square$

Для двумерной модели доказательство теоремы 1 справедливо без каких-либо изменений. Здесь и далее для двумерной модели в соответствующих формулах координата z отсутствует.

Теорема 2. *Решение задачи* (7)–(8) *единственно.*

Доказательство. Сделав в уравнении (7) и начальном условии (8) замену $c(x,y,z,t) = \exp(-t/\tau)v(x,y,t)$, для функции $v(x,y,z,t)$ получим задачу Коши:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v, \tag{10}$$

$$v(x,y,z,0) = n(x,y,z). \tag{11}$$

Предположим противное. Пусть v_1 и v_2 — два различных решения задачи (10)–(11). Рассмотрим функцию $u = v_2 - v_1$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (10) и нулевому начальному условию $u(x,y,z,0) = 0$. Применив к полученной задаче формулу (9), получим $u = 0$, откуда $u_2 = u_1$. Противоречие и доказывает единственность решения задачи (7)–(8). □

Для двумерной модели доказательство теоремы 2 справедливо без каких-либо изменений.

3.2. Непрерывная зависимость решения от данных задачи. Следуя В. С. Владимирову (см. [2]), непрерывная зависимость решения от данных задачи означает следующее: пусть последовательность данных D_k, $k \to \infty$, и u_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — соответствующие решения задачи; тогда должно быть $u_k \to u$, $k \to \infty$ в смысле надлежащим образом выбранной сходимости. Следующие теоремы устанавливают непрерывную зависимость решения задачи (3)–(5), (7)–(8) от члена в правой части. Доказательство этих теорем основано на единственности задачи, а также на формулах для решений (6), (9). Укажем узловые моменты этих доказательств для трехмерной модели и проведем сравнение с результатами, полученными для двумерной модели.

Теорема 3. *Пусть $n_1(x,y,z)$ — решение уравнения $\Delta n - n/\lambda^2 = -\rho_1(x,y,z)$ с граничными условиями (4), (5), а $n_2(x,y,z)$ — решение уравнения $\Delta n - n/\lambda^2 = -\rho_2(x,y,z)$ с граничными условиями (4), (5) и для всех $(x,y,z) \in \Pi_{xyz}$*

$$|\rho_2(x,y,z) - \rho_1(x,y,z)| \leqslant \varepsilon. \tag{12}$$

Тогда для всех $(t,x,y,z) \in \Pi$ справедлива оценка

$$|n_2(x,y,z) - n_1(x,y,z)| \leqslant C\varepsilon, \quad C = \frac{\lambda^2 + \sqrt{26}}{2}.$$

Доказательство. Применив формулу (6) для функций n_1 и n_2 и учитывая оценку (12), получим

$$|n_2(x,y,z) - n_1(x,y,z)| \leqslant \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} \left| \frac{e^{-\chi R}}{4\pi R} + \frac{e^{-\chi R_1}}{4\pi R_1} - \beta \int\limits_{\zeta}^{+\infty} \frac{e^{\alpha(\zeta - s) - \chi\sqrt{\rho^2 + (z+s)^2}}}{\sqrt{\rho^2 + (z+s)^2}} ds \right| d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{13}$$

Поскольку в (13)

$$\beta \int\limits_{\zeta}^{+\infty} \frac{e^{\alpha(\zeta - s) - \chi\sqrt{\rho^2 + (z+s)^2}}}{\sqrt{\rho^2 + (z+s)^2}} ds \leqslant \beta \frac{e^{-\chi R_1}}{4\pi R_1} \cdot \int\limits_{\zeta}^{+\infty} e^{\alpha(\zeta - s)} ds < \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-\chi R_1}}{4\pi R_1},$$

получаем

$$|n_2(x,y,z) - n_1(x,y,z)| \leqslant \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\chi R}}{4\pi R} + \frac{3e^{-\chi R_1}}{4\pi R_1} \right) d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{14}$$

В формуле (14) обозначим

$$F_1(x,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\chi R}}{4\pi R} d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad F_2(x,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{3e^{-\chi R_1}}{4\pi R_1} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

После ряда преобразований для первого из этих интегралов получим

$$|F_1| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\chi^2} + \sqrt{26}\right). \tag{15}$$

Для F_2 получим такую же оценку. В результате для неравенства (14) будем иметь

$$|n_2(x,y,z) - n_1(x,y,z)| \leqslant C \cdot \varepsilon, \quad C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\chi^2} + \sqrt{26}\right) = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \sqrt{26}). \tag{16}$$

Теорема 3 доказана. □

Для двумерной модели аналогичные соотношения в условиях соответствующей теоремы записываются так (см. [12, 15, 17]):

$$|\rho_2(x,y) - \rho_1(x,y)| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для всех $(t,x,y) \in \Pi$ справедлива оценка

$$|n_2(x,y) - n_1(x,y)| \leqslant \lambda^2 \varepsilon. \tag{17}$$

С точностью до констант формулы (16) и (17) дают одинаковый результат.

Теорема 4. *Пусть $c_1(x,y,z)$ — решение уравнения* (7) *с начальным условием $c_1(x,y,z,0) = n_1(x,y,z)$, а $c_2(x,y,z)$ — решение уравнения* (7) *с начальным условием $c_2(x,y,z,0) = n_2(x,y,z)$ и для всех $(x,y,z) \in \Pi_{xyz}$ справедливо неравенство*

$$|n_2(x,y,z) - n_1(x,y,z)| \leqslant \delta. \tag{18}$$

Тогда для всех $(t,x,y,z) \in \Pi$ справедлива оценка

$$|c_2(x,y,z,t) - c_1(x,y,z,t)| \leqslant \delta.$$

Доказательство. Применив поочередно формулу (9) к задачам для функций c_1 и c_2, получим

$$c_1(x,y,z,t) = \frac{\exp(-t/\tau)}{(2\sqrt{D\pi t})^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} n_1(\xi,\eta,\zeta) \exp\left\{-\frac{r^2(\xi,\eta,\zeta)}{4Dt}\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$c_2(x,y,z,t) = \frac{\exp(-t/\tau)}{(2\sqrt{D\pi t})^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} n_2(\xi,\eta,\zeta) \exp\left\{-\frac{r^2(\xi,\eta,\zeta)}{4Dt}\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Вычитая второе равенство из первого и учитывая оценку (18), имеем

$$|c_2(x,y,z,t) - c_1(x,y,z,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \delta \frac{\exp(-t/\tau)}{(2\sqrt{D\pi t})^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4Dt}\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{19}$$

Используя теорему Фубини и интеграл Пуассона, оценку (19) перепишем в виде

$$|c_2(x,y,z,t) - c_1(x,y,z,t)| \leqslant \delta \frac{\exp(-t/\tau)}{2\sqrt{D\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(z-\zeta)^2}{4Dt}\right\} d\zeta. \tag{20}$$

В правой части формулы (20) сделаем замену переменной, положив $(\varsigma - z)/2\sqrt{Dt} = u$. Тогда получим

$$|c_2(x,y,z,t) - c_1(x,y,z,t)| \leqslant \delta \frac{\exp(-t/\tau)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-z/2\sqrt{Dt}}^{+\infty} e^{-u^2} du. \tag{21}$$

Поскольку

$$\int\limits_{-z2\sqrt{Dt}}^{+\infty} e^{-u^2} du \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$$

то из (21) имеем

$$|c_2(x,y,z,t) - c_1(x,y,z,t)| \leqslant \delta \exp(-t/\tau)$$

и, стало быть, при всех $(t,x,y,z)\in\Pi$ справедлива оценка

$$|c_2(x,y,z,t)-c_1(x,y,z,t)|\leqslant\delta.$$

Теорема 4 доказана. □

Для двумерной модели аналогичные соотношения в условиях соответствующей теоремы имеют точно такой же вид [12, 15, 17]: из соотношения

$$|n_2(x,y)-n_1(x,y)|\leqslant\delta \tag{22}$$

следует оценка

$$|c_2(x,y,t)-c_1(x,y,t)|\leqslant\delta,$$

совпадающая с оценкой для трехмерной модели.

Теорема 5. *Пусть* $c_1(x,y,z)$ *— решение уравнения* (7) *с начальным условием* $c_1(x,y,z,0)=n_1(x,y,z)$*, а* $c_2(x,y,z)$ *— решение уравнения* (7) *с начальным условием* $c_2(x,y,z,0)=n_2(x,y,z)$ *и для всех* $(x,y,z)\in\Pi_{xyz}$ *функции* $n_1(x,y,z)$ *и* $n_2(x,y,z)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 3. *Тогда для всех* $(t,x,y,z)\in\Pi$ *справедлива оценка*

$$|c_2(x,y,z,t)-c_1(x,y,z,t)|\leqslant C\cdot\varepsilon,\quad C=\frac{1}{2}(\lambda^2+\sqrt{26}). \tag{23}$$

Доказательство. Доказательство теоремы 5 сразу же следует из теорем 3 и 4. □

Для двумерной модели аналогичные соотношения в условиях соответствующей теоремы при выполнении условий теоремы 3 для всех $(t,x,y)\in\Pi$ записываются так (см. [12, 15, 17]):

$$|c_2(x,y,t)-c_1(x,y,t)|\leqslant\lambda^2\cdot\varepsilon. \tag{24}$$

С точностью до констант формулы (23) и (24) дают одинаковый результат.

4. Заключение. Проведено сравнительное исследование качественных свойств двумерной и трехмерной математических моделей диффузии частиц (неравновесных неосновных носителей заряда, экситонов), возбуждаемых пульсирующим остро сфокусированным электронным зондом в однородном полупроводниковом материале. С использованием методов качественной теории дифференциальных уравнений для математической модели изучаемого физического явления проведено исследование ее корректности, доказана непрерывная зависимость решения (выходных данных) от входных данных, получены оценки, позволяющие оценить влияние погрешностей в исходных данных на распределение диффундирующей примеси. Полученные результаты могут быть использованы при планировании эксперимента в электроннозондовых технологиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г.* Физика полупроводников. — М.: Наука, 1990.
2. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2004.
3. *Михеев Н. Н., Никоноров И. М., Петров В. И., Степович М. А.* Определение электрофизических параметров полупроводников в растровом электронном микроскопе методами наведенного тока и катодолюминесценции// Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1990. — *54*, № 2. — С. 274–280.
4. *Михеев Н. Н., Петров В. И., Степович М. А.* Количественный анализ материалов полупроводниковой оптоэлектроники методами растровой электронной микроскопии// Изв. РАН. Сер. физ. — 1991. — *55*, № 8. — С. 1474–1482.
5. *Михеев Н. Н., Степович М. А.* Распределение энергетических потерь при взаимодействии электронного зонда с веществом// Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 1996. — *62*, № 4. — С. 20–25.
6. *Панков Ж.* Оптические процессы в полупроводниках. — М.: Мир, 1973.
7. *Поляков А. Н., Степович М. А., Туртин Д. В.* Математическое моделирование катодолюминесценции экситонов, генерированных узким электронным пучком в полупроводниковом материале// Изв. РАН. Сер. физ. — 2016. — *80*, № 12. — С. 1629–1633.
8. *Поляков А. Н., Степович М. А., Туртин Д. В.* Трехмерная диффузия экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования// Поверхность. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2015. — *12*. — С. 48–52.

9. *Поляков А. Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М. А.* Двумерная диффузия и катодолюминесценция экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования// Поверхность. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2012. — *11*. — С. 35–40.
10. *Поляков А. Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М. А.* Катодолюминесцентные экспериментальные исследования транспорта экситонов в нитриде галлия// Изв. РАН. Сер. физ. — 2012. — *76*, № 9. — С. 1082–1085.
11. *Поляков А. Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М. А.* Оценка значений электрофизических параметров полупроводниковых материалов по результатам измерений катодолюминесценции экситонов// Прикл. физ. — 2012. — *6*. — С. 41–46.
12. *Степович М. А., Туртин Д. В., Серегина Е. В., Поляков А. Н.* О качественных характеристиках двумерной математической модели диффузии неосновных носителей заряда, генерированных низкоэнергетическим электронным зондом в однородном полупроводниковом материале// Сб. тр. междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (17–19 декабря 2018 г., Воронеж). — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2019. — С. 127–133.
13. *Туртин Д. В.* Теоремы единственности решения задачи Коши для эволюционных уравнений и систем с растущими коэффициентами/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Владимир: ВГУ, 2012.
14. *Noltemeyer M., Bertram F., Hempel T., Bastek B., Polyakov A. N., Christen J., Brandt M., Lorenz M., Grundmann M.* Excitonic transport in ZnO// J. Mater. Res. — 2012. — *27*, № 17. — P. 2225–2231.
15. *Polyakov A. N., Smirnova A. N., Stepovich M. A., Turtin D. V.* Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material// Lobachevskii J. Math. — 2018. — *39*, № 2. — P. 259–262.
16. *Stepovich M. A., Amrastanov A. N., Seregina E. V. and Filippov M. N.* Mathematical modelling of heating of homogeneous metal targets with a focused electron beam// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — *1163*. — P. 012014-1–012014-6.
17. *Stepovich M. A., Turtin D. V., Seregina E. V. and Polyakov A. N.* On the qualitative characteristics of a two–dimensional mathematical model of diffusion of minority charge carriers generated by a low–energy electron beam in a homogeneous semiconductor material// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — *1203*. — P. 012095-1–012095-8.

Степович Михаил Адольфович
Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского
E-mail: m.stepovich@rambler.ru

Туртин Дмитрий Витальевич
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Ивановский филиал
E-mail: turtin@mail.ru

Серегина Елена Владимировна
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), Калужский филиал
E-mail: evfs@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 130–141
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-130-141

УДК 517.5

СИНТЕЗ В ЯДРЕ ОПЕРАТОРА ТРЕХСТОРОННЕЙ СВЕРТКИ

© 2021 г. **А. А. ТАТАРКИН, А. Б. ШИШКИН**

Аннотация. Говорят, что для однородного уравнения типа свертки справедлива аппроксимационная теорема, если любое решение этого уравнения аппроксимируется его элементарными решениями. В статье сформулировано необходимое и достаточное условие выполнимости аппроксимационной теоремы для однородного уравнения трехсторонней свертки при любом выборе выпуклой области и его характеристической функции.

Ключевые слова: экспоненциальный синтез, ядро оператора, оператор типа свертки, инвариантное подпространство, аналитическая функция.

SYNTHESIS IN THE KERNEL OF THE THREE-WAY CONVOLUTION OPERATOR

© 2021 **A. A. TATARKIN, A. B. SHISHKIN**

Abstract. One says that an approximation theorem holds for a homogeneous convolution-type equation if any solution of this equation is approximated by its elementary solutions. In this paper, we state a necessary and sufficient condition for the validity of the approximation theorem for the homogeneous equation of three-way convolution for any choice of a convex domain and its characteristic function.

Keywords and phrases: exponential synthesis, kernel of operator, convolution-type operator, invariant subspace, analytic function.

AMS Subject Classification: 34L05

1. Введение. Пусть Ω_0, Ω — выпуклые области в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, U_ε — круг $\{z : |z| < \varepsilon\}$. Будем считать, что $\Omega_0 + U_\varepsilon \subseteq \Omega$ и пространства голоморфных функций $O(\Omega_0)$, $O(U_\varepsilon)$, $O(\Omega_0)$ и $O(\mathbb{C})$ наделены топологиями равномерной сходимости на компактах. Выберем произвольный набор комплексных чисел a_0, a_1, a_2, не все из которых равны нулю. Символом ω_3 обозначим комплексное число $\exp \frac{2\pi i}{3}$. Пусть A — линейный непрерывный оператор, действующий в пространстве $O(\mathbb{C})$ по правилу

$$g(\lambda) \to a_0 g(\omega_3^0 \lambda) + a_1 g(\omega_3^1 \lambda) + a_2 g(\omega_3^2 \lambda);$$

AT_h — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$ по правилу

$$f(z) \to a_0 f(z + \omega_q^0 h) + a_1 f(z + \omega_q^1 h) + a_2 f(z + \omega_q^2 h).$$

Оператор AT_h принято называть *оператором трехстороннего сдвига* (на шаг $h \in U_\varepsilon$).

Выберем произвольную функцию $f \in O(\Omega)$ и произвольный линейный непрерывный функционал S на пространстве $O(\Omega_0)$. Функция

$$\psi(h) := \langle S, T_h(f) \rangle$$

называется сверткой функции f и функционала S. При фиксированных S и ε оператор

$$f \to \psi(h) := \langle S, T_h(f) \rangle$$

называется оператором свертки. Известно, что он действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(U_\varepsilon)$ и является непрерывным (см. [2, § 6]). Выберем произвольный оператор трехстороннего сдвига $AT_h \colon O(\Omega) \to O(\Omega_0)$, произвольную функцию $f \in O(\Omega)$ и произвольный линейный непрерывный функционал S на пространстве $O(\Omega_0)$. Функция $\psi_A(h) := \langle S, AT_h(f) \rangle$ называется *трехсторонней сверткой* функции f и функционала S. При фиксированных S и ε линейный оператор $f \to \psi_A(h) := \langle S, AT_h(f) \rangle$ называется *оператором трехсторонней свертки*. Легко убедиться, что оператор трехсторонней свертки действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(U_\varepsilon)$ и является непрерывным (см. [4, § 7]). Он перестановочен с оператором трехкратного дифференцирования D^3, то есть в области Ω_0 выполняется следующее соотношение

$$D_h^3 \langle S, AT_h(f) \rangle = \langle S, AT_h(D^3 f) \rangle.$$

Однородное уравнение типа свертки

$$\langle S, AT_h(f) \rangle = 0, \quad f \in O(\Omega), \tag{1}$$

называется *однородным уравнением трехсторонней свертки*. Множество решений $f \in O(\Omega)$ однородного уравнения (1) обозначим символом W_S. Множество W_S является замкнутым D^3-инвариантным подпространством в $O(\Omega)$, то есть справедлива импликация

$$f \in W_S \Rightarrow D^3 f \in W_S.$$

Экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие уравнению (1), принято называть *элементарными решениями* этого уравнения. Говорят, что для однородного уравнения (1) справедлива *аппроксимационная теорема*, если произвольное решение $f \in O(\Omega)$ этого уравнения можно аппроксимировать элементарными решениями в топологии пространства $O(\Omega)$.

Известно, что аппроксимационная теорема для однородного уравнения (1) справедлива, если лишь один из коэффициентов a_0, a_1, a_2 отличен от нуля. В этом случае однородное уравнение (1) равносильно однородному уравнению свертки

$$\langle S, f(z+h) \rangle = 0, \quad f \in O(\Omega).$$

Справедливость аппроксимационной теоремы для таких уравнений доказана в [2, теорема 6.1]. Кроме того, аппроксимационная теорема справедлива, если $a_0 = a_1 = a_2$. В этом случае однородное уравнение (1) равносильно однородному уравнению

$$\langle S, f(z + \omega_q^0 h) + f(z + \omega_q^1 h) + f(z + \omega_q^2 h) \rangle = 0, \quad f \in O(\Omega).$$

Справедливость аппроксимационной теоремы для таких уравнений доказана в [4, теорема 7.1, следствие 7.3]. Возникает вопрос о справедливости аппроксимационной теоремы в случае произвольных коэффициентов a_0, a_1, a_2, произвольной выпуклой области Ω и произвольного S.

2. Формулировка основного результата. Оператор AT_h является линейным и непрерывным. Он совпадает с дифференциальным оператором бесконечного порядка

$$f(z) \to \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{h^n}{n!} (D^n f)(z), \tag{2}$$

где

$$b_n := a_0 + a_1 \omega_q^n + a_2 \omega_q^{2n}, \quad n \in \{0, 1, \ldots\},$$

и ряд (2) сходится равномерно на компактах из Ω_0. Характеристическая функция оператора AT_h совпадает с функцией

$$A(e^{h\lambda}) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{h^n \lambda^n}{n!}.$$

Замечаем, что эти коэффициенты b_n зависят от n периодическим образом, то есть для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняется равенство $b_{n+3} = b_n$. Значит, среди коэффициентов b_0, b_1, b_2 есть отличные от нуля. Отметим, что коэффициенты a_0, a_1, a_2 однозначно определяются по коэффициентам b_0, b_1, b_2 с помощью формулы $a_k = \Delta_k/\Delta$, где Δ_k — определитель, полученный из определителя

$$\Delta \coloneqq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_3^1 & \omega_3^2 \\ 1 & \omega_3^2 & \omega_3^4 \end{vmatrix} = (\omega_3 - 1)(\omega_3^2 - 1)(\omega_3^2 - \omega_3) \neq 0,$$

заменой k-го столбца на столбец, составленный из коэффициентов b_0, b_1, b_2.

Обозначим через $n_A \coloneqq \{n_1, \dots, n_\nu\}$ упорядоченный набор целых неотрицательных чисел из множества $\{0, 1, 2\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $0 \leqslant n_1 < \ldots < n_\nu \leqslant 2$;

(ii) если $n \in \{n_1, \dots, n_\nu\}$, то $b_n \neq 0$;

(iii) если $n \notin \{n_1, \dots, n_\nu\}$, то $b_n = 0$.

Упорядоченный набор целых чисел n_A, удовлетворяющий условиям (i)–(iii), будем называть *индикатором* уравнения (1). Дополним индикатор n_A уравнения (1) одним элементом $n_{\nu+1} \coloneqq n_1 + 3$. Будем говорить, что индикатор n_A *периодичен*, если существует такое $q \in \mathbb{N}$, что для всех $k \in \{1, \dots, \nu\}$ выполняется равенство

$$n_{k+1} = n_k + q.$$

Отметим, что индикатор n_A периодичен, если $\nu = 1$ или $\nu = 3$. Действительно, если $\nu = 1$, то индикатор n_A включает лишь один элемент n_1 и условие периодичности содержит лишь одно равенство $n_2 = n_1 + q$, в котором можно положить $q \coloneqq 3$. В случае $\nu = 3$ индикатор n_A включает три элемента $n_1 \coloneqq 0$, $n_2 = 1$ и $n_3 = 2$, значит, условие периодичности содержит три равенства $n_2 = n_1 + q$, $n_3 = n_2 + q$ и $n_4 = n_3 + q$, в которых можно положить $q \coloneqq 1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Аппроксимационная теорема для однородного уравнения трехсторонней свертки* (1) *справедлива при любом выборе выпуклой области Ω и функционала S тогда и только тогда, когда индикатор n_A этого уравнения периодичен.*

3. Спектральный синтез.

Пусть $O^*(\Omega)$ — сильное сопряженное к пространству $O(\Omega)$; L_Ω — преобразование Лапласа, которое каждому функционалу $S \in O^*(\Omega)$ ставит в соответствие целую функцию экспоненциального типа $\varphi(\lambda) \coloneqq \langle S, e^{\lambda z}\rangle$; $P(\Omega)$ — полный образ L_Ω. Известно, что отображение $L_\Omega \colon O^*(\Omega) \to P(\Omega)$ является взаимно однозначным. Оно индуцирует в $P(\Omega)$ отделимую локально выпуклую топологию. Известно, что пространство $P(\Omega)$ совпадает с индуктивным пределом $P[1, H_\Omega)$, где H_Ω — опорная функция области Ω в смысле комплексного анализа (см. [1, предложение 3.1]). Так как L_Ω осуществляет изоморфизм локально выпуклых пространств, то его сопряженное отображение L_Ω^* осуществляет изоморфизм сильного сопряженного пространства $P^*(\Omega)$ на второе сопряженное пространство $O^{**}\Omega$. Воспользуемся рефлексивностью пространства $O(\Omega)$ и отождествим это пространство с его вторым сопряженным пространством.

Соблюдая традицию, оператор умножения $O(\mathbb{C}) \to O(\mathbb{C})$ на одночлен $\pi(z) \coloneqq z^3$ обозначим π, а его сопряженный оператор обозначим π^*. Символом Δ_λ обозначим корневое подпространство оператора π^*, соответствующее собственному значению λ. Известно, что алгебраический спектр оператора π^* совпадает с $\mathbb{C}$, а корневое подпространство $\Delta_\lambda \subseteq O^*(\mathbb{C})$ совпадает с линейной оболочкой множества

$$\bigl\{\delta_\xi^{(j)} : (j, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \lambda^{1/3}\bigr\},$$

где $\delta_\xi^{(j)} \in O^*(\mathbb{C})$ — функционал, действующий по правилу $f \to f^{(j)}(\xi)$ (см. [4, теорема 1.1]).

Пространство $P(\Omega)$ является всюду плотным подпространством $O(\mathbb{C})$ и вложение $P(\Omega) \subseteq O(\mathbb{C})$ является непрерывным. Значит, сильное сопряженное пространство $O^*(\mathbb{C})$ можно отождествить с подпространством сильного сопряженного $P^*(\Omega)$. При этом вложение $O^*(\mathbb{C}) \subseteq P^*(\Omega)$ является непрерывным. Говорят, что корневой элемент $s \in \Delta_\lambda$ *погружен в подпространство* $V \subseteq P^*(\Omega)$, если $(\pi^* - \lambda)^j s \in V$ для любого $j \in \mathbb{Z}_+$. Замкнутое подпространство $V \subseteq P^*(\Omega)$ *допускает спектральный синтез* (синтез по корневым элементам оператора π^*), если оно совпадает с замыканием линейной оболочки множества корневых элементов оператора π^*, погруженных в V.

Рассмотрим дуальный оператор $\pi^{\circledast}$ к оператору $\pi\colon O(\mathbb{C}) \to O(\mathbb{C})$ (см. [6, § 3]). Согласно определению оператор $\pi^{\circledast}$ действует из пространства $P(\mathbb{C})$ в пространство $P(\mathbb{C})$ и совпадает с композицией $L_{\mathbb{C}} \circ \pi^* \circ L_{\mathbb{C}}^{-1}$. В [6, § 6, п. 2] доказаны следующие утверждения:

(a) алгебраический спектр оператора $\pi^{\circledast}$ совпадает с $\mathbb{C}$, а корневое подпространство $E_\lambda \subseteq P(\mathbb{C})$ оператора $\pi^{\circledast}$, соответствующее собственному значению λ, совпадает с линейной оболочкой множества экспоненциальных одночленов

$$\bigl\{z^j e^{\xi z} : (j, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \lambda^{1/3}\bigr\};$$

(b) замкнутое подпространство $W_S \subseteq O(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора $\pi^{\circledast}$ тогда и только тогда, когда его дуальное подпространство $V_S := (L_\Omega^*)^{-1}(W_S) \subseteq P^*(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора π^*.

Из (a) и (b) вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 1. *Аппроксимационная теорема для однородного уравнения трехсторонней свертки* (1) *справедлива тогда и только тогда, когда дуальное подпространство* $V_S \subseteq P^*(\Omega)$ *допускает синтез по корневым элементам оператора* π^*.

Доказательство. Из (a) вытекает, что аппроксимационная теорема для однородного уравнения трехсторонней свертки (1) справедлива тогда и только тогда, когда замкнутое подпространство $W_S \subseteq O(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора $\pi^{\circledast}$. Осталось сослаться на условие (b). Предложение доказано. □

4. Плотность многочленов. Пусть $n_A := \{n_1, \dots, n_\nu\}$ — индикатор уравнения (1). Векторную функцию $\boldsymbol{g} := (g_1, \dots, g_\nu)$ называем *целой ν-функцией*, если все функции $g_1, \dots, g_\nu$ являются целыми. Если целые функции $g_1, \dots, g_\nu$ являются полиномами, то целую ν-функцию $\boldsymbol{g} := (g_1, \dots, g_\nu)$ называем *ν-полиномом.*

Выберем произвольную функцию $\varphi \in P(\Omega)$ и обозначим $\boldsymbol{O}_\varphi$ пространство всех целых ν-функций $\boldsymbol{g} := (g_1, \dots, g_\nu)$, для которых сумма

$$z^{n_1} g_1(z^q)\varphi(z) + \ldots + z^{n_\nu} g_\nu(z^q)\varphi(z)$$

принадлежит $P(\Omega)$. Определим отображение $\boldsymbol{u}_\varphi\colon \boldsymbol{O}_\varphi \to P(\Omega)$ по правилу

$$\boldsymbol{g} \to z^{n_1} g_1(z^q)\varphi(z) + \ldots + z^{n_\nu} g_\nu(z^q)\varphi(z).$$

Символом Δ_{n_A} обозначим определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} \omega_q^0 & \ldots & \omega_q^0 \\ \omega_q^{n_1} & \ldots & \omega_q^{n_\nu} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \omega_q^{(\nu-1)n_1} & \ldots & \omega_q^{(\nu-1)n_\nu} \end{vmatrix}.$$

По известной формуле имеем

$$\Delta_{n_A} := \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant \nu} (\omega_q^{n_i} - \omega_q^{n_j}) \neq 0.$$

Для произвольной целой функций ψ символом

$$\Delta_{n_A}^k(\psi(z), \psi(\omega_q z), \ldots, \psi(\omega_q^{\nu-1} z))$$

обозначим определитель

$$\begin{vmatrix} \omega_q^0 & \ldots & \psi(z) & \ldots & \omega_q^0 \\ \omega_q^{n_1} & \ldots & \psi(\omega_q z) & \ldots & \omega_q^{n_\nu} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \omega_q^{(\nu-1)n_1} & \ldots & \psi(\omega_q^{\nu-1} z) & \ldots & \omega_q^{(\nu-1)n_\nu} \end{vmatrix},$$

который получен из определителя Вандермонда Δ_{n_A} заменой k-го столбца на столбец из функций $\psi(z), \psi(\omega_q z), \ldots, \psi(\omega_q^{\nu-1} z)$.

Предложение 2. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *отображение* $\boldsymbol{u}_\varphi\colon \boldsymbol{O}_\varphi \to P(\Omega)$ *является взаимно однозначным;*

(ii) *полный образ* $\boldsymbol{u}_\varphi(\boldsymbol{O}_\varphi)$ *исчерпывается произведениями* $\psi\varphi \in P(\Omega)$, *где* ψ — *такая целая функция, что для любого* $k \in \{1,\dots,\nu\}$ *функция*

$$\frac{\Delta^k_{n_A}(\psi(z),\psi(\omega_q z),\dots,\psi(\omega_q^{\nu-1}z))}{z^{n_k}\Delta_{n_A}}$$

представляется в виде композиции $g_k(z^q)$, *где* g_k — *целая функция, то есть является целой* q*-симметричной функцией;*

(iii) *Полный образ* $\boldsymbol{u}_\varphi(\boldsymbol{O}_\varphi)$ *замкнут в пространстве* $O(\mathbb{C})$.

Доказательство. Докажем утверждение (i). Пусть $\boldsymbol{g}^{(1)} \coloneqq \bigl(g_1^{(1)},\dots,g_\nu^{(1)}\bigr)$ и $\boldsymbol{g}^{(2)} \coloneqq \bigl(g_1^{(2)},\dots,g_\nu^{(2)}\bigr)$ принадлежат $\boldsymbol{O}_\varphi$ и $\boldsymbol{u}_\varphi(\boldsymbol{g}^{(1)}) = \boldsymbol{u}_\varphi(\boldsymbol{g}^{(2)})$. Тогда вне множества нулей целой функции φ выполняются равенства:

$$z^{n_1}g_1^{(1)}(z^q)+\dots+z^{n_\nu}g_\nu^{(1)}(z^q) = z^{n_1}g_1^{(2)}(z^q)+\dots+z^{n_\nu}g_\nu^{(2)}(z^q),$$
$$z^{n_1}\bigl(g_1^{(1)}(z^q)-g_1^{(2)}(z^q)\bigr)+\dots+z^{n_\nu}\bigl(g_\nu^{(1)}(z^q)-g_\nu^{(2)}(z^q)\bigr)=0.$$

При этом для целых функций

$$g_1(z)\coloneqq g_1^{(1)}(z^q)-g_1^{(2)}(z^q),\dots,g_\nu(z)\coloneqq g_\nu^{(1)}(z^q)-g_\nu^{(2)}(z^q)$$

справедливы соотношения

$$g_1(\omega_q^k z)=g_1(z),\dots,g_1(\omega_q^k z)=g_\nu(z),\quad k\in\mathbb{N},$$

где $\omega_q \coloneqq \exp\frac{2\pi i}{q}$. Отсюда вытекает, что функции

$$z^{n_1}g_1(z),\dots,z^{n_\nu}g_\nu(z)$$

вне множества нулей функции φ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} z^{n_1}g_1(z)+\dots+z^{n_\nu}g_\nu(z)=0,\\ \omega_q^{n_1}z^{n_1}g_1(z)+\dots+\omega_q^{n_\nu}z^{n_\nu}g_\nu(z)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \omega_q^{(\nu-1)n_1}z^{n_1}g_1(z)+\dots+\omega_q^{(\nu-1)n_\nu}z^{n_\nu}g_\nu(z)=0.\end{cases}$$

Определитель этой системы совпадает с определителем Вандермонда

$$\Delta_{n_A}\coloneqq\begin{vmatrix}\omega_q^0 & \dots & \omega_q^0\\ \omega_q^{n_1} & \dots & \omega_q^{n_\nu}\\ \dots & \dots & \dots\\ \omega_q^{(\nu-1)n_1} & \dots & \omega_q^{(\nu-1)n_\nu}\end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant\nu}(\omega_q^{n_i}-\omega_q^{n_j}).$$

Это значит, что определитель указанной системы отличен от нуля. Следовательно, функции $z^{n_1}g_1(z),\dots,z^{n_\nu}g_\nu(z)$ равны нулю вне нулей функции φ. Отсюда следует, что целые функции $g_1(z),\dots,g_\nu(z)$ являются тождественными нулями. Значит, $\boldsymbol{g}^{(1)}=\boldsymbol{g}^{(2)}$. Таким образом, взаимная однозначность отображения $\boldsymbol{u}_\varphi\colon\boldsymbol{O}_\varphi\to P(\Omega)$ доказана.

Докажем утверждение (ii). Если $\boldsymbol{g}\coloneqq(g_1,\dots,g_\nu)\in\boldsymbol{O}_\varphi$, то $f\coloneqq\boldsymbol{u}_\varphi(\boldsymbol{g})\in P(\Omega)$. При этом для любого $z\in\mathbb{C}$ имеем

$$f(z)=z^{n_1}g_1(z^q)\varphi(z)+\dots+z^{n_\nu}g_\nu(z^q)\varphi(z)=$$
$$=(z^{n_1}g_1(z^q)+\dots+z^{n_\nu}g_\nu(z^q))\varphi(z)$$

или

$$z^{n_1}g_1(z^q)+\dots+z^{n_\nu}g_\nu(z^q)=\psi(z),$$

где ψ — целая функция $\frac{f}{\varphi}$. Значит, для всех комплексных z выполняются равенства

$$\begin{cases} z^{n_1}g_1(z^q)+\ldots+z^{n_\nu}g_\nu(z^q)=\psi(z),\\ \omega_q^{n_1}z^{n_1}g_1(z^q)+\ldots+\omega_q^{n_\nu}z^{n_\nu}g_\nu(z^q)=\psi(\omega_q z),\\ \dotfill\\ \omega_q^{(\nu-1)n_1}z^{n_1}g_1(z^q)+\ldots+\omega_q^{(\nu-1)n_\nu}z^{n_\nu}g_\nu(z^q)=\psi(\omega_q^{\nu-1}z). \end{cases}.$$

Следовательно, для произвольного $k\in\{1,\ldots,\nu\}$ имеем

$$g_k(z^q)=\frac{\Delta^k_{n_A}(\psi(z),\psi(\omega_q z),\ldots,\psi(\omega_q^{\nu-1}z))}{z^{n_k}\Delta_{n_A}}.$$

При этом $g_1,\ldots,g_\nu$ — целые функции и $f=\psi\varphi$.

Обратно, пусть $f=\psi\varphi\in P(\Omega)$, где целая функция ψ выбрана из условия: для любого $k\in\{1,\ldots,\nu\}$ функция

$$\frac{\Delta^k_{n_A}(\psi(z),\psi(\omega_q z),\ldots,\psi(\omega_q^{\nu-1}z))}{z^{n_k}\Delta_{n_A}}$$

представляется в виде композиции $g_k(z^q)$, где g_k — целая функция. Тогда для целой ν-функции $\boldsymbol{g}=(g_1,\ldots,g_\nu)$ имеем

$$\boldsymbol{u}_\varphi(\boldsymbol{g})=z^{n_1}g_1(z^q)\varphi(z)+\ldots+z^{n_\nu}g_\nu(z^q)\varphi(z)=\\ =\varphi(z)\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\Delta^k_{n_A}(\psi(z),\psi(\omega_q z),\ldots,\psi(\omega_q^{\nu-1}z))}{\Delta_{n_A}}=\varphi(z)\psi(z)=f(z).$$

Значит, утверждение (ii) справедливо.

Докажем утверждение (iii). Пусть $f\in O(\mathbb{C})$, $f_m\in\boldsymbol{u}_\varphi(\boldsymbol{O}_\varphi)$ и $f_m\to f$ в пространстве $O(\mathbb{C})$. Нужно доказать, что $f\in\boldsymbol{u}_\varphi(\boldsymbol{O}_\varphi)$. По определению отображения $\boldsymbol{u}_\varphi\colon\boldsymbol{O}_\varphi\to P(\Omega)$ элементы последовательности f_m допускают представление

$$f_m(z)\coloneqq\boldsymbol{u}_\varphi(\boldsymbol{g}^{(m)})=z^{n_1}g_1^{(m)}(z^q)\varphi(z)+\ldots+z^{n_\nu}g_\nu^{(m)}(z^q)\varphi(z)=\psi_m(z)\varphi(z),$$

где

$$\psi_m(z)\coloneqq z^{n_1}g_1^{(m)}(z^q)+\ldots+z^{n_\nu}g_\nu^{(m)}(z^q),\quad \boldsymbol{g}^{(m)}\coloneqq\big(g_1^{(m)},\ldots,g_\nu^{(m)}\big)$$

— некоторые целые ν-функции. Значит, предельная функция f делится на функцию φ и

$$\psi_m\to\psi\coloneqq\frac{f}{\varphi}$$

в пространстве $O(\mathbb{C})$. Согласно утверждению (ii) для любого $k\in\{1,\ldots,\nu\}$ элементы последовательности $g_k^{(m)}(z^q)$ допускают представление

$$g_k^{(m)}(z^q)=\frac{\Delta^k_{n_A}(\psi_m(z),\psi_m(\omega_q z),\ldots,\psi_m(\omega_q^{\nu-1}z))}{z^{n_k}\Delta_{n_A}}.$$

Значит,

$$g_k^{(m)}(z^q)\to g_k(z^q)\coloneqq\frac{\Delta^k_{n_A}(\psi(z),\psi(\omega_q z),\ldots,\psi(\omega_q^{\nu-1}z))}{z^{n_k}\Delta_{n_A}}$$

в пространстве $O(\mathbb{C})$. При этом на всей комплексной плоскости имеет место представление

$$\psi(z)\coloneqq z^{n_1}g_1(z^q)\varphi(z)+\ldots+z^{n_\nu}g_\nu(z^q)\varphi(z).$$

Это и означает, что множество $\boldsymbol{u}_\varphi(\boldsymbol{O}_\varphi)$ замкнуто в пространстве $O(\mathbb{C})$. $\square$

По предложению 2 отображение $\boldsymbol{u}_\varphi\colon\boldsymbol{O}_\varphi\to P(\Omega)$ является взаимно однозначным. Наделим $\boldsymbol{O}_\varphi$ локально выпуклой топологией, индуцированной из пространства $P(\Omega)$ отображением $\boldsymbol{u}_\varphi$. Так как $\varphi\in P(\Omega)$ и оператор умножения на многочлен является эндоморфизмом пространства $P(\Omega)$, то пространство $\boldsymbol{O}_\varphi$ включает в себя все ν-полиномы. Принципиальное значение имеет вопрос плотности множества всех ν-полиномов в пространстве $\boldsymbol{O}_\varphi$. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *дуальное подпространство* $V_S \subseteq P^*(\Omega)$ *допускает синтез по корневым элементам оператора* π^*,

(ii) ν*-полиномы плотны в пространстве* $\boldsymbol{O}_\varphi$.

Доказательство. Согласно [5, теорема 3] вытекает, что утверждение (i) выполняется тогда и только тогда, когда дуальное подпространство $V_S \subseteq P^*(\Omega)$ допускает инъективное описание (см. [5, п. 1.3]). С другой стороны, по теореме 4 из той же работы допустимость инъективного описания подпространством V_S равносильна плотности ν-полиномов в пространстве $\boldsymbol{O}_\varphi$. Теорема доказана. □

В силу предложения 1 теорема 2 сводит доказательство аппроксимационной теоремы для однородного уравнения трехсторонней свертки (1) к доказательству плотности ν-полиномов в пространстве $\boldsymbol{O}_\varphi$.

5. Независимое описание топологии пространства $\boldsymbol{O}_\varphi$. Предположим, что область Ω является выпуклой, ограниченной и содержит начало. Так как $0 \in \Omega$, то при некотором $\rho > 0$ круг $U_\rho \coloneqq \{z : |z| < \rho\}$ лежит в области Ω. Пусть

$$h_\Omega(\theta) \coloneqq \sup_{z\in\Omega} \operatorname{Re}(z \exp\{-i\theta\})$$

— опорная функция области Ω в смысле комплексного анализа. Для любого $\theta \in \mathbb{R}$ выполняется очевидное неравенство $h_\Omega(\theta) > \rho$. Выберем натуральное m из условия $m > \rho^{-1}$ и символом $\boldsymbol{O}_{\varphi,m}$ обозначим векторное пространство всех целых ν-функций $\boldsymbol{g} \coloneqq (g_1, \ldots, g_\nu)$, для которых

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|z^{n_1} g_1(z^q)\varphi(z) + \ldots + z^{n_\nu} g_\nu(z^q)\varphi(z)|}{\exp h_m(z)} < +\infty,$$

где $n_A \coloneqq \{n_1, \ldots, n_\nu\}$ — индикатор оператора q-стороннего сдвига AT_h и h_m — неотрицательная функция

$$z \to \left(h_\Omega(\arg z) - \frac{1}{m}\right)|z|.$$

Используя предложение 2, легко убедиться, что соотношение

$$\|\boldsymbol{g}\|_m \coloneqq \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|z^{n_1} g_1(z^q)\varphi(z) + \ldots + z^{n_\nu} g_\nu(z^q)\varphi(z)|}{\exp h_m(z)}$$

определяет норму на пространстве $\boldsymbol{O}_{\varphi,m}$. При этом пространство $\boldsymbol{O}_{\varphi,m}$ являются банаховым, и вложение $\boldsymbol{O}_{\varphi,m} \subseteq \boldsymbol{O}_{\varphi,m+1}$ является вполне непрерывным. Хорошо известное описание топологии пространства $P(\Omega)$ (см. [1, предложение 3.1]) позволяет заключить, что пространство $\boldsymbol{O}_\varphi$ совпадает с индуктивным пределом пространств $\boldsymbol{O}_{\varphi,m} \coloneqq (\boldsymbol{O}_{\varphi,m}; \|g\|_m)$ относительно вполне непрерывных вложений $\boldsymbol{O}_{\varphi,m} \subseteq \boldsymbol{O}_{\varphi,m+1}$, $m > \rho^{-1}$.

6. Доказательство (аппроксимационной) теоремы 1.

Достаточность. Предположим, что индикатор $n_A \coloneqq \{n_1, \ldots, n_\nu\}$ уравнения (1) периодичен, т.е.

$$n_2 - n_1 = n_3 - n_2 = \ldots = n_{\nu+1} - n_\nu,$$

где $n_{\nu+1} \coloneqq n_1 + 3$. Это означает, что выполняется одно из условий: $n_A \coloneqq \{n_1\}$, то есть индикатор состоит из одного элемента; $n_A \coloneqq \{0, 1, 2\}$, то есть индикатор состоит из трех элементов.

В первом случае аппроксимационная теорема для однородного уравнения трехсторонней свертки (1) справедлива так как уравнение (1) в этом случае равносильно однородному уравнению

$$\langle S, f(z + \omega_q^0 h) + f(z + \omega_q^1 h) + f(z + \omega_q^2 h)\rangle = 0.$$

Действительно, система линейных уравнений

$$a_0 + \omega_q^n a_1 + \omega_q^{2n} a_2 = b_n, \quad n \in \{0, 1, 2\}$$

в рассматриваемом случае имеет единственное решение $a_0 = a_1 = a_2 = b_0/3$.

Рассмотрим второй случай. После кратного дифференцирования функции $\psi(h) \coloneqq \langle S, AT_h(f)\rangle$ по h получаем

$$\psi^{(n)}(h) \coloneqq \left\langle S, a_0 f^{(n)}(z+\omega_q^0 h) + \omega_q^n a_1 f^{(n)}(z+\omega_q^1 h) + \omega_q^{2n} a_2 f^{(n)}(z+\omega_q^2 h)\right\rangle,$$
$$\psi^{(n)}(0) \coloneqq \left\langle S, (a_0 + \omega_q^n a_1 + \omega_q^{2n} a_2) f^{(n)}\right\rangle = b_n \left\langle S, f^{(n)}\right\rangle.$$

Если f является решением однородного уравнения трехсторонней свертки (1), то $\psi^{(n)}(h) = 0$ для любого h из окрестности нуля, значит, $b_n \left\langle S, f^{(n)}\right\rangle = 0$ для любого $n \in \{0,1,\ldots\}$. Так как во втором случае все коэффициенты b_n отличны от нуля, то $\left\langle S, f^{(n)}\right\rangle = 0$ для любого $n \in \{0,1,\ldots\}$ Это означает, что функция f удовлетворяет уравнению $\langle S, T_h(f)\rangle = 0$. Следовательно, однородное уравнение трехсторонней свертки (1) во втором случае равносильно однородному уравнению свертки $\langle S, T_h(f)\rangle = 0$.

Необходимость. Рассмотрим произвольное однородное уравнение трехсторонней свертки

$$\left\langle S, \sum_{n=0}^{2} a_n f(z+\omega_3^n h)\right\rangle = 0, \quad f \in O(\Omega), \tag{3}$$

с индикатором $n_A \coloneqq \{n_1, n_2\}$. Предположим, что аппроксимационная теорема для однородного уравнения трехсторонней свертки (3) справедлива при любом выборе выпуклой области Ω и функционала S. Дополним индикатор n_A двумя элементами $n_3 \coloneqq n_1 + 3$ и $n_4 \coloneqq n_2 + 3$. Замечаем, что $0 < n_3 - n_2 = 3 - (n_2 - n_1) < 3$ и $0 < n_4 - n_3 = n_2 - n_1 < 3$, значит,

$$0 < n_{k+1} - n_k < 3 \tag{4}$$

при любом $k \in \{1,2,3\}$. Условие периодичности индикатора $n_A \coloneqq \{n_1, n_2\}$ в рассматриваемом случае равносильно условию

$$n_2 - n_1 = n_3 - n_2 = n_4 - n_3.$$

Допустим, что это условие нарушено. Тогда существует такое $s \in \{1,2\}$, что $n_{s+1} - n_s < n_{s+2} - n_{s+1}$ или

$$2n_{s+1} - n_s < n_{s+2}. \tag{5}$$

Выберем произвольное число $\theta \in (0, \pi/3)$ и обозначим символом G_0 угловую область $\{z : |\arg z| < \theta\}$, а символом G_0' обозначим угловую область $\{z : |\arg z - \pi/3| < \pi/3 - \theta\}$. Пусть

$$G_1 \coloneqq \omega_3^1 G_0, \quad G_2 \coloneqq \omega_3^2 G_0, \quad G_1' \coloneqq \omega_3^1 G_0', \quad G_2' \coloneqq \omega_3^2 G_0',$$
$$G = G_0 \cup G_1 \cup G_2, \quad G' = G_0' \cup G_1' \cup G_2'.$$

Согласно свойствам квазиполиномов (см. [3, теорема 1.2.10]) нули $z_m^{(k)}$ целой 3-симметричной функции

$$e(z^3) \coloneqq \sum_{k=0}^{2} \exp \omega_3^k z$$

имеют вид

$$z_m^{(k)} = \frac{2\pi m i}{\omega_3^{k+1} - \omega_3^k} + c_k + \delta_m^{(k)}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad k \in \{0,1,2\},$$

где $|\delta_m^{(k)}| < e^{-\varepsilon_0 m}$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и всех достаточно больших m. Лучи

$$z = \frac{2\pi i}{\omega_3^{k+1} - \omega_3^k} t, \quad k \in \{0,1,2\},$$

являются серединными для угловых областей G_0', G_1', G_2' и при этом $G' = \mathbb{C} \setminus \bar{G}$. Значит, лишь конечное число нулей 3-симметричного квазиполинома $e(z^3)$ лежит в замыкании $\bar{G}$ множества G.

Следовательно, при надлежащем выборе 3-симметричного полинома $p(z^3)$ все нули целой 3-симметричной функции

$$A(z^3) := \frac{e(z^3)}{p(z^3)} = \frac{1}{p(z^3)} \sum_{k=0}^{2} \exp \omega_3^k z$$

будут лежать в множестве $G' = \mathbb{C} \setminus \bar{G}$. При этом все нули целой 3-симметричной функции

$$B(z^3) := \frac{1}{p(-z^3)} \sum_{k=0}^{2} \exp \omega_6^{2k+1} z,$$

где $\omega_6 := \exp \frac{\pi}{3} i$, будут лежать в множестве G. Сопряженные диаграммы $\bar{D}_A$, $\bar{D}_B$ функций $A(z^3)$ и $B(z^3)$ совпадают с правильными 3-угольниками с вершинами в точках

$$z_{0,A} = \omega_6^0 = \omega_3^0, \quad z_{1,A} = \omega_6^2 = \omega_3^1, \quad z_{2,A} = \omega_6^4 = \omega_3^2$$

и в точках

$$z_{0,B} = \omega_6^1, \quad z_{1,B} = \omega_6^3, \quad z_{2,B} = \omega_6^5$$

соответственно. Кроме того, $\bar{D}_B = \omega_6 \bar{D}_A$. Пусть ς — вершина правильного шестиугольника $\bar{D}_A \cap \bar{D}_B$, лежащая на пересечении двух прямых: первая из этих прямых проходит через точки $z_{0,A} := 1$, $z_{1,A} := \omega_3$ и задается уравнением $\operatorname{Re} \omega_6^{-1} z = \cos \frac{\pi}{3}$, а вторая прямая проходит через точки $z_{0,B} := \omega_6$, $z_{2,B} := \omega_6^5 = \bar{\omega}_6$ и задается уравнением $\operatorname{Re} z = \cos \frac{\pi}{3}$. Решая систему из этих уравнений, получаем

$$\varsigma = \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Выберем $r \in (r', r'')$, где

$$r' := |\varsigma + 1| = \left| \frac{3}{2} + i \frac{1}{2\sqrt{3}} \right| = \sqrt{\frac{7}{3}}, r'' := 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

Ясно, что $1 < r' < r''$. Стало быть, сопряженные диаграммы $\bar{D}_A$, $\bar{D}_B$ функций $A(z^3)$ и $B(z^3)$ лежат в круговой области $\Omega_r := \{z : |z| < r\}$. Значит,

$$A(z^3), B(z^3) \in P(\Omega_r).$$

Сопряженная диаграмма $\bar{D}_{AB}$ произведения $A(z^3)B(z^3)$ совпадает с правильным шестиугольником. Вершины этого шестиугольника

$$\omega_6^0 + \omega_6^1, \quad \omega_6^1 + \omega_6^2, \quad \omega_6^2 + \omega_6^3, \quad \omega_6^3 + \omega_6^4, \quad \omega_6^4 + \omega_6^5, \quad \omega_6^5 + \omega_6^6$$

лежат вне области Ω_r. Действительно, для любых $k \in \{0, \dots, 5\}$ имеем

$$|\omega_6^k + \omega_6^{k+1}|^2 = \left(\cos \frac{\pi k}{3} + \cos \frac{\pi(k+1)}{3} \right)^2 + \left(\sin \frac{\pi k}{3} + \sin \frac{\pi(k+1)}{3} \right)^2 =$$
$$= 2 + 2 \left(\cos \frac{\pi k}{3} \cos \frac{\pi(k+1)}{3} + \sin \frac{\pi k}{3} \sin \frac{\pi(k+1)}{3} \right) = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{3} = 3.$$

При этом по свойствам квазиполиномов вдоль лучей

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(\omega_6^k + \omega_6^{k+1}), \quad k \in \{0, \dots, 5\}$$

выполняются асимптотические оценки

$$A(z^3)B(z^3) > \exp\{\sqrt{3}|z| - o(1)|z|\}, \quad |z| \to +\infty. \tag{6}$$

Положим

$$a(z^3) := \sum_{k=0}^{5} \exp\{\omega_6^k \varsigma z\}, \quad \varphi(z) := A(z^3) + z^{n_{s+1} - n_s} B(z^3)$$

и рассмотрим целую функцию

$$F(z) := z^{n_{s+1}} a(z^3) \varphi(z) = z^{n_{s+1}} a(z^3) A(z^3) + z^{2n_{s+1} - n_s} a(z^3) B(z^3).$$

Сопряженная диаграмма функции $a(z^3)$ совпадает с шестиугольником $\bar{D}_A \cap \bar{D}_B$, а сопряженная диаграмма функции $\varphi(z)$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $\bar{D}_A \cup \bar{D}_B$, значит, сопряженная диаграмма $\bar{D}_F$ функции $F(z)$ совпадает с выпуклой оболочкой множества

$$(\bar{D}_A \cap \bar{D}_B + \bar{D}_A) \cup (\bar{D}_A \cap \bar{D}_B + \bar{D}_B).$$

Из геометрических соображений вытекает, что множество $\bar{D}_F$ лежит в круге $|z| \leqslant r' := |\varsigma + 1|$. Значит, целая функция $F(z)$ тоже принадлежит пространству $P(\Omega_r)$ и, следовательно, 2-функция

$$\boldsymbol{a}(z) := \begin{cases} (0, a(z)), & \text{если } s = 1, \\ (za(z), 0), & \text{если } s = 2, \end{cases}$$

принадлежит пространству $\boldsymbol{O}_\varphi := \boldsymbol{O}_\varphi(\Omega_r)$.

Предположим, что произвольное решение $f \in O(\Omega_r)$ однородного уравнения 3 можно аппроксимировать элементарными решениями этого уравнения в топологии пространства $O(\Omega_r)$. Тогда в силу предложения 1 и теоремы 2 2-полиномы плотны в пространстве $\boldsymbol{O}_\varphi$. Значит, существует обобщенная последовательность $\boldsymbol{p}_\sigma(z) := (p_{\sigma,1}(z), p_{\sigma,2}(z))$ 2-полиномов, сходящаяся к 2-функции $\boldsymbol{a}(z)$ в топологии пространства $\boldsymbol{O}_\varphi$. Значит, обобщенная последовательность

$$\Phi_\sigma(z) := p_\sigma(z)(A(z^3) + z^{n_{s+1}-n_s}B(z^3)) = (z^{n_1}p_{\sigma,1}(z^3) + z^{n_2}p_{\sigma,2}(z^3))(A(z^3) + z^{n_{s+1}-n_s}B(z^3))$$

сходится к функции $F(z)$ в топологии пространства $P(\Omega_r)$. При этом

$$p_\sigma(z) := z^{n_1}p_{\sigma,1}(z^3) + z^{n_2}p_{\sigma,2}(z^3) \to z^{n_{s+1}}a(z^3)$$

равномерно на компактах. Если $s = 1$, то в силу предложения 2

$$p_{\sigma,2}(z^3) = \frac{1}{3z^{n_2}} \sum_{k=0}^{2} \omega_3^{-n_2k} p_\sigma(\omega_3^k z) \to a(z^3) \tag{7}$$

равномерно на компактах. Если $s = 2$, то

$$p_{\sigma,1}(z^3) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{2} p_\sigma(\omega_3^k z) \to z^3 a(z^3) \tag{8}$$

равномерно на компактах. Ниже мы покажем, что соотношения (7) и (8) невозможны.

Воспользуемся представлением

$$\Phi_\sigma(z) = z^{k_s} P_\sigma(z^3) B(z^3) + C_\sigma(z), \tag{9}$$

где

$$k_s := \begin{cases} 2n_{s+1} - n_s, & \text{если } s = 1, \\ 2n_{s+1} - n_s - 3, & \text{если } s = 2, \end{cases} \qquad P_\sigma(z^3) := \begin{cases} p_{\sigma,2}(z^3), & \text{если } s = 1, \\ p_{\sigma,0}(z^3), & \text{если } s = 2, \end{cases}$$

$$C_\sigma(z) = \sum_{n \in n_A} z^n p_{\sigma,n}(z^3) A(z^3) + z^{n_s} p_{\sigma,n_s}(z^3) B(z^3).$$

Выберем $r_1 \in (r, r'')$ и рассмотрим множество

$$V := \{\psi \in P(\Omega_r) : |\psi(z)| \leqslant \exp r_1|z|\}.$$

Это множество является окрестностью нуля в $P(\Omega_r)$ (см. [1, теорема 3.3]). При некотором $M \geqslant 1$ все $\Phi_\sigma(z)$ принадлежат MV. Тогда для всех $z \in \mathbb{C}$ и всех $\sigma \in \sum$ будет выполняться неравенство

$$|\Phi_\sigma(z)| \leqslant M \exp r_1|z|.$$

Выберем $r_2 \in (r_1, r'')$ и рассмотрим целую 6-симметричную функцию

$$D(z^3) := \sum_{k=0}^{5} \exp[(r_2 - r_1)\gamma\omega_6^k z].$$

В силу (6) при некоторых $r_3 \in (0, r'' - r_2)$, $M' > 0$ на границе ∂G множества G имеет место равномерная по $\sigma \in \sum$ оценка

$$\left|\frac{D(z^3)\Phi_\sigma(z)}{A(z^3)B(z^3)}\right| \leqslant M' \exp[-r_3|z|]. \tag{10}$$

Отступим от границы множества G и рассмотрим множество $G_{\theta'} := \{z : |\arg z| < \theta', |z| > 1\} \subseteq G$, где $\theta' \in (0, \theta)$. Выберем произвольную точку $z \in G_{\theta'}$ и проинтегрируем функцию

$$\frac{\Phi_\sigma(h)D(h^3)h^{5-k_s}}{A(h^3)B(h^3)(h^3 - z^3)}$$

по положительно ориентированной границе $(\partial G)_+$ множества G. В силу (5) при $s = 1$ выполняются неравенства $k_s := 2n_2 - n_1 < n_3 \leqslant 4$, значит, $k_s \leqslant 3$. При $s = 2$ имеем $k_s := n_3 - n_2 = 3 - (n_2 - n_1) < 3$. Следовательно, интегрируемая функция аналитична в граничных точках множества G. Используя представление (9), получим

$$I_\sigma(z) = I_{\sigma,1}(z) + I_{\sigma,2}(z),$$

где

$$I_\sigma(z) := \int\limits_{(\partial G)_+} \frac{\Phi_\sigma(h)D(h^3)h^{5-k_s}}{A(h^3)B(h^3)(h^3 - z^3)}dh, \quad I_{\sigma,1}(z) := \int\limits_{(\partial G)_+} \frac{P_\sigma(h^3)D(h^3)h^5}{A(h^3)(h^3 - z^3)}dh,$$

$$I_{\sigma,2}(z) := \int\limits_{(\partial G)_+} \frac{C_\sigma(h)D(h^3)h^{5-k_s}}{A(h^3)B(h^3)(h^3 - z^3)}dh.$$

Из оценки (10) вытекает равномерная по $\sigma \in \sum$ по $z \in \partial G$ оценка

$$|I_\sigma(z)| \leqslant \mathrm{const}\,. \tag{11}$$

Поскольку все нули целой функции $A(z^3)$ лежат в $G' = \mathbb{C} \setminus \bar{G}$, то

$$I_{\sigma,1}(z) = \frac{P_\sigma(z^3)D(z^3)z^3}{A(z^3)} \sum_{k=0}^{2} \left(\frac{h^2}{3h^2}\right)\Big|_{h=\omega_3^k z} = \frac{P_\sigma(z^3)D(z^3)z^3}{A(z^3)}.$$

Покажем, что интеграл $I_{\sigma,2}(z)$ равен нулю. Действительно,

$$I_{\sigma,2}(z) = \sum_{n \in n_A} I'_{\sigma,n}(z) + I''_\sigma(z)$$

где

$$I'_{\sigma,n}(z) = \int\limits_{(\partial G)_+} \frac{p_{\sigma,n}(h^3)D(h^3)h^{5+n-k_s}}{B(h^3)(h^3 - z^3)}dh = -\int\limits_{(\partial G')_+} \frac{p_{\sigma,n}(h^3)D(h^3)h^{5+n-k_s}}{B(h^3)(h^3 - z^3)}dh,$$

$$I''_\sigma(z) = \int\limits_{(\partial G)_+} \frac{p_{\sigma,n_s}(h^3)D(h^3)h^{5+n_s-k_s}}{A(h^3)(h^3 - z^3)}dh.$$

Поскольку все нули целой функции $B(h^3)$ лежат в G и $z \in G_{\theta'} \subseteq G$, то $I'_{\sigma,n}(z) = 0$ для любого $n \in n_A$. При этом все нули целой функции $A(z^3)$ лежат в $G' = \mathbb{C} \setminus \bar{G}$, значит,

$$I''_\sigma(z) = \sum_{k=0}^{2} \int\limits_{(\partial G_k)_+} \frac{p_{\sigma,n_s}(h^3)D(h^3)h^{5+n_s-k_s}}{A(h^3)(h^3 - z^3)}dh =$$

$$= \frac{p_{\sigma,n_s}(z^3)D(z^3)}{A(z^3)} \sum_{k=0}^{2} \left(\frac{h^{5+n_s-k_s}}{3h^2}\right)\Big|_{h=\omega_3^k z} = \frac{p_{\sigma,n_s}(z^3)D(z^3)z^{3+n_s-k_s}}{3A(z^3)} \sum_{k=0}^{2} \omega_3^{k(n_s-k_s)} = 0,$$

так как целое число $l_s \coloneqq n_s - k_s$ не делится на 3 для любого $s \in \{1; 2\}$. Действительно, если $s = 1$, то в силу (4) и (5) имеем $-3 = n_1 - n_3 < l_s = -2n_2 < 0$. Если $s = 2$, то $-6 = n_2 - n_4 - 3 < l_s = 2n_2 - 2n_1 - 3 < -3$. Далее, в силу (11)

$$\left|z^3 P_\sigma(z^3) D(z^3)\right| \leqslant \mathrm{const}\ \left|A(z^3)\right|$$

для любого $z \in G_{\theta'}$ и любого $\sigma \in \Sigma$. Значит, в силу (7) и (8) для предельной функции имеем:

$$|z^3 a(z^3) D(h^3)| \leqslant \mathrm{const}\ |A(z^3)|, \qquad z \in G_{\theta'}, \quad s = 1;$$
$$|z^6 a(z^3) D(h^3)| \leqslant \mathrm{const}\ |A(z^3)|, \qquad z \in G_{\theta'}, \quad s = 2.$$

Но эти неравенства не могут выполняться для всех $z \in G_{\theta'}$, если θ и θ' выбраны достаточно близко к $\pi/3$, так как рост функций $z^3 a(z^3) D(z^3)$ и $z^6 a(z^3) D(z^3)$ на лучах $|\arg z| = \pi/3$ больше роста функции $A(z^3)$. Необходимость доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях// Мат. сб. — 1972. — *87 (129)*, № 4. — С. 459–489.
2. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях// Мат. сб. — 1972. — *88*, № 1. — С. 3–30.
3. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
4. *Шишкин А. Б.* Спектральный синтез для оператора, порождаемого умножением на степень независимой переменной// Мат. сб. — 1991. — *182*, № 6. — С. 828–848.
5. *Шишкин А. Б.* Проективное и инъективное описания в комплексной области. Двойственность// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2014. — *14*, № 1. — С. 47–65.
6. *Шишкин А. Б.* Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2016. — *447*. — С. 129–170.

Татаркин Александр Александрович
Кубанский государственный университет, Краснодар
E-mail: `tiamatory@gmail.com`

Шишкин Андрей Борисович
Кубанский государственный университет, Краснодар
E-mail: `shishkin-home@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 142–152
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-142-152

УДК 517.94, 517.984, 517.951

ОБ ОДНОЙ АБСТРАКТНОЙ ФОРМУЛЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ

© 2021 г. **Н. Г. ТОМИН, И. В. ТОМИНА**

Аннотация. В статье приведено доказательство абстрактной формулы регуляризованных следов дискретных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве, принадлежащей первому автору. Эта формула удобна для применений и является обобщением на случай следов высших порядков полученной ранее формулы первого регуляризованного следа. Рассмотрено применение полученной формулы к широкому классу дискретных операторов, действующих в пространстве Бергмана и в определенном смысле обобщающих оператор Грибова из реджеонной теории поля.

Ключевые слова: гильбертово пространство, дискретный оператор, линейный несамосопряженный оператор, спектральная теория, формула регуляризованного следа, пространство Бергмана, реджеонная теория поля, оператор Грибова.

AN ABSTRACT FORMULA FOR REGULARIZED TRACES OF DISCRETE OPERATORS AND ITS APPLICATIONS

© 2021 **N. G. TOMIN, I. V. TOMINA**

Abstract. In this paper, we prove an abstract formula for regularized traces of discrete operators in a separable Hilbert space. This formula is a generalization of the formula for the first regularized trace to the case of higher-order traces. We also discuss applications of the formula obtained to a wide class of discrete operators acting in the Bergman space that are generalizations of the Gribov operator from Reggeon field theory.

Keywords and phrases: Hilbert space, discrete operator, linear non-self-adjoint operator, spectral theory, regularized trace formula, Bergman space, Reggeon field theory, Gribov operator.

AMS Subject Classification: 35P20, 47A10, 47B37, 32K15

1. Введение. В статье приведено доказательство принадлежащей Н. Г. Томину абстрактной формулы регуляризованных следов дискретных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве. Эта формула удобна для применений и является обобщением на случай следов высших порядков полученной в 2001 г. формулы первого регуляризованного следа (см. [9]).

1.1. Предварительные сведения. Пусть H — комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в H, $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n\leqslant\ldots\lambda_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$, $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортонормированная полная система в H. Тогда при любом $\alpha\in\mathbb{R}$ оператор

$$T^\alpha=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^\alpha(\cdot,u_n)u_n,\quad \mathcal{D}(T^\alpha)=\left\{f\in H:\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^{2\alpha}|(f,u_n)|^2<+\infty\right\},$$

является линейным самосопряженным в H оператором с собственными числами λ_n^α и соответствующими им собственными векторами u_n, $n\in\mathbb{N}$. При $\alpha<0$ оператор T^α ограничен и компактен, при $\alpha=0$ совпадает с единичным оператором E в H, при $\alpha>0$ является дискретным в H, то есть его резольвента компактна в H. Полагаем $T = T^1$, тогда оператор T^α есть степень порядка α от положительного самосопряженного в гильбертовом пространстве H оператора T. Пусть $R_\lambda = (T - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора T. Через $\{\lambda'_n\}_{n=1}^{+\infty}$ обозначаем последовательность всех попарно различных собственных чисел оператора T, занумерованных в порядке возрастания. Далее, ν'_n есть кратность собственного числа λ'_n, $\Delta\lambda'_n = \lambda'_{n+1} - \lambda'_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Для замкнутого линейного оператора P, действующего в H, при $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ и $\lambda \neq \lambda_n$ $(n \in \mathbb{N})$ мы говорим, что оператор P подчиняется оператору $(T - \lambda E)^\gamma$ и пишем $P \prec (T - \lambda E)^\gamma$, если $\mathcal{D}(P) \supset \mathcal{D}(T - \lambda E) = \mathcal{D}(T)$ и $\|Pu\| \leqslant A_0\|(T - \lambda E)^\gamma u\|$ при некотором $A_0 > 0$ и любом $u \in \mathcal{D}(T)$. Отметим, что $P \prec (T - \lambda E)^\gamma$ в том и только том случае, когда линейный оператор $P(T - \lambda E)^{-\gamma}$ может быть продолжен до ограниченного на H оператора.

Рассмотрим возмущенный оператор $\widetilde{T} = T + P$ и его собственные числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$, занумерованные в порядке возрастания вещественных частей с учетом алгебраических кратностей.

Через $|\cdot|_1$ и $\mathrm{Tr}(\cdot)$ обозначаем соответственно ядерную норму и след ядерного оператора в гильбертовом пространстве H (сведения о ядерных операторах в гильбертовых пространствах и их свойствах можно найти, например, в [2]).

1.2. Формулировки теорем. Следующая теорема анонсирована в [6] и доказана в [7].

Теорема 1. *Пусть*

$$0 < s \leqslant 1, \quad l \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant (1-s)l/(l+1), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{-s} < +\infty, \quad P \prec T^\gamma.$$

Тогда оператор $\widetilde{T} = T + P$ имеет ядерную резольвенту, и существуют подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ и последовательность вещественных чисел $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, для которых выполняются неравенства $\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_m+1}$ и справедлива формула следов

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n - \lambda_n) + \oint\limits_{\Gamma_m}\sum_{j=1}^{l}\frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j}\,\mathrm{Tr}((PR_\lambda)^j)d\lambda\right) = 0, \tag{1}$$

где Γ_m — пробегаемая в положительном направлении окружность радиуса a_m с центром в нуле на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В частности, при $l = 1$ формула (1) принимает вид

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n - \lambda_n - (Pu_n, u_n)) = 0. \tag{2}$$

Ранее, чем в [7], а именно, в работах [4, 5] было доказано, что если оператор T имеет ядерную резольвенту, а P ограничен в H, то для возмущенного оператора $\widetilde{T} = T + P$ при некотором выборе последовательностей $\{n_m\}_{m=1}^{+\infty}$ и $\{a_m\}_{m=1}^{+\infty}$ выполняется формула следов (2). Этот результат является частным случаем теоремы 1 при $s = 1$, $l = 1$.

Отметим, что во всех указанных выше статьях [4–7], как и в ряде других работ, приводятся условия, обеспечивающие лишь существование некоторой подпоследовательности натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{+\infty}$, удовлетворяющей условию $\lambda_{n_m} < \lambda_{n_m+1}$ при всех $m \in \mathbb{N}$ и такой, что при соответствующем выборе последовательности $\{a_m\}_{m=1}^{+\infty}$ справедлива формула следов (1) или ее частный случай (2). В связи с этим возникает важная для приложений задача нахождения удобных для проверки условий, при которых формула следов (1) выполняется не для одной, а для всех таких последовательностей $\{n_m\}_{m=1}^{+\infty}$ при надлежащем выборе последовательностей $\{a_m\}_{m=1}^{+\infty}$, то есть приобретает вид

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{\lambda_n\leqslant\lambda'_m}(\mu_n - \lambda_n) + \oint\limits_{\Gamma_m}\sum_{j=1}^{l}\frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j}\,\mathrm{Tr}((PR_\lambda)^j)d\lambda\right) = 0 \tag{3}$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\sum_{\lambda_n\leqslant\lambda}(\mu_n-\lambda_n)+\oint_{\Gamma_m}\sum_{j=1}^{l}\frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij}\,\mathrm{Tr}((PR_\lambda)^j)d\lambda\right)=0.$$

Для $l=1$ в [8] анонсирована и в [9] доказана следующая ниже теорема 2. В ней приведены удобные для проверки условия, при выполнении которых формула следов (2) справедлива для любой последовательности $\{n_m\}_{m=1}^{+\infty}$, удовлетворяющей неравенству $\lambda_{n_m}<\lambda_{n_m+1}$ или, что то же самое, для последовательности $\{n_m\}_{m=1}^{+\infty}$ такой, что $\lambda_{n_m}=\lambda'_m$ при любом $m\in\mathbb{N}$.

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия*:

(i) $\Delta\lambda'_n\geqslant C_1(\lambda'_{n+1})^q$ *при* $q\in(0,1)$, $C_1>0$ *и всех достаточно больших* n;

(ii) $\nu'_n\leqslant C_2(\lambda'_n)^\beta$ *при* $0\leqslant\beta<q$, $C_2>0$ *и всех достаточно больших* n;

(iii) $P\prec T^\gamma$ *при* $0\leqslant\gamma<(q-\beta)/2$.

Тогда оператор $\widetilde{T}=T+P$ *имеет ядерную резольвенту, и для его собственных чисел* μ_n *справедлива формула следов*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{\lambda_n\leqslant\lambda}(\mu_n-\lambda_n-(Pu_n,u_n))=0. \tag{4}$$

Недостатком этой теоремы является то, что, в отличие от теоремы 1, в ней рассматривается лишь случай первого регуляризованного следа $l=1$. Однако потенциал статьи [9] этим случаем не исчерпывается. Справедлива следующая принадлежащая первому автору настоящей статьи основная теорема, обобщающая теорему 2 на случай $l>1$.

Теорема 3. *Предположим, что выполняются следующие условия*:

(i) $\Delta\lambda'_n\geqslant C_1(\lambda'_{n+1})^q$ *при* $q\in(0,1)$, $C_1>0$ *и всех достаточно больших* n;

(ii) $\nu'_n\leqslant C_2(\lambda'_n)^\beta$ *при* $0\leqslant\beta<q$, $C_2>0$ *и всех достаточно больших* n;

(iii) $P\prec T^\gamma$ *при* $0\leqslant\gamma<q-\beta$.

Тогда возмущенный оператор $\widetilde{T}=T+P$ *имеет ядерную резольвенту, и при любом натуральном* $l>\gamma/(q-\beta-\gamma)$ *для его собственных чисел* μ_n, *занумерованных натуральными числами в порядке возрастания вещественных частей с учетом алгебраических кратностей, справедлива формула следов*

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{\lambda_n\leqslant\lambda'_m}(\mu_n-\lambda_n)+\oint_{\Gamma_m}\sum_{j=1}^{l}\frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij}\,\mathrm{Tr}((PR_\lambda)^j)d\lambda\right)=0, \tag{5}$$

где Γ_m — *пробегаемая в положительном направлении окружность радиуса* $r_m=(\lambda'_m+\lambda'_{m+1})/2$ *с центром в нуле на комплексной плоскости* $\mathbb{C}$.

Условия на параметры, при которых согласно теореме 3 справедлива формула следов (5), могут быть представлены в другом, иногда более удобном виде:

$$0\leqslant\beta<q<1,\quad l\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant\gamma<(q-\beta)l/(l+1). \tag{6}$$

Замечание 1. Условие положительности невозмущенного оператора T не является существенным. Теорема 3, как и ее частный случай теорема 2, остается верной и при $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n\leqslant\ldots$, $\lambda_n\to+\infty$, если только при $\lambda_1\leqslant0$ условие (iii) заменить следующим условием:

(iv) $P\prec(T-\lambda_0E)^\gamma$ при $0\leqslant\gamma<q-\beta$ и каком-либо $\lambda_0<\lambda_1$.

Отметим, что теорема 3 была анонсирована ранее в [13], однако условие, налагаемое в этой теореме на параметр l и имеющее вид $l>\gamma/(q-\beta-\gamma)$ или, согласно (6), $0\leqslant\gamma<(q-\beta)l/(l+1)$, в [13] в случае $\beta(l-1)>0$ было записано неточно, и мы исправляем здесь эту неточность.

Всюду далее через c обозначаем различные положительные постоянные, не зависящие от основных переменных, входящих в соответствующие неравенства.

1.3. Вывод основной абстрактной формулы следов. Приведем доказательство основной теоремы 3.

Условия теоремы 3 отличаются от условий теоремы 2 только тем, что в них вместо неравенства $0 \leqslant \gamma < (q-\beta)/2$ рассматривается неравенство $0 \leqslant \gamma < q-\beta$. Формально вывод формулы следов (4) или, что то же самое, формулы следов (5) при $l=1$, проводился в [9] при условии $0 \leqslant \gamma < (q-\beta)/2$. Однако, как показывает анализ доказательства теоремы 2 в [9], все его этапы, результаты и выводы остаются верными и в общем случае $0 \leqslant \gamma < q-\beta$, за исключением доказательства неравенства (19) статьи [9] (или, что то же самое, приведенного ниже неравенства (10)); доказательство этого неравенства в [9] проведено для случая $0 \leqslant \gamma < 1/2$ и без корректировки может быть распространено только на случай $\gamma = 1/2$. Таким образом, в [9] содержится доказательство теоремы 3 при $l=1$, и в нем практически все подготовлено для ее доказательства при $l \geqslant 2$. Мы приводим здесь вывод формулы следов (5) при всех $l \geqslant 1$ одновременно, в случае $l=1$ он, в сущности, повторяет ее вывод в [9], а в случае $l \geqslant 2$ может рассматриваться как дополнение к доказательству теоремы 2 в [9]. Далее мы стараемся придерживаться обозначений и терминологии статьи [9], для уточнения деталей отсылаем к указанной статье.

Применяя формулы (15) и (14) работы [9] к контурам Γ_m, получаем согласно [9], что существует натуральное число N такое, что для всех $m \geqslant N$ при любом натуральном l справедлива формула

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda'_m} (\mu_n - \lambda_n) + \sum_{j=1}^{l} \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j} \oint\limits_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} Q_\lambda^j d\lambda = \sum_{j=1+1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2\pi i j} \oint\limits_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} Q_\lambda^j d\lambda \equiv J_l(\Gamma_m), \tag{7}$$

где $Q_\lambda = PR_\lambda$ и, в отличие от формул (14) и (15) из [9], направление обхода окружности Γ_m здесь и далее принимается положительным (против часовой стрелки).

В силу условия (iii) теоремы 3 линейный оператор $PT^{-\gamma}$ ограничен в H и $\|PT^{-\gamma}\| \leqslant A_0$, где $\|\cdot\|$ — обычная норма линейного ограниченного оператора в H. В [9] доказано, что операторы R_λ, Q_λ, $B_\lambda \equiv T^\gamma R_\lambda$ являются ядерными в H операторами в области $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \lambda_n$ при всех $n \in \mathbb{N}\}$, а оператор $\widetilde{R_\lambda} = (\widetilde{T} - \lambda E)^{-1}$ является ядерным в H в области

$$\Omega' = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \|B_\lambda\| < 1/A_0\Big\} = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_n| > A_0 \lambda_n^\gamma \text{ при всех } n \in \mathbb{N}\Big\} \subset \Omega.$$

Так как $Q_\lambda = PT^{-\gamma}B_\lambda$, то при всех $\lambda \in \Omega$ выполняются неравенства $\|Q_\lambda\| \leqslant A_0\|B_\lambda\|$ и $|Q_\lambda|_1 \leqslant A_0|B_\lambda|_1$. Согласно [9] окружности Γ_m при всех $m \geqslant N$ лежат в области Ω' и, следовательно, являются компактными множествами в Ω', поэтому для всех таких m выполняются неравенства $\max_{\Gamma_m} |B_\lambda|_1 < 1/A_0$ и

$$\max_{\Gamma_m} |Q_\lambda|_1 \leqslant A_0 \max_{\Gamma_m} |B_\lambda|_1 < 1. \tag{8}$$

С учетом (7), (8) и известных свойств ядерных операторов в гильбертовом пространстве [2] (включая неравенство $|\operatorname{Tr} A| \leqslant |A|_1$, справедливое для любого ядерного в H оператора A) получаем, что для всех $m \geqslant N$ при любом $l \geqslant 1$ выполняются неравенства

$$2(l+1)\pi |J_l(\Gamma_m)| \leqslant \oint\limits_{\Gamma_m} \sum_{j=l+1}^{\infty} |\operatorname{Tr} Q_\lambda^j||d\lambda| \leqslant \oint\limits_{\Gamma_m} \sum_{j=l+1}^{\infty} \|Q_\lambda\||Q_\lambda|_1^{j-1}|d\lambda| \leqslant \oint\limits_{\Gamma_m} \frac{\|Q_\lambda\||Q_\lambda|_1^l}{1-|Q_\lambda|_1}|d\lambda|,$$

откуда для таких m и l вытекает следующая оценка при $c_l(\Gamma_m) = A_0^{l+1}/(2(l+1)\pi(1-\max_{\Gamma_m}|Q_\lambda|_1))$:

$$|J_l(\Gamma_m)| \leqslant c_l(\Gamma_m)\Big(\max_{\Gamma_m}|B_\lambda|_1\Big)^l \oint\limits_{\Gamma_m} \|B_\lambda\||d\lambda|. \tag{9}$$

Согласно формулам (19) и (24) статьи [9] при всех $m \geqslant N$ справедливы неравенства

$$\oint\limits_{\Gamma_m} \|B_\lambda\||d\lambda| \leqslant c r_m^\gamma \ln(1+r_m), \tag{10}$$

$$\max_{\Gamma_m} |B_\lambda|_1 \leqslant c r_m^{-\delta} \ln(1+r_m), \tag{11}$$

где $\delta = q - \beta - \gamma \in (0, 1)$. Ниже, в конце доказательства теоремы, будет приведен вывод неравенства (10), охватывающий не рассмотренный в [9] случай $1/2 \leqslant \gamma < 1$.

Из (11) и левой части двойного неравенства (8) следует, что $\max_{\Gamma_m} |Q_\lambda|_1 \to 0$ при $m \to +\infty$, поэтому последовательность $\{c_l(\Gamma_m)\}_{m=N}^{+\infty}$ имеет конечный предел при $m \to +\infty$ и, следовательно, ограничена:

$$c_l(\Gamma_m) \leqslant c, \tag{12}$$

где положительная постоянная c не зависит от m.

Применяя неравенства (9), (10), (11) и (12), находим, что при всех $m \geqslant N$ для любого целого $l \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$|J_l(\Gamma_m)| \leqslant c r_m^{\gamma - \delta l} \ln^{l+1}(1 + r_m), \tag{13}$$

где положительная постоянная c не зависит от m. Так как по условию теоремы имеем $l > \gamma/\delta$, то $\gamma - \delta l < 0$ и из (13) получаем $J_l(\Gamma_m) \to 0$ при $m \to +\infty$. Но тогда из (7) следует, что для любого натурального числа $l > \gamma/(q - \beta - \gamma)$ выполняется предельное соотношение (5), при $0 \leqslant \gamma < (q - \beta)/2$ и $l = 1$ равносильное (4).

Для завершения доказательства теоремы остается доказать неравенство (10) в случае $1/2 \leqslant \gamma < 1$. Из приведенного для случая $0 \leqslant \gamma < 1/2$ в [9] доказательства неравенства (10) следует, что оно справедливо для любого $\gamma \in [0, 1)$, для которого выполняется неравенство

$$\|B_\lambda\| \leqslant \frac{c r_m^{\gamma - 1}}{\psi_m(\theta)}, \tag{14}$$

где $m \geqslant N$, $\lambda = r_m e^{i\theta} \in \Gamma_m$, $|\theta| \leqslant \pi$, c — положительная постоянная, зависящая только от γ, $\psi_m(\theta) = \max\{|\sin\theta|, v_m\}$ при $|\theta| < \pi/2$ и $\psi_m(\theta) = 1$ при $\pi/2 \leqslant |\theta| \leqslant \pi$; $v_m = \Delta\lambda'_m/(2r_m) \in [0{,}5 C_1 r_m^{q-1}, 1)$. Мы приведем здесь доказательство неравенства (14) в общем случае $0 \leqslant \gamma < 1$. Даже в случае $0 \leqslant \gamma < 1/2$ это доказательство отличается от изложенного в [9].

Пусть $0 \leqslant \gamma < 1$, $m \geqslant N$, $\lambda = r_m e^{i\theta} \in \Gamma_m$, $|\theta| \leqslant \pi$. Тогда

$$\|B_\lambda\| = \max_{n \geqslant 1} \frac{(\lambda'_n)^\gamma}{|\lambda'_n - \lambda|} \leqslant \max_{u \in F_m} \varphi(u), \tag{15}$$

где функция $\varphi(u) = u^\gamma/|u - \lambda| = u^\gamma/\sqrt{(u - r_m\cos\theta)^2 + r_m^2 \sin^2\theta}$ определена и непрерывна на множестве $F \supset F_m \equiv [0, \lambda'_m] \cup [\lambda'_{m+1}, +\infty)$, где $F = [0, +\infty)$ при $0 < |\theta| \leqslant \pi$ и $F = [0, r_m) \cup (r_m, +\infty)$ при $\theta = 0$.

Функция $\varphi(u)$ непрерывна на ограниченном замкнутом промежутке $[0, \lambda'_m]$ и на неограниченном замкнутом промежутке $[\lambda'_{m+1}, +\infty)$, причем в силу неравенства $0 \leqslant \gamma < 1$ выполняется предельное соотношение $\varphi(u) \to 0$ при $u \to +\infty$. Поэтому функция $\varphi(u)$ ограничена и достигает своего наибольшего значения на каждом из этих промежутков, а следовательно, и на их объединении, то есть на множестве F_m. С учетом дифференцируемости функции $\varphi(u)$ при всех $u \in F_m \setminus \{0\}$, равенства $\varphi(0) = 0$, а также справедливого всюду на $F_m \setminus \{0\}$ неравенства $\varphi(u) > 0$ и предельного соотношения $\varphi(u) \to 0$ при $u \to +\infty$, получаем, что наибольшее значение функции $\varphi(u)$ на множестве F_m может достигаться лишь в граничных точках λ'_m, λ'_{m+1} множества F_m и в нулях функции $\varphi'(u)$, лежащих внутри множества F_m, то есть принадлежащих множеству $F_m^0 = (0, \lambda'_m) \cup (\lambda'_{m+1}, +\infty)$. Для любых $u \in F \setminus \{0\}$, в частности, для любых $u \in F_m^0$, справедливо равенство $\varphi'(u) = u^{\gamma-1} p(u)/|u - \lambda|^3$, где $p(u) = (\gamma - 1)u^2 + (1 - 2\gamma) u r_m \cos\theta + \gamma r_m^2$. Следовательно, принадлежащие F_m^0 нули функции $\varphi'(u)$ совпадают с входящими в множество F_m^0 положительными корнями квадратного трехчлена $p(u)$.

Так как $0 \leqslant \gamma < 1$, то старший коэффициент $\gamma - 1$ квадратного трехчлена $p(u)$ отрицателен, а $p(0) = \gamma r_m^2 \geqslant 0$, поэтому $p(u)$ не может иметь более одного положительного корня, и если такой корень существует, то он является большим корнем для $p(u)$, то есть равен

$$u_\theta = \frac{\sqrt{1 - (2\gamma - 1)^2 \sin^2\theta} - (2\gamma - 1)\cos\theta}{2(1 - \gamma)} \cdot r_m \tag{16}$$

и, следовательно, удовлетворяет неравенству

$$u_\theta \leqslant \frac{1+|2\gamma-1|}{2(1-\gamma)} \cdot r_m = \max\left\{1, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\} \cdot r_m. \tag{17}$$

Ввиду (15) получаем, что если $0 \leqslant \gamma < 1$, $m \geqslant N$, $\lambda = r_m e^{i\theta} \in \Gamma_m$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ и u_θ находится по формуле (16), то справедливо неравенство

$$\|B_\lambda\| \leqslant \max_{u\in W} \varphi(u), \tag{18}$$

где $W = \{\lambda'_m, \lambda'_{m+1}\}$, если $u_\theta \notin F_m^0$ и $W = \{\lambda'_m, \lambda'_{m+1}, u_\theta\}$, если $u_\theta \in F_m^0$.

Так как $\lambda'_m < r_m$, $\lambda'_{m+1} < 2r_m$ и для $u_\theta \in F_m^0$ справедливо неравенство (17), то для любого $u \in W$ находим $\varphi(u) \leqslant C_0(\gamma) r_m^\gamma / |u-\lambda|$, где $C_0(\gamma) = \max\{2^\gamma, (\gamma/(1-\gamma))^\gamma\}$.

Нетрудно проверить, что при любых $u \in F_m$ и $\lambda = r_m e^{i\theta} \in \Gamma_m$, $|\theta| \leqslant \pi$, выполняется использовавшееся ранее в [9] неравенство $|u-\lambda| \geqslant r_m \psi_m(\theta)$. Так как $W \subset F_m$, то, применяя это неравенство, получаем, что при всех $u \in W$ справедливо неравенство $\varphi(u) \leqslant C_0(\gamma) r_m^\gamma / (r_m \psi_m(\theta))$. Ввиду (18) это означает, что неравенство (14) справедливо при $c = C_0(\gamma) = \max\{2^\gamma, (\gamma/(1-\gamma))^\gamma\}$. Тем самым неравенство (14) доказано при всех $\gamma \in [0,1)$, причем при $0 \leqslant \gamma < 1/2$ с тем же числовым множителем $c = 2^\gamma$, который был получен в [9].

Дальнейший вывод неравенства (10) на основе (14) при $0 \leqslant \gamma < 1$ повторяет ее вывод в [9] при $0 \leqslant \gamma < 1/2$ с учетом соответствующего значения числового множителя c в (14).

Теорема доказана.

2. Приложения. Теорема 3 удобна для получения конкретных формул регуляризованных следов, так как выполнение ее условий во многих важных для приложений случаях нетрудно проверить. Приведем здесь лишь одно из таких применений этой теоремы, а именно, выведем конкретные формулы регуляризованных следов для некоторого обобщения оператора Грибова в пространстве Бергмана аналитических функций на комплексной плоскости.

2.1. Обозначения и предварительные сведения. Пусть B — гильбертово пространство Бергмана [11], состоящее из аналитических на $\mathbb{C}$ функций $f(z)$ с конечной нормой $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$, где

$$(f,g) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)} e^{-|z|^2} dx dy \text{ —}$$

скалярное произведение в B. Функции $e_n(z) = z^n/\sqrt{n!}$ при $n \geqslant 0$ образуют полную ортонормированную систему в B. При любых целых неотрицательных n и k полагаем

$$\lambda_{n,k} = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1), & \text{если } n \geqslant 0 \text{ и } k \geqslant 1, \\ 1, & \text{если } n \geqslant 0 \text{ и } k = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Из (19) следует равенство

$$\Delta\lambda_{n,k} \equiv \lambda_{n+1,k} - \lambda_{n,k} = k\lambda_{n,k-1} \quad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{20}$$

Пусть a и a^* — стандартные операторы Бозе уничтожения и рождения в пространстве Бергмана B, определенные формулами $(af)(z) = f'(z)$, $(a^*f)(z) = zf(z)$ и заданные на максимальных областях определения $D(a) = \{f \in B : af \in B\}$ и $D(a^*) = \{f \in B : a^*f \in B\}$ соответственно. Отметим, что $D(a) = D(a^*)$, операторы a, a^* неперестановочны и удовлетворяют стандартному коммутационному соотношению

$$aa^* - a^*a = E, \tag{21}$$

где E — единичный оператор в H.

При $k \in \mathbb{N}$ вводим в B оператор $G_k = a^{*k}a^k$ и для всех $\alpha > 0$ его положительные степени

$$G_k^\alpha = (a^{*k}a^k)^\alpha = \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda_{n,k}^\alpha (\cdot, e_n) e_n$$

при
$$D(G_k^\alpha)=\left\{f\in B:\sum_{n=k}^{+\infty}\lambda_{n,k}^{2\alpha}|(f,e_n)|^2<+\infty\right\}.$$
При $k\in\mathbb{N}$ и $\alpha>0$ G_k^α является дискретным самосопряженным неотрицательным в B оператором с собственными числами $\lambda_{n,k}^\alpha$ и соответствующими им собственными функциями $e_n(z)$ $(n\geqslant 0)$. При любом $\alpha>0$ число 0 является k-кратным собственным числом оператора G_k^α, все его остальные собственные числа $\lambda_{n,k}^\alpha$ — простые и при $n\geqslant k$ образуют строго возрастающую неограниченную последовательность положительных вещественных чисел.

Всюду далее для применения теоремы 3 к операторам в пространстве Бергмана в качестве невозмущенного самосопряженного дискретного оператора T в B будем рассматривать оператор G_k^α при натуральном k и положительном вещественном α, а в качестве возмущения — в общем случае несамосопряженный действующий в пространстве B оператор вида
$$P=\sum_{n=0}^{r}\sum_{(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in\{a,a^*\}^n}c_{b_1,b_2,\ldots,b_n}b_1b_2\ldots b_n,\tag{22}$$
где r — целое неотрицательное число, коэффициенты $c_{b_1,b_2,\ldots,b_n}$ являются комплексными числами, а при $n=0$ имеется единственное слагаемое c_0E с $c_0\in\mathbb{C}$ (полагаем $a^{*0}=a^0=E$). Применяя коммутационное соотношение (21), любой оператор (22) можно записать в виде
$$P=\sum_{i+j\leqslant m}c_{i,j}a^{*i}a^j,\tag{23}$$
где m — целое неотрицательное число, а коэффициенты $c_{i,j}$ являются комплексными числами. Всюду далее мы будем представлять возмущающий оператор (22) в виде (23).

Теорема 4. *Пусть k — натуральное число, m — целое неотрицательное число, α — положительное вещественное число, $w=2k\alpha-m-2>0$ и пусть $\widetilde{G_k^\alpha}=G_k^\alpha+P$, где оператор P определен согласно* (23). *Тогда оператор $\widetilde{G_k^\alpha}$ имеет ядерную резольвенту, и для его собственных чисел μ_n, $n\geqslant 0$, занумерованных в порядке возрастания вещественных частей с учетом алгебраических кратностей, при любом натуральном $l>m/w$ справедлива формула следов*
$$\lim_{s\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{s}(\mu_n-\lambda_{n,k}^\alpha)+\oint_{\Gamma_s}\sum_{j=1}^{l}\frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij}\operatorname{Tr}((PR_\lambda)^j)d\lambda\right)=0,\tag{24}$$
где $R_\lambda=(G_k^\alpha-\lambda E)^{-1}$, $\Gamma_s=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=r_s\}$ при $r_s=(\lambda_{s,k}^\alpha+\lambda_{s+1,k}^\alpha)/2$ и $s\geqslant k$.

В случае $\alpha=1$ теорема 4 была анонсирована в [12], однако нам неизвестно, опубликовано ли где-нибудь доказательство. Ниже мы приведем наше доказательство теоремы 4 в общем случае. то есть при всех $\alpha>0$, основываясь на доказанной выше теореме 3.

Главным исследуемым объектом в работе [12] является оператор Грибова
$$H_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}=\lambda''a^{*^3}a^3+\lambda'a^{*^2}a^2+\mu a^*a+i\lambda a^*(a+a^*)a,$$
где λ'', λ', λ, μ — вещественные параметры, $i^2=-1$, играющий важную роль в качестве несамосопряженного гамильтониана в реджеонной теории поля при описании мягких процессов адронных взаимодействий с высокой энергией (см. [1,3]). Основной результат статьи [12] в эквивалентной формулировке состоит в том, что при $\lambda''\neq 0$, $\lambda'=0$ для оператора
$$\frac{1}{\lambda''}H_{\lambda'',0,\mu,\lambda}=a^{*3}a^3+\frac{\mu}{\lambda''}a^*a+i\frac{\lambda}{\lambda''}a^*(a+a^*)a\equiv G_3+P_3,$$
отличающегося от оператора $H_{\lambda'',0,\mu,\lambda}=\lambda''a^{*3}a^3+\mu a^*a+i\lambda a^*(a+a^*)a$ лишь ненулевым вещественным множителем, справедлива формула регуляризованных следов
$$\lim_{s\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{s}(\mu_n-\lambda_{n,3})+\oint_{\Gamma_s}\sum_{j=1}^{4}\frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij}\operatorname{Tr}((P_3R_\lambda)^j)d\lambda\right)=0.\tag{25}$$

Здесь μ_n, $n \geqslant 0$, — собственные числа оператора $H_{\lambda'',0,\mu,\lambda}/\lambda''$, занумерованные в порядке возрастания вещественных частей с учетом алгебраических кратностей, $R_\lambda = (G_3 - \lambda E)^{-1}$, $\Gamma_s = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = (\lambda_{s,3} + \lambda_{s+1,3})/2\}$ при $s \geqslant 3$.

Для вывода формулы регуляризованных следов (25) общая схема приведенного в [7] доказательства теоремы 1 применяется в статье [12] к рассматриваемой конкретной ситуации при $n_s = s$ ($s \geqslant 3$). Эта схема не очень удобна для вывода формул регуляризованного следа вида (3), и ее применение с такой целью может быть достаточно трудоемким. В частности, вывод формулы следов (25) этим способом занял большую часть статьи [12].

В то же время формулу следов (25) нетрудно получить простым применением теоремы 4 к оператору $\widetilde{G_3} = G_3 + P_3$, где $P_3 = (\mu/\lambda'')a^*a + i(\lambda/\lambda'')a^*(a + a^*)a$. Действительно, в этом случае мы находим $k = 3$, $\alpha = 1$, $m = 3$, $w = 1 > 0$. Согласно теореме 4 формула следов (24) для оператора $H_{\lambda'',0,\mu,\lambda}/\lambda''$ имеет место при любом целом $l > m/w = 3$, в частности, при $l = 4$, то есть справедлива формула следов (25).

В [12] отмечено, что существование конечной формулы регуляризованных следов для оператора Грибова $H_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}$ при $\lambda' \neq 0$, $\lambda \neq 0$ является открытой проблемой. В этом случае условия теоремы 4 для оператора $H_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}/\lambda''$ при $\lambda'' \neq 0$ или для оператора $H_{0,\lambda',\mu,\lambda}/\lambda'$ при $\lambda'' = 0$ не выполняются. Однако, например, применяя ее к оператору $H^{(\alpha)}_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}/\lambda''$, где $H^{(\alpha)}_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda} = \lambda''({a^*}^3 a^3)^\alpha + \lambda' {a^*}^2 a^2 + \mu a^* a + i\lambda a^*(a + a^*)a$, находим, что при любом $\alpha > 1$ для оператора $H^{(\alpha)}_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}/\lambda'' = G_3^\alpha + P_4$ при $\lambda'' \neq 0$, $\lambda' \neq 0$ выполняются соотношения $k = 3$, $\alpha > 1$, $m = 4$, $w = 6(\alpha - 1) > 0$, поэтому в силу теоремы 4 для него справедлива конечная формула регуляризованных следов (24), в которой число поправок теории возмущений равно $l = [2/(3\alpha - 3)] + 1$, где $[x]$ — целая часть вещественного числа x.

Теорема 4 и все изложенные выше следствия из нее были анонсированы в [10].

Для доказательства теоремы 4 нам понадобятся некоторые дополнительные сведения. которые мы сейчас изложим.

Если $a_n > 0$ и $b_n > 0$ при всех $n \geqslant n_0$, где $n_0 \in \mathbb{Z}$, то запись $a_n \asymp b_n$ означает, что существуют положительные постоянные c_1 и c_2, для которых при всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $c_1 \leqslant a_n/b_n \leqslant c_2$. Приведем некоторые непосредственно вытекающие из этого определения свойства отношения $\asymp$ на множестве всех последовательностей $\{a_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ с положительными членами:

(a) отношение $\asymp$ есть отношение эквивалентности;
(b) если $a_n \asymp b_n$ и $c_n \asymp b_n$ при $n \geqslant n_0$, то $a_n + c_n \asymp b_n$ при $n \geqslant n_0$; если $a_n \asymp b_n$ и $c_n \asymp d_n$ при $n \geqslant n_0$, то $a_n c_n \asymp b_n d_n$ и $a_n/c_n \asymp b_n/d_n$ при $n \geqslant n_0$;
(c) если $a_n \asymp b_n$ при $n \geqslant n_0$, то при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение $a_n^\alpha \asymp b_n^\alpha$ при $n \geqslant n_0$;
(d) если $a_n > 0$, $b_n > 0$ при всех $n \geqslant n_0$ и, кроме того, выполняется предельное соотношение $a_n/b_n \to L$ при $n \to +\infty$, где L — отличное от нуля число (в частности, при $L = 1$ это означает, что $a_n \sim b_n$ при $n \to +\infty$), то $a_n \asymp b_n$ при $n \geqslant n_0$.

Так как для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и целых t, s

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+t)^\alpha}{(n+s)^\alpha} = 1, \tag{26}$$

то по свойству (d) отношения $\asymp$ для таких α, s и t выполняется следующее соотношение, справедливое при всех целых n, удовлетворяющих неравенствам $n + t \geqslant 1$ и $n + s \geqslant 1$:

$$(n+t)^\alpha \asymp (n+s)^\alpha \quad (n \geqslant 1 - \min\{t, s\}). \tag{27}$$

Поскольку для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{n,k}^\alpha}{n^{k\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 - \frac{2}{n}\right)^\alpha \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^\alpha = 1, \tag{28}$$

то $\lambda_{n,k}^\alpha \asymp n^{k\alpha}$ ($n \geqslant k$). С учетом (27) получаем соотношение

$$\lambda_{n,k}^\alpha \asymp (n+1)^{k\alpha} \quad (n \geqslant k). \tag{29}$$

Так как $\lambda_{n,0} = 1$ при всех $n \geqslant 0$, то эта формула остается верной и при $k = 0$. Таким образом, соотношение (29) выполняется для любого целого $k \geqslant 0$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Если $\alpha > 0$, то для любого $k \geqslant 1$, применяя сначала очевидное предельное соотношение $\lambda_{n,k}^{\alpha} \to +\infty$ при $n \to +\infty$, а затем (28) и (26), получаем $\lambda_{n,k}^{\alpha} + 1 \sim \lambda_{n,k}^{\alpha} \sim n^{k\alpha} \sim (n+1)^{k\alpha}$ при $n \to +\infty$. Поскольку, кроме того, $\lambda_{n,k}^{\alpha} + 1 > 0$ и $(n+1)^{k\alpha} > 0$ при всех $n \geqslant 0$, то в силу свойства (d) отношения $\asymp$ при любом $\alpha > 0$ выполняется соотношение

$$\lambda_{n,k}^{\alpha} + 1 \asymp (n+1)^{k\alpha} \quad (n \geqslant 0). \tag{30}$$

Это соотношение остается верным и при $k = 0$.

2.2. Вывод основной формулы регуляризованных следов дискретных операторов в пространстве Бергмана. Приведем доказательство теоремы 4.

Пусть $H = B$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $T = G_k^{\alpha}$, $\widetilde{G_k^{\alpha}} = G_k^{\alpha} + P$. Собственным числам $\lambda_{n,k}^{\alpha}$ оператора T соответствуют собственные функции $e_n(z) = z^n/\sqrt{n!}$, образующие при $n \geqslant 0$ полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве B.

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$. Применяя формулы (20) и (29) с учетом свойства (b) отношения $\asymp$, находим, что для величины $\Delta\lambda_{n,k}^{\alpha} = \lambda_{n+1,k}^{\alpha} - \lambda_{n,k}^{\alpha}$ при всех $n \geqslant k$ справедливы соотношения

$$\Delta\lambda_{n,k}^{\alpha} = \alpha \int\limits_{\lambda_{n,k}}^{\lambda_{n+1,k}} \lambda^{\alpha-1} d\lambda \asymp \lambda_{n,k}^{\alpha-1} \Delta\lambda_{n,k} = k\lambda_{n,k}^{\alpha-1}\lambda_{n,k-1} \asymp (n+1)^{k\alpha-1} \asymp (\lambda_{n+1,k}^{\alpha})^q,$$

где $q = 1-1/(k\alpha) \in (0,1)$ в том и только том случае, когда $k\alpha > 1$. Отсюда следует, что условие (i) теоремы 3 выполняется для оператора $T = (a^{*k}a^k)^{\alpha}$ при $k \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1/k$ и $q = 1 - 1/(k\alpha)$. Так как все собственные числа оператора T, кроме 0, — простые, то при таких значениях параметров k и α условие (ii) теоремы 3 также выполняется для этого оператора при $\beta = 0 < q = 1 - 1/(k\alpha) < 1$.

Нетрудно убедиться. что для любых целых неотрицательных i, j, n справедливы формулы

$$a^{*i}e_n = \sqrt{\lambda_{n+i,i}}e_{n+i} \quad (n, i \geqslant 0); \quad a^j e_n = \begin{cases} \sqrt{\lambda_{n,j}}e_{n-j}, & \text{если } 0 \leqslant j \leqslant n, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant n < j, \end{cases}$$

$$a^{*i}a^j e_n = \begin{cases} d_{n,i,j}e_{n-j+i}, & \text{если } i \geqslant 0 \text{ и } 0 \leqslant j \leqslant n, \\ 0, & \text{если } i \geqslant 0 \text{ и } 0 \leqslant n < j, \end{cases} \tag{31}$$

где $d_{n,i,j} = \sqrt{\lambda_{n-j+i,i}\lambda_{n,j}}$ $(i \geqslant 0,\ 0 \leqslant j \leqslant n)$. Так как при $i \geqslant 0$ и $0 \leqslant j \leqslant n$ в силу (19) имеем $d_{n,i,j} \geqslant 1 > 0$, то из (29) и (27) при любых неотрицательных целых i и j вытекает соотношение $d_{n,i,j} \asymp (n+1)^{(i+j)/2}$ при $n \geqslant j$, откуда следует неравенство

$$d_{n,i,j} \leqslant \xi_{i,j}(n+1)^{\frac{i+j}{2}} \quad (n \geqslant j), \tag{32}$$

где $\xi_{i,j}$ — положительные постоянные.

Для любых целых $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$ и любой функции

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} (f, e_n)e_n,$$

принадлежащей $\mathcal{D}(a^{*i}a^j)$, согласно соотношению (31) получаем в смысле сходимости по норме пространства B:

$$a^{*i}a^j f = \sum_{n=0}^{+\infty} (f, e_n)a^{*i}a^j e_n = \sum_{n=j}^{+\infty} d_{n,i,j}(f, e_n)e_{n-j+i}. \tag{33}$$

Применяя сначала равенство Парсеваля к (33) в B, а затем неравенство (32), находим

$$\|a^{*i}a^j f\|^2 = \sum_{n=j}^{+\infty} d_{n,i,j}^2 |(f, e_n)|^2 \leqslant \xi_{i,j}^2 \sum_{n=j}^{+\infty} (n+1)^{i+j} |(f, e_n)|^2. \tag{34}$$

Для любой $f \in \mathcal{D}(P)$ согласно (23) имеем

$$Pf = \sum_{i+j \leqslant m} c_{i,j} a^{*i} a^j f,$$

откуда с учетом (34) находим

$$\|Pf\| \leqslant \sum_{i+j\leqslant m} |c_{i,j}| \|a^{*i}a^j f\| \leqslant \sum_{i+j\leqslant m} |c_{i,j}|\xi_{i,j} \sqrt{\sum_{n=j}^{+\infty} (n+1)^{i+j} |(f,e_n)|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \eta \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^m |(f,e_n)|^2}, \quad (35)$$

где

$$\eta = \sum_{i+j\leqslant m} |c_{i,j}|\xi_{i,j}.$$

Согласно (30) и свойству (c) отношения $\asymp$ находим, что при $\gamma = m/(2k\alpha)$ выполняется соотношение $(n+1)^m \asymp (\lambda_{n,k}^\alpha + 1)^{2\gamma}$ $(n \geqslant 0)$. Отсюда и из (35) следует неравенство

$$\|Pf\| \leqslant A_0 \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_{n,k}^\alpha + 1)^{2\gamma} |(f,e_n)|^2} = A_0 \|(T+E)^\gamma f\|, \quad (36)$$

где A_0 — некоторая положительная постоянная.

При $\beta = 0$, $q = 1 - 1/(k\alpha) \in (0,1)$ и $\gamma = m/(2k\alpha)$ неравенство $0 \leqslant \gamma < q - \beta$ равносильно неравенству $w > 0$, где $w = 2k\alpha - m - 2$. Если $w > 0$, то $0 \leqslant \gamma < q - \beta < 1$ и из (36) получаем $P \prec (T+E)^\gamma$, то есть выполняется условие (iv) из замечания 1 при $\lambda_0 = -1 < 0$, где 0 — наименьшее собственное число оператора T.

Мы доказали, что в условиях нашей теоремы операторы $T = G_k^\alpha$ и P удовлетворяют всем условиям теоремы 3 (с заменой условия (iii) на условие (iv) из замечания 1 при $\beta = 0$, $q = 1 - 1/(k\alpha)$, $\gamma = m/(2k\alpha)$ и $w = 2k\alpha - m - 2 > 0$. Применяя теорему 3 к оператору $\widetilde{G_k^\alpha}$ в B, получаем, что для любого натурального числа $l > \gamma/(q - \beta - \gamma) = m/w$ справедлива формула следов (5), которая в рассматриваемом нами случае может быть записана в виде (24).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боресков К. Г., Кайдалов А. Б., Канчели О. В.* Сильные взаимодействия при высокой энергии в реджеонном подходе// Яд. физ. — 2006. — *69*, № 10. — С. 1802–1818.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
3. *Грибов В. Н.* Техника диаграмм Редже// ЖЭТФ. — 1967. — *53*. — С. 654–672.
4. *Садовничий В. А., Конягин С. В., Подольский В. Е.* Регуляризованный след оператора с ядерной резольвентой, возмущенного огранисенным// Докл. РАН. — 2000. — *373*, № 1. — С. 26–28.
5. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Регуляризованный след ограниченного возмущения оператора с ядерной резольвентой// Диффер. уравн. — 1999. — *34*, № 4. — С. 556–564.
6. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов с относительно ядерным возмущением// Докл. РАН. — 2001. — *378*, № 3. — С. 1–2.
7. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов с относительно компактным возмущением// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 2. — С. 129–152.
8. *Томин Н. Г.* О первом регуляризованном следе дискретного оператора// в кн.: Тез. докл. Междунар. конф., посв. 90-летию со дня рожд. Л. С. Понтрягина. — М.: МГУ, 1998. — С. 165–167.
9. *Томин Н. Г.* О некоторых формулах первого регуляризованного следа для дискретных операторов// Мат. заметки. — 2001. — *70*, № 1. — С. 109–122.

10. *Томин Н. Г., Томина И. В.* Об одной абстрактной формуле регуляризованных следов дискретных операторов и ее применениях// 3–9 мая 2019 г.. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 273–274.
11. *Bargmann V.* On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, I// Commun. Pure Appl. Math. — 1961. — *14*. — P. 187–214.
12. *Intissar A.* Regularized trace formula of magic Gribov operator on Bargmann space// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *437*, № 1. — P. 59–70.
13. *Tomin N. G.* One regularized trace formula of discrete operators// Мат. Междунар. науч. конф. «Теория приближения функций и родственные залачи анализа», посв. памяти д.ф.-м.н., профессора П. К. Коровкина. — Калуга: Изд-во КГУ им. К. Э. Циолковского, 2015.

Томин Николай Григорьевич
Ивановский государственный энергетический университет
E-mail: nikolay.tomin@gmail.com

Томина Ирина Валентиновна
Ивановский государственный энергетический университет
E-mail: ivtomina@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 153–157
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-153-157

УДК 517.927.21

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ И СИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2021 г. **Д. А. ЧЕЧИН, А. Д. БАЕВ, С. А. ШАБРОВ**

Аннотация. В работе получены достаточные условия существования решения краевой задачи второго порядка с разрывными решениями и сильной нелинейностью. При анализе решений краевой задачи мы используем поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным и показавший свою эффективность при изучении задач второго порядка с негладкими решениями. На основе оценок функции Грина граничной задачи, полученных ранее другими авторами, удалось показать, что оператор, обращающий изучаемую нелинейную задачу, представимый в виде суперпозиции вполне непрерывного и непрерывного операторов, действует из конуса неотрицательных непрерывных функций в более узкое множество. Последнее и позволяет доказать существование решения у нелинейной краевой задачи с привлечением теории пространств с конусом.

Ключевые слова: краевая задача, негладкое решение, сильная нелинейность, разрешимость.

ON A BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH DISCONTINUOUS SOLUTIONS AND STRONG NONLINEARITY

© 2021 **D. A. CHECHIN, A. D. BAEV, S. A. SHABROV**

Abstract. In this work, sufficient conditions for the existence of a solution to a second-order boundary-value problem with discontinuous solutions and strong nonlinearity are obtained. For the analysis of solutions to the boundary-value problem, we apply the pointwise approach proposed by Yu. V. Pokornyi and which has shown its effectiveness in studying second-order problems with nonsmooth solutions. Based on estimates of the Green function of the boundary-value problem obtained earlier by other authors, we show that the operator, which inverts the nonlinear problem considered, can be represented as the composition of a completely continuous operator and a continuous operator; this operator acts from the cone of nonnegative continuous functions into a narrower set. This fact allows one to prove the existence of a solution to a nonlinear boundary-value problem by using the theory of spaces with a cone.

Keywords and phrases: boundary-value problem, nonsmooth solution, strong nonlinearity, solvability.

AMS Subject Classification: 34A36, 34A34

1. Введение. В последние десятилетия активно ведутся исследования дифференциальных операторов Штурма—Лиувилля (Шредингера) для случаев разнообразных импульсных возмущений (сингулярных потенциалов). Можно выделить публикации А. А. Шкаликова, А. М. Савчука, Б. С. Митягина, В. А. Михайлеца (см. [5–8, 15, 16]) и др., в которых методами теории обобщенных

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00197).

функций решаются задачи, касающиеся структуры спектра, его асимптотики, спектральной полноты, разнообразных свойств непрерывного спектра, структуры сингулярных компонент спектра (спектральных лакун, зон неустойчивости) и проч.

Следует отметить, что поточечный анализ решения у математической модели очень важен для приложений. Наличие особенностей у изучаемой системы (как внутренних, так и внешних), как правило, приводит не только к потере гладкости решения дифференциальной модели, но и появлению разрывов у решения. Последнее, как следствие, закрывает возможность использования классических производных как при моделировании, так и при анализе. Применение теории обобщенных функций (по Соболеву—Шварцу, Коломбо и др.) ситуацию не спасает: удается доказать лишь наличие слабого решения. При этом приходится преодолевать ряд трудноразрешимых проблем (например, умножения разрывной функции на обобщенную).

Подход к поточечному анализу решений уравнения

$$-(pu')' + qu = f$$

в случае особенностей типа функции Дирака в потенциале q, когда q может считаться обобщенной производной от функции ограниченной вариации Q, был разработан Ю. В. Покорным в [9, 10], где в развитие идей В. Феллера и М. Г. Крейна (см. комментарии в [1]), уравнение с обобщенными коэффициентами и правой частью

$$-(pu')' + Q'u = F'$$

заменялось поточечно задаваемым уравнением

$$-(pu')'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma.$$

Дальнейшее развитие этот подход для случая непрерывных решений получил в работах [11, 12].

Для случая разрывных решений предыдущее уравнение имеет вид

$$-(pu'_\mu)'_{[\sigma]} + uQ'_{[\sigma]} = F'_{[\sigma]}.$$

Здесь p, Q, F — функции ограниченной вариации на отрезке $[0, \ell]$; решения $u(x)$ принадлежат классу μ-абсолютно непрерывных функций на $[0, \ell]$, μ-производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0, \ell]$; внутреннее дифференцирование ведется по μ-мере, порождаемой строго возрастающей на $[0, \ell]$ функцией $\mu(x)$, соизмеримой с наблюдаемым процессом. Строго возрастающую функцию $\sigma(x)$ можно подобрать таким образом, что она будет нести в себе все особенности рассматриваемой задачи. Точнее, $\sigma(x)$ будет являться разрывной лишь в точках разрыва μ, p, Q, F, так что $[\sigma]$-мера этих точек оказывается отличной от нуля. При этом $[\sigma]$-мера точек разрыва $u(x)$ «расщепляется» в силу того, что функция $\sigma(x)$ в этих точках имеет два скачка (левый и правый), равных $\Delta^-\sigma(\xi) = \sigma(\xi) - \sigma(\xi - 0)$ и $\Delta^+\sigma(\xi) = \sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi)$ соответственно. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о «расщепленной» мере, мы заключаем порождающую меру функцию в квадратные скобки. Отметим, что для восстановления функции по ее $[\sigma]$-производной необходимо использовать π-интеграл, введенный Ю. В. Покорным в [10].

В настоящей работе мы применяем подход Ю. В. Покорного к одной граничной задаче с сильной нелинейностью.

2. Основной результат. Рассмотрим на $[0; \ell]$ нелинейную математическую модель

$$\begin{cases} Lu \equiv -(pu'_\mu)'_{[\sigma]} + uQ'_{[\sigma]} = f(x, u), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

возникающую, например, при моделировании деформаций разрывной струны (цепочки из струн, скрепленных между собой пружинами), натянутой вдоль отрезка $[0, \ell]$, и подпертой (не более чем в счетном количестве точек), как обычными пружинами, деформации которых подчиняются закону Гука, так и пружинами с разными витками, деформации которых закону Гука не подчиняются и задаются некоторой функцией. При этом к отдельным точкам струны могут быть приложены нелинейные импульсные внешние воздействия.

В уравнении из (1) внутренняя производная понимается как производная по обычной мере, внешняя — как производная по «расщепленной» мере, понимаемая в смысле Ю. В. Покорного, т. е. обращаемая интегрированием с помощью π-интеграла. Последнее означает, что функция $g(x)$ называется $[\sigma]$-производной от функции $G(x)$, если

$$G(x) - G(0) = \int\limits_0^x g(s)d[\sigma].$$

Таким образом, во всякой точке ξ разрыва функции $\sigma(x)$ у функции $g(x)$ возникает два собственных значения, вообще говоря, отличных от предельных, определяемых равенствами

$$g(\xi^1) = G'_{[\sigma]}(\xi^1) = \frac{\Delta^- G(\xi)}{\Delta^- \sigma(\xi)}, \quad g(\xi^2) = G'_{[\sigma]}(\xi^2) = \frac{\Delta^+ G(\xi)}{\Delta^+ \sigma(\xi)}.$$

Уравнение (1) рассматривается на специальном расширении $\overline{[0;\ell]}_{[\sigma]}$ отрезка $[0;\ell]$, которое строится следующим образом. Обозначим через $S(\mu)$ множество точек разрыва функции $\mu(x)$. На множестве $J_\mu = [0;\ell] \setminus S(\mu)$ введем метрику $\rho(x;y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Метрическое пространство J_μ является неполным. Обозначим через $\overline{[0;\ell]}_\mu$ его стандартное пополнение. Множество $\overline{[0;\ell]}_\mu$ вместо каждой точки ξ разрыва функции $\mu(x)$ содержит элементы $\{\xi^1;\xi^2\}$, появившиеся при пополнении. При этом $x < \xi^1 < \xi^2 < y$ в смысле естественной упорядоченности элементов, если $x < \xi < y$. Определим $u(\xi^1) = u(\xi - 0)$, $u(\xi^2) = u(\xi + 0)$. Пусть S — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, не являющихся точками разрыва $\mu(x)$. Рассмотрим множество $\overline{[0;\ell]}_\mu \setminus S$, пополним его по метрике $\rho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ и добавим к полученному пополнению элементы из S. Обозначим данное множество через $\overline{[0,\ell]}_{[\sigma]}$. Обозначим $\overline{[0,\ell]}_S = \overline{[0,\ell]}_{[\sigma]} \bigcup S(\mu)$.

Таким образом, в точках ξ^1 и ξ^2 уравнение (1) имеет вид

$$-\Delta^- \left(pu'_\mu\right)(\xi) + u(\xi - 0)\Delta^- Q(\xi) = f(\xi^1, u(\xi - 0))\Delta^- \sigma(\xi),$$
$$-\Delta^+ \left(pu'_\mu\right)(\xi) + u(\xi + 0)\Delta^+ Q(\xi) = f(\xi^2, u(\xi + 0))\Delta^+ \sigma(\xi).$$

В точках s разрыва функции $\sigma(x)$, в которых $\mu(x)$ является непрерывной, уравнение (1) имеет вид

$$-\Delta \left(pu'_\mu\right)(s) + u(s)\Delta Q(s) = f(s, u(s))\Delta\sigma(s),$$

где $\Delta v(s) = v(s + 0) - v(s - 0)$.

Решение (1) мы будем искать в классе E μ-абсолютно непрерывных на $\overline{[0;\ell]}_\mu$ функций, первая производная которых $[\sigma]$-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_S$. Относительно коэффициентов $p(x)$, $Q(x)$ и функции $f(x,u)$ мы делаем следующие предположения:

(I) $p(x)$ и $Q(x)$ — $[\sigma]$-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_S$;
(II) функция $p(x)$ положительна и отделена от нуля;
(III) функция $Q(x)$ не убывает на $[0;\ell]$;
(IV) $f(x,u)$ удовлетворяет условию Каратеодери, т. е.
   (a) при каждом фиксированном u функция $f(x,u)$ является $[\sigma]$-измеримой;
   (b) при всех $x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$ $f(x,u)$ — непрерывна по u;
   (c) существует $[\sigma]$-суммируемая с некоторой степенью $p \in [1,\infty)$ функция $m(x)$ такая, что $|f(x,u)| \leqslant m(x)$ для почти всех x (в смысле $[\sigma]$-меры) и u.

Нетрудно видеть, при выполнении последних условий оператор суперпозиции $[\mathbf{F}u](x) = f(x, u(x))$ непрерывно действует из C_μ — пространства μ-непрерывных на $\overline{[0;\ell]}_\mu$ функций в $L_{r,[\sigma]}$ — $[\sigma]$-суммируемых с некоторой степенью r функций.

При выполнении условий (I)–(III) достаточно легко доказать разрешимость в классе E линейной задачи (когда в правой части в (1) стоит $f(x)$ — $[\sigma]$-суммируемая функция); показать существование и единственность функции влияния $H(x,s)$ линейной граничной задачи $Lu = f$, $u(0) = u(\ell) = 0$. Ключевым моментом для наших результатов является следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (I)–(III). *Тогда существуют такое положительное число* $\varkappa$ *и такие* $[\sigma]$*-суммируемые почти всюду положительные функции* $v_1(s)$, $v_2(s)$, *что для* *всех* x, s, τ, *принадлежащих* $\overline{[0;\ell]}_\mu$, *справедливы неравенства*

$$H(x,s) \geqslant \kappa u_0(x) H(\tau, s), \tag{2}$$

$$u_0(x) v_1(s) \leqslant H(x,s) \leqslant u_0(x) v_2(s), \tag{3}$$

где $u_0(x) = (\mu(x) - \mu(0))(\mu(\ell) - \mu(x))$.

Основным результатом работы является теорема

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия*:

(1) $f(x, 0) \equiv 0$;

(2) *однородное уравнение* $Lu = 0$ *не осциллирует на* $\overline{[0;\ell]}_{[\sigma]}$;

(3) $f(x,u) \geqslant 0$ *для всех* $x \in [0;\ell]$ *и* $u \geqslant 0$;

(4) *оператор суперпозиции, порожденный функцией* $f(x,u)$, *непрерывно действует из* $C_\mu[0;\ell]$ *в* $L_{p,[\sigma]}\overline{[0;\ell]}_{[\sigma]}$ *при некотором* $p \in (1; +\infty]$;

(5) *при некоторых* $0 < r < R < \infty$ *краевая задача* $Lu = \lambda f(x,u)$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, *при любых* $\lambda \in (0;1)$ *не имеет решений, удовлетворяющих неравенствам*

$$\widetilde{u}_0(x) \cdot \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u(x)| \leqslant u(x) \leqslant r,$$

где $\widetilde{u}_0(x) = M \cdot u_0(x)$ *при некотором* $M > 0$, *и для некоторой неотрицательной нетривиальной функции* $h(x) \in L_{1,[\sigma]}\overline{[0;1]}_{[\sigma]}$ *и для любого* $\lambda > 0$ *граничная задача* $Lu = \lambda f(x,u) + \lambda h$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, *не имеет решений, удовлетворяющих неравенству* $u(x) \geqslant R\tilde{u}_0(x)$.

Тогда задача

$$Lu = f(x,u), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

имеет нетривиальное решение в конусе K *неотрицательных* μ*-непрерывных на* $\overline{[0;\ell]}_\mu$ *функций.*

Доказательство. С помощью оператора A на $K \setminus \{\Theta\}$ (здесь Θ — нулевой элемент в множестве непрерывных на $[0;\ell]$ функций) введем оператор

$$Bu = \|u\|_C^2 A\left(\frac{u}{\|u\|_C^2}\right).$$

Если оператор B имеет неподвижную точку u^*, то элемент $v^* = u^*/\|u\|_C^2$ дает неподвижную точку оператора A. Поэтому достаточно показать наличие в K у оператора B неподвижной точки.

Оператор B переводит $K \setminus \{\Theta\}$ в $K(\tilde{u}_0)$, причем B вполне непрерывен в K вне шара любого радиуса. Нетрудно видеть, что для оператора B на множестве элементов $K(\tilde{u}_0)$ с большой нормой не может выполняться $\lambda B u = u$ при $\lambda \in (0,1)$, и на элементах малой нормы из $K(\tilde{u_0})$ при любом $\lambda > 0$ не может выполняться $u = Bu + \lambda h_0$, где

$$h_0(x) = \int_0^1 G(x,s) h(s) d\sigma(s).$$

Поэтому оператор B имеет в $K(\tilde{u}_0)$ неподвижную точку. Теорема доказана. □

Отметим, что доказательство теоремы сохраняет силу, если оператор A вполне непрерывен вне любого шара положительного радиуса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1968.
2. *Баев А. Д., Шабров С. А., Голованева Ф. В., Меач Мон.* Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка// Вестн. Воронеж. ин-та ГПС МЧС. — 2014. — *3*, № 12. — С. 65–73.
3. *Давыдова М. Б., Шабров С. А.* О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2011. — *11*, № 4. — С. 13–17.
4. *Давыдова М. Б., Шабров С. А.* О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона—Никодима// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

5. *Иванов А. С., Савчук А. М.* След порядка минус один для струны с сингулярными весом// Мат. заметки. — 2017. — *102*, № 2. — С. 197-–215.
6. *Конечная Н. Н., Мирзоев К. А., Шкаликов А. А.* Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 2. — С. 231–242.
7. *Митягин Б. С., Джаков П. Б.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака// Усп. мат. наук. — 2006. — *61*, № 4 (370). — С. 77–182.
8. *Михайлец В. А.* Структура непрерывного спектра одномерного оператора Шредингера с точечными взаимодействиями// Функц. анал. прилож. — 1996. — *30*, № 2. — С. 90–93.
9. *Покорный Ю. В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 2. — С. 167–169.
10. *Покорный Ю. В.* О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма-Лиувилля// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 1–4.
11. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач. — М.: Физматлит, 2009.
12. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционная теория Штурма—Лиувилля для импульсных задач// Усп. мат. наук. — 2008. — *63*, № 1 (379). — С. 111–154.
13. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Ищенко А. С., Шабров С. А.* О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма—Лиувилля// Мат. заметки. — 2007. — *82*, № 4. — С. 578–582.
14. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А.В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004.
15. *Савчук А. М.* О базисности системы собственных и присоединенных функций одномерного оператора Дирака// Изв. РАН. Сер. мат. — 2018. — *82*, № 2. — С. 113—139.
16. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость// Функц. анал. прилож. — 2010. — *44*, № 4. — С. 34–53.
17. *Шабров С. А.* Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2013. — № 1. — С. 232–250.
18. *Шабров С. А.* Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2015. — *2*. — С. 168–179.
19. *Pokornyi Yu. V., Shabrov S. A.* Toward a Sturm–Liouville theory for an equation with generalized coefficients// J. Math. Sci. — 2004. — *119*, № 6. — P. 769–787.
20. *Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A.* On extension of the Sturm–Liouville oscillation theory to problems with pulse parameters// Ukrain. Math. J. — 2008. — *60*, № 1. — P. 108–113.

Чечин Дмитрий Александрович
Воронежский государственный университет
E-mail: `alexsandrbaev@mail.ru`

Баев Александр Дмитриевич
Воронежский государственный университет
E-mail: `alexsandrbaev@mail.ru`

Шабров Сергей Александрович
Воронежский государственный университет
E-mail: `shaspoteha@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 158–162
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-158-162

УДК 517.927.25

ОБ УТОЧНЕНИИ СКОРОСТИ РОСТА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

© 2021 г. **С. А. ШАБРОВ, М. В. ШАБРОВА, Е. А. ШАЙНА**

Аннотация. В статье уточнена скорость роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с негладкими решениями. Анализ задачи опирается на предложенный Ю. В. Покорным поточечный подход, показавший свою эффективность при изучении линейных граничных задач второго и четвертого порядков с непрерывными решениями.

Ключевые слова: граничная задача, математическая модель, спектральная задача, собственное значение, скорость роста.

ON THE RATE OF GROWTH OF EIGENVALUES OF A FOURTH-ORDER SPECTRAL PROBLEM WITH DERIVATIVES WITH RESPECT TO MEASURE

© 2021 **S. A. SHABROV, M. V. SHABROVA, E. A. SHAINA**

Abstract. In this paper, we clarify the rate of growth of eigenvalues of one fourth-order spectral problem with nonsmooth solutions. The analysis is based on the pointwise approach proposed by Yu. V. Pokornyi, which has shown its effectiveness in studying linear second- and fourth-order boundary-value problems with continuous solutions.

Keywords and phrases: boundary-value problem, mathematical model, spectral problem, eigenvalue, growth rate.

AMS Subject Classification: 34A36, 34A34

1. Введение. В [20] получена скорость роста собственных значений спектральной задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma; \\ u(0) = u'(0) = 0; \\ u(\ell) = u'(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где λ — спектральный параметр, которая возникает при применении метода Фурье для нахождения решения математической модели свободных колебаний стержневой системы, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями, которые приводят к потере гладкости у решения.

Коэффициент $p(x)$ характеризует материал, из которого изготовлен стержень; положителен на отрезке $[0, \ell]$; $\mu(x)$ — строго возрастающая функция, соизмеримая с наблюдаемым процессом; функция $r(x)$ — сила натяжения струны в точке x; $Q(x)$ определяет упругую реакцию внешней

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00197).

среды, $F(x)$ — внешнюю силу, а $M(x)$ — масса участка $[0, x)$, σ — мера, порождаемая функцией $\sigma(x)$, содержит все особенности системы — это точки, в которых имеются локализованные особенности. Через $S(\sigma)$ обозначим множество точек разрыва функции $\sigma(x)$.

Решение задачи (1) мы ищем в классе E абсолютно непрерывных на $[0, \ell]$ функций $u(x)$, первая производная которых μ-абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$; квазипроизводная pu''_{xx} абсолютна непрерывна на $[0, \ell]$; $(pu''_{xx})'_x$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$.

Мы предполагаем, что выполняются вполне физические условия: $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной на $[0, \ell]$ вариации, $Q(x)$ — неубывающая на $[0, \ell]$ функция, $\inf\limits_{x\in[0,\ell]} p(x) > 0$, $r(x) \geqslant 0$.

Уравнение в (1) определено на специальном расширении $\overline{[0, \ell]}_\sigma$ отрезка $[0, \ell]$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$, при этом в точках $\xi \in S(\sigma)(= S(\mu))$ выполнены четыре условия:

$$u(\xi - 0) = u(\xi + 0);$$

$$p(\xi - 0)u''_{x\mu}(\xi - 0) = p(\xi)\frac{\Delta u'(\xi)}{\Delta\mu(\xi)} = p(\xi + 0)u''_{x\mu}(\xi + 0);$$

$$\Delta(pu''_{x\mu})'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi),$$

где $\Delta v(\xi)$ — скачок функции $v(x)$ в точке ξ, т. е. $\Delta v(\xi) = v(\xi + 0) - v(\xi - 0)$.

Множество $\overline{[0, \ell]}_\sigma$ строится следующим образом. Введем метрику $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ на $[0, \ell]$. Если $S(\sigma) \neq \emptyset$, то $([0, \ell], \rho)$ является неполным метрическим пространством. Стандартное пополнение и приводит к $\overline{[0, \ell]}_\sigma$.

Отметим, что качественная теория с негладкими решениями начала бурно развиваться после выхода в 1999 г. работы Ю. В. Покорного [11]. Так, в [12–14, 16, 21, 22] изучены линейные краевые задачи второго порядка с производными по мере. Поточечный подход, используемый в линейных задачах, показал свою эффективность и в нелинейных задачах (см. [5, 6]), и в задачах с разрывными решениями (см. [7, 15]), и в граничных задачах четвертого порядка (см. [1, 18, 19]), а также в краевых задачах гиперболического типа (см. [2, 3]).

Эта эффективность объясняется достаточно просто: при использовании производных по мере уравнение становится поточечно заданным, то есть обыкновенным, что дает возможность применения качественных методов анализа решений, в отличие от теорий обобщенных функций. Так, при использовании теории распределений по Шварцу—Соболеву, проявляются трудно разрешимые проблемы. Во-первых, удается установить лишь слабую разрешимость уравнения, что для приложений мало пригодно, во-вторых, возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную, которую не удается решить до сих пор, и, в-третьих, уравнения в обобщенных функциях — это равенство двух функционалов, определенных над пространством основных функций, и применение качественных методов анализа к таким уравнениям крайне затруднительно. Здесь можно вспомнить работу [10] Мышкиса, в которой для уравнений с обобщенными коэффициентами удалось установить аналог теорем Штурма о перемежаемости нулей.

2. Основной результат. Через $K(x, s)$ мы обозначим функцию влияния граничной задачи

$$\begin{cases} Lu = F'_\sigma; \\ u(0) = u'(0) = 0; \\ u(\ell) = u'(\ell) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $F(x)$ — σ-абсолютно непрерывная на $[0; \ell]$ функция. Существование и единственность $K(x, s)$ в классе непрерывных на квадрате $[0; \ell] \times [0; \ell]$ доказаны в [1].

Собственные значения спектральной задачи (1) определяются как нули оператора Фредгольма, который в нашем случае определяется следующим образом (см, например, [4, 9]):

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n,$$

где

$$A_n = \int\limits_0^l \dots \int\limits_0^l \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & \dots & K(s_1,s_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(s_n,s_1) & \dots & K(s_n,s_n) \end{vmatrix} dM(s_1)\dots dM(s_n).$$

Сходимость ряда при всех λ доказывается, как и в [4, 9]. Однако схему, использованную в [9], в нашем случае применить нельзя, так как $K(x,s)$ не имеет непрерывной производной по x.

Однако разности $K(s_{i+1},s_j) - K(s_i,s_j)$ $(i = 1,2,\dots,n-1,\ j = 1,2,\dots,n)$ при некоторых κ_{ij}, заключенных между $\inf\limits_{x,s\in[0;\ell]} K'_x(x,s)$ и $\sup\limits_{x,s\in[0;\ell]} K'_x(x,s)$, можно записать в следующем виде:

$$K(s_{i+1},s_j) - K(s_i,s_j) = \kappa_{ij}(s_{i+1} - s_i).$$

Так как $K(x,s)$ — решение уравнения $Lu = \theta(x-s)$, то $K'_x(x,s)$ ограничена на всем квадрате $[0,\ell]\times[0,\ell]$. Поэтому величины $\kappa_{i,j}$ ограничены в совокупности некоторой постоянной C. Тогда при $n \geqslant 4$ имеем

$$\begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \dots & K(s_1,s_n) \\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \dots & K(s_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_{n-1},s_1) & K(s_{n-1},s_2) & \dots & K(s_{n-1},s_n) \\ K(s_n,s_1) & K(s_n,s_2) & \dots & K(s_n,s_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \dots & K(s_1,s_n) \\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \dots & K(s_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_{n-1},s_1) & K(s_{n-1},s_2) & \dots & K(s_{n-1},s_n) \\ \kappa_{n-1,1} & \kappa_{n-1,2} & \dots & \kappa_{n-1,n} \end{vmatrix} \cdot (s_n - s_{n-1}) = \dots =$$

$$= \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \dots & K(s_1,s_n) \\ \kappa_{1,1} & \kappa_{1,2} & \dots & \kappa_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_{n-2,1} & \kappa_{n-2,2} & \dots & \kappa_{n-2,n} \\ \kappa_{n-1,1} & \kappa_{n-1,2} & \dots & \kappa_{n-1,n} \end{vmatrix} \cdot (s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\dots(s_n - s_{n-1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \dots & K(s_1,s_n) \\ \kappa_{1,1} & \kappa_{1,2} & \dots & \kappa_{1,n} \\ \varkappa_{1,1} & \varkappa_{1,2} & \dots & \varkappa_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varkappa_{n-3,1} & \varkappa_{n-3,2} & \dots & \varkappa_{n-3,n} \\ \varkappa_{n-2,1} & \varkappa_{n-2,2} & \dots & \varkappa_{n-2,n} \end{vmatrix} \cdot (s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\dots(s_n - s_{n-1}) \times$$
$$\times (\mu(s_3) - \mu(s_1))(\mu(s_4) - \mu(s_2))\dots(\mu(s_n) - \mu(s_{n-2})),$$

где

$$\varkappa_{m,j} = \frac{k_{m+1,j} - k_{m,j}}{\mu(s_{m+2}) - \mu(s_m)}$$

$(m = 1,2,\dots,n-2,\ j = 1,2,\dots,n)$. Нетрудно видеть, что величины $\varkappa_{m,j}$ ограничены в совокупности.

Применяя неравенство Адамара и оценки

$$|(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\dots(s_n - s_{n-1})| \leqslant \left(\frac{\ell}{n-1}\right)^{n-1},$$

$$|(\mu(s_3) - \mu(s_1))(\mu(s_4) - \mu(s_2))\dots(\mu(s_n) - \mu(s_{n-2}))| \leqslant \left(\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{n-2}\right)^{n-2},$$

для A_n (при $n \geqslant 4$) будем иметь

$$|A_n| \leqslant C^n \cdot n^{n/2}(M(\ell) - M(0))^n \left(\frac{\ell}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{\mu(\ell)-\mu(0)}{n-2}\right)^{n-2} = \\ = \frac{1}{\ell}(C(M(\ell)-M(0))\ell(\mu(\ell)-\mu(0)))^n \frac{n^{n/2}}{(n-1)^{n-1}(n-2)^{n-2}}.$$

Так как для любого фиксированного положительного ε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^{\varepsilon n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n^{\varepsilon n}} = 0,$$

то при достаточно большом n (зависящем от ε), справедливо неравенство

$$|A_n| \leqslant \frac{1}{\ell}\big(C(M(\ell)-M(0))\ell\big)^n n^{-3n/2+\varepsilon n}.$$

Доказанное неравенство, согласно общей теории целых функций [8, 17], показывает, что порядок роста функции $D(\lambda)$ не выше $2/5 - \varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$. Поэтому $D(\lambda)$ имеет порядок роста не выше $2/5$, следовательно, для произвольного $\delta > 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2/5+\delta}} \tag{3}$$

сходится. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ *и* $F(x)$ — σ*-абсолютно непрерывные функции на* $[0, \ell]$, $Q(x)$ *не убывает на* $[0, \ell]$ *и*

$$\inf_{x\in[0,\ell]} p(x) > 0, \qquad \inf_{x\in[0,\ell]} r(x) \geqslant 0.$$

Пусть $\{\lambda_n\}$ — *собственные значения задачи* (1)*. Тогда ряд* (3) *сходится при любом* $\delta > 0$.

Доказанная теорема позволяет получить достаточные условия применимости метода Фурье к математической модели четвертого порядка с негладкими решениями, описывающей малые свободные колебания стержня, помещенного во внешнюю среду с локализованными особенностями, оба конца которого защемлены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баев А. Д., Шабров С. А., Голованева Ф. В., Меач Мон.* Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка// Вестн. Воронеж. ин-та ГПС МЧС. — 2014. — *3*, № 12. — С. 65–73.
2. *Баев А. Д., Шабров С. А., Голованева Ф. В., Меач Мон.* О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2014. — *2*. — С. 74–80.
3. *Баев А. Д., Шабров С. А., Меач Мон.* О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2014. — № 1. — С. 50–55.
4. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осциляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. — М.: Гос. изд. тех–теор. лит–ры, 1950.
5. *Давыдова М. Б., Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Дифференциал Стилтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями// Докл. РАН. — 2009. — *428*, № 5. — С. 595–597.
6. *Давыдова М. Б., Шабров С. А.* О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2011. — *11*, № 4. — С. 13–17.
7. *Зверева М. Б.* Дифференциальные уравнения с разрывными решениями: качественная теория. — Саарбрюккен, 2012.
8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
9. *Ловитт У. В.* Линейные интегральные уравнения. — М.: ГИТТЛ, 1957.
10. *Мышкис А. Д.* О решениях линейного однородного двумерного дифференциального неравенства второго порядка с обобщенными коэффициентами// Диффер. уравн. — 1996. — *32*, № 5. — С. 615–619.

11. *Покорный Ю. В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 2. — С. 167–169.
12. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач. — М.: Физматлит, 2009.
13. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Ищенко А. С., Шабров С. А.* О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма—Лиувилля// Мат. заметки. — 2007. — *82*, № 4. — С. 578–582.
14. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционная теория Штурма—Лиувилля для импульсных задач// Усп. мат. наук. — 2008. — *63*, № 1 (379). — С. 111–154.
15. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* О задаче Штурма—Лиувилля для разрывной струны// Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Сер. Евстеств. науки. — 2004. — № 5. — С. 186–190.
16. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А.В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004.
17. *Титчмарш Е.* Теория функций. — М.: Наука, 1980.
18. *Шабров С. А.* О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2012. — *12*, № 1. — С. 52–55.
19. *Шабров С. А.* Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2013. — № 1. — С. 232–250.
20. *Шабров С. А., Бугакова Н. И., Шайна Е. А.* О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — *4*. — С. 207–216.
21. *Pokornyi Yu. V., Shabrov S. A.* Toward a Sturm–Liouville theory for an equation with generalized coefficients// J. Math. Sci. — 2004. — *119*, № 6. — P. 769–787.
22. *Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A.* On extension of the Sturm–Liouville oscillation theory to problems with pulse parameters// Ukrain. Math. J. — 2008. — *60*, № 1. — P. 108–113.

Шабров Сергей Александрович
Воронежский государственный университет
E-mail: shaspoteha@mail.ru

Шаброва Марина Вячеславовна
Воронежский государственный университет
E-mail: koshka445@mail.ru

Шайна Екатерина Александровна
Воронежский государственный университет
E-mail: katerinashaina@mail.ru