

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 190



Москва 2021

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

С. С. Акбаров (НИУ ВШЭ, ВИНТИ РАН)

Е. П. Кругова (ВИНТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

С. Е. Степанов (Финуниверситет при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Т. К. Юлдашев (Национальный университет Узбекистана им. Улугбека)

Редактор-составитель:

М. Ш. Бурлуцкая (Воронежский государственный университет)

Научный редактор:

И. А. Жлябинкова

Компьютерная верстка:

А. А. Широнин

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

**СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 190

**МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ
ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXX»**

ВОРОНЕЖ, 3–9 МАЯ 2019 г.

Часть 1



Москва 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Некоторые подходы к решению задач линейной многокритериальной оптимизации (<i>Е. М. Аристова</i>)	3
Об одной модели замораживания живой биологической ткани (<i>Б. К. Буздов</i>)	14
О некоторых начально-краевых задачах в аэрогидроупругости (<i>П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова, У. Д. Мизгер</i>)	19
О нормальных колебаниях маятника с полостью, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью (<i>В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский</i>)	34
О калибровочных преобразованиях электромагнитных потенциалов в кватернионной форме (<i>Ю. А. Гладышев</i>)	50
Локальный асимптотический анализ моделей оптико-электронных систем с запаздыванием (<i>Д. В. Глазков</i>)	57
Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота (<i>А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова</i>)	81
Исследование динамики скачкообразного изменения цены в обобщенной модели Блэка—Шоулза (<i>Т. В. Завьялова, Г. А. Тимофеева</i>)	88
О сохранении траектории при возмущениях в линейной динамической системе управления (<i>С. П. Зубова, Е. В. Раецкая, Ле Хай Чунг</i>)	93
О внешних оценках множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями (<i>И. В. Зыков</i>)	107
Трехмодовые прогибы сжатой балки на двойном упругом основании в модифицированной модели Власова—Леонтьева (<i>И. В. Колесникова</i>)	115
Об условии, обеспечивающем гидродинамическую устойчивость и единственность стационарного и периодического течений жидкости (<i>В. Л. Хацкевич</i>)	122
Декомпозиция сингулярно возмущенной функционально-дифференциальной системы на ос- нове невырожденного преобразования (<i>О. Б. Цехан</i>)	130
Условия неизоморфности пары весовых пространств непрерывных функций (<i>М. А. Шубарин</i>)	144



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 3–13
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-3-13

УДК 62С86, 90С05

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

© 2021 г. Е. М. АРИСТОВА

Аннотация. Статья содержит описание трех подходов к решению задачи линейной многокритериальной оптимизации: метод свертывания векторного критерия в суперкритерий, принцип приближения по всем локальным критериям к идеальному решению и метод, построенный на основе введения меры конфликта между целевыми критериями.

Ключевые слова: оптимальное по Парето решение, многокритериальная оптимизация, градиент, целевая функция, коэффициент взаимодействия, матрица взаимодействия, кооперация, конфликт, принцип большинства, правило принятия решений.

SOME APPROACHES TO LINEAR MULTICRITERIA OPTIMIZATION PROBLEMS

© 2021 E. M. ARISTOVA

ABSTRACT. In this paper, we describe three approaches to problems of linear multicriteria optimization: the method of folding a vector criterion into a super criterion, the approximation principle an ideal solution, and the method based on the conflict measure between target criteria.

Keywords and phrases: Pareto optimal solution, multicriteria optimization, gradient, objective function, coefficient of interaction, matrix of interaction, cooperation, conflict, majority principle, rule of making decisions.

AMS Subject Classification: 62C86, 90C05

1. Введение. Методы решения задач математического программирования с одним критерием интенсивно разрабатывались последние пятьдесят лет. Изучение таких методов, однако, отражало самый ранний и простой этап в развитии математического программирования. Жизнь оказалась сложнее. По мере того, как мы постепенно вступаем в век информатики, становится ясно, что практически любая серьезная реальная задача характеризуется больше чем одним критерием. Лица, принимающие решения, в значительно большей степени, чем когда бы то ни было, ощущают необходимость оценивать альтернативные решения с точки зрения нескольких критериев.

Результаты исследований задач планирования и управления показывают, что в реальной постановке эти задачи являются многокритериальными. Раннее при исследовании проблемы многокритериальности часто все критерии, кроме одного, выбранного доминирующим, принимались в качестве ограничений, оптимизация проводилась по доминирующему критерию. Такой подход к решению практических задач значительно снижает эффективность принимаемых решений.

Многокритериальность является особенностью реальных систем, при этом критерии, которые необходимо оптимизировать, зачастую противоречат друг другу. Универсальным способом борьбы с многокритериальностью является переход к обобщенному критерию, который и оптимизируется. В основе такого перехода лежит использование различных функций агрегирования, причем результат не всегда поддается интерпретации, т. к. агрегирование вводится искусственным образом, поэтому возникает вопрос об адекватности полученного оптимального решения [6, 7].

Как правило, в задачах многокритериальной оптимизации предполагается, что все критерии независимы. Однако в большинстве реальных задач целевые функции почти неизбежно являются противоречивыми, конфликтующими. Отказ от учета этого фактора приводит к значительному упрощению задач, так что решения, полученные традиционными методами, представляют лишь незначительный интерес.

В данной статье предлагается несколько подходов к решению задач линейной многокритериальной оптимизации: метод свертывания критериев в суперкритерий (при одинаковой и разной важности критериев), принцип приближения по всем локальным критериям к идеальному решению и метод на основе введения меры конфликта между критериями и использования ее для задания стратегии агрегирования.

2. Постановка задачи. Дана задача многокритериальной оптимизации следующего вида:

$$f_1(x) \rightarrow \max, \quad \dots, \quad f_n(x) \rightarrow \max, \quad x \in X, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ множество допустимых решений задачи (1), $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, n}$ целевые функции (критерии), \max означает, что данный критерий нужно максимизировать.

Необходимо решить задачу (1) тремя указанными выше методами.

По существу многокритериальная задача отличается от обычной задачи оптимизации только наличием нескольких целевых функций вместо одной.

В задачах выбора решения, формализуемых в виде модели векторной оптимизации, первым естественным шагом следует считать выделение области компромиссов решений, оптимальных по Парето.

Вектор $x \in X$ называется *оптимальным по Парето решением* в задаче (1), если не существует $x^0 \in X$ такого, что выполнены неравенства $f(x^0) \geq f(x)$ и $f(x^0) \neq f(x)$.

Областью компромиссов называется подмножество допустимого множества решений X , обладающего тем свойством, что все принадлежащие ему решения не могут быть улучшены одновременно по всем локальным критериям [3].

Оптимальное решение, выбираемое на основе многокритериального подхода, независимо от избираемого принципа оптимальности, всегда должно принадлежать области компромиссов. Иначе оно может быть улучшено и, следовательно, не является оптимальным.

Таким образом, область компромиссов есть область потенциально оптимальных компромиссов. Отсюда следует, что при выборе решения по векторному критерию эффективности можно ограничить поиск оптимального решения областью компромиссов, которая, как правило, значительно уже всей области возможных решений X .

3. Подходы к решению задачи многокритериальной оптимизации. Остановимся более подробно на трех методах решения задачи многокритериальной оптимизации: методе свертывания критериев в суперкритерий (при одинаковой и разной важности критериев), принципе приближения по всем локальным критериям к идеальному решению и методе, основанном на введении меры конфликта между критериями и использовании ее для задания стратегии агрегирования.

4. Подход, основанный на свертывании критериев в суперкритерий. Одним из распространенных методов решения многокритериальных задач является метод сведения многокритериальной задачи к однокритериальной путем свертывания векторного критерия в суперкритерий [1]. При этом каждый критерий умножается на соответствующий ему весовой коэффициент (коэффициент важности):

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x) \text{ при } \beta_i \geq 0, i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

При этом возникают трудности с правильным подбором весовых коэффициентов α_i . Существуют различные способы выбора этих коэффициентов. Одним из них является назначение α_i в зависимости от относительной важности критериев (см. [9]):

Определение	Интенсивность относительной важности
Равная важность сравниваемых требований	1
Умеренное(слабое) превосходство одного над другим	3
Сильное(существенное) превосходство	5
Очевидное превосходство	7
Абсолютное(подавляющее) превосходство	9
Промежуточные решения между двумя соседними оценками	2, 4, 6, 8

5. Принцип приближения по всем локальным критериям к идеальному решению.

В основу данного метода положена идея приближения по всем критериям [2]. Пусть дана задача многокритериальной оптимизации вида (1). Среди решений этой системы требуется отыскать такое значение вектора $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$, которое максимизирует как можно больше критериев [4].

Рассмотрим каждую отдельную функцию $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ и решим для нее задачу максимизации. Пусть соответствующие оптимальные планы это векторы

$$x_i^* = (x_1^*, \dots, x_k^*), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

На этих оптимальных планах определим значения критериев, получив вектор целевых функций на совокупности оптимальных решений

$$f^* = (f_1(x_1^*), f_2(x_2^*), \dots, f_n(x_n^*)). \quad (4)$$

Заметим, что для некоторых задач оптимальные планы могут совпадать, но отличаться значениями целевых функций. Составим вектор F^0 «идеальных» значений целевых функций $F^0 = (F_1^0, \dots, F_n^0)$ такой, что $F_i^0 = f_i(x_i^*)$, $i = \overline{1, n}$.

Будем искать такое решение задачи (1), которое минимизирует расстояние между вектором $f(x)$, содержащим текущие значения целевых функций, и вектором F^0 . Обозначим квадрат евклидовой нормы вектора $f(x) - F^0$, определенного для всех $x \in X$ через

$$R(x) = \|f(x) - F^0\|^2. \quad (5)$$

Теперь поставленную задачу можно сформулировать в виде: дана задача многокритериальной оптимизации (1). Требуется определить точку $x \in X$, в которой функция $R(x)$ достигает своего минимума.

Таким образом, отыскание оптимального плана $x^* \in X$ сведено к оптимизации выражения (5) на множестве системы линейных неравенств задачи (1). Поскольку выражение (5) представляет собой квадратичную функцию переменных x_1, \dots, x_n , то задача отыскания x^* свелась к задаче выпуклого программирования: задана выпуклая функция $R(x)$, определенная на множестве $x \in X$. Требуется отыскать точку $x^* \in X$, минимизирующую (5), т.е. обеспечивающую выполнение условия

$$R(x^*) = \min_x R(x), \quad x \in X.$$

Таким образом, алгоритм решения задачи (1) состоит из двух основных этапов: на первом осуществляется максимизация $F_i(x)$, $i = \overline{1, k}$, а на втором минимизация $R(x)$.

6. Подход, основанный на введении меры конфликта между критериями.

6.1. *Анализ взаимодействия целевых функций.* Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации вида (1). Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ множество допустимых решений задачи (1), $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, n}$ целевые функции (критерии).

Будем считать, что все функции f_i ($i = \overline{1, n}$) являются непрерывно дифференцируемыми в X , тогда для каждой целевой функции определен градиент в любой точке $x \in X$:

$$\nabla f_i(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \right)^T. \quad (6)$$

Этот градиент представляет собой вектор, указывающий направление, в котором значение целевой функции увеличивается.

Заметим, что целевые функции в задаче (1) могут взаимодействовать различным образом. К основным типам взаимодействия можно отнести кооперацию, конфликт и независимость.

Пусть $f_i(x)$ и $f_j(x)$ две произвольные целевые функции из (1). Будем говорить, что

(1) цель $f_i(x)$ кооперирует с целью $f_j(x)$, если

$$\forall x' \forall x'' (f_i(x'') \geq f_i(x')) \Rightarrow (f_j(x'') \geq f_j(x'));$$

(2) цель $f_i(x)$ конфликтует с целью $f_j(x)$, если

$$\forall x' \forall x'' (f_i(x'') \geq f_i(x')) \Rightarrow (f_j(x'') \leq f_j(x'));$$

(3) если предыдущие условия не выполняются, то целевые функции $f_i(x)$ и $f_j(x)$ независимы в X .

В случае кооперации достижение одной цели способствует достижению другой. Очевидно, что в этом случае эффект от достижения обеих целей превышает эффекты от каждой цели, взятой в отдельности. При конфликте целей достижение одной из целей приводит к тому, что другая цель не может быть достигнута. Также возможно, что тип взаимодействия динамически меняется в зависимости от значений целевых функций.

Так как все функции f_i ($i = \overline{1, n}$) непрерывно дифференцируемы в X , то для любой точки x^0 из X и произвольного ненулевого приращения $p \in \mathbb{R}^n$ можно определить производную по направлению p от функции $f_i(x)$ в точке x^0 . Если направление p задать с помощью единичного вектора с координатами $e = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n)$, то производная в точке x^0 по направлению, определяемому вектором e , определяется как скалярное произведение векторов $\nabla f_i(x^0)$ и e , т.е.

$$\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial e} = (\nabla f_i(x^0), e).$$

Заметим, что

- (1) производная функции $f_i(x)$ в точке x^0 по направлению, определяемому градиентом этой функции в указанной точке, имеет максимальное значение по сравнению с производной в этой точке по любому другому направлению;
- (2) значение производной функции $f_i(x)$ по направлению, определяемому градиентом этой функции в точке x^0 , равно $|\nabla f_i(x^0)|$, т.е. длине вектора $\nabla f_i(x^0)$ в данной точке.

В самом деле,

$$\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial e} = (\nabla f_i(x^0), e) = |\nabla f_i(x^0)| \cdot |e| \cdot \cos \varphi, \quad (7)$$

где $\varphi \in [0, \pi]$ угол между векторами $\nabla f_i(x^0)$ и e . Так как $|e| = 1$, то

$$\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial e} = |\nabla f_i(x^0)| \cdot \cos \varphi. \quad (8)$$

Максимальное значение производной $\partial f_i(x^0)/\partial e$ имеем при $\cos \varphi = 1$, т.е. при совпадении направления e с направлением $\nabla f_i(x^0)$, причем производная по этому направлению будет равна $|\nabla f_i(x^0)|$.

Рассмотрим две целевые функции $f_i(x)$ и $f_j(x)$, градиенты которых соответственно задаются векторами

$$\nabla f_i(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \right)^T, \quad \nabla f_j(x) = \left(\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_n} \right)^T.$$

Определим направление e_j , задаваемое вектором $\nabla f_j(x)$, в некоторой точке x^0 в виде

$$e_j = \left(\frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_1} / \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_k} \right)^2}, \dots, \frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_n} / \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_k} \right)^2} \right)^T = \tilde{\nabla} f_j(x^0).$$

Заметим, что $|e_j| = |\tilde{\nabla} f_j(x^0)| = 1$, так что координаты представляют собой направляющие косинусы градиента функции $f_j(x)$ в точке x^0 .

Найдем производную по направлению e_j от целевой функции $f_i(x)$ в некоторой точке x^0 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial e_j} &= (\nabla f_i(x^0), e_j) = \sum_{r=1}^n \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_r} \cdot \frac{\frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_r}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_k} \right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_k} \right)^2}} \cdot \sum_{r=1}^n \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_r} = \frac{(\nabla f_i(x^0), \nabla f_j(x^0))}{|\nabla f_j(x^0)|}. \end{aligned}$$

Аналогично можно определить производную целевой функции $f_j(x)$ по направлению $e_i = \tilde{\nabla} f_i(x^0)$, задаваемому градиентом $\nabla f_j(x)$ в некоторой точке x^0 .

$$\frac{\partial f_j(x^0)}{\partial e_i} = (\nabla f_j(x^0), e_i) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_k} \right)^2}} \cdot \sum_{r=1}^n \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_r} = \frac{(\nabla f_i(x^0), \nabla f_j(x^0))}{|\nabla f_i(x^0)|}.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial e_j} / \frac{\partial f_j(x^0)}{\partial e_i} = \frac{|\nabla f_i(x^0)|}{|\nabla f_j(x^0)|}.$$

Таким образом, для функции $f_i(x)$ имеем производную $\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial e_j}$ по направлению e_j в точке x^0 , при этом ее максимальное значение $|\nabla f_i(x^0)|$ достигается в направлении, задаваемом градиентом $\nabla f_i(x^0)$ в этой же точке. Следовательно, для оценки отклонения направления e_j от направления, соответствующего градиенту $\nabla f_i(x^0)$, можно использовать величину

$$\begin{aligned} k_j(f_i)|_{x^0} &= \frac{1}{|\nabla f_i(x^0)|} \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial e_j} = \frac{\sum_{r=1}^n \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_r}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_k} \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_k} \right)^2}} = \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_r}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_k} \right)^2}} \cdot \frac{\frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_r}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_k} \right)^2}}. \quad (9) \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$k_j(f_i)|_{x^0} = \frac{1}{|\nabla f_i(x^0)|} \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial e_j} = \frac{(\nabla f_i(x^0), \nabla f_j(x^0))}{|\nabla f_i(x^0)| \cdot |\nabla f_j(x^0)|} = \cos \varphi, \quad (10)$$

где $\varphi \in [0, \pi]$ — угол, образованный градиентами $\nabla f_i(x^0)$ и $\nabla f_j(x^0)$ в некоторой точке x^0 .

Если $\cos \varphi > 0$, то φ — острый угол (и можно говорить о кооперации соответствующих целевых функций), если $\cos \varphi = 0$, то $\varphi = \pi/2$, т.е. градиенты образуют прямой угол, тогда цели будем считать независимыми, если же $\cos \varphi < 0$, то угол φ является тупым (и можно говорить о конфликте соответствующих целевых функций), поскольку $\varphi = \pi$ при $\cos \varphi = -1$ и векторы $\nabla f_i(x^0)$ и $\nabla f_j(x^0)$ противоположно направлены. Если $\cos \varphi = 1$, то $\varphi = 0$, и векторы $\nabla f_i(x^0)$ и $\nabla f_j(x^0)$ одинаково направлены.

Рассмотрим некоторые свойства введенного коэффициента, предполагая, что он вычислен в некоторой точке x^0 .

$k_j(f_i)|_{x^0} = k_i(f_j)|_{x^0}$, поэтому в дальнейшем коэффициент взаимодействия целевых функций $f_i(x)$ и $f_j(x)$ в некоторой точке x^0 будем обозначать $k_{ij}(x^0) = k_{ji}(x^0)$. Заметим, что

$$k_{ii}(x^0) = \frac{1}{|\nabla f_i(x^0)|} \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial e_j} = \frac{(\nabla f_i(x^0), \nabla f_i(x^0))}{|\nabla f_i(x^0)| \cdot |\nabla f_i(x^0)|} = \cos 0 = 1. \quad (11)$$

6.2. Задачи линейной оптимизации. Рассмотрим частный случай задачи (1), когда все целевые функции линейны, т.е.

$$f_i(x) = \sum_{p=1}^k c_{ip} x_p, \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $c_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})^T$, $i = \overline{1, n}$, — вектор коэффициентов целевой функции.

В линейном случае градиент каждой целевой функции полностью определяется коэффициентом целевой функции $\nabla f_i(x) = c_i$ и представляет собой константу.

Коэффициент взаимодействия целевых функций [1] определяется по формуле

$$k_{ij} = \frac{(c_i, c_j)}{|c_i| |c_j|} = \left(\sum_{k=1}^n c_{ik} c_{jk} \right) / \left(\sqrt{\sum_{l=1}^n c_{il}^2} \cdot \sqrt{\sum_{l=1}^n c_{jl}^2} \right). \quad (13)$$

Для определения типа взаимодействия разобьем промежутки $[0, \pi]$ на три промежутка

$$[0, \pi] = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right].$$

Разбиение можно осуществить иначе, главное, чтобы получаемые промежутки поддавались интерпретации, и на их основе можно было бы строить качественные оценки взаимодействия целей.

С учетом введенного разбиения на основе коэффициентов k_{ij} можно сформулировать следующие *правила принятия решений*:

- (1) чем ближе k_{ij} к 1, тем в большей степени целевые функции $f_i(x)$ и $f_j(x)$ являются кооперирующими, поэтому если $k_{ij} \in [1/2, 1]$, то цели кооперируют;
- (2) чем ближе k_{ij} к -1 , тем в большей степени цели $f_i(x)$ и $f_j(x)$ являются конкурирующими, поэтому если $k_{ij} \in [-1, -1/2]$, то цели конкурируют;
- (3) чем ближе k_{ij} к 0, тем в большей степени цели $f_i(x)$ и $f_j(x)$ являются независимыми, поэтому если $k_{ij} \in [-1/2, 1/2]$, то цели независимы.

Вычислив коэффициенты взаимодействия для каждой пары целевых функций, можно сформировать матрицу $K = \{k_{ij}\}_{N \times N}$ с элементами $|k_{ij}| \leq 1$, которая задает симметричное бинарное отношение. На его основе можно сформировать различные подходы.

Знак коэффициента позволяет сделать вывод о типе взаимодействия, при этом важна и количественная оценка такого взаимодействия. Для оценки силы взаимодействия целей воспользуемся понятием нечеткого множества. В этом случае каждому из промежутков $[0, \pi/3]$, $(\pi/3, 2\pi/3)$,

$[2\pi/3, \pi]$ ставится в соответствие промежутку изменения $\cos \varphi$. Соответственно, имеем $[1/2, 1]$, $(-1/2, 1/2)$, $[-1, -1/2]$.

6.3. Алгоритм решения задачи линейной многокритериальной оптимизации. Пусть задана задача линейной многокритериальной оптимизации в виде:

$$f_p(x) = \sum_{i=1}^2 c_i^p x_i^p \rightarrow \max \quad (p = \overline{1, n}), \quad (14)$$

при $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, где X множество допустимых значений переменной x , n число целевых функций (критериев). Предлагается следующий алгоритм решения этой задачи, построенный на основе введения меры конфликта между целевыми критериями и учитывающий тип их взаимодействия [1, 5]:

- (1) Для каждой целевой функции решить задачу максимизации с исходной допустимой областью, получив оптимальное решение x_p^* и соответствующее значение целевой функции $f_p(x_p^*)$.
- (2) Для каждой пары f_i и f_j целевых функций определить коэффициент взаимодействия k_{ij} по формуле (13). Составить матрицу $K = \{k_{ij}\}_{n \times n}$ коэффициентов взаимодействия целевых функций.
- (3) Определить тип взаимодействия между всеми парами целевых функций, используя для принятия решения правила:
 - (i) если $k_{ij} \in [1/2, 1]$, то цели f_i и f_j кооперируют;
 - (ii) если $k_{ij} \in [-1, -1/2]$, то цели f_i и f_j конкурируют;
 - (iii) если $k_{ij} \in [-1/2, 1/2]$, то цели f_i и f_j независимы.

Составить таблицу типов взаимодействия:

	Кооперация	Конфликт	Независимость
$f_j (j = \overline{1, n})$	S_1^j	S_2^j	S_3^j

где S_1^j, S_2^j, S_3^j количества функций, с которыми конкретная целевая функция f_j кооперирует, конфликтует и независима соответственно, для каждого j .

- (4) Определить коэффициенты значимости α_i^j ($i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, n}$) i -го взаимодействия для целевой функции $f_j(x)$ в ее обобщенной оценке по формуле

$$\alpha_i^j = S_i^j / n,$$

где $S_i^j \in [0, 1]$, и для любого j выполняется условие

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i^j = 1.$$

- (5) Для выбранного принципа принятия группового решения (будем рассматривать принцип большинства) построить ранжирование $(x_{i_1}^*, \dots, x_{i_p}^*)$ точек решений x_p^* по предпочтительности в зависимости от значений целевых функций [8]. Соответствующим образом упорядочить целевые функции.
- (6) Назначить коэффициенты зависимости для каждой пары целевых функций.
- (7) Построить оценки $F_j^{\text{кооп}}(f_1, \dots, f_n), F_j^{\text{конфл}}(f_1, \dots, f_n), F_j^{\text{нез}}(f_1, \dots, f_n), p = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$, представляющие собой сумму произведений функций, с которыми соответствующая j -я целевая функция кооперирует, конфликтует и независима, и коэффициентов ее зависимости с остальными целевыми функциями, входящими в конкретную оценку.
- (8) Построить обобщенную целевую функцию по правилу:

$$F(f_1, \dots, f_n) = \sum_{j=1}^n F_j(f_1, \dots, f_n), \quad (15)$$

где

$$F_j(f_1, \dots, f_n) = \alpha_1^j F_j^{\text{кооп}}(f_1, \dots, f_n) + \alpha_2^j F_j^{\text{конфл}}(f_1, \dots, f_n) + \alpha_3^j F_j^{\text{нез}}(f_1, \dots, f_n). \quad (16)$$

Учитывая определение весов, получим формулу:

$$F(f_1, \dots, f_n) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n s_1^i F_j^{\text{кооп}}(f_1, \dots, f_n) + \sum_{i=1}^n s_2^i F_j^{\text{конфл}}(f_1, \dots, f_n) + \sum_{i=1}^n s_3^i F_j^{\text{нез}}(f_1, \dots, f_n) \right).$$

(9) Решить задачу математической оптимизации с обобщенной целевой функцией

$$F(f_1, \dots, f_n) \rightarrow \max, \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n.$$

7. Пример решения задачи. Рассмотрим следующую задачу линейной многокритериальной оптимизации:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= 3x_1 + 9x_2 \rightarrow \max, \\ f_3(x) &= 4x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ f_4(x) &= -2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ f_5(x) &= -3x_1 + x_2 \rightarrow \max \end{aligned} \quad (17)$$

при условиях

$$2x_1 + 3x_2 \leq 18, \quad -x_1 + 3x_2 \leq 9, \quad 2x_1 - x_2 \leq 10, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (18)$$

Решим задачу с помощью трех рассмотренных выше методов. Решим одноцелевые задачи при условиях(18), получив следующие результаты (3)–(4):

$$\begin{aligned} x_1^* &= (6, 2) \Rightarrow f_1(x^*) = 28, \\ x_2^* &= (3, 4) \Rightarrow f_2(x^*) = 45, \\ x_3^* &= (6, 2) \Rightarrow f_3(x^*) = 22, \\ x_4^* &= (0, 3) \Rightarrow f_4(x^*) = 12, \\ x_5^* &= (0, 3) \Rightarrow f_5(x^*) = 3. \end{aligned} \quad (19)$$

Вначале применим *метод свертывания критериев в суперкритерий*. Рассмотрим две ситуации:

(а) *коэффициенты важности критериев*: $(1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$ (все критерии равнозначны). Тогда суперкритерий (2) имеет вид:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{5} f_i(x) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^n f_i(x) = 1,2x_1 + 3x_2,$$

при этом задача (17)–(18) сводится к максимизации $\Phi(x)$ при условиях (18). Решая эту задачу, получим ответ

$$x^* = (3, 4); \quad f_1^* = 20, \quad f_2^* = 45, \quad f_3^* = 8, \quad f_4^* = 10, \quad f_5^* = -5.$$

(б) *коэффициенты важности критериев*: $(3/10, 3/10, 2/10, 1/10, 1/10)$. Тогда суперкритерий (2) имеет вид:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x) = 2,4x_1 + 3,6x_2,$$

при этом задача (17)–(18) сводится к максимизации $\Phi(x)$ при условиях (18). Решая эту задачу, получим ответ

$$x^* = (3, 4); \quad f_1^* = 20, \quad f_2^* = 45, \quad f_3^* = 8, \quad f_4^* = 10, \quad f_5^* = -5.$$

Таким образом, используя метод свертывания критериев в суперкритерий, получаем, что наилучшим решением является точка $(3, 4)$. Теперь рассмотрим *принцип приближения по всем локальным критериям к идеальному решению*. Используя (19), заключаем, что вектор F^0 имеет вид $F^0 = (28, 45, 22, 13, 3)$, и задача (17)–(18) сводится к нахождению минимума функции $R(x) = \|f(x) - F^0\|^2$ при условиях (18):

$$R(x) = (4x_1 + 2x_2 - 28)^2 + (3x_1 + 9x_2 - 45)^2 + (4x_1 - x_2 - 22)^2 + (-2x_1 + 4x_2 - 12)^2 + (-3x_1 + x_2 - 3)^2,$$

решая которую, получаем ответ

$$x^* \approx (3,66, 3,56); \quad f_1^* \approx 21,75, \quad f_2^* \approx 43,03, \quad f_3^* \approx 11,06, \quad f_4^* \approx 6,94, \quad f_5^* \approx -7,41.$$

Таким образом, используя принцип приближения по всем локальным критериям к идеальному решению, получаем, что наилучшим решением является точка $(3,66; 3,56)$. И, наконец, рассмотрим метод, основанный на введении меры конфликта между целевыми критериями. Определяя коэффициенты взаимодействия целевых функций по формуле (13), получим матрицу K вида:

$$K = \begin{pmatrix} \sqrt{} & 0,71 & 0,76 & 0,00 & -0,71 \\ 0,71 & \sqrt{} & 0,08 & 0,71 & -0,14 \\ 0,76 & 0,08 & \sqrt{} & -0,65 & -0,99 \\ 0,00 & 0,71 & -0,65 & \sqrt{} & 0,71 \\ -0,71 & -0,14 & -0,99 & 0,71 & \sqrt{} \end{pmatrix}.$$

Составим таблицу типов взаимодействия целевых функций:

Кооперация	Конфликт	Независимость
$f_1(x)$ и $f_2(x)$	$f_1(x)$ и $f_5(x)$	$f_1(x)$ и $f_4(x)$
$f_1(x)$ и $f_3(x)$	$f_3(x)$ и $f_4(x)$	$f_2(x)$ и $f_3(x)$
$f_2(x)$ и $f_4(x)$	$f_3(x)$ и $f_5(x)$	$f_2(x)$ и $f_5(x)$
$f_4(x)$ и $f_5(x)$		

В случае кооперации достижение одной цели способствует достижению другой. При конфликте целей достижение одной из целей приводит к тому, что другая цель не может быть достигнута. В соответствии с алгоритмом, построим обобщенную целевую функцию. Вначале, используя матрицу взаимодействия целевых функций, построим следующую таблицу:

Целевая функция	Количество взаимодействующих функций		
	Кооперация	Конфликт	Независимость
1	3	1	1
2	3	0	2
3	2	2	1
4	3	1	1
5	2	2	1

Таким образом, имеем матрицу коэффициентов значимости α_i^j ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,5}$):

$$\alpha_i^j = \begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 & 2/5 & 3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 0 & 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}^T. \tag{20}$$

Упорядочим точки A, B, C решения однокритериальных задач для каждой целевой функции по убыванию их значений:

f_1	28	20	6	ABC
f_2	36	45	27	BAC
f_3	22	8	-3	ABC
f_4	-4	10	12	CBA
f_5	-16	-5	3	CBA
	$A(6, 2)$	$B(3, 4)$	$C(0, 3)$	

В качестве принципа принятия группового решения будем использовать правило большинства: если дан профиль набор ранжировок, выражающих предпочтение членов группы (p_1, \dots, p_t) , альтернатива a получает в групповой ранжировке более высокое место, чем альтернатива b тогда и только тогда, когда большинство (более половины) индивидуумов оценивают a выше b (см. [8]):

	1	2	3	
A	2	1	2	⇒
B	1	4	0	
C	2	0	3	
				Правило большинства
A				1, 3
B				2
C				3

Таким образом, ранжирование альтернатив представляет собой упорядоченную по убыванию важности последовательность точек ABC , которую запишем в виде:

$$(6, 2) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (0, 3).$$

Следовательно, в соответствии с правилом большинства лучшей является точка $(6, 2)$. Теперь применим правило большинства для построения обобщенной целевой функции. Используя коэффициенты значимости из (20) и ранжирование точек, полученное с помощью правила большинства, найдем обобщенные оценки для $F_j^{\text{кооп}}(f_1, \dots, f_n)$, $F_j^{\text{конфл}}(f_1, \dots, f_n)$, $F_j^{\text{нез}}(f_1, \dots, f_n)$, $j = \overline{1, n}$:

$$(1 \sim 3) \rightarrow (2) \rightarrow (4 \sim 5).$$

Правило принятия решений, например, имеет вид: функции, достигающие своего экстремума в одной точке, имеют коэффициент зависимости, равный 1. Функции, достигающие своего экстремума в соседних точках, в ранжировании точек имеют зависимость $0,5 \leftrightarrow 0,5$, в точках через две в ранжировании точек $0,7 \leftrightarrow 0,3$ и т. д., т.е. для нашей задачи

$$(1 \sim 3) \xrightarrow{0,5 \leftrightarrow 0,5} (2), \quad (1 \sim 3) \xrightarrow{0,7 \leftrightarrow 0,3} (4 \sim 5), \quad (2) \xrightarrow{0,5 \leftrightarrow 0,5} (4 \sim 5).$$

Для задачи определим функции, с которыми j -я целевая функция кооперирует, конфликтует и независима, записав их в следующую таблицу:

j = 1	$G_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$	$M_1 = \{f_5\}$	$N_1 = \{f_4\}$
j = 2	$G_2 = \{f_1, f_4\}$	$M_2 = \emptyset$	$N_2 = \{f_3, f_5\}$
j = 3	$G_3 = \{f_1\}$	$M_3 = \{f_4, f_5\}$	$N_3 = \{f_2\}$
j = 4	$G_4 = \{f_2, f_5\}$	$M_4 = \{f_3\}$	$N_4 = \{f_1\}$
j = 5	$G_5 = \{f_4\}$	$M_5 = \{f_1, f_3\}$	$N_5 = \{f_2\}$

Затем построим обобщенные оценки $F_j(f_1(x), \dots, f_n(x))$, $j = \overline{1, 5}$ по формуле (16) для целевых функций $f_j(x)$, $j = \overline{1, 5}$, в которых коэффициенты значимости имеют вид (20).

После этого определяется обобщенная целевая функция:

$$F(f_1(x), \dots, f_5(x)) = \sum_{j=1}^5 F_j(f_1(x), \dots, f_5(x)).$$

Проведя соответствующие преобразования, получим, что обобщенная функция примет вид:

$$F(f_1(x), \dots, f_5(x)) = 3,94x_1 + 3,28x_2. \quad (21)$$

Решая задачу линейного программирования с допустимой областью решений (18) и целевой функцией (21), получим решение

$$x^* = (6, 2); \quad f_1^* = 28, \quad f_2^* = 36, \quad f_3^* = 22, \quad f_4^* = -4, \quad f_5^* = -16.$$

Таким образом, используя принцип большинства для построения обобщенной целевой функции, получим, что наилучшим решением является точка (6, 2).

8. Заключение. Выбор оптимального решения, как правило, опирается на совокупность критериев, характеризующих эффективность, полезность, качество допустимых решений. В оптимизационных задачах формально критерий может быть представлен целевой функцией. Если при решении задач с одной целевой функцией методологических проблем не возникает, а возможны только вычислительные трудности, то иначе обстоит дело с задачами, в которых несколько целевых функций. Здесь основные нюансы связаны со следующей проблемой: что следует считать наилучшими решениями в задаче с несколькими целевыми функциями, которые, возможно, противоречивы и достигают максимума в различных точках множества решений? Процедура сведения многокритериальной задачи к однокритериальной в большинстве случаев приводит к серьезному искажению существа проблемы и, следовательно, к неоправданной замене одной задачи другой. В основе такого перехода лежит использование различных функций агрегирования, причем результат не всегда поддается интерпретации, т. к. агрегирование вводится искусственным образом, поэтому возникает вопрос об адекватности полученного оптимального решения. Стоит отметить, что цели в задачах с несколькими целевыми функциями могут находиться друг с другом в различных отношениях. В качестве основных типов взаимодействия целевых функций в задаче линейного программирования в работе выделены три кооперация, конфликт и независимость. В случае кооперации достижение одной цели способствует достижению другой. При конфликте целей достижение одной из целей приводит к тому, что другая цель не может быть достигнута. В статье рассматривается метод свертывания векторного критерия в суперкритерий в случае равной и разной важности коэффициентов относительной важности критериев, а также принцип приближения по всем локальным критериям к идеальному решению и метод, построенный на основе введения меры конфликта между целевыми критериями. Затем рассматривается задача, для решения которой предлагается использовать эти методы. Как видно из решения задачи, наиболее объективное решение дает метод, учитывающий взаимодействие между целевыми функциями в многокритериальной задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аристова Е. М. Учет взаимодействия между целевыми функциями и их агрегирование в задачах оптимизации / Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2012.
2. Борисов А. Н. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. — М.: Радио и связь, 1989.
3. Зайченко Ю. П. Исследование операций. Нечеткая оптимизация. — Киев: Выща школа, 1991.
4. Мелькумова Е. М. Один из подходов к решению задачи многокритериальной оптимизации // Вестн. ВГУ. Сер. Сист. анал. информ. технол. — 2010. — 2. — С. 3942.
5. Мелькумова Е. М. Решение задачи многокритериальной оптимизации с помощью учета коэффициентов важности целевых функций // в кн.: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 2011. — С. 265269.
6. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде. — М.: Физматлит, 2002.
7. Петровский А. Б. Теория принятия решений. — М.: Академия, 2009.
8. Робертс Ф. С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным биологическим и экологическим задачам. — М.: Наука, 1986.
9. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.: Радио и связь, 1993.

Аристова Екатерина Михайловна
Воронежский государственный университет
E-mail: pmim@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 14–18
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-14-18

УДК 519.711.3

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЗАМОРАЖИВАНИЯ ЖИВОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ТКАНИ

© 2021 г. Б. К. БУЗДОВ

Аннотация. В работе приводится новая математическая модель, соответствующая замораживанию живой биоткани криоапликатором формы прямоугольного параллелепипеда, а также метод ее численного исследования, основанный на применении локально-одномерных разностных схем «сквозного счета». Модель представляет собой трехмерную трехфазную краевую задачу типа Стефана и имеет приложение в криохирургии. Специальная нелинейная зависимость источников тепла от искомого температурного поля позволяет учесть реально наблюдаемый на практике эффект пространственной локализации тепла.

Ключевые слова: математическое моделирование, криомедицина, криобиология, задача Стефана.

ON ONE MODEL OF FREEZING BIOLOGICAL LIVING TISSUES

© 2021 В. К. BUZDOV

ABSTRACT. In this paper, we present a new mathematical model of freezing a living biological tissue by a cryoapplicator and a method for its numerical study based on the use of local one-dimensional difference schemes. The model is a three-dimensional three-phase boundary-value Stefan-type problem and has applications in cryosurgery. A special nonlinear dependence of heat sources on the unknown temperature field allows one to take into account the spatial effect of heat localization.

Keywords and phrases: mathematical modeling, cryomedicine, cryobiology, Stefan problem.

AMS Subject Classification: 97M60

1. Введение. Математическое моделирование процесса теплопроводности при охлаждении и замораживании живой биологической ткани (активной, не инертной среды) приводит к постановкам задач типа Стефана, характерной особенностью которых является существование стационарных решений. Стабилизация во времени поля температуры достигается в связи с тем, что отводимый поток тепла компенсируется возникающими в биоткани источниками тепла, обусловленными крово- и лимфотоком, метаболизмом, окислительными химическими реакциями, а также теплом, выделяемым при замерзании внеклеточной и внутриклеточной жидкости. На сегодняшний день существует большое количество научных публикаций (см., например, цитируемую литературу в [6]), в которых рассматриваются математические модели криодеструкции биологической ткани. Однако в подавляющем их большинстве за основу математической модели принимается уравнение Пеннеса [8], из которого виден линейный характер зависимости источников тепла биоткани от искомого температурного поля. Такой характер зависимости не позволяет описать реально наблюдаемую пространственную локализацию тепла. Кроме того, модель Пеннеса не учитывает того факта, что замерзание межклеточной жидкости происходит гораздо раньше, чем замерзание внутриклеточной жидкости и соответствующее этим двум процессам тепло выделяется в разные моменты времени. Приводимая ниже модель учитывает указанные особенности.

2. Постановка задачи. Когда криоинструмент формы прямоугольного параллелепипеда «вдавливается» в биоткань (считаем, что с биотканью контактируют боковые грани параллелепипеда и верхнее основание), модель теплопроводности будет представлять собой следующую трехмерную краевую задачу типа Стефана:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right] - c(u) \rho(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \\
 & = -\omega(u) + P \frac{\partial u}{\partial t} \delta(u - u_1) + P_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta(u - u_2), \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad t > 0, \\
 & u(x, y, z, 0) = \bar{u} = \text{const}, \quad (x, y, z) \in \Omega, \\
 & \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} - \alpha u = -\alpha u_A, \quad z = c, \quad -a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad t > 0, \\
 & \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial n} - \beta u = -\beta u_A, \quad (x, y, z) \in \Gamma_0, \quad t > 0, \\
 & \lambda(u) \frac{\partial z}{\partial n} - \gamma u = -\gamma u_c, \quad z = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad t > 0, \\
 & u(x, y, z, t) = \bar{u} = \text{const}, \quad (x, y, z) \in \Gamma_2, \quad t > 0, \\
 & \left. \begin{aligned} u(x, y, z_1(x, y, t), t) &= u_1 \\ u(x, y, z_2(x, y, t), t) &= u_2 \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_0$, где $\Omega_1 = \{(x, y, z) \in [-A, A] \times [-B, B] \times [0, C]\}$, $\Omega_0 = \{(x, y, z) \in [-a, a] \times [-b, b] \times [0, c]\}$. A, B, C, a, b, c известные положительные постоянные, причем $a < A, b < B, c < C$; Γ_0 боковая поверхность параллелепипеда Ω_0 ; Γ_1 нижнее основание параллелепипеда Ω_1 без нижнего основания параллелепипеда Ω_0 ; Γ_2 граница области Ω_1 без нижнего основания; \bar{n} внутренняя нормаль области Ω ; $\lambda(u), c(u), \rho(u)$ коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и плотности биоткани соответственно; $u_A = u_A(t)$ температура охлаждающей поверхности криоинструмента; u_c температура окружающей среды; коэффициент теплообмена α является постоянной величиной; коэффициент теплообмена $\beta = \beta(z)$ монотонно возрастающая функция переменной z (вид ее должен определяться экспериментально); γ коэффициент теплообмена с окружающей средой; \bar{u} температура биоткани, до которой еще не дошел холод; u_1 температура замерзания межклеточной жидкости, u_2 температура замерзания внутриклеточной жидкости (температура криопоражения биоткани); $\delta(x)$ дельта-функция Дирака.

Определению подлежит функция температуры $u = u(x, y, z, t)$, а также пара изотермических поверхностей $z_1(x, y, z), z_2(x, y, z)$, на которых температура биоткани равна, соответственно, u_1, u_2 ; A, B, C постоянные, характеризующиеся тем, что вне рассматриваемого параллелепипеда температура биоткани постоянна и равна \bar{u} .

Предполагается, что коэффициенты $c(u), \rho(u), \lambda(u)$ могут иметь разрывы типа скачка при $u = u_1$ и $u = u_2$, а также, что

$$c(u) \geq c_{\min} > 0, \quad \rho(u) \geq \rho_{\min} > 0, \quad \lambda(u) \geq \lambda_{\min} > 0$$

После ввода функции теплосодержания ($\eta(x)$ функция Хевисайда)

$$H(u) = \int_0^u c(\xi) \rho(\xi) d\xi + P \eta(u - u_1) + P_0 \eta(u - u_2)$$

уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right] - \frac{\partial H(u)}{\partial t} = -\omega(u). \tag{2}$$

Добавив к уравнению (2) начальные и граничные условия и сглаживая разрывные функции [3], задачу можно решать численно, применяя локально-одномерные разностные схемы [7].

3. Источники тепла. Как было отмечено выше, характерной особенностью процесса теплопроводности при охлаждении живой биоткани является стабилизация к предельному стационарному состоянию с четкой пространственной локализацией температурного поля. Указанная особенность моделируется специальным образом подобранной нелинейной функциональной зависимостью источников тепла от температуры. По теплофизическому смыслу функциональная зависимость источников тепла от температуры должна быть ограниченной, непрерывной и монотонно убывающей в интервале положительных температур, а в интервале отрицательных температур ограниченной и монотонно возрастающей [1]. Также необходимым является условие вертикального вхождения кривой $\omega = \omega(u)$ в точку $(\bar{u}, 0)$, т.е. необходимо, чтобы $\omega'(\bar{u}) = -\infty$. Оно имеет следующий смысл: при сколь угодно малом возмущении начальной температуры биоткани в ней мгновенно возникают источники тепла.

При проведении численных расчетов на ЭВМ можно использовать следующие функции источников:

$$\omega_1(u) = \begin{cases} \omega_0(\bar{u} - u)^\beta, & u_1 \leq u < \bar{u} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$\omega_2(u) = \begin{cases} w_0 \ln(\bar{u} - u), & u_1 \leq u < \bar{u} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$\omega_3(u) = \begin{cases} w_0(\bar{u} - u)^\beta, & u_1 \leq u < \bar{u} \\ -\frac{w_0 \bar{u}^\beta}{u_A}(u - u_A), & u_A \leq u < u_1 \\ 0, & u < u_A \end{cases}.$$

Содержащиеся в указанных зависимостях параметры ω_0 и $0 < \beta < 1$ должны определяться экспериментально.

4. Разностная схема. Введем сетку:

$$W_h = \{(x_i, y_j, z_k), i = 1, \dots, N_1, j = 1, \dots, N_2, k = 1, \dots, N_3, x_0 = -A, y_0 = -B, z_0 = 0, x_{N_1} = A, y_{N_2} = B, z_{N_3} = C, x_i = x_0 + ih, y_j = y_0 + jh, z_k = kh\}.$$

При этом будем считать, что отрезки $[-a, a]$, $[-b, b]$, $[0, c]$ разбиты, соответственно, на m_1, m_2, m_3 частей; $m_1 < N_1, m_2 < N_2, m_3 < N_3$. Разбиение проведем так, чтобы величины

$$\frac{N_i + m_i}{2}, \quad i = 1, 2, 3$$

были целыми. Очевидно, это всегда возможно.

Обозначим ν_{ijk}^n значение искомой функции в точке (x_i, y_j, z_k) в момент времени $t_n = n\tau$. Пусть $\nu_{ijk}^{n+1/3}, \nu_{ijk}^{n+2/3}$ значения искомой функции на промежуточных слоях. Локально-одномерная разностная схема будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{3}B \left(\nu_{ijk}^{n+1/3} \right) \cdot \frac{\nu_{ijk}^{n+1/3} - \nu_{ijk}^n}{\tau} = \Lambda_1 \nu_{ijk}^{n+1/3} + \frac{1}{3}\omega \left(\nu_{ijk}^{n+1/3} \right), \quad (x_i, y_j, z_k) \in W_h,$$

$$\nu_{ijk}^{n+1/3} = \bar{u}, \quad i = 0, \quad i = N_1, \quad 0 < j < N_2, \quad 0 < k < N_3,$$

$$\Lambda_1 \nu_{ijk}^{n+1/3} = \frac{1}{h} \left(\lambda \left(\nu_{i+1/2, j, k}^{n+1/3} \right) \frac{\nu_{i+1, j, k}^{n+1/3} - \nu_{ijk}^{n+1/3}}{h} - \lambda \left(\nu_{i-1/2, j, k}^{n+1/3} \right) \frac{\nu_{ijk}^{n+1/3} - \nu_{i-1, j, k}^{n+1/3}}{h} \right),$$

$$\frac{1}{3}B \left(\nu_{ijk}^{n+2/3} \right) \cdot \frac{\nu_{ijk}^{n+2/3} - \nu_{ijk}^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 \nu_{ijk}^{n+2/3} + \frac{1}{3}\omega \left(\nu_{ijk}^{n+2/3} \right), \quad (x_i, y_j, z_k) \in W_h,$$

$$\Lambda_2 \nu_{ijk}^{n+2/3} = \frac{1}{h} \left(\lambda \left(\nu_{i, j+1/2, k}^{n+2/3} \right) \frac{\nu_{i+1, j, k}^{n+2/3} - \nu_{ijk}^{n+2/3}}{h} - \lambda \left(\nu_{i, j-1/2, k}^{n+2/3} \right) \frac{\nu_{ijk}^{n+2/3} - \nu_{i-1, j, k}^{n+2/3}}{h} \right),$$

$$\begin{aligned}
 \nu_{ijk}^{n+2/3} &= \bar{u}, \quad j = 0, \quad j = N_2, \quad 0 \leq i \leq N_1, \quad 0 \leq k \leq N_3, \\
 \frac{1}{3}B \left(\nu_{ijk}^{n+1} \right) \cdot \frac{\nu_{ijk}^{n+1} - \nu_{ijk}^{n+2/3}}{\tau} &= \Lambda_3 \nu_{ijk}^{n+1} + \frac{1}{3}\omega \left(\nu_{ijk}^{n+1} \right), \quad (x_i, y_j, z_k) \in W_h, \\
 \Lambda_3 \nu_{ijk}^{n+1} &= \frac{1}{h} \left(\lambda \left(\nu_{ij,k+1/2}^{n+1} \right) \frac{\nu_{i+1,j,k}^{n+1} - \nu_{ijk}^{n+1}}{h} - \lambda \left(\nu_{ij,k-1/2}^{n+1} \right) \frac{\nu_{ijk}^{n+1} - \nu_{i-1,j,k}^{n+1}}{h} \right), \\
 \nu_{ij0}^{n+1} &= \frac{\lambda \left(\nu_{ij0}^{n+1} \right)}{\gamma h + \lambda \left(\nu_{ij0}^{n+1} \right)} \cdot \nu_{ij1}^{n+1} + \frac{\gamma h u_c}{\gamma h + \lambda \left(\nu_{ij0}^{n+1} \right)}, \quad 0 < i < \frac{N_1 - m_1}{2}, \quad \frac{N_1 + m_1}{2} < i < N_1, \\
 &0 < j < \frac{N_2 - m_2}{2}, \quad \frac{N_2 + m_2}{2} < j < N_2, \\
 \nu_{\frac{N_1+m_1}{2},j,k}^{n+1/3} &= \frac{\lambda \left(\nu_{\frac{N_1+m_1}{2},j,k}^{n+1/3} \right)}{\alpha h + \lambda \left(\nu_{\frac{N_1+m_1}{2},j,k}^{n+1/3} \right)} \cdot \nu_{\frac{N_1+m_1}{2}+1,j,k}^{n+1/3} + \frac{\alpha h u_A}{\alpha h + \lambda \left(\nu_{\frac{N_1+m_1}{2},j,k}^{n+1/3} \right)}, \\
 &\frac{N_2 - m_2}{2} < j \leq \frac{N_2 + m_2}{2}, \quad 0 < k < m_3, \\
 \nu_{\frac{N_1-m_1}{2},j,k}^{n+1/3} &= \frac{\lambda \left(\nu_{\frac{N_1-m_1}{2},j,k}^{n+1/3} \right)}{\lambda \left(\nu_{\frac{N_1-m_1}{2},j,k}^{n+1/3} \right) - \alpha h} \cdot \nu_{\frac{N_1-m_1}{2}-1,j,k}^{n+1/3} - \frac{\alpha h u_A}{\lambda \left(\nu_{\frac{N_1-m_1}{2},j,k}^{n+1/3} \right) - \alpha h}, \\
 &\frac{N_2 - m_2}{2} < j \leq \frac{N_2 + m_2}{2}, \quad 0 < k < m_3, \\
 \nu_{i,\frac{N_2+m_2}{2},k}^{n+2/3} &= \frac{\lambda \left(\nu_{i,\frac{N_2+m_2}{2},k}^{n+2/3} \right)}{\alpha h + \lambda \left(\nu_{i,\frac{N_2+m_2}{2},k}^{n+2/3} \right)} \cdot \nu_{i,\frac{N_2+m_2}{2}+1,k}^{n+2/3} + \frac{\alpha h u_A}{\alpha h + \lambda \left(\nu_{i,\frac{N_2+m_2}{2},k}^{n+2/3} \right)}, \\
 &\frac{N_1 - m_1}{2} < i < \frac{N_1 + m_1}{2}, \quad 0 < k < m_3, \\
 \nu_{i,\frac{N_2-m_2}{2},k}^{n+2/3} &= \frac{\lambda \left(\nu_{i,\frac{N_2-m_2}{2},k}^{n+2/3} \right)}{\lambda \left(\nu_{i,\frac{N_2-m_2}{2},k}^{n+2/3} \right) - \alpha h} \cdot \nu_{i,\frac{N_2-m_2}{2}-1,k}^{n+2/3} - \frac{\alpha h u_A}{\lambda \left(\nu_{i,\frac{N_2-m_2}{2},k}^{n+2/3} \right) - \alpha h}, \\
 &\frac{N_1 - m_1}{2} < i < \frac{N_1 + m_1}{2}, \quad 0 < k < m_3, \\
 \nu_{i,j,m_3}^{n+1} &= \frac{\lambda \left(\nu_{i,j,m_3}^{n+1} \right)}{\alpha h + \lambda \left(\nu_{i,j,m_3}^{n+1} \right)} \cdot \nu_{i,j,m_3+1}^{n+1} + \frac{\alpha h u_A}{\alpha h + \lambda \left(\nu_{i,j,m_3}^{n+1} \right)}, \quad \frac{N_1 - m_1}{2} < i < \frac{N_1 + m_1}{2}, \\
 &\frac{N_2 - m_2}{2} < j < \frac{N_2 + m_2}{2}, \\
 \nu_{ijN_3}^{n+1} &= \bar{u}, \quad 0 \leq i \leq N_1, \quad 0 \leq j \leq N_2, \\
 \nu_{ijk}^0 &= \bar{u}, \quad 0 \leq i \leq N_1, \quad 0 \leq j \leq N_2, \quad 0 \leq k \leq N_3.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \nu_{i+1/2,j,k} &= 0,5(\nu_{ijk} + \nu_{i+1,jk}), \\
 \nu_{i,j+1/2,k} &= 0,5(\nu_{ijk} + \nu_{i,j+1,k}), \\
 \nu_{i,j,k+1/2} &= 0,5(\nu_{ijk} + \nu_{ij,k+1}),
 \end{aligned}$$

$$B(u) = H'(u).$$

Из написанных выше уравнений видно, что для нахождения значения сеточной функции ν на $(n+1)$ -м временном слое по известному значению на n -м временном слое необходимо последовательно решать три серии одномерных задач, соответственно, по координатам x , y , z . Каждая такая задача представляет собой нелинейную алгебраическую систему с трехдиагональной матрицей, и для ее решения лучше пользоваться методом прогонки совместно с каким-либо итерационным методом, например, методом Ньютона. При определении ν^{n+1} коэффициенты c , ρ , λ можно брать на предыдущей итерации.

5. Заключение. В заключение отметим ряд особенностей задач типа Стефана, возникающих в криомедицине.

1. Одной из важных особенностей является реально наблюдаемый эффект *пространственной локализации тепла*, связанный с наличием в биоткани нелинейных источников тепла специального вида. Этот эффект, хотя и усложняет математическую модель (в уравнении появляется нелинейный член, зависящий от искомого температурного поля), позволяет перейти от постановок задач в неограниченной области к постановкам в ограниченной области.

2. Нелинейные источники тепла зависят от числовых параметров, которые должны определяться экспериментально, что само по себе представляет самостоятельную достаточно сложную задачу.

3. Используемый для решения метод сквозного счета с предварительным сглаживанием разрывных функций не зависит от размерности задачи.

4. Связь между шагами по времени и пространству, обнаруженная при решении ряда одномерных и двумерных задач [4, 5], указывает на то, что построенные разностные схемы являются условно-устойчивыми.

5. Стабилизация, как поля температуры, так и поля изотерм, к предельному стационарному состоянию наступает примерно через 6 мин. (значения теплофизических характеристик используемых при проведении численных экспериментов можно взять в [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березовский А. А. Одномерная локальная задача Стефана плоскопараллельной криодеструкции биологической ткани// в кн.: Задачи теплопроводности с подвижными границами. — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1985. — С. 38.
2. Березовский А. А., Леонтьев Ю. В. Математическое прогнозирование криовоздействия на биологические ткани// в кн.: Криобиология. — Киев: Наукова думка, 1989. — 3. — С. 713.
3. Будаев Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1965. — 5. — С. 828840.
4. Буздов Б. К. Моделирование криодеструкции биологической ткани// Мат. модел. — 2011. — 23, № 3. — С. 2737.
5. Буздов Б. К. Численное исследование одной двумерной математической модели с переменным коэффициентом теплообмена, возникающей в криохирургии// Сиб. ж. индустр. мат. — 2017. — 20, № 4. — С. 2228.
6. Жмакин А. И. Физические основы криобиологии// Усп. физ. наук. — 2008. — 178, № 3. — С. 243266.
7. Самарский А. А. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1963. — 3, № 3. — С. 431466.
8. Pennes H. H. Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm// J. Appl. Physiol. — 1948. — 1. — P. 93102.

Буздов Беслан Каральбиевич
 Институт информатики и проблем регионального управления,
 Кабардино-Балкарский научный центр РАН, Нальчик
 E-mail: beslan.buzdov@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 19–33
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-19-33

УДК 517.9, 532.5, 539.3

О НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

© 2021 г. П. А. ВЕЛЬМИСОВ, Ю. В. ПОКЛАДОВА, У. Д. МИЗХЕР

Аннотация. Рассматриваются математические модели в задачах о динамике и устойчивости деформируемых элементов конструкций, взаимодействующих с потоком жидкости или газа. Математические модели представляют собой начально-краевые задачи для связанных систем дифференциальных уравнений с частными производными для гидродинамических функций и функций деформаций упругих элементов. Для исследования динамики и устойчивости деформируемых элементов, взаимодействующих с идеальной средой, использовались методы теории функций комплексного переменного, метод Фурье, метод Бубнова—Галеркина и метод функционалов Ляпунова.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, упругая пластина, деформация, динамика, устойчивость, дифференциальное уравнение с частными производными, метод Бубнова—Галеркина, метод функционалов Ляпунова.

ON SOME INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN AEROHYDROELASTICITY

© 2021 P. A. VELMISOV, YU. V. POKLADOVA, U. J. MIZHER

ABSTRACT. In this problem, we consider problems of the dynamics and stability of deformable structural elements interacting with a fluid or gas flow. Mathematical models considered are initial-boundary-value problems for coupled systems of partial differential equations for hydrodynamic functions and deformation functions of elastic elements. To study the dynamics and stability of deformable elements interacting with an ideal medium, we use various methods of the theory of functions of complex variables, the Fourier method, the Bubnov–Galerkin method, and the method of Lyapunov functionals.

Keywords and phrases: aerohydroelasticity, elastic plate, deformation, dynamics, stability, partial differential equations, Bubnov–Galerkin method, method of Lyapunov functionals.

AMS Subject Classification: 35Q35, 35Q74

1. Введение. В работе рассматриваются математические модели в задачах о динамике и устойчивости деформируемых элементов конструкций, взаимодействующих с потоком жидкости (газа) при различных режимах обтекания (дозвуковом, сверхзвуковом). В качестве примера предложены математические модели механической системы «трубопровод — датчик давления» и математическая модель, описывающая динамику пластины-полосы в сверхзвуковом потоке газа.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Ульяновской области (проект № 18-41-730015).

Описания датчиков измерительных систем представлены в [16, 19, 20, 23, 24]. В этих работах приводятся некоторые технические характеристики датчиков и некоторые уравнения, описывающие колебания их упругих элементов. В некоторых публикациях предлагается комплекс технических решений, позволяющий существенно повысить метрологические и эксплуатационные характеристики датчиков. Также в отдельных публикациях рассмотрено влияние нестационарной температуры измеряемой среды на погрешность измерения и предложена методика ее уменьшения, основанная на внесении изменений в конструкцию известных тензорезисторных датчиков давления.

При эксплуатации датчиков давления в авиационных и ракетных двигателях характерной особенностью является воздействие на них нестационарной температуры и повышенных виброускорений, в наибольшей степени проявляющееся в переходных режимах работы двигателя (например, при взлете и посадке аппарата). Такое негативное воздействие приводит к погрешности измерений, а в ряде случаев к разрушению упругого чувствительного элемента датчика. Возникает задача проектирования механической системы «трубопровод — датчик давления». В системе датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие высоких температур и виброускорений. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого элемента датчика, и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе. Математические модели системы «трубопровод — датчик давления» рассматривались, например, в [4, 7, 9–12, 22].

При проектировании аэрогидроупругих систем (конструкций, приборов, устройств, установок и т. д., взаимодействующих с потоком газа или жидкости), важное значение имеет исследование динамики и устойчивости деформируемых элементов, так как воздействие потока может приводить к значениям амплитуды, частоты и скорости колебаний, не позволяющим осуществлять надежную эксплуатацию систем и обеспечивать необходимую надежность и функциональную точность их работы. Среди последних исследований по динамике и устойчивости пластин и оболочек, находящихся в потоке жидкости или газа, следует отметить исследования [1, 2, 15, 17, 21, 25, 26, 28, 29]. Исследованию динамики и устойчивости трубопроводов и их элементов, при протекании внутри них потока жидкости или газа, посвящены, например, работы [5, 14, 27, 30, 31]. Задачи о сверхзвуковом обтекании возникают, в том числе, при исследовании динамики корпуса ракеты, панели фюзеляжа или его составных частей в случае сверхзвукового режима полета. Среди работ авторов данной статьи по исследованию динамики и устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком газа, отметим монографии и статьи [3, 8, 9, 32–34].

Построенные в работе модели описываются связанной системой дифференциальных уравнений в частных производных для неизвестных функций — потенциала скорости газа (жидкости), который обтекает конструкцию, и функций деформаций упругих элементов. Для описания механического поведения материала элементов используются следующие модели деформируемого тела: линейные и нелинейные модели упругого тела, учитывающие только поперечную составляющую деформации, и нелинейные модели упругого тела, учитывающие как поперечную, так и продольную составляющие деформации. Численно-аналитическое решение основано на методе Бубнова—Галеркина. Исследование динамической устойчивости осуществлялось на основе построения положительно определенных функционалов типа Ляпунова. Проведен численный эксперимент с целью определения характера колебаний.

2. Математическая модель системы «трубопровод — датчик давления». Если продольный размер трубопровода значительно превосходит его поперечный размер y_0 , то можно считать длину трубопровода бесконечной (см. рис. 1: 1 — трубопровод, 2 — датчик, 3 — рабочая среда, 4 — пластина (упругий элемент)).

2.1. Постановка задачи. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < y_0\}, \quad (1)$$

$$\phi_y(x, 0, t) = \phi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, +\infty), \quad (2)$$

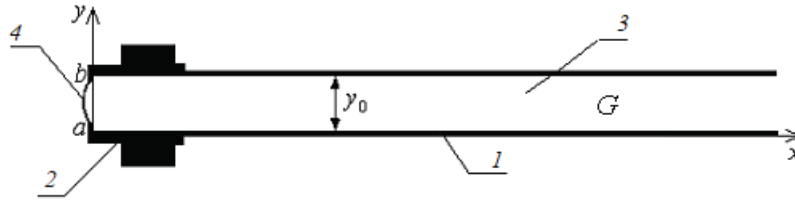


Рис. 1. Бесконечно длинный трубопровод с упругим элементом на торцевой стенке

$$\phi_x(0, y, t) = \dot{w}(y, t), \quad y \in (a, b), \quad 0 < a < b < y_0, \quad (3)$$

$$\phi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, a) \cup (b, y_0), \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\phi_x^2 + \phi_y^2) = 0, \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tilde{P} - \rho\phi_t) = P_*(t), \quad (6)$$

$$w(y, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(y, 0) = f_2(x), \quad (7)$$

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' - \delta\ddot{w}'' + \beta\dot{w} + \gamma w = P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho\phi_t(0, y, t), \quad y \in (a, b). \quad (8)$$

Здесь x, y — декартовы координаты, t — время; $\phi(x, y, t)$ — потенциал скорости рабочей среды (жидкости или газа); $w(y, t)$ — прогиб упругого элемента (пластины); \tilde{P}, ρ — давление и плотность рабочей среды в трубопроводе в состоянии покоя; $P_0(y, t)$ — распределенная внешняя нагрузка, действующая на упругий элемент; (1) — уравнение Лапласа, описывающее движение рабочей среды в трубопроводе; (2)–(4) — условия непротекания среды через соответствующие границы; условия (5), (6) означают, что на входе в трубопровод (на выходе из двигателя) среда покоится, а закон изменения давления определяется функцией $P_*(t)$; (7) — начальные условия; (8) — уравнение динамики пластины; a, b — координаты концов упругого элемента; M, D — погонная масса и изгибная жесткость пластины; $M = \rho_0 h$; $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина пластины; ρ_0 — плотность пластины; N — сжимающее (растягивающее) пластину усилие; α — коэффициент внутреннего демпфирования; β и γ — коэффициенты демпфирования и жесткости основания; δ — коэффициент, учитывающий инерцию поворота сечений; нижние индексы x, y, t обозначают частные производные по x, y, t , точка — частную производную по t , штрих — частную производную по y .

При изменении теплового воздействия на элемент с течением времени растягивающее (сжимающее) усилие N является функцией времени и определяется по формуле

$$N(t) = N_0 + \frac{E\alpha_T}{1 - \nu} \int_{-h/2}^{h/2} T(z, t) dz,$$

где α_T — температурный коэффициент линейного расширения, $T(z, t)$ — закон изменения температуры по толщине пластины, N_0 — постоянная составляющая усилия, обусловленная конструктивными особенностями системы.

2.2. *Решение аэрогидродинамической задачи методами теории функций комплексного переменного.* Считая t параметром, введем в рассмотрение комплексный потенциал $W = f(z, t) = \phi + i\psi$, где $z = x + iy$, $\psi = \psi(x, y, t)$ — функция тока. Функция $\zeta = \text{ch}(\pi z)/y_0$ конформно отображает полуполосу G на верхнюю полуплоскость комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ со следующим соответствием точек:

$$z = \infty \iff \zeta = \infty, \quad z = 0 \iff \zeta = 1, \quad z = iy_0 \iff \zeta = -1.$$

Упругому элементу (отрезку $[a, b]$ оси Oy) в ζ -плоскости соответствует отрезок $[\xi_1, \xi_2]$ оси $O\xi$, где

$$\xi_1 = \cos \frac{\pi b}{y_0}, \quad \xi_2 = \cos \frac{\pi a}{y_0}.$$

Для аналитической в верхней полуплоскости функции $f_z(z(\zeta), t) = \phi_x - i\phi_y$ имеем согласно (2)–(4) следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_z &= -\phi_y = 0, \quad \xi \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \\ \operatorname{Re} f_z &= \phi_x = \begin{cases} \dot{\omega}(y(\xi), t), & \xi \in (\xi_1, \xi_2), \\ 0, & \xi \in (-1, \xi_1) \cup (\xi_2, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Полагая $\zeta = \xi$, $z = iy$ в формуле $\zeta = \operatorname{ch}(\pi z)/y_0$, находим

$$\xi = \operatorname{ch} \frac{\pi iy}{y_0} = \cos \frac{\pi y}{y_0};$$

следовательно,

$$y = y(\xi) = \frac{y_0}{\pi} \arccos \xi, \quad \xi \in (-1, 1). \quad (9)$$

Таким образом, для аналитической функции $f_z(z(\zeta), t)$ имеем смешанную краевую задачу в верхней полуплоскости. Решение этой задачи, ограниченное в точках $\zeta = \pm 1$ и удовлетворяющее условию (5), запишем по формуле Келдыша—Седова (см. [18])

$$f_z(z(\zeta), t) = \frac{R(\zeta)}{\pi i} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\dot{\omega}(y(\tau), t) d\tau}{R(\tau)(\tau - \zeta)}, \quad (10)$$

где $R(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$ при $\zeta = \xi > 1$. При этом должно быть выполнено условие разрешимости

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\dot{\omega}(y(\tau), t)}{R(\tau)} d\tau = 0.$$

Учитывая, что $R(\tau) = i\sqrt{1 - \tau^2}$, $\tau \in (-1, 1)$, с помощью подстановки $\tau = \cos(\pi y)/y_0$ представим его в виде

$$\int_a^b \dot{\omega}(y, t) dy = 0. \quad (11)$$

Условие разрешимости (11) означает равенство нулю потока вектора скорости через границу области G , что соответствует модели несжимаемой среды. Далее, поскольку $\zeta = \operatorname{ch}(\pi z)/y_0$, имеем

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\pi}{y_0} \operatorname{sh} \frac{\pi z}{y_0} = \frac{\pi}{y_0} \sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Тогда с учетом (10) получаем

$$W_\zeta = f_z \cdot \frac{dz}{d\zeta} = \frac{y_0}{\pi \sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot f_z = -\frac{y_0}{\pi^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\dot{\omega}(y(\tau), t)}{\sqrt{1 - \tau^2}} \frac{d\tau}{\tau - \zeta}.$$

Интегрируя по ζ полученное выражение, найдем комплексный потенциал

$$W = \frac{y_0}{\pi^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\dot{\omega}(y(\tau), t)}{\sqrt{1 - \tau^2}} \ln(\tau - \zeta) d\tau + C(t), \quad (12)$$

где $C(t)$ — произвольная комплексная функция.

Перейдем в (12) к пределу при $\zeta \rightarrow \xi \in (\xi_1, \xi_2)$, при этом $z \rightarrow iy$, $y \in (a, b)$. Согласно предельным формулам для интеграла с логарифмическим ядром [13] имеем

$$\phi + i\psi = \frac{y_0}{\pi^2} \left(\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\dot{w}(y(\tau), t)}{\sqrt{1-\tau^2}} \ln |\tau - \xi| d\tau - \pi i \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\dot{w}(y(\tau), t)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \right) + C(t).$$

Отсюда, отделяя вещественную часть и дифференцируя ее по t , получим

$$\phi_t(0, y, t) = \frac{y_0}{\pi^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\ddot{w}(y(\tau), t)}{\sqrt{1-\tau^2}} \ln |\tau - \xi| d\tau + A(t), \quad (13)$$

где $\xi = \cos(\pi y)/y_0$, $A(t) = \operatorname{Re} C'(t)$.

Подберем произвольную пока функцию $A(t)$ так, чтобы выполнялось условие (6). С этой целью продифференцируем (12) по t и отделим вещественную часть. В результате будем иметь

$$\phi_t = \frac{y_0}{\pi^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\ddot{w}(y(\tau), t)}{\sqrt{1-\tau^2}} \ln |\tau - \zeta| d\tau + A(t),$$

или, с учетом условия (11),

$$\phi_t = \frac{y_0}{\pi^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\ddot{w}(y(\tau), t)}{\sqrt{1-\tau^2}} \ln \left| \frac{\tau}{\zeta} - 1 \right| d\tau + A(t). \quad (14)$$

При $\zeta \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow +\infty$) из (14) и (6) получаем $A(t) = \frac{\tilde{P} - P_*(t)}{\rho}$. Формулу (13), сделав в интегральном слагаемом подстановку $\tau = \cos \frac{\pi s}{y_0}$, можно теперь записать в виде

$$\phi_t(0, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \ddot{w}(s, t) \ln \left| \cos \frac{\pi s}{y_0} - \cos \frac{\pi y}{y_0} \right| ds + \frac{\tilde{P} - P_*(t)}{\rho}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (8), получим уравнение, связывающее закон изменения давления $P_*(t)$ на входе в трубопровод ($x = +\infty$) и функцию прогиба (деформацию) $w(y, t)$ упругого элемента датчика, расположенного в сечении $x = 0$

$$L(w) = P_0(y, t) - P_*(t) + \frac{\rho}{\pi} \int_a^b \ddot{w}(s, t) \ln \left| \cos \frac{\pi s}{y_0} - \cos \frac{\pi y}{y_0} \right| ds. \quad (16)$$

2.3. Решение аэрогидродинамической задачи методом Фурье. Уравнение для функции деформации упругого элемента можно получить на основе метода Фурье.

Потенциал скорости рабочей среды будем искать в виде функции, являющейся решением уравнения Лапласа (1) и удовлетворяющей условиям (2), (5):

$$\phi(x, y, t) = \phi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) \cos(\lambda_n y) e^{-\lambda_n x}. \quad (17)$$

Здесь $\lambda_n = \frac{n\pi}{y_0}$, а $\phi_0(t)$, $\phi_n(t)$ произвольные функции. Удовлетворяя условию (6), получим

$$\dot{\phi}_0(t) = \frac{\tilde{P} - P_*(t)}{\rho}.$$

Подставляя функцию (17) в условия (3), (4), получим

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) \lambda_n \cos(\lambda_n y) = \begin{cases} \dot{w}(y, t), & y \in (a, b), \\ 0, & y \in (0, a) \cup (b, y_0). \end{cases}$$

Проецируя полученное выражение на систему $\{\cos(\lambda_n y)\}_0^\infty$, будем иметь

$$\phi_n(t) = -\frac{2}{\lambda_n y_0} \int_a^b \dot{w}(y, t) \cos(\lambda_n y) dy, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и условие разрешимости

$$\int_a^b \dot{w}(y, t) dy = 0.$$

Подставляя найденные выражения для $\dot{\phi}_0(t)$, $\dot{\phi}_n(t)$ в правую часть уравнения (8), получим уравнение, связывающее деформацию упругого элемента датчика и давление на входе в трубопровод:

$$L(w) = P_0(y, t) - P_*(t) - \frac{2\rho}{y_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n y)}{\lambda_n} \int_a^b \ddot{w}(y, t) \cos(\lambda_n y) dy, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{y_0}. \quad (18)$$

2.4. *Случай резонанса.* Пусть $a = 0$, $b = y_0$. Рассмотрим подвижное жесткое защемление концов упругого элемента, когда граничные условия имеют вид $w'(0, t) = w'(y_0, t) = 0$, $w'''(0, t) = w'''(y_0, t) = 0$. Полагая в (18)

$$w(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \cos(\lambda_n y), \quad P_0(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{0n}(t) \cos(\lambda_n y)$$

для $w_n(t)$ ($n = 0, 1, \dots$), получим не связанные между собой уравнения

$$\begin{cases} M\ddot{w}_0 + \beta\dot{w}_0 + \gamma w_0 = P_{00}(t) - P_*(t), \\ (M + \rho/\lambda_n)\ddot{w}_n + (\alpha\lambda_n^4 + \beta)\dot{w}_n + (D\lambda_n^4 - N\lambda_n^2 + \gamma)w_n = P_{0n}(t). \end{cases} \quad (19)$$

В качестве примера рассмотрим периодическое изменение давления с течением времени $P_{00}(t) - P_*(t) = B_0 \sin \omega_0 t$, $P_{0n}(t) = B_n \sin \omega_n t$. Полагая $w_0(t) = A_0 \sin \omega_0 t$, $w_n(t) = A_n \sin \omega_n t$, из (19) получим

$$\begin{cases} -MA_0\omega_0^2 + \gamma A_0 = B_0, \\ -(M + \rho/\lambda_n)A_n\omega_n^2 + (D\lambda_n^4 - N\lambda_n^2 + \gamma)A_n = B_n, \end{cases}$$

откуда следует наличие резонансных частот по каждой из гармоник

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{M}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{D\lambda_n^4 - N\lambda_n^2 + \gamma}{M + \rho/\lambda_n}}.$$

При этом для существования резонансных частот необходимо выполнение условий

$$\gamma > 0, \quad N < D\lambda_n^2 + \frac{\gamma}{\lambda_n^2}.$$

2.5. *Нелинейные математические модели системы «трубопровод — датчик давления».* Постановка задачи (1)–(8) соответствует линейной теории аэрогидроупругости, когда динамика жидкости (газа), а также динамика чувствительного элемента датчика описываются линейными уравнениями.

Рассмотрим нелинейную одностепенную модель, которая определяется приведенными выше уравнениями (1)–(7), при этом в уравнении (8), описывающем динамику пластины, интегро-дифференциальный оператор $L(w)$ заменяется следующим

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + \left[\frac{Dw''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} \right]'' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' - \delta\ddot{w}'' + \beta\dot{w} + \gamma w + \mu w^3 - \theta w'' \left[\int_a^b \sqrt{1 + (w')^2} dy + a - b \right].$$

Слагаемое

$$\theta w'' \left[\int_a^b \sqrt{1 + (w')^2} dy + a - b \right]$$

учитывает нелинейную продольную силу, возникающую при деформации элемента, слагаемое

$$\left[\frac{Dw''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} \right]''$$

учитывает нелинейность изгибающего момента.

Полагая прогибы малыми, заменим $[1 + (w')^2]^{-3/2}$ и $\sqrt{1 + (w')^2}$ на $[1 - \frac{3}{2}(w')^2]$ и $[1 + \frac{1}{2}(w')^2]$ соответственно. Получим

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw'''' - \frac{3}{2}Dw''''(w')^2 - 9Dw'w''w''' - 3D(w'')^3 + Nw'' + \\ + \alpha\dot{w}'''' - \delta\ddot{w}'' + \beta\dot{w} + \gamma w + \mu w^3 - \frac{1}{2}\theta w'' \int_a^b (w')^2 dy. \quad (20)$$

Рассмотрим также нелинейную модель системы «трубопровод — датчик давления», учитывающую как поперечную, так и продольную деформации упругого элемента датчика. Уравнение (8), описывающее динамику упругого элемента, заменяется системой двух уравнений (двухстепенная модель):

$$\begin{cases} -EF \left[u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right]' + M\ddot{u} + \alpha_* \dot{u}'' = 0, \\ -EF \left[w' \left(u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right) \right]' + \left[\frac{Dw''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} \right]'' + M\ddot{w} + \alpha\dot{w}'''' - \delta\ddot{w}'' + \\ + \beta\dot{w} + Nw'' + \gamma w = P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho\phi_t(0, y, t), \quad y \in (a, b). \end{cases} \quad (21)$$

Здесь $u(y, t)$, $w(y, t)$ — продольная и поперечная деформации упругого элемента; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина пластинки;

$$M = \rho_0 h; \quad F = \frac{h}{1 - \nu^2}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

В предположении, что w' мало, производилась замена

$$\frac{1}{[1 + (w')^2]^{3/2}} \rightarrow \left[1 - \frac{3}{2}(w')^2 \right].$$

Для нелинейной одностепенной модели (1)–(7), (20) решение $w(y, t)$ уравнения (16) представляется в виде

$$w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) g_k(y),$$

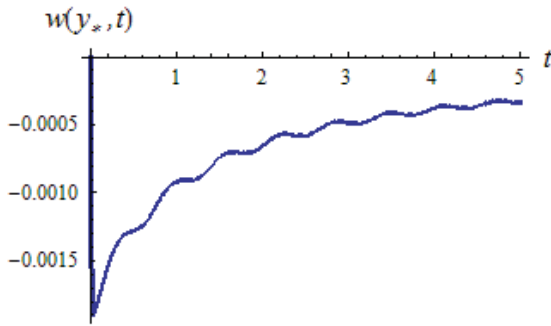
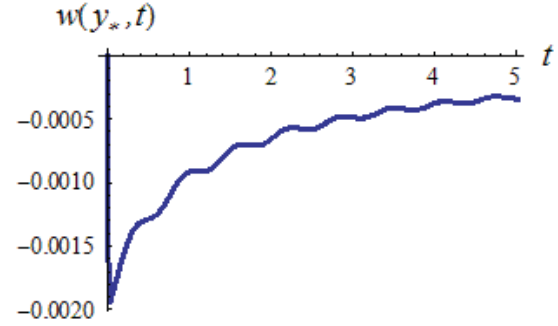
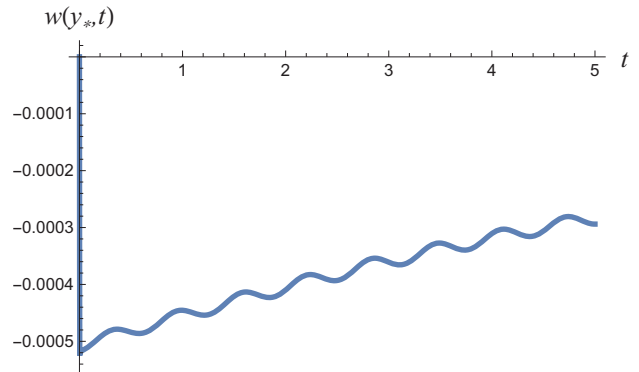
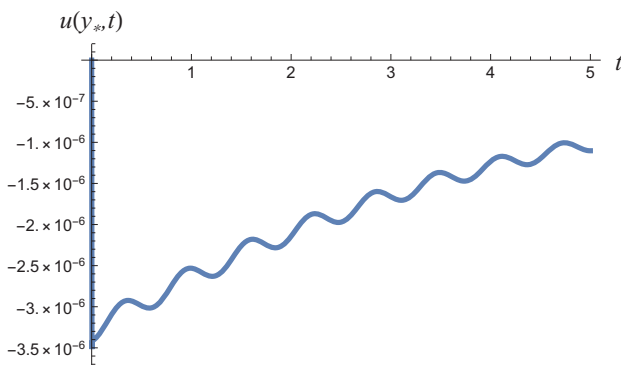
где $\{g_k(y)\}_{k=1}^\infty$ — полная на $[a, b]$ система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Из условия ортогональности невязки уравнения (16) к системе базисных функций $\{g_k(y)\}_{k=1}^n$ получим систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений для $w_k(t)$.

Для нелинейной двухстепенной модели (1)–(7), (21), учитывающей как продольную, так и поперечную деформации, согласно методу Галеркина, искомые функции деформации $u(y, t)$, $w(y, t)$ ищем в виде

$$u(y, t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) h_k(y), \quad w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) g_k(y),$$

где $\{h_k(y)\}_{k=1}^\infty$, $\{g_k(y)\}_{k=1}^\infty$ — полные на $[a, b]$ системы базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Рис. 2. График деформации $w(y_*, t)$ для линейной моделиРис. 3. График деформации $w(y_*, t)$ для одностепенной нелинейной моделиРис. 4. Графики деформации $u(y_*, t)$, $w(y_*, t)$ для двухстепенной нелинейной модели

Из условия ортогональности невязки первого уравнения системы (21) к системе базисных функций $\{h_k(y)\}_{k=1}^n$, второго уравнения системы (21) к системе базисных функций $\{g_k(y)\}_{k=1}^n$ получим систему из $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений для $u_k(t)$, $w_k(t)$.

Для всех рассмотренных моделей задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений решается с помощью системы Mathematica 12.0. Проведено численное моделирование на ЭВМ динамики упругого элемента датчика в зависимости от закона изменения давления в двигателе. Исследовалась деформация упругого элемента для различных параметров механической системы.

2.6. Численный эксперимент. Проведем исследование динамики упругого элемента датчика с учетом теплового воздействия ($N(t)$ — функция времени). В случае шарнирного закрепления концов упругого элемента искомые функции деформации $u(x, t)$, $w(x, t)$ ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) \sin(\lambda_k(x - a)), \quad w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \sin(\lambda_k(x - a)), \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{b - a},$$

где $\{\sin(\lambda_k(x - a))\}_{k=1}^{\infty}$ — полная на $[a, b]$ система базисных функций, удовлетворяющих шарнирному закреплению пластины. Рабочая среда — вода ($\rho = 10^3$), пластина изготовлена из стали ($E = 2 \cdot 10^{11}$, $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3$, $h = 4 \cdot 10^{-4}$). Все значения приведены в единицах СИ.

Для значений параметров $n = 2$, $y_0 = 0,02$, $a = 0$, $b = 0,02$, $M = 3,12$, $D = 1,1722$, $\alpha = 0,01$, $\alpha_* = 0,01$, $\beta = 0,3$, $\mu = 0$, $\theta = 0$, $\delta = 0$, $w(y, 0) = 0$, $\dot{w}(y, 0) = 0,5$, $P_0(y, t) = 0$, $P_*(t) = 10^5(20 + \cos 10t)$, $N(t) = 1000 - 2500(10 + 20t)$ получены графики функций $u(y, t)$, $w(y, t)$ в точке $y_* = (a + b)/2,5$ (рис. 2–4).

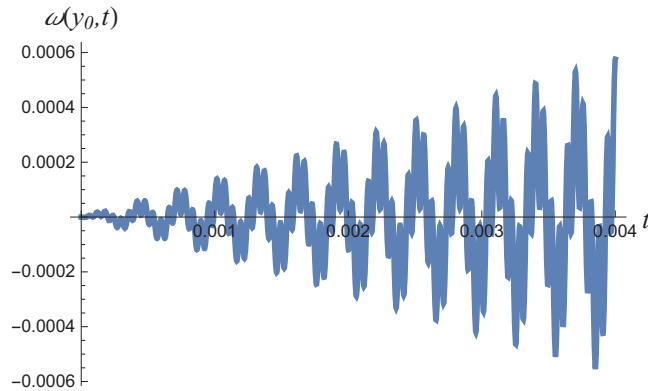
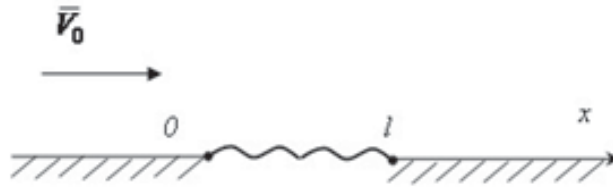
Рис. 5. График деформации $w(y_*, t)$ в случае резонанса

Рис. 6. Пластина, обтекаемая сверхзвуковым потоком газа

Деформация в случае двухстепенной нелинейной модели значительно меньше, чем в линейной и одностепенной нелинейной моделях. Следовательно, учет продольной составляющей деформации имеет существенное значение при исследовании динамики упругого элемента.

Аналогичный численный эксперимент проводился для модели с трубопроводом конечной длины. В случае, когда продольный размер трубопровода значительно превосходит его поперечный размер, графики деформаций для моделей с трубопроводом конечной длины и бесконечно длинным трубопроводом мало отличаются. Поэтому для расчетов систем с трубопроводами достаточной длины можно использовать модель с бесконечно длинным трубопроводом.

Приведем пример численного эксперимента для случая резонанса. Рассмотрим жесткое подвижное закрепление концов упругого элемента. Рабочая среда — вода ($\rho = 10^3$), пластина изготовлена из алюминия ($M = 3,12$, $D = 1,1722$). Все значения приведены в единицах СИ. Для значений параметров $n = 2$, $y_0 = 0,02$, $a = 0$, $b = y_0$, $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 0$, $w(y, 0) = 0$, $\dot{w}(y, 0) = 0$,

$$P_0(y, t) = 10^3 \sin\left(\sqrt{\frac{\gamma}{M}}t\right) + 10^5 \sum_{n=1}^2 \sin\left(\sqrt{\frac{D\lambda_n^4 - N\lambda_n^2 + \gamma}{M + \frac{\rho}{\lambda_n}}}t\right) \cos(\lambda_n y),$$

$$P_*(t) = 9 \cdot 10^2 \sin\left(\sqrt{\frac{\gamma}{M}}t\right)$$

с помощью системы Mathematica 12.0 получен график функции $w(y, t)$ в точке $y_* = \frac{a+b}{2,5}$ (рис. 5).

3. Математическая модель пластины-полосы в сверхзвуковом потоке газа. Рассмотрим плоскую задачу о динамике упругого элемента (пластины) некоторой конструкции при одностороннем обтекании сверхзвуковым потоком газа в направлении оси Ox со скоростью $V_0 > a_0$, где a_0 — скорость звука (рис. 6). Предполагается, что число Маха $M_0 = V_0/a_0 > \sqrt{2}$. Пластина в недеформированном состоянии занимает положение $0 < x < l$ оси Ox .

3.1. *Постановка задачи.* Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\phi_{tt} + 2V_0\phi_{xt} + V_0^2\phi_{xx} = a_0^2(\phi_{xx} + \phi_{yy}), \quad (22)$$

$$\phi_y(x, 0, t) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (l, +\infty), \\ \dot{w} + V_0w', & x \in (0, l), \end{cases} \quad (23)$$

$$\phi(0, y, t) = \phi_x(0, y, t) = 0, \quad w(0, t) = 0, \quad (24)$$

$$\phi(x, y, 0) = \phi_t(x, y, 0) = 0, \quad (25)$$

$$\phi(x, y, t) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty, \quad (26)$$

$$w(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = 0, \quad (27)$$

$$M\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} + \gamma w + f(x, w) = p^- - p^+ + \rho(\phi_t(x, 0, t) + V_0\phi_x(x, 0, t)). \quad (28)$$

Здесь x, y — декартовы координаты, t — время; $\phi(x, y, t)$ — потенциал скорости среды; $w(x, t)$ — прогиб упругого элемента; (22) — уравнение, описывающее течение газа над пластиной в модели идеальной сжимаемой среды; (23) — условия непротекания; (24) — условия отсутствия возмущений перед пластиной; (25) — условия отсутствия возмущений в начальный момент времени над пластиной; (26) — условие затухания возмущений вдали от пластины; (27) — начальные условия; (28) — уравнение, описывающее динамику упругого элемента с учетом воздействия на него сверхзвукового потока газа сверху; M, D — погонная масса и изгибная жесткость пластины; $M = \rho_0 h$; $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина пластины; ρ_0 — плотность пластины; ρ, p^+ — плотность и давление в невозмущенном однородном потоке; p^- — давление среды под пластиной; N — сжимающее (растягивающее) пластину усилие; α — коэффициент внутреннего демпфирования; β и γ — коэффициенты демпфирования и жесткости основания; нижние индексы x, y, t обозначают частные производные по x, y, t , точка — частную производную по t , штрих — частную производную по y .

3.2. *Решение аэрогидродинамической задачи операционным методом.* Для решения задачи применяется операционный метод, позволяющий получить дифференциальное уравнение в частных производных, которое описывает динамику упругой пластины с учетом аэрогидродинамического воздействия на нее и содержит лишь функцию деформации. Суть метода заключается в применении преобразования Лапласа к уравнению (22), условиям (23), (24) по переменным x и t (см., например, [6]). В результате получим изображение для слагаемого $\rho(\phi_t(x, 0, t) + V_0\phi_x(x, 0, t))$ из правой части уравнения (28). Для этого изображения при некоторых условиях удастся выразить оригинал через линейную комбинацию функций \dot{w}, w' . После нахождения оригинала получим дифференциальное уравнение в частных производных, которое описывает динамику упругой пластины с учетом аэрогидродинамического воздействия на нее и содержит лишь функцию деформации:

$$M\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} + \gamma w + f(x, w) = p^- - p^+ - \frac{\rho V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0 w' + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1} \dot{w} \right). \quad (29)$$

При $M_0 \rightarrow \infty$ уравнение (29) динамики упругого элемента (пластины) принимает вид

$$M\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} + \gamma w + f(x, w) = p^- - p^+ - \rho a_0(V_0 w' + \dot{w}). \quad (30)$$

Рассмотрим также нелинейную модель, учитывающую как поперечную, так и продольную деформации упругого элемента. Уравнение (29), описывающее динамику пластины, заменяется системой двух уравнений:

$$\begin{cases} -EF \left[u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right]' + M\ddot{u} + \alpha_*\dot{u}'' + f(x, t, u, w, \dot{u}, \dot{w}) = 0, \\ -EF \left[w' \left(u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right) \right]' + Dw'''' + M\ddot{w} + \alpha\dot{w}'''' + \\ + g(x, t, u, w, \dot{u}, \dot{w}) = p^- - p^+ - \frac{\rho V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0 w' + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1} \dot{w} \right). \end{cases} \quad (31)$$

Здесь $u(x, t)$, $w(x, t)$ — продольная и поперечная деформации упругого элемента; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина пластинки; $M = \rho_0 h$;

$$F = \frac{h}{1 - \nu^2}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)};$$

$f(x, t, u, w, \dot{u}, \dot{w})$, $g(x, t, u, w, \dot{u}, \dot{w})$ — функции, описывающие некоторые внешние воздействия на упругий элемент. Также необходимо задать начальные условия:

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{u}(x, 0) = f_2(x), \quad w(x, 0) = f_3(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_4(x).$$

3.3. *Исследование динамической устойчивости.* Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (30)

$$M\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} + \gamma w + f(x, w) + \rho a_0(V_0 w' + \dot{w}) = 0. \quad (32)$$

Здесь $f(x, w)$ — нелинейное воздействие, например, реакция основания. Согласно физическому смыслу задачи параметры M , D , ρ , a_0 , V_0 положительны, параметры α , β , γ неотрицательны.

Умножая уравнение (32) на $(\dot{w} + \theta w)$ и проводя ряд преобразований, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(M\dot{w}^2 + 2M\theta\dot{w}w + Dw''^2 - Nw'^2 + \alpha\theta w''^2 + \beta\theta w^2 + \gamma w^2 + 2 \int_0^w f(x, t, z) dz + \rho a_0 \theta w^2 \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(-Q_x(\dot{w} + \theta w) - M_x(\dot{w}' + \theta w') + Nw'\dot{w} + N\theta w'w + \frac{1}{2}\rho a_0 V_0 \theta w^2 \right) + \\ + (D\theta w''^2 - N\theta w'^2 + \alpha\dot{w}''^2 + (\beta - M\theta + \rho a_0)\dot{w}^2 + \gamma\theta w^2 + \theta w f(x, w) + \rho a_0 V_0 w'\dot{w}) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $M_x = Dw'' + \alpha\dot{w}''$ — изгибающий момент, $Q_x = -(Dw'' + \alpha\dot{w}'')$ — перерезывающая сила. Введем в рассмотрение функционал

$$\begin{aligned} J(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(M\dot{w}^2 + 2M\theta\dot{w}w + (D + \alpha\theta)w''^2 - Nw'^2 + \right. \\ \left. + (\beta\theta + \gamma + \rho a_0\theta)w^2 + 2 \int_0^w f(x, z) dz \right) dx. \end{aligned} \quad (34)$$

Предположим, что концы пластины закреплены следующим образом:

	1	2	3	4
$x = 0 :$	ж	ж	ш	ш
$x = l :$	ж	ш	ж	ш

(35)

Здесь введены обозначения: «ж» — жесткое защемление ($w = 0$, $w' = 0$); «ш» — шарнирное закрепление ($w = 0$, $M_x = 0$). Согласно (33) для указанных способов закрепления (35) имеет место равенство

$$\frac{dJ}{dt} = - \int_0^l (D\theta w''^2 - N\theta w'^2 + \alpha\dot{w}''^2 + (\beta + \rho a_0 - M\theta)\dot{w}^2 + \gamma\theta w^2 + \theta w f(x, w) + \rho a_0 V_0 w'\dot{w}) dx. \quad (36)$$

Согласно (34), (35) и неравенству Коши-Буняковского справедлива оценка

$$J(t) \geq \frac{1}{2} \int_0^l \left(M\dot{w}^2 + 2M\theta\dot{w}w + \left(\frac{2}{l^2} \left(\frac{2}{l^2}(D + \alpha\theta) - N \right) + \gamma + \theta\beta + \theta\rho a_0 \right) w^2 \right) dx.$$

При этом сделаны предположения

$$N < \frac{2}{l^2}(D + \alpha\theta) + \frac{l^2}{2}(\gamma + \theta\beta + \theta\rho a_0 - M\theta^2), \quad \int_0^w f(x, z) dz \geq 0.$$

Аналогично, используя неравенство Коши—Буняковского в (36), получим

$$\frac{dJ}{dt} \leq - \int_0^l \left[\left(\frac{2}{l^2} D - N \right) \theta w'^2 + \left(\frac{4}{l^4} \alpha + \beta + \rho a_0 - M\theta \right) \dot{w}^2 + \rho a_0 V_0 w' \dot{w} + \gamma \theta w^2 + \theta w f(x, w) \right] dx.$$

Полученное неравенство справедливо при условиях:

$$\theta > 0, \quad w f(x, w) \geq 0, \quad N \leq \frac{2}{l^2} D - \frac{(\rho a_0 V_0)^2}{4\theta \left(\beta + \rho a_0 - M\theta + \frac{4}{l^4} \alpha \right)}, \quad \beta + \rho a_0 - M\theta + \frac{4}{l^4} \alpha > 0.$$

Таким образом, если выполнены условия

$$0 < \theta < \frac{\beta + \rho a_0 + \frac{4}{l^4} \alpha}{M}, \quad w f(x, w) \geq 0, \quad \int_0^w f(x, z) dz \geq 0, \quad (37)$$

$$N \leq \frac{2}{l^2} D - \frac{(\rho a_0 V_0)^2}{4\theta \left(\beta + \rho a_0 - M\theta + \frac{4}{l^4} \alpha \right)}.$$

то $J(t) \geq 0$, $\dot{J}(t) \leq 0$, $J(t) \leq J(0)$. Тогда имеет место неравенство, содержащее в левой части под знаком интеграла положительно определенную квадратичную форму для w , \dot{w}

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l \left(M \dot{w}^2 + 2M\theta w \dot{w} + \left(\frac{2}{l^2} \left(\frac{2}{l^2} (D + \alpha\theta) - N \right) + \gamma + \theta\beta + \theta\rho a_0 \right) w^2 \right) dx \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^l \left(M \dot{w}^2(x, 0) + 2M\theta \dot{w}(x, 0) w(x, 0) + (D + \alpha\theta) w'^2(x, 0) - N w^2(x, 0) \right) dx + \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^l \left[(\beta\theta + \gamma + \rho a_0 \theta) w^2(x, 0) + 2 \int_0^{w(x, 0)} f(x, z) dz \right] dx. \end{aligned}$$

Из данного неравенства вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (35), (37). Тогда имеет место устойчивость в среднем на $[0, l]$ для $w(x, t)$, $\dot{w}(x, t)$ относительно начальных данных $w(x, 0)$, $\dot{w}(x, 0)$, $w'(x, 0)$, $w''(x, 0)$.

Рассмотрим условия (37). Одно из них накладывает ограничение на значение сжимающего усилия N и скорость потока V_0 . Область устойчивости на плоскости (V_0, N) ограничена семейством парабол с параметром θ

$$N \leq \frac{2}{l^2} D - B(\theta) V_0^2,$$

где $B(\theta)$ — положительная величина.

Укажем пример функции $f(x, w)$, удовлетворяющей условиям (37),

$$f(x, w) = \sum_{k=1}^n f_k(x) w^{2k+1}, \quad f_k(x) \geq 0, \quad x \in [0, l].$$

3.4. Численный эксперимент. Рассмотрим случай шарнирного закрепления концов упругого элемента. Для нелинейной модели (22)–(27), (31), учитывающей как продольную, так и поперечную деформации, согласно методу Галеркина, искомые функции деформации $u(x, t)$, $w(x, t)$ ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) \sin(\lambda_k x), \quad w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \sin(\lambda_k x),$$

где $\{\sin(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ — полная на $[0, l]$ система базисных функций, удовлетворяющих шарнирному закреплению пластины.

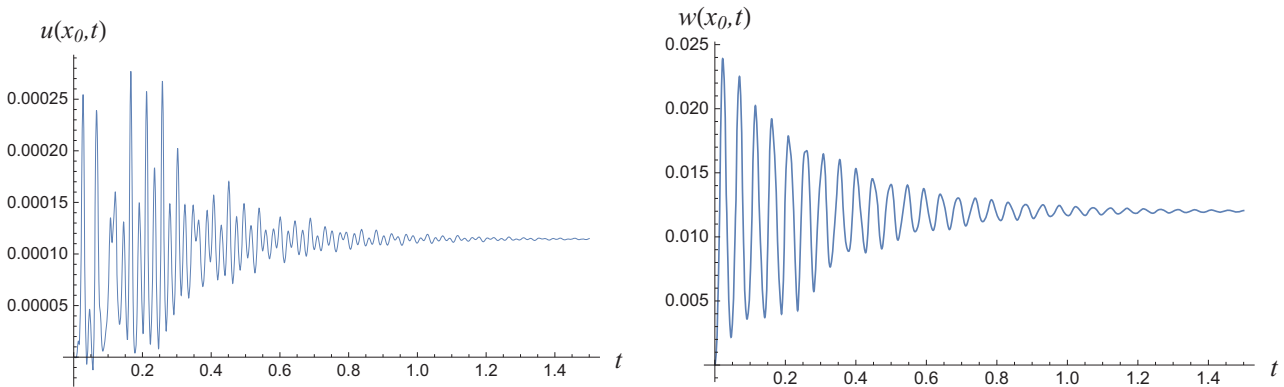


Рис. 7. Графики деформации $u(y, t)$, $w(y, t)$ для нелинейной модели в точке $x = 0,8$

Из условия ортогональности невязок первого, второго уравнений системы (31) и начальных условий к системе $\{\sin(\lambda_k x)\}_{k=1}^n$ получим задачу Коши для $u_k(t)$, $w_k(t)$. Задача Коши решается с помощью системы Mathematica 12.0.

Будем считать, что упругий элемент изготовлен из алюминия ($E = 2 \cdot 10^{11}$ — модуль упругости; $\rho_{pl} = 7,8 \cdot 10^3$ — плотность; $h_{pl} = 0,005$ — толщина пластины); обтекается сверхзвуковым потоком воздуха. Скорость набегающего потока $V_0 = 600$; скорость звука $a_0 = 340$; плотность воздуха $\rho = 1,3$; число Маха $M_0 = 1,765$. Другие параметры механической системы: $l = 2$; $M = 39$ (погонная масса); $\nu = 0,34$ (коэффициент Пуассона); $D = 824,476$ (изгибная жесткость); $p^- - p^+ = 5000$; $\alpha = 0,1$; $\alpha_* = 0,1$. Все значения приведены в единицах СИ. При реализации метода Галеркина выбрано $n = 5$. Начальные условия зададим в виде: $w(x, 0) = 0$, $\dot{w}(x, 0) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $\dot{u}(x, 0) = 0$. Получены графики функций $u(x, t)$, $w(x, t)$ в точке $x = 0,8$ (рис. 7).

4. Заключение. Построены математические модели системы «трубопровод — датчик давления», и пластины-полосы в сверхзвуковом потоке газа. Рассмотрены линейные и нелинейные модели, описывающие динамику упругого элемента. На основе математической модели системы «трубопровод — датчик давления» методами теории функций комплексного переменного, методом Фурье получено уравнение, связывающее закон изменения рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого элемента датчика. В случае математической модели пластины-полосы в сверхзвуковом потоке газа операционным методом получено уравнение, описывающее динамику упругой пластины с учетом аэрогидродинамического воздействия на нее и содержащее лишь функцию деформации. Разработан метод решения полученных уравнений, на основе которого проведен численный эксперимент. В задаче о динамике пластины в сверхзвуковом потоке газа построен функционал, с помощью которого получены аналитические условия устойчивости. Полученные результаты справедливы для нескольких типов закрепления упругого элемента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Пробл. машиностр. надежн. машин. — 2014. — 1. — С. 3–11.
2. Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С., Попова А. А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Тр. МАИ. — 2014. — 78. — С. 1–13.
3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций. — Ульяновск: УлГТУ, 2015.
4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод—датчик давления». — Ульяновск: УлГТУ, 2008.

5. Болотин В. В., Радин В. П., Чирков В. П., Шугорев А. В. Устойчивость участка трубопровода с упругой опорой// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 2009. — 1. — С. 174–184.
6. Бочкарев С. А., Матвеев В. П. Решение задачи о панельном флаттере оболочечных конструкций методом конечных элементов// Мат. модел. — 2002. — 2. — С. 55–71.
7. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А. Математическое моделирование механической системы «трубопровод—датчик давления»// Датчики и системы. — 2003. — 6. — С. 12–15.
8. Вельмисов П. А., Манжосов В. К. Математическое моделирование в задачах динамики виброударных и аэроупругих систем. — Ульяновск: УлГТУ, 2014.
9. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. — Ульяновск: УлГТУ, 2018.
10. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Математическое моделирование динамики защитной поверхности резервуара// Вестн. Ульяновск. гос. техн. ун-та. — 2018. — 2. — С. 27–35.
11. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Математическое моделирование динамики упругих элементов, взаимодействующих с потоком газа// Вестн. Ульяновск. гос. техн. ун-та. — 2018. — 3. — С. 22–30.
12. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., Серебрянникова Е. С. Математическое моделирование системы «трубопровод—датчик давления»// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2010. — 12, № 4. — С. 85–93.
13. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
14. Зефиров С. В., Кочетков А. В., Обчинников В. Ф., Савихин А. О., Смирнов Л. В., Яскеляин А. В. Численное моделирование динамического деформирования пространственного трубопровода с жидкостью при локальном ударном нагружении// Пробл. прочн. пластичн. — 2013. — 75, № 2. — С. 152–159.
15. Ильгамов М. А., Хакимов А. Г. Изгиб длинного трубопровода, находящегося в очень вязкой жидкости// Строит. мех. инж. констр. сооруж. — 2009. — 1. — С. 7–12.
16. Казарян А. А., Грошев Г. П. Универсальный датчик давления// Измерит. техн. — 2008. — 3. — С. 26–30.
17. Куликов А. Н. Бифуркация автоколебаний при малом коэффициенте демпфирования в сверхзвуковом потоке газа// Прикл. мат. мех. — 2009. — 73, № 2. — С. 271–281.
18. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987.
19. Мартыненко В. Т. Исследование причин, влияющих на погрешность преобразования датчиков разности давлений «Сапфир-22»// Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. — 2005. — 6. — С. 31–33.
20. Михайлов П. Г., Мокров Е. А., Митрохин С. В., Сергеев Д. А. Особенности метрологического обеспечения современных датчиков пульсаций давлений// Изв. ЮФУ. Техн. науки. — 2012. — 130, № 5. — С. 174–179.
21. Могилевич Л. И., Попов В. С., Попова А. А., Христофорова А. В. Математическое моделирование динамики взаимодействия сильновязкой жидкости со стенками канала, установленного на упругом основании// Динам. сист. мех. машин. — 2016. — 3, № 1. — С. 350–354.
22. Покладова Ю. В., Решетников Ю. А. Математическое моделирование динамики упругого элемента датчика давления в трубопроводе конечной длины// Прикл. мат. мех. (Ульяновск). — 2004. — 6. — С. 114–120.
23. Стучебников В. М. Датчики давления МИДА для систем коммерческого учета энергоносителей// Датчики и системы. — 2009. — 4. — С. 38–40.
24. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
25. Abdelbaki A. R., Paidoussis M. P., Misra A. K. A nonlinear model for a free-clamped cylinder subjected to confined axial flow// J. Fluids Struct. — 2018. — 80. — P. 390–404.
26. Abdelbaki A. R., Paidoussis M. P., Misra A. K. A nonlinear model for a hanging tubular cantilever simultaneously subjected to internal and confined external axial flows// J. Sound Vibration. — 2019. — 449. — P. 349–367.
27. Faal R. T., Derakhshan D. Flow-induced vibration of pipeline on elastic support// Proc. Eng. — 2011. — 14. — P. 2986–2993.
28. Gatica G. N., Heuer N., Meddahi S. Coupling of mixed finite element and stabilized boundary element methods for a fluid-solid interaction problem in 3D// Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 2014. — 30, № 4. — P. 1211–1233.

29. *Kontzialis K., Moditis K., Paidoussis M. P.* Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions// *J. Press. Vessel Techn.* — 2017. — 139, № 3. — P. 1–8.
30. *Moditis K., Paidoussis M., Ratigan J.* Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow// *J. Fluids Struct.* — 2016. — 63. — P. 120–139.
31. *Mogilevich L. I., Popova A. A., Popov V. S.* On the dynamic interaction of an elastic cylindrical shell with a fluid laminar stream inside in application to pipeline transportation// *Sci. Technol. Transport.* — 2007. — 2. — P. 69–72.
32. *Velmisov P. A., Ankilov A. V.* Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid// *Cybern. Phys.* — 2017. — 6, № 5. — P. 262–270.
33. *Velmisov P. A., Ankilov A. V.* Stability of solutions of initial boundary-value problems of aerohydroelasticity// *J. Math. Sci.* — 2018. — 233, № 6. — P. 958–975.
34. *Velmisov P. A., Ankilov A. V., Pokladova Yu. V.* Stability of solutions of initial-boundary value problems in aerohydroelasticity// *AIP Conf. Proc.* — 2018. — 2048, № 1. — 040011.

Вельмисов Петр Александрович

Ульяновский государственный технический университет

E-mail: velmisov@ulstu.ru

Покладова Юлия Валерьевна

Ульяновский государственный технический университет

E-mail: pokladovau@inbox.ru

Мизхер Усама Джавад

Ульяновский государственный технический университет

E-mail: usama.mizher@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 34–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-34-49

УДК 517.98, 517.955, 532.5

О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© 2021 г. В. И. ВОЙТИЦКИЙ, Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ

Аннотация. Рассматривается линейная начально-краевая задача, порожденная проблемой малых движений пространственного маятника с полостью, частично заполненной однородной несжимаемой жидкостью, в случае, когда момент силы трения в сферическом шарнире пропорционален угловой скорости. Приводится операторная трактовка задачи, устанавливается теорема о сильной разрешимости задачи Коши на конечном отрезке времени. Для соответствующей спектральной задачи доказывается дискретность спектра и его локализация в полосе, устанавливается степенная асимптотика собственных значений, суммируемость системы корневых элементов методом Абеля—Лидского.

Ключевые слова: начально-краевая задача, гильбертово пространство, самосопряженный линейный оператор, дискретный спектр, базисность по Абелю—Лидскому.

NORMAL OSCILLATIONS OF A PENDULUM WITH A CAVITY PARTIALLY FILLED WITH AN IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID

© 2021 V. I. VOYTITSKY, N. D. KOPACHEVSKY

ABSTRACT. We consider a linear initial-boundary-value problem generated by the problem of small motions of a spatial pendulum with a cavity partially filled with a homogeneous incompressible fluid, in the case where the moment of friction forces in the spherical hinge is proportional to the angular velocity. We propose an operator interpretation of the problem and prove a theorem on the strong solvability of the Cauchy problem on a finite time interval. For the corresponding spectral problem, the discreteness of the spectrum and its localization in a strip are proved, power asymptotics of eigenvalues are found, and the summability of the system of eigenvectors is established by the Abel–Lidsky method.

Keywords and phrases: initial-boundary-value problem, Hilbert space, self-adjoint linear operator, discrete spectrum, Abel–Lidsky basis property.

AMS Subject Classification: 70E55, 35M33

1. Введение. Проблемы движения твердых тел с жидким наполнением изучаются с середины прошлого столетия многими известными математиками. В простейшем случае, когда полость

Работа Н. Д. Копачевского выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 14.Z50.31.0037).

внутри твердого тела полностью заполнена идеальной несжимаемой жидкостью, движение системы (гиростата) эквивалентно движению твердого тела с измененными характеристиками. Данный результат принадлежит Н. Е. Жуковскому (см. [11]) и основан он на введении так называемых потенциалов Жуковского — стационарных функций, являющихся решениями вспомогательных краевых задач, зависящих лишь от формы полости.

Если полость внутри тела заполнена частично, то гидромеханическая система имеет подвижный центр масс, обусловленный наличием свободной движущейся поверхности, что существенно усложняет задачу описания движения. Такие проблемы изучались в линейной постановке, начиная с работ Н. Н. Моисеева (см. [25]), отметим также статьи Л. Н. Сретенского, Г. С. Нариманова, Д. Е. Охочимского (см. [26, 29, 30, 33]), а также более поздние монографии [24, 27, 28, 32, 34, 35].

В работе С. Г. Крейна и Н. Н. Моисеева [20] для исследования проблемы малых движений твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью, впервые применялись методы функционального анализа и теории линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Результаты этой статьи отражены в более поздних монографиях [17, 36, 37]. Данная работа посвящена более подробному изучению соответствующих спектральных проблем и написана в продолжение исследований С. Г. Крейна и Н. Д. Копачевского. Отметим, что исследование проведено на основе статьи Н. Д. Копачевского [14], в которой использована та же операторная схема (основанная на эквивалентных преобразованиях кинематических краевых условий на свободной поверхности). В этой работе можно найти доказательства ряда утверждений, которые здесь приводятся без доказательства. В данном исследовании более точно описаны спектральные свойства задачи в отсутствие трения и, кроме того, изучено влияние трения в шарнире на локализацию и асимптотику собственных значений, а также на базисность системы корневых элементов.

Отметим, что используемый в задаче операторный подход использовался в предыдущих работах авторов [7, 8, 16], где изучались проблемы малых движений сочлененных маятников с жидким наполнением. При этом оказалось, что он одинаково применим как для идеальных, так и для вязких жидкостей, частично либо целиком заполняющих полости, а также для систем несмешивающихся жидкостей в полостях (случай сочлененных гиростатов изучался в серии более ранних работ Н. Д. Копачевского и Э. И. Батыра, см., например, [4, 5]). Весь класс описанных задач в операторной форме сводится к изучению абстрактной задачи Коши в сумме гильбертовых пространств $H = H_1 \oplus H_2$:

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & gC_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$z_1(0) = z_1^0, \quad z_2(0) = z_2^0.$$

Здесь $z_1 \in H_1$ — набор динамических переменных; $z_2 \in H_2$ — набор кинематических переменных; $g > 0$ — ускорение силы тяжести; C_1 — оператор кинетической энергии системы, $0 \ll C_1 \in \mathcal{L}(H_1)$; C_2 — оператор потенциальной энергии, $C_2 = C_2^* \in \mathcal{L}(H_2)$; $0 \leq A_1: \mathcal{D}(A_1) \subset H_1 \rightarrow H_1$ — оператор диссипации энергии, а $B_{12}: \mathcal{D}(B_{12}) \subset H_2 \rightarrow \mathcal{R}(B_{12}) = H_1$ и $B_{21}: \mathcal{D}(B_{21}) \subset H_1 \rightarrow \mathcal{R}(B_{21}) = H_2$ — компоненты матричного антидиагонального оператора обмена энергиями (кинетической и потенциальной), $B_{12}^* = -B_{21}$; $f_1(t)$ — заданное малое поле внешних сил.

Сильная разрешимость данной абстрактной задачи (для неограниченного оператора A_1 , когда часть жидкостей являются вязкими) при выполнении описанных свойств операторных коэффициентов в случае $C_2 \gg 0$ доказана в [15]. Если оператор A_1 является ограниченным, то разрешимость задачи (1) доказана в [16] как для положительно определенного, так и для не знакоопределенного оператора C_2 . Сопутствующие спектральные задачи исследовались ранее либо для консервативных систем (когда все жидкости идеальные и трение в шарнирах не учитывается), либо для диссипативных систем (когда все жидкости вязкие и трение в шарнире учитывается). Изучение спектральных свойств частично диссипативной системы требует особого подхода. В данной работе рассмотрена базовая задача из этого класса, когда имеется одиночный маятник с трением в шарнире и полостью, частично заполненной одной идеальной жидкостью.

2. Постановка задачи. Пусть имеется твердое тело Ω_0 с плотностью ρ_0 , которое закреплено с помощью сферического шарнира в неподвижной точке O_1 , относительно которой тело совершает малые пространственные движения. Пусть внутри Ω_0 имеется полость, частично заполненная однородной идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью ρ_1 , которая в состоянии равновесия под действием силы тяжести с ускорением g занимает область Ω_1 , ограниченную твердой стенкой S и горизонтальной равновесной свободной поверхностью Γ .

Введем подвижную (неинерциальную) систему декартовых координат $O_1x_1^1x_2^1x_3^1$ с ортами $\{\mathbf{e}_1^k\}_{k=1}^3$, жестко связанную с телом. Будем считать, что в состоянии равновесия сила тяжести противоположно направлена по отношению к \mathbf{e}_1^3 , а плоскость Γ ортогональна этому вектору, при этом расстояние от точки подвеса до центра масс равно $l \geq 0$.

Из курса теоретической механики известно, что положение маятника можно однозначно описать с помощью вектора углового перемещения $\boldsymbol{\delta}(t)$, связанного с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$ с помощью связи $d\boldsymbol{\delta}dt = \boldsymbol{\omega}$. Движение жидкости в маятнике однозначно определяется полем относительных скоростей $\mathbf{u}(t, x)$, отклонением поля давлений от равновесного $p(t, x)$, а также малой функцией $\zeta(t, x)$, $x \in \Gamma$, равной отклонению свободной поверхности жидкости от равновесного состояния вдоль нормали \mathbf{n} к Γ .

Уравнение изменения кинетического момента гидромеханической системы относительно точки O_1 после линеаризации (см. [17, с. 143–145]) приводит к соотношению

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \rho_1 \int_{\Omega_1} \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega_1 + \alpha \boldsymbol{\omega} + gmlP_2\boldsymbol{\delta} - g\rho_1 \int_{\Gamma} (\mathbf{e}_1^3 \times \mathbf{r}) \zeta d\Gamma = \mathbf{M}(t). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор, идущий из точки подвеса O_1 ; $m > 0$ — масса маятника с жидкостью; $\mathbf{M}(t)$ — заданный малый момент внешних сил; $\alpha \boldsymbol{\omega}$ ($\alpha \geq 0$) — момент сил трения в шарнире;

$$P_2\boldsymbol{\delta} := \sum_{j=1}^2 \delta^j \mathbf{e}_1^j;$$

через

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} := \int_{\Omega_0} \mathbf{r} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) \rho_0 d\Omega_0 + \int_{\Omega_1} \mathbf{r} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) \rho_1 d\Omega_1$$

обозначен закон действия тензора инерции тела с затвердевшей жидкостью. Кроме этого, искомые переменные удовлетворяют линеаризованному уравнению Эйлера и уравнению неразрывности

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_1 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (3)$$

краевым и начальным условиям (см. [17])

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad p = \rho_1 g (\zeta + \theta (P_2\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3) \quad (\text{на } \Gamma), \quad (5)$$

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^0(x), \quad x \in \Omega_1, \quad \zeta(0, x) = \zeta^0(x), \quad x \in \Gamma, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}^0, \quad \boldsymbol{\delta}(0) = \boldsymbol{\delta}^0, \quad (7)$$

где $\theta: L_2(\Gamma) \rightarrow L_{2,\Gamma}$ ортопроектор на подпространство $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \operatorname{sp}\{1_\Gamma\}$ функций, ортогональных константам на Γ , а также условию сохранения объема и дополнительным очевидным соотношениям

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad \frac{d}{dt} P_2\boldsymbol{\delta} = P_2\boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d}{dt} P^3\boldsymbol{\delta} = P^3\boldsymbol{\omega}, \quad P^3 := I - P_2. \quad (8)$$

3. Применение операторного подхода. Теорема о сильной разрешимости. Задача (2)–(8) исследуется методами функционального анализа. Будем считать, что поле скорости \mathbf{u} является функцией t со значениями в $\mathbf{L}_2(\Omega_1)$. Для данного пространства справедливо ортогональное разложение (см. [17, с. 106])

$$\mathbf{L}_2(\Omega_1) = \mathbf{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1), \quad (9)$$

$$\mathbf{J}_0(\Omega_1) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega_1) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ (в } \Omega_1), \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega_1)\}, \quad (10)$$

$$\mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) := \left\{ \nabla\Phi \in \mathbf{L}_2(\Omega_1) : \Delta\Phi = 0 \text{ (в } \Omega_1), \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ (на } S), \int_{\Gamma} \Phi d\Gamma = 0 \right\}, \quad (11)$$

$$\mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) := \{\nabla\varphi \in \mathbf{L}_2(\Omega_1) : \varphi = 0 \text{ (на } \Gamma)\}. \quad (12)$$

Поддействуем на обе части уравнения (3) соответствующими ортопроекторами $P_0, P_{h,S}, P_{0,\Gamma}$, считая, что

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla\Phi \in \mathbf{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1), \quad \nabla p = \nabla\tilde{p} + \nabla\varphi \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1).$$

Приходим к соотношениям

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \rho_1 P_0 \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) = P_0 \mathbf{f}, \quad (13)$$

$$\rho_1 \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi + \rho_1 P_{h,S} \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) + \nabla\tilde{p} = P_{h,S} \mathbf{f}, \quad (14)$$

$$\rho_1 P_{0,\Gamma} \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) + \nabla\varphi = P_{0,\Gamma} \mathbf{f}. \quad (15)$$

Последнее уравнение является вспомогательным и позволяет найти неизвестное поле $\nabla\varphi$, если известны \mathbf{f} и $\boldsymbol{\omega}$. Далее его не рассматриваем. При этом краевые условия (5) приводят к соотношениям

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \gamma_n(\nabla\Phi) := \nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\Phi}{\partial n}, \quad \tilde{p} = \rho_1 g(\zeta + \theta(P_2 \boldsymbol{\delta} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3) \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \tilde{p} d\Gamma = 0. \quad (16)$$

В силу условия $\nabla\tilde{p} \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1)$ для нахождения потенциала \tilde{p} возникает краевая задача (Зарембы)

$$\Delta\tilde{p} = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\tilde{p}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S), \quad \tilde{p} = \rho_1 g(\zeta + \theta(P_2 \boldsymbol{\delta} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3) =: \psi \text{ (на } \Gamma). \quad (17)$$

Известно (см. [17, с. 45–46]), что для области Ω_1 с липшицевой границей такая задача имеет единственное слабое решение $\nabla\tilde{p} = Q\psi \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1)$, если выполнено условие

$$\psi \in H_{\Gamma}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}.$$

Лемма 1. Операторы Q : $\mathcal{D}(Q) = H_{\Gamma}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} \subset L_{2,\Gamma} \rightarrow \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1)$ и

$$\gamma_n: \mathcal{D}(\gamma_n) = \left\{ \nabla\Phi \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) : \frac{\partial\Phi}{\partial n} \in L_{2,\Gamma} \right\} \subset \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) \rightarrow L_{2,\Gamma}$$

являются взаимно сопряженными и ограниченными.

Доказательство можно найти в [17, с. 137–138], а также [3, с. 43–44].

Отсюда из (14) получаем уравнение

$$\rho_1 \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi + \rho_1 P_{h,S} \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) + \rho_1 g Q(\zeta + \theta(P_2 \boldsymbol{\delta} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3) = P_{h,S} \mathbf{f}. \quad (18)$$

Уравнения (13), (18) и (2) можно переписать в виде одного операторного соотношения

$$C_1 \frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + B_{12} z_2 = f_1(t)$$

в пространстве динамических переменных

$$H_1 := \mathbf{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3,$$

где $z_1 := (\mathbf{w}; \nabla\Phi; \boldsymbol{\omega})^\tau$, $z_2 := (\zeta; P_2\boldsymbol{\delta})^\tau$. При этом

$$C_1 z_1 := \left(\rho_1 \mathbf{w} + \rho_1 P_0(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}); \rho_1 \nabla\Phi + \rho_1 P_{h,S}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}); \right. \\ \left. \rho_1 \int_{\Omega_1} (\mathbf{r} \times \mathbf{w}) d\Omega_1 + \rho_1 \int_{\Omega_1} (\mathbf{r} \times \nabla\Phi) d\Omega_1 + \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \right)^\tau, \quad (19)$$

$$B_{12} z_2 := \left(0; \rho_1 Q(\zeta + \theta(P_2\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3); -\rho_1 \int_{\Gamma} (\mathbf{e}_1^3 \times \mathbf{r}) \zeta d\Gamma + ml P_2 \boldsymbol{\delta} \right)^\tau;$$

$$A_1 z_1 := (\mathbf{0}; \mathbf{0}; \alpha \boldsymbol{\omega})^\tau, \quad f_1(t) := (P_0 \mathbf{f}; P_{h,S} \mathbf{f}; \mathbf{M}).$$

Далее, кинематические соотношения

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \gamma_n(\nabla\Phi) \text{ (на } \Gamma), \quad \frac{d}{dt} P_2 \boldsymbol{\delta} - P_2 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \text{ (в } \mathbb{C}^2) \quad (20)$$

можно преобразовать в операторное соотношение

$$gC_2 \frac{dz_2}{dt} + gB_{21} z_1 = 0, \quad (21)$$

в пространстве кинетических переменных

$$H_2 := L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2,$$

где

$$C_2 z_2 = \left(\rho_1 (\zeta + \theta(P_2\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3); -\rho_1 \int_{\Gamma} (\mathbf{e}_1^3 \times \mathbf{r}) \zeta d\Gamma + ml P_2 \boldsymbol{\delta} \right)^\tau;$$

$$B_{21} z_1 = \left(-\rho_1 (\gamma_n \nabla\Phi + \theta(P_2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3); \rho_1 \int_{\Gamma} (\mathbf{e}_1^3 \times \mathbf{r}) (\gamma_n \nabla\Phi) d\Gamma - ml P_2 \boldsymbol{\omega} \right)^\tau.$$

В [14, с. 172–173] (см. также [3, с. 40–42]) доказаны следующие утверждения.

Лемма 2. Если выполнено условие

$$\Delta_2 := (ml - \rho_1 \alpha_{11})(ml - \rho_1 \alpha_{22}) - \rho_1 \alpha_{12}^2 \neq 0, \quad \alpha_{jk} := \int_{\Gamma} (\theta x_1^j) x_1^k d\Gamma = \alpha_{kj}, \quad (22)$$

то кинематические условия (20) равносильны дифференциальной связи (21). При этом оператор C_2 (потенциальной энергии) обладает свойствами: $C_2 = C_2^* \in \mathcal{L}(H_2)$, $C_2^{-1} \in \mathcal{L}(H_2)$, а его квадратичная форма имеет не более $\kappa = 2$ отрицательных квадратов. Будем далее всюду считать, что условие (22) выполнено.

Лемма 3. При выполнении условий

$$\Delta_1 := ml - \rho_1 \alpha_{11} > 0, \quad \Delta_2 > 0 \quad (23)$$

оператор потенциальной энергии C_2 положительно определен.

Определение 1. Будем говорить, что состояние равновесия системы статически устойчиво по линейному приближению, если $C_2 \gg 0$. В противном случае состояние равновесия будем называть статически неустойчивым.

В статье [14, с. 169–170, 177–178] доказаны также следующие утверждения.

Лемма 4. Оператор $C_1: H_1 \rightarrow H_1$ является ограниченным самосопряженным положительно определенным оператором. Его квадратичная форма

$$(C_1 z_1, z_1)_{H_1} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \rho_1 \int_{\Omega_1} |\mathbf{u} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})|^2 d\Omega_1$$

равна удвоенной кинетической энергии системы (далее будем называть оператор C_1 оператором кинетической энергии).

Лемма 5. Операторы $B_{12}: H_2 \rightarrow H_1$ и $B_{21}: H_1 \rightarrow H_2$ (обмена между кинетической и потенциальной энергиями) являются неограниченными кососамосопряженными, т.е.

$$(B_{12}z_2, z_1)_{H_1} = -(B_{21}z_1, z_2)_{H_2}, \quad \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}), \quad z_2 \in \mathcal{D}(B_{12}),$$

где $\mathcal{D}(B_{12}) = \mathcal{D}(Q) \oplus \mathbb{C}^2$, $\mathcal{D}(Q) = H_\Gamma^{1/2}$.

Таким образом, исходная начально-краевая задача (2)–(8) в случае общего положения (22) сводится к задаче Коши (1), а также тривиальной связи

$$\frac{d}{dt}P^3\delta = P^3\omega. \quad (24)$$

При этом операторные коэффициенты обладают сформулированными выше общими свойствами и имеют непосредственный физический смысл. На основе результатов статьи [16] (см. также [14]), где доказана разрешимость задачи с трением для двух сочлененных тел с полостями, частично заполненными идеальными жидкостями, сформулируем итоговую теорему о разрешимости начально-краевой задачи (2)–(8).

Определение 2. Будем говорить, что задача (2)–(8) имеет сильное по переменной t решение на отрезке $[0; T]$, если выполнены следующие условия:

- (1) $\mathbf{u}(t, x) \in C^1([0; T]; \mathbf{J}_{0,S}(\Omega_1))$, $\nabla p(t, x) \in C^1([0; T]; \mathbf{G}(\Omega_1))$, $\zeta(t, x_1, x_2) \in C^1([0; T]; L_{2,\Gamma})$, $\omega(t) \in C^1([0; T]; \mathbb{C}^3)$, $\delta(t) \in C^2([0; T]; \mathbb{C}^3)$;
- (2) при любом $t \in [0; T]$ выполнено уравнение (2), где все слагаемые являются элементами $C([0; T]; \mathbb{C}^3)$;
- (3) выполнены начальные и краевые условия, причем первое соотношение (5) в $C^1([0; T]; L_{2,\Gamma})$, а второе в $C^1([0; T]; H_\Gamma^{1/2})$.

Теорема 1. Пусть в задаче (2)–(8) выполнены условия

$$\mathbf{u}^0 \in \mathbf{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1), \quad P_{h,S}\mathbf{u}^0 =: \nabla\Phi^0 \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) : \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_\Gamma \in L_{2,\Gamma},$$

$$\zeta^0 \in H_\Gamma^{1/2}, \quad \omega^0 \in C^3, \quad \delta^0 \in C^3, \quad \mathbf{f}(t) \in C^1([0; T]; \mathbf{L}_2(\Omega_1)), \quad \mathbf{M}(t) \in C^1([0; T]; \mathbb{C}^3).$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0; T]$, для которого выполнен закон баланса полной энергии

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\mathbf{J}_m \omega \cdot \omega + \rho_1 \int_{\Omega_1} |\mathbf{u} + (\omega \times \mathbf{r})|^2 d\Omega_1 + gml|P_2\delta|^2 + \right. \\ \left. + g\rho_1 \int_{\Gamma} (|\zeta + \theta(P_2\delta \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3|^2 - |\theta(P_2\delta \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3|^2) d\Gamma \right] = -\alpha|\omega|^2 + \rho_1 \int_{\Omega_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega_1 + \mathbf{M} \cdot \omega, \end{aligned}$$

где все слагаемые являются непрерывными функциями времени.

4. Спектральные свойства задачи в отсутствие трения в шарнире. Рассмотрим решения однородной задачи (1), зависящие от времени по закону $e^{-\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Получаем спектральную задачу

$$-\lambda C_1 z_1 + A_1 z_1 + gB_{12} z_2 = 0 \quad (\text{в } H_1), \quad (25)$$

$$-\lambda C_2 z_1 + B_{21} z_1 = 0 \quad (\text{в } H_2), \quad (26)$$

$$-\lambda P^3 \delta = P^3 \omega \quad (\text{в } \mathbb{C}). \quad (27)$$

Лемма 6. При $\lambda = 0$ спектральная задача (25)–(27) имеет ненулевое решение вида

$$z_1 = (\mathbf{w}_0; \mathbf{0}; \mathbf{0})^\tau, \quad \forall \mathbf{w}_0 \in \mathbf{J}_0(\Omega_1), \quad z_2 = (0; \mathbf{0})^\tau, \quad \forall P^3 \boldsymbol{\delta} \neq 0, \quad (28)$$

т.е. $\lambda = 0$ является бесконечнократным собственным значением.

Доказательство. Согласно лемме 2 из условия $B_{21}z_1 = 0$ следует выполнение условий

$$\gamma_n(\nabla\Phi) = 0, \quad \frac{d}{dt}P_2\boldsymbol{\delta} = P_2\boldsymbol{\omega}.$$

Отсюда

$$\nabla\Phi = 0, \quad P_2\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}.$$

Значит, в силу связи

$$-\lambda \frac{d}{dt}P^3\boldsymbol{\delta} = P^3\boldsymbol{\omega}$$

имеем $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Далее, из условия $gB_{12}z_2 + A_1z_1 = 0$ получаем, что $B_{12}z_2 = 0$, отсюда $\zeta = 0$, $P_2\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что решения вида (28) удовлетворяют задаче (25)–(26) при $\lambda = 0$. \square

Замечание. Решениям вида (28) соответствуют стационарные движения жидкости, при которых свободная поверхность Γ остается неподвижной. При этом маятник с полостью не покачивается, но может быть повернут на произвольный угол δ^3 вдоль оси \mathbf{e}_1 , что соответствует переходу в новое состояние равновесия.

Рассмотрим сейчас свойства задачи (25)–(26) при $\lambda \neq 0$ в случае, когда трение в шарнирах не учитывается, т.е. когда $\alpha = 0$, а значит, $A_1 = 0$. Перейдем от уравнения (25) к соответствующей системе

$$-\lambda\rho_1(\mathbf{w} + P_0(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) = \mathbf{0}; \quad (29)$$

$$-\lambda\rho_1(\nabla\Phi + P_{h,S}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) + g\rho_1Q(\zeta + \theta(P_2\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3) = \mathbf{0}; \quad (30)$$

$$-\lambda \left[\rho_1 \int_{\Omega_1} (\mathbf{r} \times \mathbf{w}) d\Omega_1 + \rho_1 \int_{\Omega_1} (\mathbf{r} \times \nabla\Phi) d\Omega_1 + \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \right] + g \left[-\rho_1 \int_{\Gamma} (\mathbf{e}_1^3 \times \mathbf{r}) \zeta d\Gamma + mlP_2\boldsymbol{\delta} \right] = \mathbf{0}. \quad (31)$$

Из (29) получаем, что

$$\mathbf{w} = -P_0(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (32)$$

Отсюда в третьем уравнении выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_{\Omega_1} (\mathbf{r} \times \mathbf{w}) d\Omega_1 + \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} &= \rho_0 \int_{\Omega_0} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) d\Omega_0 + \rho_1 \int_{\Omega_1} \mathbf{r} \times ((I - P_0)(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) d\Omega_1 = \\ &=: \mathbf{J}_T\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}_{пр, ж}\boldsymbol{\omega}, \end{aligned}$$

где \mathbf{J}_T — тензор инерции твердой части маятника, а $\mathbf{J}_{пр, ж}$ — так называемый присоединенный тензор инерции жидкости.

Лемма 7. Действие тензора $\mathbf{J}_{пр, ж}$ на элемент

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{k=1}^3 \omega^k \mathbf{e}_1^k$$

выражается по формуле

$$\mathbf{J}_{пр, ж}\boldsymbol{\omega} = \rho_1 \int_{\Omega_1} \mathbf{r} \times ((I - P_0)(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) d\Omega_1 = \rho_1 \int_{\Omega_1} \mathbf{r} \times \nabla\psi d\Omega_1, \quad (33)$$

где

$$\nabla\psi = \sum_{k=1}^3 \omega^k \nabla\psi_k,$$

а функции $\{\psi_k\}_{k=1}^3$ (потенциалы Жуковского) зависят лишь от формы области Ω_1 и являются решениями краевой задачи

$$\Delta\psi_k = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = (\mathbf{e}_1^k \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \text{ (на } \partial\Omega_1), \quad k = 1, 2, 3. \quad (34)$$

Доказательство. Действительно, в силу выполнения свойства $\operatorname{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0$ поле $(I - P_0)(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ является потенциально-гармоническим, а значит, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \nabla\psi$, где $\Delta\psi = 0$ (в Ω_1).

С другой стороны, если ψ_k являются решениями задачи (34), то функция

$$\varphi = \sum_{k=1}^3 \omega^k \psi_k$$

является гармонической в области Ω_1 , а на границе области выполнено свойство

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \left(\sum_{k=1}^3 \omega^k \mathbf{e}_1^k \times \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\psi}{\partial n}.$$

Так как гармоническая функция однозначно определяется своим значением на границе, то $\varphi = \psi$. \square

Уравнения (30), (31) переписываются в виде операторного соотношения

$$-\lambda \tilde{C}_1 \tilde{z}_1 + g \tilde{Q} C_2 z_2 = 0, \quad (35)$$

где $\tilde{z}_1 := (\nabla\Phi; \boldsymbol{\omega})^\tau$ — элемент пространства

$$\tilde{H}_1 := \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3,$$

$$\tilde{C}_1 \tilde{z}_1 := \left(\rho_1 (\nabla\Phi + P_{h,S}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})); \rho_1 \int_{\Omega_1} (\mathbf{r} \times \nabla\Phi) d\Omega_1 + (\mathbf{J}_T + \mathbf{J}_{\text{пр, ж}}) \boldsymbol{\omega} \right)^\tau, \quad \tilde{Q} := \operatorname{diag}(Q; P_2).$$

Лемма 8. Оператор \tilde{C}_1 обладает свойствами $0 \ll \tilde{C}_1 \in \mathcal{L}(\tilde{H}_1)$, при этом

$$(\tilde{C}_1 \tilde{z}_1, \tilde{z}_1)_{\tilde{H}_1} = (\mathbf{J}_m \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} + \rho_1 \int_{\Omega_1} \left| \nabla\Phi + \sum_{k=1}^3 \omega^k \nabla\psi_k \right|^2 d\Omega_1. \quad (36)$$

Доказательство. С помощью непосредственного подсчета квадратичных форм можно проверить, что $(C_1 z_1, z_1)_{H_1} = (\tilde{C}_1 \tilde{z}_1, \tilde{z}_1)_{\tilde{H}_1}$ для произвольного элемента $z_1 = (\mathbf{w}; \nabla\Phi; \boldsymbol{\omega})^\tau$, если \mathbf{w} и $\boldsymbol{\omega}$ связаны соотношением (32). Отсюда, используя лемму 4, получаем

$$(\tilde{C}_1 \tilde{z}_1, \tilde{z}_1)_{\tilde{H}_1} \geq c_1 \|z_1\|_{H_1}^2 \geq c_1 \|\tilde{z}_1\|_{\tilde{H}_1}^2, \quad c_1 > 0.$$

Доказательство формулы (36) получаем, используя формулу (33). Действительно, с учетом соотношения

$$\nabla\psi = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \sum_{k=1}^3 \omega^k \nabla\psi_k$$

получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{C}_1 \tilde{z}_1, \tilde{z}_1)_{\tilde{H}_1} &= \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla\Phi|^2 d\Omega_1 + 2\rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla\Phi \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) d\Omega_1 + (\mathbf{J}_T \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{J}_{\text{пр, ж}} \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \\ &= (\mathbf{J}_T \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} + \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla\Phi|^2 d\Omega_1 + 2\rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla\Phi \cdot \nabla\psi d\Omega_1 + \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla\psi|^2 d\Omega_1 = \\ &= (\mathbf{J}_T \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} + \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla\Phi + \nabla\psi|^2 d\Omega_1. \quad \square \end{aligned}$$

В силу леммы 2 уравнение (26) равносильно соотношениям

$$-\lambda\zeta = \gamma_n \nabla \Phi \text{ (в } L_{2,\Gamma}), \quad -\lambda P_2 \boldsymbol{\delta} = P_2 \boldsymbol{\omega} \text{ (в } \mathbb{C}^2).$$

Используя оператор $\tilde{\gamma}_n = \text{diag}(\gamma_n; P_2)$, перепишем их в виде одного уравнения

$$-\lambda z_2 = \tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1 \text{ (в } H_2).$$

Отсюда для $\lambda \neq 0$ имеем $z_2 = -\lambda^{-1} \tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1$, а значит, уравнение (25) сводится к спектральной задаче

$$g\tilde{Q}C_2\tilde{\gamma}_n\tilde{z}_1 = \mu\tilde{C}_1\tilde{z}_1 \text{ (в } \tilde{H}_1), \quad \mu := -\lambda^2. \quad (37)$$

Лемма 9. *Задача (37) имеет однократное собственное значение $\mu = 0$, которому отвечает собственная функция $\tilde{z}_1^0 = (\mathbf{0}; P^3 \boldsymbol{\omega})^\tau \in \tilde{H}_{1,0}$, $\forall P^3 \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Так как согласно лемме 2 оператор C_2 обратим, а оператор $\tilde{Q}: H_2 \rightarrow \tilde{H}_1$ имеет нулевое ядро, то при $\mu = 0$ справедливо соотношение

$$\tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma}; P_2 \boldsymbol{\omega} \right)^\tau = \mathbf{0}.$$

Отсюда в силу условия $\nabla \Phi \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1)$ получаем, что $\Phi = 0$, $P_2 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, при этом третья компонента $P^3 \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1^3$ может быть любой. \square

Лемма 10. *В случае статической устойчивости, т.е. при $C_2 \gg 0$, задача (37) на подпространстве $\tilde{H}_{1,1} := \tilde{H}_1 \ominus \tilde{H}_{1,0} = \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^2$ имеет дискретный положительный спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ с единственной предельной точкой $+\infty$. При этом собственные значения μ_k являются последовательными минимумами вариационного отношения*

$$\frac{g(C_2 \tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1, \tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1)_{H_2}}{(\tilde{C}_1 \tilde{z}_1, \tilde{z}_1)_{H_1}}, \quad (38)$$

на элементах $\tilde{z}_1 = (\nabla \Phi; P_2 \boldsymbol{\omega} + P^3 \boldsymbol{\omega})^\tau \in \tilde{H}_1$, где $P^3 \boldsymbol{\omega}$ однозначно определяется по $\nabla \Phi$ и $P_2 \boldsymbol{\omega}$:

$$P^3 \boldsymbol{\omega} = -\beta^{-1} \left[\rho_1 P^3 \int_{\Omega_1} (\mathbf{r}_1 \times \nabla \Phi) d\Omega_1 + (P^3 \mathbf{J}_1 P_2)(P_2 \boldsymbol{\omega}) \right], \quad (39)$$

$$\mathbf{J}_1 := \mathbf{J}_m + \mathbf{J}_{np, \text{жс}}, \quad \beta := P^3 \mathbf{J}_1 P^3 > 0.$$

Доказательство. В самом деле, операторы

$$\tilde{Q} = \text{diag}(Q; P_2): H_\Gamma^{1/2} \oplus \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^2,$$

$$\tilde{\gamma}_n = \text{diag}(\gamma_n; P_2): \mathcal{D}(\gamma_n) \oplus \mathbb{C}^2 \rightarrow L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2$$

являются ограниченными и ограниченно обратимыми, поэтому

$$\tilde{Q}^{-1} = \text{diag}(Q^{-1}; P_2) \in \mathcal{L}(\mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^2; H_\Gamma^{1/2} \oplus \mathbb{C}^2),$$

$$\tilde{\gamma}_n^{-1} = \text{diag}(\gamma_n^{-1}; P_2) \in \mathcal{L}(L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2; \mathcal{D}(\gamma_n) \oplus \mathbb{C}^2).$$

Осуществим в задаче (37) замену переменной $\hat{z}_1 := (\varphi; P_2 \boldsymbol{\omega})^\tau \in L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2 = H_2$, где элемент $\varphi := \gamma_n \nabla \Phi$, тогда $\tilde{z}_1 = (\nabla \Phi; \boldsymbol{\omega})^\tau = (\gamma_n^{-1} \varphi; P_2 \boldsymbol{\omega})^\tau = \tilde{\gamma}_n^{-1} \hat{z}_1 \in \tilde{H}_{1,1}$. Отсюда задача (37) сводится к задаче

$$gC_2 \hat{z}_1 = \mu \tilde{Q}^{-1} \tilde{C}_1 \tilde{\gamma}_n^{-1} \hat{z}_1 =: \mu \hat{C}_1 \hat{z}_1 \text{ (в } H_2). \quad (40)$$

Здесь вместо \tilde{C}_1 понимается его сужение \hat{C}_1 на подпространство $\tilde{H}_{1,1}$. Оператор \hat{C}_1 остается положительным ограниченным оператором. В силу того, что $\mathcal{D}(\gamma_n) \subset \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1)$, а $H_\Gamma^{1/2}$ компактно вложено в $L_{2,\Gamma}$, оператор \hat{C}_1 является компактным и положительным в H_2 .

Так как оператор C_2 является ограниченным и положительно определенным, то задача (37) сводится к нахождению характеристических чисел компактного положительного оператора. Отсюда из теоремы Гильберта—Шмидта следует, что спектр задачи (40) является дискретным и положительным. При этом система соответствующих собственных элементов $\{\widehat{z}_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис в H_2 , ортогональный по формам операторов C_2 и \widehat{C}_1 :

$$(\widehat{C}_1 \widehat{z}_{1,k}, \widehat{z}_{1,l})_{H_2} = \delta_{kl}, \quad g(C_2 \widehat{z}_{1,k}, \widehat{z}_{1,l})_{H_2} = \mu_k \delta_{kl},$$

а собственные значения μ_k являются последовательными минимумами вариационного отношения

$$\frac{g(C_2 \widehat{z}_1, \widehat{z}_1)_{H_2}}{(\widehat{C}_1 \widehat{z}_1, \widehat{z}_1)_{H_2}}. \quad (41)$$

Возвращаясь по замене $\widehat{z}_1 = \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1$ к переменной \widetilde{z}_1 , получаем вариационное отношение (38) с неопределенной компонентой $P^3 \omega$ поля $\omega \in \mathbb{C}^3$.

Для определения этой компоненты необходимо спроектировать (37) на подпространство $\widetilde{H}_{1,0}$, вспоминая действие оператора \widetilde{C}_1 . Используя ортопроектор $\text{diag}(0; P^3)$ в разложении

$$\widetilde{H}_1 = (\mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C} = \widetilde{H}_{1,1} \oplus \widetilde{H}_{1,0},$$

получаем соотношение

$$\rho_1 P^3 \int_{\Omega_1} (\mathbf{r} \times \nabla \Phi) d\Omega_1 + P^3 (\mathbf{J}_T + \mathbf{J}_{\text{пр, ж}}) (P_2 \omega + P^3 \omega) = \mathbf{0},$$

из которого следует формула (39). □

Непосредственный подсчет приводит к формуле

$$(C_2 \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1, \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1)_{H_2} = \rho_1 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \theta((P_2 \omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3) \right|^2 d\Gamma - \rho_1 \int_{\Gamma} |(P_2 \omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3|^2 d\Gamma + ml |P_2 \omega|^2.$$

Отсюда с учетом лемм 8, 10 получаем следующее утверждение.

Лемма 11. *Положительные собственные значения задачи (37) находятся как последовательные минимумы вариационного отношения (38), равного выражению*

$$g \frac{\rho_1 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \theta((P_2 \omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3) \right|^2 d\Gamma - \rho_1 \int_{\Gamma} |(P_2 \omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1^3|^2 d\Gamma + ml |P_2 \omega|^2}{(\mathbf{J}_m \omega) \cdot \omega + \rho_1 \int_{\Omega_1} \left| \nabla \Phi + \sum_{k=1}^3 \omega_k \nabla \psi_k \right|^2 d\Omega_1}, \quad (42)$$

на элементах $\nabla \Phi \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1)$, обладающих свойствами

$$\Delta \Phi = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ (на } S), \quad \int_{\Gamma} \Phi d\Gamma = 0,$$

и на векторе

$$\omega = \sum_{k=1}^3 \omega^k \mathbf{e}_1^k \in \mathbb{C}^3,$$

где третья компонента ω^3 находится через

$$P_2 \omega = \sum_{k=1}^2 \omega^k \mathbf{e}_1^k$$

и $\nabla \Phi$ по формуле (39).

Замечание. Согласно общим результатам М. Ш. Бирмана и М. З. Соломыка (см., например, [6]) асимптотика вариационного отношения (42) аналогична асимптотике вариационного отношения «невозмущенной задачи» (соответствующей проблеме малых колебаний идеальной жидкости в неподвижном сосуде)

$$g \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|^2 d\Gamma \Big/ \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi|^2 d\Omega_1.$$

Отсюда согласно результатам И. Л. Вулис и М. З. Соломыка (см. [9, 10]) следует асимптотика собственных значений задачи (37):

$$\mu_k = g \left(\frac{|\Gamma|}{4\pi} \right)^{-1/2} k^{1/2} [1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty. \quad (43)$$

На основании сформулированных выше лемм получаем следующее утверждение о свойствах исходной спектральной задачи (25)–(27), а также задачи (37).

Теорема 2. *В случае статической устойчивости по линейному приближению (т.е. при выполнении условий (23)) в отсутствие трения в шарнире (т.е. при $\alpha = 0$) задача (25)–(27) имеет ненулевой дискретный спектр $\{\lambda_k^\pm\}_{k=1}^\infty$, расположенный комплексно сопряженными парами на мнимой оси. При этом имеет место асимптотика*

$$\lambda_k^\pm = \pm i \mu_k^{1/2} = \pm i \sqrt{g} \left(\frac{|\Gamma|}{4\pi} \right)^{-1/4} k^{1/4} [1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty. \quad (44)$$

Система соответствующих собственных элементов $(\tilde{z}_1)_j = (\nabla \Phi; P_2 \omega)_j$ образует ортогональный базис в $\tilde{H}_{1,1}$ по квадратичным формам отношения (38):

$$(\tilde{C}_1(\tilde{z}_1)_j, (\tilde{z}_1)_k)_{\tilde{H}_1} = \delta_{jk}, \quad g(C_2 \tilde{\gamma}_n(\tilde{z}_1)_j, \tilde{\gamma}_n(\tilde{z}_1)_k)_{H_2} = \mu_k \delta_{jk}.$$

В случае отсутствия статической устойчивости оператор C_2 может иметь не более $\varkappa = 2$ отрицательных собственных значений. Поскольку он ограничен и ограниченно обратим, то

$$C_2 = J_\varkappa |C_2| = |C_2|^{1/2} J_\varkappa |C_2|^{1/2},$$

где

$$0 \ll |C_2| \in \mathcal{L}(H_2), \quad J_\varkappa = J_\varkappa^{-1} = J_\varkappa^*.$$

При этом спектральная задача (37) после замены $v := |C_2|^{1/2} \tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1$ сводится (аналогично (40)) к проблеме

$$g v = \mu J_\varkappa |C_2|^{-1/2} \tilde{Q}^{-1} \tilde{C}_1 \tilde{\gamma}_n^{-1} |C_2|^{-1/2} v =: \mu J_\varkappa C v \quad (\text{в } H_2), \quad (45)$$

где C — компактный положительный оператор в $H_2 = L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2$, а J_\varkappa имеет ровно \varkappa отрицательных собственных значений. Оператор $J_\varkappa C$ является компактным J -положительным в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa = H_2$ с индефинитным скалярным произведением $[u, v]_{\Pi_\varkappa} := (J_\varkappa u, v)_{H_2}$. Отсюда по теореме Л. С. Понтрягина (см. [2, 31]) получаем, что задача (45) имеет ровно \varkappa отрицательных собственных значений, при этом остальные положительны и сходятся к $+\infty$ (асимптотика (43) сохраняется). Соответствующая система собственных элементов образует базис Рисса в H_2 , который является J -ортогональным:

$$(C v_j, v_k)_{H_2} = \delta_{jk}, \quad g[v_j, v_k]_{\Pi_\varkappa} = \mu_k \delta_{jk}.$$

Теорема 3. *Если оператор потенциальной энергии C_2 имеет \varkappa отрицательных квадратов, $1 \leq \varkappa \leq 2$, то задача (25)–(27) помимо бесконечнократного нулевого собственного значения, а также двух ветвей мнимых собственных значений λ_k имеет ровно \varkappa отрицательных собственных значений, при этом соответствующая система собственных элементов $((\partial \Phi / \partial n)|_\Gamma; P_2 \omega)$ образует базис Рисса в H_2 .*

Замечание. Следствием данной теоремы является утверждение, которое в теоретической механике называют обращением теоремы Лагранжа об устойчивости. А именно, если система не является статически устойчивой по линейному приближению, т.е. условия (23) не выполнены, то система является также динамически неустойчивой, т.е. имеются решения начально-краевой задачи (2)–(8), экспоненциально возрастающие при $t \rightarrow +\infty$.

5. Локализация собственных значений и базисность системы корневых элементов при учете сил трения в шарнире. Вернемся к спектральной задаче (25)–(35) при условии $\alpha > 0$. Здесь для $\lambda \neq 0$ из уравнения (25) вновь возникает связь $\mathbf{w} = -P_0(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, также выполнено уравнение (30), а в левой части (31) нужно добавить дополнительное слагаемое $\alpha\boldsymbol{\omega}$. Отсюда для элемента $\tilde{z}_1 = (\nabla\Phi; \boldsymbol{\omega})^\tau \in \tilde{H}_1 = \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3$ возникает соотношение

$$-\lambda\tilde{C}_1\tilde{z}_1 + \alpha P\tilde{z}_1 + g\tilde{Q}C_2z_2 = 0, \quad (46)$$

где $P := \text{diag}(0; I_3)$, I_3 — единичный оператор в \mathbb{C}^3 . Отсюда с учетом связи

$$-\lambda z_2 - \tilde{\gamma}_n\tilde{z}_1 = 0 \quad (47)$$

взамен (37) возникает задача на собственные значения самосопряженного операторного пучка

$$L_\alpha(\lambda)\tilde{z}_1 := (\tilde{C}_2 - \lambda(\alpha P) + \lambda^2\tilde{C}_1)\tilde{z}_1 = 0, \quad \tilde{C}_2 := g\tilde{Q}C_2\tilde{\gamma}_n, \quad (48)$$

с неограниченным операторным коэффициентом \tilde{C}_2 . Аналогично предыдущему пункту эта задача имеет однократное нулевое собственное значение, которому соответствует собственная функция $\tilde{z}_1^0 = (\mathbf{0}; P^3\boldsymbol{\omega})^\tau \in \tilde{H}_{1,0}$, $\forall P^3\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{C}$. При этом ненулевым собственным значениям отвечают собственные функции $(\nabla\Phi; \boldsymbol{\omega})^\tau$, для которых компонента $P^3\boldsymbol{\omega}$ однозначно определяется по $\nabla\Phi \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1)$ и $P_2\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{C}^2$. Рассмотрим далее пучок $L_\alpha(\lambda)$ на подпространстве $\tilde{H}_{1,1} = \mathbf{G}_{h,S}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^2$, которое для простоты будем вновь обозначать \tilde{H}_1 .

Отметим, что на $\tilde{H}_{1,1}$ оператор \tilde{C}_2 обратим в силу обратимости операторов \tilde{Q} и $\tilde{\gamma}_n$. Так как эти операторы взаимно сопряжены, то \tilde{C}_2 имеет столько же отрицательных собственных значений, сколько и оператор C_2 . В частности, при выполнении условия статической устойчивости $C_2 \gg 0$ выполнено свойство $\tilde{C}_2 \gg 0$. В общем случае оператор \tilde{C}_2 имеет не более $\varkappa = 2$ отрицательных собственных значений, а значит, ограничен снизу, т.е. $\tilde{C}_2 \gg -hI$, $h \geq 0$.

Лемма 12. Пучок (48) при $\alpha \geq 0$ имеет ненулевой дискретный спектр, состоящий из изолированных конечнократных собственных значений, расположенных симметрично относительно вещественной оси, с единственной предельной точкой на бесконечности как в случае статической устойчивости, так и при ее отсутствии.

Доказательство. Дискретность спектра данной оператор-функции следует из результатов А. Г. Костюченко и А. А. Шкаликова (см. [18, 19]). В частности, в статье [19] указывается, что спектр пучка $L(\lambda) = \lambda^2 F + \lambda G + H - V$ дискретен, если он является эллиптическим, т.е. если выполнены следующие условия: $H \gg 0$ имеет дискретный спектр; V симметричен и H — компактен; $F \gg 0$ ограничен; G симметричен и $\mathcal{D}(H^{1/2}) \subset \mathcal{D}(G)$, $L(\lambda) > 0$ для достаточно больших $|\lambda|$, $\lambda \in \mathbb{R}$. В задаче (48) считаем, что $\tilde{C}_2 = H - V$, где $H = \tilde{C}_2 + hI \gg 0$ имеет дискретный спектр, так как он соответствует собственным значениям задачи (37) при $\tilde{C}_1 = I$; $V = hI$ ограничен, а потому H — компактен; $F = \tilde{C}_1 \gg 0$ ограничен; $G = \alpha P$ ограничен, а потому $\mathcal{D}(H^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\alpha P) = \tilde{H}_1$. Наконец, в силу положительной определенности оператора \tilde{C}_1 для достаточно больших по модулю вещественных λ свойство $L_\alpha(\lambda) > 0$ выполнено. \square

Лемма 13. При выполнении условия $C_2 \geq 0$ спектр задачи (46)–(47) (пучка (48)) лежит в полосе

$$0 \leq \text{Re } \lambda \leq \frac{\alpha}{c_1}, \quad 0 < c_1 \leq \frac{(\tilde{C}_1\tilde{z}_1, \tilde{z}_1)_{\tilde{H}_1}}{\|\tilde{z}_1\|_{\tilde{H}_1}^2} \leq c_2.$$

Если оператор C_2 имеет $\varkappa \leq 2$ отрицательных собственных значений, то задача имеет не более \varkappa собственных значений в левой комплексной полуплоскости.

Доказательство. Уравнения (46), (47) можно записать в виде

$$-\lambda \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \\ 0 & gC_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = -g \begin{pmatrix} 0 & \tilde{Q}C_2 \\ -C_2\tilde{\gamma}_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Отсюда в силу кососамосопряженности операторной матрицы, стоящей в правой части (49), для собственных значений получаем соотношение

$$-\operatorname{Re} \lambda [(\tilde{C}_1 \tilde{z}_1, \tilde{z}_1) + g(C_2 z_2, z_2)] + \alpha(P\tilde{z}, \tilde{z}_1) = 0.$$

Если $C_2 \geq 0$, то отсюда в силу положительной определенности оператора \tilde{C}_1 получаем неравенство

$$0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \frac{\alpha(P\tilde{z}, \tilde{z}_1)}{(\tilde{C}_1 \tilde{z}_1, \tilde{z}_1)} \leq \frac{\alpha}{c_1}.$$

Собственные значения в левой комплексной полуплоскости возможны лишь на элементах, для которых $(C_2 z_2, z_2) < 0$. Такие элементы согласно лемме 2 образуют не более чем \varkappa -мерное подпространство, следовательно таких собственных значений может быть с учетом кратности не более чем \varkappa штук. \square

Так как оператор $\tilde{C}_1 \geq c_1 I$, $\tilde{C}_2 \gg -hI$, то существует константа $s \geq 0$ такая, что $s^2 \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \gg s^2 c_1 - h \geq 0$, т.е. оператор, стоящий в левой части, является положительно определенным. В частности, если $\tilde{C}_2 \gg 0$, будем считать, что $s = 0$.

Осуществим в пучке (48) замену спектрального параметра $\nu := \lambda + s$, тогда

$$[(s^2 \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \alpha s P) - \nu(\alpha P + 2s \tilde{C}_1) + \nu^2 \tilde{C}_1] \tilde{z}_1 = 0.$$

Осуществляя теперь замену $\eta = \tilde{C}_1^{-1/2} \tilde{z}_1 \in \tilde{H}_1$ и действуя на обе части оператором $\tilde{C}_1^{-1/2}$, приходим к задаче

$$M_\alpha(\nu)\eta := [\tilde{B}_{0,\alpha} - \nu \tilde{B}_{1,\alpha} + \nu^2 I] \eta = 0, \quad (50)$$

где

$$\tilde{B}_{0,\alpha} := \tilde{C}_1^{-1/2} (s^2 \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \alpha s P) \tilde{C}_1^{-1/2}, \quad \tilde{B}_{1,\alpha} = \tilde{C}_1^{-1/2} (\alpha P) \tilde{C}_1^{-1/2} + 2sI. \quad (51)$$

Так как $s^2 \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \gg 0$, то оператор $\tilde{B}_{0,\alpha}$ является неограниченным положительно определенным в \tilde{H}_1 , при этом оператор $\tilde{B}_{1,\alpha}$ ограничен и неотрицателен.

В [23, с. 111] доказано, что пучок такого типа имеет дискретный спектр, при этом система соответствующих корневых элементов двукратно полна. Доказательство основано на сведении данного пучка к пучку Келдыша с ограниченными операторными коэффициентами, см. [13].

Осуществим в задаче (50) замены переменных и линеаризацию по параметру:

$$\nu =: i\tilde{\nu}, \quad \tilde{\nu}\eta =: \psi, \quad \tilde{B}_{0,\alpha}^{1/2} \eta =: \varphi.$$

Получаем равносильную задачу на собственные значения

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{B}_{0,\alpha}^{1/2} \\ \tilde{B}_{0,\alpha}^{1/2} & -i\tilde{B}_{1,\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \tilde{\nu} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Коротко ее можно переписать в виде

$$(A + B)y = \tilde{\nu}y, \quad y := (\varphi; \psi)^T \in \tilde{H}_1^2 = \tilde{H}_1 \oplus \tilde{H}_1, \quad (53)$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \tilde{B}_{0,\alpha}^{1/2} \\ \tilde{B}_{0,\alpha}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i\tilde{B}_{1,\alpha} \end{pmatrix}.$$

Определение 3. Говорят, что оператор B сильно q -подчинен оператору A , если он A^q -подчинен при $q \in [0; 1)$, т.е. если

$$\|BA^{-q}x\| \leq r\|x\|, \quad \forall x \in H.$$

Определение 4. Будем говорить, следуя В. Б. Лидскому (см., например, [1], а также [21]), что система корневых элементов f_k несамосопряженного оператора A образует в гильбертовом пространстве H базис Абеля—Лидского со скобками порядка α , если весь спектр оператора A , кроме возможно конечного числа собственных значений, лежит в объединении конечного числа открытых лучей с растворами не превосходящими θ , где $\alpha\theta < \pi$. При этом формальный ряд из корневых элементов $f(t) := \sum_k c_k(t)f_k$, где

$$c_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_k} e^{-t\lambda^\alpha} (\lambda I - A)^{-1} f d\lambda$$

(контур γ_k окружает одно изолированное собственное значение оператора A) сходится к данному элементу $f \in H$ после некоторой расстановки скобок (не зависящей от выбора элемента f) при $t \rightarrow +0$. Отметим, что ветвь функции λ^α в каждом из углов, содержащих спектр, выбирается так, чтобы функция $e^{-\lambda^\alpha t}$ при $t > 0$ экспоненциально убывала в этом угле, когда $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Теорема 4. Система корневых элементов задачи (53) образует базис Абеля—Лидского со скобками порядка $\alpha > 3$ в пространстве \tilde{H}_1^2 .

Доказательство. Несложно заметить, что неограниченный самосопряженный оператор A имеет те же собственные значения, что задача $\tilde{B}_{0,\alpha}\eta = -\nu^2\eta = \tilde{\nu}^2\eta$. При этом в силу определения оператора $\tilde{B}_{0,\alpha}$ и того факта, что \tilde{C}_1 ограничен и ограниченно обратим, получаем, что $\tilde{B}_{0,\alpha}$ так же, как и \tilde{C}_2 имеет дискретный спектр с асимптотикой $\tilde{\nu}_k^2 \sim \mu_k \sim ck^{1/2}$, откуда собственные значения оператора A имеют асимптотику $\tilde{\nu}_k^\pm \sim \pm\sqrt{\mu_k} \sim \pm\sqrt{ck}^{1/4}$, т.е. выполнена оценка $|\tilde{\nu}_k| \leq \tilde{c}k^p$ для $p = 1/4$. При этом оператор B вслед за $\tilde{B}_{1,\alpha}$ ограничен и потому является сильно q -подчиненным оператору A при $q = 0$.

Отсюда утверждение теоремы для $\alpha > p^{-1} - (1 - q) = 3$ следует из теорем А. С. Маркуса и В. Э. Кацнельсона (см. [12, 22], а также [1]) в силу выполнения условия $p(1 - q) = 1/4 < 1$. \square

Теорема 5. Собственные значения задачи (48) находятся в замыкании объединения равных кругов радиуса $r = \|\tilde{B}_{1,\alpha}\| \leq \alpha c_1^{-1} + 2s$ с центрами в точках $z_k = \pm i\mu_k^{1/2}$, отвечающих собственным значениям невозмущенной задачи при $\alpha = 0$. В частности, если $\tilde{C}_2 \gg 0$, то все собственные значения локализованы вдоль мнимой оси и равномерно сходятся к собственным значениям невозмущенной задачи при $\alpha \rightarrow 0$.

Доказательство. Действительно, пусть $\nu \in \rho(A)$, тогда

$$(A + B) - \nu I = (I + BR_A(\nu))(A - \nu I).$$

Так как оператор A самосопряжен и имеет дискретный спектр, то

$$\|R_A(\nu)\| = \sup_{\nu_j \in \sigma(A)} |\nu_j - \nu|^{-1}.$$

Следовательно, оператор $I + BR_A(\nu)$ обратим (обратный строится в виде ряда Неймана), если при всех j выполнена оценка

$$\|B\| \cdot \sup_{\nu_j \in \sigma(A)} |\nu_j - \nu|^{-1} < 1,$$

т.е. любое число $\nu \in \mathbb{C}$, удовлетворяющее неравенствам

$$|\nu - \nu_j| > r(\nu_j \in \sigma(A)),$$

лежит в $\rho(A + B)$, если

$$r := \|B\| = \|\tilde{B}_{1,\alpha}\| \leq \alpha \left\| \tilde{C}_1^{-1/2} P \tilde{C}_1^{-1/2} \right\| + 2s \leq \alpha c_1^{-1} + 2s.$$

Таким образом доказано, что спектр оператора $A + B$ лежит в замыкании объединения равных кругов радиуса r с центрами в собственных значениях ν_k оператора A . Возвращаясь по заменам к собственным значениям λ , получаем утверждение теоремы. \square

Применяя к пучку $M_\alpha(\nu)$ лемму 13, несложно заключить, что собственные значения пучка локализованы в полосе

$$0 \leq \operatorname{Re} \nu \leq \|\tilde{B}_{1,\alpha}\| \leq \alpha c_1^{-1} + 2s;$$

отсюда получаем оценку для собственных значений пучка (48) в случае, когда оператор \tilde{C}_2 не знакоопределен:

$$-s \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \alpha c_1^{-1} + s.$$

Отметим, что вопрос о числе собственных значений спектральной задачи, расположенных в левой комплексной полуплоскости, в случае статической неустойчивости при учете трения в шарнире остается открытым.

Приведенные в этом пункте результаты переносятся (при соответствующем выборе пространств и операторов) на общую задачу о колебаниях системы сочлененных тел с полостями, содержащими идеальные жидкости, в случае, когда учитывается трение в шарнирах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* О суммируемости рядов по корневым векторам несамосопряженных эллиптических операторов// Функци. анал. прилож. — 1976. — 10, № 3. — С. 1–12.
2. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
3. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Приложения индефинитной метрики. — Симферополь, 2014.
4. *Батыр Э. И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость// Уч. зап. Таврич. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2002. — 15 (54), № 2. — С. 5–10.
5. *Батыр Э. И., Копачевский Н. Д.* Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гироскопов// Совр. мат. Фундам. напр. — 2013. — 49. — С. 5–88.
6. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Мат. анализ. — 1977. — 14. — С. 5–52.
7. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых колебаниях системы из трех сочлененных маятников с полостями, заполненными несмешивающимися несжимаемыми жидкостями// Мат. Междунар. конф. «Современные методы и проблемы математической гидродинамики» (Воронеж, 3–8 мая 2018 г.), 2018. — С. 84–91.
8. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых движениях физического маятника, содержащего полость, заполненную системой однородных несмешивающихся жидкостей// Сб. мат. междунар. конф. «XXIX Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2018)». — Симферополь, 2018. — С. 58–62.
9. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова// Вестн. ЛГУ. — 1973. — 19. — С. 148–150.
10. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1974. — 38, № 6. — С. 1362–1392.
11. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью// в кн.: Избранные сочинения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948. — С. 31–52.
12. *Кацнельсон В. Э.* Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов// Функци. анал. прилож. — 1967. — 2. — С. 39–51.
13. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов// Усп. мат. наук. — 1971. — 24, № 4 (160). — С. 15–41.
14. *Копачевский Н. Д.* О колебаниях тела с полостью, частично заполненной тяжелой идеальной жидкостью: теоремы существования, единственности и устойчивости сильных решений// в кн.: Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. — Ін-т мат. НАН України., 2005. — С. 158–194.
15. *Копачевский Н. Д., Войтицкий В. И.* О колебаниях сочлененных маятников с полостями, заполненными однородными жидкостями// Совр. мат. Фундам. напр. — 2019. — 65, № 3. — С. 434–512.
16. *Копачевский Н. Д., Войтицкий В. И., Ситшаева З. З.* О колебаниях двух сочлененных маятников, содержащих полости, частично заполненные несжимаемой жидкостью// Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — 63, № 4. — С. 627–677.
17. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.

18. Костюченко А. Г., Шкаликов А. А. Самосопряженные квадратичные пучки операторов и эллиптические задачи// Функц. анализ. прилож. — 1983. — 17, № 2. — С. 38–61.
19. Костюченко А. Г., Шкаликов А. А. Задачи дифракции для периодической поверхности для уравнения Гельмгольца// в кн.: Избранные вопросы математики и механики и их приложения. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — С. 240–258.
20. Крейн С. Г., Моисеев Н. Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной границей// Прикл. мат. мех. — 1957. — 21, № 2. — С. 169–174.
21. Лидский В. Б. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1962. — С. 3–35.
22. Маркус А. С. О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора// Докл. АН СССР. — 1962. — 142, № 3. — С. 538–541.
23. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
24. Мижлишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968.
25. Моисеев Н. Н. Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1952. — 85, № 4. — С. 719–722.
26. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность// Мат. сб. — 1953. — 32, № 1. — С. 61–96.
27. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот и колебаний ограниченного объема жидкости. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1966.
28. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965.
29. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью// Прикл. мат. мех. — 1956. — 20, № 1. — С. 21–38.
30. Охочимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью// Прикл. мат. мех. — 1956. — 20, № 1. — С. 3–20.
31. Понтрягин Л. С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1944. — 8, № 6. — С. 243–280.
32. Рапопорт И. М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. — М.: Машиностроение, 1967.
33. Сретенский Л. Н. Колебание жидкости в подвижном сосуде// Изв. АН СССР. Техн. науки. — 1951. — 10. — С. 1483–1494.
34. Феценко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных областях. — Киев: Наукова думка, 1969.
35. Черноуцько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968.
36. Kopachevsky N. D., Krein S. G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2001.
37. Kopachevsky N. D., Krein S. G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Nonsself-adjoint Problems for Viscous Fluids. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2003.

Войтицкий Виктор Иванович

Таврическая академия

Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, Симферополь

E-mail: victor.voytitsky@gmail.com

Копачевский Николай Дмитриевич

Таврическая академия

Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, Симферополь

E-mail: kopachevsky@list.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 50–56
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-50-56

УДК 517.53/.55

О КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В КВАТЕРНИОННОЙ ФОРМЕ

© 2021 г. Ю. А. ГЛАДЫШЕВ

Аннотация. В работе приведено определенное обобщение системы дифференциальных уравнений Коши–Римана теории функций комплексного переменного на кватернионные функции восьми переменных. Указано на сохранение для этих функций ряда свойств функций комплексного переменного. Дана электродинамическая интерпретация системы как системы уравнений Максвелла. В кватернионной форме введены электромагнитные потенциалы. С этих общих позиций введены их калибровочные преобразования и даны их конкретные формы.

Ключевые слова: кватернион, калибровочное преобразование, система Коши–Римана, система уравнений Максвелла.

ON GAUGE TRANSFORMATIONS OF ELECTROMAGNETIC POTENTIALS IN THE QUATERNION FORM

© 2021 YU. A. GLADYSHEV

АБСТРАКТ. In this paper, we generalize the Cauchy–Riemann equations of the theory of functions of a complex variable to quaternion functions of eight variables and indicate that some properties of functions of a complex variable remain valid in this case. We propose an interpretation of the system obtained as the system of electrodynamic Maxwell equations and introduce electromagnetic potentials in the quaternionic form. From these general positions, we also introduce gauge transformations and obtain their specific forms.

Keywords and phrases: quaternion, gauge transformation, Cauchy–Riemann system, Maxwell equations.

AMS Subject Classification: 30G35

1. **Введение.** Система Коши–Римана теории функций комплексного переменного

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

обладает многими качествами, которые выделяют ее из числа других систем дифференциальных уравнений на плоскости [6]. Перечислим некоторые из них.

I. Система (1) симметрична относительно непрерывной группы вращений на плоскости и дискретной группы отражения координат.

- II. Делает возможным введение производной, которая не зависит от направления на плоскости. Определенная ее операция дифференцирования опять дает решение этой системы, что позволяет распространить методы анализа на комплексные функции.
- III. Система (1) дает возможность ввести правую обратную операцию интегрирования по комплексному переменному, которая также дает решение этой системы.
- IV. При определенных условиях наличия непрерывных вторых производных система распадается на два, вообще говоря, независимых уравнения второго порядка.
- V. Она находится в полном соответствии с полем комплексных чисел, т.е. ее решение можно получить, проводя алгебраические операции комплексных переменных и функций.

Отметим огромное значение теории функций в решении задач гидродинамики, теории упругости, электродинамики и квантовой теории.

Есть основание считать, что первое обобщение теории функций комплексного переменного было проведено Берсом [9], хотя он указывает на результаты Бельтрами [7, 8].

Система Берса имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a_1(y) \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ a_2(y) \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{cases} \quad (2)$$

В этих обобщениях теории функций были утеряны свойства I и V, но сохранены свойства II, III и IV. Известное завершение этого обобщения теории функций комплексного переменного было сделано в теории псевдоаналитических функций.

Во всех рассмотренных случаях система при переходе к уравнениям более высокого порядка происходит разделение функций Φ , Ψ . Получаем уравнения отдельно для функций Φ , Ψ , обычно эллиптического типа. Можно указать на попытки распространения указанных методов на уравнения параболического типа.

Переход к трехмерному пространству связан с системой вида

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \\ 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где z , \bar{z} — сопряженные комплексные переменные

$$z = x_2 + e_1 x_1, \quad \bar{z} = x_2 - e_1 x_1, \quad 1 \cdot e_1 = e_1 \cdot 1 = e_1, \quad e_1^2 = -1.$$

В [4] указаны операции дифференцирования и интегрирования, связанные с системой (3). Путем последовательного применения операции интегрирования можно построить последовательность базисных решений.

Надежды о простом алгебраическом методе получения решений трехмерных и четырехмерных уравнений Лапласа на основе алгебры кватернионов не оправдались. Таким образом, свойство V было утрачено.

Совершенно естественный с позиций кватернионов переход к четырехмерному пространству был начат румынскими математиками. Мойсил и Теодореску [11, 12] предложили изучать систему уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) (f_0 + e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3) = 0. \quad (4)$$

Здесь e_i — единицы системы кватернионов со свойствами

$$e_0 = 1, \quad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, \quad e_1 e_2 = e_3 = -e_2 e_1, \quad e_2 e_3 = e_1 = -e_3 e_2, \quad e_3 e_1 = e_2 = -e_1 e_3,$$

а f_i — функции переменных x_0, x_1, x_2, x_3 .

Был найден ряд свойств, близких функциям комплексного переменного. Дальнейшее изучение было продолжено немецким математиком Фюетером в основном интегральными методами [10].

Им были введены понятия право- и леворегулярных функций и сделан ряд замечаний об их свойствах. Система, аналогичная (4), как нетрудно показать, может быть записана в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial z_2} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}_1} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Запись системы (4) в виде (5) позволяет ввести оператор дифференцирования и операцию интегрирования [4], аналогичную операциям комплексного анализа.

Отметим, что применение операций $\partial/\partial z_1$, $\partial/\partial z_2$ встречается в теории спинорных инвариантов и их законность показана [2].

2. Основные определения и термины кватернионной алгебры. В работе [3] было дано определенное обобщение известной системы Коши–Римана теории функций комплексного переменного в область функций двух кватернионных переменных. Было указано на возможную физическую интерпретацию этих условий как системы уравнений Максвелла классической электродинамики. Приведен метод введения электромагнитных потенциалов в кватернионной форме. В настоящей статье основное внимание обращено на построение калибровочных преобразований электромагнитных потенциалов в принятом ранее [3] кватернионном формализме.

Для удобства понимания метода напомним, что используются функции χ , ψ в общем случае восьми переменных x_j , $j = \overline{0, 7}$,

$$\chi = \chi_0 + \sum_{j=1}^3 e_j \chi_j, \quad \psi = \psi_0 + \sum_{j=1}^3 e_j \psi_j,$$

где e_j — единицы системы кватернионов. Часть кватерниона с единицами e_j , как обычно, назовем векторной частью [1].

Если x_j комплексные, то имеем бикватернионную алгебру [1]. Введение восьми переменных подчеркивает их математическую равноценность, но все же для дальнейшего введем наборы переменных вида (x_0, x_1, x_2, x_3) , (t_0, t_1, t_2, t_3) , сохранив для первых четырех символ x_j , а для четырех вторых заменив символ на t_j , $j = \overline{0, 3}$. Это удобно для физической интерпретации результатов. Первый набор назовем S , а второй T .

Введем кватернионные операторы

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{j=1}^3 e_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial t_0} + \sum_{j=1}^3 e_j \frac{\partial}{\partial t_j},$$

причем D_1 действует слева, а D_2 справа. Это связано с некоммутативностью тела кватернионов и было введено в [10]

Введение сопряженных по кватернионным единицам операторов \bar{D}_1 , \bar{D}_2 приводит к результату

$$D_1 \bar{D}_1 = \bar{D}_1 D_1 = \sum_{j=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad D_2 \bar{D}_2 = \bar{D}_2 D_2 = \sum_{j=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial t_j^2},$$

т.е. к операторам Лапласа, если все x_j , t_j — действительные переменные. Для дальнейшего целесообразно выписать эти операторы в символах векторного анализа, считая e_1 , e_2 , e_3 базисными векторами.

$$D_1 Q = \frac{\partial q_0}{\partial x_0} - \operatorname{div}(x) \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_0} - \operatorname{grad}(x) q_0 - \operatorname{rot}(x) \mathbf{q}. \quad (6)$$

Здесь Q — кватернионная функция всех переменных с компонентами q_0 , q_1 , q_2 , q_3 , т.е.

$$Q = q_0 + e_1 q_1 + e_2 q_2 + e_3 q_3 = q_0 + \mathbf{q}.$$

Символ (x) показывает, по каким переменным проведена данная операция. Остальные выражения $\bar{D}_1 Q$ можем легко получить, меняя знак координат x_1 , x_2 , x_3 в операторах.

Операторы D_2 действуют справа, их выражения легко найти

$$QD_2 = \frac{\partial q_0}{\partial t_0} - \operatorname{div}(t)\mathbf{q} + \operatorname{grad}(t)q_0 + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t_0} - \operatorname{rot}(t)\mathbf{q}. \quad (7)$$

Выражение $Q\bar{D}_2$ найдем, меняя знак координат t_1, t_2, t_3 в операторах.

Система, которая определяет χ, ψ , по [3] может быть записана как

$$\begin{cases} D_1\chi - \psi D_2 = 0, \\ \chi\bar{D}_2 + \bar{D}_1\psi = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Кроме системы (8) будем рассматривать систему, полученную заменой D_1 на \bar{D}_1 , \bar{D}_1 на D_1 и изменением знака операторов D_2, \bar{D}_2

$$\begin{cases} \bar{D}_1\tilde{\chi} + \tilde{\psi}D_2 = 0, \\ -\tilde{\chi}\bar{D}_2 + \bar{D}_1\tilde{\psi} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Разумеется, получим из (8) системы (1), (3), (5) при соответствующем выборе независимых переменных x_i .

Обратим внимание, что при получении системы (8) были использованы только чисто математические соображения.

Примем следующее

Определение 1. Назовем систему (8) основной, а систему (9) присоединенной к (8).

Очевидно, что эта операция над системой (9) возвращает к системе (8). Так же как условия Коши—Римана указывают на равноправие двух направлений на плоскости при нахождении производной, так и условие (8) содержит утверждение о равноправии (симметрии) пространств S и T .

Если все компоненты χ, ψ ($\tilde{\chi}, \tilde{\psi}$) принадлежат $C^{(2)}$, то χ, ψ ($\tilde{\chi}, \tilde{\psi}$) удовлетворяют уравнениям Лапласа в \mathbb{R}^8 . Действительно, применяя операторы \bar{D}_1 слева к первому уравнению системы (8) и \bar{D}_2 справа ко второму, после их сложения получим

$$D_1\bar{D}_1\chi + D_2\bar{D}_2\chi = 0.$$

Аналогично, для ψ найдем

$$D_1\bar{D}_1\psi + D_2\bar{D}_2\psi = 0.$$

Это утверждение относится и к $\tilde{\chi}, \tilde{\psi}$.

3. Основные свойства обобщенной системы Коши—Римана. Следующие теоремы открывают возможность построения, вообще говоря, бесконечной последовательности решений (8), если все компоненты χ, ψ бесконечно дифференцируемы.

Теорема 1. Если χ, ψ удовлетворяют системе (8), то

$$\chi^{(-1)} = D_1\chi, \quad \psi^{(-1)} = D_1\psi$$

также удовлетворяют этой системе.

Доказательство состоит в применении оператора D_1 слева к указанным уравнениям и использовании свойства ассоциативности кватернионного умножения.

Тем же методом можно убедиться, что

$$\chi^{(-1)} = \bar{D}_1\chi, \quad \psi^{(-1)} = \bar{D}_1\psi$$

есть снова решение (8). Справедлива также следующая

Теорема 2. Если χ, ψ удовлетворяют системе (8), то

$$\tilde{\chi}^{(-1)} = D_1\chi, \quad \tilde{\psi}^{(-1)} = \bar{D}_1\psi$$

удовлетворяют системе (9).

Доказательство состоит в применении соответствующих операторов слева к уравнениям системы (8) и изменении знака операторов D_2, \bar{D}_2 .

Приведенные ниже теоремы показывают тесную связь уравнений Лапласа с системой (8).

Теорема 3. *Если α — решение уравнения Лапласа*

$$D_1\bar{D}_1\alpha + D_2\bar{D}_2\alpha = 0,$$

то

$$\chi = \bar{D}_1\alpha, \quad \psi = -\alpha\bar{D}_2 \quad (10)$$

— решения системы (8).

Для доказательства достаточно подставить (2) в систему (9).

Справедлива аналогичная

Теорема 4. *Если β — гармонический по всем компонентам кватернион, то*

$$\chi = \beta D_2, \quad \psi = D_1\beta$$

— решения системы (8).

Эти теоремы позволяют заявить о том, что решение (8) можно записать как

$$\begin{cases} \chi = \bar{D}_1\alpha + \beta D_2, \\ \psi = -\alpha\bar{D}_2 + D_1\beta. \end{cases} \quad (11)$$

Результат (11) показывает, что решение системы (8) может быть выражено через две гармонические кватернионные функции α, β . При подстановке (11) в систему (8) убеждаемся, что сделанное предположение о том, что α, β — гармонические кватернионы не противоречит системе (8).

Обратим внимание, что для системы Коши—Римана имеем аналогичную конструкцию. Если χ, ψ принять за скорости v_x, v_y некоторого поля, то α, β будут потенциалом и функцией потока. Поэтому, не найдя ничего лучшего, назовем α, β кватернионными потенциалами. Это совпадает с их ролью при физической интерпретации, приведенной ниже.

Вопрос об однозначности восстановления α, β при заданных χ, ψ , очевидно, равносильна задаче решения неоднородной системы (9). Таким образом, потенциалы α, β определены с точностью до двух кватернионных функций τ, θ

$$\alpha' = \alpha + \tau, \quad \beta' = \beta + \theta.$$

Тогда функции τ, θ для однозначности χ, ψ должны удовлетворять присоединенной системе

$$\begin{cases} \bar{D}_1\tau + \theta D_2 = 0, \\ -\tau\bar{D}_2 + D_1\theta = 0 \end{cases}$$

и являться ее общим решением.

Обращаясь к теореме 2, решение присоединенной системы через гармонический кватернион Ω запишем

$$\tau = D_1\Omega, \quad \theta = \Omega\bar{D}_2. \quad (12)$$

Напомним, что гармонический кватернион Ω есть упорядоченный набор четырех гармонических функций ω_i от, в общем случае, восьми переменных.

Обратим внимание, что предложенная конструкция близка к теории Берса о введении понятия дифференцирования для усложненной зависимости от x системы (2). Термин «присоединенная система» заимствован непосредственно оттуда.

4. Электродинамическая интерпретация основной системы. Перейдем к электродинамической интерпретации полученных результатов, при этом будем непосредственно опираться на формулу (7) применения операторов $D_1, \bar{D}_1, D_2, \bar{D}_2$.

Сделаем следующие два предположения.

- (1) Все величины χ, ψ зависят только от t_0, x_1, x_2, x_3 и не зависят от x_0, t_1, t_2, t_3 .
- (2) Компоненты χ_0, ψ_0 кватернионов χ, ψ равны нулю

$$\chi_0 = \psi_0 = 0.$$

Учитывая эти условия и формулы (6), (7), найдем

$$\begin{cases} \operatorname{div} \chi = 0, \\ \operatorname{rot} \chi - \frac{\partial \psi}{\partial t_0} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \psi = 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial t_0} - \operatorname{rot} \psi = 0. \end{cases} \quad (13)$$

В формулах (13) χ, ψ — векторные части кватернионов χ, ψ .

Достаточно принять

$$\chi = \mathbf{H}, \quad \psi = i\mathbf{E}, \quad t_0 = it$$

и получить обычную систему уравнений Максвелла без зарядов и токов в данной области [5].

Перейдем к электромагнитным потенциалам, оставаясь в тех же предположениях. Примем, что α — векторный кватернион, а β — скалярный

$$\alpha = 0 + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}, \quad \beta = \beta_0 + \mathbf{0} = \beta_0,$$

поэтому найдем

$$\chi = \mathbf{H} = \operatorname{div} \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial \beta_0}{\partial t_0} - \operatorname{rot} \boldsymbol{\alpha}.$$

В силу того, что в левой части отсутствует скалярное слагаемое, потребуем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial \beta_0}{\partial t_0} = 0.$$

Положив

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{A}, \quad \beta_0 = -i\varphi, \quad (14)$$

убеждаемся, что это условие Лоренца [5] для электромагнитных потенциалов

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Векторная часть дает обычную формулу \mathbf{H} : $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Обращаясь ко второму уравнению, получим

$$\psi = -\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t_0} + \operatorname{grad} \beta_0.$$

Учитывая (14), приходим к известному результату

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

В данном случае была взята одна ω_0 компонента Ω .

Отметим, что вместе с основной системой Максвелла получаем аналогичную систему в переменных x_0, t_1, t_2, t_3 . Это отражает симметрия системы (8). Таким образом, его теоретические методы классической электродинамики могут быть представлены в кватернионной форме.

Перейдем к вопросу о калибровочных преобразованиях потенциалов. Если в качестве кватерниона Ω в (12) взять скалярный кватернион $\Omega = \Omega_0 + \mathbf{0}$, то по (12) найдем

$$\tau = -\operatorname{grad} \Omega_0, \quad \theta = \frac{\partial \Omega_0}{\partial t_0}.$$

Калибровочные преобразования примут обычный вид [5]

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \Omega_0, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Omega_0}{\partial t_0}.$$

5. Заключение. В работе получено обобщение системы Коши—Римана в область кватернионных функций, приведены основные свойства этой системы. Дана электродинамическая интерпретация этой системы. Проведено введение электромагнитных потенциалов в кватернионной форме. С этих позиций изучен вопрос об их калибровочной инвариантности при скалярной произвольной функции. Не меньший интерес представляет изучение «векторного» калибровочного преобразования, когда $\Omega = \mathbf{\Omega}$, что предполагается сделать в дальнейшем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973.
2. *Бринкман Г.* Применение спинорных инвариантов в атомной физике. — М.: ИЛ, 1959.
3. *Гладышев Ю. А.* Об одном обобщении условий Коши—Римана теории функций комплексного переменного в область кватернионных функций// в кн.: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. — Воронеж: Научная книга, 2018. — С. 94–96.
4. *Гладышев Ю. А.* Формализм Бельтрами—Берса и его приложения в математической физике. — Калуга: КГУ им. К. Э. Циолковского, 1997.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. — М.: Физматлит, 2003.
6. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
7. *Beltrami E.* Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse// Oper. Mat. — 1911. — P. 115–128.
8. *Beltrami E.* Sulle teoria delle funzioni potenziali simmetriche// Oper. Mat. — 1911. — P. 349–377.
9. *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1944. — 56. — P. 67–93.
10. *Fueter R.* Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen// Monats. Math. — 1936. — 43. — P. 69–74.
11. *Moisil G.* Sur les quaternions monogenes// Bull. Sci. Math. Paris. — 1931. — 55. — P. 169–194.
12. *Moisil G., Teodorescu N.* Fonctions holomorphes dans l'espace// Mathematica (Cluj). — 1931. — 5. — P. 142–159.

Гладышев Юрий Александрович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: v572264@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 57–80
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-57-80

УДК 517.929

ЛОКАЛЬНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2021 г. Д. В. ГЛАЗКОВ

Аннотация. Проведено математическое исследование нескольких моделей одного класса оптико-электронных систем с запаздывающей обратной связью, которые являются обобщениями известной модели Ланга—Кобаяси полупроводникового лазера. Предлагаются новые редуцированные уравнения, которые описывают динамику исходных систем в окрестности предельных семейств периодических решений при асимптотически больших значениях одного из параметров задачи. На основе их численно-аналитического изучения делаются некоторые выводы прикладного характера.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальное уравнение с запаздыванием, полупроводниковый лазер, малый параметр, асимптотика, устойчивость, бифуркация.

LOCAL ASYMPTOTIC ANALYSIS OF MODEL OPTOELECTRONIC SYSTEMS WITH DELAY

© 2021 D. V. GLAZKOV

ABSTRACT. In this paper, we examine several models of optoelectronic systems with delayed feedback that are generalizations of the well-known Lang–Kobayashi model of semiconductor lasers. We propose new reduced equations that describe the dynamics of the original systems in a neighborhood of limit families of periodic solutions for asymptotically large values of a parameter of the problem. Using numerical and analytical methods, we obtain some applied conclusions.

Keywords and phrases: mathematical model, differential equation with delay, semiconductor laser, small parameter, asymptotics, stability, bifurcation.

AMS Subject Classification: 34E10, 39A10, 39A11

1. Введение. Модели, описывающие динамику оптико-электронных систем, на протяжении многих лет являются объектами повышенного внимания со стороны многочисленных исследователей (см. [13, 27, 32, 34]). В первую очередь это обусловлено их непосредственным прикладным значением. Достаточно сказать, что интернет в привычном нам виде был бы невозможен без оптико-электронных коммуникаций. Однако эта причина не единственная. Как отмечено в [13], лазер принадлежит к числу систем, которые не только способны демонстрировать сложное поведение, но и более многих других пригодны для исследования общих закономерностей нелинейной динамики. Действительно, в целом ряде случаев лазеры функционируют в существенно нелинейных режимах. В наибольшей степени это замечание касается так называемой полуклассической теории лазера, которая предлагает целую иерархию нелинейных уравнений, надежно обоснованных с позиций квантовой электродинамики и количественно подтвержденных экспериментами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10043).

Особый класс моделей оптико-электронных систем представляют собой модели, учитывающие воздействие запаздывающей оптической обратной связи. Их сложность обусловлена тем, что этот класс задач описывается в терминах дифференциальных уравнений с запаздыванием, которые обладают бесконечным числом степеней свободы. Кроме того, динамические системы с запаздыванием демонстрируют различные типы неустойчивостей, обусловленных воздействием задержки. Например, для полупроводниковых лазеров с оптической обратной связью наблюдаются различные пути перехода к хаосу: квазипериодический (см. [18,19]), через каскад бифуркаций удвоения периода (см. [37]), сценарий Икеды (см. [14]), перемежаемость и кризис аттракторов (см. [29,30]).

В таких областях как хранение данных или оптические и оптоволоконные коммуникации отражения и связанные с ними сопутствующие эффекты неизбежны. Поэтому изучение влияния оптической запаздывающей обратной связи на работу лазеров разных типов представляет собой важную прикладную задачу.

Данная работа является продолжением серии статей [2–4], посвященных исследованию особенностей динамики моделей оптико-электронных систем с отклоняющимся аргументом, и обобщает результаты, полученные в [3], на случай некоторых моделей многомодового полупроводникового лазера.

2. Постановка задачи. Рассматриваемые в работе математические модели динамики многомодового полупроводникового лазера являются обобщениями известной системы уравнений Ланга—Кобаяси (см. [23]), которая описывает поведение одномодового лазера и имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma e^{-i\omega_0 h} E(t-h), \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)|E|^2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $E(t)$ — комплексная амплитуда электрического поля, $Z(t)$ — инверсия носителей; $\gamma > 0$ и $-\omega_0 h$ — сила и фаза обратной связи (ОС), ω_0 — оптическая частота генерации в отсутствие обратной связи; Q — превышение током накачки первой пороговой величины; v — отношение времен затухания инверсии носителей и фотонов в резонаторе; α — коэффициент уширения линии, отвечающий за нелинейное взаимодействие между амплитудой и фазой поля; h — время прохода излучения по внешнему резонатору, нормированное в единицах времени затухания инверсии.

Простейшая модель многомодового лазера, подвергающегося воздействию запаздывающей обратной связи, приведена в [35] и может быть выписана в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dE_m}{dt} = v(1+i\alpha)E_m Z_m + \gamma_m e^{-i\Omega_m h} E_m(t-h), \\ \frac{dZ_m}{dt} = Q - Z_m - (1+Z_m) \sum_{j=1}^n |E_j|^2, \end{cases} \quad (2)$$

где n — число мод когерентного оптического излучения, индекс m изменяется от 1 до n , Ω_m — оптические частоты лазерных мод без ОС, величины ОС γ_m в простейшем случае одинаковы и от m не зависят. Остальные параметры имеют тот же смысл, что и в базовой одномодовой модели Ланга—Кобаяси.

Существует модификация этой модели (см. [8]), которая, по мнению ее автора, более корректно учитывает взаимодействие между модами:

$$\begin{cases} \frac{dE_m}{dt} = v(1+i\alpha)[\gamma_m(Z_0 - Z_m) - 1]E_m + \gamma e^{-i\Omega_m h} E_m(t-h), \\ \frac{dZ_m}{dt} = -\left(1+d + \sum_{j=1}^n \gamma_j |E_j|^2\right) Z_m + \gamma_m |E_m|^2 Z_0/2, \\ \frac{dZ_0}{dt} = Q - Z_0 + \sum_{j=1}^n |E_j|^2 (Z_j - Z_0). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь E_m — медленно меняющиеся комплексные амплитуды полей мод, Z_0 и Z_m — пространственно однородная компонента и амплитуда пространственной решетки плотности неравновесных носителей, Ω_m — оптические частоты лазерных мод без ОС, γ_m — коэффициент усиления m -й моды относительно усиления моды, ближайшей к центру линии, d — безразмерный коэффициент диффузии.

Рассмотрим модификацию исходной модели (1) полупроводникового лазера, в которой добавляется еще одно уравнение, описывающее воздействие оптического фильтра (см. [17]):

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1 + i\alpha)EZ + \gamma f, \\ \frac{df}{dt} = i\Delta f + \Lambda[E(t-h)e^{-i\omega_0 h} - f], \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1 + Z)|E|^2. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $f(t)$ — комплексная амплитуда электрического поля на выходе из фильтра, Λ — ширина спектра, Δ — расстройка между частотой излучения уединенного лазера и несущей частотой фильтра.

Описанный в [17] механизм работы оптического фильтра может быть использован и для многомодовых полупроводниковых лазеров. В случае системы (2) соответствующая модель будет описываться следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dE_m}{dt} = v(1 + i\alpha)E_m Z_m + \gamma f_m, \\ \frac{df_m}{dt} = i\Delta_m f_m + \Lambda[E_m(t-h)e^{-i\Omega_m h} - f_m], \\ \frac{dZ_m}{dt} = Q - Z_m - (1 + Z_m) \sum_{j=1}^n |E_j|^2. \end{cases} \quad (5)$$

Система (3) модифицируется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dE_m}{dt} = v(1 + i\alpha)[\gamma_m(Z_0 - Z_m) - 1]E_m + \gamma f_m, \\ \frac{df_m}{dt} = i\Delta_m f_m + \Lambda[E_m(t-h)e^{-i\Omega_m h} - f_m], \\ \frac{dZ_m}{dt} = -\left(1 + d + \sum_{j=1}^n \gamma_j |E_j|^2\right) Z_m + \gamma_m |E_m|^2 Z_0/2, \\ \frac{dZ_0}{dt} = Q - Z_0 + \sum_{j=1}^n |E_j|^2 (Z_j - Z_0). \end{cases} \quad (6)$$

В (5), (6) величины $f_m(t)$ — комплексные амплитуды электрических полей мод на выходе из фильтра, Δ_m — расстройки между оптическими частотами Ω_m лазерных мод без ОС и несущей частотой фильтра.

Ставится задача математического исследования локальной динамики представленных систем дифференциальных уравнений в предположении, что значения параметров Q асимптотически велики.

Наличие в системе большого параметра приводит к необходимости рассматривать сингулярно возмущенную задачу. Для изучения происходящих в системе бифуркаций используется метод построения специальных нормализованных уравнений для медленных амплитуд, которые описывают поведение определенных решений исходной задачи. Важной особенностью этих уравнений является то, что от больших (малых) параметров они не зависят.

3. Простейшие свойства одномодовых моделей. В этом разделе вкратце приводятся некоторые известные свойства рассматриваемых моделей.

Если выполнить в (1) замену $E(t) = R(t) \cdot e^{i\theta(t)}$, то можно перейти к уравнениям в более удобной для расчетов форме относительно вещественной амплитуды и фазы поля:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = vRZ + \gamma \cos(\omega_0 h + \theta - \theta(t-h))R(t-h), \\ \frac{d\theta}{dt} = v\alpha Z - \gamma \sin(\omega_0 h + \theta - \theta(t-h))\frac{R(t-h)}{R}, \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)R^2. \end{cases} \quad (7)$$

Простейшие решения системы уравнений Ланга—Кобаяси (1) определяются из условий

$$E(t) = R_k \cdot e^{i(\omega_k - \omega_0)t}, \quad Z(t) = Z_k, \quad (8)$$

где R_k, ω_k, Z_k — константы. Такие периодические решения называются модами внешнего резонатора (external cavity modes) в [28] или модами составного резонатора (compound-cavity modes) в [34]. В обозначениях системы (7) они имеют вид

$$R(t) = R_k, \quad \theta(t) = (\omega_k - \omega_0)t, \quad Z(t) = Z_k.$$

Подставляя их в систему (7), вводя обозначение $\eta_k = \omega_k h$ и исключая величину R_k при условии $R_k \neq 0$, получим следующие соотношения для определения мод внешнего резонатора:

$$vZ_k = -\gamma \cos(\eta_k), \quad (9)$$

$$\alpha v Z_k = \eta_k h^{-1} - \omega_0 + \gamma \sin(\eta_k). \quad (10)$$

Отметим, что точки пересечения соответствующих кривых на плоскости (η, Z) лежат на эллипсе, изображенном на рис. 1. Аналитически он задается уравнением

$$(vZ)^2 + (\alpha v Z - \eta h^{-1} + \omega_0)^2 = \gamma^2. \quad (11)$$

С другой стороны, исключая из (9), (10) переменную Z , приходим к трансцендентному уравнению

$$\eta - \omega_0 h = -\gamma h \sqrt{1 + \alpha^2} \sin(\eta + \arctg(\alpha)), \quad (12)$$

которое имеет по крайней мере одно решение. Легко видеть, что чем больше значение $\gamma h \sqrt{1 + \alpha^2}$, тем больше решений имеет уравнение (12). Вычислив η_k , затем последовательно можем найти ω_k, Z_k, R_k . В случае касания графиков правой и левой частей (12) происходит седло-узловая бифуркация рождения новой пары мода-антимода (см. [24, 28]), которая возникает на плоскости (η, Z) на пересечении эллипса с так называемой седло-узловой прямой

$$vZ = \frac{1 + \alpha\eta - \alpha\omega_0 h}{h(1 + \alpha^2)}. \quad (13)$$

Те моды на рис. 1, которые располагаются над седло-узловой прямой (13), называются антимодами или седловыми точками. Доказано, что они всегда неустойчивы. Собственно моды, лежащие ниже этой прямой, могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Величина обратной связи, при которой мода теряет устойчивость в результате бифуркации Андронова—Хопфа, приближенно оценивается следующим образом (см. [24]):

$$\gamma_k^H \approx \frac{2\lambda_R}{B_k[1 - \cos(\omega_R h)]}, \quad (14)$$

где $\omega_R = \sqrt{2vQ}$ задает угловую частоту, а $\lambda_R = (1 + Q)/2$ — скорость затухания колебаний (при этом их называют релаксационными) в отсутствие обратной связи,

$$B_k = -\sqrt{1 + \alpha^2} \cos(\eta_k - \arctg \alpha).$$

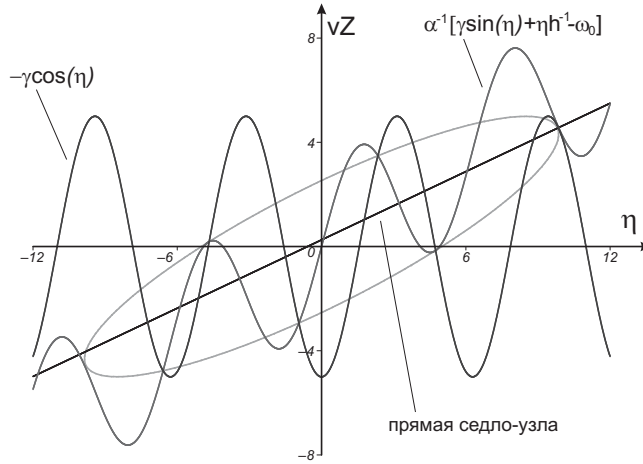


Рис. 1. Точки пересечения кривых (9) и (10) лежат на эллипсе (11) и соответствуют характеристикам (ω_k, Z_k) мод внешнего резонатора. Выбраны следующие значения параметров: $\alpha = 1,7$; $\gamma = 5$; $\omega_0 = 0$; $h = 1$

В общем случае устойчивость мод внешнего резонатора определяется корнями характеристического уравнения:

$$\left[\frac{1+Q}{1+Z_k} + \lambda \right] [\lambda^2 + 2\gamma \cos \eta_k (1 - e^{-\lambda h}) \lambda + \gamma^2 (1 - e^{-\lambda h})^2] + 2v(Q - Z_k) [\lambda + \gamma (\cos \eta_k - \alpha \sin \eta_k) (1 - e^{-\lambda h})] = 0. \quad (15)$$

Простейшие решения системы (3) при $n = 1$ также определяются из соотношения (12) и обладают схожими свойствами, отмеченными в [8]. Замена

$$E(t) = R_E(t) \cdot e^{i\theta_E(t)}, \quad f(t) = R_f(t) \cdot e^{i\theta_f(t)}$$

приводит систему (4) к амплитудно-фазовому виду:

$$\begin{cases} \frac{dR_E}{dt} = vR_E Z + \gamma R_f \cos(\theta_f - \theta_E), \\ \frac{d\theta_E}{dt} = v\alpha Z + \gamma \frac{R_f}{R_E} \sin(\theta_f - \theta_E), \\ \frac{dR_f}{dt} = \Lambda [R_E(t-h) \cos(\theta_E(t-h) - \omega_0 h - \theta_f) - R_f(t)], \\ \frac{d\theta_f}{dt} = \Delta + \Lambda \frac{R_E(t-h)}{R_f} \sin(\theta_E(t-h) - \omega_0 h - \theta_f), \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)R_E^2. \end{cases} \quad (16)$$

В данном случае простейшие решения (4) определяются из условий

$$E(t) = E_k \cdot e^{i\omega_k t}, \quad f(t) = f_k \cdot e^{i\omega_k t + i\phi_k}, \quad Z(t) = Z_k.$$

Такие периодические решения по аналогии с модами внешнего резонатора называются в [17] модами внешнего фильтра (external filtered modes, EFMs). В обозначениях системы (16) они имеют вид

$$R_E(t) = E_k, \quad \theta_E(t) = \omega_k t, \quad R_f(t) = f_k, \quad \theta_f(t) = \omega_k t + \phi_k, \quad Z(t) = Z_k,$$

где $R_k, f_k, \omega_k, \phi_k, Z_k$ — константы. Подставляя найденные выражения в (16), получим уравнения

$$\begin{cases} 0 = vE_k Z_k + \gamma \cos(\phi_k) f_k, \\ \omega_k = v\alpha Z_k + \gamma \sin(\omega_k) \frac{f_k}{E_k}, \\ 0 = \Lambda[E_k \cos(-\omega_0 h - \omega_k h - \phi_k) - f_k], \\ \omega_k = \Delta + \Lambda \sin(-\omega_0 h - \omega_k h - \phi_k) \frac{E_k}{f_k}, \\ 0 = Q - Z_k - (1 + Z_k)E_k^2, \end{cases} \quad (17)$$

из которых, полагая $E_k \neq 0$, можно получить уравнение относительно величины ω_k :

$$\omega_k = -\gamma \sqrt{1 + \alpha^2} \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + (\Delta - \omega_k)^2}} \sin \left(\omega_0 h + \omega_k h + \arctg \alpha + \arctg \left(\frac{\Delta - \omega_k}{\Lambda} \right) \right). \quad (18)$$

Трансцендентное уравнение (18) является основным при определении мод внешнего фильтра. Величины ϕ_k и ω_k связаны соотношением

$$\phi_k = -\omega_0 h - \omega_k h - \arctg \left(\frac{\Delta - \omega_k}{\Lambda} \right). \quad (19)$$

По ϕ_k и ω_k определяются остальные характеристики мод:

$$vZ_k = -\gamma \cos(\phi_k) \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + (\Delta - \omega_k)^2}}, \quad E_k^2 = \frac{Q - Z_k}{1 + Z_k}, \quad f_k^2 = \frac{\Lambda^2 E_k^2}{\Lambda^2 + (\Delta - \omega_k)^2}.$$

Если в правой части формулы (18) множитель, задаваемый функцией \sin принимает значения ± 1 , то (18) переходит в уравнение $P(\omega_k) = 0$, где

$$P(\omega_k) = [\Lambda^2 + (\Delta - \omega_k)^2] \omega_k^2 - \Lambda^2 \gamma^2 (1 + \alpha^2).$$

Его решения задают границу области существования решений (18).

В пределе при $\Lambda \rightarrow \infty$, когда фильтр пропускает весь спектр излучения, уравнение (18) переходит в уравнение (12), а моды внешнего фильтра совпадают с модами внешнего резонатора.

4. Методика исследования на примере моделей одномодового лазера. Проиллюстрируем сначала методику исследования на более простых моделях одномодового лазера. Частично результаты данного раздела представлены в [3]. Результаты для моделей многомодового лазера в разделах 6–8 являются новыми.

Рассмотрим уравнение (1) при условии, что $Q = \varepsilon^{-1}$, где ε — малый положительный параметр. Нормируя переменные следующим образом:

$$t = \varepsilon s, \quad E = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{-i\omega s} \tilde{E},$$

приведем исходную систему к виду

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{E}}{ds} = i\omega \tilde{E} + \varepsilon v(1 + i\alpha) \tilde{E} Z + \varepsilon \gamma e^{-i\omega_0 h + i\omega h \varepsilon^{-1}} \tilde{E}(s - h\varepsilon^{-1}), \\ \frac{dZ}{ds} = 1 - (1 + Z)|\tilde{E}|^2 - \varepsilon Z, \end{cases} \quad (20)$$

который является частным случаем следующего векторного уравнения:

$$x' = F(x) + \varepsilon \cdot \Phi(x, x(s - h\varepsilon^{-1})). \quad (21)$$

Общая методика исследования его динамики была предложена в [5]. В соответствии с представленным там алгоритмом, в малой окрестности некоторого периодического решения системы

«нулевого приближения» $x' = F(x)$ строится нормализующая замена, позволяющая получить асимптотические оценки системы (21). Эта замена имеет следующий вид:

$$V(s, \varepsilon) = V_0(\tau) + \varepsilon V_1(t, \tau) + \varepsilon^2 V_2(t, \tau) + \dots, \quad (22)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = 1 + \varepsilon \varphi(t) + \varepsilon^2 \psi(t) + \dots \quad (23)$$

Здесь $V_j(t, \tau)$ являются T -периодичными по τ , причем $V_0(s)$ есть периодическое решение системы ОДУ $x' = F(x)$, $\varphi(t)$ — скалярная почти периодическая функция.

Отметим, что из (23) следует, что

$$\tau(s - h\varepsilon^{-1}) \approx \tau(s) - y, \quad \text{где} \quad y = h\varepsilon^{-1} + \int_{-h}^0 \varphi(t+r)dr.$$

Стандартная линейризация $x' = F(x)$ на $V_0(s)$ приводит к системе

$$u' = A(s)u, \quad (24)$$

где $A(s) = F'(V_0(s))$ есть T -периодическая матрица. Обозначим через $H_j(s)$ линейно независимые периодические решения сопряженной к (24) системы $w' = -A^*(s)w$.

Подставляя ряды (22), (23) в (21) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим цепочку уравнений вида

$$\frac{dV_k}{d\tau} = A(\tau)V_k + f_k(t, \tau, \tau - y), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (25)$$

где через $f_k(t, \tau, \tau - y)$ обозначена неоднородность дифференциального уравнения. На первом шаге из условий периодичности функции V_1 по τ получим систему уравнений

$$\langle f_1(t, \tau, \tau - y), H_j(\tau) \rangle = 0, \quad (26)$$

где угловыми скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (X(\tau), Y(\tau))d\tau.$$

Полученные уравнения (26) играют роль нормальной формы в задаче о локальной динамике уравнения (21) в некоторой окрестности решения $V_0(s)$ системы «нулевого приближения» $x' = F(x)$. Отыскав решение V_1 системы (25) в указанном классе функций, можно последовательно найти любое число элементов рядов (22), (23).

В случае уравнений Ланга—Кобаяси при $Q \gg 1$ система ОДУ вида $x' = F(x)$ является консервативной и имеет семейство периодических решений, которое в форме вектора с вещественными компонентами может быть записано следующим образом:

$$V_0(s) = (c \cos(\omega s), c \sin(\omega s), c^{-2} - 1)^T.$$

Матрица системы (24) имеет вид

$$A(s) = F'(V_0(s)) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ -2c^{-1} \cos(\omega s) & -2c^{-1} \sin(\omega s) & -c^2 \end{pmatrix}.$$

Для системы (24) легко находятся все линейно независимые решения, два из которых можно выбрать периодическими с периодом $T = 2\pi/\omega$:

$$K_0(s) = \begin{pmatrix} \cos(\omega s) \\ \sin(\omega s) \\ -2c^{-3} \end{pmatrix}, \quad K_1(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega s) \\ \cos(\omega s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-c^2 s} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, мультипликаторы системы (24) имеют вид

$$\mu_1 = \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = e^{-\frac{2\pi}{\omega} c^2} < 1.$$

Линейно независимые периодические решения сопряженной к (24) системы выберем таким образом, чтобы $\langle K_i, H_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Таким условиям удовлетворяют вектор-функции вида

$$H_0(s) = \begin{pmatrix} \cos(\omega s) \\ \sin(\omega s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_1(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega s) \\ \cos(\omega s) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим свободную постоянную c как функцию «медленного» времени: $t = \varepsilon s$. В соответствии с изложенной методикой, собирая коэффициенты при первой степени ε , приходим к системе

$$c'(t) \frac{dV_0}{dc} + \varphi(t) \frac{dV_0}{d\tau} + \frac{dV_1}{d\tau} = A(\tau)V_1 + \Phi(V_0(\tau), V_0(\tau - y)). \quad (27)$$

Условие существования $2\pi/\omega$ -периодического (по τ) решения уравнения (27) состоит в ортогональности его неоднородной части функциям $H_0(\tau)$, $H_1(\tau)$. Выполнив ряд преобразований и переобозначив $\omega\varphi \rightarrow \varphi$, получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений, которую мы будем называть квазинормальной формой модели Ланга—Кобаяси в случае $Q \gg 1$:

$$\begin{cases} c'(t) = v \left(\frac{1}{c(t)} - c(t) \right) + \gamma \cos \left(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi(t+r) dr \right) c(t-h), \\ \varphi(t) = v\alpha \left(\frac{1}{c^2(t)} - 1 \right) - \gamma \sin \left(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi(t+r) dr \right) \frac{c(t-h)}{c(t)}. \end{cases} \quad (28)$$

Заметим, что система (28) заменами

$$\varphi(t) = \theta'(t), \quad c(t)e^{i\theta(t)} = E(t)$$

может быть преобразована к одному комплексному уравнению следующего вида:

$$\frac{dE}{dt} = v(1 + i\alpha)(|E|^{-2} - 1)E + \gamma e^{-i\omega_0 h} E(t-h), \quad (29)$$

которое, очевидно, связано с (1).

Более простой и быстрый способ получения этого результата дает постановка исходной задачи в терминах системы уравнений (7). Наряду с (20) рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{R}}{ds} = \varepsilon v Z \tilde{R} + \varepsilon \gamma \cos(\omega_0 h - \omega h \varepsilon^{-1} + \tilde{\theta} - \tilde{\theta}(s - h \varepsilon^{-1})) \tilde{R}(s - h \varepsilon^{-1}), \\ \frac{d\tilde{\theta}}{ds} = \omega + \varepsilon v \alpha Z - \varepsilon \gamma \sin(\omega_0 h - \omega h \varepsilon^{-1} + \tilde{\theta} - \tilde{\theta}(s - h \varepsilon^{-1})) \frac{\tilde{R}(s - h \varepsilon^{-1})}{\tilde{R}}, \\ \frac{dZ}{ds} = 1 - (1 + Z) \tilde{R}^2 - \varepsilon Z, \end{cases} \quad (30)$$

с периодической по $\tilde{\theta}$ и $\tilde{\theta}(s - h \varepsilon^{-1})$ правой частью, решение которой в «нулевом приближении» имеет вид

$$V_0(s) = (c, \omega s, c^{-2} - 1)^T.$$

Оно периодически в силу периодичности правой части (30) по переменной $\tilde{\theta}$.

Стандартная линеаризация $x' = F(x)$ на $V_0(s)$ в соответствии с изложенной методикой приводит к системе (24) с постоянной матрицей

$$A = \frac{DF}{Dx}(V_0(s)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2c^{-1} & 0 & -c^2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что среди трех ее вещественных собственных значений есть два нулевых и одно вещественное отрицательное $-c^2$. Для системы (24) в данном случае также находятся все линейно независимые решения, два из которых можно выбрать периодическими: $K_0(s) = (1, 0, -2c^{-3})^T$,

$K_1(s) = (0, 1, 0)^T$, $K_2(s) = (0, 0, e^{-c^2 s})^T$. Полученные линейно независимые решения позволяют утверждать, что мультипликаторы системы (24) имеют вид $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $|\mu_3| < 1$.

Аналогично находятся линейно независимые периодические решения сопряженной к (24) системы. Выберем их следующим образом: $H_0(s) = (1, 0, 0)^T$, $H_1(s) = (0, 1, 0)^T$. Далее точно так же требуется ортогональность неоднородной части уравнения (27) функциям $H_0(\tau)$, $H_1(\tau)$. При этом процесс вычислений значительно упрощается, поэтому в других случаях будем пользоваться такой параметризацией из соображений удобства.

Рассмотрим систему (3) в случае $n = 1$, т.е. одномодовый вариант модели, где E_1 и Z_1 будут обозначаться E и Z :

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1 + i\alpha)[\gamma_1(Z_0 - Z) - 1]E + \gamma e^{-i\Omega h} E(t - h), \\ \frac{dZ}{dt} = -(1 + d + \gamma_1|E|^2)Z + \gamma_1|E|^2 Z_0/2, \\ \frac{dZ_0}{dt} = Q - Z_0 + |E|^2(Z - Z_0). \end{cases} \quad (31)$$

Выполняя аналогичные преобразования, получаем следующий частный случай системы (21):

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{E}}{ds} = i\omega\tilde{E} + \varepsilon v(1 + i\alpha)[\gamma_1(Z_0 - Z) - 1]\tilde{E} + \varepsilon\gamma e^{-i\Omega h + i\omega h \varepsilon^{-1}} \tilde{E}(s - h\varepsilon^{-1}), \\ \frac{dZ}{ds} = \gamma_1|\tilde{E}|^2 Z_0/2 - \gamma_1|\tilde{E}|^2 Z - \varepsilon(1 + d)Z, \\ \frac{dZ_0}{ds} = 1 + |\tilde{E}|^2(Z - Z_0) - \varepsilon Z_0. \end{cases} \quad (32)$$

Решение системы нулевого приближения в данном случае может быть записано как

$$V_0(s) = (c \cos(\omega s), c \sin(\omega s), c^{-2}, 2c^{-2})^T,$$

или при переходе от комплексной амплитуды E к вещественным переменным R и θ как

$$V_0(s) = (c, \omega s, c^{-2}, 2c^{-2})^T.$$

Стандартная линеаризация $x' = F(x)$ на $V_0(s)$ в соответствии с изложенной методикой приводит к системе (24) с постоянной матрицей

$$A = \frac{DF}{Dx}(V_0(s)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_1 c^2 & \gamma_1 c^2/2 \\ -2c^{-1} & 0 & c^2 & -c^2 \end{pmatrix}.$$

Среди собственных значений этой матрицы очевидно есть два нулевых, которым соответствуют следующие линейно независимые решения: $K_0(s) = (1, 0, -2c^{-3}, -4c^{-3})^T$, $K_1(s) = (0, 1, 0, 0)^T$. Еще два собственных значения матрицы A являются собственными значениями подматрицы

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\gamma_1 c^2 & \gamma_1 c^2/2 \\ c^2 & -c^2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что они вещественные отрицательные.

Линейно независимые периодические решения сопряженной системы удобно выбрать следующим образом: $H_0(s) = (1, 0, 0, 0)^T$, $H_1(s) = (0, 1, 0, 0)^T$. Из условий (26), переобозначая $\omega\varphi \rightarrow \varphi$, получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений, которую мы будем называть квазинормальной формой модели (31) в случае $Q \gg 1$:

$$\begin{cases} c'(t) = v \left(\frac{\gamma_1}{c(t)} - c(t) \right) + \gamma \cos \left(\Omega h + \int_{-h}^0 \varphi(t+r) dr \right) c(t-h), \\ \varphi(t) = v\alpha \left(\frac{\gamma_1}{c^2(t)} - 1 \right) - \gamma \sin \left(\Omega h + \int_{-h}^0 \varphi(t+r) dr \right) \frac{c(t-h)}{c(t)}. \end{cases} \quad (33)$$

Заметим, что система (33) заменами $\varphi(t) = \theta'(t)$, $c(t)e^{i\theta(t)} = E(t)$ может быть преобразована к одному комплексному уравнению

$$\frac{dE}{dt} = v(1 + i\alpha)(\gamma_1|E|^{-2} - 1)E + \gamma e^{-i\Omega h} E(t-h), \quad (34)$$

которое нормировочной заменой $\gamma_1^{-1/2} E \rightarrow E$ и переобозначением $\Omega \rightarrow \omega_0$ приводится к виду (29).

Таким образом, можно говорить о том, что динамика обеих моделей (2) и (3) при $n = 1$ в случае $Q \gg 1$ математически описывается одним и тем же уравнением, и в этом смысле они не отличаются друг от друга. Это соответствует результатам, сформулированным в работе [8], где отличия между моделями фиксируются в режимах низкочастотных флуктуаций, возникающих при малых величинах тока накачки ($0 < Q \ll 1$), а также малых значениях коэффициента диффузии d , который в рассматриваемом случае исключается.

5. Динамические свойства упрощенной модели. Стационарные решения системы (28) определяются из трансцендентного уравнения относительно φ

$$\varphi = -\gamma[\alpha \cos(\omega_0 h + \varphi h) + \sin(\omega_0 h + \varphi h)].$$

Обозначая $\eta = \omega_0 h + \varphi h$, придем к хорошо известному соотношению (12) для определения числа мод внешнего резонатора.

Отметим, что по η_k можно однозначно определить φ и c . Устойчивость каждого из состояний равновесия системы (28) определяется расположением в комплексной плоскости корней характеристического квазиполинома

$$\lambda^2 + 2\lambda\gamma \cos \eta_k (1 - e^{-\lambda h}) + \gamma^2 (1 - e^{-\lambda h})^2 + 2(v - \gamma \cos \eta_k) \left[\lambda + \gamma (\cos \eta_k - \alpha \sin \eta_k) (1 - e^{-\lambda h}) \right]. \quad (35)$$

В случае $\cos \eta_k = 1$ для моды с максимальным усилением [24] уравнение (35) сводится к следующей простой совокупности:

$$\begin{cases} \lambda + \gamma(1 - e^{-\lambda h}) = 0, \\ \lambda + \gamma(1 - e^{-\lambda h}) + 2(v - \gamma) = 0. \end{cases} \quad (36)$$

При $0 < \gamma < v$ у каждого из уравнений (36) отсутствуют корни с положительной вещественной частью. Следовательно, мода с максимальным усилением в случае асимптотически большой накачки является устойчивой. Этот результат хорошо согласуется с выводами, сделанными в [24].

Мода с минимальной шириной линии достигается при $\eta_k = -\arctg(\alpha)$. Достаточным условием ее устойчивости является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть

$$\eta_k = -\arctg(\alpha), \quad \gamma \leq \gamma_1 = \frac{v}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Тогда все корни уравнения (35) имеют неположительные действительные части.

Критерием устойчивости моды с минимальной шириной линии в случае большого запаздывания $h = \mu^{-1}$, где μ — малый параметр, является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть

$$\eta_k = -\arctg(\alpha), \quad \gamma < \gamma_2 = \frac{2v\sqrt{1 + \alpha^2}}{2 + \alpha^2}.$$

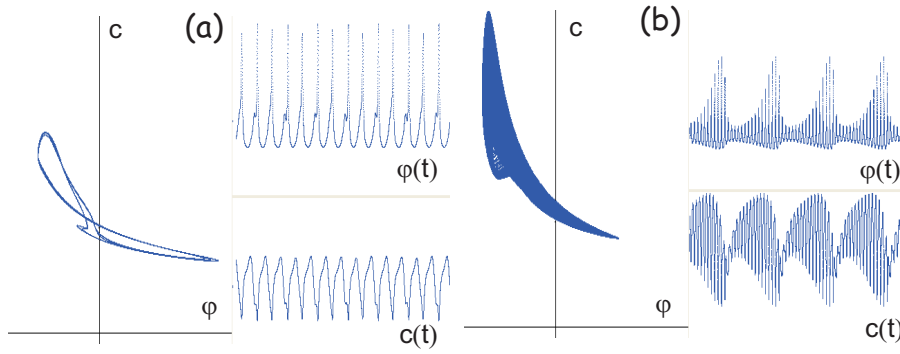


Рис. 2. Иллюстрация явления мультистабильности. При значениях параметров $v = 100$, $\alpha = 5$, $\omega_0 h = 1$, $\gamma = 97,9$, $h = 0,04$ найдено три различных устойчивых режима: мода, близкая к состоянию с максимальным усилением, цикл удвоенного периода (а) и режим, известный как RPP (regular pulse package) (b) (см. [20,33]).

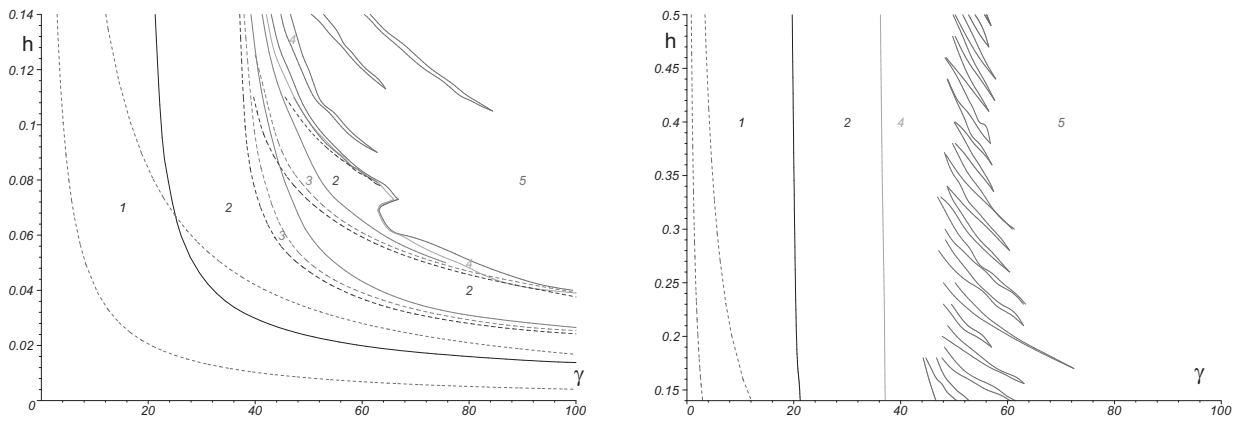


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма системы (28) на плоскости (γ, h) , разделенная на две части с разным масштабом по параметру h . Отметим существование областей мультистабильности.

Тогда все корни уравнения (35) имеют неположительные действительные части. В случае $\gamma > \gamma_2$ существует корень с положительной действительной частью.

Непосредственной подстановкой несложно проверить, что корней с асимптотикой $i\omega_*\mu^{-p}$, где $p > 0$, у уравнения (35) в случае $\eta_k = -\text{arctg}(\alpha)$ нет. Раскладывая λ в ряд по степеням малого параметра μ , так что $\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \dots$, получаем $\text{Re } \lambda_0 = \text{Re } \lambda_1 = 0$, а знак $\text{Re } \lambda_2$ определяет знак выражения $\gamma(2 + \alpha^2) - 2v\sqrt{1 + \alpha^2}$.

Основные результаты относительно динамических свойств системы (28) получены численным моделированием. При этом исследовалась не сама система (28), а система дифференциальных уравнений с запаздыванием, получаемая заменой $\varphi(t) = \theta'(t)$. Тем не менее, в качестве основных характеристик модифицированной таким образом квазинормальной формы выступали функции $c(t)$, $\theta'(t)$.

Численное интегрирование выполнялось с помощью схемы Рунге–Кутты четвертого порядка, адаптированной для систем с запаздыванием. В качестве начальных условий выбирались функции из класса тригонометрических полиномов, заданных на отрезке $[-h, 0]$. Были обнаружены явления мультистабильности (рис. 2), кризиса аттракторов, последовательного удвоения периода циклов, определены области с хаотической и сложной нехаотической динамикой.

Важные особенности динамики квазинормальной формы (28) отражает бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 3. Выбраны следующие значения параметров $v = 100$, $\alpha = 5$,

$\omega_0 h = 1$. Цифрами обозначены области: 1 — состояние равновесия; 2 — цикл, рождающийся в результате бифуркации Андронова—Хопфа; 3 — сценарий Фейгенбаума — каскад бифуркаций удвоения периода (пунктиром отмечены первые две бифуркации удвоения); 4 — нефейгенбаумовские переходные режимы (в некоторых случаях интерпретировались как квазипериодические или двухчастотные на основе анализа временного ряда стандартной функцией FFT пакета Maple); 5 — хаос. Штрихпунктиром обозначены первые две бифуркации седло-узла, в которых происходит рождение пары мода-антимода. Правее первой из них существуют области мультистабильности. Изменение бассейнов притяжения лежит в основе перехода (при возрастании параметров h, γ) от все усложняющихся режимов из области 3 к области 2. Область, отмеченная цифрой 4 на верхней части диаграммы, имеет сложную структуру и содержит многочисленные участки типа 2 и 5 малых размеров. Отметим, что существование устойчивого состояния равновесия, близкого к моде с максимальным усилением, подтверждается численно. При $\gamma > v\sqrt{1 + \alpha^2}$ система (1), вообще говоря, теряет свойство диссипативности. Это объясняется тем, что столь большие значения γ физически недостижимы, поскольку величину $v^{-1}\gamma$ следует понимать как ту долю отраженного излучения, которая возвращается в резонатор.

Граница области динамического хаоса определялась на основе вычисления корреляционной размерности (см. [15, 16]). Расчет старшего ляпуновского показателя (см. [36]) в целом подтверждает полученные оценки. Таким образом, наблюдаемая динамика системы (28) хорошо согласуется с известными о когерентном коллапсе фактами (см. [19, 30, 34, 37]).

Подчеркнем связь между установившимися режимами в квазинормальной форме и в исходной модели: устойчивым состоянием равновесия и циклам системы (28) соответствуют устойчивые предельные циклы и торы в (1).

6. Результаты для моделей многомодового лазера. Для модели (2) в результате аналогичных действий

$$t = \varepsilon s, \quad E_m = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{-i\omega s} \tilde{E}_m$$

приходим к следующему частному случаю (21):

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{E}_m}{ds} = i\omega \tilde{E}_m + \varepsilon v(1 + i\alpha) \tilde{E}_m Z + \varepsilon \gamma e^{-i\Omega_m h + i\omega h \varepsilon^{-1}} \tilde{E}_m (s - h\varepsilon^{-1}), \\ \frac{dZ}{ds} = 1 - (1 + Z) \sum_{j=1}^n |\tilde{E}_j|^2 - \varepsilon Z, \end{cases} \quad (37)$$

При $n = 2$ семейство периодических решений системы нулевого приближения можно записать в форме вектора с вещественными компонентами:

$$V_0(s) = (c_1 \cos(\omega s), c_1 \sin(\omega s), Z_1, c_2 \cos(\omega s), c_2 \sin(\omega s), Z_2)^T,$$

где

$$Z_1 = Z_2 = \frac{1}{\rho_2} - 1, \quad \rho_2 = c_1^2 + c_2^2,$$

или в случае замены в (37) величины $\tilde{E}_m = \tilde{R}_m \exp(i\tilde{\theta}_m)$ в виде

$$V_0(s) = (c_1, \omega s, Z_1, c_2, \omega s, Z_2)^T.$$

Стандартная линеаризация $x' = F(x)$ на $V_0(s)$ в соответствии с изложенной методикой приводит к системе (24) с постоянной матрицей

$$A = \frac{DF}{Dx}(V_0(s)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2c_1/\rho_2 & 0 & -\rho_2 & -2c_2/\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2c_1/\rho_2 & 0 & 0 & -2c_2/\rho_2 & 0 & -\rho_2 \end{pmatrix},$$

где выполнены замены $\rho_2 = c_1^2 + c_2^2$ и $1 + Z_i = 1/\rho_2$, $i = 1, 2$. Среди собственных значений этой матрицы очевидно есть четыре нулевых (и два вещественных отрицательных), которым соответствуют линейно независимые решения $K_i(s)$, $i = 0, \dots, 5$, записанные по столбцам матричной экспоненты:

$$\exp(As) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2c_1(1 - e^{-\rho_2 s})/\rho_2^2 & 0 & e^{-\rho_2 s} & -2c_2(1 - e^{-\rho_2 s})/\rho_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2c_1(1 - e^{-\rho_2 s})/\rho_2^2 & 0 & 0 & -2c_2(1 - e^{-\rho_2 s})/\rho_2^2 & 0 & e^{-\rho_2 s} \end{pmatrix}.$$

Выберем следующие линейно независимые периодические решения сопряженной системы: $H_0(s) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, $H_1(s) = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$, $H_3(s) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$, $H_4(s) = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T$. В данном случае замена (22), (23) несколько модифицируется:

$$V(s, \varepsilon) = V_0(\tau_1, \tau_2) + \varepsilon V_1(t, \tau_1, \tau_2) + \varepsilon^2 V_2(t, \tau_1, \tau_2) + \dots, \\ \frac{d\tau_1}{ds} = 1 + \varepsilon \varphi_1(t) + \varepsilon^2 \psi_1(t) + \dots, \quad \frac{d\tau_2}{ds} = 1 + \varepsilon \varphi_2(t) + \varepsilon^2 \psi_2(t) + \dots$$

Здесь $V_0(\tau_1, \tau_2) = (c_1 \exp(i\omega\tau_1), Z_1, c_2 \exp(i\omega\tau_2), Z_2)^T$. Из условий (26), переобозначая $\omega\varphi_j \rightarrow \varphi_j$, получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений, которую мы будем называть квазинормальной формой модели (2) в случае $Q \gg 1$:

$$\begin{cases} c_1'(t) = v \left(\frac{1}{c_1^2(t) + c_2^2(t)} - 1 \right) c_1(t) + \gamma \cos \left(\Omega_1 h + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr \right) c_1(t-h), \\ \varphi_1(t) = v\alpha \left(\frac{1}{c_1^2(t) + c_2^2(t)} - 1 \right) - \gamma \sin \left(\Omega_1 h + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr \right) \frac{c_1(t-h)}{c_1(t)}, \\ c_2'(t) = v \left(\frac{1}{c_1^2(t) + c_2^2(t)} - 1 \right) c_2(t) + \gamma \cos \left(\Omega_2 h + \int_{-h}^0 \varphi_2(t+r) dr \right) c_2(t-h), \\ \varphi_2(t) = v\alpha \left(\frac{1}{c_1^2(t) + c_2^2(t)} - 1 \right) - \gamma \sin \left(\Omega_2 h + \int_{-h}^0 \varphi_2(t+r) dr \right) \frac{c_2(t-h)}{c_2(t)}. \end{cases} \quad (38)$$

Заметим, что система (38) заменами

$$\varphi_j(t) = \theta_j'(t), \quad c_j(t) e^{i\theta_j(t)} = E_j(t), \quad j = 1, 2,$$

может быть преобразована к системе из двух комплексных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dE_1}{dt} = v(1 + i\alpha) \left[\frac{1}{|E_1|^2 + |E_2|^2} - 1 \right] E_1 + \gamma e^{-i\Omega_1 h} E_1(t-h), \\ \frac{dE_2}{dt} = v(1 + i\alpha) \left[\frac{1}{|E_1|^2 + |E_2|^2} - 1 \right] E_2 + \gamma e^{-i\Omega_2 h} E_2(t-h). \end{cases} \quad (39)$$

В общем случае при произвольном натуральном n вектор $V_0(s)$ имеет $3n$ вещественных компонент, которые удобно представить как n блоков из троек $c_m, \omega s, Z_m$, где $Z_m = (1/\rho_n) - 1$, $\rho_n = c_1^2 + \dots + c_n^2$. Матрица A тогда состоит из n^2 блоков размера 3×3 , где главная диагональ занята подматрицами с двумя ненулевыми элементами, а остальные блоки имеют лишь один ненулевой элемент:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2c_m/\rho_n & 0 & -\rho_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2c_m/\rho_n & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \rho_n = \sum_{j=1}^n c_j^2,$$

а выписанные блоки образуют m -й «столбец» матрицы A . Среди собственных значений A есть $2n$ нулевых и n вещественных отрицательных, равных $-\rho_n$. Нулевым собственным значениям матрицы A соответствуют единичные мультипликаторы системы (24), число которых определяет число условий (26). Окончательный результат по аналогии со случаем $n = 2$ можно сформулировать в форме обобщения системы (39) вида

$$\frac{dE_m}{dt} = v(1 + i\alpha) \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^n |E_j|^2} - 1 \right] E_m + \gamma_m e^{-i\Omega_m h} E_m(t - h). \quad (40)$$

Выполняя аналогичные преобразования системы (3), приведем ее к следующему частному случаю (21):

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{E}_m}{ds} = i\omega\tilde{E}_m + \varepsilon v(1 + i\alpha)[\gamma_m(Z_0 - Z_m) - 1]\tilde{E}_m + \varepsilon\gamma e^{-i\Omega_m h + i\omega h \varepsilon^{-1}} \tilde{E}_m(s - h\varepsilon^{-1}), \\ \frac{dZ_m}{ds} = -Z_m \sum_{j=1}^n \gamma_j |\tilde{E}_j|^2 + \gamma_m |\tilde{E}_m|^2 Z_0/2 - \varepsilon(1 + d)Z_m, \\ \frac{dZ_0}{ds} = 1 + \sum_{j=1}^n |\tilde{E}_j|^2 (Z_j - Z_0) - \varepsilon Z_m. \end{cases} \quad (41)$$

Семейство периодических решений системы нулевого приближения имеет вид

$$E_m = c_m \exp(i\omega s), \quad Z_m = p_m Z_0, \quad Z_0 = \left(\sum_{j=1}^n (1 - p_j) c_j^2 \right)^{-1}, \quad (42)$$

где c_m — произвольные постоянные, p_m обозначена следующая величина:

$$p_m = \gamma_m c_m^2 \left[2 \sum_{j=1}^n \gamma_j c_j^2 \right]^{-1} = \gamma_m |E_m|^2 \left[2 \sum_{j=1}^n \gamma_j |E_j|^2 \right]^{-1}. \quad (43)$$

Отметим, что $0 \leq p_m \leq 1/2$, если не все $c_j = 0$ одновременно. При $n = 2$ семейство периодических решений системы нулевого приближения можно записать в виде следующего вектора с вещественными компонентами:

$$V_0(s) = (c_1 \cos(\omega s), c_1 \sin(\omega s), Z_1, c_2 \cos(\omega s), c_2 \sin(\omega s), Z_2, Z_0)^T,$$

где Z_0, Z_1, Z_2 определяются из (42), (43) при $n = 2$. В случае замены в (41) величины $\tilde{E}_m = \tilde{R}_m \exp(i\tilde{\theta}_m)$ это семейство решений представимо в виде

$$V_0(s) = (c_1, \omega s, Z_1, c_2, \omega s, Z_2, Z_0)^T.$$

Стандартная линеаризация $x' = F(x)$ на $V_0(s)$ в соответствии с изложенной методикой приводит к системе (24) с постоянной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 c_1 [Z_0 - 2Z_1] & 0 & -\gamma_1 c_1^2 - \gamma_2 c_2^2 & -\gamma_2 c_2 Z_1 & 0 & 0 & \gamma_1 c_1^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 c_1 Z_2 & 0 & 0 & -\gamma_2 c_2 [Z_0 - 2Z_2] & 0 & -\gamma_1 c_1^2 - \gamma_2 c_2^2 & \gamma_2 c_2^2/2 \\ 2c_1 [Z_1 - Z_0] & 0 & c_1^2 & 2c_2 [Z_2 - Z_0] & 0 & c_2^2 & -c_1^2 - c_2^2 \end{pmatrix}.$$

Среди собственных значений этой матрицы очевидно есть четыре нулевых. Еще три собственных значения матрицы A являются собственными значениями подматрицы

$$B_2 = \begin{pmatrix} -\gamma_1 c_1^2 - \gamma_2 c_2^2 & 0 & \gamma_1 c_1^2/2 \\ 0 & -\gamma_1 c_1^2 - \gamma_2 c_2^2 & \gamma_2 c_2^2/2 \\ c_1^2 & c_2^2 & -c_1^2 - c_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 & \gamma_1 c_1^2/2 \\ 0 & -\sigma_2 & \gamma_2 c_2^2/2 \\ c_1^2 & c_2^2 & -\rho_2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что все $\lambda(B_2)$ вещественные отрицательные. Линейно независимые периодические решения сопряженной системы удобно выбрать следующим образом: $H_0(s) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, $H_1(s) = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$, $H_2(s) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$, $H_3(s) = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T$. Из условий (26), переобозначая $\omega\varphi_j \rightarrow \varphi_j$, получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений, которую мы будем называть квазинормальной формой модели (3) в случае $Q \gg 1$:

$$\begin{cases} c_1'(t) = v \left(\frac{\gamma_1(1-p_1)}{(1-p_1)c_1^2(t) + (1-p_2)c_2^2(t)} - 1 \right) c_1(t) + \gamma \cos \left(\Omega_1 h + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr \right) c_1(t-h), \\ \varphi_1(t) = v\alpha \left(\frac{\gamma_1(1-p_1)}{(1-p_1)c_1^2(t) + (1-p_2)c_2^2(t)} - 1 \right) - \gamma \sin \left(\Omega_1 h + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr \right) \frac{c_1(t-h)}{c_1(t)}, \\ c_2'(t) = v \left(\frac{\gamma_2(1-p_2)}{(1-p_1)c_1^2(t) + (1-p_2)c_2^2(t)} - 1 \right) c_2(t) + \gamma \cos \left(\Omega_2 h + \int_{-h}^0 \varphi_2(t+r) dr \right) c_2(t-h), \\ \varphi_2(t) = v\alpha \left(\frac{\gamma_2(1-p_2)}{(1-p_1)c_1^2(t) + (1-p_2)c_2^2(t)} - 1 \right) - \gamma \sin \left(\Omega_2 h + \int_{-h}^0 \varphi_2(t+r) dr \right) \frac{c_2(t-h)}{c_2(t)}. \end{cases} \quad (44)$$

Величины p_m определяются соотношением (43). Заметим, что система (44) заменами

$$\varphi_j(t) = \theta_j'(t), \quad c_j(t)e^{i\theta_j(t)} = E_j(t), \quad j = 1, 2,$$

может быть преобразована к системе из двух комплексных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dE_1}{dt} = v(1+i\alpha) \left[\frac{\gamma_1(1-p_1)}{(1-p_1)|E_1(t)|^2 + (1-p_2)|E_2(t)|^2} - 1 \right] E_1 + \gamma e^{-i\Omega_1 h} E_1(t-h), \\ \frac{dE_2}{dt} = v(1+i\alpha) \left[\frac{\gamma_2(1-p_2)}{(1-p_1)|E_1(t)|^2 + (1-p_2)|E_2(t)|^2} - 1 \right] E_2 + \gamma e^{-i\Omega_2 h} E_2(t-h). \end{cases} \quad (45)$$

В отличие от случая $n = 1$ системы (39) и (45) не сводятся одна к другой, величины p_m в (45) сами зависят от $|E_m|$ согласно (43). В общем случае при произвольном натуральном n вектор $V_0(s)$ состоит из $1 + 3n$ вещественных компонент, которые удобно представить как n блоков из троек $c_m, \omega s, Z_m$, дополненных величиной Z_0 , где Z_m и Z_0 определяются из (42), (43). Подматрица, полученная из матрицы A вычеркиванием последней строки и последнего столбца, тогда состоит из n^2 блоков размера 3×3 , где главная диагональ занята подматрицами с двумя ненулевыми элементами, а остальные блоки имеют лишь один ненулевой элемент:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_m c_m [Z_0 - 2Z_m] & 0 & -\sigma_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_i c_i Z_j & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где использованы обозначения

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^n \gamma_j c_j^2, \quad \rho_n = \sum_{j=1}^n c_j^2.$$

Среди собственных значений A есть $2n$ нулевых (по числу нулевых строк A). Еще $1 + n$ собственных значений матрицы A являются собственными значениями подматрицы $(n + 1) \times (n + 1)$

$$B_n = \begin{pmatrix} -\sigma_n & 0 & \dots & 0 & \gamma_1 c_1^2/2 \\ 0 & -\sigma_n & \dots & 0 & \gamma_2 c_2^2/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\sigma_n & \gamma_n c_n^2/2 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 & -\rho_n \end{pmatrix},$$

которая является внедиагонально неотрицательной матрицей Гурвица согласно [10] или относится к классу М-матриц согласно терминологии [11], т.е. удовлетворяет критерию Севастьянова—Котелянского (см. [9, 12]); следовательно, $\operatorname{Re} \lambda(B_n) < 0$ для любого натурального n . Нулевым собственным значениям матрицы A соответствуют единичные мультипликаторы системы (24), число которых определяет число условий (26). Окончательный результат по аналогии со случаем $n = 2$ можно сформулировать в форме обобщения системы (45) вида

$$\frac{dE_m}{dt} = v(1 + i\alpha) \left[\frac{\gamma_m(1 - p_m)}{\sum_{j=1}^n (1 - p_j)|E_j(t)|^2} - 1 \right] E_m + \gamma e^{-i\Omega_m h} E_m(t - h). \quad (46)$$

Численный анализ построенных квазинормальных форм для многомодовых моделей (2), (3) выполнялся в случае $n = 2$. Рассматривались системы (38) при условии $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ и (44) при условии $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Значения остальных параметров полагались $v = 100$, $\alpha = 5$, $\Omega_1 h = 1$, $\Omega_2 h = 1,01$. Вычисления производились лишь для некоторых значений h из диапазона, представленного на рис. 3. При изменении параметра γ наблюдались такие же качественные изменения режимов от состояний равновесия до хаотических колебаний.

7. Результаты для систем с фильтром. Выполним в одномодовой модели (4) следующее преобразование переменных: $t = \varepsilon s$, $E = e^{-i\omega s} \tilde{E}/\sqrt{\varepsilon}$, $f = e^{-i\omega s} \tilde{f}/\sqrt{\varepsilon}$. В результате получим систему, которая является частным случаем (21):

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{E}}{ds} = i\omega \tilde{E} + \varepsilon v(1 + i\alpha) \tilde{E} Z - \varepsilon \gamma \tilde{f}, \\ \frac{d\tilde{f}}{ds} = i\omega \tilde{f} + \varepsilon i \Delta \tilde{f} + \varepsilon \Lambda \left[e^{-\omega_0 h + \omega h \varepsilon^{-1}} \tilde{E}(s - h\varepsilon^{-1}) - \tilde{f} \right], \\ \frac{dZ}{ds} = 1 - (1 + Z)|\tilde{E}|^2 - \varepsilon Z. \end{cases} \quad (47)$$

Решение системы «нулевого приближения» можно записать следующим образом:

$$V_0(s) = (c \exp(i\omega s), \hat{c} \exp(i\omega s), c^{-2} - 1)^T.$$

В такой параметризации дальнейшие действия излагались в [3]. Запишем решение системы «нулевого приближения» в более удобной для вычислений форме, которая получается при полярной замене величин E и f :

$$V_0(s) = (c, \omega s, \hat{c}, \omega s, c^{-2} - 1)^T.$$

Стандартная линеаризация $x' = F(x)$ на $V_0(s)$ в соответствии с изложенной методикой приводит к системе (24) с постоянной матрицей

$$A = F'(V_0(s)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2c^{-1} & 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}.$$

Среди собственных значений этой матрицы очевидно есть четыре нулевых (и вещественное отрицательное $-c^2$), которым соответствуют линейно независимые решения $K_i(s)$, $i = 0, \dots, 4$, записанные по столбцам матричной экспоненты:

$$\exp(As) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2c^{-3}(1 - e^{-c^2s}) & 0 & 0 & 0 & e^{-c^2s} \end{pmatrix}.$$

Линейно независимые периодические решения сопряженной системы удобно выбрать следующим образом: $H_0(s) = (1, 0, 0, 0, 0)^T$, $H_1(s) = (0, 1, 0, 0, 0)^T$, $H_2(s) = (0, 0, 1, 0, 0)^T$, $H_3(s) = (0, 0, 0, 1, 0)^T$. В данном случае замена (22), (23) несколько модифицируется:

$$V(s, \varepsilon) = V_0(\tau, \hat{\tau}) + \varepsilon V_1(t, \tau, \hat{\tau}) + \varepsilon^2 V_2(t, \tau, \hat{\tau}) + \dots, \\ \frac{d\tau}{ds} = 1 + \varepsilon\varphi(t) + \varepsilon^2\psi(t) + \dots, \quad \frac{d\hat{\tau}}{ds} = 1 + \varepsilon\hat{\varphi}(t) + \varepsilon^2\hat{\psi}(t) + \dots$$

Здесь $V_0(\tau, \hat{\tau}) = (c \exp(i\omega\tau), \hat{c} \exp(i\omega\hat{\tau}), Z)^T$. Кроме того,

$$\hat{\tau}(s) - \tau(s) = \varepsilon \int_{s_0}^s [\hat{\varphi}(\varepsilon r) - \varphi(\varepsilon r) + \dots] dr = \int_{t_0}^t [\hat{\varphi}(r) - \varphi(r)] dr + O(\varepsilon).$$

В соответствии с изложенной методикой, собирая коэффициенты при первой степени ε , приходим к следующей системе уравнений:

$$c'(t) \frac{dV_0}{dc} + \hat{c}'(t) \frac{dV_0}{d\hat{c}} + \varphi(t) \frac{dV_0}{d\tau} + \hat{\varphi}(t) \frac{dV_0}{d\hat{\tau}} + \frac{dV_1}{d\tau} + \frac{dV_1}{d\hat{\tau}} = \\ = AV_1 + \Phi(V_0(\tau(s), \hat{\tau}(s)), V_0(\tau(s - h\varepsilon^{-1}), \hat{\tau}(s - h\varepsilon^{-1}))). \quad (48)$$

Условие существования периодического (по τ , $\hat{\tau}$) решения (48) состоит в ортогональности его неоднородной части функциям H_0 , H_1 , H_2 , H_3 . Отметим, что, сделав замену $\omega\varphi \rightarrow \varphi$, $\omega\hat{\varphi} \rightarrow \hat{\varphi}$, можно избавиться от ω . Следующая система интегро-дифференциальных уравнений выступает в роли нормальной формы в задаче о локальной динамике уравнений (4) в окрестности решения V_0 невозмущенной предельной системы при $Q \rightarrow \infty$:

$$c'(t) = v \left(\frac{1}{c(t)} - c(t) \right) + \gamma \cos \left(\int_{t_0}^t (\hat{\varphi}(r) - \varphi(r)) dr \right) \hat{c}(t), \quad (49a)$$

$$\varphi(t) = v\alpha \left(\frac{1}{c^2(t)} - 1 \right) + \gamma \sin \left(\int_{t_0}^t (\hat{\varphi}(r) - \varphi(r)) dr \right) \frac{\hat{c}(t)}{c(t)}, \quad (49b)$$

$$\hat{c}'(t) = \Lambda \left[c(t - h) \cos \left(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\hat{\varphi}(r) - \varphi(r)) dr \right) - \hat{c}(t) \right], \quad (49c)$$

$$\hat{\varphi}(t) = \Delta - \Lambda \sin \left(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\hat{\varphi}(r) - \varphi(r)) dr \right) \frac{c(t-h)}{\hat{c}(t)}. \quad (49d)$$

Заметим, что квазинормальная форма (49) при выполнении замен $E(t) = c(t)e^{i\theta(t)}$, $\theta'(t) = \varphi(t)$, $f(t) = \hat{c}(t)e^{i\hat{\theta}(t)}$, $\hat{\theta}'(t) = \hat{\varphi}(t)$ допускает более компактную запись в терминах исходной системы (4):

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1 + i\alpha)(|E|^{-2} - 1)E + \gamma f, \\ \frac{df}{dt} = i\Delta f + \Lambda[E(t-h)e^{-i\omega_0 h} - f]. \end{cases} \quad (50)$$

Численный анализ показывает, что динамика (49) оказывается проще, чем (28). В пределах точности вычислений при $\gamma < v$ и $0 < h < 10$ вне зависимости от значений других параметров удавалось обнаружить лишь один аттрактор — устойчивое состояние равновесия, которому соответствует простой периодический режим в системе (4). Аналогичный результат получается и для модели Корюкина с оптическим фильтром в одномодовом случае. Именно, выполняя такое же преобразование переменных как в предыдущем случае, получим систему, которая является частным случаем (21):

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{E}}{ds} = i\omega\tilde{E} + \varepsilon v(1 + i\alpha)[\gamma_1(Z_0 - Z) - 1]\tilde{E} - \varepsilon\gamma\tilde{f}, \\ \frac{d\tilde{f}}{ds} = i\omega\tilde{f} + \varepsilon i\Delta\tilde{f} + \varepsilon\Lambda[e^{-\omega_0 h + \omega h \varepsilon^{-1}}\tilde{E}(s - h\varepsilon^{-1}) - \tilde{f}], \\ \frac{dZ}{ds} = \gamma_1|\tilde{E}|^2 Z_0/2 - \gamma_1|\tilde{E}|^2 Z - \varepsilon(1 + d)Z, \\ \frac{dZ_0}{ds} = 1 + |\tilde{E}|^2(Z - Z_0) - \varepsilon Z_0. \end{cases} \quad (51)$$

Решение системы «нулевого приближения» можно записать следующим образом:

$$V_0(s) = (c \exp(i\omega s), \hat{c} \exp(i\omega s), c^{-2}, 2c^{-2})^T,$$

или в более удобной для вычислений форме, которая получается при полярной замене E и f :

$$V_0(s) = (c, \omega s, \hat{c}, \omega s, c^{-2}, 2c^{-2})^T.$$

Стандартная линеаризация $x' = F(x)$ на $V_0(s)$ в соответствии с изложенной методикой приводит к системе (24) с постоянной матрицей

$$A = F'(V_0(s)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_1 c^2 & \gamma_1 c^2/2 \\ -2c^{-1} & 0 & 0 & 0 & c^2 & -c^2 \end{pmatrix}.$$

Среди собственных значений этой матрицы очевидно есть четыре нулевых, которым соответствуют следующие линейно независимые решения:

$$\begin{aligned} K_0(s) &= (1, 0, 0, 0, -2c^{-3}, -4c^{-3})^T, & K_1(s) &= (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T, \\ K_2(s) &= (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T, & K_3(s) &= (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Линейно независимые периодические решения сопряженной системы удобно выбрать следующим образом: $H_0(s) = (1, 0, 0, 0, 0)^T$, $H_1(s) = (0, 1, 0, 0, 0)^T$, $H_2(s) = (0, 0, 1, 0, 0)^T$, $H_3(s) = (0, 0, 0, 1, 0)^T$.

Далее точно так же приходим к системе уравнений (48), в которой требуется выполнение условий ортогональности ее неоднородной части функциям H_0, H_1, H_2, H_3 .

Отметим, что, сделав замену $\omega\varphi \rightarrow \varphi$, $\omega\hat{\varphi} \rightarrow \hat{\varphi}$, а также

$$E(t) = c(t)e^{i\theta(t)}, \quad \theta'(t) = \varphi(t), \quad f(t) = \hat{c}(t)e^{i\hat{\theta}(t)}, \quad \hat{\theta}'(t) = \hat{\varphi}(t)$$

получаем компактную запись итоговой системы:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1 + i\alpha)(\gamma_1|E|^{-2} - 1)E + \gamma f, \\ \frac{df}{dt} = i\Delta f + \Lambda[E(t - h)e^{-i\Omega h} - f]. \end{cases} \quad (52)$$

Нормировочной заменой $\gamma_1^{-1/2}E \rightarrow E$ и переобозначением $\Omega \rightarrow \omega_0$ она приводится к виду (50).

Таким образом, динамика обеих моделей (5) и (6) при $n = 1$ в случае $Q \gg 1$ математически описывается одной и той же системой, и в этом смысле они не отличаются друг от друга.

Другая особенность рассмотренных выше построений заключается в том, что полученные здесь матрицы A отличаются от таковых в случае одномодовых моделей без фильтра только наличием дополнительных нулевых элементов. На выходе это дает дополнительные уравнения, описывающие воздействие оптического фильтра.

Такие же особенности имеют место в случае многомодовых моделей. Опуская громоздкие преобразования, аналогичные преобразованиям в случае многомодовых моделей без фильтра, выпишем окончательные уравнения.

В случае модели (5) при $n = 2$ приходим к следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1' = v \left(\frac{1}{c_1^2 + c_2^2} - 1 \right) c_1 + \gamma \cos \left(\int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_1(r) - \varphi_1(r)) dr \right) \hat{c}_1, \\ \varphi_1 = v\alpha \left(\frac{1}{c_1^2 + c_2^2} - 1 \right) + \gamma \sin \left(\int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_1(r) - \varphi_1(r)) dr \right) \frac{\hat{c}_1}{c_1}, \\ \hat{c}_1' = \Lambda \left[c_1(t-h) \cos \left(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_1(r) - \varphi_1(r)) dr \right) - \hat{c}_1 \right], \\ \hat{\varphi}_1 = \Delta_1 - \Lambda \sin \left(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_1(r) - \varphi_1(r)) dr \right) \frac{c_1(t-h)}{\hat{c}_1}, \\ c_2' = v \left(\frac{1}{c_1^2 + c_2^2} - 1 \right) c_2 + \gamma \cos \left(\int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_2(r) - \varphi_2(r)) dr \right) \hat{c}_2, \\ \varphi_2 = v\alpha \left(\frac{1}{c_1^2 + c_2^2} - 1 \right) + \gamma \sin \left(\int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_2(r) - \varphi_2(r)) dr \right) \frac{\hat{c}_2}{c_2}, \\ \hat{c}_2' = \Lambda \left[c_2(t-h) \cos \left(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi_2(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_2(r) - \varphi_2(r)) dr \right) - \hat{c}_2 \right], \\ \hat{\varphi}_2 = \Delta_2 - \Lambda \sin \left(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi_2(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_2(r) - \varphi_2(r)) dr \right) \frac{c_2(t-h)}{\hat{c}_2}. \end{array} \right. \quad (53)$$

Выполняя замены

$$E_m(t) = c_m(t)e^{i\theta_m(t)}, \quad \theta_m'(t) = \varphi_m(t), \quad f_m(t) = \hat{c}_m(t)e^{i\hat{\theta}_m(t)}, \quad \hat{\theta}_m'(t) = \hat{\varphi}_m(t),$$

получаем компактную запись итоговой системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_1}{dt} = v(1 + i\alpha) \left(\frac{1}{|E_1|^2 + |E_2|^2} - 1 \right) E_1 + \gamma f_1, \\ \frac{df_1}{dt} = i\Delta_1 f_1 + \Lambda [E_1(t-h)e^{-i\Omega_1 h} - f_1], \\ \frac{dE_2}{dt} = v(1 + i\alpha) \left(\frac{1}{|E_1|^2 + |E_2|^2} - 1 \right) E_2 + \gamma f_2, \\ \frac{df_2}{dt} = i\Delta_2 f_2 + \Lambda [E_2(t-h)e^{-i\Omega_2 h} - f_2]. \end{array} \right. \quad (54)$$

В случае модели (6) при $n = 2$ получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1' = v \left(\frac{\gamma_1(1-p_1)}{(1-p_1)c_1^2 + (1-p_2)c_2^2} - 1 \right) c_1 + \gamma \cos \left(\int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_1(r) - \varphi_1(r)) dr \right) \hat{c}_1, \\ \varphi_1 = v\alpha \left(\frac{\gamma_1(1-p_1)}{(1-p_1)c_1^2 + (1-p_2)c_2^2} - 1 \right) + \gamma \sin \left(\int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_1(r) - \varphi_1(r)) dr \right) \frac{\hat{c}_1}{c_1}, \\ \hat{c}_1' = \Lambda \left[c_1(t-h) \cos \left(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_1(r) - \varphi_1(r)) dr \right) - \hat{c}_1 \right], \\ \hat{\varphi}_1 = \Delta_1 - \Lambda \sin \left(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_1(r) - \varphi_1(r)) dr \right) \frac{c_1(t-h)}{\hat{c}_1}, \\ c_2' = v \left(\frac{\gamma_2(1-p_2)}{(1-p_1)c_1^2 + (1-p_2)c_2^2} - 1 \right) c_2 + \gamma \cos \left(\int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_2(r) - \varphi_2(r)) dr \right) \hat{c}_2, \\ \varphi_2 = v\alpha \left(\frac{\gamma_2(1-p_2)}{(1-p_1)c_1^2 + (1-p_2)c_2^2} - 1 \right) + \gamma \sin \left(\int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_2(r) - \varphi_2(r)) dr \right) \frac{\hat{c}_2}{c_2}, \\ \hat{c}_2' = \Lambda \left[c_2(t-h) \cos \left(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi_2(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_2(r) - \varphi_2(r)) dr \right) - \hat{c}_2 \right], \\ \hat{\varphi}_2 = \Delta_2 - \Lambda \sin \left(\omega_0 h + \int_{-h}^0 \varphi_2(t+r) dr + \int_{t_0}^t (\hat{\varphi}_2(r) - \varphi_2(r)) dr \right) \frac{c_2(t-h)}{\hat{c}_2}. \end{array} \right. \quad (55)$$

Заменами

$$E_m(t) = c_m(t)e^{i\theta_m(t)}, \quad \theta_m'(t) = \varphi_m(t), \quad f_m(t) = \hat{c}_m(t)e^{i\hat{\theta}_m(t)}, \quad \hat{\theta}_m'(t) = \hat{\varphi}_m(t)$$

она приводится к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_1}{dt} = v(1+i\alpha) \left(\frac{\gamma_1(1-p_1)}{(1-p_1)|E_1|^2 + (1-p_2)|E_2|^2} - 1 \right) E_1 + \gamma f_1, \\ \frac{df_1}{dt} = i\Delta_1 f_1 + \Lambda [E_1(t-h)e^{-i\Omega_1 h} - f_1], \\ \frac{dE_2}{dt} = v(1+i\alpha) \left(\frac{\gamma_2(1-p_2)}{(1-p_1)|E_1|^2 + (1-p_2)|E_2|^2} - 1 \right) E_2 + \gamma f_2, \\ \frac{df_2}{dt} = i\Delta_2 f_2 + \Lambda [E_2(t-h)e^{-i\Omega_2 h} - f_2]. \end{array} \right. \quad (56)$$

Численный анализ построенных квазинормальных форм для многомодовых моделей (5), (6) выполнялся в случае $n = 2$. Рассматривались системы (53) при условии $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ и (55) при условии $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Величины $\Delta_1, \Delta_2, \Lambda$, характеризующие фильтр, менялись в достаточно широких пределах: от 10^{-4} до 10^4 . Значения остальных параметров полагались $v = 100, \alpha = 5, \Omega_1 h = 1, \Omega_2 h = 1,01$.

В пределах точности вычислений при $0 < \gamma < v$ и $0 < h < 10$ системах (53) и (55) вне зависимости от значений других параметров удавалось обнаружить лишь один тип аттрактора — устойчивое состояние равновесия, которому соответствует простой периодический режим в системах (5) и (6).

8. Нормализация в неавтономном случае. Полученные в разделах 4, 6 результаты распространяются на случай, когда параметры рассматриваемых систем являются гладкими ограниченными периодическими функциями времени t .

При этом, как отмечено, например, в [26], физически в модели Ланга–Кобаяси проще всего управлять параметрами h и Q .

Согласно [3] наиболее содержательные результаты в случае системы (1) удалось получить при быстро осциллирующем параметре запаздывания:

$$h = h_0 + h_1 \sin(t\varepsilon^{-2}), \quad 0 < h_1 < h_0.$$

Именно, выполняя стандартные замены в уравнениях (1), усредняя их по «быстрому» времени $s\varepsilon^{-1} = t\varepsilon^{-2}$ и действуя далее в соответствии с изложенным алгоритмом нормализации, получим следующую систему с распределенным запаздыванием:

$$\begin{cases} c'(t) = v \left(\frac{1}{c(t)} - c(t) \right) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\sqrt{1-r^2}} \cos \left(\omega_0 h(r) + \int_{-h(r)}^0 \varphi(t+u) du \right) c(t-h(r)) dr, \\ \varphi(t) = \left(\frac{1}{c^2(t)} - 1 \right) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\sqrt{1-r^2}} \sin \left(\omega_0 h(r) + \int_{-h(r)}^0 \varphi(t+u) du \right) \frac{c(t-h(r))}{c(t)} dr. \end{cases} \quad (57)$$

Здесь $h(r) = h_0 + h_1 r$. Эта же система получается в случае модели (3) при $n = 1$.

Численный анализ системы (57) показывает, что уже при соотношении $h_1/h_0 = 0,01$ происходит ощутимый сдвиг вправо по параметру γ всех границ между областями на бифуркационной диаграмме из раздела 5 (см. рис. 3). При $h_1/h_0 = 0,2$ в системе (57) практически всюду в рассматриваемой области параметров устанавливается стационарный режим, которому соответствует простой периодический режим в усредненной системе (1).

В случае модели (2) при $n = 2$, действуя аналогичным образом, приходим к следующей системе интегрально-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} c'_1 = v \left(\frac{1}{c_1^2 + c_2^2} - 1 \right) c_1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\sqrt{1-r^2}} \cos \left(\Omega_1 h(r) + \int_{-h(r)}^0 \varphi_1(t+u) du \right) c_1(t-h(r)) dr, \\ \varphi_1 = v\alpha \left(\frac{1}{c_1^2 + c_2^2} - 1 \right) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\sqrt{1-r^2}} \sin \left(\Omega_1 h(r) + \int_{-h(r)}^0 \varphi_1(t+u) du \right) \frac{c_1(t-h(r))}{c_1(t)} dr, \\ c'_2 = v \left(\frac{1}{c_1^2 + c_2^2} - 1 \right) c_2 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\sqrt{1-r^2}} \cos \left(\Omega_2 h(r) + \int_{-h(r)}^0 \varphi_2(t+u) du \right) c_2(t-h(r)) dr, \\ \varphi_2 = v\alpha \left(\frac{1}{c_1^2 + c_2^2} - 1 \right) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\sqrt{1-r^2}} \sin \left(\Omega_2 h(r) + \int_{-h(r)}^0 \varphi_2(t+u) du \right) \frac{c_2(t-h(r))}{c_2(t)} dr. \end{cases} \quad (58)$$

В случае модели (3) при $n = 2$ получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1' = v \left(\frac{\gamma_1(1-p_1)}{(1-p_1)c_1^2 + (1-p_2)c_2^2} - 1 \right) c_1 + \\ \quad + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\sqrt{1-r^2}} \cos \left(\Omega_1 h(r) + \int_{-h(r)}^0 \varphi_1(t+u) du \right) c_1(t-h(r)) dr, \\ \varphi_1 = v\alpha \left(\frac{\gamma_1(1-p_1)}{(1-p_1)c_1^2 + (1-p_2)c_2^2} - 1 \right) - \\ \quad - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\sqrt{1-r^2}} \sin \left(\Omega_1 h(r) + \int_{-h(r)}^0 \varphi_1(t+u) du \right) \frac{c_1(t-h(r))}{c_1(t)} dr, \\ c_2' = v \left(\frac{\gamma_1(1-p_1)}{(1-p_1)c_1^2 + (1-p_2)c_2^2} - 1 \right) c_2 + \\ \quad + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\sqrt{1-r^2}} \cos \left(\Omega_2 h(r) + \int_{-h(r)}^0 \varphi_2(t+u) du \right) c_2(t-h(r)) dr, \\ \varphi_2 = v\alpha \left(\frac{\gamma_1(1-p_1)}{(1-p_1)c_1^2 + (1-p_2)c_2^2} - 1 \right) - \\ \quad - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\sqrt{1-r^2}} \sin \left(\Omega_2 h(r) + \int_{-h(r)}^0 \varphi_2(t+u) du \right) \frac{c_2(t-h(r))}{c_2(t)} dr. \end{array} \right. \quad (59)$$

Численный анализ систем (58) при условии $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ и (59) при условии $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ выполнялся при $v = 100$, $\alpha = 5$, $\Omega_1 h = 1$, $\Omega_2 h = 1,01$. Здесь, как и в одномодовом случае, уже при $h_1/h_0 = 0,01$ происходит существенное увеличение областей устойчивости более простых режимов за счет областей с более сложной динамикой. При $h_1/h_0 = 0,25$ в системах (58) и (59) практически всюду в рассматриваемой области параметров устанавливаются стационарные режимы, которым соответствуют простые периодический режимы в усредненных системах (2) и (3) соответственно.

9. Заключение. Выполнено математическое исследование нескольких моделей полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью. Построены новые эволюционные уравнения, так называемые квазинормальные формы, которые описывают динамику исходных систем в окрестности предельных семейств периодических решений при асимптотически больших значениях параметра накачки. Аттракторы изначальных модельных задач и нормализованных уравнений связаны между собой стандартным образом: устойчивому состоянию равновесия, циклу квазинормальной формы соответствуют устойчивый цикл, тор в исходной системе.

Основной особенностью использованного в работе подхода является исключение «быстрых» движений. В результате остаются только уравнения для «медленных» амплитуд, которые определяют «в главном» поведение решений исходных систем. При этом редуцированные системы уже не содержат параметр, который рассматривается как асимптотически большой (малый), что серьезно облегчает численный счет.

В случае большой величины накачки модели с фильтром, несмотря на кажущуюся сложность, демонстрируют более простую динамику, нежели системы без фильтра. Вне зависимости от интенсивности запаздывающей оптической обратной связи в системах (53) и (55) устанавливается простой периодический режим, соответствующий стабильному режиму генерации. Аналогичные выводы можно сделать, исследуя динамику систем (58) и (59) при быстро осциллирующем запаздывании. Соответственно фильтрация отраженного электромагнитного излучения и высокочастотная вибрация отражающих поверхностей представляют собой действенные механизмы преодоления явления детерминированного динамического хаоса. Отмеченный стабилизирующий

эффект от использования оптического фильтра или быстро вибрирующих зеркал может быть принят во внимание в различных приложениях оптико-электронных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
2. *Глазков Д. В.* Особенности динамики модели Ланга—Кобаяши в одном критическом случае// *Модел. анал. информ. сист.* — 2008. — 15, № 2. — С. 36–45.
3. *Глазков Д. В.* Качественный анализ сингулярно возмущенных моделей одного класса оптико-электронных систем// *Изв. вузов. Прикл. нелин. динам.* — 2008. — 16, № 4. — С. 167–181.
4. *Глазков Д. В.* Простейшие квазинормальные формы моделей многомодовых лазеров с запаздыванием// *Вестн. ЯрГУ. Сер. естеств. техн. науки.* — 2013. — 2. — С. 49–56.
5. *Кащенко С. А.* Бифуркации цикла в сингулярно возмущенных нелинейных автономных системах// *Изв. РАЕН. Сер. мат. модел. информ. управл.* — 1998. — 2, № 4. — С. 5–53.
6. *Кащенко С. А.* Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием// *Диффер. уравн.* — 1999. — 35, № 10. — С. 1343–1355.
7. *Кащенко С. А.* Бифуркации в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием// *Ж. вычисл. мат. мат. физ.* — 2000. — 4. — С. 659–668.
8. *Корюкин И. В.* Динамика многомодового полупроводникового лазера с оптической обратной связью// *Физ. техн. полупроводн.* — 2009. — 43, № 3. — С. 405–411.
9. *Котелянский Д. М.* О некоторых свойствах матриц с положительными элементами// *Мат. сб.* — 1952. — 31, № 3. — С. 495–506.
10. *Перов А. И.* Новые признаки устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами// *Изв. вузов. Мат.* — 2014. — 9. — С. 49–58.
11. *Перцев Н. В., Пичугин Б. Ю., Пичугина А. Н.* Применение М-матриц для исследования математических моделей живых систем// *Мат. биол. биоинформ.* — 2018. — 13, № 1. — С. 208–237.
12. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971.
13. *Ханин Я. И.* Основы динамики лазеров. — М.: Наука, 1999.
14. *Fischer I., Hess O., Elsässer W. and Göbel E.* High-dimensional chaotic dynamics of an external cavity semiconductor laser// *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — 73, № 16. — P. 2188–2191.
15. *Grassberger P., Procaccia I.* Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal// *Phys. Rev. A.* — 1983. — 28, № 4. — P. 2591–2593.
16. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors// *Phys. D.* — 1983. — 9, № 1–2. — P. 189–208.
17. *Green K., Krauskopf B.* Mode structure of semiconductor laser subject to filtered optical feedback// *Opt. Commun.* — 2006. — 258. — P. 243–255.
18. *Grigorieva E. V., Haken H., Kaschenko S. A.* Theory of quasiperiodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback// *Opt. Commun.* — 1999. — 165. — P. 279–292.
19. *Grigorieva E. V.* Quasiperiodicity in Lang–Kobayashi model of lasers with delayed optical feedback// *Nonlin. Phenom. Compl. Systems.* — 2001. — 4, № 4. — P. 333–340.
20. *Heil T., Fischer I., Elsässer W., Krauskopf B., Green K., Gavrielides A.* Delay dynamics of semiconductor lasers with short external cavities: Bifurcation scenarios and mechanisms// *Phys. Rev. E.* — 2003. — 67. — 066214.
21. *Kaschenko S. A.* Normalization in the systems with small diffusion// *Int. J. Bifurcat. Chaos.* — 1996. — 6, № 7. — P. 1093–1109.
22. *Kaschenko S. A.* Bifurcational features in systems of nonlinear parabolic equations with weak diffusion// *Int. J. Bifurcat. Chaos.* — 2005. — 15, № 11. — P. 3595–3606.
23. *Lang R., Kobayashi K.* External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties// *IEEE J. Quant. Electron.* — 1980. — 16, № 1. — P. 347–355.
24. *Levine A. M., Tartwijk G. H. M., Lenstra D. and Erneux T.* Diode lasers with optical feedback: Stability of the maximum gain mode// *Phys. Rev. A.* — 1995. — 52, № 5. — P. 3436–3439.
25. *Lythe G., Erneux T., Gavrielides A. and Kovanis V.* Low pump limit of the bifurcation to periodic intensities in a semiconductor laser subject to external optical feedback// *Phys. Rev. A.* — 1997. — 55, № 6. — P. 4443–4448.

26. *Mendez J. M., Laje R., Giudici M., Aliaga J. and Mindlin G. B.* Dynamics of periodically forced semiconductor laser with optical feedback// Phys. Rev. E. — 2001. — 63. — 066218.
27. *Ohtsubo J.* Semiconductor Lasers. Stability, Instability and Chaos. — Springer, 2017.
28. *Rottschäfer V., Krauskopf B.* A three-parameter study of external cavity modes in semiconductor lasers with optical feedback. — Proc. IFAC-TDS, 2004.
29. *Sacher J., Elsässer W., Göbel E. O.* Intermittency in the coherence collapse of a semiconductor laser with external feedback// Phys. Rev. Lett. — 1989. — 63, № 20. — P. 2224–2227.
30. *Sano T.* Antimode dynamics and chaotic itinerancy in the coherence collapse of semiconductor lasers with optical feedback// Phys. Rev. A. — 1994. — 50, № 3. — P. 2719–2726.
31. *Sciamanna M., Megret P., and Blondel M.* Hopf bifurcation cascade in small- α laser diodes subject to optical feedback// Phys. Rev. E. — 2004. — 69. — 046209.
32. *Soriano M. C., Garcia-Ojalvo J., Mirasso C. R., and Fischer I.* Complex photonics: Dynamics and applications of delay-coupled semiconductors lasers// Rev. Mod. Phys. — 2013. — 85, № 1. — P. 421–470.
33. *Tabaka A., Panajotov K., Veretennicoff I., Sciamanna M.* Bifurcation study of regular pulse packages in laser diodes subject to optical feedback// Phys. Rev. E. — 2004. — 70. — 036211.
34. *Van Tartwijk G. H. M. and Agrawal G. P.* Laser instabilities: a modern perspective// Progr. Quant. Electr. — 1998. — 22. — P. 43–122.
35. *Vicktorov E. A., Mandel P.* Low frequency fluctuations in a multimode semiconductor laser with optical feedback// Phys. Rev. Lett. — 2000. — 85, № 15. — P. 3157–3160.
36. *Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.* Determining Lyapunov exponents from a time series// Phys. D. — 1985. — 16, № 3. — P. 285–317.
37. *Ye J., Li H., McInerney J. M.* Period-doubling route to chaos in a semiconductor laser with weak optical feedback// Phys. Rev. A. — 1993. — 47, № 3. — P. 2249–2252.

Глазков Дмитрий Владимирович

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: d.glazkov@uniyar.ac.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 81–87
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-81-87

УДК 517.968.22

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ
ПРИ НАЛИЧИИ РАЦИОНАЛЬНОЙ «ПРОСТОЙ» ТОЧКИ ПОВОРОТА

© 2021 г. А. Г. ЕЛИСЕЕВ, Т. А. РАТНИКОВА

Аннотация. В статье на основе метода регуляризации С. А. Ломова построено асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши в случае нарушения условий стабильности спектра предельного оператора. В частности, рассмотрена задача с «простой» точкой поворота, т.е. одно собственное значение обращается в ноль при $t = 0$ и имеет вид $t^{m/n}$ (предельный оператор дискретно необратим).

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача Коши, асимптотическое решение, метод регуляризации, точка поворота.

ASYMPTOTIC SOLUTION
OF A SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM
IN THE PRESENCE OF A RATIONAL “SIMPLE” TURNING POINT

© 2021 A. G. ELISEEV, T. A. RATNIKOVA

ABSTRACT. In this paper, based on S. A. Lomov’s regularization method, we construct an asymptotic solution of a singularly perturbed Cauchy problem in the case of violation of the stability conditions for the spectrum of the limit operator. In particular, we consider the problem with a “simple” turning point, i.e., where one eigenvalue vanishes for $t = 0$ and has the form $t^{m/n}$ (the limit operator is discretely irreversible).

Keywords and phrases: singularly perturbed Cauchy problem, asymptotic solution, regularization method, turning point.

AMS Subject Classification: 34E20

В данной работе методом регуляризации С. А. Ломова (см. [1]) строится асимптотическое решение задачи Коши в случае рациональной «простой» точки поворота. Метод регуляризации позволяет построить равномерное на всем отрезке $[0, T]$ асимптотическое решение, а при дополнительных условиях на параметры сингулярно возмущенной задачи и ее правую часть — точное решение. Идея данной работы восходит к работе [2], в которой разработаны методы решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае «простой» точки поворота предельного оператора с натуральным показателем.

Поясним термин «простая» точка поворота. Пусть дана задача Коши

$$\begin{cases} \varepsilon u' = A(t)u + h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0 \end{cases} \quad (1)$$

и выполнены следующие условия:

- (i) $h(t) \in C^\infty([0, T], R^n)$;
- (ii) $A(t) \in C^\infty([0, T], L(R^n, R^n))$;
- (iii) спектр оператора $A(t)$ удовлетворяет условиям:
 - (a) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t) \forall i \neq j, i, j = \overline{1, n}$;
 - (b) $\lambda_i(t) \neq 0, i = \overline{2, n}$;
 - (c) условие «простой» точки поворота с натуральным показателем: $\lambda_1(t)$ имеет нуль k -порядка, т.е. $\lambda_1(t) = t^k a(t)$ для всех $t \in [0, T]$, где $a(t) \neq 0$.

Следует отметить, что термин «простая» точка поворота был предложен автором метода регуляризации С. А. Ломовым в [2].

1. Формализм метода регуляризации. Точка $\varepsilon = 0$ для задачи (1) является особой в том смысле, что классические теоремы существования решения задачи Коши не имеют места. Поэтому в решении этой задачи возникают существенно особые сингулярности. При выполнении условия стабильности для спектра $A(t)$ существенно особые сингулярности описываются с помощью экспонент вида:

$$e^{\varphi_i(t)/\varepsilon}, \quad \varphi_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s) ds, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\varphi_i(t)$ — гладкая (в общем случае комплексная) функция действительного переменного t . Для решения линейных однородных уравнений такие сингулярности были описаны еще Лиувилем (см. [3]).

Если же условия стабильности нарушены хотя бы для одной точки спектра оператора $A(t)$ (условие iiiс), то кроме экспоненциально существенно особых сингулярностей в решении неоднородного уравнения возникают еще и сингулярности вида:

$$\sigma_i = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \int_0^t e^{-\varphi_1(s)/\varepsilon} s^i ds, \quad i = \overline{0, k-1},$$

которые при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют степенной характер убывания при соответствующих ограничениях на $\lambda_1(t)$, при этом предполагается, что остальные точки спектра не обращаются в нуль при $t = 0$ (условия iiiа, iiiб).

Сингулярно возмущенные задачи возникают обычно в случаях, когда область определения исходного оператора, зависящего от ε при $\varepsilon \neq 0$, не совпадает с областью определения предельного оператора при $\varepsilon = 0$. При изучении задач с «простой» точкой поворота возникают дополнительные условия, когда область значений исходного оператора не совпадает с областью значений предельного оператора.

Для того, чтобы выявить особенности построения решения в случае рациональной точки поворота, и не усложнять изложение материала дополнительными вычислениями при наличии стабильной части спектра, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon u' + t^{m/n} u = h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0, \end{cases} \quad (2)$$

и выполнены следующие условия:

- (i) $h(t) \in C^\infty([0, T], R)$;
- (ii) $m, n \in \mathbb{N}$.

Заменой переменной $\tau = t^{1/n}$ задача (2) сводится к задаче

$$\begin{cases} \varepsilon u'(\tau, \varepsilon) + \tau^p u(\tau, \varepsilon) = \tau^{n-1} h(\tau^n), \\ u(0, \varepsilon) = u^0, \quad \text{где } m + n - 1 = p, \end{cases} \quad (3)$$

методы решения которой изложены в [2].

В данной задаче на структуру решения (3) сильно влияет правая часть уравнения (так как она не принадлежит области значений предельного оператора).

Основные сингулярности данной задачи [2] имеют вид

$$e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon}; \quad \sigma_i = e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon} \int_0^\tau e^{\varphi(s)/\varepsilon} s^i ds, \quad i = \overline{0, p-1},$$

где $\varphi(\tau) = \tau^{p+1}/(p+1)$.

Согласно методу регуляризации в случае «простой» точки поворота решение ищется в виде

$$u(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k u_k = e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon} x(\tau, \varepsilon) + \sum_{i=0}^{p-1} y^i(\tau, \varepsilon) \sigma_i + z(\tau, \varepsilon), \quad (4)$$

где $x(\tau, \varepsilon)$, $y^i(\tau, \varepsilon)$, $z(\tau, \varepsilon)$, $i = \overline{0, p-1}$, — гладкие по τ функции, степенным образом зависящие от ε .

Подставляя (4) в задачу (3) и выделяя слагаемые при одинаковых сингулярностях, получим следующую задачу:

$$\begin{cases} (x(\tau, \varepsilon))' = 0, \\ (y^i(\tau, \varepsilon))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z(\tau, \varepsilon) = \tau^{n-1} h(\tau^n) - \varepsilon [y^0(\tau, \varepsilon) + \tau y^1(\tau, \varepsilon) + \dots + \tau^{p-1} y^{p-1}(\tau, \varepsilon)] - \varepsilon z'(\tau, \varepsilon), \\ x(0, \varepsilon) + z(0, \varepsilon) = u^0. \end{cases} \quad (5)$$

Функции $y^i(\tau, \varepsilon)$ не участвуют в начальном условии системы (5), так как $\sigma_i(0, \varepsilon) = 0$.

Задача (5) является регулярной по степеням ε , поэтому, разлагая функции x , y^i , z в ряды по степеням ε :

$$\begin{cases} x = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\tau), \\ y^i = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k y_k^i(\tau), \quad i = \overline{0, p-1}, \\ z = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\tau) \end{cases} \quad (6)$$

и приравнявая выражения при одинаковых степенях ε , получим серию итерационных задач:

$$\begin{cases} x'_k(\tau) = 0, \\ (y_k^i(\tau))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z_k(\tau) = -z'_{k-1}(\tau) - \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i y_{k-1}^i(\tau) + \delta_0^k \tau^{n-1} h(\tau^n), \\ x_k(0) + z_k(0) = \delta_0^k u^0, \quad k = \overline{-1, \infty}, \end{cases} \quad (7)$$

где δ_0^k — символ Кронекера.

Отрицательная степень по ε возникает из-за того, что $\tau^{n-1} h(\tau^n)$ не принадлежит области значений предельного оператора.

Для решения итерационных задач (7) сформулируем теорему о точечной разрешимости уравнения

$$\tau^p z(\tau) = \tau^{n-s} h(\tau^n),$$

где s — любое натуральное фиксированное число, $0 \leq s \leq n-1$.

Теорема 1. Пусть дано уравнение

$$\tau^p z(\tau) = \tau^{n-s} h(\tau^n), \quad m+n-1 = p, \quad (8)$$

и выполнены условия (i) и (ii) задачи (2). Тогда уравнение (8) разрешимо в классе гладких функций тогда и только тогда, когда

$$h^k(0) = 0, \quad k = 0, \overline{\left[\frac{m+s-1}{n} \right]}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (8) разрешимо. Тогда

$$z(\tau) = \tau^{n-s-p} h(\tau^n). \quad (9)$$

Разложим $h(\tau^n)$ по формуле Маклорена

$$z(\tau) = \sum_{k=0}^N \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \tau^{(k+1)n-p-s} + o(\tau^{(N+1)n-p-s}).$$

Из гладкости решения (9) с необходимостью следует, что

$$(N+1)n - s \leq p < (N+2)n - s.$$

Учитывая, что $p = m + n - 1$, получим

$$N - \frac{s-1}{n} \leq \frac{m}{n} < (N+1) - \frac{s-1}{n}.$$

Отсюда $N = \left[\frac{m+s-1}{n} \right]$ и $h^k(0) = 0, k = \overline{0, N}$.

Достаточность очевидна.

Решение (8) при выполнении условий теоремы запишется в виде

$$z(\tau) = \tau^{n-\nu} h_1(\tau^n), \quad (10)$$

где $0 \leq \nu \leq n-1, h_1(0) \neq 0$. □

Замечание. При решении итерационных задач при определении частного решения $z_k(\tau)$ приходится дифференцировать выражение $\tau^{n-\nu} h_1(\tau^n)$:

$$\frac{d}{d\tau} \tau^{n-\nu} h_1(\tau^n) = (n-\nu) \tau^{n-\nu-1} h_1(\tau^n) + n \tau^{2n-\nu-1} h_1(\tau^n) = \tau^{n-\nu-1} h_2(\tau^n).$$

Таким образом, через $(n-1)$ шагов получим:

$$\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} \tau^{n-1} h(\tau^n) = h_1(\tau^n).$$

Рассмотрим систему (7) при $k = -1$:

$$\begin{cases} x'_{-1}(\tau) = 0, \\ (y^i_{-1}(\tau))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z_{-1}(\tau) = 0, \\ x_{-1}(0) + z_{-1}(0) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Решение системы (8) запишется в виде

$$\begin{cases} x_{-1}(\tau) = x_{-1}(0) = 0, \\ y^i_{-1}(\tau) = y^i_{-1}(0), \quad i = \overline{0, p-1}, \\ z_{-1}(\tau) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

На данном итерационном шаге ($k = -1$) $y_{-1}^i(0)$ — произвольные числа, которые определяются из условия точечной разрешимости при $k = 0$:

$$\begin{cases} x_0'(\tau) = 0, \\ (y_0^i(\tau))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z_0(\tau) = -z_{-1}'(\tau) - \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i y_{-1}^i(0) + \tau^{n-1} h(\tau^n), \\ x_0(0) + z_0(0) = u^0. \end{cases} \quad (13)$$

Решение задачи (13) запишется как $x_0(\tau) = x_0(0)$, $y_0^i(\tau) = y_0^i(0)$, $i = \overline{0, p-1}$, которые определяются из условия разрешимости уравнения

$$\tau^p z_0(\tau) = \tau^{n-1} h(\tau^n) - \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i y_{-1}^i(0) \quad (14)$$

и начальных условий.

На основании теоремы разрешимости следует, что

$$y_{-1}^i(0) = \frac{h^j(0)}{j!},$$

где

$$\text{ord}(\tau^i) = \text{ord}(\tau^{n(j+1)-1}), \quad i = \overline{0, p-1}, \quad j = \overline{0, N}, \quad N = \left[\frac{m}{n} \right]. \quad (15)$$

$\text{ord}(\tau^i) = i$ означает степень τ^i .

Остальные $y_{-1}^i(0) = 0$. Решение $z_0(\tau)$ запишется в виде

$$z_0(\tau) = \tau^{n(N+2)-p-1} h_0(\tau^n) = \tau^s h_0(\tau^n), \quad (16)$$

где s — целое число, $s \in [0, n-1]$. Величина $x_0(0)$ определяется из начальных условий $x_0(0) + z_0(0) = u^0$. Тогда

$$x_0(0) = \begin{cases} u^0, & \text{если } z_0(0) = 0, \\ u^0 - z_0(0), & \text{если } z_0(0) \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение на «-1» шаге определено:

$$u_{-1}(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^j(0)}{j!} \sigma_i,$$

где суммирование ведется по слагаемым, удовлетворяющих условию

$$\text{ord}(\tau^i) = \text{ord}(\tau^{n(j+1)-1}).$$

Чтобы определить $y_0^i(\tau)$, рассмотрим итерационную систему на шаге $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1'(\tau) = 0, \\ (y_1^i(\tau))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z_1(\tau) = -z_0'(\tau) - \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i y_0^i(0), \\ x_0(0) + z_0(0) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Рассмотрим уравнение относительно $z_1(\tau)$. Согласно замечанию

$$\tau^p z_1(\tau) = -\tau^{s-1} h_0(\tau^n) - \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i y_0^i(0),$$

где $h_0(\tau^n)$ — некоторая гладкая функция, $h_0(0) \neq 0$.

На основании теоремы разрешимости имеем $y_0^i(0) = h_0^{(j)}(0)/j!$, для которых

$$\text{ord}(\tau^i) = \text{ord}(nj + s - 1), \quad i = \overline{0, p-1}, \quad j = \overline{0, N}, \quad \text{где } N = \left\lfloor \frac{m-s}{n} \right\rfloor. \quad (18)$$

Отсюда $z_1(\tau) = \tau^{n-q}h_1(\tau^n)$, $0 \leq q \leq n-1$ и

$$x_0(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } z_1(0) = 0, \\ -z_1(0), & \text{если } z_1(0) \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, на нулевом итерационном шаге полностью находится главный член асимптотики:

$$u_{\text{гл}}(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^j(0)}{j!} \sigma_i + x_0(0)e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon} + \sum_{i=0}^{p-1} y_0^i(0)\sigma_i, \quad (19)$$

где в первом слагаемом суммирование ведется по условию (15), в третьем слагаемом суммирование ведется по условию (18).

Аналогично можно найти любой член асимптотического решения.

2. Оценка асимптотического члена. Пусть

$$u(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^N \varepsilon^k u_k(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{N+1} R_N(\tau, \varepsilon), \quad (20)$$

где $u_k(\tau, \varepsilon)$ — решения итерационных задач. Подставим уравнение (20) в задачу (3). Тогда получим задачу Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon R_n'(\tau, \varepsilon) + \tau^p R_n(\tau, \varepsilon) = H(\tau), \\ R_n(0, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь

$$H(\tau) = \tau^p z_{N+1} + z_N' + \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i y_N^i(0)$$

удовлетворяет условию точечной разрешимости. Тогда, оценивая $R_n(\tau, \varepsilon)$ по норме $C[0, T]$, получим оценку $\|R_n(\tau, \varepsilon)\| \leq C$.

Теорема 2. Пусть задана задача (3) и выполнены условия (i) и (ii). $C > 0$ — константа, не зависящая от ε . Тогда верна оценка

$$\left\| u(\tau, \varepsilon) - \sum_{k=-1}^N \varepsilon^k u_k(\tau, \varepsilon) \right\| \leq C\varepsilon^{N+1}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и дополнительные условия точечной разрешимости $h^i(0) = 0$, $i = \overline{0, k}$, $k = [m/n]$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\tau, \varepsilon) = u_0(\tau), \quad \text{где } u_0(\tau) = \frac{\tau^{n-1}h(\tau^{n-1})}{\tau^p} = \tau^{n-s}h_1(\tau^n).$$

Здесь $h_1(0) \neq 0$, $0 \leq s \leq n-1$, или — в терминах исходной задачи — $u_0(t) = t^{(1-s/n)}h_1(t)$.

3. Примеры. В заключение приведем два примера.

Пример 1.

$$\begin{cases} \varepsilon u' + t^{3/2}u = h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0, \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Регуляризирующие функции в данном случае будут

$$e^{-2t^{5/2}/5\varepsilon}; \quad \sigma_i = e^{-2t^{5/2}/5\varepsilon} \int_0^{\sqrt{t}} e^{2s^{5/2}/5\varepsilon} s^i ds, \quad i = \overline{0, 3}.$$

Главный член асимптотики решения задачи запишется в виде

$$u = e^{-2t^{5/2}/5\varepsilon} u^0 + \sigma_0(-z'_0(0)) + \sigma_1\left(\frac{h(0)}{\varepsilon}\right) + \\ + \sigma_2(-z''_0(0)) + \sigma_3\left(\frac{h'(0)}{\varepsilon}\right) + \frac{(h(t) - h(0) - h'(0)t)\sqrt{t}}{t^2},$$

где

$$z_0 = \frac{(h(t) - h(0) - h'(0)t)\sqrt{t}}{t^2}.$$

Пример 2.

$$\begin{cases} \varepsilon u' + t^{1/2}u = h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0, \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Регуляризирующие функции в данном случае будут

$$e^{-2t^{3/2}/3\varepsilon}; \quad \sigma_i = e^{-2t^{3/2}/3\varepsilon} \int_0^{\sqrt{t}} e^{2s^{3/2}/3\varepsilon} s^i ds, \quad i = 0, 1.$$

Главный член асимптотики решения задачи запишется в виде

$$u = e^{-2t^{3/2}/3\varepsilon} u^0 + \sigma_0(-h'_0(0)) + \sigma_1\left(\frac{h(0)}{\varepsilon}\right) + \frac{(h(t) - h(0))\sqrt{t}}{t}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
2. Елисеев А. Г., Ломов С. А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Мат. сб. — 1986. — 131, № 173. — С. 544–557.
3. Liouville J. Second memoire sur le developement des fonctions en series dont divers termes sont assujettis, a une meme equation // J. Math. Pure Appl. — 1837. — 2. — P. 16–35.
4. Турсунов Д. А., Кожбеков К. Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота // Изв. Иркутск. ун-та. — 2017. — 21. — С. 108–121.

Елисеев Александр Георгиевич

Национальный исследовательский университет

«Московский энергетический институт»

E-mail: eliseevag@mpei.ru

Ратникова Татьяна Анатольевна

Национальный исследовательский университет

«Московский энергетический институт»

E-mail: ratnikovata@mpei.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 88–92
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-88-92

УДК 519.217

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СКАЧКООБРАЗНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ БЛЭКА—ШОУЛЗА

© 2021 г. Т. В. ЗАВЬЯЛОВА, Г. А. ТИМОФЕЕВА

Посвящается профессору И. Я. Кацу

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы устойчивости обобщенной модели Блэка—Шоулза. Предполагается, что динамика цены опциона зависит от случайных скачкообразных изменений волатильности. Показано, что исследование вопроса среднеквадратической устойчивости стохастической системы Блэка—Шоулза можно свести к исследованию устойчивости детерминированной системы моментов второго порядка для базового актива. На примере опциона, имеющего два структурных состояния волатильности, получены условия среднеквадратической устойчивости.

Ключевые слова: стохастическая система, волатильность, модель Блэка—Шоулза, устойчивость.

STUDY OF THE DYNAMICS OF A JUMP-LIKE CHANGE IN PRICE IN THE GENERALIZED BLACK–SCHOLES MODEL

© 2021 Т. V. ZAVYALOVA, G. A. TIMOFEEVA

ABSTRACT. In this paper, we examine the stability of the generalized Black–Scholes model. We assume that the dynamics of the option price depends on random spasmodic changes in the volatility. We prove that the study of the mean-square stability of the Black–Scholes stochastic system can be reduced to the study of the stability of a deterministic system of second-order moments for the underlying asset. Using the example of an option with two structural volatility states, we obtain conditions of mean-square stability.

Keywords and phrases: stochastic system, volatility, Black–Scholes model, stability.

AMS Subject Classification: 60J75

1. Введение. Важным фактором, влияющим на цену опциона, является волатильность базового актива. Волатильность является мерой изменчивости базового актива, т.е. силы его ценовых колебаний. Более сильные исторические колебания цены актива дают большие значения волатильности. Как правило, ее и рассчитывают на основе исторических временных рядов как среднеквадратичное отклонение. Рассчитанная таким способом волатильность называется исторической (historical volatility). Существует множество моделей определения взаимосвязи цены опциона и волатильности. По существу, самое большое влияние на цену опциона оказывают два параметра: цена страйк (цена исполнения) и волатильность. Поэтому если трейдеры, например, предполагают, что цена акции не сильно изменится в течение небольшого периода времени, но

будет колебаться с возрастающей силой, то, купив опцион, они смогут продать его дороже. Чем больше волатильность, тем дороже опцион (выше премия), и наоборот. Эту взаимосвязь и используют при определении цены опциона. Чтобы рассчитать стоимость опциона, как правило, используют модель Блэка—Шоулза. В этой математической модели закладывается либо историческая волатильность, либо ожидаемая. На практике же оказывается, что такие расчетные модели являются грубыми и дают значимые расхождения с фактической ценой опциона. Чтобы адекватно описать динамику цены опциона в рассматриваемой математической модели Блэка—Шоулза, мы предполагаем, что волатильность является случайным марковским процессом. Таким образом, основной параметр, влияющий на цену опциона, изменяется скачкообразно в случайные моменты времени, что соответствует действительности. Если волатильность постоянна на некотором промежутке времени, то динамика всего процесса описывается уравнением Блэка—Шоулза. Такое математическое моделирование волатильности позволяет описывать скачки цены на опцион. В [8] рассмотрена модель Блэка—Шоулза в предположении, что процентные ставки изменяются скачкообразно, и показано, что малые скачки процентных ставок мало влияют на краткосрочные цены опционов. Исследованию стохастической волатильности посвящено значительное число работ, среди них наиболее известны [3–7].

2. Постановка задачи. Пусть динамика цены базового актива удовлетворяет стохастическому уравнению

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(t)S(t)dw(t) \quad (1)$$

и задана начальная стоимость актива $S(0) = S_0$. Здесь $S(t)$ — цена опциона акций в каждый момент времени t , $\mu \in \mathbb{R}$ — процентная ставка, $t \in T = [0; t]$, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Предполагается, что волатильность $\sigma(t)$ на промежутке $t \in T[0; t]$ непостоянна, зависит от времени и является случайным процессом, а именно, задается простой марковской цепью, имеющей счетное число состояний. Переходные вероятности случайного процесса известны в каждый момент времени:

$$P\left\{\sigma(t) = \sigma_j \mid \sigma(s) = \sigma_i \neq \sigma_j\right\} = q_{ij}(t-s) + o(t-s), \quad (2)$$

$$P\left\{\sigma(t) = \sigma_i, s \leq \tau \leq t \mid \sigma(s) = \sigma_i\right\} = 1 - q_i(t-s) + o(t-s), \quad (3)$$

где $P\{\cdot \mid \cdot\}$ — условная вероятность события, q_{ij} — известные величины, характеризующие интенсивность перехода марковской цепи из i -го состояния в j -е; $o(t-s)$ — бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем $(t-s)$. На интервалах постоянства волатильности динамика цены опциона описывается уравнением (1) при $\sigma(t) = \sigma_i$. В момент скачкообразного изменения волатильности $\sigma_i \rightarrow \sigma_j$ система уже будет описываться уравнением (1) при $\sigma(t) = \sigma_j$. Но для рассмотрения системы с другим состоянием $\sigma(t) = \sigma_j$ необходимо задать новые начальные условия.

Будем предполагать, что в случайный момент времени $t = \tau$ происходит изменение волатильности скачкообразно. В этом случае скачком изменится и цена базового актива:

$$S(\tau + 0) = (k_{ij} + \alpha\xi)S(\tau - 0), \quad (4)$$

$k_{ij} = k(\sigma_i, \sigma_j)$ — функция, зависящая от случайных значений волатильности $\sigma(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ — некоторые постоянные, ξ — центрированная случайная величина, у которой $M\xi = 0$, $M\xi^2 = 1$.

Условие продолжения динамики цены $S(t)$ (4) обобщает классические модели Блэка—Шоулза, поскольку учитывает другие возможные модели волатильности. А именно, если волатильность не изменяется, то $k(\sigma_i, \sigma_j) = 1$ и $\alpha = 0$ и динамика цены непрерывна; если $\alpha = 0$ и $k(\sigma_i, \sigma_j) \neq 1$, то цена актива изменяется скачком детерминированно. Таким образом, исходная стохастическая модель цены актива сводится к исследованию динамики случайного марковского процесса $\{S(t), \sigma(t)\}$ с заданными начальными условиями, описанного соотношениями (1)–(4).

3. Исследование устойчивости. Для исследования устойчивости будем использовать математический аппарат для систем со случайной структурой и случайными скачками фазовой

траектории, опубликованных в работах авторов [1, 2]. Предварительно введем определения для таких систем.

Определение 1. Решение $S = 0$ системы (1) называется устойчивым в среднем квадратичном, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для любого решения с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\|S_0\| \leq \delta, \quad \sigma_0 \in \Sigma, \quad t_0 \geq 0,$$

будет при всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство

$$M(\|S(t)\|^2 | S_0, \sigma_0) < \varepsilon.$$

Определение 2. Решение системы (1) будем называть экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном, если при любых начальных условиях существуют такие постоянные $B > 0$, $\lambda > 0$, что при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$M\left[\|S(t)\|^2 | S_0, \sigma_0\right] \leq B \|S_0\|^2 e^{-\lambda(t-t_0)}. \quad (5)$$

Найдем условия, при которых цена на опцион устойчива в среднем квадратичном. Для изучения динамики будем использовать метод моментов второго порядка. Обозначим условное математическое ожидание для данного показателя волатильности

$$M_i(t) = M\left[S^2(t)\chi_i(\sigma(t)) \mid S(t) = S^0, \sigma(t) = \sigma_i \in \Sigma\right], \quad (6)$$

где

$$\chi_i(\sigma_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq j, \\ 0, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

$i, j = 1, \dots, k$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Справедливо следующее утверждение, вытекающее из результатов [1, 2].

Теорема 1. Для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном системы со случайной структурой (1), испытывающей воздействие простой марковской цепи (2)–(3) и случайным условием скачка (4) необходимо и достаточно, чтобы была экспоненциально устойчива система дифференциальных уравнений для моментов второго порядка:

$$\frac{dM_i(t)}{dt} = (2\mu - q_i + \sigma_i^2)M_i(t) + q_{ji}(k_{ji}^2 + \alpha^2)M_j(t), \quad i, j = 1, \dots, k,$$

которые следует решать при начальных условиях $M_i(0) = S_0^2 \chi_i(\sigma_0)$.

Доказательство. Предположим, что система (5) с условием скачка (4) экспоненциально устойчива в среднем квадратичном. Тогда, учитывая (2)–(5), следующие равенства отражают с точностью до $o(h)$ моменты второго порядка для различных состояний волатильности:

$$\begin{aligned} M\left[S^2(t+h)\chi_i(\sigma(t+h)) \mid S(t), \sigma(t) = \sigma_i \in \Sigma\right] &= \\ &= M\left[(h\mu + \Delta h\sigma_i + 1)((h\mu + \Delta h\sigma_i + 1))S^2(t)(1 - q_i h)\right], \quad (7) \end{aligned}$$

$$M\left[S^2(t+h)\chi_i(\sigma(t+h)) \mid S(t), \sigma(t) = \sigma_j \in \Sigma\right] = M\left[(k_{ij} + \alpha\xi)^2 S^2(t) \cdot q_{ji} h\right], \quad (8)$$

где $\Delta h = \sqrt{h}$, поскольку приращение винеровского процесса $w(t)$ имеет порядок малости \sqrt{h} . Соотношения (7), (8) можно объединить и записать в общем виде для любого значения волатильности $\sigma(t) \in \Sigma$. Имеем

$$\begin{aligned} M\left[S^2(t+h)\chi_i(\sigma(t+h)) \mid S(t), \sigma(t)\right] &= \\ &= M\left[(h\mu + \Delta h\sigma_i + 1)^2 S^2(t) \cdot (1 - q_i h)\chi_i(\sigma(t))\right] + M\left[(k_{ij} + \alpha\xi)^2 S^2(t) \cdot q_{ji} h \cdot \chi_j(\sigma(t))\right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $M\xi = 0$, $M\xi^2 = 1$ и используя формулу повторного математического ожидания $M[M[\xi|\eta]] = M[\xi]$, получим

$$M_i(t+h) = 2h\mu \cdot M_i(t) + h\sigma_i^2 \cdot M_i(t) - hq_i \cdot M_i(t) + hq_{ji}(k_{ji}^2 + \alpha^2) \cdot M_j(t) + M_i(t),$$

здесь использовано обозначение (6). Перенесем $M_i(t)$ в левую часть равенства, разделим на h и перейдем к пределу при $h \rightarrow 0$. Имеем

$$\frac{dM_i(t)}{dt} = (2\mu - q_i + \sigma_i^2) \cdot M_i(t) + q_{ji}(k_{ji}^2 + \alpha^2) \cdot M_j(t), \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (9)$$

Заметим, что полученная система из k обыкновенных дифференциальных уравнений не зависит от случайной составляющей в соотношении скачка (4). Учитывая, что $\|S\|^2 = S^2$ в наших обозначениях, то

$$M(\|S\|^2 | S_0, \sigma_0) = \text{tr} \left(\sum_{i=1}^k M_i(t) \right).$$

Здесь $\text{tr}(\cdot)$ — след матрицы. Следовательно, из экспоненциальной устойчивости системы (9) следует экспоненциальная устойчивость системы (1) со случайным условием скачка (4). \square

4. Пример. Рассмотрим динамику актива со случайными скачками волатильности. Модель описывается стохастическим уравнением (1). Для учета влияния случайных скачков волатильности предположим, что волатильность опциона имеет состояния: σ_1 — малая волатильность актива, соответствующая росту финансового рынка, устойчивому состоянию экономики; σ_2 — высокая волатильность актива, соответствующая экономическому спаду, кризисному состоянию экономики. При каждом фиксированном состоянии цена $S(t)$ описывается уравнением (1). При переходе из состояния (1) в состояние (2) в случайный момент времени $t = \tau$ происходит изменение волатильности $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$. Введем обозначение $\sigma_2 = k_{12}\sigma_1$ ($k_{12} \neq 1$) и будем считать, что скачком изменяется цена на акцию:

$$S(\tau+0) = (\alpha\xi + k_{ij}) \cdot S(\tau-0), \quad (10)$$

где ξ — случайная величина, у которой $M\xi = 0$, $M\xi^2 = 1$, α — некоторый параметр.

Если $k_{12} = 1$, то волатильность не изменилась, если $k_{12} \neq 1$, то увеличилась (уменьшилась) в k_{12} раз.

Следуя разделу 3, построим систему для моментов второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1(t)}{dt} &= (2\mu - q_{12} + \sigma_1^2) \cdot M_1(t) + q_{21}(k_{21}^2 + a^2) \cdot M_2(t), \\ \frac{dM_2(t)}{dt} &= (2\mu - q_{21} + \sigma_2^2) \cdot M_2(t) + q_{12}(k_{12}^2 + a^2) \cdot M_1(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку марковская цепь имеет два состояния, то из соотношения

$$q_i = \sum_{i \neq j}^k q_{ij}$$

заключаем, что $q_1 = q_{12}$, $q_2 = q_{21}$.

Составим характеристическое уравнение для системы (11):

$$\begin{aligned} \Delta = |B - \lambda E| &= \lambda^2 + \lambda(q_{12} + q_{21} - 4\mu - \sigma_1^2 - \sigma_2^2) + 4\mu^2 + 2\mu(-q_{12} - q_{21} + \sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \\ &+ \sigma_1^2(1 - q_{21}) + \sigma_2^2(1 - q_{12}) + q_{12}q_{21}(1 - (k_{12}^2 + a^2)(k_{21}^2 + a^2)). \end{aligned}$$

Пользуясь критерием Гурвица, получим условия устойчивости системы (11):

$$\begin{cases} q_{12} + q_{21} - 4\mu - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 > 0, \\ \sigma_1^2(2\mu + 1 - q_{21}) + \sigma_2^2(2\mu + 1 - q_{12}) - \left(\frac{1}{k^2} + k^2\right) a^2 q_{12}q_{21} + 4\mu^2 - 2\mu(q_{12} + q_{21}) - a^4 > 0. \end{cases}$$

Полученные соотношения запишем в виде

$$y(k) > \frac{Bk^2 - Ck + B}{A(k^2 + k)}, \quad y(k) < \frac{D}{1 + k}, \quad (12)$$

Здесь введены обозначения $k_{12} = k$, $y = \sigma_2^2$, $y = k\sigma_1^2$, $q_{12} = q_{21} = q$, $A = 2\mu - q + 1$, $B = \alpha^2 q^2$, $C = 4\mu - 4\mu q - \alpha^4$, $D = 2q - 4\mu$.

Из системы (12) вытекают условия среднеквадратической устойчивости системы (1)–(4), накладываемые на случайный параметр скачка фазового вектора:

$$\begin{cases} \alpha > \alpha_1 \vee \alpha < \alpha_2, \\ 4\mu q + 2q - 8\mu^2 - q^2 > 0. \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{-q + \sqrt{4\mu q + 2q - 8\mu^2 - q^2}}, \quad \alpha_2 = -\sqrt{-q + \sqrt{4\mu q + 2q - 8\mu^2 - q^2}}.$$

Проанализируем полученные условия (13) среднеквадратической устойчивости (1)–(4) относительно параметров волатильности. Если зафиксировать значения процентной ставки и интенсивности переходов, исходя из практической ситуации, то модель Блэка–Шоулза (1)–(4) не будет устойчивой в среднем квадратичном, как и модель без скачков траектории. Рассмотрим случай $\alpha = 0$ и очень большие значения k , тогда система (1)–(4) будет устойчивой в среднем квадратичном. Другими словами, на длительном промежутке времени при больших скачках волатильности и очень малых значениях случайных изменений область устойчивости существует. Таким образом, даже неустойчивую исходную модель Блэка–Шоулза со скачками волатильности можно привести в устойчивое состояние за счет малого параметра α в условии (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Завьялова Т. В., Кац И. Я., Тимофеева Г. А. Об устойчивости движения стохастических систем со случайным условием скачка фазовой траектории // Автомат. телемех. — 2002. — 7. — С. 33–43.
2. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. — Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 1998.
3. Шуряев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. I. Факты. Модели. — М.: Фазис, 1998.
4. Bates D. Jump and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutsche mark options // Rev. Fin. Stud. — 1996. — 9. — P. 69–107.
5. Heston S. L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // Rev. Fin. Stud. — 1993. — 6. — P. 327–344.
6. Jorion P. On jump processes in the foreign exchange and stock markets // Rev. Fin. Stud. — 1988. — 1. — P. 427–445.
7. Merton R. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous // J. Fin. Econ. — 1976. — 3. — P. 125–144.
8. Scott L. O. The information content of prices in derivative security markets // IMF Staff Papers. — 1992. — 39. — P. 596–625.

Завьялова Татьяна Викторовна

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва

E-mail: tzava@yandex.ru

Тимофеева Галина Адольфовна

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

E-mail: Gtimofeeva@usurt.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 93–106
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-93-106

УДК 517.518

О СОХРАНЕНИИ ТРАЕКТОРИИ ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ В ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ

© 2021 г. С. П. ЗУБОВА, Е. В. РАЕЦКАЯ, ЛЕ ХАЙ ЧУНГ

Аннотация. Для линейной нестационарной полностью управляемой динамической системы с многоточечными условиями на состояние ставится задача независимости состояния (траектории) системы от внешних возмущений и возможных изменений параметров системы (внутренних возмущений). Задача состоит в построении управления для возмущенной системы, при реализации которого состояние возмущенной системы идентично состоянию невозмущенной системы. Производится сравнение управляющих воздействий для невозмущенной и возмущенной систем при одинаковых состояниях систем.

Ключевые слова: линейная динамическая система, управление, возмущение, инвариантность, блокировка, метод каскадной декомпозиции.

ON THE INVARIANCE OF TRAJECTORIES UNDER PERTURBATIONS IN LINEAR DYNAMIC CONTROL SYSTEMS

© 2021 S. P. ZUBOVA, E. V. RAETSKAYA, LE HAY TRUNG

ABSTRACT. For a linear, nonstationary, completely controllable dynamical system with multipoint conditions on the state, we consider a problem on the independence of the state (trajectory) of the system of external perturbations and possible changes in the parameters of the system (internal perturbations). The problem is to construct a control for the perturbed system under which the state of the perturbed system is identical to the state of the unperturbed system. We compare controls for the unperturbed and perturbed systems at the same states of the systems.

Keywords and phrases: linear dynamical system, control, perturbation, invariance, blocking, cascade decomposition method.

AMS Subject Classification: 34H05

1. Введение. Защита динамического процесса от помех, шумов, возмущений, а также сохранение состояния системы при измененных параметрах динамической системы является одной из важнейших задач автоматического управления.

В частности, актуальна следующая задача: при появлении возмущений, изменений параметров системы изменить управляющее воздействие так, чтобы состояние системы осталось бы неизменным, таким же, как и до появления возмущений. То есть сделать систему жесткой, инвариантной, не реагирующей на помехи, шумы, возмущения с помощью определенного управления.

В [8] отмечено свойство гашения некоторого возмущения H с помощью D в линейной стационарной динамической системе

$$\dot{x}_v(t) = (B + DH)x_v(t) + Du_v(t)$$

Работа выполнена при поддержке Фонда развития науки и техники Министерства образования и обучения Вьетнама (проект № B2017.DNA.09).

в том смысле, что эта система является полностью управляемой, если невозмущенная система

$$\dot{x}(t) = Bx(t) + Du(t)$$

полностью управляема.

Это свойство гашения возмущений с помощью оператора D используется, в частности, в настоящей статье для сохранения программной траектории динамической системы с широким спектром возмущений.

Рассматривается линейная неоднородная система управления с переменными коэффициентами и с различными возмущениями. Показывается, что многоточечная задача управления разрешима или неразрешима одновременно для невозмущенной и возмущенной определенным образом систем. Для возмущенной системы строится управляющее воздействие такое, что состояние ее такое же, как состояние невозмущенной системы, удовлетворяющее многоточечным условиям. Производится сравнение управляющих воздействий для возмущенной и невозмущенной систем с целью установить, насколько следует изменить управление при появлении возмущений, чтобы динамическая система была инвариантной по отношению к возмущениям. Рассматривается программное управление, возмущения или их определенные «части», считаются известными.

2. Постановка задачи и предварительные сведения. Пусть динамическая система

$$\dot{x}(t) = B(t)x(t) + D(t)u(t) + f(t), \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $f(t) \in \mathbb{R}^n$; $B(t)$ и $D(t)$ — матрицы соответствующих размеров; $t \in [t_0, t_k]$; $B(t)$, $D(t)$ и $f(t)$ непрерывны на $[t_0, t_k]$, полностью управляема. Здесь $u(t)$ — управляющая вектор-функция, под влиянием которой вектор-функция состояния системы $x(t)$ переходит из произвольного начального состояния $x(t_0) = x_0$ в произвольное конечное состояние $x(t_k) = x_k$, проходя через любые наперед заданные точки $x(t_i) = x_i$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, $t_0 < t_1 < \dots < t_k$, т.е.

$$x(t_i) = x_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (2)$$

Пусть в системе (1) возникли шумы, помехи, некоторые изменения и т. д. и возмущенная система описывается уравнением

$$(I + H_1(t))\dot{x}_v(t) = (B(t) + H_2(t))x_v(t) + (D(t) + H_3(t))u_v(t) + f(t) + h(t) \quad (3)$$

с непрерывными матрицами $H_i(t)$, $i = 1, \dots, 3$, и непрерывной вектор-функцией $h(t)$.

Задача состоит в построении такой непрерывной вектор-функции $u_v(t)$, что вектор-функция состояния $x_v(t)$ системы (3) тождественна вектор-функции состояния $x(t)$ в задаче (1), (2):

$$x_v(t) \equiv x(t), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (4)$$

Следует также установить, насколько отличается $u_v(t)$ от $u(t)$ в зависимости от величин возмущающих факторов, т.е. как и насколько следует изменить управление возмущенной системой, чтобы состояние системы не реагировало на возмущения.

Для решения поставленных задач применяется метод каскадной декомпозиции задач (каскадный метод), разработанный, в частности, и для решения задач управления (см. [2, 4, 5]), опирающийся на следующее свойство (отображения и соответствующие им матрицы обозначаются одинаково).

Если $C(t): \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^l$, то имеют место при каждом $t \in [t_0, t_k]$ разложения \mathbb{R}^s и \mathbb{R}^l в прямые суммы

$$\mathbb{R}^s = \text{Coim } C(t) \dot{+} \text{Ker } C(t), \quad \mathbb{R}^l = \text{Im } C(t) \dot{+} \text{Coker } C(t),$$

где $\text{Ker } C(t)$ — нуль-пространство (ядро) отображения $C(t)$; $\text{Im } C(t)$ — множество значений $C(t)$, $\text{Coker } C(t)$ — дефектное подпространство, $\text{Coim } C(t)$ — прямое дополнение к $\text{Ker } C(t)$ в \mathbb{R}^s .

Введем следующие обозначения: $P(C(t))$ и $Q(C(t))$ — проекторы на $\text{Ker } C(t)$ и $\text{Coker } C(t)$ соответственно, отвечающие этим разложениям; $\tilde{C}(t)$ — сужение $C(t)$ на $\text{Coim } C(t)$, $C^-(t) = \tilde{C}(t)^{-1}(I - Q(C(t)))$ — полуобратное отображение, I — тождественное отображение в соответствующем пространстве, далее это единичные матрицы. При этом $P(C(t)) = I - C^-(t)C(t)$ и $Q(C(t)) = I - C(t)C^-(t)$.

Если при некотором значении t матрица $C(t)$ нулевая, то полагаем $C^-(t)$ — нулевая матрица.

Отображение $C(t)$ называют сюръективным, если его множество значений совпадает с \mathbb{R}^l , т.е. если $Q(C(t)) \equiv 0$.

Далее для краткости символ (t) в проекторах опускается.

Каскадный метод основан на расщеплении уравнения вида $C(t)v(t) = w(t)$ на уравнения в подпространствах $\text{Im } C(t)$ и $\text{Coker } C(t)$ и применения следующей леммы.

Лемма 1 (см. [2]). *Соотношение $C(t)v(t) = w(t)$, $v(t) \in \mathbb{R}^s$, $w(t) \in \mathbb{R}^l$, эквивалентно системе*

$$\begin{cases} Q(C)w(t) = 0, \\ v(t) = C^{-1}(t)w(t) + z(t), \end{cases}$$

где $z(t) = P(C)v(t)$ — произвольный элемент из $\text{Ker } C(t)$.

Заметим, что разложения пространств в прямые суммы могут быть записаны в разных формах, проекторы $P(C)$, $Q(C)$ и полубратное отображение $C^{-1}(t)$ также могут иметь разные формы записи, но результаты леммы 1 при разных формах записи являются эквивалентными. К примеру, если

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то система

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = w_1, \\ v_1 + v_2 = w_2 \end{cases}$$

эквивалентна одной из систем

$$\begin{cases} w_1 - w_2 = 0, \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -w_1 + w_2 = 0, \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{aligned} P(C) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad P(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \\ Q(C) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad Q(C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ C^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть $D(t)$ несюръективен при всех $t \in [t_0, t_k]$. Применение леммы 1 к уравнению (1), записанному в виде

$$D(t)u(t) = \dot{x}(t) - B(t)x(t) - f(t), \quad (5)$$

согласно лемме при $C(t) = D(t)$ приводит к формуле для нахождения $u(t)$ в виде функциональной зависимости от $x(t)$ и к уравнению для нахождения $x(t)$; это уравнение в свою очередь преобразуется к виду системы управлений с некоторыми функциями псевдосостояния и псевдоуправления. К этой новой системе управления снова применяется лемма 1 и т. д. Этот процесс изложен пошагово в [4] в двух вариантах: с помощью проекторов на подпространства и с помощью линейных замен искомым функций.

Применение леммы к уравнению (3), записанному в виде

$$D(t)u_v(t) = -H_3(t)u_v(t) + (I + H_1(t))\dot{x}_v(t) - (B(t) + H_2(t))x_v(t) - f(t) - h(t), \quad (6)$$

также приводит к формуле для нахождения $u_v(t)$ через $x_v(t)$ и к уравнению для нахождения $x_v(t)$.

Поставленная выше задача разрешима за счет того, что уравнения для нахождения $x(t)$ и $x_v(t)$ при определенных свойствах возмущений одинаковы.

Рассматриваются два случая: когда возмущающие операторы $H_i(t)$, $i = 1, \dots, 3$, сюръективны и $h(t) \in \text{Im } D(t)$, и случай возмущений общего вида. В случае произвольных возмущений рассматривается возможность блокировки возмущений введением в систему блокатора, роль которого выполняет $D(t)$.

3. Решение невозмущенной задачи.

3.1. *Первый шаг декомпозиции.* Предлагается решение задачи (1), (2) методом каскадной декомпозиции (см. [2, 4, 5]).

Согласно лемме 1 уравнение (5), т.е. (1), эквивалентно системе

$$u(t) = D^{-1}(t)(\dot{x}(t) - B(t)x(t) - f(t)) + z(t), \quad (7)$$

$$Q(D)\dot{x}(t) \equiv Q(D)(B(t)x(t) + f(t)), \quad (8)$$

с произвольной вектор-функцией $z(t) \in \text{Ker } D(t)$. Соотношение (8) — это условие корректности системы (1).

Равенство (7) есть формула для определения $u(t)$ после того, как из (8) будет найдено $x(t)$, удовлетворяющее условиям (2). Решение задачи (8), (2) можно осуществить следующим образом.

В результате дифференцирования $Q(D)$ и замены

$$\begin{cases} Q(D)x(t) = x^1(t), \\ (I - Q(D))x(t) = y^1(t) \end{cases} \quad (9)$$

уравнение (8) записывается в виде

$$\dot{x}^1(t) = B_1(t)x^1(t) + D_1(t)y^1(t) + f_1(t), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(t) &= (\dot{Q}(D) + Q(D)B(t))Q(D), \\ D_1(t) &= (\dot{Q}(D) + Q(D)B(t))(I - Q(D)), \\ f_1(t) &= Q(D)f(t). \end{aligned} \quad (11)$$

В представлении (10) использованы свойства проекторов $Q(D)$ и $(I - Q(D))$:

$$Q^2(D) = Q(D), \quad (I - Q(D))^2 = (I - Q(D)),$$

в силу чего

$$x^1(t) = Q(D)x(t) = Q^2(D)x(t) = Q(D)x^1(t), \quad y^1(t) = (I - Q(D))x(t) = (I - Q(D))^2x(t) = (I - Q(D))y^1(t).$$

Таким образом, если $Q(D)$ дифференцируемо, то равенство (1) эквивалентно системе, состоящей из уравнений (7), (9), (10) в обозначениях (11) и равенства

$$x(t) = x^1(t) + y^1(t), \quad (12)$$

следующего из (9).

Замечание 1. Требование гладкости $Q(D)$ не означает гладкости $D(t)$, к примеру, если

$$D(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ 2\sqrt{t} \end{pmatrix},$$

то

$$Q(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $Q(D)$ гладкое отображение, хотя $D(t)$ не дифференцируемо при $t = 0$.

Замечание 2. Можно прийти к уравнению (10) без использования проектора $Q(D)$, а некоторой заменой

$$\begin{cases} L_1(t)x(t) = x^1(t), \\ G_1(t)x(t) = y^1(t), \end{cases} \quad \det \begin{pmatrix} L_1(t) \\ G_1(t) \end{pmatrix} \neq 0, \quad (13)$$

предложенной в [4].

Функцию $x^1(t)$ называют *функцией псевдосостояния* (*псевдосостоянием*); функцию $y^1(t)$ называют *функцией псевдоуправления* (*псевдоуправлением*) первого шага декомпозиции.

Уравнение (10) аналогично исходному уравнению (1), только поиск решений должен осуществляться в более узком, чем исходное, пространстве, так как система (10) содержит меньшее количество скалярных уравнений, чем (1), за счет отщепления от (1) соотношений (7). Кроме того, условие (2) переходит в условия и для $x^1(t)$, и для $y^1(t)$:

$$x^1(t_i) = Q(D(t_i))x_i, \quad y^1(t_i) = (I - Q(D(t_i)))x_i.$$

Эти условия приводят с помощью равенства (10) к условию

$$\dot{x}^1(t_i) = B_1(t_i)x^1(t_i) + D_1(t_i)y^1(t_i) + f_1(t_i).$$

Теперь задача состоит в построении $x^1(t)$ и $y^1(t)$, удовлетворяющих уравнению (10) и условиям

$$\begin{aligned} x^1(t_i) &= Q(D(t_i))x_i =: x_i^{10}, \\ \dot{x}^1(t_i) &= B_1(t_i)x^1(t_i) + D_1(t_i)y^1(t_i) + f_1(t_i) =: x_i^{11}, \end{aligned} \quad (14)$$

следующим из (2), (9) и (10) (=: означает «обозначим», второй индекс сверху — порядок производной вектор-функции).

Лемма 2 (см. [3]). Пусть $Q(D)$ дифференцируем на $[t_0, t_k]$. Уравнение (1) с условием (2) эквивалентно системе, состоящей из уравнений (7), (9), (10) с условиями (14).

Если в уравнении (10) матрица $D_1(t)$ является сюръективной, то процесс декомпозиции на этом заканчивается, и следует приступить к построению $x^1(t)$ и $y^1(t)$, удовлетворяющих уравнению (10) и условиям (14). Способ построения описан ниже на последнем шаге декомпозиции.

Примером динамической системы с сюръективной матрицей $D_1(t)$ является система управления, приведенная в [7], описывающая движение в вертикальной плоскости материальной точки под действием реактивной силы. В этом примере уравнение (1) — это система

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u_1(t), \quad \dot{x}_3(t) = x_4(t), \quad \dot{x}_4(t) = u_2(t) - g$$

(описание параметров системы приведено ниже в примере (1)). Уравнение (7) — это система

$$u_1(t) = \dot{x}_2(t), \quad u_2(t) = \dot{x}_4(t) + g.$$

Уравнение (10) — это система

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_3(t) = x_4(t).$$

Здесь

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y^1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица D_1 не только сюръективная, но и обратимая за счет отсутствия у нее и коядра, и ядра.

3.2. Второй шаг декомпозиции. В случае $Q(D) \neq 0$ уравнение (10) относительно двух неизвестных вектор-функций $x^1(t)$ и $y^1(t)$ записывается в виде

$$D_1(t)y^1(t) = \dot{x}^1(t) - B_1(t)x^1(t) - f_1(t).$$

Отображение $D_1(t)$ действует из $\text{Im } D$ в $\text{Coker } D$. Для доказательства этого факта достаточно продифференцировать равенство

$$Q(D)(I - Q(D)) = 0,$$

в результате чего получим

$$\dot{Q}(D)(I - Q(D)) = Q(D)\dot{Q}(D);$$

тогда

$$\dot{Q}(D)(I - Q(D)) = \dot{Q}(D)(I - Q(D))^2 = Q(D)\dot{Q}(D)(I - Q(D)),$$

$$D_1(t) = Q(D)(\dot{Q}(D) + Q(D)B(t))(I - Q(D))$$

(напомним, $Q(D)$ — проектор на $\text{Coker } D$, $(I - Q(D))$ — проектор на $\text{Im } D$).

Во-вторых, из дифференцируемости $Q(D)$ следует, что $\dim \text{Coker } D(t) = \text{const}$ (см. [3]), т.е. отображение $D_1(t)$ при всех $t \in [t_0, t_k]$ действует из конечномерного подпространства в конечномерное подпространство, размерности которых постоянны, следовательно, его свойства аналогичны свойствам $D(t)$.

Введем обозначения $\dim \text{Coker } D = n_1$ и $\dim \text{Coker } D_1 = n_2$. Имеем $n \geq n_1 \geq n_2$.

Случай $n = n_1$ означает $\text{Im } D(t) = \{0\}$, $D(t) \equiv 0$. В этом случае уравнение (1) имеет вид $\dot{x} = B(t)x$, и его решение $x(t)$ не может, вообще говоря, удовлетворить условиям (2), так как $k > 0$. В этом случае исходная система не является полностью управляемой.

Случай $n_1 = n_2$ означает, что $D_1(t) \equiv 0$, и решение $x^1(t)$ уравнения $\dot{x}^1 = B_1(t)x^1$ (см. (10)) не может, вообще говоря, удовлетворить условиям (14), что противоречит полной управляемости исходной системы. Поэтому рассматриваются $n > n_1 > n_2 > \dots$.

Второй шаг использует тот факт, что уравнение (10) аналогично уравнению (1). С помощью $D_1(t)$ производится расщепление

$$\text{Im } D(t) = \text{Coim } D_1(t) \dot{+} \text{Ker } D_1(t), \quad \text{Coker } D(t) = \text{Im } D_1(t) \dot{+} \text{Coker } D_1(t),$$

и переход от уравнения (10) к уравнениям в подпространствах $\text{Im } D_1$ и $\text{Coker } D_1$ и т. д.

3.3. Следующие декомпозиции. Введем следующие обозначения (при условии дифференцируемости соответствующих проекторов и $n > n_1 > n_2 > \dots > n_i$):

$$\begin{aligned} B_0(t) &= B(t), \quad D_0(t) = D(t), \quad x^0(t) = x(t), \quad y^0(t) = u(t), \\ B_j(t) &= \left(Q(D_{j-1})B_{j-1}(t) + \dot{Q}(D_{j-1}) \right) Q(D_{j-1}), \\ D_j(t) &= \left(Q(D_{j-1})B_{j-1}(t) + \dot{Q}(D_{j-1}) \right) \left(I - Q(D_{j-1}) \right), \\ x^j(t) &= Q(D_{j-1})x^{j-1}(t), \quad y^j(t) = (I - Q(D_{j-1}))x^{j-1}(t), \end{aligned} \tag{15}$$

$Q(D_{j-1})$ и $P(D_{j-1})$ — проекторы на $\text{Coker } D_{j-1}(t)$ и $\text{Ker } D_{j-1}(t)$, соответственно, отвечающие разложениям

$$\begin{aligned} \text{Im } D_{j-2}(t) &= \text{Coim } D_{j-1}(t) \dot{+} \text{Ker } D_{j-1}(t), \\ \text{Coker } D_{j-2}(t) &= \text{Im } D_{j-1}(t) \dot{+} \text{Coker } D_{j-1}(t); \\ n_j &= \dim \text{Coker } D_{j-1}(t), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Неравенство $n > n_1 > \dots > n_j$ может иметь лишь два исхода: $n > n_1 > \dots > n_p = n_{p+1} \neq 0$ или $n > n_1 > \dots > n_p > n_{p+1} = 0$. В первом случае $D_p(t) \equiv 0$, во втором $Q(D_p) \equiv 0$. Поскольку система (1) полностью управляемая, то $Q(D_p) \equiv 0$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *При дифференцируемости $Q(D_j)$, $j = 0, 1, \dots$ существует такое $p \in \mathbb{N}$, что уравнение (1) эквивалентно системе*

$$u(t) = D^-(t)(\dot{x}(t) - B(t)x(t)) + z(t), \tag{16}$$

$$x(t) = x^1(t) + y^1(t), \tag{17}$$

$$y^j(t) = D_j^-(t)(\dot{x}^j(t) - B_j(t)x^j(t)) + z^j(t), \tag{18}$$

$$x^j(t) = x^{j+1}(t) + y^{j+1}(t), \tag{19}$$

$$\dot{x}^p(t) = B_p(t)x^p(t) + D_p(t)y^p(t), \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

для всех $z(t) \in \text{Ker } D(t)$, всех $z^j(t) = P(D_j)y^j(t) \in \text{Ker } D_j(t)$, $j = \overline{1, p-1}$, где $D_p(t)$ сюръективно.

Соотношения (16)–(20) получаются последовательным расщеплением, описанным выше, с использованием обозначений (15).

При выполнении условий леммы 3 имеем: $\text{Coker } D_{p-1} = \text{Im } D_p$ и

$$\mathbb{R}^n = \text{Im } D \dot{+} \text{Im } D_1 \dot{+} \dots \dot{+} \text{Im } D_{p-1} \dot{+} \text{Im } D_p.$$

При этом

$$\begin{aligned} x(t) &= x^1(t) + y^1(t) = x^2(t) + y^2(t) + y^1(t) = \dots = \\ &= \dots = x^p(t) + \sum_{j=1}^p y^j(t) = x^p(t) + \sum_{j=1}^p (I - P(D_j))x^j(t). \end{aligned} \quad (22)$$

В частном случае стационарной системы управления схожие разложения пространства \mathbb{R}^n и вектор-функции $x(t)$ получены другими методами в [8].

3.4. *О краевых условиях.* В (14) получены условия для $x^1(t)$ и $\dot{x}^1(t)$. Из (15) находим условия для $x^{j+1}(t)$:

$$x^{j+1}(t_i) = x_i^{j+1,0} \quad (23)$$

со значениями

$$x_i^{j+1,0} = Q(D_j)|_{t_i} x^j(t_i) = \prod_{s=1}^{j+1} Q(D_{j-s+1})|_{t_i} x_i^{00}, \quad i = \overline{0, k}.$$

Из соотношения

$$\dot{x}^{j+1}(t) = (\dot{Q}(D_j) + Q(D_j)B_j(t))x^j(t)$$

следует

$$\left. \frac{d^s x^{j+1}}{dt^s} \right|_{t_i} = x_i^{j+1s}, \quad (24)$$

где

$$x_i^{j+1s} = \left(\frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} (\dot{Q}(D_j) + Q(D_j)B_j(t))x^j(t) \right) \Big|_{t_i}, \quad i = \overline{0, k}, \quad s = \overline{1, j+1}.$$

Поскольку

$$z^{j+1}(t) = P(D_{j+1})y^{j+1}(t) = P(D_{j+1})(I - Q(D_j))x^j(t),$$

то

$$\left. \frac{d^s z^{j+1}(t)}{dt^s} \right|_{t_i} = z_i^{j+1s}, \quad s = \overline{0, j}, \quad (25)$$

при

$$z_i^{j+1s} = \frac{d^s}{dt^s} P(D_{j+1})(I - Q(D_j))x^j(t)|_{t_i}.$$

3.5. *Об эквивалентности задач.*

Теорема 1 (см. [3]). Пусть $Q(D_j)$ и $f_j(t)$ дифференцируемы на $[t_0, t_k]$, матрицы

$$\dot{Q}(D_j) + Q(D_j)B_j(t), \quad P(D_{j+1})(I - Q(D_j))$$

дифференцируемы j раз в точках t_i , $i = \overline{0, k}$. Тогда уравнение (1) с условиями (2) эквивалентно системе (16)–(20) с условиями (23), (24) и произвольными функциями $z_{j+1}(t) \in \text{Ker } D_{j+1}(t)$, удовлетворяющими условиям (25), $j = \overline{0, p-1}$.

3.6. *Построение псевдоуправления и псевдостояния последнего шага декомпозиции.* Выше осуществлен многошаговый переход от исходного уравнения (1) к уравнению (20):

$$\dot{x}^p = B_p(t)x^p(t) + D_p(t)y^p(t) \quad (26)$$

и от условий (2) к условиям, вытекающими из (23), (24):

$$\left. \frac{d^s x^p}{dt^s} \right|_{t_i} = x_i^{ps}, \quad s = \overline{0, p}, i = \overline{0, k}. \quad (27)$$

При этом $p \in \mathbb{N}$ таково, что $D_p(t)$ — сюръекция, т.е. $Q(D_p) \equiv 0$.

В качестве $x^p(t)$ можно взять линейную комбинацию линейно независимых функций $\varphi_j(t) \in \mathbb{R}^1$ с коэффициентами $\alpha_j \in \text{Coker } D_{p-1}$, удовлетворяющими условиям (27):

$$x^p(t) = \sum_{j=1}^{(p+1)(k+1)} \alpha_j \varphi_j(t), \quad \alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{j\tau}), \quad \tau = \dim \text{Im } D_p(t). \quad (28)$$

После подстановки этого выражения в условия (27) для каждого α_{jm} , $m = 1, 2, \dots, \tau$, образуется алгебраическая система с главным определителем Δ . Первые $p+1$ строк этого определителя есть строки определителя Вронского для функций $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, (p+1)(k+1)$, в точке $t = 0$. Следующие $p+1$ строк — строки определителя Вронского для тех же функций в точке t_1, \dots , последние $p+1$ строк — строки определителя Вронского для $\varphi_j(t)$ в точке t_k . Если такой определитель отличен от нуля, то коэффициенты α_j определяются однозначно. В частности, $\Delta \neq 0$, если $\varphi_j(t) = t^j$ (см. [6]).

Далее из соотношения (18) с $j = p$ находим $y^p(t)$:

$$y^p(t) = D_p^-(t) \left(\dot{x}^p - B_p(t)x^p(t) \right) + z^p(t) \quad (29)$$

для любого $z^p(t) \in \text{Ker } D_p(t)$, удовлетворяющего условиям (25) при $j = p-1$. Поскольку в качестве $x^p(t)$ и $z^p(t)$ можно выбрать сколь угодно гладкие вектор-функции, то гладкость $y^p(t)$ зависит от гладкости коэффициентов $D_p^-(t)$ и $B_p(t)$.

3.7. Построение функций состояния и управления задачи (1), (2). Функции $x^p(t)$ и $y^p(t)$, построенные в предыдущем пункте, в сумме образуют функцию $x^{p-1}(t)$ (формула (19) с $j = p-1$). Затем находим y^{p-1} по формуле (18) с $j = p-2$. Эти две последние функции образуют в сумме функцию x^{p-2} (формула (19) с $j = p-2$), и т. д. Формула (17) определяет функцию $x(t)$, а формула (16) — функцию $u(t)$. От функций $z^j(t) = P(D_j)y^j(t)$ требуется лишь достаточная гладкость и подчинение условиям (25).

При каскадном расщеплении исходного уравнения (1) на уравнения в подпространствах на каждом этапе требовалась дифференцируемость по t проекторов $Q(D_j)$, $j = \overline{0, p-1}$.

Для выведения многоточечных условий для функции $x^p(t)$ требуется существование производных в точках t_i , $i = \overline{0, k}$, от выражений $\dot{Q}(D_j) + Q(D_j)B_j(t)$ и $P(D_{j+1})(I - Q(D_j))$ до порядка j , $j = \overline{0, p-1}$.

Для возможности пользоваться формулами (18) требуется существования производных от функций $x^j(t)$, $j = \overline{0, p-1}$.

Если в исходной задаче управления требуется предъявить *непрерывную* управляющую функцию $u(t)$, то для этого требуется выполнение условий $Q(D_j) \in C^1([t_0, t_k] \rightarrow \text{Coker } D_j)$, $B_j(t) \in C^j([t_0, t_k] \rightarrow \text{Coker } D_{j-1})$ и $D_j^-(t) \in C^j([t_0, t_k] \rightarrow \text{Coim } D_j)$, $j = \overline{0, p-1}$.

Полученные результаты приводят к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть матрицы $B(t)$ и $D(t)$ обладают следующими свойствами:

- (1) $Q(D_j) \in C^1([t_0, t_k] \rightarrow \text{Coker } D_j)$;
- (2) $B_j(t) \in C^j([t_0, t_k] \rightarrow \text{Coker } D_{j-1})$, $D_j^-(t) \in C^j([t_0, t_k] \rightarrow \text{Coim } D_j)$;
- (3) матрицы $\dot{Q}(D_j) + Q(D_j)B_j(t)$ и $P(D_{j+1})(I - Q(D_j))$ дифференцируемы в точках t_i , $i = \overline{0, k}$, до порядка j ;
- (4) $f_j(t) \in C^j([t_0, t_k] \rightarrow \text{Coker } D_{j-1})$, $j = \overline{0, p}$.

Тогда существует непрерывная вектор-функция $u(t) \in \mathbb{R}^m$, при подстановке которой в систему (1), решение $x(t)$ полученной системы удовлетворяет условиям (2).

При подстановке найденной таким образом управляющей функции $u(t)$ в (1), решение $x(t)$ полученного уравнения совпадает с $x(t)$, найденным описанным выше способом. Действительно, решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = B(t)x(t) + D(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0^{00},$$

единственно в силу непрерывности $B(t)$ и $D(t)u(t)$, следовательно, решением является именно функция $x(t)$, построенная выше.

В случае постоянных матриц B, D условия 1–3 теоремы 2 выполняются автоматически.

4. О решении задачи сохранения траектории при возмущениях специального вида.

Применение леммы к уравнению (3) дает систему

$$Q(D)(I + H_1(t))\dot{x}_v(t) = Q(D)\left((B(t) + H_2(t))x_v(t) + H_3(t)u_v(t) + f(t) + h(t)\right), \quad (30)$$

$$(I + D^-(t)H_3(t))u_v(t) = D^-(t)\left((I + H_1(t))\dot{x}_v(t) - (B(t) + H_2(t))x_v(t) - f(t) - h(t)\right) + z_v(t), \quad (31)$$

для всех $z_v(t) \in \text{Ker } D(t)$. Пусть выполняются следующие условия:

- (i) $Q(D)H_i(t) \equiv 0, i = 1, \dots, 3; Q(D)h(t) \equiv 0, t \in [t_0, t_k];$
- (ii) $\|D^-(t)H_3(t)\| < 1.$

Условие (i) означает, что $H_i(t)$ действуют в $\text{Im } D(t)$ и $h(t) \in \text{Im } D(t)$ (возмущения специального вида). Тогда (30) приобретает вид уравнения

$$Q(D)\dot{x}_v(t) = Q(D)(B(t)x_v(t) + f(t)), \quad (32)$$

которое не отличается от уравнения (8) для $x(t)$. Условия (2) одинаковые для $x(t)$ и $x_v(t)$, поэтому из уравнений (8) и (32) и условий (2) можно найти одинаковые решения $x(t)$ и $x_v(t)$. Тогда из (31)

$$u_v(t) = (I + D^-(t)H_3(t))^{-1}\left(D^-(t)\left((I + H_1(t))\dot{x}(t) - (B(t) + H_2(t))x(t) - f(t) - h(t)\right) + z_v(t)\right) \quad (33)$$

для всех $z_v(t) \in \text{Ker } D(t)$. Добавки $z_v(t)$ и $z(t)$ в формулах (33) и (7) не влияют на величину вектор-функций состояний $x_v(t)$ и $x(t)$, поэтому при решении задач инвариантности их можно взять одинаковыми.

Использование свойства

$$(I + D^-(t)H_3(t))^{-1} = I - D^-(t)H_3(t)(I + D^-(t)H_3(t))^{-1}$$

и (7) приводят к результату

$$u_v(t) - u(t) = (I + D^-(t)H_3(t))^{-1}D^-(t)(H_1(t)\dot{x}(t) - H_2(t)x(t) - h(t)) - \\ - D^-(t)H_3(t)(I + D^-(t)H_3(t))^{-1}D^-(t)(\dot{x}(t) - B(t)x(t) - f(t)),$$

откуда видно, что если помехи $H_i(t)$ и $h(t)$ малы, то $u_v(t)$ мало отличается от $u(t)$, рассчитанного по формуле (7).

5. Примеры динамических систем с возмущениями специального вида. В предыдущем пункте рассмотрены возмущающие элементы в уравнении (3) со свойствами

$$Q(D)H_i(t) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, 3, \quad Q(D)h(t) \equiv 0, \quad t \in [t_0, t_k]$$

(свойства (i)). Такими свойствами могут обладать, например, возмущающие элементы в линейных математических моделях, полученных на основе законов динамики Ньютона. В этом случае $a(t) = \ddot{x}(t)$, где $a(t)$ — ускорение движения $x(t)$, возникающего в результате действия некоторой силы, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, n — размерность пространства, в котором решается задача. Уравнение, описывающее движение, проектируется на координатные оси и в полученных соотношениях делаются замены $\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$. В последние равенства, как правило, возмущающие факторы не включаются, в результате чего в полученной математической модели возмущающие параметры оказываются в тех же скалярных уравнениях, что и компоненты управляющих вектор-функций. Может оказаться, что $H_i(t)$ действуют в $\text{Im } D(t)$, $h(t) \in \text{Im } D(t)$, что иллюстрирует следующий пример.

Пример 1. Уравнение Мещерского (см. [7]), описывающее движение материальной точки массы $m = m(t)$, движущейся в вертикальной плоскости $\{\xi, \eta\}$ в поле силы тяжести под действием реактивной силы $f = f(t)$, возникающей в результате отделения от нее частиц с элементарной массой dm_1 , имеет вид

$$m\dot{v} = (s - v)\dot{m}_1 + p, \quad (34)$$

где $m = m(t) = m_0 + m_1(t)$; m_0 — постоянная часть массы точки; $m_1 = m_1(t)$ — реактивная масса точки; $v = v(t)$ — вектор абсолютной скорости точки; $s = s(t)$ — вектор скорости частицы; p — вес. Равенство (34) проектируется на горизонтальную и вертикальную координатные оси:

$$m\ddot{\xi} = (s - v)_\xi \dot{m}_1, \quad m\ddot{\eta} = (s - v)_\eta \dot{m}_1 + p, \quad (35)$$

$g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$ (в системе единиц СИ). В [7] введены обозначения $x_1 = \xi$, $x_2 = \dot{\xi}$, $x_3 = \eta$, $x_4 = \dot{\eta}$, $u_1 = (s - v)_\xi \dot{m}_1/m$, $u_2 = (s - v)_\eta \dot{m}_1/m$. Функции $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ — компоненты управляющей вектор-функции в невозмущенной системе, полученной с помощью введенных обозначений из уравнений (35):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u_1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = u_2 - g. \quad (36)$$

Пусть изменилась масса m_0 на величину $m_2 = \text{const}$, соответственно изменился вес на величину m_2g и абсолютная скорость точки на величину $v_1 = v_1(t) = (v_{1\xi}, v_{1\eta})$. Пусть, кроме того, на материальную точку действует дополнительная внешняя сила $\varphi = \varphi(t) = (\varphi_\xi, \varphi_\eta)$. Уравнение Мещерского принимает вид

$$m_v \dot{v}_v = (s - v_v) \dot{m}_1 + p_v + \varphi,$$

где $m_v = m + m_2$, $v_v = v + v_1$, $p_v = p + m_2g$. Оно проектируется на координатные оси:

$$m_v \ddot{\xi}_v = (s - v_v)_\xi \dot{m}_1 + \varphi_\xi, \quad m_v \ddot{\eta}_v = (s - v_v)_\eta \dot{m}_1 + p_v + \varphi_\eta. \quad (37)$$

Возмущенная система (37) в обозначениях

$$x_{v1} = \xi_v, \quad x_{v2} = \dot{\xi}_v, \quad x_{v3} = \eta_v, \quad x_{v4} = \dot{\eta}_v, \quad u_{v1} = (s - v_v)_\xi \frac{\dot{m}_1}{m_v}, \quad u_{v2} = (s - v_v)_\eta \frac{\dot{m}_1}{m_v}$$

имеет вид

$$\dot{x}_{v1} = x_{v2}, \quad \dot{x}_{v2} = u_{v1} + \frac{\varphi_\xi}{m_v}, \quad \dot{x}_{v3} = x_{v4}, \quad \dot{x}_{v4} = u_{v2} - g + \frac{\varphi_\eta}{m_v}, \quad (38)$$

с компонентами u_{v1} , u_{v2} управляющей вектор-функции.

Каскадный метод, описанный выше, решения многоточечных задач для систем (36) и (38) предполагает нахождение компонентов движения из первого и третьего уравнений систем (36) и (38) и заданных многоточечных условий (см. п. 3.1). При этом эти уравнения одинаковы для невозмущенной и возмущенной систем (36) и (38), следовательно, их решения $x(t)$ и $x_v(t)$ одинаковы при реализованном начальном состоянии $x(t_0) = x_v(t_0)$ в силу единственности решения начальных задач для соответствующих систем этих уравнений. Используя равенство $x_v(t) \equiv x(t)$, $t \in [t_0, t_k]$, и формулы для нахождения u_1 , u_2 , u_{v1} и u_{v2} из вторых и четвертых уравнений систем (36) и (38) получаем

$$u_{v1} = u_1 - \frac{\varphi_\xi}{m_v}, \quad u_{v2} = u_2 - \frac{\varphi_\eta}{m_v}. \quad (39)$$

Из соотношений (39) видно, что если $|\varphi|$ и m_2 малы, то и разности $u_{1v} - u_1$ и $u_{2v} - u_2$ малы, т.е. небольшое изменение управления позволяет сохранить программную траекторию движения материальной точки.

В [7] допущено, что абсолютная величина вектора $s - v$ задана и равна σ ; тогда

$$u_1 = \sigma \cos \alpha_\xi \frac{\dot{m}_1}{m}, \quad u_2 = \sigma \cos \alpha_\eta \frac{\dot{m}_1}{m},$$

где α_ξ , α_η — углы, составленные вектором $s - v$ с осями ξ и η . Можно, следуя [7], допустить, что абсолютная величина скорости вектора $s - v_v$ задана и равна δ , и ввести обозначение

$$u_{v1} = \delta \cdot \cos \beta_\xi \cdot \frac{\dot{m}_v}{m_v}, \quad u_{v2} = \delta \cdot \cos \beta_\eta \cdot \frac{\dot{m}_v}{m_v},$$

где β_ξ и β_η — углы между вектором $s - v - v_1$ и осями ξ и η ; ($\dot{m}_v = \dot{m} = \dot{m}_1$).

Соотношение (39) и указанные обозначения позволяют установить связь между направляющими косинусами:

$$\delta \cos \beta_\xi \frac{\dot{m}}{m_v} = \sigma \cos \alpha_\xi \frac{\dot{m}_1}{m} - \frac{\varphi_\xi}{m_v}, \quad \delta \cos \beta_\eta \frac{\dot{m}}{m_v} = \sigma \cos \alpha_\eta \frac{\dot{m}_1}{m} - \frac{\varphi_\eta}{m_v},$$

или

$$\cos \beta_\xi = \frac{\sigma m_v}{\delta m} \cos \alpha_\xi - \frac{\varphi_\xi}{\delta \dot{m}_1}, \quad \cos \beta_\eta = \frac{\sigma m_v}{\delta m} \cos \alpha_\eta - \frac{\varphi_\eta}{\delta \dot{m}_1}.$$

Свойством (i) обладают также возмущающие элементы в линеаризованных динамических системах управления движением спутника по экваториальной круговой орбите на постоянной высоте над поверхностью Земли (см. [1]); движением спутника связи, вращающегося за Луну вокруг точки равновесия (центра масс) системы Земля—Солнце—Луна для изучения обратной стороны Луны (см. [1]).

Однако не все системы управления, основанные на втором законе Ньютона, обладают свойством (i), что подтверждает следующий пример.

Пример 2. В [1] приведен пример системы, описывающей движение вертолета, для которого управляемой переменной является угол наклона θ , изменяемый за счет углового положения несущего винта δ :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = g\theta(t) - a_1\dot{\theta}(t) - b_1\dot{x}(t) + g\delta(t), \\ \ddot{\theta}(t) = -b_2\dot{\theta}(t) - a_2\dot{x}(t) + n\delta(t), \end{cases} \quad (40)$$

где x — перемещение вертолета в горизонтальном направлении. Для вертолета боевого назначения приведены значения параметров a_1 , a_2 , b_1 , b_2 . С введением обозначений $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$ система (40) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -b_1x_2 + gx_3 - a_1x_4 + g\delta, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -a_2x_2 - b_2x_4 + n\delta. \end{cases} \quad (41)$$

Если в системе (40) появляются возмущающие параметры, то они появляются в тех же уравнениях системы (41), где находится управляющая переменная δ_v . Если, например, на вертолет действует некоторая внешняя сила $h = h(t)$, то система (41) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_{v1} = x_{v2}, \\ \dot{x}_{v2} = -b_1x_{v2} + gx_{v3} - a_1x_{v4} + g\delta_v + h_1, \\ \dot{x}_{v3} = x_{v4}, \\ \dot{x}_{v4} = -a_2x_{v2} - b_2x_{v4} + n\delta_v + h_2. \end{cases} \quad (42)$$

Вектор $(0, h_1, 0, h_2)$ принадлежит $\text{Im } D$ лишь если $nh_1 = gh_2$, поскольку множество значений оператора $D = (0, g, 0, n)^T$ — это $\{(0, gc, 0, nc)\}$ для всех $c \in \mathbb{R}^1$.

6. О блокировке возмущений общего вида. Если возмущающие элементы в динамической системе не обладают свойством (i), то можно, если это позволяет динамическая система, поставить перед возмущающими элементами блокатор $D(t)$. Если размерность m управляющей вектор-функции меньше размерности n исходного пространства, то следует вектор $u_v(t)$ и матрицу $D(t)$ дополнить нулевыми компонентами так, чтобы $u_v(t) \in \mathbb{R}^n$ и $D(t) : n \times n$. В результате возмущенная система принимает вид

$$(I + D(t)H_1(t))\dot{x}_v(t) = (B(t) + D(t)H_2(t))x_v(t) + (D(t) + D(t)H_3(t))u_v(t) + f(t) + D(t)h(t). \quad (43)$$

Теперь $D(t)H_i(t)$, $i = 1, \dots, 3$, действуют в $\text{Im } D(t)$, $D(t)h(t) \in \text{Im } D(t)$. Пусть

$$(iii) \|H_3(t)\| < 1.$$

Система (43) эквивалентна в силу леммы и условия (iii) системе

$$\begin{aligned} u_v(t) = (I + H_3(t))^{-1}D^{-1}(t) \left((I + D(t)H_1(t))\dot{x}_v(t) - \right. \\ \left. - (B(t) + D(t)H_2(t))x_v(t) - f(t) - D(t)h(t) \right) + z_v(t) \quad \forall z_v(t) \in \text{Ker } D(t), \quad (44) \end{aligned}$$

$$Q(D)\dot{x}_v(t) = Q(D)(B(t)x_v(t) + f(t)). \quad (45)$$

Соотношение (44) есть формула для нахождения $u_v(t)$ как функции от $x_v(t)$, а $x_v(t)$ находится из уравнения (45) с помощью многоточечных условий. Уравнение (45) не отличается от уравнения (8) для нахождения $x(t)$, поэтому $x_v(t) \equiv x(t)$, $t \in [t_0, t_k]$.

На основании идентичности уравнений (8), (32) и (45) для нахождения $x(t)$ и $x_v(t)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 3. При определенной гладкости $B(t)$, $D(t)$, $f(t)$ задачи (1), (2) и eq3, (2) или (43), (2) с непрерывными помехами $H_i(t)$, $i = 1, \dots, 3$, $h(t)$, обладающими свойствами (i), (ii), или с помехами $DH_i(t)$, $Dh(t)$ со свойством (iii) разрешимы или неразрешимы одновременно.

Очевидно, что условия на гладкость $B(t)$, $D(t)$ и $f(t)$ для каскадной декомпозиции систем (3) и (43) те же, что и для декомпозиции системы (1) (см. теорему 2).

Замечание 3. Задача (1), (2) при достаточной гладкости $B(t)$, $D(t)$, $f(t)$ разрешима тогда и только тогда, когда система (1) является полностью управляемой (см. [2]).

Далее отметим, что $D^-(t)D(t) = (I - P(D))$, следовательно,

$$\begin{aligned} D^-(t)D(t)H_i(t) &= (I - P(D))H_i(t), \quad i = 1, \dots, 3; \\ D^-(t)D(t)h(t) &= (I - P(D))h(t), \end{aligned}$$

откуда следует, что «части» $P(D)H_i(t)$ и $P(D)h(t)$ в формуле (44) не участвуют, следовательно, система (43) робастна по отношению к этим «частям» возмущений.

Из (44) и того факта, что $x_v(t) \equiv x(t)$, следует

$$\begin{aligned} u_v(t) &= (I + H_3(t))^{-1} \left(D^-(t)(\dot{x}(t) - B(t)x(t) - f(t)) + \right. \\ &\quad \left. + (I - P(D))(H_1(t)\dot{x}(t) - H_2(t)x(t) - h(t)) \right) + z_v(t) \quad \forall z_v(t) \in \text{Ker } D(t). \end{aligned}$$

Как отмечено в п. 3, можно положить $z_v(t) \equiv z(t)$.

Отсюда и из (7) имеем

$$\begin{aligned} u_v(t) - u(t) &= (I + H_3(t))^{-1} (I - P(D))(H_1(t)\dot{x}(t) - H_2(t)x(t) - h(t)) - \\ &\quad - H_3(t)(I + H_3(t))^{-1} D^-(t)(\dot{x}(t) - B(t)x(t) - f(t)), \end{aligned}$$

откуда видно, что при достаточно малых возмущениях $H_i(t)$, $h(t)$ разность $u_v(t) - u(t)$ мала.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $B(t)$, $D(t)$, $f(t)$ достаточно гладкие и $G_i(t)$, $i = 1, \dots, 3$, $h(t)$ — непрерывны и удовлетворяют условиям (i), (ii) или (iii). При управляющем воздействии $u_v(t)$ формулы (33) или (44) состояния возмущенных систем (3) или (43) с условиями (2) не зависят от возмущений $G_i(t)$, $i = 1, \dots, 3$, $h(t)$ и равны состоянию невозмущенной системы (1) с условиями (2).

7. Пример гашения возмущений. Вернемся к примеру 2. Первый шаг каскадного расщепления системы (41) состоит в получении формулы для нахождения δ из второго (поскольку $g \neq 0$) уравнения в (41):

$$\delta = \frac{1}{g}(\dot{x}_2 + b_1x_2 - gx_3 + a_1x_4) \quad (46)$$

и условия корректности системы (41) вида (8). Для этого следует второе равенство в (41) умножить на n , четвертое на g и вычесть из одного полученного соотношения другое. Условие корректности имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad n\dot{x}_2 - g\dot{x}_4 = (ga_2 - nb_1)x_2 + ngx_3 + (gb_2 - na_1)x_4. \quad (47)$$

Решение системы (47) с $n = n(t)$ с условиями (2) описано в [4].

В системе (41) следует записать u_v и D , как рекомендовано в п. 5, например в виде

$$u_v = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Введение в (42) блокатора D перед возмущением $(0, h_1, 0, h_2)$ приводит систему (42) к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_{v1} = x_{v2}, \\ \dot{x}_{v2} = -b_1 x_{v2} + g x_{v3} - a_1 x_{v4} + g \delta_v + g h_1, \\ \dot{x}_{v3} = x_{v4}, \\ \dot{x}_{v4} = -a_2 x_{v2} - b_2 x_{v4} + n \delta_v + n h_1. \end{cases} \quad (48)$$

Из второго уравнения этой системы определяется δ_v :

$$\delta_v = \frac{1}{g} (\dot{x}_{v2} + b_1 x_{v2} - g x_{v3} + a_1 x_{v4} - g h_1). \quad (49)$$

Условие корректности системы (48) — это

$$\dot{x}_{v1} = x_{v2}, \quad \dot{x}_{v3} = x_{v4}, \quad n \dot{x}_{v2} - g \dot{x}_{v4} = (g a_2 - n b_1) x_{v2} + n g x_{v3} + (g b_2 - n a_1) x_{v4}.$$

Последняя система не отличается по виду от системы (47) для нахождения $x = x(t)$, и поскольку $x_v(t)$, как и $x(t)$, удовлетворяет условиям (2), то $x_v(t) \equiv x(t)$.

Разность $\delta_v(t) - \delta(t)$, как следует из (49) и (46):

$$\delta_v(t) - \delta(t) = -h_1(t)$$

мала, если мало $h_1(t)$, т.е. мало возмущение $(0, g h_1(t), 0, n h_1(t))$.

8. Заключение. Рассмотрена линейная нестационарная полностью управляемая динамическая система. При достаточной гладкости параметров системы существует управление, переводящее состояние системы из произвольного начального в произвольное конечное состояние через любое конечное количество контрольных точек. При появлении в системе внешних и внутренних помех, шумов, изменений параметров системы, т.е. возмущений, решена задача построения нового управления такого, что состояние динамической системы не реагирует на возмущения, остается тем же, что и при отсутствии возмущений (инвариантность относительно возмущений).

Возмущения предполагаются известными, управление программное. Рассматриваются возмущения специального вида, а именно, действующие в подпространство, являющееся множеством значений операторного коэффициента, стоящего в уравнении при управляющей вектор-функции. В этом случае приведены формулы для определения управляющих вектор-функций невозмущенной и возмущенной систем, для получения которых используется метод каскадной декомпозиции поставленных задач.

Сравнение управляющих вектор-функций для невозмущенной и возмущенной систем показывает, что при малых возмущениях достаточно немного изменить управление, чтобы состояние системы не реагировало на возмущения.

Если же возмущающие факторы не являются возмущениями специального вида, описанного выше, то их можно погасить с помощью того же операторного коэффициента, стоящего в уравнении при управляющей вектор-функции, поставив его в системе перед каждым возмущением, если это позволяет реальная динамическая система. В этом случае также построена управляющая вектор-функция возмущенной системы, производится сравнение управляющих вектор-функций для одинаковых состояний невозмущенной и возмущенной систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дорф Р., Бишон Р. Современные системы управления. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
2. Зубова С. П. Решение обратных задач для линейных динамических систем каскадным методом // Докл. РАН. — 2012. — 447, № 6. — С. 599–602.

3. *Зубова С. П.* Метод каскадной декомпозиции решения задач для псевдорегулярных уравнений/ Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-мат. наук — Воронеж, 2013.
4. *Зубова С. П., Раецкая Е. В.* Алгоритм решения линейных многоточечных задач управления методом каскадной декомпозиции// Автомат. телемех. — 2017. — 7. — С. 22–38.
5. *Зубова С. П., Раецкая Е. В., Ле Хай Чунг* О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления// Автомат. телемех. — 2008. — 11. — С. 41–47.
6. *Каган В. Ф.* Основания теории определителей. — Одесса, 1922.
7. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
8. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления: геометрический подход. — М.: Наука, 1980.

Зубова Светлана Петровна
Воронежский государственный университет
E-mail: spzubova@mail.ru

Раецкая Елена Владимировна
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова
E-mail: raetskaya@inbox.ru

Ле Хай Чунг
Данангский научно-педагогический университет, Дананг, Вьетнам
E-mail: lhtrung@ued.udn.vn



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 107–114
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-107-114

УДК 517.977

О ВНЕШНИХ ОЦЕНКАХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2021 г. И. В. ЗЫКОВ

Аннотация. В работе рассматривается задача построения внешних оценок множеств достижимости в виде множества уровня некоторой дифференцируемой функции Ляпунова–Беллмана для управляемой системы с интегральным ограничением на управление из \mathbb{L}_p , $p > 1$. При удачном ее выборе можно получить эллипсоидальные и прямоугольные оценки. Предлагаемые построения основаны на интегральных оценках, максимальном решении и принципе сравнения для систем дифференциальных неравенств. За счет использования времени в аргументах функции Ляпунова–Беллмана удастся получить более точные оценки. В линейном нестационарном случае последние могут совпадать с множеством достижимости. Приведены иллюстрирующие примеры для нелинейных систем.

Ключевые слова: множество достижимости, управляемая система, интегральное ограничение, интегральное неравенство, принцип сравнения, внешняя оценка.

EXTERNAL ESTIMATES OF REACHABLE SETS FOR CONTROL SYSTEMS WITH INTEGRAL CONSTRAINTS

© 2021 I. V. ZYKOV

ABSTRACT. In this paper, we consider the problem of constructing external estimates for reachable sets as level sets of some differentiable Lyapunov–Bellman function for a control system with an integral control constraint from \mathbb{L}_p , $p > 1$. For an appropriate choice of this function, ellipsoidal and rectangular estimates can be obtained. Constructions proposed are based on integral estimates, maximal solutions, and the comparison principle for systems of differential inequalities. Using time as an argument of the Lyapunov–Bellman function, we obtain more accurate estimates. In the linear nonstationary case, such estimates may coincide with the reachable set. Also we present illustrative examples for nonlinear systems.

Keywords and phrases: reachable set, control system, integral constraint, integral inequality, comparison principle, external estimate.

AMS Subject Classification: 49-XX

1. Введение. Статья посвящена построению внешних оценок для множеств достижимости управляемых систем. Аналитические построения последних часто не представляются возможными, а их численное построение требует больших вычислительных затрат. В отдельных задачах достаточно получить только оценки (внешние или внутренние) для множеств достижимости, которые менее трудоемки по сравнению с построением самих множеств. Для систем с геометрическими ограничениями на управление известны методы, основанные на оценках решений дифференциальных неравенств Гамильтона–Якоби и Ляпунова–Кротова (см., например, [1–3, 5, 7]). Методы данного типа основаны на вычислении производной вдоль траектории управляемой системы

от некоторой дифференцируемой функции (функции Ляпунова—Беллмана), максимизации величины производной на множестве управляющих параметров и применении принципа сравнения для дифференциальных уравнений.

В первой части данной работы предлагается способ построения внешних оценок для нелинейных управляемых систем с интегральным ограничением на управление из \mathbb{L}_p , $p > 1$ с помощью множества уровня функций Ляпунова—Беллмана, зависящих только от вектора состояния системы. Во второй части работы обсуждается возможность улучшения оценок путем добавления времени в число аргументов функции Ляпунова—Беллмана. Зависимость функции Ляпунова—Беллмана от времени позволяет получать более точные оценки. В линейно-квадратичном случае оценка может совпасть с множеством достижимости (при условии, что начальное состояние фиксировано).

Полученные ниже уравнения сравнения могут иметь не единственное решение. Это требует привлечения понятия максимального (верхнего) решения уравнения и теорем сравнения, использующих данное понятие.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где $F(t, x)$ — непрерывная функция на (t, x) -множестве D_o .

Определение 1. Решение $G(t) = G(t; t_0, x_0)$ дифференциального уравнения (1), выходящее из точки (t_0, x_0) области $D_o^* \subset D_o$ и определенное на некотором отрезке $[a, b]$, содержащем внутри точку t_0 , будем называть *верхним (максимальным)*, если для любого другого решения, выходящего из этой точки, неравенство $\varphi(t) \leq G(t)$ справедливо для всех $t \in [a, b]$, для которых решения $\varphi(t)$ и $G(t)$ определены одновременно.

Условия, обеспечивающие существование верхних решений (локальных и глобальных), содержатся в ряде известных теорем (см., например, [6, с. 7–8]), которые здесь приводить не будем.

Следующая теорема будет играть ключевую роль при построении функций Ляпунова—Беллмана.

Теорема 1 (теорема сравнения, [6, с. 10–11]). Пусть функция $F(t, z)$ непрерывна в открытой области D_o , содержащей точку (t_0, x_0) . Предположим, что начальная задача

$$\frac{dz}{dt} = F(t, z), \quad z(t_0) = z_0$$

имеет верхнее решение $z(t) = G(t)$, определенное в области $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$. Если $x(t)$ — такая непрерывная и дифференцируемая на $[t_0, t_0 + \delta]$ функция, что $(t, x(t)) \in D_o$ для всех $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ и

$$\frac{dx}{dt} \leq F(t, x(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta], \quad x(t_0) \leq z_0,$$

то справедлива оценка

$$x(t) \leq G(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

2. Внешние оценки и принцип сравнения. Рассмотрим автономную линейную по управлению систему вида

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t)) + f_2(x(t))u(t), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad x(0) = x^0, \quad (2)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление; $f_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ — непрерывные отображения.

Интегральное ограничение на управление имеет вид $u(\cdot) \in U$, где

$$U = \left\{ u(\cdot) \in \mathbb{L}_p : \int_0^{t_1} \|u(t)\|_r^p dt \leq \mu^p \right\}, \quad p > 1, \quad \mu > 0.$$

Определение 2. Множеством достижимости $K(t)$ системы (2) в момент $t \leq t_1$ будем называть совокупность всех концов траекторий $x(t)$ в \mathbb{R}^n , отвечающих управлениям из U .

Пусть известно множество $D \subset \mathbb{R}^n$, которое содержит точки всех допустимых траекторий, удовлетворяющих заданному начальному условию и интегральному ограничению на управление. Рассмотрим такую непрерывно дифференцируемую функцию $v(x)$ на D , что $v(x^0) = 0$.

Предположение 1. Пусть на множестве D выполняются неравенства

$$\nabla v(x)f_1(x) \leq -\alpha v(x), \quad \|\nabla v(x)f_2(x)\|_r^q \leq \beta^q v(x), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

где $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$ — заданные константы, а через $\nabla v(x)$ обозначен градиент функции v .

Заметим, что из второго условия (неравенства) следует неотрицательность $v(x)$.

Теорема 2. Пусть выполнено предположение 1. Тогда

$$K(t) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \leq \psi(t)\}, \quad t \in [0, t_1],$$

где $\psi(t) = p(\mu\beta/p)^p t^{p-1}$ в случае $\alpha = 0$. В случае $\alpha > 0$ можно положить

$$\psi(t) = \alpha \left(\frac{\mu\beta}{\alpha} \right)^p \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{p}t\right) \right)^{p-1},$$

либо (что дает более точную оценку)

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{\mu^2\beta^2}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right) \right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right), & \text{если } t < \frac{p \ln p}{\alpha}, \\ \frac{\alpha}{p-1} \left(\frac{\mu\beta}{\alpha} \right)^p \left(\frac{p-1}{p} \right)^p, & \text{если } t \geq \frac{p \ln p}{\alpha}. \end{cases}$$

Доказательство. Дифференцируя $v(x(t))$ вдоль допустимой траектории $x(t)$, получим

$$\dot{v}(x(t)) = \nabla v(x(t))(f_1(x(t)) + f_2(x(t))u(t)) = \nabla v(x(t))f_1(x(t)) + \nabla v(x(t))f_2(x(t))u(t),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} v(x(t)) &= \int_0^t \nabla v(x(s))f_1(x(s))ds + \int_0^t \nabla v(x(s))f_2(x(s))u(s)ds, \\ v(x(t)) &\leq -\alpha \int_0^t v(x(s))ds + \left(\int_0^t \|u(s)\|_r^p ds \right)^{1/p} \left(\int_0^t \|\nabla v(x(s))f_2(x(s))\|_r^q ds \right)^{1/q}, \\ v(x(t)) &\leq -\alpha \int_0^t v(x(s))ds + \mu\beta \left(\int_0^t v(x(s))ds \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (3)$$

Последняя оценка эквивалентна неравенству

$$\dot{f}(t) \leq -\alpha f(t) + \mu\beta \cdot f(t)^{1/q},$$

если обозначить

$$f(t) = \int_0^t v(x(s))ds.$$

Поставим в соответствие этому неравенству уравнение сравнения

$$\dot{w} = -\alpha w + \mu\beta \cdot w^{1/q} \quad (4)$$

с начальным условием $w(0) = f(0) = 0$.

Пусть $\alpha = 0$ в уравнении (4). Интегрируя, получим два решения:

$$w(t) = 0 \quad \text{и} \quad w(t)^{1/p} = \frac{\mu\beta}{p}t, \quad t \in [0, t_1].$$

Второе из них является, очевидно, максимальным. Из теоремы 1 получаем при $t \in [0, t_1]$ неравенство

$$f(t) \leq \bar{w}(t) = \left(\frac{\mu\beta}{p}\right)^p t^p,$$

где $\bar{w}(t)$ — верхнее решение (4). Так как из неравенства (3) следует, что

$$v(x(t)) \leq \mu\beta \cdot f(t)^{1/q} = \mu\beta \cdot f(t)^{(p-1)/p},$$

то в этом случае

$$v(x(t)) \leq \psi(t) = p \left(\frac{\mu\beta}{p}\right)^p t^{p-1}.$$

При $\alpha > 0$, используя, например, подстановку вида $y = w^{1/p}$ в уравнении сравнения (4), приходим к линейному уравнению

$$\dot{y} = -\frac{\alpha}{p}y + \frac{\mu\beta}{p}, \quad y(0) = w(0)^{1/p} = 0.$$

В силу линейности последнее имеет единственное решение, которое совпадает с верхним или максимальным решением. Поэтому максимальное решение выглядит следующим образом:

$$\bar{w}(t)^{1/q} = \left(\frac{\mu\beta}{\alpha}\right)^{p-1} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{p}t\right)\right)^{p-1}, \quad t \in [0, t_1].$$

Учитывая цепочку неравенств

$$v(x(t)) \leq -\alpha f(t) + \mu\beta \cdot f(t)^{1/q} \leq \mu\beta \cdot f(t)^{1/q},$$

по аналогии со случаем $\alpha = 0$ получаем, что

$$v(x(t)) \leq \psi(t) = \alpha \left(\frac{\mu\beta}{\alpha}\right)^p \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{p}t\right)\right)^{p-1}.$$

Последнюю оценку можно улучшить, если в качестве $\psi(t)$ взять

$$\psi(t) = \max_{0 \leq f \leq \bar{w}(t)} \{-\alpha f + \mu\beta f^{1/q}\}.$$

Вычисляя максимум, получим, что

$$\psi(t) = \frac{\alpha}{p-1} \left(\frac{\mu\beta}{\alpha}\right)^p \left(\frac{p-1}{p}\right)^p, \quad p > 1,$$

если

$$\left(\frac{\mu\beta}{\alpha}\right)^p \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \leq \bar{w}(t),$$

что эквивалентно следующим неравенствам:

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^p \leq \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{p}t\right)\right)^p, \quad \exp\left(-\frac{\alpha}{p}t\right) \leq \frac{1}{p}, \quad t \geq \frac{p \ln p}{\alpha}. \quad (5)$$

В противном случае

$$\psi(t) = -\alpha \bar{w}(t) + \mu\beta \bar{w}(t)^{1-\frac{1}{p}} = \frac{\mu^2 \beta^2}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{p}t\right)\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)$$

(не выполняется (5)). Таким образом, для любого $t \leq t_1$ мы имеем оценку сверху для множества достижимости вида

$$K(t) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \leq \psi(t)\},$$

где функция $\psi(t)$ определяется одной из приведенных выше формул. \square

3. Нестационарный случай. Если рассматривать функции Ляпунова—Беллмана, зависящие от t, x , то можно получить более точные оценки даже в случае стационарных систем. Проиллюстрируем это утверждение на примере линейных систем с интегральными ограничениями.

Вначале рассмотрим линейную систему с интегральным ограничением на управление и фиксированным начальным состоянием

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x^0, \quad (6)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$; $A(t)$, $B(t)$ интегрируемые на $[t_0, t_1]$ матричные функции. Ограничение на управление определено интегральным квадратичным неравенством $u(\cdot) \in U$, где

$$U = \left\{ u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|_r^2 dt \leq \mu^2 \right\}, \quad \mu > 0. \quad (7)$$

Пусть $X(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$, где $\Phi(t)$ — матрица Коши, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = I.$$

Решение (6) имеет вид

$$x(t) = \hat{x}(t) + \int_{t_0}^t X(t, s)B(s)u(s)ds,$$

где

$$\hat{x}(t) = X(t, t_0)x^0. \quad (8)$$

Симметрическую матрицу

$$W(t) = \int_{t_0}^t X(t, s)B(s)B^\top(s)X^\top(t, s)ds$$

будем называть *грамианом управляемости* системы (6). Данная матрица удовлетворяет следующему матричному дифференциальному уравнению:

$$\dot{W}(t) = A(t)W(t) + W(t)A^\top(t) + B(t)B^\top(t), \quad W(t_0) = 0. \quad (9)$$

Как известно (см., например, [9]), система (6) вполне управляема на $[t_0, t]$, $t \leq t_1$, тогда и только тогда, когда матрица $W(t)$ положительно определена. В этом случае $K(t)$ представляет собой невырожденный эллипсоид

$$K(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x - \hat{x})^\top W^{-1}(t)(x - \hat{x}) \leq \mu^2 \right\}, \quad t > t_0.$$

Непрерывно дифференцируемую по своим аргументам функцию $v: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ будем искать в виде положительно определенной квадратичной формы

$$v(t, x - \hat{x}) = (x - \hat{x})^\top Q(t)(x - \hat{x}) \geq 0, \quad Q^\top = Q.$$

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение Риккати для матрицы $Q(t)$:

$$\dot{Q}(t) + Q(t)A(t) + A^\top(t)Q(t) = -Q(t)B(t)B^\top(t)Q(t). \quad (10)$$

Теорема 3. Пусть существует положительно определенное на $[t_0, t_1]$ решение уравнения (10). Тогда для множества достижимости системы (6) справедлива оценка

$$K(t_1) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : v(t_1, x) = (x - \hat{x}(t_1))^\top Q(t_1)(x - \hat{x}(t_1)) \leq \mu^2 \right\}, \quad t_1 > t_0.$$

Доказательство. Продифференцируем v вдоль траекторий управляемой системы (6):

$$\begin{aligned} \dot{v}_t &= (\dot{x} - \dot{\hat{x}})^\top Q(t)(x - \hat{x}) + (x - \hat{x})^\top \dot{Q}(t)(x - \hat{x}) + (x - \hat{x})^\top Q(t)(\dot{x} - \dot{\hat{x}}) = \\ &= \left((x - \hat{x})^\top A^\top(t) + u^\top B^\top(t) \right) Q(t)(x - \hat{x}) + (x - \hat{x})^\top \dot{Q}(t)(x - \hat{x}) + \\ &\quad + (x - \hat{x})^\top Q(t) (A(t)(x - \hat{x}) + B(t)u) = \\ &= (x - \hat{x})^\top \left(\dot{Q}(t) + Q(t)A(t) + A^\top(t)Q(t) \right) (x - \hat{x}) + 2(x - \hat{x})^\top Q(t)B(t)u. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая (10), равенство (11) можно преобразовать к виду

$$\dot{v}_t = -(x - \hat{x})^\top Q(t)B(t)B^\top(t)Q(t)(x - \hat{x}) + 2(x - \hat{x})^\top Q(t)B(t)u = -f(t)f^\top(t) + 2f(t)u,$$

где $f(t) = (x - \hat{x})^\top Q(t)B(t)$. Отсюда следует неравенство для функции v :

$$\begin{aligned} v(t, x - \hat{x}) &= - \int_{t_0}^t \|f(s)\|_r^2 ds + 2 \int_{t_0}^t f(s)u(s) ds \leq \\ &\leq - \int_{t_0}^t \|f(s)\|_r^2 ds + 2\mu \left(\int_{t_0}^t \|f(s)\|_r^2 ds \right)^{1/2} = -\gamma^2(t) + 2\mu\gamma(t) = \mu^2 - (\gamma(t) - \mu)^2 \leq \mu^2. \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\gamma(t) = \left(\int_{t_0}^t \|f(s)\|_r^2 ds \right)^{1/2}.$$

Таким образом, имеем оценку сверху для множества достижимости вида

$$K(t_1) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : v(t_1, x) = (x - \hat{x}(t_1))^\top Q(t_1)(x - \hat{x}(t_1)) \leq \mu^2 \right\}, \quad t_1 > t_0. \quad (13)$$

Теорема доказана. \square

Замечание 1. Дифференцируя равенство $W^{-1}(t)W(t) = I$, с учетом (9) получаем

$$\begin{aligned} \dot{W}^{-1}(t)W(t) + W^{-1}(t)\dot{W}(t) &= 0, \\ \dot{W}^{-1}(t) + W^{-1}(t)A(t) + A^\top(t)W^{-1}(t) &= -W^{-1}(t)B(t)B^\top(t)W^{-1}(t), \quad t > t_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, $W^{-1}(t)$ является решением уравнения Риккати (10). Если в качестве $Q(t)$ взять $W^{-1}(t)$, то оценка (13) совпадает с множеством достижимости. Однако заметим, что $W(t_0) = 0$ и, следовательно, $W^{-1}(t)$ не определена при $t = t_0$. Кроме того, обращение $W(t)$ возможно, если система вполне управляема на любом отрезке $[t_0, t]$. Последнее условие выполняется по умолчанию для стационарных систем в предположении полной управляемости.

Расширим результат данного раздела на случай, когда начальный вектор состояния принадлежит заданному множеству. Рассмотрим управляемую систему (6) при условии, что $x^0 \in X^0$, где X^0 — компактное множество из \mathbb{R}^n , а интегральное ограничение на управляющее воздействие имеет такой же вид (7).

Непрерывно дифференцируемую по своим аргументам функцию $V: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ будем искать в виде $V(t, y) = v(t, y) - v(t_0, y(t_0))$, где $v(t, y) = y^\top Q(t)y$, $y = x - \hat{x}$, $Q^\top = Q \geq 0$. Здесь, в отличие от (8), центр

$$\hat{x}(t) = X(t, t_0)\bar{x}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (15)$$

В этом случае в силу (6) и (15)

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad y(t_0) = x^0 - \bar{x}.$$

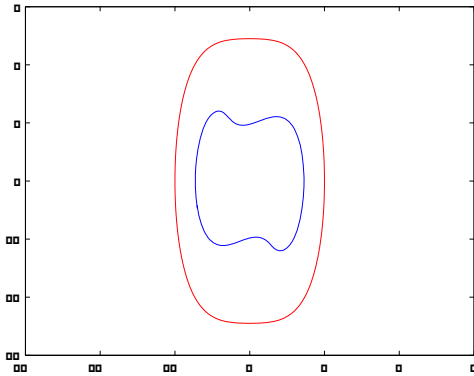


Рис. 1. Граница множества достижимости системы (16) и ее оценка

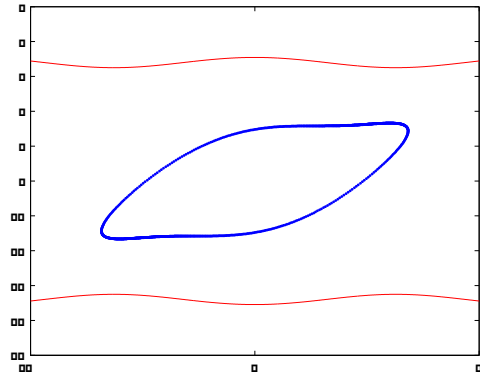


Рис. 2. Граница множества достижимости системы (17) и ее оценка

Далее, следуя схеме доказательства теоремы 3, можно получить внешнюю оценку для множества достижимости

$$K(t_1) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : v(t_1, x) = (x - \hat{x}(t_1))^T Q(t_1)(x - \hat{x}(t_1)) \leq \mu^2 + \min_{\bar{x} \in \mathbb{R}^n} \max_{x^0 \in X^0} v(t_0, x^0 - \bar{x}) \right\}, \quad t_1 > t_0.$$

4. Примеры.

Пример 1 (осциллятор Дуффинга). Рассмотрим осциллятор Дуффинга, описываемый уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 10x_1^3 + u, \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, 3/2], \quad (16)$$

с интегральным ограничением на управление

$$\int_0^{3/2} u^2(t) dt \leq 2.$$

За функцию $v(x)$ можно принять

$$v(x_1, x_2) = \frac{5}{2}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2;$$

она удовлетворяет предположению 1 с параметрами $\alpha = 0$, $\beta^2 = 2$ и $\mu^2 = 2$. В этом случае

$$K(3/2) \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : v(x_1, x_2) \leq \psi(3/2) = 3\}.$$

Результат представлен на рис. 1, где синим цветом обозначена граница множества достижимости (полученная при помощи алгоритма из [8]), а красным — его оценка.

Пример 2 (математический маятник). Рассмотрим математический маятник с ограничением на энергию управления:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{2} \sin x_1 + u, \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, \pi], \quad (17)$$

с интегральным ограничением на управление

$$\int_0^{\pi} u^2(t) dt \leq 2.$$

Функция $v(x)$ может иметь вид

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2;$$

эта функция удовлетворяет предположению 1 с параметрами $\alpha = 0$, $\beta^2 = 2$ и $\mu^2 = 2$. В этом случае

$$K(\pi) \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : v(x_1, x_2) \leq \psi(\pi) = 2\pi\}.$$

Результат численного моделирования представлен на рис. 2. В данном случае видно, что оценка (красный цвет) в виде бесконечной волнистой полосы не дает информации по координате x_1 для границы множества достижимости (синий цвет).

Данную проблему можно решить, используя первое уравнение из (17) и полученную оценку:

$$|x_1(t)| \leq \int_0^t |x_2(s)| ds \leq \left(\int_0^t 1 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t x_2^2(s) ds \right)^{1/2} = \sqrt{t} \left(\int_0^t x_2^2(s) ds \right)^{1/2},$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos x_1(t)) + \frac{1}{2}x_2^2(t) \leq \psi(t) = 2t, \quad x_2^2(t) \leq 4t - 1 + \cos x_1(t) \leq 4t.$$

Отсюда заключаем, что $|x_1(t)| \leq \sqrt{2}t^{3/2}$, $t \in [0, \pi]$. Граница множества достижимости, изображенная на рис. 2 синим цветом, построена с помощью алгоритма из [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. — М.: Физматлит, 1997.
2. Гусев М. И. О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2011. — 17, № 1. — С. 60–69.
3. Дыхта В. А. Неравенство Ляпунова—Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2006. — 110. — С. 76–108.
4. Зыков И. В. О задаче достижимости для нелинейной управляемой системы с интегральными ограничениями // CEUR-WS Proc. — 2017. — 1894. — С. 88–97.
5. Куржанский А. Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона—Якоби в теории управления // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2006. — 12, № 1. — С. 173–183.
6. Мартынюк А. А., Лакшмикантам В., Лиля С. Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. — Киев: Наукова думка, 1989.
7. Никольский М. С. Об оценивании множества достижимости для некоторых управляемых объектов // Мат. Междунар. конф., посв. 110-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. — М., 2018. — С. 194–196.
8. Gusev M. I., Zykov I. V. On extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control // IFAC-PapersOnLine. — 2017. — 50. — P. 4082–4087.
9. Lee E. B., Marcus L. Foundations of Optimal Control Theory. — New York: Wiley, 1967.

Зыков Игорь Владимирович

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского

Уральского отделения РАН, Екатеринбург;

Уральский федеральный университет

им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург

E-mail: zykoviustu@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 115–121
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-115-121

УДК 517.95

ТРЕХМОДОВЫЕ ПРОГИБЫ СЖАТОЙ БАЛКИ НА ДВОЙНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ВЛАСОВА—ЛЕОНТЬЕВА

© 2021 г. И. В. КОЛЕСНИКОВА

Аннотация. В работе представлен алгоритм приближенного вычисления и анализа закритических прогибов продольно сжатой упругой балки на двойном упругом основании в модифицированной модели Власова—Леонтьева. Процедура основана на применении вариационного метода Пуанкаре—Ляпунова—Шмидта, позволяющего сводить анализ закритических деформаций балки к анализу критических точек ключевой функции на конечномерном пространстве ключевых переменных. Метод Ляпунова—Шмидта позволяет вычислять закритические прогибы балки, определять устойчивость бифурцирующих состояний и анализировать строение каустики (дискриминантного множества) в пространстве управляющих параметров. Основная идея заключена в сведении (редукции) задачи изучения изгибов балки к дискриминантному анализу ветвления критических точек полинома от трех переменных (главной части ключевой функции Ляпунова—Шмидта).

Ключевые слова: модель Власова—Леонтьева, обобщенные краевые условия Дирихле, функционал энергии, мода прогиба, ключевая функция Ляпунова—Шмидта, ветвь прогиба, каустика.

THREE-MODE BENDINGS OF A COMPRESSED BEAM ON A DOUBLE ELASTIC FOUNDATION IN THE MODIFIED VLASOV—LEONTYEV MODEL

© 2021 I. V. KOLESNIKOVA

ABSTRACT. In this paper, we present an algorithm for approximate calculation and analysis of supercritical bendings of a longitudinally compressed, elastic beam on a double elastic foundation in the modified Vlasov–Leontiev model. The procedure is based on the Poincaré–Lyapunov–Schmidt variational method, which allows one to reduce the analysis of supercritical deformations of a beam to the analysis of critical points of the key function on the finite-dimensional space of key variables. The Lyapunov–Schmidt method allows one to calculate supercritical bendings of the beam, to determine the stability of bifurcating states, and to analyze the structure of the caustic (discriminant set) in the space of control parameters. The basic idea is the reduction of the problem on bendings of a beam to the discriminant analysis of branching of critical points of a polynomial in three variables (the principal part of the Lyapunov–Schmidt key function).

Keywords and phrases: Vlasov–Leontyev model, generalized Dirichlet boundary conditions, energy functional, bending mode, Lyapunov–Schmidt key function, branch of bending, caustic.

AMS Subject Classification: 35L05

1. Введение. Изначально модифицированная модель Власова—Леонтьева была предложена в [3], где она представлена в виде обыкновенного дифференциального уравнения шестого порядка

$$-\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} - a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w = p \quad (1)$$

при обобщенных краевых условиях Дирихле

$$\frac{d^4 w}{dx^4}(0) = \frac{d^4 w}{dx^4}(1) = \frac{d^2 w}{dx^2}(0) = \frac{d^2 w}{dx^2}(1) = w(1) = w(0) = 0, \quad (2)$$

$w = w(x)$ — функция прогиба средней линии балки, a_1, a_2, a_3 — положительные механические константы, $p = p(x)$ — функциональный параметр внешней нагрузки, x — (промасштабированный) параметр длины средней линии балки. Уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве H^6 соболевских функций класса $W_2^6[0, 1]$, удовлетворяющих краевым условиям (2), что объясняется положительной определенностью симметричного оператора

$$-\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} - a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w$$

(при выполнении краевых условий (2)).

Уравнение (1) является обобщением известного уравнения Фусса—Винклера—Циммермана

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w = p$$

из строительной механики (см. [3]). Рассмотренная ниже модификация предполагает наличие продольного сжатия балки, приводящего к смене знаков перед коэффициентами в модельном уравнении, что дает эффект трехмодового вырождения в нулевом состоянии:

$$\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} + a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w - w^3 = p. \quad (3)$$

Наличие нелинейного слагаемого позволяет «контролировать» рост амплитуд посткритических прогибов балки (см. [1]).

Основой примененной ниже методики исследования закритических прогибов служит вариационная версия метода Ляпунова—Шмидта (см. [7, 11, 15]), позволяющая не только вычислять прогибы, но и определять их устойчивость, проводить построение каустики (дискриминантного множества) в пространстве управляющих параметров $a = (a_1, a_2, a_3)$. Центральная конструктивная идея — сведение (редукция) задачи об изучении бифуркации изгибов к анализу ветвления критических точек полинома от шести переменных, являющегося главной частью ключевой функции

$$W(\xi, \delta, q) = \inf_{w: \langle w, e_k \rangle = \xi_k} V(w, a, q) = V\left(\sum_{i=1}^3 \xi_i e_i + \Phi(\xi)\right), \quad (4)$$

где

$$V(\xi, \delta, q) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)^2 - a_3 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + a_2 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 - a_1 w^2 \right) + \frac{1}{4} w^4 + pw \right) \quad (5)$$

— потенциал уравнения (3), e_1, e_2, e_3 — моды прогиба в нуле при соответствующем значении векторного параметра $a = \bar{a}$, $\delta := a - \bar{a}$. Уравнение (3) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала (5).

2. Построение ключевой функции при $p = 0$. Колебания и волновые движения упругой балки на упругом основании изучали Ю. А. Митропольский и Б. И. Мосеенков (см. [12]), J. M. T. Thompson и G. W. Hunt (см. [16, 17]), Б. С. Бардин и С. Д. Фурга (см. [2]) и др.

Обобщенная нелинейная (промасштабированная) модель закритических прогибов однородной балки на двойном упругом основании представлена уравнением (3), в котором $w = w(x)$ — прогиб балки (поле смещений точек средней линии упругой балки, расположенной вдоль оси x).

Изучение закритических прогибов состоит в отыскании решений краевой задачи (3)–(2) при различных значениях параметров. Данная краевая задача может допускать трехмерное вырождение, порождающее трехмодовые бифуркации с разнообразными геометрическими и физическими эффектами.

Решение этой задачи будем осуществлять посредством вариационной версии метода конечномерной редукции Ляпунова–Шмидта (см. [7, 11, 15], сводящей анализ краевой задачи к описанию ветвления экстремалей параметрического семейства полиномов от трех переменных — главной части ключевой функции (4).

Будем далее рассматривать пример, в котором тройка мод бифуркации задана набором функций

$$e_1 = \sqrt{2} \sin(\pi x), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(2\pi x), \quad e_3 = \sqrt{2} \sin(3\pi x) —$$

базисом ядра второго дифференциала, соответствующим (критическому) значению управляющего параметра

$$a = \bar{a} := (36\pi^6, 49\pi^4, 14\pi^2).$$

После пересечения точкой $a = (a_1, a_2, a_3)$ произвольной характеристической плоскости (в \mathbb{R}^3) нулевая функция теряет стабильность и вблизи нее рождаются ненулевые стабильные состояния. Характеристические плоскости в общем случае задаются посредством линейаризованного уравнения

$$\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} + a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w = 0 \quad (6)$$

(при краевых условиях (2)). Характеристические плоскости состоят из тех и только тех точек a , при которых уравнение (6) имеет ненулевое решение. Поиск нетривиальных решений линейаризованного уравнения осуществляется через характеристическое уравнение

$$-\lambda^6 + a_3 \lambda^4 - a_2 \lambda^2 + a_1 = 0.$$

Учет краевых условий с необходимостью приводит к соотношениям $\lambda^2 = n^2 \pi^2$, $n = 1, 2, \dots$, из которого получаем набор равенств:

$$a_1 - a_2 n^2 \pi^2 + a_3 n^4 \pi^4 - n^6 \pi^6 = 0,$$

задающих характеристические плоскости $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$. Поверхность L , огибающая семейства характеристических плоскостей, выделяет область в \mathbb{R}^3 , состоящей из точек, для которых соответствующий функционал действия имеет в нуле единственную точку минимума. При пересечении точкой a поверхности L (в \mathbb{R}^3) происходит бифуркация рождения нетривиальных стабильных состояний. Поверхность L является кусочно линейной, гранями которой служат плоские многоугольники, ограниченные линиями попарных пересечений характеристических плоскостей. Эти линии также будем называть характеристическими. Общие точки для отдельных пар характеристических линий будем называть характеристическими точками. Интерес к последним вызван тем, что они дают эффект трехмодового вырождения. Точки характеристических линий, отличные от характеристических точек, дают эффект двухмодового вырождения. Пересечение поверхности L по внутренней точке грани, принадлежащей L_n , приводит к одномерной бифуркации с модой $e_n = \sqrt{2} \sin(\pi n x)$. Пересечение L по точке излома, принадлежащей линии (характеристической) пересечения плоскостей L_n, L_m приводит к двумерной бифуркации с модами e_n, e_m . Соответственно, пересечение L по характеристической точке, являющейся точкой пересечения плоскостей L_n, L_m, L_l , приводит к трехмерной бифуркации с модами e_n, e_m, e_l . Три характеристические плоскости L_m, L_n, L_l , отвечающие произвольной тройке попарно различных натуральных чисел m, n, l , пересекаются по единственной точке

$$(a_1, a_2, a_3) = (n^2 m^2 l^2 \pi^6, (n^2 m^2 + m^2 l^2 + n^2 l^2) \pi^4, (n^2 + m^2 + l^2) \pi^2). \quad (7)$$

Доказательство этого факта вытекает из того, что характеристическая точка определяется системой уравнений

$$\begin{cases} a_1 - n^2\pi^2 a_1 + n^4\pi^4 a_3 - n^6\pi^6 = 0, \\ a_1 - m^2\pi^2 a_2 + m^4\pi^4 a_3 - m^6\pi^6 = 0, \\ a_1 - l^2\pi^2 a_2 + l^4\pi^4 a_3 - l^6\pi^6 = 0. \end{cases}$$

Здесь l, m, n — натуральные попарно различные числа. Этой системе уравнений отвечает единственное решение (7).

В частном случае $l = 1, m = 2, n = 3$, получаем ранее выбранный пример. В случае других наборов мод исследования проводятся аналогичным образом.

3. Построение главной части ключевой функции в случае 3D-вырождения. Анализ бифуркационных эффектов, происходящих при локализации управляющих параметров вблизи точки $\bar{a} = (1, 2, 3)$: $a_k = \bar{a}_k + \delta_k, k = 1, 2, 3$, можно осуществить посредством вариационной версии редукции Ляпунова—Шмидта (см. [7]) к анализу ключевой функции (4) от трех ключевых переменных, которую запишем в виде

$$W(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, e_k \rangle = \xi_k, k=1,2,3} V(w, \bar{a} + \delta), \quad (8)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top, \delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^\top$. Известно, что в рассматриваемых условиях функция $W(\xi, \delta)$ является гладкой. Эта функция наследует все аналитические и топологические свойства V на E (см. [7]). В частности, при достаточно малых δ существует взаимно однозначное соответствие между критическими точками V и W , сохраняющее типы точек (кратности, значения индекса Морса и т. п.).

Так как функционал V четен, т.е. $V(-w, a) = V(w, a)$, и симметричен относительно инволюции $I_1: w(x) \mapsto w(1-x)$, то V инвариантен относительно действия группы \mathbb{Z}_2^2 , заданного парой инволюций I_1, I_2 , где $I_2 = -I_1$. Очевидно, что выполняются соотношения

$$I_1(e_1) = e_1, \quad I_1(e_2) = -e_2, \quad I_1(e_3) = e_3.$$

Следовательно,

$$W(-\xi_1, \xi_2, -\xi_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3) = W(\xi_1, -\xi_2, \xi_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3) = W(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3).$$

Учитывая эту симметрию, можно записать следующее асимптотическое представление ключевой функции:

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (9)$$

где

$$U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3, \delta) \quad (10)$$

— ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2, e_3 . Непосредственные вычисления приводят к следующему утверждению.

Теорема 1. *Для ключевой функции (8) имеет место асимптотическое представление*

$$\begin{aligned} W(\xi, \delta) = & \frac{1}{2}(\bar{\delta}_1 \xi_1^2 + \bar{\delta}_2 \xi_2^2 + \bar{\delta}_3 \xi_3^2) + \frac{3}{8}(\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4) + \\ & + \frac{3}{2} \left(\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_3^2 + \xi_2^2 \xi_3^2 + \xi_1 \xi_2^2 \xi_3 - \frac{1}{3} \xi_1^3 \xi_3 \right) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \end{aligned}$$

где

$$\bar{\delta}_1 = (-\delta_1 + \delta_2 - \delta_3)\pi^2, \quad \bar{\delta}_2 = (-\delta_1 + 4\delta_2 - 16\delta_3)\pi^4, \quad \bar{\delta}_3 = (-\delta_1 + 9\delta_2 - 81\delta_3)\pi^6.$$

Доказательство. Доказательство вытекает из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
W(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3, \delta) &= \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\left(- \left(\frac{d^3(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx^3} \right)^2 + \right. \right. \\
&+ (14 + \delta_3) \left(\frac{d^2(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx^2} \right)^2 - (49 + \delta_2) \left(\frac{d(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx} \right)^2 + \\
&\left. \left. + (36 + \delta_1)(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)^2 + \frac{(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)^4}{4} \right) dx, \\
\int_0^1 \left(\frac{d^3(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx^3} \right)^2 &= (\xi_1^2 + 64\xi_2^2 + 729\xi_3^2)\pi^6, \\
\int_0^1 \left(\frac{d^2(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx^2} \right)^2 &= (\xi_1^2 + 16\xi_2^2 + 81\xi_3^2)\pi^4, \\
\int_0^1 \left(\frac{d(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx} \right)^2 &= (\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + 9\xi_3^2)\pi^2, \\
\int_0^1 (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)^2 dx &= \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \\
\int_0^1 (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)^4 dx &= \frac{3}{2}(\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4) + 6(\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_3^2 + \xi_2^2 \xi_3^2 + \xi_1 \xi_2^2 \xi_3) - 2\xi_1^3 \xi_3.
\end{aligned}$$

Подставив полученные значения для интегралов в $W(\xi, \delta)$, получим искомое выражение. \square

Замечание 1. «Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $W(\xi, \delta)$ полностью определяются ее главной частью $U(\xi, \delta)$ (см. [7]).

Замечание 2. В случае ненулевого, но малого функционального параметра p изложенная схема немного усложняется за счет появления в уравнениях и аналитических выкладках дополнительных слагаемых. Можно ограничиться рассмотрением разложения по основным модам: $p(x) = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3$. Членами разложения Фурье по остальным модам можно пренебречь, так как они вносят малый вклад в окончательное асимптотическое представление решений (по сравнению с параметрами δ_j, η_k).

4. Анализ ключевой функции посредством вторичной редукции (к функции двух переменных). Так как функция (10) обладает симметрией относительно группы \mathbb{Z}_2^2 , заданного парой инволюций I_1, I_2 , где $I_2 = -I_1, I_1: w(x) \mapsto w(1-x)$, то эта функция четна по переменной $\xi_2: U(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \delta) = U(\xi_1, -\xi_2, \xi_3, \delta)$. Следовательно, она может быть представлена в виде

$$U(\xi, \delta) = \frac{3}{8}\xi_2^4 + \frac{p}{2}\xi_2^2 + q,$$

где

$$p = \bar{\delta}_2 + 3(\xi_1^2 + \xi_1^2 + \xi_1 \xi_3), \quad q = \frac{1}{2}(\bar{\delta}_1 \xi_1^2 + \bar{\delta}_3 \xi_3^2) + \frac{3}{8}(\xi_1^4 + \xi_3^4 + 4\xi_1^2 \xi_3^2) - \frac{1}{2}\xi_1^3 \xi_3.$$

Такое представление функции U дает возможность вторичной редукции: дальнейшего сокращения числа переменных до двух (редукции к функции двух переменных). При этом выделяются два случая: $p \geq 0$ и $p \leq 0$. При $\bar{\delta}_2 \leq 0$ эти соотношения выделяют в плоскости переменных ξ_1, ξ_3 внешность и внутренность эллипса $\bar{\delta}_2 + 3(\xi_1^2 + \xi_1^2 + \xi_1 \xi_3) = 0$. При $\bar{\delta}_2 \geq 0$ неравенство $p \geq 0$ выполняется для всех значений ξ_1, ξ_3 .

В случае $p \geq 0$ можно рассмотреть вторично редуцированную ключевую функцию

$$q = q(\xi_1, \xi_3) := \inf_{\xi_2} U.$$

В предполагаемых условиях функция q наследует (вблизи нуля) аналитические и топологические свойства функции $U(\xi)$. Причем имеется естественное взаимно однозначное соответствие $(\xi_1, \xi_3) \mapsto (\xi_1, 0, \xi_3)$ между критическими точками функций q и U , сохраняющее топологические типы точек.

В случае $p \leq 0$ получаем (вторично) редуцированную ключевую функцию $\inf_{\xi_2} U$ двух видов:

- (1) $U_1 = U(\xi_1, 0, \xi_3) = q$; при этом соответствие $(\xi_1, \xi_3) \mapsto (\xi_1, 0, \xi_3)$ (между критическими точками функций q и U) повышает индекс Морса на единицу;
- (2) $U_2 = U(\xi_1, \pm\sqrt{-2p/3}, \xi_3)$; при этом соответствие $(\xi_1, \xi_3) \mapsto (\xi_1, \pm\sqrt{-2p/3}, \xi_3)$ (между критическими точками функций U_1 и U) сохраняет индекс Морса.

Таким образом, вторичная редукция сводит изучение критических точек к описанию каустик и раскладов бифурцирующих экстремалей для функций с особенностями двумерных сборок. Достаточно полный анализ таких функций проведен в работах [9, 10].

Исследование параметрических разветвок двумерныхборок проводится по единой схеме: после приведения к нормальной форме и перехода к полярным координатам редуцированная ключевая функция приобретает удобный для исследования каустики и *bif*-раскладов (см. [4, 5, 7, 11, 15]), причем эти исследования можно провести посредством элементарных методов математического анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели. — М.: МЦНМО, 2008.
2. Бардин Б. С., Фурта С. Д. Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании // в кн.: Актуальные проблемы классической и небесной механики. — М.: Эльф, 1998. — С. 13–22.
3. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. — М.: Физматгиз, 1960.
4. Гнеушев И. А., Колесникова И. В., Костин Д. В., Сапронов Ю. И. Прогобы сжатой балки на двойном упругом основании (в обобщенной модели Власова—Леонтьева) // Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — 2. — С. 173–181.
5. Даринский Б. М., Колесникова И. В., Сапронов Ю. И. Ветвление сегнетоэлектрических фаз неоднородного кристалла вблизи критической фазы с трехмерной особенностью шестого порядка // Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2009. — 3. — С. 101–107.
6. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И. Бифуркации экстремалей вблизи особенности многомерной сборки // Изв. вузов. Мат. — 1997. — № 2. — С. 35–46.
7. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Царев С. Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Совр. мат. Фундам. напр. — 2004. — 12. — С. 3–140.
8. Зачена А. В., Сапронов Ю. И. О бифуркации экстремалей фредгольмова функционала из вырожденной точки минимума с особенностью 3-мерной сборки // Тр. мат. фак-та Воронеж. ун-та. — 2005. — 9. — С. 57–71.
9. Костин Д. В. Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об упругих деформациях // Мат. заметки. — 2008. — 83, № 1. — С. 50–60.
10. Костин Д. В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки // Докл. РАН. — 2008. — 418, № 4. — С. 295–299.
11. Костин Д. В., Сапронов Ю. И. Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем. — Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2012.
12. Мітропольський Ю. О., Мосеєнков Б. І. Дослідження коливаний в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи). — Київ, 1961.
13. Сапронов Ю. И. Многомодовые бифуркации упругих равновесий // Прикл. мат. мех. — 1988. — 52, № 6. — С. 997–1006.
14. Сапронов Ю. И. Полурегулярные угловые особенности гладких функций // Мат. сб. — 1989. — 180, № 10. — С. 1299–1310.

15. Сапронов Ю. И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах // Усп. мат. наук. — 1996. — 51, № 1. — С. 101–132.
16. Thompson J. M. T. Advances in shell buckling : Theory and experiments // Int. J. Bifurcat. Chaos. — 2015. — 25, № 1. — P. 1–25.
17. Thompson J. M. T., Hunt G. W. A General Theory of Elastic Stability. — Wiley, 1973.

Колесникова Инна Викторовна
Воронежский государственный университет
E-mail: kolinna@inbox.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 122–129
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-122-129

УДК 532.5

ОБ УСЛОВИИ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО И ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ

© 2021 г. В. Л. ХАЦКЕВИЧ

Аннотация. Предложено условие, обеспечивающее применение первого метода Ляпунова к обоснованию устойчивости стационарных и периодических течений жидкости в ограниченной области, а также единственность решений соответствующих задач.

Ключевые слова: эволюционные уравнения Навье—Стокса, гидродинамическая устойчивость, линеаризованная задача, свойство равномерной диссипативности.

ON A CONDITION THAT ENSURES HYDRODYNAMIC STABILITY AND UNIQUENESS OF STATIONARY AND PERIODIC FLUID FLOWS

© 2021 V. L. KHATSKEVICH

ABSTRACT. In this paper, we propose a condition that ensures the applicability of the first Lyapunov method to justifying stability of stationary and periodic fluid flows in a bounded region and the uniqueness of solutions of the corresponding problems.

Keywords and phrases: evolutionary Navier–Stokes equations, hydrodynamic stability, linearized problem, property of uniform dissipativity.

AMS Subject Classification: 35B35, 35Q30

1. Введение. Одним из основных методов изучения устойчивости течения жидкости в настоящее время является метод линеаризации с последующим исследованием спектра линеаризованной задачи (см., напр., [1, 2, 6, 12]). В настоящей работе предлагается использовать условие равномерной диссипативности для оператора линеаризованной задачи. Это условие обеспечивает расположение спектра линеаризованной задачи, гарантирующее устойчивость рассматриваемых стационарных и периодических течений в соответствующих пространствах.

Кроме того, в работе установлена единственность решений стационарной и периодической задач для системы уравнений Навье—Стокса в случае, если соответствующая линеаризованная задача обладает свойством равномерной диссипативности. Это придает новый качественный смысл утверждениям о гидродинамической устойчивости. Также в данной работе приведены условия, обеспечивающие равномерную диссипативность для оператора линеаризованной задачи. В последней части статьи показывается применение условия равномерной диссипативности линеаризованного оператора в обосновании принципа усреднения в задаче Навье—Стокса с быстро осциллирующей массовой силой.

2. Устойчивость стационарных течений. Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) с границей $\partial\Omega$ класса C^2 . В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассматривается эволюционная система уравнений

Навье—Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = -\text{grad } p + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = a(x) \quad (4)$$

Здесь \mathbf{v} — вектор скорости, $\nu > 0$ характеризует вязкость, p — давление, \mathbf{F} — массовая сила. Ниже в этом пункте будем предполагать, что массовая сила \mathbf{F} задана, не зависит от времени и квадратично суммируема на Ω .

Пусть система (1)–(4) имеет стационарное решение $(\mathbf{v}^0(x), p^0(x))$, т.е. $(\mathbf{v}^0(x), p^0(x))$ является решением стационарной задачи:

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = -\text{grad } p + \mathbf{F} \quad \text{в } \Omega, \quad (5)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6)$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (7)$$

Рассмотрим уравнения Навье—Стокса, линеаризованные в окрестности этого решения:

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + \sum_{i=1}^n v_i^0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial x_i} = -\text{grad } q + \mathbf{F}, \quad (8)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (9)$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (10)$$

Отметим, что разрешимость задач (1)–(4), (5)–(7), (8), (9), а также встречающейся ниже периодической задачи хорошо изучена (см., напр, книги О. А. Ладыженской [3], Ж. Л. Лионса [7], Р. Теама [9]).

Введем необходимые обозначения. Пусть $\mathbf{L}^2(\Omega)$ — гильбертово пространство векторных квадратично суммируемых функций со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и нормой $\|\cdot\|$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} u_j v_j^* dx, \quad \|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2},$$

где знак * означает комплексное сопряжение. Для гладких функций определим скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_1$ и норму $\|\cdot\|_1$ формулами

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 = \sum_{k,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j^*}{\partial x_k} dx, \quad \|\mathbf{u}\|_1 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_1^{1/2}.$$

Через H и H_1 обозначим замыкание пространства гладких, финитных в Ω соленоидальных векторных полей по нормам $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$, соответственно.

Определим в H оператор L , полагая в качестве его области определения $D(L)$ множество соленоидальных, исчезающих на $\partial\Omega$ векторах из $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$:

$$L\mathbf{u} \equiv \Pi \left[-\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n v_i^0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial x_i} \right], \quad \mathbf{u} \in D(L), \quad (11)$$

где Π — оператор ортогонального проектирования в $\mathbf{L}^2(\Omega)$ на подпространство H .

Отметим, что между нормами $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ имеет место взаимосвязь

$$\|\mathbf{u}\|_1^2 \geq \lambda_1 \|\mathbf{u}\|^2, \quad \mathbf{u} \in H_1.$$

Здесь λ_1 — первое собственное значение оператора Стокса, действующего в H по формуле $A\mathbf{u} = -\Pi \Delta \mathbf{u}$ на области определения $D(A) = H_1 \cap \mathbf{W}_2^2(\Omega)$.

Ниже будем использовать следующее утверждение (см., например, [12, гл. I, § 5]).

Утверждение 1. *Оператор L замкнут, спектр у него чисто точечный: состоит из бесконечной последовательности чисел $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots$. При этом $\operatorname{Re} \sigma_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$).*

В [12, гл. 2, § 2] установлена следующая теорема.

Утверждение 2. *Пусть спектр оператора L расположен внутри правой полуплоскости:*

$$\operatorname{Re} \sigma(L) \geq \sigma_0 > 0. \quad (12)$$

Если область Ω двумерна, то стационарное решение \mathbf{v}^0 асимптотически устойчиво по Ляпунову в H . Если область Ω — трехмерная, то стационарное решение \mathbf{v}^0 асимптотически устойчиво по Ляпунову в H .

Отметим, что для трехмерной области Ω справедлив близкий результат (см. [12]) по устойчивости в пространстве S_p ($p \geq 3$), являющимся замыканием гладких соленоидальных, исчезающих на $\partial\Omega$ векторов по норме $L^p(\Omega)$.

Нас заинтересовало требование на оператор L , которое может обеспечить выполнение условий утверждения 2. Оказалось, что его можно формулировать в терминах диссипативности оператора L (по поводу диссипативных операторов см., например, [8, гл. 1, § 6]). В связи с этим введем следующее определение.

Рассматриваемый в гильбертовом пространстве H оператор $L: D(L) \rightarrow H$ называется *равномерно κ -диссипативным*, если выполнено условие

$$\operatorname{Re}(L\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \kappa \|\mathbf{u}\|^2, \quad \mathbf{u} \in D(L), \quad (13)$$

где $\kappa > 0$ — фиксированная постоянная.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Если для линеаризованного оператора L , определяемого формулой (11), выполнено условие равномерной κ -диссипативности (13) в H , то спектр оператора L удовлетворяет соотношению (12) при $\sigma_0 = \kappa$.*

Доказательство. Действительно, пусть σ — собственное значение оператора L и ψ — отвечающая ему собственная функция. Тогда согласно (13)

$$\operatorname{Re}(L\psi, \psi) = \operatorname{Re}(\sigma\psi, \psi) = \operatorname{Re} \sigma \|\psi\|^2 \geq \kappa \|\psi\|^2.$$

Отсюда следует (12) при $\sigma_0 = \kappa$. □

Таким образом, в силу утверждения 2, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть линеаризованный на \mathbf{v}^0 оператор L равномерно диссипативен. Тогда стационарное решение \mathbf{v}^0 асимптотически устойчиво в пространстве H в случае двумерной области Ω .*

Оказывается, диссипативность оператора L обеспечивается малостью нормы $\|\mathbf{v}^0\|_1$ стационарного решения. Покажем это. Рассмотрим трилинейную форму

$$b(u, v, w) := \sum_{k,j=1}^n \int_{\Omega} u_k \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) w_j^* dx, \quad u, v \in H_1.$$

Мы будем использовать модификацию известного свойства трилинейной формы [9, гл. 2, § 11], а именно, для комплекснозначных функций u, v справедливо равенство

$$\operatorname{Re} b(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_1. \quad (14)$$

Кроме того, известно соотношение

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq C \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_1 \quad (15)$$

(см. [9, гл. 2, § 11]), где постоянная C зависит от области Ω .

Заметим, что для стационарного решения \mathbf{v}^0 задачи (2)–(7) справедливо соотношение

$$\nu(\mathbf{v}^0, \mathbf{v})_1 + b(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in H_1, \quad (16)$$

т.е. \mathbf{v}^0 — слабое решение.

Из (16) при $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0$ в силу (14) следует оценка

$$\|\mathbf{v}^0\|_1 \leq \frac{1}{\nu\sqrt{\lambda_1}} \|\mathbf{F}\|. \quad (17)$$

Теорема 2. Если выполнено соотношение

$$\nu - \frac{c}{\nu\sqrt{\lambda_1}} \|\mathbf{F}\| > 0, \quad (18)$$

то оператор L , линейризованный на \mathbf{v}^0 , равномерно диссипативен при

$$\kappa = \lambda_1 \left(\nu - \frac{c}{\nu\sqrt{\lambda_1}} \|\mathbf{F}\| \right).$$

Доказательство. В силу определения оператора L и с учетом (14) имеем

$$\operatorname{Re}(L\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -\nu\|\mathbf{u}\|_1^2 + \operatorname{Re} b(\mathbf{v}^0, \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \operatorname{Re} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{u}) = -\nu\|\mathbf{u}\|_1^2 + \operatorname{Re} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{u}).$$

При этом согласно (15), (17)

$$\operatorname{Re} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{u}) \leq |b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{u})| \leq C\|\mathbf{v}^0\|_1\|\mathbf{u}\|_1^2 \leq C\frac{\|\mathbf{F}\|}{\nu\sqrt{\lambda_1}}\|\mathbf{u}\|_1^2.$$

Тогда

$$\operatorname{Re}(L\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \left(\nu - \frac{\|\mathbf{F}\|}{\nu\sqrt{\lambda_1}} \right) \|\mathbf{u}\|_1^2,$$

что и обеспечивает справедливость утверждения. \square

Согласно (17) малость нормы $\|\mathbf{v}^0\|_1$ обеспечена, если вязкость $\nu > 0$ достаточно велика, либо массовая сила \mathbf{F} мала по норме L_2 .

Но при этом, как известно (см. [9, гл. II, § 1]), стационарное решение единственно. Это наводит на мысль, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть \mathbf{v}^0 — решение стационарной задачи (5)–(7), а соответствующий ему линейризованный оператор L , определяемый равенством (11), обладает свойством равномерной диссипативности (13). Тогда \mathbf{v}^0 является единственным решением стационарной задачи (5)–(7).

Доказательство. Пусть \mathbf{v}^0 — решение стационарной задачи (5)–(7). Тогда оно удовлетворяет соотношению (16). Пусть \mathbf{u}^0 — некоторое другое решение задачи (16). Положим $\mathbf{u} = \mathbf{v}^0 - \mathbf{u}^0$. Вычтем друг из друга уравнения (16), соответствующие \mathbf{v}^0 и \mathbf{u}^0 . Тогда получим соотношение

$$\nu(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 + b(\mathbf{v}^0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v} \in V. \quad (19)$$

Полагая в (19) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ и используя свойство (14) для вещественнозначных функций, находим

$$\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u})_1 + b(\mathbf{v}^0, \mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{u}) = 0.$$

С другой стороны, по определению оператора L левая часть этого равенства равна $(L\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Тогда в силу предположения о равномерной диссипативности (13) оператора L и вещественнозначности функции \mathbf{u} имеем $(L\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \operatorname{Re}(L\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \kappa\|\mathbf{u}\|^2$. Следовательно, $0 \geq \kappa\|\mathbf{u}\|^2$, т.е. $\mathbf{u} = 0$, что и требовалось доказать. \square

Отметим, что на самом деле результат теоремы 3 справедлив, если предполагать, что \mathbf{v}^0 — только слабое решение, т.е. удовлетворяет (16).

Вообще, вопрос о единственности решений стационарной задачи открыт до настоящего времени. Известны случаи неединственности близких задач (результаты Юдовича, Рабиновича, Вельте и др., см., например, [9, гл. II, § 4]). Единственность решения стационарного уравнения Навье—

Стокса (5)–(7) установлена лишь в предположении, что ν достаточно велико или что заданные силы достаточно малы (см., например, [9, гл. II, § 1]).

Поэтому вопрос, какие дополнительные условия обеспечивают единственность, весьма актуален. В нашем случае это условие равномерной диссипативности линеаризованного оператора. Теорема 3 придает новый качественный смысл теореме 1 о гидродинамической устойчивости, поскольку в условиях теоремы 1 решение стационарной задачи единственно по теореме 3.

3. Устойчивость периодических течений. Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях жидкости в ограниченной области с фиксированным периодом $T > 0$.

Пусть Ω — n -мерная ($n = 2, 3$) ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2 . В бесконечном цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о T -периодических решениях системы Навье—Стокса (1)–(3). Ниже предполагается, что массовая сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x)$ является T -периодической по t , а при каждом фиксированном t квадратично суммируема по $x \in \Omega$.

Пусть $\mathbf{v}^0(t)$ — некоторое T -периодическое решение задачи (1)–(3). Аналогично (11) на области определения $D(L) = H_1 \cap \mathbf{W}_2^2(\Omega)$ рассмотрим оператор $L(t)$, определяемый формулой

$$L(t)\mathbf{z} \equiv \Pi \left(-\nu \Delta \mathbf{z} + \sum_{i=1}^n v_i^0(t) \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial x_i} \right). \quad (20)$$

Согласно [12, гл. III, § 3] в H рассматривается линеаризованное на $\mathbf{v}^0(t)$ однородное уравнение

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} + L(t)\mathbf{z} = 0. \quad (21)$$

Решение уравнения (21) ищется в виде

$$\mathbf{z}(t) = e^{\sigma t} \mathbf{w}(t) \quad (22)$$

с T -периодической по t вектор-функцией $\mathbf{w}(t)$.

Комплексные значения параметра σ , для которых уравнение (21) имеет ненулевые решения вида (22) ищут, решая спектральную задачу

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} + L(t)\mathbf{w} + \sigma \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w}(t+T) = \mathbf{w}(t). \quad (23)$$

Совокупность всех таких σ называется спектром устойчивости основного течения $\mathbf{v}^0(t)$ и обозначается \mathfrak{S} .

Утверждение 3 (см. [12, гл. III, § 3]). *Спектр устойчивости \mathfrak{S} состоит из конечнократных собственных значений.*

Утверждение 4 (см. [12, гл. III, § 3]). *Пусть спектр устойчивости периодического решения $\mathbf{v}^0(t)$ лежит внутри левой полуплоскости, т.е. для всех собственных значений задачи (23) справедливо неравенство $\operatorname{Re} \sigma \leq -\sigma_0 < 0$. Тогда течение $\mathbf{v}^0(t)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову в пространстве H_1 .*

Укажем условие, обеспечивающее выполнение предположений утверждения 4.

Лемма 2. *Пусть при каждом t для линеаризованного оператора $L(t)$, определяемого формулой (20), выполнено условие равномерной κ -диссипативности (13). Тогда спектр задачи (23) лежит внутри левой полуплоскости; более того $\operatorname{Re} \sigma \leq -\kappa$ для всех $\sigma \in \mathfrak{S}$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть найдется такое $\sigma_0 \in \mathfrak{S}$, что $\operatorname{Re} \sigma_0 > -\kappa$. Положим $\gamma = \kappa + \operatorname{Re} \sigma_0$. По определению $\gamma > 0$. Рассмотрим оператор $B(t) = L(t) + \sigma_0 I$, где I — единичный оператор в H . Тогда согласно условию (13) и сделанному предположению имеем

$$\operatorname{Re}(B(t)\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \operatorname{Re}(L(t)\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \operatorname{Re} \sigma_0 (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \gamma \|\mathbf{u}\|^2, \quad \mathbf{u} \in D(L). \quad (24)$$

Как известно (см., например, [10, гл. II, § 2.1]), условие (24) обеспечивает единственность T -периодического решения уравнения (23). Следовательно, $\mathbf{w}(t) \equiv 0$. Таким образом, σ_0 не входит в спектральное множество \mathfrak{S} . Полученное противоречие доказывает лемму 2. \square

Из утверждения 4 и леммы 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть при каждом t для линеаризованного оператора $L(t)$, определяемого формулой (20), выполнено условие равномерной κ -диссипативности (13). Тогда периодическое течение $\mathbf{v}^0(t)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову в пространстве H_1 .

Кроме того, условие (13) на $L(t)$ обеспечивает единственность T -периодического решения задачи (1)–(3).

Вопрос о единственности в общей ситуации, по-видимому, до сих пор остается открытым. Единственность решения задачи (19), (20) установлена в предположении «малости» неоднородности \mathbf{F} , в частности, при достаточной малости $\|\mathbf{F}\|_{L^\infty(0,T;H)}$ (см. [6, с. 498]). В нашей ситуации имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{v}^0(t)$ есть T -периодическое решение задачи (1)–(3). Пусть при каждом t для линеаризованного на $\mathbf{v}^0(t)$ оператора $L(t)$ выполнено условие равномерной κ -диссипативности (13). Тогда $\mathbf{v}^0(t)$ является единственным T -периодическим решением задачи (1)–(3).

Доказательство. Заметим, что $\mathbf{v}^0(t)$ удовлетворяет соотношению (слабое решение)

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{v}^0, \mathbf{v}\right) + \nu(\mathbf{v}^0, \mathbf{v})_1 + b(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in H_1. \quad (25)$$

Пусть \mathbf{u}^0 — некоторое другое T -периодическое решение задачи (1)–(3). Положим $\mathbf{u} = \mathbf{v}^0 - \mathbf{u}^0$. Вычтем друг из друга уравнения (25), соответствующие \mathbf{v}^0 и \mathbf{u}^0 . Тогда получим соотношение

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) + \nu(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}^0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v} \in H_1.$$

Полагая здесь $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ и используя (14) для вещественнозначных функций, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|^2 + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_1^2 + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{u}) = 0.$$

Согласно определению оператора $L(t)$ и (14) это равенство можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|^2 + (L(t)\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0.$$

Отсюда в силу равномерной κ -диссипативности оператора $L(t)$ (13) и вещественнозначности функции $u(t)$ получим

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|^2 \leq -2\kappa \|\mathbf{u}(t)\|^2.$$

Тогда при всех $\tau \in \mathbb{R}$ имеем

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 \leq e^{-2\kappa(t-\tau)} \|\mathbf{u}(\tau)\|^2, \quad t \geq \tau. \quad (26)$$

Устремляя в (26) $\tau \rightarrow -\infty$ и используя периодичность (а значит, ограниченность функции $\mathbf{u}(\tau)$), убедимся, что $\mathbf{u}(t) \equiv 0$. \square

Следствие. Для разности решений \mathbf{v}^0 и \mathbf{v} задачи (1)–(3) справедлива оценка

$$\|\mathbf{v}^0(t) - \mathbf{v}(t)\| \leq e^{-\kappa t} \|\mathbf{v}^0(0) - \mathbf{v}(0)\|, \quad t \geq 0. \quad (27)$$

Оценка (27) гарантирует экспоненциальную асимптотическую устойчивость (конвергентность) T -периодического решения $\mathbf{v}^0(t)$.

Отметим, что аналогично теореме 2 справедливо утверждение об условиях, обеспечивающих равномерную κ -диссипативность оператора $L(t)$. При этом используются оценки периодических решений задачи (1)–(3) (см., например, [11]). Можно показать, что (в частности) условие малости $\|\mathbf{F}\|_{L^\infty(0,T;H)}$ обеспечивает равномерную диссипативность оператора $L(t)$.

4. О принципе усреднения в периодической задаче для системы уравнений Навье—Стокса. Условие равномерной диссипативности линеаризованного оператора полезно также и при обосновании метода усреднения в задачах с быстро осциллирующей массовой силой. Опишем этот класс задач (см. [2, 4, 5, 11]).

В бесконечном цилиндре $\Omega \times R$ рассматривается задача о T/ω -периодическом решении

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \text{grad } p = \mathbf{f}(x, \omega t), \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (28)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0, \quad (29)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}(x, T/\omega). \quad (30)$$

Здесь $T > 0$ — фиксированное число, $\omega > 0$ — «большой» параметр осцилляции. При этом предполагается, что функция $\mathbf{f}(x, \tau)$ — T -периодична по второму аргументу.

Наряду с (28)–(30) в Ω рассматривается усредненная стационарная задача

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \bar{\mathbf{f}} - \text{grad } q, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (31)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0, \quad (32)$$

где в правой части фигурирует среднее значение $\bar{\mathbf{f}}$ функции $\mathbf{f}(x, \tau)$, задаваемое формулой

$$\bar{\mathbf{f}}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(x, \tau) d\tau.$$

Пусть \mathbf{u}^0 — некоторое решение задачи (31), (32). Рассмотрим линеаризованную на \mathbf{u}^0 задачу

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i^0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_i} + \text{grad } q = \bar{\mathbf{f}}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (33)$$

$$\int_{\Omega} q dx = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (34)$$

Определим в пространстве H линейный оператор A_0 , соответствующий задаче (33), (34):

$$A_0 \mathbf{z} \equiv \Pi \left[-\nu \Delta \mathbf{z} + \sum_{i=1}^n u_i^0 \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_i} \right] \mathbf{z} \in H_1 \cap \mathbf{W}_2^2(\Omega), \quad (35)$$

где Π — проектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство H соленоидальных векторных полей.

Сформулируем в удобном для нас виде результат из [5, гл. XI, § 5] (см. также [2, 4, 5, 11]).

Утверждение 5. Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, граница $\partial\Omega$ области класса C^2 , неоднородность $\mathbf{f}(x, \tau)$ принадлежит классу $C(0, T; H)$. Пусть \mathbf{u}^0 — некоторое решение задачи (31), (32) и спектр линейного оператора (35) не содержит точек мнимой оси. Тогда найдутся такие значение параметра осцилляции $\omega_0 > 0$ и положительное число r , что при $\omega > \omega_0$ задача (28)–(30) имеет единственное в шаре $\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}\|_1 \leq r$ (возможно, обобщенное) решение \mathbf{u}^ω . При этом $\|\mathbf{u}^\omega - \mathbf{u}^0\|_1 \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow +\infty$.

В силу леммы 1 и теоремы 5 имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть оператор A_0 , определяемый формулой (35), равномерно диссипативен. Тогда справедливо заключение утверждения 5. При этом решение \mathbf{u}^0 задачи (31), (32) единственно.

Отметим, что единственность \mathbf{u}^0 придает новый качественный смысл обоснованию метода усреднения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. — М., 1981.
2. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
3. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
4. Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование системы Навье—Стокса с быстро осциллирующей массовой силой// Диффер. уравн. — 2001. — 37, № 5. — С. 696–705.
5. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: МГУ, 1978.
6. Линь Цзя-цзяо Теория гидродинамической устойчивости. — М., 1958.
7. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
8. Симоненко И. Б. Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с применением к задачам гидродинамической устойчивости. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1989.
9. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.
10. Трубников Ю. А., Перов А. И. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. — Наука и техника, 1986.
11. Хацкевич В. Л. О принципе усреднения в периодической по времени задаче для уравнений Навье—Стокса с быстро осциллирующей массовой силой// Мат. заметки. — 2016. — 99, № 5. — С. 764–777.
12. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1984.
13. Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями// Усп. мех. — 2006. — 4, № 3. — С. 26–129.

Хацкевич Владимир Львович

Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж

E-mail: vlkhats@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 130–143
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-130-143

УДК 517.977.1, 517.928

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ НЕВЫРОЖДЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

© 2021 г. О. Б. ЦЕХАН

Аннотация. Для линейной стационарной сингулярно возмущенной функционально-дифференциальной системы управления с малым параметром при старшей производной и с конечным запаздыванием в медленных переменных состояния обоснована декомпозиция с помощью невырожденного преобразования переменных, обобщающего известное преобразование типа Chang. Преобразование выполняет расщепление исходной двухтемповой системы на две независимые подсистемы меньшей размерности: отдельно относительно быстрых и медленных переменных. Доказано, что расщепляющее преобразование может быть построено с любой точностью аппроксимации в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра, указана итеративная схема нахождения членов асимптотического ряда. Получена оценка значений параметра, при которой справедлива аппроксимация. На основании построенной декомпозиции установлено, что при достаточно малых значениях параметра спектр системы разделяется на два множества: отдельно с «малыми» и «большими» собственными значениями. Приведены примеры построения аппроксимаций преобразования.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система, функционально-дифференциальная система, запаздывание, расщепляющее преобразование, декомпозиция.

DECOMPOSITION OF A SINGULARLY PERTURBED FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL SYSTEM BASED ON A NONDEGENERATE TRANSFORMATION

© 2021 O. B. TSEKHAN

ABSTRACT. For a linear, stationary, singularly perturbed functional-differential control system with a small coefficient of the highest derivative and a finite delay in slow state variables, we justify the decomposition by a nondegenerate transformation of variables, which is a generalization of the well-known Chang transformation. This transformation splits the original two-rate system into two independent subsystems of lower dimension separately for the fast and slow variables. We prove that the splitting transformation can be constructed with any approximation accuracy in the form of an asymptotic expansion in powers of a small parameter and propose an iterative scheme for calculating the asymptotic series. Based on the decomposition constructed, we establish that for sufficiently small values of the parameter, the spectrum of the system is split into two sets, separately for “small” and “large” eigenvalues. Also, we give examples of constructing transform approximations.

Keywords and phrases: singularly perturbed system, functional-differential system, delay, splitting transformation, decomposition.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K17, 34K26, 34K35

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020» (шифр задания 1.3.02).

1. Введение. Системы дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных относятся к классу сингулярно возмущенных систем и являются математическими моделями динамических систем, в которых реализуется несколько взаимосвязанных подпроцессов с существенно различающимися темпами. Интерес к сингулярно возмущенным системам вызван потребностями практики в связи с интенсивным развитием таких областей, как теория автоматического регулирования, теория нелинейных колебаний, квантовая механика, газодинамика, биология, химическая кинетика и другие (см., например, ссылки в обзорных статьях [1, 2, 19]). В указанных обзорах можно найти также ссылки на множество публикаций, посвященных вопросам анализа и синтеза сингулярно возмущенных систем.

В технике, экономике, технологиях, биологии, экологии, социальной сфере и т. п. (см., например, ссылки в [15]) запаздывание сопровождается различными процессами, связанные с передачей массы, энергии, информации и т. п. Наличие запаздывания отражает объективное свойство инерционности систем, в той или иной мере присущее любым реальным процессам, проявляется в виде зависимости текущей скорости изменения выходных переменных системы от их значений в предшествующие моменты времени и приводит к моделям, которые описываются функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа (см. [6]).

При решении задач анализа и управления сложными объектами часто возникают проблемы, обусловленные высокой размерностью моделей и наличием разнотемповых переменных. В связи с этим актуальной является проблема декомпозиции — расчленения моделей большого порядка на несвязные или слабосвязные модели меньшей размерности. Применение методов декомпозиции для анализа и синтеза сложных систем позволяет упрощать и распараллеливать алгоритмы, обеспечивает возможность управления различными частями систем. Декомпозиция может строиться на различных принципах. Применительно к системам с разнотемповыми движениями возможна декомпозиция исходной сингулярно возмущенной системы на подсистемы меньшей размерности с разделенными по темпам переменными.

Для линейных сингулярно возмущенных систем декомпозицию можно реализовать с помощью невырожденной замены переменных, осуществляющей эквивалентный переход от сингулярно возмущенной системы к системе с разделенными по скоростям движениями. Впервые невырожденное линейное преобразование для нестационарной линейной сингулярно возмущенной системы без запаздывания с малым параметром при старших производных части переменных предложено в [7] и применено для полного расщепления исходной системы с быстрыми и медленными переменными на две независимые подсистемы в [12, 13]. Матрицы, участвующие в формировании преобразования Chang, являются решениями алгебраических уравнений Риккати и Сильвестра. Их нахождение является ключевым шагом в построении этого преобразования. В [13] построена аппроксимация первого порядка решения соответствующего уравнения Риккати с помощью ряда Маклорена. Там же отмечается, что получение аппроксимации более высокого порядка является механическим повторением случая аппроксимации первого порядка.

Обобщение преобразования Chang для декомпозиции линейных сингулярно возмущенных медленно изменяющихся во времени систем предложено в [17, 18]. В [18] доказана теорема о разложении в ряды Маклорена матричных компонент линейного преобразования и об итерационном нахождении элементов k -го порядка аппроксимации этих рядов. Основываясь на итерационном решении, предложено понятие аппроксимации k -го порядка преобразования Chang, а также расщепленной системы, быстрой и медленной подсистем. Расщепляющее преобразование Chang изложено в [9], там же имеются ссылки на некоторые обобщения этого преобразования, указывается важная роль расщепляющих преобразований в теории управления и предложены основанные на декомпозиции параллельные алгоритмы оптимального управления крупномасштабными процессами для линейных и билинейных систем. Обобщение преобразования Chang на системы со многими временными масштабами представлено в [4, 16].

Для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием расщепляющие преобразования типа Chang строились в [3, 5, 8, 14]. В [14] доказано существование непрерывного по малому параметру линейного преобразования координат для частичной декомпозиции сингулярно возмущенной

системы с распределенным и сосредоточенным запаздыванием, в результате которого в преобразованной системе связь между быстрыми и медленными переменными имеется только через переменные с запаздыванием. Замена переменных типа Chang для линейных стационарных сингулярно возмущенных систем управления с постоянным (не малым) запаздыванием в состоянии, построенное в [3], осуществляется линейным оператором с конечным числом операторов сдвига и приводит исходную сингулярно возмущенную систему с одним запаздыванием в состоянии и без запаздывания в управлении к разделенным подсистемам: медленной со многими запаздываниями в состоянии и управлении и неоднородностью, зависящей от начальных условий, и быстрой с одним запаздыванием в переменной состояния и с неоднородностью.

В [8] построена замена переменных, обобщающая преобразование Chang на линейные стационарные сингулярно возмущенные системы функционально-дифференциальные уравнения с малым сосредоточенным и распределенным запаздыванием в быстрых переменных. Замена расщепляет исходную систему на медленную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и быстрые функциональные уравнения. Доказано, что преобразование можно найти в виде асимптотического разложения.

Построенное в настоящей работе невырожденное расщепляющее преобразование обобщает преобразование Chang на линейные стационарные сингулярно возмущенные функционально-дифференциальные системы с конечным запаздыванием в медленной переменной. Доказывается оценка для значений малого параметра, при которых справедлива аппроксимация расщепляющего преобразования.

В отличие от [3] преобразование строится в виде асимптотического ряда, а полученные в результате декомпозиции медленная и быстрая подсистемы не имеют неоднородностей, кроме слагаемых с управлением. В отличие от [14] выполняется полное расщепление системы. В отличие от [5] рассматривается функционально-дифференциальная система с обобщенным типом запаздывания.

2. Постановка задач. Рассматривается следующая линейная стационарная сингулярно возмущенная функционально-дифференциальная система управления с конечным запаздыванием в медленных переменных состояния:

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^0 [dA_1(\xi)]x(t+\xi) + A_2y(t) + B_1u(t), \quad x \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad y \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad (1)$$

$$\mu \dot{y}(t) = \int_{-h}^0 [dA_3(\xi)]x(t+\xi) + A_4y(t) + B_2u(t), \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad t \in T = [0, t_1], \quad (2)$$

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0], \quad y(0) = y_0, \quad (3)$$

где $h = \text{const} > 0$, $[-h, 0]$ — интервал запаздывания, $A_i(\xi)$, $\xi \in [-h, 0]$, $i = 1, 3$ — матричные функции ограниченной вариации на $[-h, 0]$, A_k , $k = 2, 4$, B_j , $j = 1, 2$, — постоянные матрицы подходящих размеров, μ — малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $\phi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$ — непрерывная n_1 -вектор-функция, $u(t)$ — кусочно-непрерывная для $t \geq 0$ r -вектор-функция управления, $u(t) \equiv 0$, $t < 0$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$. Пусть $\det A_4 \neq 0$.

Наличие малого параметра μ в виде сомножителя при производных части переменных определяет разнотемповый характер изменения фазовых координат x и y в окрестности точки $\mu = 0$: x — медленная переменная, y — быстрая переменная.

С системой (1)–(2) связаны вырожденная система (медленная подсистема) и система пограничного слоя (быстрая подсистема) (см., например, [10]). Вырожденная система для системы (1)–(3) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= \int_{-h}^0 [dA_s(\xi)]x_s(t+\xi) + B_s u_s(t), \\ x_s(0) &= x_0, \quad x_s(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$A_s(\xi) \triangleq A_1(\xi) - A_2 A_4^{-1} A_3(\xi), \quad B_s \triangleq B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2. \quad (5)$$

Формально вырожденная система (4) может быть получена из (1)–(2), если положить в ней $\mu = 0$ и затем при условии $\det A_4 \neq 0$ выразить

$$y_s(t) = -A_4^{-1} \left[\int_{-h}^0 [dA_3(\xi)] x_s(t + \xi) + B_2 u_s(t) \right]$$

и исключить переменную $y_s(t)$ из уравнения для медленной переменной x_s .

Система пограничного слоя, соответствующая (1)–(3), получается путем «замораживания» в уравнении (2) для быстрых переменных y медленных переменных x :

$$\frac{dy_f(\tau)}{d\tau} = A_4 y_f(\tau) + B_2 u_f(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\mu} \in \left[0, \frac{t_1}{\mu} \right], \quad (6)$$

$$y_f(0) = y_0 - y_s(0) = y_0 + A_4^{-1} \left[\int_{-h}^0 [dA_3(\xi)] \phi(\theta) + B_2 u_s(0) \right]. \quad (7)$$

Обозначим $O(\mu)$ (O большое от μ) вектор-функцию $f(t, \mu)$ на интервале $[t_1, t_2]$ (размерность которой следует из контекста), компоненты $f_i(t, \mu)$ которой таковы, что существуют постоянные $\mu^* > 0$, $c > 0$, такие, что евклидова норма $|f(t, \mu)|$ удовлетворяет неравенству $|f(t, \mu)| \leq c\mu$ при всех $\mu \in (0, \mu^*]$ и $t \in [t_1, t_2]$.

Задача 1. Построить расщепляющее преобразование, приводящее систему (1)–(3) к двум независимым подсистемам меньшей размерности (отдельно относительно быстрых и медленных переменных), $O(\mu)$ -близким к вырожденной системе (4) и системе погранслоя (6).

Задача 2. Доказать, что расщепляющее преобразование может быть построено с любой степенью точности аппроксимации в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра, указать итерационную схему нахождения элементов расщепляющего преобразования и получить оценку для значений малого параметра, при которых справедлива аппроксимация расщепляющего преобразования.

3. Невырожденное преобразование. Определим невырожденное преобразование типа Chang (см. [7]) для системы (1)–(2). С этой целью представим систему (1)–(2) в операторной форме.

Пусть $(C[a, b], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство непрерывных функций, отображающих $[a, b]$ в \mathbb{R}^n с топологией равномерной сходимости. Для $x \in T \rightarrow \mathbb{R}^n$ через $x_t: [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ обозначим определенную для $s \in [-h, 0]$ функцию $x_t(s) = x(t + s)$. Обозначим p — оператор дифференцирования, $e^{-p\xi}$ — оператор сдвига (чистого запаздывания): $e^{-p\xi} x(t) = x(t - \xi)$. Для фиксированного $h \in (0, +\infty)$ обозначим $A(p)$ непрерывный слева в 0 ограниченный оператор $A(p): (C[-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$A(p) := \int_{-h}^0 [dA(\xi)] e^{p\xi}, \quad (8)$$

где $A(\xi)$, $\xi \in [-h, 0]$ — матричная функция ограниченной вариации на интервале $[-h, 0]$. С учетом $e^{-p\xi} x(t) = x(t - \xi)$ имеем

$$A(p)x_t = \int_{-h}^0 [dA(\xi)] x(t + \xi).$$

Определим по постоянным матрицам A_j , $j = 2, 4$, из (1)–(2) матричнозначные функции ограниченной вариации на $[-h, 0]$:

$$A_j(\xi) = \begin{cases} -A_j, & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad (9)$$

и определим операторы $A_j(p)$, $j = 2, 4$ согласно (8) с использованием (9).

Заметим, что для операторов $A_j(p)$, $j = 2, 4$ (8) в соответствии с (9) справедливо (см., например, [6, с. 183]) $A_j(p)y_t = y(t)$ и в силу предположения $\det A_4 \neq 0$ существует обратный оператор $A_4^{-1}(p)$, определяемый по (8), (9) с A_4^{-1} вместо A_j в (9).

Тогда в соответствии с (8), (9) можно систему (1)–(2) представить в операторной форме:

$$px(t) = A_1(p)x_t + A_2(p)y_t + B_1u(t), \quad (10)$$

$$\mu py(t) = A_3(p)x_t + A_4(p)y_t + B_2u(t),$$

$$x_\theta = \phi(\theta), \quad y_\theta = y_0, \quad \theta \leq 0. \quad (11)$$

Введем замену переменных вида:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = G(\mu, p) \begin{pmatrix} \xi_t \\ \eta_t \end{pmatrix}, \quad t \in T, \quad (12)$$

где $\xi_t: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$, $\eta_t: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$, $\xi_t = \xi(t + \theta)$, $\eta_t = \eta(t + \theta)$, $\theta \leq 0$, $\xi(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\eta(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, матричный оператор $G(\mu, p): (C(-\infty, 0], \mathbb{R}^{n_1+n_2}) \rightarrow (C[-h, 0], \mathbb{R}^{n_1+n_2})$ имеет вид

$$G(\mu, p) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu H(\mu, p) \\ -L(\mu, p) & E_{n_2} - \mu L(\mu, p)H(\mu, p) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В (13) матричные функции $H(\mu, p)$, $L(\mu, p)$ являются решением матричных операторных уравнений: алгебраического уравнения Риккати и уравнения Сильвестра

$$A_3 - A_4L + \mu LA_1 - \mu LA_2L = 0, \quad (14)$$

$$\mu(A_1 - A_2L)H - H(A_4 + \mu LA_2) + A_2 = 0. \quad (15)$$

С целью сокращения записей здесь и далее, где это не приводит к неоднозначному пониманию, аргументы у матричных операторов $A_i(p)$, $i = 1, 3$, $H(\mu, p)$, $L(\mu, p)$ будем опускать.

Заметим, что $\det G(\mu, p) \equiv 1$, значит, преобразование (13) обратимо, причем

$$G^{-1}(\mu, p) = \begin{pmatrix} E_{n_1} - \mu HL & -\mu H \\ L & E_{n_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_t \\ \eta_t \end{pmatrix} = G^{-1}(\mu, p) \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}.$$

Определим оператор $A_s(p)$ по (8) с $A_s(\xi)$ (5) вместо $A(\xi)$. Очевидно, справедливо:

$$A_s(p) = A_1(p) - A_2(p)A_4^{-1}(p)A_3(p). \quad (16)$$

Лемма 1 (о решении матричных уравнений). *Если $\det A_4 \neq 0$, то найдется такое $\mu^* > 0$, что для всех $\mu \in [0, \mu^*]$ существует непрерывно зависящее от μ решение $H(\mu, p)$, $L(\mu, p)$ системы матричных операторных уравнений (14)–(15) вида*

$$L(\mu, p) = L^0(p) + \mu L^1(p) + O(\mu^2), \quad H(\mu, p) = H^0 + O(\mu), \quad (17)$$

где

$$L^0(p) = A_4^{-1}(p)A_3(p), \quad L^1(p) = A_4^{-2}(p)A_3(p)A_s(p), \quad H^0 = A_2(p)A_4^{-1}(p). \quad (18)$$

Доказательство. Доказательство проведем по схеме, предложенной в [13]. Единственное решение (14) при $\mu = 0$

$$L^0(p) \triangleq L(0, p) = A_4^{-1}(p)A_3(p). \quad (19)$$

Дифференцируя (14) по μ , получаем

$$[A_4 + \mu L(\mu, p)A_2(p)] \frac{dL(\mu, p)}{d\mu} - \mu \frac{dL(\mu, p)}{d\mu} [A_1(p) - A_2(p)L(\mu, p)] = L(\mu, p)A_1(p) - L(\mu, p)A_2(p)L(\mu, p),$$

откуда с учетом (18), (19) получаем, что единственное решение этого уравнения при $\mu = 0$

$$L^1(p) \triangleq \left. \frac{dL(\mu, p)}{d\mu} \right|_{\mu=0} = A_4^{-1}(p)L(0, p)[A_1(p) - A_2(p)L(0, p)] = A_4^{-2}(p)A_3(p)A_0(p).$$

Продолжая аналогично, будем получать матричные уравнения, которые решаются последовательно и однозначно в силу $\det A_4 \neq 0$. Таким образом доказано, что (17) представляет из себя первые два члена разложения в ряд Маклорена по μ матричного оператора $L(\mu, p)$.

Аналогично из (15) при $\mu = 0$ имеем единственное решение

$$\mathbf{H}^0 \triangleq \mathbf{H}(0, p) = \mathbf{A}_2(p)\mathbf{A}_4^{-1}(p).$$

Дифференцируя (15) по μ , получаем единственное решение

$$\mathbf{H}^1(p) \triangleq \left. \frac{d\mathbf{H}(\mu, p)}{d\mu} \right|_{\mu=0} = [(\mathbf{A}_1(p) - \mathbf{A}_2(p)\mathbf{L}(0, p))\mathbf{H}(0, p) - \mathbf{H}(0, p)\mathbf{L}(0, p)\mathbf{A}_2(p)]\mathbf{A}_4^{-1}(p),$$

и т. д. Продолжая аналогичным образом, будем получать следующие коэффициенты в разложении матричных функций $\mathbf{H}(\mu, p)$, $\mathbf{L}(\mu, p)$. Непрерывная зависимость от μ доказывается аналогично [14]. \square

Заметим, что $\mathbf{L}(\mu, p)$, определяемое по формуле (17), является единственным в том смысле, что хотя уравнение (14) может иметь несколько решений, но только одно из них аппроксимируется (17).

Лемма 2 (об аппроксимации). Пусть $\det \mathbf{A}_4 \neq 0$. Зависящие от параметра функциональные матрицы $\mathbf{L}(\mu, p)$, $\mathbf{H}(\mu, p)$, являющиеся решением (14), (15), могут быть найдены с любой степенью точности в виде

$$\mathbf{L}(\mu, p) = \sum_{i=0}^k \mu^i \mathbf{L}^i(p) + O(\mu^{k+1}), \quad \mathbf{H}(\mu, p) = \sum_{i=0}^k \mu^i \mathbf{H}^i(p) + O(\mu^k), \quad (20)$$

где \mathbf{L}^k , \mathbf{H}^k , $k = 0, 1, 2, \dots$ можно найти согласно итерационной схеме

$$\mathbf{L}^{k+1}(p) = \mathbf{A}_4^{-1} \left(\mathbf{L}^k(p)\mathbf{A}_1(p) - \sum_{j=0}^k \mathbf{L}^{k-j}(p)\mathbf{A}_2(p)\mathbf{L}^j(p) \right), \quad (21)$$

$$\mathbf{L}^0(p) = \mathbf{A}_4^{-1}(p)\mathbf{A}_3(p),$$

$$\mathbf{H}^{k+1}(p) = \left(\mathbf{A}_1(p)\mathbf{H}^k(p) - \mathbf{A}_2(p) \sum_{i=0}^k \mathbf{L}^i(p)\mathbf{H}^{k-i}(p) - \sum_{i=0}^k \mathbf{H}^i(p)\mathbf{L}^{k-i}(p)\mathbf{A}_2(p) \right) \mathbf{A}_4^{-1}(p), \quad (22)$$

$$\mathbf{H}^0(p) = \mathbf{A}_2(p)\mathbf{A}_4^{-1}(p).$$

Аппроксимация (20) имеет место для всех $\mu \in [0, \mu^*]$, где

$$\mu^* = \frac{1}{\|\mathbf{A}_4^{-1}\|(a + bd + 2b\sqrt{ad/b})} \quad (23)$$

и

$$a \triangleq \|\mathbf{A}_1(p)\| + \|\mathbf{A}_2(p)\| \cdot \|\mathbf{A}_4^{-1}(p)\| \cdot \|\mathbf{A}_3(p)\|, \quad d \triangleq \|\mathbf{A}_4^{-1}(p)\| \cdot \|\mathbf{A}_3(p)\|, \quad b \triangleq \|\mathbf{A}_2(p)\|.$$

Доказательство. Доказательство (20)–(22) несложно провести, подставляя разложения (20) в (14), (15) и приравнивая в полученных уравнениях коэффициенты при одинаковых степенях μ .

Для доказательства оценки (23) введем

$$\mathbf{D}(\mu, p) = \mathbf{L}(\mu, p) - \mathbf{L}^0(p). \quad (24)$$

Используя (21), имеем

$$\mathbf{A}_3(p) = \mathbf{A}_4(p)\mathbf{L}^0(p). \quad (25)$$

Преобразуем (14) (с целью сокращения записей опускаем аргументы (μ, p) у матричных операторов). Из (24), (25) следуют тождества:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4(\mathbf{D} + \mathbf{L}^0) + \mu(\mathbf{D} + \mathbf{L}^0)\mathbf{A}_1 - \mu(\mathbf{D} + \mathbf{L}^0)\mathbf{A}_2(\mathbf{D} + \mathbf{L}^0) &= 0 \iff \\ \iff -\mathbf{A}_4\mathbf{D} + \mu(\mathbf{D} + \mathbf{L}^0)(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2(\mathbf{D} + \mathbf{L}^0)) &= 0 \iff \\ \iff \mathbf{A}_4\mathbf{D} = \mu(\mathbf{D} + \mathbf{L}^0)(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2(\mathbf{D} + \mathbf{L}^0)) \iff \iff \mathbf{A}_4\mathbf{D} = \mu(\mathbf{D} + \mathbf{L}^0)(\mathbf{A}_s - \mathbf{A}_2\mathbf{D}) \iff \\ \iff (\mathbf{L}^0\mathbf{A}_s + \mathbf{D}\mathbf{A}_s - \mathbf{L}^0\mathbf{A}_2\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{A}_2\mathbf{D}) \triangleq f(\mathbf{D}(\mu, p)). \end{aligned} \quad (26)$$

Покажем, что для достаточно малых $c = \|\mu A_4^{-1}(p)\|$ отображение $f(D(\mu, p))$ (26) является сжимающим отображением.

Пусть $M = \{D : \|D\| \leq (ad/b)^{1/2}\}$. Для любого $D, \tilde{D} \in M$ имеем:

$$\begin{aligned} \|f(D) - f(\tilde{D})\| &= \|\mu A_4^{-1}((D - \tilde{D})A_s - L^0 A_2(D - \tilde{D}) - DA_2D + \tilde{D}A_2\tilde{D} \pm \tilde{D}A_2D)\| = \\ &= \|\mu A_4^{-1}((D - \tilde{D})A_s - L^0 A_2(D - \tilde{D}) - (D - \tilde{D})A_2D - \tilde{D}A_2(D - \tilde{D}))\| \leq \\ &\leq \|\mu A_4^{-1}\| \cdot \|D - \tilde{D}\| \cdot \|A_s - L^0 A_2 - A_2D - \tilde{D}A_2\| \leq \\ &\leq c \cdot \|D - \tilde{D}\| \cdot (\|A_s\| + \|L^0\| \cdot \|A_2\| + \|A_2\| \cdot \|D\| + \|\tilde{D}\| \cdot \|A_2\|) \leq \\ &\leq c \cdot \|D - \tilde{D}\| \cdot (a + db + 2b(ad/b)^{1/2}) \leq \|D - \tilde{D}\|, \end{aligned}$$

если

$$c < \frac{1}{a + db + 2b(ad/b)^{1/2}}. \quad (27)$$

Здесь используем очевидные соотношения:

$$\|A_s(p)\| \stackrel{(5)}{=} \leq \|A_1(p)\| + \|A_2(p)\| \cdot \|A_4^{-1}(p)\| \cdot \|A_3\| \triangleq a, \quad \|L^0(p)\| \stackrel{(18)}{=} \|A_4^{-1}(p)\| \cdot \|A_3(p)\| \triangleq d.$$

Таким образом, в силу принципа сжимающих отображений уравнение (26) имеет единственное решение L , которое может быть найдено с любой степенью точности, начиная с любого $D_0 \in M$. Граница (23) для μ следует из (27). \square

Используя матричные параметры системы (1)–(2) и матричные функции $L(\mu, p)$, $H(\mu, p)$, определим зависящие от параметра матричные функции

$$\begin{aligned} A_\xi(\mu, p) &\triangleq A_1(p) - A_2(p)L(\mu, p), \\ B_\xi(\mu, p) &\triangleq B_1 - H(\mu, p)B_2 - \mu H(\mu, p)L(\mu, p)B_1, \\ A_\eta(\mu, p) &\triangleq A_4(p) + \mu L(\mu, p)A_2(p), \\ B_\eta(\mu, p) &\triangleq B_2 + \mu L(\mu, p)B_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (28), (5), (18) имеем

$$\begin{aligned} A_\xi(\mu, p) &= A_s(p) + O(\mu), \quad B_\xi(\mu, p) = B_s + O(\mu), \\ A_\eta(\mu, p) &= A_4 + O(\mu), \quad B_\eta(\mu, p) = B_2 + O(\mu). \end{aligned} \quad (29)$$

Теорема 1 (о расщепляющем преобразовании). *Если $\det A_4 \neq 0$, то найдется такое $\mu^* > 0$, что в результате замены переменных (12), (13) для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ система (1)–(3) преобразуется в эквивалентную систему с разделенными движениями*

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= (A_1(p) - A_2(p)L(p))\xi_t + (B_1 - H(p)B_2 - \mu H(p)L(p)B_1)u_t, \\ \mu \dot{\eta}(t) &= (A_4(p) + \mu L(p)A_2(p))\eta_t + (B_2 + \mu L(p)B_1)u_t, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \xi_\theta &= (E_{n_1} - \mu H(p)L(p))x_\theta - \mu H(p)y_\theta, \\ \eta_\theta &= L(p)x_\theta + y_\theta, \quad \theta \leq 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Доказательство. Для обоснования декомпозиции исходной системы (1)–(2) введем при фиксированном $\mu > 0$ матричные функции

$$A(\mu, p) = \begin{pmatrix} A_1(p) & A_2(p) \\ A_3(p)/\mu & A_4(p)/\mu \end{pmatrix}, \quad B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2/\mu \end{pmatrix},$$

и обозначим $z(t) = \{x(t), y(t)\}'$. Тогда систему (10) можно записать в виде

$$pz(t) = A(\mu, p)z_t + B(\mu)u(t). \quad (32)$$

с начальными условиями

$$z_\theta = \{x_\theta, y_\theta\}'. \quad (33)$$

Применим к системе (32) преобразование (12), (13) и умножим преобразованное уравнение слева на $\text{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}G^{-1}(p)$. В результате получим эквивалентную (32) систему

$$p \text{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}\zeta(t) = A_{\xi\eta}(\mu, p)\zeta_t + B_{\xi\eta}(\mu, p)u_t, \quad (34)$$

где $\zeta(t) = \{\xi(t), \eta(t)\}'$,

$$\begin{aligned} A_{\xi\eta}(\mu, p) &= G^{-1}(\mu, p)A(\mu, p)G(\mu, p) = \begin{pmatrix} A_{\xi}(\mu, p) & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & A_{\eta}(\mu, p) \end{pmatrix}, \\ B_{\xi\eta}(\mu, p) &= G^{-1}(\mu, p)B(\mu) = \begin{pmatrix} B_{\xi}(\mu, p) \\ B_{\eta}(\mu, p) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (35)$$

Систему (34) с учетом (35) можно представить как систему с разделенными движениями

$$\begin{aligned} p\xi(t) &= A_{\xi}(\mu, p)\xi_t + B_{\xi}(\mu, p)u_t, \\ \mu p\eta(t) &= A_{\eta}(\mu, p)\eta_t + B_{\eta}(\mu, p)u_t, \end{aligned} \quad (36)$$

что в силу (28) равносильно (30).

Применение преобразования (12), (13) к начальным условиям (33) дает начальные условия (31) для расщепленной системы (30). \square

Из (28)–(30) следует, что вырожденная система (4) и система погранслоя (6) представляют из себя асимптотическую декомпозицию исходной системы (1)–(2).

Основываясь на итерационном решении k -го порядка ($k = 0, 1, \dots$) из (20), несложно по (13) определить аппроксимацию преобразования $G(\mu, p)$ k -го порядка, а также аппроксимацию k -го порядка быстрой и медленной подсистем расщепленной системы (30). В отличие от системы (36), которая в общем случае представляет систему с бесконечным запаздыванием, при каждом фиксированном k ($k = 0, 1, \dots$) аппроксимация k -го порядка расщепленной системы (30) будет системой с конечным запаздыванием.

4. Приложения расщепляющего преобразования. Построенное расщепляющее преобразование можно использовать для обоснования разделения спектра и анализа устойчивости системы (1)–(2), (3), решения задач управления системой (1)–(2) с помощью композитных регуляторов, сконструированных на основе регуляторов отдельно для быстрой и медленной подсистем.

Обоснуем разделение спектра. Пусть \mathbb{C} — поле комплексных чисел. Обозначим через

$$W(\mu, \lambda) = \det[\lambda E_{n_1+n_2} - A(\mu, \lambda)], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (37)$$

матричную характеристическую функцию системы (1)–(2), через $\sigma(\mu) = \{\lambda \in \mathbb{C} : W(\lambda, \mu) = 0\}$ — спектр (множество собственных значений) системы, через

$$W_s(\lambda) = \det[\lambda E_{n_1} - A_s(\lambda)], \quad W_f(\lambda) = \det[\lambda E_{n_2} - A_4] \quad (38)$$

— характеристическую функцию вырожденной системы (4) и характеристический полином системы погранслоя (6), соответственно, и через $\sigma_s = \{\lambda \in \mathbb{C} : W_s(\lambda) = 0\}$ и $\sigma_f = \{\lambda \in \mathbb{C} : W_f(\lambda) = 0\}$ — спектры этих систем.

Пусть выполнено условие $\det A_4 \neq 0$.

Теорема 2 (о разделении спектра). *Спектр системы (1)–(2) разделяется на «быструю» часть, в которой n_2 корней характеристического уравнения $W(\mu, \lambda) = 0$ имеют вид*

$$\frac{1}{\mu}\lambda_i(\mu), \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \lambda_i(\mu) = \lambda_{fi},$$

где $\lambda_{fi} \in \sigma_f$, и «медленную», элементы которой при $\mu \rightarrow 0$ стремятся к элементам спектра вырожденной системы (4):

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \lambda_i(\mu) = \lambda_{si}, \quad \lambda_{si} \in \sigma_s.$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что в результате применения преобразования (12), (13) система (1)–(2) переходит в эквивалентную ей систему (30), которая с учетом (5), (28), (36), (17)–(18) в операторной форме может быть представлена в виде:

$$p\xi(t) = (A_s(p) + O(\mu))\xi_t + (B_s + O(\mu))u(t), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad (39)$$

$$\mu p\eta(t) = (A_4 + O(\mu))\eta(t) + (B_2 + O(\mu))u(t), \quad \eta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in T = [0, t_1]. \quad (40)$$

Заметим, что подсистема (39) $O(\mu)$ -близка к вырожденной системе (4), а (40) — к системе погранслоя (6).

Рассмотрим характеристическое уравнение системы (1)–(2):

$$W(\mu, \lambda) = 0 \quad (41)$$

и характеристическое уравнение эквивалентной ему системы (39)–(40):

$$\det \begin{pmatrix} \lambda E_{n_1} - A_s(\mu, \lambda) + O(\mu) & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & \lambda E_{n_2} - A_4 + O(\mu) \end{pmatrix} = 0,$$

которое очевидно равносильно

$$\det[\lambda E_{n_1} - A_s(\mu, \lambda) + O(\mu)] \cdot \det[\lambda E_{n_2} - A_4 + O(\mu)] = 0.$$

Сравнивая последнее уравнение с характеристическими уравнениями подсистем, приходим к заключению о справедливости утверждения теоремы 2. \square

Таким образом установлено, что система (1)–(2) может быть аппроксимативно разделена на медленную подсистему (39) с «маленькими» собственными значениями и быструю подсистему (40) с «большими» собственными значениями. При этом медленная и быстрая подсистемы (39), (40) $O(\mu)$ -близки к вырожденной системе (4) и системе погранслоя (6), соответственно. Характеристическое уравнение исходной системы (41) может анализироваться асимптотически через два намного более простых, не зависящих от малого параметра, уравнения квазимногочленного и многочленного типа (38).

Разделение спектра на два непересекающихся множества для сингулярно возмущенных систем без запаздывания доказывается на основании декомпозиции в [13], для сингулярно возмущенной линейной стационарной системы с малыми запаздываниями в состоянии и управляющих переменных обосновано в [8], для сингулярно возмущенных систем с одним постоянным запаздыванием в медленной переменной — в [5], для сингулярно возмущенных систем с запаздываниями двух масштабов — постоянным в медленных переменных и малым (порядка малости μ) в быстрых переменных — в [11]. В [5, 8, 13] доказательство основано на расщепляющем преобразовании типа Chang.

5. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) - y(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 4], \\ \mu \dot{y} &= kx(t-2) - y(t) + u(t), \quad u \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R}, \\ x(\theta) &= \phi(\theta) \equiv 1, \quad \theta \in [-2, 0], \quad y(0) = y_0 = 3. \end{aligned} \quad (42)$$

Система (42) является частным случаем система (1)–(3) с параметрами $h = 2$, $t_0 = 0$, $t_1 = 4$, и скалярными функциями:

$$A_1(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \leq -2, \\ 1, & -2 < \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad A_2 = -1, \quad (43)$$

$$A_3(\xi) = \begin{cases} -k, & \xi \leq -2, \\ 0, & -2 < \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad A_4 = -1, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 1.$$

Для построения расщепляющего преобразования (12), (13) согласно (18) имеем первые члены рядов (20) для системы (42):

$$H^0 = 1, \quad H^1 = -1, \quad L^i(p) = \int_{-2}^0 [dL^i(\xi)] e^{p\xi}, \quad i = 0, 1, \quad (44)$$

$$L^0(\xi) = \begin{cases} k, & \xi \leq -4, \\ k, & -4 < \xi \leq -2, \\ 0, & -2 < \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad L^1(\xi) = \begin{cases} k - k^2, & \xi \leq -4, \\ k, & -4 < \xi \leq -2, \\ 0, & -2 < \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0. \end{cases} \quad (45)$$

В соответствии с (5), (43) имеем параметры вырожденной системы (4):

$$A_s(p) = \int_{-2}^0 [dA_s(\xi)] e^{p\xi}, \quad B_s(p) = -1, \quad A_s(\xi) = \begin{cases} k + 1, & \xi \leq -2, \\ 1, & -2 < \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0. \end{cases} \quad (46)$$

Окончательно имеем вырожденную систему (4) для системы (42):

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= -x_s(t) - kx_s(t-2) - u_s(t), \quad t \in [0, 4], \\ x_s(\theta) &= 1, \quad \theta \in [-2, 0], \end{aligned}$$

и систему погранслоя:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} y_f(\tau) &= -y_f(\tau) + u_f(\tau), \quad \tau \in \left[0, \frac{4}{\mu}\right], \\ y_f(0) &= 3 - k - u_s(0), \end{aligned}$$

которые совпадают с аппроксимацией 0-го порядка расщепленной системы.

Аппроксимация 1-го порядка расщепленной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= -\xi(t) - (k + \mu k)\xi(t-2) - \mu k\xi(t-4) + (-1 + \mu)u(t), \quad t \in [0, 4], \\ \frac{d}{d\tau} \eta(\tau) &= -\eta(\tau) + \mu k\eta\left(\tau - \frac{2}{\mu}\right) + u(\tau), \quad \tau \in \left[0, \frac{4}{\mu}\right], \\ \xi_\theta &= 1 - 3\mu, \quad \eta_\theta = 3 - k - \mu, \quad \theta \in [-2, 0]. \end{aligned} \quad (47)$$

Заметим, что с учетом вида (45) функций, участвующих в определении операторов (44), операторы $L^0(p)$, $L^1(p)$, $A_s(p)$ можно представить в виде:

$$L^0(p) = -ke^{-2p}, \quad L^1(p) = -ke^{-2p}(1 + e^{-2p}), \quad A_s(p) = -1 - ke^{-2p}.$$

Аппроксимация (20) для (42) действительна для всех $\mu \in [0, \mu^*)$, где $\mu^* = (1 + 2k + 2\sqrt{(1+k)k})^{-1}$.

Пример 2. Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) - x_2(t-1) - y(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + x_1(t-1) + 2x_2(t) - x_2(t-1), \\ \mu \dot{y} &= -x_1(t-1) - y(t) + u(t), \quad t \in [0, 2], \\ x(\theta) &= \phi(\theta) = \theta, \quad \theta \in [-2, 0], \quad y(0) = y_0 = 5. \end{aligned} \quad (48)$$

Система (48) является частным случаем системы (1)–(2) с параметрами $n_1 = 2$, $n_2 = r = 1$, $l = 1$, $h = 1$ и матричными функциями

$$A_1(\xi) = \begin{cases} -A_{10} - A_{11}, & \xi \leq -1, \\ -A_{10}, & -1 < \xi < 0, \\ 0_{2 \times 2}, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (49)$$

$$A_3(\xi) = \begin{cases} -A_{30} - A_{31}, & \xi \leq -1, \\ 0_{1 \times 2}, & -1 < \xi < 0, \\ 0_{1 \times 2}, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad A_4 = -1,$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

$$A_{30} = (0 \ 0), \quad A_{31} = (-1 \ 0), \quad B_2 = (1).$$

Для построения расщепляющего преобразования (12), (13) согласно (18) имеем первые члены рядов (20) для системы (48):

$$H^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - e^{-p} \end{pmatrix}, \quad L^i(p) = \int_{-1}^0 [dL^i(\xi)] e^{p\xi}, \quad i = 0, 1,$$

$$L^0(\xi) = \begin{cases} A_{30} + A_{31}, & \xi \leq -1, \\ 0_{1 \times 2}, & -1 < \xi < 0, \\ 0_{1 \times 2}, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad L^1(\xi) = \begin{cases} (0, -1), & \xi \leq -1, \\ (0, 0), & \xi > -1. \end{cases}$$

В соответствии с (5), (49) параметры медленной подсистемы:

$$A_s(p) = \int_{-1}^0 [dA_s(\xi)] e^{p\xi}, \quad A_s(\xi) = \begin{cases} -A_{s0} - A_{s1}, & \xi \leq -1, \\ -A_{s0}, & -1 < \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad B_s = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$A_{s0} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{s1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Окончательно для системы (48) имеем вырожденную систему (4):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{s1}(t) &= -x_{s1}(t) + x_{s1}(t-1) + 2x_{s2}(t) - x_{s2}(t-1) - u_s(t), \\ \dot{x}_{s2}(t) &= -x_{s1}(t) + x_{s1}(t-1) + 2x_{s2}(t) - x_{s2}(t-1), \end{aligned} \quad (51)$$

и систему погранслоя (6):

$$\frac{dy_f(\tau)}{d\tau} = -y_f(\tau) + u_f(\tau). \quad (52)$$

Заметим, что операторы для подсистем можно записать в виде:

$$L^0(p) = (e^{-p}, 0), \quad L^1(p) = (0, e^{-p}), \quad A_s(p) = \begin{pmatrix} -1 + e^{-p} & 2 - e^{-p} \\ -1 + e^{-p} & 2 - e^{-p} \end{pmatrix}.$$

Характеристическая функция (37) для системы (48) имеет вид:

$$W(\mu, \lambda) = \frac{1}{\mu} (\lambda(\lambda - 1)(1 + \mu\lambda) - \mu\lambda e^{-\lambda}(2 - e^{-\lambda} - \lambda)),$$

спектр системы (48):

$$\sigma(\mu) = \left\{ 0, 1 + O(\mu), -\frac{1}{\mu} + O(\mu) \right\}.$$

Характеристические функции (38) для вырожденной системы (51) и системы погранслоя (52):

$$W_s(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 2e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda}), \quad W_f(\lambda) = \lambda + 1.$$

Спектр вырожденной системы (51) и системы погранслоя (52) для (48): $\sigma_s = \{0, 1\}$, $\sigma_f = \{-1\}$, что с учетом (2) иллюстрирует вторую часть теоремы 1.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t) + u(t), \\ \mu \dot{y}(t) &= -y(t) + \int_{-1}^0 e^{\xi} x(t + \xi) d\xi, \quad t \in [0, 2], \\ x(\theta) &= \phi(\theta) = \theta, \quad \theta \in [-1, 0], \quad y(0) = y_0 = 7.\end{aligned}$$

Система (53) является частным случаем системы (1)–(2) с параметрами $n_1 = 1$, $n_2 = r = 1$, $l = 1$, $h = 1$ и матричными функциями

$$A_1(\xi) \begin{cases} 1, & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad A_2 = 0, \quad A_3(\xi) = e^{\xi}, \quad A_4(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 0. \quad (53)$$

Для построения расщепляющего преобразования (12), (13) согласно (18) имеем первые члены рядов (20) для системы (53):

$$\begin{aligned}H^0 &= 0, \quad H^1 = 0, \quad L^i(p) = \int_{-1}^0 [dL^i(\xi)] e^{p\xi}, \quad i = 0, 1, \\ L^0(\xi) &= e^{-\xi}, \quad \xi \in [-h, 0], \quad L^1(\xi) = \begin{cases} e^{\xi}, & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

В соответствии с (5), (53) имеем параметры вырожденной системы:

$$A_s(p) = \int_{-1}^0 [dA_s(\xi)] e^{p\xi}, \quad A_s(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad B_s(p) = 1.$$

Окончательно для (53) имеем вырожденную систему

$$\dot{x}_s(t) = -x_s(t) + u_s(t), \quad x_s(0) = 0,$$

и систему погранслоя

$$\frac{dy_f(\tau)}{d\tau} = -y_f(\tau), \quad y_f(0) = 7.$$

Аппроксимация (20) для (53) действительна для всех $\mu \in [0, 1)$. Характеристическая функция (37) для системы (53) имеет вид:

$$W(\mu, \lambda) = (\lambda + 1) \left(\lambda + \frac{1}{\mu} \right),$$

поэтому система (53) имеет конечный спектр:

$$\sigma(\mu) = \{-1, -1/\mu\}.$$

Характеристические функции для вырожденной системы (3) и (3):

$$w_s(\lambda) = (1 + \lambda), \quad w_f(\lambda) = (1 + \lambda).$$

Спектры вырожденной системы (3) и системы погранслоя (3): $\sigma_s = \{-1\}$, $\sigma_f = \{-1\}$, что соответствует утверждению теоремы 1.

6. Заключение. В статье рассматривается линейная стационарная сингулярно возмущенная функционально-дифференциальная система управления с запаздыванием в медленных переменных состоянии. Обосновано построение невырожденного преобразования типа Chang переменных исходной системы, которое разделяет исходную сингулярно возмущенную систему на две несвязанные $O(\mu)$ -близкие к независимым от μ подсистемы — медленную и быструю подсистемы меньших размеров, чем исходные.

Расщепляющее преобразование может быть построено с любой степенью точности в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра. Получена оценка значений параметра, при которой справедлива аппроксимация. В соответствии с формулами (21), (22) алгоритм декомпозиции может быть реализован в виде программ для систем компьютерной алгебры. На основании декомпозиции обосновано разделение спектра системы на два непересекающихся множества: отдельно с «маленькими» и «большими» собственными значениями.

Применение построенного невырожденного преобразования позволяет понизить порядок рассматриваемой функционально-дифференциальной многомерной сингулярно возмущенной системы и свести решение ряда задач устойчивости, управления и оценивания для больших систем с сингулярными возмущениями к системам меньшей размерности, не зависящим или регулярно зависящим от малого параметра. Такой подход продемонстрирован в [5] на примере решения задачи управления медленной частью спектра линейным динамическим регулятором по медленным переменным.

Использование в расщепленной системе (30) аппроксимаций (20) позволяет получать последовательность систем уравнений с разделенными движениями, обеспечивающих требуемую точность собственных значений, решений $x(t)$, $y(t)$ системы (1)–(2). Полученные результаты можно использовать для решения задач анализа и синтеза линейных стационарных сингулярно возмущенных функционально-дифференциальных систем управления запаздывающего типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1982. — 20. — С. 3–77.
2. Дмитриев М. Г., Курина Г. А. Сингулярные возмущения в задачах управления// Автомат. телемех. — 2006. — 1. — С. 3–51.
3. Копейкина Т. Б. Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием// Диффер. уравн. — 1989. — С. 1508–1518.
4. Курина Г. А. О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 4. — С. 56–61.
5. Цехан О. Б. Расщепляющее преобразование для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и его применение к анализу и управлению спектром// Весн. ГрДУ ім. Я. Купалы. Сер 2. Мат. — 2017. — 7, № 1. — С. 50–61.
6. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
7. Chang K. Singular perturbations of a general boundary value problem// SIAM J. Math. Anal. — 1972. — 3, № 3. — P. 520–526.
8. Fridman E. Decoupling transformation of singularly perturbed systems with small delays and its applications// Z. Angew. Math. Mech. Berlin. — 1996. — 76, № 2. — P. 201–204.
9. Gajic Z., Shen X. Parallel algorithms for optimal control of large scale linear systems. — London: Springer-Verlag, 1993.
10. Glizer V. Ya. L2-Stabilizability conditions for a class of nonstandard singularly perturbed functional-differential systems// Dyn. Cont. Discr. Impuls. Systems. Ser. es B: Appl. Alg. — 2009. — 16. — P. 181–213.
11. Glizer V. Ya. Approximate state-space controllability of linear singularly perturbed systems with two scales of state delays// Asympt. Anal. — 2018. — 107, № 1–2. — P. 73–114.
12. Kokotovic P. V., Haddad A. H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes// IEEE Trans. Automat. Contr. — 1975. — 20, № 1. — P. 111–113.
13. Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J. Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design. — New York: Academic Press, 1986.

14. *Magalhaes L. T.* Exponential estimates for singularly perturbed linear functional differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 1984. — 103. — P. 443–460.
15. *Pekar L., Gao Q.* Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: a literature overview of some recent results// IEEE Acc. — 2018. — 6, № 1. — P. 35457–35491.
16. *Prljaca N., Gajic Z.* General transformation for block diagonalization of multitime-scale singularly perturbed linear systems// IEEE Trans. Automat. Contr. — 2008. — 53, № 5. — P. 1303–1305.
17. *Yang X., Zhu J. J.* A generalization of Chang transformation for linear time-varying systems// Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. — Atlanta, GA, 2010. — P. 6863–6869.
18. *Yang X., Zhu J. J.* Chang transformation for decoupling of singularly perturbed linear slowly time-varying systems// Proc. 51st IEEE Conf. on Decision and Control (December 10-13, Maui, Hawaii, USA), 2012. — P. 5755–5760.
19. *Zhang Y., Naidu D. S., Cai C, et al.* Singular perturbations and time scales in control theories and applications: An overview 2002 – 2012// Int. J. Inf. Syst. Sci. — 2014. — 9, № 1. — P. 1–36.

Цехан Ольга Борисовна

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь

E-mail: tsekhan@grsu.by



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 144–155
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-144-155

УДК 517.982.272, 517.982.27

УСЛОВИЯ НЕИЗОМОРФНОСТИ ПАРЫ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2021 г. М. А. ШУБАРИН

Аннотация. В статье формулируются условия неизоморфности пары пространств Фреше. Эти условия формулируются в терминах инвариантных классов пространств (D_1) и (D_2) . В качестве следствия доказывается неизоморфность весовых пространств непрерывных функций специального вида. Эти пространства можно рассматривать как модификацию пространств степенных рядов конечного и бесконечного типа.

Ключевые слова: изоморфные пространства, ограниченный оператор, метод вещественной интерполяции, весовое пространство непрерывных функций.

CONDITIONS FOR THE NONISOMORPHISM OF A PAIR OF WEIGHTED SPACES OF CONTINUOUS FUNCTIONS

© 2021 M. A. SHUBARIN

ABSTRACT. In this paper, we formulate conditions for a pair of Fréchet spaces to be nonisomorphic. These conditions are formulated in terms of invariant classes of the spaces (D_1) and (D_2) . As a consequence, we prove that weighted spaces of continuous functions of a special form are nonisomorphic. These spaces can be considered as a modification of spaces of power series of finite and infinite type.

Keywords and phrases: isomorphic spaces, bounded operator, real interpolation method, weighted space of continuous functions.

AMS Subject Classification: 47B10, 46B70, 46A63

1. Введение. Постановка задачи.

1.1. В статье рассматривается проблема изоморфной классификации пространств Фреше и, в частности, весовых пространств непрерывных функций.

Пространства Фреше (т.е. полные метризуемые локально выпуклые пространства) X и Y называются изоморфными (и пишут $X \cong Y$), если существует непрерывный биективный линейный оператор $T: X \rightarrow Y$. Оператор T , удовлетворяющий перечисленным условиям, называют изоморфизмом. Если не существует изоморфизма $T: X \rightarrow Y$, то говорят, что пространства X и Y неизоморфны и пишут $X \not\cong Y$.

Проблема изоморфной классификации состоит в нахождении условий изоморфности или неизоморфности двух пространств Фреше.

1.2. Практикуется два подхода к решению этой проблемы. Первый из них основан на изучении линейных топологических инвариантов. По определению, линейным топологическим инвариантом (сокращённо — ЛТИ) называют произвольное отображение Ψ , заданное на некотором множестве \mathcal{K} пространств Фреше и удовлетворяющее следующему условию: если пространства Фреше X, Y из \mathcal{K} изоморфны, то $\Psi(X) = \Psi(Y)$. Таким образом, в терминах ЛТИ можно сформулировать необходимое условие изоморфности пространств из \mathcal{K} . Представляет интерес выделить в \mathcal{K} подмножество \mathcal{K}_0 , на котором Ψ будет сильнейшим линейным топологическим инвариантом. Другими словами, из равенства $\Psi(X) = \Psi(Y)$ для пространств из \mathcal{K}_0 должна следовать изоморфность этих пространств.

Нетривиальными ЛТИ являются:

- (1) аппроксимативная размерность (см. [7, 12, 17]);
- (2) диаметральная размерность (см. [11]) и её модификации (см. [8], дальнейшие обобщения и библиография в [24]).

1.3. Другой подход к решению проблемы изоморфной классификации состоит в нахождении условий, при выполнении которых ни один линейный оператор, действующий в рассматриваемых пространствах, не будет изоморфизмом.

Условия, из которых следует неизоморфизм оператора T , можно сформулировать в терминах «малости» образа этого оператора.

Самое сильное условие малости образа оператора — конечномерность образа этого оператора.

Теорема 1.1. Пусть пространство Фреше X бесконечномерно и произвольный линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ имеет конечномерный образ. Тогда пространства X и Y не изоморфны.

Доказательство этого утверждения основано на том, что при сделанных предположениях X или Y конечномерно.

Более сильное условие неизоморфности формулируется в терминах компактных операторов: линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ называют компактным, если в X существует окрестность нуля U такая, что её образ TU будет относительно компактным подмножеством в Y .

Определение 1.1 (Захарюта В. П. [23]). Пространства Фреше X, Y называют сильно различными (и пишут $(X, Y) \in R$), если любой линейный непрерывный оператор $T: X \rightarrow Y$ компактен.

Теорема 1.2. Сильно различные бесконечномерные пространства Фреше не изоморфны.

1.4. Таким образом, доказательство неизоморфности пространств X и Y сводится к нахождению условий сильного различия этих пространств. Один из вариантов этих условий был получен В. П. Захарютой [23] для пространств Кёте и были сформулированы в терминах инвариантных классов (d_1) и (d_2) .

Бесконечную матрицу $A = (a_{p,n})_{p,n=1}^{+\infty}$ называют матрицей Кёте, если выполняются следующие условия: $0 < a_{p,n} \leq a_{p+1,n}$ для произвольных натуральных чисел p и n . Пространством Кёте называют векторное пространство

$$K(A) := \left\{ x = (x_n) \in \omega : \forall p \|x\|_p := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| a_{p,n} < +\infty \right\}.$$

Набор норм $(\|\cdot\|_p)$ задаёт в X топологию пространства Фреше.

Пусть $K(A)$ — пространство Кёте. Говорят, что пространство $K(A)$ имеет тип (d_1) и пишут $K(A) \in (d_1)$, если

$$\exists p_0 \forall p \forall \tau \in (0, 1) \exists p_1 : \exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} a_{p,n} \leq C a_{p_0,n}^\tau a_{p_1,n}^{1-\tau}.$$

Говорят, что пространство $K(A)$ имеет тип (d_2) и пишут $K(A) \in (d_2)$, если

$$\forall q_0 \forall \tau \in (0, 1) \exists q \forall q_1 : \exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} a_{q,n} \geq C^{-1} a_{q_0,n}^{1-\tau} a_{q_1,n}^\tau.$$

Классы пространств (d_j) в терминах поперечников Колмогорова были определены М. М. Драгилевым [2]. Приведённые выше условия (без дополнительных ограничений на пространства) содержатся в работе В. П. Захарюты [23].

Теорема 1.3 (Захарюта В. П. [3, теорема 2], [23]). *Пусть выполняются следующие условия:*

- (1) $X \cong K(A)$, $Y \cong K(B)$;
- (2) X — монтелиевское пространство;
- (3) $K(A) \in (d_2)$, $K(B) \in (d_1)$.

Тогда пространства X и Y сильно различны. В частности, эти пространства не изоморфны.

Пример 1.1. Пусть $0 < r \leq +\infty$. Через A_r обозначают пространство функций, аналитических в круге $|z| < r$. Топология пространства Фреше в этом пространстве определяется как топология равномерной сходимости на компактных подмножествах в круге $|z| < r$. Пространства A_r не являются пространствами Кёте, но в них есть абсолютный базис и поэтому они изоморфны подходящим пространствам Кёте. Известно, что

- (1) A_1 изоморфно пространству Кёте из (d_2) ,
- (2) A_∞ изоморфно пространству Кёте из (d_1) ,
- (3) A_∞ — монтелиевское пространство.

Неизоморфность пространств A_1 и A_∞ есть следствие перечисленных свойств и теоремы 1.3.

Рассматриваемые в примере пространства интересны тем, что их можно рассматривать в качестве контрпримера к следующей гипотезе: если пространства X , Y таковы, что $(X, Y) \in R$, следует ли отсюда, что $(Y, X) \in R$? Для доказательства того, что $(Y, X) \notin R$ достаточно заметить, что A_∞ изоморфно подпространству в A_1 (см. [18, лемма 2.1]).

1.5. Обобщение теоремы 1.3 можно разбить на следующие, частично связанные, темы:

- (А) рассматриваемые условия неизоморфности пространств должны быть безбазисными;
- (В) требование сильного различия пространств должно быть ослаблено, возможность этого ослабления была изначально заложена в доказательстве теоремы 1.3.

Эта программа была частично реализована в предлагаемой статье:

- (В) вместо компактных операторов рассматриваются операторы, которые в работах Д. Фогта были названы ограниченными операторами (по терминологии Д. Фогта — bounded map);
- (А) вместо классов (d_j) рассматриваются классы пространств (D_j) , которые изначально имели безбазисное определение;
- (С) на основе полученных в статье результатов (теорема 3.2) было доказано утверждение о неизоморфности весовых пространств непрерывных функций специального вида (теорема 4.4).

2. Инвариантные классы.

2.1. Пусть X — пространство Фреше, $(\|\cdot\|_p)$ — монотонный набор норм, определяющий топологию в X . Говорят, что это пространство имеет тип $(D_1) = (DN)$ и пишут $X \in (D_1) = (DN)$, если

$$\exists p_0 \forall p \forall \tau \in (0, 1) \exists p_1 : \exists C > 0 \forall x \in X \|x\|_p \leq C \|x\|_{p_0}^\tau \|x\|_{p_1}^{1-\tau}. \quad (1)$$

Говорят, что это пространство имеет тип $(D_2) = (\overline{\Omega})$ и пишут $X \in (D_2) = (\overline{\Omega})$, если

$$\forall q_0 \forall \tau \in (0, 1) \exists q \forall q_1 : \exists C > 0 \forall n \|x'\|'_p \leq C (\|x'\|'_{p_0})^{1-\tau} (\|x'\|'_{p_1})^\tau. \quad (2)$$

Здесь $\|x'\|'_s := \sup\{|x'(x)| : x \in X, \|x\|_s \leq 1\}$.

Эти классы были определены в [6, 19, 22].

В работах В. П. Захарюты в терминах инвариантных классов была построена частичная изоморфная классификация пространств аналитических и пространств Кёте специального вида — степенных пространств Кёте первого и второго рода. Д. Фогт, М.-Й. Вагнер в терминах этих классов дали характеристику подпространств и факторпространств в пространствах степенных рядов конечного и бесконечного типа. Основное отличие в подходах этих авторов заключается

в том, что В. П. Захарюта определил классы пространств (D_j) в терминах комплексных интерполяционных шкал. Непосредственно проверяется, что для пространства Кёте $K(A)$ утверждения $K(A) \in (d_j)$ и $K(A) \in (D_j)$ равносильны.

2.2. Пусть X — пространство Фреше и (U_p) — базис окрестностей нуля в X . Всегда можно считать, что $U_p \supset U_{p+1}$ для произвольного p .

Теорема 2.1. *Принадлежность пространства X классу (D_1) равносильна каждому из следующих условий:*

$$\exists p_0 \forall p \forall d > 0 \exists p_1 \exists C > 0 : \forall x \in X \forall t > 0 \|x\|_p \leq t^d \|x\|_{p_0} + \frac{C}{t} \|x\|_{p_1}, \quad (3)$$

$$\exists p_0 \forall p \forall d > 0 \exists p_1 \exists C > 0 : \forall t > 0 U_p^\circ \subset t^d U_{p_0}^\circ + \frac{C}{t} U_{p_1}^\circ, \quad (4)$$

Теорема 2.2. *Принадлежность пространства X классу (D_2) равносильна каждому из следующих условий:*

$$\forall p_0 \forall d > 0 \exists p \forall p_1 \exists C > 0 : \forall x' \in X' \forall t > 0 \|x'\|'_p \leq t^d \|x'\|'_{p_0} + \frac{C}{t} \|x'\|'_{p_1}, \quad (5)$$

$$\forall p_0 \forall d > 0 \exists p \forall p_1 \exists C > 0 : \forall t > 0 U_p \leq t^d U_{p_0} + \frac{C}{t} U_{p_1}, \quad (6)$$

Здесь $(\|\cdot\|'_p)$ — набор сопряжённых норм в X' :

$$\|x'\|'_p := \sup\{x'(x) : \|x\|_p \leq 1\}.$$

2.3. Пусть X — пространство Фреше, (X_p) — проективный спектр банаховых пространств, определяющих это пространство, $\|\cdot\|_p$ — норма в X_p . Покажем, что свойство пространства Фреше принадлежать инвариантным классам (D_j) можно рассматривать как внутреннее интерполяционное свойство рассматриваемого пространства, которое формулируются в терминах метода вещественной интерполяции.

В теоремах 2.3–2.4 используются следующая интерпретация семейств, сопряжённых к интерполяционным семействам банаховых пространств [15]. Пусть даны банаховы пространства E_0, E_1, \dots и банахово пространство E , непрерывно и плотно вкладываются во все пространства E_j . Это замечание позволяет отождествлять пространство E_j с пространством E_j^\sharp :

$$E_j^\sharp := \left\{ x' \in E' : |x|_E^\sharp := \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{|x'(x)|}{|x|_E} < +\infty \right\},$$

наделённого нормой $|\cdot|_E^\sharp$. При таком отождествлении семейство $E_0^\sharp, E_1^\sharp, \dots$ непрерывно вкладываются в одно и то же отделимое локально выпуклое пространство E' . Тогда произвольный функционал $x' \in E_j^\sharp$ однозначно определяется своим сужением на E . В частности, полярной B° подмножества B в E_j называют подмножество в E_j^\sharp вида

$$B^\circ := \{y' \in E' : \forall y \in B |y'(e)| \leq 1\}.$$

В теоремах 2.3–2.5 предполагается, что даны такие банаховы пространства X_0, X, X_1 и векторное пространство E , что

- (1) $X_1 \subset X \subset X_0$ с плотными операторами вложения;
- (2) E всюду плотно во всех пространствах X_0, X, X_1 ;
- (3) $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ — нормы соответственно в X_0, X, X_1 ;
- (4) V_0, V, V_1 — единичные шары соответственно в X_0, X, X_1 ;
- (5) $U_0 := V_0 \cap E, U := V \cap E, U_1 := V_1 \cap E$ — единичные шары соответственно в $(E, \|\cdot\|_0), (E, \|\cdot\|), (E, \|\cdot\|_1)$.

Теорема 2.3. *Следующие условия эквивалентны:*

- (1) $\exists \tau \in (0, 1) \exists C > 0 \forall x \in X_1 \|x\| \leq C \|x\|_0^{1-\tau} \|x\|_1^\tau$;

$$(2) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \exists C > 0 \forall t > 0 \forall x \in X_1 \|x\| \leq t^d \|x\|_0 + \frac{C}{t} \|x\|_1;$$

$$(3) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \exists C > 0 \forall t > 0 U^\circ \subset t^d U_0^\circ + \frac{C}{t} U_1^\circ;$$

$$(4) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \forall p \in [1, +\infty) X \supset (X_0, X_1)_{\tau, p}.$$

В условии (3) предполагается, что B° — поляр подмножества B .

Доказательство. Эквивалентность условий (1)–(3) (и равенство $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$) доказывается по схеме, разработанной в работах Д. Фогта [19]. Импликация (4) \Rightarrow (1) следует из [9, теорема 1.3.3].

Предположим, что условие (3) выполняется при $\tau = \tau_0 = \frac{1}{1+d_0}$. После подстановки $t = s^{d_0+1}$ условие (3) преобразуется к следующему виду:

$$\forall s > 0 U^\circ \subset s^{\tau_0} U_0^\circ + \frac{C}{s^{1-\tau_0}} U_1^\circ. \quad (7)$$

Фиксируем произвольное $s > 0$. Из (7) следует, что для произвольного $x' \in U^\circ$ существует разложение

$$x' = s^{\tau_0} x'_0 + \frac{C}{s^{1-\tau_0}} x'_1,$$

в котором $x'_j \in U_j^\circ$, $j = 0, 1$. Из определения K -функционала следует, что

$$K(x', s) \leq s^{\tau_0} \|x'_0\|'_0 + C s \cdot s^{-(1-\tau_0)} \|x'_1\|'_1 \leq C_1 s^{\tau_0}. \quad (8)$$

При $s \in (0, 1]$ условие (8) можно уточнить. Для этого фиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, (1 - \tau_0)/2)$. Существует число $C_2 > 0$ такое, что

$$U^\circ \subset C_2 U_1^\circ \subset C_2 s^{2\varepsilon - (1-\tau_0)} U_1^\circ,$$

$s \in (0, 1]$. Из доказанного включения следует, что для произвольного $x' \in U^\circ$ существует $x'_1 \in U_1^\circ$ такое, что

$$K(x', s) \leq s \cdot C_2 s^{2\varepsilon - (1-\tau_0)} \|x'_1\|'_1 = C_2 s^{\tau_0 + 2\varepsilon}. \quad (9)$$

Но тогда для произвольных $q \in (1, +\infty)$ и $x' \in U^\circ$ верна цепочка неравенств

$$\|x'\|(X_0^\sharp, X_1^\sharp)_{\tau, q}\|^q = \int_0^1 [s^{-\tau_0} K(x', s)]^q \frac{ds}{s} + \int_1^{+\infty} [s^{-\tau_0} K(x', s)]^q \frac{ds}{s} \leq \int_0^1 s^{\varepsilon q} \frac{ds}{s} + \int_1^{+\infty} s^{-\varepsilon q} \frac{ds}{s} := C_4 < +\infty.$$

Если же $q = \infty$, то

$$\|x'\|(X_0^\sharp, X_1^\sharp)_{\tau, \infty}\| = \sup_{s>0} s^{-\tau_0} K(x', s) \leq \max\left\{ \sup_{s \in (0, 1]} s^\varepsilon, \sup_{s > 1} s^{-\varepsilon} \right\} := C_5 < +\infty.$$

Из полученных неравенств следует, что

$$\|x'\|(X_0, X_1)_{\tau, p}^\sharp\| \stackrel{(*)}{\leq} C_6 \|x'\|(X_0^\sharp, X_1^\sharp)_{\tau, p}\| \leq \|x'\|' \quad (10)$$

для произвольного $x' \in X'$. Неравенство (*) есть следствие теоремы двойственности для вещественного метода интерполяции [9, 1.11.2]. Возможность применения этого утверждения следует из того, что по условию X_1 плотно вкладывается в X_0 .

Из (10) следует, что $X' \subset (X_0, X_1)_{\tau, p}^\sharp$. Искомое утверждение следует из леммы 2.1. \square

Лемма 2.1. Пусть даны банаховы пространства E_0, E_1 , промежуточные между X_0 и X_1 , причём $X_1 \subset E_j$ с плотным образом оператора вложения. Тогда следующие условия (а) и (б) равносильны (операторы вложения в этих условиях имеют всюду плотный образ):

$$(a) E_1 \subset E_0;$$

$$(b) E_0^\sharp \subset E_1^\sharp.$$

Теорема 2.4. Следующие условия эквивалентны:

$$(1) \exists \tau \in (0, 1) \exists C > 0 \forall x \in X'_0 \|x'\|' \leq C (\|x'\|'_0)^{1-\tau} (\|x'\|'_1)^\tau;$$

$$(2) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \exists C > 0 \forall t > 0 \forall x' \in X'_0 \|x'\|' \leq t^d \|x'\|'_1 + \frac{C}{t} \|x'\|'_0;$$

$$(3) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \exists C > 0 \forall t > 0 U \subset t^d U_1 + \frac{C}{t} U_0;$$

$$(4) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \forall p \in [1, +\infty) X \subset (X_1, X_0)_{\tau, p}.$$

Если τ_j — наилучшее значение числа τ в условии j , то $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.4, в доказательстве нуждается только эквивалентность условий (3) и (4).

Докажем импликацию (4) \Rightarrow (1). Для этого перейдём в условии (4) к сопряжённым пространствам:

$$(X_1^\#, X_0^\#)_{\tau, q} = (X_1, X_0)_{\tau, q}^\# \subset X^\#, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Тогда условие (1) (и равносильное ему условие (3)) есть следствие [9, теорема 1.3.3].

Доказательство импликации (3) \Rightarrow (4) дословно повторяет доказательство импликации (3) \Rightarrow (4) из теоремы 2.3. \square

В теоремах 2.3 и 2.4 условия (4) формулируются в терминах пространств $(E_0, E_1)_{\tau, p}$ с конечным p . Ограничение обусловлено использованием теорем действенности и плотности для метода вещественной интерполяции.

Для произвольной интерполяционной пары банаховых пространств $[E_0, E_1]$ обозначим через $(E_0, E_1)_{\tau, \infty}^\circ$ замыкание $E_0 \cap E_1$ в топологии пространства $(E_0, E_1)_{\tau, \infty}$.

Теорема 2.5. *Справедливы импликации (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3), где*

$$(1) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) X \supset (X_0, X_1)_{\tau, \infty}.$$

$$(2) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \exists C > 0 \forall t > 0 U^\circ \subset t^d U_0^\circ + \frac{C}{t} U_1^\circ;$$

$$(3) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) X \supset (X_0, X_1)_{\tau, \infty}^\circ.$$

и импликации (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6), где

$$(4) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) X \subset (X_1, X_0)_{\tau, \infty}^\circ,$$

$$(5) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) \exists C > 0 \forall t > 0 U \subset t^d U_1 + \frac{C}{t} U_0;$$

$$(6) \exists \tau = \frac{1}{1+d} \in (0, 1) X \subset (X_1, X_0)_{\tau, \infty}.$$

3. Ограниченные операторы.

3.1. Возможность обобщения теоремы 1.3 изначально содержалась в доказательстве этого утверждения. Заметим, что условие монтеливости пространства $K(B)$ применялось только на последнем этапе доказательства, на котором из ограниченности подмножества в пространстве $K(B)$ выводилась относительно компактность этого множества. Это замечание приводит к следующему определению:

Определение 3.1 (см. [20], [16, с. 375]). Линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ называют ограниченным (по терминологии авторов — bounded map), если существует окрестность нуля U в X такая, что множество TU ограничено в Y .

Тогда верно следующее утверждение.

Теорема 3.1 (см. [23]). *Пусть выполняются следующие условия:*

$$(1) X \cong K(A), Y \cong K(B);$$

$$(2) K(A) \in (d_2), K(B) \in (d_1).$$

Тогда любой непрерывный линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ ограничен. Если, кроме того, эти пространства не нормируемые, то они не изоморфны.

Следует отметить, что свойство линейного оператора $T: X \rightarrow Y$ быть ограниченным нетривиально только для ненормируемых пространств X, Y .

Теорема 3.2 (см. [10]). Пусть X, Y — пространства Фреше и $X \in (D_2), X \in (D_1)$. Тогда любой непрерывный линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ ограничен. Если, кроме того, эти пространства не нормируемые, то они не изоморфны.

Доказательство. Пусть выполняются все условия теоремы. Тогда из определения классов (D_j) и теорем 2.3 и 2.4 следует, что:

$$\exists p_0 \forall q_0 \exists q = q(q_0) > q_0 \forall p > p_0 \exists p_1 = p_1(p) > p \forall q_1 > q$$

$$\|x\|_{2,p} \leq C_1 \|y\|_{(Y_{1,p_1}, Y_{1,p_0})_{1/3,2}} = C_1 \|y\|_{(Y_{1,p_0}, Y_{1,p_1})_{2/3,2}}, \quad (11)$$

$$\|x\|_{(X_{1,p_0}, X_{1,p_1})_{2/3,2}} \leq C_2 \|x\|_{0,p},$$

$$\|Tx|Y\|_{p_j} \leq \|x|X\|_{q_j} \quad (12)$$

для произвольных $x \in X, y \in Y$. Фиксируем индексы p_0, p, q_0 так, чтобы выполнялись условия (11), (12). При этом всегда можно считать, что $p_0 < q_0, p_1 < q_1$. Таким образом, индекс q зависит только от q_0 , который зависит только от p_0 .

Но тогда для произвольного $x \in X_0$ выполняется неравенство

$$\|Tx|Y\|_{2,p} \leq C_1 \|Tx\|_{(Y_{1,p_1}, Y_{1,p_0})_{1/3,2}} \leq C_1 \|x\|_{(X_{1,q_0}, X_{1,q_1})_{2/3,2}} \leq C_1 C_2 \|x|X\|_{0,q}.$$

Из сделанных предположений относительно индексов норм p_0, p, p_1 и q_0, q, q_1 и предыдущего неравенства следует ограниченность оператора T . Теорема доказана. \square

4. Весовые пространства непрерывных функций.

4.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — область (т.е. открытое и связное множество). Функцию $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *весовой* (точнее вещественной весовой функцией, другие варианты определения весовой функции в пространствах непрерывных функций см. в [1, 13, 14], если она непрерывна. Из определения весовой функции следует, что

$$\forall x \in D \exists R = R_F(x) > 0 : \forall y \in D, \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} < R \quad |F(x) - F(y)| < 1 \quad (13)$$

для произвольной функции $F \in \mathcal{C}$. Всюду L с различными добавочными индексами — числа, не зависящие от функции f .

Если F — весовая функция, то через $C(D, F)$ обозначим множество всех непрерывных функций $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_F := \sup_{x \in D} |f(x)| e^{-F(x)}.$$

Лемма 4.1. При сделанных предположениях $C(D, F)$ — банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|_F$.

Через $C_0(D, F)$ обозначим множество всех $f \in C(D, F)$, для которых $|f(x)| = O(e^{F(x)})$ при $x \rightarrow \partial D$. Другими словами, $f \in C_0(D, F)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \Subset D : |f(x)| \leq \varepsilon e^{F(x)} \quad \forall x \in D \setminus K.$$

По построению, $C_0(D, F)$ есть замкнутое подпространство в $C(D, F)$. Необходимость рассмотрения пространств $C_0(D, F)$ обусловлена следующими утверждениями.

Лемма 4.2. Множество непрерывных функций $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем всюду плотно в $C_0(D, F)$.

Как обычно, носителем $\text{supp}(f)$ непрерывной функции f называют замыкание подмножества в D , на котором функция не обращается в ноль.

Лемма 4.3. Следующие условия равносильны для любых весовых функций $G_0 \in \mathcal{C}_D, G_1 \in \mathcal{C}_D$:

(1) $\exists R > 0 : \forall x \in D \quad G_1(x) \leq G_0(x) + R;$

- (2) $C(D, G_1) \subset C(D, G_0)$;
 (3) $C_0(D, G_1) \subset C_0(D, G_0)$.

Лемма 4.4. Пусть F_0, F_1 — такие весовые функции в области D , что $F_1(x) < F_0(x)$ в D и $F_1(x) - F_0(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow \partial D$. Тогда $C_0(D, F_1)$ есть всюду плотное векторное подпространство в $C_0(D, F_0)$.

4.2. Пусть $\mathcal{F} = (F_p)$ — семейство вещественных весовых функций в области D . Будем называть это семейство весовым (точнее, вещественным весовым семейством), если

- (1) $F_{p+1}(x) \leq F_p(x)$ для всех $x \in D$;
 (2) $F_p(x) - F_{p+1}(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow \partial D$

для произвольного p . Множество всех вещественных весовых семейств обозначим через (\mathcal{C}_D) .

Если $\mathcal{F} = (F_p) \in (\mathcal{C}_D)$, то $C(D, \mathcal{F})$ — множество всех непрерывных функций $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, для которых конечны все нормы $\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{F_p}$.

Лемма 4.5. При сделанных предположениях $C(D, \mathcal{F})$ — пространство Фреше, топология в котором определяется набором норм $(\|\cdot\|_p)$. Кроме того, пополнение $C(D, \mathcal{F})$ по норме $\|\cdot\|_p$ совпадает с $C_0(D, F_p)$.

4.3. Изоморфная классификация пространств аналитических функций, построенная В. П. Захарютой (см. [3,4,6]), существенно опирается на изучение интерполяционных свойств пространств этого типа. В свою очередь, интерполяционные свойства пространств аналитических функций есть следствие теоремы о шкале пространств аналитических функций и аналитических функционалов (см. [5]).

Если опустить некоторые технические детали, то теорему В. П. Захарюты о шкалах можно сформулировать следующим образом: пусть даны область $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ и компакт $K \Subset \Omega$. При выполнении ряда дополнительных условий найдутся такие плюрисубгармоническая функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ и сепарабельные гильбертовы пространства H_0, H_1 , что $A(\overline{D}) \subset H_1 \subset A(D) \subset A(K) \subset H_0 \subset AC(K)$. Тогда

$$A(K_\alpha) \subset (H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha \subset A(D_\alpha) \quad (14)$$

для произвольного $\alpha \in (0, 1)$. В (14) используются следующие обозначения:

- (1) $D_\alpha := \{z \in D : u(z) < \alpha\}$;
 (2) $A(\Omega)$ — пространство функций, аналитических в области Ω , наделённое топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах в Ω ;
 (3) $K_\alpha := \{z \in D : u(z) \leq \alpha\}$;
 (4) если $K \Subset \Omega$, то $A(K)$ состоит из функций, аналитических на множестве K ;
 (5) $[(H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha]$ — комплексная шкала, построенная по пространствам H_0 и H_1 .

В статье доказывается аналог теоремы В. П. Захарюты о шкале, в котором рассматриваются семейства весовых банаховых пространств непрерывных функций. Основное отличие заключается в том, что вместо метода комплексных шкал применяется метод вещественной интерполяции.

Теорема 4.1. Пусть F_0, F_1 — весовые функции в области D такие, что $F_1(x) < F_0(x)$ для произвольного $x \in D$. Положим $F_\tau := (1 - \tau)F_0 + \tau F_1$. Тогда

$$C(D, F_{\tau+\varepsilon}) \subset (C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty} \subset C(D, F_\tau) \quad (15)$$

для любого $\tau \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, 1 - \tau)$.

Доказательство теоремы 4.1 разбивается на две части — более простую (лемма 4.6) и более сложную (лемма 4.7). Возможность доказательства теоремы 4.1 связана с тем, что пространства $C(D, F_0)$ и $C(D, F_1)$ имеют много общих бесконечномерных пространств.

Лемма 4.6. Пусть F_0, F_1 — весовые функции в области D такие, что $F_1(x) < F_0(x)$ для произвольного $x \in D$. Тогда

$$(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty} \subset C(D, F_\tau) \quad (16)$$

для любого $\tau \in (0, 1)$.

Доказательство. Для доказательства непрерывности вложения (16) фиксируем произвольную ненулевую функцию f , принадлежащую левой части условия (16). Из определения K -функционала следует, что для произвольного положительного t существование разложения $f = f_0 + f_1$ такое, что $f_j \in C(D, F_j)$, $j = 0, 1$ и $K(f, t) \leq \|f_0\|_{F_0} + t\|f_1\|_{F_1} \leq 2K(f, t)$. Но тогда для любого $x \in D$ такого, что $f(x) \neq 0$, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} 2K(f, t) &\geq \|f_0\|_{F_0} + t\|f_1\|_{F_1} \geq |f_0(x)|e^{-F_0(x)} + t|f_1(x)|e^{-F_1(x)} = \\ &= (|f_0(x)| + |f_1(x)|) \left(\frac{|f_0(x)|}{|f_0(x)| + |f_1(x)|} e^{-F_0(x)} + t \frac{|f_1(x)|}{|f_0(x)| + |f_1(x)|} e^{-F_1(x)} \right) \geq \\ &\geq |f(x)| \inf_{\tau \in [0, 1]} ((1 - \tau)e^{-F_0(x)} + \tau te^{-F_1(x)}) = |f(x)| \min\{e^{-F_0(x)}, te^{-F_1(x)}\}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что $2K(f, t) \geq |f(x)| \min\{e^{-F_0(x)}, te^{-F_1(x)}\}$ для произвольной функции $f \in (C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}$. Но тогда

$$\|f|(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}\| \geq \frac{1}{2} \sup_{t > 0} \left[t^{-\tau} |f(x)| \min\{e^{-F_0(x)}, te^{-F_1(x)}\} \right] = \frac{1}{2} |f(x)| e^{-F_\tau(x)}.$$

Если в полученном неравенстве перейти к точной по всем $x \in D$, то получается неравенство

$$\|f\|_{F_\tau} = \sup_{x \in D} |f(x)| e^{-F_\tau(x)} \leq 2 \|f|(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}\|,$$

из которого следует, что $f \in C(D, F_\tau)$. Но тогда $(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}$ непрерывно вкладывается в $C(D, F_\tau)$. Лемма доказана. \square

Лемма 4.7. Пусть F_0, F_1 — весовые функции в области D — удовлетворяют условиям теоремы 4.1. Тогда

$$C(D, F_{\tau+\varepsilon}) \subset (C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}$$

для любого $\tau \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, 1 - \tau)$.

Доказательство. Для произвольной ненулевой функции $f \in C(D, F_1)$ положим

$$\Phi(f) = \Phi(f; F_0, F_1) := \inf_{x \in D, f(x) \neq 0} \max_{j=0, 1} \frac{\|f\|_{F_j}}{|f(x)| e^{-F_j(x)}}.$$

Из определения функционала $\Phi(\cdot)$ и метода вещественной интерполяции следует, что

$$\forall f \in C(D, F_1) \quad \|f|(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}\| \leq 2\Phi(f) \|f\|_\tau,$$

где $\text{supp}(f)$ — носитель функции f (т.е. замыкание в \mathbb{R}^n множества всех $x \in D$, где $f(x) \neq 0$).

Фиксируем произвольные $\tau \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, 1 - \tau)$. Предположим, что для произвольной ненулевой функции $f \in C(D, F_{\tau+\varepsilon})$ найдено такое разложение $f = \sum_{s=0}^{+\infty} f_s$, что

- (a) $f_s \in C(D, F_1)$;
- (b) числовая последовательность $(\Phi(f_s))$ ограничена;
- (c) существует число L_1 такое, что

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\|f_s\|_\tau}{\|f_s\|_{\tau+\varepsilon}} \leq L_1;$$

- (d) $\|f_s\|_{\tau+\varepsilon} \leq \|f\|_{\tau+\varepsilon}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \|f|(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}\| &\leq \sum_{s=0}^{+\infty} \|f_s|(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}\| \leq \\ &\leq 2 \sum_{s=0}^{+\infty} \Phi(f_s) \|f_s\|_\tau \leq L_2 \sum_{s=0}^{+\infty} \|f_s\|_{\tau+\varepsilon} \frac{\|f_s\|_\tau}{\|f_s\|_{\tau+\varepsilon}} \leq L_3 \|f\|_{\tau+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Докажем, что для произвольной ненулевой функции $f \in C(D, F_{\tau+\varepsilon})$ найдётся разложение, удовлетворяющее условиям (а)–(д). Пусть $(\lambda_s)_{s \geq 0}$ — такая числовая последовательность, что $\lambda_0 = 1$, $\lambda_s \downarrow 0$ и $\lambda_{s+1} \asymp \lambda_s$ при $s \uparrow +\infty$, $\sum_{s=0}^{+\infty} \lambda_s^\varepsilon < +\infty$ для произвольного $\varepsilon > 0$.

Положим $K_s := \{x \in D : \ln(\lambda_{s+1}) < F_1(x) - F_0(x) \leq \ln(\lambda_s)\}$, $s \geq 0$. По построению множества K_s попарно не пересекаются и $\bigcup_{s \geq 0} K_s = D$. Из свойств последовательности (λ_s) следует существование такого числа $L_4 > 0$, что

$$\ln \frac{\lambda_s}{L_4} \leq F_1(x) - F_0(x) \leq \ln(L_4 \lambda_s)$$

для произвольных $s \geq 0$ и $x \in \Omega_s := \bigcup_{x \in K_s} B(x, R(x))$, где $R(x) := \min\{R_{F_0}(x), R_{F_1}(x)\} > 0$,

$B(x, r)$ — открытый шар в \mathbb{R}^n с центром в точке x радиуса r , отображение $x \mapsto R_F(x)$ определяется условием (13) по весовой функции F . Существуют такие последовательность (x_k) точек из D и семейство множеств $(N_s)_{s \geq 0}$, что

- (е) множества N_s попарно не пересекаются и $\bigcup_{s \geq 0} N_s = \mathbb{N}$;
- (ф) семейство $\{B(x_k, R(x_k))\}$ образует локально конечное открытое покрытие области D (т.е. каждая точка $x \in D$ содержится в конечном множестве шаров $B(x_k, R(x_k))$);
- (г) $x_k \in K_s$, $k \in N_s$.

По семейству шаров строится такое семейство гладких функций (ψ_k) , что

- (h) $0 \leq \psi_k(x) \leq 1$ в D ;
- (и) $\text{supp}(\psi_k(x)) \subset B(x_k, R(x_k))$;
- (j) $\sum_k \psi_k(x) \equiv 1$ в D .

Наконец, положим $\Psi_s := \sum_{k \in N_s} \psi_k$. По построению $\Psi_s(x) \geq 0$, $\text{supp}(\Psi_s) \subset \Omega_s$, $\sum_{s \geq 0} \Psi_s \equiv 1$ в D .

Из условий (h)–(j) следует, что разложение $f = \sum_{s \geq 0} f \Psi_s$ удовлетворяет условиям (а)–(д).

Таким образом, доказано существование такого числа $L > 0$, зависящего только от $\tau \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, 1 - \tau)$, что $\|f\|(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}\| \leq L \|f\|_{\tau+\varepsilon}$ для произвольной функции $f \in C(D, F_{\tau+\varepsilon})$. Но тогда $C(D, F_{\tau+\varepsilon})$ непрерывно вкладывается в $(C(D, F_0), C(D, F_1))_{\tau, \infty}$. Лемма доказана. \square

Теорема 4.2. Пусть F_0, F_1 — такие весовые функции в области D , что $F_1(x) < F_0(x)$ для произвольного $x \in D$ и $F_0(x) - F_1(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \partial D$. Тогда

$$C_0(D, F_{\tau+\varepsilon}) \subset (C_0(D, F_0), C_0(D, F_1))_{\tau, \infty}^\circ \subset (C_0(D, F_0), C_0(D, F_1))_{\tau, \infty} \subset C_0(D, F_{\tau-\varepsilon}) \quad (17)$$

для любого $\tau \in (0, 1)$ и $0 < \varepsilon < \min(\tau, 1 - \tau)$.

4.4. Условие принадлежности пространства $C(D, \mathcal{F})$ классам (D_1) и (D_2) можно сформулировать непосредственно в терминах весового семейства \mathcal{F} .

Теорема 4.3. Пусть $\mathcal{F} = (F_p)$ — весовое семейство функций. Тогда следующие условия (1)–(2), (3)–(4) попарно эквивалентны:

- (1) $C(D, \mathcal{F}) \in (D_1)$;
- (2) $\exists p_0 \forall p \forall \tau \in (0, 1) \exists p_1 \forall y \in D F_p(y) \geq -C + (1 - \tau)F_{p_0}(y) + \tau F_{p_1}(y)$;
- (3) $C(D, \mathcal{F}) \in (D_2)$;
- (4) $\forall p_0 \forall \tau \in (0, 1) \exists p \forall p_1 \forall y \in D F_p(y) \leq C + \tau F_{p_0}(y) + (1 - \tau)F_{p_1}(y)$.

Доказательство. Доказательство эквивалентности условий (1)–(2) есть следствие локализуемости свойств непрерывных функций и не нуждается в применении теоремы 4.2.

Пусть $C(D, \mathcal{F}) \in (D_1)$, т.е.

$$\exists p_0 \forall p \exists \tau \in (0, 1) \exists p_1 C_0(D, F_p) \supset (C_0(D, F_{p_0}), C_0(D, F_{p_1}))_{\tau, \infty}^\circ \quad (18)$$

Условие (18) есть следствие определения класса (D_2) , теоремы 2.5. Из теоремы 4.2 и (18) следует, что

$$C_0(D, F_p) \supset (C_0(D, F_{p_0}), C_0(D, F_{p_1}))_{\tau, \infty}^\circ \supset C_0(D, (1 - \tau')F_{p_0} + \tau'F_{p_1}), \quad \tau' = \tau + \varepsilon$$

для произвольного $\varepsilon \in (0, 1 - \tau)$. Но тогда из леммы 4.3 следует условие (6). Обратно, из условия (2) и теоремы 4.2 следует, что

$$\exists p_0 \forall p \exists p_1 \exists \tau \in (0, 1) C_0(D, F_p) \supset C_0(D, (1 - \tau)F_{p_0} + \tau F_{p_1}) \supset (C_0(D, F_{p_0}), C_0(D, F_{p_1}))_{\tau, \infty}.$$

Но тогда условие (1) есть следствие теоремы 2.5. \square

4.5. Пусть

(1) $a: D \rightarrow \mathbb{R}$ — такая непрерывная функция, что $a(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow \partial D$;

(2) $-\infty \leq \delta < +\infty$,

(3) $(\delta_p), \delta_{p+1} < \delta_p$ для произвольного p .

Семейство функций $\mathcal{F} = (\delta_p a)$ будет весовым. Положим $C_\delta(D, a) = C(D, \mathcal{F})$. Пространство $C_\delta(D, a)$ не зависит от выбора последовательности (δ_p) .

Теорема 4.4. При сделанных предположениях $C_\infty(D, a) \in (D_1), C_0(D, a) \in (D_2)$.

Теорема 4.5. При сделанных предположения справедливы следующие утверждения:

- (1) пространства $C_\delta(D, a)$ и $C_0(D, a)$ изоморфны для произвольного конечного δ ;
- (2) произвольный линейный непрерывный оператор $T: C_0(D, a) \rightarrow C_{-\infty}(D, a)$ ограничен;
- (3) пространства $C_{-\infty}(D, a)$ и $C_0(D, a)$ всегда не изоморфны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абанин А. В. Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций // Тр. Междунар. конф. «Математический анализ и математическое моделирование». — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2010. — С. 15–20.
2. Драгилев М. М. О правильных базисах в ядерных пространствах // Мат. сб. — 1965. — 68, № 3. — С. 153–173.
3. Захарюта В. П. Об изоморфизме декартовых произведений линейных топологических пространств // Функц. анализ. прилож. — 1970. — 4, № 2. — С. 87–89.
4. Захарюта В. П. Некоторые линейные топологические инварианты и изоморфизм тензорных произведений центров шкал // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. наук. — 1974. — 4. — С. 62–64.
5. Захарюта В. П. Экстремальные плюрисубгармонические функции, гильбертовы шкалы и изоморфизм пространств аналитических функций многих переменных, // Теор. функций, функц. анализ. прилож. (Харьков). — 1974. — 19. — С. 133–157.
6. Захарюта В. П. Изоморфизмы пространств аналитических функций // Докл. АН СССР. — 1980. — 255, № 1. — С. 11–14.
7. Колмогоров А. Н. О линейной размерности топологических векторных пространств // Докл. АН СССР. — 1958. — 120, № 2. — С. 239–241.
8. Митягин Б. С. Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах // Stud. Math. — 1971. — 37. — С. 111–137.
9. Трибель Х. Теория интерполяции, Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
10. Шубарин М. А. Операторные идеалы, определяемые инвариантными классами пространств Фреше // Мат. форум (Итоги науки. Юг России). — 2013. — 8. — С. 100–112.
11. Bessaga C., Pelczyński A., Rolewicz S. On diametral approximative dimension und linear homogeneity of F-spaces // Bull. Acad. Pol. Sci. — 1961. — 9. — P. 677–683.
12. Bessaga C., Pelczyński A., Rolewicz S. Approximative dimension of liner topological spaces and some of its applications // Stud. Math., Ser. Spec. — 1963. — 1. — P. 26–29.
13. Bierstedt K. D., Bonet J. Weighted (LF)-spaces of continuous functions // Math. Nachr. — 1994. — 165. — P. 25–48.
14. Bierstedt K. D., Meise R., Summers V. H. A projective descriptions of weighted inductive limits // Trans. Am. Math. Soc.. — 272, № 1. — P. 107–160.

15. *Cwikel M.* Lecture notes on duality and interpolation spaces/ [arXiv:0803.3558v2](https://arxiv.org/abs/0803.3558v2) [math.FA].
16. *Meise R., Vogt D.* Introduction to Functional Analysis. — Oxford: Clarendon Press, 1997.
17. *Pelczynski A.* On the approximation of S-spaces by finite dimension space// Bull. Acad. Pol. Sci. — 1957. — 5, № 9. — P. 879–881.
18. *Rolewicz S.* On spaces of holomorphic functions// Stud. Math. — 1962. — 21, № 2. — P. 135–160.
19. *Vogt D.* Charakterisierung der Unterräume von S// Math. Z. — 1977. — 155. — P. 109–117.
20. *Vogt D.* Frecheträume, zwischen denen jede stetige linear Abbildung beschränkt ist// J. Reine Angew. Math. — 1983. — 345. — P. 182–200.
21. *Vogt D., Wagner M. J.* Charakterisierung der Unterräume und Quotientenräume der nuclearen stabilen Potenzreihenräumen von unendlichem Typ// Stud. Math. — 1981. — 70. — P. 63–80.
22. *Wagner M.-J.* Quotientenräume von stabilen Potenzreihenräumen endlichen Typs// Manuscr. Math. — 1980. — 31. — P. 97–109.
23. *Zachariuta V. P.* On isomorphism of Cartesian products of local convex spaces// Stud. Math. — 1973. — 46. — P. 201–221.
24. *Zachariuta V.* Linear topologic invariants and their applications to isomorphic classification of generalized power spaces// Tr. J. Math. — 1996. — 20. — P. 237–289.

Шубарин Михаил Александрович
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: mas102@mail.ru