

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 188



Москва 2020

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

С. С. Акбаров (НИУ ВШЭ, ВИНТИ РАН)

Е. П. Кругова (ВИНТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

С. Е. Степанов (Финуниверситет при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Т. К. Юлдашев (Национальный университет Узбекистана им. Улугбека)

Редактор-составитель:

С. Г. Пятков (Югорский государственный университет)

Научный редактор:

Н. И. Гусева (МПУ, ВИНТИ РАН)

Компьютерная верстка:

А. А. Широкин

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

**СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 188

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**



Москва 2020

СОДЕРЖАНИЕ

О задаче Шварца для системы Моисила—Теодореско (<i>А. П. Солдатов</i>)	3
Начальная задача для уравнений распределенного порядка с ограниченным оператором (<i>В. Е. Федоров, А. А. Абдрахманова</i>)	14
О некоторых классах обратных задач об определении функции источников для систем тепломассопереноса (<i>С. Г. Пятков</i>)	23
Метод асимптотического расщепления в динамических задачах пространственной теории упругости (<i>С. К. Голушко, Г. Л. Горынин, А. Г. Горынин</i>)	43
Комплексные дифференциальные уравнения в частных производных (<i>У. Аксой, Г. Бегер, А. Челеби, Б. Шупеева</i>)	54
Однородные функции на гильбертовом пространстве и квазиконформные преобразования сферы (<i>М. В. Куркина, В. В. Славский</i>)	70
Краевые задачи для одного класса уравнений составного типа с волновым оператором в старшей части (<i>А. И. Кожанов, Т. П. Плеханова</i>)	76
Оценки решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями (<i>М. А. Скворцова</i>)	84
Об одном подходе к перечислению помеченных связных графов: обзор результатов (<i>В. А. Воблый</i>)	106



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 3–13
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-3-13

УДК 517.95

О ЗАДАЧЕ ШВАРЦА ДЛЯ СИСТЕМЫ МОИСИЛА—ТЕОДОРЕСКО

© 2020 г. А. П. СОЛДАТОВ

Аннотация. Задача Шварца для классической системы Коши—Римана в плоской области заключается в определении ее решения по заданной первой компоненте этого решения на границе области. В работе изучен аналог этой задачи для системы Моисила—Теодореску в трехмерной области, ограниченной гладкой поверхностью. Описаны в явном виде ядро и коядро этой задачи через топологические инварианты области, а также ядро и коядро интегрального представления решений системы Моисила—Теодореску, тесно связанные с задачей Шварца.

Ключевые слова: система Моисила—Теодореску, задача Шварца, ядро, коядро, многосвязная область.

ON THE SCHWARZ PROBLEM FOR THE MOISIL—TEODORESCO SYSTEM

© 2020 А. P. SOLDATOV

АБСТРАКТ. The Schwarz problem for the classical Cauchy–Riemann system in a flat domain is to determine its solution by the known first component of this solution on the boundary of the domain. In this paper, we consider an analog of this problem for the Moisil–Teodorescu system in a three-dimensional domain bounded by a smooth surface. We propose explicit expressions of the kernel and cokernel of this problem in terms of topological invariants of the domain and the kernel and cokernel of the integral representation of solutions of the Moisil–Teodorescu system that are closely related to the Schwarz problem.

Keywords and phrases: Moisil–Teodorescu system, Schwarz problem, kernel, cokernel, multiply connected domain.

AMS Subject Classification: 35J56, 35J46

В ограниченной области $D \subseteq \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\Gamma = \partial D$ рассмотрим систему Моисила—Теодореско для четырехкомпонентного вектора $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in C^1(D)$, где положено $\tilde{u} = (u_2, u_3, u_4)$

$$\operatorname{div} \tilde{u} = 0, \quad \operatorname{grad} u_1 + \operatorname{rot} \tilde{u} = 0. \quad (1)$$

Для решений этой системы справедливы основные факты теории аналитических функций на плоскости, включая интегральную теорему и формулу Коши, теорему Морера и др. Основы этой теории были заложены в работах Г. К. Моисила и Н. Теодореску [12, 13]. Нетрудно показать, что все компоненты компоненты u_j решения $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ системы являются гармоническими функциями. В этом смысле она является примером многомерной обобщенной системы Коши—Римана (см. [14]). В рамках кватернионного и клиффордова анализа решения этих систем как многомерные аналоги аналитических функций (называемые часто гипераналитическими функциями) исследовались многими авторами (см. [9, 10, 15, 16] и особенно [11], где приведена обширная библиография).

После появления статьи Г. К. Моисила и Н. Теодореску [12] дальнейшее развитие теория получила в работах А. В. Бицадзе [1, 2]. В частности, им было введено понятие интеграла типа Коши для системы (1) и указаны различные его приложения.

Задача Шварца для этой системы определяется краевым условием

$$u_1^+ = f_1, \quad \tilde{u}^+ n = f_2, \quad (2)$$

где $+$ означает граничное значение изнутри D , n — единичная внешняя нормаль и $u^+ n$ означает скалярное произведение в \mathbb{R}^3 . В дальнейшем предполагается, что поверхность Γ принадлежит классу $C^{2,\nu}$, $0 < \nu < 1$, так что вектор $n \in C^{1,\nu}(\Gamma)$, и решение данной задачи рассматривается в классе Гельдера $C^\mu(\bar{D})$ с некоторым $0 < \mu < \nu$.

С задачей Шварца свяжем однородную сопряженную задачу для «сопряженной» системы

$$\operatorname{div} \tilde{v} = 0, \quad \operatorname{grad} v_1 - \operatorname{rot} \tilde{v} = 0, \quad (3)$$

краевое условие которой определяется с помощью некоторого конечного открытого покрытия $\Gamma_{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, поверхности Γ . Это покрытие строится так, чтобы на каждом множестве $\Gamma_{(k)}$ можно было выбрать такие трехкомпонентные вектор-функции $p_{(k)}, q_{(k)} \in C^{1,\nu}(\Gamma_{(k)})$, что вместе с единичным вектором нормали n они образовывали тройку ортов в каждой точке. В этих обозначениях однородное сопряженное краевое условие определяется на этих множествах равенствами

$$\tilde{v}^+(y)p_{(k)}(y) = \tilde{v}^+(y)q_{(k)}(y) = 0, \quad y \in \Gamma_{(k)}, k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Поскольку в точках $y \in \Gamma_{(k)} \cap \Gamma_{(r)}$ каждый из векторов $p_{(k)}(y)$ и $q_{(k)}(y)$ является линейной комбинацией $p_{(r)}(y)$ и $q_{(r)}(y)$, это краевое условие корректно.

Систему (1) можно записать в форме

$$M \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u(x) = 0$$

с матрицей

$$M(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \\ \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \\ \zeta_3 & -\zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (5)$$

система (3) по отношению к транспонированной матрице M^\top записывается аналогично. Согласно формуле Грина соотношение двойственности между решениями этих систем заключается в тождестве

$$\int_{\Gamma} u(y)[M^\top(n)v](y)d_2(y) = 0,$$

где d_2y — элемент площади. Краевое условие (2) можно записать в форме $B_0 u^+ = f$ с матрицей

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что по отношению к решениям $v \in C^\mu(\bar{D})$ однородной задачи (3), (4) это тождество принимает вид

$$\int_{\Gamma} (B_0 u)(y)[B_0 M^\top(n)v](y)d_2(y) = 0.$$

Поскольку

$$B_0 M^\top(n) = \begin{pmatrix} 0 & n_1 & n_2 & n_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

последнее тождество принимает вид

$$\int_{\Gamma} [u_1^+(\tilde{v}^+ n) + (\tilde{u}^+ n)v_1]d_2y = 0.$$

Таким образом, условие ортогональности

$$\int_{\Gamma} [f_1(\tilde{v}^+ n) + f_2 v_1] d_2 y = 0 \quad (7)$$

всем решениям $v \in C^\mu(\overline{D})$ однородной задачи (3), (4) необходимо для разрешимости неоднородной задачи (1), (2).

Пользуясь общей эллиптической теорией, можно получить следующий результат (см. [4, 5]).

Теорема 1.

- (а) Пространства $U_0 \subseteq C^\mu(\overline{D})$ решений однородной задачи (1), (2) ($f = 0$) и $V_0 \subseteq C^\mu(\overline{D})$ решений однородной задачи (3), (4) конечномерны.
- (б) Неоднородная задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда для всех $v \in V_0$ выполнены условия ортогональности (7).

Таким образом, задача (1), (2) фредгольмова в пространстве $C^\mu(\overline{D})$. Заметим, что число линейно независимых условий (5) для функций $v \in V_0$ в точности равно размерности $\dim V_0$, поскольку условия $v_1^+ = 0$, $\tilde{v}^+ n = 0$ совместно с (4) означают, что $v^+ = 0$; для решения системы (3) это возможно лишь при $v = 0$. Следовательно, индекс \varkappa задачи Шварца равен $\varkappa = \dim U_0 - \dim V_0$.

Конечномерные пространства U_0 и V_0 описываются явно, причем их размерности являются топологическими инвариантами области D .

Пусть s — число связных компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$ поверхности Γ . Тогда открытое множество $D' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ состоит также из s областей D'_1, \dots, D'_s , где предполагается, что $\partial D'_j = \Gamma_j$ и область D'_s является окрестностью ∞ .

Каждая замкнутая связная поверхность Γ_j гомеоморфна сфере с некоторым числом m_j ручек, так что помимо s число $m = m_1 + \dots + m_s$ также является топологическим инвариантом области D .

Число m тесно связано с первой группой когомологий де Рама $H^1(D) = H_{DR}^1(D)$, которая определяется следующим образом (см., например, [3]). Рассмотрим в области D пространство $A(D)$ замкнутых дифференциальных 1-форм $a = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + a_3(x)dx_3$ с коэффициентами $a_j \in C^{1,\mu}(\overline{D})$ и его подпространство $A_0(D)$ точных форм. Тогда первая группа когомологий $H^1(D)$ определяется как фактор-пространство A/A_0 . Обозначим через $W(D)$ класс многозначных гармонических функций w , частные производные которых однозначны и нормальная производная которых обращается в нуль на Γ . Каждая такая функция в односвязной подобласти $D_0 \subseteq D$ однозначна и принадлежит $C^{1,\mu}(\overline{D}_0)$. Она корректно определяет дифференциальную форму

$$dw = \sum_i \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_i \in A(D).$$

В силу краевого условия Неймана однозначные функции $w \in W(D)$ могут быть только постоянными. Другими словами, если форма dw точна, то $dw = 0$.

Теорема 2.

- (а) Имеет место равенство $m = \dim H^1(D)$.
- (б) Пространство $\{dw, w \in W(D)\}$ имеет размерность m .

Доказательство. (а) Пространство $A(\Gamma) = A(\Gamma_1) \oplus \dots \oplus A(\Gamma_s)$ замкнутых 1-форм, его подпространство $A_0(\Gamma)$ и фактор-пространство $H^1(\Gamma)$ естественным образом вводятся и для гладкой поверхности Γ . Хорошо известно, что размерность последнего пространства четна и дается равенством $\dim H^1(\Gamma) = 2m$. Кроме того, первая группа гомологий $H_1(\Gamma)$ на этой поверхности изоморфна $H^1(\Gamma)$.

В частности, дело сводится к равенству

$$2 \dim H^1(D) = \dim H^1(\Gamma), \quad (8)$$

которое считается известным в алгебраической топологии. Поскольку точную ссылку привести трудно, приведем схему его доказательства.

Очевидно, естественное отображение сужения $a \rightarrow a_\Gamma$ действует $A(D) \rightarrow A(\Gamma)$, причем точность формы a_Γ влечет точность a в области D . Другими словами, прообраз $A_0(\Gamma)$ при отображении $a \rightarrow a_\Gamma$ совпадает с $A_0(D)$. В результате приходим к индуцированному вложению векторных пространств $H^1(D) \rightarrow H^1(\Gamma)$, образ которого обозначим $\tilde{H}^1(D)$.

Одноточечная компактификация $\tilde{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ позволяет рассматривать ее как гладкое трехмерное многообразие, гомеоморфное трехмерной сфере в \mathbb{R}^4 . Открытое множество $D' = \tilde{\mathbb{R}}^3 \setminus \overline{D}$ состоит из попарно непересекающихся областей D'_i , $1 \leq i \leq s$, где D'_i имеет своей границей Γ_i . Аналогично предыдущему можно ввести пространство замкнутых форм $A(D') = A(D'_1) \oplus \dots \oplus A(D'_s)$, его подпространство $A_0(D')$ точных форм и первую группу когомологий $H^1(D')$. Как и выше имеем вложение $H^1(D') \rightarrow H^1(\Gamma)$ с образом $\tilde{H}^1(D')$. Согласно двойственности Александера (см., например, [8, теорема 3.44]) все пространство $H_1(\Gamma)$ первой группы гомологий изоморфно прямой сумме пространств $\tilde{H}^1(D)$ и $\tilde{H}^1(D')$. Поскольку $H_1(\Gamma)$ и $H^1(\Gamma)$ изоморфны, отсюда

$$H^1(\Gamma) = \tilde{H}^1(D) \oplus \tilde{H}^1(D'). \quad (9)$$

Рассмотрим на произведении $H^1(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$ билинейную форму

$$([a], [b]) = \int_{\Gamma} a \wedge b,$$

где замкнутые формы a, b являются представителями соответствующих классов. Легко видеть, что интеграл здесь обращается в нуль, если одна из форм a или b точна. Поэтому данное определение корректно. Нетрудно убедиться (см. [8, п. 3.2]), что эта билинейная форма невырождена и, очевидно, кососимметрична. Если $[a]$ и $[b]$ принадлежат одному пространству в правой части (9), то в силу замкнутости 2-формы $a \wedge b$ и теоремы Стокса имеем $([a], [b]) = 0$. Отсюда следует, что размерности пространств в правой части (9) совпадают и, значит, имеет место равенство (8).

(b) Пусть задана замкнутая форма $a = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 \in A(D)$ с коэффициентами $a_i \in C^{1,\mu}(\overline{D})$. Достаточно убедиться, что класс смежности $[a]$ содержит форму dw для некоторого $w \in W(D)$. Другими словами, найдется такая функция $w \in W(D)$, что форма $b = b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3$ с коэффициентами $b_j = \partial w / \partial x_j$ точна. С этой целью введем функции

$$F = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \in C^\mu(\overline{D}), \quad f = \sum_i a_i n_i \in C^\mu(\Gamma)$$

и рассмотрим задачу Неймана

$$\Delta u = F, \quad \frac{\partial u^+}{\partial n} = f. \quad (10)$$

В силу формулы Грина имеем

$$\int_D F(x) d_3 x - \int_{\Gamma} f(y) d_2 y = 0;$$

как известно, это условие необходимо и достаточно для разрешимости задачи (10). \square

Рассмотрим теперь дифференциальную форму $b = \sum b_i dx_i$ с коэффициентами $b_i = a_i - \partial u / \partial x_i$, которая, очевидно, принадлежит тому же классу смежности, что и a . В силу ее замкнутости существует многозначная функция w , для которой $b_i = \partial w / \partial x_i$. На основании (10) эта функция гармонична и удовлетворяет однородному условию Неймана, т.е. принадлежит $W(D)$.

Теорема 3.

- (a) Пространство U_0 имеет размерность t и состоит из вектор-функций u с компонентами $u_1 = 0$, $\tilde{u} = \text{grad } w$, где $w \in W(D)$.
- (b) Пространство V_0 имеет размерность s и состоит из вектор-функций $v_1 = c$, $\tilde{v} = \text{grad } w$, где $c \in \mathbb{R}$ и $w \in C^{1,\nu}(\overline{D})$ — гармоническая функция, принимающая на связных компонентах Γ постоянные значения.

Доказательство. (а) В одну сторону утверждение очевидно. Обратное, пусть задано решение $u = (u_1, \tilde{u}) \in C^\mu(\bar{D})$ задачи (1), (2) с правой частью $f = 0$, т.е. удовлетворяющее краевым условиям

$$u_1^+ = 0, \quad \tilde{u}^+ n = 0. \quad (11)$$

В силу общей теоремы о гладкости вплоть до границы решений эллиптических задач функция u в действительности принадлежит классу $C^{1,\mu}(\bar{D})$.

Поскольку функция u_1 гармонична в области D и обращается в нуль на Γ , она равна нулю в области D и система (1) переходит в соотношения

$$\operatorname{div} \tilde{u} = 0, \quad \operatorname{rot} \tilde{u} = 0, \quad (12)$$

для вектора \tilde{u} . Поэтому существует такая гармоническая функция w , многозначная в области D , частные производные которой однозначны и градиент которой совпадает с \tilde{u} . По отношению к этой функции второе краевое условие (11) переходит в $\partial w^+ / \partial n = 0$, так что $w \in W(D)$, и остается воспользоваться теоремой 2(b).

(б) В одну сторону утверждение очевидно. Обратное, пусть v является решением задачи (3), (4). В принятом предположении вектор-функции $p_{(k)}$ и $q_{(k)}$ можно выбрать в классе $C^{1,\mu}(\Gamma_{(k)})$, так что на основании теоремы о гладкости вплоть до границы краевых задач из общей эллиптической теории любое решение $v = (v_0, \tilde{v}) \in C^\mu(\bar{D})$ задачи (3), (4) в действительности принадлежит классу $C^{1,\mu}(\bar{D})$.

Для фиксированного k рассмотрим односвязную поверхность $S \subseteq \Gamma_{(k)}$ с гладким краем и применим к вектор-функции $\tilde{v}^+ \in C^1(S)$ на этой поверхности теорему Стокса. Тогда

$$\int_S (\operatorname{rot} \tilde{v})^+(x) n(x) d_2 x = \int_{\partial S} \tilde{v}^+(y) e(y) d_1 y,$$

где $e(y)$ — единичный касательный вектор к контуру ∂S , ориентированный положительно по отношению к n (т.е. обход этого контура, если смотреть из конца вектора n , осуществляется против часовой стрелки). В соответствии с краевым условием (4) вектор \tilde{v}^+ пропорционален n на Γ и, следовательно, подинтегральное выражение в правой части последнего равенства обращается в нуль. Поэтому на основании второго уравнения (4) оно примет вид

$$\int_S \frac{\partial v_1^+}{\partial n} d_2 x = 0.$$

Так как оно верно для любой односвязной области $S \subseteq \Gamma_{(k)}$ и поверхности $\Gamma_{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, покрывают Γ ; отсюда заключаем, что нормальная производная обращается в нуль всюду на Γ :

$$\frac{\partial v_1^+}{\partial n} = 0.$$

Вспоминая, что все компоненты системы уравнений (3) являются гармоническими функциями, отсюда выводим, что функция v_1 постоянна в области D и система (3) превращается в систему (12) для вектора \tilde{v} .

Поэтому функцию \tilde{v} можно представить в виде $\tilde{v} = \operatorname{grad} w$ с некоторой многозначной гармонической функцией w , частные производные которой однозначны. При этом в силу краевого условия (4) ее частные производные по касательным направлениям p и q равны нулю на границе, так что функция w^+ постоянна на каждой связной компоненте поверхности Γ . Следовательно, гармоническая функция w однозначна во всей области D , что завершает доказательство п. (б) теоремы. \square

Согласно теореме 3(b) условия ортогональности (7) сводятся к соотношениям

$$\int_{\Gamma} f_1(y) \frac{\partial w}{\partial n} d_2(y) = 0, \quad \int_{\Gamma} f_2(y) dy = 0 \quad (13)$$

для всех гармонических функций w , принимающих на связных компонентах Γ постоянные значения. Конечно, второе равенство в (13) непосредственно вытекает из формулы Грина, примененной к первому уравнению (1).

Из формулы Грина, примененной к системе Моисила—Теодореску $M(\partial u/\partial x) = 0$, определяемой матрицей (5), в области D , следует равенство

$$\int_{\Gamma} M[n(y)]u^+(y)d_2y = 0,$$

которое является аналогом теоремы Коши для системы Коши—Римана. Матрица функция $|x|^{-3}M^{\top}(x)$ удовлетворяет уравнению $M(\partial u/\partial x) = 0$ при $x \neq 0$; легко видеть, что

$$\int_{|y|=1} |y|^{-3}M^{\top}(y)M(n)d_2y = 4\pi,$$

поскольку на единичной сфере внешняя нормаль имеет вид $n = y/|y|$ и $M^{\top}(y)M(y) = 1$. Поэтому обычным образом для решений системы Моисила—Теодореску устанавливается аналог формулы Коши

$$\frac{1}{4\pi} \int |y-x|^{-3}M^{\top}(y-x)M(n)u^+(y)d_2y = u(x), \quad x \in D.$$

Эти и другие основные факты теории аналитических функций на плоскости, включая интегральную теорему и формулу Коши, теорему Морера и др. были перенесены на систему Моисила—Теодореску в работах Г. К. Моисила и Н. Теодореску (см., например, [13]).

По аналогии с интегралом формулы Коши можно ввести интеграл типа Коши

$$(I\psi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{M^{\top}(y-x)}{|y-x|^3} M[n(y)]\psi(y)d_2y, \quad x \in D, \quad (14)$$

с произвольной плотностью $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_4) \in C(\Gamma)$. По отношению к $x \in D' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ этот интеграл удобно записывать в форме $I'\psi$.

Если функция ψ удовлетворяет условию Гельдера и поверхность Γ ляпуновская, то, как показал А. В. Бицадзе (см. [1]), существуют односторонние предельные значения

$$u^{\pm}(y_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow y_0, \\ x \in D^{\pm}}} u(x), \quad y_0 \in \Gamma,$$

интеграла $u = I\psi$ изнутри $D^+ = D$ и извне $D^- = D'$, для которых справедлив аналог формул Сохоцкого—Племеля

$$(I\psi)^+ = \psi + K\psi, \quad (I'\psi)^- = -\psi + K\psi, \quad (15)$$

где двумерный сингулярный интеграл $(K\psi)(y_0)$ определяется аналогично (14) по отношению к точке $y_0 \in \Gamma$ поверхности.

Можно показать (см. [6]), что в предположении $\Gamma \in C^{1,\nu}$ оператор $I_D : C^{\mu}(\Gamma) \rightarrow C^{\mu}(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$, ограничен.

В равенстве $u = I_D\psi$ четырехкомпонентный вектор ψ определяется заведомо не единственным образом. Например, если решение u_1 системы Моисила—Теодореску в открытом множестве D' имеет поведение $O(|x|^{-2})$ при $|x| \rightarrow \infty$, то u не меняется от замены ψ на $\psi + u_1^-$.

В этой связи, исходя из вектор-функции $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C(\Gamma)$, в обозначениях (6) четырехкомпонентный вектор ψ запишем в форме $\psi = B_0^{\top}\varphi$; соответственно, введем модифицированный интеграл типа Коши $I_0\varphi = I(B_0^{\top}\varphi)$. В явном виде в обозначениях векторного поля (1) этот оператор действует по формуле

$$\begin{aligned} (I_0\varphi)_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{n(y)(y-x)}{|y-x|^3} \varphi_1(y)d_2y, \\ (\widetilde{I_0\varphi})(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{y-x}{|y-x|^3} \varphi_2(y)d_2y + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{[n(y), y-x]}{|y-x|^3} \varphi_1(y)d_2y, \end{aligned} \quad (16)$$

где, как и выше, вектор $\widetilde{I_0\varphi}$ составлен из последних трех компонент вектора $I_0\varphi$ и $[\cdot, \cdot]$ означает векторное произведение.

Этот оператор тесно связан с оператором $R_0u = B_0u^+$ задачи (1), (2). Именно, согласно (6) имеем очевидное соотношение $B_0B_0^\top = 1$, где 1 означает единичную (2×2) -матрицу. Поэтому в соответствии с (15) приходим к равенству

$$R_0I_0 = 1 + K_0 \quad (17)$$

с оператором K_0 , действующим по формуле $K_0\varphi = B_0K(B_0^\top\varphi)$; в явном виде

$$(K_0\varphi)(y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{b_0(y, y_0)}{|y - y_0|^2} \varphi(y) d_2y, \quad y_0 \in \Gamma,$$

с (2×2) -матрицей-функцией

$$b_0(y_0, y) = \frac{1}{|y - y_0|^{-1}} \begin{pmatrix} n(y)(y - y_0) & 0 \\ n(y_0)[n(y), y - y_0] & n(y_0)(y - y_0) \end{pmatrix}.$$

Для ляпуновской поверхности функция $b_0(y, y_0)$ удовлетворяет условию Гельдера по обоим переменным и обращается в нуль при $y = y_0$, так что интеграл здесь существует в обычном смысле. В действительности этот факт можно уточнить (см. [7]).

Лемма 1. *Если поверхность Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$, то оператор $I_0 : C^\mu(\Gamma) \rightarrow C^\mu(\overline{D})$ ограничен, а оператор K_0 компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$.*

Согласно этой лемме и теореме Рисса оператор $1 + K_0$ фредгольмов в пространстве $C^\mu(\Gamma)$ и его индекс равен нулю. Поэтому из теорем 1, 3, соотношения (17) и общих свойств фредгольмовых операторов следует, что операторы R_0 и I_0 фредгольмовы и их индексы

$$\text{ind } R_0 = -\text{ind } I_0 = m - s. \quad (18)$$

В действительности аналогично теореме 3 ядро и образ оператора I_0 можно описать явно. Предварительно введем специальную гармоническую функцию w_s в области D'_s , которая принимает постоянное значение 1 на границе Γ_s и ведет себя как $w_s(x) = O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Она строится следующим образом. Не ограничивая общности, можно считать, что точка $x = 0$ принадлежит D . Тогда инверсия $x \rightarrow x^* = x/|x|^2$ переводит область D'_s в ограниченную область D_0 , содержащую эту точку. Пусть гармоническая в D_0 функция $u_0 \in C^{1,\nu}(\overline{D}_0)$ решает задачу Дирихле $u_0(y) = |y|^{-1}$, $y \in \partial D_0$. Очевидно, она определяется единственным образом, причем в силу принципа максимума $c = u_0(0) > 0$. Поэтому функция w_s , определяемая равенством $w_s(x) = |x|^{-1}u_0(x^*)$, удовлетворяет всем требованиям.

Заметим, что производные по касательным направлениям к поверхности Γ_s от функции w_s равны нулю, так что вектор $a = (\text{grad } w_s^+)(y)$ параллелен вектору нормали $n(y)$ в точке $y \in \Gamma_s$ и, следовательно, $a = (an)n$. Поэтому

$$\text{grad } w_s^- = \left(\frac{\partial w_s^-}{\partial n} \right) n. \quad (19)$$

Теорема 4.

- (а) Ядро $\ker I_0 = \{\varphi, I_0\varphi = 0\}$ состоит из функций $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, для которых φ_1 постоянна на Γ_j , $1 \leq j \leq s - 1$, и обращается в нуль на Γ_s , а $\varphi_2 = 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_s$ и $\varphi_2 = \lambda(\partial w_s/\partial n)$ на Γ_s с некоторым $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (б) Пространство $C^\mu(\Gamma)$ решений (1) раскладывается в прямую сумму образа $\text{Im } I_0$ этого оператора и ядра U_0 оператора R_0 . В частности, любое решение $u \in C^\mu(\overline{D})$ системы (1) единственным образом представимо в виде

$$u = I_0\varphi + u_0, \quad u_0 \in U_0, \quad (20)$$

с вектор-функцией $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, удовлетворяющей условиям

$$\int_{\Gamma_i} \varphi_1(y) d_2y = 0, \quad 1 \leq i \leq s - 1; \quad \int_{\Gamma_s} \varphi_2 \frac{\partial w_s^-}{\partial n} d_2y = 0. \quad (21)$$

Доказательство. (а) Обозначим для краткости через $X(\Gamma)$ класс скалярных функций, постоянных на Γ_j , $1 \leq j \leq s-1$, и равных нулю на Γ_s , и пусть $X(D')$ имеет аналогичный класс по отношению к D'_j . Обозначим далее через $\tilde{X}(\Gamma)$ класс скалярных функций φ , обращающихся в нуль на $\Gamma \setminus \Gamma_s$ и равных $\lambda(\partial w_s / \partial n)$ на Γ_s с некоторой постоянной $\lambda = \lambda(\varphi) \in \mathbb{R}$. Наконец, пусть класс $\tilde{X}(D')$ состоит из вектор-функций \tilde{u} , обращающихся в нуль на $D' \setminus D'_s$ и равных $\lambda = \lambda(\tilde{u}) \text{grad } w_s$ на D'_s с некоторой постоянной λ .

Важно заметить, что в силу (19) операция $\tilde{u} \rightarrow n\tilde{u}^-$ осуществляет изоморфизм классов $\tilde{X}(D')$ на $\tilde{X}(\Gamma)$ в следующем смысле. Если $\tilde{u} \in \tilde{X}(D')$, то $\varphi = n\tilde{u}^+ \in \tilde{X}(\Gamma)$ и $\lambda(\varphi) = \lambda(\tilde{u})$. Обратно, если $\varphi \in \tilde{X}(\Gamma)$, то функция $\tilde{u} \in \tilde{X}(D')$ с $\lambda(\tilde{u}) = \lambda(\varphi)$, удовлетворяет условию $n\tilde{u}^+ = \varphi$.

Наряду с I_0 аналогично (15) введем соответствующий оператор $(I'_0\varphi)(x)$, $x \in D'$. Пусть $\varphi \in \ker I_0$, т.е. функция $I_0\varphi = I(B_0^\top \varphi)$ равна нулю в области D . Рассмотрим в D' функцию

$$u(x) = -(I'_0\varphi)(x), \quad x \in D', \quad (22)$$

для которой согласно (15) ее граничное значение $u^- = B_0^\top \varphi$.

Краевое условие (4) на $\Gamma_{(k)}$ можем записать в форме $C_{(k)}v^+ = 0$ с матрицей

$$C_{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & p_{(k)1} & p_{(k)2} & p_{(k)3} \\ 0 & q_{(k)1} & q_{(k)2} & q_{(k)3} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $C_{(k)}B_0^\top = 0$, функция u удовлетворяет однородному краевому условию

$$(C_{(k)}u^-)(y) = 0, \quad y \in \Gamma_{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (23)$$

На основании теоремы о гладкости заключаем, что $u \in C^{1,\mu}(\overline{D'_j})$, $1 \leq j \leq s$. С учетом (23) совершенно аналогично доказательству теоремы 3(b) убеждаемся, что нормальная производная $\partial u_1^- / \partial n = 0$ на Γ . Поэтому в конечных областях D'_j , $1 \leq j \leq s-1$, эта функция постоянна. Согласно (22) функция u_1 исчезает на бесконечности, так что из тех же соображений $u_1 = 0$ в D'_s . Таким образом, в принятых обозначениях $u_1 \in X(D')$.

В результате система Моисила—Теодореску переходит в (12) для вектора \tilde{u} , так что его можно представить в виде градиента $\text{grad } w$ некоторой многозначной гармонической функции w , частные производные которой однозначны. В силу краевого условия (23) ее частные производные по касательным направлениям на Γ равны нулю, так что функция w^- постоянна на каждой поверхности Γ_j . В частности, w постоянна в областях D'_j , $1 \leq j \leq s-1$. Согласно (22) в области D'_s функция \tilde{u} ведет себя как $O(|x|^{-2})$ на бесконечности и, следовательно, $w(x) = O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$. Поэтому $w = \lambda w_s$ с некоторой постоянной λ .

Итак, в принятых обозначениях $\tilde{u} \in \tilde{X}(D')$. Вспоминая, что $u^- = B_0^\top \varphi$, т.е. $u_1^- \varphi_1$ и $\tilde{u}^- = n\varphi_2$, отсюда $\varphi_1 \in X(\Gamma)$ и $\varphi_2 \in \tilde{X}(\Gamma)$.

Обратно, пусть $\varphi_1 \in X(\Gamma)$ и $\varphi_2 \in \tilde{X}(\Gamma)$. Тогда с учетом (19) вектор $B_0^\top \varphi$ является граничным значением u^- решения u системы (1), для которого $u_1 \in X(D')$ и $\tilde{u} \in \tilde{X}(D')$. Поэтому в областях D'_j можно воспользоваться аналогом теоремы Коши и в результате получить равенство $(Iu^-)(x) = 0$, $x \in D$. Поскольку $u^- = B_0^\top \varphi$, отсюда $I(B_0^\top \varphi) = I_0\varphi = 0$.

(b) В силу (18) и утверждения (а) коразмерность образа $\text{Im } I_0$ оператора I_0 равна m . По теореме 3(a) размерность пространства U_0 также равна m . Поэтому для завершения доказательства достаточно убедиться, что

$$(\text{Im } I_0) \cap U_0 = \{0\}. \quad (24)$$

Пусть $I_0\varphi \in U_0$, где в силу (а) не ограничивая общности можно считать, что φ удовлетворяет условиям (21). Тогда на основании (16) и теоремы 3(a)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{n(y)(y-x)}{|y-x|^3} \varphi_1(y) d_2y = 0, \quad x \in D, \quad (25)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{y-x}{|y-x|^3} \varphi_2(y) d_2y + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{[n(y), y-x]}{|y-x|^3} \varphi_1(y) d_2y = \text{grad } w(x), \quad x \in D, \quad (26)$$

с некоторой гармонической функцией $w \in W(D)$.

Первый интеграл здесь представляет собой обобщенный потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа. Очевидно, для $\varphi_1 \in X(\Gamma)$ это равенство всегда справедливо. Рассматривая задачу Неймана для уравнения Лапласа в областях D'_j , обычным образом устанавливается, что и обратно, равенство (25) влечет $\varphi_1 \in X(\Gamma)$. По предположению φ_1 удовлетворяет условиям (21), так что в действительности $\varphi_1 = 0$. Но тогда (26) переходит в

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_2(y) d_2 y}{|y-x|} - w(x) \right] = 0, \quad x \in D, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Поэтому функция $w \in W(D)$ однозначна и, следовательно, постоянна. Таким образом, потенциал простого слоя

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_2(y) d_2 y}{|y-x|} - w(x) = c, \quad x \in D, \quad (27)$$

с некоторой постоянной c .

Рассмотрим в D' гармоническую функцию u , равную нулю в $D' \setminus D'_s$ и cw_s в D'_s . На основании формулы Грина, примененной к функциям $u(y)$ и $|y-x|^{-1}$ переменной $y \in D'$, получим:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial u^-}{\partial n} \frac{d_2 y}{|y-x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{n(y)(y-x)}{|y-x|^3} u^-(y) d_2 y.$$

Поскольку $u^-(y) = 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_s$ и $u^-(y) = c$ на Γ_s , интеграл в правой части этого равенства равен c . Совместно с (27) отсюда следует, что потенциал простого слоя с плотностью $\psi = \varphi_2 - \partial u^- / \partial n$ равен нулю в области D , что возможно только когда $\psi = 0$. Следовательно, $\varphi_2 = 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_s$ и $u^-(y) = c \partial w_s^- / \partial n$ на Γ_s . На основании последнего условия (21) отсюда $c = 0$, что завершает доказательство (24) и теоремы. \square

Для полноты изложения приведем доказательство свойств потенциалов простого и двойного слоя, использованные выше. Обозначим эти потенциалы в краткой операторной форме

$$(J_0\psi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\psi(y) d_2 y}{|y-x|}, \quad (J_1\psi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{n(y)(y-x)}{|y-x|^3} \psi(y) d_2 y, \quad x \in D.$$

со скалярной плотностью φ . Из курса математической физики хорошо известно, что если Γ является ляпуновской поверхностью и функция φ удовлетворяет условию Гельдера, то существуют предельные значения гармонической функции $J_1\varphi$ и нормальной производной функции $J_0\varphi$, определяемые равенствами

$$(J_1\varphi)^+ = \varphi + K\varphi, \quad \frac{\partial(J_0\varphi)^+}{\partial n} = \varphi - K^*\varphi. \quad (28)$$

Интегральные операторы здесь действуют по формулам

$$(K\varphi)(y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{k(y_0, y)}{|y-y_0|^2} \varphi(y) d_2 y, \quad (K^*\varphi)(y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{k^*(y_0, y)}{|y-y_0|^2} \varphi(y) d_2 y,$$

с функциями $k(y_0, y) = |y-y_0|^{-1} n(y)(y-y_0)$ и $k^*(y_0, y) = k(y, y_0)$. Эти функции удовлетворяют условию Гельдера на $\Gamma \times \Gamma$ и обращаются в нуль при $y = y_0$.

Аналогичные соотношения справедливы и для соответствующих потенциалов на D' , обозначения которых как и выше снабжаем штрихом:

$$(J'_1\varphi)^- = -\varphi + K\varphi, \quad \frac{\partial(J'_0\varphi)^-}{\partial n} = -\varphi - K^*\varphi. \quad (29)$$

Аналог леммы 1 справедлив и для этих операторов, т.е. предположении $\Gamma \in C^{1,\nu}$ операторы J_0 и J_1 ограничены, соответственно, $C^\mu(\Gamma) \rightarrow C^{1,\mu}(\overline{D})$ и $C^\mu(\Gamma) \rightarrow C^\mu(\overline{D})$, а операторы K_1 и K_1^* компактны в $C^\mu(\Gamma)$. Кроме того, из формул Грина, примененных к гармоническим функциям в областях D и D'_j , $1 \leq j \leq s$, вытекает следующее предложение. Пусть функция u задана и

гармонична в областях D и D'_j , принадлежит классу $C^{1,\mu}$ в замыкании эти областей, и исчезает на ∞ . Тогда

$$u(x) = 2 \begin{cases} (J_0\varphi_1 - J_1\varphi_0)(x), & x \in D, \\ (J'_0\varphi_0 - J'_1\varphi_1)(x), & x \in D', \end{cases} \quad (30)$$

с плотностями

$$\varphi_0 = u^+ - u^-, \quad \varphi_1 = \frac{\partial u^+}{\partial n} - \frac{\partial u^-}{\partial n}.$$

Стоит отметить, что граничные значения функций $J_0\varphi$ и $J'_0\varphi$ совпадают на Γ . Поэтому с учетом единственности решения задачи Дирихле для гармонических функций из соотношений (30) следует, что операторы J_0 и J'_0 взаимно однозначны, т.е.

$$\ker J_0 = \ker J'_0 = 0. \quad (31)$$

Утверждается, что

$$X(\Gamma) \subseteq \ker J_1 = \ker(1 + K_1), \quad J'_0[\ker(1 + K_1^*)] = X(D'). \quad (32)$$

В самом деле, из формулы (30), примененной к кусочно постоянным функциям u , равным нулю на $D \cup D'_s$, следует, что $X \subseteq \ker J_1$. Равенство $\ker J_1 = \ker(1 + K_1)$ непосредственно следует из (28) и единственности решения задачи Дирихле.

В силу (28) равенство $\psi + K_1^*\psi = 0$ равносильно тому, что нормальная производная функции $u^1 = J'_0\psi$ обращается в нуль на Γ . С учетом того, что $u^1 = J'_0\psi$ исчезает на ∞ отсюда заключаем, что $u^1 \in X(D')$. Класс функций u^1 этого типа обозначим Y , так что оператор J'_0 действует $\ker(1 + K_1^*) \rightarrow X(D')$. Обратно, если $u^1 \in X(D')$ и функция $u \in C^{1,\mu}(\overline{D})$ есть решение задачи Дирихле с правой частью $(u^1)^-$, то на основании (29) имеем равенство $u^1 = J'_0\psi$ с функцией $\psi = -\partial u^- / \partial n$.

Из (31), (32) следует, что

$$s - 1 = \dim [\ker(1 + K_1^*)] \leq \dim [\ker(1 + K_1)].$$

Но по теореме Рисса $\ker(1 + K_1) = \ker(1 + K_1^*)$, так что первое включение в (32) в действительности является точным равенством:

$$\ker J_1 = X(\Gamma).$$

Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы, позволяют легко решить вопрос о представлении гармонических функций потенциалом двойного слоя, который обычно обходится в курсах математической физики.

Пусть функции $\psi_1, \dots, \psi_{s-1}$ образуют базис $\ker(1 + K_1^*)$. Тогда согласно альтернативе Фредгольма разрешимость уравнения $\varphi + K_1\varphi = f$ или, что равносильно, представимость решения $u \in C^\mu(\overline{D})$ задачи Дирихле с правой частью f потенциалом $J_1\varphi$, равносильны выполнению условий ортогональности

$$\int_{\Gamma} f(y)\psi_j(y) = 0, \quad 1 \leq j \leq s-1.$$

Пусть система функций f_1, \dots, f_{s-1} биортогональна к $\psi_1, \dots, \psi_{s-1}$ и гармонические функции $u_j \in C^\mu(\overline{D})$ решают задачу Дирихле $u^+ = f_j$. Тогда любая гармоническая функция $u \in C^\mu(\overline{D})$ единственным образом представима в виде

$$u = J_1\varphi + \sum_{j=1}^{s-1} \xi_j u_j, \quad \xi_j \in \mathbb{R},$$

где функция $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma_i} \varphi(y) d_2 y = 0, \quad 1 \leq i \leq s-1.$$

Конечно, в случае, когда поверхность Γ связна, второе слагаемое в этом представлении отсутствует и условия на φ можно опустить, т.е. оператор J_1 в этом случае обратим.

Закключение. Как известно, задача Шварца для классической системы Коши—Римана в плоской области заключается в определении ее решения по заданной первой компоненте этого решения на границе области. В работе изучен аналог этой задачи для системы Моисила—Теодореску в трехмерной области. Таким образом, аналогия между этими решениями распространяется не только на качественные свойства этих систем, но и на краевые задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения// Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 3. — С. 389–392.
2. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. — М.: Наука, 1966.
3. Ботт Р., Ту Л. В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. — М.: Наука, 1989.
4. Полушин В. А., Солдатов А. П. Задача Римана—Гильберта для системы Моисила—Теодореску в конечной области// в кн.: Неклассические уравнения математической физики. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010. — С. 192–201.
5. Полушин В. А., Солдатов А. П. О сопряженной задаче Римана—Гильберта для системы Моисила—Теодореску// Науч. вед. Белгород. ун-та. — 2011. — 5, № 22. — С. 106–111.
6. Полушин В. А., Солдатов А. П. Трехмерный аналог интеграла типа Коши// Диффер. уравн. — 2011. — 47, № 5. — С. 366–375.
7. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи// Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — 63. — С. 1–189.
8. Хатчер А. Алгебраическая топология. — М.: Изд-во МЦНМО, 2011.
9. Grigor'ev Yu. Quaternionic functions and their applications in a viscous fluid flow// Complex Anal. Oper. Theory. — 2018. — 12. — С. 491–508.
10. Grigor'ev Yu., Gürlebeck K., Legatiuk D. Quaternionic formulation of a Cauchy problem for the Lamé equation// AIP Conf. Proc. — 2017. — 280007.
11. Gürlebeck K., Habetha K., Sprössig W. Holomorphic Functions in the Plane and n -dimensional Space. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2008.
12. Moisil G. C., Theodorescu N. Fonction holomorphe dans l'espace// Bul. Soc. St. Cluj. — 1931. — 6. — С. 177–194.
13. Moisil G. C., Theodorescu N. Fonctions holomorphes dans l'espace// Math. Cluj. — 1931. — 5. — С. 142–159.
14. Stein E. M., Weiss G. Generalization of the Cauchy–Riemann equation and representations of the rotation group// Am. J. Math. — 1968. — 90. — С. 163–196.
15. Shapiro M., Vasilevski N. Quaternionic Ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators, and boundary-value problems, I. Ψ -Hyperholomorphic function theory// Compl. Var. Ellipt. Equ. — 1995. — 27, № 1. — С. 17–46.
16. Shapiro M., Vasilevski N. Quaternionic Ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators, and boundary-value problems, II. Algebras of singular integral operators and Riemann-type boundary-value problems// Compl. Var. Ellipt. Equ. — 1995. — 27, № 1. — С. 67–96.

Солдатов Александр Павлович
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына,
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление», Москва
E-mail: soldatov@bsu.edu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 14–22
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-14-22

УДК 517.9

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

© 2020 г. В. Е. ФЕДОРОВ, А. А. АБДРАХМАНОВА

Аннотация. Методами теории преобразования Лапласа доказана теорема о существовании единственного решения начальной задачи для дифференциального уравнения распределенного порядка с дробной производной Римана–Лиувилля и с ограниченным оператором при искомой функции, рассматриваемого в банаховом пространстве. Найден вид этого решения, задаваемый интегралами типа Данфорда–Тейлора. Полученные результаты вносят вклад в развитие теории разрешающих семейств операторов уравнений в банаховых пространствах, включая дифференциальные уравнения дробного порядка, эволюционные интегральные уравнения, и, в частности, обобщают некоторые результаты теории полугрупп операторов на случай уравнений распределенного порядка. Абстрактные результаты для уравнения в банаховом пространстве использованы при исследовании одного класса начально-краевых задач для уравнений в частных производных распределенного порядка по времени с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора.

Ключевые слова: уравнение распределенного порядка, дробная производная Римана–Лиувилля, преобразование Лапласа, начальная задача, начально-краевая задача.

INITIAL-VALUE PROBLEM FOR DISTRIBUTED-ORDER EQUATIONS WITH A BOUNDED OPERATOR

© 2020 V. E. FEDOROV, A. A. ABDRAKHMANOVA

ABSTRACT. Using methods of the theory of the Laplace transform, we prove a theorem on the existence of a unique solution to an initial-value problem for a distributed-order differential equation in a Banach space, which involves a fractional Riemann–Liouville derivative and a bounded operator acting on the unknown function. We find this solution in the form of Dunford–Taylor-type integrals. The results obtained contribute to the theory of resolving operator families for equations in Banach spaces, including fractional-order differential equations and evolutionary integral equations; in particular, we generalize some results of the theory of semigroups of operators to the case of equations of distributed order. Abstract results for equations in Banach spaces are applied to a class of initial-boundary-value problems for distributed-order partial differential equations with polynomials in a self-adjoint elliptic differential operator with respect to the spatial variables.

Keywords and phrases: distributed-order equation, fractional Riemann–Liouville derivative, Laplace transform, initial-value problem, initial-boundary-value problem.

AMS Subject Classification: 34K30, 35R11, 34G10

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (постановление № 211 от 16.03.2013, соглашение № 02.А03.21.0011), Министерства образования и науки РФ (задание № 1.6462.2017/БЧ) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-41-450001).

1. Введение. В последние два-три десятилетия интерес исследователей стали вызывать дифференциальные уравнения распределенного порядка, в которых содержится интеграл по порядку дробной производной. Насколько известно авторам, первыми работами, посвященными таким уравнениям, стали работы А. М. Нахушева (см. [1] и др.). Изначально такие уравнения встречались в основном в работах, посвященных моделированию некоторых реальных процессов: в теории вязкоупругости (см. [14]), в кинетической теории (см. [16]), в других прикладных задачах (см. [5, 7, 8, 11]). В то же время уравнения распределенного порядка все чаще становятся объектом исследования в чисто математических работах. Помимо работ А. М. Нахушева отметим в этом смысле работы А. В. Псху [2], С. Умарова и Р. Горенфлю [18], С. Пилиповича с соавторами [4], А. Н. Кочубея [12] и др. Отметим работы [3, 9], в которых исследовались вопросы однозначной разрешимости задачи Коши $z^{(k)}(0) = z_k$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, для уравнения распределенного порядка

$$\int_a^b \omega(\alpha) {}^C D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t) + g(t), \quad t \in [0, T],$$

с производной Герасимова—Капуто ${}^C D_t^\alpha$ и с линейным ограниченным в банаховом пространстве \mathfrak{Z} оператором A в правой части уравнения, где $m - 1 < b \leq m \in \mathbb{N}$, $a < b$, $T > 0$, $g \in C([0, T]; \mathfrak{Z})$. Доказана теорема об однозначной разрешимости этой задачи и найдено решение в операторном виде с использованием контурных интегралов типа Данфорда—Тейлора. Полученные результаты использованы при исследовании начальных задач для уравнений в банаховых пространствах с вырожденным линейным оператором при производной распределенного порядка, а также при изучении одного класса начально-краевых задач для уравнений в частных производных распределенного порядка по времени.

В настоящей работе аналогичным образом исследуется уравнение распределенного порядка

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t) + g(t), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

с производной Римана—Лиувилля D_t^α . Здесь также A является линейным ограниченным оператором в банаховом пространстве \mathfrak{Z} , $a \leq 0 \leq m - 1 < b \leq m \in \mathbb{N}$, $T > 0$, $g \in C([0, T]; \mathfrak{Z})$. Показано, что естественной начальной задачей для такого уравнения является задача вида

$$\int_k^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-k-1} z(0) d\alpha = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (2)$$

Методами теории преобразования Лапласа доказана теорема о существовании единственного решения задачи (1), (2), найден вид этого решения. Полученные результаты вносят вклад в развитие теории разрешающих семейств операторов уравнений в банаховых пространствах, включая уравнения дробного порядка (см. [6]), эволюционные интегральные уравнения (см. [13, 15]), и, в частности, обобщают некоторые результаты теории полугрупп операторов (см. [10]) на случай уравнений распределенного порядка. Абстрактные результаты для задачи (1), (2) использованы при исследовании одного класса начально-краевых задач для уравнений в частных производных распределенного порядка по времени с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора.

2. Начальная задача для уравнения в банаховом пространстве. Введем следующие обозначения: $g_\delta(t) := t^{\delta-1}/\Gamma(\delta)$ при $\delta > 0$, $t > 0$, J_t^0 — тождественный оператор,

$$J_t^\delta h(t) := (g_\delta * h)(t) := \int_0^t g_\delta(t-s)h(s)ds,$$

где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D_t^m — обычная производная порядка m , D_t^α — дробная производная Римана—Лиувилля, т.е. $D_t^\alpha h(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha} h(t)$, кроме того, по определению $D_t^{-\alpha} h(t) := J_t^\alpha h(t)$.

Пусть \mathfrak{Z} — банахово пространство. Преобразование Лапласа функции $h : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathfrak{Z}$ будем обозначать символом $\mathfrak{L}[h]$. Известно, что при $\alpha > 0$

$$\mathfrak{L}[J_t^\alpha h](\lambda) = \lambda^{-\alpha} \mathfrak{L}[h](\lambda), \quad \mathfrak{L}[D_t^\alpha h](\lambda) = \lambda^\alpha \mathfrak{L}[h](\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k D_t^{\alpha-k-1} h(0). \quad (3)$$

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из \mathfrak{Z} в \mathfrak{Z} . При $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ рассмотрим начальную задачу

$$\int_k^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-k-1} z(0) d\alpha = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4)$$

для уравнения распределенного порядка

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t) + g(t), \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

где $-\infty < a \leq 0 \leq m-1 < b \leq m \in \mathbb{N}$, $\omega : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$. Под решением задачи (4), (5) будем понимать функцию $z \in C((0, T); \mathfrak{Z})$, для которой существует

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha \in C((0, T); \mathfrak{Z})$$

и выполняются равенства (4) и (5).

Замечание 2.1. Понятно, что если уравнение (5) имеет нижний предел в интеграле $a > 0$, то оно может быть сведено к рассматриваемому случаю $a \leq 0$ доопределением нулем функции ω на соответствующем промежутке.

Введем также обозначение

$$\gamma := \bigcup_{k=1}^3 \gamma_k,$$

где

$$\gamma_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0, \arg \lambda \in (-\pi, \pi)\}, \quad \gamma_2 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -\infty)\},$$

$$\gamma_3 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -r_0]\},$$

$$W(\lambda) := \int_a^b \omega(\alpha) \lambda^\alpha d\alpha, \quad W_c^d(\lambda) := \int_c^d \omega(\alpha) \lambda^\alpha d\alpha,$$

$$Z_k(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^k (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Через $\text{Lap}(\mathfrak{Z})$ будем обозначать линейное пространство функций $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{Z}$, для которых определено преобразование Лапласа $\mathfrak{L}[z]$.

Теорема 2.1. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $\omega \in L_1(a, b)$, при некотором $\beta > 1$ функции $W(\lambda)$, $W_a^k(\lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, аналитичны на множестве $S_\beta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \beta, \arg \lambda \in (-\pi, \pi)\}$ и удовлетворяют условиям

$$\exists C_1 > 0 \quad \exists \delta \in (0, b - m + 1) \quad \forall \lambda \in S_\beta \quad |W(\lambda)| \geq C_1 |\lambda|^{m-1+\delta}, \quad (6)$$

$$\exists C_2 > 0 \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \quad \forall \lambda \in S_\beta \quad |W_a^k(\lambda)| |W(\lambda)|^{-1} \leq C_2 |\lambda|^{k-m+1-\delta}, \quad (7)$$

$$r_0 = \max \left\{ \beta, (2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}/C_1)^{1/(m-1+\delta)} \right\}, \quad z_k \in \mathfrak{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad g \in C([0, T]; \mathfrak{Z}).$$

Тогда функция

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k + \int_0^t Z_0(t-s)g(s)ds$$

является единственным решением задачи (4), (5) в пространстве $\text{Lap}(\mathfrak{Z})$.

Доказательство. Для $\lambda \in \gamma$ при заданном в условиях теоремы r_0 выполняется неравенство $|W(\lambda)| \geq 2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}$, поэтому существует обратный оператор $(W(\lambda)I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, при этом

$$\left\| \lambda^k (W(\lambda)I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leq \frac{|\lambda|^{m-1}}{|W(\lambda)| \left(1 - \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}}{|W(\lambda)|} \right)} \leq \frac{2}{C_1 |\lambda|^\delta}. \quad (8)$$

Таким образом, при $t > 0$ интегралы $Z_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, сходятся.

Пусть $R > r_0$,

$$\Gamma_R = \bigcup_{k=1}^4 \Gamma_{k,R}, \quad \Gamma_{1,R} = \gamma_1, \quad \Gamma_{2,R} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = R, \arg \lambda \in (-\pi, \pi) \},$$

$$\Gamma_{3,R} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -R] \}, \quad \Gamma_{4,R} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in [-R, -r_0] \}.$$

Получаем ориентированный в отрицательном направлении замкнутый контур Γ_R . Определим также контуры

$$\Gamma_{5,R} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi, \lambda \in (-R, -\infty) \}, \quad \Gamma_{6,R} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -R) \};$$

тогда $\gamma = \Gamma_{5,R} \cup \Gamma_{6,R} \cup \Gamma_R \setminus \Gamma_{2,R}$.

В силу (8) имеем

$$\|Z_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leq \frac{1}{C_1 \pi} \int_{\gamma} \frac{e^{t \operatorname{Re} \lambda}}{|\lambda|^\delta} ds \leq K e^{r_0 t} t^{\delta-1}, \quad t > 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (9)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1} \frac{e^{t \operatorname{Re} \lambda}}{|\lambda|^\delta} ds &\leq \frac{e^{r_0 t}}{\pi r_0^{\delta-1}} \int_0^{2\pi} e^{r_0 t (\cos \varphi - 1)} d\varphi \leq 2e^{r_0 t} r_0^{1-\delta}, \quad t \geq 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_l} \frac{e^{t \operatorname{Re} \lambda}}{|\lambda|^\delta} ds &\leq \frac{t^{\delta-1}}{\pi} \int_{-\infty}^{-r_0} \frac{e^x}{|x|^\delta} dx \leq \frac{t^{\delta-1} \Gamma(1-\delta)}{\pi}, \quad l = 2, 3, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Поэтому $Z_k \in \text{Lap}(\mathfrak{Z})$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

При условии $\operatorname{Re} \mu > r_0$ получим равенства

$$\mathfrak{L}[Z_k](\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\lambda^k}{\mu - \lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} d\lambda.$$

Согласно (6) эти интегралы сходятся и

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{s,R}} \frac{\lambda^k}{\mu - \lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} d\lambda = 0, \quad s = 2, 5, 6.$$

Следовательно, по интегральной формуле Коши с учетом отрицательной ориентации контура Γ_R

$$\mathfrak{L}[Z_k](\mu) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\lambda^k}{\mu - \lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} d\lambda = \mu^k (W(\mu)I - A)^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Поэтому для $c < b$

$$\mathfrak{L} \left[\int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m} Z_k(t) d\alpha \right] (\mu) = \int_c^b \omega(\alpha) \mu^{\alpha-m+k} (W(\mu)I - A)^{-1} d\alpha = \mu^{k-m} W_c^b(\mu) (W(\mu)I - A)^{-1}$$

и $\mathfrak{L}[Z_k]$ аналитически продолжимы на множество $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > r_0, \arg \mu \in (-\pi, \pi)\}$,

$$\int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m} Z_k(t) d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{k-m} W_c^b(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda.$$

Имеем при $b > 1, k = 0, 1, \dots, m-2, \lambda \in \gamma$

$$\left\| \lambda^{k-m} W_c^b(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(3)} \leq \frac{C}{|\lambda|^2}, \quad (10)$$

поэтому

$$\int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m} Z_k(0) d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_R} + \int_{\Gamma_{5,R}} + \int_{\Gamma_{6,R}} - \int_{\Gamma_{2,R}} \right) \lambda^{k-m} W_c^b(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} d\lambda = 0,$$

так как интеграл по Γ_R равен нулю по теореме Коши, а остальные интегралы стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$ в силу (10). Аналогично при $k = m-1$ получим

$$\begin{aligned} \int_{m-1}^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m} Z_{m-1}(t) e^{\lambda t} d\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{W_{m-1}^b(\lambda)}{\lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1 - \frac{W_a^{m-1}(\lambda)}{W(\lambda)}}{\lambda} e^{\lambda t} d\lambda \cdot I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{W_{m-1}^b(\lambda)}{\lambda W(\lambda)} \sum_{k=1}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k e^{\lambda t} d\lambda = \\ &= I - \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_R} + \int_{\Gamma_{5,R}} + \int_{\Gamma_{6,R}} - \int_{\Gamma_{2,R}} \right) \left(\frac{W_a^{m-1}(\lambda)}{\lambda W(\lambda)} e^{\lambda t} \cdot I - \frac{1 - \frac{W_a^{m-1}(\lambda)}{W(\lambda)}}{\lambda W(\lambda)} A \sum_{k=0}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k e^{\lambda t} \right) d\lambda \rightarrow I \end{aligned}$$

при $t \rightarrow 0+$. При этом используется оценка

$$\left\| \frac{W_a^{m-1}(\lambda)}{\lambda W(\lambda)} \cdot I - \frac{1 - \frac{W_a^{m-1}(\lambda)}{W(\lambda)}}{\lambda W(\lambda)} A \sum_{k=0}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k \right\|_{\mathcal{L}(3)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1+\delta}}$$

на S_β , справедливая в силу (6), (7). Теперь

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \left[\int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m+1} Z_k(t) d\alpha \right] (\mu) &= \mu^{k-m+1} W_c^b(\mu) (W(\mu)I - A)^{-1} - \int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m+1} Z_k(0) d\alpha, \\ \int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m+1} Z_k(t) d\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{k-m+1} W_c^b(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda. \end{aligned}$$

При $b > 2$

$$\int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m+1} Z_k(0) d\alpha = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-3, \quad \int_c^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m+1} Z_{m-2}(0) d\alpha = I,$$

$$\begin{aligned} \int_{m-2}^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-m+1} Z_{m-1}(t) d\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} W_{m-2}^b(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\lambda t} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} W_a^{m-2}(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda. \end{aligned}$$

Первый из полученных двух интегралов равен нулю по теореме Коши, а второй — стремится к нулю при $t \rightarrow 0+$ в силу неравенства (7).

Рассуждая, как выше, получим

$$\int_l^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-l-1} Z_k(0) d\alpha = 0, \quad l > 0, \quad k = 0, 1, \dots, l-1, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \int_l^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-l-1} Z_l(t) e^{\lambda t} d\alpha = I.$$

При $k = l+1, l+2, \dots, m-1$ имеем

$$\int_l^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-l-1} Z_k(t) d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{k-l-1} e^{\lambda t} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{k-l-1} W_a^l(\lambda) (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow 0+$. Согласно формуле (3) для преобразования Лапласа имеем для $k = 0, 1, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \left[\int_a^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha} Z_k(t) z_k d\alpha \right] (\mu) &= \\ &= \mu^k W(\mu) (W(\mu)I - A)^{-1} z_k - \sum_{l=0}^{m-1} \mu^l \int_l^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-l-1} Z_k(0) z_k d\alpha = \\ &= \mu^k A (W(\mu)I - A)^{-1} z_k = \mathfrak{L}[AZ_k(t)z_k](\mu). \end{aligned}$$

Подействуем обратным преобразованием Лапласа на обе части полученного равенства; тогда

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha} Z_k(t) z_k = AZ_k(t)z_k$$

во всех точках непрерывности функции $Z_k(\cdot)z_k$, т.е. при всех $t > 0$. Таким образом, функция

$$\sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k$$

является решением задачи (4) для однородного ($g \equiv 0$) уравнения (5).

Введем обозначение

$$z_g(t) := \int_0^t Z_0(t-s)g(s)ds,$$

в силу неравенства (9) этот интеграл сходится. Определим $g(t) = 0$ при $t \notin [0, T]$; тогда мы имеем свертку $z_g = Z_0 * g$, при этом

$$\mathfrak{L}[z_g] = \mathfrak{L}[Z_0]\mathfrak{L}[g], \quad \|\mathfrak{L}[g](\mu)\|_3 \leq C \int_0^T e^{-\mu t} dt \leq \frac{C}{\mu}.$$

Понятно, что при $\alpha \in (a, b)$

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m} z_g](\mu) = \mu^{\alpha-m} (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu), \quad \left\| \mu^{\alpha-m} (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu) \right\|_3 \leq C|\mu|^{-m-\delta},$$

поэтому $D_t^{\alpha-m} z_g(0) = 0$, а значит, и

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m+1} z_g](\mu) = \mu^{\alpha-m+1} (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu).$$

Продолжая эти рассуждения и учитывая, что

$$\left\| \mu^{\alpha-l-1} (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu) \right\|_3 \leq C |\mu|^{-1-\delta},$$

получим

$$D_t^{\alpha-l-1} z_g(0) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m-1,$$

так что

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-l} z_g](\mu) = \mu^{\alpha-l} (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu), \quad l = 0, 1, \dots, m.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L} \left[\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z_g d\alpha \right] (\mu) = W(\mu) (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu) = \mathfrak{L}[g](\mu) + A (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu).$$

Действуя обратным преобразованием Лапласа на обе части этого равенства, получим

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z_g(t) d\alpha = g(t) + A(Z_0 * g)(t) = g(t) + Az_g(t)$$

в силу непрерывности оператора A . Поэтому z_g — решение неоднородного уравнения (4) с нулевыми данными в условиях (5).

Если предположить, что существуют два решения z_1, z_2 задачи (4), (5) из класса $\text{Lap}(\mathfrak{Z})$, то их разность $y = z_1 - z_2 \in \text{Lap}(\mathfrak{Z})$ является решением уравнения

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha y(t) d\alpha = Ay(t)$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$\int_k^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-k-1} y(0) d\alpha = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям этого уравнения, получим равенство

$$W(\lambda) \mathfrak{L}[y](\lambda) = A \mathfrak{L}[y](\lambda).$$

Поэтому при $\lambda \in S_\beta$ имеем $\mathfrak{L}[y](\lambda) \equiv 0$. Отсюда $y \equiv 0$. \square

Замечание 2.2. Можно показать, что, например, функция $\omega \in C([a, b]; \mathbb{R})$, для которой $\omega(b) \neq 0$, удовлетворяет условиям (6), (7) (см. [9]).

3. Приложение к начально-краевым задачам. Пусть заданы многочлены

$$P_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i, \quad Q_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n d_i \lambda^i,$$

$c_i, d_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $c_n \neq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, пучок операторов $\Lambda, B_1, B_2, \dots, B_r$ регулярно эллиптичен (см. [17]), где

$$(\Lambda u)(s) = \sum_{|q| \leq 2r} a_q(s) \frac{\partial^{|q|} u(s)}{\partial^{q_1} s_1 \partial^{q_2} s_2 \dots \partial^{q_d} s_d}, \quad a_q \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

$$(B_l u)(s) = \sum_{|q| \leq r_l} b_{lq}(s) \frac{\partial^{|q|} u(s)}{\partial^{q_1} s_1 \partial^{q_2} s_2 \dots \partial^{q_d} s_d}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, 2, \dots, r,$$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Определим оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{Cl}(L_2(\Omega))$ с областью определения $D_{\Lambda_1} = H_{\{B_l\}}^{2r}(\Omega)$ равенством $\Lambda_1 u = \Lambda u$ (см. [17]). Предположим, что Λ_1 — самосопряженный оператор с ограниченным справа спектром. Тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ действительный, дискретный, конечнократный и сгущается только на $-\infty$. Пусть $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$; обозначим через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ систему ортонормированных в смысле $L_2(\Omega)$ собственных функций оператора Λ_1 , занумерованных по убыванию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\int_t^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-l-1} v(s, 0) = v_l(s), \quad l = 0, 1, \dots, m-1, \quad s \in \Omega, \quad (11)$$

$$B_l \Lambda^k v(s, t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (12)$$

$$\int_a^b D_t^\alpha P_n(\Lambda) v(s, t) d\alpha = Q_n(\Lambda) v(s, t) + f(s, t), \quad (s, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (13)$$

где $a \leq 0 \leq m-1 < b \leq m \in \mathbb{N}$, $\omega : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть $P_n(\lambda_k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$; тогда положим

$$\mathfrak{Z} = \left\{ u \in H^{2rn}(\Omega) : B_l \Lambda^k u(s) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad s \in \partial\Omega \right\},$$

$$L = P_n(\Lambda), \quad M = Q_n(\Lambda), \quad A = L^{-1}M, \quad g(t) = L^{-1}f(\cdot, t), \quad z_l = v_l(\cdot), \quad l = 0, 1, \dots, m-1.$$

Тогда $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, задача (11)–(13) представима в виде (4), (5) и по теореме 2.1 получим следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть спектр $\sigma(\Lambda_1)$ не содержит корней многочлена $P_n(\lambda)$. Тогда существует единственное решение задачи (11)–(13) в пространстве $\text{Lap}(\mathfrak{Z})$.

Доказательство. Осталось заметить, что в данном случае $\omega \equiv 1$,

$$W(\lambda) = \frac{\lambda^b - \lambda^a}{\ln \lambda}, \quad W_a^k(\lambda) = \frac{\lambda^k - \lambda^a}{\ln \lambda}$$

удовлетворяют условиям теоремы 2.1 и условиям (6), (7). \square

Пусть $a = -1$, $b = 3/2$, $n = 2$, $P_2(\lambda) = c_0^2 + \lambda^2$, $Q_1(\lambda) = d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2$, $\Lambda u = \Delta u$, $r = 1$, $B_1 = I$, $f \equiv 0$. Тогда задача (11)–(13) имеет вид

$$\int_0^{3/2} D_t^{\alpha-1} v(s, 0) = v_0(s), \quad \int_1^{3/2} D_t^{\alpha-2} v(s, 0) = v_1(s), \quad s \in \Omega,$$

$$v(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$\int_{-1}^{3/2} D_t^\alpha (c_0^2 + \Delta^2) v(s, t) d\alpha = (d_0 + d_1\Delta + d_2\Delta^2) v(s, t), \quad (s, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Диффер. уравн. — 1998. — 34, № 1. — С. 103–112.
2. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
3. *Стрелецкая Е. М., Федоров В. Е., Дебуш А.* Задача Коши для уравнения распределенного порядка в банаховом пространстве // Мат. заметки СВФУ. — 2018. — 25, № 1. — С. 63–72.
4. *Atanacković T. M., Oprić L., Pilipović S.* On a nonlinear distributed order fractional differential equation // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — 328. — P. 590–608.

5. *Bagley R. L., Torvik P. J.* On the existence of the order domain and the solution of distributed order equations. Part 2// *Int. J. Appl. Math.* — 2000. — 2, № 8. — P. 965–987.
6. *Bajlekova E. G.* Fractional Evolution Equations in Banach Spaces/ Ph.D. thesis. — Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001.
7. *Caputo M.* Mean fractional order derivatives. Differential equations and filters// *Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII. Sci. Mat.* — 1995. — 41. — P. 73–84.
8. *Diethelm K., Ford N. J.* Numerical solution methods for distributed order time fractional diffusion equation// *Fract. Calc. Appl. Anal.* — 2001. — 4. — P. 531–542.
9. *Fedorov V. E., Streletskaia E. M.* Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces// *Electron. J. Differ. Equ.* — 2018. — 2018, № 176. — P. 1–17.
10. *Hille E., Phillips R. S.* Functional Analysis and Semigroups. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1957.
11. *Jiao Z., Chen Y., Podlubny I.* Distributed-order dynamic system// in: *Stability, Simulations, Applications and Perspectives.* — London: Springer-Verlag, 2012.
12. *Kochubei A. N.* Distributed-order calculus and equations of ultraslow diffusion// *J. Math. Anal. Appl.* — 2008. — 340. — P. 252–280.
13. *Kostić M.* Abstract Volterra Integro-Differential Equations. — Boca Raton: CRC Press, 2015.
14. *Lorenzo C. F., Hartley T. T.* Variable order and distributed-order fractional operators// *Nonlin. Dyn.* — 2002. — 29. — P. 57–98.
15. *Prüss J.* Evolutionary Integral Equations and Applications. — Basel: Springer-Verlag, 1993.
16. *Sokolov I. M., Chechkin A. V., Klafter J.* Distributed-order fractional kinetics// *Acta Phys. Pol. B.* — 2004. — 35. — P. 1323–1341.
17. *Triebel H.* Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators. — Berlin, 1977.
18. *Umarov S., Gorenflo R.* Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations// *Z. Anal. Anw.* — 2005. — 24. — P. 449–466.

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский государственный университет;
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет), Челябинск
E-mail: kar@csu.ru

Абдрахманова Алия Айдаровна
Челябинский государственный университет
E-mail: urazaeva_anna@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 23–42
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-23-42

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ СИСТЕМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

© 2020 г. С. Г. ПЯТКОВ

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева задачи определения функции источников в системе тепломассопереноса, состоящей из системы Навье–Стокса, параболического уравнения для температуры и параболической системы для концентраций переносимых веществ. В качестве условия переопределения берутся интегралы от решения с весом по пространственной области. Доказана локальная (по времени) теорема существования решения задачи в нелинейном случае и получены оценки устойчивости, для линеаризованной системы получена глобальная теорема существования.

Ключевые слова: система тепломассопереноса, обратная задача, интегральное переопределение, существование, единственность, начально-краевая задача.

ON SOME CLASSES OF INVERSE PROBLEMS ON DETERMINING SOURCE FUNCTIONS FOR HEAT AND MASS TRANSFER SYSTEMS

© 2020 S. G. PYATKOV

ABSTRACT. In this paper, we consider the question on the well-posedness in Sobolev spaces of the problem of determining the source function in a heat and mass transfer system consisting of the Navier–Stokes system, a parabolic equation for temperature, and a parabolic system for the concentrations of substances being transferred. Weighted integrals solution over the spatial domain serve as overdetermination conditions. A local (in time) existence theorem for the solution of the problem in the nonlinear case is proved and stability estimates are obtained; for a linearized system, a global existence theorem is obtained.

Keywords and phrases: heat and mass transfer system, inverse problem, integral overdetermination, existence, uniqueness, initial-boundary-value problem.

AMS Subject Classification: 35R30, 35K51, 35Q35, 80A20, 80A23

1. **Введение.** Рассматривается система

$$u_t - \nu \Delta u + (u, \nabla)u + \nabla p = f + \beta_c C + \beta_\theta \Theta, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (1)$$

$$\Theta_t - \lambda_\theta \Delta \Theta + (u, \nabla)\Theta = f_\theta, \quad (2)$$

$$C_t + (u, \nabla)C - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i C_{x_i} + a_0 C = f_c, \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Ханты-Мансийского автономного округа–Югры (проект № 18-41-860003 p_урал_a).

где $\nu = \text{const} > 0$, $(x, t) \in Q = G \times (0, T)$ ($G \subset \mathbb{R}^n$, $T < \infty$), u , Θ , p , C , f_c суть вектор скорости, температура жидкости, давление, вектор концентраций примесей (органических или неорганических) в жидкости и объемная плотность источников примесей, соответственно. Здесь a_{ij} , a_i , a_0 — матрицы размерности $(h \times h)$, где h — это количество примесей, β_C — матрица размерности $(n \times h)$, β_Θ — вектор-функция длины n , $\lambda_\Theta > 0$ — скалярная функция. Описание таких моделей имеется, например, в [8], где на основе термодинамики необратимых процессов выведена система дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса в самом общем виде. В частности, там рассматриваются и системы, где система Навье—Стокса заменена более общей системой. Система (1)—(3) описывает распространение примесей в жидкости. В частности, в класс систем (1)—(3) входит классическая модель Обербека—Буссинеска (см. [9, 20, 38, 44]). Функции f_θ и f являются плотностями источников тепла и внешних сил соответственно, а коэффициент λ_θ есть коэффициент теплопроводности. В модели Обербека—Буссинеска β_c и β_θ суть коэффициенты переноса массы и тепла, умноженные на ускорение свободного падения. Здесь считаем, что β_c — произвольная матрица-функция размерности $(n \times h)$ и β_θ — вектор-функция длины n .

Система (1)—(3) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u|_S = 0, \quad \Gamma = \partial G, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (4)$$

$$\Theta|_{t=0} = \Theta_0, \quad B_1\Theta|_S = g_2(t, x), \quad C|_{t=0} = C_0, \quad B_2C|_S = g_3(t, x), \quad (5)$$

где

$$B_1u = u \quad \text{или} \quad B_1u = \sum_{i=1}^n \gamma_{1i}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma_1(x, t)u,$$

γ_{1i} , σ_1 — некоторые функции,

$$B_2u = u \quad \text{или} \quad B_2u = \sum_{i=1}^n \gamma_{2i}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma_2(x, t)u,$$

γ_{2i} , σ_2 — некоторые матрицы-функции размерности $(h \times h)$ и $S = (0, T) \times \Gamma$. Таким образом, мы рассматриваем одно из классических граничных условий Дирихле, Неймана, Робена или условие с косой производной. Правая часть в (3) имеет вид

$$f_c = f_0(x, t) + \sum_{i=1}^s f_i(x, t)q_i(t), \quad (x, t) \in Q, \quad (6)$$

где f_i ($i = 0, 1, \dots, m$) — известные функции. Числовые функции $q_i(t)$ в данном представлении неизвестны и находятся с использованием условий переопределения:

$$\int_G (C, \varphi_i(x)) dx = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (7)$$

где скобки обозначают скалярное произведение в \mathbb{R}^h , $\varphi_i(x)$ — вектор-функции длины h , $\psi_i(t)$ — некоторые функции.

Обратные задачи такого типа возникают в химии, биологии и других областях при описании процессов тепло-массопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации. Описание некоторых численных методов решения краевых задач для системы (1)—(3) можно найти в [9]. Отметим работу [1], где для системы (1)—(3) рассмотрено большое количество обратных и экстремальных задач в стационарном случае. Подобные модели, в упрощенной постановке, рассматривались в [23–48]. Отметим, что в реальных моделях, используемых в региональных системах поддержки принятия решений, даже в одномерном случае используется несколько уравнений относительно различных примесей в жидкости. В них учитываются такие параметры воды, как фитопланктон, эпифитон и различные химические составляющие (различные подходы к построению таких моделей и библиография описаны в [24]). Вопросы корректности обратных задач для параболических уравнений и систем с условиями переопределения вида (7) (включая численные методы) рассматривались во многих работах. По-видимому, одной из первых работ где

рассматривался вопрос об определении правой части вида $f = q(t)g(x, t) + f_0(x, t)$ в параболическом уравнении (неизвестной функцией является функция $q(t)$) была работа [10]. В качестве основных пространств рассматривались пространства Гельдера. Далее, вопрос об определении правой части такого вида по интегральным условиям рассматривался в [4, 22, 28, 35, 37]. Вопросы определения того или иного коэффициента, зависящего от времени, в параболическом уравнении по интегральным условиям переопределения был рассмотрен, например, в [3, 5, 40, 41, 43, 46] и многих других. Выделим книгу [42], где в случае $n = 1$, был исследован ряд коэффициентных обратных задач (см., например, [42, теорема 4.114]). Стоит отметить, что работ, посвященных многомерным обратным задачам в более или менее общих постановках, мало. Можно отметить книгу [50], где рассматривались задачи такого типа и имеется обширная библиография. Опишем ряд результатов из этой книги. Была рассмотрена задача с условиями переопределения вида (7) в задаче определения функции источника вида $f(t)g(x, t)$ в модельном параболическом уравнении второго порядка (см. [50, § 1.5]). Та же задача была рассмотрена отдельно для системы Навье—Стокса (см. [50, § 4.4]) и ее аналог для операторно-дифференциального уравнения первого порядка вида

$$u_t - A(t)u = \Phi(t)p(t) + F(t),$$

где $A(t)$ — оператор, вообще говоря, с постоянной областью определения, являющийся генератором аналитической полугруппы или полугруппы класса C_0 (см. [50, § 6.2, 6.6]). Был рассмотрен и случай, когда неизвестная функция $p(t)$ входит в правую часть нелинейно а сама задача является квазилинейной. Задача в аналогичной постановке была рассмотрена и в работе автора [13], в случае когда область определения $A(t)$ может зависеть от времени и условия гладкости на этот оператор минимальны. Среди последних работ выделим результаты работ [11–51], где задачи вида (1)–(7) рассмотрены для параболических систем уравнений, как в случае определения функции источника, так и в случае коэффициентных обратных задач. Среди монографий, посвященных обратным задачам для параболических и эллиптических уравнений и систем, можно отметить монографии [2, 21, 39, 47, 49, 50], в которых можно найти постановки и ряд результатов. Обратные задачи для системы (1)–(3) с данными переопределения на пространственных многообразиях или в отдельных точках были рассмотрены в [6, 52]. Данная работа является дополнением к уже полученным в указанных работах результатам. Мы приведем теоремы существования и единственности и оценки устойчивости решений, как в нелинейной, так и в линеаризованной постановке.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть E — банахово пространство. Обозначим через $L_p(G; E)$ (G область \mathbb{R}^n) пространство сильно измеримых функций, определенных на G со значениями в E и конечной нормой $\| \|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ (см., например, [54, §1.18.4]). Также используются пространства $C^k(\overline{G}; E)$ состоящие из функций, обладающих всеми производными до k включительно, непрерывных и ограниченных в G , имеющих непрерывное продолжение на \overline{G} . Пространства Соболева $W_p^k(G; E)$, $W_p^k(Q; E)$ определены стандартным образом (см. [18, 19, 25, 54]). Если $E = \mathbb{C}$ или $E = \mathbb{C}^n$, то используется обозначение $W_p^k(G)$, или $C^k(\overline{G})$. Принадлежность $u \in W_p^k(G)$ (или $u \in C^k(\overline{G})$) для заданной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ означает, что каждая компонента u_i принадлежит $W_p^k(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). Норма в соответствующем пространстве — сумма норм координат, если не указано противное. Аналогичное соглашение примем для матриц: принадлежность $a \in W_p^k(G)$ ($a = \{a_{ij}\}_{j,i=1}^k$) означает, что $a_{ij}(x) \in W_p^k(G)$ для всех i, j . Для заданного интервала $J = (0, T)$ положим

$$W_p^{k,r}(Q) = W_p^r(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^k(G)), \quad W_p^{k,r}(S) = W_p^r(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^k(\Gamma)).$$

Обозначим через $L_{p,\sigma}(G)$ замыкание соленоидальных C_0^∞ -вектор-функций по норме $L_p(G)$ и положим

$$W_{p,\sigma}^k(G) = W_p^k(G) \cap L_{p,\sigma}(G), \quad W_{p,\sigma}^{k,k/2}(Q) = W_p^{k,k/2}(Q) \cap L_p(0, T; L_{p,\sigma}(G)), \quad k \geq 0.$$

Символ $\mathring{W}_q^k(G)$ обозначает замыкание $C_0^\infty(G)$ по норме пространства $W_q^k(G)$ и

$$\mathring{W}_q^1(G) = \{p \in L_{q,loc}(G) : \nabla p \in L_q(G)\}.$$

Мы отождествляем функции, отличающиеся на константу, и вводим в этом пространстве норму $\|p\|_{\mathring{W}_q^1(G)} = \|\nabla p\|_{L_q(G)}$; это пространство является банаховым. Символы $(A, B)_{\theta, q}$ и $[A, B]_\theta$ для заданных банаховых пространств A, B обозначают пространства, полученные при помощи вещественного и комплексного интерполяционных методов (см. [54]). Символ ∂_{x_k} обозначает частную производную $\partial/\partial x_k$.

Определение границы класса C^s стандартное (см., например, [7, гл. 1, § 1, п. 3]). В дальнейшем используем обозначения $Q^\tau = G \times (0, \tau)$, $S^\tau = \Gamma \times (0, \tau)$.

Лемма 1. Пусть $u \in W_q^{2,1}(Q^\tau)$, $q \in (1, \infty)$, $u(x, 0) = 0$. Тогда существует такая константа $c > 0$, не зависящая от u , что

$$\|u\|_{L_q(Q^\tau)} \leq c\tau \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}, \quad \|\nabla u\|_{L_q(Q^\tau)} \leq c\tau^{1/2} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}.$$

Утверждение является следствием формулы Ньютона—Лейбница и интерполяционного неравенства

$$\|\nabla u\|_{L_q(G)} \leq c \|u\|_{W_q^2(G)}^{1/2} \|u\|_{L_q(G)}^{1/2}.$$

Следующая лемма является следствием леммы 1 и [7, гл. 2, лемма 3.3], где $\delta = \sqrt{\tau}$.

Лемма 2. Пусть $u \in W_q^{2,1}(Q^\tau)$. Тогда

$$u \in L_p(Q^\tau), \quad \text{где } 2 - l \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) (n+2) \geq 0, \quad p \geq q,$$

$$\nabla u \in L_p(Q^\tau), \quad \text{где } 1 - l \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) (n+2) \geq 0, \quad p \geq q.$$

Более того,

$$u \in C^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q^\tau}) \quad \text{для } q > \text{fracn} + 22,$$

$$\nabla u \in C^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q^\tau}) \quad \text{для } q > n + 2,$$

где $\lambda \in [0, 2 - (n+2)/q]$ в первом случае и $\lambda \in [0, 1 - (n+2)/q]$ в последнем. Справедливы следующие оценки для соответствующих значений параметров:

$$\|u\|_{L_p(Q^\tau)} \leq c\tau^{\beta_1} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}, \quad \|\nabla u\|_{L_p(Q^\tau)} \leq c\tau^{\beta_1 - 1/2} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)},$$

$$\|u\|_{C^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q^\tau})} \leq c\tau^{\beta_2} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}, \quad \|\nabla u\|_{C^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q^\tau})} \leq c\tau^{\beta_2 - 1/2} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)},$$

где

$$\beta_1 = 1 - \frac{(n+2)}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right), \quad \beta_2 = 1 - \frac{(n+2)}{2q} - \frac{\lambda}{2},$$

константа c не зависит от $\tau \leq T$ и $u \in W_q^{2,1}(Q^\tau)$.

Лемма 3. Пусть $b \in L_p(Q)$. Тогда для любого $\tau \in (0, T]$ имеют место следующие неравенства: если $q > (n+2)/2$ и $p \geq q$, то

$$\|bu\|_{L_q(Q^\tau)} \leq c\tau^{1 - (n+2)/(2p)} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)};$$

если $q > n+2$ и $p \geq q$, то

$$\|b\nabla u\|_{L_q(Q^\tau)} \leq c\tau^{1/2 - (n+2)/(2p)} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}.$$

Константа $c > 0$ не зависит от $\tau \leq T$ и $u \in W_q^{2,1}(Q^\tau)$.

Доказательство данной леммы можно найти в доказательстве теоремы 9.1 в [7, гл. 4].

Теорема 1. Для каждой функции $f \in L_r(Q)$, $r \in (1, \infty)$, существуют единственная вектор-функция $u \in W_{r,\sigma}^{2,1}(Q) \cap L_r(0, T; \dot{W}_r^1(G))$ и функция $p \in L_r(0, \tau; \dot{W}_r^1(G))$, являющиеся решением задачи

$$u_t - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_S = 0, \quad ub|_{t=0} = 0,$$

и удовлетворяющие неравенству

$$\|u\|_{W_{r,\sigma}^{2,1}(Q)} + \|\nabla p\|_{L_r(Q)} \leq c \|f\|_{L_r(Q)},$$

где постоянная c не зависит от f .

Следствие 1. Для каждой функции $f \in L_r(Q^\tau)$, $\tau \in (0, T]$, существуют единственная вектор-функция $u \in W_{r,\sigma}^{2,1}(Q^\tau) \cap L_r(0, \tau; \dot{W}_r^1(G))$ и функция $p \in L_r(0, \tau; \dot{W}_r^1(G))$, являющиеся решением задачи

$$u_t - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_S = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (8)$$

и удовлетворяющие неравенству

$$\|u\|_{W_{r,\sigma}^{2,1}(Q^\tau)} + \|\nabla p\|_{L_r(Q^\tau)} \leq c \|f\|_{L_r(Q^\tau)},$$

где постоянная c не зависит от f и τ .

Теорема 1 вытекает из [53, теорема 1.1]; также можно сослаться на [31, теорема 1.2] и свойства проектора Гельмгольца.

В случае, когда G — ограниченная область, теорема 1 справедлива для любого r . При определенных условиях на r теорему можно установить и для более широкого класса областей, в частности, для бесконечного цилиндра (см. [29]), для полупространств (см. [26]), для целого пространства и ограниченных областей с границей класса $C^{1,1}$ (см. [31]), для плоского слоя и асимптотически плоского слоя (см. [15, 16]) и для некоторых других классов неограниченных областей (см. [17, 32, 33]). Теорема 1 является основной теоремой, используемой ниже.

Следующий результат — теорема о разрешимости параболических задач. Рассмотрим задачу

$$u_t - Lu = f, \quad Bu|_S = u_0, \quad u(x, 0) = g(x, t), \quad (9)$$

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^n a_i(x, t) u_{x_i} - a_0(x, t) u,$$

$Bu = u$ или

$$Bu = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x, t) u,$$

где γ_i, σ — некоторые матрицы-функции размерности $h \times h$ и $S = (0, T) \times \Gamma$; a_{ij}, a_i, a_0 — матрицы размера $h \times h$. Предположим, что выполнены условия параболичности и Лопатинского.

Условие параболичности. Пусть

$$A_0(t, x, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Предположим, что найдется такая постоянная $\delta_1 > 0$, что все корни p полинома $\det(A_0(t, x, i\xi) + pE) = 0$ (здесь E — единичная матрица) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} p \leq -\delta_1 |\xi|^2 \quad (10)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и всех $(x, t) \in Q$.

Пусть $B_0 u = u$ в случае условий Дирихле в (2) и $B_0 u = \sum_{j=1}^n \gamma_j \partial_{x_j} u$ в противном случае.

Условие Лопатинского (см. условие (LS) в [27, с. 198]). Для любой точки $(t_0, x_0) \in S$, таких векторов $\xi \in \mathbb{R}^n$, что $(\xi, \nu(x_0)) = 0$ (здесь $\nu(x)$ — внешняя единичная нормаль к Γ в точке x), всех $h \in \mathbb{C}^h$ и таких λ , что $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ и $|\xi| + |\lambda| \neq 0$, система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\lambda E + A_0(x_0, t_0, \xi + i\nu(x_0)\partial_y))v(z) = 0, \quad B_0(x_0, t_0, \xi + i\nu(x_0)\partial_y)v(0) = h \quad (11)$$

имеет единственное убывающее на бесконечности решение класса $C([0, \infty))$.

Считаем, что

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in C(\overline{Q}), \quad a_i \in L_q(Q), \quad a_0 \in L_q(Q), \quad i, j = 1 \dots n, \\ \gamma_j, \sigma &\in C^{1/2-1/2p+\varepsilon_0, 1-1/p+\varepsilon_0}(\overline{S}), \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (12)$$

для некоторого $\varepsilon_0 > 0$,

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \quad g(x, t) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad B(x, 0, D)u_0|_\Gamma = g(x, 0), \quad (13)$$

где $s_0 = 1 - 1/2p$ в случае задачи Дирихле и $s_0 = 1/2 - 1/2p$ в случае оставшихся краевых условий.

Теорема 2. Пусть $\partial G \in C^2$, $q > n + 2$, $\gamma \in (0, T]$ и условия параболичности и Лопатинского, а также (12), (13) выполнены. Тогда для каждого $f \in L_q(Q)$ существует единственное решение $u \in W_q^{2,1}(Q^\gamma)$ задачи (9), удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)}),$$

где постоянная c не зависит от f , u_0 , g .

Теорема является следствием [7, гл. 7, теорема 10.4] (см. также [14] или [27, теорема 2.1]).

Теорема 3. Пусть $\partial G \in C^2$, $q > n + 2$, $u_0 = 0$, $g = 0$, $\gamma \in (0, T]$ и условия параболичности, Лопатинского и (12) выполнены. Тогда для каждого $f \in L_q(Q)$ существует единственное решение $u \in W_q^{2,1}(Q^\gamma)$ задачи (9), удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} \leq c\|f\|_{L_q(Q^\gamma)},$$

где константа c не зависит от $\gamma \in (0, T)$.

Данная теорема — очевидное следствие теоремы 2. Мы применяем теорему 2, где берем нулевые начальные и граничные данные и правую часть $f_\gamma = f(x, t)$ при $t \in (0, \gamma)$ и $f_\gamma = 0$ при $t \in (\gamma, T)$.

3. Формулировка основных результатов.

Всюду ниже считаем, что $q > n + 2$.

Условие согласования и гладкости могут быть записаны в следующей форме:

$$u_0 \in W_q^{2-2/q}(G), \quad \operatorname{div} u_0 = 0, \quad u_0|_\Gamma = 0; \quad (14)$$

$$C_0(x) \in W_q^{2-2/q}(G), \quad g_3(x, t) \in W_q^{s_0, 2s_0}(S), \quad B_2(x, 0, D)C_0|_\Gamma = g_3(x, 0); \quad (15)$$

$$\Theta_0(x) \in W_q^{2-2/q}(G), \quad g_2(x, t) \in W_q^{1-1/2q, 2-1/q}(S), \quad B_1(x, 0, D)\Theta_0|_\Gamma = g_2(x, 0); \quad (16)$$

$$f, f_\theta, f_0 \in L_q(Q); \quad (17)$$

$$\psi_i(t) \in W_q^1(0, T), \quad \psi_i(0) = \int_{G_i} C_0(x)\varphi_i(x)dx, \quad i = 1, 2, \dots, s; \quad (18)$$

$$a_i(t, x) \in L_q(Q), i = 0, 1, \dots, n; \quad a_{ij} \in C([0, T]; C^{\varepsilon_0}(\overline{G})), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (19)$$

$$\gamma_{ij}, \sigma \in C^{1/2-1/2p+\varepsilon_0, 1-1/p+\varepsilon_0}(\overline{S}), \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — некоторая положительная постоянная;

$$f_i(x, t) \in L_\infty(0, T; L_q(G)), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (21)$$

Пусть $\{G_j\}$ — набор областей с границей класса C^1 , вложенных в G . Предположим, что

$$\varphi_j \in W_r^{\varepsilon_1}(G), \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (22)$$

для некоторого $\varepsilon_1 > 0$.

Определим элементы $b_{ij}(t)$ матрицы B равенством

$$b_{ij} = \int_G (f_j, \varphi_i(x)) dx.$$

Полагаем, что существует такая постоянная $\delta_0 > 0$, что

$$|\det B| \geq \delta_0 > 0 \quad \text{п.в. на } (0, T). \quad (23)$$

Также будем считать, что найдется такая постоянная $\delta_1 > 0$, что

$$\lambda_\theta(x, t) \geq \delta_1 > 0, \quad (x, t) \in Q, \quad \lambda_\theta \in C(\overline{Q}); \quad \beta_c, \beta_\theta \in L_q(Q). \quad (24)$$

Введем множество B_R данных $\mathbf{U} = (u_0, C_0, \Theta_0, g_2, g_3, f, f_0, f_\theta, \psi_1, \dots, \psi_s)$, удовлетворяющих условиям (14)-(18) и неравенству

$$\begin{aligned} & \|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|C_0\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|\Theta_0\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|g_2\|_{W_q^{1-1/2q, 2-1/q}(S)} + \\ & + \|g_3\|_{W_q^{s_0, 2s_0}(S)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f_\theta\|_{L_q(Q)} + \|f_0\|_{L_q(Q)} + \sum_{i=1}^s \|\psi_i\|_{W_q^1(0, T)} \leq R, \end{aligned}$$

где функция Φ_1 удовлетворяет условиям (14).

Теорема 4. Пусть $\Gamma \in C^2$, $p > n+2$, и выполнены условия (19)–(24). Фиксируем $R_0 > 0$. Тогда существует такое число $\tau_0 = \tau_0(R_0) \in (0, T]$, что для каждого набора данных \mathbf{U} из множества B_{R_0} существует единственное решение $(u, p, \Theta, C, q_1, \dots, q_m)$ задачи (1)–(7) из класса

$$u \in W_q^{2,1}(Q^{\tau_0}), \quad p \in L_q(0, \tau_0; \dot{W}_q^1(G)), \quad q_j \in L_q(Q_0^{\tau_0}), \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

и найдется такая постоянная $c = c(R_0)$, что для любых двух решений $u^i, \Theta^i, C^i, q^i, q^i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{im})$, $i = 1, 2$, из этого класса, отвечающих наборам

$$\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \in B_{R_0}, \quad \mathbf{U}_i = (u_0^i, C_0^i, \Theta_0^i, g_2^i, g_3^i, f^i, f_0^i, f_\theta^i, \psi_1^i, \dots, \psi_s^i), \quad i = 1, 2,$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|u^1 - u^2\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} + \|\Theta^1 - \Theta^2\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} + \|C^1 - C^2\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} + \sum_{j=1}^s \|q_{1j} - q_{2j}\|_{L_q(0, \tau_0)} \leq \\ & \leq c \left(\|u_0^1 - u_0^2\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|f^1 - f^2\|_{L_q(Q^{\tau_0})} + \|f_\theta^1 - f_\theta^2\|_{L_q(Q^{\tau_0})} + \|f_0^1 - f_0^2\|_{L_q(Q^{\tau_0})} + \right. \\ & + \|C_0^1 - C_0^2\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|\Theta_0^1 - \Theta_0^2\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|g_2^1 - g_2^2\|_{W_q^{1-1/2q, 2-1/q}(S^{\tau_0})} + \\ & \left. + \|g_3^1 - g_3^2\|_{W_q^{s_0, 2s_0}(S^{\tau_0})} + \sum_{i=1}^s \|\psi_i^1 - \psi_i^2\|_{W_q^1(0, \tau_0)} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим линеаризованную постановку. Рассматривается система уравнений

$$u_t - \nu \Delta u + \nabla p = \sum_{j=1}^n B_j u_{x_j} + B_0 u + f + \beta_C C + \beta_\theta \Theta, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (25)$$

$$\Theta_t - \lambda_\theta \Delta \Theta + \sum_{j=1}^n b_j \Theta_{x_j} + b_0 \Theta = f_\theta + \sum_{j=1}^n b^j u_j, \quad (26)$$

$$C_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^n a_j C_{x_j} + a_0 C = f_c + \sum_{j=1}^n a^j u_j. \quad (27)$$

Полагаем далее, что

$$B_0, b^j, b_0, a^j, B_j, b_j, \in L_q(Q), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

Теорема 5. Пусть $\Gamma \in C^2$, $p > n+2$, выполнены условия (19)–(24), (28) и набор данных U удовлетворяет условиям (14)–(18). Тогда существует единственное решение $(u, p, \Theta, C, q_1, \dots, q_m)$ задачи (25)–(27), (4)–(7) из класса

$$u \in W_q^{2,1}(Q), \quad p \in L_q(0, T; \dot{W}_q^1(G)), \quad q_j \in L_q(Q), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Решение удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} & \|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\Theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|C\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \sum_{j=1}^s \|q_j\|_{L_q(0,T)} \leq \\ & \leq c \left(\|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f_\theta\|_{L_q(Q)} + \|f_0\|_{L_q(Q)} + \|C_0\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \|\Theta_0\|_{W_q^{2-2/q}(G)} + \right. \\ & \left. \|g_2\|_{W_q^{1-1/2q, 2-1/q}(S)} + \|g_3\|_{W_q^{s_0, 2s_0}(S)} + \sum_{i=1}^s \|\psi_i^1 - \psi_i^2\|_{W_q^1(0,T)} \right). \end{aligned}$$

4. Доказательство основных результатов. Доказательство теоремы 4. Построим функции $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in W_q^{2,1}(Q)$, удовлетворяющие начально-краевым условиям (4), (5), т.е.

$$\Phi_1|_{t=0} = u_0, \quad \Phi_2|_{t=0} = \Theta_0, \quad \Phi_3|_{t=0} = C_0, \quad \Phi_1|_S = 0, \quad \Phi_i|_S = g_i, \quad i = 2, 3.$$

Используя теоремы 1, 2, строим эти функции как решения соответствующих начально-краевых задач с нулевыми правыми частями. Сделаем замену $u = v + \Phi_1$, $\Theta = \Theta_1 + \Phi_2$, и $C = C_1 + \Phi_3$. Получим

$$L_{01}(v, p) = v_t - \nu \Delta v + \nabla p = g + \beta_c C_1 + \beta_\theta \Theta_1 - (\Phi_1, \nabla)v - (v, \nabla)v - (v, \nabla)\Phi_1, \quad (29)$$

$$\operatorname{div} v = 0,$$

$$L_{02}\Theta_1 = \Theta_{1t} - \lambda_\theta \Delta \Theta_1 = g_\theta - (v, \nabla)\Theta_1 - (\Phi_1, \nabla)\Theta_1 - (v, \nabla)\Phi_2, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} L_{03}C_1 &= C_{1t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{1x_i x_j} + \sum_{j=1}^n a_j C_{1x_j} + a_0 C_1 = \\ &= g_c - (v, \nabla)C_1 - (\Phi_1, \nabla)C_1 - (v, \nabla)\Phi_3 + \sum_{j=1}^m f_j q_j, \quad (31) \end{aligned}$$

где новая функция g_θ и вектор-функции g, g_c имеют вид

$$\begin{aligned} g &= f - \Phi_{1t} + \nu \Delta \Phi_1 - (\Phi_1, \nabla)\Phi_1 + \beta_c \Phi_3 + \beta_\theta \Phi_2, \\ g_\theta &= f_\theta - L_{02}\Phi_2 - (\Phi_1, \nabla)\Phi_2, \quad g_c = f_0 - L_{03}\Phi_3 - (\Phi_1, \nabla)\Phi_3. \end{aligned}$$

Новые функции v, θ_1 и вектор-функция C_1 удовлетворяют однородным краевым условиям (4), (5), (7), причем выполнены условия переопределения

$$\int_G (C_1, \varphi_j(x)) dx = \psi_j(t) - \int_G (\Phi_3, \varphi_j(x)) dx = \tilde{\psi}_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (32)$$

Мы свели задачу к эквивалентной задаче. Пусть $\gamma \in (0, T]$. Используя теоремы 1, 2, можем переписать уравнения (29), (30), (31) в следующей форме:

$$(v, p) = (L_{01})^{-1}g + (L_{01})^{-1}(\beta_c C_1 + \beta_\theta \Theta_1 - (\Phi_1, \nabla)v - (v, \nabla)v - (v, \nabla)\Phi_1), \quad (33)$$

$$\Theta_1 = (L_{02})^{-1}g_\theta - (L_{02})^{-1}\left((v, \nabla)\Theta_1 + (\Phi_1, \nabla)\Theta_1 + (v, \nabla)\Phi_2\right), \quad (34)$$

$$C_1 = (L_{03})^{-1}g_c + (L_{03})^{-1}\left(- (v, \nabla)C_1 - (\Phi_1, \nabla)C_1 - (v, \nabla)\Phi_3 + \sum_{j=1}^m f_j q_j\right). \quad (35)$$

Здесь оператор $(L_{01})^{-1}$ отображает элемент $g \in L_q(Q^\gamma)$ в пару (v, p) , являющуюся решением уравнения $L_{01}(v, p) = g$ и удовлетворяющую условиям

$$\operatorname{div} v = 0, \quad v \in W_q^{2,1}(Q^\gamma), \quad p \in L_q(0, \gamma; \dot{W}_q^1(G)),$$

где вектор-функция v удовлетворяет однородным начальным и краевым условиям. Операторы $(L_{0i})^{-1}$ ($i = 2, 3$) определяются аналогично с использованием теоремы 2. Пусть $(L_{01})^{-1}g = (v_0, p_0)$. Определим пространство H^γ , содержащее векторы (v, p, Θ, C) , где $v \in W_q^{2,1}(Q^\gamma)$ — соленоидальная вектор-функция длины n , удовлетворяющая однородным условиям (4), $C, \Theta \in W_q^{2,1}(Q^\gamma)$ — вектор длины h и скалярная функция, удовлетворяющие однородным условиям (5), p — скалярная функция из $L_q(0, \gamma; \dot{W}_q^1(G))$. Введем в этом пространстве норму

$$\|(v, p, \Theta, C)\|_{H^\gamma} = \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + \|p\|_{L_q(0, \gamma; \dot{W}_q^1(G))} + \|\Theta\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + \|C\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Пусть $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s) \in B_\gamma = \{\mathbf{q} \in L_p(0, \gamma) : \|\mathbf{q}\|_{L_p(0, \gamma)} \leq R_0\}$. Параметр R_0 мы уточним ниже. Имеем очевидную оценку (см. теорему 3 и условия (21) на функции f_j)

$$\left\| (L_{03})^{-1} \sum_{j=1}^m f_j q_j \right\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq c_1 \left\| \sum_{j=1}^m f_j q_j \right\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq c_2 \|\mathbf{q}\|_{L_p(0, \gamma)} \leq c_2 R_0. \quad (36)$$

Положим

$$R = 3 \left(\|v_0, p_0, (L_{02})^{-1}g_\theta, (L_{03})^{-1}g_c\|_{HT} + c_2 R_0 \right).$$

Будем искать решение системы (33)–(35) при данном фиксированном $\mathbf{q} \in B_\gamma$:

$$\omega = A(\omega, \mathbf{q}), \quad \omega = (v, p, \Theta, C), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s), \quad (37)$$

где оператор A определен правой частью системы (33)–(35). Будем считать, что

$$\omega \in B_{R, \gamma} = \{\omega \in H^\gamma : \|\omega\|_{H^\gamma} \leq R\}.$$

Оценим $\|A(\omega, \mathbf{q})\|_{H^\gamma}$. Из теорем 1, 3, определения величины R и (36) имеем

$$\begin{aligned} \|A(\omega, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq & \frac{R}{3} + c \left(\left\| \beta_c C_1 + \beta_\theta \Theta_1 - (\Phi_1, \nabla)v - (v, \nabla)v - (v, \nabla)\Phi_1 \right\|_{L_q(Q^\gamma)} + \right. \\ & \left. + \left\| (v, \nabla)\Theta_1 + (\Phi_1, \nabla)\Theta_1 + (v, \nabla)\Phi_2 \right\|_{L_q(Q^\gamma)} + \left\| (v, \nabla)C_1 + (\Phi_1, \nabla)C_1 + (v, \nabla)\Phi_3 \right\|_{L_q(Q^\gamma)} \right). \end{aligned}$$

Оценим по отдельности каждое из слагаемых, используя лемму 2:

$$\|\beta_c C_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq \|\beta_c\|_{L_q(Q)} \|C_1\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \leq c_1 \gamma^{\beta_1} \|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично имеем

$$\|\beta_\theta \Theta_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c_2 \gamma^{\beta_2} \|\Theta_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Оценим следующее слагаемое:

$$\|(\Phi_1, \nabla)v\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq \|\Phi_1\|_{L_q(Q^T)} \|\nabla v\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \leq c_3 \gamma^{\beta_3} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично получим

$$\|(\Phi_1, \nabla)\Theta_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c_4 \gamma^{\beta_4} \|\Theta_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \quad \|(\Phi_1, \nabla)C_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c_5 \gamma^{\beta_5} \|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Имеем

$$\|(v, \nabla)\Phi_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq \|\nabla\Phi_1\|_{L_q(Q^T)} \|v\|_{C(Q^\gamma)} \leq c_6 \gamma^{\beta_6} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Кроме того,

$$\|(v, \nabla)\Phi_2\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c_7 \gamma^{\beta_7} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \quad \|(v, \nabla)\Phi_3\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c_8 \gamma^{\beta_8} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Наконец,

$$\|(v, \nabla)v\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq \|\nabla v\|_{C(Q^\gamma)} \|v\|_{C(Q^\gamma)} \leq c_9 (R) \gamma^{\beta_9} \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)},$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\|(v, \nabla)\Theta_1\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_{10}(R)\gamma^{\beta_{10}}\|\Theta_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \\ \|(v, \nabla)C_1\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_{11}(R)\gamma^{\beta_{11}}\|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.\end{aligned}$$

Суммируя, получим

$$\|A(\omega, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3} + c_1(R)\gamma^{\beta_1}\|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + c_2(R)\gamma^{\beta_2}\|\Theta_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + c_3(R)\gamma^{\beta_3}\|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Так как $\gamma \in (0, T]$, то, выбрав $\beta = \min(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, имеем

$$\|A(\omega, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3} + c_0(R)\gamma^\beta\|\omega\|_{H^\gamma}, \quad (38)$$

где постоянная c_1 не зависит от R и β . Выберем такую константу $\gamma_0 \leq T$, что $c_0(R)\gamma^\beta \leq R/3$ для всех $\gamma \leq \gamma_0$. Тогда неравенство (38) можно переписать в виде

$$\|A(\omega, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq R \quad \forall \omega \in B_{R,\gamma}, \quad \mathbf{q} \in B_\gamma.$$

Это означает, что для каждого $\mathbf{q} \in B_\gamma$ оператор $A(\omega, \mathbf{q})$ переводит шар $B_{R,\gamma}$ в себя. Аналогично рассуждая, можем получить оценку для $\|A(\omega^1, \mathbf{q}) - A(\omega^2, \mathbf{q})\|_{H^\gamma}$, где $\omega^i = (v^i, p^i, \Theta^i, C^i)$, $i = 1, 2$. Имеем

$$\begin{aligned}\|A(\omega^1, \mathbf{q}) - A(\omega^2, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} &\leq c \left(\left\| \beta_c(C^1 - C^2) + \beta_\theta(\Theta^1 - \Theta^2) - (\Phi_1, \nabla)(v^1 - v^2) - (v^1, \nabla)v^1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (v^2, \nabla)v^2 - (v^1 - v^2, \nabla)\Phi_1 \right\|_{L_q(Q^\gamma)} + \right. \\ &\quad \left. + \left\| (v^1, \nabla)\Theta^1 - (v^2, \nabla)\Theta^2 + (\Phi_1, \nabla)(\Theta^1 - \Theta^2) + (v^1 - v^2, \nabla)\Phi_2 \right\|_{L_q(Q^\gamma)} + \right. \\ &\quad \left. + \left\| (v^1, \nabla)C^1 - (v^2, \nabla)C^2 + (\Phi_1, \nabla)(C^1 - C^2) + (v^1 - v^2, \nabla)\Phi_3 \right\|_{L_q(Q^\gamma)} \right).\end{aligned}$$

Используя лемму 2, оценим по отдельности каждое из слагаемых:

$$\begin{aligned}\|\beta_c(C^1 - C^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_1\gamma^{\beta_1}\|(C^1 - C^2)\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \\ \|\beta_\theta(\Theta^1 - \Theta^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_2\gamma^{\beta_2}\|(\Theta^1 - \Theta^2)\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}\end{aligned}$$

Кроме того, имеем

$$\|(\Phi_1, \nabla)(v^1 - v^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq \|\Phi_1\|_{L_q(Q^T)}\|\nabla(v^1 - v^2)\|_{C(\overline{Q^\gamma})} \leq c_3\gamma^{\beta_3}\|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично можно оценить

$$\begin{aligned}\|(\Phi_1, \nabla)(\Theta^1 - \Theta^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_4\gamma^{\beta_4}\|\Theta^1 - \Theta^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \\ \|(\Phi_1, \nabla)(C^1 - C^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_5\gamma^{\beta_5}\|C^1 - C^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.\end{aligned}$$

Оценим следующее слагаемое:

$$\|(v^1 - v^2, \nabla)\Phi_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq \|\nabla\Phi_1\|_{L_q(Q^T)}\|v^1 - v^2\|_{C(\overline{Q^\gamma})} \leq c_6\gamma^{\beta_6}\|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}\|(v^1 - v^2, \nabla)\Phi_2\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_7\gamma^{\beta_7}\|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} \\ \|(v^1 - v^2, \nabla)\Phi_3\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_8\gamma^{\beta_8}\|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$(v^1, \nabla)v^1 - (v^2, \nabla)v^2 = (v^1 - v^2, \nabla)v^1 + (v^2, \nabla)(v^1 - v^2),$$

находим

$$\begin{aligned} \|(v^1 - v^2, \nabla)v^1\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq \|\nabla v^1\|_{C(Q^\gamma)} \|v^1 - v^2\|_{C(Q^\gamma)} \leq c(R)\gamma^\beta \|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \\ \|(v^2, \nabla)(v^1 - v^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq \|v^2\|_{C(Q^\gamma)} \|\nabla(v^1 - v^2)\|_{C(Q^\gamma)} \leq c(R)\gamma^\beta \|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\|(v^1, \nabla)v^1 - (v^2, \nabla)v^2\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c_9(R)\gamma^{\beta_9} \|v^1 - v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \|(v^1, \nabla)\Theta_1^1 - (v^2, \nabla)\Theta_1^2\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_{10}(R)\gamma^{\beta_{10}} \|\Theta_1^1 - \Theta_1^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} \\ \|(v^1, \nabla)C^1 - (v^2, \nabla)C^2\|_{L_q(Q^\gamma)} &\leq c_{11}(R)\gamma^{\beta_{11}} \|C^1 - C^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}. \end{aligned}$$

Выбрав соответствующее β , окончательно имеем:

$$\|A(\omega^1, \mathbf{q}) - A(\omega^2, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq c_4(R)\gamma^\beta \|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma}, \quad (39)$$

что означает, что оператор A является сжимающим при $c_4(R)\gamma^\beta = r_0 < 1$. В частности, имеем

$$\|A(\omega^1, \mathbf{q}) - A(0, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq c_4(R)\gamma^\beta \|\omega^1\|_{H^\gamma}.$$

Зафиксируем константу $r_0 < 1$ и найдем такую постоянную $\gamma_1 \leq \gamma_0$, что $c_4(R)\gamma^\beta \leq r_0$ для $\gamma \leq \gamma_1$. Как прямое следствие теоремы о неподвижной точке, имеем, что для любого $\mathbf{q} \in B_\gamma$ при $\gamma \leq \gamma_1$ система (37) и система (33)–(35) соответственно имеет единственное решение ω в шаре $B_{R,\gamma}$. Решение удовлетворяет неравенству

$$\|\omega\|_{H^\gamma} \leq \|A(0, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} + \|A(\omega, \mathbf{q}) - A(0, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3} + r_0 \|\omega\|_{H^\gamma}.$$

Это неравенство означает, что

$$\|\omega\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3(1-r_0)}. \quad (40)$$

Рассмотрим два вектора $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2 \in B_\gamma$ и найдем два решения ω^1, ω^2 ($\omega^i = (v^i, p^i, \Theta^i, C^i)$, $i = 1, 2$) системы (33)–(35). Их разность $\omega^1 - \omega^2$ удовлетворяет равенству

$$\omega^1 - \omega^2 = A(\omega^1, \mathbf{q}^1) - A(\omega^2, \mathbf{q}^1) + A(\omega^2, \mathbf{q}^1) - A(\omega^2, \mathbf{q}^2),$$

из которого следует

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} \leq r_0 \|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} + c_1 \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0,\gamma)}$$

и

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} \leq \frac{c_1}{1-r_0} \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0,\gamma)}. \quad (41)$$

Пусть $\gamma \leq \gamma_1$. Умножим уравнение (31) скалярно на вектор φ_k и проинтегрируем результат по G , считая, что условия (32) выполнены. Получаем равенство

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}'_k - \int_G \left(\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{1x_i x_j} + \sum_{j=1}^n a_j C_{1x_j} + a_0 C_1 \right), \varphi_k(x) \right) dx = \\ = (g_c, \varphi_k)_0 - \int_G \left(\left((v, \nabla)C_1 + (\Phi_1, \nabla)C_1 + (v, \nabla)\Phi_3 \right), \varphi_k \right) dx + \sum_{j=1}^s q_j \int_G (f_j, \varphi_k) dx, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$(g_c, \varphi_k)_0 = \int_G (g_c, \varphi_k) dx.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\mathbf{q} = B^{-1}S_0(\mathbf{q}) = S(\mathbf{q}), \quad (43)$$

где k -я координата s_k вектора S_0 записывается в виде

$$\begin{aligned} \alpha_k(\mathbf{q}) = & - \int_G \left(\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{1x_i x_j} + \sum_{j=1}^n a_j C_{1x_j} + a_0 C_1 \right), \varphi_k(x) \right) dx + \\ & + \int_G \left(\left((v, \nabla) C_1 + (\Phi_1, \nabla) C_1 + (v, \nabla) \Phi_3 \right), \varphi_k \right) dx, \\ s_k = & F_k + \alpha_k(\mathbf{q}), \quad F_k = \tilde{\psi}'_k - (g_c, \varphi_k)_0, \end{aligned}$$

Вектор-функции C_1, v , входящие в выражение $S(\mathbf{q})$, выражаются через вектор \mathbf{q} через решение системы (37). Выберем параметр R_0 и соответственно параметр R . Положим $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ и определим $R_0 = 2\|B^{-1}F\|_{L_q(0,T)}$. Тогда параметр R , определенный выше, вычисляется через величину R_0 и нормы исходных данных. По параметру R мы определили величину γ_1 . Величина γ_1 будет зависеть только от норм данных. Тогда при всех $\gamma \leq \gamma_1$ оператор S определен корректно. Докажем разрешимость уравнения (43). Пусть $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2 \in B_\gamma$ с $\gamma \leq \gamma_1$. Приведем необходимые оценки и покажем, что оператор S переводит шар B_γ в себя и является в нем сжимающим, если параметр γ мал. Основные слагаемые, входящие в функцию α_k , имеют вид

$$J_k = \int_G (a_{ij} C_{1x_i x_j}, \varphi_k(x)) dx.$$

Возьмем $\varepsilon < \min(1/r, \varepsilon_0)$ (см. условие (19)). Пусть символ $\overset{\circ}{W}_r^s(G)$ ($s \leq 1$) обозначает пространство функций из $W_r^s(G)$, обращающихся в нуль на Γ при $s > 1/r$, а $W_p^{-s}(G)$ — двойственное пространство. В силу двойственности (неравенство Шварца) имеем

$$|J_k| \leq \|C_{1x_i x_j}\|_{W_q^{-\varepsilon}(G)} \|a_{ij}^* \varphi_k\|_{\overset{\circ}{W}_r^{\varepsilon}(G)}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1,$$

где a_{ij}^* — сопряженная матрица. Ее элементы (см. условие (19)) принадлежат классу $C([0, T]; C^{\varepsilon_0}(\overline{G}))$. Тогда в соответствии с теоремой о точечных мультипликаторах (см. [55, теорема 3.3.2, с. 198]; можно также использовать определение нормы) имеем

$$\|a_{ij}^* \varphi_k\|_{\overset{\circ}{W}_r^{\varepsilon}(G)} \leq c \|\varphi_k\|_{\overset{\circ}{W}_r^{\varepsilon}(G)} \leq c_1,$$

где c, c_1 — некоторые постоянные, не зависящие от времени. Отметим, что $\overset{\circ}{W}_r^{\varepsilon}(G) = W_r^{\varepsilon}(G)$ при $s < 1/r$, поэтому правая часть предыдущего неравенства конечна. С другой стороны, имеет место неравенство

$$\|C_{1x_i x_j}\|_{W_q^{-\varepsilon}(G)} \leq c \|C_1\|_{W_q^{2-\varepsilon}(G)}. \quad (44)$$

Неравенства такого вида возникают часто. Они вытекают из интерполяционных свойств линейных операторов. Поясним доказательство. Рассмотрим отображение $M : v \rightarrow v_{x_j}$. Очевидно, $M \in L(L_q(G), W_q^{-1}(G)) \cap L(W_q^1(G), L_q(G))$. Следовательно,

$$M \in L\left((L_q(G), W_q^{-1}(G))_{\theta, q}, (W_q^1(G), L_q(G))_{\theta, q}\right), \quad \theta \in (0, 1).$$

Однако

$$(W_q^1(G), L_q(G))_{\theta, q} = W_q^{1-\theta}(G), \quad (L_q(G), W_q^{-1}(G))_{\theta, q} = W_q^{-\theta}(G)$$

(см. [54]). Таким образом, имеет место неравенство

$$\|v_{x_j}\|_{W_q^{-\varepsilon}(G)} \leq c \|v\|_{W_q^{1-\varepsilon}(G)}.$$

Отсюда и вытекает неравенство (44). Из полученных неравенств вытекает оценка

$$\|J_k\|_{L_q(0, \gamma)} \leq c \|C_1\|_{L_q(0, \gamma; W_q^{2-\varepsilon}(G))}.$$

Далее используем интерполяционные неравенства (см. [54]) и лемму 1. Получаем

$$\|J_k\|_{L_q(0, \gamma)} \leq c \|C_1\|_{L_q(0, \gamma; W_q^{2-\varepsilon}(G))} \leq c_1 \|C_1\|_{L_q(Q^\gamma)}^\varepsilon \|C_1\|_{L_q(0, \gamma; W_q^2(G))}^{2-\varepsilon} \leq c_2 \gamma^\varepsilon \|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Оставшиеся слагаемые в выражении α_k оцениваются гораздо проще. Рассмотрим, например, выражение

$$I_k = \int_G (a_j C_{1x_j}, \varphi_k(x)) dx.$$

Имеем

$$|I_k| \leq c \|\varphi_k(x)\|_{L_r(G)} \|a_j C_{1x_j}\|_{L_q(G)} \leq c_1 \|a_j\|_{L_q(G)} \|C_{1x_j}\|_{L_\infty(Q)}.$$

Далее, обращаясь к лемме 2 получим неравенство

$$\|I_k\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c_2 \gamma^\beta \|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q\gamma)},$$

где β — некоторая положительная постоянная. Оставшиеся слагаемые в выражении $\alpha_k(\mathbf{q})$ оцениваются аналогично. Положим $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)^T$. Таким образом, можем сказать, что найдется такое число $\beta_0 > 0$, что имеет место неравенство

$$\|B^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c\gamma^{\beta_0} (\|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q\gamma)} + \|v\|_{W_q^{2,1}(Q\gamma)}) \leq C(R)\gamma^{\beta_0}. \quad (45)$$

Теперь возьмем, два различных вектора $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2$. Запишем разность $S_0(\mathbf{q}^1) - S_0(\mathbf{q}^2)$. Обозначим через C^i, v^i (где $v^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$, $i = 1, 2$) решения системы (37), соответствующие этим векторам. Отметим, что данные векторы входят в функции α_k почти линейно. Поэтому легко увидеть, что будет справедлива аналогичная оценка, но в правой части уже будут нормы разностей $C^1 - C^2, v^1 - v^2$. Используя (41), получим

$$\|B^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}^1) - B^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}^2)\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c(R)\gamma^{\beta_1} \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0,\gamma)}, \quad (46)$$

где β_1 — некоторая положительная постоянная. Используя определение величины R_0 имеем неравенство

$$\|S(\mathbf{q})\| \leq R_0/2 + C(R)\gamma^{\beta_0}, \quad \|S(\mathbf{q}^1) - S(\mathbf{q}^2)\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c(R)\gamma^{\beta_1} \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0,\gamma)}. \quad (47)$$

Остается выбрать такую постоянную $\gamma_2 \leq \gamma_1$, что если $\gamma \leq \gamma_2$, то $C(R)\gamma^{\beta_0} \leq R_0/2$ и $c(R)\gamma^{\beta_1} \leq 1/2$. Тогда при $\gamma \leq \gamma_2$ уравнение (43) имеет единственное решение в шаре B_γ . Векторы C_1, v и функцию Θ_1 находим как решение системы (37). Покажем, что условия переопределения для функции C_1 выполняются. Умножим уравнение (31) скалярно на вектор-функцию φ_k и проинтегрируем результат по G . Вычитая полученное равенство из k -го уравнения в (42), получим равенство

$$\int_G (C_{1t}, \varphi_k) dx = \tilde{\psi}_k,$$

а это как раз и есть наше условие переопределения. Таким образом, мы построили решение нашей задачи локально по времени.

Рассмотрим вопрос об устойчивости решений. Фиксируем шар радиуса R в пространстве данных. В силу выбора шара, в котором мы ищем вектор \mathbf{q} и решения C_1, v, Θ_1 , можем считать, что величина R_0 фиксирована и соответственно величина R , введенная в доказательстве, также фиксирована. Они определяются радиусом шара, в котором расположены данные задачи. Тогда, повторяя рассуждения, получим, что можно взять параметр γ_2 одним и тем же для всех данных из нашего класса. Будут справедливы оценки (46), (41), (40). Возьмем два решения, отвечающие двум различным наборам данных $(C^i, \Theta^i, v^i, q^i)$, где $v^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$, $i = 1, 2$. Каждое из них удовлетворяет системе (33)–(35), где справа вместо функций g, g_θ, g_{0c} стоят соответствующие функции $g^i, g_\theta^i, g_{0c}^i$. Вычитая эти две системы друг из друга, можем оценить норму разности решений, и вместо оценки (41) получим оценку вида

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H\gamma} \leq c_1 (\|q^1 - q^2\|_{L_q(0,\gamma)} + \|g^1 - g^2\|_{L_q(Q\gamma)} + \|g_\theta^1 - g_\theta^2\|_{L_q(Q\gamma)} + \|g_{0c}^1 - g_{0c}^2\|_{L_q(Q\gamma)}). \quad (48)$$

Далее рассмотрим равенства (43), записанные для этих двух решений. Вычитая их друг из друга и повторяя использованные выше рассуждения, придем к оценкам

$$\|q^1 - q^2\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c(R)\gamma^\beta \|\omega^1 - \omega^2\|_{H\gamma} + \|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|_{L_q(0,\gamma)}, \quad (49)$$

где $\beta > 0$, $c(R)$ — положительные постоянные и векторы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ — определенный выше вектор \mathbf{F} , записанный для двух наборов данных. Выбирая такое $\gamma_3 \leq \gamma_2$, что $c_1 c(R) \gamma^\beta \leq 1/2$ при $\gamma \leq \gamma_3$, и используя неравенство (49) в правой части (48), приходим к неравенству

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} \leq c_2 (\|g^1 - g^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \|g_\theta^1 - g_\theta^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \|g_{0c}^1 - g_{0c}^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|_{L_q(0,\gamma)}),$$

где $\gamma \leq \gamma_3$. Используя это неравенство в правой части (49), получим

$$\|q^1 - q^2\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c_3 (\|g^1 - g^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \|g_\theta^1 - g_\theta^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \|g_{0c}^1 - g_{0c}^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|_{L_q(0,\gamma)}). \quad (50)$$

Последние две оценки и гарантируют выполнение оценки устойчивости из формулировки теоремы. Теорема доказана. \square

Доказательство теоремы 5. Доказательство локальной разрешимости практически совпадает с доказательством предыдущей теоремы. Мы повторим только основные моменты. Как и ранее, строим функции Φ_i , $i = 1, 2, 3$, удовлетворяющие начальным и граничным данным, и делаем замену

$$u = v + \Phi_1, \quad \Theta = \Theta_1 + \Phi_2, \quad C = C_1 + \Phi_3.$$

Получим

$$L_{01}(v, p) = v_t - \nu \Delta v + \nabla p = g + \sum_{j=1}^n B_j v_{x_j} + B_0 v + \beta_C C_1 + \beta_\theta \Theta_1, \quad (51)$$

$$\operatorname{div} v = 0,$$

$$L_{02}\Theta_1 = \Theta_{1t} - \lambda_\theta \Delta \Theta_1 + \sum_{j=1}^n b_j \Theta_{1x_j} + b_0 \Theta_1 = g_\theta + \sum_{j=1}^n b^j v_j, \quad (52)$$

$$L_{03}C_1 = C_{1t} - \lambda_C \Delta C_1 + \sum_{j=1}^n c_j C_{1x_j} + c_0 C_1 = g_c + \sum_{j=1}^n c^j v_j + \sum_{j=1}^r f_j q_j, \quad (53)$$

где новые функции g , g_θ и вектор-функция g_c имеют вид

$$g = f - \Phi_{1t} + \nu \Delta \Phi_1 + \sum_{j=1}^n B_j \Phi_{1x_j} + B_0 \Phi_1 + \beta_C \Phi_3 + \beta_\theta \Phi_2,$$

$$g_\theta = f_\theta - L_{02}\Phi_2 + \sum_{j=1}^n b^j \Phi_{1j}, \quad g_c = f_c - L_{03}\Phi_3 + \sum_{j=1}^n c^j \Phi_{1j}.$$

Здесь величины Φ_{1j} — координаты вектор-функции Φ_1 . Новые функции v , Θ_1 и вектор-функция C_1 удовлетворяют однородным начальным и граничным условиям, а также выполнены условия переопределения

$$\int_G (C_1, \varphi_j(x)) dx = \psi_j(t) - \int_G (\Phi_3, \varphi_j(x)) dx = \tilde{\psi}_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (54)$$

Мы свели задачу к эквивалентной задаче. Пусть $\gamma \in (0, T]$. Как и в предыдущей теореме, используя теоремы 1, 2, можем переписать уравнения (51)–(53) в следующей форме:

$$(v, p) = (L_{01})^{-1} g + (L_{01})^{-1} \left(\sum_{j=1}^n B_j v_{x_j} + B_0 v + \beta_C C_1 + \beta_\theta \Theta_1 \right), \quad (55)$$

$$\Theta_1 = (L_{02})^{-1} g_\theta - (L_{02})^{-1} \left(g_\theta + \sum_{j=1}^n b^j v_j \right), \quad (56)$$

$$C_1 = (L_{03})^{-1} g_c + (L_{03})^{-1} \left(g_c + \sum_{j=1}^n c^j v_j + \sum_{j=1}^r f_j q_j \right). \quad (57)$$

Пусть $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s) \in B_\gamma = \left\{ \mathbf{q} \in L_p(0, \gamma) : \|\mathbf{q}\|_{L_p(0, \gamma)} \leq R_0 \right\}$. Параметр R_0 мы уточним ниже. Будем искать решение системы (55)–(57) при данном фиксированном $\mathbf{q} \in B_\gamma$:

$$\omega = A(\omega, \mathbf{q}), \quad \omega = (v, p, \Theta, C), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s), \quad (58)$$

где оператор A определен правой частью системы (55)–(57). Будем считать, что

$$\omega \in B_{R, \gamma} = \left\{ \omega \in H^\gamma : \|\omega\|_{H^\gamma} \leq R \right\},$$

где

$$R = 3 \left(\|v_0, p_0, (L_{02})^{-1}g_\theta, (L_{03})^{-1}g_c\|_{H^T} + c_2 R_0 \right).$$

Аналоги оценок (38), (39) запишутся в виде

$$\|A(\omega, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3} + c_3 \gamma^\beta \|\omega\|_{H^\gamma}, \quad (59)$$

где постоянная c_3 не зависит от R и β — некоторая положительная постоянная;

$$\|A(\omega^1, \mathbf{q}) - A(\omega^2, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq c_4 \gamma^\beta \|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma}, \quad (60)$$

что означает, что оператор A является сжимающим при $c_4 \gamma^\beta < 1$. В частности, имеем

$$\|A(\omega^1, \mathbf{q}) - A(0, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq c_4 \gamma^\beta \|\omega^1\|_{H^\gamma}.$$

Легко видеть, что постоянные c_3 и c_4 не зависят от R , а зависят от норм коэффициентов в Q . Зафиксируем константу $r_0 < 1$ и найдем такую постоянную γ_1 , что

$$c_4 \gamma^\beta \leq r_0, \quad c_3 \gamma^\beta \leq \frac{1}{3}$$

для $\gamma \leq \gamma_1$. При помощи теоремы о неподвижной точке заключаем, что для любого $\mathbf{q} \in B_\gamma$ при $\gamma \leq \gamma_1$ система (58) и система (55)–(57) имеют единственное решение ω в шаре $B_{R, \gamma}$. Решение удовлетворяет неравенству

$$\|\omega\|_{H^\gamma} \leq \|A(0, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} + \|A(\omega, \mathbf{q}) - A(0, \mathbf{q})\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3} + r_0 \|\omega\|_{H^\gamma}.$$

Это неравенство означает, что

$$\|\omega\|_{H^\gamma} \leq \frac{R}{3(1-r_0)}. \quad (61)$$

Рассмотрим два вектора $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2 \in B_\gamma$ и найдем два решения ω^1, ω^2 (здесь $\omega^i = (v^i, p^i, \Theta^i, C^i)$, $i = 1, 2$) системы (55)–(57). Их разность $\omega^1 - \omega^2$ удовлетворяет равенству

$$\omega^1 - \omega^2 = A(\omega^1, \mathbf{q}^1) - A(\omega^2, \mathbf{q}^1) + A(\omega^2, \mathbf{q}^1) - A(\omega^2, \mathbf{q}^2),$$

из которого следует

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} \leq r_0 \|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} + c_1 \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0, \gamma)}$$

и

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H^\gamma} \leq \frac{c_1}{1-r_0} \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0, \gamma)}. \quad (62)$$

Пусть $\gamma \leq \gamma_1$. Умножим уравнение (51) скалярно на вектор φ_k и проинтегрируем результат по G , считая, что условия (54) выполнены. Как следствие получаем равенство

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}'_k - \int_G \left(\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{1x_i x_j} + \sum_{j=1}^n a_j C_{1x_j} + a_0 C_1 \right), \varphi_k(x) \right) dx = \\ = (g_c, \varphi_k)_0 - \int_G \left(g_c + \sum_{j=1}^n c^j v_j, \varphi_k \right) dx + \sum_{j=1}^s q_j \int_G (f_j, \varphi_k) dx, \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$(g_c, \varphi_k)_0 = \int_G (g_c, \varphi_k) dx.$$

Это равенство может быть переписано в виде

$$\mathbf{q} = B^{-1}S_0(\mathbf{q}) = S(\mathbf{q}), \quad (64)$$

где k -я координата s_k вектора S_0 записывается в виде

$$\alpha_k(\mathbf{q}) = - \int_G \left(\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{1x_i x_j} + \sum_{j=1}^n a_j C_{1x_j} + a_0 C_1 \right), \varphi_k(x) \right) dx + \int_G \left(g_c + \sum_{j=1}^n c^j v_j, \varphi_k \right) dx,$$

$$s_k = F_k + \alpha_k(\mathbf{q}), \quad F_k = \tilde{\psi}'_k - (g_c, \varphi_k)_0.$$

Вектор-функции C_1, v , входящие в выражение $S(\mathbf{q})$, выражаются через вектор \mathbf{q} и решение системы (37). Выберем параметр R_0 и соответственно параметр R . Положим $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ и определим $R_0 = 2\|B^{-1}F\|_{L_q(0,T)}$. Тогда параметр R , определенный выше, вычисляется через величину R_0 и нормы исходных данных. По параметру R мы определили величину γ_1 . Величина γ_1 будет зависеть только от норм данных. Тогда при всех $\gamma \leq \gamma_1$ оператор S определен корректно.

Докажем разрешимость уравнения (43). Пусть $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2 \in B_\gamma$, где $\gamma \leq \gamma_1$. Приведем необходимые оценки и покажем, что оператор S переводит шар B_γ в себя и является в нем сжимающим, если параметр γ мал. Основные слагаемые, входящие в функцию α_k , имеют вид

$$J_k = \int_G (a_{ij} C_{1x_i x_j}, \varphi_k(x)) dx.$$

Возьмем $\varepsilon < \min(1/r, \varepsilon_0)$ (см. условие (19)). Пусть символ $\dot{W}_r^s(G)$, $s \leq 1$, обозначает пространство функций из $W_r^s(G)$, обращающихся в нуль на Γ при $s > 1/r$, а $W_p^{-s}(G)$ — двойственное пространство. В силу двойственности (неравенство Шварца) имеем

$$|J_k| \leq \|C_{1x_i x_j}\|_{W_q^{-\varepsilon}(G)} \|a_{ij}^* \varphi_k\|_{\dot{W}_r^\varepsilon(G)}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1,$$

где a_{ij}^* — сопряженная матрица. Ее элементы (см. условие (19)) принадлежат классу $C([0, T]; C^{\varepsilon_0}(\overline{G}))$. Тогда в соответствии с теоремой о точечных мультипликаторах (см. [55, теорема 3.3.2, с. 198] (можно также использовать определение нормы) имеем

$$\|a_{ij}^* \varphi_k\|_{\dot{W}_r^\varepsilon(G)} \leq c \|\varphi_k\|_{\dot{W}_r^\varepsilon(G)} \leq c_1,$$

где c, c_1 — некоторые постоянные (не зависящие от времени). Отметим, что $\dot{W}_r^\varepsilon(G) = W_r^s(G)$ при $s < 1/r$, поэтому правая часть предыдущего неравенства конечна. С другой стороны, имеет место неравенство

$$\|C_{1x_i x_j}\|_{W_q^{-\varepsilon}(G)} \leq c \|C_1\|_{W_q^{2-\varepsilon}(G)}. \quad (65)$$

Неравенства такого вида возникают часто. Они вытекают из интерполяционных свойств линейных операторов. Поясним доказательство. Рассмотрим отображение $M : v \rightarrow v_{x_j}$. Очевидно, $M \in L(L_q(G), W_q^{-1}(G)) \cap L(W_q^1(G), L_q(G))$. Следовательно,

$$M \in L\left((L_q(G), W_q^{-1}(G))_{\theta, q}, (W_q^1(G), L_q(G))_{\theta, q}\right), \quad \theta \in (0, 1).$$

Однако

$$(W_q^1(G), L_q(G))_{\theta, q} = W_q^{1-\theta}(G), \quad (L_q(G), W_q^{-1}(G))_{\theta, q} = W_q^{-\theta}(G)$$

(см. [54]). Таким образом, имеет место неравенство

$$\|v_{x_j}\|_{W_q^{-\varepsilon}(G)} \leq c \|v\|_{W_q^{1-\varepsilon}(G)}.$$

Отсюда и вытекает неравенство (65). Из полученных неравенств вытекает оценка

$$\|J_k\|_{L_q(0, \gamma)} \leq c \|C_1\|_{L_q(0, \gamma; W_q^{2-\varepsilon}(G))}.$$

Далее используем интерполяционные неравенства (см. [54]) и лемму 1. Получаем

$$\|J_k\|_{L_q(0, \gamma)} \leq c \|C_1\|_{L_q(0, \gamma; W_q^{2-\varepsilon}(G))} \leq c_1 \|C_1\|_{L_q(0, \gamma)}^\varepsilon \|C_1\|_{L_q(0, \gamma; W_q^2(G))}^{2-\varepsilon} \leq c_2 \gamma^\varepsilon \|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q\gamma)}.$$

Оставшиеся слагаемые в выражении α_k оцениваются гораздо проще. Рассмотрим, например, выражение

$$I_k = \int_G (a_j C_{1x_j}, \varphi_k(x)) dx.$$

Имеем

$$|I_k| \leq c \|\varphi_k(x)\|_{L_r(G)} \|a_j C_{1x_j}\|_{L_q(G)} \leq c_1 \|a_j\|_{L_q(G)} \|C_{1x_j}\|_{L_\infty(Q)}.$$

Далее, обращаясь к лемме 2 получим неравенство

$$\|I_k\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c_2 \gamma^\beta \|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)},$$

где β — некоторая положительная постоянная. Оставшиеся слагаемые в выражении $\alpha_k(\mathbf{q})$ оцениваются аналогично. Положим $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)^T$. Таким образом, можем сказать, что найдется такое число $\beta_0 > 0$, что имеет место неравенство

$$\|B^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c\gamma^{\beta_0} \left(\|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} \right) \leq C(R)\gamma^{\beta_0}.$$

Теперь возьмем два различных вектора $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2$. Запишем разность $S_0(\mathbf{q}^1) - S_0(\mathbf{q}^2)$. Обозначим через C^i, v^i (здесь $v^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$, $i = 1, 2$) решения системы (37), соответствующие этим векторам. Отметим, что данные векторы входят в функции α_k почти линейно. Поэтому легко видеть, что будет справедлива аналогичная оценка, но в правой части уже будут нормы разностей $C^1 - C^2, v^1 - v^2$. Используя (41), получим

$$\|B^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}^1) - B^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}^2)\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c(R)\gamma^{\beta_1} \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0,\gamma)}, \quad (66)$$

где β_1 — некоторая положительная постоянная. Используя определение величины R_0 , имеем неравенство

$$\|S(\mathbf{q})\| \leq R_0/2 + C(R)\gamma^{\beta_0}, \quad \|S(\mathbf{q}^1) - S(\mathbf{q}^2)\|_{L_q(0,\gamma)} \leq c(R)\gamma^{\beta_1} \|\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\|_{L_q(0,\gamma)}. \quad (67)$$

Остается выбрать такую постоянную $\gamma_2 \leq \gamma_1$, что если $\gamma \leq \gamma_2$, то

$$C(R)\gamma^{\beta_0} \leq \frac{R_0}{2}, \quad c(R)\gamma^{\beta_1} \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда при $\gamma \leq \gamma_2$ уравнение (43) имеет единственное решение в шаре B_γ . Векторы C_1, v и функцию Θ_1 находим как решение системы (37). Покажем, что условия переопределения для функции C_1 выполняются. Умножим уравнение (31) скалярно на вектор-функцию φ_k и проинтегрируем результат по G . Вычитая полученное равенство из k -го уравнения в (42), получим равенство

$$\int_G (C_{1t}, \varphi_k) dx = \tilde{\psi}_k,$$

а это как раз и есть условие переопределения. Таким образом, мы построили решение нашей задачи локально по времени, причем параметр γ_2 зависит только от норм коэффициентов уравнений в Q .

Покажем, что решение продолжимо на весь промежуток $[0, T]$. Построим функцию $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$ при $t \in [0, \gamma_2]$ и $\mathbf{q}_1 = 0$ при $t > \gamma_2$. Построим также четные продолжения v^1, C^1, Θ^1, p^1 решений v, C_1, Θ_1, p относительно точки $t = \gamma_2$. Таким образом, $v^1 = v$ при $t \in [0, \gamma_2]$ и $v^1(x, t) = v(x, 2\gamma_2 - t)$ при $t \in [\gamma_2, 2\gamma_2]$. Сделаем в системе (55)–(57) замены

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \quad v = v^1 + v_2, \quad p = p^1 + p_2, \quad \Theta_1 = \Theta_2 + \Theta^1, \quad C_1 = C_2 + C^1.$$

Получим систему (55)–(57) относительно функций v_2, p_2, Θ_2, C_2 , удовлетворяющих однородным начальным и граничным данным, с новой правой частью, которая обращается в нуль на $[0, \gamma_2]$ и определена на $[0, 2\gamma_2]$. В силу единственности решения задачи на $[0, \gamma_2]$ получаем, что вектор-функция $(v_2, p_2, \Theta_2, C_2)$ равна нулю на $[0, \gamma_2]$, равно как и функция \mathbf{q}_2 . Используя этот факт, мы повторяем рассуждения уже на промежутке $[\gamma_2, 2\gamma_2]$, причем без ограничения общности можем считать, что все оценки справедливы с теми же постоянными c_2, \dots, c_6 (однако радиус шара, в котором ищется решение, изменится). Это дает возможность доказать существование решений

системы (55)–(57), (64) на промежутке $[0, 2\gamma_2]$. Далее, повторяя рассуждения, установим разрешимость системы на сегменте $[0, 3\gamma_2]$ и т. д. Таким путем устанавливается разрешимость задачи на всем сегменте $[0, T]$. \square

Замечание 1. Утверждения теорем 4, 5 остаются в силе, если вместо условий Дирихле мы будем рассматривать другие краевые условия для вектор-функции u в уравнении (1), и имеет место соответствующий аналог теоремы соответствующий аналог теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев Г. В.* Оптимизация в стационарных задачах теплопереноса и магнитной гидродинамики. — М.: Научный мир, 2010.
2. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов А. В.* Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. — М.: Янус-К, 2009.
3. *Искендеров А. Д., Ахундов А. Я.* Обратная задача для линейной системы параболических уравнений// Докл. РАН. — 2005. — 424, № 4. — С. 442–444.
4. *Камынин В. Л., Франчини Э.* Об одной обратной задаче для параболического уравнения высокого порядка// Мат. заметки. — 1998. — 64, № 5. — С. 680–691.
5. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2005. — 45, № 12. — С. 2168–2184.
6. *Короткова Е. М., Пятков С. Г.* О некоторых обратных задачах для линеаризованной системы теплопереноса// Мат. тр. — 2014. — 17, № 2. — С. 142–162.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
8. *Лыков А. В., Михайлов Ю. А.* Теория тепло- и массопереноса. — Ленинград: Госэнергоиздат, 1963.
9. *Полежаев В. И., Бунэ А. В., Вережуб Н. А. и др.* Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье—Стокса. — М.: Наука, 1987.
10. *Прилепко А. И., Иванков А. Л., Соловьев В. В.* Обратные задачи для уравнений переноса и параболических уравнений// в кн.: Единственность, устойчивость и методы решения некорректных задач математической физики. — Новосибирск: Вычислительный центр СО РАН, 1984. — С. 137–142.
11. *Пятков С. Г., Сафонов Е. И.* О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений// Науч. вед. БелГУ. — 2014. — 35, № 7 (183). — С. 61–75.
12. *Пятков С. Г., Сафонов Е. И.* О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений// Сиб. электрон. изв. — 2014. — 11. — С. 777–779.
13. *Пятков С. Г.* О некоторых обратных задачах для операторно-дифференциальных уравнений первого порядка// Сиб. мат. ж. — 2019. — 60, № 1. — С. 183–193.
14. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1965. — 83. — С. 3–163.
15. *Abels H.* Reduced and generalized Stokes resolvent equations in asymptotically flat layers. Part I: Unique solvability// J. Math. Fluid Mech. — 2005. — 7, № 2. — С. 201–222.
16. *Abels H.* Reduced and generalized Stokes resolvent equations in asymptotically flat layers. Part II: H^∞ -calculus// J. Math. Fluid Mech. — 2005. — 7, № 2. — С. 223–260.
17. *Abels H.* Bounded imaginary powers and H^∞ -calculus of the Stokes operator in unbounded domains// в кн.: Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems: A Special Tribute to the Work of Herbert Amann. — Basel: Birkhäuser Verlag, 2005. — С. 1–15.
18. *Amann H.* Linear and Quasilinear Parabolic Problems. — Basel: Birkhäuser Verlag, 2005.
19. *Amann H.* Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces// Glas. Mat. — 2000. — 35 (55). — С. 161–177.
20. *Bejan A.* Convection heat transfer. — New York: Wiley, 2004.
21. *Belov Ya. Ya.* Inverse Problems for Parabolic Equations. — Utrecht: VSP, 2002.
22. *Cannon J. R.* A class of non-linear nonclassical parabolic equations// J. Differ. Equ. — 1989. — 79, № 2. — С. 266–288.
23. *Capatina A., Stavre R.* A control problem in biconvective flow// J. Math. Kyoto Univ. — 1997. — 37, № 4. — С. 585–595.

24. Loucks D. P., van Beek E. et al. Water Resources Systems: Planning and Management. — Paris–Delft: UNESCO Publishing, 2005.
25. Denk R., Hieber M., Prüss J. R -boundedness, Fourier multipliers, and problems of elliptic and parabolic type// Mem. Am. Math. Soc. — 2003. — 166. — С. 1–114.
26. Desch W., Hieber M., and Prüss J. L_p -Theory of the Stokes equation in a half space// J. Evol. Equ. — 2001. — 1. — С. 115–142.
27. Denk R., Hieber M., and Prüss J. Optimal $L_p - L_q$ -estimates for parabolic boundary-value problems with inhomogeneous data// Math. Z. — 2007. — 257, № 1. — С. 193–224.
28. Ewing R. E., Lin T. A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media// Adv. Water Res. — 1991. — 14, № 2. — С. 89–97.
29. Farwig R., Myong-Hwan R. Resolvent estimates and maximal regularity in weighted L_q -spaces of the Stokes operator in an infinite cylinder// J. Math. Fluid Mech. — 2008. — 10, № 3. — С. 352–387.
30. Farwig R., Myong-Hwan R. The resolvent problem and H^∞ -calculus of the Stokes operator in unbounded cylinders with several exits to infinity// J. Evol. Equ. — 2007. — 7, № 3. — С. 497–528.
31. Frölich A. The Stokes operator in weighted L_q -spaces, II: Weighted resolvent estimates and maximal L_p -regularity// Math. Ann. — 2007. — 339, № 2. — С. 287–316.
32. Giga Y., Sohr H. On the Stokes operator in exterior domains// J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA. Math. — 1989. — 36, № 2. — С. 103–130.
33. Giga Y., Sohr H. Abstract L_p -estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier–Stokes equations in exterior domains// J. Funct. Anal. — 1991. — 102, № 1. — С. 72–94.
34. Grisvard P. Equations operationnelles dans les de Banach et problemes aux limites dans des ouverts cylindriques// Ann. Scu. Norm. Super. Pisa. — 1967. — 21, № 3. — С. 308–347.
35. Hazanee A., Lesnic D., Ismailov M. I., Kerimov N. B. Inverse time-dependent source problems for the heat equation with nonlocal boundary conditions// Appl. Math. Comput. — 2019. — 346. — С. 800–815.
36. Hasanov A., Hasanoglu S. Comparative analysis of linear and nonlinear models for ion transport problem in chronoamperometry// J. Math. Chem. — 2008. — 44, № 3. — С. 731–742.
37. Hussein M. S., Lesnic D. Simultaneous determination of time-dependent coefficients and heat source// Int. J. Comput. Meth. Eng. Sci. Mech. — 2016. — 17, № 5–6. — С. 401–411.
38. Joseph D. D. Stability of Fluid Motions. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1976.
39. Isakov V. Inverse problems for partial differential equations. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2006.
40. Ismailov M. I., Kanca F. Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data// Inv. Probl. Sci. Eng. — 2012. — 20, № 4. — С. 436–476.
41. Ismailov M., Erkovan S. Inverse problem of finding the coefficient of the lowest term in two-dimensional heat equation with Ionkin-type boundary condition// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — 59, № 5. — С. 859.
42. Isakov V. Inverse problems for equations of parabolic type. — Berlin: Springer, 2003.
43. Jing Li, Youjun Xu An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation// J. Appl. Math. Comput. — 2010. — 34, № 1–2. — С. 195–206.
44. Joseph D. D. Stability of fluid motions, II. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1976.
45. Kabanikhin S. I. Inverse and Ill-Posed Problems. — Berlin–Boston: de Gruyter, 2012.
46. Kerimov N. B., Ismailov M. I. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — 396, № 2. — С. 546–554.
47. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. — Utrecht: VSP, 1999.
48. Levandowsky M., Childress W. S., Hunter S. H., Spiegel E. A. A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms// J. Protozoology. — 1975. — 22, № 2. — С. 296–306.
49. Ozisik M. N., Orlando H. A. B. Inverse Heat Transfer. — New York: Taylor & Francis, 2000.
50. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York: Marcel Dekker, 1999.
51. Pyatkov S. G., Safonov E. I. Some inverse problems for convection-diffusion systems of equations// Вестн. ЮУрГУ. Сер. мат. модел. программ. — 2014. — 7, № 4. — С. 36–50.
52. Pyatkov S. G., Safonov E. I. Solvability of some inverse problems for the nonstationary heat-and-mass-transfer system// J. Math. Anal. Appl. — 2017. — 446, № 2. — С. 1449–1465.

53. *Solonnikov V. A.* Estimates of solutions of the Stokes equations in Sobolev spaces with a mixed norm// J. Math. Sci. — 2004. — 123, № 6. — С. 4637–4653.
54. *Triebel H.* Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.
55. *Triebel H.* Theory of Function Spaces. — Basel: Birkhäuser-Verlag, 1983.

Пятков Сергей Григорьевич

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск

E-mail: pyatkovsg@gmail.com, s_pyatkov@ugrasu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 43–53
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-43-53

УДК 517.955.8, 539.3

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2020 г. С. К. ГОЛУШКО, Г. Л. ГОРЫНИН, А. Г. ГОРЫНИН

Аннотация. В работе реализован метод асимптотического расщепления и получены асимптотические решения применительно к динамическим задачам пространственной теории упругости, уравнения которых содержат малый параметр. Возникающие в ходе асимптотического расщепления двумерные и одномерные краевые задачи допускают получение аналитических решений в некоторых частных случаях, а в общем случае они решаются численно при помощи метода коллокаций, метода наименьших квадратов и метода конечных элементов.

Ключевые слова: пространственная теория упругости, динамическая задача, метод асимптотического расщепления, метод коллокаций и наименьших квадратов, метод конечных элементов, слоистая балка, свободные колебания.

METHOD OF ASYMPTOTIC SPLITTING IN DYNAMICAL PROBLEMS OF THE SPATIAL THEORY OF ELASTICITY

© 2020 S. K. GOLUSHKO, G. L. GORYNIN, A. G. GORYNIN

ABSTRACT. In this paper, we apply the method of asymptotic splitting to dynamical problems of the spatial theory of elasticity, whose equations contain a small parameter, and obtain asymptotic solutions. Two-dimensional and one-dimensional boundary-value problems arising in the process of asymptotic splitting allow obtaining analytical solutions in some special cases. In the general case, they can be solved numerically by the collocation method, the method of least squares, and the finite-element method.

Keywords and phrases: spatial theory of elasticity, dynamical problem, method of asymptotic splitting, collocation method, method of least squares, finite element method, layered beam, free oscillations.

AMS Subject Classification: 35Q74, 74H10

1. Введение. Пространственная теория упругости, обладающая почти математическим уровнем строгости в постановке своих задач, сложилась в трудах Навье, Пуассона, Коши в начале XIX в., однако с точки зрения методов решения краевых задач для систем уравнений в частных производных теория слабо развита и по нынешний день. Вместо решения динамических задач в математически точной пространственной постановке значительно большее распространение получил подход, связанный с введением тех или иных упрощающих гипотез и к сведению

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-18029).

исходной задачи к задачам меньшей размерности. Основные идеи и методы решения задач классической теории упругости на основе введения упрощающих гипотез приведены, в частности, в [2–5, 7, 14, 15].

Сегодня широкое практическое применение находят конструкции со сложной геометрической формой, имеющие слоистую неоднородную структуру. Введение упрощающих гипотез в случае слоистых конструкций является проблематичным по сравнению с классической теорией однородных изотропных конструкций в связи со сложностью возникающего в них напряженно-деформированного состояния, поэтому актуальным является построение логически стройных и математически обоснованных подходов, позволяющих работать с исходной пространственной постановкой задачи. Для задач механики слоистых балок, плит и оболочек характерно наличие малого параметра, связанного с существенной разницей характерных размеров конструкции. В этом случае для решения задач теории упругости применимы асимптотические методы, общая теория которых и их применение в механике твердого тела представлены в [1, 6, 16, 17].

В данной работе для решения динамической задачи линейной теории упругости с малым параметром использован метод асимптотического расщепления (см. [11]), позволяющий свести решение исходной трехмерной задачи к решению последовательности вспомогательных двумерных и одномерных задач. Преимущества данного подхода заключаются в том, что для некоторых частных случаев удается получить точные аналитические решения задачи, а вычислительные затраты на решение двумерных задач значительно ниже чем при решении исходных трехмерных уравнений линейной теории упругости. Для численного решения двумерных краевых задач использованы метод коллокаций и метод наименьших квадратов (см. [8–10, 20, 22]), а также метод конечных элементов, реализованный в пакете с открытым кодом FEniCS Project (см. [19]). Приведено математическое обоснование метода асимптотического расщепления и построение асимптотического решения для динамической краевой задачи с малым параметром, показано применение метода на задаче о собственных колебаниях слоистых балок, представлены численные расчеты и дан сравнительный анализ полученных результатов с известными частными решениями.

2. Математическая постановка задачи. Пусть

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, -b_i \leq y \leq b_i, 0 \leq z \leq 1, b_i \in \mathbb{R}^+, i \in \mathbb{N} \right\}$$

— замкнутая область со слоистой структурой по переменной x (см. рис. 1), соответствующая некоторому деформируемому телу. Каждому слою соответствует подобласть

$$\Omega_i = \left\{ (x, y, z) : h_{i-1} \leq x \leq h_i, -b_i \leq y \leq b_i, 0 \leq z \leq 1, h_i \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\},$$

так что $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$. Таким образом, область Ω состоит из n слоев, где i — порядковый номер слоя.

В области Ω рассмотрим систему уравнений для динамической задачи линейной теории упругости с малым параметром ε :

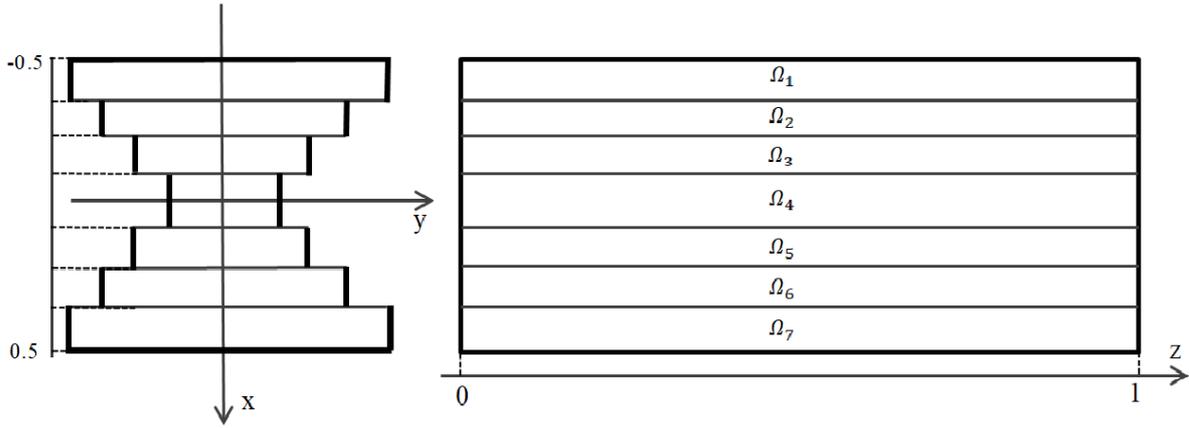
$$\frac{\partial(\sigma_{\alpha x})_i}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{\alpha y})_i}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial(\sigma_{\alpha z})_i}{\partial z} = \rho_i \frac{\partial^2 (u_\alpha)_i}{\partial t^2}, \quad \alpha, \beta \in (x, y, z), \quad (1a)$$

$$(\sigma_{\alpha\beta})_i = \lambda_i \theta \delta_{\alpha\beta} + 2\mu_i (e_{\alpha\beta})_i, \quad \theta = \sum_{\gamma=1}^3 e_{\gamma\gamma}, \quad \alpha, \beta \in (x, y, z), \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} (e_{\alpha\beta})_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u_\alpha)_i}{\partial \beta} + \frac{\partial(u_\beta)_i}{\partial \alpha} \right), & (e_{zz})_i &= \varepsilon \frac{\partial(u_z)_i}{\partial z}, & \alpha, \beta \in (x, y), \\ (e_{xz})_i &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon \frac{\partial(u_x)_i}{\partial z} + \frac{\partial(u_z)_i}{\partial x} \right), & (e_{yz})_i &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon \frac{\partial(u_y)_i}{\partial z} + \frac{\partial(u_z)_i}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1c)$$

$$[(\sigma_{\alpha n})_i]^j = 0, \quad (\sigma_{\alpha n})_i = (\sigma_{\alpha x})_i n_x + (\sigma_{\alpha y})_i n_y, \quad (u_\alpha)_j = (u_\alpha)_i. \quad (1d)$$

Коэффициенты Ламе λ_i , μ_i и плотность тела ρ_i — разрывные положительные величины, постоянные в каждом отдельном слое Ω_i . Для склейки неизвестных между слоями используется


 Рис. 1. Область Ω со слоистой структурой

условие (1d), что означает непрерывность вектора перемещений и контактных напряжений. Система (1) состоит из 15 уравнений на нахождение 15 неизвестных: 6 компонент тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, 6 компонент тензора деформаций $e_{\alpha\beta}$ и 3 компоненты вектора перемещений u_α . Закон Гука (1b) задает линейную связь между компонентами тензора деформации и тензора напряжений в каждом слое. Уравнения совместности (1c) описывают связь между тензором деформации и вектором перемещений. Характерный размер тела по оси z существенно больше характерных размеров по осям x, y .

Краевые условия задаются в напряжениях на границе области $x = \pm 1/2, y = \pm b$:

$$(\sigma_{\alpha x})_i n_x + (\sigma_{\alpha y})_i n_y = 0, \quad x = \pm \frac{1}{2}, \quad y = \pm b. \quad (2)$$

Задача (1), (2) описывает свободные колебания вдоль оси x тела, ограниченного областью Ω . Для однозначной разрешимости системы (1) необходимо задать недостающие краевые условия на границах $z = 0, z = 1$:

$$\frac{1}{b} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-b}^b (u_x)_i dy dx = 0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-b}^b x (\sigma_{zz})_i dy dx = 0, \quad z = 0, 1. \quad (3)$$

Систему уравнений (1), (2) без условий закрепления (3) будем называть полукраевой задачей, так как для построения асимптотического решения целесообразно сначала рассмотреть задачу без части краевых условий.

3. Метод асимптотического расщепления. Основная идея метода асимптотического расщепления (см. [21]) состоит в том, что неизвестные вектор-функции перемещений и тензор-функции напряжений ищутся в виде конечных сумм степеней дифференциальных операторов от некоторой функции $u_0(z, t)$, зависящей от продольной координаты z . Функция u_0 выбирается индивидуально для разного типа задач исходя из физических соображений.

Для компонент вектора перемещений на каждом слое Ω_i примем следующие правила аппроксимации:

$$\begin{aligned} (u_\beta)_i^{(n)}(\bar{r}, t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{n+1} (U_\beta)_i^{(2k)} \frac{\partial^{2k} u_0^{(n)}}{\partial z^{2k}} \varepsilon^{2k}, \quad \beta \in (x, y), \\ (u_z)_i^{(n)}(\bar{r}, t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n (U_z)_i^{(2k+1)} \frac{\partial^{2k+1} u_0^{(n)}}{\partial z^{2k+1}} \varepsilon^{2k+1}, \quad u_0^{(n)}(z, t) = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^s \int_{F_i} (u_x)_i^{(n)}(\bar{r}, t, \varepsilon) dF, \\ (U_x)_i^{(0)} &= 1, \quad (U_y)_i^{(0)} = 0, \quad (U_z)_i^{(1)} = -(x - c_0), \end{aligned} \quad (4)$$

где $(U_\alpha)_i^{(k)}$ — жесткостные функции вектора перемещений; $(u_\alpha)_i^{(n)}(\bar{r}, t, \varepsilon)$ — компоненты вектора перемещений точек i -го слоя для асимптотического приближения с номером n ; $u_0(z, t)$ — функция, равная среднему перемещению точек поперечного сечения в направлении оси x ; F — площадь поперечного сечения области Ω , перпендикулярного оси z .

Аппроксимация для компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} (\sigma_{\alpha\beta})_i^{(n)}(\bar{r}, t, \varepsilon) &= \sum_{k=1}^{n+1} (\tau_{\alpha\beta})_i^{(2k)} \frac{\partial^{2k} u_0^{(n)}}{\partial z^{2k}} \varepsilon^{2k}, \quad (\sigma_{zz})_i^{(n)}(\bar{r}, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^n (\tau_{zz})_i^{(2k)} \frac{\partial^{2k} u_0^{(n)}}{\partial z^{2k}} \varepsilon^{2k}, \\ (\sigma_{\alpha z})_i^{(n)}(\bar{r}, t, \varepsilon) &= \sum_{k=1}^n (\tau_{\alpha z})_i^{(2k+1)} \frac{\partial^{2k+1} u_0^{(n)}}{\partial z^{2k+1}} \varepsilon^{2k+1}, \quad \alpha, \beta \in (x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

где $(\tau_{\alpha\beta})_i^{(k)}(x, y)$ — жесткостные функции тензорного поля напряжений в поперечном сечении области Ω .

Для функции $u_0^{(n)}$ положим выполнение следующего уравнения (см. [21]):

$$\frac{\partial^2 u_0^{(n)}}{\partial t^2} + \sum_{k=2}^{n+1} p_x^{(2k)} \frac{\partial^{2k} u_0^{(n)}}{\partial z^{2k}} \varepsilon^{2k} = 0, \quad (6)$$

где $p_x^{(2k)}$ — некоторые положительные константы.

Связь между жесткостными функциями тензорного поля напряжений и жесткостными функциями векторного поля перемещений следует из подстановки (4), (5) в (1b), (1c) и имеет вид

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_i^{2k} &= \mu_i \left(\frac{\partial (U_y)_i^{(2k)}}{\partial x} + \frac{\partial (U_x)_i^{(2k)}}{\partial y} \right), \quad (\tau_{z\alpha})_i^{2k+1} = \mu_i \left(\frac{\partial (U_z)_i^{(2k+1)}}{\partial \alpha} + (U_\alpha)_i^{(2k)} \right), \quad \alpha \in (x, y), \\ (\tau_{zz})_i^{2k} &= (\lambda_i + 2\mu_i) (U_z)_i^{(2k-1)} + \lambda_i \left(\frac{\partial (U_x)_i^{(2k)}}{\partial x} + \frac{\partial (U_y)_i^{(2k)}}{\partial y} \right), \\ (\tau_{xx})_i^{2k} &= (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial (U_x)_i^{(2k)}}{\partial x} + \lambda_i \left((U_z)_i^{(2k-1)} + \frac{\partial (U_y)_i^{(2k)}}{\partial y} \right), \\ (\tau_{yy})_i^{2k} &= (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial (U_y)_i^{(2k)}}{\partial y} + \lambda_i \left((U_z)_i^{(2k-1)} + \frac{\partial (U_x)_i^{(2k)}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Жесткостные функции связаны следующими равенствами, вытекающими из закона Гука (1b):

$$\begin{aligned} (\tau_{zz})_i^{(2)} &= \nu_i (\tau_{xx})_i^{(2)} + \nu_i (\tau_{yy})_i^{(2)} - E_i (x - c_0), \\ (\tau_{zz})_i^{(4)} &= \nu_i (\tau_{xx})_i^{(4)} + \nu_i (\tau_{yy})_i^{(4)} + E_i (U_z)_i^{(3)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где E_i, ν_i — модуль Юнга и коэффициент Пуассона для материала в i -м слое соответственно.

3.1. Вспомогательные двумерные краевые задачи. Аппроксимация вектора перемещений $(u_\alpha)_i^{(n)}$ и тензора напряжений $(\sigma_{\alpha\beta})_i^{(n)}$ в виде (4), (5) позволяет свести исходную трехмерную задачу линейной теории упругости к решению $(n+1)$ двумерных краевых задач для нахождения жесткостных функций тензора напряжений $(\tau_{\alpha\beta})_i^{(n)}$. Выразим частную производную по времени из (6) и подставим в уравнения движения (1a) вместе с формулами (4), (5). Приравняв коэффициенты при степенях малого параметра, получим последовательность систем уравнений в зависимости от жесткостного номера k , меняющегося от 1 до $n+1$. Приведем первые три из них.

При $k = 1$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\tau_{\alpha x})_i^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{\alpha y})_i^{(2)}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(\tau_{zx})_i^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{zy})_i^{(3)}}{\partial y} + (\tau_{zz})_i^{(2)} = 0; \end{cases} \quad (9)$$

при $k = 2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\tau_{xx})_i^{(4)}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy})_i^{(4)}}{\partial y} + (\tau_{xz})_i^{(3)} + \rho_i \frac{G_{xz}^{(3)}}{M} = 0, \\ \frac{\partial(\tau_{xy})_i^{(4)}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yy})_i^{(4)}}{\partial y} + (\tau_{yz})_i^{(3)} = 0, \\ \frac{\partial(\tau_{zx})_i^{(5)}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{zy})_i^{(5)}}{\partial y} + (\tau_{zz})_i^{(4)} - \rho_i \frac{G_{xz}^{(3)}}{M}(x - c_0) = 0; \end{cases} \quad (10)$$

при $k = 3$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\tau_{xx})_i^{(6)}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy})_i^{(6)}}{\partial y} + (\tau_{xz})_i^{(5)} + \rho_i \frac{G_{xz}^{(5)}}{M} + \rho_i \frac{G_{xz}^{(3)}}{M}(U_x)_i^{(2)} = 0, \\ \frac{\partial(\tau_{xy})_i^{(6)}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yy})_i^{(6)}}{\partial y} + (\tau_{yz})_i^{(5)} + \rho_i \frac{G_{xz}^{(3)}}{M}(U_y)_i^{(2)} = 0, \\ \frac{\partial(\tau_{zx})_i^{(7)}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{zy})_i^{(7)}}{\partial y} + (\tau_{zz})_i^{(6)} - \rho_i \frac{G_{xz}^{(5)}}{M}(x - c_0) + \rho_i \frac{G_{xz}^{(3)}}{M}(U_z)_i^{(3)} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где $G_{xz}^{(2k-1)}$ — некоторые положительные константы; M — безразмерная масса поперечного сечения Ω , приходящаяся на единицу длины.

Краевые условия на границе сечения для (9), (10), (11):

$$(\tau_{\alpha x})_i^{(2k)} n_x + (\tau_{\alpha y})_i^{(2k)} n_y = 0, \quad (\tau_{zx})_i^{(2k+1)} n_x + (\tau_{zy})_i^{(2k+1)} n_y = 0, \quad \alpha \in (x, y). \quad (12)$$

Условия сопряжения между слоями Ω_i для (9), (10), (11):

$$\begin{aligned} (\tau_{n\beta})_i^{(2k)} &= (\tau_{n\beta})_j^{(2k)}, \quad (\tau_{nz})_i^{(2k)} = (\tau_{nz})_j^{(2k)}, \\ (U_\beta)_i^{(2k)} &= (U_\beta)_j^{(2k)}, \quad (U_z)_i^{(2k+1)} = (U_z)_j^{(2k+1)}, \quad \alpha \in (x, y, z), \quad \beta \in (x, y). \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношения (9), (10), (11) вместе с (12), (13) образуют первые три вспомогательные краевые задачи для жесткостного номера $k = 1, 2, 3$.

3.2. Асимптотическая выполнимость трехмерных уравнений теории упругости. Если формулы (4), (5) с учетом равенств (9)–(13) подставить в равенства полукраевой задачи (1), (2), то согласно [11] эти равенства будут выполняться асимптотически, т.е. невязки в выполнении этих равенств будут пропорциональны степеням малого параметра ε :

$$\begin{aligned} -\rho_i \frac{\partial^2(u_\alpha)_i}{\partial t^2} + \frac{\partial(\sigma_{\alpha x})_i}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{\alpha y})_i}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial(\sigma_{\alpha z})_i}{\partial z} &= O(\varepsilon^{2n+4}), \quad \alpha \in (x, y), \\ -\rho_i \frac{\partial^2(u_z)_i}{\partial t^2} + \frac{\partial(\sigma_{xz})_i}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yz})_i}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial(\sigma_{zz})_i}{\partial z} &= O(\varepsilon^{2n+3}). \end{aligned} \quad (14)$$

Для уравнений движения (1а) невязка пропорциональна $\varepsilon^{(2n+4)}$ при $\alpha = (x, y)$ и $\varepsilon^{(2n+3)}$ при $\alpha = z$. Для равенств закона Гука (1б) невязка пропорциональна $\varepsilon^{(2n+2)}$ при $(\alpha, \beta) = z$ и $\varepsilon^{(2n+3)}$ при $\beta = z, \alpha = (x, y)$. Для остальных равенств закон Гука в каждом слое выполняется точно:

$$\begin{aligned} (\sigma_{\alpha z})_i^{(n)} - \mu_i (e_{\alpha z})_i^{(n)} &= O(\varepsilon^{2n+3}), \quad \alpha \in (x, y), \\ (\sigma_{zz})_i^{(n)} - (\lambda_i + 2\mu_i)(e_{zz})_i^{(n)} - \lambda_i (e_{xx})_i^{(n)} - \lambda_i (e_{yy})_i^{(n)} &= O(\varepsilon^{2n+2}). \end{aligned} \quad (15)$$

Также точно выполняются равенства сопряжения слоев (1d) и условия на боковой поверхности (2). Окончательно можно сказать, что формулы (4)–(5) с учетом равенств (9)–(13) дают асимптотическое решение полукраевой задачи (1), (2) с невязкой, пропорциональной $\varepsilon^{(2n+2)}$. Таким образом, построенное асимптотическое решение является быстро убывающим по параметру ε , и в большинстве случаев достаточно ограничиться рассмотрением первых трех асимптотических приближений.

4. Уравнение свободных колебаний. Функция $u_0^{(n)}$ удовлетворяет уравнению свободных колебаний (6):

$$M \frac{\partial^2 u_0^{(n)}}{\partial t^2} + \sum_{k=2}^{n+1} G_{xz}^{(2k-1)} \frac{\partial^{2k} u_0^{(n)}}{\partial z^{2k}} \varepsilon^{2k} = 0, \quad (16)$$

$$I_{zz}^{(2k)} = - \sum_{i=1}^s \int_{F_i} (x - c_0) (\tau_{zz})_i^{(2k)} dF, \quad G_{xz}^{(2k-1)} = - \sum_{i=1}^s \int_{F_i} (\tau_{xz})_i^{(2k-1)} dF,$$

где $G_{xz}^{(2k-1)}$ — некоторые константы; M — безразмерная масса поперечного сечения, приходящаяся на единицу длины.

Коэффициенты уравнения свободных колебаний (16) являются положительными числами. Уравнение имеет параболический тип, со степенью $2n + 2$ при старшей производной для асимптотического приближения с номером n . Дифференциальный оператор по пространственной переменной в общем случае имеет $2n + 2$ независимых решения. В [11] показано, что для таких дифференциальных уравнений физическим смыслом обладают только 4 решения, которые являются регулярными возмущениями этого уравнения при $n = 1$. Остальные решения являются сингулярными возмущениями и не обладают физическим смыслом. Поэтому для однозначного решения уравнения (16) достаточно 4 краевых условий на торцах (3). В случае шарнирного опирания условия примут вид

$$\begin{cases} u_0^{(n)}(z, \varepsilon) = 0, \\ M_y^{(n)}(z, \varepsilon) = - \sum_{k=1}^n I_{zz}^{(2k)} \frac{\partial^{2k} u_0^{(n)}}{\partial z^{2k}} \varepsilon^{2k} = 0, \end{cases} \quad z = 0, 1. \quad (17)$$

Общее решение является линейной комбинацией счетного числа отдельных собственных гармоник. Уравнению свободных колебаний с краевыми условиями (17) удовлетворяют гармоники вида

$$u_{0m}^{(n)} = c_m \phi_m^{(n)} \cos(\omega_m^{(n)} t), \quad \phi_m = \sin(\pi m z), \quad (18)$$

где c_m — произвольные коэффициенты, $\phi_m^{(n)}(z, \varepsilon)$ — собственные моды колебаний. Собственные частоты $\omega_m^{(n)}$ поперечных колебаний определяются по формулам

$$\omega_m^{(n)} = \sqrt{\sum_{k=2}^{n+1} \frac{G_{xz}^{(2k-1)}}{M} (\pi m \varepsilon)^{2k} (-1)^k}, \quad (19)$$

$$\omega_m^{(1)} = (\pi m \varepsilon)^2 \sqrt{\frac{G_{xz}^{(3)}}{M}}, \quad \omega_m^{(2)} = \omega_m^{(1)} \sqrt{1 - \frac{G_{xz}^{(5)}}{G_{xz}^{(3)}} (\pi m \varepsilon)^2}.$$

В силу того, что ряд в формуле (19) знакопеременный, для истинного значения собственной частоты ω_m справедливо следующее соотношение:

$$\omega_m^{(2)} < \omega_m^{(4)} < \dots < \omega_m < \dots < \omega_m^{(3)} < \omega_m^{(1)}. \quad (20)$$

Приближения образуют последовательность интервалов $[\omega_m^{(2k)}, \omega_m^{(2k-1)}]$, которая асимптотически сходится к истинной собственной частоте. Чтобы конечная сумма под корнем в формулах (19)

сходилась, необходимо выполнение условия

$$(\pi m \varepsilon) < 1. \quad (21)$$

Условие (21) вносит ограничения на порядок собственной частоты и на величину малого параметра.

Первое приближение $\omega_m^{(1)}$ в формуле (19) полностью совпадает с формулой для частот по классической теории Бернулли—Эйлера для однородной балки и, по сути дела, является обобщением теории Бернулли—Эйлера на случай многослойных балок. Таким образом первое приближение собственных частот, полученное путем решения только первой краевой задачи для $k = 1$, дает те же частоты, что и теория Бернулли—Эйлера. Первое приближение $\omega_m^{(2)}$ является уточнением первой и учитывает депланацию и инерцию вращения сечения. Формулы (19) позволяют определять собственные частоты колебаний для шарнирно опертых балок произвольного симметричного сечения, при этом изменение формы поперечного сечения влияет только на значения коэффициентов в уравнении колебаний $G_{xz}^{(2k-1)}$. Таким образом задача о нахождении частот собственных колебаний сводится к нахождению величин $G_{xz}^{(2k-1)}$ и решению вспомогательных краевых задач.

5. Аналитическое решение вспомогательных краевых задач. Рассмотрим случай, когда коэффициенты Пуассона ν_i в каждом слое Ω_i совпадают. Тогда краевая задача (9), (12), (13) для $k = 1$ имеет аналитическое решение для произвольной формы поперечного сечения:

$$\begin{aligned} (\tau_{zz})_i^{(2)} &= -(x - c_0)E_i, \quad (\tau_{\alpha\alpha})_i^{(2)} = 0, \quad \alpha \in (x, y), \\ (U_x)_i^{(2)} &= \frac{1}{2}(-\nu y^2 + \nu(x - c_0)^2 + C_2), \quad \int_F (U_x)_i^{(2)} dF = 0, \quad (U_y)_i^{(2)} = \nu y(x - c_0), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\int_{F_i} \langle (\tau_{zz})_i^{(2)} \rangle dF = 0. \quad (23)$$

Константа c_0 находится из условия (23). Для $G_{xz}^{(3)}$, $G_{xz}^{(5)}$ с учетом (22) справедливы формулы

$$\begin{aligned} G_{xz}^{(3)} &= - \sum_{i=1}^s \int_{F_i} (\tau_{xz})_i^{(3)} dF = - \sum_{i=1}^s \int_{F_i} x (\tau_{zz})_i^{(2)} dF = [EI], \quad [EI] = \sum_{i=1}^s E_i I_i, \\ G_{xz}^{(5)} &= - \sum_{i=1}^s \int_{F_i} (\tau_{xz})_i^{(5)} dF = I_{zz}^{(4)} + \frac{G_{xz}^{(3)}}{M} [\rho I], \quad [\rho I] = \sum_{i=1}^s \rho_i I_i = \sum_{i=1}^s \int_{F_i} \rho_i (x - c_0)^2 dF. \end{aligned} \quad (24)$$

Для нахождения остальных неизвестных воспользуемся процедурой усреднения жесткостных функций по сечению. Для тонкостенных балок искомые напряжения будут слабо меняться в пределах тонкой стенки и можно считать, что их средние величины будут почти совпадать с самими величинами. Подобная процедура решения краевых задач описана в [13].

Положим, что поперечное сечение имеет узкую прямоугольную форму. Введем операцию усреднения произвольной функции по сечению:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b} \int_{-1/2b}^{1/2b} f(\alpha, s) ds. \quad (25)$$

Для того, чтобы найти оставшиеся неизвестные жесткостные функции $(\tau_{zx})_i^{(3)}$ и $(\tau_{zy})_i^{(3)}$, применим операцию усреднения (25) ко второму уравнению (10). Воспользуемся условиями на боковой поверхности (12) и учтем решение (22):

$$\frac{d \langle (\tau_{zx})_i^{(3)} \rangle}{dx} = x E_i, \quad \langle (\tau_{zx})_i^{(3)} \rangle = \int_{-1/2}^x E_i \xi d\xi. \quad (26)$$

Функция $(\tau_{zy})_i^{(3)}$ антисимметрична по ширине сечения, поэтому $(\tau_{zy})_i^{(3)} = 0$. Усредним второе равенство (7) и подставим в него усредненное третье выражение из (22), проинтегрируем по переменной x и выразим усредненную жесткостную функцию $(U_z)_i^{(3)}$:

$$\langle (U_z)_i \rangle^{(3)} = \int_{-1/2}^x \left(\frac{\langle (\tau_{zx})_i \rangle^{(3)}}{\mu_i} - \langle (U_x)_i \rangle^{(2)} \right) d\xi + C_1, \quad \langle (U_x)_i \rangle^{(2)} = \frac{1}{2}\nu \left(x^2 - \frac{1}{12} \right). \quad (27)$$

Константа C_1 , входящая в выражение (27), находится из условия

$$\int_{-1/2}^{1/2} \langle (\tau_{zz})_i \rangle^{(4)} dx = 0. \quad (28)$$

Выражение (28) следует из того, что при чистом изгибе продольное усилие равняется нулю.

Перейдем теперь ко второй краевой задаче. Усредним первое уравнение (10) и воспользуемся условиями на границе сечения (12):

$$\frac{d\langle (\tau_{xx})_i \rangle^{(4)}}{dx} + \langle (\tau_{zx})_i \rangle^{(3)} + \frac{G_{xz}^{(3)}}{M} \langle \rho_i \rangle = 0, \quad \langle (\tau_{xx})_i \rangle^{(4)} \Big|_{x=-1/2} = 0. \quad (29)$$

Интегрируя (29), получим

$$\langle (\tau_{xx})_i \rangle^{(4)} = - \int_{-1/2}^x \langle (\tau_{zx})_i \rangle^{(3)} d\xi - \frac{G_{xz}^{(3)}}{M} \int_{-1/2}^x \langle \rho_i \rangle d\xi. \quad (30)$$

В силу антисимметричности средние значения следующих функций равны нулю:

$$\langle (\tau_{yy})_i \rangle^{(4)} = 0, \quad \langle (\tau_{xy})_i \rangle^{(4)} = 0. \quad (31)$$

Усредним по ширине сечения второе выражение (8):

$$\langle (\tau_{zz})_i \rangle^{(4)} = \nu \langle (\tau_{xx})_i \rangle^{(4)} + E_i \langle (U_z)_i \rangle^{(3)}. \quad (32)$$

Таким образом, величины $G_{xz}^{(3)}$, $G_{xz}^{(5)}$, необходимые для вычисления первых приближений собственных частот (19), можно найти аналитически по формулам (24), (26), (27), (28), (30), (32).

6. Численные расчеты. Для решения вспомогательных краевых задач были использованы два различных численных метода: метод коллокаций и наименьших квадратов (далее МКНК) и метод конечных элементов (далее МКЭ). Численные алгоритмы тестировались для случаев, когда аналитическое решение краевых задач (9)–(13) известно. Критерием правильности расчетов выступало требование совпадения двух независимых численных решений, полученных методами МКНК и МКЭ, а также выполнение необходимых условий разрешимости задач.

Для проверки правильности решения исходной задачи проведено сравнение с прямым трехмерным численным расчетом в конечно-элементном пакете COMSOL Multiphysics® (см. www.comsol.com). В таблице 1 приведены значения первых двух собственных частот для трехслойной балки прямоугольного сечения, боковые слои которой выполнены из стали, а промежуточный слой выполнен из бетона. Параметры материалов задавались в безразмерном виде:

$$E_1 = E_3 = 200, \quad E_2 = 25; \quad \nu_1 = \nu_3 = 0,3, \quad \nu_2 = 0,2; \quad H_1 = H_3 = 0,2, \quad H_2 = 0,6; \quad (33)$$

$$b = 1, \quad L = 10, \quad \rho_1 = \rho_3 = 7850 \cdot 10^{-9}, \quad \rho_2 = 2300 \cdot 10^{-9},$$

где E_i , ν_i , ρ_i , H_i — значение модуля Юнга, коэффициент Пуассона, плотность и высота i -го слоя соответственно; b , L — ширина и длина балки соответственно. Первому асимптотическому приближению соответствуют значения, основанные на решении первой краевой задачи для жесткостного номера $k = 1$. В этом случае не учитывается инерция вращения сечения и разница для первой собственной частоты составляет 8%. Второе асимптотическое приближение является более точным и основано на решении первых двух краевых задач (9)–(13) для $k = 1, 2$. В этом случае разница для первой собственной частоты не превышает 1%. Последний столбец соответствует

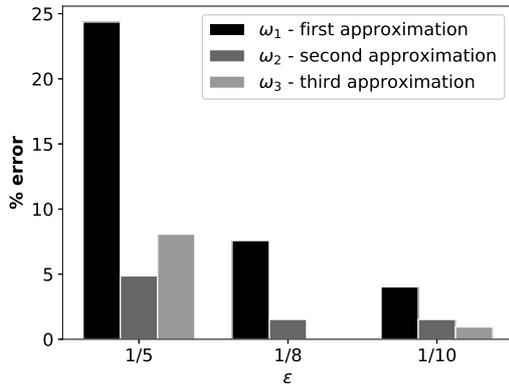


Рис. 2. Точность решения в зависимости от параметра ε

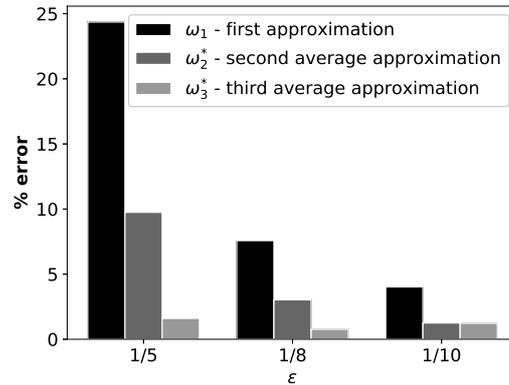


Рис. 3. Точность решения в зависимости от параметра ε с использованием ускорения сходимости

первому асимптотическому приближению без учета разницы коэффициентов Пуассона. В этом случае поперечное сечение при изгибе остается плоским и верна гипотеза плоских сечений.

На основе полученных численных результатов можно сделать вывод, что учет разных коэффициентов Пуассона ведет к образованию особенностей у кромки слоев поперечного сечения. Схожий результат при решении краевых задач типа (9)–(13) был получен в [12] для задачи растяжения слоистого стержня. Как показывает практика зачастую наличием этих краевых эффектов можно пренебречь и влияние их на общее решение незначительно. В таблице 3 приведены значения для относительных разностей наиболее значимых искомых величин: собственных частот, продольных напряжений и продольных перемещений. Знак Δ показывает относительную разницу между решением, когда коэффициенты Пуассона в слоях совпадают и решением, когда коэффициенты Пуассона отличаются. Из таблицы видно, что для расчета собственных частот наличием краевых эффектов можно полностью пренебречь.

В таблице 2 показана сходимость асимптотического решения для собственных частот в зависимости от параметра ε . Параметры материалов брались такими же, что и в (33), за исключением отношения длины балки к ее высоте. График (2) показывает относительную погрешность для первых трех асимптотических приближений. Точность решения для всех трех приближений растет с уменьшением параметра ε . Так как для последовательности асимптотических приближений верна формула (20), то для ускорения сходимости асимптотического решения целесообразно применить операцию, заключающуюся в усреднении предыдущего и текущего асимптотических приближений. Тогда для второго и третьего усредненных асимптотических приближений справедливы формулы

$$\omega_2^* = \frac{\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}}{2}, \quad \omega_3^* = \frac{\omega_1^{(2)} + \omega_1^{(3)}}{2}. \quad (34)$$

На графике (3) отражена сходимость решения с использованием операции усреднения. В этом случае каждое следующее приближение точнее аппроксимирует искомую частоту. Важно отметить, что в случае коротких балок существенный вклад вносят краевые эффекты у торцов крепления балки, в то время как для длинных балок все асимптотические приближения дают хороший результат, в этом случае можно ограничиться первым приближением.

7. Заключение. Предложенный подход позволяет решать различные динамические задачи теории упругости, уравнения которых содержат малый параметр. Полученные асимптотические

Таблица 1. Собственные частоты для трехслойной балки

рад/с	Comsol Multiphysics	1 асимптотическое приближение $\omega^{(1)}$	2 асимптотическое приближение $\omega^{(2)}$	Гипотеза плоских сечений
ω_1	158,53	170,52	158,93	170,67
ω_2	535,43	682,1	466,94	682,69

Таблица 2. Сходимость частот в зависимости от параметра

ε	Comsol Multiphysics	1 асимптотическое приближение $\omega^{(1)}$	2 асимптотическое приближение $\omega^{(2)}$	3 асимптотическое приближение $\omega^{(3)}$
1/5	512,61	637,49	487,67	553,98
1/8	231,48	249,02	227,95	231,45
1/10	153,21	159,37	150,88	151,77
1/15	70,312	70,83	69,18	69,26

Таблица 3. Относительные разности для собственных частот, продольных напряжений и продольных перемещений

E_{13}, E_2	ν_{13}, ν_2	$\Delta\omega$	$\Delta\tau_{zz}$	ΔU_z
$E_{13} = E_2 = 1$	$\nu_{13} = \nu_2 = 0,33$	0,0	0,0	0,0
$E_{13} = E_2 = 1$	$\nu_{13} = 0,33, \nu_2 = 0,25$	0,0001	0,011	0,17
$E_{13} = E_2 = 1$	$\nu_{13} = 0,33, \nu_2 = 0,1$	0,0001	0,033	0,36
$E_{13} = 1, E_2 = 1$	$\nu_{13} = 0,4, \nu_2 = 0,05$	0,002	0,052	0,43
$E_{13} = 10, E_2 = 1$	$\nu_{13} = 0,33, \nu_2 = 0,25$	0,0026	0,011	0,077
$E_{13} = 100, E_2 = 1$	$\nu_{13} = 0,33, \nu_2 = 0,1$	0,0087	0,059	0,176

решения являются быстро убывающими и в большинстве случаев достаточно ограничиться рассмотрением первых трех асимптотических приближений. Возникающие в процессе решения вспомогательные двумерные краевые задачи допускают аналитические решения в частных случаях, а в общем случае решаются численно.

Для задачи о поперечных колебаниях слоистой балки полученные асимптотические решения позволяют эффективно определять первые собственные частоты свободных колебаний. При этом решение на основе первого приближения совпадает с решением, полученным с использованием классической теории Бернулли—Эйлера для однородных балок, а все последующие приближения являются ее уточнением. Для существенно неоднородных балок, когда классическая теория Бернулли—Эйлера дает внушительную погрешность, использование второго и третьего асимптотических приближений является вполне обоснованным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. — М.: Наука, 1997.
2. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. — М.: Наука, 1974.
3. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. — Новосибирск: Наука, 2001.
4. Биргер И. А. Стержни, пластинки, оболочки. — М.: Ленанд, 2015.
5. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. — М.: Машиностроение, 1980.

6. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
7. *Голушко С. К., Немировский Ю. В.* Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. — М.: Физматлит, 2008.
8. *Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П.* Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин// Вычисл. технол. — 2013. — 18, № 6. — С. 31–43.
9. *Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П.* Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к решению задач анизотропных слоистых пластин// Вычисл. технол. — 2014. — 19, № 5. — С. 24–36.
10. *Голушко С. К., Идимешев С. В., Семисалов Б. В.* Методы решения краевых задач механики композитных пластин и оболочек. — Новосибирск, 2014.
11. *Горынин Г. Л., Немировский Ю. В.* Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления. — Новосибирск: Наука, 2004.
12. *Горынин Г. Л., Власко А. Ф.* Исследование кромочного пограничного слоя в трехмерном стержне при растяжении// Доклю 3 й Всеросс. конф. «Проблемы оптимального проектирования сооружений» (Новосибирск, 15–17 апреля 2017 г.). — Новосибирск: НГАСУ, 2017. — С. 74–79.
13. *Горынин Г. Л., Горынина О. Г.* Исследование напряженно-деформируемого состояния трехслойного двутавра в пространственной постановке// Вестн. СибАДИ. — 2012. — № 5 (27). — С. 49–54.
14. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек// Итоги науки техн. Мех. тв. деформ. тел. — 1973. — 5.
15. *Доннел Л. Г.* Балки, пластины, оболочки. — М.: Наука, 1982.
16. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной механике. — М.: Мир, 1972.
17. *Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Андрианов И. В.* Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. — М.: Машиностроение, 1991.
18. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985.
19. *Alnaes M. S., Blechta J., Hake J., Johansson A., Kehlet B., Logg A., Richardson C., Ring J., Rognes M. E., Wells G. N.* The FEniCS Project Ver. 1.5// Arch. Numer. Software. — 2015. — 3.
20. *Golushko S. K.* Mathematical modeling and numerical optimization of composite structures// in: Optimum Composite Structures. — London: IntechOpen, 2019. — P. 13–34.
21. *Gorynin G. L., Nemirovsky Yu. V.* Transverse vibration of laminated beams in three-dimensional formulation// Int. Appl. Mech. — 2005. — 41, № 6. — P. 631–645.
22. *Shapeev V. P., Belyaev V. A., Golushko S. K., Idimeshev S. V.* Possibilities and applications of the least squares collocation method// EPJ Web Conf. — 2018. — 173. — 01012.

Голушко Сергей Кузьмич
Новосибирский государственный университет;
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: s.k.golushko@gmail.com

Горынин Глеб Леонидович
Сургутский государственный университет
E-mail: ggorynin@list.ru

Горынин Арсений Глебович
Новосибирский государственный университет
E-mail: arsgorynin@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 54–69
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-54-69

УДК 517.95

КОМПЛЕКСНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2020 г. У. АКСОЙ, Г. БЕГЕР, А. ЧЕЛЕБИ, Б. ШУПЕЕВА

Аннотация. Изучаются краевые задачи Шварца и итерированные краевые задачи Дирихле для полианалитических операторов в некоторых плоских областях, имеющих гармоническую функцию Грина. Рассмотрены гибридные полигармонические функции Грина, позволяющие исследовать краевые задачи для полигармонического оператора. Эта сравнительно новая тема далека от завершения; чем выше порядок полигармонического оператора, тем богаче теория связанных гибридных функций Грина: они конструируются путем непрерывной свертки гармонических функций Грина, Неймана, Робена, а также полигармонических функций Грина–Альманси.

Ключевые слова: полианалитический оператор, представление Коши–Шварца–Помпейю, функция Грина, краевая задача Шварца, краевая задача Дирихле, допустимая область, кольцевая область, функция Грина–Альманси, полигармоническая гибридная функция Грина, полигармоническая краевая задача, краевая задача Рикье.

COMPLEX PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2020 Ü. AKSOY, H. BEGER, A. ÇELEBI, B. SHUPEYEVA

ABSTRACT. The Schwarz and iterated Dirichlet boundary-value problems are reported on for the polyanalytic operator in certain plane domains having a harmonic Green function. Hybrid polyharmonic Green functions are reviewed upon which open a variety of boundary-value problems for the polyharmonic operator. This topic is far from being complete. The higher the order of the polyharmonic operator the richer is the theory of related hybrid Green functions: they are constructed by continued convoluting harmonic Green, Neumann, Robin functions also incorporating polyharmonic Green–Almansi functions.

Keywords and phrases: polyanalytic operator, Cauchy–Schwarz–Pompeiu representation, Green function, Schwarz boundary-value problem, Dirichlet boundary-value problem, admissible domain, ring domain, Green–Almansi function, polyharmonic hybrid Green function, polyharmonic boundary-value problem, Riquier boundary-value problem.

AMS Subject Classification: 30E25, 30G20, 31A10, 31A25, 35J40

1. Модельные уравнения. В основе теории дифференциальных уравнений лежат понятия переменных и дифференциальных операторов и соответствующие теоремы анализа. Для комплексных дифференциальных уравнений в частных производных переменные имеют вид $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, дифференциальные операторы — оператор Коши–Римана $\partial_{\bar{z}}$, имеющий вид $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, и его комплексно сопряженный оператор $2\partial_z = \partial_x - i\partial_y$. Укажем основные теоремы анализа, используемые в этой теории.

Теорема 1 (теорема Гаусса—Остроградского в комплексной форме). *Произвольная функция $w \in C(\bar{D}; \mathbb{C}) \cap C^1(D; \mathbb{C})$ в регулярной области D комплексной плоскости \mathbb{C} удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$\int_D w_{\bar{z}}(z) dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} w(z) dz, \quad \int_D w_z(z) dx dy = -\frac{1}{2i} \int_{\partial D} w(z) d\bar{z}.$$

В случае одной переменной из основной теоремы анализа получаются формулы представления; для нескольких переменных требуется понятие фундаментального решения. Для оператора Коши—Римана это ядро Коши $-1/(\pi z)$, удовлетворяющее соотношению

$$\partial_{\bar{z}} \left(-\frac{1}{\pi z} \right) = \delta_0,$$

где δ_0 — дельта-функция Дирака. Это следует из свойства $\partial_{\bar{z}} T f = f$ интеграла Помпейю, понимаемого в смысле распределений (обобщенных функций) в D (см. [1]):

$$T f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad f \in L_1(D; \mathbb{C}).$$

Интеграл Помпейю представляет собой потенциал для оператора Коши—Римана и может служить для решения более общих комплексных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, например, уравнений Берса—Карлемана—Векуа и Бельтрами (см. [1]). Следовательно, уравнение Коши—Римана является модельным уравнением для общих комплексных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, где оператор Коши—Римана является старшим членом.

Комплексные модельные операторы высших порядков являются степенями оператора Коши—Римана. Упомянем, например, оператор Бицадзе $\partial_{\bar{z}}^2$, оператор Лапласа $\partial_z \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{4}(\partial_x^2 + \partial_y^2)$, играющий важную роль в двумерной математической физике, полианалитический оператор $\partial_{\bar{z}}^m$, полигармонический оператор $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n$ и общий комплексный модельный оператор

$$\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n = (\partial_z \partial_{\bar{z}})^m \partial_{\bar{z}}^{n-m}, \quad m \leq n.$$

Поскольку общее модельное уравнение

$$\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n w = f$$

можно записать в виде системы

$$\partial_{\bar{z}}^{n-m} w = \omega, \quad (\partial_z \partial_{\bar{z}})^m \omega = f,$$

полианалитическое и полигармоническое уравнения являются основными комплексными модельными уравнениями. Эти два уравнения позволяют изучать общее модельное уравнение с помощью итерационного процесса (см., например, [8, 33]).

Потенциальные операторы рассматриваются методом свертки с фундаментальными решениями. При помощи фундаментального решения $-1/(\pi z)$ оператора Коши—Римана фундаментальные решения операторов высших порядков можно найти интегрированием. Итерированная первообразная $-\frac{1}{\bar{z}^{m-1}}$ ядра Коши $-\frac{1}{\pi z}$ по отношению к оператору Коши—Римана $\partial_{\bar{z}}$ приводит к фундаментальному решению полианалитического оператора $\partial_{\bar{z}}^m$ порядка m .

Аналогично, первообразные функции $-1/(\pi z)$ по отношению к оператору ∂_z , т.е.

$$-\frac{1}{\pi} \log z \quad \text{и} \quad -\frac{1}{\pi} [\log z + \log \bar{z}] = -\frac{1}{\pi} \log |z|^2$$

являются фундаментальными решениями оператора Лапласа. Таким же образом получим фундаментальное решение

$$-\frac{1}{\pi} \frac{z^{m-1} \bar{z}^{n-1}}{(m-1)!(n-1)!} \log |z|^2, \quad 0 < m, n,$$

модельного оператора $\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n$. Отметим, что альтерация

$$-\frac{1}{\pi} \frac{z^{m-1} \bar{z}^{n-1}}{(m-1)!(n-1)!} \left[\log |z|^2 - \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{1}{\mu} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu} \right]$$

более удобна (см. [17]).

Соответствующий потенциальный оператор имеет вид

$$T_{m,n}\varrho(z) = \int_D K_{m,n}(z - \zeta) \varrho(\zeta) d\xi d\eta,$$

где ядро задается формулой

$$K_{m,n}(z) = \begin{cases} \frac{(-m)!(-1)^m}{(n-1)!\pi} z^{m-1} \bar{z}^{n-1}, & m \leq 0, \\ \frac{(-n)!(-1)^n}{(m-1)!\pi} z^{m-1} \bar{z}^{n-1}, & n \leq 0, \\ \frac{z^{m-1} \bar{z}^{n-1}}{(m-1)!(n-1)!\pi} \left[\log |z|^2 - \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{1}{\mu} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu} \right], & 1 \leq m, n \end{cases}$$

(см. [17]). При $m = n = 0$ полагаем $T_{0,0}\varrho = \varrho$.

Ядра $K_{m,n}$ слабо сингулярны при $0 < m + n$ и сильно сингулярны при $m + n = 0$. В последнем случае интегралы $T_{m,n}\varrho$ типа Кальдерона–Зигмунда можно рассматривать как интегралы Коши в смысле главного значения. Кроме того, они удовлетворяют соотношениям

$$T_{0,0} = \text{id}, \quad T_{0,1} = T, \quad T_{1,0} = \bar{T}, \quad T_{-1,1} = \Pi, q \quad T_{1,-1} = \bar{\Pi},$$

где

$$T\varrho(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \varrho(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

— оператор Помпейю и

$$\Pi\varrho(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \varrho(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

— оператор Альфорса–Берлинга. Отметим следующие дифференциальные и мультипликативные свойства:

$$\partial_z^k \partial_{\bar{z}}^l T_{m,n} = T_{m-k, n-l}, \quad k + l \leq m + n, \quad T_{m,-m} T_{k,-k} = T_{m+k, -m-k}.$$

Оператор $T_{m,-m} : L_2(\mathbb{C}; \mathbb{C}) \rightarrow L_2(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ — унитарный интегральный оператор, удовлетворяющий соотношению

$$\|T_{m,-m}\varrho\|_{L_2(\mathbb{C}; \mathbb{C})} = \|\varrho\|_{L_2(\mathbb{C}; \mathbb{C})}.$$

Общее линейное комплексное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n w + \sum_{\substack{\mu+\nu=m+n, \\ (\mu,\nu) \neq (m,n)}} a_{\mu\nu} \partial_z^\mu \partial_{\bar{z}}^\nu w + \sum_{\mu+\nu < m+n} a_{\mu\nu} \partial_z^\mu \partial_{\bar{z}}^\nu w = f$$

можно исследовать, вводя потенциал $w = T_{m,n}\varrho$ для модельного оператора $\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n$ (см. [17]), который превращает дифференциальное уравнение для w в сингулярное интегральное уравнение для ϱ (см. [7]).

2. Полианалитические задачи. При $n = 1$ основная формула представления для полианалитического дифференциального оператора $\partial_{\bar{z}}^n$ описана в следующей теореме.

Теорема 2 (интеграл представления Коши—Помпейю). *Любую функцию $w \in C(\bar{D}; \mathbb{C}) \cap C^1(D; \mathbb{C})$ можно представить в виде*

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad z \in D.$$

При $z \notin \bar{D}$ левая часть равна 0.

Доказательство вытекает из формулы Гаусса—Остроградского, примененной к $w(\zeta)/(\zeta - z)$ на $D \setminus \{|\zeta - z| \leq \varepsilon\}$ при $z \in D$ и достаточно малого положительного ε , если $\varepsilon \rightarrow 0$. Если же $z \notin \bar{D}$, доказываемое соотношение представляет собой в точности формулу Гаусса—Остроградского.

После редукции уравнения $\partial_{\bar{z}}^m w = f$ к системе m уравнений Коши—Римана итерационный процесс приводит к формулам представления Коши—Помпейю высших порядков.

Теорема 3 (полианалитическая интегральная формула Коши—Помпейю). *Любую функцию $w \in C^{m-1}(\bar{D}; \mathbb{C}) \cap C^m(D; \mathbb{C})$ можно представить в виде*

$$w(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{(-1)^\mu (\overline{\zeta - z})^\mu}{\mu! (\zeta - z)} \partial_{\bar{\zeta}}^\mu w(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(-1)^{m-1} (\overline{\zeta - z})^{m-1}}{(m-1)! (\zeta - z)} \partial_{\bar{\zeta}}^m w(\zeta) d\xi d\eta, \quad z \in D.$$

При $z \notin \bar{D}$ левая часть формулы обращается в 0.

Другой естественный способ вывода этого представления — повторное применение формулы Гаусса—Остроградского к интегралу $T_{0,m} \partial_{\bar{z}}^m w(z)$ и дальнейшее использование формулы Коши—Помпейю.

Однако указанная формула представления непригодна для решения соответствующих краевых задач для неоднородного полианалитического уравнения. Задавая граничные значения производных низшего порядка $\partial_{\bar{z}}^\mu w(z)$, $0 \leq \mu \leq m-1$, приходим к переопределенной краевой задаче. Не всякая гладкая функция на границе области может играть роль краевого значения аналитической функции в этой области. Формула Коши показывает, что в этом случае интеграл Коши обращается в нуль в дополнении области, лежащей в комплексной плоскости \mathbb{C} .

2.1. Полианалитическая задача Шварца. В частном случае единичного круга $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ из формулы Коши—Шварца—Помпейю получим представление для корректно поставленной краевой задачи для уравнения Коши—Римана.

Лемма 1. *Задача Шварца для оператора Коши—Римана*

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} w = f \quad \text{в } \mathbb{D}, \quad \operatorname{Re} w = \gamma \quad \text{на } \partial \mathbb{D}, \quad \operatorname{Im} w(0) = c, \\ f \in L_p(\mathbb{D}; \mathbb{C}), \quad 2 < p, \quad \gamma \in C(\partial \mathbb{D}; \mathbb{R}), \quad c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

имеет единственное решение, выражаемое формулой

$$w(z) = ic + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \left[\frac{f(\zeta) \zeta + z}{\zeta \zeta - z} + \frac{\overline{f(\zeta)} (1 + z\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} (1 - z\bar{\zeta})} \right] d\xi d\eta.$$

Приведенная формула является простой комбинацией двух частей формулы Коши—Помпейю. Полианалитический вариант формулы имеет следующий вид (см. [17, 20]).

Теорема 4 (представление Коши—Шварца—Помпейю полианалитического оператора в \mathbb{D}). *Любую функцию $w \in C^{m-1}(\bar{\mathbb{D}}; \mathbb{C}) \cap C^m(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, $m \in \mathbb{N}$, можно представить в виде*

$$w(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \left[\frac{i \operatorname{Im} \partial_{\bar{z}}^\mu w(0)}{\mu!} (z + \bar{z})^\mu + \frac{(-1)^\mu}{2\pi i \mu!} \int_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} \partial_{\bar{\zeta}}^\mu w(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \left(\zeta - z + \overline{\zeta - z} \right)^\mu \frac{d\zeta}{\zeta} \right] +$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2\pi(m-1)!} \int_{|\zeta|<1} \left[\frac{\partial_{\bar{\zeta}}^m w(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{\partial_{\bar{\zeta}}^m w(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \right] (\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{m-1} d\xi d\eta, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Эта формула позволяет построить решение следующей задачи.

Задача Шварца для полианалитического оператора в единичном круге. Найти решение следующей полианалитической задачи:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}^m w &= f && \text{в } \mathbb{D}, \quad f \in L_p(\mathbb{D}; \mathbb{C}), \quad 2 < p, \\ \operatorname{Re} \partial_{\bar{z}}^\mu w &= \gamma_\mu && \text{на } \partial\mathbb{D}, \quad \gamma_\mu \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{R}), \quad 0 \leq \mu \leq m-1, \\ \operatorname{Im} \partial_{\bar{z}}^\mu w(0) &= c_\mu, \quad c_\mu \in \mathbb{R}, && 0 \leq \mu \leq m-1. \end{aligned}$$

Эту задачу Шварца можно поставить для любой плоской области D и построить в явном виде единственное решение для некоторых односвязных областей, для которых существует гармоническая функция Грина $G_1(z, \zeta)$ (см. [5, 6]). Отметим, что если $G_1(z, \zeta) = 0$ при $\zeta \in \partial D$ и любом $z \in D$, то гармоническая функция

$$h_1(z, \zeta) = \log |\zeta - z|^2 + G_1(z, \zeta)$$

удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{Re} \left[\frac{d\zeta}{\zeta - z} - h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) d\bar{\zeta} \right] = 0$$

при $\zeta \in \partial D$, $z \in D$.

Определение 1. Область D , для которой функция Грина $G_1(z, \zeta)$ такова, что функция $h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta)$ аналитична по $z \in D$ для всех $\zeta \in \partial D$, называется допустимой областью для задачи Шварца.

Верхняя полуплоскость $\mathbb{H}^+ = \{i(z - \bar{z}) < 0\}$ является допустимой, поскольку

$$G_1(z, \zeta) = \log \left| \frac{\bar{\zeta} - z}{\zeta - z} \right|^2, \quad h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) = \frac{1}{\bar{\zeta} - z}$$

верхний единичный полукруг $\mathbb{D}^+ = \{i(z - \bar{z}) < 0, |z| < 1\}$, для которого

$$G_1(z, \zeta) = \log \left| \frac{\bar{\zeta} - z}{\zeta - z} \frac{1 - z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right|^2, \quad h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) = \frac{1}{\bar{\zeta} - z} - \frac{z}{1 - z\bar{\zeta}} + \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\bar{\zeta}}$$

допустимым не является.

По-видимому, множество допустимых областей достаточно мало. Характеризацию односвязных допустимых областей можно получить при помощи конформных отображений на круг \mathbb{D} (см. [6]).

Лемма 2. Односвязная область D , обладающая функцией Грина, является допустимой для задачи Шварца тогда и только тогда, когда конформное отображение $\omega : D \rightarrow \mathbb{D}$ удовлетворяет соотношению

$$\left(\frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\zeta - z} \right)^2 = \omega'(\zeta)\omega'(z)$$

для всех $z, \zeta \in D$.

Допустимые области обладают следующим свойством (см. [5]).

Лемма 3. Для всех $\gamma \in C(\partial D; \mathbb{R})$, где D — плоская область, обладающая гармонической функцией Грина $G_1(z, \zeta) = -\log |\zeta - z|^2 + h_1(z, \zeta)$, где $h_{1\bar{\zeta}\bar{z}}(z, \zeta) = 0$, функция

$$\Gamma(z) = \int_{\partial D} \gamma(\zeta) \left[\frac{d\zeta}{\zeta - z} - h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) d\bar{\zeta} \right]$$

является постоянной.

Доказательство вытекает из соотношений $\Gamma(z) + \overline{\Gamma(\bar{z})} = 0$ и $\partial_{\bar{z}}\Gamma(z) = 0$.

Для допустимых областей формула Коши—Шварца—Помпейю также справедлива (см. [21]).

Лемма 4 (представление Коши—Шварца—Помпейю). Пусть D — допустимая область, $G_1(z, \zeta)$ — соответствующая Грина функция и $z_0 \in D$ — произвольная фиксированная точка. Любую функцию $w \in C(\overline{D}; \mathbb{C}) \cap C^1(D; \mathbb{C})$ можно представить в виде

$$w(z) = i \operatorname{Im} w(z_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \operatorname{Re} w(\zeta) \left[\frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} + \left(h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\bar{\zeta} \right] - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_D \left\{ w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \left[\frac{\zeta + z - 2z_0}{\zeta - z} \frac{1}{\zeta - z_0} - h_{1\zeta}(z_0, \zeta) \right] - \overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)} \left[2h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) - h_{1\bar{\zeta}}(z_0, \zeta) - \frac{1}{\zeta - z_0} \right] \right\} d\xi d\eta.$$

Это представление имеет полианалитический вариант (см. [5, 21]).

Теорема 5 (полианалитическая формула Коши—Шварца—Помпейю). Любую функцию $w \in C^{m-1}(\overline{D}; \mathbb{C}) \cap C^m(D, \mathbb{C})$, $m \in \mathbb{N}$, можно представить в виде

$$w(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \left\{ \frac{i \operatorname{Im} \partial_{\bar{z}}^{\mu} w(z_0)}{\mu!} (z - z_0 + \overline{z - z_0})^{\mu} + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{\mu}}{2\pi i \mu!} \int_{\partial D} \operatorname{Re} \partial_{\bar{\zeta}}^{\mu} w(\zeta) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{\mu} \left[\frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta + \left(h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\bar{\zeta} \right] \right\} + \\ + \frac{(-1)^m}{2\pi(m-1)!} \int_D \left\{ \partial_{\bar{\zeta}}^m w(\zeta) \left[\frac{\zeta + z - 2z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} - h_{1\zeta}(z_0, \zeta) \right] - \right. \\ \left. - \overline{\partial_{\bar{\zeta}}^m w(\zeta)} \left[2h_{1\bar{\zeta}}(z, \zeta) - h_{1\bar{\zeta}}(z_0, \zeta) - \frac{1}{\zeta - z_0} \right] \right\} (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{m-1} d\xi d\eta.$$

2.2. Полианалитическая задача Дирихле. Полианалитическая формула Коши—Помпейю позволяет выписать решение полианалитической задачи Дирихле в случае, когда оно существует. Для существования решения требуется выполнение условий разрешимости.

Полианалитическая задача Дирихле формулируется следующим образом: найти решение неоднородного полианалитического уравнения

$$\partial_{\bar{z}}^m w = f \quad \text{в } D, \quad f \in L_p(D; \mathbb{C}), \quad 2 < p,$$

удовлетворяющее условиям

$$\partial_{\bar{z}}^{\mu} w = \gamma_{\mu} \quad \text{на } \partial D, \quad \gamma_{\mu} \in C(\partial D; \mathbb{R}), \quad 0 \leq \mu \leq m-1.$$

В случае $m = 1$ формула Коши—Помпейю гарантирует выполнение условия разрешимости и выражает само решение.

Лемма 5. При $f \in L_p(D; \mathbb{C})$, $2 < p$, и $\gamma \in C(\partial D; \mathbb{C})$ задача Дирихле

$$w_{\bar{z}} = f \quad \text{в } D, \quad w = \gamma \quad \text{на } \partial D$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \gamma(\zeta) h_{1\zeta}(z, \zeta) d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) h_{1\zeta}(z, \zeta) d\xi d\eta.$$

При этом решение выражается формулой

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z},$$

Итерирование этого утверждения (см. [21]) приводит к следующей теореме.

Теорема 6. Полианалитическая задача Дирихле с данными $f \in L_p(D; \mathbb{C})$, $2 < p$, $\gamma_\mu \in C(\partial D; \mathbb{C})$, $0 \leq \mu \leq t-1$, разрешима тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \gamma_\mu(\zeta) \partial_\zeta h_1(z, \zeta) d\zeta + \\ & + \sum_{\nu=\mu+1}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \gamma_\nu(\zeta_{\nu-\mu+1}) \left(\frac{1}{\pi} \int_D \right)^{\nu-\mu} \partial_{\zeta_1} h_1(z, \zeta_1) \prod_{\lambda=1}^{\nu-\mu} \frac{d\zeta_\lambda d\eta_\lambda}{\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda+1}} d\zeta_{\nu-\mu+1} = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta_{m-\mu}) \left(\frac{1}{\pi} \int_D \right)^{m-\mu-1} \partial_{\zeta_1} h_1(z, \zeta_1) \prod_{\lambda=1}^{m-\mu-1} \frac{d\xi_\lambda d\eta_\lambda}{\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda+1}} d\xi_{m-\mu} d\eta_{m-\mu} \end{aligned}$$

при $0 \leq \mu \leq t-1$. В этом случае решение выражается формулой

$$w(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{(-1)^\mu (\overline{\zeta-z})^\mu}{\mu! (\zeta-z)} \gamma_\mu(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(-1)^{m-1} (\overline{\zeta-z})^{m-1}}{(m-1)! (\zeta-z)} f(\zeta) d\xi d\eta.$$

Задача Дирихле в единичном круге была решена в [18]. Для уравнения Коши—Римана можно рассматривать краевую задачу Неймана, однако его итерация для полианалитического уравнения произвольного порядка практически бесполезна из-за сложности условия разрешимости. Для полианалитических уравнений в частных случаях рассматриваются также комбинации условий Дирихле, Неймана и Шварца (см., например, [28]).

3. Полигармонические задачи. Хорошо известная формула интегрального представления второго порядка для оператора Лапласа, которая является непосредственным следствием основной формулы Коши—Помпейю и ее комплексно-сопряженного аналога,

$$w(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} \log |\zeta - z|^2 - \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) \log |\zeta - z|^2 \right] ds_\zeta + \frac{1}{\pi} \int_D w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) \log |\zeta - z|^2 d\xi d\eta, \quad z \in D,$$

где ∂_{ν_ζ} — производная по направлению внешней нормали к ∂D в точке ζ , является несобственной по отношению к краевым задачам. Гармоническая функция определяется либо своими граничными значениями, либо (с точностью до постоянного члена) своей нормальной производной на границе.

3.1. Гармоническая задача Робена. Чтобы модифицировать формулу представления, воспользуемся гармонической функцией Грина $G_1(z, \zeta)$ и функцией Неймана $N_1(z, \zeta)$. Обе эти функции являются частными случаями гармонической функцией Робена (см. [23]).

Определение 2. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha^2 + \beta^2$. Вещественнозначная функция $R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta)$, $z, \zeta \in D$, $z \neq \zeta$, называется *функцией Робена*, если для всех $\zeta \in D$ она обладает следующими свойствами:

- (i) $R_{1;\alpha,\beta}(\cdot, \zeta)$ — гармоническая функция в $D \setminus \{\zeta\}$, непрерывно дифференцируемая в $\overline{D} \setminus \{\zeta\}$;
- (ii) $h(z, \zeta) = R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) + \log |\zeta - z|^2$ — гармоническая функция от $z \in D$,
- (iii) $\alpha R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) + \beta \partial_{\nu_z} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \beta \sigma(s)$ при $z = z(s) \in \partial D$, где ∂_{ν_z} — производная по направлению внешней нормали к ∂D , s — натуральный параметр (длина дуги) на ∂D , функция плотности σ — это вещественнозначная кусочно постоянная функция аргумента s , для которой конечен интеграл $\int_{\partial D} \sigma(s) ds$ (конечная масса);
- (iv) $\beta \int_{\partial D} \sigma(s_z) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) ds_z = 0$.

Кроме того, функции Робена также обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) &= R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z), \\ R_{1;\alpha,0}(z, \zeta) &= G_1(z, \zeta), \quad R_{1;0,\beta}(z, \zeta) = N_1(z, \zeta). \end{aligned}$$

Теорема 7 (формула представления Робена). *Любую функцию $w \in C^1(\overline{D}; \mathbb{C}) \cap C^2(D; \mathbb{C})$ можно представить в виде*

$$w(z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) - \partial_\nu w(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) \right\} ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) d\xi d\eta.$$

Это представление можно задать, применив граничные свойства функции $R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta)$.

Следствие 1. *Любую функцию $w \in C^1(\overline{D}; \mathbb{C}) \cap C^2(D; \mathbb{C})$ можно представить в виде*

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{4\pi\beta} \int_{\partial D} \left\{ \alpha w(\zeta) + \beta \partial_\nu w(\zeta) \right\} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) ds_\zeta - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma w(\zeta) ds_\zeta - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_D \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) d\xi d\eta, \quad \text{если } \beta \neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(z) &= -\frac{1}{4\pi\alpha} \int_{\partial D} \left\{ \alpha w(\zeta) + \beta \partial_\nu w(\zeta) \right\} \partial_{\nu_\zeta} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) ds_\zeta + \frac{\beta}{4\pi\alpha} \int_{\partial D} \sigma \partial_\nu w(\zeta) ds_\zeta - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_D \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) d\xi d\eta, \quad \text{если } \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

В [23] были найдены функции Робена для круга \mathbb{D} и концентрического круга $R = \{0 < r < |z| < 1\}$. Для круга \mathbb{D} функция плоскости σ равна тождественно -2 , а функция Робена имеет вид

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \begin{cases} \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 + 2\beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha + k\beta}, & \text{если } -\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{N}, \\ \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 + 2\beta \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq k_0}}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha + k\beta} + \\ + 2 \left[(z\bar{\zeta})^{k_0} \log(z\bar{\zeta}) + (\bar{z}\zeta)^{k_0} \log(\bar{z}\zeta) \right], & \text{если } k_0 = -\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Функция Робена для R имеет вид

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \begin{cases} G_1(z, \zeta) + 2\beta \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + k\beta)(1 - r^{2k})} & \text{если } \frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Z}, \\ G_1(z, \zeta) + 2\beta \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0, k_0}}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + k\beta)(1 - r^{2k})} + \\ + \frac{2}{1 - r^{2k_0}} \left[(z\bar{\zeta})^{k_0} \log(z\bar{\zeta}) + (\bar{z}\zeta)^{k_0} \log(\bar{z}\zeta) \right] & \text{если } k_0 = -\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

где

$$G_1(z, \zeta) = \frac{\log |z|^2 \log |\zeta|^2}{\log r^2} + \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 + \log \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(1 - r^{2k} z\bar{\zeta})(1 - \frac{r^{2k}}{z\bar{\zeta}})}{(1 - r^{2k} \frac{z}{\zeta})(1 - r^{2k} \frac{\zeta}{z})} \right|^2$$

(см. [23, 38]). Доказательства приведенных соотношений для функций Робена основаны на свойствах задачи Шварца для аналитических функций, поскольку вещественная гармоническая функция $h_1(\cdot, \zeta)$ является вещественной частью аналитической в D функции для всех $\zeta \in \partial D$.

Краевая задача Робена включает также задачи Дирихле и Неймана. Естественно, что их решения, включая условия разрешимости, покрываются результатом для задачи Робена.

Теорема 8. Пусть $f \in L_p(\mathbb{D}; \mathbb{C})$, $2 < p$, $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$. Задача Робена

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} w = f \quad \text{в } \mathbb{D}, \quad \alpha w + \beta \partial_\nu w = \gamma \quad \text{на } \partial\mathbb{D},$$

обладает следующими свойствами:

(i) при $\beta \neq 0$ она разрешима тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2\beta}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) d\xi d\eta$$

причем решение имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{4\pi i \beta} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta;$$

(ii) при $\alpha \neq 0$ задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\frac{\beta}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \partial_\nu w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2\beta}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) d\xi d\eta,$$

причем решение имеет вид

$$w(z) = -\frac{1}{4\pi i \alpha} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma(\zeta) \partial_{\nu\zeta} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\beta}{4\pi i \alpha} \int_{\partial\mathbb{D}} \sigma \partial_\nu w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta.$$

Замечание 1. Если $\alpha = 0$, то $\gamma = \beta \partial_\nu w$, и условия разрешимости задачи Неймана хорошо известны (см., например, [12]). В случае $\beta = 0$ условие разрешимости отсутствует.

Краевую задачу Робена можно изучать и без использования функции Робена (см., например, [34]).

3.2. *Полигармонические задачи.* Задачи для уравнения Пуассона порядка n

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w = f \quad \text{в } D$$

можно ставить, используя различные краевые условия, например,

$$\partial_\nu^\mu w = \gamma_\mu, \quad 0 \leq \mu \leq n-1, \quad \text{на } \partial D$$

для классической полигармонической задачи Дирихле,

$$\partial_\nu^\mu w = \gamma_\mu, \quad 1 \leq \mu \leq n, \quad \text{на } \partial D$$

для полигармонической задачи Неймана,

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w = \gamma_\mu, \quad 0 \leq \mu \leq n-1, \quad \text{на } \partial D,$$

для полигармонической задачи Рикье (Навье) и т. д. Допустимы все типы комбинаций взаимно независимых (линейно независимых) условий; их число должно быть равно n . В случае переопределенных задач требуются также нетривиальные условия разрешимости. Укажем еще следующие краевые задачи для полигармонического уравнения Пуассона порядка n :

Задача I: $\partial_\nu (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w = \gamma_\mu$, $0 \leq \mu \leq n-1$, на ∂D ;

Задача II: $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w = \gamma_{0\mu}$, $0 \leq 2\mu \leq n-1$, $\partial_\nu (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w = \gamma_{1\mu}$, $0 \leq 2\mu \leq n-2$, на ∂D .

Для этих задач требуется нахождение соответствующих фундаментальных решений для оператора Лапласа порядка n , т.е. полигармонических функций Грина. Классическим примером является полигармоническая функция Грина—Альманси.

Определение 3. Функция Грина–Альманси порядка n для области D — это вещественнозначная функция $\mathcal{G}_n(z, \zeta)$, $z, \zeta \in D$, $z \neq \zeta$, удовлетворяющая следующим условиям:

- (i) $\mathcal{G}_n(\cdot, \zeta)$ — полигармоническая функция порядка n в $D \setminus \{\zeta\}$;
- (ii) $\mathcal{G}_n(z, \zeta) + \frac{|\zeta - z|^{2(n-1)}}{(n-1)!^2} \log |\zeta - z|^2$ — полигармоническая функция порядка n в D для всех $\zeta \in D$;
- (iii) $(\partial_{\nu_z}^\mu \mathcal{G}_n(z, \zeta) = 0$ при $z \in \partial D$, $\zeta \in D$, $0 \leq \mu \leq n-1$.

Эта функция симметрична, т.е.

$$\mathcal{G}_n(z, \zeta) = \mathcal{G}_n(\zeta, z), \quad z, \zeta \in D, \quad z \neq \zeta,$$

и удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu \mathcal{G}_n(z, \zeta) &= 0, \quad 0 \leq 2\mu \leq n-1, \\ \partial_{\nu_z} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu \mathcal{G}_n(z, \zeta) &= 0, \quad 0 \leq 2\mu \leq n-2, \end{aligned}$$

при $z \in \partial D$, $\zeta \in D$.

Эта функция Грина полезна при исследовании задачи Дирихле (см. [2, 9])

$$\partial_{\nu_z}^\mu w = \gamma_\mu, \quad 0 \leq \mu \leq n-1, \quad \text{на } \partial D,$$

и Задачи II (см. [13, 25]).

Теорема 9. Пусть $f \in L_p(D; \mathbb{C})$, $p > 2$, $\gamma_\mu \in C^{n-2\mu}(\partial D; \mathbb{C})$, $0 \leq 2\mu \leq n-1$, $\hat{\gamma}_\mu \in C^{n-1-2\mu}(\partial D; \mathbb{C})$, $0 \leq 2\mu \leq n-2$. Краевая задача II

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w &= f \quad \text{в } D, \\ (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w &= \gamma_\mu, \quad 0 \leq 2\mu \leq n-1, \\ \partial_{\nu_z} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w &= \hat{\gamma}_\mu, \quad 0 \leq 2\mu \leq n-2, \quad \text{на } \partial D, \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$\begin{aligned} w(z) = & - \sum_{\mu=0}^{[n/2]-1} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{n-\mu-1} \mathcal{G}_n(z, \zeta) \gamma_\mu(\zeta) ds_\zeta + \\ & + \sum_{\mu=0}^{[(n-1)/2]} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{n-\mu-1} \mathcal{G}_n(z, \zeta) \hat{\gamma}_\mu(\zeta) ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \mathcal{G}_n(z, \zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^n w(\zeta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Явные выражения функции Грина–Альманси для единичного круга \mathbb{D} (см. [2, 9, 11]) и для верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+ = \{i(z - \bar{z}) < 0\}$ (см. [15, 31]) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (n-1)!^2 \mathcal{G}_n(z, \zeta) &= |\zeta - z|^{2(n-1)} \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 - \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{\mu} |\zeta - z|^{2(n-1-\mu)} (1 - |z|^2)^\mu (1 - |\zeta|^2)^\mu, \\ (n-1)!^2 \mathcal{G}_n(z, \zeta) &= |\zeta - z|^{2(n-1)} \log \left| \frac{\bar{\zeta} - z}{\zeta - z} \right|^2 + \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{\mu} |\zeta - z|^{2(n-1-\mu)} (z - \bar{z})^\mu (\zeta - \bar{\zeta})^\mu. \end{aligned}$$

Итерированные и гибридные полигармонические функции Грина. Перепишем уравнение Пуассона порядка n с условиями Рикье в виде следующей системы задач Дирихле для уравнения Пуассона (см. [22]):

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} w_\mu = w_{\mu+1} \quad \text{в } D, \quad w_\mu = \gamma_\mu \quad \text{на } \partial D, \quad 0 \leq \mu \leq n-1,$$

где $w_0 = w$ и $w_n = f$. Итерируя решения этих задач,

$$w_\mu(z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \gamma_\mu(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} G_1(z, \zeta) ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\mu+1}(\zeta) G_1(z, \zeta) d\xi d\eta,$$

получим

$$w(z) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\mu=0}^{n-1} \int_D \gamma_\mu(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} G_{\mu+1}(z, \zeta) ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) G_n(z, \zeta) d\xi d\eta,$$

где

$$G_\mu(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D G_1(z, \tilde{\zeta}) G_{\mu-1}(\tilde{\zeta}, \zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}, \quad 2 \leq \mu \leq n.$$

Теорема 10. Если $f \in L_p(D; \mathbb{C})$, $2 < p$, и $\gamma_\mu \in C^{0,\alpha}(\partial D; \mathbb{C})$, $0 < \alpha < 1$, то краевая задача Рикье

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w &= f && \text{в } D, \\ (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w &= \gamma_\mu && \text{на } \partial D, \quad 0 \leq \mu \leq n-1, \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \sum_{\mu=0}^{n-1} g_{\mu+1}(z, \zeta) \gamma_\mu(\zeta) ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D G_n(z, \zeta) f(\zeta) d\xi d\eta,$$

где $g_\mu(z, \zeta) = -\frac{1}{2} \partial_{\nu_z} G_\mu(z, \zeta)$, $\mu \in \mathbb{N}$, — полигармонические ядра Пуассона.

Итерированная полигармоническая функция Грина $G_n(z, \zeta)$ отличается от функции Грина—Альманси $\mathcal{G}_n(z, \zeta)$ своим граничным поведением. Она обладает следующими свойствами:

- (1) $G_n(\cdot, \zeta)$ — полигармоническая функция порядка n в $D \setminus \{\zeta\}$;
- (2) $G_n(z, \zeta) + \frac{|\zeta - z|^{2(n-1)}}{(n-1)!^2} \log |\zeta - z|^2$ — полигармоническая функция порядка n при $z \in D$ и $\zeta \in D$;
- (3) $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu G_n(z, \zeta) = 0$ при $0 \leq \mu \leq n-1$, $z \in \partial D$ и $\zeta \in D$.

Кроме того, она симметрична, т.е. $G_n(z, \zeta) = \widehat{G}_n(\zeta, z)$ при $z, \zeta \in D$, $z \neq \zeta$, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}}) \widehat{G}_n(z, \zeta) = \widehat{G}_{n-1}(z, \zeta) \quad \text{в } D$$

для всех $\zeta \in D$ и имеет однородные данные Дирихле

$$\widehat{G}_n(z, \zeta) = 0 \quad \text{на } \partial D.$$

Аналогично можно итерировать функции Неймана и Робена; это приводит к итерированным полигармоническим функциям Неймана

$$N_n(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D N_1(z, \tilde{\zeta}) N_{n-1}(\tilde{\zeta}, \zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq n,$$

(эта функция используется для исследования краевой задачи

$$\partial_\nu (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w = \gamma_\mu, \quad 0 \leq \mu \leq n-1, \quad \text{на } \partial D,$$

см. [24]), и Робена

$$R_{n;\alpha,\beta}(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\alpha,\beta}(z, \tilde{\zeta}) R_{n-1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq n$$

(эта функция используется для исследования краевой задачи

$$(\alpha + \beta \partial_\nu) (\partial_z \partial_{\bar{z}})^\mu w = \gamma_\mu, \quad 0 \leq \mu \leq n-1, \quad \text{на } \partial D,$$

см. [30]).

Свертка функций Грина и гибридные полигармонические функции Грина. К различным функциям Грина можно применить операцию свертки, что приводит к полигармоническим функциям Грина высших порядков, связанным с различными краевыми задачами. Начиная с двух гармонических фундаментальных решений с различным граничным поведением, т.е. функций Грина, Неймана или Робена, получим различные гибридные бигармонические фундаментальные решения Грина–Неймана, Грина–Робена, Неймана–Робена, Неймана–Грина, Робена–Грина и Робена–Неймана. Кроме того, можно рассмотреть и функции Грина–Грина $G_2(z, \zeta)$, Неймана–Неймана $N_2(z, \zeta)$ и Робена–Робена $R_{2;\alpha,\beta}(z, \zeta)$, а также гибридное фундаментальное решение $R_{1;\alpha,\beta}R_{1;\gamma,\delta}(z, \zeta)$ и бигармоническую функцию Грина–Альманси $\mathcal{G}_2(z, \zeta)$. Очевидно, существует множество полигармонических гибридных функций Грина; чем выше порядок класса рассматриваемых полигармонических функций, тем шире многообразие соответствующих гибридных функций Грина.

Определение 4. Свертка

$$K_m \widehat{K}_n(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D K_m(z, \tilde{\zeta}) \widehat{K}_n(\tilde{\zeta}, \zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}$$

полигармонической функции Грина порядка m , например,

$$K_m(z, \zeta) \in \left\{ \mathcal{G}_m(z, \zeta), G_m(z, \zeta), N_m(z, \zeta), R_{m;\alpha,\beta}(z, \zeta), \dots \right\}$$

и полигармонической функции Грина порядка n , $\widehat{K}_n(z, \zeta)$, называется гибридной полигармонической функцией Грина порядка $m + n$.

Теорема 11. Обозначим через B_m множество m граничных условий и дополнительных условий для $K_m(z, \zeta)$, $z \in \partial D$, $\zeta \in D$. Предположим, выполнены следующие условия:

- (i) $K_m(\cdot, \zeta)$ – полигармоническая функция порядка m в $D \setminus \{\zeta\}$;
- (ii) $K_m(z, \zeta) + \frac{|\zeta - z|^{2(m-1)}}{(m-1)!^2} \log |\zeta - z|^2$ – полигармоническая функция порядка m в D для всех $\zeta \in D$;
- (iii) $K_m(z, \zeta)$ удовлетворяет условиям B_m при $z \in \partial D$ and $\zeta \in D$.

Тогда для всех $\zeta \in D$ функция $K_m \widehat{K}_n(z, \zeta)$, рассматриваемая как функция от z , является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^m K_m \widehat{K}_n(z, \zeta) &= \widehat{K}_n(z, \zeta) \quad \text{в } D, \\ B_m(K_m \widehat{K}_n(z, \zeta)) &= -\frac{1}{\pi} \int_D \left(B_m(K_m(z, \tilde{\zeta})) \right) \widehat{K}_n(\tilde{\zeta}, \zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \quad \text{на } \partial D, \end{aligned}$$

и для всех фиксированных $z \in D$, как функция от ζ , – решением краевой задачи

$$\begin{aligned} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^n (K_m \widehat{K}_n(z, \zeta)) &= K_m(z, \zeta) \quad \text{в } D, \\ \widehat{B}_n(K_m \widehat{K}_n(z, \zeta)) &= -\frac{1}{\pi} \int_D K_m(z, \tilde{\zeta}) \left(\widehat{B}_n(\widehat{K}_n(\tilde{\zeta}, \zeta)) \right) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \quad \text{на } \partial D. \end{aligned}$$

В случае, когда обе функции $K_m(z, \zeta)$ и $\widehat{K}_n(z, \zeta)$ симметричны, имеем

$$K_m \widehat{K}_n(z, \zeta) = \widehat{K}_n K_m(\zeta, z)$$

(см. [14]).

В качестве примера тетрагармонической гибридной функции Грина приведем свертку $\mathcal{G}_2 G_2(z, \zeta)$ бигармонической функции Грина–Альманси $\mathcal{G}_2(z, \zeta)$ и итерированной бигармонической функции Грина $G_2(z, \zeta)$. В дальнейшем будем обозначать эту функцию by $H_4(z, \zeta)$:

$$H_4(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D G_2(z, \tilde{\zeta}) \widehat{G}_2(\tilde{\zeta}, \zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}.$$

Поскольку \widehat{G}_2 — фундаментальное решение оператора $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^2$, H_4 является решением задачи

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^2 H_4(z, \zeta) = \widehat{G}_2(z, \zeta) \quad \text{в } D \text{ для всех } \zeta \in D.$$

Кроме того,

$$H_4(z, \zeta) = 0, \quad \partial_{\nu_z} H_4(z, \zeta) = 0 \quad \text{при } z \in \partial D, \zeta \in D.$$

Поскольку \widehat{G}_2 — фундаментальное решение оператора $(\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2$, H_4 является решением задачи

$$(\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 H_4(z, \zeta) = G_2(z, \zeta) \quad \text{в } D \text{ для всех } z \in D$$

и удовлетворяет соотношениям

$$H_4(z, \zeta) = 0, \quad \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} H_4(z, \zeta) = 0 \quad \text{при } \zeta \in \partial D, z \in D.$$

Функция $H_4(z, \zeta)$ обладает также следующими свойствами:

- (i) $H_4(z, \zeta)$ — тетрагармоническая функция при $z \in D \setminus \{\zeta\}$ и $\zeta \in D \setminus \{z\}$;
- (ii) $H_4(z, \zeta) + \frac{|\zeta - z|^6}{3!^2} \log |\zeta - z|^2$ — тетрагармоническая функция при $z, \zeta \in D$;
- (iii) $H_4(z, \zeta) = 0, \partial_{\nu_z} H_4(z, \zeta) = 0, (\partial_z \partial_{\bar{z}})^2 H_4(z, \zeta) = 0, (\partial_z \partial_{\bar{z}})^3 H_4(z, \zeta) = 0$ при $z \in \partial D$ и $\zeta \in D$;
- (iv) $H_4(z, \zeta) = 0, \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} H_4(z, \zeta) = 0, (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 H_4(z, \zeta) = 0, \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 H_4(z, \zeta) = 0$ при $\zeta \in \partial D$ и $z \in D$.

Очевидно, функция $H_4(z, \zeta)$ не является симметричной.

Теорема 12. Любую функцию $\omega \in C^8(D; \mathbb{C}) \cap C^7(\overline{D}; \mathbb{C})$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \omega(z) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^3 H_4(z, \zeta) \omega(\zeta) - (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^3 H_4(z, \zeta) \partial_{\nu_\zeta} \omega(\zeta) + \partial_{\nu_\zeta} \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} H_4(z, \zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 \omega(\zeta) + \right. \\ & \left. + \partial_{\nu_\zeta} H_4(z, \zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^3 \omega(\zeta) \right\} ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D H_4(z, \zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^4 \omega(\zeta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(z) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^3 H_4(\zeta, z) \omega(\zeta) + \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 H_4(\zeta, z) \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta) + \partial_{\nu_\zeta} \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} H_4(\zeta, z) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 \omega(\zeta) - \right. \\ & \left. - \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} H_4(\zeta, z) \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^2 \omega(\zeta) \right\} ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D H_4(\zeta, z) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^4 \omega(\zeta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Вычисление полигармонических функций Грина высших порядков для конкретных областей в явном виде является сложной задачей даже для простых областей типа единичного круга \mathbb{D} , кругового сектора, полуплоскости, кольца и т. п. Этой теме посвящено несколько работ, но результаты не выходят за рамки тетрагармонического случая (см. [26, 30, 31, 38, 40]). В [29] полигармонические ядра Пуассона $g_n(z, \zeta)$ произвольного порядка для единичного круга были построены без применения полигармонических итерированных функций Грина $G_n(z, \zeta)$. Итерации операторов Помпейю использовались в [35, 39]; некоторые из них нашли применение в клиффордовом и октонионном анализе (см. [10, 16, 19]). Полигармонические функции Грина высших размерностей для шаров и полуплоскостей построены, например, в [3]. Упомянем также работы [4, 27, 32, 36].

4. Приложение. Примеры функций Грина, Неймана и Робена для единичного круга \mathbb{D} . Подробности см. например, в [30, 37, 40].

4.1. Гармонические функции.

$$\begin{aligned} G_1(z, \zeta) = \mathcal{G}_1(z, \zeta) &= \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2, \\ N_1(z, \zeta) &= -\log |(\zeta - z)(1 - z\bar{\zeta})|^2, \end{aligned}$$

где $\partial_{\nu_z} N_1(z, \zeta) = -2$ на $\partial\mathbb{D}$,

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 + 2\beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha + k\beta}, \quad \text{если } -\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{N},$$

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 + 2\beta \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq k_0}}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha + k\beta} +$$

$$+ 2 \left[(z\bar{\zeta})^{k_0} \log(z\bar{\zeta}) + (\bar{z}\zeta)^{k_0} \log(\bar{z}\zeta) \right], \quad \text{если } k_0 = -\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{N}.$$

4.2. *Бигармонические функции.*

$$\mathcal{G}_2(z, \zeta) = |\zeta - z|^2 G_1(z, \zeta) - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2),$$

$$G_2(z, \zeta) = |\zeta - z|^2 G_1(z, \zeta) + (1 - |z|^2) \left(1 - |\zeta|^2 \left[\frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{z\bar{\zeta}} + \frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{\bar{z}\zeta} \right] \right),$$

$$N_2(z, \zeta) = |\zeta - z|^2 [4 + N_1(z, \zeta)] - 4 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k^2} - 2(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) \log |1 - z\bar{\zeta}|^2 -$$

$$- (1 + |z|^2)(1 + |\zeta|^2) \left[\frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{z\bar{\zeta}} + \frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{\bar{z}\zeta} \right],$$

$$R_{2;\alpha,\beta}(z, \zeta) = G_2(z, \zeta) + 2\beta(|z|^2 + |\zeta|^2 - 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + k\beta)(k+1)} -$$

$$- 4\beta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + k\beta)^2(k+1)}, \quad -\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{N},$$

$$G_1 N_1(z, \zeta) = -|\zeta - z|^2 \log |\zeta - z|^2 + 2(|\zeta|^2 + |z|^2) -$$

$$- (2 + |\zeta|^2 - |z|^2) \left[\log |1 - z\bar{\zeta}|^2 + \frac{1 + \log z\bar{\zeta}}{z\bar{\zeta}} + \frac{1 + \log \bar{z}\zeta}{\bar{z}\zeta} \right].$$

4.3. *Тригармоническая функция Грина для \mathbb{D} .*

$$G_3(z, \zeta) = \frac{1}{4} |\zeta - z|^4 \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 + \frac{1}{4} (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta - 4) -$$

$$- \frac{1}{4} (1 - |z|^4)(1 - |\zeta|^4) \left[\frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{(z\bar{\zeta})^2} + \frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{(\bar{z}\zeta)^2} + \frac{1}{z\bar{\zeta}} + \frac{1}{\bar{z}\zeta} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)(|z|^2 + |\zeta|^2) \left[\frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{z\bar{\zeta}} + \frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{\bar{z}\zeta} \right] +$$

$$+ (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)^2} \left[(z\bar{\zeta})^l + (\bar{z}\zeta)^l \right].$$

4.4. *Тетрагармоническая функция Грина для \mathbb{D} .*

$$G_4(z, \zeta) = \frac{1}{36} |\zeta - z|^6 \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 - \frac{1}{36} (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)(\bar{z}^2 \zeta^2 + z^2 \bar{\zeta}^2 - 30) +$$

$$+ \frac{1}{12} (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)(|z|^2 + |z|^2)(\bar{z}\zeta + z\bar{\zeta} - 4) -$$

$$- \frac{1}{72} (1 - |z|^4)(1 - |\zeta|^4)(\bar{z}\zeta + z\bar{\zeta}) +$$

$$+ \frac{1}{36} (1 - |z|^6)(1 - |\zeta|^6) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z\bar{\zeta}} + \frac{1}{\bar{z}\zeta} \right) + \frac{1}{(\bar{z}\zeta)^2} + \frac{1}{(z\bar{\zeta})^2} + \frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{(\bar{z}\zeta)^3} + \frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{(z\bar{\zeta})^3} \right] -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{12} \left[(1 - |z|^6)(1 - |\zeta|^4) + (1 - |z|^4)(1 - |\zeta|^6) + 3(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^4) + \right. \\
& + 3(1 - |z|^4)(1 - |\zeta|^2) \left. \right] \left[\frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{(\bar{z}\zeta)^2} + \frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{(z\bar{\zeta})^2} + \frac{1}{\bar{z}\zeta} + \frac{1}{z\bar{\zeta}} \right] + \\
& + \frac{1}{12} \left[(1 - |z|^6)(1 - |\zeta|^2) + (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^6) + 3(1 - |z|^4)(1 - |\zeta|^4) + \right. \\
& + 3(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \left. \right] \left[\frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{\bar{z}\zeta} + \frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{z\bar{\zeta}} \right] - \\
& - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^l + (\bar{z}\zeta)^l}{(l+1)^3} + \\
& + \frac{1}{2}(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)(1 + |z|^2 + |\zeta|^2) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^l + (\bar{z}\zeta)^l}{(l+1)^2}.
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векун И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988.
2. *Векун И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
3. *Нелмченко М. Ю.* Явное построение функции Грина для полигармонического уравнения в случае четномерного пространства/ Ph.D. thesis. — Алма-Ата: Казахский национальный университет им. аль-Фараби, 2009.
4. *Aksoy Ü.* Schwarz problem for complex partial differential equations/ Ph.D. thesis. — Ankara, 2006.
5. *Aksoy Ü., Begehr H., Celebi A. O. A. V.* Bitsadze's observation on bianalytic functions and the Schwarz problem// Complex Var. Elliptic Equ. — 2019. — 64, № 8. — P. 1257–1274.
6. *Aksoy Ü., Begehr H., Celebi A. O. A. V.* Bitsadze's observation on bianalytic functions and the Schwarz problem revisited. — FU Berlin, 2019.
7. *Aksoy Ü., Celebi A. O.* A survey on the boundary-value problems for complex partial differential equations// Adv. Dyn. Syst. Appl. — 2010. — 5. — P. 133–158.
8. *Aksoy Ü., Celebi A. O.* Mixed boundary-value problems for higher-order complex partial differential equations// Analysis. — 2010. — 30. — P. 157–169.
9. *Almansi E.* Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n} = 0$ // Ann. Mat. — 1899. — 3, № 2. — P. 1–51.
10. *Begehr H.* Iterated integral operators in Clifford analysis// J. Anal. Appl. — 1999. — 18. — P. 361–377.
11. *Begehr H.* Orthogonal decompositions of the function space $L_2(\bar{D}; \mathbb{C})$ // J. Reine Angew. Math. — 2002. — 549. — P. 191–219.
12. *Begehr H.* Boundary-value problems in complex analysis, I, II// Bol. Asoc. Mat. Venez. — 2005. — 12. — P. 65–85; 217–250.
13. *Begehr H.* A particular polyharmonic Dirichlet problem// in: Complex Analysis and Potential Theory. — Hackensack, New Jersey: World Scientific, 2007. — P. 84–115.
14. *Begehr H.* Iterated polyharmonic Green functions for plane domains// Acta Math. Vietnam. — 2011. — 36. — P. 169–181.
15. *Begehr H., Gaertner E.* A Dirichlet problem for the inhomogeneous polyharmonic equation in the upper half-plane// Georg. Math. J. — 2007. — 14. — P. 33–52.
16. *Begehr H., Gackstater F., Krausz A.* Integral representations in octonionic analysis// (Kajiwara J. et al., eds.) Proc. 10. Int. Conf. Complex Analysis. — Busan, Korea, 2002. — P. 1–7.
17. *Begehr H., Hile G. N.* A hierarchy of integral operators// Rocky Mountain J. Math. — 1997. — 27. — P. 669–706.
18. *Begehr H., Kumar A.* Boundary-value problems for the inhomogeneous polyanalytic equation, I// Analysis. — 2005. — 25. — P. 55–71.
19. *Begehr H., Otto H., Zhang Z. X.* Differential operators, their fundamental solutions, and related integral representations in Clifford analysis// Complex Var. Ell. Equ. — 2006. — 51. — P. 407–427.
20. *Begehr H., Schmiersau D.* The Schwarz problem for polyanalytic functions// J. Anal. Appl. — 2005. — 24. — P. 341–351.

21. *Begehr H., Shupeyeva B.* Polyanalytic boundary-value problems for plane domains with harmonic Green function. — FU Berlin, 2019.
22. *Begehr H., Vaitekhovich T.* Iterated Dirichlet problem for the higher-order Poisson equation// *Le Matematiche*. — 2008. — 63, № 1. — P. 139–154.
23. *Begehr H., Vaitekhovich T.* Modified harmonic Robin function// *Complex Var. Ell. Equ.* — 2013. — 58. — P. 483–496.
24. *Begehr H., Vanegas C. J.* Iterated Neumann problem for the higher-order Poisson equation// *Math. Nachr.* — 2006. — 279. — P. 38–57.
25. *Begehr H., Vu T. N. H., Zhang Z. X.* Polyharmonic Dirichlet problems// *Proc. Steklov Inst. Math.* — 2006. — 255. — P. 13–34.
26. *Burgumbayeva S.* Boundary-value problems for triharmonic functions in the unit disc/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2009.
27. *Chaudhary A.* Complex boundary-value problems in unbounded domains/ Ph.D. thesis. — Univ. of Delhi, 2009.
28. *Di Teodoro A. N., Vanegas C. J.* Dirichlet–Neumann–Schwarz problem for the nonhomogeneous trianalytic equation// *Bol. Asoc. Mat. Venez.* — 2012. — 19, № 2. — P. 113–128.
29. *Du Z.* Boundary-value problems for higher order complex partial differential equations/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2008.
30. *Emek S.* Iterated Robin problem for the higher-order Poisson equation. — FU Berlin, 2019.
31. *Gaertner E.* Basic complex boundary-value problems in the upper half plane/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2006.
32. *Krausz A.* Integral representations with Green functions of higher order in domains and polydomains/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2005.
33. *Kumar A., Prakash R.* Mixed boundary-value problem for inhomogeneous polyanalytic harmonic equation// (*Begehr H. G. W. et al.*, ed.) *Proc. 5th Int. ISAAC Congr. (Catania, Italy, July 25–30, 2005)*. — World Scientific, 2009. — P. 1149–1161.
34. *Mohammed A., Tuffaha A.* On boundary control of the Poisson equation with the third boundary condition// *J. Math. Anal. Appl.* — 2018. — 459, № 1. — P. 217–235.
35. *Otto H. A. M.* Cauchy–Pompeiu integral representations in Clifford analysis/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2006.
36. *Prakash R.* Boundary-value problems in complex analysis/ Ph.D. thesis. — Univ. of Delhi, 2006.
37. *Shupeyeva B.* Some basic boundary-value problems for complex partial differential equations in quarter ring and half hexagon/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2013.
38. *Vaitsiakhovich T.* Boundary-value problems for complex partial differential equations in a ring domain/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2008.
39. *Vu T. N. H.* Integral representations in quaternionic analysis related to the Helmholtz operator/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2005.
40. *Wang Y.* Boundary-value problems for complex partial differential equations in fan-shaped domains/ Ph.D. thesis. — FU Berlin, 2011.

Aksoy Ümit

Atilim University, Ankara, Turkey

E-mail: umit.aksoy@atilim.edu.tr

Begehr Heinrich

Math. Institute, Berlin, Germany

E-mail: begehrh@zedat.fu-berlin.de

Çelebi A. Okay

Yeditepe University, Istanbul, Turkey

E-mail: acelebi@yeditepe.edu.tr

Shupeyeva Bibinur

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan

E-mail: bibinur.shupeyeva@nu.edu.kz



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 70–75
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-70-75

УДК 514.822

ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СФЕРЫ

© 2020 г. М. В. КУРКИНА, В. В. СЛАВСКИЙ

Посвящается академику Ю. Г. Решетняку

Аннотация. При помощи однородных функций в гильбертовом пространстве в работе построен и исследован широкий класс квазиконформных преобразований сферы.

Ключевые слова: однородная функция, конформно-плоская метрика, квазиконформное отображение, преобразование Лежандра, конформно-выпуклая функция.

HOMOGENEOUS FUNCTIONS ON HILBERT SPACES AND QUASICONFORMAL TRANSFORMATIONS OF A SPHERE

© 2020 M. V. KURKINA, V. V. SLAVSKY

ABSTRACT. By using homogeneous functions in a Hilbert space, a wide class of quasiconformal transformations of the sphere is constructed and examined.

Keywords and phrases: homogeneous function, conformally flat metric, quasiconformal mapping, Legendre transform, conformally convex function.

AMS Subject Classification: 53A07

1. Однородные функции и конформно-плоские метрики на сфере. Однородные функции играют важную роль в чистой математике (см. [2]) и её приложениях, например, в экономике при построении производственной функции (см. [1, 3]). В [9] было замечено следующее свойство однородных функций.

Лемма 1. Пусть $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная однородная степени 1 положительная функция на евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n+1} , т.е. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при $\lambda > 0$, класса $C^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$. Отображение $H_f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, определяемое формулой

$$H_f : x \in \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow x - 2f(x) \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (1)$$

сохраняет норму в \mathbb{R}^{n+1} : $\|H_f(x)\| = \|x\|$. Здесь ∇f — градиент функции f в \mathbb{R}^{n+1} .

Доказательство. В силу однородности функции f выполняется равенство Эйлера $f(x) = (\nabla f, x)$. Скалярный квадрат вектора $y = H_f(x)$ равен

$$(y, y) = (x, x) - 4f(x) \frac{(\nabla f, x)}{|\nabla f|^2} + 4f^2(x) \frac{(\nabla f, \nabla f)}{|\nabla f|^4} = (x, x). \quad \square$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 18-47-860016, 18-01-00620) и Научного Фонда Югорского государственного университета (проект № 13-01-20/10).

С однородной функцией f на \mathbb{R}^{n+1} степени 1 естественно связана конформно-плоская метрика на единичной сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}, \quad x \in S^n, \quad (2)$$

и полярная к ней метрика (см. [9])

$$ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}, \quad y \in S^n, \quad (3)$$

определяемая явной формулой

$$f^*(y) = \max_{x \in S^n} \frac{\|x - y\|^2}{2f(x)}, \quad (4)$$

где $\|x - y\|^2$ — квадрат хордового расстояния между точками $x, y \in S^n$. Формула (4) напоминает классическое определение преобразования Лежандра выпуклой функции $h(x)$ в евклидовом пространстве:

$$h^*(y) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} [(x, y) - h(x)],$$

если вычитание заменить на деление. Поэтому имеет смысл формулу (4) называть преобразованием Лежандра конформно-плоской метрики (см. [6–8]).

Кроме явных формул (4), функции $f(x)$ и $f^*(y)$ могут выражаться друг через друга посредством формул параметрического вида:

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \frac{2f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} - 2f(x) \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|^2} = H_f(x), \\ f(x) &= \frac{2f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|^2}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} - 2f^*(y) \frac{\nabla f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|^2} = H_{f^*}(y). \end{aligned}$$

Определение 1. Оператор H_f назовём *конформным градиентом* функции f (см. [9]). Отображение H_f инволютивно, т.е. $H_f^{-1} = H_f$.

Пример 1. Пусть $f(x) = a|x| + (b, x)$, где $a > 0$ — число, $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ — вектор. Тогда

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= a \frac{x}{|x|} + b, \quad |\nabla f|^2(x) = a^2 + 2 \frac{a(x, b)}{|x|} + (b, b), \\ H_f(x) &= \frac{x((b, b) - a^2) - 2(a|x| + (b, x))b}{a^2 + 2a \frac{(x, b)}{|x|} + (b, b)}. \end{aligned}$$

Замечание 1. Формулу (1) можно использовать в более общей ситуации

$$H_V(Z) = Z - 2(Z, V) \frac{V}{|V|^2} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (5)$$

где V — произвольный ненулевой (не фиксированный) вектор; здесь также для всех $Z \in \mathbb{R}^{n+1}$ выполняется равенство $\|H_V(Z)\| \equiv \|Z\|$. Преобразование $H_V(Z)$ есть просто симметрия Z относительно гиперплоскости, перпендикулярной вектору V ; если использовать терминологию из [10], то H_V — «зеркало» в однородном пространстве S^n .

Замечание 2. Формулы (1)–(4) верны также в случае произвольной функции $f(x)$, $x \in \overline{\mathbb{R}^n}$, без требования её однородности.

2. Коэффициент квазиконформности отображение H_f .

Определение 2. Пусть $f : S^n \rightarrow S^n$ — диффеоморфизм единичной сферы, $x \in S^n$, $y = f(x)$, $df_x : T_x \rightarrow T_y$ — дифференциал f в точке x . *Дилатацией* f в точке $x \in S^n$ называется число

$$q(x, f) = \frac{\max_{|\xi|=1} \|df_x(\xi)\|}{\min_{|\xi|=1} \|df_x(\xi)\|} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, \quad (6)$$

где λ_{\max} , λ_{\min} — максимальное и минимальное собственные значения линейного оператора $\sqrt{df_x^* \circ df_x}$. Коэффициентом квазиконформности f называется число $q(f) = \max_x q(x, f)$.

Лемма 2. Пусть $ds^2 = dx^2/f^2(x)$ — конформно-плоская метрика, определенная на сфере S^n , $x \in S^n$, $y = H_f(x)$, $dH_{f_x} : T_x \rightarrow T_y$ — дифференциал H_f в точке x . Тогда на единичных касательных векторах ξ выполняется равенство

$$|dH_f(\xi)| = \frac{2|K_{1/2}(f, x, \xi)|}{|\nabla f|^2}, \quad (7)$$

где

$$K_{1/2}(f, x, \xi) = f \frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2} |\nabla f|^2$$

— одномерная секционная кривизна конформно-плоской метрики (см. [7,8]). Здесь $d^2 f/d\xi^2$ — вторая производная функции в точке $x \in \mathbb{R}^n$ вдоль единичного вектора ξ , ∇f — градиент функции f в \mathbb{R}^n . Формула верна как в плоском случае, так и для единичной сферы, в этом случае функция $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ продолжается по однородности на \mathbb{R}^{n+1} , $x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ξ — единичный вектор, касательный к сфере в точке x , ∇f — градиент функции в \mathbb{R}^{n+1} .

Доказательство. Дифференцируя равенство

$$H_f(x) = x - 2f(x) \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}$$

вдоль касательного вектора $\xi \in T_x$, получим

$$dH_f(\xi) = \xi - 2(\nabla f, \xi) \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2} - 2f \left[\frac{d(\nabla f)(\xi)}{|\nabla f|^2} - \frac{2\nabla f(\nabla f, d(\nabla f)(\xi))}{|\nabla f|^4} \right].$$

Введем следующий линейный оператор $P : T_x \rightarrow T_x$ на касательном пространстве T_x :

$$P(v) = v - 2 \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \left(v, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right).$$

Оператор P есть симметрия относительно подпространства, перпендикулярного вектору ∇f . Тогда

$$\begin{aligned} dH_f(\xi) &= P(\xi) - \frac{2f}{|\nabla f|^2} P(d(\nabla f)(\xi)) = P \left(\xi - \frac{2fd(\nabla f)(\xi)}{|\nabla f|^2} \right) = \\ &= -\frac{2}{|\nabla f|^2} P \left[fd(\nabla f)(\xi) - \frac{1}{2} |\nabla f|^2 \xi \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$K_{1/2}(f, x, \xi) = \left(\xi, fd(\nabla f)(\xi) - \frac{1}{2} |\nabla f|^2 \xi \right).$$

Так как P — изометричный оператор на единичных касательных векторах ξ , то выполняется равенство

$$|dH_f(\xi)| = \frac{2|K_{1/2}(f, x, \xi)|}{|\nabla f|^2},$$

что и требовалось. \square

Из формулы (7) непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Если конформно-плоская метрика $ds^2 = dx^2/f^2(x)$ имеет положительную одномерную кривизну, то дилатация H_f в точке $x \in S^n$ равна

$$q(x, H_f) = \frac{\max_i \{k_i(x)\}}{\min_j \{k_j(x)\}}, \quad (8)$$

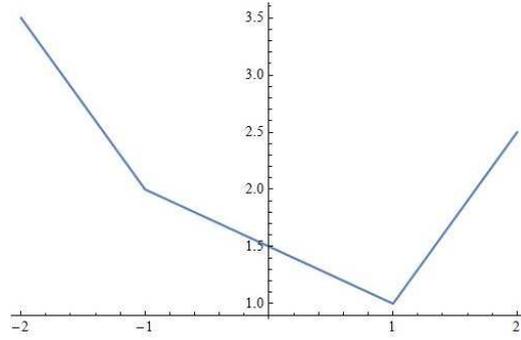


Рис. 1. График функции $\delta(x)$

где $\{k_1(x), \dots, k_n(x)\}$ — главные значения одномерной секционной кривизны $K_{1/2}(f, x, \xi)$. Коэффициент квазиконформности отображения H_f равен

$$q(H_f) = \max_{x \in S^n} \frac{\max_i \{k_i(x)\}}{\min_j \{k_j(x)\}}.$$

Замечание 3. Неотрицательность одномерной секционной кривизны конформно-плоской метрики эквивалентна выполнению трёхточечному неравенству — условию конформной выпуклости функции $g(x) = \sqrt{f(x)}$ на сфере (см. [7, 8]):

$$g(x) \leq g(x_1) \frac{|x_2 - x|}{|x_2 - x_1|} + g(x_2) \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|};$$

это позволяет конструктивно строить квазиконформные отображения сферы.

Пример 2. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $a, b > 0$. Функция

$$\delta(x) = \frac{a|x_2 - x|}{|x_2 - x_1|} + \frac{b|x_1 - x|}{|x_2 - x_1|}$$

является конформно-выпуклой (это следует из неравенства Птолемея). Функцию такого вида назовем диполем с вершинами в точках x_1, x_2 . На рис. 1 показан график функции $\delta(x)$ для размерности 1.

Одномерная секционная кривизна метрики $ds^2 = dx^2/\delta(x)^4$ диполя равна

$$K_{1/2}(x, \xi) = \frac{2\delta^2(x)ab}{|x_2 - x_1|^2 |x_2 - x| |x_1 - x|} \left[|x_2 - x_1|^2 - \left(\frac{x_1 - x}{|x_1 - x|} |x_2 - x| - \frac{x_2 - x}{|x_2 - x|} |x_1 - x|, \xi \right)^2 \right].$$

Так как

$$\left| \frac{x_1 - x}{|x_1 - x|} |x_2 - x| - \frac{x_2 - x}{|x_2 - x|} |x_1 - x| \right|^2 = |x_2 - x_1|^2,$$

то согласно неравенству Коши—Буняковского получим

$$\left| \left(\frac{x_1 - x}{|x_1 - x|} |x_2 - x| - \frac{x_2 - x}{|x_2 - x|} |x_1 - x|, \xi \right) \right| \leq |x_2 - x_1| |\xi|.$$

Следовательно, для одномерной кривизны диполя получим оценки

$$0 \leq K_{1/2}(x, \xi) \leq \frac{2\sqrt{ab}}{|x_2 - x_1|^2} \left(\sqrt{\frac{a|x_2 - x|}{|x_1 - x|}} + \sqrt{\frac{b|x_1 - x|}{|x_2 - x|}} \right)^2.$$

Одномерная секционная кривизна обращается в нуль в направлении

$$\xi \uparrow \frac{x_1 - x}{|x_1 - x|} |x_2 - x| - \frac{x_2 - x}{|x_2 - x|} |x_1 - x|$$

и принимает максимальное значение в перпендикулярном направлении.

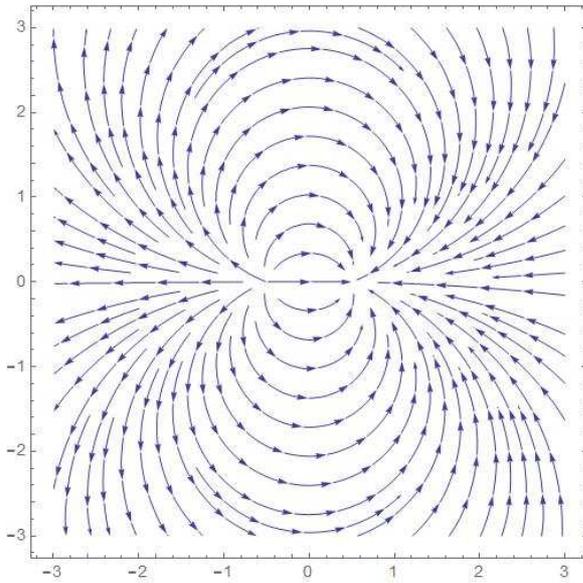


Рис. 2. Поле направлений с нулевой кривизной метрики $ds^2 = dx^2/\delta^4(x)$

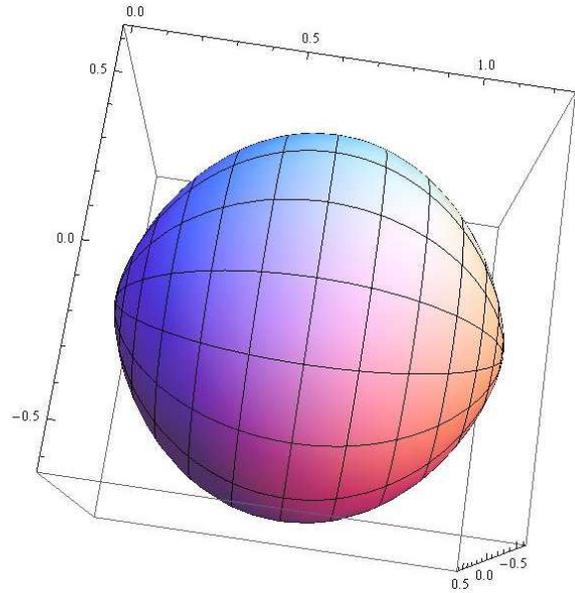


Рис. 3. Поверхность в \mathbb{R}^3 , отвечающая метрике $ds^2 = dx^2/\delta^4(x)$

Следствие 1. В силу теоремы 1 коэффициент квазиконформности отображения $y = H_\delta(x)$ обращается в бесконечность в точках, где одномерная секционная кривизна имеет направления с нулевым значением, поэтому для метрики диполя это верно во всех точках, т.е. точки конформности отсутствуют. На рис. 2 показано поле направлений с нулевой одномерной кривизной метрики $ds^2 = dx^2/\delta^4(x)$.

Следствие 2. Для размерности 2 гауссова кривизна дипольной метрики в точке $x \in \overline{\mathbb{R}^2}$ равна сумме одномерных кривизн в двух перпендикулярных направлениях и равна

$$G = \frac{2\sqrt{ab}}{|x_2 - x_1|^2} \left(\sqrt{\frac{a|x_2 - x|}{|x_1 - x|}} + \sqrt{\frac{b|x_1 - x|}{|x_2 - x|}} \right)^2.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$G \geq \frac{2\sqrt{ab}}{|x_2 - x_1|^2} 4\sqrt{ab} = \frac{8ab}{|x_2 - x_1|^2},$$

и двумерная метрика $ds^2 = dx^2/\delta^4(x)$ имеет положительную гауссову кривизну.

Замечание 4. Для размерности 2 из работ Ю. Г. Решетняка (см. [4]) следует интегральное представление метрики положительной гауссовой кривизны в виде логарифмического потенциала

$$f(x) = \exp \left[\int \log |x - y| d\mu_y \right].$$

Нетрудно проверить, что потенциал Рисса

$$f(x) = \int |x - y| d\lambda_y$$

определяет конформно-плоскую метрику неотрицательной одномерной кривизны (конформно-выпуклую функцию). Возникает естественная задача доказать это представление для произвольной конформно-выпуклой функции.

Теорема А. Д. Александрова о реализации метрики положительной кривизны выпуклой поверхностью в соединении с теоремой А. В. Погорелова о регулярности выпуклой поверхности

с регулярной метрикой дали полное решение проблемы Вейля о реализации в трехмерном евклидовом пространстве регулярной метрики положительной кривизны. Можно непосредственно проверить, что метрика $ds^2 = dx^2/\delta^4(x)$ принадлежит классу C^2 , за исключением двух точек x_1, x_2 , в которых она непрерывна, и ей соответствует поверхность вращения циклоиды (рис. 3), с двумя особыми точками, в которых поверхность принадлежит классу $C^{1+0.5}$, имеет касательную плоскость, а гауссова кривизна стремится к $+\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольных Е. В., Кутышкин А. В., Никоноров Ю. Г.* Построение δ -однородной производственной VES-функции// Сиб. ж. индустр. мат. — 2007. — 10, № 2 (30). — С. 31–44.
2. *Гельфанд И. М., Шапиро З. Я.* Однородные функции и их приложения// Усп. мат. наук. — 1955. — 10, № 3. — С. 3–70.
3. *Кутышкин А. В., Сокол Г. А.* О применении производственных функций вида VES-функция для моделирования функционирования экономических систем// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Компьютерные технологии. Управление. Радиоэлектроника. — 2007. — 17, № 1. — С. 49–60.
4. *Решетняк Ю. Г.* Двумерные многообразия ограниченной кривизны// Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направл. — 1989. — 70. — С. 7–189.
5. *Славский В. В.* Оценка коэффициента квазиконформности области через кривизну квазигиперболической метрики// Сиб. мат. ж. — 1999. — 40, № 4. — С. 947–965.
6. *Kurkina M. V.* The generalized polar transform conformally-flat metrics of positive one-dimensional curvature// Proc. Int. Conf. «Geometric Analysis» (September 22–28, 2019, Novosibirsk). — Novosibirsk: Novosibirsk State Univ., 2019. — С. 89–91.
7. *Kurkina M. V., Rodionov E. D., Slavsky V. V.* Conformally convex functions and conformally flat metrics of nonnegative curvature// Dokl. Math. — 2015. — 91, № 3. — С. 287–289.
8. *Kurkina M. V., Rodionov E. D., Slavsky V. V.* Legendre transformation of conformal convex functions// Proc. Int. Conf. «Geometric Analysis» (September 22–28, 2019, Novosibirsk). — Novosibirsk: Novosibirsk State Univ., 2019. — С. 118–120.
9. *Rodionov E. D., Slavsky V. V.* Polar transform of conformally flat metrics// Sib. Adv. Math. — 2018. — 28, № 2. — С. 101–114.
10. *Sabinin L. V.* Mirror Geometry of Lie Algebras, Lie Groups, and Homogeneous Spaces. — Springer, 2004.

Куркина Мария Викторовна
Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск
E-mail: mavi@inbox.ru

Славский Виктор Владимирович
Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск
E-mail: slavsky2004@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 76–83
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-76-83

УДК 517.946

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА С ВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ В СТАРШЕЙ ЧАСТИ

© 2020 г. А. И. КОЖАНОВ, Т. П. ПЛЕХАНОВА

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости локальных и нелокальных краевых задач для уравнений составного (соболевского) типа $D_t^{2p+1}(D_t^2 - \Delta u) + Bu = f(x, t)$, где $D_t^k = \partial^k / \partial t^k$, Δ — оператор Лапласа, действующий по пространственным переменным, B — дифференциальный оператор второго порядка, также действующий по пространственным переменным, p — целое неотрицательное число. Для этих уравнений доказываются существование и единственность регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений начально-краевой задачи и краевой задачи, нелокальной по временной переменной. Описываются также некоторые обобщения и усиления полученных результатов.

Ключевые слова: уравнение составного типа, волновой оператор, начально-краевая задача, нелокальная краевая задача, регулярное решение, существование, единственность.

BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR ONE CLASS OF COMPOSITE EQUATIONS WITH THE WAVE OPERATOR IN THE SENIOR PART

© 2020 А. И. KOZHANOV, Т. П. PLEKHANOVA

ABSTRACT. The work is devoted to the solvability of local and nonlocal boundary-value problems for composite (Sobolev-type) equations $D_t^{2p+1}(D_t^2 - \Delta u) + Bu = f(x, t)$, where $D_t^k = \partial^k / \partial t^k$, Δ is the Laplace operator acting on spatial variables, B is a second-order differential operator that also acts on spatial variables, and p is a nonnegative integer. For these equations, the existence and uniqueness of regular solutions (possessing all generalized derivatives in the Sobolev sense that are involved in the equation) to initial-boundary-value problems and the boundary-value problems nonlocal in the time variable. Some generalizations and refinements of the results obtained are also described.

Keywords and phrases: composite equation, wave operator, initial-boundary-value problem, nonlocal boundary-value problem, regular solution, existence, uniqueness.

AMS Subject Classification: 35M20

1. Введение. Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}_x^n переменных x_1, \dots, x_n с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T , $S = \Gamma \times (0, T)$ — боковая граница Q , $b^{ij}(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, $f(x, t)$ — заданные функции, определенные при $(x, t) \in \overline{Q}$, p — фиксированное целое неотрицательное число. Через D_t^k будем обозначать частную производную $\partial^k / \partial t^k$ (здесь k — целое неотрицательное число),

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-51-41009).

$D_t^1 = D_t$; через B и M_p — дифференциальные операторы, действие которых на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенствами

$$Bv = \frac{\partial}{\partial x_i} (b^{ij}(x, t)v_{x_j}) + b_0(x, t)v, \quad M_p v = D_t^{2p+1} (D_t^2 v - \Delta v) + Bv;$$

здесь и далее считается, что по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n ; Δ — оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_n .

Настоящая статья посвящена исследованию разрешимости начально-краевой задачи, а также некоторой нелокальной по временной переменной t краевой задачи для дифференциальных уравнений

$$M_p u = f(x, t). \quad (1)$$

Цель работы — доказательство существования и единственности регулярных решений (т.е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение; см. [6]) соответствующих задач.

Уравнения (1) относятся к классу уравнений составного, или соболевского, типа. Подобные уравнения активно изучаются в последнее время (см., например, [5, 10–12, 14]); интерес к этим уравнениям объясняется, с одной стороны, потребностями общей теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, с другой — тем обстоятельством, что уравнения соболевского типа возникают во многих задачах математического моделирования (см. [1, 3, 4, 8, 13]).

2. Начально-краевая задача для дифференциальных уравнений составного типа с волновым оператором в старшей части. Определим вначале необходимое для изучаемой ниже начально-краевой задачи функциональное пространство. Именно, положим

$$V_0 = \left\{ v(x, t) : D_t^k v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)), \quad k = 0, \dots, 2p + 1, \right. \\ \left. D_t^k v(x, t) \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \quad k = 2p + 2, 2p + 3 \right\}.$$

Множество V_0 является линейным пространством. Зададим в этом пространстве норму

$$\|v\|_{V_0} = \left(\sum_{k=0}^{2p+1} \|D_t^k v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega))}^2 + \|D_t^{2p+3} v\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))}^2 \right)^{1/2}.$$

Очевидно, что множество V_0 с данной нормой представляет собой банахово пространство.

Начально-краевая задача: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся решением уравнения (1) в цилиндре Q и удовлетворяющую условиям

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (2)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \dots, 2p + 2, \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$b^{ij}(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad b_0(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad (4)$$

а также одно из условий

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q); \quad (5)$$

$$f(x, t) \in L_2(0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega)). \quad (6)$$

Тогда начально-краевая задача (1)–(3) имеет в пространстве V_0 единственное решение.

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Пусть ε — положительное число. Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся решением уравнения

$$M_p u - \varepsilon D_t^{2p+2} \Delta u = f(x, t) \quad (1_\varepsilon)$$

в цилиндре Q и удовлетворяющую условиям (2) и (3).

Определим пространство V_1 и норму в нем:

$$V_1 = \left\{ v(x, t) : D_t^k v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)), k = 0, \dots, 2p+1, \right. \\ \left. D_t^{2p+2} v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)), D_t^{2p+3} v(x, t) \in L_2(0, T; L_2(\Omega)) \right\},$$

$$\|v\|_{V_1} = \left(\sum_{k=0}^{2p+1} \|D_t^k v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))}^2 + \right. \\ \left. + \|D_t^{2p+2} v\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))}^2 + \|D_t^{2p+3} v\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega))}^2 \right)^{1/2}.$$

Очевидно, что множество V_1 с этой нормой является банаховым пространством.

Покажем, что при фиксированном ε и при $f(x, t) \in L_2(Q)$ краевая задача (1_ε) , (2), (3) разрешима в пространстве V_1 .

Пусть $\lambda \in [0, 1]$. Рассмотрим следующую краевую задачу: *найти функцию $u(x, t)$, являющуюся решением уравнения*

$$D_t^{2p+3} u - \varepsilon D_t^{2p+2} \Delta u - \lambda [D_t^{2p+1} \Delta u - Bu] = f(x, t) \quad (1_{\varepsilon, \lambda})$$

в цилиндре Q и удовлетворяющую условиям (2) и (3).

Заметим прежде всего, что краевая задача $(1_{\varepsilon, 0})$, (2), (3) разрешима в пространстве V_1 . Далее, покажем, что для всевозможных решений $u(x, t)$ краевой задачи $(1_{\varepsilon, \lambda})$, (2), (3) из пространства V_1 имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{V_1} \leq R_0 \|f\|_{L_2(Q)} \quad (7)$$

с постоянной R_0 , определяемой лишь функциями $b^{ij}(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, областью Ω и числами T и ε .

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega \left\{ D_\tau^{2p+3} u - \varepsilon D_\tau^{2p+2} \Delta u - \lambda [D_\tau^{2p+1} \Delta u - Bu] \right\} D_\tau^{2p+2} u \, dx \, d\tau = \int_0^t \int_\Omega D_\tau^{2p+2} u \, f \, dx \, d\tau. \quad (8)$$

Интегрируя по частям с использованием условий (2) и (3), используя неравенства

$$\int_\Omega [D_t^k u(x, t)]^2 \, dx \leq T \int_0^t \int_\Omega [D_\tau^{k+1} u(x, \tau)]^2 \, dx \, d\tau, \quad k = 0, \dots, 2p+1, \quad (9)$$

и применяя лемму Гронуолла, получим, что для решений $u(x, t)$ краевой задачи $(1_{\varepsilon, \lambda})$, (2), (3) выполняется оценка

$$\int_\Omega [D_t^{2p+2} u(x, t)]^2 \, dx + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega [D_\tau^{2p+2} u_{x_i}]^2 \, dx \, d\tau \leq R_1 \|f\|_{L_2(Q)}^2 \quad (10)$$

с постоянной R_1 , определяемой лишь функциями $b^{ij}(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, областью Ω и числами T и ε .

Анализируя аналогичным образом равенство

$$- \int_0^t \int_\Omega \left\{ D_\tau^{2p+3} u - \varepsilon D_\tau^{2p+2} \Delta u - \lambda [D_\tau^{2p+1} \Delta u - Bu] \right\} D_\tau^{2p+2} \Delta u \, dx \, d\tau = - \int_0^t \int_\Omega f D_\tau^{2p+2} \Delta u \, dx \, d\tau, \quad (11)$$

т.е. вновь используя граничные условия (2) и (3), неравенства (9) и применяя лемму Гронуолла, получим, что для решений $u(x, t)$ краевой задачи (2), (3) выполняется вторая априорная оценка

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[D_t^{2p+2} u_{x_i}(x, t) \right]^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} \left[D_{\tau}^{2p+2} \Delta u \right]^2 dx d\tau \leq R_2 \|f\|_{L_2(Q)}^2, \quad (12)$$

постоянная R_2 в которой вновь определяется функциями $b^{ij}(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, областью Ω и числами T и ε .

Из оценок (10) и (12) и вытекает требуемая оценка (7).

Согласно теореме о методе продолжения по параметру (см. [гл. II, § 14]] [7]) разрешимость в пространстве V_1 краевой задачи $(1_{\varepsilon, 0})$, (2), (3), а также наличие априорной оценки (7) и дадут при фиксированном ε разрешимость в том же пространстве краевой задачи $(1_{\varepsilon, \lambda})$, (2), (3) при всех λ из отрезка $[0, 1]$. Это и означает, что краевая задача (1_{ε}) , (2), (3) разрешима в требуемом пространстве.

Покажем теперь, что для решений $u(x, t)$ краевой задачи (1_{ε}) , (2), (3) имеют место равномерные по ε априорные оценки.

Вновь рассмотрим равенство (8), но теперь при $\lambda = 1$. Интегрируя по частям, используя краевые условия, неравенства (9) и применяя лемму Гронуолла, получим, что для решений $u(x, t)$ краевой задачи (1_{ε}) , (2), (3) из пространства V_1 будет иметь место оценка

$$\int_{\Omega} \left[D_t^{2p+2} u(x, t) \right]^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[D_t^{2p+1} u_{x_i}(x, t) \right]^2 dx + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} \left[D_{\tau}^{2p+2} u_{x_i} \right]^2 dx d\tau \leq R_3 \|f\|_{L_2(Q)}^2 \quad (13)$$

с постоянной R_3 , определяемой лишь функциями $b^{ij}(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, областью Ω и числом T .

На следующем шаге рассмотрим равенство (11) при $\lambda = 1$. Преобразуя левую часть этого равенства с помощью интегрирования по частям, а правую часть — интегрированием по частям по переменной t при выполнении условия (5) или по пространственным переменным при выполнении условия (6), нетрудно после использования неравенств (10), второго основного неравенства для эллиптических операторов (см. [2, гл. III, § 8]), а также леммы Гронуолла получить оценку

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[D_t^{2p+2} u_{x_i}(x, t) \right]^2 dx + \int_{\Omega} \left[D_t^{2p+1} \Delta u(x, t) \right]^2 dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} \left[D_{\tau}^{2p+2} \Delta u \right]^2 dx d\tau \leq R_4, \quad (14)$$

в которой число R_4 определяется функциями $b^{ij}(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, областью Ω , числом T , а также нормами функций $f(x, t)$ и $f_t(x, t)$ в $L_2(Q)$ при выполнении условия (5), или же нормами функций $f(x, t)$ и $f_{x_i}(x, t)$, $i = 1, \dots, n$, в $L_2(Q)$ при выполнении условия (6).

Последняя оценка

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left[D_{\tau}^{2p+3} u \right]^2 dx d\tau \leq R_5 \quad (15)$$

с постоянной R_5 , не зависящей от ε , очевидным образом вытекает из оценки (14).

Полученных оценок (13)–(15) уже вполне достаточно для организации предельного перехода. Выбирая такую числовую последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$, что $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, и далее выбирая из последовательности $\{u^{\varepsilon_m}(x, t)\}_{m=1}^{\infty}$ решений краевой задачи (1_{ε_m}) , (2), (3) слабо сходящуюся подпоследовательность (с помощью свойства рефлексивности гильбертова пространства), нетрудно получить, что предельная функция $u(x, t)$ принадлежит пространству V_0 и представляет собой искомое решение начально-краевой задачи (1)–(3).

Единственность в пространстве V_0 решений начально-краевой задачи (1)–(3) очевидным образом вытекает из анализа равенства

$$\int_0^t \int_{\Omega} M_p u D_{\tau}^{2p+2} u \, dx \, d\tau = 0.$$

Теорема доказана. \square

3. Нелокальная краевая задача для дифференциальных уравнений составного типа с волновым оператором в старшей части. В настоящем разделе будет изучена разрешимость нелокальной по временной переменной задачи для некоторых модельных уравнений (1) в случае $p = 1$. О более общих уравнениях будет сказано в следующем разделе.

Пусть α_k , $k = 0, 1, 2$, — заданные действительные числа.

Нелокальная краевая задача: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся решением уравнения $M_1 u = f(x, t)$ в цилиндре Q и удовлетворяющую условию (2), а также условиям

$$D_t^k u(x, t)|_{t=0} = \alpha_k D_t^k u(x, t)|_{t=T}, \quad k = 0, 1, 2, \quad x \in \Omega. \quad (16)$$

В случае $\alpha_k = 0$ задача (1), (2), (16) будет совпадать с начально-краевой задачей (1)–(3), вместе с тем даже в модельном случае при $\alpha_k \neq 0$ условия ее разрешимости будут отличаться от условий теоремы 1.

Пусть $v(x)$ есть функция из пространства $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} v^2(x) \, dx \leq d_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2(x) \, dx, \quad (17)$$

постоянная d_0 в которых определяется лишь областью Ω (считается, что число d_0 здесь выбрано минимальным среди возможных) — см. [[7], гл. II].

Далее, пусть $w(t)$ есть функция из пространства $W_2^1([0, T])$ такая, что для нее выполняется условие $w(0) = \alpha_0 w(T)$. Тогда выполняется неравенство

$$w^2(T) \leq \frac{T}{(1 - \alpha_0)^2} \int_0^T w'^2(t) \, dt. \quad (18)$$

Неравенства нам понадобятся ниже.

Пусть γ_1 , γ_2 , \bar{b}_0 и b_1 есть фиксированные действительные числа (роль этих чисел будет определена ниже) и пусть $F_1(\gamma_1, \gamma_2, b_1, \xi)$ и $F_2(x, \gamma_1, \gamma_2, \bar{b}_0, b_1, \xi)$ есть квадратичные по ξ при $\xi \in \mathbb{R}^2$ формы

$$\begin{aligned} F_1(\gamma_1, \gamma_2, b_1, \xi) &= \frac{\gamma_1(1 - \alpha_1^2)}{2} \xi_1^2 + (\alpha_0 \alpha_1 - 1) b_1 \xi_1 \xi_2 + \frac{\gamma_2 b_1 (1 - \alpha_0)^2}{T} \xi_2^2, \\ F_2(x, \gamma_1, \gamma_2, \bar{b}_0, b_1, \xi) &= \frac{(1 - \gamma_1)(1 - \alpha_1^2)}{2d_0} \xi_1^2 + \\ &+ [b_0(x, T) - \alpha_0 \alpha_1 b_0(x, 0)] \xi_1 \xi_2 + \left[\frac{\bar{b}_0(1 - \alpha_0)^2}{T} + \frac{(1 - \gamma_2) b_1 (1 - \alpha_0)^2}{d_0 T} \right] \xi_2^2. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$B = b_1 \Delta + b_0(x, t); \quad (19)$$

$$b_1 > 0, \quad b_0(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad b_0(x, t) \leq -\bar{b}_0 < 0, \quad b_{0tt}(x, t) \geq 0 \text{ при } (x, t) \in \bar{Q},$$

$$\alpha_0^2 b_{0t}(x, 0) - b_{0t}(x, T) \text{ при } x \in \bar{\Omega}; \quad (20)$$

$$\alpha_0 \neq 1, \quad |\alpha_1| < 1, \quad |\alpha_2| < 1; \quad (21)$$

существуют числа γ_1 и γ_2 такие, что $\gamma_1 \in (0, 1)$, $\gamma_2 \in (0, 1]$, квадратичная форма $F_1(\gamma_1, \gamma_2, b_1, \xi)$ положительно определена, для квадратичной формы $F_2(x, \gamma_1, \gamma_2, \bar{b}_0, b_1, \xi)$ выполняется при $x \in \bar{\Omega}$ неравенство

$$F_2(x, \gamma_1, \gamma_2, \bar{b}_0, b_1, \xi) \geq 0. \quad (22)$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$, для которой выполняется одно из условий (5) или (6), нелокальная задача (1), (2), (16) имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_0 , и причем ровно одно.

Доказательство. Вновь, как и при доказательстве теоремы 1, воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру. Не повторяя все рассуждения (о том, как вводится регуляризующий оператор, как используется метод продолжения по параметру) покажем лишь, что при выполнении условий теоремы для всевозможных решений нелокальной задачи (1), (2), (16) имеет место априорная оценка в пространстве V_0 .

Рассмотрим равенство

$$\int_Q M_1 u u_{tt} dx dt = \int_Q f u_{tt} dx dt.$$

После интегрирования по частям это равенство преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \alpha_2^2}{2} \int_{\Omega} u_{tt}^2(x, T) dx + \frac{1 - \alpha_1^2}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, T) dx + b_1 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t}^2 dx dt + \\ & + b_1(\alpha_0 \alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}(x, T) u_{x_i t}(x, T) dx - \int_Q b u_t^2 dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_Q b_{0tt} u^2 dx dt + \int_{\Omega} [b_0(x, T) - \alpha_0 \alpha_1 b_0(x, 0)] u(x, T) u_t(x, T) dx + \\ & + \int_{\Omega} [\alpha_0^2 b_{0t}(x, 0) - b_{0t}(x, T)] u^2(x, T) dx = \int_Q f u_{tt} dx dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Используя условие (20), а также неравенства (17) и (18), нетрудно от этого равенства перейти к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \alpha_2^2}{2} \int_{\Omega} u_{tt}^2(x, T) dx + \frac{\gamma_1(1 - \alpha_1^2)}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, T) dx + b_1(\alpha_0 \alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}(x, T) u_{x_i t}(x, T) dx + \\ & + \frac{\gamma_2 b_1(1 - \alpha_0^2)}{T} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, T) dx + \frac{(1 - \gamma_1)(1 - \alpha_1^2)}{2d_0} \int_{\Omega} u_t^2(x, T) dx + \\ & + \int_{\Omega} [b_0(x, T) - \alpha_0 \alpha_1 b_0(x, 0)] u(x, T) u_t(x, T) dx + \left[\frac{\bar{b}_0(1 - \alpha_0)^2}{T} + \frac{\gamma_2 b_1(1 - \alpha_0)^2}{d_0 T} \right] \int_{\Omega} u^2(x, T) dx \leq \\ & \leq \left| \int_Q f u_{tt} dx dt \right|. \end{aligned} \quad (24)$$

Условия (21) и (22) означают, что следствием (23) является неравенство

$$\int_{\Omega} u_{tt}^2(x, T) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, T) dx \leq K_1 \left| \int_Q f u_{tt} dx dt \right|, \quad (25)$$

в котором число K_1 положительно и определяется лишь числами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, b_1, \bar{b}_0, T$, областью Ω , а также функцией $b_0(x, t)$.

Рассмотрим равенство

$$\int_Q (T-t) M_1 u u_{tt} dx dt = \int_Q (T-t) f u_{tt} dx dt. \quad (26)$$

Повторяя операцию интегрирования по частям, используя далее для оценки правых частей (24) и (25) неравенство Юнга и учитывая, что следствием равенства (23) и неравенства (25) будет оценка

$$\sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_{it}}^2 dx dt \leq K_2 \left| \int_Q f u_{tt} dx dt \right|, \quad (27)$$

в которой число K_1 положительно и определяется лишь числами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, b_1, \bar{b}_0, T$, областью Ω , а также функцией $b_0(x, t)$, получим что для решений $u(x, t)$ нелокальной задачи (1), (2), (16) будет выполняться оценка

$$\int_Q \left[u_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_{it}}^2 \right] dx dt + \int_{\Omega} \left[u_{tt}^2(x, T) + \sum_{i=1}^n u_{x_{it}}^2(x, T) \right] dx \leq K_3 \quad (28)$$

с постоянной K_3 , определяющейся лишь числами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, b_1, \bar{b}_0, T$, областью Ω и функциями $b_0(x, t)$ и $f(x, t)$.

Повторяя теперь все выполненные выше действия для функции $\bar{u}(x, t) = \Delta u_{tt}(x, t)$, но при этом в интегралах с функцией $f(x, t)$ дополнительно интегрируя по частям (с использованием условий (5) или (6)) получим, что для решений краевой задачи (1), (2), (16) будет иметь место оценка

$$\sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_{it}}^2 dx dt + \int_Q (\Delta u_t)^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_{it}}^2(x, T) dx + \int_{\Omega} [\Delta u_t(x, T)]^2 dx \leq K_4, \quad (29)$$

постоянная K_4 в которой вновь определяется лишь числами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, b_1, \bar{b}_0, T$, областью Ω и функциями $b_0(x, t)$ и $f(x, t)$.

Из оценок (28) и (29) и вытекает равномерная ограниченность в пространстве V_0 всевозможных решений нелокальной краевой задачи (1), (2), (16). Как уже говорилось выше, из этой оценки и следует разрешимость искомой задачи в пространстве V_0 .

Единственность решений очевидна.

Теорема доказана. □

4. Заключение. Методы исследования разрешимости начально-краевой задачи (1)–(3) и нелокальной задачи (1), (2), (16) вполне могут быть перенесены и на более общие уравнения. Например, в п. 1 оператор Лапласа и оператор B можно заменить общими эллиптическими операторами второго порядка; в п. 2 разрешимость нелокальной по временной переменной задачи нетрудно изучить и для уравнений (1) порядка $2p+3$ (но, заметим, все выкладки и условия будут существенно более громоздкими).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корпусов М. О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. — М.: Либроком, 2011.
2. Ладженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
3. Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яценко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа. — Новосибирск: Наука, 1983.
4. Маслов В. П., Мосолов П. П. Уравнения одномерного баротропного газа. — М.: Наука, 1990.
5. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007, zbl1179.35007.
6. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.

7. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
8. *Умаров Х. Г.* Полугруппы операторов и точные решения задач анизотропной фильтрации. — М.: Физматлит, 2009.
9. *Худавердиев К., Велиев А.* Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдо-гиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. — Баку: Gasioglu, 2010.
10. *Demidenko G. V., Uspenskii S. V.* Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to Highest Order Derivatives. — New-York: Marsel Dekker Inc., 2003, MR1831690.
11. *Hayashi N, Kaikina E. I., Naumkin P. I., Shismarev I. A.* Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equation. — Berlin: Springer-Verlag, 2006.
12. *Kozhanov A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. — Utrecht: VSP, 1999.
13. *Liu S, Triggiani R.* An Inverse Problem for a Third Order PDE Arising in High-Intensity Ultrasound Global Uniqueness and Stability by one Boundary Measurement// J. of Inverse and Ill-Posed Problems — 2014. — 21, № 6. — P. 825–870.
14. *Pyatkov S. G.* Operator Theory Nonclassical Problems. — Utrecht: VSP, 2003.

Кожанов Александр Иванович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

E-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Плеханова Татьяна Петровна

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ

E-mail: tatuana575@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 84–105
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-84-105

УДК 517.929.4

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОПУЛЯЦИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

© 2020 г. М. А. СКВОРЦОВА

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями, описывающая взаимодействие n видов микроорганизмов. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости нетривиального положения равновесия, соответствующего частичному выживанию популяций. Установлены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, и указаны оценки множества притяжения данного положения равновесия. Результаты получены с использованием модифицированного функционала Ляпунова–Красовского.

Ключевые слова: модель взаимодействия популяций, уравнение с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценка решения, множество притяжения, модифицированный функционал Ляпунова–Красовского.

ESTIMATES OF SOLUTIONS IN THE MODEL OF INTERACTION OF POPULATIONS WITH SEVERAL DELAYS

© 2020 M. A. SKVORTSOVA

ABSTRACT. We consider a system of differential equations with several delays, which describes the interaction of n species of microorganisms. We obtain sufficient conditions for the asymptotic stability of a nontrivial equilibrium state corresponding to the partial survival of populations. We establish estimates of solutions that characterize the rate of stabilization at infinity and indicate estimates of the attraction set of a given equilibrium state. The results are obtained by using the modified Lyapunov–Krasovsky functional.

Keywords and phrases: model of interaction of populations, equation with retarded argument, asymptotic stability, estimate of solution, attraction set, modified Lyapunov–Krasovsky functional.

AMS Subject Classification: 34K20, 34K60, 92D25

1. Предварительные сведения. В настоящей работе мы продолжаем исследование системы дифференциальных уравнений с запаздываниями следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) = (S^0 - S(t))D - \sum_{i=1}^n p_i(S(t))N_i(t), \\ \frac{d}{dt}N_i(t) = -D_i N_i(t) + \alpha_i p_i(S(t - \tau_i))N_i(t - \tau_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-31-00408, № 18-29-10086).

Система описывает взаимодействие n видов микроорганизмов (см. [14]), при этом $N_i(t)$ — численность популяции i -го вида, $S(t)$ — концентрация питательного вещества. Коэффициенты системы S^0 , D , D_i , α_i предполагаются положительными и постоянными, параметры запаздывания $\tau_i \geq 0$ также предполагаются постоянными. Предполагается, что $p_i(S)$ — локально липшицевы, монотонно возрастающие функции и $p_i(0) = 0$. Более подробное описание модели содержится в [14].

Для системы (1.1) зададим начальные условия:

$$\begin{cases} S(t) = \varphi_0(t), & t \in [-\tau_{\max}, 0], & S(+0) = \varphi_0(0), & \tau_{\max} = \max\{\tau_1, \dots, \tau_n\}, \\ N_i(t) = \varphi_i(t), & t \in [-\tau_i, 0], & N_i(+0) = \varphi_i(0), & i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ — непрерывные неотрицательные функции. Хорошо известно, что решение начальной задачи (1.1)–(1.2) существует и единственно. Более того, как было отмечено в [14], при неотрицательных начальных функциях решение задачи (1.1)–(1.2) определено на всей правой полуоси $\{t > 0\}$, имеет неотрицательные компоненты, при этом каждая компонента решения является ограниченной функцией.

Система (1.1) имеет тривиальное положение равновесия

$$S(t) = S^0, \quad N_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

В [14] было показано, что при выполнении неравенств $\alpha_i p_i(S^0) < D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, все решения уравнения (1.1) с неотрицательными начальными условиями стабилизируются на бесконечности к данному положению равновесия. В [10] были получены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности к положению равновесия (1.3). При получении оценок существенно использовались модифицированные функционалы Ляпунова—Красовского (см. [2, 12, 13]); при этом величины, отвечающие за скорость стабилизации, были указаны конструктивно.

Следуя [14], введем следующие обозначения. Поскольку функции $p_i(S)$ являются монотонно возрастающими и $p_i(0) = 0$, то существуют такие $\lambda_i \in (0, +\infty]$, что $p_i(S) < D_i/\alpha_i$ при $S < \lambda_i$ и $p_i(S) > D_i/\alpha_i$ при $S > \lambda_i$. Отсюда, в частности, следует, что если $\lambda_i < +\infty$, то λ_i удовлетворяет условию $p_i(\lambda_i) = D_i/\alpha_i$.

Заметим, что в случае, если существует такое λ_{i_0} , что $\lambda_{i_0} < S^0$, система (1.1) имеет нетривиальное положение равновесия:

$$S(t) = \lambda_{i_0} < S^0, \quad N_{i_0}(t) = \alpha_{i_0}(S^0 - \lambda_{i_0})D/D_{i_0}, \quad N_i(t) = 0, \quad i \neq i_0.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $i_0 = 1$. Следовательно, нетривиальное положение равновесия будет иметь вид

$$S(t) = \lambda_1 < S^0, \quad N_1(t) = \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D, \quad N_i(t) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (1.4)$$

В [14] были получены достаточные условия на параметры системы (1.1), при которых все решения с неотрицательными начальными условиями стабилизируются на бесконечности к данному положению равновесия.

В настоящей работе мы получим достаточные условия асимптотической устойчивости нетривиального положения равновесия (1.4), установим оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, и укажем оценки множества притяжения данного положения равновесия. При получении оценок мы будем использовать модифицированные функционалы Ляпунова—Красовского (см. [2]); при этом все величины, входящие в оценки, будут указаны конструктивно.

2. Устойчивость нетривиального положения равновесия. В данном разделе будем предполагать, что выполнено условие $\lambda_1 < S^0$. В этом случае у системы (1.1) существует нетривиальное положение равновесия (1.4). Дополнительно предположим, что функция $p_1(S)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $S = \lambda_1$. Ниже мы получим условия асимптотической устойчивости нетривиального положения равновесия.

Вначале сведем задачу об устойчивости положения равновесия (1.4) системы (1.1) к задаче об устойчивости нулевого решения. Для этого в системе (1.1) сделаем замену переменных

$$S(t) = \lambda_1 + \tilde{S}(t), \quad N_1(t) = \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D + \tilde{N}_1(t), \quad N_i(t) = \tilde{N}_i(t), \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (2.1)$$

Тогда, учитывая, что $p_1(\lambda_1) = D_1/\alpha_1$, будем иметь

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\tilde{S}(t) = -D\tilde{S}(t) - \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1)) \\ \quad - p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t))\tilde{N}_1(t) - \sum_{i=2}^n p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t))\tilde{N}_i(t), \\ \frac{d}{dt}\tilde{N}_1(t) = -D_1\tilde{N}_1(t) + \frac{\alpha_1^2}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1)) \\ \quad + \alpha_1 p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1))\tilde{N}_1(t - \tau_1), \\ \frac{d}{dt}\tilde{N}_i(t) = -D_i\tilde{N}_i(t) + \alpha_i p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_i))\tilde{N}_i(t - \tau_i), \quad i = 2, 3, \dots, n. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Далее, поскольку функция $p_1(S)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $S = \lambda_1$, то систему (2.2) можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\tilde{S}(t) = -\left(D + \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)Dp'_1(\lambda_1)\right)\tilde{S}(t) - \frac{D_1}{\alpha_1}\tilde{N}_1(t) - \sum_{i=2}^n p_i(\lambda_1)\tilde{N}_i(t) \\ \quad - \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) - p'_1(\lambda_1)\tilde{S}(t)) \\ \quad - (p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1))\tilde{N}_1(t) - \sum_{i=2}^n (p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_i(\lambda_1))\tilde{N}_i(t), \\ \frac{d}{dt}\tilde{N}_1(t) = -D_1\tilde{N}_1(t) + \frac{\alpha_1^2}{D_1}(S^0 - \lambda_1)Dp'_1(\lambda_1)\tilde{S}(t - \tau_1) + D_1\tilde{N}_1(t - \tau_1) \\ \quad + \frac{\alpha_1^2}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1) - p'_1(\lambda_1)\tilde{S}(t - \tau_1)) \\ \quad + \alpha_1(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1))\tilde{N}_1(t - \tau_1), \\ \frac{d}{dt}\tilde{N}_i(t) = -D_i\tilde{N}_i(t) + \alpha_i p_i(\lambda_1)\tilde{N}_i(t - \tau_i) \\ \quad + \alpha_i(p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_i)) - p_i(\lambda_1))\tilde{N}_i(t - \tau_i), \quad i = 2, 3, \dots, n. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Введем следующие обозначения:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \tilde{S}(t) \\ \tilde{N}_1(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} \tilde{S}(t) \\ \tilde{N}_1(t) \\ \tilde{N}_2(t) \\ \vdots \\ \tilde{N}_n(t) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(D + \gamma_1) & -D_1/\alpha_1 \\ 0 & -D_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_1 \gamma_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)Dp'_1(\lambda_1), \quad (2.5)$$

$$F_1(x(t)) = -\begin{pmatrix} f_a(x(t)) + f_b(x(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$G_1(x(t - \tau_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1(f_a(x(t - \tau_1)) + f_b(x(t - \tau_1))) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$f_a(x) = \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}) - p_1(\lambda_1) - p'_1(\lambda_1)\tilde{S}), \quad (2.8)$$

$$f_b(x) = (p_1(\lambda_1 + \tilde{S}) - p_1(\lambda_1))\tilde{N}_1, \quad (2.9)$$

$$L(y(t)) = \begin{pmatrix} l(y(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l(y(t)) = -\sum_{i=2}^n p_i(\lambda_1)\tilde{N}_i(t), \quad (2.10)$$

$$U(y(t)) = \begin{pmatrix} u(y(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(y(t)) = -\sum_{i=2}^n (p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_i(\lambda_1))\tilde{N}_i(t). \quad (2.11)$$

Тогда система (2.3) запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A_1x(t) + B_1x(t - \tau_1) + F_1(x(t)) + G_1(x(t - \tau_1)) + L(y(t)) + U(y(t)), \\ \frac{d}{dt}\tilde{N}_i(t) = -D_i\tilde{N}_i(t) + \alpha_i p_i(\lambda_1)\tilde{N}_i(t - \tau_i) \\ \quad + \alpha_i (p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_i)) - p_i(\lambda_1))\tilde{N}_i(t - \tau_i), \quad i = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (2.12)$$

Наконец, перепишем систему (2.12) в наиболее компактном виде:

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mathbf{A}y(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i y(t - \tau_i) + \mathbf{F}(y(t)) + \mathbf{G}(y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n)), \quad (2.13)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(D + \gamma_1) & -D_1/\alpha_1 & -p_2(\lambda_1) & \dots & -p_n(\lambda_1) \\ 0 & -D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -D_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 \gamma_1 & D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 p_2(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n p_n(\lambda_1) \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{F}(y(t)) = \begin{pmatrix} f_a(x(t)) + f_b(x(t)) + u(y(t)) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{G}(y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 (f_a(x(t - \tau_1)) + f_b(x(t - \tau_1))) \\ \alpha_2 (p_2(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_2)) - p_2(\lambda_1))\tilde{N}_2(t - \tau_2) \\ \vdots \\ \alpha_n (p_n(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_n)) - p_n(\lambda_1))\tilde{N}_n(t - \tau_n) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Для линеаризованной системы

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mathbf{A}y(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i y(t - \tau_i)$$

характеристический квазимногочлен будет иметь вид:

$$\det \left(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \sum_{i=1}^n e^{-\lambda \tau_i} \mathbf{B}_i \right) = \det(\lambda I - A_1 - e^{-\lambda \tau_1} B_1) \prod_{i=2}^n \left(\lambda + D_i - \alpha_i p_i(\lambda_1) e^{-\lambda \tau_i} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A_1 - e^{-\lambda \tau_1} B_1) &= \begin{vmatrix} \lambda + D + \gamma_1 & D_1/\alpha_1 \\ -\alpha_1 \gamma_1 e^{-\lambda \tau_1} & \lambda + D_1 - D_1 e^{-\lambda \tau_1} \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda + D + \gamma_1)(\lambda + D_1 - D_1 e^{-\lambda \tau_1}) + \gamma_1 D_1 e^{-\lambda \tau_1} = (\lambda + D + \gamma_1)(\lambda + D_1) - (\lambda + D) D_1 e^{-\lambda \tau_1}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{I} — единичная матрица размера $(n+1) \times (n+1)$, I — единичная матрица размера 2×2 .

Хорошо известно (см., например, [4, гл. 7, § 33]), что если все корни характеристического квазимногочлена лежат в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$, то нулевое решение системы (2.13) асимптотически устойчиво. Если же существует хотя бы один корень квазимногочлена, лежащий в правой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$, то нулевое решение системы (2.13) неустойчиво.

Учитывая, что исследование устойчивости нулевого решения системы (2.13) эквивалентно исследованию устойчивости положения равновесия (1.4) системы (1.1), нетрудно установить следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\lambda_1 < S^0$ и функция $p_1(S)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $S = \lambda_1$.

- (а) Если $p_1'(\lambda_1) > 0$ и $p_i(\lambda_1) < D_i/\alpha_i$, $i = 2, \dots, n$, то положение равновесия (1.4) является асимптотически устойчивым.
- (б) Если существует такой номер $i_0 \in \{2, \dots, n\}$, что $p_{i_0}(\lambda_1) > D_{i_0}/\alpha_{i_0}$, то положение равновесия (1.4) неустойчиво.

Доказательство. (а) Вначале покажем, что все корни квазимногочлена

$$Q_1(\lambda) = (\lambda + D + \gamma_1)(\lambda + D_1) - (\lambda + D) D_1 e^{-\lambda \tau_1}$$

содержатся в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Предположим, что существует корень квазимногочлена $Q_1(\lambda)$ с неотрицательной вещественной частью: $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Тогда

$$\frac{(\lambda + D + \gamma_1)}{(\lambda + D)} = \frac{D_1}{(\lambda + D_1)} e^{-\lambda \tau_1}.$$

Поскольку $p_1'(\lambda_1) > 0$, то в силу обозначения (2.5) имеем $\gamma_1 > 0$. Следовательно,

$$1 < \left| \frac{(\lambda + D + \gamma_1)}{(\lambda + D)} \right| = \left| \frac{D_1}{(\lambda + D_1)} e^{-\lambda \tau_1} \right| \leq 1,$$

противоречие. Теперь покажем, что все корни квазимногочленов

$$Q_i(\lambda) = \lambda + D_i - \alpha_i p_i(\lambda_1) e^{-\lambda \tau_i}, \quad i = 2, \dots, n,$$

также содержатся в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Также будем рассуждать от противного. Предположим, что существует корень $Q_i(\lambda)$ с неотрицательной вещественной частью: $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. В этом случае

$$D_i \leq |\lambda + D_i| = |\alpha_i p_i(\lambda_1) e^{-\lambda \tau_i}| \leq \alpha_i p_i(\lambda_1).$$

Получаем противоречие с условием теоремы. Итак, положение равновесия (1.4) асимптотически устойчиво.

(б) Рассмотрим функцию

$$Q_{i_0}(\lambda) = \lambda + D_{i_0} - \alpha_{i_0} p_{i_0}(\lambda_1) e^{-\lambda \tau_{i_0}}$$

как функцию вещественного аргумента. По условию теоремы $Q_{i_0}(0) = D_{i_0} - \alpha_{i_0} p_{i_0}(\lambda_1) < 0$. С другой стороны, $Q_{i_0}(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Поскольку функция $Q_{i_0}(\lambda)$ является непрерывной, значит, существует такое число $\lambda^* > 0$, что $Q_{i_0}(\lambda^*) = 0$. Итак, положение равновесия (1.4) неустойчиво. Теорема 1 доказана. \square

Следующая наша цель — получение оценок, характеризующих скорость стабилизации решений на бесконечности к положению равновесия (1.4) и нахождение оценок на множество притяжения в случае, когда рассматриваемое положение равновесия является асимптотически устойчивым. При получении оценок мы будем использовать модифицированные функционалы Ляпунова—Красовского. В следующем разделе мы укажем один из методов построения таких функционалов для системы (2.13) в случае $n = 1$.

3. Построение модифицированного функционала Ляпунова—Красовского для случая $n = 1$. В данном разделе будем предполагать, что выполнено условие $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $S = \lambda_1$ и $p_1'(\lambda_1) > 0$. Если $n = 1$, то в силу теоремы 1 эти условия гарантируют асимптотическую устойчивость нетривиального положения равновесия (1.4) системы (1.1).

Как отмечалось выше, исследование устойчивости положения равновесия (1.4) системы (1.1) эквивалентно исследованию устойчивости нулевого решения системы (2.13). В случае $n = 1$ система (2.13) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_1x(t) + B_1x(t - \tau_1) + F_1(x(t)) + G_1(x(t - \tau_1)), \quad (3.1)$$

где $x(t)$, A_1 , B_1 , $F_1(x(t))$, $G_1(x(t - \tau_1))$ определены в (2.4)–(2.9).

Одним из методов исследования устойчивости решений систем с запаздыванием является метод функционалов Ляпунова—Красовского, предложенный Н. Н. Красовским (см. [4]). В частности, для линейных систем вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + By(t - \tau), \quad (3.2)$$

где A и B — постоянные матрицы, Н. Н. Красовский предложил использовать функционал

$$V_0(t, y) = \langle H_0y(t), y(t) \rangle + \int_{t-\tau}^t \langle K_0y(s), y(s) \rangle ds \quad (3.3)$$

с матрицами $H_0 = H_0^* > 0$ и $K_0 = K_0^* > 0$ (см. [4, гл. 7, § 34]). Здесь и далее через H_0^* обозначается эрмитово-сопряженная к H_0 матрица, неравенство $H_0 > 0$ означает, что матрица H_0 является положительно определенной. Отметим, что с помощью функционала (3.3) также можно проводить исследования устойчивости решений и для нелинейных систем с запаздыванием (в частности, для системы вида (3.1)).

Однако, используя функционал (3.3), далеко не всегда удается получить оценки решений, характеризующие скорость убывания на бесконечности. Оценки удается получить с помощью модифицированных функционалов Ляпунова—Красовского (см. [2, 12, 13]). В частности, в [2] был предложен модифицированный функционал Ляпунова—Красовского следующего вида:

$$V(t, y) = \langle Hy(t), y(t) \rangle + \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds, \quad (3.4)$$

где матрицы H и $K(s) \in C^1([0, \tau])$ обладают следующими свойствами:

$$H = H^* > 0, \quad K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau]. \quad (3.5)$$

При этом для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3.2) достаточно потребовать выполнение неравенства

$$C = - \begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB \\ B^*H & -K(\tau) \end{pmatrix} > 0. \quad (3.6)$$

При выполнении условий (3.5), (3.6) в работе [2] были получены оценки решений системы (3.2), характеризующие скорость убывания на бесконечности. Также в [2, 3, 5] для некоторых классов нелинейных систем с запаздыванием были установлены оценки решений и указаны оценки на

области притяжения. Полученные результаты также были обобщены на случай систем с несколькими запаздываниями.

Отметим, что примеры построения модифицированных функционалов Ляпунова—Красовского вида (3.4) были приведены, в частности, в [6–9] при исследовании устойчивости положений равновесия в различных биологических моделях. С помощью построенных функционалов были получены конструктивные оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, и указаны оценки множеств притяжения.

Данный раздел посвящен построению модифицированного функционала Ляпунова—Красовского для системы (3.1). Рассмотрим функционал

$$V(t, x) = \langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \int_{t-\tau_1}^t \langle K_1(t-s)x(s), x(s) \rangle ds,$$

где

$$H_1 = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01} & h_{11} \end{pmatrix} > 0, \quad K_1(s) = e^{-\kappa_1 s} (B_1^* B_1 + M_1), \quad M_1 = M_1^* > 0, \quad \kappa_1 > 0, \quad s \in [0, \tau_1].$$

Подберем матрицы H_1 и $K_1(s)$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$C_1 = - \begin{pmatrix} H_1 A_1 + A_1^* H_1 + K_1(0) & H_1 B_1 \\ B_1^* H_1 & -K_1(\tau_1) \end{pmatrix} > 0. \quad (3.7)$$

Учитывая явный вид матрицы B_1 , нетрудно заметить, что $B_1^* H_1 = B_1^* \tilde{H}_1$, где

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{01} & h_{11} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{pmatrix} -\left(H_1 A_1 + A_1^* H_1 + B_1^* B_1\right) - M_1 & -\tilde{H}_1^* B_1 \\ -B_1^* \tilde{H}_1 & e^{-\kappa_1 \tau_1} (B_1^* B_1 + M_1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\left(H_1 A_1 + A_1^* H_1 + B_1^* B_1 + e^{\kappa_1 \tau_1} \tilde{H}_1^* \tilde{H}_1\right) - M_1 & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_1 \tau_1} M_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{\kappa_1 \tau_1} \tilde{H}_1^* \tilde{H}_1 & -\tilde{H}_1^* B_1 \\ -B_1^* \tilde{H}_1 & e^{-\kappa_1 \tau_1} B_1^* B_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} R_1 - M_1 & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_1 \tau_1} M_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{\kappa_1 \tau_1} \tilde{H}_1^* \tilde{H}_1 & -\tilde{H}_1^* B_1 \\ -B_1^* \tilde{H}_1 & e^{-\kappa_1 \tau_1} B_1^* B_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$R_1 = -\left(H_1 A_1 + A_1^* H_1 + B_1^* B_1 + e^{\kappa_1 \tau_1} \tilde{H}_1^* \tilde{H}_1\right) = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} \\ r_{01} & r_{11} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Из данного представления вытекает неравенство

$$\left\langle C_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \geq \langle (R_1 - M_1)u, u \rangle + e^{-\kappa_1 \tau_1} \langle M_1 v, v \rangle, \quad u, v \in \mathbb{R}^2. \quad (3.9)$$

Тем самым, если мы покажем, что матрица R_1 является положительно определенной, то при условии $\|M_1\| < r_{1,\min}$ матрица C_1 также будет положительно определена. (Здесь $\|M_1\|$ — спектральная норма матрицы M_1 , $r_{1,\min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы R_1 .)

Итак, наша цель — подобрать величины $h_{00} > 0$, $h_{11} > 0$, $h_{01} \in \mathbb{R}$ ($h_{00}h_{11} - h_{01}^2 > 0$) и $\kappa_1 > 0$ так, чтобы матрица R_1 была положительно определенной. Учитывая вид матриц H_1 , \tilde{H}_1 , A_1 и B_1 , получим

$$\begin{cases} r_{00} = 2(D + \gamma_1)h_{00} - \alpha_1^2 \gamma_1^2 - e^{\kappa_1 \tau_1} h_{01}^2, \\ r_{01} = \frac{D_1}{\alpha_1} h_{00} + (D + \gamma_1 + D_1)h_{01} - \alpha_1 \gamma_1 D_1 - e^{\kappa_1 \tau_1} h_{01} h_{11}, \\ r_{11} = \frac{2D_1}{\alpha_1} h_{01} + 2D_1 h_{11} - D_1^2 - e^{\kappa_1 \tau_1} h_{11}^2, \end{cases}$$

при этом определитель матрицы R_1 имеет вид

$$\det R_1 = r_{11} \left(2(D + \gamma_1)h_{00} - \alpha_1^2 \gamma_1^2 - e^{\kappa_1 \tau_1} h_{01}^2 \right) - \left(\frac{D_1}{\alpha_1} h_{00} + (D + \gamma_1 + D_1)h_{01} - \alpha_1 \gamma_1 D_1 - e^{\kappa_1 \tau_1} h_{01} h_{11} \right)^2.$$

Величину h_{00} выберем из условия, чтобы определитель матрицы R_1 принимал наибольшее значение. Тогда

$$h_{00} = \frac{\alpha_1}{D_1} \left(\frac{\alpha_1}{D_1} (D + \gamma_1) r_{11} - (D + \gamma_1 + D_1) h_{01} + \alpha_1 \gamma_1 D_1 + e^{\kappa_1 \tau_1} h_{01} h_{11} \right).$$

В этом случае

$$\det R_1 = r_{11} \left(\alpha_1^2 \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1)^2 - D^2 \right) - e^{\kappa_1 \tau_1} \left(h_{01} - \frac{\alpha_1}{D_1} (D + \gamma_1) (h_{11} - e^{-\kappa_1 \tau_1} D_1) \right)^2 \right).$$

Полагая

$$h_{01} = \frac{\alpha_1}{D_1} (D + \gamma_1) (h_{11} - e^{-\kappa_1 \tau_1} D_1),$$

будем иметь

$$\det R_1 = r_{11} \alpha_1^2 \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1)^2 - D^2 \right),$$

где

$$r_{11} = 2(D + \gamma_1 + D_1)h_{11} - 2e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1) D_1 - D_1^2 - e^{\kappa_1 \tau_1} h_{11}^2.$$

Число h_{11} выберем так, чтобы величина r_{11} принимала наибольшее значение. Положим

$$h_{11} = e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1 + D_1);$$

тогда

$$r_{11} = e^{-\kappa_1 \tau_1} \left((D + \gamma_1)^2 + D_1^2 \right) - D_1^2.$$

Итак, окончательно получим

$$\begin{cases} h_{00} = \frac{\alpha_1^2}{D_1^2} \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1) \left((D + \gamma_1)^2 + D_1^2 \right) - D D_1^2 \right), \\ h_{01} = e^{-\kappa_1 \tau_1} \frac{\alpha_1}{D_1} (D + \gamma_1)^2, \\ h_{11} = e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1 + D_1), \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} r_{00} = \frac{\alpha_1^2}{D_1^2} (D + \gamma_1)^2 \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} \left((D + \gamma_1)^2 + D_1^2 \right) - D_1^2 \right) + \alpha_1^2 \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1)^2 - D^2 \right), \\ r_{01} = \frac{\alpha_1}{D_1} (D + \gamma_1) \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} \left((D + \gamma_1)^2 + D_1^2 \right) - D_1^2 \right), \\ r_{11} = e^{-\kappa_1 \tau_1} \left((D + \gamma_1)^2 + D_1^2 \right) - D_1^2, \end{cases} \quad (3.11)$$

причем

$$\det R_1 = \alpha_1^2 \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} \left((D + \gamma_1)^2 + D_1^2 \right) - D_1^2 \right) \left(e^{-\kappa_1 \tau_1} (D + \gamma_1)^2 - D^2 \right).$$

Согласно критерию Сильвестра для положительной определенности матрицы R_1 необходимо и достаточно выполнения неравенств $r_{11} > 0$ и $\det R_1 > 0$. В нашем случае эти неравенства запишутся в виде

$$e^{\kappa_1 \tau_1} < 1 + \frac{(D + \gamma_1)^2}{D_1^2}, \quad e^{\kappa_1 \tau_1} < \frac{(D + \gamma_1)^2}{D^2}. \quad (3.12)$$

Из формулы (2.5) и условия $p'_1(\lambda_1) > 0$ следует, что $\gamma_1 > 0$, поэтому всегда можно подобрать такое $\kappa_1 > 0$, что неравенства (3.12) будут выполнены.

Отметим, что в случае, когда величина $\kappa_1 > 0$ определяется из неравенств (3.12), матрица H_1 является положительно определенной. Действительно, из (3.8) вытекает, что

$$H_1 A_1 + A_1^* H_1 = -B_1^* B_1 - e^{\kappa_1 \tau_1} \tilde{H}_1^* \tilde{H}_1 - R_1 < 0,$$

т.е. матрица $H_1 = H_1^*$ является решением матричного уравнения Ляпунова

$$H_1 A_1 + A_1^* H_1 = -S_1,$$

где $S_1 = S_1^* > 0$. Поскольку все собственные значения матрицы A_1 содержатся в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$, отсюда следует положительная определенность матрицы H_1 (см., например, [1, гл. 1, § 4]). Итак, модифицированный функционал Ляпунова—Красовского построен.

4. Оценки скорости сходимости к нетривиальному положению равновесия в случае $n = 1$. В данном разделе будем предполагать, что выполнено условие $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $S = \lambda_1$ и $p_1'(\lambda_1) > 0$. При $n = 1$ эти условия гарантируют асимптотическую устойчивость нетривиального положения равновесия (1.4) системы (1.1).

Рассмотрим начальную задачу для системы (3.1):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A_1 x(t) + B_1 x(t - \tau_1) + F_1(x(t)) + G_1(x(t - \tau_1)), \\ x(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau_1, 0], \quad x(+0) = \psi(0), \end{cases} \quad (4.1)$$

где $x(t)$, A_1 , B_1 , $F_1(x(t))$, $G_1(x(t - \tau_1))$ определены в (2.4)–(2.9),

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \psi_0(t) = \varphi_0(t) - \lambda_1, \\ \psi_1(t) = \varphi_1(t) - \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D, \end{cases}$$

$\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ — непрерывные неотрицательные функции, заданные в (1.2).

Наша цель — получение оценок решений начальной задачи (4.1), характеризующих скорость убывания на бесконечности, и нахождение множества притяжения нулевого решения. В силу замены (2.1) из полученных оценок будут вытекать соответствующие результаты для начальной задачи (1.1)–(1.2) при $n = 1$.

Оценки будут получены с использованием модифицированного функционала Ляпунова—Красовского, построенного в предыдущем разделе:

$$V(t, x) = \langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \int_{t-\tau_1}^t \langle K_1(t-s)x(s), x(s) \rangle ds, \quad (4.2)$$

где

$$H_1 = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01} & h_{11} \end{pmatrix} > 0, \quad K_1(s) = e^{-\kappa_1 s}(B_1^* B_1 + M_1), \quad M_1 = M_1^* > 0, \quad \kappa_1 > 0, \quad s \in [0, \tau_1],$$

величины h_{00} , h_{01} , h_{11} определены в (3.10), число κ_1 определено в (3.12), матрица M_1 будет определена ниже.

Введем следующие обозначения. Пусть $c_1 > 0$ — такое число, что выполнено неравенство

$$\langle R_1 u, u \rangle \geq c_1 \langle H_1 u, u \rangle, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad (4.3)$$

где матрица $R_1 > 0$ определена в (3.8), (3.11). Например, можно взять $c_1 = r_{1,\min}/\|H_1\|$, где

$$r_{1,\min} = \frac{1}{2}(r_{00} + r_{11}) - \sqrt{\frac{1}{4}(r_{00} - r_{11})^2 + r_{01}^2}, \quad \|H_1\| = \frac{1}{2}(h_{00} + h_{11}) + \sqrt{\frac{1}{4}(h_{00} - h_{11})^2 + h_{01}^2}.$$

Наибольшее число $c_1 > 0$, при котором выполняется неравенство (4.3), имеет вид

$$c_1 = \frac{1}{(h_{00}h_{11} - h_{01}^2)} \left(\frac{1}{2}(h_{00}r_{11} + h_{11}r_{00} - 2h_{01}r_{01}) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}(h_{00}r_{11} - h_{11}r_{00} - 2h_{01}r_{01}) + h_{11} \frac{r_{01}^2}{r_{11}} \right)^2 + \left(h_{11} \frac{r_{01}}{r_{11}} - h_{01} \right)^2 (r_{00}r_{11} - r_{01}^2)} \right).$$

Предположим, что функция $p_1(S)$ является дважды непрерывно дифференцируемой. При $\theta > 0$ рассмотрим функции

$$\zeta_1(\theta) = \max_{\substack{|s| \leq \theta \\ \lambda_1 + s \geq 0}} |p_1''(\lambda_1 + s)|, \quad \eta_1(\theta) = \max_{\substack{|s| \leq \theta \\ \lambda_1 + s \geq 0}} |p_1'(\lambda_1 + s)|. \quad (4.4)$$

Пусть $\theta > 0$ таково, что выполнено неравенство

$$2e^{\kappa_1 \tau_1 / 2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta < c_1, \quad (4.5)$$

где

$$\nu_1 = \frac{h_{00} \eta_1^2(\theta) + h_{01} a_1 \zeta_1(\theta) \eta_1(\theta) + \frac{1}{4} h_{11} a_1^2 \zeta_1^2(\theta)}{h_{00} h_{11} - h_{01}^2}, \quad a_1 = \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D. \quad (4.6)$$

Положим

$$M_1 = \mu_1 H_1, \quad \mu_1 = e^{\kappa_1 \tau_1 / 2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta. \quad (4.7)$$

Также введем обозначения

$$\delta_1 = \min \left\{ \left(c_1 - 2e^{\kappa_1 \tau_1 / 2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta \right), \kappa_1 \right\} > 0, \quad q_1 = \sqrt{h_{00}} \xi_1, \quad (4.8)$$

$$\xi_1 = \frac{h_{01} \eta_1(\theta) + \frac{1}{2} h_{11} a_1 \zeta_1(\theta) + \sqrt{h_{11} (h_{00} \eta_1^2(\theta) + h_{01} a_1 \zeta_1(\theta) \eta_1(\theta) + \frac{1}{4} h_{11} a_1^2 \zeta_1^2(\theta))}}{h_{00} h_{11} - h_{01}^2}, \quad (4.9)$$

$$s_1 = \frac{h_{11}}{(h_{00} h_{11} - h_{01}^2)}, \quad n_1 = \frac{h_{00}}{(h_{00} h_{11} - h_{01}^2)}. \quad (4.10)$$

Сформулируем основные результаты настоящего параграфа.

Теорема 2. Пусть $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является дважды непрерывно дифференцируемой и $p_1'(\lambda_1) > 0$. Тогда для решения $x(t) = (\tilde{S}(t), \tilde{N}_1(t))^T$ начальной задачи (4.1) с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\max_{t \in [-\tau_1, 0]} |\psi_0(t)| \leq \theta, \quad |\psi_0(0)| < \theta, \quad \psi_0(t) + \lambda_1 \geq 0, \quad \psi_1(t) + \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D \geq 0, \quad (4.11)$$

$$\sqrt{V(0, \psi)} < \frac{\delta_1}{q_1}, \quad \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{V(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \psi)}\right)} \leq \theta, \quad (4.12)$$

справедливы оценки

$$|\tilde{S}(t)| \leq \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{V(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \psi)}\right)} e^{-\delta_1 t / 2}, \quad t > 0, \quad (4.13)$$

$$|\tilde{N}_1(t)| \leq \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{V(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \psi)}\right)} e^{-\delta_1 t / 2}, \quad t > 0. \quad (4.14)$$

Доказательство теоремы 2 будет приведено в следующем разделе.

Сформулируем результат для системы (1.1), непосредственно вытекающий из теоремы 2.

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.1) при $n = 1$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S(t) = (S^0 - S(t))D - p_1(S(t))N_1(t), \\ \frac{d}{dt} N_1(t) = -D_1 N_1(t) + \alpha_1 p_1(S(t - \tau_1))N_1(t - \tau_1), \\ S(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-\tau_1, 0], \quad S(+0) = \varphi_0(0), \\ N_1(t) = \varphi_1(t), \quad t \in [-\tau_1, 0], \quad N_1(+0) = \varphi_1(0), \end{cases} \quad (4.15)$$

где $\varphi_0(t), \varphi_1(t)$ — непрерывные неотрицательные функции.

Введем обозначения

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix}, \quad x^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является дважды непрерывно дифференцируемой и $p_1'(\lambda_1) > 0$. Тогда для решения $(S(t), N_1(t))^T$ начальной задачи (4.15) с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\max_{t \in [-\tau_1, 0]} |\varphi_0(t) - \lambda_1| \leq \theta, \quad |\varphi_0(0) - \lambda_1| < \theta, \quad \varphi_0(t) \geq 0, \quad \varphi_1(t) \geq 0,$$

$$\sqrt{V(0, \varphi - x^*)} < \frac{\delta_1}{q_1}, \quad \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{V(0, \varphi - x^*)}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \varphi - x^*)}\right)} \leq \theta,$$

справедливы оценки

$$|S(t) - \lambda_1| \leq \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{V(0, \varphi - x^*)}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \varphi - x^*)}\right)} e^{-\delta_1 t/2}, \quad t > 0,$$

$$\left| N_1(t) - \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D \right| \leq \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{V(0, \varphi - x^*)}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \varphi - x^*)}\right)} e^{-\delta_1 t/2}, \quad t > 0.$$

5. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова—Красовского (4.2). Дифференцируя его вдоль решения начальной задачи (4.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, x) &= \left\langle H_1 \frac{d}{dt} x(t), x(t) \right\rangle + \left\langle H_1 x(t), \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle + \\ &+ \langle K_1(0)x(t), x(t) \rangle - \langle K_1(\tau_1)x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \rangle + \int_{t-\tau_1}^t \left\langle \frac{d}{dt} K_1(t-s)x(s), x(s) \right\rangle ds = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} H_1 A_1 + A_1^* H_1 + K_1(0) & H_1 B_1 \\ B_1^* H_1 & -K_1(\tau_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix} \right\rangle + \\ &+ 2 \left\langle H_1 x(t), F_1(x(t)) \right\rangle + 2 \left\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \right\rangle - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \left\langle K_1(t-s)x(s), x(s) \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Учитывая обозначение (3.7) и неравенства (3.9) и (4.3), получим оценку

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} H_1 A_1 + A_1^* H_1 + K_1(0) & H_1 B_1 \\ B_1^* H_1 & -K_1(\tau_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix} \right\rangle &\leq \\ &\leq -c_1 \left\langle H_1 x(t), x(t) \right\rangle + \left\langle M_1 x(t), x(t) \right\rangle - e^{-\kappa_1 \tau_1} \left\langle M_1 x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \right\rangle. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, x) &\leq -c_1 \left\langle H_1 x(t), x(t) \right\rangle + \left\langle M_1 x(t), x(t) \right\rangle - e^{-\kappa_1 \tau_1} \left\langle M_1 x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \right\rangle \\ &+ 2 \left\langle H_1 x(t), F_1(x(t)) \right\rangle + 2 \left\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \right\rangle - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \left\langle K_1(t-s)x(s), x(s) \right\rangle ds. \quad (5.1) \end{aligned}$$

Вначале предположим, что $t \in [0, \tau_1]$. Оценим

$$m(t) = \left\langle M_1 x(t), x(t) \right\rangle + 2 \left\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \right\rangle - e^{-\kappa_1 \tau_1} \left\langle M_1 x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \right\rangle. \quad (5.2)$$

Используя явный вид (2.7) вектор-функции $G_1(x(t - \tau_1))$, будем иметь

$$\begin{aligned} 2\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \rangle &= 2\langle H_1^{1/2} x(t), H_1^{1/2} G_1(x(t - \tau_1)) \rangle \leq \\ &\leq 2\|H_1^{1/2} x(t)\| \|H_1^{1/2} G_1(x(t - \tau_1))\| = 2\sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{11}} \alpha_1 |f_a(x(t - \tau_1)) + f_b(x(t - \tau_1))|, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_a(x(t - \tau_1)) &= \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D (p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1) - p_1'(\lambda_1) \tilde{S}(t - \tau_1)), \\ f_b(x(t - \tau_1)) &= (p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1)) \tilde{N}_1(t - \tau_1). \end{aligned}$$

Поскольку $t \in [0, \tau_1]$, то $t - \tau_1 \in [-\tau_1, 0]$. Следовательно, в силу условия (4.11) имеем

$$|\tilde{S}(t - \tau_1)| = |\psi_0(t - \tau_1)| \leq \theta.$$

Учитывая обозначения (4.4), получим следующие оценки:

$$|p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1) - p_1'(\lambda_1) \tilde{S}(t - \tau_1)| \leq \frac{1}{2} \zeta_1(\theta) \tilde{S}^2(t - \tau_1) \leq \frac{1}{2} \zeta_1(\theta) \theta |\tilde{S}(t - \tau_1)|, \quad (5.3)$$

$$|p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_1)) - p_1(\lambda_1)| \leq \eta_1(\theta) |\tilde{S}(t - \tau_1)| \leq \eta_1(\theta) \theta. \quad (5.4)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \rangle &\leq 2\sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{11}} \alpha_1 \theta \times \\ &\times \left(\frac{\alpha_1}{2D_1} (S^0 - \lambda_1) D \zeta_1(\theta) |\tilde{S}(t - \tau_1)| + \eta_1(\theta) |\tilde{N}_1(t - \tau_1)| \right) = \\ &= 2\sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{11}} \alpha_1 \theta \sqrt{\left\langle Q_1 \left(\frac{|\tilde{S}(t - \tau_1)|}{|\tilde{N}_1(t - \tau_1)|}, \frac{|\tilde{S}(t - \tau_1)|}{|\tilde{N}_1(t - \tau_1)|} \right) \right\rangle}, \end{aligned}$$

где

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} a_1^2 \zeta_1^2(\theta) & \frac{1}{2} a_1 \zeta_1(\theta) \eta_1(\theta) \\ \frac{1}{2} a_1 \zeta_1(\theta) \eta_1(\theta) & \eta_1^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad a_1 = \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D. \quad (5.5)$$

Для дальнейших оценок нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть Q — симметричная матрица с неотрицательными элементами и H — симметричная положительно определенная матрица:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{01} & q_{11} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01} & h_{11} \end{pmatrix}.$$

Тогда для любых $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\left\langle Q \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \end{pmatrix} \right\rangle \leq \nu \left\langle H \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (5.6)$$

где

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{(h_{00} h_{11} - h_{01}^2)} \left(\frac{1}{2} (h_{00} q_{11} + h_{11} q_{00} + 2|h_{01} q_{01}|) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{1}{4} (h_{00} q_{11} - h_{11} q_{00})^2 + (h_{00} q_{01} + |h_{01} q_{00}|)(h_{11} q_{01} + |h_{01} q_{11}|)} \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Неравенство (5.6) можно переписать в виде

$$\left\langle \begin{pmatrix} (\nu h_{00} - q_{00}) & -(\nu |h_{01}| + q_{01}) \\ -(\nu |h_{01}| + q_{01}) & (\nu h_{11} - q_{11}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \end{pmatrix} \right\rangle \geq -2\nu (|h_{01}| |x_0| |x_1| + h_{01} x_0 x_1).$$

Для справедливости данной оценки достаточно потребовать, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} (\nu h_{00} - q_{00}) & -(\nu|h_{01}| + q_{01}) \\ -(\nu|h_{01}| + q_{01}) & (\nu h_{11} - q_{11}) \end{pmatrix}$$

являлась неотрицательно определенной. Это требование эквивалентно условиям

$$\nu h_{00} - q_{00} \geq 0, \quad \nu h_{11} - q_{11} \geq 0, \quad (\nu h_{00} - q_{00})(\nu h_{11} - q_{11}) - (\nu|h_{01}| + q_{01})^2 \geq 0.$$

Проводя несложные арифметические выкладки, нетрудно проверить, что эти неравенства будут выполнены. Лемма 1 доказана. \square

Учитывая обозначение (5.5) для матрицы Q_1 и используя лемму 1, получим оценку

$$\left\langle Q_1 \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t - \tau_1)| \\ |\tilde{N}_1(t - \tau_1)| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t - \tau_1)| \\ |\tilde{N}_1(t - \tau_1)| \end{pmatrix} \right\rangle \leq \nu_1 \left\langle H_1 \begin{pmatrix} \tilde{S}(t - \tau_1) \\ \tilde{N}_1(t - \tau_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{S}(t - \tau_1) \\ \tilde{N}_1(t - \tau_1) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где ν_1 определяется по формуле (4.6). Следовательно,

$$2\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \rangle \leq 2\sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{11}} \alpha_1 \theta \sqrt{\nu_1 \langle H_1 x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \rangle},$$

откуда

$$m(t) \leq \langle M_1 x(t), x(t) \rangle - e^{-\kappa_1 \tau_1} \langle M_1 x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \rangle + \\ + 2\sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{11}} \alpha_1 \theta \sqrt{\nu_1 \langle H_1 x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \rangle}.$$

С учетом обозначения (4.7) нетрудно получить оценку

$$m(t) \leq 2e^{\kappa_1 \tau_1/2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta \langle H_1 x(t), x(t) \rangle.$$

В силу полученного неравенства при $t \in [0, \tau_1]$ из (5.1) и (5.2) вытекает оценка

$$\frac{d}{dt} V(t, x) \leq - \left(c_1 - 2e^{\kappa_1 \tau_1/2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta \right) \langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \\ + 2\langle H_1 x(t), F_1(x(t)) \rangle - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \langle K_1(t-s)x(s), x(s) \rangle ds. \quad (5.7)$$

Теперь оценим $2\langle H_1 x(t), F_1(x(t)) \rangle$. Учитывая явный вид (2.6) вектор-функции $F_1(x(t))$, получим оценку

$$2\langle H_1 x(t), F_1(x(t)) \rangle = 2\langle H_1^{1/2} x(t), H_1^{1/2} F_1(x(t)) \rangle \leq \\ \leq 2 \left\| H_1^{1/2} x(t) \right\| \left\| H_1^{1/2} F_1(x(t)) \right\| = 2\sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} (|f_a(x(t)) + f_b(x(t))|),$$

где

$$f_a(x(t)) = \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D \left(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) - p_1'(\lambda_1) \tilde{S}(t) \right), \\ f_b(x(t)) = (p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1)) \tilde{N}_1(t).$$

В силу условия (4.11) имеем $|\tilde{S}(0)| = |\psi_0(0)| < \theta$. Покажем, что неравенство $|\tilde{S}(t)| < \theta$ также будет выполнено при $t \in [0, \tau_1]$. Предположим, напротив, что существует такая точка $t^* \in (0, \tau_1]$, что $|\tilde{S}(t)| < \theta$ при $t \in [0, t^*]$ и $|\tilde{S}(t^*)| = \theta$. Тогда при $t \in [0, t^*]$ по аналогии с (5.3), (5.4) установим справедливость неравенств

$$\left| p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) - p_1'(\lambda_1) \tilde{S}(t) \right| \leq \frac{1}{2} \zeta_1(\theta) \tilde{S}^2(t), \\ \left| p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) \right| \leq \eta_1(\theta) |\tilde{S}(t)|.$$

Отсюда следует оценка

$$2\langle H_1 x(t), F_1(x(t)) \rangle \leq \sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D\zeta_1(\theta)\tilde{S}^2(t) + 2\eta_1(\theta)|\tilde{S}(t)||\tilde{N}_1(t)| \right) = \\ & = \sqrt{\langle H_1x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D\zeta_1(\theta) & \eta_1(\theta) \\ \eta_1(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t)| \\ |\tilde{N}_1(t)| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t)| \\ |\tilde{N}_1(t)| \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

В силу леммы 1 справедливо неравенство

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D\zeta_1(\theta) & \eta_1(\theta) \\ \eta_1(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t)| \\ |\tilde{N}_1(t)| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\tilde{S}(t)| \\ |\tilde{N}_1(t)| \end{pmatrix} \right\rangle \leq \xi_1 \left\langle H_1 \begin{pmatrix} \tilde{S}(t) \\ \tilde{N}_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{S}(t) \\ \tilde{N}_1(t) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где ξ_1 определяется по формуле (4.9). Отсюда вытекает оценка

$$2 \langle H_1x(t), F_1(x(t)) \rangle \leq q_1 \langle H_1x(t), x(t) \rangle^{3/2} \leq q_1 V^{3/2}(t, x),$$

где q_1 определено в (4.8).

Из установленной оценки и неравенства (5.7) при $t \in [0, t^*]$ получим оценку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t, x) & \leq - \left(c_1 - 2e^{\kappa_1\tau_1/2} \sqrt{h_{11}\nu_1} \alpha_1\theta \right) \langle H_1x(t), x(t) \rangle + \\ & + q_1 V^{3/2}(t, x) - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \langle K_1(t-s)x(s), x(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая обозначение (4.8) и определение (4.2) функционала $V(t, x)$, нетрудно получить неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t, x) \leq -\delta_1 V(t, x) + q_1 V^{3/2}(t, x).$$

Из данной оценки, используя неравенство Гронуолла (см., например, [11]), установим оценку

$$V(t, x) \leq \frac{V(0, \psi)e^{-\delta_1 t}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \psi)}\right)^2}.$$

Отсюда получим неравенство

$$\langle H_1x(t), x(t) \rangle \leq \frac{V(0, \psi)e^{-\delta_1 t}}{\left(1 - \frac{q_1}{\delta_1} \sqrt{V(0, \psi)}\right)^2}.$$

Поскольку

$$\tilde{S}^2(t) \leq s_1 \langle H_1x(t), x(t) \rangle, \quad \tilde{N}_1^2(t) \leq n_1 \langle H_1x(t), x(t) \rangle,$$

где s_1 и n_1 определены в (4.10), из последнего неравенства нетрудно установить справедливость оценок (4.13) и (4.14) при $t \in [0, t^*]$. В частности, из оценок (4.12) и (4.13) следуют неравенства

$$|\tilde{S}(t)| \leq \theta, \quad t \in [0, t^*], \quad |\tilde{S}(t^*)| < \theta.$$

Получили противоречие с тем, что $|\tilde{S}(t^*)| = \theta$. Тем самым, оценки (4.13) и (4.14) справедливы при всех $t \in [0, \tau_1]$, при этом будут выполнены неравенства

$$|\tilde{S}(t)| \leq \theta, \quad t \in [0, \tau_1], \quad |\tilde{S}(\tau_1)| < \theta.$$

Далее рассмотрим промежуток $t \in [\tau_1, 2\tau_1]$. Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $t \in [0, \tau_1]$, установим справедливость неравенств (4.13) и (4.14) при $t \in [\tau_1, 2\tau_1]$. Применяя метод математической индукции, получим оценки (4.13) и (4.14) при $t \in [k\tau_1, (k+1)\tau_1]$, $k \in \mathbb{N}$. В силу произвольности $k \in \mathbb{N}$ отсюда вытекает справедливость неравенств (4.13) и (4.14) при всех $t > 0$. Теорема 2 доказана.

6. Оценки скорости сходимости к нетривиальному положению равновесия в случае произвольного n . В данном разделе будем предполагать, что выполнено условие $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $S = \lambda_1$ и

$$p_1'(\lambda_1) > 0, \quad p_i(\lambda_1) < \frac{D_i}{\alpha_i}, \quad i = 2, \dots, n.$$

В этом случае в силу теоремы 1 нетривиальное положение равновесия (1.4) системы (1.1) является асимптотически устойчивым.

Поскольку исследование устойчивости положения равновесия (1.4) системы (1.1) эквивалентно исследованию устойчивости нулевого решения системы (2.13), для системы (2.13) рассмотрим следующую начальную задачу:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = \mathbf{A}y(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i y(t - \tau_i) + \mathbf{F}(y(t)) + \mathbf{G}(y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n)), \\ y(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \quad y(+0) = \psi(0), \quad \tau_{\max} = \max\{\tau_1, \dots, \tau_n\}, \end{cases} \quad (6.1)$$

где $y(t)$, \mathbf{A} , \mathbf{B}_i , $i = 1, \dots, n$, $\mathbf{F}(y(t))$, $\mathbf{G}(y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n))$ определены в (2.4), (2.14)–(2.17),

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \psi_0(t) = \varphi_0(t) - \lambda_1, \\ \psi_1(t) = \varphi_1(t) - \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D, \\ \psi_2(t) = \varphi_2(t), \dots, \psi_n(t) = \varphi_n(t), \end{cases}$$

$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ — непрерывные неотрицательные функции.

Мы получим оценки решений начальной задачи (6.1), характеризующие скорость убывания на бесконечности, и укажем оценки множества притяжения нулевого решения. В силу замены (2.1) из полученных оценок будут вытекать соответствующие результаты для начальной задачи (1.1)–(1.2) для произвольного n .

При получении оценок будем использовать модифицированный функционал Ляпунова—Красовского, построенный по аналогии с функционалом (4.2):

$$\mathbf{V}(t, y) = \langle \mathbf{H}y(t), y(t) \rangle + \sum_{i=1}^n \int_{t-\tau_i}^t \langle \mathbf{K}_i(t-s)y(s), y(s) \rangle ds,$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_n \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01} & h_{11} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_1(s) = \begin{pmatrix} K_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1(s) = e^{-\kappa_1 s}(B_1^* B_1 + M_1), \quad s \in [0, \tau_1], \quad (6.2)$$

$$\mathbf{K}_2(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad k_2(s) = e^{-\kappa_2 s} \beta_2, \quad s \in [0, \tau_2], \quad (6.3)$$

.....

$$\mathbf{K}_n(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n(s) \end{pmatrix}, \quad k_n(s) = e^{-\kappa_n s} \beta_n, \quad s \in [0, \tau_n]. \quad (6.4)$$

Нетрудно заметить, что функционал можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t, y) = & \langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \sum_{i=2}^n h_i \tilde{N}_i^2(t) + \\ & + \int_{t-\tau_1}^t \langle K_1(t-s)x(s), x(s) \rangle ds + \sum_{i=2}^n \int_{t-\tau_i}^t k_i(t-s) \tilde{N}_i^2(s) ds. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Перейдем к описанию величин, входящих в определение функционала (6.5). Так же, как и в случае $n = 1$, величины h_{00} , h_{01} , h_{11} определяются по формулам (3.10), число κ_1 определяется из неравенств (3.12).

Пусть величина $c_1 > 0$ определяется из неравенства (4.3). Предположим, что функция $p_1(S)$ является дважды непрерывно дифференцируемой, а функции $p_i(S)$, $i = 2, \dots, n$, один раз непрерывно дифференцируемы. При $\theta > 0$ рассмотрим функции (4.4)

$$\zeta_1(\theta) = \max_{\substack{|s| \leq \theta \\ \lambda_1 + s \geq 0}} |p_1''(\lambda_1 + s)|, \quad \eta_1(\theta) = \max_{\substack{|s| \leq \theta \\ \lambda_1 + s \geq 0}} |p_1'(\lambda_1 + s)|,$$

а также введем следующие функции:

$$\eta_i(\theta) = \max_{\substack{|s| \leq \theta \\ \lambda_1 + s \geq 0}} |p_i'(\lambda_1 + s)|, \quad i = 2, \dots, n. \quad (6.6)$$

Пусть $\theta > 0$ таково, что выполнено неравенство (4.5):

$$2e^{\kappa_1 \tau_1 / 2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta < c_1,$$

где величина ν_1 определяется по формуле (4.6), и имеют место следующие неравенства:

$$\alpha_i p_i(\lambda_1 + \theta) < D_i, \quad i = 2, \dots, n.$$

Так же, как и выше, определим матрицу $M_1 = M_1^* > 0$ по формуле (4.7).

Далее определим величины $\kappa_i > 0$, $i = 2, \dots, n$, из следующих условий:

$$c_i = 2 \left(D_i - e^{\kappa_i \tau_i / 2} \alpha_i p_i(\lambda_1 + \theta) \right) > 0, \quad i = 2, \dots, n. \quad (6.7)$$

Пусть $\varepsilon_i > 0$, $i = 2, \dots, n$, — такие числа, что выполняется неравенство

$$\omega_1 = 2e^{\kappa_1 \tau_1 / 2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i h_{00} < c_1, \quad (6.8)$$

а величины $h_i > 0$, $i = 2, \dots, n$, определяются из неравенств

$$h_i > \frac{p_i^2(\lambda_1)}{c_i \varepsilon_i}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Наконец, положим

$$\beta_i = e^{\kappa_i \tau_i / 2} h_i \alpha_i p_i(\lambda_1 + \theta), \quad i = 2, \dots, n. \quad (6.9)$$

Функционал (6.5) полностью определен.

Для формулировки основных результатов введем еще некоторые обозначения. Положим

$$\delta = \min \left\{ (c_1 - \omega_1), \left(c_2 - \frac{p_2^2(\lambda_1)}{h_2 \varepsilon_2} \right), \dots, \left(c_n - \frac{p_n^2(\lambda_1)}{h_n \varepsilon_n} \right), \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n \right\} > 0. \quad (6.10)$$

Пусть $\sigma > 0$ — произвольное положительное число,

$$q = \sqrt{h_{00}} \max \{ \xi, \sigma \}, \quad (6.11)$$

где

$$\xi = \frac{h_{01}\eta_1(\theta) + \frac{1}{2}h_{11}\varrho(\theta) + \sqrt{h_{11}(h_{00}\eta_1^2(\theta) + h_{01}\varrho(\theta)\eta_1(\theta) + \frac{1}{4}h_{11}\varrho^2(\theta))}}{(h_{00}h_{11} - h_{01}^2)}, \quad (6.12)$$

$$\varrho(\theta) = \left[\frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D\zeta_1(\theta) + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=2}^n \frac{\eta_i^2(\theta)}{h_i} \right]. \quad (6.13)$$

Определим величины s_1 и n_1 по формулам (4.10):

$$s_1 = \frac{h_{11}}{(h_{00}h_{11} - h_{01}^2)}, \quad n_1 = \frac{h_{00}}{(h_{00}h_{11} - h_{01}^2)}.$$

Наконец, перейдем к формулировке основных результатов.

Теорема 4. Пусть $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является дважды непрерывно дифференцируемой, функции $p_i(S)$, $i = 2, \dots, n$, один раз непрерывно дифференцируемы, $p'_1(\lambda_1) > 0$ и $p_i(\lambda_1) < D_i/\alpha_i$, $i = 2, \dots, n$. Тогда для решения $y(t) = (\tilde{S}(t), \tilde{N}_1(t), \tilde{N}_2(t), \dots, \tilde{N}_n(t))^T$ начальной задачи (6.1) с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\max_{t \in [-\tau_1, 0]} |\psi_0(t)| \leq \theta, \quad |\psi_0(0)| < \theta, \quad (6.14)$$

$$\psi_0(t) + \lambda_1 \geq 0, \quad \psi_1(t) + \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D \geq 0, \quad \psi_i(t) \geq 0, \quad i = 2, \dots, n,$$

$$\sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)} < \frac{\delta}{q}, \quad \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}\right)} \leq \theta \quad (6.15)$$

справедливы оценки

$$|\tilde{S}(t)| \leq \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}\right)} e^{-\delta t/2}, \quad t > 0, \quad (6.16)$$

$$|\tilde{N}_1(t)| \leq \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}\right)} e^{-\delta t/2}, \quad t > 0, \quad (6.17)$$

$$|\tilde{N}_i(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{h_i}} \frac{\sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}\right)} e^{-\delta t/2}, \quad i = 2, \dots, n, \quad t > 0. \quad (6.18)$$

Доказательство теоремы 4 будет приведено в следующем разделе.

Сформулируем результат для системы (1.1), непосредственно вытекающий из теоремы 4. Введем обозначения

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}, \quad y^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $\lambda_1 < S^0$, функция $p_1(S)$ является дважды непрерывно дифференцируемой, функции $p_i(S)$, $i = 2, \dots, n$, один раз непрерывно дифференцируемы, $p'_1(\lambda_1) > 0$ и $p_i(\lambda_1) < D_i/\alpha_i$, $i = 2, \dots, n$. Тогда для решения $(S(t), N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t))^T$ начальной задачи (1.1)–(1.2) с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\max_{t \in [-\tau_1, 0]} |\varphi_0(t) - \lambda_1| \leq \theta, \quad |\varphi_0(0) - \lambda_1| < \theta, \quad \varphi_i(t) \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$\sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)} < \frac{\delta}{q}, \quad \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}\right)} \leq \theta,$$

справедливы оценки

$$\begin{aligned} |S(t) - \lambda_1| &\leq \frac{\sqrt{s_1} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}\right)} e^{-\delta t/2}, & t > 0, \\ \left|N_1(t) - \frac{\alpha_1}{D_1}(S^0 - \lambda_1)D\right| &\leq \frac{\sqrt{n_1} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}\right)} e^{-\delta t/2}, & t > 0, \\ |N_i(t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{h_i}} \frac{\sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \varphi - y^*)}\right)} e^{-\delta t/2}, & i = 2, \dots, n, \quad t > 0. \end{aligned}$$

7. Доказательство теоремы 4. Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова—Красовского (6.5). Дифференцируя его вдоль решения начальной задачи (6.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t, y) &= \left\langle H_1 \frac{d}{dt} x(t), x(t) \right\rangle + \left\langle H_1 x(t), \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle + \sum_{i=2}^n 2h_i \tilde{N}_i(t) \frac{d}{dt} \tilde{N}_i(t) + \\ &+ \left\langle K_1(0)x(t), x(t) \right\rangle - \left\langle K_1(\tau_1)x(t - \tau_1), x(t - \tau_1) \right\rangle + \int_{t-\tau_1}^t \left\langle \frac{d}{dt} K_1(t-s)x(s), x(s) \right\rangle ds + \\ &+ \sum_{i=2}^n k_i(0) \tilde{N}_i^2(t) - \sum_{i=2}^n k_i(\tau_i) \tilde{N}_i^2(t - \tau_i) + \sum_{i=2}^n \int_{t-\tau_i}^t \frac{d}{dt} k_i(t-s) \tilde{N}_i^2(s) ds. \end{aligned}$$

Учитывая, что система дифференциальных уравнений в начальной задаче (6.1) может быть записана в виде (2.12), а матрица $K_1(s)$ и функции $k_i(s)$, $i = 2, \dots, n$, имеют вид (6.2)–(6.4), производную от функционала $\mathbf{V}(t, y)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t, y) &= \left\langle \begin{pmatrix} H_1 A_1 + A_1^* H_1 + K_1(0) & H_1 B_1 \\ B_1^* H_1 & -K_1(\tau_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix} \right\rangle + \\ &+ 2 \left\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \right\rangle + 2 \left\langle H_1 x(t), L(y(t)) \right\rangle + 2 \left\langle H_1 x(t), (F_1(x(t)) + U(y(t))) \right\rangle + \\ &+ \sum_{i=2}^n 2h_i \tilde{N}_i(t) \left(-D_i \tilde{N}_i(t) + \alpha_i p_i (\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_i)) \tilde{N}_i(t - \tau_i) \right) + \sum_{i=2}^n \beta_i \tilde{N}_i^2(t) - \\ &- \sum_{i=2}^n e^{-\kappa_i \tau_i} \beta_i \tilde{N}_i^2(t - \tau_i) - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \left\langle K_1(t-s)x(s), x(s) \right\rangle ds - \sum_{i=2}^n \kappa_i \int_{t-\tau_i}^t k_i(t-s) \tilde{N}_i^2(s) ds. \quad (7.1) \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \left\langle \begin{pmatrix} H_1 A_1 + A_1^* H_1 + K_1(0) & H_1 B_1 \\ B_1^* H_1 & -K_1(\tau_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \end{pmatrix} \right\rangle + 2 \left\langle H_1 x(t), G_1(x(t - \tau_1)) \right\rangle, \\ J_2(t) &= 2 \left\langle H_1 x(t), L(y(t)) \right\rangle, \\ J_3(t) &= \sum_{i=2}^n 2h_i \tilde{N}_i(t) \left(-D_i \tilde{N}_i(t) + \alpha_i p_i (\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_i)) \tilde{N}_i(t - \tau_i) \right) + \sum_{i=2}^n \beta_i \tilde{N}_i^2(t) - \sum_{i=2}^n e^{-\kappa_i \tau_i} \beta_i \tilde{N}_i^2(t - \tau_i), \\ J_4(t) &= 2 \left\langle H_1 x(t), (F_1(x(t)) + U(y(t))) \right\rangle. \end{aligned}$$

Тогда тождество (7.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t, y) = & J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) + J_4(t) - \\ & - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \langle K_1(t-s)x(s), x(s) \rangle ds - \sum_{i=2}^n \kappa_i \int_{t-\tau_i}^t k_i(t-s) \tilde{N}_i^2(s) ds. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Вначале предположим, что $t \in [0, \tau_{\min}]$, где $\tau_{\min} = \min\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$.

1. Оценим $J_1(t)$. Поскольку $t \in [0, \tau_{\min}]$, то $t - \tau_1 \leq 0$. Следовательно, в силу условия (6.14) имеем

$$|\tilde{S}(t - \tau_1)| = |\psi_0(t - \tau_1)| \leq \theta.$$

Точно так же, как и в случае $n = 1$, установим справедливость неравенства

$$J_1(t) \leq - \left(c_1 - 2e^{\kappa_1 \tau_1/2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta \right) \langle H_1 x(t), x(t) \rangle, \quad (7.3)$$

где c_1 определено в (4.3), ν_1 определено в (4.6).

2. Оценим $J_2(t)$. Учитывая явный вид (2.10) вектор-функции $L(y(t))$, получим

$$J_2(t) = 2 \left\langle \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}(t) \\ \tilde{N}_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l(y(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \langle \tilde{H}_0 x(t), L(y(t)) \rangle,$$

где

$$\tilde{H}_0 = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в силу формулы (2.10) имеем

$$\begin{aligned} J_2(t) = & -2 \sum_{i=2}^n \left\langle \tilde{H}_0 x(t), \begin{pmatrix} p_i(\lambda_1) \tilde{N}_i(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 2 \sum_{i=2}^n \left\| \tilde{H}_0 x(t) \right\| \left\| \begin{pmatrix} p_i(\lambda_1) \tilde{N}_i(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \\ = & 2 \sum_{i=2}^n \left\| \tilde{H}_0 x(t) \right\| p_i(\lambda_1) \tilde{N}_i(t) \leq \sum_{i=2}^n \left(\varepsilon_i \left\| \tilde{H}_0 x(t) \right\|^2 + \frac{p_i^2(\lambda_1)}{\varepsilon_i} \tilde{N}_i^2(t) \right) = \\ = & \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \langle \tilde{H}_0^* \tilde{H}_0 x(t), x(t) \rangle + \sum_{i=2}^n \frac{p_i^2(\lambda_1)}{\varepsilon_i} \tilde{N}_i^2(t). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что имеет место неравенство

$$\langle \tilde{H}_0^* \tilde{H}_0 x, x \rangle \leq h_{00} \langle H_1 x, x \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Отсюда получим оценку

$$J_2(t) \leq \sum_{i=2}^n \varepsilon_i h_{00} \langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \sum_{i=2}^n \frac{p_i^2(\lambda_1)}{\varepsilon_i} \tilde{N}_i^2(t). \quad (7.4)$$

3. Оценим $J_3(t)$:

$$J_3(t) \leq - \sum_{i=2}^n \left(2h_i D_i - \beta_i - \frac{(h_i \alpha_i p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t - \tau_i)))^2}{e^{-\kappa_i \tau_i} \beta_i} \right) \tilde{N}_i^2(t).$$

Поскольку $t \in [0, \tau_{\min}]$, то $t - \tau_i \leq 0$, $i = 2, \dots, n$. Следовательно, в силу условия (6.14) имеем

$$|\tilde{S}(t - \tau_i)| = |\psi_0(t - \tau_i)| \leq \theta.$$

Учитывая монотонное возрастание функций $p_i(s)$, $i = 2, \dots, n$, и обозначения (6.9), отсюда нетрудно установить неравенство

$$J_3(t) \leq - \sum_{i=2}^n 2 \left(D_i - e^{\kappa_i \tau_i/2} \alpha_i p_i(\lambda_1 + \theta) \right) h_i \tilde{N}_i^2(t).$$

В силу обозначений (6.7) это неравенство запишется в виде

$$J_3(t) \leq - \sum_{i=2}^n c_i h_i \tilde{N}_i^2(t). \quad (7.5)$$

4. Оценим $J_4(t)$. Учитывая явный вид (2.6) и (2.11) вектор-функций $F_1(x(t))$ и $U(y(t))$, получим оценку

$$\begin{aligned} J_4(t) &= 2 \left\langle H_1^{1/2} x(t), H_1^{1/2} \left(F_1(x(t)) + U(y(t)) \right) \right\rangle \leq 2 \left\| H_1^{1/2} x(t) \right\| \left\| H_1^{1/2} \left(F_1(x(t)) + U(y(t)) \right) \right\| = \\ &= 2 \sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} \left(\left| f_a(x(t)) + f_b(x(t)) + u(y(t)) \right| \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_a(x(t)) &= \frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D \left(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) - p_1'(\lambda_1) \tilde{S}(t) \right), \\ f_b(x(t)) &= \left(p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) \right) \tilde{N}_1(t), \\ u(y(t)) &= - \sum_{i=2}^n \left(p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_i(\lambda_1) \right) \tilde{N}_i(t). \end{aligned}$$

В силу условия (6.14) имеем $|\tilde{S}(0)| = |\psi_0(0)| < \theta$. Покажем, что неравенство $|\tilde{S}(t)| < \theta$ также будет выполнено при $t \in [0, \tau_{\min}]$. Предположим, напротив, что существует такая точка $t^* \in (0, \tau_{\min}]$, что $|\tilde{S}(t)| < \theta$ при $t \in [0, t^*]$ и $|\tilde{S}(t^*)| = \theta$. Тогда при $t \in [0, t^*]$ по аналогии со случаем, когда $n = 1$, установим справедливость неравенств

$$\left| p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) - p_1'(\lambda_1) \tilde{S}(t) \right| \leq \frac{1}{2} \zeta_1(\theta) \tilde{S}^2(t),$$

$$\left| p_1(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_1(\lambda_1) \right| \leq \eta_1(\theta) |\tilde{S}(t)|, \quad \left| p_i(\lambda_1 + \tilde{S}(t)) - p_i(\lambda_1) \right| \leq \eta_i(\theta) |\tilde{S}(t)|, \quad i = 2, \dots, n,$$

где $\zeta_1(\theta)$ и $\eta_1(\theta)$ определены в (4.4), $\eta_i(\theta)$, $i = 2, \dots, n$, определены в (6.6). Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} J_4(t) &\leq \sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} \left(\frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D \zeta_1(\theta) \tilde{S}^2(t) + \right. \\ &\quad \left. + 2\eta_1(\theta) |\tilde{S}(t)| |\tilde{N}_1(t)| + \sum_{i=2}^n 2\eta_i(\theta) |\tilde{S}(t)| |\tilde{N}_i(t)| \right) \leq \\ &\leq \sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} \left(\left[\frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D \zeta_1(\theta) + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=2}^n \frac{\eta_i^2(\theta)}{h_i} \right] \tilde{S}^2(t) + \right. \\ &\quad \left. + 2\eta_1(\theta) |\tilde{S}(t)| |\tilde{N}_1(t)| + \sigma \sum_{i=2}^n h_i \tilde{N}_i^2(t) \right). \end{aligned}$$

В силу леммы 1 справедливо неравенство

$$\left[\frac{\alpha_1}{D_1} (S^0 - \lambda_1) D \zeta_1(\theta) + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=2}^n \frac{\eta_i^2(\theta)}{h_i} \right] \tilde{S}^2(t) + 2\eta_1(\theta) |\tilde{S}(t)| |\tilde{N}_1(t)| \leq \xi \langle H_1 x(t), x(t) \rangle,$$

где ξ определяется по формулам (6.12)–(6.13). Отсюда вытекает оценка

$$J_4(t) \leq \sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \sqrt{h_{00}} \left(\xi \langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \sigma \sum_{i=2}^n h_i \tilde{N}_i^2(t) \right).$$

Из данной оценки, учитывая обозначение (6.11) и определение (6.5) функционала $\mathbf{V}(t, y)$, получим неравенство

$$J_4(t) \leq q \sqrt{\langle H_1 x(t), x(t) \rangle} \left(\langle H_1 x(t), x(t) \rangle + \sum_{i=2}^n h_i \tilde{N}_i^2(t) \right) \leq q \mathbf{V}^{3/2}(t, y). \quad (7.6)$$

Итак, используя представление (7.2) производной функционала $\mathbf{V}(t, y)$ и полученные оценки (7.3)–(7.6), при $t \in [0, t^*]$ приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t, y) \leq & - \left(c_1 - 2e^{\kappa_1 \tau_1/2} \sqrt{h_{11} \nu_1} \alpha_1 \theta - \sum_{i=2}^n \varepsilon_i h_{00} \right) \langle H_1 x(t), x(t) \rangle - \\ & - \sum_{i=2}^n \left(c_i - \frac{p_i^2(\lambda_1)}{h_i \varepsilon_i} \right) h_i \tilde{N}_i^2(t) + q \mathbf{V}^{3/2}(t, y) - \\ & - \kappa_1 \int_{t-\tau_1}^t \langle K_1(t-s)x(s), x(s) \rangle ds - \sum_{i=2}^n \kappa_i \int_{t-\tau_i}^t k_i(t-s) \tilde{N}_i^2(s) ds. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая обозначения (6.8) и (6.10), нетрудно получить неравенство

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V}(t, y) \leq -\delta \mathbf{V}(t, y) + q \mathbf{V}^{3/2}(t, y).$$

Из данной оценки, используя неравенство Гронуолла (см., например, [11]), выводим оценку

$$\mathbf{V}(t, y) \leq \frac{\mathbf{V}(0, \psi) e^{-\delta t}}{\left(1 - \frac{q}{\delta} \sqrt{\mathbf{V}(0, \psi)}\right)^2}.$$

Отсюда нетрудно получить оценки (6.16)–(6.18) при $t \in [0, t^*]$. В частности, из оценок (6.15) и (6.16) следуют неравенства

$$|\tilde{S}(t)| \leq \theta, \quad t \in [0, t^*], \quad |\tilde{S}(t^*)| < \theta.$$

Получили противоречие с тем, что $|\tilde{S}(t^*)| = \theta$. Тем самым, оценки (6.16)–(6.18) будут справедливы при всех $t \in [0, \tau_{\min}]$; при этом будут выполнены неравенства

$$|\tilde{S}(t)| \leq \theta, \quad t \in [0, \tau_{\min}], \quad |\tilde{S}(\tau_{\min})| < \theta.$$

Далее рассмотрим промежуток $t \in [\tau_{\min}, 2\tau_{\min}]$. Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $t \in [0, \tau_{\min}]$, установим справедливость неравенств (6.16)–(6.18) при $t \in [\tau_{\min}, 2\tau_{\min}]$. Применяя метод математической индукции, получим оценки (6.16)–(6.18) при $t \in [k\tau_{\min}, (k+1)\tau_{\min}]$, $k \in \mathbb{N}$. В силу произвольности $k \in \mathbb{N}$ отсюда будет следовать справедливость неравенств (6.16)–(6.18) при всех $t > 0$.

Теорема 4 доказана.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демиденко Г. В. Матричные уравнения. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2009.
2. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. мат. мех. информ. — 2005. — 5, № 3. — С. 20–28.
3. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. ж. — 2007. — 48, № 5. — С. 1025–1040.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: ГИФМЛ, 1959.
5. Матвеева И. И. Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. ж. индустр. мат. — 2013. — 16, № 3. — С. 122–132.
6. Скворцова М. А. Устойчивость решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. — 2016. — 23, № 2. — С. 108–120.

7. *Скворцова М. А.* Асимптотическая устойчивость положений равновесия и оценки решений в одной модели заболевания// *Динам. сист.* — 2017. — 7 (35), № 3. — С. 257–274.
8. *Скворцова М. А.* Оценки решений в модели хищник-жертва с запаздыванием// *Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат.* — 2018. — 25. — С. 109–125.
9. *Скворцова М. А.* Об оценках решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями// *Сиб. электрон. мат. изв.* — 2018. — 15. — С. 1697–1718.
10. *Скворцова М. А.* Асимптотические свойства решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями// *Мат. заметки СВФУ.* — 2019. — 26, № 4.
11. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
12. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием// *Диффер. уравн.* — 2005. — 41, № 8. — С. 1137–1140.
13. *Mondie S., Kharitonov V. L.* Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach// *IEEE Trans. Automat. Control.* — 2005. — 50, № 2. — P. 268–273.
14. *Wolkowicz G. S. K., Xia H.* Global asymptotic behavior of a chemostat model with discrete delays// *SIAM J. Appl. Math.* — 1997. — 57, № 4. — P. 1019–1043.

Скворцова Мария Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
Новосибирский государственный университет
E-mail: sm-18-nsu@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 188 (2020). С. 106–118
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-188-106-118

УДК 519.175.3

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПЕРЕЧИСЛЕНИЮ ПОМЕЧЕННЫХ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ: ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

© 2020 г. В. А. ВОБЛЫЙ

Аннотация. Классическое функциональное уравнение Риддела связывает производящие функции помеченных связных графов и их блоков. Из этого уравнения автором с помощью теоремы обращения Лагранжа получена формула, являющаяся удобным инструментом для точного и асимптотического перечисления помеченных графов в том случае, когда известна производящая функция их блоков. Эта формула верна для блочно-устойчивых классов графов. Представлен обзор перечислительных результатов, полученных с помощью данного подхода для кактусов, полноблочно-кактусных графов, эйлеровых графов, геодезических графов, планарных графов и последовательно-параллельных графов.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, связный граф, блок.

ON AN APPROACH TO ENUMERATION OF LABELED CONNECTED GRAPHS: A REVIEW

© 2020 V. A. VOBLYI

ABSTRACT. The classical functional Riddell equation connects the generating functions of labeled connected graphs and their blocks. Using the Lagrange inversion theorem, the author obtained from this equation a formula, which is a convenient tool for the exact and asymptotic enumeration of labeled graphs in the case where the generating function of their blocks is known. This formula is valid for block-stable graph classes. A review of enumerative results obtained by using this approach for cacti, block-cactus graphs, Eulerian graphs, geodesic graphs, planar graphs, and series-parallel graphs is presented.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, connected graph, block.

AMS Subject Classification: 05C30

1. Введение. Помеченный граф — это граф, вершинам которого назначены элементы конечного множества (метки), например, целые числа. Непомеченный или абстрактный граф является классом помеченных графов, эквивалентных относительно изоморфизма. В большинстве приложений теории графов используются помеченные графы. Для представления графа в компьютере нужно пометить числами его вершины.

Первая задача перечисления помеченных графов (перечисление помеченных деревьев) решена А. Кэли во второй половине XIX в. Она лежит у истоков теории графов. Перечисление помеченных графов применяется в статистической физике (см. [27–29, 49]), а также для случайной генерации графов и анализа эффективности алгоритмов (см. [37]), и в теории случайных графов (см. [54]).

Классическое функциональное уравнение (соотношение Риддела) связывает производящие функции помеченных связных графов и их блоков. Из этого уравнения автором с помощью теоремы обращения Лагранжа получена формула, которая является удобным инструментом для точного и асимптотического перечисления помеченных графов в том случае, когда известна производящая функция их блоков.

2. Основные формулы. Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Определение 1. *Точкой сочленения* связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным. *Мост* — это ребро графа, после удаления которого граф превращается в несвязный. *Блоком* называется связный граф без точек сочленения (2-связный граф), а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения (см. [33, с. 41]).

Пусть C_n — число помеченных связных графов с n вершинами, $C_{n,m}$ — число помеченных связных графов с n вершинами и m ребрами, B_n — число помеченных блоков с n вершинами, $B_{n,m}$ — число помеченных блоков с n вершинами и m ребрами. Введем производящие функции

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}, \quad C(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n(n-1)/2} C_{n,m} \frac{x^n y^m}{n!},$$

$$B(x) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}, \quad B(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=n}^{n(n-1)/2} B_{n,m} \frac{x^n y^m}{n!}.$$

Очевидно, имеем

$$C(x) = C(x, 1), \quad B(x) = B(x, 1), \quad C'(x) = \left[\frac{\partial C(x, y)}{\partial x} \right]_{y=1}, \quad B'(x) = \left[\frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \right]_{y=1}.$$

Отметим, что ряды $B(x)$, $C(x)$, $C(x, y)$, $B(x, y)$ являются формальными степенными рядами.

В 1951 г. Риддел в диссертации получил соотношение

$$\ln \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial B(z, y)}{\partial z}, \quad z = x \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} \tag{1}$$

(см. [44, 60]), из которого при $y = 1$ следует соотношение

$$\ln C'(x) = B'(xC'(x)). \tag{2}$$

Соотношение (2) является следствием древообразной структуры связного графа, составленной из точек сочленения и блоков. Оно доказано независимо многими авторами (см. [2, 26, 31, 32, 34, 36, 56]).

Однако это соотношение, верное для всего класса помеченных связных графов, может быть неверным для некоторых его подклассов. Например, (2) неверно для класса гомеоморфно несводимых деревьев (см. [10]).

Тазава (см. [63]) доказал соотношение (2) для класса эйлеровых графов, а Дрмота — для класса внешнепланарных графов (см. [40]). В этих доказательствах неявно используется замкнутость подклассов связных графов относительно композиции блоков.

Определение 2 (см. [50, 53]). Класс графов называется *блочнo-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу.

Некоторые авторы в определение блочно-устойчивого класса графа включают требование принадлежности к классу блока, состоящего из одного ребра (см. [41]). Однако при таком определении ряд классов, например, эйлеровы графы, не удовлетворяют этому определению.

Уитни доказал (см. [65]), что граф планарен тогда и только тогда, когда каждый его блок планарен. Стемпл и Уоткинс вывели (см. [61]), что граф является геодезическим тогда и только тогда, когда каждый его блок — геодезический граф. В [19] доказано, что граф эйлеров тогда и

только тогда, когда каждый его блок эйлеров. Таким образом, классы планарных, геодезических и эйлеровых графов являются блочно-устойчивыми классами графов.

Очевидно, блочная устойчивость подкласса связных графов является необходимым условием для выполнения соотношений (1) и (2) для подкласса связных графов, так как в случае ее отсутствия при композиции блоков в связный граф возможен выход за пределы подкласса. Анализируя доказательство формулы (2), данное в книге Харари и Палмера [34], и повторяя его шаг за шагом, как это сделал Тазава для эйлеровых графов (см. [63]), получим, что оно верно для класса блочно-устойчивых связных графов. Существенной является замкнутость блочно-устойчивого класса относительно операции соединения блоков в связный граф.

Классы графов, определяемых с помощью конечного списка запрещенных миноров, являющихся блоками, также являются блочно-устойчивыми классами графов (см. [50, 53]). К таким классам графов, помимо планарных и внешнепланарных графов, относятся последовательно-параллельные графы. Однако класс графов без лап (без $K_{1,3}$ подграфов) — не является блочно-устойчивым (в этом случае запрещенный подграф не является блоком). Действительно, граф, состоящий из трех треугольников с одной общей вершиной, не принадлежит к классу графов без лап, хотя каждый его блок — граф без лап.

К неблочно-устойчивым классам относятся также классы графов с заданным диаметром, гомеоморфно несводимых деревьев и графов с заданным родом, большим или равным единице.

В [48, теорема 6] авторы доказывают (2) для подкласса связных графов, у которых все блоки принадлежат некоторому множеству 2-связных графов. (Формально такой класс является блочно-устойчивым классом графов.) К таким графам относятся кактусы (все блоки — ребра или простые циклы), полноблочно-кактусные графы (все блоки — ребра, простые циклы или полные графы), блочно-колесные графы (все блоки — ребра или колеса).

Из соотношений (2) и (1) в [3, 7] выведены формулы

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [x^{n-1}] \exp(nB'(x)) = \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}] \exp(nB'(x))x^{-n}, \quad (3)$$

$$C_{n,m} = \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}y^{-1}] \exp\left(n \frac{\partial B(x,y)}{\partial x}\right) x^{-n}y^{-m-1}. \quad (4)$$

Здесь $[x^i]$ — коэффициентный оператор и $[x^{-1}]$ — оператор формального вычета (см. [26, с. 25]). Так как (3) и (4) получены из (2) и (1) с помощью теоремы обращения Лагранжа, формулы (3) и (4) эквивалентны формулам (2) и (1) соответственно. Таким образом, формулы (3) и (4) справедливы для классов блочно-устойчивых связных графов.

Обозначим через $B(n, k)$ число помеченных k -циклических блоков с n вершинами, через $B_k(z)$ экспоненциальную производящую функцию для $B(n, k)$, через $S(n, k)$ число помеченных связных k -циклических графов с n вершинами. В [7] из (4) получена формула

$$S(n, k) = \frac{(n-1)!}{nk!} [z^{-1}] e^{nz} Y_k(n1!B_1'(z), n2!B_2'(z), \dots, nk!B_k'(z))z^{-n}, \quad (5)$$

где $Y_k(x_1, \dots, x_k)$ — многочлены разбиений (многочлены Белла). Многочлены $Y_n(x_1, \dots, x_n)$ могут быть определены с помощью производящей функции

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x_1, \dots, x_n) \frac{t^n}{n!}, \quad Y_0 = 1$$

(см. [30, с. 174]). Для этих многочленов известно также выражение

$$Y_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\pi(k)} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{m_1} \dots \left(\frac{x_k}{k!}\right)^{m_k}$$

(см. [30, с. 173]), где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(k)$ числа k , т.е. по всем неотрицательным решениям (m_1, m_2, \dots, m_k) уравнения $m_1 + 2m_2 + \dots + km_k = k$, $m_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$.

В [7] из (4) для числа $\bar{S}(n, k)$ помеченных связных графов без мостов с n вершинами и цикломатическим числом k при $k \geq 1$ найдена формула

$$\bar{S}(n, k) = \frac{(n-1)!}{nk!} [z^{-1}] Y_k(nB'_1(z), \dots, nk!B'_k(z)) z^{-n}. \quad (6)$$

В [6] из (3) получено выражение

$$C_n = \frac{1}{n} Y_{n-1}(nB_2, \dots, nB_n).$$

С помощью основных формул (3) и (4), а также их следствий (5) и (6) получено большое количество результатов по точному и асимптотическому перечислению графов из блочно-устойчивых классов графов.

3. Блочно-устойчивые классы графов.

3.1. Кактусы и полноблочно-кактусные графы.

Определение 3 (см. [34, с. 93]). *Кактусом* называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле.

Все блоки кактуса — ребра или простые циклы. Класс кактусов является после деревьев (которые также являются кактусами) простейшим классом графов. Кактусы служат базовой моделью для ряда задач статистической физики (см. [49]), комбинаторной оптимизации (см. [43]) и теории кодов, исправляющих ошибки (см. [64]).

Форд и Уленбек перечислили помеченные кактусы с заданным распределением числа вершин по циклам, а также нашли соответствующую асимптотику при большом числе вершин (см. [44, 45]).

Пусть $Ca_n(n_2, n_3, \dots)$ — число помеченных кактусов с n вершинами, имеющих n_2 блоков-ребер и n_i блоков-циклов с i вершинами при $i \geq 3$, и Ca_n — число помеченных кактусов с n вершинами. Форд и Уленбек получили формулу

$$Ca_n(n_2, n_3, \dots) = \frac{(n-1)! n^{k-1}}{n_2! \prod_{i \geq 3} 2^{n_i} n_i!}$$

(см. [44]), где $n-1 = n_2 + 2n_3 + \dots$ и $n_2 + n_3 + \dots = k$ — число блоков.

Следовательно (см. [49]), имеем при $n \geq 2$

$$Ca_n = \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{n_2+n_3+\dots=k \\ n_2+2n_3+\dots=n-1}} \frac{(n-1)! n^{k-1}}{n_2! \prod_{i \geq 3} 2^{n_i} n_i!}.$$

Из выражения (3) в [3] получена формула для Ca_n , не содержащая суммирования по всем разбиениям целого числа. Число Ca_n помеченных кактусов с n вершинами при $n \geq 3$ равно

$$Ca_n = \frac{n^{n-2}}{2^{n-1}} + (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^{k-1}}{2^k k!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \binom{n-i-2}{k-i-1}.$$

В [18] найдена другая формула для Ca_n :

$$Ca_n = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{r=1}^{[(n-1)/2]} \sum_{k=0}^{n-2r-1} \frac{n^{k+r-1}}{k! r! 2^r} \binom{n-k-r-2}{r-1}.$$

Преимущество этой формулы в том, что первое слагаемое в ней равно числу помеченных деревьев с n вершинами, и таким образом имеет ясный комбинаторный смысл. Число $Ca(n, k)$ помеченных кактусов с n вершинами и цикломатическим числом k при $n \geq 3$ и $k \geq 1$ равно (см. [7])

$$Ca(n, k) = \frac{(n-1)!}{k! 2^k} \sum_{i=0}^{n-2k-1} \binom{k+i-1}{k-1} \frac{n^{n-k-i-2}}{(n-2k-i-1)!}.$$

По теореме Кенига граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы четны (см. [33, с. 32]). Поэтому у двудольных кактусов все циклы имеют четное число вершин.

В [21] для числа $BC(n)$ помеченных двудольных кактусов с n вершинами при $n \geq 4$ получено выражение

$$BC(n) = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{i=1}^{[(n-1)/3]} \sum_{j=0}^{[(n-3i-1)/2]} \binom{i+j-1}{j} \frac{n^{n-2i-2j-2}}{2^i i! (n-3i-2j-1)!}.$$

В [24] для числа $BC(n, k)$ помеченных двудольных k -циклических кактусов с n вершинами при $n \geq 4$ найдена формула

$$BC(n, k) = \frac{(n-1)!}{n 2^k k!} \sum_{m=0}^{[(n-3k-1)/2]} \binom{m+k-1}{k-1} \frac{n^{n-2m-2k-1}}{(n-2m-3k-1)!}.$$

Пусть CT_n — число помеченных кактусов с n вершинами и без треугольников. В [23] при $n \geq 3$ получена формула

$$CT_n = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{r=1}^{[(n-1)/3]} \sum_{k=0}^{n-3r-1} \binom{n-k-2r-2}{r-1} \frac{n^{k+r-1}}{k! r! 2^r}.$$

Определение 4 (см. [19, 58]). Связный граф называется *полноблочно-кактусным* (block-cactus graph), если у него все блоки или полные графы, или циклы.

Обозначим через F_n число помеченных полноблочно-кактусных графов с n вершинами. При $n \geq 4$ верна формула

$$F_n = \frac{1}{n} P_{n-1}(n) + (n-1)! \sum_{p=1}^{[(n-1)/3]} \sum_{i=0}^{n-3p-1} \binom{n-i-2p-2}{p-1} \frac{P_i(n) n^{p-1}}{2^p p! i!}$$

(см. [19]), где $P_i(x)$ — многочлен Белла одной переменной, определяемый с помощью производящей функции (см. [39]):

$$\exp(z(\exp(x) - 1)) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) \frac{x^k}{k!}.$$

3.2. Эйлеровы графы.

Определение 5. Граф называется *четным*, если каждая его вершина имеет четную степень. *Эйлеров граф* — это связный четный граф.

Эйлеровы графы находят применение в исследовании операций (задача китайского почтальона, см. [47]), биоинформатике (см. [55]) и криптографии (см. [35]).

Рид (см. [59]) нашел производящую функцию для числа помеченных четных графов с заданными числами вершин и ребер, из которой производящая функция для помеченных эйлеровых графов может быть получена логарифмированием. Тазава (см. [63]) вывел нелинейное функциональное уравнение для экспоненциальной производящей функции для числа помеченных эйлеровых блоков с заданным числом вершин.

Заметим, что эйлеровы графы не имеют мостов (см. [4]) и, следовательно, не имеют блоков, состоящих из одного ребра.

Пусть D_n — число помеченных эйлеровых кактусов с n вершинами. В [4] получена формула

$$D_n = (n-1)! \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{n^{k-1}}{k! 2^k} \binom{n-k-1}{k-1}.$$

Обозначим через ET_n число помеченных эйлеровых n -вершинных кактусов без треугольников. В [25] при $n \geq 3$ получена формула

$$ET_n = (n-1)! \sum_{k=1}^{[(n-1)/3]} \frac{n^{k-1}}{k!2^k} \binom{n-2k-2}{k-1}.$$

Пусть $Y_k(x_1, \dots, x_k)$ — многочлен разбиений, а \bar{B}_n — число помеченных эйлеровых блоков с n вершинами. Тогда число E_n помеченных эйлеровых графов с n вершинами равно

$$E_n = \frac{1}{n} Y_{n-1}(0, n\bar{B}_3, \dots, n\bar{B}_n)$$

(см. [6]).

Определение 6 (см. [17]). Связный граф называется *полноблочным* (block graph), если у него все блоки полные графы.

Пусть EH_n — число помеченных эйлеровых полноблочных графов с n вершинами, а $P_i(z)$ — многочлен Белла одной переменной; тогда при $n \geq 3$ верна формула

$$EH_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} P_i\left(\frac{n}{2}\right) P_{n-i-1}\left(\frac{n}{2}\right)$$

(см. [17]). Обозначим через EF_n число помеченных эйлеровых полноблочно-кактусных графов с n вершинами. При $n \geq 4$ верна формула

$$EF_n = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} P_r\left(\frac{n}{2}\right) P_{n-1-r}\left(\frac{n}{2}\right) + (n-1)! \sum_{l=1}^{[(n-1)/3]} \sum_{r=0}^{n-3l-1} \sum_{k=0}^{n-r-3l-1} (-1)^r \frac{P_k(n/2) P_r(n/2) n^{l-1}}{k!r!l!2^l} \binom{n-r-k-2l-2}{l-1}$$

(см. [19]), где $P_i(x)$ — многочлен Белла одной переменной.

Число $E_5(n)$ помеченных эйлеровых пентациклических графов с n вершинами при $n \geq 7$ равно

$$E_5(n) = \frac{n!}{29030400} \left(1360n^7 - 21490n^6 + 101563n^5 + 83930n^4 - 1999655n^3 + 4004840n^2 + 2158812n + 3457440 \right)$$

(см. [15]).

3.3. Геодезические графы.

Определение 7 (см. [61]). *Геодезический граф* — это связный граф, у которого любая пара вершин связана единственной кратчайшей цепью (геодезической).

Геодезические графы используются при проектировании топологической структуры компьютерных сетей (см. [46]).

Стемпл и Уотсон доказали (см. [61]), что граф является геодезическим планарным только тогда, когда каждый блок его — ребро, нечетный цикл или граф, гомеоморфный полному графу K_4 . Очевидно, что внешнепланарный граф не может иметь блоков, гомеоморфных K_4 . Следовательно, геодезический внешнепланарный граф является кактусом с нечетными циклами.

В [5] получены следующие результаты. Число OP_n помеченных геодезических внешнепланарных графов с n вершинами при $n \geq 3$ равно

$$OP_n = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{p=1}^{[(n-1)/2]} \sum_{r=0}^{[(n-2p-1)/2]} \binom{r+p-1}{p-1} \frac{n^{n-p-2r-2}}{2^p p! (n-2p-2r-1)!}.$$

Число $GC(n, k)$ помеченных геодезических k -циклических кактусов с n вершинами равно

$$GC(n, k) = \frac{(n-1)!}{n2^k k!} \sum_{m=0}^{[(n-2k-1)/2]} \binom{m+k-1}{k-1} \frac{n^{n-2m-2k-1}}{(n-2m-2k-1)!}.$$

Для числа P_n помеченных геодезических планарных графов с n вершинами при $n \geq 3$ верна формула

$$P_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp \left(nz + \frac{nz^2}{2(1-z^2)} + \frac{n(z^3 + 2z^6)}{6(1-z^3)^5} \right)$$

В [8] получены следующие результаты. Число $G(n, 2)$ помеченных геодезических бициклических графов с n вершинами при $n \geq 5$ равно

$$G(n, 2) = \frac{n!}{8} \sum_{i=0}^{[(n-5)/2]} \frac{(i+1)n^{n-2i-5}}{(n-2i-5)!}.$$

Число $G(n, 3)$ помеченных геодезических трициклических графов с n вершинами при $n \geq 7$ равно

$$G(n, 3) = \frac{n!}{24} \left(\sum_{i=0}^{[(n-7)/2]} \frac{(i+2)(i+1)n^{n-2i-6}}{4(n-2i-7)!} + \sum_{i=0}^{[(n-4)/3]} \frac{n^{n-3i-5}(3i+4)}{(n-3i-4)!} \binom{i+3}{3} \right).$$

Число $G(n, 4)$ помеченных геодезических тетрациклических графов с n вершинами при $n \geq 9$ равно

$$G(n, 4) = \frac{n!}{384} \sum_{i=0}^{[(n-9)/2]} \binom{i+3}{3} \frac{n^{n-2i-7}}{(n-2i-9)!} + \frac{n!}{48} \sum_{i=0}^{[(n-6)/3]} \sum_{j=0}^{[(n-3i-6)/2]} (3i+4) \binom{i+3}{3} \frac{n^{n-2i-3j-6}}{(n-2i-3j-6)!}.$$

3.4. Планарные графы.

Определение 8 (см. [33, с. 127, 131]). *Планарный граф* — это граф, который можно уложить на плоскости без пересечения ребер. *Внешнепланарным графом* называется планарный граф, если его можно уложить на плоскости так, что все его вершины принадлежат одной грани.

Класс внешнепланарных графов является тестовым для класса планарных графов. Случайный помеченный внешнепланарный граф может быть сгенерирован полиномиальным алгоритмом, базирующемся на результатах перечисления таких графов.

Пусть \tilde{C}_n — число помеченных связных внешнепланарных графов с n вершинами; тогда при $n \geq 3$ верна следующая формула (см. [3]):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n = & n^{n-2} + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)n^{n-3} + \frac{(n-1)!}{n} \sum_{q=1}^{n-2} \frac{n^{n-q-2} 2^q}{(n-q-2)!} \times \\ & \times \sum_{i=0}^{n-q-2} \binom{n-q-2}{i} \frac{1}{4^i} \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} \frac{1}{2^j} \left(2 \binom{q}{q-i-j+1} - \binom{q}{q-i-j-1} \right). \end{aligned}$$

Число $P(n, k)$ помеченных связных внешнепланарных k -циклических графов с n вершинами при $n \geq k+2$ и $k \geq 1$ равно

$$P(n, k) = \frac{(n-1)!}{k! 2^k} \sum_{s=k+2}^n \sum_{q=0}^{k-1} \frac{n^{n-s} (s-3)! 2^q}{(n-s)! (s-k-2)!} \binom{n-s}{k-q-1} \binom{s+k-2}{q}$$

(см. [9]); считаем, что $\binom{n}{m} = 0$ при $n < m$.

Число $p(n, k)$ помеченных связных внешнепланарных k -циклических графов без мостов с n вершинами при $n \geq k + 2$ и $k \geq 1$ равно

$$p(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{p=1}^k \frac{n^{p-1}}{2^p} (n + k - p - 1)! \binom{n-p-2}{k-1} \binom{k-1}{p-1}$$

(см. [11]). Обозначим через PF_n число помеченных планарных полноблочно-кактусных графов с n вершинами. В [22] получена формула

$$PF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp \left(nz + \frac{nz^2}{2} + \frac{nz^3}{6} + \frac{nz^3}{2(1-z)} \right). \quad (7)$$

3.5. Последовательно-параллельные графы.

Определение 9 (см. [38]). Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит полный граф K_4 в качестве минора.

Последовательно-параллельные графы используются при построении надежных коммуникационных сетей (см. [57]). Целый ряд задач алгоритмической теории графов, являющихся NP-полными для общих графов, может быть решен полиномиальными алгоритмами в классе последовательно-параллельных графов (см. [62]).

Число $SP(n)$ помеченных связных последовательно-параллельных графов с n вершинами при $n \geq 1$ равно

$$SP(n) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp \left(\frac{nz((4-2z)e^z - z - 2)}{2(2e^z - 1)(2e^z - z - 1)} \right) \times \\ \times \left(2e^z(2e^z - 1)^{n-2}(2e^z - z - 1)^n - (2e^z - 1)^{n+1}(2e^z - z - 1)^{n-2} \right) \quad (8)$$

(см. [10]). Для числа $SP(n, 3)$ помеченных связных последовательно-параллельных трициклических графов с n вершинами при $n \geq 5$ верна формула

$$SP(n, 3) = \\ = \frac{(n-1)!}{24} \sum_{i=0}^{n-5} \left(\binom{i+2}{2} \frac{n^{n-i-5}}{2(n-i-7)!} + \binom{i+4}{4} \left(\frac{12n^{n-i-5}}{(n-i-6)!} - \frac{13n^{n-i-6}}{(n-i-7)!} + \frac{4n^{n-i-7}}{(n-i-8)!} \right) + \right. \\ \left. + \binom{i+6}{6} \left(\frac{70n^{n-i-5}}{(n-i-5)!} - \frac{127n^{n-i-6}}{(n-i-6)!} + \frac{98n^{n-i-7}}{(n-i-7)!} - \frac{38n^{n-i-8}}{(n-i-8)!} + \frac{6n^{n-i-9}}{(n-i-9)!} \right) \right)$$

(см. [13]). Для числа $SP(n, 4)$ помеченных связных последовательно-параллельных тетрациклических графов с n вершинами при $n \geq 6$ верна следующая формула (см. [14]):

$$SP(n, 4) = \frac{(n-1)!}{24} [z^{n-1}] e^{nz} \left(\frac{n^3 z^8}{16(1-z)^4} + \frac{n^2 z^4 (12z^3 - 13z^4 + 4z^5)}{4(1-z)^6} + \right. \\ \left. + \frac{n(12z^3 - 13z^4 + 4z^5)^2}{12(1-z)^8} + \frac{nz^2(70z^4 - 127z^5 + 98z^6 - 38z^7 + 6z^8)}{2(1-z)^8} + \right. \\ \left. + \frac{48z^{11} - 450z^{10} + 1860z^9 - 4415z^8 + 6520z^7 - 5813z^6 + 2430z^5}{10(1-z)^{10}} \right).$$

4. Асимптотика и вероятность. Для числа $C(n, k)$ помеченных связных k -циклических графов с n вершинами без мостов при фиксированном $k \geq 1$ и $n \rightarrow \infty$ верна асимптотическая формула

$$C(n, k) \sim c_k n! n^{3k-4}$$

(см. [12]), где $c_1 = 1/2$, $c_k = b_{k-1}/(3k-4)!$, $k \geq 2$, b_k — коэффициенты Райта (см. [1, 67]),

$$b_1 = \frac{1}{12}, \quad b_2 = \frac{5}{48}, \quad 2(k+1)b_{k+1} = (3k+2) \left(kb_k + 3 \sum_{s=1}^{k-1} s(k-s)b_s b_{k-s} \right), \quad k \geq 2.$$

Следствие 1 (см. [12]). *Почти все помеченные связные k -циклические графы без мостов при фиксированном k являются блоками.*

Для числа $Ca(n, k)$ помеченных кактусов с n вершинами и фиксированным цикломатическим числом $k \geq 1$ при $n \rightarrow \infty$ верна следующая асимптотическая формула (см. [7]):

$$Ca(n, k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2} k! \Gamma(\frac{k+1}{2})} n^{n+3k/2-2}.$$

Следствие 2 (см. [7]). *Пусть $P_k(n)$ — вероятность того, что помеченный связный граф с n вершинами и цикломатическим числом k является кактусом. Тогда при фиксированном $k \geq 1$ и $n \rightarrow \infty$ верно выражение*

$$P_k(n) \sim \frac{2^{k-2} \Gamma(\frac{3k-1}{2})}{3^k k! (k-1)! \Gamma(\frac{k+1}{2}) d_{k-1}},$$

где $d_0 = 1/6$, а d_k — коэффициенты Степанова—Райта (см. [1, 66]):

$$d_1 = d_2 = \frac{5}{36}, \quad d_{k+1} = d_k + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{d_s d_{k-s}}{(s+1) \binom{k}{s}}, \quad k \geq 2.$$

Для числа $E_5(n)$ помеченных эйлеровых пентациклических графов с n вершинами при $n \rightarrow \infty$ верно следующее асимптотическое равенство (см. [15]):

$$E_5(n) \sim \frac{17n^7}{362880} n!.$$

Зададим на множестве помеченных эйлеровых графов с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 3 (см. [15]). *Пусть P_n — вероятность того, что помеченный эйлеров пентациклический граф с n вершинами является блоком. При $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика $P_n \sim \frac{53}{272}$.*

Пусть \bar{P}_n — вероятность того, что помеченный эйлеров пентациклический граф с n вершинами является кактусом. При $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика $\bar{P}_n \sim \frac{63}{272}$.

Для числа $P(n, k)$ помеченных связных внешнепланарных k -циклических графов с n вершинами и фиксированным цикломатическим числом $k \geq 1$ при $n \rightarrow \infty$ верна следующая асимптотическая формула (см. [9]):

$$P(n, k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2} k! \Gamma(\frac{k+1}{2})} n^{n+3k/2-2}.$$

Следствие 4 (см. [9]). *При фиксированном цикломатическом числе k и $n \rightarrow \infty$ почти все внешнепланарные k -циклические графы с n вершинами являются k -циклическими кактусами.*

Следствие 5 (см. [9]). *Пусть $P_k(n)$ — вероятность того, что помеченный связный граф с n вершинами и цикломатическим числом k является внешнепланарным графом. Тогда при фиксированном $k \geq 1$ и $n \rightarrow \infty$*

$$P_k(n) \sim \frac{2^{k-2} \Gamma(\frac{3k-1}{2})}{3^k k! (k-1)! \Gamma(\frac{k+1}{2}) d_{k-1}},$$

где $d_0 = 1/6$, а d_k — коэффициенты Степанова—Райта.

В частности, имеем

$$P_1(n) \sim 1, \quad P_2(n) \sim \frac{3}{5}, \quad P_3(n) \sim \frac{4}{15}, \quad P_4(n) \sim \frac{35}{432}.$$

Теорема (Флажоле, Седжвик; см. [42, теорема VIII.8]). *Введем обозначение*

$$F(N, n) = [z^N] \{a(z)(b(z))^n\} = \frac{1}{2\pi i} \oint a(z)(b(z))^n \frac{dz}{z^{N+1}}.$$

Пусть функции $a(z)$ и $b(z)$ удовлетворяют следующим условиям:

- (1) Функции $a(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$ и $b(z) = \sum_{j \geq 0} b_j z^j$ аналитичны в точке $z = 0$ и имеют неотрицательные коэффициенты; кроме того, $b(0) \neq 0$.
- (2) $\text{НОД}\{j \mid b_j > 0\} = 1$.
- (3) Если $R \leq \infty$ — радиус сходимости ряда $b(z)$, то радиус сходимости $a(z)$ не меньше R .

Обозначим через T величину

$$T = \lim_{x \rightarrow R-0} \frac{xb'(x)}{b(x)}.$$

Пусть λ — такое положительное число, что $0 < \lambda < T$, и пусть r — единственный действительный корень уравнения

$$r \frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda.$$

Введем обозначение

$$\sigma = \frac{d^2}{dr^2} (\ln b(r) - \lambda \ln r).$$

Тогда для целого $N = \lambda n$ при $n \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ верно асимптотическое равенство

$$F(N, n) \sim a(r) \frac{(b(r))^n}{r^{N+1} \sqrt{2\pi n \sigma}}.$$

Теорема Флажоле и Седжвика является вариантом метода перевала. Заметим, что достаточно требовать единственности действительного корня внутри пересечения кругов сходимости функций $a(z)$ и $b(z)$, так как остальные корни будут посторонними корнями.

В [4] найдено следующее выражение для числа D_n помеченных эйлеровых кактусов с n вершинами:

$$D_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp\left(\frac{nz^2}{2(1-z)}\right) z^{-n},$$

из которого с помощью теоремы Флажоле и Седжвика при $n \rightarrow \infty$ получена асимптотическая формула

$$D_n \sim cn^{-5/2} a^n n!,$$

(см. [20]), где $c = 0,1079436709$, $a = 2,5424753735$.

В [19] для числа F_n помеченных полноблочно-кактусных графов с n вершинами найдено выражение

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp\left(n(e^z - 1) + \frac{nz^3}{2(1-z)}\right) z^{-n}.$$

Из него в [19] с помощью теоремы Флажоле и Седжвика при $n \rightarrow \infty$ получена асимптотическая формула

$$F_n \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!,$$

где $c_1 = 0,1178070871$, $a_1 = 4,261224133$.

В [4, 19] была допущена погрешность в формулировке теоремы Флажоле—Седжвика, так как требовалась единственность положительного корня вместо единственности действительного корня. При таком условии можно было гарантировать только асимптотическую оценку сверху вместо асимптотического равенства (см. [42, теорема 1]). Расчет показал, что для данных задач существует единственный действительный корень внутри пересечения кругов сходимости функций.

Следствие 6 (см. [19]). *Почти все полноблочно-кактусные графы не являются кактусами.*

В [25] найдено выражение для числа ET_n помеченных эйлеровых n -вершинных кактусов без треугольников

$$ET_n = \frac{(n-1)!}{n} \exp\left(\frac{nz^3}{2(1-z)}\right) z^{-n}.$$

Из этого выражения в [25] с помощью теоремы Флажолле и Седжвика при $n \rightarrow \infty$ для ET_n получена асимптотическая формула

$$ET_n \sim cn^{-5/2} a^n n!, \quad c \approx 0,1019844368, \quad a \approx 2,1748800796.$$

Следствие 7 (см. [25]). *Почти все помеченные эйлеровы кактусы содержат треугольники.*

Из формулы (7) с помощью теоремы Флажолле и Седжвика для числа PF_n помеченных планарных полноблочно-кактусных графов с n вершинами в [22] при $n \rightarrow \infty$ найдена асимптотика

$$PF_n \sim cn^{-5/2} a^n n!, \quad c \approx 0,1183273421, \quad a \approx 4,2534965791.$$

Следствие 8. *Почти все помеченные полноблочно-кактусные графы не являются планарными графами.*

В [16] из формулы (8) с помощью теоремы Флажолле и Седжвика для числа $SP(n)$ помеченных связных последовательно-параллельных графов с n вершинами при $n \rightarrow \infty$ получена асимптотика

$$SP(n) \sim cn^{-5/2} a^n n!, \quad c \approx 0,001277177741, \quad a \approx 9073311262.$$

При этом уточнена асимптотика для $SP(n)$, найденная в [38].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воблый В. А. О коэффициентах Райта и Степанова–Райта // Мат. заметки. — 1987. — 42, № 6. — С. 854–862.
2. Воблый В. А. О перечислении помеченных связных графов по числу точек сочленения // Дискр. мат. — 2008. — 20, № 1. — С. 52–63.
3. Воблый В. А. Об одной формуле для числа помеченных связных графов // Дискр. анал. иссл. опер. — 2012. — 19, № 4. — С. 48–59.
4. Воблый В. А. Перечисление помеченных эйлеровых кактусов // Мат. XI Междунар. семин. «Дискретная математика и ее приложения». — М.: МГУ, 2012. — С. 275–277.
5. Воблый В. А. Перечисление помеченных геодезических планарных графов // Мат. заметки. — 2015. — 97, № 3. — С. 336–341.
6. Воблый В. А. Выражение числа помеченных связных графов через число помеченных блоков с помощью многочленов разбиений // Тез. докл. Междунар. науч. конф. «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (14–18 сентября 2015 г. Минск, Беларусь). — Минск, 2015. — С. 95–96.
7. Воблый В. А. О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и ребер // Дискр. анал. иссл. опер. — 2016. — 23, № 2. — С. 5–20.
8. Воблый В. А. Перечисление помеченных геодезических графов с малым цикломатическим числом // Мат. заметки. — 2017. — 101, № 5. — С. 684–689.
9. Воблый В. А. Число помеченных внешнепланарных k -циклических графов // Мат. заметки. — 2018. — 103, № 5. — С. 657–666.
10. Воблый В. А. Второе соотношение Риддела и следствия из него // Дискр. анал. иссл. опер. — 2019. — 26, № 1. — С. 20–32.
11. Воблый В. А. О числе помеченных внешнепланарных k -циклических графов без мостов // Дискр. анал. иссл. опер. — 2020. — 27, № 1. — С. 5–16.
12. Воблый В. А. Об асимптотическом перечислении помеченных связных k -циклических графов без мостов // Мат. заметки. — 2020. — 107, № 2. — С. 304–306.
13. Воблый В. А. Перечисление помеченных последовательно-параллельных трициклических графов // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — 177. — С. 132–136.
14. Воблый В. А. Асимптотическое перечисление помеченных последовательно-параллельных тетрациклических графов // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — 187. — С. 31–35.

15. *Воблый В. А.* Перечисление помеченных эйлеровых пентациклических графов// Прикл. дискр. мат. — 2020. — № 50. — С. 87–92.
16. *Воблый В. А.* Уточнение асимптотики для числа помеченных последовательно-параллельных графов// Мат. заметки. — 2021. — 109, № 6. — С. 944–947.
17. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных эйлеровых полноблочных графов// Мат. XV Междунар. семина. «Комбинаторные конфигурации и их приложения». — Кировоград, 2013. — С. 15–28.
18. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Новая формула для числа помеченных кактусов с заданным числом вершин// Тез. докл. Междунар. науч. конф. «Дискретная математика, теория графов и их приложения». — Минск, 2013. — С. 9–11.
19. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных полноблочно-кактусных графов// Дискр. анал. иссл. опер. — 2014. — 21. — С. 24–32.
20. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Асимптотическое перечисление помеченных эйлеровых кактусов// Мат. XVII Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики». — Казань, 2014. — С. 58–60.
21. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных двудольных кактусов// Мат. IX Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М., 2015. — С. 57–58.
22. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных планарных полноблочно-кактусных графов// Мат. XX Междунар. семина. «Дискретная математика и ее приложения». — М., 2016. — С. 287–290.
23. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных кактусов без треугольников// Мат. XIX Междунар. семина. «Комбинаторные конфигурации и их приложения». — Кропивницкий, 2017. — С. 17–19.
24. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных двудольных k -циклических кактусов// Тр. X Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М., 2018. — С. 86–88.
25. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных эйлеровых кактусов без треугольников// Мат. XV Междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения». — Тула, 2018. — С. 165–168.
26. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.
27. *Иванчик И. И.* Проблемы теории графов в статистической физике// Тр. Физ. ин-та АН СССР. — 1979. — 106. — С. 3–89.
28. *Калмыков Г. И.* Древесная классификация помеченных графов. — М.: Физматлит, 2003.
29. *Калмыков Г. И.* Каркасная классификация помеченных графов. — М.: Физматлит, 2006.
30. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. — М.: Наука, 1982.
31. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. — М.: Мир, 2005.
32. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: МЦНМО, 2004.
33. *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973.
34. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.
35. *Amudha P., Sagayaraj A. C. C., Sheela A. C. S.* An application of graph theory in cryptography// Int. J. Pure Appl. Math. — 2018. — 119, № 13. — P. 375–383.
36. *Bergeron F., Labelle G., Leroux P.* Combinatorial Species and Tree-Like Structures. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
37. *Bodirsky M., Kang M.* Generating outerplanar graphs uniformly at random// Combin. Probab. Comput. — 2006. — 15, № 3. — P. 333–343.
38. *Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.* Enumeration and limit laws of series-parallel graphs// Eur. J. Combin. — 2007. — 28, № 8. — P. 2091–2105.
39. *Carlitz L.* Single variable Bell polynomials// Collect. Math. — 1962 *s 13–25. — 14.
40. *Drmotič M.* Random Trees. — Wien–NewYork: Springer, 2009.
41. *Drmotič M., Fusy E., Kang M., Kraus V., Rue J.* Asymptotic study of subcritical graph classes// SIAM J. Discr. Math. — 2011. — 25, № 4. — P. 1615–1651.
42. *Flajolet P., Sedgewick G. E.* Analytic Combinatorics. — Cambridge Univ. Press, 2009.
43. *Fleisher L.* Building chain and cactus representations of all minimum cuts from Hao–Orlin in the same asymptotic run time// J. Algorithms. — 1999 *s 51–72. — 33, № 5.
44. *Ford G. W., Uhlenbeck G. E.* Combinatorial problems in the theory of graphs, I// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1956. — 42, № 3. — P. 122–128.

45. *Ford G. W., Uhlenbeck G. E.* Combinatorial problems in theory graphs, III// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1956. — 42. — P. 529–535.
46. *Frasser C. E.* k -Geodetic graphs and their application to the topological design of computer networks// Proc. Argentinian Workshop on Theoretical Computer Science (28 JAIIO-WAIT'99), 1999. — P. 187–203.
47. *Kumar A.* A study on Euler graph and its applications// Int. J. Math. Trends Technol. — 2017. — 43, № 1. — P. 9–14.
48. *Labelle G., Leroux P., Ducharme M. G.* Graph weights arising from Mayer's theory cluster integrals// Sémin. Lothar. Combin. — 2007. — 54. — B54m.
49. *Leroux P.* Enumerative problems inspired by Mayer's theory of cluster integrals// Electron. J. Combin. — 2004. — 11. — R32.
50. *McDiarmid C., Scott A.* Random graphs from a block stable class// Eur. J. Combin. — 2016. — 58. — P. 96–106.
51. *Moon J.* Counting Labelled Trees. — Montreal: Can. Math. Congr., 1970.
52. NIST Handbook of Mathematical Functions. — New York: Cambridge Univ. Press, 2010.
53. *Noy M.* Random planar graphs and beyond// in: Proc. Int. Congr. Math.. — Seoul, 2014. — P. 407–431.
54. *Noy M.* Graphs// in: Handbook of Enumerative Combinatorics. — CRC Press. — P. 403–442.
55. *Pancoska P., Moravek Z., Moll U. M.* Rational design of DNA sequences for nanotechnology, microarrays and molecular computers using Eulerian graphs// Nucl. Acids Res. — 2004. — 32, № 15. — P. 4630–4645.
56. *Percus J. M.* Combinatorial Methods. — New York–Heidelberg–Berlin: Springer, 1971.
57. *Radhavan S.* Low-connectivity network design on series-parallel graphs// Networks. — 2004. — 43, № 3. — P. 163–176.
58. *Randerath B., Volkmann L.* A characterization of well covered block-cactus graphs// Australas. J. Combin. — 1994. — 9. — P. 307–314.
59. *Read R. C.* Euler graphs on labelled nodes// Can. J. Math. — 1962. — 14. — P. 482–486.
60. *Riddell R. J.* On the theory of the virial development of the equation of state of monoatomic gases// J. Chem. Phys. — 1953. — 11, № 11. — P. 2056–2064.
61. *Stemple J. G., Watkins M. E.* On planar geodetic graphs// J. Combin. Theory. — 1968. — 4. — P. 101–117.
62. *Takamizawa K., Nishezeki T., Saito N.* Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs// J. ACM. — 1982. — 29, № 3. — P. 623–641.
63. *Tazawa S.* Enumeration of labeled 2-connected Euler graphs// J. Combin. Inform. System Sci. — 1998. — 23, № 1-4. — P. 407–414.
64. *Vicente R., Saad D., Kabashima Y.* Error-correcting code on a cactus: a solvable model// Europhys. Lett. — 2000. — 51, № 6. — P. 698–704.
65. *Whitney H.* Non-separable and planar graphs// Trans. Am. Math. Soc. — 1932. — 34. — P. 339–362.
66. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs, III// J. Graph Theory. — 1980. — 4, № 4. — P. 393–407.
67. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs, IV// J. Graph Theory. — 1983. — 7, № 2. — P. 219–229.

Воблый Виталий Антаниевич

Всероссийский институт научной и технической информации, Москва

E-mail: vitvobl@yandex.ru