ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 187

Москва 2020

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 187

ГЕОМЕТРИЯ И МЕХАНИКА

Москва 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 3–11
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-3-11

УДК 517, 531.01

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ» ИМ. ПРОФ. В. В. ТРОФИМОВА ПОД РУКОВОДСТВОМ С. А. АГАФОНОВА, Д. В. ГЕОРГИЕВСКОГО И М. В. ШАМОЛИНА

© 2020 г. **Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Приведена краткая информация о заседаниях семинара в 2018 г.

***Ключевые слова*:** качественная теория динамических систем, геометрия, классическая механика, механика жидкости и газа, механика деформируемого твердого тела.

SESSIONS OF THE WORKSHOP OF THE MATHEMATICS AND MECHANICS DEPARTMENT OF THE LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY, "URGENT PROBLEMS OF GEOMETRY AND MECHANICS" NAMED AFTER V. V. TROFIMOV

© 2020 **D. V. GEORGIEVSKY, M. V. SHAMOLIN**

Abstract. Brief information on sessions of the workshop in 2017 is presented.

***Keywords and phrases*:** qualitative theory of dynamical systems, geometry, classical mechanics, fluid and gas mechanics, solid mechanics.

***AMS Subject Classification*:** 58-xx, 70-xx

Заседание 390 (9 февраля 2018 г.)
Д. В. Георгиевский.
Эффект Пойнтинга с позиций аппарата тензорно нелинейных функций.

Рассмотрен класс определяющих соотношений, связывающих в трёхмерном пространстве симметричные тензоры напряжений и малых деформаций с помощью изотропной потенциальной тензорно нелинейной функции довольно общего вида. Приведены различные определения тензорной нелинейности и показана их эквивалентность. С позиций математического аппарата теории тензорно нелинейных функций проведена трактовка известного в экспериментальной механике эффекта Пойнтинга и явлений, схожих с ним. Доказано, что эти эффекты — не обязательно результат тензорной нелинейности определяющих соотношений, а могут быть следствием зависимости одной из материальных функций от квадратичного инварианта, отсутствующей, например, в физически линейном случае. Отсюда сделаны выводы о порядке малости данных эффектов. Обсуждена возможность моделирования эффекта Пойнтинга тензорно линейными определяющими соотношениями.

Заседание 391, посвящённое 65-летию М. У. Никабадзе (16 февраля 2018 г.).

М. У. Никабадзе.

О проблеме расщепления начально-краевых задач в механике.

Рассмотрены некоторые вопросы о расщеплении начально-краевых задач теории упругости и теории тонких тел для анизотропных сред. Начально-краевые задачи микрополярной (классической) теории упругости представлены с помощью введенных тензорно-блочных матричных операторов (тензоров-операторов). В случае изотропной микрополярной упругой среды (изотропной и трансверсально-изотропной классических сред) найдены соответствующие тензорно-блочным матричным операторам (тензорам-операторам) рассмотренных начально-краевых задач тензорно-блочные матричные операторы (тензоры-операторы) алгебраических дополнений, которые позволяют расщеплять начально-краевые задачи. При этом тензоры и тензорно-блочные матрицы представлены в каноническом виде. Из трехмерных расщепленных начально-краевых задач получены соответствующие расщепленные начально-краевые задачи для теорий тонких тел.

Заседание 392 (2 марта 2018 г.)

Ю. П. Зезин, П. В. Тишин.

Методика экспериментального исследования длительной прочности полимерных материалов по результатам испытаний кольцевых образцов.

Полимерные материалы широко используются для производства различных профилей, в том числе труб и колец. Механические характеристики полимеров в готовом изделии существенно зависят от способа и параметров режима переработки. В связи с этим механические свойства материалов труб и колец целесообразно определять по результатам испытаний представительных кольцевых образцов. При этом учитывается как особая форма испытываемых изделий, так и специфика методов их получения. Известна схема нагружения образцов-колец внутренним давлением, которое задается в процессе сжатия вкладки из несжимаемого материала в полости испытуемого образца. При этом в образце реализуется напряженное состояние, близкое к однородному растяжению. В работе представлены результаты численного анализа такой схемы испытаний полимерных материалов при постоянной нагрузке. Конечно-элементная модель схемы нагружения разработана с использованием коммерческого программного комплекса ANSYS. Вычисления выполнены для образцов-колец полиарилата. Получены расчетные распределения напряжений в образце при постоянной нагрузке. Исследовано влияние модуля упругости и коэффициента Пуассона нагружающего вкладыша на величину растягивающих напряжений в образце. Результаты численного моделирования использованы для оценки долговечности уплотняющих колец полиарилата, полученных литьем под давлением при различных значениях температуры.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-08-03604).

Заседание 393 (18 марта 2018 г.)

М. В. Шамолин.

Интегрируемые системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия.

Во многих задачах динамики возникают механические системы с пространством положений — четырехмерным многообразием. Их фазовыми пространствами естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение пятимерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по четырехмерной поверхности; при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к четырехмерному многообразию. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Заседание 394 (30 марта 2018 г.)

Ф. А. Райх.

Связь механики сплошной среды и электродинамики: исследование моделей электромагнитных сил с помощью экспериментов и избранные задачи, решаемые с помощью аналитических и численных методов.

Известно много моделей электромагнитного момента. Из каждой модели следует свой вид плотности электромагнитной силы, которая действует как источник в равновесии механического момента. Не прекращаются споры о том, какая модель электромагнитной силы является «правильной» для произвольных материалов и процессов. Большинство авторов высказываются за или против определенных моделей в силу мысленных экспериментов, например, со световыми волнами.

Цель доклада — показать, что эксперименты, проведенные на макроуровне, могут в конечном счете исключить некоторые модели из списка силовых моделей, применимых в общем случае. Любая модель электромагнитной силы предсказывает полную силу, которая действует на тело, а также локальное распределение сил. Оба эти предсказания могут использоваться экспериментально. Для этого планируются и проводятся эксперименты на макроуровне, чтобы проверить теоретические механические прогнозы некоторых избранных моделей электромагнитных сил. С помощью сравнения теоретических результатов с экспериментальными можно исключить некоторые модели-кандидаты в модели электромагнитных сил, применимых в общем случае.

Доклад начинается с исследования полной электромагнитной силы, действующей на тело в эксперименте с магнитостатической постановкой. Здесь полная аксиальная сила между двумя коаксиально расположенными постоянными цилиндрическими магнитами изучается аналитически. Анализ показывает, что (большинство) моделей электромагнитных сил дают одинаковые предсказания для общей силы статической постановке — это также имеет место в эксперименте. Однако, в этом примере цилиндры считаются твердыми телами. Больше информации о корректности модели электромагнитных сил можно получить с помощью изучения следствий локального распределения электромагнитной силы для деформируемых тел, например, упругих.

Первый приведенный пример, изучающий следствия локальных эффектов, — это упругая линейно намагниченная сфера, помещенная во внешнее магнитное поле. Индуцированное магнитное поле и намагниченность дают зависящие от модели прогнозы плотности электромагнитной силы на поверхности. Из-за них возникают (упругие) магнитные горловины, которые можно вычислить для малых деформаций методом Хирамацу и Ока. При применении различных моделей электормагнитных сил получаются меняющиеся формы деформаций. Для этого примера экспериментальные данные недоступны. Однако, результаты могут послужить мотивацией для будущих экспериментов в этой области, или для этой задачи о магнитной горловине в сферической геометрии, или для аналогичных задач.

Приведен также другой пример, показывающий следствия локальных эффектов: капелька силоксанового масла, погруженная в касторовое масло. Эти масла не смешиваются из-за поверхностного натяжения между ними. В эксперименте применяется однородное электрическое поле, действующее на масла. В силу различной диэлектрической проницаемости масел наблюдается деформация погруженной капли. Моделируется тензор поверхностного натяжения, и поверхностные смещения вычисляются аналитически. Эти решения демонстрируют разные прогнозы о форме деформации в зависимости от модели. Поскольку этот эксперимент ранее был проведен и обсуждался в литературе, вычисленные смещения можно сравнить с экспериментальными фотографиями.

Приведенные примеры показывают, что можно уменьшить список возможных кандидатов на адекватные модели электромагнитных сил с помощью сравнения теоретических прогнозов о деформациях и проведенных экспериментов на макроуровне. Масштабы смещения (или скорости) в задачах с жидкостями значительно больше, чем, например, в рассмотренной задаче о магнитной горловине. Следовательно, эксперименты с жидкостями кажутся очень перспективными для дальнейшей работы.

Заседание 395 (13 апреля 2018 г.)

А. А. Бобылев.

Вариационная постановка и вычислительный алгоритм решения плоской и осесимметричной износоконтактных задач для упругих полубесконечных тел с покрытием винклеровского типа.

Рассмотрены плоская и осесимметричная задачи об изнашивании тонкого неоднородного покрытия упругого полупространства при контактном взаимодействии с жестким неизнашиваемым штампом. Покрытие моделируется упругим слоем винклеровского типа.

При постановке задачи предполагается, что величина линейного износа мала и соизмерима с упругими перемещениями, а граничные условия можно отнести к недеформированной поверхности полупространства. Кинетическое уравнение износа определяет зависимость интенсивности изнашивания от величины контактного давления и относительной скорости скольжения. Параметры, характеризующие износостойкие свойства покрытия, зависят от величины линейного износа.

В общем случае износоконтактные задачи даже для линейно-упругих тел являются нелинейными вследствие как нелинейности локального закона изнашивания, так и изменения размеров области контакта в процессе изнашивания. Для решения задач с заранее неизвестной площадкой контакта целесообразно использовать вариационный подход. В докладе представлены вариационные формулировки рассматриваемых износоконтактных задач в виде системы квазивариационного неравенства эволюционного типа и дифференциального уравнения первого порядка.

Для дискретизации задач по времени использованы разностные схемы. Разработаны вычислительные алгоритмы на основе явной схемы Эйлера и схемы типа предиктор-корректор. На каждом временном шаге для определения контактного давления требуется решить эллиптическое вариационное неравенство или эквивалентную ему экстремальную задачу. Дискретизация задач по пространственным координатам производилась с использованием пространств интегрированных фундаментальных решений, построенных на основе гранично-элементного подхода. В результате получены задачи квадратичного программирования с ограничениями в виде неравенств, для решения которых предложен вариант метода сопряженных градиентов, учитывающий специфику ограничений задачи.

Получены численные решения ряда плоских и осесимметричных задач об изнашивании неоднородного покрытия упругого полупространства. Рассмотрены два расчетных случая. В первом случае задается закон внедрения штампа в полупространство с покрытием, а во втором — закон изменения по времени усилия вдавливания штампа. Проведено исследование влияния характера изменения параметров уравнения износа покрытия и дискретности контакта на кинетику процесса изнашивания. Тестовые расчеты показали, что неоднородность покрытия существенно влияет на характер процесса приработки сопряжения.

Заседание 396. Молодежные чтения (20 апреля 2018 г.).

1. *Р. Р. Шабайкин.*

Динамические эффекты деформирования пластического слоя между жёсткими цилиндрами.

2. *А. О. Павлюченко.*

Устойчивость течения среды Бингама в слое с движущимися границами.

3. *А. В. Муравлев, А. Э. Карпов.*

Анализ векторных свойств на траекториях деформаций постоянной кривизны.

4. *И. В. Крутов.*

Обобщение преобразования Галёркина в ортотропной теории упругости.

Заседание 397 (11 мая 2018 г.)

И. Л. Покровский.

О собственных значениях оператора Лапласа с нелокальными граничными условиями.

Заседание 398 (25 мая 2018 г.)

М. В. Шамолин.

Случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия.

В задачах динамики изучаются механические системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2, 3 и 4 было рассказано ранее). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Заседание 399 (8 июня 2018 г.)

С. Роджерс.

Об оптимальном управлении катящимся шарообразным роботом, приводимым в движение внутренними точечными массами.

Рассматривается управляемое движение катящимся шаром, приводимым в движение внутренними точечными массами, которые движутся по рельсам произвольной формы, зафиксированным внутри шара. Приложение вариационного принципа минимума Понтрягина даёт управляемые уравнения движения шара, решение которых подчиняется неуправляемым уравнениям движения шара, удовлетворяет заданным начальным и конечным значениям и минимизирует заданный индекс характеристики. Управляемые уравнения движения решаются численно с помощью метода продолжения предиктора-корректора, начиная с первоначального уравнения, полученного с помощью прямого метода, чтобы осуществить отслеживание тректории и маневры избегания препятствий.

Заседание 400, юбилейное (22 июня 2018 г.).

Заседание 401 (14 сентября 2018 г.)
Д. В. Георгиевский.

Задачи в напряжениях диффузионно-вихревого типа в неограниченном жёстковязкопластическом пространстве.

Анализируются постановки и точные автомодельные решения диффузионно-вихревых задач в терминах напряжений, моделирующих нестационарный одномерный сдвиг в некоторых криволинейных ортогональных системах координат двухконстантной жёстковязкопластической среды (тела Бингама). К числу таких задач относятся диффузия плоского и осесимметричного вихревых слоёв, а также диффузия вихревой нити. Сдвиг происходит в расширяющихся со временем областях неограниченного пространства с неизвестной заранее границей, при этом описывается возможный способ задания дополнительного условия на бесконечности. Вводится в рассмотрение обобщённая диффузия вихря, содержащая постановку с несколькими параметрами, в том числе порядком особенности напряжений в нуле. Строятся автомодельные решения, в которых порядок особенности соответствует либо не соответствует типу сдвига в выбранной системе координат.

Заседание 402 (21 сентября 2018 г.)
Э. Б. Завойчинская.

Усталостное масштабно-структурное разрушение и долговечность конструкций при пропорциональных процессах нагружения (по материалам докторской диссертации).

Заседание 403 (28 сентября 2018 г.)
М. В. Шамолин.

Системы с диссипацией: анализ и интегрируемость.

Работа представляет собой обзор по полученным ранее, а также новым случаям интегрируемости систем с диссипацией. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним. Задача поиска полного набора трансцендентных первых интегралов систем с диссипацией также является достаточно актуальной, и ей было ранее посвящено множество работ. В частности, введён в рассмотрение новый класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Наличие в таких системах нетривиальных групп симметрий позволило показать, что рассматриваемые системы обладают переменной диссипацией с нулевым средним, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства в системе может присутствовать как подкачка энергии, так и её рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в динамике твёрдого тела. В результате обнаружен ряд случаев полной интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Получены некоторые обобщения на условия интегрируемости более общих классов неконсервативных динамических систем (динамика четырёхмерного твёрдого тела).

В качестве приложений изучаются динамические уравнения движения, возникающие в плоской и пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, а также возможное обобщение полученных методов исследования на общие системы, возникающие как в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории динамических систем, так и в теории колебаний.

Заседание 404 (5 октября 2018 г.)
Г. С. Тлюстангелов.

Устойчивость радиально-вращательного растекания-стока цилиндрического слоя (по материалам кандидатской диссертации).

Заседание 405 (19 октября 2018 г.)

В. И. Ванько.

И. Ньютон и А. Н. Крылов: аэродинамическая задача (к 155-летию со дня рождения академика А. Н. Крылова).

Заседание 406: совместное заседание с семинаром «Геометрия в целом» под руководством И. Х. Сабитова (26 октября 2018 г.).

Р. Р. Айдагулов.

Геометрия в физике.

Различные аксиоматики метрических пространств определяют различные типы геометрий. Стандартная аксиоматика определяет геометрии эллиптического типа, которые подразделяются на архимедовы и неархимедовы. Первые используются в классической физике, вторые — вполне разрывные — в большей степени соотносятся с квантовой физикой. Заменяя аксиомы метрических пространств на иные, с противоположными условиями, получаем аксиомы гиперболических геометрий, лежащих в основе релятивистской физики. В нашей работе понятию гиперболичности придаётся определённый смысл, а именно, математическое выражение физического принципа причинно-следственности через аксиомы метрики.

Здесь строится специальная теория относительности (СТО) на принципах однородной изотропной гиперболической метрики, без парадокса близнецов. Обычная СТО соответствует релявистской кинематике. В нашей теории можно описывать и динамику.

Заседание 407 (2 ноября 2018 г.)

В. В. Власов, Н. А. Раутиан, А. В. Давыдов, Ю. А. Тихонов.

Спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости.

Заседание 408 (16 ноября 2018 г.)

В. Г. Путкарадзе.

Интегрируемость и хаос в фигурном катании.

Выводится и изучается трёхмерная модель фигуриста. Фигурист моделируется как трёхмерное тело, движущееся в пространстве, подчиняясь неголономному ограничивающему вынужденному движению вдоль направления конька и голономным ограничениям контакта со льдом и постоянства наклона конька. Для неподвижного (не сочленённого) показано, что система интегрируема тогда и только тогда, когда проекция центра масс на направление конька совпадает с контактной точкой со льдом и выполняются некоторые необременительные (и реалистичные) предположения на направления осей инерции. Интегрируемость сохраняется для произвольного отклонения в сторону конька. Интегрируемость доказывается с помощью доказательства существования двух новых постоянных движения, линейных по моментам (калибровочных интегралов), что даёт новый и весьма нетривиальный пример интегрируемой неголономной механической системы. Кроме того, рассматривается случай, когда проекция центра масс на направление конька не совпадает с контактной точкой, и показано, что этот неинтегрируемый случай обнаруживает частично хаотическое поведение, с помощью изучения дивергенции близлежащих траекторий. Обнаружено сложное поведение при переходе от интегрируемого случая к хаотическому. Предложенная модель обнаруживает много характерных черт реального катания на коньках, в особенности фигурного катания, и автор предполагает, что реальные фигуристы смогут использовать найденные механические свойства системы для контроля выступления на льду.

Заседание 409 (23 ноября 2018 г.)

А. В. Давыдов, Ю. А. Тихонов.

Спектральный анализ интегродифференциальных операторов в задаче о флаттере вязкоупругих пластин.

Заседание 410 (30 ноября 2018 г.)
П. В. Тишин.
Определяющие соотношения для материалов со свойствами, зависящими от вида напряжённого (деформированного) состояния.

Заседание 411, посвященное 65-летию со дня рождения Е. В. Лобанова (1953–1998) (7 декабря 2018 г.).

Заседание 412 (14 декабря 2018 г.)
М. В. Шамолин.
Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией.

Дать общее определение динамической системы с имеющейся диссипацией довольно затруднительно. В каждом конкретном случае иногда это может быть сделано: вносимые в систему определённые коэффициенты в уравнениях указывают в одних областях фазового пространства на рассеяние энергии, а в других областях — на её подкачку. Последнее приводит к потере известных первых интегралов (законов сохранения), выражающихся через гладкие функции.

Но как только в системе обнаруживаются притягивающие или отталкивающие предельные множества, необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве первых интегралов.

В некоторых случаях для систем с диссипацией если и удаётся найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями, имеющими существенно особые точки. Полученные в работе результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Во множестве работ автора уже затрагивалась данная тематика. В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к двумерным многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. Фундам. направл. — 2007. — *23.* — С. 16–45.
2. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — *62.* — С. 3–13.
3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65.* — С. 3–10.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76.* — С. 3–10.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2013. — *88.* — С. 3–19.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2015. — *98.* — С. 3–8.

7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100.* — С. 3–11.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *150.* — С. 3–25.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *174.* — С. 3–11.

Д. В. Георгиевский
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `georgiev@mech.math.msu.su`

М. В. Шамолин
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 12–18
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-12-18

УДК 517.929

ФРЕДГОЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

© 2020 г. **В. Б. ВАСИЛЬЕВ**

Аннотация. Рассматриваются специальные классы операторов, действующих в функциональных пространствах на многообразиях. Применяемый подход можно назвать операторно-геометрической трактовкой хорошо известного локального принципа. В абстрактной форме описаны условия фредгольмовости рассматриваемых операторов и показано, как эти результаты можно применить к исследованию эллиптических псевдодифференциальных операторов на многообразиях с негладкой границей.

Ключевые слова: локальный оператор, операторное многообразие, фредгольмовость, индекс.

FREDHOLM OPERATOR MANIFOLDS

© 2020 **V. B. VASIL'EV**

Abstract. We consider special classes of operators acting in functional spaces on manifolds. We can say that our approach is an operator-geometric treatment of the well-known local principle. In an abstract form, the conditions of the fredholmness are described and it is shown how these results can be applied to the study of elliptic pseudodifferential operators on manifolds with a non-smooth boundary.

Keywords and phrases: local operator, operator manifold, Fredholm property, index.

AMS Subject Classification: 47B07, 58J05

1. Введение. Работы И. Б. Симоненко (см. [8]), посвященные локальному принципу, с которыми автор познакомился много лет назад, оказали сильное влияние на все его последующие исследования. Почти сразу появились алгебраические версии этого принципа (см. [3]), и все дальнейшие работы в этом направлении так или иначе были связаны с алгебраическими конструкциями (см. [4–7, 10–17]). На наш взгляд, операторно-геометрические конструкции, предлагаемые в настоящей работе, более наглядно и точно отражают природу псевдодифференциального оператора, действующего в функциональных пространствах на многообразии. В простейшем варианте эти идеи уже появлялись в работах автора [1, 18]. Мы приведем здесь два основных результата о представлении такого оператора: теорему, которая утверждает, что оператор допускает «разложение» на несколько составляющих операторов, и теорему об индексе, которая гласит, что индекс оператора будет представлять собой сумму индексов составляющих операторов. Некоторые результаты описаны в [19].

2. Архетипы основных конструкций. Результаты, полученные в этой работе, можно условно назвать «геометрической интерпретацией локального принципа». Основная идея автора заключается в определении многообразия посредством локального оператора, действующего в локальном функциональном пространстве на этом многообразии.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.7311.2017/8.9).

2.1. Локальные функциональные пространства. Мы приведем определения «локальных» пространств Соболева—Слободецкого, которые связаны с псевдодифференциальными операторами переменного порядка (см. [2]); ниже будем повсеместно их использовать в качестве «модельных» пространств.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ — область. В действительности будем иметь дело лишь со следующими типами «канонических» конических областей: пространство $\mathbb{R}^m$, полупространство $\mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m),\ x_m > 0\}$ и k-мерное коническое ребро вида $\mathbb{R}^k \times C^a_{m-k}$, где $C^a_{m-k} = \{x \in \mathbb{R}^{m-k} : x = (x'', x_{m-k}),\ x_{m-k} > a|x''|,\ a > 0\}$. Все рассматриваемые m-мерные области D_k занумеруем индексами $k = 0, 1, \dots, m$, подразумевая, что

$$D_m \equiv \mathbb{R}^m \times C^a_0 \equiv \mathbb{R}^m, \qquad D_{m-1} \equiv \mathbb{R}^{m-1} \times C^a_1 \equiv \mathbb{R}^m_+,$$
$$D_k \equiv \mathbb{R}^k \times C^a_{m-k},\ \ k = 1, 2, \dots, m-2, \qquad D_0 \equiv \mathbb{R}^0 \times C^a_m \equiv \{x \in \mathbb{R}^m : x_m > a|x'|\}.$$

По определению (см. [2, 9]), локальное пространство Соболева—Слободецкого $H^{s(x_0)}(\mathbb{R}^m)$ состоит из (обобщенных) функций u с конечной нормой (точка $x_0 \in \mathbb{R}^m$ фиксирована)

$$\|u\|_{s(x_0)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s(x_0)} d\xi \right)^{1/2}, \tag{1}$$

где $\tilde{u}$ обозначает преобразование Фурье функции u:

$$\tilde{u}(\xi) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{ix\cdot\xi} u(x) dx.$$

2.2. Локальные операторы. Локальные операторы будут действовать в локальных пространствах. Грубо говоря, локальные операторы выглядят следующим образом:

$$u(x) \longmapsto \int\limits_D \int\limits_{\mathbb{R}^m} A(\xi) e^{i\xi\cdot(x-y)} u(y) dy d\xi, \qquad x \in D,$$

где $A(\xi)$ — некоторая функция, определенная на $\mathbb{R}^m$ и называемая локальным символом, D — одна из канонических конических областей. Чуть ниже мы уточним это понятие.

3. Операторные многообразия. Пусть M — m-мерное компактное многообразие с границей (краем), причем эта граница негладкая. Последнее означает следующее. На границе имеются точки, окрестности которых диффеоморфны одной из канонических областей $D_k \subset \mathbb{R}^m$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, окрестности же внутренних точек многообразия M диффеоморфны $D_m \equiv \mathbb{R}^m$. Иначе говоря, на многообразии M выделены гладкие компактные подмногообразия (особенности) $M_k, k = 0, 1, \dots, m-2$, окрестности точек которых диффеоморфны D_k. Окрестность же точки гладкости границы диффеоморфна D_{m-1}. С каждой точкой x_0 многообразия M свяжем локальное пространство Соболева—Слободецкого $H^{s(x_0)}(D_{x_0})$ (см. [2]), причем предполагаем следующее. Для всех точек $x_0 \in M_k$ функция $s(x_0)$ постоянна и принимает только одно значение s_k, область D_{x_0} также имеет один и тот же вид D_k.

Определение 1. Многообразие M называется *операторным многообразием*, если в окрестности каждой точки многообразия определена оператор-функция $M \ni x \longmapsto A(x)$, где оператор является линейным ограниченным оператором $A(x) : H^{s(x)}(D_x) \to H^{t(x)}(D_x)$.

Возможно, такое определение выглядит слишком общим, однако ниже мы постараемся показать, что оно вполне жизнеспособно, причем даже в случае, отличном от конкретных пространств Соболева—Слободецкого. Применение же абстрактных результатов будет связано с пространствами Соболева—Слободецкого.

4. Виртуальные операторы. В этом разделе делается попытка развить некий абстрактный вариант теории локальных операторов в определенных функциональных пространствах. Эти размышления возникли в связи с работами И. Б. Симоненко (см. [8]), посвященными исследованию операторов локального типа (для краткости мы здесь их называем локальными). Простейшей и наиболее распространенной моделью таких операторов являются псевдодифференциальные операторы. Существует несколько подходов к построению теории фредгольмовости таких операторов и связанных с ними уравнений на негладких многообразиях или на гладких многообразиях с негладкой границей (см. [5,6,10–13,15–17]), однако вряд ли эти построения можно уложить в описываемую абстрактную схему. Предварительные построения автора можно найти в работе [19]; здесь предлагается дальнейшее развитие, продвижение и применение.

Здесь мы напомним некоторые идеи и определения из [8, 19]. Пусть B_1, B_2 — банаховы пространства функций, определенных на компактном m-мерном многообразии M. Мы будем предполагать, что гладкие функции с компактным носителем плотны в этих функциональных пространствах. Далее, пусть $A : B_1 \to B_2$ — линейный ограниченный оператор.

Определение 2. Оператор A называется *локальным*, если оператор $f \cdot A \cdot g$ является компактным для любых двух гладких функций f, g с непересекающимися носителями.

Всюду ниже рассматриваются только такие функциональные пространства, которые содержат гладкие функции, и соответствующие им мультипликаторы ограничены; кроме того, все рассматриваемые операторы будут определены с точностью до компактных операторов.

В соответствии с п. 4.3 выбираем конечное покрытие многообразия M с соответствующим разбиением единицы $\{U_j, f_j\}_{j=1}^n$ и систему таких гладких функций $\{g_j\}_{j=1}^n$, что $\operatorname{supp} g_j \subset V_j$, $\overline{U_j} \subset V_j$ и $g_j(x) \equiv 1$ для $x \in \operatorname{supp} f_j$, $\operatorname{supp} f_j \cap (1 - g_j) = \emptyset$.

Следствие 1. *Оператор A на компактном многообразии M можно записать в виде*

$$A = \sum_{j=1}^{n} f_j \cdot A \cdot g_j + T,$$

где $T : B_1 \to B_2$ — компактный оператор.

Замечание 1. Нетрудно понять, что такие операторы определены однозначно с точностью до компактных операторов, что не повлияет на индекс оператора.

С учетом последнего замечания, для произвольного оператора $A : B_1 \to B_2$ определим существенную норму (см. [8])

$$|||A||| \equiv \inf \|A + T\|,$$

где инфимум берется по всем компактным операторам $T : B_1 \to B_2$.

Теперь мы введем евклидовы локальные модели операторов. Пусть B_1', B_2' — банаховы пространства функций, определенных на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, и $\widetilde{A} : B_1' \to B_2'$ — линейный ограниченный оператор.

В силу определения многообразия M каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью $U \ni x$ и соответствующим диффеоморфизмом $\omega : U \to D \subset \mathbb{R}^m$, $\omega(x) \equiv y$. Мы введем подходящий оператор S_ω, действующий из B_k в B_k', $k = 1, 2$. Для функции $u \in B_k$, обращающейся в нуль вне U, положим

$$(S_\omega u)(y) = u(\omega^{-1}(y)), \quad y \in D, \qquad (S_\omega u)(y) = 0, \quad y \notin D.$$

Определение 3. Локальным представителем оператора $A : B_1 \to B_2$ в точке $x \in M$ называется оператор[1] $\widetilde{A} : B_1' \to B_2'$, такой, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_j точки $x \in U_j \subset M$, в которой выполняется неравенство

$$|||g_j A f_j - S_{\omega_j^{-1}} \hat{g}_j \widetilde{A} \hat{f}_j S_{\omega_j}||| < \varepsilon.$$

[1]Обратим внимание, что это *другой* оператор, действующий в *другом* функциональном пространстве.

4.1. Виртуальный оператор. Пусть снова M — компактное многообразие с краем ∂M и $A(x)$ — некоторая оператор-функция, определенная на M. Выделим на границе ∂M подмногообразия M_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, как гладкие k-мерные многообразия так, что по определению $M_{m-1} \equiv \partial M$, M_0 представляет собой совокупность изолированных точек ∂M, $M_m \equiv M$. Наконец, введем множество классов операторов $\mathfrak{T}_k$, $k = 0, 1, \ldots, m$, так, что для $x \in M_k$ оператор $A(x) : H_k^{(1)} \to H_k^{(2)}$ является линейным ограниченным оператором, а $H_k^{(j)}, k = 0, 1, \ldots, m$, $j = 1, 2,$ — некоторые банаховы пространства. По сути, здесь предполагается, что M является операторным многообразием более общего типа, чем в определении 2. Такое подмногообразие M_k называется сингулярным k-подмногообразием, если для всех $x \in M_k$ имеет место включение $A(x) \in \mathfrak{T}_k$.

Теорема 1. *Если семейство $A(x)$ состоит из локальных фредгольмовых операторов и непрерывно*[1] *на каждой компоненте*

$$\overline{M_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} M_i}, \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

то оно порождает единственный фредгольмов оператор A', действующий в пространствах прямых сумм

$$\sum_{k=0}^{m} \oplus H_1^{(k)} \to \sum_{k=0}^{m} \oplus H_2^{(k)}.$$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме, описанной в работе автора [19]. Покрытие многообразия и разбиение единицы выбираются специальным образом, семейство $A(x)$ кластеризуется, каждый кластер порождает отдельный оператор. □

Определение 4. Такой оператор A' называется виртуальным оператором, соответствующим семейству $A(x)$. Виртуальный оператор A' называется *эллиптическим*, если семейство $A(x)$ состоит из фредгольмовых операторов для всех $x \in M$.

4.2. Индекс виртуального оператора. Ниже приведена теорема об индексе виртуального оператора. Конечно, она не дает рецепта вычисления индекса, однако показывает, с какими операторами мы должны работать для получения приемлемых формул для индекса.

Теорема 2. *Оператор A' действует на гладких функциях следующим образом*:

$$Au = \sum_{k=0}^{m} A^{(k)} u_k + Tu,$$

где u_k представляет собой компоненту функции u, сосредоточенную в некоторой окрестности подмногообразия $\overline{M_k \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} M_j\right)}$, так что

$$u = \sum_{k=0}^{m} u_k.$$

Замечание 2. Операторы $A^{(k)}$ сконструированы в [19], и каждый оператор $A^{(k)}$ связан с соответствующим сингулярным k-подмногообразием.

Теорема 3. *Индекс эллиптического виртуального оператора*

$$A' : \sum_{k=0}^{m} \oplus H_1^{(k)} \to \sum_{k=0}^{m} \oplus H_2^{(k)}$$

представим в виде суммы соответствующих индексов:

$$\operatorname{Ind} A' = \sum_{k=0}^{m} \operatorname{Ind} A^{(k)}. \tag{2}$$

[1]Подразумевается непрерывность по существенной норме $|||\cdot|||$.

Замечание 3. Если рассматривать эллиптический псевдодифференциальный оператор в пространстве $H^s(\mathbb{R}^m_+)$ (см. [9]) с гладким символом $A(x,\xi)$, то в действительности мы имеем два компонента виртуального оператора: $A^{(m)}$, соответствующий замыканию внутренних точек $\mathbb{R}^m_+$, и $A^{(m-1)}$, соответствующий граничным точкам $\mathbb{R}^{m-1}$. Операторные символы имеют различную природу для внутренних и граничных точек. В первом случае символ — это интегральный оператор по всему пространству $\mathbb{R}^m$, а во втором случае — это интегральный оператор по полупространству. Индекс оператора $A^{(m)}$ будет нулевым согласно классической теореме Атьи—Зингера, а вот индекс $A^{(m-1)}$ зависит от так называемого индекса факторизации эллиптического символа $A(x,\xi)$ в граничной точке $x \in \mathbb{R}^{m-1}$.

4.3. Конкретизация: псевдодифференциальные операторы на компактном многообразии с краем, имеющим особенности. Здесь мы продемонстрируем, как работает предложенная абстрактная схема для конкретного псевдодифференциального оператора A на m-мерном компактном многообразии M с краем, содержащим особенности. Такой оператор обычно определяют с помощью символа $A(x,\xi), (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2m}$ (здесь мы используем локальные координаты; обычно символ задается на (ко)касательном расслоении). Предполагается, что на границе ∂M имеются гладкие компактные подмногообразия M_k размерности $0 \leqslant k \leqslant m-1$, которые представляют собой особенности границы. Эти особенности границы описываются специальными локальными представителями оператора A в точке $x_0 \in M$ на карте $U \ni x_0$ следующим образом:

$$(A_{x_0}u)(x) = \int\limits_{D_{x_0}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i\xi\cdot(x-y)} A(\varphi(x_0),\xi) u(y) d\xi dy, \quad x \in D_{x_0},$$

где $\varphi : U \to D_{x_0}$ — диффеоморфизм, и каноническая область D_{x_0} имеет разную форму в зависимости от расположения точки x_0 на многообразии M. Рассматриваются следующие канонические области: D_{x_0}: $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}$, $W^k = \mathbb{R}^k \times C^{m-k}$, где C^{m-k} — выпуклый конус в $\mathbb{R}^{m-k}$. Иначе говоря, граница ∂M может содержать конические точки и ребра различных размерностей.

Псевдодифференциальный оператор A изучается в пространствах Соболева—Слободецкого $H^s(M)$, и в качестве локального варианта этих пространств выбираются пространства $H^s(D_{x_0})$.

Определение 5. *Символом* псевдодифференциального оператора A называется оператор-функция $A(x)$: $M \to \{A_x\}_{x \in M}$, которая определяется локальными представителями оператора A.

При дополнительных условиях гладкости функции $A(x,\xi)$ нетрудно прийти к следующему результату.

Теорема 4. *Оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда его символ состоит из фредгольмовых операторов.*

Это так называемый локальный принцип, простейшие применения можно найти в [1,8]. С учетом структуры локальных представителей дадим следующее определение.

Определение 6. Псевдодифференциальный оператор A называется *эллиптическим*, если его символ состоит из обратимых операторов.

Замечание 4. Если эллиптичность нарушается на подмногообразии M_k, то для получения фредгольмовости следует модифицировать соответствующие локальные представители оператора A, добавив к ним граничные или кограничные операторы (см. [1]).

4.4. Индекс фредгольмова оператора. Используя как раньше разбиение единицы на многообразии M, эллиптический символ $A(x)$ и теорию огибающих И. Б. Симоненко (см. [8,19]), мы можем построить n виртуальных операторов A_j по числу сингулярных подмногообразий, включая всю границу ∂M и само многообразие M. Результирующий виртуальный оператор A' действует в прямых суммах пространств

$$A' : H^s(\mathbb{R}^m) \oplus H^s(\mathbb{R}^m_+) + \sum_{k=0}^{m-2} \oplus H^s(C^{m-k}) \to H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m) \oplus H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m_+) + \sum_{k=0}^{m-2} \oplus H^{s-\alpha}(C^{m-k})$$

при условии, что символ исходного оператора A имеет порядок α,

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \leqslant |A(x,\xi)| \leqslant c_2(1+|\xi|)^\alpha$$

с положительными постоянными c_1, c_2 для всех (x,ξ).

Поскольку символы виртуального оператора и исходного одни и те же и гомотопии в классе символов эквивалентны гомотопиям в классе операторов, имеет место следующий результат.

Теорема 5. *Индекс фредгольмова оператора A определяется формулой*

$$\operatorname{Ind} A = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Ind} A_j.$$

Заключение. Конечно, предлагаемые конструкции выглядят довольно абстрактно. Однако следует отметить, что все они появились в результате размышлений автора о теории псевдодифференциальных уравнений и краевых задач на многообразиях с негладким краем. В целом такая теория укладывается в описанную выше схему, и в более ранних работах автора уже присутствовали элементы этой теории. К сожалению, в ней еще много неопределенностей, но по крайней мере она объясняет, как должна выглядеть общая краевая задача для эллиптического псевдодифференциального уравнения и в каком направлении следует двигаться в поисках ее разрешимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В. Б.* Регуляризация многомерных сингулярных интегральных уравнений в негладких областях// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1998. — *59*. — С. 72–105.
2. *Васильев В. Б.* Псевдодифференциальные операторы и уравнения переменного порядка// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 9. — С. 1184–1195.
3. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973.
4. *Пламеневский Б. А.* Алгебры псевдодифференциальных операторов. — М.: Наука, 1986.
5. *Пламеневский Б. А., Розенблюм Г. В.* Псевдодифференциальные операторы с разрывными символами: K-теория и формулы индекса// Функц. анал. прилож. — 1992. — *26*, № 4. — С. 45–56.
6. *Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н.* Разрешимые алгебры операторов// Алгебра и анализ. — 1994. — *6*, № 5. — С. 1–87.
7. *Ремпель Ш., Шульце Б. В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1983.
8. *Симоненко И. Б.* Локальный метод в теории операторов инвариантных относительно сдвига и их огибающих. — Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2007.
9. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
10. *Dynin A.* Inversion problem for singular integral operators: C^*-approach// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1978. — *75*. — P. 4668–4670.
11. *Dynin A.* Multivariable Wiener–Hopf operators. I. Representations.// Integral Equat. Oper. Theory. — 1986. — *9*. — P. 537–556.
12. *Dynin A.* Multivariable Wiener–Hopf operators. II. Spectral topology and solvability// Integr. Equat. Oper. Theory. — 1987. — *10*. — P. 554–576.
13. *Egorov Yu. V., Schulze B. W.* Pseudo-differential operators, singularities, applications. — Basel: Birkhäuser-Verlag, 1997.
14. *Mikhlin S. G., Prößdorf S.* Singular integral operators. — Berlin: Akademie-Verlag, 1986.
15. *Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Schulze B. W., Sternin B. Yu.* Elliptic theory on singular manifolds. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006.
16. *Schulze B. W.* Boundary value problems and singular pseudo-differential operators. — Chichester: Wiley, 1998.
17. *Schulze B. W., Sternin B., Shatalov V.* Differential equations on singular manifolds; semiclassical theory and operator algebras. — Berlin: Wiley, 1998.

18. *Vasil'ev V. B.* Wave factorization of elliptic symbols: theory and applications. Introduction to the theory of boundary value problems in non-smooth domains. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publ., 2000.
19. *Vasil'ev V. B.* Elliptic operators and their symbols// Demonstr. Math. — 2019. — *52*. — P. 361–369.

Васильев Владимир Борисович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: vdv57@inbox.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 19–30
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-19-30

УДК 517.956

КОВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2020 г. **Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. В. СУББОТИН**

Аннотация. Дается внутреннее описание класса всех нелинейных дифференциальных операторов первого порядка на пространстве наборов, состоящих из непрерывно дифференцируемых векторных и скалярных полей на $\mathbb{R}^3$. Операторы этого класса инвариантны относительно сдвигов $\mathbb{R}^3$ и преобразуются ковариантным образом при вращениях $\mathbb{R}^3$.

Ключевые слова: дифференциальный оператор первого порядка, дивергентный дифференциальный оператор, векторное поле, псевдовекторное поле, ковариантность.

FIRST-ORDER COVARIANT DIFFERENTIAL OPERATORS

© 2020 **YU. P. VIRCHENKO, A. V. SUBBOTIN**

Abstract. An internal description of the class of all nonlinear differential operators of the first order on the space of collections consisting of continuously differentiable vector and scalar fields on $\mathbb{R}^3$ is given. Operators of this class are invariant with respect to translations of $\mathbb{R}^3$ and are transformed by the covariant way under rotations of $\mathbb{R}^3$.

Keywords and phrases: first-order differential operator, divergence differential operator, vector field, pseudo-vector field, covariance.

AMS Subject Classification: 35F50

1. Введение. В теоретической физике при решении задач, которые формулируются в терминах дифференциальных уравнений в частных производных, ключевым вопросом является задача конструирования адекватных эволюционных уравнений на основе физически оправданных положений. Решение таких задач, в конечном счете, основано на описании классов уравнений, удовлетворяющих поставленным физическим условиям. При наличии внутреннего описания каждого из таких классов, физик получает возможность выбора подходящего уравнения для решения конкретных задач посредством постановки экспериментов и сравнения полученных результатов с предсказаниями, полученными в результате решения математических задач, которые моделируют физическую ситуацию. Именно таким образом решались физические проблемы и развивалась связанная с их решением математическая физика. Именно на этом пути в математической физике возникли: уравнение теплопроводности, система уравнений гидродинамики ньютоновских жидкостей, система уравнений Максвелла и т.д., которые представляются в настоящее время в достаточной степени обоснованными с физической точки зрения.

Настоящая работа посвящена проблеме конструирования подходящих эволюционных дифференциальных уравнений, предназначенных для описания динамики конденсированных сред в терминах полей на $\mathbb{R}^3$. Конкретно, в работе предлагается описание определенного класса эволюционных подходящих уравнений в частных производных первого порядка по пространственным координатам. Таковыми являются уравнения математической физики, при конструировании которых пренебрегают физическими механизмами энергетической диссипации. В ситуации, когда среда не подвергается внешним воздействиям, как стационарным, так и нестационарным, коэффициенты таких уравнений не зависят явным образом ни от времени, ни от пространственных переменных. Кроме того, такие уравнения обладают свойством независимости их вида от конкретной системы координат, в которой описываются физические поля. Математически это выражается в виде их свойства ковариантности при действии преобразований группы $\mathcal{O}_3$. Такие уравнения мы будем называть *изотропными*.

Требование ковариантности приводит к тому, что поля на $\mathbb{R}^3$ при действии преобразований группы $\mathcal{O}_3$ должны преобразовываться по представлениям этой группы (см., например, [9]), и, точно так же, по представлениям этой группы должны преобразовываться коэффициенты дифференциальных операторов, определяющих уравнение. Эти требования накладывают довольно значительные ограничения на общий вид эволюционных дифференциальных уравнений.

Проблеме создания общего метода конструирования такого сорта уравнений посвящено множество работ математической физики (см., например, [1–7,13–17,20]). Подавляющее их большинство основано на модификациях традиционных в теоретической физике формализмов Лагранжа или Гамильтона. Однако, по-видимому, такие подходы не являются адекватными при построении эволюционных уравнений для описания конденсированных сред, обладающих внутренними степенями свободы. По этой причине возникает вопрос о более общем подходе к конструированию уравнений неравновесной термодинамики. В связи с этим, в настоящей работе предлагается решение задачи об описании класса любых систем динамических уравнений первого порядка по пространственным координатам, изотропных в указанном выше смысле, для векторных и скалярных полей на $\mathbb{R}^3$.

2. Ковариантные системы уравнений. Рассмотрим линейное многообразие наборов $\mathsf{Y}(\boldsymbol{x},t) = \langle Y_a(\boldsymbol{x},t);\ a = 1,\dots,N\rangle$ функций на $\mathbb{R}^3$ со значениями в $\mathbb{R}$, т.е. функций Y: $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^N$. Кроме того, будем считать, что функции, составляющие каждый из наборов, зависят от параметра $t \in \mathbb{R}_+$, которому будем приписывать физический смысл времени.

Далее, будем предполагать, что функции $Y_a(\boldsymbol{x},t)$, $a = 1,\dots,N$, дифференцируемы по $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ и по $t \in \mathbb{R}_+$. Это означает, что рассматриваемое нами многообразие является линейным топологическим пространством $[C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N$ со счетно-нормированной топологией. В рамках этого пространства имеется возможность изучать решения дифференциальных уравнений первого порядка, которым удовлетворяют элементы $\mathsf{Y}(\boldsymbol{x},t)$ этого пространства. Нашей целью является описание многообразия всех допустимых систем эволюционных уравнений на пространстве $[C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N$, имеющих следующий вид:

$$\dot{\mathsf{Y}}(\boldsymbol{x},t) = \big(\mathsf{L}[\mathsf{Y}]\big)(\boldsymbol{x},t) \tag{2.1}$$

и удовлетворяющих формулируемому ниже условию ковариантности. Здесь точка обозначает дифференцирование по t и L: $[C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N \mapsto [C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N$ — дифференциальный оператор первого порядка по компонентам вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, в общем случае нелинейный. Он определяется формулой

$$(\mathsf{L}[\mathsf{Y}])(\boldsymbol{x},t) = \big(\mathcal{A}_k(\mathsf{Y})\nabla_k\mathsf{Y} + \mathsf{H}(\mathsf{Y})\big)(\boldsymbol{x},t). \tag{2.2}$$

Здесь и далее ∇_k, $k = 1,2,3,$ — дифференциальная операция градиента в $\mathbb{R}^3$, а $\mathcal{A}_k(\mathsf{Y})$, $k = 1,2,3,$ — тройка матриц-функций от $\mathsf{Y} \in \mathbb{R}^N$ со значениями в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Они не зависят от $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ и t и при каждом фиксированном $\mathsf{Y} \in \mathbb{R}^N$ и $k = 1,2,3$ матрица $\mathcal{A}_k(\mathsf{Y})$ действует на набор

$$\nabla_k\mathsf{Y}(\boldsymbol{x},t) = \Big\langle \nabla_k Y_a(\boldsymbol{x},t);\ a = 1,\dots,N\Big\rangle.$$

Набор $\mathsf{H}(\mathsf{Y}) = \langle H_a(\mathsf{Y}); a = 1,\dots,N\rangle$ состоит из непрерывных функций на $\mathbb{R}^N$, которые не зависят явно ни от $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, ни от t. Кроме того, здесь и далее принимается алгебраическое соглашение о суммировании по двукратно повторяющимся векторным индексам. В данном случае осуществляется суммирование по $k = 1,2,3$. Линейное многообразие всех таких операторов обозначим посредством $\mathfrak{K}_1$. Заметим также, что употребленный выше термин *системы эволюционных уравнений* указывает только лишь на то, что эти системы имеют вид (2.1), и он не несет какого-либо физического смысла.

Предположим теперь, что линейное пространство наборов Y преобразуется по, вообще говоря, приводимому представлению группы $\mathcal{O}_3$ или ее подгруппы $\mathcal{O}_{3,+}$ непрерывных вращений пространства $\mathbb{R}^3$ (см., например, [9]). Далее в этой работе мы будем рассматривать только случай, когда пространство $\mathbb{R}^N$ наборов Y представляется в виде прямой суммы линейных пространств, каждое из которых преобразуется по неприводимому векторному представлению по отношению к непрерывным вращениям $\mathbb{R}^3$, в частности, псевдовекторному, либо является одномерным пространством скаляров, которое мы рассматриваем как преобразующееся по тривиальному представлению. При таком разложении каждый из наборов Y представляется в виде пары $\mathbf{Y} = \langle \mathsf{W}, \mathsf{Z}\rangle$, где набор $\mathsf{W} = \langle Y_a; a = 1, \ldots, 3n\rangle$ состоит только из компонент векторных представлений, число которых полагается равным n, так что W представляется в виде набора $\langle \boldsymbol{W}^{(a)}; a = 1, \ldots, n\rangle$, компоненты которого являются векторами (псевдовекторами). Набор

$$\mathsf{Z} = \big\langle Z^{(a)};\ a = 1, \ldots, r\big\rangle = \big\langle Y_a;\ a = 3n+1, \ldots, N\big\rangle, \quad Z^{(a)} = Y_{a-2n}$$

состоит из $r = N - 3n$ скаляров.

Компоненты наборов $\mathsf{Y}(\boldsymbol{x}, t)$ функций распределяются так, чтобы их значения были согласованы с указанным расщеплением наборов $\mathsf{Y} \in \mathbb{R}^N$. В результате, они представляются в виде $\mathsf{Y}(\boldsymbol{x}, t) = \langle \mathsf{W}(\boldsymbol{x}, t), \mathsf{Z}(\boldsymbol{x}, t)\rangle$.

Уравнение (2.1) с оператором $\mathsf{L}[\mathsf{Y}]$ вида (2.2), при таком расщеплении набора Y, записывается в виде системы двух уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathsf{W}}(\boldsymbol{x}, t) &= \big(\mathcal{A}_k^{(w)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\nabla_k \mathsf{W} + \mathcal{A}_k^{(wz)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\nabla_k \mathsf{Z} + \mathsf{F}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\big)(\boldsymbol{x}, t), \\ \dot{\mathsf{Z}}(\boldsymbol{x}, t) &= \big(\mathcal{A}_k^{(zw)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\nabla_k \mathsf{W} + \mathcal{A}_k^{(z)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\nabla_k \mathsf{Z} + \mathsf{G}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\big)(\boldsymbol{x}, t), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где введено разложение $\mathsf{H}(\mathsf{Y}) = \langle \mathsf{F}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}), \mathsf{G}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\rangle$, соответствующие разложению пространства $\mathbb{R}^N$, и соответствующим образом распределены на блоки $\mathcal{A}_k^{(w)}$, $\mathcal{A}_k^{(wz)}$, $\mathcal{A}_k^{(zw)}$, $\mathcal{A}_k^{(z)}$ с размерами $n \times n$, $n \times r$, $r \times r$, $r \times n$, соответственно, значения матриц-функций $\mathcal{A}_k(\mathsf{Y})$:

$$\mathcal{A}_k(\mathsf{Y}) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_k^{(w)}(\mathsf{Y}) & \mathcal{A}_k^{(wz)}(\mathsf{Y}) \\ \mathcal{A}_k^{(zw)}(\mathsf{Y}) & \mathcal{A}_k^{(z)}(\mathsf{Y}) \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Так как каждая компонента набора $\nabla_k \mathsf{W}(\boldsymbol{x}, t)$, на который действуют матрицы $\mathcal{A}_k^{(w)}$, $k = 1, 2, 3$, представляет собой вектор в $\mathbb{R}^3$, каждый элемент $(\mathcal{A}_k^{(w)})_{a,b}$, $a, b = 1, \ldots, n$ этой матрицы есть некоторая (3×3)-матрица, $((\mathcal{A}_k^{(w)})_{a,b})_{jl} \equiv T_{jkl}^{(a,b)}$, $j, l = 1, 2, 3$. По этой же причине каждый элемент матриц $\mathcal{A}_k^{(wz)}$, $\mathcal{A}_k^{(zw)}$ представляется трехмерным вектором. В связи с этим для любого $k = 1, 2, 3$ каждый элемент $(\mathcal{A}_k^{(wz)})_{a,b}$, $a = 1, \ldots, n$, $b = n+1, \ldots, n+r$, и каждый элемент $(\mathcal{A}_k^{(zw)})_{a,b}$, $a = n+1, \ldots, r$, $b = 1, \ldots, n$, представляет собой некоторый вектор. Введем обозначения

$$\big((\mathcal{A}_k^{(wz)})_{a,b}\big)_j \equiv T_{jk}^{(a,b)}, \quad j = 1, 2, 3; \qquad \big((\mathcal{A}_k^{(zw)})_{a,b}\big)_l \equiv \tilde{T}_{kl}^{(a,b)}, \quad l = 1, 2, 3,$$

для соответствующих значений a и b. Наконец, для любого фиксированного $k = 1, 2, 3$ матричные элементы $(\mathcal{A}_k^{(w)})_{a,b} \equiv T_k^{(a,b)}$, $a, b = n+1, \ldots, n+r$, представляются числами из $\mathbb{R}$. При этом мы опустили указание зависимостей матричных элементов от наборов W и Z. В терминах этих матричных элементов, восстанавливая указание зависимости введенных матричных элементов от наборов W и Z, можем записать систему уравнений (2.3) в виде

$$\begin{aligned}\dot W_j^{(a)}(\boldsymbol{x},t) &= \left(\sum_{b=1}^{n} T_{jkl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\nabla_k W_l^{(b)} + \sum_{b=n+1}^{n+r} T_{jk}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\nabla_k Z^{(b)} + F_j^{(a)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\right)(\boldsymbol{x},t),\\ \dot Z^{(a)}(\boldsymbol{x},t) &= \left(\sum_{b=1}^{n} \tilde T_{kl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\nabla_k W_l^{(b)} + \sum_{b=n+1}^{n+r} T_{k}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\nabla_k Z^{(b)} + G^{(a)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\right)(\boldsymbol{x},t),\end{aligned} \tag{2.5}$$

соответственно, для $a = 1,\dots,n$ и $a = n+1,\dots,n+r$, где в первом уравнении, соответствующем номерам $a = 1,\dots,n$, мы использовали покомпонентную запись трехмерных векторов для значений векторных полей $\boldsymbol{W}^{(a)}(\boldsymbol{x},t) = \langle W_j^{(a)},\ j = 1,2,3\rangle$.

Для определения понятия ковариантности систем уравнений типа (2.5) дополнительно распределим компоненты набора векторов W на два типа так, что компоненты $\boldsymbol{W}^{(a)}$ с номерами $a = 1,\dots,p$ преобразуются как векторы по отношению к преобразованиям из группы $\mathcal{O}_3$, а компоненты с номерами $a = p+1,\dots,p+q = n$ преобразуются как векторы только по отношению к непрерывным вращениям пространства $\mathbb{R}^3$ и остаются неизменными при дискретных преобразованиях группы $\mathcal{O}_3$, т.е. являются псевдовекторами. Распределим, в соответствии с таким расщеплением, компоненты векторных полей из набора $\mathsf{W}(\boldsymbol{x},t)$ так, что значения полей $\boldsymbol{W}^{(a)}(\boldsymbol{x},t)$, $a = 1,\dots,p$, преобразуются как векторы, а значения полей $\boldsymbol{W}^{(a)}(\boldsymbol{x},t)$, $a = p+1,\dots,p+q$, преобразуются как псевдовекторы.

Определение 2.1. Тензор-функцию $T_{j_1\dots j_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ со значениями на пространстве тензоров (псевдотензоров) ранга $l \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ назовем ковариантной[1] по отношению к преобразованиям группы $\mathcal{O}_3$ (группы $\mathcal{O}_{3,+}$), если для любой ортогональной матрицы $\mathcal{Q}$ этой группы имеет место соотношение

$$\mathcal{Q}_{j_1k_1}\dots\mathcal{Q}_{j_lk_l}T_{k_1\dots k_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = T_{j_1\dots j_l}(\mathcal{Q}\mathsf{W},\mathsf{Z}). \tag{2.6}$$

Если функция принимает псевдотензорные значения, то для любой матрицы $\mathcal{Q}$, представляющей полное отражение $\mathbb{R}^3$, выполняется соотношение

$$\mathcal{Q}_{j_1k_1}\dots\mathcal{Q}_{j_lk_l}T_{k_1\dots k_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = (-1)^{l-1}T_{j_1\dots j_l}(\mathcal{Q}\mathsf{W},\mathsf{Z}). \tag{2.7}$$

При $l = 0$ такая функция называется скалярной (псевдоскалярной).

Определение 2.2. Систему уравнений (2.5) назовем ковариантной по отношению к преобразованиям группы $\mathcal{O}_3$, если для любых наборов W и Z коэффициенты системы $F_j^{(a)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T_k^{(a,b)}$, $T_{jk}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T_{kl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T_{jkl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ представляют собой ковариантные функции, соответственно, с $l = 1,2,3$ и являются:

(1) $T_{jkl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ — тензорами третьего ранга по индексам j, k, l, если $a,b = 1,\dots,p$ и $a,b = p+1,\dots,p+q$, и псевдотензорами третьего ранга, если $a = 1,\dots,p$, $b = p+1,\dots,p+q$, либо $a = p+1,\dots,p+q$, $b = 1,\dots,p$;

(2) $T_{jk}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ — тензорами второго ранга по индексам j, k при $a = 1,\dots,p$ и псевдотензорами второго ранга при $a = p+1,\dots,n$, $b = n+1,\dots,n+r$;

(3) $\tilde T_{kl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ с $a = n+1,\dots,n+r$ — тензорами второго ранга по k, l при $b = 1,\dots,p$ и псевдотензорами второго ранга при $b = p+1,\dots,n$;

(4) $T_k^{(a,b)}$ — векторами с компонентами $k = 1,2,3$ при $a,b = n+1,\dots,n+r$;

(5) $F_j^{(a)}$ — векторами компонентами $j = 1,2,3$ при $a = 1,\dots,p$ и псевдовекторами при $a = p+1,\dots,n$;

(6) $G^{(a)}$, $a = n+1,\dots,n+r$, являются скалярными функциями.

---

[1] В монографиях [8, 12] ковариантные функции называются комитантами. По поводу используемой терминологии тензорного анализа см., например, [18]. В работе мы не делаем различия между ковариантными и контравариантными тензорами.

Как уже было сказано выше, в следующих разделах будет дано описание линейного многообразия операторов вида (2.2), ковариантных при преобразованиях группы $\mathcal{O}_3$. Из приведенного выше определения следует, что решение такой задачи сводится к описанию линейных многообразий каждой из ковариантных функций, которые представляют коэффициенты системы (2.5), т.е. линейных многообразий непрерывных (псевдо)тензор-функций $T^{(a,b)}_{jkl}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T^{(a,b)}_{jk}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T^{(a,b)}_{kl}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ и вектор-функций $T^{(a,b)}_{k}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$.

3. Ковариантные тензор-функции. В этом разделе предлагается подход к описанию любых ковариантных тензор-функций на $\mathbb{R}^3$ и, в частности, тензор-функций $T^{(a,b)}_{jkl}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T^{(a,b)}_{jk}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T^{(a,b)}_{kl}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ и вектор-функций $T^{(a,b)}_{k}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $F^{(a)}_{k}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$. Для простоты, мы ограничиваемся только случаем, когда эти функции представляются полиномами от компоненты векторов наборов W. При этом мы не будем интересоваться характером зависимости этих функций от компоненты набора Z.

Определение 3.1. Ковариантную (псевдо)тензор-функцию $T_{j_1\ldots j_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ ранга l назовем полиномиальной на $\mathbb{R}^N$, если она определяется формулой

$$T_{j_1\ldots j_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D}\sum_{\langle a_1,\ldots,a_d\rangle\in I_n^d} A^{(a_1,\ldots,a_d)}_{j_1\ldots j_l k_1\ldots k_d}(\mathsf{Z}) W^{(a_1)}_{k_1}\ldots W^{(a_d)}_{k_d}. \tag{3.1}$$

Введем теперь в рассмотрение инвариантные тензоры (псевдотензоры) на $\mathbb{R}^3$.

Определение 3.2. Тензор (псевдотензор) $A^{(a_1,\ldots,a_d)}_{j_1,\ldots,j_m}$ ранга $m\in\mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется инвариантным относительно преобразований группы $\mathcal{O}_3$ (группы $\mathcal{O}_{3,+}$), если для любой ортогональной матрицы из этой группы имеет место

$$\mathcal{Q}_{j_1k_1}\ldots\mathcal{Q}_{j_mk_m} A^{(a_1,\ldots,a_d)}_{k_1,\ldots,k_m} = A^{(a_1,\ldots,a_d)}_{j_1,\ldots,j_m}\,. \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Пусть $T_{j_1\ldots j_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ — ковариантная полиномиальная (псевдо)тензор-функция ранга l. Тогда ее коэффициенты в формуле* (3.1) *являются инвариантными (псевдо)тензорами при каждом фиксированном Z.*

Доказательство. На основании (3.1), используя ортогональность матрицы $\mathcal{Q}$, с одной стороны, получаем, что

$$\mathcal{Q}_{i_1j_1}\ldots\mathcal{Q}_{i_lj_l}T_{j_1\ldots j_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D}\sum_{\langle a_1,\ldots,a_d\rangle\in I_n^d}\mathcal{Q}_{i_1j_1}\ldots\mathcal{Q}_{i_lj_l}A^{(a_1,\ldots,a_d)}_{j_1\ldots j_l k_1\ldots k_d}(\mathsf{Z})W^{(a_1)}_{k_1}\ldots W^{(a_d)}_{k_d} =$$

$$= \sum_{d=0}^{D}\sum_{\langle a_1,\ldots,a_d\rangle\in I_n^d}\mathcal{Q}_{i_1j_1}\ldots\mathcal{Q}_{i_lj_l}(\mathcal{Q}_{s_1k_1}\mathcal{Q}_{s_1m_1})\ldots(\mathcal{Q}_{s_dk_d}\mathcal{Q}_{s_dm_d})A^{(a_1,\ldots,a_d)}_{j_1\ldots j_l k_1\ldots k_d}(\mathsf{Z})W^{(a_1)}_{m_1}\ldots W^{(a_d)}_{m_d} =$$

$$= \sum_{d=0}^{D}\sum_{\langle a_1,\ldots,a_d\rangle\in I_n^d}\mathcal{Q}_{i_1j_1}\ldots\mathcal{Q}_{i_lj_l}\mathcal{Q}_{s_1k_1}\ldots\mathcal{Q}_{s_dk_d}A^{(a_1,\ldots,a_d)}_{j_1\ldots j_l k_1\ldots k_d}(\mathsf{Z})(\mathcal{Q}_{s_1m_1}W^{(a_1)}_{m_1})\ldots(\mathcal{Q}_{s_dm_d}W^{(a_d)}_{m_d}),$$

а, с другой стороны,

$$T_{i_1\ldots i_l}(\mathcal{Q}\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D}\sum_{\langle a_1,\ldots,a_d\rangle\in I_n^d} A^{(a_1,\ldots,a_d)}_{i_1\ldots i_l s_1\ldots s_d}(\mathsf{Z})(\mathcal{Q}_{s_1m_1}W^{(a_1)}_{m_1})\ldots(\mathcal{Q}_{s_dm_d}W^{(a_d)}_{m_d})\,.$$

Подставляя эти разложения в (2.6) и сравнивая обе их части, пользуясь произвольностью выбора векторов (псевдовекторов) $\boldsymbol{W}^{(a)}$, $a=1,\ldots,n$, составляющих набор W, находим

$$\mathcal{Q}_{i_1j_1}\ldots\mathcal{Q}_{i_lj_l}\mathcal{Q}_{s_1k_1}\ldots\mathcal{Q}_{s_dk_d}A^{(a_1,\ldots,a_d)}_{j_1\ldots j_l k_1\ldots k_d}(\mathsf{Z}) = A^{(a_1,\ldots,a_d)}_{i_1\ldots i_l s_1\ldots s_d}(\mathsf{Z}). \qquad \square$$

Ввиду доказанного утверждения, для решения поставленной задачи описания ковариантных функций необходимо установить общую структуру инвариантных тензоров. Множество всех инвариантных тензоров в $\mathbb{R}^3$ описывается следующим утверждением.

Теорема 3.1 (см., например, [9, с. 198]). *Каждый инвариантный относительно преобразований группы $\mathcal{O}_3$ и, в частности, относительно преобразований группы $\mathcal{O}_{3,+}$, тензор $A_{j_1,\dots,j_n}$ четного ранга n принадлежит линейной оболочке тензоров $\delta_{j_{k_1}j_{k_2}}\dots\delta_{j_{k_{n-1}}j_{k_n}}$, а каждый инвариантный относительно преобразований группы $\mathcal{O}_{3,+}$ тензор $A_{j_1,\dots,j_n}$ нечетного ранга n принадлежит линейной оболочке тензоров $\varepsilon_{j_{k_1}j_{k_2}j_{k_3}}\delta_{j_{k_4}j_{k_5}}\dots\delta_{j_{k_{n-1}}j_{k_n}}$, где ε_{jkl} — символ Леви-Чивита (полностью антисимметричный псевдотензор третьего ранга), где $\langle k_1,\dots,k_n\rangle$ — перестановки множества $I_n=\{1,\dots,n\}$. Не существует инвариантных относительно преобразований полной группы $\mathcal{O}_3$ псевдотензоров четного ранга и тензоров нечетного ранга.*

Опишем базисы в каждой из указанных линейных оболочек. Пусть n — четное натуральное число. Будем обозначать посредством $\mathfrak{c}$ каждый из наборов $\{k_i,k_{i+1}\}$, $i\in\{1,3,\dots,n-1\}$, составленных из непересекающихся пар номеров $k_j\in I_n$, $j=1,\dots,n$, которые будем называть *попарными разбиениями* I_n. Семейство всех попарных разбиений множества I_n обозначим как $\mathfrak{C}(I_n)$. На основе теоремы 3.1 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Совокупность тензоров вида*

$$A^{(+)}_{j_1\dots j_n}(\mathfrak{c})=\prod_{\{p,q\}\in\mathfrak{c}}\delta_{j_pj_q},\quad \mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n),$$

составляет базис в линейном многообразии инвариантных относительно группы $\mathcal{O}_3$ тензоров четного ранга, а совокупность псевдотензоров

$$A^{(-)}_{j_1\dots j_n}(\mathfrak{c};l_1,l_2,l_3)=\varepsilon_{j_{l_1},j_{l_2},j_{l_3}}\prod_{\{p,q\}\in\mathfrak{c}}\delta_{j_pj_q},\quad \mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{l_1,l_2,l_3\}),\quad \{l_1,l_2,l_3\}\subset I_n,$$

где l_1,l_2,l_3 выбраны упорядоченными по возрастанию, составляет базис в линейном многообразии инвариантных относительно группы $\mathcal{O}_{3,+}$ псевдотензоров нечетного ранга так, что любой инвариантный относительно группы $\mathcal{O}_{3,+}$ (псевдо)тензор $A_{j_1,\dots,j_n}$ представляется в виде

$$A_{j_1,\dots,j_n}=\sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n)}\lambda^{(+)}(\mathfrak{c})A^{(+)}_{j_1,\dots j_n}(\mathfrak{c})+\sum_{\{l_1,l_2,l_3\}\subset I_n}\ \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{l_1,l_2,l_3\})}\lambda^{(-)}(\mathfrak{c})A^{(-)}_{j_1\dots j_n}(\mathfrak{c};l_1,l_2,l_3),\tag{3.3}$$

где коэффициенты $\lambda^{(+)}(\mathfrak{c})=0$, если n нечетно, и $\lambda^{(-)}(\mathfrak{c})=0$, если n четно.

Доказательство. Согласно теореме 3.1, необходимо доказать, по отдельности, линейную независимость всех тензоров $A^{(+)}_{j_1\dots j_n}$ при четном значении n и линейную независимость всех псевдотензоров $A^{(-)}_{j_1\dots j_n}$ нечетном значении n.

Рассмотрим случай четного ранга n. Доказательство проводится индукцией по $n/2$. Предположим, что имеется линейная независимость тензоров $A^{(+)}_{j_1\dots j_{n-2}}$. Допустим, что имеется такой набор коэффициентов $\lambda(\mathfrak{c})$, $\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n)$, для которого имеет место соотношение

$$\sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n)}\lambda(\mathfrak{c})A^{(+)}_{j_1\dots j_n}(\mathfrak{c})=0.$$

Для каждой пары $\{s_1,s_2\}\subset I_n$ выделим из этого равенства сумму

$$D^{(s_1,s_2)}_{n-2}=\sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{s_1,s_2\})}\lambda(\mathfrak{c},\{s_1,s_2\})\prod_{\{k,l\}\in\mathfrak{c}}\delta_{j_k,j_l}$$

и запишем соотношение линейной зависимости в виде

$$\delta_{j_{s_1}j_{s_2}}D^{(s_1,s_2)}_{n-2} + \sum_{\{k_1,k_2\}\in I_n\setminus\{s_1,s_2\}} \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{s_1,s_2,k_1,k_2\})} \prod_{\{l,m\}\in\mathfrak{c}} \delta_{j_l j_m}\times$$
$$\times\Big[\delta_{j_{s_1}j_{k_1}}\delta_{j_{k_2}j_{s_2}}\lambda\big(\mathfrak{c}\cup\big\{\{s_1,k_1\},\{s_2,k_2\}\big\}\big) + \delta_{j_{s_1}j_{k_2}}\delta_{j_{k_1}j_{s_2}}\lambda\big(\mathfrak{c}\cup\big\{\{s_1,k_1\},\{s_2,k_2\}\big\}\big)\Big] = 0.$$

Произведем операцию свертывания выражения в левой части равенства по индексам j_{s_1} и j_{s_2}:

$$3D^{(s_1,s_2)}_{n-2} + \sum_{\{k_1,k_2\}\in I_n\setminus\{s_1,s_2\}} \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{s_1,s_2,k_1,k_2\})} \delta_{j_{k_1}j_{k_2}} \prod_{\{l,m\}\in\mathfrak{c}} \delta_{j_l j_m}\times$$
$$\times\Big(\lambda\big(\mathfrak{c}\cup\big\{\{s_1,k_1\},\{s_2,k_2\}\big\}\big) + \lambda\big(\mathfrak{c}\cup\big\{\{s_1,k_1\},\{s_2,k_2\}\big\}\big)\Big) = 0.$$

После этого перепишем второе слагаемое в следующей форме, изменив порядок суммирования:

$$\sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{s_1,s_2\})} \prod_{\{l,m\}\in\mathfrak{c}} \delta_{j_l j_m} \sum_{\{k_1,k_2\}\in I_n\setminus\{s_1,s_2\}:\{k_1,k_2\}\in\mathfrak{c}} \times$$
$$\times\Big(\lambda\Big(\big(\mathfrak{c}\setminus\{\{k_1,k_2\}\}\big)\cup\big\{\{s_1,k_1\},\{s_2,k_2\}\big\}\Big) + \lambda\Big(\big(\mathfrak{c}\setminus\{\{k_1,k_2\}\}\big)\cup\big\{\{s_1,k_1\},\{s_2,k_2\}\big\}\Big)\Big).$$

В силу индуктивного предположения о линейной независимости совокупности всех тензоров $A^{(+)}_{j_1,\dots,j_{n-2}}$, приравнивая нулю коэффициенты при различных тензорах этой совокупности, получаем систему линейных уравнений для $(n-1)!!$ коэффициентов $\lambda(\mathfrak{c})$, $\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n)$,

$$\big[(3\cdot\mathbf{1}+\mathsf{R})\lambda\big](\mathfrak{c}';s) = 3\lambda(\mathfrak{c}';s) + \sum_{\substack{\{k_1,k_2\}\subset I_n\setminus\{1,s\}:\\ \{k_1,k_2\}\in\mathfrak{c}'}} \Big(\lambda\big(\mathfrak{c}';k_1\big)\big|_{k_2=s} + +\lambda\big(\mathfrak{c}';k_2\big)\big|_{k_1=s}\Big) = 0. \tag{3.4}$$

Здесь коэффициенты $\lambda(\mathfrak{c}';s)\equiv\lambda(\mathfrak{c}'\cup\{\{1,s\}\})$ занумерованы $(n-3)!!$ разбиениями $\mathfrak{c}'\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{1,s\})$ и $s=2,\dots,n$. Следовательно, система состоит из $(n-3)!!(n-1)$ уравнений, число которых совпадает с числом неизвестных коэффициентов $\lambda(\mathfrak{c})$, $\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n)$.

Система уравнений (3.4) представлена как равенство нулю образа преобразования оператором $(3\cdot\mathbf{1}+\mathsf{R})$ заданного набора коэффициентов $\{\lambda(\mathfrak{c}';s)\}$, который действует в пространстве $\mathbb{R}^{(n-1)!!}$ наборов $\{\lambda(\mathfrak{c}';s);\mathfrak{c}'\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{1,s\}), s=2,\dots,n\}$. Этот оператор состоит, естественным образом, из двух слагаемых, первое из которых представляет собой умножение набора коэффициентов на 3. Матричные элементы второго слагаемого R не равны нулю в том и только том случае, когда в наборе $\mathfrak{c}'$ отсутствует пара $\{1,s\}$. Если такая пара отсутствует, то матричный элемент равен 1. Ввиду этого факта, сумма всех матричных элементов по фиксированному столбцу матрицы оператора $3\cdot\mathbf{1}+\mathsf{R}$ равна $(n+1)$, то есть не зависит от строки матрицы. Тогда, если в наборе $\{\lambda(\mathfrak{c}');\mathfrak{c}'\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{1,s\})\}$ отличны от нуля только те компоненты, у которых в характеризующем каждую из них разбиении $\mathfrak{c}'$ присутствует пара $\{1,s\}$ с фиксированным $s\in\{2,\dots,n\}$, то этот набор переводится оператором $\mathbf{1}+\mathsf{R}$ в набор $\{\lambda(\mathfrak{c}';s)\}$ с таким же свойством. При этом все эти новые ненулевые коэффициенты равны

$$\sum_{\mathfrak{c}'\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{1,s\})}\lambda(\mathfrak{c}';s).$$

Это означает, что оператор $(\mathbf{1}+\mathsf{R})/(n-1)$ обладает свойством *идемпотентности*, $(\mathbf{1}+\mathsf{R})^2=\mathbf{1}+\mathsf{R}$. Следовательно, его собственными числами могут быть только 0 и/или 1. Отсюда следует, что $\det(3\cdot\mathbf{1}+\mathsf{R})\neq 0$. Тогда уравнение (3.4) имеет только тривиальное решение $\lambda(\mathfrak{c}';s)=0$.

Доказательство для случая нечетного n проводится по той же схеме, и мы его опускаем. □

4. Коэффициенты ковариантных дифференциальных операторов. В этом разделе мы сформулируем основные результаты работы. Будет дано описание общей тензорной структуры коэффициентов ковариантных дифференциальных операторов первого порядка.

Для фиксированного $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}(I_{l+d})$ рассмотрим свертки $W^{(a_1)}_{k_1} \dots W^{(a_d)}_{k_d}$: с тензором $A^{(+)}_{j_1,\dots j_l k_1 \dots k_d}(\mathfrak{c})$,

$$A^{(+)}_{j_1,\dots j_l k_1 \dots k_d}(\mathfrak{c}) W^{(a_1)}_{k_1} \dots W^{(a_d)}_{k_d} = \\ = \Big(\prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c}: \\ \{p,q\}\subset I_l}} \delta_{j_p j_q} \Big) \Big(\prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c}: \\ \{p,q\}\subset I_{l+d}\setminus I_l}} (\boldsymbol{W}^{(a_p)}, \boldsymbol{W}^{(a_q)}) \Big) \Big(\prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c}: \\ p\in I_l, q\in I_{l+d}\setminus I_l}} W^{(a_q)}_{j_p} \Big), \quad (4.1)$$

и с тензором $A^{(-)}_{j_1,\dots j_l k_1 \dots k_d}(\mathfrak{c})$,

$$A^{(-)}_{j_1,\dots j_l k_1 \dots k_d}(\mathfrak{c}) W^{(a_1)}_{k_1} \dots W^{(a_d)}_{k_d} = \varepsilon_{l_1,l_2,l_3}(\mathsf{W}) \Big(\prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c}: \\ \{p,q\}\subset I_l\setminus\{l_2,l_2,l_3\}}} \delta_{j_p j_q} \Big) \times \\ \times \Big(\prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c}: \\ \{p,q\}\subset I_{l+d}\setminus(I_l\cup\{l_1,l_2,l_3\})}} (\boldsymbol{W}^{(a_p)}, \boldsymbol{W}^{(a_q)}) \Big) \Big(\prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c}: \\ p\in I_l\setminus\{l_1,l_2,l_3\}, \\ q\in I_{l+d}\setminus(I_l\cup\{l_1,l_2,l_3\})}} W^{(a_q)}_{j_p} \Big). \quad (4.2)$$

В последнем случае имеется четыре возможности, в зависимости от числа элементов s в пересечении $E(l_1,l_2,l_3) = (I_{l+d} \setminus I_l) \cap \{l_1,l_2,l_3\}$, так что

(1) $\varepsilon_{l_1,l_2,l_3}(\mathsf{W}) = \varepsilon_{j_{l_1} j_{l_2} j_{l_3}}$ при $s = 0$;

(2) $\varepsilon_{l_1,l_2,l_3}(\mathsf{W}) = \varepsilon_{j_{l_1} j_{l_2} k_{l_3}} W^{(a_{l_3})}_{k_{l_3}}$ при $s = 1$ и $l_3 \in E(l_1,l_2,l_3)$;

(3) $\varepsilon_{l_1,l_2,l_3}(\mathsf{W}) = \varepsilon_{j_{l_1} k_{l_2} k_{l_3}} W^{(a_{l_2})}_{k_{l_2}} W^{(a_{l_3})}_{k_{l_3}}$ при $s = 2$ с множеством $\{l_2,l_3\} \subset E(l_1,l_2,l_3)$;

(4) $\varepsilon_{l_1,l_2,l_3}(\mathsf{W}) = \varepsilon_{k_{l_1} k_{l_2} k_{l_3}} W^{(a_{l_1})}_{k_{l_1}} W^{(a_{l_2})}_{k_{l_2}} W^{(a_{l_3})}_{k_{l_3}}$ при $s = 3$ с $\{l_1,l_2,l_3\} = E(l_1,l_2,l_3)$.

Применим теперь полученные формулы к вычислению тензор-функций $T^{(a,b)}_k$, $T^{(a,b)}_{jk}$, $\tilde{T}^{(a,b)}_{kl}$, $T^{(a,b)}_{jkl}$. Представим $T^{(a,b)}_k$ в виде разложения в (3.1) с $l = 1$ при $a, b = n+1, \dots, n+r$,

$$T^{(a,b)}_k(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\dots,a_d\rangle \in I^d_n} A^{(a,b;a_1,\dots,a_d)}_{kk_1\dots k_d}(\mathsf{Z}) W^{(a_1)}_{k_1} \dots W^{(a_d)}_{k_d}. \quad (4.3)$$

с коэффициентами в виде инвариантных тензоров. Эти инвариантные тензоры определяются формулой (3.3), где коэффициентами $\lambda^{(\pm)}_{a,b;a_1,\dots,a_d}(\mathfrak{c},\mathsf{Z})$ являются функции от набора Z, так что имеют место формулы

$$A^{(a,b;a_1,\dots,a_d)}_{kk_1,\dots,k_d}(\mathsf{Z}) = \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_{d+1})} \lambda^{(+)}_{a,b;a_1,\dots,a_d}(\mathfrak{c},\mathsf{Z}) A^{(+)}_{kk_1,\dots k_d}(\mathfrak{c}), \ d \text{ нечетно}; \quad (4.4)$$

$$A^{(a,b;a_1,\dots,a_d)}_{kk_1,\dots,k_d}(\mathsf{Z}) = \sum_{\{l_1,l_2,l_3\}\subset I_{d+1}} \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_{d+1}\setminus\{l_1,l_2,l_3\})} \lambda^{(-)}_{a,b;a_1,\dots,a_d}(\mathfrak{c},\mathsf{Z}) A^{(-)}_{kk_1\dots k_d}(\mathfrak{c}; l_1,l_2,l_3), \ d \text{ четно}. \quad (4.5)$$

Преобразование сумм в (4.3) с помощью формул (4.1) и (4.2) приводит к выражениям

$$T^{(a,b)}_k(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \sum_{c=1}^{n} W^{(c)}_k T^{(a,b;c)}_+(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \sum_{a',b'=1}^{n} [\boldsymbol{W}^{(a')}, \boldsymbol{W}^{(b')}]_k T^{(a,b;a'b')}_-(\mathsf{W},\mathsf{Z}), \quad (4.6)$$

где использовано также обозначение векторного произведения пары векторов в $\mathbb{R}^3$. В формуле (4.6) коэффициенты $T^{(a,b;c)}_+(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ и $T^{(a,b;a',b')}_-(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ являются функциями, зависящими от набора скаляров Z и набора инвариантов[1], составленного из набора W векторов. Приведем их явную

[1]Здесь и далее мы не конкретизируем явно набор инвариантов, т.е. не обсуждаем вопрос о характере зависимости скалярных функций от элементов *целого рационального базиса* (см., например, [19]).

полиномиальную зависимость от векторов $\boldsymbol{W}^{(a)}$, $a = 1, \dots, n$ следующая. Функция $T_+^{(a,b;c)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})$ имеет вид

$$T_+^{(a,b;c)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\dots,a_d\rangle \in I_n^d} \sum_{s=1}^{d} \delta_{ca_s} \Bigg[\sum_{\substack{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_{d+1}):\\ \{0,s\}\in\mathfrak{c}}} \lambda^{(+)}_{a,b;a_1,\dots,a_d}(\mathfrak{c}, \mathsf{Z}) \prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c};\\ \{p,q\}\in I_d}} \big(\boldsymbol{W}^{(a_p)}, \boldsymbol{W}^{(a_q)}\big) +$$
$$+ \sum_{\{l_1,l_2,l_3\}\subset I_d} \Big(\boldsymbol{W}^{(a_{l_1})}, \big[\boldsymbol{W}^{(a_{l_2})}, \boldsymbol{W}^{(a_{l_3})}\big]\Big) \times$$
$$\times \sum_{\substack{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_{d+1}\setminus\{l_1,l_2,l_3\}):\\ \{0,s\}\in\mathfrak{c}}} \lambda^{(-)}_{a,b;a_1,\dots,a_d}(\mathfrak{c}, \mathsf{Z}) \prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c};\\ \{p,q\}\in I_d\setminus\{l_1,l_2,l_3\}}} \big(\boldsymbol{W}^{(a_p)}, \boldsymbol{W}^{(a_q)}\big)\Bigg], \quad (4.7)$$

где нулевой номер присвоен индексу k в исходом выражении и использованы обозначения скалярного и смешанного произведений векторов в $\mathbb{R}^3$. Так как $a, b = n+1, \dots, n+r$, эта функция должна быть скалярной, если $c = 1, \dots, p$ и псевдоскалярной, если $c = p+1, \dots, p+q$. Последнее возможно только в том случае, если среди аргументов этой функции имеются псевдоскаляры. Для этого необходимо, чтобы $n > 1$ и при $n = 2$ набор W должен состоять из вектора $\boldsymbol{W}^{(1)}$ и псевдовектора $\boldsymbol{W}^{(2)}$, а при $n \geqslant 3$ в наборе W должно выполняться условие $p \neq 0$, т.е. в нем должен быть хотя бы один вектор. Функция определяется формулой

$$T_-^{(a,b;a',b')}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) = \sum_{d \text{ четно}}^{D} \sum_{\langle a_1,\dots,a_d\rangle \in I_n^d} \sum_{\{l_2,l_3\}\subset I_d} \delta_{a_{l_2} a'} \delta_{a_{l_3} b'} \times$$
$$\times \sum_{\substack{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_{d+1}\setminus\{l_2,l_3\}):\\ \{0,s\}\in\mathfrak{c}}} \lambda^{(-)}_{a,b;a_1,\dots,a_d}(\mathfrak{c}, \mathsf{Z}) \prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c};\\ \{p,q\}\in I_d\setminus\{l_2,l_3\}}} \big(\boldsymbol{W}^{(a_p)}, \boldsymbol{W}^{(a_q)}\big). \quad (4.8)$$

Она может быть как скалярной, так и псевдоскалярной.

Для вектор-функции $F_k^{(a)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})$, $a = 1, \dots, n$, очевидно, имеет место формула

$$F_k^{(a)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) = \sum_{b=1}^{n} W_k^{(b)} F_+^{(a;c)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) + \sum_{b,c=1}^{n} [\boldsymbol{W}^{(b)}, \boldsymbol{W}^{(c)}]_k F_-^{(a;b,c)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}), \quad (4.9)$$

аналогичная (4.6), с коэффициентами $F_+^{(a;b)}$, $F_-^{(a;b,c)}$, обладающими точно такими же свойствами по отношению к операции полного отражения группы $\mathcal{O}_3$. Их явное выражение дается формулами, аналогичными (4.7)–(4.8).

Формулы для тензор-функций $T_{jk}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})$, $\tilde{T}_{kl}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})$, $T_{jkl}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})$, аналогичные (4.3), получаются таким же методом на основе подстановки, соответственно, в формулы

$$T_{jk}^{(a,b)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\dots,a_d\rangle \in I_n^d} A_{jkk_1\dots k_d}^{(a,b;a_1,\dots,a_d)}(\mathsf{Z}) W_{k_1}^{(a_1)} \dots W_{k_d}^{(a_d)}, \quad (4.10)$$

$$\tilde{T}_{kl}^{(a,b)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\dots,a_d\rangle \in I_n^d} \tilde{A}_{klk_1\dots k_d}^{(a,b;a_1,\dots,a_d)}(\mathsf{Z}) W_{k_1}^{(a_1)} \dots W_{k_d}^{(a_d)}, \quad (4.11)$$

$$T_{jkl}^{(a,b)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\dots,a_d\rangle \in I_n^d} A_{jklk_1\dots k_d}^{(a,b;a_1,\dots,a_d)}(\mathsf{Z}) W_{k_1}^{(a_1)} \dots W_{k_d}^{(a_d)}. \quad (4.12)$$

Приведем их окончательный вид, опуская явные выражения для коэффициентов разложения по элементам базиса соответствующего тензорного представления. Эти формулы получаются подстановкой в (4.10), (4.11), (4.12) выражений для коэффициентов $A_{jkk_1\dots k_d}^{(a,b;a_1,\dots,a_d)}(\mathsf{Z})$, $\tilde{A}_{klk_1\dots k_d}^{(a,b;a_1,\dots,a_d)}(\mathsf{Z})$,

$A^{(a,b;a_1,\ldots,a_d)}_{jklk_1\ldots k_d}(\mathsf{Z})$, аналогичных (4.4), (4.5), с последующим преобразованием их на основе (4.1) и (4.2). В результате получаются следующие формулы:

$$T^{(a,b)}_{jk}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \delta_{jk}S^{+}_{a,b}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \sum_{a',b'=1}^{n} W^{(a')}_{j}W^{(b')}_{k}S^{(00)}_{a,b;a',b'}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \varepsilon_{jkm}\sum_{c=1}^{n} W^{(c)}_{m}S^{-}_{a,b;c}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + \sum_{a',b',c=1}^{n}\Big[W^{(c)}_{j}\varepsilon_{kpq}W^{(a')}_{p}W^{(b')}_{q}S^{(01)}_{a,b;c}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + W^{(c)}_{k}\varepsilon_{jpq}W^{(a')}_{p}W^{(b')}_{q}S^{(10)}_{a,b;c}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\Big]; \quad (4.13)$$

$$\tilde{T}^{(a,b)}_{kl}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \delta_{kl}\tilde{S}^{+}_{a,b}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \sum_{a',b'=1}^{n} W^{(a')}_{k}W^{(b')}_{l}\tilde{S}^{(00)}_{a,b;a',b'}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \varepsilon_{klm}\sum_{c=1}^{n} W^{(c)}_{m}\tilde{S}^{-}_{a,b;c}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + \sum_{a',b',c=1}^{n}\Big[W^{(c)}_{k}\varepsilon_{lpq}W^{(a')}_{p}W^{(b')}_{q}\tilde{S}^{(01)}_{a,b;c}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + W^{(c)}_{l}\varepsilon_{kpq}W^{(a')}_{p}W^{(b')}_{q}\tilde{S}^{(10)}_{a,b;c}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\Big]; \quad (4.14)$$

$$T^{(a,b)}_{jkl}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \sum_{c=1}^{n}\Big[\delta_{jk}W^{(c)}_{l}U^{(1)}_{a,b;c}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \delta_{jl}W^{(c)}_{k}U^{(2)}_{a,b;c}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \delta_{kl}W^{(c)}_{j}U^{(3)}_{a,b;c}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\Big] + \\ + \sum_{a',b',c'=1}^{n} W^{(a')}_{j}W^{(b')}_{k}W^{(c')}_{l}U^{+}_{a,b;a',b',c'}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \varepsilon_{jkl}U^{-}_{a,b}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + \sum_{a',b'=1}^{n}\Big[\delta_{jk}\varepsilon_{lpq}W^{(a')}_{p}W^{(b')}_{q}U^{(01)}_{a,b;a',b'}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \delta_{jl}\varepsilon_{kpq}W^{(a')}_{p}W^{(b')}_{q}U^{(02)}_{a,b;a',b'}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + \delta_{kl}\varepsilon_{kpq}W^{(a')}_{p}W^{(b')}_{q}U^{(03)}_{a,b;a',b'}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + W^{(a')}_{j}\varepsilon_{klm}W^{(b')}_{m}U^{(11)}_{a,b;a',b'}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + W^{(a')}_{k}\varepsilon_{ljm}W^{(b')}_{m}U^{(12)}_{a,b;a',b'}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + W^{(a')}_{l}\varepsilon_{jkm}W^{(b')}_{m}U^{(13)}_{a,b;a',b'}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\Big] + \\ + \sum_{a_1,b_1,a_2,b_2=1}^{n}\Big[W^{(a_1)}_{j}W^{(b_1)}_{k}\varepsilon_{lpq}W^{(a_2)}_{p}W^{(b_2)}_{q}U^{(21)}_{a,b;a_1,b_1,a_2,b_2}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + W^{(a_1)}_{j}W^{(b_1)}_{l}\varepsilon_{kpq}W^{(a_2)}_{p}W^{(b_2)}_{q}U^{(22)}_{a,b;a_1,b_1,a_2,b_2}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + W^{(a_1)}_{k}W^{(b_1)}_{l}\varepsilon_{jpq}W^{(a_2)}_{p}W^{(b_2)}_{q}U^{(23)}_{a,b;a_1,b_1,a_2,b_2}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\Big]. \quad (4.15)$$

Проанализируем полученные формулы. Коэффициенты $T^{(a,b)}_{jk}$ должны представлять собой при $a = 1,\ldots,p$ тензоры и при $a = p+1,\ldots,n$ псевдотензоры, где $b = n+1,\ldots,n+r$. Точно так же, $\tilde{T}^{(a,b)}_{kl}$ должны быть тензорами при $b = 1,\ldots,p$ и псевдотензорами при $b = p+1,\ldots,n$, где $a = n+1,\ldots,n+r$. При этом $T^{(a,b)}_{jkl}$ должны быть тензорами при $a,b = 1,\ldots,p$, $a,b = p+1,\ldots,n$ и псевдотензорами при $a = 1,\ldots,p$, $b = p+1,\ldots,n$, либо $a = p+1,\ldots,n$, $b = 1,\ldots,p$. В связи с этим возможно появление ограничений на выбор скалярных (псевдоскалярных) коэффициентов (4.13)–(4.15). Такие ограничения не возникают, если $n \geqslant 3$, так как при наличии такого числа векторов (псевдовекторов) имеются псевдоскалярные инварианты группы $\mathcal{O}_{3,+}$. Ограничения возникают как раз в самых востребованных с точки зрения приложений в физике случаях $n = 1, 2$.

Если $n = 1, 2$ и поля векторные, то для того, чтобы удовлетворить указанным условиям, нужно в тензоре $T^{(a,b)}_{jk}$ положить $S^{(a,b;c)}_{-} = 0$, а при $n = 1$ нужно положить также $S^{(a,b;c)}_{01} = S^{(a,b;c)}_{10} = 0$. То же самое имеет место для тензора $\tilde{T}^{(a,b)}_{kl}$: $\tilde{S}^{(a,b;c)}_{-} = 0$, и при $n = 1$ нужно положить $\tilde{S}^{(a,b;c)}_{01} = \tilde{S}^{(a,b;c)}_{10} = 0$. Для коэффициентов тензора $T^{(a,b)}_{jkl}$ при $n = 1, 2$ должно выполняться $U^{-}_{a,b} = 0$, $U^{(p,q)}_{\ldots;\ldots} = 0$, если $p = 0, 1, 2,\ q = 1, 2, 3$.

Если $n = 1, 2$ и поля псевдовекторные, то для того, чтобы удовлетворить указанным условиям, нужно положить $T^{(a,b)}_{jk} = 0$, $\tilde{T}^{(a,b)}_{kl} = 0$. Для коэффициентов тензора $T^{(a,b)}_{jkl}$ при $n = 1, 2$ должно выполняться $U^{(p,q)}_{\dots;\dots} = 0$, $p = 0, 1, 2$, $q = 1, 2, 3$, так как отсутствуют псевдоскалярные инварианты группы $\mathcal{O}_3$.

Наконец, рассмотрим случай $n = 2$, когда $\boldsymbol{W}^{(1)}$ — векторное поле, $\boldsymbol{W}^{(2)}$ — псевдовекторное поле. В этом случае $T^{(1,b)}_{jk}$, $\tilde{T}^{(a,1)}_{kl}$ — тензоры, $T^{(2,b)}$, $\tilde{T}^{(a,2)}_{kl}$ — псевдотензоры при $a, b = 3, \dots, 2 + r$; $T^{(a,a)}_{jkl}$, $a = 1, 2$ — тензоры, а $T^{(1,2)}_{jkl}$, $T^{(1,2)}_{jkl}$ — псевдотензоры. Тогда в коэффициентах $T^{(1,b)}_{jk}$, $\tilde{T}^{(a,1)}_{kl}$ нет тождественно равных нулю слагаемых. В коэффициентах $T^{(2,b)}_{jk}$, $\tilde{T}^{(a,2)}_{kl}$ должно быть выполнено условие $S^+_{1,b} = \tilde{S}^+_{a,2} = 0$. В тензорах же $T^{(a,a)}_{jkl}$, $a = 1, 2$, должно выполняться условие $U^-_{a,a} = 0$, а в тензорах $T^{(1,2)}_{jkl}$, $T^{(2,1)}_{jkl}$ могут присутствовать все слагаемые, представленные в (4.13), (4.15).

Замечание. Представленные результаты исследования дают общий вид ковариантного дифференциального оператора $\mathsf{L}[\cdot]$ первого порядка без наложения на операторы этого класса условий, гарантирующих гиперболичность систем уравнений (2.5).

5. Заключение. Формулы (4.6), (4.9), (4.13)–(4.15) решают вопрос о перечислении всех возможных ковариантных дифференциальных операторов первого порядка для векторных и скалярных полей на $\mathbb{R}^3$. Они предоставляют метод построения физически адекватных бездиссипативных эволюционных уравнений, так как скалярные и векторные поля являются основным типом полей, которые используются в теоретической физике. Значение полученного описания состоит в том, что на их основе имеется возможность составлять трансляционно инвариантные и ковариантные дифференциальные операторы в виде сумм элементарных дифференциальных операторов с коэффициентами, представляющимися некоторыми функциями от инвариантов полей, исключая из представленного списка те операторы, которые не удовлетворяют поставленным условиям. Хотя тензорные поля применяются при описании динамики конденсированных сред в значительно меньшей степени, было бы желательно провести для них аналогичное исследование. Более важно, однако, дать описание ковариантных дифференциальных операторов второго порядка, которые являются более реалистичными с точки зрения физических приложений, так как они позволяют учитывать диссипативные процессы. Такого рода исследования проведены в частных случаях, результаты которых представлены в [10, 11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А. Ф., Марченко В. И.* Макроскопическая теория спиновых волн// ЖЭТФ. — 1976. — *70*, № 4. — С. 1522–1532.
2. *Андреев А. Ф., Марченко В. И.* Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков// Усп. физ. наук. — 1980. — *130 (1)*. — С. 37–63.
3. *Вирченко Ю. П., Пелетминский С. В.* Скобки Пуассона и дифференциальные законы сохранения в теории магнитоупругих сред// в кн.: Проблемы физической кинетики и физики твердого тела. — Киев: Наукова думка, 1990. — С. 63–77.
4. *Волков Д. В.* Феноменологические лагранжианы// Физ. эл. част. атом. ядра. — 1973. — *4*, № 1. — С. 3–41.
5. *Волков Д. В., Желтухин А. А.* Феноменологический лагранжиан спиновых волн в пространственно-неупорядоченных средах// Физ. низк. темп. — 1979. — *5*, № 11. — С. 1359–1363.
6. *Волков Д. В., Желтухин А. А., Блиох Ю. П.* Феноменологический лагранжиан спиновых волн// Физ. тв. тела. — 1971. — *13*, № 6. — С. 1668–1678.
7. *Воловик Г. Е., Кац Е. И.* Нелинейная гидродинамика жидких кристаллов// ЖЭТФ. — 1981. — *81*. — С. 240–248.
8. *Гуревич Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
9. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее приложения в физике. — М.: ГИФМЛ, 1958.
10. *Понамарева А. Э., Вирченко Ю. П.* Построение общего эволюционного уравнения для псевдовекторного соленоидального поля с локальным законом сохранения// Науч. вед. Белгород. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2018. — *50*, № 2. — С. 224–232.
11. *Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля// Науч. вед. Белгород. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2018. — *50*, № 4. — С. 492–497.
12. *Dieudonne J. A. Carrell J. A.* Invariant theory. Old and new. — New York: Academic Press, 1971.

13. *Dzyaloshinskii I. E.* Macroscopic description of spin glasses// Lect. Notes Phys. — 1980. — *115*. — P. 204–224.
14. *Dzyaloshinskii I. E., Volovick G. E.* Poisson brackets in condensed matter physics// Ann. Phys. — 1980. — *125*, № 1. — P. 67–97.
15. *Golo V. L., Monastyrsky M. I., Novikov S. P.* Solutions to the Ginzburg–Landau equations for planar textures in superfluid ^{3}He// Commun. Math. Phys. — 1979. — *69*, № 3. — P. 237–246.
16. *Halperin B. I., Hohenberg P. C.* Hydrodynamic theory of spin waves// Phys. Rev. — 1969. — *88*, № 2. — P. 898–919.
17. *Leggett A. J.* A theoretical description of the new phases of liquid ^{3}He// Rev. Mod. Phys. — 1975. — *47*. — P. 331–414.
18. *McConnel A. J.* Application of tensor analysis. — New York: Dover, 1957.
19. *Spencer A. G. M.* Theory of Invariants// in: Continuum Physics (*Eringen A. C.*, eds.). — New York: Academic Press, 1971. — P. 239–353.
20. *Volovik G. E.* Relationship between molecule shape and hydrodynamics in a nematic substance// JETP Lett. — 1980. — *31*, № 5. — P. 273–275.

Вирченко Юрий Петрович
Белгородский государственный университет
E-mail: `virch@bsu.edu.ru`

Субботин Андрей Валерьевич
Белгородский государственный технологический университет
E-mail: `subbotin@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 31–35
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-31-35

УДК 519.175.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕТРАЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

© 2020 г. **В. А. ВОБЛЫЙ**

Аннотация. Последовательно-параллельный граф — это граф, не содержащий полный граф с четырьмя вершинами в качестве минора. Найдена асимптотика для числа помеченных связных последовательно-параллельных тетрациклических графов с большим числом вершин. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что помеченный связный тетрациклический граф является последовательно-параллельным графом, асимптотически равна 141/221.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, последовательно-параллельный граф, асимптотика, вероятность.

ASYMPTOTICAL ENUMERATION OF LABELED SERIES-PARALLEL TETRACYCLIC GRAPHS

© 2020 **V. A. VOBLYI**

Abstract. A series-parallel graph is a graph that does not contain a complete graph with four vertices as a minor. We find an asymptotics for the number of labeled connected series-parallel tetracyclic graphs with a large number of vertices. We prove that under a uniform probability distribution, the probability of the fact that a labeled connected tetracyclic graph is a series-parallel graph is asymptotically equal to 141/221.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, series-parallel graph, asymptotics, probability.

AMS Subject Classification: 05C30

1. Введение.

Определение 1. Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит полный граф с четырьмя вершинами в качестве минора (см. [9]).

Определение 2. *Цикломатическим числом* связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин. Граф с цикломатическим числом, равным k, называется k*-циклическим графом.*

Определение 3. Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу (см. [10]).

Последовательно-параллельные графы используются при построении надежных коммуникационных сетей (см. [11]).

В [9] найдена асимптотика для чисел помеченных связных и 2-связных последовательно-параллельных графов с большим количеством вершин. В [3] перечислены помеченные последовательно-параллельные 2-связные графы по числу вершин. Число помеченных последовательно-параллельных трициклических и тетрациклических 2-связных графов с заданным числом вершин найдено в [6] и [5], соответственно. В [4] перечислены по числу вершин помеченные связные последовательно-параллельные трициклические графы.

В статье найдена асимптотика для числа помеченных связных последовательно-параллельных тетрациклических графов с большим числом вершин. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что помеченный связный тетрациклический граф является последовательно-параллельным графом, асимптотически равна 141/221. Также доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что помеченный связный последовательно-параллельный тетрациклический граф является кактусом, асимптотически равна 7/47.

2. Перечисление графов.

Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Теорема 1. *Для числа $SP(n,4)$ помеченных связных последовательно-параллельных тетрациклических графов с n вершинами при $n \geqslant 6$ верна формула*

$$SP(n,4) = \frac{(n-1)!}{24}\left[z^{n-1}\right]e^{nz}\Bigg(\frac{n^3z^8}{16(1-z)^4} + \frac{n^2z^4(12z^3-13z^4+4z^5)}{4(1-z)^6} + \frac{n(12z^3-13z^4+4z^5)^2}{12(1-z)^8} + \frac{nz^2(70z^4-127z^5+98z^6-38z^7+6z^8)}{2(1-z)^8} + \frac{48z^{11}-450z^{10}+1860z^9-4415z^8+6520z^7-5813z^6+2430z^5}{10(1-z)^{10}}\Bigg). \quad (1)$$

Доказательство. Обозначим через $B(n,k)$ число помеченных k-циклических блоков с n вершинами, через $B_k(z)$ — экспоненциальную производящую функция для $B(n,k)$, $S(n,k)$ — число помеченных связных k-циклических графов с n вершинами. В [1] получено выражение

$$S(n,k) = \frac{(n-1)!}{nk!}\left[z^{-1}\right]e^{nz}Y_k\big(n1!B_1'(z),\ n2!B_2'(z),\ \ldots,\ nk!B_k'(z)\big)z^{-n}, \quad (2)$$

где $\left[z^{-1}\right]$ — оператор формального вычета (см. [7]), а $Y_k(x_1,\ldots,x_k)$ — многочлены разбиений (многочлены Белла). Для этих многочленов известно выражение (см. [8, с. 173])

$$Y_k(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{\pi(k)} \frac{k!}{m_1!\ldots m_k!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{m_1}\ldots\left(\frac{x_k}{k!}\right)^{m_k},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(k)$ числа k, т.е. по всем неотрицательным решениям $(m_1,m_2,\ldots,m_k)$ уравнения $m_1+2m_2+\cdots+km_k=k$, $m_i \geqslant 0$, $i=1,\ldots,k$.

Формула (2) верна не только для всего класса связных графов, но и для блочно-устойчивого его подкласса (см. [3]). Известно, что класс последовательно-параллельных графов является блочно-устойчивым классом графов (см. [10]). Поэтому заменим в (2) $S(n,k)$ на $SP(n,4)$ и будем считать, что функции $B_k(z)$ относятся к классу помеченных последовательно-параллельных графов.

Так как

$$Y_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^4+6x_1^2x_2+3x_2^2+4x_1x_3+x_4, \quad x_i = ni!B_i'(z)$$

(см. [8, с. 246]), то имеем

$$SP(n,4) = \frac{(n-1)!}{24n}\left[z^{-1}\right]e^{nz}\Big(n^4(B_1'(z))^4 + 12n^3(B_1'(z))^2B_2'(z) + 12n^2(B_2'(z))^2 + 24nB_1'(z)B_3'(z) + 24nB_4'(z)\Big)z^{-n}. \quad (3)$$

Унициклический блок — это простой цикл (последовательно-параллельный граф), поэтому $B(n,1) = (n-1)/2$. Все бициклические блоки являются последовательно-параллельными графами, и в [12], [6], [5] соответственно найдены формулы

$$B(n,2) = \frac{n!(n-3)(n+2)}{24},$$
$$B(n,3) = \frac{n!(n-3)(n-4)}{5760}\big(3n^3+36n^2+71n+50\big),$$
$$B(n,4) = \frac{n!}{80640}\big(n^5+30n^4+257n^3+768n^2+960n+504\big)\binom{n-3}{3}.$$

Таким образом, имеем

$$B_1(z) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2}(n-1)!\frac{z^n}{n!},\quad B_1'(z) = \frac{z^2}{2(1-z)},\qquad B_2(z) = \frac{z^4(3-2z)}{12(1-z)^3},\quad B_2'(z) = \frac{12z^3-13z^4+4z^5}{12(1-z)^4},$$
$$B_3(z) = \frac{z^5(28-47z+28z^2-6z^3)}{48(1-z)^6},\qquad B_3'(z) = \frac{70z^4-127z^5+98z^6-38z^7+6z^8}{24(1-z)^7},$$
$$B_4(z) = \frac{405z^6-1004z^7+1066z^8-609z^9+186z^{10}-24z^{11}}{240(1-z)^9},$$
$$B_4'(z) = \frac{48z^{11}-450z^{10}+1860z^9-4415z^8+6520z^7-5813z^6+2430z^5}{240(1-z)^{10}}.$$

Суммирование рядов для $B_2(z)$, $B_3(z)$, $B_4(z)$, а также дифференцирование было выполнено с помощью пакета программ Maple.

Подставляя в (3) выражения для $B_1'(z)$, $B_2'(z)$, $B_3'(z)$, $B_4'(z)$, получим формулу (1). □

В следующей таблице представлены числа $SP(n,4)$, вычисленные с помощью теоремы 1 и пакета программ Maple.

n	6	7	8	9	10	11
$SP(n,4)$	1215	116361	7614936	435101373	23642892000	1270611137565

3. Асимптотика и вероятность.

Лемма 1. *Введем обозначения*

$$p(z,q) = \sum_{i=0}^{q} c_i z^i,\quad A_n(m,q) = \big[z^{-1}\big]\frac{p(z,q)e^{nz}z^{-n}}{(1-z)^m};$$

тогда при фиксированных m, q и $n\to\infty$ верна асимптотика

$$A_n(m,q) \sim \frac{\sqrt{\pi}p(1,q)n^{n+m/2}}{n!2^{m/2}\Gamma((m+1)/2)}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $U(a,b,z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми. В [4] найдено разложение

$$\frac{e^{nz}}{(1-z)^m} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{p+m}}{p!}U(m,m+p+1,n)z^p,$$

а в [2] при фиксированных числах a и m и $n\to\infty$ получена асимптотика

$$U(a,n-m,n) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{a/2}\Gamma\big(\frac{a+1}{2}\big)}.$$

Учитывая, что $n!/(n-k)! \sim n^k$ при фиксированном k и $n \to \infty$, получим

$$A_n(m,q) = \left[z^{-1}\right] \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{q} \frac{n^{p+m}}{p!} c_i z^{p+i-n} U(m, m+p+1, n) = \sum_{i=0}^{q} \frac{c_i n^{n+m-i-1}}{(n-i-1)!} U(m, n+m-i, n) \sim$$

$$\sim \sum_{i=0}^{q} \frac{n!}{(n-i-1)!} \frac{c_i n^{n+m-i-1}}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{m/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \sim \frac{n^{n+m}}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{m/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \sum_{i=0}^{q} c_i,$$

что равносильно (4). □

Теорема 2. *Для числа $SP(n,4)$ помеченных связных последовательно-параллельных тетрациклических графов с n вершинами при $n \to \infty$ имеет место асимптотика*

$$SP(n,4) \sim \frac{47}{8064} n^{n+4}.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$p_1(z,8) = z^8, \quad p_1(1,8) = 1; \quad p_2(z,9) = 12z^7 - 13z^8 + 4z^9, \quad p_2(1,9) = 3;$$

$$p_3(z,10) = (12z^3 - 13z^4 + 4z^5)^2, \quad p_3(1,10) = 9;$$

$$p_4(z,10) = 70z^6 - 127z^7 + 98z^8 - 38z^9 + 6z^{10}, \quad p_4(1,10) = 9;$$

$$p_5(z,11) = 48z^{11} - 450z^{10} + 1860z^9 - 4415z^8 + 6520z^7 - 5813z^6 + 2430z^5, \quad p_5(1,11) = 180.$$

Из выражения (1) с помощью леммы получим

$$SP(n,4) = \frac{(n-1)!}{24} \left(\frac{n^3}{16} A_n(4,8) + \frac{n^2}{4} A_n(6,9) + \frac{n}{12} A_n(8,10) + \frac{n}{2} A_n(8,10) + \frac{1}{10} A_n(10,11) \right) \sim$$

$$\sim \frac{(n-1)!}{24} \left(\frac{\sqrt{\pi} p_1(1,8) n^{n+5}}{16 n! 2^2 \Gamma(5/2)} + \frac{\sqrt{\pi} p_2(1,9) n^{n+5}}{4 n! 2^3 \Gamma(7/2)} + \frac{\sqrt{\pi} p_3(1,10) n^{n+5}}{12 n! 2^4 \Gamma(9/2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\pi} p_4(1,10) n^{n+5}}{2 n! 2^4 \Gamma(9/2)} + \frac{\sqrt{\pi} p_5(1,10) n^{n+5}}{10 n! 2^5 \Gamma(11/2)} \right) \sim$$

$$\sim \frac{n^{n+4}}{24} \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{20} + \frac{1}{140} + \frac{3}{70} + \frac{2}{105} \right) = \frac{47}{8064} n^{n+4}. \quad \square$$

Зададим на множестве помеченных связных тетрациклических графов с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 1. *При $n \to \infty$ вероятность P_n того, что помеченный тетрациклический граф с n вершинами является последовательно-параллельным графом, асимптотически равна* 141/221.

Доказательство. Доказательство. Пусть $f(n, n+3)$ — число помеченных связных графов с n и $n+3$ ребрами (тетрациклических графов). В [13] Райт нашел следующую асимптотику при $n \to \infty$:

$$f(n, n+k) \sim f_k n^{n+(3k-1)/2}, \quad f_k = \frac{\sqrt{\pi} 3^k (k-1)! d_k}{2^{(3k-1)/2} \Gamma((3k/2))}, \quad k \geqslant 1;$$

$$d_1 = d_2 = \frac{5}{16}, \quad d_{k+1} = d_k + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{d_s d_{k-s}}{(k+1)\binom{k}{s}}, \quad k \geqslant 2.$$

Поэтому имеем

$$d_3 = d_2 + \frac{1}{6} d_1^2 = \frac{1105}{7776}, \quad f_3 = \frac{54\sqrt{\pi} d_3}{128 \Gamma(9/2)} = \frac{9}{140} d_3, \quad f(n, n+3) \sim \frac{221}{24192} n^{n+4}$$

и, следовательно,

$$P_n = \frac{SP(n,4)}{f(n,n+3)} \sim \frac{141}{221} \quad \text{при } n \to \infty.$$

□

Следствие 2. *При $n \to \infty$ вероятность $\bar{P}_n$ того, что помеченный последовательно-параллельный тетрациклический граф с n вершинами является кактусом, асимптотически равна $7/47$.*

Доказательство. Пусть $Ca(n,k)$ — число помеченных k-циклических кактусов с n вершинами. В [1] найдена следующая асимптотика при $n \to \infty$:

$$Ca(n,k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2}\, k!\, \Gamma((k+1)/2)} n^{n+3k/2-2}.$$

Поэтому при $n \to \infty$ имеем

$$\bar{P}_n = \frac{Ca(n,4)}{SP(n,4)} \sim \frac{\sqrt{\pi} n^{n+4} 8064}{2^6 \cdot 24 \cdot \Gamma(5/2) \cdot 47 \cdot n^{n+4}} = \frac{7}{47}.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воблый В. А.* О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и ребер// Дискр. анал. иссл. опер. — 2016. — *23*, № 2. — С. 5–20.
2. *Воблый В. А.* Число помеченных внешнепланарных графов k-циклических графов// Мат. заметки. — 2018. — *103*, № 5. — С. 657–666.
3. *Воблый В. А.* Второе соотношение Риддела и следствия из него// Дискр. анал. иссл. опер. — 2019. — *26*, № 1. — С. 20–32.
4. *Воблый В. А.* Перечисление помеченных последовательно-параллельных трициклических графов// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *177*. — С. 132–136.
5. *Воблый В. А.* Число помеченных последовательно-параллельных тетрациклических блоков// Прикл. дискр. мат. — 2020. — № 47. — С. 57–61.
6. *Воблый В. А., Мелешко А. М.* О числе помеченных последовательно-параллельных трициклических блоков// Мат. XV Междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения» (Тула, 28-31 мая 2018 г.). — Тула: ТПГУ. — С. 168–170.
7. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.
8. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. — М.: Наука, 1982.
9. *Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.* Enumeration and limit laws of series-parallel graphs// Eur. J. Combin. — 2007. — *28*, № 8. — P. 2091–2105.
10. *McDiarmid C., Scott A.* A random graphs from a block stable class// Eur. J. Combin. — 2016. — *58*. — P. 96–106.
11. *Radhavan S.* Low-connectivity network design on series-parallel graphs// Networks. — 2004. — *43*, № 3. — P. 163–176.
12. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs, II// J. Graph Theory. — 1978. — *2*, № 4. — P. 299–305.
13. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs, III// J. Graph Theory. — 1980. — *4*, № 4. — P. 393–407.

Воблый Виталий Антониевич
Всероссийский институт научной и технической информации, Москва
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 36–43
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-36-43

УДК 517.983.23

СЕМЕЙСТВО ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

© 2020 г. **А. В. ГЛУШАК**

Аннотация. Введены в рассмотрение семейство операторных функций Бесселя и генератор этого семейства. Исследованы их свойства, установлен критерий равномерной корректности задачи Коши для уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу и указаны связи этого семейства с рядом других разрешающих операторов.

Ключевые слова: операторная функция Бесселя, генератор, уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу, задача Коши, критерий равномерной корректности.

FAMILY OF BESSEL OPERATOR FUNCTIONS

© 2020 **A. V. GLUSHAK**

Abstract. A family of Bessel operator functions and a generator of this family are introduced and considered. Their properties are studied, a criterion of the uniform well-posedness of the Cauchy problem for the Euler–Poisson–Darboux equation is obtained, and the connections of this family with a series of other solving operators are found.

Keywords and phrases: Bessel operator function, generator, Euler–Poisson–Darboux equation, Cauchy problem, uniform well-posedness criterion.

AMS Subject Classification: 34G10

1. Введение. Исследование дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами, действующими в банаховом пространстве E, стимулирует развитие теории разрешающих операторов соответствующих начальных задач. В результате исследований эволюционных уравнений первого порядка

$$u'(t) = Au(t)$$

возникли полугруппы линейных операторов $T(t)$, а при изучении уравнения второго порядка (абстрактного волнового уравнения)

$$u''(t) = Au(t)$$

— операторные косинус-функции $C(t)$. Ослабление требований на разрешающие операторы задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого и второго порядков привело к понятию проинтегрированной полугруппы и проинтегрированной операторной косинус-функции. Терминологию и литературные источники см. в [13, 14] и обзорных работах [1, 17].

В дальнейшем в работах [3,6,8,9,12] были введены в рассмотрение операторные функции Бесселя, Струве и Лежандра как разрешающие операторы при исследовании соответственно уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу (ЭПД), Бесселя—Струве и Лежандра.

В настоящей работе излагается другой подход к построению семейства операторных функций Бесселя. Так же, как и в теории полугрупп и операторных косинус-функций, семейство операторных функций Бесселя исследуется вначале независимо от дифференциального уравнения, с

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732).

которым в итоге оно будет связано. Важную роль в построении семейства играет зависящий от параметра $k>0$ оператор обобщенного сдвига T_s^t, определяемый равенством (см. [16])

$$T_s^t Y(s) = \frac{\Gamma(k/2+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(k/2)} \int\limits_0^{\pi} Y\left(\sqrt{s^2+t^2-2st\cos\varphi}\right) \sin^{k-1}\varphi \, d\varphi,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера $s,t \geqslant 0$. Оператор обобщенного сдвига зависит от параметра $k>0$, но, следуя [16], этот факт в его записи отмечать не будем.

Укажем также, что в настоящей работе мы обходимся понятием интеграла от непрерывной функции, но в случае необходимости можно использовать интеграл Бохнера от функции со значением в банаховом пространстве.

2. Семейство операторных функций Бесселя. Пусть $k>0$ и $Y_k(\cdot):[0,\infty)\to B(E)$ — операторная функция, действующая в пространство линейных ограниченных операторов $B(E)$.

Определение 1. Зависящее от параметра $k>0$ сильно непрерывное семейство линейных ограниченных операторов $Y_k(t):[0,\infty)\to B(E)$ называется *операторной функцией Бесселя* (ОФБ) если выполнены следующие условия:

(a) $Y_k(0)=I$;
(b) $Y_k(t)Y_k(s)=T_s^tY_k(s)$, $s,t\geqslant 0$;
(c) существуют такие $M\geqslant 1$, $\omega\geqslant 0$, что $\|Y_k(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$, $t\geqslant 0$.

С семейством ОФБ будет тесно связан дифференциальный оператор Бесселя

$$B_k = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{k}{t}\frac{d}{dt},$$

для которого, в случае необходимости, будем указывать переменную, по которой он действует: $B_k = B_{k,t}$. В дальнейшем также используется обозначение $Y_k'(t)x = (Y_k(t)x)'$.

Определение 2. Генератором ОФБ $Y_k(t)$ называется оператор A с областью определения $D(A)$, состоящей из тех $x\in E$, для которых функция $Y_k(t)x$ дважды дифференцируема в точке $t=0$, и определяемый равенством

$$Ax = \lim_{t\to 0+} B_k Y_k(t)x.$$

Теорема 1. *Если оператор A является генератором ОФБ $Y_k(t)$, то область определения $D(A)$ плотна в E. Более того, в E плотно множество элементов, на которых определены все степени оператора A.*

Доказательство. Пусть V — множество числовых функций $v(t)$, гладких и финитных на $(0,\infty)$. Рассмотрим множество $E(V)\subset E$ элементов вида

$$y = \int\limits_0^{\infty} v(s)Y_k(s)x ds, \quad x\in E,$$

и покажем, что $y\in D(A)$. Учитывая условие b) определения 1 и свойства оператора преобразования T_s^t, для рассматриваемых y, после интегрирования по частям, получим

$$B_{k,t}Y_k(t)y = \int\limits_0^{\infty} v(s)B_{k,t}T_s^tY_k(s)x\,ds = \int\limits_0^{\infty} v(s)B_{k,s}T_s^tY_k(s)x\,ds =$$

$$= \int\limits_0^{\infty}\left(v''(s) - k\left(\frac{v(s)}{s}\right)'\right)T_s^tY_k(s)x\,ds,$$

откуда, переходя к пределу при $t \to 0+$, получаем, что $y \in D(A)$ и

$$Ay = \int_0^\infty \left(v''(s) - k \left(\frac{v(s)}{s} \right)' \right) Y_k(s) x ds.$$

Покажем теперь, что $E(V)$ плотно в E. Если бы это было не так, то существовал бы линейный ограниченный функционал $f \neq 0$, $f \in E^*$ такой, что $f(E(V)) = 0$. Тогда

$$\int_0^\infty v(s) f(Y_k(s)x) ds = 0, \quad x \in E,$$

и поэтому, в силу произвольности $v(s) \in V$, $f(Y_k(s)x) \equiv 0$ при $s > 0$. Отсюда в пределе при $s \to 0$ получим $f(x) = 0$ для любого $x \in E$, и поэтому $f = 0$, что приводит к противоречию. Следовательно, $E(V)$ плотно в E. Поскольку $E(V) \subset D(A)$, то и $D(A)$ плотно в E.

Аналогично устанавливается, что в E плотно множество элементов, на которых определены все степени оператора A. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2. *Пусть $Y_k(t)$ — операторная функция Бесселя и A — ее генератор. Тогда для любых $t, s \geqslant 0$ и $x \in D(A)$ справедливы равенства*

$$Y_k(t) Y_k(s) = Y_k(s) Y_k(t), \tag{1}$$

$$A Y_k(t) x = Y_k(t) A x. \tag{2}$$

Доказательство. Равенство (1) следует из определения семейства ОФБ и свойств оператора обобщенного сдвига T_s^t. Покажем далее, что

$$B_{k,s} Y_k(s) Y_k(t) x = Y_k(t) B_{k,s} Y_k(s) x, \quad x \in D(A). \tag{3}$$

Действительно, в силу теоремы 1 и характеристического свойства оператора обобщенного сдвига (см. [13])

$$\lim_{h \to 0+} \frac{T_s^h Y_k(s) x - Y_k(s) x}{h^2} = \frac{1}{2(k+1)} B_{k,s} Y_k(s) x,$$

будем иметь

$$B_{k,s} Y_k(s) Y_k(t) x = 2(k+1) \lim_{h \to 0+} \frac{T_s^h Y_k(s) Y_k(t) x - Y_k(s) Y_k(t) x}{h^2} =$$
$$= 2(k+1) \lim_{h \to 0+} \frac{Y_k(t) \left(Y_k(h) Y_k(s) x - Y_k(s) x \right)}{h^2} = 2(k+1) Y_k(t) \lim_{h \to 0+} \frac{T_s^h Y_k(s) x - Y_k(s) x}{h^2} =$$
$$= Y_k(t) B_{k,s} Y_k(s) x,$$

и тем самым равенство (3) установлено.

Переходя в (3) к пределу при $s \to 0+$, получим равенство (2). Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. *Пусть $Y_k(t)$ — операторная функция Бесселя и A — ее генератор. Если $x \in D(A)$ и $t > 0$, то $Y_k(t) x \in D(A)$ и*

$$A Y_k(t) x = B_{k,t} Y_k(t) x. \tag{4}$$

Доказательство. Поскольку при $s > 0$ справедливы равенства

$$B_{k,s} Y_k(s) Y_k(t) x = B_{k,s} T_t^s Y_k(t) x = B_{k,t} T_t^s Y_k(t) x = B_{k,t} Y_k(s) Y_k(t) x = Y_k(s) B_{k,t} Y_k(t) x,$$

то, переходя к пределу при $s \to 0+$, получим требуемые утверждения. Теорема доказана. $\square$

3. Задача Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Обратимся теперь к задаче Коши, с которой связана ОФБ $Y_k(t)$.

Определение 3. Решением линейного дифференциального уравнения второго порядка с операторным коэффициентом A называется функция $u(t)$, которая при $t \geqslant 0$ дважды непрерывно дифференцируема, при $t > 0$ принимает значения, принадлежащие $D(A)$, т.е., $u(t) \in C^2(\bar{R}_+, E) \cap C(R_+, D(A))$, и удовлетворяет этому уравнению.

Теорема 4. *Пусть $Y_k(t)$ — операторная функция Бесселя, A — ее генератор и $u_0 \in D(A)$. Тогда функция $Y_k(t)u_0$ является решением уравнения ЭПД*

$$B_k u(t) \equiv u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{5}$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Если $u_0 \in D(A)$, то в силу равенства (4), установленного в теореме 3, функция $Y_k(t)u_0$ является решением уравнения (5) и, очевидно, удовлетворяет первому начальному условию в (6). Чтобы проверить, что она удовлетворяет и второму условию в (6), следует уравнение (5) записать в виде

$$(t^k u'(t))' = t^k Au(t). \tag{7}$$

После интегрирования (7) для производной функции $Y_k(t)u_0$ получим представление

$$Y_k'(t)u_0 = t^{-k}\int\limits_0^t s^k Y_k(s)Au_0\,ds,$$

из которого и следует требуемое утверждение. □

Теорема 5. *Если $Y_k(t)$ — операторная функция Бесселя, то ее генератор A замкнут.*

Доказательство. Пусть $x_n \in D(A)$ и $x_n \to x_0,\ Ax_n \to y_0$. Тогда, в силу теорем 2 и 4 справедливы равенства

$$\lim_{t\to 0+} B_{k,t}Y_k(t)x_0 = \lim_{t\to 0+}\lim_{n\to\infty} B_{k,t}Y_k(t)x_n = \lim_{t\to 0+}\lim_{n\to\infty} AY_k(t)x_n = \lim_{t\to 0+} Y_k(t)y_0 = y_0.$$

Поэтому $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$. Теорема доказана. □

Определение 4. Задача Коши (5), (6) называется равномерно корректной, если для любого $u_0 \in D(A)$ существуют заданная на E коммутирующая с A операторная функция $\widetilde{Y}_k(t)$ (разрешающий оператор) и числа $M \geqslant 1$, $\omega \geqslant 0$, такие, что для любого $u_0 \in D(A)$ функция $u(t) = \widetilde{Y}_k(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом справедливы оценки

$$\left\|\widetilde{Y}_k(t)\right\| \leqslant M\exp(\omega t), \tag{8}$$

$$\left\|\widetilde{Y}_k'(t)u_0\right\| \leqslant Mt\exp(\omega t)\left\|Au_0\right\|. \tag{9}$$

Множество операторов A, для которых задача (5), (6) равномерно корректна, обозначим через G_k, при этом G_0 — множество генераторов операторной косинус-функции и $C(t) = Y_0(t)$.

Укажем, что случай абстрактного волнового уравнения ($k = 0$ в (5)) подробно рассмотрен в [20, 21, 23]. В этих работах установлено, что задача (5), (6) при $k = 0$ равномерно корректна только тогда, когда оператор A является генератором операторной косинус-функции $C(t)$. В этих же работах приводятся необходимые и достаточные условия того, что оператор A является генератором операторной косинус-функции, которые формулируются в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ оператора A и ее производных.

Пусть задача Коши (5), (6) равномерно корректна, т.е., $A \in G_k$. Введем в рассмотрение разрешающий оператор $\widetilde{Y}_k(t)$, ставящий в соответствие элементу $u_0 \in D(A)$ значение решения $u(t)$ этой задачи в момент $t > 0$. В силу определения 4, этот оператор линейный непрерывный и может быть по непрерывности расширен до линейного ограниченного оператора, определенного на всем банаховом пространстве E. В дальнейшем будет установлено, что разрешающий оператор $\widetilde{Y}_k(t)$ представляет собой ОФБ, т.е., удовлетворяет условиям (a)–(c) определения 1, а оператор A — ее генератор.

Подробное доказательство формулируемых далее теорем 6–12 приведено в [12].

Теорема 6. *Если задача* (5), (6) *равномерно корректна и* $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$, *то* λ^2 *принадлежит регулярному множеству* $\rho(A)$ *и для любого* $x \in E$ *справедливо представление*

$$\lambda^{(1-k)/2} R(\lambda^2)x = \frac{2^{(1-k)/2}}{\Gamma(k/2+1/2)} \int\limits_0^\infty K_\nu(\lambda t) t^{(k+1)/2} \widetilde{Y}_k(t)x\, dt, \tag{10}$$

где $K_\nu(\cdot)$ — *функция Макдональда или модифицированная функция Бесселя третьего рода порядка* $\nu = (k-1)/2$.

Таким образом, спектр $\sigma(A)$ оператора $A \in G_k$ всегда лежит левее некоторой параболы.

Теорема 7. *Пусть задача* (5), (6) *равномерно корректна и пусть* $\widetilde{Y}_k(t)$ — *разрешающий оператор для этой задачи. Тогда оператор* A *является генератором* C_0*-полугруппы* $T(t)$, *и для этой полугруппы справедливо представление*

$$T(t)x = \frac{1}{2^k\ \Gamma(k/2+1/2)\ t^{k/2+1/2}} \int\limits_0^\infty s^k \exp(-s^2/(4t)) \widetilde{Y}_k(s)x\, ds, \quad x \in E. \tag{11}$$

Из представления (11) следует, что полугруппу $T(t)$ можно продолжить до операторной функции, аналитической в некотором секторе, поэтому при нахождении критерия равномерной корректности задачи (5), (6) можно ограничиться классом операторов, которые являются генераторами аналитических C_0-полугрупп $T(t)$. Обозначим этот класс операторов через G. Критерии того, что $A \in G$ могут быть найдены в обзорной работе [1].

В работе [22] показано, что если $A \in G$, то при $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$ для $\alpha > 0$ существует дробная степень резольвенты $R(\lambda)$, которая имеет вид

$$R^\alpha(\lambda)x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t) T(t)x\, dt, \quad x \in E.$$

Помимо установленного в теореме 6, сформулируем далее еще одно необходимое условие равномерной корректности задачи (5), (6).

Теорема 8. *Если задача* (5), (6) *равномерно корректна и* $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$, *то* λ^2 *принадлежит резольвентному множеству* $\rho(A)$ *оператора* A, *для дробной степени резольвенты справедливо представление*

$$R^{1+k/2}(\lambda^2) = \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\lambda} \int\limits_0^\infty t^k \exp(-\lambda t) \widetilde{Y}_k(t)\, dt, \tag{12}$$

и при этом выполняются оценки

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2) \right) \right\| \leqslant \frac{M\, \Gamma(k+n+1)}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^{k+n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

В действительности, оценки (13) будут являться и достаточным условием равномерной корректности задачи (5), (6).

Теорема 9. *Пусть* $A \in G$, *выполнены оценки* (13) *и* $F_k(\lambda) = \Gamma(k+1)\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2)$. *Тогда задача* (5), (6) *равномерно корректна, и при этом разрешающий оператор* $\widetilde{Y}_k(t)$ *для этой задачи определяется равенством*

$$\widetilde{Y}_k(t) = \lim_{n\to\infty} e^{-nt} \left(I + \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \frac{n^{k+2m+2}}{m!\, \Gamma(k+m+2)}\, t^{m+1} F_k^{(m)}(n) \right).$$

В частности, на элементах из области определения оператора A он имеет вид

$$\widetilde{Y}_k(t)u_0 = \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i\, t^k} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \lambda R^{1+k/2}(\lambda^2) u_0 \, d\lambda, \quad u_0 \in D(A), \quad \sigma > \omega.$$

Теоремы 8 и 9 объединяются в следующий критерий.

Теорема 10 (критерий равномерной корректности)**.** *Пусть оператор A является генератором аналитической C_0-полугруппы. Для того чтобы задача* (5), (6) *была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы при некоторых постоянных $M \geqslant 1$, $\omega \geqslant 0$ число λ^2 с $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ принадлежало резольвентному множеству оператора A и для дробной степени резольвенты оператора A были выполнены оценки* (13).

Теорема 11. *Пусть задача Коши* (5), (6) *равномерно корректна и $\widetilde{Y}_k(t)$ — разрешающий оператор для этой задачи. Тогда $\widetilde{Y}_k(t)$ удовлетворяет условиям* (a)–(c) *определения* 1 *и, следовательно, является ОФБ, т.е., $\widetilde{Y}_k(t) = Y_k(t)$.*

Итак, если при изучении задачи Коши (5), (6) ограничиться только замкнутым оператором A с плотной областью определения, то класс уравнений, для которых эта задача равномерно корректна, совпадает с классом уравнений, у которых оператор A является генератором ОФБ $Y_k(t)$, а сама ОФБ при этом является разрешающим оператором $\widetilde{Y}_k(t) = Y_k(t)$ для рассматриваемой задачи. Примеры ОФБ и соответствующих генераторов приводятся в [12].

Семейство ОФБ $Y_k(t)$ зависит от параметра $k > 0$. Указанная зависимость содержится в приводимой далее формуле сдвига по этому параметру.

Теорема 12. *Пусть $0 \leqslant m < k$ и $A \in G_m$ — генератор ОФБ $Y_m(t)$. Тогда $A \in G_k \supset G_m$, при этом соответствующая ОФБ $Y_k(t)$ имеет вид*

$$Y_k(t) = \frac{2\Gamma(k/2+1/2)}{\Gamma(m/2+1/2)\Gamma(k/2-m/2)} \int\limits_0^1 s^m (1-s^2)^{(k-m)/2-1} Y_m(ts)\, ds. \tag{14}$$

В частности, если $A \in G_0 \subset G_k$ является генератором КОФ $C(t)$, то

$$Y_k(t) = \frac{2\Gamma(k/2+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(k/2)} \int\limits_0^1 (1-s^2)^{k/2-1} C(ts)\, ds, \quad k > 0, \tag{15}$$

при этом (см. [4]) равномерно по $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$

$$\lim_{k\to 0} Y_k(t)x = C(t)x, \quad x \in E.$$

Ранее в работах [11, 18] именно равенство (15) было использовано при построении ОФБ, интерпретируемой как разрешающий оператор для рассматриваемых в этих работах дифференциальных уравнений. Дальнейшее обобщение формулы сдвига по параметру приводится в [10].

Из равенства (14) вытекают следующие формулы для производных ОФБ:

$$Y_k'(t)u_0 = \frac{t}{k+1} Y_{k+2}(t) A u_0, \quad \lim_{t\to 0} Y_k''(t)u_0 = \frac{1}{k+1} A u_0, \quad u_0 \in D(A).$$

Завершая этот раздел, отметим, что случай возмущения оператора $A \in G_k$ ограниченным оператором исследован в [2], а если $A \in G_k$ и $B \in G_m$, $m < k$, то вопрос о принадлежности оператора $A + B$ некоторому классу корректности рассмотрен в [5].

4. Заключение. В этом разделе мы укажем на связи ОФБ $Y_k(t)$ с рядом других разрешающих операторов.

При $k < 0$ и $A \in G_{2-k}$ операторная функция

$$Z_k(t) = \frac{t^{1-k}}{1-k} Y_{2-k}(t)$$

определяет решение уравнения ЭПД (5), удовлетворяющее условиям

$$u(0) = 0, \quad \lim_{t\to 0+} t^k u'(t) = u_1, \tag{16}$$

и поэтому она названа операторной функцией Бесселя с отрицательным индексом. В работе [9] доказано, что множество G_{2-k} является классом корректности весовой задачи (5), (16), а функция $Z_k(t)u_1,\ u_1 \in D(A)$ — ее единственное решение.

Отметим, что при $k < 0$ задача Коши для уравнения ЭПД (5) с условиями

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = u_1$$

не является корректной ввиду потери единственности (см. [19]).

В [8] при $k > 0$ введена в рассмотрение операторная функция Струве $L_k(t)$, которая связана с ОФБ $Y_k(t)$ формулой

$$L_k(t)x = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+1/2)} \int\limits_0^t {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}; 1; 1 - \frac{t^2}{\tau^2}\right) Y_k(\tau)x\, d\tau, \quad A \in G_k, \quad x \in E,$$

где ${}_2F_1(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Если $k > 0$, $A \in G_k$, $u_0, u_1 \in D(A)$, то функция $u(t) = Y_k(t)u_0 + L_k(t)u_1$ будет единственным решением уравнения Бесселя—Струве

$$u''(t) + \frac{k}{t}\big(u'(t) - u'(0)\big) = Au(t), \quad t > 0, \tag{17}$$

удовлетворяющим условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{18}$$

Важно отметить, что наличие в уравнении (17) заданной при $t = 0$ нагрузки $u'(0)$ меняет постановку начальной задачи при $k > 0$. Вместо корректной для уравнения ЭПД (5) весовой задачи с условием (16), для уравнения Бесселя—Струве (17) следует рассматривать обычную задачу Коши с условием (18).

Укажем далее на связь ОФБ $Y_k(t)$ с разрешающим оператором задачи Коши для уравнения Лежандра

$$u''(t) + k \operatorname{cth} t\; u'(t) + (k/2)^2 u(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad k > 0. \tag{19}$$

Дифференциальный оператор в левой части уравнения (19) возникает при решении уравнения Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения. Как следует из результатов работы [6], корректная постановка начальных условий для абстрактного уравнения Лежандра (19), так же как и для уравнения ЭПД (5), состоит в задании в точке $t = 0$ начальных условий

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \tag{20}$$

В [6] также доказано, что множество операторов A, с которыми задача (19), (20) равномерно корректна, совпадает с множеством G_k, и приведены формулы, связывающие разрешающий оператор этой задачи с ОФБ $Y_k(t)$.

Укажем, наконец, на формулу связи ОФБ $Y_k(t)$ с проинтегрированной операторной косинус-функцией (ПКОФ), которая установлена в [7]. Пусть $k = 2\alpha > 0$ и оператор A является генератором α раз ПКОФ $C_\alpha(t)$, $u_0 \in D(A)$. Тогда задача (5), (6) равномерно корректна, т.е. $A \in G_k$, и соответствующая ОФБ представима в виде

$$Y_k(t)u_0 = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi}\, t^\alpha} \left(C_\alpha(t)u_0 - \int\limits_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau) C_\alpha(t\tau)u_0\, d\tau \right),$$

где $P_\nu(t)$ — сферическая функция Лежандра (см. [15, с. 205]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения// Итоги науки и техн. Мат. анализ. — 1990. — *28*. — С. 87–202.
2. *Глушак А. В.* О возмущении абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Мат. заметки. — 1996. — *60*, № 3. — С. 363–369.
3. *Глушак А. В.* Операторная функция Бесселя// Докл. РАН. — 1997. — *352*, № 5. — С. 587–589.
4. *Глушак А. В.* Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Мат. заметки. — 1999. — *66*, № 3. — С. 364–371.
5. *Глушак А. В.* Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта// Диффер. уравн. — 1999. — *35*, № 1. — С. 128–130.
6. *Глушак А. В.* Операторная функция Лежандра// Изв. РАН. Сер. мат. — 2001. — *65*, № 6. — С. 3–14.
7. *Глушак А. В.* О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя// Диффер. уравн. — 2006. — *42*, № 5. — С. 583–589.
8. *Глушак А. В.* Абстрактная задача Коши для уравнения Бесселя—Струве// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 7. — С. 891–905.
9. *Глушак А. В.* Критерий разрешимости весовой задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 5. — С. 627—637.
10. *Глушак А. В.* Операторная формула сдвига решения задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Мат. заметки. — 2019. — *105*, № 5. — С. 656–665.
11. *Глушак А. В., Кононенко В. И., Шмулевич С. Д.* Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши// Изв. вузов. Мат. — 1986. — № 6. — С. 55–56.
12. *Глушак А. В., Покручин О. А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 1. — С. 41–59.
13. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Вища школа, 1989.
14. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
15. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. — М.: Физматгиз, 1963.
16. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье// Усп. мат. наук. — 1951. — *1*, № 2 (42). — С. 102–143.
17. *Мельникова И. В., Филинков А. И.* Интегрированные полугруппы и C-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач// Усп. мат. наук. — 1994. — *49*, № 6 (300). — С. 111–150.
18. *Орлов В. П.* О слабо вырождающихся гиперболических уравнениях// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 10. — С. 1409–1419.
19. *Bresters D. W.* On the Euler–Poisson–Darboux equation// SIAM J. Math. Anal. — 1973. — *4*, № 1. — P. 31–41.
20. *Da Prato G., Giusti E.* Una caratterizzazione dei generatori di funzioni coseno astratte// Boll. Union. Mat. Ital. — 1967. — *22*. — P. 357–362.
21. *Fattorini H. O.* Ordinary differential equations in linear topological space, II// J. Differ. Equ. — 1969. — *6*. — P. 50–70.
22. *Fattorini H. O.* A note on fractional derivatives of semigroups and cosine functions// Pac. J. Math. — 1983. — *109*, № 2. — P. 335–347.
23. *Sova M.* Cosine operator functions// Rozpr. mat. — 1966. — *49*. — P. 1–47.

Глушак Александр Васильевич

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: `aleglu@mail.ru`, `Glushak@bsu.edu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 44–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-44-49

УДК 517.956.2

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

© 2020 г. **П. В. ДЕНИСОВ**

Аннотация. Работа посвящена изучению асимптотического поведения при больших значениях переменной y решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $E_+^{N+1} \equiv \{x, y : x \in E^N, y > 0\}$.

Ключевые слова: задача Дирихле, полупространство, асимптотическое поведение решений.

ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION IN THE HALF-SPACE

© 2020 **P. V. DENISOV**

Abstract. This paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation in the half-space $E_+^{N+1} \equiv \{x, y : x \in E^N, y > 0\}$ for large values of the variable y.

Keywords and phrases: Dirichlet problem, half-space, asymptotic behavior of solutions.

AMS Subject Classification: 35J05, 35C20

В полупространстве $\overline{E}_+^{N+1} \equiv \{x, y : x \in E^N, y \geqslant 0\}$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \Delta u(x,y) = 0 \quad (x,y) \in E_+^{N+1}, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in E^N, \tag{2}$$

где

$$\Delta = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Предполагается, что граничная функция $u_0(x)$ является непрерывной и ограниченной в E^N:

$$u_0(x) \in C(E^N), \quad |u_0(x)| \leqslant C. \tag{3}$$

Под решением задачи Дирихле (1), (2) будем понимать ограниченное классическое решение задачи (1), (2), т.е. функция $u(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и y в E_+^{N+1} и удовлетворяет в классическом смысле уравнению (1) и граничному условию (2).

Автор выражает глубокую признательность проф. М. В. Шамолину за внимание и ценные советы.

При сделанных предположениях ограниченное решение задачи Дирихле (1), (2) существует, единственно и представимо в виде интеграла Пуассона (см. [2,4]):

$$u(x,y) = \frac{\Gamma((N+1)/2)y}{\pi^{(N+1)/2}} \int\limits_{E^N} \frac{u_0(z)\,dz}{\left[y^2+|x-z|^2\right]^{(N+1)/2}}. \tag{4}$$

Символом $S_R^\alpha u_0(x)$ обозначим шаровые средние Рисса порядка $\alpha \geqslant 0$ от граничной функции (2) (см. [1,5]):

$$S_R^\alpha u_0(x) = \frac{2}{B(\alpha+1,N/2)w_N R^N} \int\limits_{r\leqslant R} \left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^\alpha u_0(y)\,dy =$$

$$= \frac{2}{B(\alpha+1,N/2)R^N} \int\limits_0^R \rho^{N-1} M(x,\rho;u_0) \left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)^\alpha d\rho, \tag{5}$$

где

$$r = |x-y| = \left[\sum_{k=1}^N (x_k-y_k)^2\right]^{1/2}, \quad w_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$$

и $M(x,\rho;u_0)$ — сферическое среднее функции $u_0(x)$ по поверхности сферы с центром в точке x радиуса ρ:

$$M(x,\rho;u_0) = \frac{1}{w_N\rho^{N-1}} \int\limits_{|x-y|=\rho} u_0(y)\,dS_y. \tag{6}$$

Изучим вопрос о достаточных условиях существования при некотором $\nu > 0$ асимптотики решения задачи Дирихле (1), (2) при $y \to +\infty$, т.е. вопрос о существовании предела

$$\lim_{y\to\infty} y^\nu u(x,y) = A(x), \tag{7}$$

и покажем, что эти условия выражаются в терминах существования шаровых средних Рисса порядка $\alpha \geqslant 0$, согласованной степенной асимптотики по R, при $R \to +\infty$.

Вначале выясним важные свойства предельной функции $A(x)$ в равенстве (7).

Теорема 1. *Если предел (7) существует равномерно относительно x на каждом компакте K в E^N, то функция $A(x)$ является гармонической функцией в E^N.*

Следствие 1. *Если $u_0(x)$ — ограниченная, непрерывная функция в E^N, в задаче (1),(2) и предел (7) существует равномерно по x на каждом компакте K в E^N, то $A(x) = A$ — постоянная в E^N.*

Теорема 2. *Если граничная функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в E^N и шаровые средние Рисса (5) порядка α от $u_0(x)$ имеют при некотором $\nu > 0$, удовлетворяющем неравенствам*

$$0 < \nu < N + 2\alpha + 2, \tag{8}$$

асимптотику

$$S_R^\alpha u_0(x) = \frac{A}{R^\nu} + \frac{Q(x,R)}{R^\nu}, \tag{9}$$

где

$$\lim_{R\to+\infty} Q(x,R) = 0 \tag{10}$$

равномерно на каждом компакте $K \in E^N$ или равномерно по x во всем E^N, то решение задачи Дирихле (1), (2) имеет при $y \to +\infty$ асимптотику

$$u(x,y) = \frac{A\cdot C_1}{y^\nu} + \frac{Q_1(x,y)}{y^\nu}, \tag{11}$$

где

$$\lim_{y\to+\infty} Q_1(x,y) = 0 \tag{12}$$

существует равномерно по x на каждом компакте $K \in E^N$ или равномерно по x во всем E^N,

$$C_1 = B\left(\frac{N+2\alpha+2-\nu}{2},\ \frac{1+\nu}{2}\right)\Big/B\left(\frac{N+2\alpha+2}{2},\ \frac{1}{2}\right). \tag{13}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть шар $\{|x-z| \leqslant R\}$ целиком принадлежит компакту K, для которого существует равномерный по x предел (7). Введем обозначение

$$V(x,y) = y^\nu u(x,y). \tag{14}$$

Для функции (14), очевидно принадлежащей классу $C^2(K)$, имеет место формула

$$V(x,y) = \frac{1}{w_N R^{N-1}} \int\limits_{r=R} V(z,y)\,dS_z + \frac{1}{(N-2)} \int\limits_{r\leqslant R} (r^{2-N} - R^{2-N})\Delta V(z,y)\,dz, \tag{15}$$

где $r = |x-z|$ (см. [2]). Из этой формулы, уравнения (1) и из существования равномерного на K предела (7) следует, что существует равномерный по $x \in K$ предел

$$\lim_{y\to+\infty} \int\limits_{r\leqslant R} \left(r^{2-N} - R^{2-N}\right)\left[y^\nu u_{yy}(z,y)\right] dz = B(x). \tag{16}$$

Докажем, что предел (16) равен нулю хотя бы для одной последовательности $y_n \to +\infty$. Используя формулу (15), существование равномерных пределов (7), (16), а также интегрирование по частям (см. [3]), получим

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_n^{\tau+1} d\tau \int\limits_\tau^{n+1} \left[\int\limits_{r\leqslant R} \left(r^{2-N} - R^{2-N}\right) y^\nu u_{yy}(z,y)\,dz\right] dy =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{r\leqslant R} \left(r^{2-N} - R^{2-N}\right) \left[\int\limits_n^{n+1} d\tau \int\limits_\tau^{\tau+1} y^\nu u_{yy}(z,y)\,dy\right] dz.$$

Докажем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_n^{n+1} d\tau \int\limits_\tau^{\tau+1} y^\nu u_{yy}(z,y)dy = 0, \quad |x-z| \leqslant R. \tag{17}$$

Интегрируя по частям, получим

$$K = \int\limits_n^{n+1} d\tau \int\limits_\tau^{\tau+1} y^\nu u_{yy}(z,y)\,dy =$$

$$= \left[(n+2)^n u(z,n+2) - (n+1)^n u(z,n+1)\right] - \left[(n+1)^n u(z,n+1) - n^n u(z,n)\right] -$$

$$-\nu \int\limits_n^{n+1} (\tau+1)^{\nu-1} u(z,\tau+1) - \nu^{\nu-1} u(z,\tau))d\tau +$$

$$+\nu(\nu-1) \int\limits_n^{n+1} d\tau \int\limits_\tau^{\tau+1} y^{\nu-2} u(z,y)dy = K_1 + K_2 + K_3 + K_4. \tag{18}$$

Из существования равномерного предела (7) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} K_1 = \lim_{n\to+\infty} K_2 = 0. \tag{19}$$

Применяя в K_3 и K_1 в (18) первую формулу среднего значения (см. [3, т. 1]) и переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что существует предел

$$\lim K_3 + \lim K_4 = \lim_{n\to\infty} \nu(\tau_* + 1)^\nu u(z, \tau_* + 1) - \tau_*^\nu u(z, \tau_*) \left[\ln \frac{n+1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n}\right] + \\ + \lim_{n\to\infty} \nu(\nu - 1)\tau_{**}^\nu u(z, \tau_{**}) \int\limits_n^{n+1} \int\limits_\tau^{\tau+1} \frac{dy}{y^2} = 0,$$

т.е. доказано, что существует предел при $y_n \to \infty$ в формуле (16), и предел $B(x)$ равен нулю.

Таким образом доказано, что предельная функция в (7) удовлетворяет формуле среднего арифметического

$$A(x) = \frac{1}{w_N R^{N-1}} \int\limits_{|x-z|=R} A(z) dS_z.$$

Тогда из [2, 4] следует, что $A(x)$ является гармонической в E^N. Теорема 1 доказана. □

Доказательство следствия 1. Так как $u_0(x)$ по условию непрерывна и ограничена в E^N, решение (4) задачи Дирихле также является ограниченным в E^{N+1}. Тогда из теоремы Лиувилля (см. [2]) и теоремы 1 получим, что $A(x) = A$ — постоянная в E^N. □

Лемма 1. *Если граничная функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в E^N, то для решения задачи Дирихле* (1), (2) *справедлива формула*

$$u(x, y) = Cy \int\limits_0^{+\infty} \rho^{N+2\alpha+1} S_\rho^\alpha u_0(x) \frac{d\rho}{[\rho^2 + y^2]}^{(N+2\alpha+3)/2}, \tag{20}$$

где

$$C = 2/B\left(\frac{N + 2\alpha + 2}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

и $S_\rho^\alpha u_0(x)$ — шаровые средние Рисса порядка α от $u_0(x)$, определенные в (5).

Доказательство. Переходя к сферическим N-мерным координатам под знаком интеграла Пуассона, получим

$$u(x, y) = \frac{2y}{B(N/2, 1/2)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\rho^{N-1} M(x, \rho; u_0) d\rho}{[\rho^2 + y^2]^{(N+1)/2}},$$

где $M(x, \rho; u_0)$ — сферическое среднее (6) граничной функции $u_0(x)$. Совершая под знаком последнего интеграла замену переменной $\rho = yz$, а затем выполняя интегрирование по частям, получим

$$u(x, y) = \frac{2y}{B(N/2, 1/2)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d}{dz} \left[\int\limits_0^z \sigma^{N-1} M(x, y\sigma; u_0)\right] (1 + z^2)^{-(N+1)/2} dz = \\ = \frac{2}{B(N/2, 1/2)} \lim_{z\to+\infty} (1 + z^2)^{-(N+1)/2} \cdot \int\limits_0^z \sigma^{N-1} M(x, y\sigma; u_0)\, d\sigma \Big|_{z=0}^2 + \\ + \frac{2(N + 1)}{B(N/2, 1/2)} \int\limits_0^{+\infty} z(1 + z^2)^{-(N+3)/2} \left[\int\limits_0^z \sigma^{N-1} M(x, y\sigma; u_0)\, d\sigma\right] dz.$$

Так как $u_0(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию ограниченности (3), подстановка при $z \to +\infty$, очевидно, обращается в нуль, поэтому получим

$$u(x,y) = \frac{2(N+1)}{B(N/2,1/2)} \int\limits_0^{+\infty} z(1+z^2)^{-(N+3)/2} \left[\int\limits_0^z \sigma^{N-1} M(x, y\sigma, u_0)\, d\sigma\right] dz.$$

Проинтегрируем по частям правую часть этого неравенства, при этом аналогично получим

$$u(x,y) = \frac{2(N+1)}{B(N/2,1/2)} \int\limits_0^{\infty} (1+z^2)^{-(N+3)/2} \frac{d}{dz} \left[\int\limits_0^z \sigma_1\, d\sigma_1 \int\limits_0^{\sigma_1} \sigma^{N-1} M(x, y\sigma, u_0)\, d\sigma\right] dz =$$

$$= \frac{2(N+1)(N+3)}{B(N/2,1/2)} \int\limits_0^{+\infty} (1+z^2)^{-(N+5)/2} z \left[\int\limits_0^z \sigma_1\, d\sigma_1 \int\limits_0^{\sigma_1} \sigma^{N-1} M(x, y\sigma, u_0)\, d\sigma\right] dz.$$

При этом мы учли, что в силу непрерывности и ограниченности функции $u_0(x)$ и убывания функции $(1+z^2)^{-(N+3)/2}$ при $z \to +\infty$, подстановки при $z \to +\infty$ обратились в нуль. Продолжая n раз аналогичный процесс интегрирования по частям и учитывая на каждом шаге факт обращения подстановок в нуль, получим формулу:

$$u(x,y) = \frac{2(N+1)(N+3)\dots(N+2n+1)}{B(N/2,1/2)} \int\limits_0^{\infty} \frac{z}{(1+z^2)^{(N+2n+3)/2}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^z \sigma_{n+1}\, d\sigma_{n+1} \int\limits_0^{\sigma_{n+1}} \sigma_n\, d\sigma_n \int\limits_0^{\sigma_n} \dots \sigma_2\, d\sigma_2 \int\limits_0^{\sigma_2} \sigma_1^{N-1} M(x, y\sigma_1; u_0)\, d\sigma_1\right). \quad (21)$$

Учитывая известную формулу

$$\int\limits_0^z \sigma_{n+1}\, d\sigma_{n+1} \int\limits_0^{\sigma_{n+1}} \dots \sigma_2\, d\sigma_2 \int\limits_0^{\sigma_2} \sigma_1^{N-1} M(x, y\sigma_1; u_0)\, d\sigma_1 = \frac{1}{2^n n!} \int\limits_0^z (z^2-\sigma^2)^n \sigma^{N-1} M(x, \sigma y; u_0)\, d\sigma_1$$

и преобразуя числовой коэффициент при (21) по рекуррентным формулам для B- и Γ-функций (см. [3, т. 2]), получим требуемый результат. Лемма 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. В силу регулярности шаровых средних Рисса достаточно доказать теорему 2 для случая, когда порядок средних Рисса (9) является натуральным: $\alpha = n \in N$.

Представляя решение Дирихле (1), (2) по формуле (20), при $\alpha = n$ будем иметь

$$u(x,y) = C_1 \int\limits_0^{+\infty} \frac{\rho^{N+2n+1}}{(\rho y)^{\nu}} \left[(\rho y)^{\nu} S^n_{\rho y} u_0(x)\right] \frac{d\rho}{(1+\rho^2)^{(N+2n+3)/2}}, \quad (22)$$

где

$$C_1 = B\left(\frac{N+2n-\nu}{2},\ \frac{1+\nu}{2}\right) \Big/ B\left(\frac{N+2n+2}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

Учитывая, что по условию теоремы существует предел (9), заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $R_0(\varepsilon) > 0$, что для всех $R > R_0$ справедливо равенство

$$R^{\nu} S^n_R u_0(x) = A + \varepsilon(x,R), \quad (23)$$

где $|\varepsilon(x,R)| < \varepsilon/2$ в точке x или равномерно по x во всем E^N.

Выбрав $R > R_0$, разобьем интеграл (22) на два интеграла:

$$y^\nu u(x,y) = C_1 \int\limits_0^{\delta(y)} \rho^{N+2n+1-\nu} \big[(y\rho)^\nu S^n_{y\rho} u_0(x)\big] (1+\rho^2)^{(N+2n+3)/2} d\rho +$$

$$+ C_1 \int\limits_{\delta(y)}^{+\infty} \rho^{N+2n+1-\nu} \big[(y\rho)^\nu S^n_{y\rho} u_0(x)\big] (1+\rho^2)^{-(N+2n+3)/2} d\rho = J_1 + J_2, \quad (24)$$

где $\delta(y) = 1/\sqrt{y}$.

Для оценки второго интеграла J_2 в (24) применим интегральную формулу среднего значения (см. [3, т. 1]):

$$J_2 = C_1 \int\limits_{\delta(y)}^{+\infty} \rho^{N+2n+1-\nu} (1+\rho^2)^{-(N+2n+3)/2} d\rho \cdot \big[(y\rho_*)^\nu S^n_{y\rho_*} u_0(x)\big],$$

где $\rho_* \geqslant \delta(y)$. Так как $y\rho_* \geqslant y\delta(y) = \sqrt{y} \to +\infty$ при $y \to +\infty$, в силу (23) и того факта, что $\delta(y) = 1/\sqrt{y} \to 0$ при $y \to +\infty$, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $y_1(\varepsilon)$, что при всех $y \geqslant y_1$ имеем

$$\lim_{y\to+\infty} |J_2 - A \cdot C_1| = |\varepsilon_1(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (25)$$

Оценим теперь J_1 в (24). Очевидно, из оценки (3) для $u_0(x)$ и равенства (24) следует оценка

$$\big|\rho^\nu y^\nu S^n_{\rho y} u_0(x)\big| < C_3.$$

Учитывая в J_1 эту оценку и тот факт, что $\delta(y) \to 0$ при $y \to +\infty$, очевидно, получим, что существует предел

$$\lim_{y\to+\infty} J_1(x,y) = 0 \quad (26)$$

в точке x или равномерно по $x \in E^N$. Из (25) и (26) вытекает, что теорема 2 доказана. □

Теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 настоящей работы, для задачи Коши для уравнения теплопроводности были доказаны в работе [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов В. Н.* Об асимптотике при большом времени решения задачи Коши для уравнения теплопроводности// Докл. РАН. — 1995. — *351*, № 6. — С. 736–738.
2. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. — М.-Л.: ГТТИ, 1945.
3. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1983, 1984.
4. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М., 1966.
5. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. — М., 1951.

Денисов Петр Васильевич
Московский педагогический государственный университет
E-mail: denisov.piter@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 50–67
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-50-67

УДК 517, 531.01

ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПУАНКАРЕ И СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЯ МАЛЫХ И ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

© 2020 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В данной работе затрагиваются некоторые качественные вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, от решения которых зависит исследование ряда динамических систем. Элементарному обзору подлежат такие проблемы как качественные вопросы теории топографических систем Пуанкаре и более общих систем сравнения; проблемы существования и единственности траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки для систем на плоскости; элементы качественной теории монотонных векторных полей.

Ключевые слова: динамическая система, топографическая система Пуанкаре, система сравнения, интегрируемость.

TOPOGRAPHIC POINCARÉ SYSTEMS AND COMPARISON SYSTEMS OF SMALL AND HIGH ORDERS

© 2020 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. On this work, we consider some qualitative questions of the theory of ordinary differential equations, on whose solutions a study of a series of dynamical systems depends. An elementary survey is given for such problems as qualitative questions of the theory of topographic Poincaré systems and more general comparison systems; problems of the existence and uniqueness of trajectories having infinitely distant points for flat systems as limit sets; elements of the qualitative theory of monotone vector fields.

Keywords and phrases: dynamical system, topographic Poincaré system, comparison system, integrability.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

ISSN 0233–6723

1. Естественные топографические системы Пуанкаре в системах с диссипацией

Сначала рассмотрим динамические системы на двумерной плоскости, хотя все сказанное можно перенести и на гладкие ориентированные двумерные многообразия.

Для исследования замкнутых траекторий динамических систем, возникающих в различных приложениях, применим (а в некоторых случаях и видоизменим) теорию топографических систем Пуанкаре (ТСП) [1, 2, 14].

1.1. Топографические системы Пуанкаре. Пуанкаре предложил метод (хотя и не совсем общий) отыскания замкнутых орбит системы гладких дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2). \end{cases} \tag{1.1}$$

Для этого ему потребовалось ввести понятие «топографических систем» (см. [14]). В его трудах впервые рассматривалась алгебраическая функция $F(x_1, x_2)$, обладающая следующими свойствами:

(1) $F(x_1, x_2)$ достаточно гладка и ограничена в любой ограниченной области и стремится к бесконечности, когда одна из ее переменных стремится к бесконечности;

(2) $F(x_1, x_2)$ равна нулю при $x_1 = x_2 = 0$ и положительна в остальных точках;

(3) $F(x_1, x_2)$ имеет первые производные, обращающиеся в нуль лишь при $x_1 = x_2 = 0$ (по крайней мере, вблизи начала координат);

(4) $F(x_1, x_2)$ такова, что при $x_1 = x_2 = 0$ выполнено неравенство

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\right)^2 + \\ + 4\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)\left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\right) < 0,$$

которое означает, что кривая контактов имеет в начале координат изолированную особую точку (о кривых контактов см. ниже; см. также [13, 23, 24]);

(5) $F(x_1, x_2)$ такова, что кривая, заданная уравнением

$$X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0,$$

не уходит на бесконечность.

При выполнении условий (1)–(5) уравнение

$$F(x_1, x_2) = \text{const}$$

дает так называемую *топографическую систему* вложенных друг в друга кривых, имеющую вершину в начале.

Надо сказать, что не все аналитические условия (1)–(5) нам понадобятся. Мы будем учитывать лишь геометрию расположения кривых контактов, траекторий исследуемой динамической системы и кривых топографической системы Пуанкаре (ТСП).

1.2. Примеры из динамики. 1. Рассмотрим системы вида

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\Omega + A_1 \delta(\alpha), \\ \dot{\Omega} = F(\alpha), \ A_1 \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\delta(\alpha)$ — достаточно гладкая 2π-периодическая функция, F — достаточно гладкая нечетная π-периодическая функция, удовлетворяющая следующим условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $dF(0)/d\alpha > 0$, $dF(\pi/2)/d\alpha < 0$ (класс функций $\{F\} = \Phi$). Таким образом,

$$F \in \Phi. \tag{1.3}$$

В частности, аналитическая функция

$$F = F_0(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha \in \Phi \tag{1.4}$$

также является типичным представителем класса функций Φ (соответствует так называемому случаю С. А. Чаплыгина в динамике; см. [17, 18]).

Систему (1.2) при $A_1 = 0$ будем называть системой $(1.2')$. Для системы $(1.2')$ начало координат является особой точкой, имеющей топологический тип центра. Таким образом, существует семейство периодических траекторий, подходящих как угодно близко к точкам

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \ \left(\frac{\pi}{2}, 0\right). \tag{1.5}$$

В частности, в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой (см. [11, 12, 15]), система (1.2) принимает более частный вид:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -\Omega + A_1\dfrac{F(\alpha)}{\cos\alpha}, \\ \dot\Omega = A_2F(\alpha), \ A_1, A_2 \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

где выполнено свойство (1.3).

2. Рассмотрим системы вида

$$\begin{cases} \alpha' = -\omega + b\omega^2\delta_1(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde f_1(\alpha), \\ \omega' = F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha,\omega), \quad b, b_1 \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\Psi(\alpha,\omega) = -b\omega^2\tilde\delta_1(\alpha) + b_1F(\alpha)\delta_1(\alpha),$$

$$\tilde\delta_1(\alpha) = \frac{d\delta_1(\alpha)}{d\alpha}, \quad \tilde f_1(\alpha) = \frac{\mu_1 - \delta_1^2(\alpha)}{\tilde\delta_1(\alpha)}, \quad \mu_1 = \mathrm{const},$$

где $\delta_1(\alpha)$ — достаточно гладкая 2π-периодическая функция, и выполнено свойство (1.3).

Систему (1.7) при $b = b_1 = 0$ будем называть системой $(1.7')$. Для системы $(1.7')$ начало координат является особой точкой, имеющей топологический тип центра. Таким образом, существует семейство периодических траекторий, подходящих как угодно близко к точкам (1.5).

В частности, в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой (см. [20, 22, 25]), система (1.7) принимала более частный вид:

$$\begin{cases} \alpha' = -\omega + \dfrac{\sigma}{I}F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha, \\ \omega' = \dfrac{1}{I}F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha,\omega), \quad \sigma, I > 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

где

$$\Psi(\alpha,\omega) = \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\sin\alpha - \sigma\omega^2\cos\alpha,$$

где выполнено свойство (1.3).

3. Рассмотрим системы вида

$$\begin{cases} \alpha' = -\omega + b\omega^2\delta_2(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde f_2(\alpha) + b_2s(\alpha)\delta_2(\alpha), \\ \omega' = F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha,\omega), \ b, b_1, b_2 \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\Psi(\alpha,\omega) = -b\omega^2\tilde\delta_2(\alpha) + b_1F(\alpha)\delta_2(\alpha) - b_2s(\alpha)\tilde\delta_2(\alpha),$$

$$\tilde\delta_2(\alpha) = \frac{d\delta_2(\alpha)}{d\alpha}, \quad \tilde f_2(\alpha) = \frac{\mu_2 - \delta_2^2(\alpha)}{\tilde\delta_2(\alpha)}, \quad \mu_2 = \mathrm{const},$$

где $\delta_2(\alpha)$ — достаточно гладкая 2π-периодическая функция, выполнено свойство (1.3), а также выполнено свойство

$$s \in \Sigma. \tag{1.10}$$

Вводимый класс Σ динамических функций достаточно широк: он состоит из функций гладких, 2π-периодических, четных, удовлетворяющих следующим условиям: $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$,

$s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $ds(\pi/2)/d\alpha < 0$ (класс функций $\{s\} = \Sigma$). Функция s меняет знак при замене α на $\alpha + \pi$.

В частности, аналитическая функция

$$s(\alpha) = s_0(\alpha) = \cos\alpha \in \Sigma \tag{1.11}$$

служит типичным представителем описанного класса и соответствует функции воздействия среды, полученной в одной из своих работ С. А. Чаплыгиным (см. [17, 18, 26, 27]) при исследовании плоскопараллельного обтекания плоской пластины бесконечной длины однородным потоком среды.

Систему (1.9) при $b = b_1 = b_2 = 0$ будем называть системой (1.9$'$). Для системы (1.9$'$) начало координат является особой точкой, имеющей топологический тип центра. Таким образом, существует семейство периодических траекторий, подходящих как угодно близко к точкам (1.5).

В частности, в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой (см. [32, 33, 35]), система (1.9) принимала более частный вид:

$$\begin{cases} \alpha' = -\omega + \dfrac{\sigma}{I}F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha + \dfrac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha, \\ \omega' = \dfrac{1}{I}F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha, \omega), \quad \sigma, I, m > 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

где

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma\omega^2\cos\alpha + \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\sin\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha,$$

где выполнены свойства (1.3), (1.10).

Изучаемые в примерах системы можно рассматривать или на фазовом цилиндре

$$\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega \text{ (или } \Omega)\},$$

или на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega \text{ (или } \Omega)\}$.

Если не будет дополнительно оговорено, можно считать, что выполнены условия (1.3), (1.10).

1.3. Более общее понятие ТСП. Под ТСП будем понимать систему вложенных друг в друга замкнутых кривых, полученных с помощью поверхностей уровня неотрицательной функции, которая равна нулю лишь в точке, к которой сходятся полученные вложенные замкнутые кривые. С помощью такой системы можно успешно «ловить» замкнутые траектории исследуемой динамической системы: вычисляя угол между векторами поля, образующими семейство ТСП, и векторами исследуемого поля динамической системы, можно получить информацию о расположении траекторий исследуемого векторного поля. Чтобы доказать отсутствие замкнутых фазовых характеристик, достаточно выполнения неравенства

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}X_2 \leqslant 0 \quad (\geqslant 0).$$

Здесь $F(x_1, x_2) = \text{const}$ — семейство замкнутых кривых, $X = \{X_1, X_2\}$ — исходное векторное поле (в координатах x_1, x_2). Таким образом, с помощью последнего неравенства можно исследовать качественное поведение траекторий исходной системы. Заметим, что векторное поле обязательно должно быть задано в некоторых координатах.

Выше указывалось, что можно определить ТСП более корректно, но это нам не потребуется. Более того, нас интересуют лишь геометрические свойства взаимного расположения кривых ТСП и фазовых кривых исследуемого поля.

1.4. Характеристические функции и кривые контактов векторных полей. С понятием топографической системы Пуанкаре тесно связано понятие характеристической функции двух полей на плоскости. Последняя функция определяет кососимметрическую форму на плоскости. Если $F(x_1, x_2) = \text{const}$ — семейство замкнутых кривых, то система, имеющая явный вид гамильтоновой,

$$\dot{x_1} = -\frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad \dot{x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_1},$$

задает векторное поле, касательное к семейству кривых ТСП. Тогда последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$X_1Y_2 - X_2Y_1 \leqslant 0 \quad (\geqslant 0),$$

в котором

$$Y_1 = -\frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad Y_2 = \frac{\partial F}{\partial x_1}$$

— векторное поле системы. Оно касается кривых ТСП.

Рассмотрим две системы уравнений на плоскости. Эти уравнения задаются гладкими векторными полями $X = \{X_1, X_2\}$ и $Y = \{Y_1, Y_2\}$ в некоторых координатах $x = (x_1, x_2)$. Естественно рассмотреть функцию

$$\chi = \chi(X, Y) = X_1Y_2 - X_2Y_1,$$

которая отвечает за знак синуса угла между полями X и Y. Очевидно, $\chi(X, Y) = 0$ там и только там, где поля X и Y касаются.

Функция χ удовлетворяет следующим свойствам:

$$\chi(X, Y) = -\chi(Y, X), \quad \chi(\lambda X, Y) = \lambda\chi(X, Y)$$

для любой действительной функции λ.

Определение 1.1. Функцию χ мы назовем *характеристической функцией* двух векторных полей, а уравнение $\chi(X, Y) = 0$ — уравнением кривой контактов для полей X и Y.

Введем обозначения полос:

$$\Pi = \left\{(\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right\}, \quad \Pi' = \left\{(\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

В применение метода ТСП к динамическим системам, возникающим в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой, рассмотрим системы вида (1.2) в полосе Π. Ранее (см. [21,34,36]) было показано, что при некоторых условиях у данной системы не существует так называемых монотонных предельных циклов. Оказывается, при тех же условиях у такой системы не существует никакой замкнутой кривой, состоящей из фазовых траекторий.

Лемма 1.1. *Пусть $A_1 \neq 0$. Если выполнено неравенство $F(\alpha)\delta(\alpha) > 0$ (< 0) почти всюду в полосе Π, то у системы вида* (1.2) *не существует замкнутой кривой из траекторий в полосе* Π.

Доказательство. Систему (1.2) при $A_1 = 0$ будем называть системой (1.2$'$). Как уже отмечалось, для системы (1.2$'$) начало координат является особой точкой, имеющей топологический тип центра. Таким образом, существует семейство периодических траекторий, подходящих как угодно близко к точкам $(-\pi/2, 0)$, $(\pi/2, 0)$. Характеристическая функция, отвечающая системам (1.2) и (1.2$'$), равна $A_1F(\alpha)\delta(\alpha)$. Кривая контактов — это объединение конечного числа прямых вида

$$\{(\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = \alpha^0\}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha^0 < \frac{\pi}{2}.$$

В остальных же точках полосы Π характеристическая функция положительна.

Рассуждаем от противного. Предположим, что существует замкнутая кривая из траекторий γ_0, ограничивающая область S_0. Пусть точка $(\alpha_0, 0) \in \gamma_0$, где $0 < \alpha_0 < \pi/2$. Рассмотрим точку $(\alpha_0 + \varepsilon, 0)$, где ε — достаточно мало. Через нее проходит замкнутая траектория γ_ε из ТСП, ограничивающая область S_ε. Очевидно, что, выходя из точки $(\alpha_0, 0)$, покидая область S_ε, траектория γ_0 никогда не попадет в область S_ε, в силу положительности почти всюду характеристической функции. Но $(\alpha_0, 0) \in S_\varepsilon$. Противоречие. Лемма доказана. □

Следствие 1.1. *Если $F \in \Phi$, $\delta \in Y$, то в полосе Π (впрочем, как и в полосе Π') не существует замкнутой характеристики системы* (1.2).

Вводимый класс Y динамических функций достаточно широк: он состоит из функций достаточно гладких, 2π-периодических, нечетных, удовлетворяющих следующим условиям: $\delta(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $d\delta(0)/d\alpha > 0$, $d\delta(\pi)/d\alpha < 0$ (класс функций $\{\delta\} = Y$). Функция δ меняет знак при замене α на $\alpha + \pi$. Таким образом, $\delta \in Y$. В частности, аналитическая функция $\delta(\alpha) = \delta_0(\alpha) = \sin \alpha \in Y$ служит типичным представителем описанного класса.

Рассмотрим далее систему (1.7) в полосе Π. Аналогично лемме 1.1 доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Если выполнены неравенства* $\tilde{\delta}_1(\alpha)$, $\tilde{f}_1(\alpha) > 0$ (< 0) *почти всюду в полосе* Π, *то у системы вида* (1.7) *в полосе* Π *при* $b = b_1 > 0$ *не существует замкнутой кривой из траекторий.*

Доказательство. Систему (1.7) при $b = b_1 = 0$ будем называть системой $(1.7')$. Аналогично лемме 1.1, система $(1.7')$ обладает особой точкой типа центр, окруженной замкнутыми траекториями, продолжающимися до точек $(-\pi/2, 0)$, $(\pi/2, 0)$. Характеристическая функция, отвечающая системам (1.7) и $(1.7')$, при $b = b_1$ равна

$$b\left\{F^2(\alpha)\tilde{f}_1(\alpha) + \omega^4\tilde{\delta}_1(\alpha)\right\}.$$

Лишь на множестве нулевой меры данная функция обращается в нуль, а в остальных точках она знакопостоянна. Из рассуждений, используемых при доказательстве леммы 1.1, следует лемма 1.2. □

Следствие 1.2. *Если* $F \in \Phi$, $\tilde{\delta}_1, \tilde{f}_1 \in \Sigma$, *то в полосе* Π (*впрочем, как и в полосе* Π') *не существует замкнутой характеристики системы* (1.7).

Теперь рассмотрим систему (1.9) в полосе Π. Аналогично леммам 1.1, 1.2 доказывается следующая лемма.

Лемма 1.3. *Если выполнены неравенства* $\tilde{\delta}_2(\alpha)$, $\tilde{f}_2(\alpha)$, $F(\alpha)\delta_2(\alpha) > 0$ (< 0) *почти всюду в полосе* Π, *то у системы вида* (1.9) *в полосе* Π *при* $b = b_1, b_2 > 0$ *не существует замкнутой кривой из траекторий.*

Доказательство. Рассмотрим систему $(1.7')$ (см. лемму 1.2. Для нее по-прежнему начало координат имеет топологический тип центра, обладающий семейством замкнутых траекторий, продолжающихся до точек $(-\pi/2, 0)$, $(\pi/2, 0)$. Характеристическая функция, отвечающая системам (1.9) и $(1.7')$, при $b = b_1$ равна

$$b\left\{F^2(\alpha)\tilde{f}_2(\alpha) + \omega^4\tilde{\delta}_2(\alpha)\right\} + b_2\left\{F(\alpha)s(\alpha)\delta_2(\alpha) + \omega^2 s(\alpha)\tilde{\delta}_2(\alpha)\right\}.$$

Очевидно, что почти всюду в полосе Π характеристическая функция положительна. Остается сослаться на методы доказательств лемм 1.1 и 1.2. □

Следствие 1.3. *Если* $F \in \Phi$, $s, \tilde{\delta}_2, \tilde{f}_2, \in \Sigma$, $\delta_2 \in Y$, *то в полосе* Π *не существует замкнутой характеристики системы* (1.9).

Замечание 1.1. Как было показано ранее (см. [21, 37, 38]), в полосе Π' у системы вида (1.9) возможны при некоторых условиях простые и сложные предельные циклы.

Рассмотрим систему (1.9) в области

$$O' = \left\{\Pi_{(0,\pi)} \cap \left\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\right\}\right\}.$$

Если

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tilde{\delta}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \delta_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0,$$

то при $b > 0$ существует особая точка

$$\left(\frac{\pi}{2}, \ \frac{1}{b\delta_2(\pi/2)}\right). \tag{1.13}$$

Здесь

$$\Pi_{(0,\pi)} = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \ \ 0 < \alpha < \pi\}.$$

Аналогично леммам 1.1–1.3 доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.4. *Рассмотрим систему вида* (1.9) *при* $b, b_1, b_2 > 0$ *в области* O'. *Пусть для простоты* $F \in \Phi$, $s, \tilde{\delta}_2, \tilde{f}_2 \in \Sigma$, $\delta_2 \in Y$. *Тогда вокруг точки покоя* (1.13) *в области* O' *не существует замкнутой кривой из траекторий, если неравенство*

$$\omega^2 \frac{\tilde{\delta}_2(\alpha)}{s(\alpha)} - b_1\mu_2 \frac{F(\alpha)}{s(\alpha)}\omega + \frac{F(\alpha)}{s(\alpha)}\delta_2(\alpha) > 0 \tag{1.14}$$

не выполнено в области O' *только при* $\alpha = \pi/2$.

Заметим, что равенство (1.14) возникает при изучении так называемых нетривиальных положений равновесия (НПР) системы (1.9) (см. [39, 40, 42]).

Доказательство. В области O' рассмотрим систему (1.9). Нетрудно показать, что, поскольку $F \in \Phi$, $\tilde{\delta}_2, \tilde{f}_2 \in \Sigma$, $\delta_2 \in Y$, то точка покоя (1.13) для системы (1.7) имеет топологический тип центра (см. [43, 44]). Существует семейство замкнутых траекторий, окружающее точку (1.13). Это семейство может уходить на бесконечность. Характеристическая функция, отвечающая системам (1.7) и (1.9), равна

$$b_2 s^2(\alpha)\left\{\omega^2 \frac{\tilde{\delta}_2(\alpha)}{s(\alpha)} - b_1\mu_2 \frac{F(\alpha)}{s(\alpha)}\omega + \frac{F(\alpha)}{s(\alpha)}\delta_2(\alpha)\right\}.$$

Последняя величина знакоопределена, поскольку неравенство (1.14) не выполнено лишь при $\alpha = \pi/2$. Поля систем (1.7) и (1.9) в области O' касаются лишь на прямой $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2\colon \alpha = \pi/2\}$. При этом необходимо заметить, что коэффициенты квадратного относительно ω неравенства (1.14) обладают следующими свойствами:

$$\frac{F}{s} \in Y, \quad \frac{\tilde{\delta}_2}{s} > 0.$$

Остается сослаться на методы доказательств лемм 1.1–1.3. □

Вообще говоря, при исследовании системы (1.9), в зависимости от области, используется одна из систем вида (1.7) или (1.7′).

2. Кривые контактов и системы сравнения. Замечания о предельных циклах и проблеме различения центра и фокуса

2.1. Системы сравнения и исследование топологической структуры расположения траекторий. Метод ТСП, о котором говорилось в [23, 29], является частным случаем метода исследования с помощью систем сравнения.

Рассмотрим две системы уравнений на плоскости и характеристическую функцию определяющих их векторных полей, которая, как указывалось, отвечает за знак синуса угла между векторными полями данных систем. Зная принцип разбиения на траектории одной из них, возможен анализ устройства фазовой плоскости другой системы. В частности, ТСП позволяет, к примеру, исследовать вопрос существования предельных циклов (см. [3, 4, 7, 8]). Таким образом, основной упор делается на вычисление угла между двумя полями рассматриваемых систем в одной и той же области фазовой поверхности.

Вычислять характеристическую функцию можно для любых двух векторных полей на плоскости. В этой связи назовем *системой сравнения для данной системы* ту систему, качественное расположение траекторий которой полностью известно.

Ранее уже проводилось сравнение векторных полей систем (1.2′), (1.9), (1.7).

Предложение 2.1. *Рассмотрим системы вида* (1.7) *и* (1.9) *на плоскости. Система* (1.7) *является системой сравнения для системы* (1.9) *следующим образом: почти всюду угол от вектора одного поля до вектора другого поля лежит в пределах от* 0 *до* π *(с учетом направления), и лишь на множестве нулевой меры этот угол равен нулю, если выполнены все условия леммы* 1.4.

Доказательство. Действительно, если $F \in \Phi$, $s \in \Sigma$, то, в силу леммы 1.4, характеристическая функция во всей фазовой плоскости знакоопределена. □

Замечание 2.1. Если выполнены условия (1.4), (1.11), то угол между векторами полей систем (1.12) и (1.8) меняется монотонно относительно параметра $\mu_1 = 2B/mn_0$, где

$$n_0^2 = \frac{dF(0)}{Id\alpha}, \quad B = s(0).$$

В частности, при $\mu_1 = 0$ последняя характеристическая функция тождественно равна нулю.

Замечание 2.2. Поскольку система (1.8) на плоскости имеет три топологически различных типа фазового портрета (см. [37]), для исследования системы (1.12) в каждой из областей ее параметров можно использовать свой топологический тип (см. [5, 10]).

В качестве системы сравнения для системы (1.9) можно также использовать и систему (1.7′), описывающую консервативную систему, — физический маятник на плоскости.

Замечание 2.3. У системы (1.9) не существует замкнутых кривых из траекторий, огибающих фазовый цилиндр, если выполнены все условия предложения 2.1.

Доказательство. От противного. Пусть существует искомая замкнутая кривая. Можно считать, что начальными условиями для такой траектории является точка $(0, \omega^*)$, $\omega^* > 0$. Проведем через данную точку траекторию системы сравнения (1.7) в зависимости от топологического типа ее фазового портрета [28, 31]. В силу предложения 2.1, если такая траектория существует, то она пройдет лишь через точку $(2\pi, \omega^* + \delta)$, где $\delta > 0$, что противоречит замкнутости кривой. □

Следующее предложение сформулируем для наглядности для систем частного вида (1.12). Для систем более общего вида (1.9) данное предложение несложно переписывается.

Предложение 2.2. *Рассмотрим системы* (1.12) *и* (1.8′) *во всей плоскости. В данном случае система* (1.8′) — *это система* (1.8) *при* $\sigma = 0$. *Система* (1.8′) *является системой сравнения для системы* (1.12) *следующим образом*: *в полосе* Π *почти всюду угол от вектора одного поля до вектора другого поля лежит в пределах от* 0 *до* π *(с учетом направления), и лишь на множестве нулевой меры этот угол равен нулю, а в полосе* Π' *при условии, что*

$$\frac{s(\alpha)}{m\cos\alpha} \geqslant \frac{\sigma}{I}\frac{F(\alpha)}{\sin\alpha} \quad \forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

существует кривая контактов рассматриваемых двух полей, которая является топологической окружностью.

Доказательство. Действительно, если $F \in \Phi$, $s \in \Sigma$, то в полосе Π кривая контактов — начало координат. Перенесем начало координат в точку $(\pi, 0)$ и перепишем уравнение кривой контактов в виде

$$\sigma\cos\alpha\left\{\left(\frac{F(\alpha)}{I}\right)^2 + \omega^4\right\} = \frac{1}{I}F(\alpha)\frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha + \omega^2\frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha. \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (2.1) кривой контактов, которую назовем нетривиальной (НКК), можно разрешить относительно ω^2:

$$2\sigma\omega^2 = \frac{s(\alpha)}{m} \pm \sqrt{\frac{s^2(\alpha)}{m^2} + 4\sigma\frac{F(\alpha)}{I}\sin\alpha\left\{\frac{s(\alpha)}{m\cos\alpha} - \frac{\sigma}{I}\frac{F(\alpha)}{\sin\alpha}\right\}}. \tag{2.2}$$

В полосе Π уравнение (2.2), взятое со знаком «минус», задает лишь точку $(0, 0)$, а взятое со знаком «плюс» — точку $(0, 0)$ и НКК.

НКК симметрична относительно обеих осей координат (после переноса из полосы Π' в полосу Π), пересекает обе оси под прямым углом и только два раза (по теореме о неявной функции). Предложение доказано. □

2.2. Некоторые общие утверждения о ТСП и системах сравнения. С целью рассмотрения вопросов существования ключевых траекторий (замкнутых фазовых характеристик и др.), докажем одну общую теорему. Для этого заметим, что вплоть до прямых Λ_{-1} и Λ_0 (а также Λ_0 и Λ_1) существует семейство замкнутых кривых, которое является ТСП (интегральные кривые системы (1.8′), которая описывает физический маятник). Здесь

$$\Lambda_k = \left\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k\right\}.$$

Поставим также вопрос о существовании замкнутых кривых из траекторий для системы (1.12) в полосе Π'. Для этого докажем утверждение, обобщающее леммы 1.1–1.4.

Теорема 2.1. *Пусть в односвязной области D плоскости, содержащей точку покоя x_0 достаточно гладкого векторного поля v_1, существует такая кривая $\gamma \ni x_0$, соединяющая две точки $A, B \in \partial D$ (точки A, B могут быть бесконечно удалены), что существует ТСП с центром в x_0, задаваемая достаточно гладкой функцией V, продолжающаяся вдоль γ до A и B, заполняющая область $\mathsf{K} \subseteq D$ и обладающая свойством*

$$(v_1, v_2)\Big|_{\mathbb{R}^2} > 0 \tag{2.3}$$

(где $v_2 = \operatorname{grad} V$) почти всюду в K, за исключением, быть может, некоторых кривых, не охватывающих x_0. (Здесь $V = \mathrm{const}$ — семейство кривых ТСП.) Тогда во всей области D вокруг точки x_0 не существует ни одной замкнутой кривой из траекторий поля v_1.

Доказательство. Предположим, что такая кривая γ_0 существует и ограничивает область $S_0 \ni x_0$. Пусть $\{N_1, N_2\} = \gamma \cap \gamma_0 \neq \emptyset$ (поскольку $x_0 \in \gamma$) и точка N_1 — неособое начальное условие при движении по кривой γ_0. Через точку N_1 проходит замкнутая кривая $\bar{\gamma}$ из ТСП, причем $\bar{\gamma} \subset \mathsf{K}$. Если кривая $\bar{\gamma}$ ограничивает область $\bar{S}$, то такое существует $\varepsilon > 0$ (которое уменьшим насколько нужно), что имеет место следующее:

(1) $N_\varepsilon \in \bar{\gamma}_\varepsilon \cap \gamma$, где $\bar{\gamma}_\varepsilon$ — кривая ТСП;
(2) расстояние между точками N_ε и N_1 равно ε;
(3) $\bar{\gamma}_\varepsilon$ ограничивает область $\bar{S}_\varepsilon \supset \bar{S}$.

Выбранное значение ε таково, что точка, двигаясь по траектории γ_0 с начальным условием N_1, покинет область $\bar{S}_\varepsilon$ через конечное время. Поскольку $\bar{S}_\varepsilon \subset \mathsf{K}$ и неравенство (2.3) выполнено почти всюду в K, за исключением, быть может, некоторых кривых, не охватывающих x_0, то точка с начальным условием N_1 никогда больше в область $\bar{S}_\varepsilon \subset \mathsf{K} \subset D$ не вернется. Так как $\bar{S} \subset \bar{S}_\varepsilon$, то приходим к противоречию с замкнутостью кривой γ_0. □

Как уже отмечалось, в полосе Π' для систем вида (1.12) при некоторых условиях существует ТСП с центром в точке $(\pi, 0)$ (система (1.8′)), продолжающаяся до точек

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right). \tag{2.4}$$

При этом НКК системы сравнения (ТСП) и поля системы (1.12) ограничивает область, целиком содержащую ТСП. Таким образом, ссылаясь на теорему 2.1, получаем следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Рассмотрим систему* (1.12) *в полосе Π', если НКК системы сравнения* (1.8′) *и системы* (1.12) *ограничивает область, целиком содержащую ТСП, продолжающуюся до точек* (2.4)*. Тогда в полосе Π' не существует замкнутой кривой из траекторий системы* (1.12).

Рассмотрим системы вида (1.12) при условиях (1.3), (1.10). Выше ставился вопрос о существовании замкнутых кривых из траекторий в полосе Π', т.е. кривых, окружающих точку $(\pi, 0)$. Поставим также более общий вопрос о существовании любых замкнутых кривых из траекторий системы (1.12), стягиваемых по фазовому цилиндру в точку.

Очевидно, что сумма индексов особых точек, находящихся внутри таких кривых, должна равняться 1. Значит такие кривые могут возникнуть вокруг точек $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Внутри таких кривых не могут содержаться одновременно два седла

$$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, 0\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, 0\right)$$

и точка $(2\pi k, 0)$, поскольку сумма индексов при этом равна -1. Такие кривые не могут содержать внутри себя одновременно точки $(\pi k, 0)$ и $(\pi(k+1), 0)$, поскольку, в силу центральной симметрии поля системы (1.12) относительно точек $(\pi k, 0)$ и теоремы единственности, это невозможно.

Остается единственная возможность существования такой кривой, содержащей более одной особой точки внутри себя. Пусть для определенности $k=0$. Такая кривая может содержать точки

$$(0,0), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{\sigma}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma}\right),$$

сумма индексов которых равна 1. Но в силу леммы 1.4 это невозможно, хотя бы потому, что траектория, имеющая в качестве ω-предельного множества точку $(\pi/2, 1/\sigma)$, имеет в качестве α-предельного множества бесконечно удаленную точку (см. [19, 30]).

Таким образом, вопрос существования замкнутых кривых из траекторий системы (1.12), стягиваемых по фазовому цилиндру в точку, при условии выполнения леммы 1.4, свелся к отысканию таких кривых в полосе Π' вокруг точки $(\pi, 0)$. Как было показано в [37], при некоторых условиях такие кривые существуют.

2.3. Проблема различения центра и фокуса и системы сравнения. Первая проблема различения в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений — проблема центра и фокуса — возникает в точке $(\pi, 0)$ в полосе Π' для динамической системы вида (1.12) при условиях (1.3), (1.10), а также при $\mu_1=\mu_2$ и $0<\mu_2<2$ (см. [37]). В [26, 27] данная проблема решена при $\mathrm{In}\neq 0$ в пользу слабого фокуса. Таким образом, в достаточно малой окрестности точки $(\pi, 0)$ все траектории-спирали приближаются к точке $(\pi, 0)$ либо при $t\to+\infty$, либо при $t\to-\infty$ (здесь t — независимый параметр вдоль траекторий).

Поставим вопрос о расширении данной окрестности точки $(\pi, 0)$ в полосе Π' (на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$). Для этого переведем начало координат в точку $(0,0)$. После такой замены переменных система (1.12) (рассматриваемая уже в полосе Π) примет вид

$$\begin{cases} \alpha' = -\omega - \dfrac{\sigma}{I}F(\alpha)\cos\alpha - \sigma\omega^2\sin\alpha + \dfrac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha, \\ \omega' = \dfrac{1}{I}F(\alpha) - \sigma\omega^3\cos\alpha + \dfrac{\sigma}{I}\omega F(\alpha)\sin\alpha + \dfrac{\omega}{m}s(\alpha)\cos\alpha. \end{cases} \tag{2.5}$$

Для простоты рассмотрим систему (2.5) при условиях (1.4), (1.11), т.е. когда $F(\alpha)=F_0(\alpha)$, $s(\alpha)=s_0(\alpha)$. После замены в полосе Π по формуле $\tau=\sin\alpha$, $|\tau|<1$, системе (2.5) сопоставим уравнение

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{n_0^2\tau - \sigma\omega^3 + \sigma n_0^2\omega\tau^2 + \dfrac{\sigma n_0^2}{2}\omega\sqrt{1-\tau^2}}{-\omega - \sigma n_0^2\tau(1-\tau^2) - \sigma\omega^2\tau + \dfrac{\sigma n_0}{2}\tau\sqrt{1-\tau^2}}. \tag{2.6}$$

В уравнении (2.6) уже учтено условие $\mu_1=\mu_2$, которое эквивалентно

$$\frac{B}{mn_0} = \frac{\sigma n_0}{2}.$$

Пусть формально $\tau=x$, $\omega=-y$. Фазовые траектории системы (2.5), рассматриваемой в полосе Π, совпадают с интегральными траекториями уравнения (2.6), которое, в свою очередь, рассматривается в полосе $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon -1<x<1\}$. Система приводится к виду

$$\begin{cases} x' = y - \sigma n_0^2 x + \sigma n_0^2 x^3 - \sigma y^2 x + \dfrac{\sigma n_0}{2}x\sqrt{1-x^2}, \\ y' = -n_0^2 x - \sigma y^3 + \sigma n_0^2 y x^2 + \dfrac{\sigma n_0^2}{2}y\sqrt{1-x^2}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x' = y - \dfrac{\sigma n_0^2}{2}x + \dfrac{3\sigma n_0^2}{4}x^3 - \sigma y^2 x, \\ y' = -n_0^2 x + \dfrac{\sigma n_0^2}{2}y - \sigma y^3 + \dfrac{3\sigma n_0^2}{4}yx^2, \end{cases} \tag{2.8}$$

которая является системой сравнения для системы (2.7). Характеристическая функция пары систем (2.7) и (2.8) является, как уже отмечалось, кососимметрической билинейной функцией.

Для упорядоченной пары систем X и Y их характеристическую функцию будем обозначать через $\chi(X, Y)$.

Предложение 2.3. *Характеристическая функция* $\chi((2.7),(2.8))$ *при* $\sigma n_0 < 2$ *в полосе* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$ *положительно определена* (*она равна нулю лишь в начале координат*).

Доказательство. Действительно,

$$\chi\big((2.7),(2.8)\big) = \frac{\sigma n_0^2}{2}\big[y^2 - \sigma n_0^2 xy + n_0^2 x^2\big]\left[1 - \frac{x^2}{2} - \sqrt{1-x^2}\right]. \qquad \square$$

Заметим, что правые части системы (2.8) отличаются от правых частей системы (2.7) лишь членами пятого порядка малости по $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, т.е. членами порядка $O(\rho^5)$. В связи со сделанным только что замечанием о представлении векторного поля системы (2.7) около точки $(0, 0)$, справедливо следующее предложение.

Предложение 2.4. *Точка* $(0, 0)$ *является сложным устойчивым фокусом при* $\sigma n_0 < 2$ *для системы* (2.8).

Доказательство. Действительно, индекс In (см. [2,37]) точки $(0, 0)$ для системы (2.8) совпадает с индексом In точки $(0, 0)$ для системы (2.7) и он отрицателен, поскольку зависит лишь от вторых и третьих производных правых частей рассматриваемых систем. $\square$

Поставим следующий вопрос: как соотносится знак характеристической функции как формы от упорядоченной пары систем на плоскости и угол поворота от поля одной системы к другой. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{cases} x' = y - \sigma n_0^2 x + \sigma n_0^2 x^3 - \sigma y^2 x + \lambda x\sqrt{1-x^2}, \\ y' = -n_0^2 x - \sigma y^3 + \sigma n_0^2 y x^2 + \lambda y\sqrt{1-x^2}, \end{cases} \tag{2.9}$$

зависящую от параметра $\lambda > 0$. Векторное поле системы (2.9) обладает некоторым свойством *строгой монотонности* (СМ) (см. далее) при некоторых условиях и при $\sigma n_0 < 2$ в любой области без особых точек. Если при $\lambda = \lambda_1$ систему (2.9) обозначить через (2.9′), а при $\lambda = \lambda_2$ — через (2.9″), то справедливо равенство

$$\chi\big((2.9'),\,(2.9'')\big) = (\lambda_2 - \lambda_1)\big[y^2 - \sigma n_0^2 xy + n_0^2 x^2\big]\sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом, при $\lambda_2 > \lambda_1$ последняя функция положительно определена в полосе $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon -1 < x < 1\}$ (равна нулю лишь в начале координат). Но как легко понять, начало координат для системы (2.9″) является «более неустойчивой» особой точкой, чем начало координат для системы (2.9′). Таким образом, векторное поле системы (2.9)″) поворачивается при $\lambda_2 > \lambda_1$ около векторного поля системы (2.9′) на положительный угол.

Прежде чем говорить о характере траекторий системы (2.7), сформулируем одно вспомогательное утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Для поиска подходящей системы сравнения, в целях исследования существования предельных циклов, проблемы различения центра и фокуса и т.д., вовсе не обязательно иметь ТСП с центром в данной особой точке. Искомая система сравнения может иметь либо притягивающую, либо отталкивающую особую точку.

Пусть в области D, содержащей единственную особую точку системы (А), заданной для простоты на плоскости, стоит проблема различения центра и фокуса. Пусть в этой же области система (Б) имеет ту же единственную особую точку x_0.

Рассмотрим для определенности так называемые отрицательно ориентируемые системы, в которых траектории обходят точку x_0 против часовой стрелки. Аналогично могут быть рассмотрены положительно ориентируемые системы.

Лемма 2.2. *Пусть область D является притягиваемой (отталкиваемой) точкой x_0 отрицательно ориентируемой системы* (Б). *Тогда если характеристическая функция $\chi\big((\text{А}),(\text{Б})\big)$ положительно (отрицательно) определена в области D, то область D является притягиваемой (отталкиваемой) точкой x_0 (отрицательно ориентируемой) системы* (А).

Лемма 2.2 носит явно геометрический характер. Действительно, векторное поле системы (Б) повернуто относительно векторного поля системы (А) на неотрицательный (неположительный) угол.

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для устойчивых и неустойчивых предельных циклов и т.д.

Итак, в качестве системы (А) возьмем систему (2.7) (которая является отрицательно ориентируемой), а в качестве системы (Б) — систему (2.8) (которая также отрицательно ориентируема). Возникает вопрос о размерах области D, фигурирующей в лемме 2.2.

Предложение 2.5. *Система* (2.8) *при $\sigma n_0 < 2$ в полосе $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$ обладает первым интегралом, который одновременно является и трансцендентной функцией в полосе, и мероморфной функцией во множестве $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$ без начала координат. Последняя точка — единственная существенно особая точка для данного первого интеграла.*

Доказательство. После замены переменных

$$\frac{\sqrt{3}}{2}n_0x - y = u, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}n_0x + y = v$$

система (2.8) приведется к уравнению

$$du\left[u\left(\frac{\sigma n_0}{2\sqrt{3}}+\frac{7}{12}\right)-\frac{v}{12}-\frac{\sigma}{\sqrt{3}n_0}uv^2\right]+dv\left[\frac{u}{12}+v\left(-\frac{\sigma n_0}{2\sqrt{3}}+\frac{7}{12}\right)+\frac{\sigma}{\sqrt{3}n_0}u^2v\right]=0.$$

После же замены $u = tv$, $v^2 = p$, $v \neq 0$, уравнение примет вид

$$dp[C_1t^2+C_2]+2p\left[C_1t-1-u\sqrt{3}\frac{\sigma}{n_0}tp\right]dt=0.$$

Здесь введены обозначения

$$C_1 = 7+2\sqrt{3}\sigma n_0, \qquad C_2 = 7-2\sqrt{3}\sigma n_0.$$

Заменой $p = q^{-1}$ приводим последнее уравнение в полных дифференциалах к линейному неоднородному уравнению вида

$$\frac{dq}{dt}[C_1t^2+C_2]+2[1-C_1t]q+8\sqrt{3}\frac{\sigma}{n_0}t=0. \tag{2.10}$$

Общее решение однородного уравнения имеет следующий вид:

$$q_0(t) = C\frac{C_1t^2+C_2}{\exp\left\{\dfrac{2}{C_1}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{C_2t}{C_1}}\right\}}, \quad C = \text{const}.$$

Варьируя постоянную C, получаем дифференциальное уравнение, позволяющее найти трансцендентное решение уравнения (2.10). Особенности возникают лишь при $u = v = 0$, т.е. когда значение t не определено. Но последнее уравнение и задает начало координат на плоскости $\mathbb{R}^2\{x,y\}$. $\square$

Следствие 2.1. *Для системы* (2.8) *областью притяжения является вся полоса* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$.

Следствие 2.2. *У системы* (2.7) *в полосе* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$ *не существует замкнутых характеристик.*

Доказательство. Начало координат для системы (2.8) является аттрактором (предложение 2.4). В силу предложения 2.5, область его притяжения — вся полоса. В силу предложения 2.3 попадаем в условия леммы 2.2. □

Следствие 2.3. *При* $\sigma n_0 < 2$, *а также при выполнении условия* $B/(mn_0) < \sigma n_0/2$ *у систем вида* (1.12) *при условиях* (1.4), (1.11) *в полосе* Π' *не существует простых и сложных предельных циклов, а также любых замкнутых кривых, составленных из траекторий.*

3. О траекториях, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки плоскости

3.1. Примеры из динамики твердого тела, взаимодействующего со средой. В этом разделе будут рассмотрены вопросы существования и единственности траекторий динамических систем (1.1) на плоскости, имеющих в качестве α- и ω-предельных множеств бесконечно удаленные точки. Таким образом, на сферах Римана или Пуанкаре предельными множествами данных траекторий будет северный полюс. Такие траектории уже по определению являются ключевыми, поскольку бесконечно удаленная точка всегда является особой.

Для начала рассмотрим системы вида (1.8) и (1.12).

Лемма 3.1. *Рассмотрим систему* (1.8) *на множестве* $\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\}$. *Тогда для любой достаточно гладкой функции* $F \in \Phi$ *существует единственная траектория, уходящая в бесконечность* (*имеющая в качестве* ω-*предельного множества точку* $(+0, +\infty)$).

Доказательство. Дополним фазовую плоскость $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ бесконечно удаленной точкой. Получим расширенную фазовую плоскость $\overline{\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}}$. Отобразим область $\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\}$ на сферу Римана или Пуанкаре. В окрестности северного полюса сферы существуют новые координаты (α, y), $y = -1/\omega$, в которые переводятся старые координаты из рассматриваемой области расширенной фазовой плоскости неособым преобразованием.

В переменных (α, y) система (1.8) эквивалентна уравнению

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{y + \dfrac{\sigma}{I} y^2 F(\alpha) \cos\alpha + \sigma \sin\alpha}{\dfrac{y^4}{I} F(\alpha) - \sigma y \cos\alpha + \dfrac{\sigma}{I} y^3 F(\alpha) \sin\alpha}.$$

При этом траектории данного уравнения параметризованы по-другому, нежели траектории системы (1.8).

Видно, что у уравнения существует особая точка $(0, 0)$, соответствующая бесконечно удаленной точке $(0, +\infty)$ системы (1.8). Нетрудно убедиться в том, что точка $(0, 0)$ уравнения является гиперболическим седлом, что и доказывает лемму. □

Лемма 3.2. *Рассмотрим систему* (1.12) *на множестве* $\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\}$. *Тогда для любых достаточно гладких функций* F *и* s *существует единственная траектория, уходящая в бесконечность* (*имеющая в качестве* ω-*предельного множества точку* $(+0, +\infty)$).

Доказательство. Следуя методу доказательства леммы 3.1, отображая расширенную фазовую плоскость на сферу, делая аналогичную замену координат, приходим к уравнению

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{y + \dfrac{\sigma}{I} y^2 F(\alpha) \cos\alpha + \sigma \sin\alpha + y^2 \dfrac{s(\alpha)}{m} \sin\alpha}{\dfrac{y^4}{I} F(\alpha) - \sigma y \cos\alpha + \dfrac{\sigma}{I} y^3 F(\alpha) \sin\alpha - y^3 \dfrac{s(\alpha)}{m} \cos\alpha}.$$

При этом траектории данного уравнения параметризованы по-другому, нежели траектории системы (1.12).

Видно, что у уравнения существует особая точка $(0,0)$, соответствующая бесконечно удаленной точке $(0,+\infty)$ системы (1.12). Нетрудно убедиться, что данная особая точка имеет топологический тип грубого седла, что и доказывает лемму. $\square$

3.2. Существование и единственность траекторий, уходящих на бесконечность. Рассмотрим произвольную автономную систему дифференциальных уравнений (1.1) на плоскости. Будем сопоставлять данной системе уравнение, фазовые траектории которого параметризованы по-другому, а также последние отображены с расширенной фазовой плоскости системы на сферу Римана (или Пуанкаре). При этом, как уже отмечалось, бесконечно удаленные точки перейдут в северный полюс сферы.

Теорема 3.1.

(1) *Если после замены фазовых переменных $(x_1,x_2)\to(x_1,y)$, где $y=1/x_2$, у уравнения, заданного на сфере, появилась особая точка $(x_1^0,0)$, то у рассматриваемой системы существует траектория, стремящаяся к прямой $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1=x_1^0\}$ и имеющая в качестве предельного множества бесконечно удаленную точку.*

(2) *Если после замены фазовых переменных $(x_1,x_2)\to(y,x_2)$, где $y=1/x_1$, у уравнения, заданного на сфере, появилась особая точка $(0,x_2^0)$, то у рассматриваемой системы существует траектория, стремящаяся к прямой $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_2=x_2^0\}$ и имеющая в качестве предельного множества бесконечно удаленную точку.*

Доказательство. Следуя леммам 3.1, 3.2, дополним фазовую плоскость бесконечно удаленной точкой, получив $\overline{\mathbb{R}^2\{\alpha,\omega\}}$. Отобразим расширенную плоскость на сферу Римана или Пуанкаре. В окрестности северного полюса сферы можно ввести координаты, отображающие эту окрестность на некоторую окрестность нуля координатной плоскости такие, что в случае (1) они равны (x_1,y), $y=1/x_2$, а в случае (2) — (y,x_2), $y=1/x_1$. В первом случае изучаем бесконечно удаленные точки вдоль оси x_2, а во втором — вдоль оси x_1. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательствам лемм 3.1, 3.2. $\square$

Замечание 3.1. Количество траекторий, уходящих на бесконечность, определяется через топологический тип бесконечно удаленной особой точки. В частности, в системах (1.8) и (1.12) существует единственная траектория, уходящая на бесконечность, поскольку бесконечно удаленная особая точка является седлом (если, конечно, отображать не плоскость, а фазовый цилиндр).

Замечание 3.2. Могут существовать фазовые траектории, уходящие на бесконечность на фазовой плоскости, вдоль которых обе фазовые переменные неограниченно возрастают. В этом случае после замены $x_1=1/y_1$, $x_2=1/y_2$, исследуя топологический тип северного полюса сферы, который всегда является особой точкой, можно будет доказать существование и единственность траекторий, приближающихся к прямым вида $A_1x_1+A_2x_2+A_3=0$, где $A_1A_2\neq0$. Действительно, в этом случае траектория будет стремиться к северному полюсу сферы под определенным углом, что соответствует стремлению траектории на плоскости $\mathbb{R}^2\{x_1,x_2\}$ к прямой, имеющей ненулевой и конечный угловой коэффициент наклона.

3.3. Элементы теории монотонных векторных полей. Рассмотрим семейство достаточно гладких векторных полей v_e в области D двумерной ориентированной римановой поверхности. В касательном пространстве T_qD каждой точки $q\in D$ можно измерять углы между векторами рассматриваемого семейства.

Определение 3.1. Однопараметрическое семейство полей v_e $(e\in E)$ обладает *свойством монотонности* (СМ) в D, если для любых точек $q\in D$, $e_1\in E$, $e_2\in E$ в касательном пространстве T_qD угол между векторами $v_{e_1},v_{e_2}\in T_qD$ является монотонной функцией разности параметров e_2-e_1; при этом сохраняется ориентация изменения угла. Если рассматриваемая монотонная зависимость строгая, то говорим, что v_e обладает *строгим свойством монотонности* (строгим СМ).

Теорема 3.2. *Пусть поле v_e обладает СМ в области D плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть x_0 — неособое начальное условие для фазовой траектории поля v_e при всех $e \in E$.*

Если для любого $e \in E$ предельное множество траекторий, начинающихся в x_0, есть множество g_0, лежащее в конечной части плоскости, причем $\{A, B\} = \partial g_0$, A — предельное множество траектории поля v_{e_1}, а B — предельное множество траектории v_{e_2}, $e_1 < e_2$, то $e \in (e_1, e_2)$ тогда и только тогда, когда существует множество C, являющееся предельным множеством траектории поля v_e, причем при увеличении e предельное множество монотонно смещается от A до B. (Здесь идет речь одновременно либо об α-, либо об ω-предельных множествах семейства траекторий.) При этом искомая фазовая траектория единственна, если СМ строгое.

Схема доказательства. По теореме Бендиксона (см. [1]) предельное множество на плоскости — только лишь положение равновесия и простой или сложный предельный цикл. Поэтому, в принципе, достаточно разобрать все три случая (данное исследование для краткости опустим).

Можно считать, что для любого e множество g_0 состоит из ω-предельных множеств. Согласно теореме о непрерывной зависимости решений от начальных условий и правых частей уравнений, при малом изменении параметра e предельное множество останется в близкой окрестности первоначального (если множество g_0 односвязно). Если последнее множество многосвязно, то последовательно перебираем каждую из компонент связности. В силу выполнения свойства монотонности, при применении теории систем сравнения, немонотонная зависимость траектории от параметра e исключается.

Пусть система обладает строгим СМ. От противного. Пусть для точки $M \in g_0$ существуют хотя бы два параметра e^1, e^2, при которых траектории полей v_{e^1}, v_{e^2} стремятся к точке M. Тогда траектории всех полей $v_{\bar{e}}, \bar{e} \in [e^1, e^2]$ стремятся к точке M (в силу выполнения СМ). Поскольку СМ строгое, для любого $d > 0$ система с векторным полем v_{e+d}, $e + d \in E$, является системой сравнения для v_e. Легко понять, что траектория поля v_{e+d}, выпущенная из неособого начального условия, никогда не пересечет соответствующую траекторию поля v_e, выпущенную из того же начального условия. В силу последнего, траектории полей v_{κ_1} и v_{κ_2} будут иметь разные предельные множества, причем $e^1 < \kappa_1 < \kappa_2 < e^2$. Противоречие. □

Условия приведенной теоремы можно несколько ослабить для гладкой римановой двумерной ориентированной поверхности $P^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Аналогично может быть доказана качественно другая лемма, которая верна и на любых гладких двумерных ориентированных многообразиях.

Лемма 3.3. *Рассмотрим семейство полей v_e $(e \in E)$ в области сферы $\mathbb{S}^2$ следующего вида. Южный* S *и северный* N *полюса сферы являются седлами. Пусть данное семейство полей обладает строгим СМ таким образом, что при некотором e_1 ω-предельным множеством траектории, выходящей из южного полюса, является южный полюс, а при некотором $e_2 > e_1$ ω-предельным множеством траектории, выходящей из северного полюса, является северный полюс. При этом обе рассмотренные ситуации — это гомоклинические ситуации на сфере, когда существует лишь одна точка покоя (кроме* N *и* S*), которая содержится в области, ограниченной указанными сепаратрисами. Других нетривиальных предельных множеств в этой области сферы нет. Тогда существует такое единственное значение параметра $e = e_0 \in (e_1, e_2)$, что траектория, выходящая из южного (северного) полюса, входит в северный (южный) полюс (это — гетероклиническая ситуация на сфере).*

Доказательство. Единственность. Предположим, что указанным свойством обладают два параметра $\bar{e}$, $\bar{\bar{e}}$. Тогда, в силу строгого СМ, все параметры из интервала $(\bar{e}, \bar{\bar{e}})$ обладают указанным свойством. Рассуждая как в теореме 3.2, приходим к противоречию со свойством монотонности.

Существование. Таким образом, существует такое единственное значение параметра $e = e_0$, что при $e < e_0$ реализуется одна гомоклиническая ситуация на сфере, а при $e > e_0$ — другая. Предположим, что при $e = e_0$ реализуется одна из гомоклинических ситуаций. Тогда существует такая окрестность $U_{e_0}^d = \{e : |e - e_0| < d\}$ значения $e = e_0$, что для любого $e \in U_{e_0}^d$ справедлива одна и та же гомоклиническая ситуация. Противоречие. Лемма полностью доказана. □

Замечание 3.3. Мы получили еще один метод доказательства лемм 3.1 и 3.2. Действительно, искомые поля удовлетворяют условиям леммы 3.3, поскольку бесконечно удаленная точка проектируется в северный полюс сферы Римана (или Пуанкаре), а точка $(\pi/2, 0)$ — в южный.

4. Многомерные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения

4.1. Топографические системы в многомерном случае. Многомерные ТСП можно определить аналогично ТСП на плоскости. При этом (невырожденные) гиперповерхности уровня коразмерности 1 в пространстве $\mathbb{R}^n$ образуют топографическую систему вложенных друг в друга гиперповерхностей, имеющих вершину в особой точке.

Теорема 4.1. *Пусть в односвязной области D пространства $\mathbb{R}^n$, содержащей единственную точку покоя x_0 достаточно гладкого векторного поля v_1, существует гиперповерхность $\Gamma \ni x_0$, продолжающаяся до границы ∂D и пересекающая ее по поверхности g (поверхность g может быть бесконечно удалена), такая, что существует ТСП с центром в x_0, задаваемая гладкой функцией V, продолжающаяся вдоль Γ до g, заполняющая область $\mathsf{K} \subseteq D$ и обладающая свойством*

$$(v_1, v_2)\Big|_{\mathbb{R}^n} > 0$$

($v_2 = \operatorname{grad} V$) *почти всюду в K, за исключением, быть может, некоторых гиперповерхностей, не содержащих внутри себя x_0.* (*Здесь $V = \mathrm{const}$ — семейство гиперповерхностей ТСП.*) *Тогда во всей области D не существует ни одной замкнутой кривой, состоящей из траекторий поля v_1, пересекающей гиперповерхность Γ.*

Доказательство. Предположим, что такая кривая g_0 существует, $\{N_1, N_2\} = \Gamma \cap g_0 \neq \emptyset$ и точка N_1 — неособое начальное условие при движении по кривой g_0. Через точку N_1 проходит замкнутая гиперповерхность $\bar{\Gamma}$ из ТСП, причем $\bar{\Gamma} \subset \mathsf{K}$. Если гиперповерхность $\bar{\Gamma}$ ограничивает область $\bar{S}$, то существует такое $e > 0$ (которое уменьшим насколько нужно), что

(1) $N_e \in \bar{\Gamma}_e \cap \Gamma$, где $\bar{\Gamma}_e$ — гиперповерхность ТСП;
(2) расстояние между точками N_e и N_1 равно e;
(3) $\bar{\Gamma}_e$ ограничивает область $\bar{S}_e \supset \bar{S}$.

Выбранное значение e таково, что через конечное время точка, двигаясь по траектории g_0 с начальным условием N_1, покинет область $\bar{S}_e$. Поскольку $\bar{S}_e \subset \mathsf{K}$ и выполнено неравенство теоремы почти всюду в K, за исключением, быть может, некоторых гиперповерхностей, не содержащих внутри себя x_0, то точка с начальным условием N_1 никогда больше в область $\bar{S}_e \subset \mathsf{K} \subset D$ не вернется. Так как $\bar{S} \subset \bar{S}_e$, то приходим к противоречию с замкнутостью кривой g_0. □

Напомним, что многомерные ТСП особенно удачно помогают решить в ряде случаев проблему различения центра и фокуса. В последнем случае вовсе не обязательно иметь ТСП с центром в данной особой точке. Система сравнения может иметь либо притягивающую, либо отталкивающую особую точку.

Характеристическая функция в многомерном случае строится следующим образом. Пусть v_1, v_2 — два гладких векторных поля в пространстве $\mathbb{R}^n$. По полю v_1 строится (неоднозначно) нормальное гладкое векторное поле n. В каждом конкретном случае поле n строится из тех соображений, которые позволяют получить в дальнейшем знакоопределенную характеристическую функцию. Последняя определяется как скалярное произведение $\chi = (n, v_2)$.

Лемма 2.2 с некоторыми уточнениями справедлива и в многомерном случае.

4.2. Четномерный случай. В четномерном случае характеристическая функция имеет наиболее естественный вид.

Пример. Рассмотрим систему слабо перевязанных маятников, т.е. консервативную систему с малыми (неконсервативными) добавками, задаваемую полем $\{X_1, X^1, \ldots, X_n, X^n\}$ в координатах $x = \{x_1, x^1, \ldots, x_n, x^n\}$ следующего вида:

$$X_i = -x^i + eF_i(x), \quad X^i = G_i(x) + eF^i(x), \quad dG(0) \geqslant 0.$$

Тогда естественно выбрать характеристическую функцию в виде

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} (X_i Y^i - X^i Y_i),$$

где векторное поле Y системы сравнения имеет вид $Y = \{Y_1, Y^1, \ldots, Y_n, Y^n\}$, где $Y_i = -x^i$, $Y^i = G_i(x)$.

В многомерном случае, подобно двумерным ТСП и системам сравнения, можно также получить соответствующие утверждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9*. — С. 119–211.
2. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979.
3. *Бурбаки Н.* Интегрирование. — М.: Наука, 1970.
4. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
5. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
6. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.
7. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
9. *Козлов В. В.* О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости// Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. — 1989. — *5*. — С. 10–17.
10. *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1947.
11. *Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1986.
12. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
13. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1967.
14. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
15. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1989. — *3*. — С. 51–54.
16. *Табачников В. Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки// в кн.: Тр. ЦАГИ.. — М., 1974. — Т. 1621. — С. 18–24.
17. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — Т. 1. — С. 133–135.
18. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
19. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
20. *Шамолин М. В.* Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *2*. — С. 52–56.
21. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
22. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
23. *Шамолин М. В.* Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1993. — *2*. — С. 66–70.

24. *Шамолин М. В.* Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1993. — *1.* — С. 68–71.
25. *Шамолин М. В.* Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде// Докл. РАН. — 1994. — *337*, № 5. — С. 611–614.
26. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4.* — С. 57–69.
27. *Шамолин М. В.* Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой// Докл. РАН. — 1996. — *349*, № 2. — С. 193–197.
28. *Шамолин М. В.* Определение относительной грубости и двупараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела// Усп. мат. наук. — 1996. — *51*, № 1. — С. 175–176.
29. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения// Усп. мат. наук. — 1997. — *52*, № 3. — С. 177–178.
30. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
31. *Шамолин М. В.* О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией// Усп. мат. наук. — 1999. — *54*, № 5. — С. 181–182.
32. *Шамолин М. В.* Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 2000. — *371*, № 4. — С. 480–483.
33. *Шамолин М. В.* О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек// Усп. мат. наук. — 2000. — *55*, № 3. — С. 187–188.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
35. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
36. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
37. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
38. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов динамических систем// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2008. — *3.* — С. 43–49.
39. *Шамолин М. В.* Трехпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 2008. — *418*, № 1. — С. 46–51.
40. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела// Докл. РАН. — 2010. — *431*, № 3. — С. 339–343.
41. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
42. *Шамолин М. В.* Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2011. — *3.* — С. 24–30.
43. *Шамолин М. В.* Некоторые вопросы качественной теории в динамике систем с переменной диссипацией// Совр. мат. прилож. — 2012. — *78.* — С. 138–147.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
45. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
46. *Якоби К.* Лекции по динамике. — М.-Л.: ОНТИ, 1936.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (МГУ)
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 68–81
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-68-81

УДК 517, 531.01

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2020 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к четырехмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

EXAMPLES OF NINE-ORDER INTEGRABLE DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION

© 2020 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, the integrability of some classes of homogeneous with respect to a part of variables ninth-order dynamical systems, in which a system on the tangent bundle to four-dimensional manifolds is distinguished. In this case, force fields have a dissipation of different signs and are generalizations of those considered earlier.

Keywords and phrases: dynamical system, nonconservative force fields, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 58-xx, 70-xx

СОДЕРЖАНИЕ

Задача определения и описания диссипации в динамической системе является довольно затруднительной. Но это может быть сделано следующим образом: вполне определенные коэффициенты в уравнениях указывают на рассеяние энергии в одних областях фазового пространства, а в других его областях — на подкачку энергии. Это приводит к потере известных первых интегралов (законов сохранения), глобально выражающихся через гладкие функции.

Известным препятствием к наличию полного набора гладких первых интегралов в системе могут быть притягивающие или отталкивающие предельные множества. При их обнаружении необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве автономных первых интегралов (см. [13]).

В ряде случаев в динамике систем с диссипацией (разного знака) если и удается найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями (имеющими существенно особые точки). Поэтому результаты, полученные в данной работе, особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В ряде работ автора уже затрагивалась данная тематика (см., например, [22, 23]). В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к четырехмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

1. Замечания к системам малых нечетных порядков

Пусть v, α, z — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α (для уравнений на $\dot{v}$, $\dot{z}$, $v\dot{\alpha}$) (см. также [6]) следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{v} = a(\alpha)v^2 + b(\alpha)vz + c(\alpha)z^2, \\ \dot{z} = d(\alpha)v^2 + e(\alpha)vz + f(\alpha)z^2, \\ v\dot{\alpha} = g(\alpha)v^2 + h(\alpha)vz + i(\alpha)z^2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle ' \rangle$, $v \neq 0$), а также новую фазовую переменную Z по формуле $z = Zv$, систему (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \\ Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2;$$

при этом уравнение (1.2) на v отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (1.3) с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ (см. [6, 7, 11, 12]).

Нас прежде всего будет интересовать случай, когда выполнены тождества

$$d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0. \tag{1.4}$$

При этом остальные шесть функций $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $c(\alpha)$, $g(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$, вообще говоря, не равны тождественно нулю. Тогда система (1.2), (1.3) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$\Phi_1(v; Z) = z = vZ = C_1 = \text{const}\,. \tag{1.5}$$

Для полной интегрируемости системы (1.2), (1.3) при условии (1.4) нужно найти еще один первый интеграл, независимый с (1.5). Для этого можно предъявить достаточные условия существования искомого первого интеграла.

1.1. Некоторый класс систем без диссипации. I.

Предложение 1.1. *Если выполнены условия*

$$a(\alpha) = \frac{h^2(\alpha)}{i^2(\alpha)}c(\alpha), \quad b(\alpha) = \frac{h(\alpha)}{i(\alpha)}c(\alpha), \quad g(\alpha) = \frac{h^2(\alpha)}{i(\alpha)}, \tag{1.6}$$

где $c(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$ — *произвольные гладкие функции на своей области определения, то система* (1.2), (1.3) *при условии* (1.4) *имеет два гладких первых интеграла, а именно,* (1.5), *а также*

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v\gamma(\alpha) = C_0 = \mathrm{const}, \tag{1.7}$$

где функция $\gamma(\alpha)$ *имеет вид*

$$\gamma(\alpha) = \gamma_0 \exp\left[-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{c(\xi)}{i(\xi)} d\xi\right], \quad \gamma_0 = \gamma(\alpha_0). \tag{1.8}$$

Доказательство. Действительно, полная производная функции (1.7) в силу системы (1.2), (1.3) при условии (1.4) имеет вид

$$v^2\left[a(\alpha)\gamma(\alpha) + \frac{\gamma(\alpha)}{d\alpha}g(\alpha)\right] + v^2 Z\left[b(\alpha)\gamma(\alpha) + \frac{\gamma(\alpha)}{d\alpha}h(\alpha)\right] + v^2 Z^2\left[c(\alpha)\gamma(\alpha) + \frac{\gamma(\alpha)}{d\alpha}i(\alpha)\right],$$

и она тождественно равна нулю, поскольку выполнены соотношения (1.6) и (1.8). □

Другими словами, независимая подсистема (1.3) на многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ при условиях (1.4), (1.6) имеет рациональный по Z первый интеграл вида (см. также [14, 15, 24, 25])

$$\Phi(Z; \alpha) = \frac{\gamma(\alpha)}{Z} = C = \mathrm{const}, \tag{1.9}$$

который не имеет существенно особых точек, по крайней мере, если функция $\gamma(\alpha)$ нигде не равна нулю. В этом случае подсистема (1.3) не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Если же функция $\gamma(\alpha)$ в отдельных точках и обращается в нуль, то функция (1.9) формально имеет на множестве

$$\Sigma_0 = \{(\alpha, Z) : \ \gamma(\alpha) = 0, \ Z = 0\}$$

существенно особые точки. Но поскольку «расширенная» система третьего порядка (1.2), (1.3) (при условиях (1.4), (1.6)) имеет полный набор гладких первых интегралов во всем фазовом пространстве и, тем самым, не имеет притягивающих (или отталкивающих) предельных множеств, таких множеств не имеет и система второго порядка (1.3) (при условиях (1.4), (1.6)).

Таким образом, *внутреннее* силовое поле (зависящее от трех произвольных гладких функций $c(\alpha)$, $h(\alpha)$ и $i(\alpha)$) в системе (1.2), (1.3) при условиях (1.4), (1.6) *не нарушает консервативности* самой системы.

1.2. Некоторый класс систем без диссипации. II. Но в данной работе мы также отметим и другой важный частный случай системы (1.2), (1.3), а именно,

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z + bZ^2\delta(\alpha), \\ Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -bZ^2\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция. При этом уравнение на v также отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ [5].

Система (1.10), (1.11) имеет два гладких первых интеграла:

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - 2bZ\delta(\alpha)) = C_0 = \mathrm{const},$$
$$\Phi_1(v; Z) = vZ = C_1 = \mathrm{const}.$$

Другими словами, независимая подсистема (1.11) на $N^2\{Z; \alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл вида

$$\Phi(Z; \alpha) = \frac{1 - 2bZ\delta(\alpha)}{Z^2} = C = \mathrm{const}, \tag{1.12}$$

который не имеет существенно особых точек (см. также [6]). В силу последнего, подсистема (1.11) не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Добавим в систему (1.10), (1.11) внешнее силовое поле $F(\alpha)$ при $b > 0$

$$\begin{cases} v' = \Psi(\alpha, Z)v, \\ \alpha' = -Z + bZ^2\delta(\alpha), \\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \end{cases}$$

Создается впечатление, что система осталась консервативной (что и имеет место при $b = 0$, см. [22,23]). Действительно, при некотором условии у нее имеется гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \mathrm{const}, \quad \frac{dF_1(\alpha)}{d\alpha} = 2F(\alpha),$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система, вообще говоря, не имеет. Более того, если

$$F(\alpha) = \delta(\alpha)\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

то дополнительный первый интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих предельных множеств, см. [7]).

Аналогично рассматривались системы пятого и даже седьмого порядков на многообразии с ненулевыми коэффициентами связности Γ^i_{jk}:

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v,$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha), \\ Z_3' = \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)Z_2^2 + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_2Z_3 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_1Z_3 - \left[2\Gamma_2(\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f(\alpha)Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' = Z_2 f(\alpha), \\ \beta_2' = Z_1 f(\alpha)g(\beta_1), \end{cases}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, $z_k = Z_k v$, $k = 1, 2, 3$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — некоторые гладкие функции, как системы при отсутствии внешнего поля сил, в которых также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Но данные коэффициенты не нарушают консервативности, поскольку данные системы обладают полным набором (пятью) гладких первых интегралов (см. [22,23].

2. Системы девятого порядка при отсутствии внешнего силового поля

Перейдем теперь к системам более высокого — девятого порядка. При этом повышение порядка проводится не так очевидно, поэтому автором принято решение достаточно подробно провести соответствующий анализ.

Пусть v, α, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $z = (z_1, \ldots, z_4)$ — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z (см. также [18]) с коэффициентами, зависящими от α, β. Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle ' \rangle$, $v \neq 0$), будем рассматривать следующую систему девятого порядка как систему при отсутствии внешнего поля сил:

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{2.1}$$

$$
\begin{cases}
\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\delta(\alpha),\\
Z_4' = \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) Z_3^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) Z_2^2 +\\
\qquad + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_4 \Psi(\alpha, Z),\\
Z_3' = \left[2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d \ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_3 Z_4 - \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) Z_2^2 -\\
\qquad - \Gamma_{33}^{1}(\alpha,\beta)\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_3 \Psi(\alpha, Z),\\
Z_2' = \left[2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d \ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_4 - \left[2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d \ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_2 Z_3 -\\
\qquad - \Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta)\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z),\\
Z_1' = \left[2\Gamma_{\alpha 3}^{3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d \ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_4 - \left[2\Gamma_{13}^{3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d \ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_1 Z_3 -\\
\qquad - \left[2\Gamma_{23}^{3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d \ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z),\\
\beta_1' = Z_3 f_1(\alpha),\\
\beta_2' = Z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1),\\
\beta_3' = Z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

$$
\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha), \quad \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},
$$

$Z = (Z_1, \ldots, Z_4)$, $z_s = Z_s v$, $s = 1, \ldots, 4$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ — некоторые гладкие функции. При этом уравнение (2.1) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (2.2) как независимую систему (с четырьмя степенями свободы) на восьмимерном многообразии

$$
N^8\{Z_4, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} = TM^4\{Z_4, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}
$$

(касательном расслоении гладкого четырехмерного многообразия $M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$; см. также [7, 18, 23]).

Рассмотрим структуру системы (2.2). Она соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ многообразия $M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ (см. [2, 3, 16, 17]; в частности, сферы или более общих поверхностей вращения с двенадцатью ненулевыми коэффициентами связности):

$$
\begin{cases}
\ddot{\alpha} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0,\\
\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0,\\
\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0,\\
\ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^{3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^{3}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^{3}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0.
\end{cases}
\tag{2.3}
$$

Действительно, выбрав новые координаты Z_1, …, Z_4 в касательном пространстве в виде

$$
\begin{aligned}
&\alpha' = -Z_4,\\
&\beta_1' = Z_3 f_1(\alpha),\\
&\beta_2' = Z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1),\\
&\beta_3' = Z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

получаем соотношения на них в следующем виде (ср. с системой (2.2)):

$$
\begin{gathered}
Z_1' = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_1 Z_3 - \\
- \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) Z_1 Z_2, \\
Z_2' = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_2 Z_3 - \\
- \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) Z_1^2, \\
Z_3' = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_3 Z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) Z_2^2 - \\
- \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2, \\
Z_4' = \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) Z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) Z_2^2 + \Gamma^\alpha_{33} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2;
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

при этом уравнения (2.3) почти всюду эквивалентны совокупности (2.4), (2.5), которая, прежде всего, присутствует в системе (2.2).

Далее, в системе (2.2) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Но они не нарушают консервативности, поскольку система (2.1), (2.2) при некоторых естественных условиях обладает полным набором (из шести) гладких первых интегралов (то, что полный набор состоит не из восьми, а из шести первых интегралов, будет показано ниже).

Следующие утверждения для систем девятого порядка доказываются аналогично соответствующим утверждениям для систем седьмого порядка.

Предложение 2.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$
\begin{cases}
2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0, \\
2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\
\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\
2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0, \\
\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0, \\
\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0,
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

то система (2.1), (2.2) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$
\Phi_1(v; Z_4, \ldots, Z_1) = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2) = C_1^2 = \mathrm{const}\,. \tag{2.7}
$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (2.7) не «заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (2.6) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных). В работе будет применен подход, позволяющий с помощью решения системы (2.6) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ системы (2.6) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (2.7) для системы (2.4), (2.5) уравнений геодезических (2.3). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (2.6) нам не потребуется.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (2.4) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f_3(\alpha) = f(\alpha), \tag{2.8}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (2.6):

$$\begin{cases} 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] g_1^2(\beta_1) + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ пока зависят от коэффициентов связности через систему (2.9), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 2.2. *Если выполнены свойства* (2.8), (2.9), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{2.10}$$

то система (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_2(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\,\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{2.11}$$

при этом функция $\delta(\alpha)$ *должна удовлетворять равенству*

$$\delta(\alpha) = A_1 f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}, \qquad A_1 = \mathrm{const}\,. \tag{2.12}$$

Предложение 2.3. *Если выполнены условия предложения* 2.2, *а также*

$$g_1(\beta_1) = g_2(\beta_1) = g(\beta_1); \tag{2.13}$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{2.14}$$

то система (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\begin{gathered} \Phi_3(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\,\delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \\ \Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Предложение 2.4. *Если выполнены условия предложений* 2.2, 2.3 *и при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) = \Gamma_3(\beta_2), \tag{2.16}$$

то система (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\begin{gathered} \Phi_4(v; Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = v^2 Z_1\delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const}, \\ \Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2)\exp\left\{2\int_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\}. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Предложение 2.5. *Пусть выполнены свойства* (2.8), (2.13) *и*

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) = \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \tag{2.18}$$

Тогда система (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_0(v; Z_4; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_4\delta(\alpha)) = C_0 = \mathrm{const}, \tag{2.19}$$

если функция $\delta(\alpha)$ *удовлетворяет равенству*

$$\delta(\beta_1) = A_2 \exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \Gamma_4(b) f^2(b) db\right\}, \qquad A_2 = \mathrm{const}\,.$$

В частности, если выполнены свойства (2.6), (2.8), (2.10), (2.12), (2.13), (2.18), то система (2.1), (2.2) имеет гладкий первый интеграл вида (2.19).

Предложение 2.6. *Если выполнены условия предложений* 2.3, 2.4, *то система* (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_5(\beta_2, \beta_3, C_3, C_4) = \beta_3 + \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \mathrm{const}, \tag{2.20}$$

где, после взятия интеграла (2.20), *вместо постоянных* C_3, C_4 *можно подставить левые части равенств* (2.15), (2.17), *соответственно.*

Прямым следствием предложений 2.1–2.6 является основная теорема данного раздела.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия предложений* 2.1–2.6, *то система* (2.1), (2.2) *обладает полным набором* (*из шести*) *гладких независимых первых интегралов вида* (2.7), (2.11), (2.15), (2.17), (2.19), (2.20).

3. Введение внешнего силового поля и унимодулярные преобразования для систем девятого порядка

Модифицируем систему (2.1), (2.2) при условиях (2.8), (2.10), (2.13), (2.14) (2.16), (2.18) при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geqslant 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ лишь в уравнение на Z_4' системы (3.1), (3.2) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^4\{Z_4, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z) v, \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ Z_4' = F(\alpha) + \Gamma_4 f^2(\alpha) Z_3^2 + \Gamma_4 f^2(\alpha) Z_2^2 + \Gamma_4 f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_4 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_3' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d \ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_3 Z_4 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) Z_2^2 - \\ \qquad - \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d \ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_4 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d \ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha) Z_2 Z_3 - \\ \qquad - \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d \ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_4 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d \ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha) Z_1 Z_3 - \\ \qquad - \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d \ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f(\alpha) g(\beta_1) Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' = Z_3 f(\alpha), \qquad \beta_2' = Z_2 f(\alpha) g(\beta_1), \qquad \beta_3' = Z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)},$$

$\mu = \mathrm{const}$. При этом коэффициенты консервативной (внутренней) составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', ..., Z_4' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят соответствующие коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$, а во второй строке — соответствующие коэффициенты из уравнения на α'. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра b, $b_1 \geqslant 0$, $\mu \in \mathbf{R}$) будут иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\tilde{\delta}(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \tilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$, и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого; см. также [18, 22, 23]).

4. Интегрирование системы девятого порядка с диссипацией

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы девятого порядка (3.1), (3.2) при выполнении свойства (2.9). Она также допускает отделение независимой подсистемы седьмого порядка.

Введем также (по аналогии с (2.9)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (2.6):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{4.1}$$

Для полного интегрирования системы (3.2) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = Z_4, \quad w_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}, \quad w_2 = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_1 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}$$

система (3.2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_4 + b(w_4^2 + w_3^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ w_4' = F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2 - w_4 \Psi(\alpha, w), \\ w_3' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_3 w_4 - w_3 \Psi(\alpha, w), \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} w_2' = \pm w_3 \sqrt{1 + w_2^2} f(\alpha) g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \beta_2' = \pm \dfrac{w_2 w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}} f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} w_1' = \pm w_3 \sqrt{1 + w_1^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \beta_1' = \pm \dfrac{w_1 w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\beta_3' = \pm \frac{w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \tag{4.5}$$

$$\Psi(\alpha, w) = -b(w_4^2 + w_3^2)\tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)}.$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.2) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.2), по одному — для систем (4.3) и (4.4) (после соответствующих замен независимых переменных), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (4.5) (т.е. всего пять).

Теорема 4.1. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются равенства*

$$\Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{4.6}$$

Тогда система (3.1), (3.2) *при выполнении свойств* (2.9), (4.1) *обладает шестью независимыми* (*вообще говоря, трансцендентными, см.* [10, 13], *в смысле комплексного анализа*) *первыми интегралами.*

Первое равенство из (4.6) можно назвать геометрическим, а второе — энергетическим.

Доказательство. Для начала поставим в соответствие рассматриваемой подсистеме третьего порядка (4.2) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{gathered}
\frac{dw_4}{d\alpha} = \frac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2 + b w_4 (w_4^2 + w_3^2) \tilde{\delta}(\alpha) - b_1 w_4 F(\alpha) \delta(\alpha)}{-w_4 + b(w_4^2 + w_3^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha) \tilde{f}(\alpha)}, \\
\frac{dw_3}{d\alpha} = \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_3 w_4 + b w_3 (w_4^2 + w_3^2) \tilde{\delta}(\alpha) - b_1 w_3 F(\alpha) \delta(\alpha)}{-w_4 + b(w_4^2 + w_3^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha) \tilde{f}(\alpha)}.
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1 \delta(\alpha), \quad w_4 = u_2 \delta(\alpha), \tag{4.8}$$

пользуясь (4.6), приводим систему (4.7) к следующему виду:

$$\begin{gathered}
\delta \frac{du_2}{d\delta} + u_2 = \frac{\lambda + b u_2 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_2 \delta^2 + \kappa u_1^2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \delta^2)}, \\
\delta \frac{du_1}{d\delta} + u_1 = \frac{b u_1 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_1 \delta^2 - \kappa u_1 u_2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \delta^2)}.
\end{gathered} \tag{4.9}$$

В дальнейшем система (4.9) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1 \lambda \mu u_2 + u_2^2 + \kappa u_1^2}{(1-\kappa) u_1 u_2 - b_1 \lambda \mu u_1}. \tag{4.10}$$

Уравнение (4.10) имеет вид уравнения Абеля (см. [4]). Для примера, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - b_1 \lambda \mu u_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{4.11}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = G_1\left(\frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - b_1 \lambda \mu w_4 \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha)}{w_3 \delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{4.12}$$

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\kappa = -1$, то явный вид одного из первых интегралов только что приведен.

При помощи интеграла (4.12) получается и дополнительный первый интеграл для системы (3.2), который имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{4.13}$$

Выражение первого интеграла (4.13) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\kappa = -1$ этот первый интеграл найдется из уравнения Бернулли

$$\begin{gathered}
\frac{d\delta}{du_4} = \frac{(b_1 \lambda \mu - u_4)\delta + b\delta^3 (U^2(C_1, u_4) + u_4^2) - b_1 \lambda \delta^3}{\lambda - b_1 \lambda \mu u_4 + u_4^2 - U^2(C_1, u_4)}, \\
U(C_1, u_4) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1 \lambda \mu u_4 + u_4^2)}\right\}, \quad u_4 = \frac{Z_4}{\delta(\alpha)}.
\end{gathered}$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (4.11).

Первые интегралы для независимых (после замен независимых переменных) подсистем (4.3) и (4.4) будут иметь вид

$$\Theta_{2+s}(w_s;\beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Phi_s(\beta_s)} = C_{2+s} = \mathrm{const}, \quad s=1,2, \tag{4.14}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$ см. (2.15), (2.17). Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (4.5), находится по аналогии с (2.20):

$$\Theta_5(\beta_2,\beta_3,C_3,C_4) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}\,db = C_5 = \mathrm{const},$$

где, после взятия этого интеграла, вместо постоянных C_3, C_4 можно подставить соответствующие левые части равенств (4.14).

Кроме того, у системы (3.1), (3.2) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (2.19), «привязывающий» уравнение (2.1)), который, например, при $b=b_1$, $\mu=1$ примет вид

$$\Theta_0(v;w_4,w_3;\alpha) = v^2(1-2bw_4\delta(\alpha)+b^2(w_4^2+w_3^2)) = C_0 = \mathrm{const}\,.$$

□

Справедлива и теорема, обратная к теореме 4.1.

Теорема 4.2. *Условия* (2.9), (4.1), (4.6) (*например, при* $\kappa=-1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (4.12) *для системы* (3.1), (3.2).

5. Строение первых интегралов для систем девятого порядка с диссипацией

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.1), (3.2) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [7,18]). При этом при $F(\alpha)\equiv 0$ она превращается в консервативную систему (2.1), (2.2). Последняя, в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (2.7), (2.11). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1=0$, то система (3.1), (3.2) при втором условии из (4.6) обладает первым интегралом вида

$$\Theta_0(v;Z_4,\ldots,Z_1;\alpha) = v^2(Z_1^2+\ldots+Z_4^2+\lambda\delta^2(\alpha)) = \mathrm{const}\,. \tag{5.1}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (5.1), (2.11) также является первым интегралом системы (3.1), (3.2), если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1=0$. Но при $b_1>0$ каждая из функций

$$\Theta_{b_1}(v;Z_4,\ldots,Z_1;\alpha) = v^2(Z_1^2+\ldots+Z_4^2 - b_1\lambda\mu Z_4\delta(\alpha)+\lambda\delta^2(\alpha)) \tag{5.2}$$

и (2.11) по отдельности не является первым интегралом системы (3.1), (3.2), однако их отношение является первым интегралом (4.12) системы (3.1), (3.2) (при $\kappa=-1$) при любом $b_1>0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

6. Заключение для систем девятого порядка

Выделим существенный случай для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на четырехмерной сфере, и функции $\delta(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \delta(\alpha) = \sin\alpha. \tag{6.1}$$

Случай (6.1) формирует класс систем (3.1), (3.2) при $\mu=1$, соответствующих движению пятимерного динамически симметричного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле сил (см. [18,21]):

$$v' = v\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z), \tag{6.2}$$

$$\alpha' = -Z_4 + b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\sin\alpha + bF(\alpha)\cos\alpha, \tag{6.3}$$

$$Z_4' = F(\alpha) - \left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_4F(\alpha)\sin\alpha, \tag{6.4}$$

$$Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_3\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_3F(\alpha)\sin\alpha, \tag{6.5}$$

$$Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \tag{6.6}$$

$$+bZ_2\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_2F(\alpha)\sin\alpha, \tag{6.7}$$

$$Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \tag{6.8}$$

$$+bZ_1\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_1F(\alpha)\sin\alpha, \tag{6.9}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.10}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{6.11}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{6.12}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha + bF(\alpha)\sin\alpha.$$

В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на четырехмерной сфере.

Итак, система (6.2)–(6.12) может быть рассмотрена на своем фазовом девятимерном многообразии

$$W_1 = \mathbf{R}_+^1\{v\} \times T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \tag{6.13}$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к четырехмерной сфере.

Видно, что в системе (6.2)–(6.12) девятого порядка образовалась независимая система (6.3)–(6.12) восьмого порядка на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. При этом в независимой системе (6.3)–(6.12) восьмого порядка образовалась еще одна независимая система (6.3)–(6.11) седьмого порядка на своем семимерном многообразии.

В случае (6.1), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение пятимерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы (см. [8, 9, 18–20]). В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система эквивалентна обобщенному (сферическому) пятимерному маятнику, помещенному в некоторое неконсервативное поле, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [1, 18]):

$$\begin{gathered}
\ddot\xi + b_*\dot\xi\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \left[\dot\eta_1^{\,2} + \dot\eta_2^{\,2}\sin^2\eta_1 + \dot\eta_3^{\,2}\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2\right]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0,\\
\ddot\eta_1 + b_*\dot\eta_1\cos\xi + \dot\xi\dot\eta_1\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - (\dot\eta_2^{\,2} + \dot\eta_3^{\,2}\sin^2\eta_2)\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0,\\
\ddot\eta_2 + b_*\dot\eta_2\cos\xi + \dot\xi\dot\eta_2\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot\eta_1\dot\eta_2\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \dot\eta_3^{\,2}\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0,\\
\ddot\eta_3 + b_*\dot\eta_3\cos\xi + \dot\xi\dot\eta_3\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot\eta_1\dot\eta_3\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\dot\eta_2\dot\eta_3\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} = 0,\ b_* > 0.
\end{gathered} \tag{6.14}$$

Данная система описывает закрепленный пятимерный маятник, помещенный в поток набегающей среды при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 8, но фазовая переменная η_3 является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка. Ее фазовым пространством является касательное расслоение $T\mathbf{S}^3\{\dot{\xi}, \dot{\eta_1}, \dot{\eta_2}, \dot{\eta_3}, \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ к четырехмерной сфере $\mathbf{S}^4\{\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$; при этом уравнение, переводящее систему (6.14) в систему на касательном расслоении к трехмерной сфере $\dot{\eta_3} \equiv 0$ и уравнения больших кругов $\dot{\eta_1} \equiv 0$, $\dot{\eta_2} \equiv 0$, $\dot{\eta_3} \equiv 0$ задают семейства интегральных многообразий.

Справедливо также важное замечание, сделанное ранее для систем меньшего порядка (см. [24, 25]). Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то почти всегда рассматриваемая система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является «собственно» диссипативной). Тем не менее и в этом случае (благодаря теоремам 4.1 и 4.2) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости многомерных диссипативных систем в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
3. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа// Докл. АН СССР. — 1984. — *219*, № 2. — С. 228–237.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
5. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
6. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
7. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
8. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — Т. 1. — С. 133–135.
9. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
10. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
11. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
12. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
13. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
14. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
15. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
16. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
17. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
18. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — 2013. — *125*. — С. 5–254.
19. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
20. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 5. — С. 547–551.

21. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
22. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
23. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
24. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
25. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 82–118
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-82-118

УДК 517, 531.01

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПЯТИМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

© 2020 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. При изучении случаев интегрируемости многомерного твердого тела в неконсервативных силовых полях автором реализуются два подхода. Первый подход касается систем, в которых неконсервативность силового поля порождается введением дополнительных коэффициентов в кинематические соотношения; особняком здесь стоят случаи $n = 5$ и $n = 6$. Второй же подход основывается на одновременном воздействии двух силовых полей — внутреннем (консервативном) и внешнем (неконсервативном). Данная работа посвящена такому особенному случаю, когда $n = 5$.

Ключевые слова: многомерное твердое тело, уравнения движения, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

EXAMPLES OF INTEGRABLE EQUATIONS OF MOTION OF A FIVE-DIMENSIONAL RIGID BODY IN THE PRESENCE OF INTERNAL AND EXTERNAL FORCE FIELDS

© 2020 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In the study of integrable systems that describe multidimensional rigid bodies in nonconservative force fields, two approaches are used. The first approach is concerned with systems in which the nonconservativity of force fields is related to additional coefficients in the cinematical relations; note that $n = 5$ and $n = 6$ are special cases. The second approach is based on the simultaneous influence of two force fields: internal (conservative) and external (nonconservative). This paper is devoted to the special case where $n = 5$.

Keywords and phrases: multidimensional rigid body, equations of motion, conservative force field, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 58-xx, 70-xx

СОДЕРЖАНИЕ

В работе систематизируются результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного n-мерного твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твердых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая во все время движения центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил. Иногда изложение идет при любом n, но упор делается на случай $n = 5$.

1. Более общая задача о движении со следящей силой

1.1. Динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим движение однородного динамически симметричного твердого тела с «передним торцом» ($(n-1)$-мерным диском, «взаимодействующим со средой, заполняющей n-мерное пространство») в поле силы $\mathbf{S}$ сопротивления в условиях квазистационарности (см. [63, 67, 68, 71, 72]).

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр $(n-1)$-мерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), Ω — тензор угловой скорости тела, $Dx_1 \ldots x_n$ — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, Dx_3, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, \ldots, I_n = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \ldots x_n$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, \ldots, 0\}, \quad \mathbf{v}_D = v\mathbf{i}_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right), \tag{1.1.1}$$

где

$$\mathbf{i}_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

— единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$.

При этом примем также разложение для функции воздействия среды на n-мерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, \ldots, 0\}, \tag{1.1.3}$$

т.е. в данном случае внешняя сила $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина [42, 43], см. далее), которая описывает движение центра масс и соответствует пространству $\mathbb{R}^n$, при этом касательные силы воздействия среды на $(n-1)$-мерный диск отсутствуют. В интересующем нас случае $n = 5$ данная система примет вид

$$\begin{gathered}\dot v\cos\alpha - \dot\alpha v\sin\alpha - \omega_{10}v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_9 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \\ -\omega_7 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_4 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ +\sigma(\omega_{10}^2 + \omega_9^2 + \omega_7^2 + \omega_4^2) = \frac{F_x}{m} = -\frac{S}{m},\end{gathered} \tag{1.1.4}$$

$$\begin{gathered}\dot v\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \\ +\omega_{10}v\cos\alpha - \omega_8 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_6 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \\ -\omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_9\omega_8 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) - \sigma\dot\omega_{10} = 0,\end{gathered} \tag{1.1.5}$$

$$\begin{gathered}\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 - \\ -\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_9 v\cos\alpha + \omega_8 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\ +\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) + \sigma\dot\omega_9 = 0,\end{gathered} \tag{1.1.6}$$

$$\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 +$$

$$+\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3-\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\omega_7 v\cos\alpha-\omega_6 v\sin\alpha\cos\beta_1+$$
$$+\omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2-\omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\sigma(\omega_6\omega_{10}+\omega_5\omega_9-\omega_1\omega_4)-\sigma\dot\omega_7=0, \quad (1.1.7)$$
$$\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+$$
$$+\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3+\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\omega_4 v\cos\alpha+\omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1-$$
$$-\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\sigma(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)+\sigma\dot\omega_4=0, \quad (1.1.8)$$

где
$$S=s(\alpha)v^2, \qquad \sigma=CD, \quad v>0. \quad (1.1.9)$$

Далее, вспомогательная матрица для вычисления момента силы сопротивления (приложенной в точке N) примет вид
$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -S & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1.10)$$
тогда может быть получена часть *динамических уравнений* движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$. В случае $n=5$ данная система примет вид (см. также [10, 11, 16, 17, 32, 40]):
$$(\lambda_4+\lambda_5)\dot\omega_1+(\lambda_4-\lambda_5)(\omega_4\omega_7+\omega_3\omega_6+\omega_2\omega_5)=0, \quad (1.1.11)$$
$$(\lambda_3+\lambda_5)\dot\omega_2+(\lambda_5-\lambda_3)(\omega_1\omega_5-\omega_3\omega_8-\omega_4\omega_9)=0, \quad (1.1.12)$$
$$(\lambda_2+\lambda_5)\dot\omega_3+(\lambda_2-\lambda_5)(\omega_4\omega_{10}-\omega_2\omega_8-\omega_1\omega_6)=0, \quad (1.1.13)$$
$$(\lambda_1+\lambda_5)\dot\omega_4+(\lambda_5-\lambda_1)(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)=-x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.1.14)$$
$$(\lambda_3+\lambda_4)\dot\omega_5+(\lambda_3-\lambda_4)(\omega_7\omega_9+\omega_6\omega_8+\omega_1\omega_2)=0, \quad (1.1.15)$$
$$(\lambda_2+\lambda_4)\dot\omega_6+(\lambda_4-\lambda_2)(\omega_5\omega_8-\omega_7\omega_{10}-\omega_1\omega_3)=0, \quad (1.1.16)$$
$$(\lambda_1+\lambda_4)\dot\omega_7+(\lambda_1-\lambda_4)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9)=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.1.17)$$
$$(\lambda_2+\lambda_3)\dot\omega_8+(\lambda_2-\lambda_3)(\omega_9\omega_{10}+\omega_5\omega_6+\omega_2\omega_3)=0, \quad (1.1.18)$$
$$(\lambda_1+\lambda_3)\dot\omega_9+(\lambda_3-\lambda_1)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.1.19)$$
$$(\lambda_1+\lambda_2)\dot\omega_{10}+(\lambda_1-\lambda_2)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2. \quad (1.1.20)$$

Таким образом, фазовым пространством системы (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20) 15-го порядка является прямое произведение 5-мерного многообразия на алгебру Ли $\mathfrak{so}(5)$:
$$\mathbb{R}^1\times\mathbb{S}^4\times\mathfrak{so}(5). \quad (1.1.21)$$

1.2. Следствия динамической симметрии. Поскольку имеется динамическая симметрия
$$I_2=\ldots=I_n, \quad (1.2.1)$$
то система динамических уравнений обладает циклическими первыми интегралами
$$\omega_{k_1}\equiv\omega_{k_1}^0=\text{const},\ldots,\omega_{k_s}\equiv\omega_{k_s}^0=\text{const}, \quad s=\frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad (1.2.2)$$

При этом $k_1=1,\ldots,k_s$ — некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W_1=\{1,2,\ldots,n(n-1)/2\}$.

В частности, система (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20) обладает первыми интегралами
$$\omega_1\equiv\omega_1^0, \quad \omega_2\equiv\omega_2^0, \quad \omega_3\equiv\omega_3^0, \quad \omega_5\equiv\omega_5^0, \quad \omega_6\equiv\omega_6^0, \quad \omega_8\equiv\omega_8^0, \quad (1.2.3)$$
рассматриваемыми на нулевых уровнях:
$$\omega_1^0=\omega_2^0=\omega_3^0=\omega_5^0=\omega_6^0=\omega_8^0=0. \quad (1.2.4)$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось

$$p = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n-1$$

штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества W_1, не равные $k_1, \ldots, k_s$), т.е. в нашем случае *четыре.*

1.3. Выбор следящей силы и новые квазискорости в системе. Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, лежащей на прямой $CD = Dx_1$ и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [41, 45, 52, 55])

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const}, \tag{1.3.1}$$

то в системе (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20)) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \tag{1.3.2}$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) = s(\alpha)v^2, \qquad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{1.3.3}$$

Случай (1.3.3) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка в системе (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20) после некоторого преобразования.

Укажем на достаточное условие такого отделения. Пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) =$$
$$= \sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{n-1} \tau_{i,j}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\omega_{r_i}\omega_{r_j} = T_1\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)v^2, \qquad \omega_0 = v. \tag{1.3.4}$$

Введем новые квазискорости. Для этого преобразуем величины $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ посредством композиции следующих $(n-2)$-х поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\beta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2) \circ \ldots \circ T_{1,2}(-\beta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}, \tag{1.3.5}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.3.6}$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\beta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\beta.$$

В частности, для системы (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_4\cos\beta_3 + \omega_7\sin\beta_3, \\ z_2 &= (\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\cos\beta_2 + \omega_9\sin\beta_2, \\ z_3 &= [(-\omega_7\cos\beta_3 + \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 + \omega_9\cos\beta_2]\cos\beta_1 + \omega_{10}\sin\beta_1, \\ z_4 &= [(\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2]\sin\beta_1 + \omega_{10}\cos\beta_1. \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

1.4. Редукции в системе и системы нормального вида. Динамическую часть уравнений движения в случаях (1.2.1), (1.2.2) можно переписать в виде

$$\dot v + \sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1} z_s^2\right)\cos\alpha - \sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) =$$
$$= \frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2 - s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha, \tag{1.4.1}$$

$$\dot\alpha v + z_{n-1}v - \sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1} z_s^2\right)\sin\alpha - \sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) =$$
$$= \frac{s(\alpha)v^2 - T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2}{m}\sin\alpha, \tag{1.4.2}$$

$$\dot\beta_1\sin\alpha - z_{n-2}\cos\alpha - \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = 0, \tag{1.4.3}$$

$$\dot\beta_2\sin\alpha\sin\beta_1 + z_{n-3}\cos\alpha - \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = 0, \tag{1.4.4}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot\beta_{n-2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} + (-1)^n z_1\cos\alpha -$$
$$-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = 0, \tag{1.4.5}$$

$$\dot\omega_{r_1} = (-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{1.4.6}$$

$$\dot\omega_{r_2} = (-1)^{n+1}\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{(n-1)N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{1.4.7}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot\omega_{r_{n-1}} = \frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha). \tag{1.4.8}$$

Здесь, как и ранее, введены следующие функции:

$$\begin{gathered}
\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\ldots,\beta_{n-2}\right)\right),\\
\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3,\ldots,\beta_{n-2}\right)\right),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Delta_{v,n-3}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-3}+\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}\right)\right),\\
\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}+\frac{\pi}{2}\right)\right),
\end{gathered} \tag{1.4.9}$$

а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ представляется в виде

$$\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})) =$$
$$= 0\cdot\cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)i_{sN}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}). \tag{1.4.10}$$

Здесь $i_{sN}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})$, $s=1,\ldots,n$, $(i_{1N}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\equiv 0)$ — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N=\{0,x_{2N},\ldots,x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbb{S}^{n-2}\{\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha=\pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$.

Таким образом, по-прежнему

$$\mathbf{i}_N(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=\mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\right), \tag{1.4.11}$$

а вектор $\mathbf{i}_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})$ определяется в (1.1.2).

Зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ по-прежнему понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v)$ в силу (1.3.5).

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k=n_1vZ_k,\ k=1,\ldots,n-1,\quad \langle\cdot\rangle=n_1v\langle'\rangle,\quad n_1>0,\quad n_1=\mathrm{const}, \tag{1.4.12}$$

приведем систему (1.4.1)–(1.4.8) к следующему виду:

$$v'=v\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \tag{1.4.13}$$

$$\begin{gathered}\alpha'=-Z_{n-1}+\sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\sin\alpha+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)-\\ -\frac{T_1(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)-s(\alpha)}{mn_1}\sin\alpha,\end{gathered} \tag{1.4.14}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-1}=\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)-\left(\sum_{s=1}^{n-2}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\ +\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^sZ_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\right\}-\\ -Z_{n-1}\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z),\end{gathered} \tag{1.4.15}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-2}=Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\left(\sum_{s=1}^{n-3}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\times\\ \times\left\{Z_{n-1}\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)+\sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}-\\ -\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)-Z_{n-2}\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z),\end{gathered} \tag{1.4.16}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-3}=Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\\ -\left(\sum_{s=1}^{n-4}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\ +\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\left[-Z_{n-1}+Z_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+\\ +\sum_{s=3}^{n-2}(-1)^sZ_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\}+\\ +\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)-Z_{n-3}\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z),\end{gathered} \tag{1.4.17}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$
\begin{gathered}
Z_1' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1} Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + \\
+\frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}(-1)^{n+1}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1 Z\right)\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s} Z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + \\
+(-1)^n\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1 Z\right) - Z_1\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z\right), \qquad (1.4.18)
\end{gathered}
$$

$$
\beta_1' = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1 Z\right), \qquad (1.4.19)
$$

$$
\beta_2' = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1 Z\right), \qquad (1.4.20)
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$
\begin{gathered}
\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}} + \\
+\frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1 Z\right), \qquad (1.4.21)
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -\sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha + \\
+\frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1 Z\right) + \\
+\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1 Z\right) - s(\alpha)}{m n_1}\cos\alpha. \qquad (1.4.22)
\end{gathered}
$$

Видно, что в системе (1.4.13)–(1.4.21) порядка $2(n-1)+1$ может быть выделена независимая подсистема (1.4.14)–(1.4.21) порядка $2(n-1)$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $2(n-1)$-мерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$.

В частности, при выполнении условия (1.3.3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы порядка $2(n-1)$ также возможен.

В дальнейшем также зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v)$ (от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1 Z_1,\ldots,n_1 Z_{n-1})$) в силу (1.3.5) и (1.4.12).

В частности, при $n=5$ система (1.4.13)–(1.4.21) примет следующий вид:

$$
v' = v\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z), \qquad (1.4.23)
$$

$$
\begin{gathered}
\alpha' = -Z_4 + \sigma n_1\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\sin\alpha + \frac{\sigma}{3I_2 n_1}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_2,n_1 Z\right) - \\
-\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1 Z\right) - s(\alpha)}{m n_1}\sin\alpha, \qquad (1.4.24)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
Z_4' = \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2}\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1 Z\right) - \left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\
+\frac{\sigma}{3I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{-Z_3\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1 Z\right) + Z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1 Z\right) - \\
-Z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1 Z\right)\} - Z_4\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \qquad (1.4.25)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
Z_3' = Z_3 Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2+Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{3I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{Z_4\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1 Z\right) - \\
-Z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1 Z\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1 Z\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\} -
\end{gathered}
$$

$$-\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_3\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \tag{1.4.26}$$

$$\begin{gathered}Z_2'=Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\
+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left[-Z_4+Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+\\
+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left[-Z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right]+\\
+\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_2\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right),\end{gathered} \tag{1.4.27}$$

$$\begin{gathered}Z_1'=Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\
+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left\{Z_4-Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}-\\
-\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_1\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right),\end{gathered} \tag{1.4.28}$$

$$\beta_1'=Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{1.4.29}$$

$$\beta_2'=-Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{1.4.30}$$

$$\beta_3'=Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{1.4.31}$$

где

$$\begin{gathered}\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z)=-\sigma n_1\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha+\\
+\frac{\sigma}{3I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)+\\
+\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha.\end{gathered} \tag{1.4.32}$$

При этом в системе (1.4.23)–(1.4.31) девятого порядка может быть выделена независимая подсистема (1.4.24)–(1.4.31) восьмого порядка, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем восьмимерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$.

В частности, при выполнении условия (1.3.3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы восьмого порядка также возможен.

1.5. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (1.4.14)–(1.4.21) после общего множителя

$$\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)$, $s=1,\ldots,n-2$, входят линейным образом (и их всегда ровно $(n-2)$ штуки). Так, например, в уравнении (1.4.15) (с левой частью Z_{n-1}') функции (1.4.9) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2. \tag{1.5.1}$$

А вот далее, в уравнениях (1.4.16)–(1.4.18) появление набора функций (1.4.9) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для Z_{n-2}' по-прежнему входит набор функций (1.4.9) с индексами (1.5.1). А в уравнение для Z_{n-3}' входит уже набор с индексами

$$2\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2 \tag{1.5.2}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$ уже повторяется дважды.

Каково же общее распределение индексов? Оно дается следующей таблицей 1.

Таблица 1. Общее распределение индексов набора функций (1.4.9)

Левая часть системы (1.4.14)–(1.4.21)	Распределение индексов s набора функций (1.4.9)					
Z'_{n-2}	1	2	3	4	…	$n-2$
Z'_{n-3}	2	2	3	4	…	$n-2$
Z'_{n-4}	3	3	3	4	…	$n-2$
Z'_{n-5}	4	4	4	4	…	$n-2$
…	…	…	…	…	…	…
Z'_1	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	…	$n-2$

Так, минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n = 3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (1.4.9) (при $s = 1$). Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (1.4.9) (при $s = 1, 2$). Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (1.4.14)–(1.4.21) функций (1.4.9) (при $s = 1, 2, 3$), и т.д.

2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

2.1. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [42, 43], пользуясь (1.1.2), (1.4.11), динамические функции s, $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{2.1.1}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$).

При этом функции

$$\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \quad \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \quad s = 1, \ldots, n-2,$$

входящие в систему (1.4.13)–(1.4.21), примут следующий вид:

$$\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) = R(\alpha) = A\sin\alpha, \qquad \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \equiv 0, \ s = 1, \ldots, n-2. \tag{2.1.2}$$

Выбирая безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad n_1 = n_0, \tag{2.1.3}$$

при $n = 5$ будем рассматривать следующую систему девятого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \tag{2.1.4}$$

$$\alpha' = -Z_4 + b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{2.1.5}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - \left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$
$$+ bZ_4\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.1.6}$$
$$Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +$$
$$+ bZ_3\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.1.7}$$
$$Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$
$$+ bZ_2\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.1.8}$$
$$Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$
$$+ bZ_1\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.1.9}$$
$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.1.10}$$
$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{2.1.11}$$
$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{2.1.12}$$

где
$$\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z) = -b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Итак, система (2.1.4)–(2.1.12) может быть рассмотрена на своем фазовом девятимерном многообразии
$$W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times T_*\mathbb{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \tag{2.1.13}$$
т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к четырехмерной сфере.

Видно, что в системе (2.1.4)–(2.1.12) девятого порядка образовалась независимая система (2.1.5)–(2.1.12) восьмого порядка на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. При этом в независимой системе (2.1.5)–(2.1.12) восьмого порядка образовалась еще одна независимая система (2.1.5)–(2.1.11) седьмого порядка на своем семимерном многообразии.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *У системы* (1.1.4)–(1.1.8) *при условиях* (1.2.1), (1.2.3)–(1.3.1) *выделяется динамическая система* (1.4.24)–(1.4.31) *на касательном расслоении* $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ *четырехмерной сферы* $\mathbb{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. *В частности, при условии* (2.1.1) *выделяется система* (2.1.5)–(2.1.12).

2.2. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.3.1) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.4.1)–(1.4.8) (при условии (1.3.3)), а именно, функция фазовых переменных
$$\Psi_0(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1,\ldots,z_{n-1}) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2) - 2\sigma z_{n-1}v\sin\alpha = V_C^2 \tag{2.2.1}$$
постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины $z_1,\ldots,z_{n-1}$ выбираются в силу (1.3.5)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (1.4.13)–(1.4.21) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных
$$\Psi_1(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z_1,\ldots,Z_{n-1}) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha) = V_C^2 \tag{2.2.2}$$
постоянна на ее фазовых траекториях.

В частности, равенство (2.2.2) позволяет, не решая системы (2.1.4)–(2.1.12), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно, при $V_C \neq 0$ выполнено равенство
$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2) - 2bZ_4\sin\alpha}. \tag{2.2.3}$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (2.1.4)–(2.1.12) существуют асимптотические предельные множества, то равенство (2.2.2) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (2.1.4)–(2.1.12) во всем фазовом пространстве (ср. с [44,47,51,56]).

2.3. Общие замечания об интегрируемости системы. Для полного интегрирования системы восьмого порядка (2.1.5)–(2.1.12) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до пяти для интегрирования системы.

2.3.1. Система при отсутствии внешнего силового поля. Сначала рассмотрим систему (2.1.5)–(2.1.12) на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. При этом получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (1.4.10) тождественно равна нулю. В частности, коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (2.1.6) отсутствует, а также $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2.$$

Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_4 + b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\sin\alpha, \tag{2.3.1}$$

$$Z_4' = -\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \tag{2.3.2}$$

$$\begin{gathered} Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + bZ_3\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.3.3}$$

$$\begin{gathered} Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_2\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.3.4}$$

$$\begin{gathered} Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_1\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.3.5}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.3.6}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{2.3.7}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{2.3.8}$$

при этом во вспомогательном уравнении (2.1.4) на величину v следует выбрать

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha.$$

Система (2.3.1)–(2.3.8) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 2.2. *Система* (2.3.1)–(2.3.8) *обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.3.9}$$

$$\Phi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{2.3.10}$$

$$\Phi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{2.3.11}$$

$$\Phi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{2.3.12}$$

$$\Phi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \mathrm{const}\,. \tag{2.3.13}$$

Замечание 2.1. Поскольку в первые интегралы (2.3.9)–(2.3.13), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой (2.3.1)–(2.3.8) использовать вспомогательное уравнение (2.1.4).

Первые четыре первых интеграла (2.3.9)–(2.3.12) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются четыре (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости пятимерного твердого тела, а именно:

$$\omega_4 \equiv \omega_4^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_7 \equiv \omega_7^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_9 \equiv \omega_9^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_{10} \equiv \omega_{10}^0 = \mathrm{const}\,. \tag{2.3.14}$$

В частности, наличие первого интеграла (2.3.9) объясняется равенством

$$n_0^2 v^2 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) = \omega_4^2 + \omega_7^2 + \omega_9^2 + \omega_{10}^2 \equiv n_0^2 C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{2.3.15}$$

Пятый первый интеграл (2.3.13) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}\frac{1}{\sin\beta_2}, \tag{2.3.16}$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (2.3.11), (2.3.12) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}, \tag{2.3.17}$$

то квадратура (2.3.16) примет вид

$$\beta_3 = \pm\int\frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\dfrac{C_3^2}{C_4^2} - 1\right) - \dfrac{C_3^2}{C_4^2}u^2}}, \qquad u = \cos\beta_2. \tag{2.3.18}$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\beta_3 + C_5 = \pm\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta_2}{\sqrt{\dfrac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}}, \qquad C_5 = \mathrm{const}, \tag{2.3.19}$$

позволяющему получить первый интеграл (2.3.13). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\operatorname{tg}^2(\beta_3 + C_5) = \frac{C_4^2}{(C_3^2 - C_4^2)\operatorname{tg}^2\beta_2 - C_4^2}. \tag{2.3.20}$$

Теперь перефразируем теорему 2.2.

Теорема 2.3. *Система* (2.3.1)–(2.3.8) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{2.3.21}$$

$$\Psi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{2.3.22}$$

$$\Psi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\beta_2} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{2.3.23}$$

$$\Psi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\beta_1} = C_4' = \mathrm{const}, \tag{2.3.24}$$

$$\Psi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \mathrm{const}\,. \tag{2.3.25}$$

Замечание 2.2. Поскольку в первые интегралы (2.3.21)–(2.3.25), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой (2.3.1)–(2.3.8) использовать вспомогательное уравнение (2.1.4).

Пятый первый интеграл (2.3.25) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_3, а функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 2.3 (в отличие от теоремы 2.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (2.3.21)–(2.3.25) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 2.3 преобразованный набор первых интегралов (2.3.21)–(2.3.25) системы (2.3.1)–(2.3.8) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (2.3.1)–(2.3.8) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных:

$$\begin{pmatrix} Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \ w_4 = Z_4, \ w_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}, \ w_2 = \frac{Z_2}{Z_1}, \ w_1 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \tag{2.3.26}$$

система (2.3.1)–(2.3.8) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha, \tag{2.3.27}$$

$$w_4' = -w_3^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{2.3.28}$$

$$w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{2.3.29}$$

$$\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1 + w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

$$\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1 + w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{2.3.32}$$

где

$$\begin{aligned} d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \mathcal{Z}_3(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= -\mathcal{Z}_2(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \mathcal{Z}_1(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}; \end{aligned} \tag{2.3.33}$$

при этом

$$Z_k = \mathcal{Z}_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \qquad k = 1, 2, 3, \tag{2.3.34}$$

— функции в силу замены (2.3.26).

Видно, что система восьмого порядка (2.3.27)–(2.3.32) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (2.3.27)–(2.3.29) — третьего порядка, а системы (2.3.30), (2.3.31) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (2.3.27)–(2.3.32) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (2.3.27)–(2.3.29), по одному для систем (2.3.30), (2.3.31), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.3.32) (т.е. *всего пять*).

Замечание 2.3. Выпишем первые интегралы (2.3.21)–(2.3.25) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 в силу (2.3.26). Получим:

$$\Theta_1(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{w_3^2 + w_4^2}{w_3 \sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{2.3.35}$$

$$\Theta_2(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 w_3 \sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{2.3.36}$$

$$\Theta_3(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \text{const}, \tag{2.3.37}$$

$$\Theta_4(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \text{const}, \tag{2.3.38}$$

$$\Theta_5(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5'' = \text{const}\,. \tag{2.3.39}$$

Замечание 2.4. Поскольку в первые интегралы (2.3.35)–(2.3.39), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой (2.3.27)–(2.3.32) использовать вспомогательное уравнение (2.1.4).

Таким образом, два независимых первых интеграла (2.3.35), (2.3.36) достаточны для интегрирования системы (2.3.27)–(2.3.29), первые интегралы (2.3.37), (2.3.38) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2, \tag{2.3.40}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (2.3.30), (2.3.31), и, наконец, первый интеграл (2.3.39) достаточен для «привязывания» уравнения (2.3.32). Доказана следующая теорема.

Теорема 2.4. *Система* (2.3.1)–(2.3.8) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов.*

2.3.2. Частичное введение внешнего силового поля. Теперь рассмотрим систему (2.1.5)–(2.1.12) при условии $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2.$$

При этом частично добавим внешнее силовое поле. А именно, его наличие характеризует коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (2.1.6) (в отличие от системы (2.3.1)–(2.3.8)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_4 + b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\sin\alpha, \tag{2.3.41}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - \left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \tag{2.3.42}$$

$$\begin{gathered} Z_3' = Z_3 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + bZ_3\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.3.43}$$

$$\begin{gathered} Z_2' = Z_2 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_2\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.3.44}$$

$$\begin{gathered} Z_1' = Z_1 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_1\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.3.45}$$

$$\beta_1' = Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.3.46}$$

$$\beta_2' = -Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{2.3.47}$$

$$\beta_3' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{2.3.48}$$

при этом во вспомогательном уравнении (2.1.4) на величину v следует выбрать

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha.$$

Теорема 2.5. *Система* (2.3.41)–(2.3.48) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Phi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.3.49}$$

$$\Phi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{2.3.50}$$

$$\Phi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{2.3.51}$$

$$\Phi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{2.3.52}$$

$$\Phi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \mathrm{const}\,. \tag{2.3.53}$$

Замечание 2.5. Поскольку в первые интегралы (2.3.49)–(2.3.53), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой (2.3.41)–(2.3.48) использовать вспомогательное уравнение (2.1.4).

Первый интеграл (2.3.49) по своей структуре похож на интеграл полной энергии. Пятый первый интеграл (2.3.53) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и найден выше.

Теперь перефразируем теорему 2.5.

Теорема 2.6. *Система* (2.3.41)–(2.3.48) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\alpha}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{2.3.54}$$

$$\Psi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{2.3.55}$$

$$\Psi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\beta_2} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{2.3.56}$$

$$\Psi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\beta_1} = C_4' = \mathrm{const}, \tag{2.3.57}$$

$$\Psi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \mathrm{const}\,. \tag{2.3.58}$$

Замечание 2.6. Поскольку в первые интегралы (2.3.54)–(2.3.58), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой (2.3.41)–(2.3.48) использовать вспомогательное уравнение (2.1.4).

Функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 2.6 (в отличие от теоремы 2.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (2.3.54)–(2.3.58) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 2.6 преобразованный набор первых интегралов (2.3.54)–(2.3.58) системы (2.3.41)–(2.3.48) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (2.3.41)–(2.3.48) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (2.3.26) система (2.3.41)–(2.3.48) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha, \tag{2.3.59}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{2.3.60}$$

$$w_3' = w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{2.3.61}$$

$$\left.\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1 + w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned}\right. \tag{2.3.62}$$

$$
\begin{aligned}
w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\
\beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),
\end{aligned} \tag{2.3.63}
$$

$$
\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{2.3.64}
$$

где выполнены условия (2.3.33).

Видно, что система восьмого порядка (2.3.59)–(2.3.64) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (2.3.59)–(2.3.61) — третьего, а системы (2.3.62), (2.3.63) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (2.3.59)–(2.3.64) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (2.3.59)–(2.3.61), по одному для систем (2.3.62), (2.3.63), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.3.64) (т.е. *всего пять*).

Замечание 2.7. Выпишем первые интегралы (2.3.54)–(2.3.58) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 в силу (2.3.26). Получим:

$$
\Theta_1(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{w_3^2 + w_4^2 + \sin^2\alpha}{w_3 \sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{2.3.65}
$$

$$
\Theta_2(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 w_3 \sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{2.3.66}
$$

$$
\Theta_3(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \text{const}, \tag{2.3.67}
$$

$$
\Theta_4(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \text{const}, \tag{2.3.68}
$$

$$
\Theta_5(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5'' = \text{const}\,. \tag{2.3.69}
$$

Замечание 2.8. Поскольку в первые интегралы (2.3.65)–(2.3.69), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой (2.3.59)–(2.3.64) использовать вспомогательное уравнение (2.1.4).

Таким образом, два независимых первых интеграла (2.3.65), (2.3.66) достаточны для интегрирования системы (2.3.59)–(2.3.61), первые интегралы (2.3.67), (2.3.68) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$
\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2, \tag{2.3.70}
$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (2.3.62), (2.3.63), и, наконец, первый интеграл (2.3.69) достаточен для «привязывания» уравнения (2.3.64). Доказана следующая теорема.

Теорема 2.7. *Система* (2.3.41)–(2.3.48) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов.*

2.4. Полный список первых интегралов. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (2.1.5)–(2.1.12) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (2.1.5)–(2.1.12) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (2.3.26) система (2.1.5)–(2.1.12) распадается следующим образом:

$$
\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{2.4.1}
$$

$$
w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.4.2}
$$

$$
w_3' = w_3 w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.4.3}
$$

$$
\begin{aligned}
w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\\
\beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),
\end{aligned} \tag{2.4.4}
$$

$$
\begin{aligned}
w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\\
\beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),
\end{aligned} \tag{2.4.5}
$$

$$
\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{2.4.6}
$$

где выполнены условия (2.3.33).

Видно, что система восьмого порядка (2.4.1)–(2.4.6) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (2.4.1)–(2.4.3) — третьего, а системы (2.4.4), (2.4.5) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (2.4.1)–(2.4.6) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (2.4.1)–(2.4.3), по одному для систем (2.4.4), (2.4.5), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.4.6) (т.е. *всего пять*).

Сначала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (2.3.27)–(2.3.29) неавтономную систему второго порядка

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{\sin\alpha\cos\alpha + bw_4(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha - w_3^2\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b(w_3^2+w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha},\\
\frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{bw_3(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha + w_3w_4\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b(w_3^2+w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.4.7}
$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (2.4.7) в алгебраическом виде

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_4}{d\tau} &= \frac{\tau + bw_4(w_3^2+w_4^2) - bw_4\tau^2 - w_3^2/\tau}{-w_4 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_3^2+w_4^2)},\\
\frac{dw_3}{d\tau} &= \frac{bw_3(w_3^2+w_4^2) - bw_3\tau^2 + w_3w_4/\tau}{-w_4 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_3^2+w_4^2)}.
\end{aligned} \tag{2.4.8}
$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$
w_3 = u_1\tau, \qquad w_4 = u_2\tau, \tag{2.4.9}
$$

приводим систему (2.4.8) к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2+u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{bu_1(u_1^2+u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)},
\end{aligned} \tag{2.4.10}
$$

что эквивалентно

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)}.
\end{aligned} \tag{2.4.11}
$$

Сопоставим системе второго порядка (2.4.11) неавтономное уравнение первого порядка

$$
\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \tag{2.4.12}
$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$
d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{2.4.13}
$$

Итак, уравнение (2.4.12) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{2.4.14}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4 \sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_3 \sin\alpha} = C_1 = \text{const}\,. \tag{2.4.15}$$

Замечание 2.9. При $b = 0$ первый интеграл (2.4.15) системы (2.4.1)–(2.4.3) совпадает с первым интегралом (2.3.65) системы (2.3.59)–(2.3.61), но при $b \neq 0$ ни числитель выражения (2.4.15), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (2.4.1)–(2.4.3) по отдельности (хотя при $b = 0$ и числитель и знаменатель выражения (2.4.15) являются первыми интегралами системы (2.3.59)–(2.3.61)).

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (2.4.1)–(2.4.3). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (2.4.14) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{2.4.16}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{2.4.17}$$

и фазовое пространство системы (2.4.1)–(2.4.3) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (2.4.16).

Таким образом, в силу соотношения (2.4.14) первое уравнение системы (2.4.11) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1-\tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)}, \tag{2.4.18}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\}, \tag{2.4.19}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (2.4.17), или вида уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}. \tag{2.4.20}$$

Уравнение (2.4.20) (при помощи (2.4.19)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{2.4.21}$$

Последний факт означает, что можно найти еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (2.4.21) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (2.4.21), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1 - (u_2 - 1)^2} \pm 1] \exp\left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}{1 \pm \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}}\right], \; C = \text{const}\,. \tag{2.4.22}$$

Замечание 2.10. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (2.4.15).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_4}{\sin\alpha}, \frac{w_3}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}\,. \tag{2.4.23}$$

Итак, найдены два первых интеграла (2.4.15), (2.4.23) независимой системы третьего порядка (2.4.1)–(2.4.3). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (2.4.4), (2.4.5) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.4.6).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (2.3.67)–(2.3.69), а именно:

$$\Theta_3(w_2;\beta_2) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3 = \mathrm{const}, \tag{2.4.24}$$

$$\Theta_4(w_1;\beta_1) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4 = \mathrm{const}, \tag{2.4.25}$$

$$\Theta_5(w_2,w_1;\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \beta_3 \pm \operatorname{arctg}\frac{C_4\cos\beta_2}{\sqrt{C_3^2\sin^2\beta_2 - C_4^2}} = C_5 = \mathrm{const}, \tag{2.4.26}$$

при этом в левую часть равенства (2.4.26) вместо C_3, C_4 можно подставить интегралы (2.4.24), (2.4.25).

Теорема 2.8. *Система* (2.4.1)–(2.4.6) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов* (2.4.15), (2.4.23), (2.4.24)–(2.4.26).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20) при условии (2.1.1) имеет 12 инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.3.1), соответствующая аналитическому первому интегралу (2.2.1), циклические первые интегралы вида (1.2.3), (1.2.4), первый интеграл вида (2.4.15), также имеется первый интеграл (2.4.23), который можно найти из уравнения (2.4.21), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (2.4.24)–(2.4.26).

Теорема 2.9. *Система* (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20) *при условиях* (1.3.1), (2.1.1), (1.2.3), (1.2.4) *обладает* 12 *инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.*

2.5. Структура уравнений на касательных расслоениях к конечномерной сфере. Исследование полной системы (2.1.5)–(2.1.12) на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$$

четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ было начато с исследования упрощенной системы (2.3.1)–(2.3.8), которая описывает динамику при отсутствии какого-либо силового поля. Таким образом, коэффициенты в правой части системы (2.3.1)–(2.3.8) носят лишь геометрический смысл и порождаются выбором координат $Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ на касательном расслоении.

Поставим вопрос: как меняются коэффициенты соответствующих систем при индуктивном увеличении размерности $n-1$ сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$? Другими словами, системами какого вида описываются фазовые (геодезические) потоки на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ именно в выбранных нами координатах $Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}$?

Несмотря на то, что (и в этой работе, и в ряде предыдущих работ автора) нами рассмотрена явно структура соответствующих уравнений до $n=5$ включительно, начнем со случая $n=2$. Это позволит произвести индуктивный переход от n к $n+1$ и «конструировать» аналогичные системы любого высокого порядка.

Замечание 2.11 (об аналитических первых интегралах при отсутствии силового поля)**.** При построении систем на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ используется факт наличия в системе следующего набора аналитических первых интегралов:

$$\begin{gathered}
\Phi_1(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) = C_1 = \mathrm{const}, \\
\Phi_2(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \\
\Phi_3(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_{n-2}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \mathrm{const}, \\
\Phi_{n-1}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2 Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}\,.
\end{gathered} \tag{2.5.1}$$

Замечание 2.12. Поскольку в первые интегралы (2.5.1), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой использовать соответствующее вспомогательное уравнение.

Первые интегралы (2.5.1) констатируют тот факт, что, поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняется $n-1$ (вообще говоря, ненулевых) компонент тензора угловой скорости n-мерного твердого тела, а именно:

$$\omega_{r_1} \equiv \omega_{r_1}^0 = \mathrm{const}, \ldots, \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega_{r_{n-1}}^0 = \mathrm{const}\,. \tag{2.5.2}$$

В частности, наличие первого интеграла $\Phi_1(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_1$ из (2.5.1) объясняется равенством

$$n_0^2 v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) = \omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_{n-1}}^2 = \mathrm{const}\,. \tag{2.5.3}$$

При этом первые интегралы (2.5.1) являются функциями от компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$.

2.5.1. Начало при $n = 2$. Итак, при $n = 2$ при наличии вспомогательного уравнения

$$v' = -bvZ_1^2\cos\alpha, \tag{2.5.4}$$

следующая система задает геодезический поток на двумерном цилиндре $T_*\mathbb{S}^1\{Z_1; \alpha\}$ как касательном расслоении одномерной сферы $\mathbb{S}^1\{\alpha\}$:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -Z_1 + bZ_1^2\sin\alpha, \\
Z_1' &= bZ_1^3\cos\alpha,
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

при этом, в силу замечания 2.11, существует естественный первый интеграл

$$v^2 Z_1^2 = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{2.5.6}$$

Уравнение $\alpha' = -Z_1 + bZ_1^2\sin\alpha$ является кинематическим соотношением и задает координаты α, Z_1 в фазовом пространстве системы (2.5.5) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^1\{Z_1; \alpha\}$).

2.5.2. Переход по n: $2 \to 3$. При переходе от $n = 2$ к $n = 3$ производится переобозначение

$$Z_1 \mapsto Z_2,$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 2.1. *При $n = 3$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v' = -bv(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha, \tag{2.5.7}$$

следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1\}$ двумерной сферы $\mathbb{S}^2\{\alpha, \beta_1\}$:

$$\alpha' = -Z_2 + b(\underline{Z_1^2} + Z_2^2)\sin\alpha, \tag{2.5.8}$$

$$Z_2' = \underline{-Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} + bZ_2(\underline{Z_1^2} + Z_2^2)\cos\alpha, \tag{2.5.9}$$

$$\underline{Z_1' = Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha,} \tag{2.5.10}$$

$$\beta_1' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.5.11}$$

при этом, в силу замечания 2.11, *существуют первые интегралы*

$$v^2(Z_1^2 + Z_2^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.5.12}$$

$$v^2(Z_1 \sin\alpha) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{2.5.13}$$

Действительно, в силу (2.5.12) имеем:

$$2v^2(Z_1'Z_1 + Z_2'Z_2) - 2bv^2(Z_1^2 + Z_2^2)^2\cos\alpha = 0,$$

поэтому существует такая функция $N_1(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2)$, что

$$Z_2' = -Z_1 N_1(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha,$$

$$Z_1' = Z_2 N_1(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha,$$

а в силу (2.5.13) должно выполняться равенство (в силу системы (2.5.7)–(2.5.11))

$$v^2(Z_1' \sin\alpha + Z_1\alpha'\cos\alpha - 2bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha\cos\alpha) =$$

$$= v^2(Z_2 N_1(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2)\sin\alpha - Z_1 Z_2 \cos\alpha) = 0,$$

откуда

$$N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2) = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

что и требовалось.

Уравнения (2.5.8), (2.5.11) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2$ в фазовом пространстве системы (2.5.8)–(2.5.11) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1\}$).

2.5.3. Переход по n: $3 \to 4$. При переходе от $n = 3$ к $n = 4$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_3 \\ Z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 2.2. *При $n = 4$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v' = -bv(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha, \tag{2.5.14}$$

следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$$

трехмерной сферы $\mathbb{S}^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$:

$$\alpha' = -Z_3 + b(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2)\sin\alpha, \tag{2.5.15}$$

$$Z_3' = -(Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_3(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha, \tag{2.5.16}$$

$$Z_2' = Z_2 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \underline{Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}} + bZ_2(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha, \tag{2.5.17}$$

$$\underline{Z_1' = Z_1 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha,} \tag{2.5.18}$$

$$\beta_1' = Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.5.19}$$

$$\beta_2' = -Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1}, \tag{2.5.20}$$

при этом, в силу замечания 2.11, *существуют первые интегралы*

$$v^2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)=C_1=\mathrm{const}, \tag{2.5.21}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\alpha=C_2=\mathrm{const}, \tag{2.5.22}$$

$$v^2(Z_1\sin\alpha\sin\beta_1)=C_3=\mathrm{const}\,. \tag{2.5.23}$$

Действительно, в силу (2.5.21), (2.5.22), аналогично доказательству предложения 2.1, находятся подчеркнутые коэффициенты в уравнении (2.5.16), а также делается вывод об уравнениях (2.5.17) и (2.5.18), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}Z_2'=Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3)+bZ_2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\cos\alpha,\\ Z_1'=Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3)+bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\cos\alpha.\end{gathered} \tag{2.5.24}$$

Далее, в силу (2.5.23) должно выполняться равенство (в силу системы (2.5.14)–(2.5.20))

$$\begin{gathered}v^2(Z_1'\sin\alpha\sin\beta_1+Z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1+\\ +Z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1-2bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1)=\\ =v^2Z_1Z_2\cos\alpha[\cos\beta_1-N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3)\sin\beta_1]=0,\end{gathered}$$

откуда

$$N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3)=\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$$

что и требовалось.

Уравнения (2.5.15), (2.5.19), (2.5.20) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3$ в фазовом пространстве системы (2.5.15)–(2.5.20) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^3\{Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$).

2.5.4. Переход по n: $4\to 5$. При переходе от $n=4$ к $n=5$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix}Z_3\\Z_2\\Z_1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}Z_4\\Z_3\\Z_2\end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 2.3. *При $n=5$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v'=-bv(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha, \tag{2.5.25}$$

следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$$

четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$:

$$\alpha'=-Z_4+b(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\sin\alpha, \tag{2.5.26}$$

$$Z_4'=-(Z_3^2+Z_2^2+\underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bZ_4(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha, \tag{2.5.27}$$

$$Z_3'=Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(Z_2^2+\underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+bZ_3(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha, \tag{2.5.28}$$

$$\begin{gathered}Z_2'=Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\underline{Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}}+\\ +bZ_2(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha,\end{gathered} \tag{2.5.29}$$

$$\begin{gathered}\underline{Z_1'=Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+}\\ \underline{+bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha},\end{gathered} \tag{2.5.30}$$

$$\beta_1' = Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.5.31}$$

$$\beta_2' = -Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1}, \tag{2.5.32}$$

$$\beta_3' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2}, \tag{2.5.33}$$

при этом, в силу замечания 2.11, *существуют первые интегралы*

$$v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.5.34}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{2.5.35}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{2.5.36}$$

$$v^2(Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2) = C_4 = \mathrm{const}\,. \tag{2.5.37}$$

Действительно, в силу (2.5.34)–(2.5.36) аналогично доказательству предложений 2.1, 2.2 находятся подчеркнутые коэффициенты в уравнениях (2.5.27), (2.5.28), а также делается вывод об уравнениях (2.5.29) и (2.5.30), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
Z_2' &= Z_2 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\
&\quad - Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_3(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4) + bZ_2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha, \\
Z_1' &= Z_1 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\
&\quad + Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_3(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4) + bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha.
\end{aligned} \tag{2.5.38}$$

Далее, в силу (2.5.37) должно выполняться равенство (в силу системы (2.5.25)–(2.5.33))

$$\begin{gathered}
v^2(Z_1'\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + Z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + Z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2 + \\
+ Z_1\beta_2'\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - 2bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2) = \\
= v^2 z_1 z_2\cos\alpha[N_3(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4)\sin\beta_1\sin\beta_2 - \cos\beta_2] = 0,
\end{gathered}$$

откуда

$$N_3(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4) = \frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},$$

что и требовалось.

Уравнения (2.5.26), (2.5.31)–(2.5.33) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4$ в фазовом пространстве системы (2.5.26)–(2.5.33) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$).

2.5.5. Переход по n: $5 \to 6$. При переходе от $n = 5$ к $n = 6$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_5 \\ Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 2.4. *При $n = 6$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v' = -bv(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2)\cos\alpha, \tag{2.5.39}$$

следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^5\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$$

пятимерной сферы $\mathbb{S}^5\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$:

$$\alpha' = -Z_5 + b(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\sin\alpha, \tag{2.5.40}$$

$$Z_5' = -(Z_4^2 + Z_3^2 + Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_5(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha, \tag{2.5.41}$$

$$Z_4' = Z_4Z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_3^2 + Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_4(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha, \tag{2.5.42}$$

$$\begin{gathered} Z_3' = Z_3Z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ -(Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_3(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.5.43}$$

$$\begin{gathered} Z_2' = Z_2Z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ \underline{+Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3}} + bZ_2(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.5.44}$$

$$\begin{gathered} \underline{Z_1' = Z_1Z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} -} \\ \underline{-Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha,} \end{gathered} \tag{2.5.45}$$

$$\beta_1' = Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.5.46}$$

$$\beta_2' = -Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{2.5.47}$$

$$\beta_3' = Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{2.5.48}$$

$$\beta_4' = -Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3}, \tag{2.5.49}$$

при этом, в силу замечания 2.11, *существуют первые интегралы*

$$v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.5.50}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{2.5.51}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{2.5.52}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{2.5.53}$$

$$v^2(Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3) = C_5 = \mathrm{const}\,. \tag{2.5.54}$$

Действительно, в силу (2.5.50)–(2.5.53) аналогично доказательству предложений 2.1–2.3 находятся подчеркнутые коэффициенты в уравнениях (2.5.41)–(2.5.43), а также делается вывод об уравнениях (2.5.44) и (2.5.45), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} Z_2' &= Z_2Z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ &+ Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5) + \\ &+ bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha, \\ Z_1' &= Z_1Z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - \\ &- Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5) + \\ &+ bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2.5.55}$$

Далее, в силу (2.5.54) должно выполняться равенство (в силу системы (2.5.39)–(2.5.49))

$$v^2(Z_1'\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+Z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+Z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+$$
$$+Z_1\beta_2'\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3+Z_1\beta_3'\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-$$
$$-2bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3)=$$
$$=v^2Z_1Z_2\cos\alpha[\cos\beta_3-N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,z_5)\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3]=0,$$

откуда

$$N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5)=\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3},$$

что и требовалось.

Уравнения (2.5.40), (2.5.46)–(2.5.49) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5$ в фазовом пространстве системы (2.5.40)–(2.5.49) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^5\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$).

2.5.6. Переход по n: $n\to n+1$. При индуктивном переходе от n к $n+1$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1}\\ Z_{n-2}\\ \dots\\ Z_1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} Z_{n}\\ Z_{n-1}\\ \dots\\ Z_2\end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 2.5. *При $n>2$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v'=-bv(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)\cos\alpha, \tag{2.5.56}$$

следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^n\{Z_n,Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$$

n-мерной сферы $\mathbb{S}^n\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$:

$$\alpha'=-Z_n+b(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha, \tag{2.5.57}$$

$$Z_n'=-(Z_{n-1}^2+\ldots+Z_2^2+\underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bZ_n(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha, \tag{2.5.58}$$

$$Z_{n-1}'=Z_{n-1}Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(Z_{n-2}^2+\ldots+Z_2^2+\underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$
$$+bZ_{n-1}(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha, \tag{2.5.59}$$

$$Z_{n-2}'=Z_{n-2}Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-$$
$$-(Z_{n-3}^2+\ldots+Z_2^2+\underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+bZ_{n-2}(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha, \tag{2.5.60}$$

. . . .

$$Z_2'=Z_2Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_2Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_2Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+\ldots+(-1)^{n+1}Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\cdots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}}+$$
$$\underline{+(-1)^{n+1}Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\cdots\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}}}+bZ_2(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha, \tag{2.5.61}$$

$$\underline{Z_1'=Z_1Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\ldots+}$$

$$
\frac{\dfrac{+(-1)^{n+1}Z_1Z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dots\dfrac{1}{\sin\beta_{n-4}}\dfrac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}}+}{}}{}
$$

$$
\underline{+(-1)^{n}Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\dots\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}}+bZ_1(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha,} \tag{2.5.62}
$$

$$
\beta_1' = Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.5.63}
$$

$$
\beta_2' = -Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{2.5.64}
$$

$$
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
$$

$$
\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1}Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-3}}, \tag{2.5.65}
$$

$$
\beta_{n-1}' = (-1)^{n}Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2}}, \tag{2.5.66}
$$

при этом, в силу замечания 2.11, *существуют первые интегралы*

$$
v^2(Z_1^2+\ldots+Z_n^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.5.67}
$$

$$
v^2\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{2.5.68}
$$

$$
v^2\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{2.5.69}
$$

$$
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
$$

$$
v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}, \tag{2.5.70}
$$

$$
v^2(Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}\,. \tag{2.5.71}
$$

Действительно, в силу (2.5.67)–(2.5.70) аналогично доказательству предложений 2.1–2.4 находятся подчеркнутые коэффициенты во всех уравнениях до (2.5.61) и (2.5.62), а также делается вывод об уравнениях (2.5.61) и (2.5.62), которые будут иметь следующий вид:

$$
\begin{aligned}
Z_2' &= Z_2z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_2Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\ldots+\\
&+(-1)^{n+1}Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\dots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}}+\\
&+(-1)^{n+1}Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n)+bZ_2(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha,\\
Z_1' &= Z_1Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\ldots+\\
&+(-1)^{n+1}Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\dots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}}+\\
&+(-1)^{n}Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n)+bZ_1(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha.
\end{aligned} \tag{2.5.72}
$$

Далее, в силу (2.5.71) должно выполняться равенство (в силу системы (2.5.56)–(2.5.66))

$$
\begin{gathered}
v^2(Z_1'\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2}+Z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2}+Z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\dots\sin\beta_{n-2}+\ldots\\
\ldots+Z_1\beta_{n-3}'\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-4}\cos\beta_{n-3}\sin\beta_{n-2}+Z_1\beta_{n-2}'\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2}-\\
-2bZ_1(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2}) =\\
=(-1)^{n+1}v^2Z_1Z_2\cos\alpha[\cos\beta_{n-2}-N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n)\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2}]=0,
\end{gathered}
$$

откуда

$$
N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n) = \frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\dots\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}},
$$

что и требовалось.

Уравнения (2.5.57), (2.5.63)–(2.5.66) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, Z_1, \ldots, Z_n$ в фазовом пространстве системы (2.5.57)–(2.5.66) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^n\{Z_n, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$).

3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Как видно из предыдущего раздела, мы закончили начало индукции по n при $n = 5$ (был совершен переход с $n = 5$ на $n = 6$). Таким образом, после доказательства корректности перехода с $n > 2$ на $n + 1$, доказательство об общей структуре динамических систем, описывающих геодезические потоки разной размерности, можно считать законченным.

И в заключительном разделе работы будем рассматривать наиболее общий случай, параллельно указывая на особенности случая $n = 5$.

3.1. Введение зависимости от угловой скорости и приведенная система. Данная глава продолжает изучать динамику n-мерного твердого тела в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на $(n-1)$-мерный диск (задаваемый равенством $x_{1N} = 0$), $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно (см. [12, 13]).

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{3.1.1}$$

где $R = (R_1, \ldots, R_n)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}\Omega h, \;\; h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \ldots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{3.1.2}$$

Здесь Ω — тензор угловой скорости, $(h_1, \ldots, h_n)$ — некоторые положительные параметры (ср. с [25, 28, 29]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} \equiv 0$, то

$$x_{2N} = Q_2 - h_1\frac{\omega_{r_{n-1}}}{v}, \;\; x_{3N} = Q_3 + h_1\frac{\omega_{r_{n-2}}}{v}, \;\; \ldots, \;\; x_{nN} = Q_n + (-1)^{n+1}h_1\frac{\omega_{r_1}}{v}. \tag{3.1.3}$$

Здесь $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ — оставшиеся, вообще говоря, ненулевые компоненты тензора угловой скорости Ω.

В частности, при $n = 5$ имеем:

$$x_{2N} = Q_2 - h_1\frac{\omega_{10}}{v}, \quad x_{3N} = Q_3 + h_1\frac{\omega_9}{v}, \quad x_{4N} = Q_4 - h_1\frac{\omega_7}{v}, \quad x_{5N} = Q_5 + h_1\frac{\omega_4}{v}. \tag{3.1.4}$$

3.2. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [42, 43]), пользуясь (1.4.11), имеем:

$$Q = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \tag{3.2.1}$$

а динамические функции s, x_{2N}, $\ldots$, x_{nN} примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = Q - \frac{1}{v}\Omega h, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{3.2.2}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости). Причем $h_2 = \ldots = h_n$ в силу динамической симметрии тела.

При этом функции

$$\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v\right),\quad \Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v\right),\quad s=1,\ldots,n-2,$$

входящие в систему (1.4.14)–(1.4.21), примут следующий вид:

$$\begin{gathered}\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=A\sin\alpha-\frac{h_1}{v}z_{n-1},\\ \Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\frac{h_1}{v}z_{n-2},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(-1)^{n+1}\frac{h_1}{v}z_1.\end{gathered}\tag{3.2.3}$$

Тогда, благодаря условиям (1.3.1), (3.2.2), преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.4.13)–(1.4.21)) примет вид аналитической системы

$$v'=v\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z),\tag{3.2.4}$$

$$\alpha'=-Z_{n-1}+b\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha-bH_1Z_{n-1}\cos^2\alpha,\tag{3.2.5}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-1}=\sin\alpha\cos\alpha-(1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-2}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\ +bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha+\\ +bH_1Z_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_{n-1}\cos\alpha,\end{gathered}\tag{3.2.6}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-2}=(1+bH_1)Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-3}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\\ +bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha+\\ +bH_1Z_{n-2}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_{n-2}\cos\alpha,\end{gathered}\tag{3.2.7}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-3}=(1+bH_1)Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-(1+bH_1)Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\\ -(1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-4}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\ +bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha+\\ +bH_1Z_{n-3}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_{n-3}\cos\alpha,\end{gathered}\tag{3.2.8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{gathered}Z'_1=(1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+\\ +bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha+\\ +bH_1Z_1Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha-H_1Z_1\cos\alpha,\end{gathered}\tag{3.2.9}$$

$$\beta'_1=(1+bH_1)Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\tag{3.2.10}$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1)Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{3.2.11}$$

. . . .

$$\beta_{n-3}' = (-1)^n(1 + bH_1)Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{3.2.12}$$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1}(1 + bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{3.2.13}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z) = -b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha,$$

при этом выбираем, как и выше, безразмерные параметры b, H_1 и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh_1}{(n-2)I_2n_0}, \quad n_1 = n_0. \tag{3.2.14}$$

Итак, система (3.2.4)–(3.2.13) может рассматриваться на своем фазовом $2(n-1)+1$-мерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}^1_+\{v\} \times T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}\}, \tag{3.2.15}$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к $(n-1)$-мерной сфере.

Видно, что в системе (3.2.4)–(3.2.13) порядка $2(n-1)+1$ образовалась независимая система (3.2.5)–(3.2.13) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. При этом в независимой системе (3.2.5)–(3.2.13) порядка $2(n-1)$ образовалась еще одна независимая система (3.2.5)–(3.2.12) порядка $2n-3$ на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *У динамической части уравнений движения при условиях* (1.2.1), (1.2.3)–(1.3.1) *выделяется динамическая система* (1.4.14)–(1.4.21) *на касательном расслоении*

$$T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. В частности, при условии (3.2.2) *выделяется система* (3.2.5)–(3.2.13).

3.3. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.3.1) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.4.1)–(1.4.8) (при условии (1.3.3)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, z_1, \ldots, z_{n-1}) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2) - 2\sigma z_{n-1}v\sin\alpha = V_C^2 \tag{3.3.1}$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины $z_1, \ldots, z_{n-1}$ выбираются в силу (1.3.5)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (3.2.4)–(3.2.13) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha) = V_C^2 \tag{3.3.2}$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (3.3.2) позволяет, не решая системы (3.2.4)–(3.2.13), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно, при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha}. \tag{3.3.3}$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (3.2.4)–(3.2.13) существуют асимптотические предельные множества, то равенство (3.3.2) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (3.2.4)–(3.2.13) во всем фазовом пространстве (ср. с [80, 82, 84]).

Таким образом, в силу отделения уравнения на величину v, а также наличия аналитического первого интеграла (3.3.2), система (3.2.5)–(3.2.13) может рассматриваться самостоятельно на своем фазовом пространстве.

3.4. Полный список первых интегралов при любом конечном n. Для полного интегрирования системы (3.2.5)–(3.2.13) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n для интегрирования систем.

Действительно, после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \dots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \dots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$w_{n-1} = Z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}, \quad w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_{n-4} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \ \ldots, \tag{3.4.1}$$
$$w_2 = \frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}},$$

система (3.2.5)–(3.2.13) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -(1 + bH_1)w_{n-1} + b\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\sin\alpha +$$
$$+ b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_{n-1}\cos^2\alpha, \tag{3.4.2}$$

$$w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\cos\alpha -$$
$$- bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-1}\cos\alpha, \tag{3.4.3}$$

$$w'_{n-2} = (1 + bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\cos\alpha -$$
$$- bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-2}\cos\alpha, \tag{3.4.4}$$

$$\begin{gathered} w'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\frac{1 + w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \ s = 1, \ldots, n-3, \end{gathered} \tag{3.4.5}$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{3.4.6}$$

где выполнены условия

$$\begin{aligned} &d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = (1 + bH_1)Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ &d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = -(1 + bH_1)Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ &= (-1)^{n+1}(1 + bH_1)Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1), \quad k = 1, \ldots, n-2, \tag{3.4.8}$$

— функции в силу замены (3.4.1).

Видно, что система (3.4.2)–(3.4.6) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (3.4.2)–(3.4.4) — третьего, а системы (3.4.5) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (3.4.2)–(3.4.6) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.4.2)–(3.4.4), по одному для систем (3.4.5) (всего $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.6) (т.е. *всего* n).

Сначала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (3.4.2)–(3.4.4) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{gathered}\frac{dw_{n-1}}{d\alpha}=\frac{R_2(\alpha,w_{n-2},w_{n-1})}{-w_{n-1}+b(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha-bH_1w_{n-1}\cos^2\alpha},\\ \frac{dw_{n-2}}{d\alpha}=\frac{R_1(\alpha,w_{n-2},w_{n-1})}{-w_{n-1}+b(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha-bH_1w_{n-1}\cos^2\alpha},\end{gathered}\tag{3.4.9}$$

$$R_2(\alpha,w_{n-2},w_{n-1})=\sin\alpha\cos\alpha+bw_{n-1}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha-bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha-$$
$$-(1+bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bH_1w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha-H_1w_{n-1}\cos\alpha,$$
$$R_1(\alpha,w_{n-2},w_{n-1})=bw_{n-2}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha-bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha+$$
$$+(1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bH_1w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha-H_1w_{n-2}\cos\alpha.$$

Используя замену $\tau=\sin\alpha$, перепишем систему (3.4.9) в алгебраическом виде

$$\begin{gathered}\frac{dw_{n-1}}{d\tau}=\\ =\frac{\tau+bw_{n-1}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)-bw_{n-1}\tau^2-(1+bH_1)w_{n-2}^2/\tau+bH_1w_{n-1}^2\tau-H_1w_{n-1}}{-w_{n-1}+b\tau(1-\tau^2)+b\tau(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)-bH_1w_{n-1}(1-\tau^2)},\\ \frac{dw_{n-2}}{d\tau}=\\ =\frac{bw_{n-2}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)-bw_{n-2}\tau^2+(1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}/\tau+bH_1w_{n-2}w_{n-1}\tau-H_1w_{n-2}}{-w_{n-1}+b\tau(1-\tau^2)+b\tau(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)-bH_1w_{n-1}(1-\tau^2)}.\end{gathered}\tag{3.4.10}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-2}=u_1\tau,\ w_{n-1}=u_2\tau,\tag{3.4.11}$$

приводим систему (3.4.10) к следующему виду:

$$\begin{gathered}\tau\frac{du_2}{d\tau}+u_2=\frac{1-bu_2\tau^2+bu_2(u_1^2+u_2^2)\tau^2-(1+bH_1)u_1^2-H_1u_2+bH_1u_2^2\tau^2}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau}+u_1=\frac{bu_1(u_1^2+u_2^2)\tau^2-bu_1\tau^2+(1+bH_1)u_1u_2-H_1u_1+bH_1u_1u_2}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)},\end{gathered}\tag{3.4.12}$$

что эквивалентно

$$\begin{gathered}\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)u_1^2}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau}=\frac{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}.\end{gathered}\tag{3.4.13}$$

Сопоставим системе второго порядка (3.4.13) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)u_1^2}{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1},\tag{3.4.14}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1+bH_1)u_2^2+(1+bH_1)u_1^2-(b+H_1)u_2+1}{u_1}\right)=0.\tag{3.4.15}$$

Итак, уравнение (3.4.14) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1+bH_1)u_2^2+(1+bH_1)u_1^2-(b+H_1)u_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const},\tag{3.4.16}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{(1+bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}\,. \quad (3.4.17)$$

Замечание 3.1. Рассмотрим систему (3.4.2)–(3.4.4) с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [37, 57, 59, 61]), становящейся консервативной при $b = H_1$:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -(1+b^2)w_{n-1} + b\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\sin\alpha + \\ &\quad + b\sin\alpha\cos^2\alpha - b^2 w_{n-1}\cos^2\alpha, \\ w_{n-1}' &= \sin\alpha\cos\alpha - (1+b^2)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\cos\alpha - \\ &\quad - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + b^2 w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - bw_{n-1}\cos\alpha, \\ w_{n-2}' &= (1+b^2)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\cos\alpha - \\ &\quad - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + b^2 w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - bw_{n-2}\cos\alpha. \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1+b^2)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - 2bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha = C_1^* = \mathrm{const}, \quad (3.4.19)$$

$$w_{n-2}\sin\alpha = C_2^* = \mathrm{const}\,. \quad (3.4.20)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.4.19), (3.4.20) также является первым интегралом системы (3.4.18). Но при $b \neq H_1$ каждая из функций

$$(1+bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha \quad (3.4.21)$$

и (3.4.20) по отдельности не является первым интегралом системы (3.4.2)–(3.4.4). Однако отношение функций (3.4.21), (3.4.20) является первым интегралом системы (3.4.2)–(3.4.4) при любых b, H_1.

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.4.2)–(3.4.4). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.4.16) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1+bH_1)}\right)^2 = \frac{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1+bH_1)^2}. \quad (3.4.22)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \quad (3.4.23)$$

и фазовое пространство системы (3.4.2)–(3.4.4) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.4.22).

Таким образом, в силу соотношения (3.4.16), первое уравнение системы (3.4.13) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - (b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1-\tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2) - bH_1u_2(1-\tau^2)}, \quad (3.4.24)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1+bH_1)(1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2)}\}; \quad (3.4.25)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.4.23), или вида уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b-(1+bH_1)u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2 - H_1u_2)}{1 - (b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}. \quad (3.4.26)$$

Уравнение (3.4.26) (при помощи (3.4.25)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1+bH_1)u_2 - b)p + 2b(1 - H_1u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2))}{1 - (b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (3.4.27)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (3.4.27) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (3.4.27), даже в частном случае

$$|b - H_1| = 2, \quad C_1 = \frac{1 - A_1^4}{1 + A_1^4}, \quad A_1 = \frac{1}{2}(b + H_1)$$

имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[1 - A_1 u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \mp C_1} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times$$
$$\times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1 + A_1^4) A_1 (A_1 u_2 - 1)}, \quad C = \mathrm{const}\,. \tag{3.4.28}$$

Замечание 3.2. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.4.17).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}\,. \tag{3.4.29}$$

Итак, найдены два первых интеграла (3.4.17), (3.4.29) независимой системы третьего порядка (3.4.2)–(3.4.4). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (3.4.5) (их всего $n-3$), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.6).

Действительно, искомые первые интегралы имеют следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{3.4.30}$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C''_n = \mathrm{const}, \tag{3.4.31}$$

при этом в левую часть равенства (3.4.31) вместо C_{n-2}, C_{n-1} можно подставить интегралы (3.4.30) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 3.2. *Система* (3.4.2)–(3.4.6) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов* (3.4.17)*,* (3.4.29)*,* (3.4.30)*,* (3.4.31)*.*

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений общего случая при условии (3.2.2) имеет

$$1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 4}{2}, \ n > 2,$$

инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.3.1), соответствующая аналитическому первому интегралу (2.2.1), циклические первые интегралы вида (1.2.2), первый интеграл вида (3.4.17), также имеется первый интеграл (3.4.29), который может быть найден из уравнения (3.4.27), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (3.4.30), (3.4.31).

3.5. Топологические аналогии. Мы имеем следующие топологичекие и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение свободного n-мерного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).
2) Движение закрепленного n-мерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).
3) Вращение n-мерного твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [7, 8, 18, 20, 24, 64, 66, 73, 77].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Группы цветов// Совр. мат. прилож. — 2009. — *62.* — С. 15–27.
2. *Андронов А. А.* Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
3. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы// Докл. СССР. — 1937. — *14*, № 5. — С. 247–250.
4. *Белецкий В. В., Яншин А. М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. — Киев: Наукова думка, 1984.
5. *Беляев А. В.* О движении многомерного тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести// Мат. сб. — 1981. — *114*, № 3. — С. 465–470.
6. *Бендиксон И.* О кривых определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9.* — С. 119–211.
7. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. — М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
8. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
9. *Браилов А. В.* Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения// Докл. АН СССР. — 1983. — *268*, № 5. — С. 1043–1046.
10. *Бурбаки Н.* Интегрирование. — М.: Наука, 1970.
11. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.
12. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика продольного и бокового движения. — М.: Машиностроение, 1969.
13. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика самолета. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1988.
14. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
15. *Вишик С. В., Должанский С. Ф.* Аналоги уравнений Эйлера–Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли// Докл. АН СССР.. — *238*, № 5. — С. 1032–1035.
16. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
17. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
18. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5.* — С. 37–41.
19. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Валерий Владимирович Трофимов// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 5–15.
20. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76.* — С. 22–39.
21. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1973.
22. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
23. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
24. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
25. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — *3.* — С. 23–27.
26. *Иванова Т. А.* Об уравненийя Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
27. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
28. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
29. *Кулешов А. С., Черняков Г. А.* Исследование задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости с помощью алгоритма Ковачича// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *145.* — С. 3–85.

30. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
31. *Ляпунов А. М.* Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости// в кн.: Собр. соч.. — М.: Изд-во АН СССР, 1954. — Т. I. — С. 320–324.
32. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
33. *Окунев Ю. М., Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов комплексных неавтономных уравнений// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65*. — С. 121–130.
34. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
35. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
36. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
37. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1989. — *3*. — С. 51–54.
38. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 1. — С. 113–185.
39. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. — Харьков, 1893.
40. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
41. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
42. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — Т. 1. — С. 133–135.
43. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
44. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
45. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
46. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
47. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
48. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
49. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
50. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — *5*. — С. 22–28.
51. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4)\times\mathbb{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
52. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 4. — С. 482–485.
53. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
54. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела// Докл. РАН. — 2010. — *431*, № 3. — С. 339–343.

57. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
58. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
59. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
60. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
61. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
62. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2013. — *125*. — С. 3–251.
63. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
64. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
65. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
66. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в пространственной динамике твердого тела в неконсервативном поле сил// Тр. семин. им. И. Г. Петровского — 2014. — *30*. — С. 287–350.
67. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
68. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
69. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле// Докл. РАН. — 2015. — *460*, № 2. — С. 165–169.
70. *Шамолин М. В.* Новый случай полной интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2015. — *3*. — С. 11–14.
71. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
72. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
73. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
74. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы в динамике на касательном расслоении к сфере// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2016. — № 2. — С. 25–30.
75. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Тр. семин. им. И. Г. Петровского — 2016. — *31*. — С. 257–323.
76. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2016. — *470*, № 3. — С. 288–292.
77. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 5. — С. 547–551.
78. *Шамолин М. В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Часть 1// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2017. — *134*. — С. 6–128.
79. *Шамолин М. В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Часть 2// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2017. — *135*. — С. 3–93.
80. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
81. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.

82. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
83. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
84. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
85. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемой системы с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2018. — *3*. — С. 34–43.
86. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
87. *Tikhonov A. A., Tkhai V. N.* Symmetric oscillations of charged gyrostat in weakly elliptical orbit with small inclination// Nonlinear Dynamics — 2016. — *85*, № 3. — P. 1919–1927.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (МГУ)
E-mail: `shamolin@rambler.ru`, `shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 119–128
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-119-128

УДК 517.925

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОКОЛО СИНГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

© 2020 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Предложена методика исследования систем возле сингулярных особых точек, т.е. точек, в окрестности которых невозможно разложить в ряд векторное поле системы. Применяются методы теории многомерных топографических систем Пуанкаре для поиска притягивающих режимов в системе.

Ключевые слова: динамическая система, сингулярная особая точка, предельный цикл.

LIMIT SETS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS NEAR SINGULAR CRITICAL POINTS

© 2020 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. We suggest a method of the study of dynamical systems near singular critical points, i.e., points in whose neighborhoods the vector field of the system cannot be expanded into a series. We apply methods of the theory of multidimensional topographic Poincaré systems for the search of attracting regimes in the system.

Keywords and phrases: dynamical system, singular critical point, limit cycle.

AMS Subject Classification: 34C07, 37G10

Введение. Классические методы нахождения замкнутых траекторий систем обыкновенных дифференциальных уравнений около (регулярных) особых точек восходят к работам А. Пуанкаре (1892 г.; см. [20]). Позже исследования по данному вопросу были продолжены в работах А. А. Андронова [1,2], Хопфа [50] и других авторов (например, известная бифуркация рождения цикла из слабого фокуса).

Отличительной особенностью работ отмеченных авторов является исследование окрестностей векторных полей систем именно около регулярной особой точки, т.е. там, где правые части систем имеют достаточное количество непрерывных производных (см. также [3, 5, 7]).

В работе предлагается некоторая методика исследования систем возле сингулярных особых точек, в окрестности которых по некоторым причинам невозможно разложить в ряд векторное поле системы. Применяются методы теории многомерных топографических систем Пуанкаре.

Работа посвящена исследованию систем обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка около сингулярных особых точек, т.е. точек, лежащих на многообразиях, на которых векторные поля систем не определены. Изучаются возможности существования замкнутых орбит или более общих предельных множеств, многообразие типов которых обеспечено достаточно высоким (третьим) порядком самих систем (см. также [4, 6, 9]).

Предполагается наличие интегральной плоскости вблизи сингулярной особой точки, что естественно, поскольку при понижении порядка системы до второго имеющиеся особенности правых частей в данной точке, как правило, исчезают. Рассматриваемая ситуация часто встречается в приложениях.

Указывается на тесную связь полученных методов исследования с методом многомерных топографических систем Пуанкаре и продолжается деятельность по развитию этого метода, начатого в предыдущих работах автора (см. [25,26,28,29,34,36,42]). Для маятниковых систем определенного вида (встречающихся, кстати, в динамике твердого тела) указан явный вид семейства поверхностей трехмерных топографических систем, позволяющих «отлавливать» предельные множества.

1. Некоторые типы особенностей. Предположим, что плоскость

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 = 0\} \tag{1}$$

является интегральной для системы с гладкими правыми частями

$$\begin{cases} \dot x_1 = X_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot x_2 = X_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot x_3 = X_3(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \tag{2}$$

и после формального доопределения последней на всей плоскости (1) получаем независимую подсистему второго порядка

$$\begin{cases} \dot x_1 = \Phi_1(x_1, x_2), \\ \dot x_2 = \Phi_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{3}$$

при этом

$$X_1(x_1, x_2, 0) = \Phi_1(x_1, x_2), \quad X_2(x_1, x_2, 0) = \Phi_2(x_1, x_2), \quad X_3(x_1, x_2, 0) \equiv 0.$$

Предположим также, что у системы (2) существует изолированная особая точка (начало координат). При этом на плоскости $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = 0\}$ правая часть системы, вообще говоря, не определена, например, в правой части присутствует особенность типа $f(x_1, x_2, x_3)/x_1$, где $f(x_1, x_2, x_3)$ — достаточно гладкая функция около начала координат.

В приложениях могут возникать случаи, когда правая часть системы возле особой точки или не имеет производных, или их нахождение сильно затруднительно, поскольку возникает проблема «доопределения по непрерывности» правых частей системы в самих особых точках.

2. Пример из динамики. Если на плоскости (1) у системы (3) вблизи начала координат есть предельный цикл, то возникает вопрос: появятся ли у общей системы третьего порядка в области

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 > 0, \ x_3 > 0\}$$

какие-либо нетривиальные предельные множества? В общем случае данный вопрос достаточно сложный, но, используя трехмерную топографическую систему Пуанкаре [34] как совокупность (двумерных) поверхностей уровня функции

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^{2k} + x_2^{2k} + x_3^{2k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

вблизи начала координат и исследуя знак скалярного произведения

$$\big(\operatorname{grad} V(x_1, x_2, x_3), v(x_1, x_2, x_3)\big),$$

где $v = v(x_1, x_2, x_3)$ — векторное поле исследуемой системы третьего порядка, можно «поймать» предельные циклы не только вблизи особой точки.

Рассмотрим сначала пример системы третьего порядка, возникающей в динамике твердого тела в неконсервативном поле (см. [37, 38, 40]). Систему

$$\begin{cases} \dot\alpha = -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + \sigma n_0^2 \sin\alpha\cos^2\alpha + \dfrac{B}{m}\sin\alpha\cos\alpha, \\ \dot Z_2 = n_0^2 \sin\alpha\cos\alpha - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot Z_1 = -Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \sigma, n_0, B, m > 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + \sigma n_0^2 \sin^2\alpha\cos\alpha - \frac{B}{m}\cos^2\alpha$$

рассмотрим в слое

$$\Pi_{(0,\pi)} = \big\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 :\ Z_1 > 0,\ 0 < \alpha < \pi\big\}.$$

Если формально систему (4) доопределить по непрерывности при $Z_1 = 0$, то плоскость $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 :\ Z_1 = 0\}$ является интегральной. На ней «отщепившаяся» система второго порядка

$$\begin{cases} \dot\alpha = -\Omega + \sigma\Omega^2\sin\alpha + \sigma n_0^2 \sin\alpha\cos^2\alpha + \dfrac{B}{m}\sin\alpha\cos\alpha, \\ \dot\Omega = n_0^2\sin\alpha\cos\alpha + \Omega\{\sigma\Omega^2\cos\alpha - \sigma n_0^2\sin^2\alpha\cos\alpha + \dfrac{B}{m}\cos^2\alpha\} \end{cases} \tag{5}$$

на двумерном цилиндре $\{(\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 :\ \alpha \bmod 2\pi\}$ имеет бесконечное число топологически различных фазовых портретов (см. [30, 32]), и при некоторых условиях вокруг точки $(\pi, 0)$ могут возникнуть предельные циклы (см. [32]).

Возникает вопрос: появятся ли у системы (4) в слое $\Pi_{(0,\pi)}$ около особой точки $(\pi, 0, 0)$ какие-либо замкнутые траектории или, вообще говоря, предельные множества?

Воспользуемся методом многомерных топографических систем Пуанкаре (см. [34]). Рассмотрим поверхность уровня (топографическую систему) неотрицательной функции (Ляпунова)

$$V_0(\alpha, Z_1, Z_2) = Z_1^2 + Z_2^2 + n_0^2\sin^2\alpha$$

во всем пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$. Поверхности уровня функции V_0 заполняются фазовыми траекториями системы

$$\begin{cases} \dot\alpha = -Z_2, \\ \dot Z_2 = n_0^2\sin\alpha\cos\alpha - Z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot Z_1 = Z_1 Z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{cases}$$

которую рассматриваем в качестве системы сравнения для (4).

Скалярное произведение градиента $\operatorname{grad} V_0(\alpha, Z_1, Z_2)$ на векторное поле системы (4) в координатах (α, Z_1, Z_2) является знакопеременной характеристической функцией $\chi(\alpha, Z_1, Z_2)$ и равно

$$2(Z_1^2 + Z_2^2)\left[\sigma(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + \frac{B}{m}\cos^2\alpha\right] + 2\sigma n_0^4\sin^2\alpha\cos^3\alpha + 2\frac{B}{m}n_0^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Так, например, в слое

$$\Pi_{(0,\pi/2)} = \big\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 :\ Z_1 > 0,\ 0 < \alpha < \pi/2\big\}$$

функция $\chi(\alpha, Z_1, Z_2)$ строго положительна, а в слое

$$\Pi_{(\pi/2,\pi)} = \big\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 :\ Z_1 > 0,\ \pi/2 < \alpha < \pi\big\}$$

она может менять знак. Действительно, если $\sigma n_0 < 2$, то при условии $2B/(mn_0) = \sigma n_0 + \varepsilon$, где ε — малое положительное число, происходит следующее. В некоторой малой окрестности точки $(\pi, 0, 0)$ характеристическая функция χ положительно определена (см. [34]), что и подтверждает отталкивающий характер (сингулярной) особой точки $(\pi, 0, 0)$. Но при этом существует такой сферический слой, в который через его внутреннюю и внешнюю границы фазовые траектории системы (4) только входят. Поскольку вблизи $(\pi, 0, 0)$ других особых точек системы (4) нет, в рассматриваемой сферическом слое существует нетривиальное ω-предельное множество. Можно показать, что в данном случае это предельное множество — притягивающий предельный цикл.

3. Более общий случай системы третьего порядка. Приведенные рассуждения распространяются и на более общий случай маятниковых систем вида

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -x_1 + \delta F_\varphi(\varphi, x_1, x_2), \\ \dot{x}_1 = F(\varphi) - x_2^2 \operatorname{ctg}\varphi + \delta F_1(\varphi, x_1, x_2, \operatorname{ctg}\varphi), \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 \operatorname{ctg}\varphi + \delta F_2(\varphi, x_1, x_2, \operatorname{ctg}\varphi), \end{cases}$$

где $F'(0) > 0$, $F_i(s_1, s_2, s_3, s_4)$ — гладкие функции (вблизи начала координат), $\partial F_i(s_1, s_2, s_3, s_4)/\partial s_4$ — полиномы по s_4 степени s^i, $i = 1, 2$, $\delta \in \mathbb{R}$. При этом функцию V следует искать в виде

$$V = f_\varphi(\varphi, x_1, x_2)\sin^2\varphi + f_1(\varphi, x_1, x_2)x_1^{2k} + f_2(\varphi, x_1, x_2)x_2^{2k},$$

при этом f_φ, f_1, f_2 — гладкие положительные функции и $2k \geqslant s + 1$, $s = \max\limits_{i=1,2} s^i$, $k \in \mathbb{N}$.

4. Системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. Рассмотрим следующую систему порядка $2(n-1)$ (см. также [47]):

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_{n-1} + bg(\alpha), \\ \dot{z}_{n-1} = F(\alpha) - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)f(\alpha), \\ \dot{z}_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}f(\alpha) + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)f(\alpha), \\ \dot{z}_{n-3} = z_{n-3}z_{n-1}f(\alpha) - z_{n-3}z_{n-2}f(\alpha)\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - (z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2)f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{z}_1 = z_1 f(\alpha)\left\{\displaystyle\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = z_{n-2}f(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = -z_{n-3}f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{\beta}_{n-2} = (-1)^{n+1}z_1 f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \end{cases} \tag{7}$$

с параметром $b \geqslant 0$, на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ к $(n-1)$-мерной сфере

$$\mathbb{S}^{n-1}\bigl\{(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}):\ 0 \leqslant \alpha, \beta_1,\ \ldots,\ \beta_{n-3} \leqslant \pi,\ \beta_{n-2} \bmod 2\pi\bigr\}.$$

Функции $F(\alpha)$, $f(\alpha)$, и $g(\alpha)$ — периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$.

Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — силовое поле. Первое уравнение системы (6) и система (7) задают координаты в касательном пространстве к сфере (являются обобщенными кинематическими соотношениями). При этом система (6), (7) без последнего уравнения является независимой подсистемой порядка $2n-3$ (ввиду цикличности переменной β_{n-2}).

Видно, что, поскольку мы имеем дело с конечномерной сферой, то функция $f(\alpha)$ в точках вырождения сферических координат (в классических обозначениях это северный и южный полюса сферы — точки $\alpha = 0 \bmod \pi$) может иметь особенности. Причем эти особенности — полюсы (а не существенно особые точки, в смысле комплексного анализа [24, 35, 45]), т.е. предел функции $f(\alpha)$ в этих точках бесконечен. Кроме того, в рассматриваемой системе имеются еще коэффициенты (зависящие от углов β_s, $s = 1, \ldots, n-3$), которые также имеют особенности — полюсы.

4.1. Первые интегралы и силовые поля. При $b = 0$ система (6), (7) является консервативной и обладает полным набором (n штук) первых интегралов [47]:

$$
\begin{gathered}
\Phi_1(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)d\xi = C_1 = \mathrm{const}, \\
\Phi_2(z_{n-2}, \ldots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi = C_2 = \mathrm{const}, \\
\Phi_3(z_{n-3}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}\exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi \cdot \sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_{n-2}(z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-4}) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi \cdot \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \mathrm{const}, \\
\Phi_{n-1}(z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-3}) = z_1 \exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi \cdot \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}, \\
\Phi_n(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}.
\end{gathered} \tag{8}
$$

При $b > 0$ система (6), (7) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [15, 21, 27, 31, 39, 41]).

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{9}$$

а также

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{10}$$

Случай (9) формирует класс систем, соответствующих пространственному движению динамически симметричного n-мерного твердого тела на нулевых уровнях первых интегралов (т.е. при наличии дополнительных групп симметрий), вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [46, 47]). Случай (10) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на $(n-1)$-мерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. При этом в последнем случае метрика на сфере индуцируется евклидовой метрикой объемлющего n-мерного пространства. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (6), (7) описывает геодезический поток на $(n-1)$-мерной сфере.

Более того, в случае (9), если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система (6), (7) описывает движение свободного n-мерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы (см. [42]). В частности, если

$$F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin\alpha, \tag{11}$$

то система (6), (7) описывает также закрепленный n-мерный маятник на обобщенном сферическом шарнире, помещенный в поток набегающей среды, заполняющей n-мерное пространство (см. [47, 48]), и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим предельным множествам системы (6), (7).

4.2. Поведение траекторий возле сингулярной особой точки. Система (6), (7), в силу наличия особенности в точках $\alpha = 0 \bmod \pi$ формально не имеет в начале координат положения равновесия. Но если изучить поведение векторного поля системы (6), (7) в окрестности начала координат, то можно сделать вывод, что само поле по модулю стремится к нулю почти вдоль любого направления в данной окрестности.

Поэтому доопределим векторное поле системы (6), (7) по непрерывности в начале координат, получив в нем положение равновесия нашего векторного поля (впрочем, как и в точке с координатой $\alpha = \pi$).

Проиллюстрируем теперь, как в данном случае применяется метод многомерных топографических систем Пуанкаре для исследования устойчивости по части переменных $(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha)$ тривиального решения системы (6), (7), которое соответствует устранимой особенности векторного поля данной системы.

Из списка первых интегралов (8) нас будет интересовать первый из них:

$$\Phi_1(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)d\xi = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{12}$$

Пусть для определенности $F'(0) > 0$. Тогда в окрестности начала координат справедливо разложение

$$\int\limits_0^{\alpha} F(\xi)d\xi = \frac{F'(0)}{2}\alpha^2 + \bar{o}(\alpha^2).$$

Воспользуемся и в данном случае методом многомерных топографических систем (Пуанкаре) (см. [34]). Рассмотрим поверхность уровня (топографическую систему) неотрицательной функции (Ляпунова)

$$V_0(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1}) = \Phi_1(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha)$$

в окрестности начала координат. Поверхности уровня Функции V_0 заполняются фазовыми траекториями системы (6), (7) при $b = 0$, которую рассматриваем в качестве системы сравнения для (6), (7).

Скалярное произведение градиента $\operatorname{grad} V_0(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1})$ на векторное поле системы (6), (7) в координатах $(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1})$ является знакопеременной характеристической функцией $\chi(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1})$ и равно $\chi(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1}) = 2bF(\alpha)g(\alpha)$, что является гладкой функцией (в случае гладкости силового поля возле начала координат) и не зависит от особенностей векторного поля рассматриваемой системы.

Итак, если в некоторой малой проколотой окрестности начала координат (при $b > 0$) выполнено неравенство $F(\alpha)g(\alpha) \neq 0$, то вопрос об устойчивости тривиального решения системы (6), (7) решается однозначно.

Действительно, характеристическая функция $\chi(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1})$ знакоопределена. Если положительно, то это подтверждает отталкивающий характер (сингулярной) особой точки — начала координат. Если отрицательно, то это подтверждает притягивающий характер данной особой точки.

5. Теоремы устойчивости тривиального решения по части переменных в многомерной динамике. Рассмотрим далее некоторые динамические уравнения движения n-мерного твердого тела, рассмотренные в [47, 48]. Для наглядности силовое поле выбрано в виде (11), а функция $f(\alpha)$, «отвечающая» за геометрию, — в виде (9).

Более общий случай может быть рассмотрен аналогичным образом (см. также монографию автора [48]).

5.1. Система на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере без внутреннего силового поля. Рассмотрим следующую систему динамических уравнений движения на касательном расслоении к многомерной сфере (см. [48]):

$$\alpha' = -(1 + \mu_2\mu_3)\, z_{n-1} + \mu_2 \sin\alpha, \tag{13}$$

$$z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + \mu_2\mu_3)\,(z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \mu_3 z_{n-1}\cos\alpha, \tag{14}$$

$$z'_{n-2} = (1+\mu_2\mu_3)\, z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$

$$+(1+\mu_2\mu_3)\,(z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \mu_3 z_{n-2}\cos\alpha, \tag{15}$$

$$z'_{n-3} = (1+\mu_2\mu_3)\, z_{n-3}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+\mu_2\mu_3)\, z_{n-3}z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -$$

$$-(1+\mu_2\mu_3)\,(z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - \mu_3 z_{n-3}\cos\alpha, \tag{16}$$

. . . .

$$z'_1 = (1+\mu_2\mu_3)\, z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} - \mu_3 z_1\cos\alpha, \tag{17}$$

$$\beta'_1 = (1+\mu_2\mu_3)\, z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{18}$$

$$\beta'_2 = -(1+\mu_2\mu_3)\, z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{19}$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n\,(1+\mu_2\mu_3)\, z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{20}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}\,(1+\mu_2\mu_3)\, z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{21}$$

где имеются два ключевых безразмерных параметра $\mu_2, \mu_3 > 0$, возникающую в динамике n-мерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил (см. [47]).

Исследуем устойчивость ее тривиального решения по отношению к возмущениям переменных α, z_1, …, z_{n-1} (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат вышуказанным способом).

Рассмотрим функцию

$$V(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1}) = (1+\mu_2^2)(z_{n-1}^2+\ldots+z_1^2) - 2\mu_2 z_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha, \tag{22}$$

которая является положительно определенной функцией в окрестности начала координат при любом $\mu_2 \geqslant 0$.

Теорема 1. *Функция* (22) *является для системы* (13)–(21) *функцией Ляпунова* (*Четаева*), *т.е. ее производная в силу системы* (13)–(21) *отрицательно определена при $\mu_2 < \mu_3$ и положительно определена при $\mu_2 > \mu_3$.*

Следствие 1. *При $\mu_2 < \mu_3$ система* (13)–(21) *имеет в начале координат* (*после доопределения правых частей в нем*) *притягивающую особую точку, а при $\mu_2 > \mu_3$ — отталкивающую.*

Доказательство. Действительно, производная функции (22) в силу системы (13)–(21) представляется в виде

$$2(\mu_2-\mu_3)(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2)\cos\alpha. \qquad \square$$

5.2. Система на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере с внутренним силовым полем. Рассмотрим следующую систему динамических уравнений движения на касательном расслоении к многомерной сфере (см. [47, 48]):

$$\alpha' = -Z_{n-1} + \mu_2\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\sin\alpha + \mu_2\sin\alpha\cos^2\alpha - \mu_2\mu_3 Z_{n-1}\cos^2\alpha, \tag{23}$$

$$Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1+\mu_2\mu_3)\left(\sum_{s=1}^{n-2}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \mu_2 Z_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha -$$

$$-\mu_2 Z_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + \mu_2\mu_3 Z_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - \mu_3 Z_{n-1}\cos\alpha, \tag{24}$$

$$Z'_{n-2} = (1+\mu_2\mu_3)\, Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1+\mu_2\mu_3)\left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$

$$+\mu_2 Z_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \mu_2 Z_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + \mu_2\mu_3 Z_{n-2}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - \mu_3 Z_{n-2}\cos\alpha, \tag{25}$$

$$Z'_{n-3} = (1+\mu_2\mu_3)\, Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+\mu_2\mu_3)\, Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-$$

$$-(1+\mu_2\mu_3)\left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \mu_2 Z_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha-$$

$$-\mu_2 Z_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha + \mu_2\mu_3 Z_{n-3}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - \mu_3 Z_{n-3}\cos\alpha, \tag{26}$$

. . . .

$$Z'_1 = (1+\mu_2\mu_3)\, Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + \mu_2 Z_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha-$$

$$-\mu_2 Z_1\sin^2\alpha\cos\alpha + \mu_2\mu_3 Z_1 Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - \mu_3 Z_1\cos\alpha, \tag{27}$$

$$\beta'_1 = (1+\mu_2\mu_3)\, Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{28}$$

$$\beta'_2 = -(1+\mu_2\mu_3)\, Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{29}$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n\,(1+\mu_2\mu_3)\, Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{30}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}\,(1+\mu_2\mu_3)\, Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{31}$$

возникающую в динамике n-мерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил (см. [47, 48]).

Исследуем устойчивость ее тривиального решения по отношению к возмущениям переменных $\alpha, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат вышуказанным способом).

Рассмотрим функцию

$$V(\alpha, Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = (1+\mu_2^2)(Z_{n-1}^2 + \ldots + Z_1^2) - 2\mu_2 Z_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha, \tag{32}$$

которая является положительно определенной функцией в окрестности начала координат при любом $\mu_2 \geqslant 0$.

Теорема 2. *Функция* (32) *является для системы* (23)–(31) *функцией Ляпунова* (*Четаева*), *т.е. ее производная в силу системы* (23)–(31) *отрицательно определена при* $\mu_2 < \mu_3$ *и положительно определена при* $\mu_2 > \mu_3$.

Следствие 2. *При* $\mu_2 < \mu_3$ *система* (23)–(31) *имеет в начале координат* (*после доопределения правых частей в нем*) *притягивающую особую точку, а при* $\mu_2 > \mu_3$ *— отталкивающую.*

Доказательство. Действительно, производная функции (32) в силу системы (23)–(31) представляется в виде

$$2(\mu_2 - \mu_3)(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) + o(\alpha^2 + Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2). \tag{33}$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А. А.* Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
2. *Андронов А. А., Леонтович Е. А.* Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра// Уч. записки ГГУ. — 1937. — *6*.

3. *Бендиксон И.* О кривых определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9*. — С. 119–211.
4. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. — М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
5. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. — М.: Наука, 1970.
7. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1973.
8. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
9. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
10. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
11. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
12. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
13. *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1947.
14. *Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1986.
15. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
16. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1986.
17. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.
18. *Палис Ж., Ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. Введение. — М.: Мир, 1986.
19. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1967.
20. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
21. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1989. — *3*. — С. 51–54.
22. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
23. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
24. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. *Шамолин М. В.* Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *2*. — С. 52–56.
26. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
27. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
28. *Шамолин М. В.* Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1993. — *2*. — С. 66–70.
29. *Шамолин М. В.* Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1993. — *1*. — С. 68–71.
30. *Шамолин М. В.* Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде// Докл. РАН. — 1994. — *337*, № 5. — С. 611–614.
31. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
32. *Шамолин М. В.* Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой// Докл. РАН. — 1996. — *349*, № 2. — С. 193–197.

33. *Шамолин М. В.* Определение относительной грубости и двупараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела// Усп. мат. наук. — 1996. — *51*, № 1. — С. 175–176.
34. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения// Усп. мат. наук. — 1997. — *52*, № 3. — С. 177–178.
35. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
36. *Шамолин М. В.* О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией// Усп. мат. наук. — 1999. — *54*, № 5. — С. 181–182.
37. *Шамолин М. В.* Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 2000. — *371*, № 4. — С. 480–483.
38. *Шамолин М. В.* О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек// Усп. мат. наук. — 2000. — *55*, № 3. — С. 187–188.
39. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
40. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
41. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
42. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2011. — № 3. — С. 24–30.
45. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией// в кн.: Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019. — С. 456.
49. *Якоби К.* Лекции по динамике. — М.-Л.: ОНТИ, 1936.
50. *Hopf E.* Abzweigung einer periodischen Losung von einer stationaren Losung eines Differentialsystems// Ber. Math.-Phys. Kl. Sachs. Acad. Wiss. Leipzig. — 1942. — *94*. — P. 3–22.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`