ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 184

Москва 2020

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 184

АЛГЕБРА

Москва 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 184 (2020). С. 3–111
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-184-3-111

УДК 512.55

КОЛЬЦА РЯДОВ ЛОРАНА, ЛОРАНОВСКИЕ КОЛЬЦА И КОЛЬЦА МАЛЬЦЕВА—НЕЙМАНА

© 2020 г. **А. А. ТУГАНБАЕВ**

Аннотация. Данная работа является обзором с доказательствами теоретико-кольцевых свойств колец косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ над кольцом A, где A — ассоциативное кольцо с ненулевой единицей. Кроме того, рассмотрены лорановские кольца и кольца Мальцева—Неймана, являющиеся строгими расширениями колец косых рядов Лорана.

Ключевые слова: кольцо косых рядов Лорана, кольцо Лорана, кольцо Мальцева—Неймана.

RINGS OF LAURENT SERIES, LAURENT RINGS, AND MALCEV–NEUMANN RINGS

© 2020 **A. A. TUGANBAEV**

Abstract. This paper is a review with proofs of ring-theoretical properties of rings of skew Laurent series $A((x,\varphi))$ over a ring A, where A is an associative ring with nonzero identity element. In addition, we consider Laurent rings and Malcev–Neumann rings which are proper extensions of skew Laurent series rings.

Keywords and phrases: ring of skew Laurent series, Laurent ring, Malcev–Neumann ring.

AMS Subject Classification: 16S99, 16S36, 16S32

СОДЕРЖАНИЕ

ISSN 0233–6723

Введение

В статье исследуются свойства колец косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ над кольцом A, где A — ассоциативное (не обязательно коммутативное) кольцо с ненулевой единицей, называемое *кольцом коэффициентов* кольца $A((x,\varphi))$. Кроме того, в книге изучаются лорановские кольца и кольца Мальцева—Неймана, являющиеся естественными строго расширениями колец косых рядов Лорана. В работе используются базовые сведения из теории колец, которые можно найти, например, в [23, 24, 34].

Использование колец косых рядов Лорана началось в работах Шура, Диксона и Гильберта начала XX века. Например, при изучении независимости аксиом в геометрии Гильберт использовал кольцо косых рядов Лорана для построения тела, бесконечномерного над своим центром. Изучение колец рядов Лорана с произвольным кольцом коэффициентов было начато в [42, 61, 66]. Использование колец рядов Лорана бывает полезно в теории колец. Например, в [43] с помощью колец косых рядов Лорана от двух переменных показано, что кольцо частных алгебры Вейля содержит свободную некоммутативную подалгебру. В работе [27] кольца рядов Лорана используются для изучения размерности Крулля и глобальной размерности нётеровых P.I. колец. Кроме того, теоретико-кольцевые свойства колец рядов Лорана исследуются, например, в работах [4–7, 9–14, 67, 73, 76, 77].

Через $A^+((x))$ обозначается абелева группа, состоящая из формальных рядов $f=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f_n x^n$, у которых все коэффициенты f_n лежат в кольце A и $f_n=0$ для почти всех отрицательных n; элемент f_0 кольца A называется *свободным членом* ряда. Элементы $f_n\in A$ называются *каноническими* коэффициентами ряда f. Сложение и вычитание в группе $A^+((x))$ определяются по правилу $f\pm g=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(f_n\pm g_n)x^n$, ряд с нулевыми коэффициентами — нулевой элемент в $A((x))$. Через $A^+[[x]]$ обозначается подгруппа в $A^+((x))$, состоящая из рядов f, у которых $f_n=0$ для всех отрицательных n. Ясно, что каждый ненулевой ряд f из $A((x))$ имеет вид $f=\sum\limits_{n=k(f)\in\mathbb{Z}}^{+\infty} f_n x^n$, $0\neq f_{k(f)}\in A$, и его можно единственным образом записать в виде $f=\bar f(x)x^{k(f)}$, где $\bar f(x)\in A[[x]]$ и ряд $\bar f(x)$ имеет ненулевой свободный член $\bar f_0=f_{k(f)}$; ненулевой элемент $f_{k(f)}$ кольца A называется *младшим коэффициентом* ряда f, произведение f_kx^k называется *младшим членом* ряда f, а целое число $k(f)$ называется *младшей степенью* ряда f. Считаем, что младшая степень нулевого ряда равна $+\infty$.

Пусть A — кольцо и φ — его автоморфизм. Первой главной целью данной работы является изложение теоретико-кольцевых свойств *колец (левых) косых рядов Лорана* $A((x,\varphi))$ над кольцом A. Аддитивной группой кольца $A((x,\varphi))$ является группа $A^+((x))$, а произведение fg двух рядов $f,g\in A((x,\varphi))$ определяется естественным образом, с учетом правила $x^na=\varphi^n(a)x^n$. В кольце $A((x,\varphi))$ аддитивная подгруппа $A^+[[x]]$ является подкольцом, которое называется *кольцом (левых) косых степенных рядов* и обозначается через $A[[x,\varphi]]$

Если $\varphi=1_A$ — тождественный автоморфизм кольца A, то вместо $A((x,1_A))$ и $A[[x,1_A]]$ мы пишем $A((x))$ и $A[[x]]$ соответственно, т.е. аддитивные группы $A^+((x))$ и $A^+[[x]]$ превращаются в кольца, называемые *кольцом* (обычных) *рядов Лорана* и *кольцом* (обычных) *степенных рядов* над кольцом A соответственно.

Теоретико-кольцевые свойства колец $A((x,\varphi))$ и $A[[x,\varphi]]$ во многом различаются. Например, кольцо степенных рядов $A[[x,\varphi]]$ всегда имеет ненулевой радикал Джекобсона $J(A[[x,\varphi]])$, целиком содержащий ненулевой идеал из рядов с нулевыми свободными членами, а радикал Джекобсона $J(A((x,\varphi)))$ кольца рядов Лорана $A((x,\varphi))$ часто равен нулю (например, если A — кольцо без ненулевых нильпотентных элементов или полупервичное правое или левое кольцо Голди; см. лемму 2.6(7) и лемму 1.8(4)), хотя радикал Джекобсона кольца коэффициентов A может быть ненулевым; см., например, $A = F[[x]]$, где F — поле, причем $J(A((x))) = 0$. Заметим также, что если φ — автоморфизм комплексного сопряжения поля комплексных чисел $\mathbb{C}$, то $\mathbb{C}((x,\varphi))$ — некоммутативное тело (см. 1.2(6)).

Алгебра псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ была введена Шуром в [64] и с тех пор неоднократно использовалась в различных разделах математики (см., например, [1, 46, 63]). Поскольку в данной работе исследуются лишь теоретико-кольцевые свойства колец псевдодифференциальных операторов, мы не приводим работы о псевдодифференциальных операторах, не относящиеся к структурной теории колец. Выделим только работы [1] и [3]. В последней работе развита алгебраическая теория колец формальных псевдодифференциальных операторов от нескольких переменных; другие подходы к построению колец псевдодифференциальных операторов см. в [2, 29, 30]. В [3] используются также итерированные кольца косых рядов Лорана. В структурной теории колец кольца псевдодифференциальных операторов используются для вычислений в алгебрах дифференциальных операторов (см. [26]) и для построения многочисленных примеров (см., например, [28]). Если кольцо псевдодифференциальных операторов обладает правой размерностью Крулля, то оно является нётеровым справа кольцом (см. [67]).

Кольцевые свойства колец $A((x,\varphi)$ и $A((t^{-1},\delta))$ близки друг к другу. Переменная в этих кольцах не коммутирует с коэффициентами и различие между кольцами состоит лишь в том, какое именно соотношение выступает в качестве замены коммутативности: $xa = \varphi(a)x$ или $ta = at+\delta(a)$. В случае тождественного автоморфизма φ и нулевого дифференцирования δ, эти кольца изоморфны кольцу обычных рядов Лорана $A((x))$.

В силу сказанного выше удобно определить понятие *лорановских* колец, которые включают в себя все кольца косых рядов Лорана и все кольца псевдодифференциальных операторов. Это понятие было введено в [79]. Все результаты данной работы о лорановских кольцах базируются на работе [79]. Многие результаты о кольцах косых рядов Лорана и псевдодифференциальных операторов мы получаем как следствия аналогичных результатов для лорановских колец. Построены и другие примеры лорановских колец, для которых также верны многие результаты работы. В работе разрабатывается необходимая техника вычислений в лорановских кольцах. Она также содержит различные примеры лорановских колец и необходимые определения и обозначения.

Кольцо косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ и кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ над одним и тем же кольцом A изоморфны как абелевы группы и умножение в них задаётся похожим образом. Многие теоремы переносятся с колец косых рядов Лорана на кольца псевдодифференциальных операторов и обратно практически без изменений, поэтому возникает следующий вопрос: какое должно быть умножение на аддитивной группе формальных рядов, для того, чтобы сохранялись те же самые кольцевые свойства.

Ясно, что должны быть естественные условия, вытекающие из дистрибутивности умножения по отношению к формальной бесконечной сумме и из отождествления единицы кольца коэффициентов с единицей циклической группы по умножению, порождённой переменной. Оказывается, что единственное дополнительное необходимое свойство состоит в том, что младшая степень произведения двух рядов должна быть не меньше суммы младших степеней этих рядов (в случае кольца псевдодифференциальных операторов, где степень переменной в формальном ряду убывает, вместо младших степеней используются старшие степени). Кольца, удовлетворяющие этому условию и состоящие из формальных степенных рядов с конечным числом отрицательных степеней переменной, называются в данной работе лорановскими кольцами. Из этого условия, с учётом обратимости x, возникает необходимое условие на соотношение перестановки $xa = \ldots$, состоящее в том, что младшая степень правой части должна быть равна младшей степени левой. Обратимость x требует, чтобы соотношение имело вид $xa = \varphi(a)x + \ldots$, где φ — автоморфизм кольца коэффициентов. Ассоциативность умножения накладывает на соотношение последнее условие, которое нам будет удобнее сформулировать после того, как будет развита особая вычислительная техника.

Проверка этого условия в общем случае трудна, однако в отдельных частных случаях его удаётся легко проверить. Так, строится кольцо косых рядов Лорана с косым дифференцированием (оно изучалось в [19] в случае, когда кольцо коэффициентов является телом), которое также оказывается частным случаем лорановского кольца.

Существует определённая взаимосвязь между решёткой правых (левых) идеалов лорановского кольца и решёткой правых (левых) идеалов его кольца коэффициентов: решётка правых (левых) идеалов кольца коэффициентов с помощью отображения μ вкладывается (с сохранением решёточных операций) в решётку правых (левых) лорановского кольца и существует отображение λ в обратную сторону, сохраняющее отношение включения, ставящее в соответствие каждому правому (левому) идеалу кольца рядов правый (левый) идеал кольца коэффициентов. В конечнопорождённом случае отображение λ сохраняет и строгое включение, благодаря чему решётка правых (левых) идеалов лорановских рядов не может быть значительно богаче решётки правых (левых) идеалов его кольца коэффициентов.

После получения базовых результатов в работе изучаются конкретные кольцевые свойства лорановских колец (все эти результаты, естественно, распространяются на кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов). Так, доказано, что лорановское кольцо является телом в точности тогда, когда его кольцо коэффициентов является телом (для частных случаев колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов это хорошо известно (см., например, [19, с. 66] и [26]). Аналогично, лорановское кольцо является нётеровым (артиновым) в точности тогда, когда кольцо коэффициентов является нётеровым (артиновым); это утверждение известно для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов (см., например, [28, с. 19], [67]). Также проверено, что лорановское кольцо является областью в точности тогда, когда кольцо коэффициентов является областью. Доказано, что лорановское кольцо является областью главных правых идеалов в точности тогда, когда его кольцо коэффициентов является областью главных правых идеалов.

Получен критерий того, что лорановское кольцо является цепным кольцом и критерий того, что оно является дистрибутивным полулокальным кольцом. В этих случаях кольцо коэффициентов и лорановское кольцо оказываются артиновыми кольцами. Получено также описание полуцепных артиновых колец косых рядов Лорана. Если лорановское кольцо является простым (полупростым)[1], то кольцо коэффициентов является простым (полупростым) и выполняется некоторое дополнительное условие (в случае кольца косых рядов Лорана это условие на скручивающий автоморфизм, а в случае кольца псевдодифференциальных операторов — условие на дифференцирование).

Помимо точных критериев получены некоторые частичные результаты о дистрибутивных кольцах рядов, о полулокальных кольцах рядов и о кольцах главных правых идеалов. Для многих утверждений приведены примеры колец, иллюстрирующие необходимость каждого отдельного условия.

[1]Под *полупростым* кольцом подразумевается артиново полупростое кольцо.

Кольца рядов Лорана тесно связаны с кольцами рядов Мальцева—Неймана и кольцами обобщённых степенных рядов, интенсивно изучаемыми в последнее время. Напомним, что кольца рядов Мальцева–Неймана были определены в 1948 году Мальцевым для доказательства вложимости групповой алгебры над полем в тело (независимо в 1949 году эта конструкция была определена Б.Нейманом). Среди многочисленных работ в этом направлении мы отметим работы [18, 42, 47, 61, 66]. Кольца обобщённых степенных рядов с показателями степени в упорядоченном моноиде изучались в работах многих авторов (можно выделить работы [52–60]; также см. работы [20, 36–41]).

В [14] определяются кольца Мальцева—Неймана. Класс всех колец Мальцева—Неймана строго содержит кольца рядов Мальцева—Неймана, кольца косых формальных рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов. В работе исследуются теоретико-кольцевые свойства колец Мальцева—Неймана. Оказывается, что кольца рядов Мальцева—Неймана, кольца косых формальных рядов Лорана и кольца формальных псевдодифференциальных операторов имеют близкие теоретико-кольцевые свойства, связанные с существованием фильтрации по младшей степени ряда.

Приведем некоторые используемые определения и обозначения.

Пусть A — кольцо и M — правый A-модуль.

Кольцо называется *регулярным*, если для каждого его элемента a существует такой элемент x, что $axa = a$. Кольцо является регулярным в точности тогда, когда каждый его главный правый идеал порождается идемпотентом.

Кольцо называется *редуцированным*, если оно не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Модуль называется *риккартовым*, если все его циклические подмодули проективны. Правый модуль над кольцом A является риккартовым в точности тогда, когда аннулятор каждого его элемента порождается идемпотентом кольца A как правый идеал. Кольцо называется *риккартовым справа (слева)*, если оно является риккартовым правым (левым) модулем над собой.

Модуль называется *цепным*, если все его подмодули образуют цепь относительно включения. Модуль называется *полуцепным*, если он является прямой суммой цепных модулей.

Кольцо A называется *кольцом главных правых идеалов*, если каждый его правый идеал является главным правым идеалом. Модуль M называется *модулем Безу*, если каждый его конечнопорождённый подмодуль является циклическим. Кольцо A называется *правым кольцом Безу*, если каждый его конечнопорождённый правый идеал является главным, т.е. A — правый A-модуль Безу. Ясно, что каждый каждый гомоморфный образ модуля Безу (правого кольца Безу) является модулем Безу (правым кольцом Безу).

Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение, т.е. каждый его ненулевой подмодуль является существенным[1].

Модуль называется *конечномерным*, если он не содержат бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. Модуль называется *фактор-конечномерным*, если все его фактор-модули конечномерны.

Конечнопорождённый модуль M называется *локальным* (соответственно, *полулокальным*), если его фактор-модуль $M/J(M)$ по радикалу Джекобсона $J(M)$ является простым (соответственно, полупростым) модулем, т.е. если $J(M)$ — максимальный подмодуль в M (соответственно, $J(M)$ — пересечение конечного числа максимальных подмодулей модуля M).

Кольцо A является локальным (соответственно, полулокальным) в точности тогда, если его фактор-кольцо по радикалу Джекобсона $J(A)$ является телом (полупростым артиновым кольцом).

[1]Для модуля M его подмодуль X называется *существенным*, если $X \cap Y \neq 0$ для каждого ненулевого подмодуля Y модуля M.

Кольцо называется *полупервичным*, если для любого его правого идеала B из равенства $B^2 = 0$ следует, что $B = 0$. Кольцо называется *первичным* (соответственно, *областью*), если произведение любых его ненулевых правых идеалов (соответственно, элементов)равно нулю. Собственный идеал B кольца A называется *полупервичным* (соответственно, *первичным*; *вполне первичным*), если фактор-кольцо A/B полупервично (соответственно, первично; является областью).

Кольцо A называется *полупримарным*, если его радикал Джекобсона $J(A)$ нильпотентен, а фактор-кольцо по радикалу Джекобсона является полупростым. Пересечение всех первичных идеалов кольца A называется *первичным радикалом* кольца A. Конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов называется *правым кольцом Голди*. Подмодуль N модуля M называется *существенным*, если для любого подмодуля X модуля M равенство $X \cap N = 0$ влечет равенство $X = 0$.

Через $U(X)$ обозначается группа обратимых элементов кольца (или моноида) X.

Через $\operatorname{Sing} M$ — обозначается *сингулярный подмодуль* модуля M, т.е. вполне инвариантный подмодуль в M, образованный всеми такими элементами $m \in M$, что (правый) аннулятор элемента m является существенным правым идеалом кольца A. Если $\operatorname{Sing} M = 0$, то модуль M называется *несингулярным*. Идеал $\operatorname{Sing} A_A$ кольца A называется *правым сингулярным идеалом*.

Пересечение всех максимальных подмодулей модуля M обозначается через $J(M)$ и называется *радикалом Джекобсона* модуля M. Модуль M называется *полупримитивным*, если $J(M) = 0$.

Кольцо A называется *полулокальным*, если $A/J(A)$ — полупростое артиново кольцо. Кольцо A называется *полупримарным*, если A — полулокальное кольцо, а идеал $J(A)$ нильпотентен.

1. Начальные свойства $A((x,\varphi))$ и $M((x,\varphi))$

1.1. Кольцо левых степенных рядов $A[[x,\varphi]]$, где φ — инъективный (не обязательно сюръективный) эндоморфизм кольца A.

Пусть φ — инъективный эндоморфизм кольца A. На аддитивной группе $A^+[[x]]$ левых степенных рядов с кольцом коэффициентов A можно определить естественным образом умножение так, что $x^n a = \varphi^n(a)x^n$ для всех $a \in A$ и любого натурального числа n. В результате мы получим *кольцо левых степенных рядов* $A[[x,\varphi]]$, которое в общем случае обладает разными свойствами как правый $A[[x,\varphi]]$-модуль и левый $A[[x,\varphi]]$-модуль. Это кольцо состоит из рядов $f = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} f_i x^i$, где $f_i \in A$ для всех неотрицательных целых чисел i и x — формальная переменная.

(1) Для любого ряда $g \in A[[x,\varphi]]$ корректно определен ряд

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (gx)^i \in A[[x,\varphi]],$$

поскольку для вычисления коэффициентов этого ряда требуется сложить лишь конечное число элементов кольца A.

(2) Кольцо A является областью в точности тогда, когда кольцо $A[[x,\varphi]]$ является областью.

(3) Для любого ряда $g \in A[[x,\varphi]]$ корректно определен ряд

$$1 + \sum_{i=0}^{+\infty} (gx)^i \in A[[x,\varphi]].$$

Этот ряд обратим в кольце $A[[x,\varphi]]$, а обратным рядом является ряд $1 - gx$, поскольку равенства

$$(1-gx)\left(1 + \sum_{i=0}^{+\infty} (gx)^i\right) = 1 = \left(1 + \sum_{i=0}^{+\infty} (gx)^i\right)(1-gx)$$

проверяются непосредственно.

(4) Если a — элемент кольца A, являющийся обратимым справа в кольце $A[[x,\varphi]]$, то элемент a обратим справа в кольце A.

(5) Если a — обратимый справа элемент кольца A, то для любого ряда $g \in A[[x,\varphi]]$ ряд $a+gx$ обратим справа в кольце $A[[x,\varphi]]$.

Доказательство. Утверждения (1)–(3) проверяются непосредственно.

(4) Если $af = 1$ и $f \in A[[x,\varphi]]$, то $af_0 = 1$.

(5) Пусть $ab = 1$, где $b \in A$. Согласно (3) ряд $1+bgx$ обратим в кольце $A[[x,\varphi]]$. Так как $a+gx = a(1+bgx)$, то

$$(a+gx)(1+bgx)^{-1}b = a(1+bgx)(1+bgx)^{-1}b = ab = 1. \qquad \square$$

1.2. Кольца и модули косых рядов Лорана.

Пусть A — кольцо и φ — его автоморфизм. Напомним, что $A((x,\varphi))$ — *кольцо левых косых рядов Лорана*, состоящее из формальных рядов $\sum\limits_{i=t}^{\infty} a_i x^i$ от переменной x с каноническими коэффициентами $a_i \in A$, где t — (возможно, отрицательное) целое число и либо $a_t \neq 0$, либо $a_i = 0$ для всех i.

В $A((x,\varphi))$ сложение определяется естественно, а умножение задается с помощью равенств $x^i a = \varphi^i(a)x^i$ для всех $a \in A$ и $i \in \mathbb{Z}$.

Элементы $a_i \in A$ называются *каноническими коэффициентами* ряда $f = \sum\limits_{i=t}^{\infty} a_i x^i$. Если $a_t \neq 0$, то ненулевой коэффициент $a_t \in A$ называется *младшим коэффициентом* для f; он обозначается через $\lambda(f)$; если $f = 0$, то $\lambda(f) = 0$ по определению) Если $f \neq 0$, то элемент $a_t x^t$ и целое число t называются *младшим членом* и *младшей степенью* ряда f соответственно. Для каждого подмножества $F \subseteq A((x,\varphi))$ обозначим через $\lambda(F)$ подмножество $\{\lambda(f) \mid f \in F\} \subseteq A$. Для каждого подмножества $B \subseteq A$ обозначим введем обозначение

$$B((x,\varphi)) = \left\{ \sum_{i=t}^{\infty} b_i x^i \;\middle|\; b_i \in B \right\} \subset A((x,\varphi)).$$

Аналогично, если φ — автоморфизм кольца A, то кольцо правых косых рядов Лорана $((\varphi,x))A = A_r((x,\varphi))$ состоит из формальных рядов $\sum\limits_{i=t}^{\infty} x^i a_i$ от переменной x с каноническими коэффициентами $a_i \in A$, где $t \in \mathbb{Z}$ и $ax^i = x^i\varphi^i(a)$ для всех $a \in A$ и $i \in \mathbb{Z}$. Кольца степенных рядов $A[[x,\varphi]]$ и $[[\varphi,x]]A$ — подкольца колец $A((x,\varphi))$ и $((\varphi,x))A$ соответственно.

Напомним также, что для каждого правого A-модуля M через $M((x,\varphi))$ обозначается множество всех формальных рядов $\sum\limits_{i=t}^{\infty} m_i x^i$, где $m_i \in M$, $m \in \mathbb{Z}$ и либо $m_t \neq 0$, либо $m_i = 0$ для всех i. Ненулевой коэффициент $m_t \in M$ обозначается через $\lambda(f)$; он называется *младшим коэффициентом* ряда f. (По определению полагаем, что $\lambda(0) = 0$.) Если $f \neq 0$, то элемент $m_t x^t$ и целое число t называются *младшим членом* и *младшей степенью* ряда f соответственно. $M((x,\varphi))$ — правый $A((x,\varphi))$-модуль, где модульное сложение определяется естественно, а умножение на элементы из $A((x,\varphi))$ определяется равенством

$$\left(\sum_{i=t}^{\infty} m_i x^i\right)\left(\sum_{j=s}^{\infty} a_j x^j\right) = \sum_{k=t+s}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k} m_i\varphi^i(a_j)\right)x^k.$$

Для каждого подмножества F в $M((x,\varphi))$ обозначим через $\lambda(F)$ подмножество $\{\lambda(f) \mid f \in F\} \subseteq A$. Если F — $A((x,\varphi))$-подмодуль в $M((x,\varphi))$, то $\lambda(F)$ — подмодуль в M_A. Для каждого подмножества N в M_A через $N((x,\varphi))$ обозначается подмножество правого $A((x,\varphi))$-модуля $M((x,\varphi))$, образованное всеми рядами, коэффициенты которых лежат в N.

Так, кольцо $A((x,\varphi))$ является правым $A((x,\varphi))$-модулем рядов Лорана с коэффициентами из A_A.

Аналогично определяются правый $A[[x,\varphi]]$-модуль $M[[x,\varphi]]$ косых степенных рядов и правый $A[x,x^{-1},\varphi]$-модуль $M[x,x^{-1},\varphi]$ косых многочленов Лорана с коэффициентами из модуля M.

Для любого подмножества N модуля M через $N((x,\varphi))$ обозначается подмножество $A((x,\varphi))$-модуля $M((x,\varphi))$, образованное рядами

$$f = \sum_{i=k}^{+\infty} f_i x^i,$$

у которых все коэффициенты f_i лежат во множестве N. Аналогично обозначается подмножество $N[[x,\varphi]]$ кольца $A[[x,\varphi]]$.

(1) Если P — подмодуль модуля рядов Лорана $M((x,\varphi))$ и $\lambda(P)$ — множество младших коэффициентов всех рядов из P, то $\lambda(P)$ — подмодуль модуля M.

(2) Если Q — подмодуль правого A-модуля M и $\overline{Q}$ — множество всех рядов $f \in M((x,\varphi))$, у которых все коэффициенты лежат в модуле Q, то множество $\overline{Q}$ является подмодулем правого $A((x,\varphi))$-модуля $M((x,\varphi))$, а отображение $Q \to \overline{Q}$ является инъективным решеточным гомоморфизмом из решетки подмодулей модуля M в решетку $A((x,\varphi))$-подмодулей модуля $M((x,\varphi))$.

(3) Можно рассмотреть кольцо A (и кольцо $A((x,\varphi))$) как правый модуль над собой, тогда обозначения $\lambda(B)$ и $\overline{B}$ переносятся на правые идеалы этих колец. При этом для любого идеала B кольца $A((x,\varphi))$ правый идеал $\lambda(B)$ кольца A оказывается идеалом, причем $\lambda(B) = \varphi(\lambda(B))$.

(4) Каждый ненулевой ряд f из $M((x,\varphi))$ единственным образом представляется в виде $f = gx^k$, где g — ненулевой ряд из $M[[x,\varphi]]$ и $k \in \mathbb{Z}$. При этом $S = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ — мультипликативно замкнутое подмножество Оре в $A[[x,\varphi]]$ и кольцо $A((x,\varphi))$ совпадает с кольцом частных кольца $A[[x,\varphi]]$ относительно S.

(5) Если автоморфизм φ не является тождественным, то кольцо $A((x,\varphi))$ не коммутативно.

(6) Кольцо A является областью в точности тогда, когда кольцо $A((x,\varphi))$ является областью.

(7) Если $f \in A((x,\varphi))$ и младший коэффициент f_t ряда f обратим справа (соответственно, слева) в кольце A, то ряд f обратим справа (соответственно, слева) в кольце $A((x,\varphi))$. При этом, если ряд f лежит в $A[[x,\varphi]]$, то каждый его правый (соответственно, левый) обратный элемент лежит в $A[[x,\varphi]]$. Следовательно, кольцо $A((x,\varphi))$ является телом в точности тогда, когда A — тело.

(8) Если φ — автоморфизм комплексного сопряжения поля комплексных чисел $\mathbb{C}$, то $\mathbb{C}((x,\varphi))$ — некоммутативное тело.

Доказательство. Утверждения (1)–(4) проверяются непосредственно.

(5) Если $a \in A$ и $a \neq \varphi(a)$, то $ax \neq xa = \varphi(a)x$.

(6) Пусть $A((x,\varphi))$ — тело и $0 \neq a \in A$. Так как $A((x,\varphi))$ — тело, то $af = fa = 1$ для некоторого ряда $f \in A((x,\varphi))$. Тогда $af_0 = f_0 a = 1$, где f_0 — свободный член ряда f. Поэтому A — тело.

Теперь пусть A — тело и $0 \neq f = gx^k \in A((x,\varphi)$, где $k \in \mathbb{Z}$, $g \in A[[x,\varphi]]$, $0 \neq g_0 \in A$. Так как ненулевой элемент g_0 обратим в теле A, то согласно 1.1(5) ряд g обратим в кольце $A[[x,\varphi]]$. В частности, ряд g обратим в кольце $A((x,\varphi))$. Тогда произведение $f = gx^k$ двух обратимых элементов кольца $A((x,\varphi))$ — обратимый элемент, и $A((x,\varphi))$ — тело.

Утверждение (7) проверяется с помощью (4) и 1.1(3). Утверждение (8) вытекает из (5) и (7). □

1.3. Кольцо $A((x,\varphi))$ с внутренним автоморфизмом φ.

Автоморфизм φ кольца A называется *внутренним*, если существует такой обратимый элемент b кольца A, что для всех элементов a кольца A выполнено равенство $\varphi(a) = bab^{-1}$.

Если A — кольцо и φ — его автоморфизм, то равносильны условия:

(1) φ — внутренний автоморфизм;

(2) существует изоморфизм π кольца обычных рядов Лорана $A((x))$ на кольцо косых рядов Лорана $A((y,\varphi))$, тождественно действующий на кольце коэффициентов A и сохраняющий младшую степень рядов.

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2). Пусть существует такой обратимый элемент b кольца A, что $\varphi(a) = bab^{-1}$ для всех a из A. Определим отображение π кольца обычных рядов Лорана $A((x))$ на кольцо косых рядов Лорана $A((y,\varphi))$ с помощью правил $\pi(a) = a$ для всех a из A и $\pi(x^n) = b^{-n}y^n$. Тогда

$$y^n a = \pi(b^n x^n a) = \pi(b^n a b^{-n} b^n x^n) = \varphi^n(a) y^n.$$

Непосредственно проверяется, что отображение π является гомоморфизмом колец. Гомоморфизм π обладает обратным кольцевым гомоморфизмом π^{-1}, заданным правилами $\pi^{-1}(a) = a$ и $\pi^{-1}(y^n) = b^n x^n$, поэтому π — изоморфизм.

(2)$\Rightarrow$(1). Пусть π — такой изоморфизм, как описано в условии. Тогда ряд $f = \pi^{-1}(y)$ имеет младшую степень 1 и имеет вид $f_1x + f_2x^2 + \ldots$. Ряд $g = \pi^{-1}(y^{-1})$ является обратным элементом к f и имеет степень -1. Приравнивая коэффициенты в равенствах $fg = 1$ и $gf = 1$, получаем $f_1g_{-1} = 1$ и $g_{-1}f_1 = 1$, откуда $g_{-1} = f_1^{-1}$. Для любого $a \in A$ имеем

$$\varphi(a) = yay^{-1} = \pi(f)a\pi(g) = \pi(fag).$$

Поскольку свободный член ряда fag равен $f_1af_1^{-1}$, получаем, что выполнено равенство $\varphi(a) = f_1af_1^{-1}$, что и требовалось доказать. $\triangleright$ $\square$

1.4. Лемма. *Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ и $R = A((x,\varphi))$.*

(1) *Если M — максимальный правый идеал кольца A, то $M((x,\varphi))$ — максимальный правый идеал кольца R.*

(2) *$J(R) \subseteq (J(A))((x,\varphi))$ (т.е. для любого ряда $f = \sum_{i=m}^{\infty} f_ix^i \in J(R)$, $f_i \in A$, все канонические коэффициенты f_i лежат в $J(A)$).*

(3) *Если $J(R) \neq 0$ и B ненулевой идеал кольца A, порождённый всеми младшими коэффициентами рядов из $J(R)$, то для любого ненулевого элемента $b \in B$ существуют такие ненулевые элементы $b', b'' \in B$, что $bb' = b''b = 0$.*

Доказательство. (1) Достаточно доказать, что для каждого ряда $t \in R \setminus M((x,\varphi))$ существуют такие ряды $h \in M((x,\varphi))$ и $g \in R$, что $h + tg = 1$. Без ограничения общности можно считать, что

$$t = \sum_{i=0}^{\infty} t_ix^i,$$

где $0 \neq t_0 \in A \setminus M$ и $t_i \in A$ для всех i. Так как M — максимальный правый идеал кольца A, то существуют такие элементы $m_0 \in M$ и $a_0 \in A$, что $m_0 + t_0a_0 = 1$. Тогда

$$m_0 + ta_0 = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} t_i\varphi^i(a_0)x^i.$$

Поэтому существует такой ряд $f \in R$, что $(m_0 + ta_0)f = 1$. Положим $h \equiv m_0f \in \overline{M}$ и $g \equiv a_0f \in R$. Тогда $h + tg = 1$.

(2) Пусть $\{M_i\}_{i\in I}$ — множество всех максимальных правых идеалов кольца A. По **1** $M_i((x,\varphi))$ — максимальный правый идеал кольца R для любого i. Поэтому

$$J(R) \subseteq \bigcap_{i\in I} \big(M_i((x,\varphi))\big) = (J(A))((x,\varphi)).$$

(3) Пусть f — такой ненулевой ряд из $J(R)$, что b — младший коэффициент ряда f. Докажем существование такого элемента $b' \in B$, что $bb' = 0$. Так как $fx^n \in J(R)$ для всех n, то можно считать, что младшая степень ряда f равна -1 (т.е. $f - bx^{-1} \in A[[x,\varphi]]$). Так как $f \in J(R)$, то ряд $1-f$ обратим. Поэтому существует такой обратимый ряд $g \in R$, что $(1-f)g = 1$ и $g = 1+fg$. Пусть

$$g = \sum_{i=k}^{\infty} g_i x^i \in R,$$

где $g_k \neq 0$ и $g_i \in A$ для всех i. Так как $fg \in J(R)$, то по лемме 1.4(2) все канонические коэффициенты ряда fg лежат в $J(A)$. Поэтому из равенства $g = 1 + fg$ следует, что коэффициент g_0 обратим в кольце A и $bg_0 \neq 0$. Так как $g_0 \neq 0$, то $k \leqslant 0$. Поэтому либо $k = 0$, либо $k < 0$.

Допустим, что $k = 0$. Тогда ненулевой элемент bg_0 является младшим коэффициентом рядов fg и $1 + fg = g$. Поэтому младшая степень k ряда g равна -1. Получено противоречие.

Допустим, что $k < 0$. Так как $g = 1 + fg$, то $bg_k = 0$ и k — младшая степень ряда $fg \in J(R)$. Поэтому $g_k \in B$ и можно положить $b' = g_k$.

Аналогично доказывается существование такого $b'' \in B$, что $b''b = 0$. $\square$

1.5. Теорема (см. [73]). *Если A — полупервичное правое кольцо Голди, то для любого автоморфизма φ кольца A кольцо косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ полупримитивно.*

Доказательство. Сначала докажем следующее утверждение $(*)$: *Если B — ненулевой идеал кольца A, то существует такой ненулевой элемент $b \in B$, что $bb' \neq 0$ для любого ненулевого элемента $b' \in B$.*

По лемме Цорна существует такой правый идеал C кольца A, что $B \cap C = 0$ и $B \oplus C$ — существенный правый идеал кольца A. Так как A — полупервичное правое кольцо Голди, то каждый существенный правый идеал кольца A содержит неделитель нуля (см. [23, 9.13]). Поэтому существенный правый идеал $B \oplus C$ содержит некоторый неделитель нуля $b + c$, где $b \in B$ и $c \in C$. Пусть b' — такой элемент идеала B, что $bb' = 0$. Так как B — идеал, то $cb' \in B \cap C = 0$. Тогда $(b+c)b' = bb' + cb' = 0$. Так как $b+c$ — неделитель нуля, то $b' = 0$. Поэтому b — искомый элемент.

Теперь теорема 1.5 вытекает из леммы 1.4(3) и (1). $\square$

1.6. Лемма. *Пусть A — кольцо и φ — его автоморфизм, $R = A((x,\varphi))$, N — такой идеал кольца A, что $\varphi(N) = N$, и $\overline{\varphi}$ — автоморфизм фактор-кольца A/N, индуцированный автоморфизмом φ.*

(1) *Если B и C — произвольные правые идеалы кольца A, то*

$$(B+C)((x,\varphi)) = B((x,\varphi)) + C((x,\varphi)), \quad B((x,\varphi)) \cap C((x,\varphi)) = (B \cap C)((x,\varphi)).$$

Следовательно, решетка правых идеалов кольца A изоморфна подрешетке решетки правых идеалов кольца R.

(2) *Существует естественный кольцевой изоморфизм*

$$R/(N((x,\varphi))\ ) \cong (A/N)((x,\overline{\varphi})).$$

(3) *Если идеал N кольца A нильпотентен, то $N((x,\varphi))$ — нильпотентный идеал кольца R (в частности, $N((x,\varphi)) \subseteq J(R)$).*

(4) *Если кольцо $(A/N)((x,\overline{\varphi}))$ полупримитивно, то $J(R) \subseteq N((x,\varphi))$.*

(5) *Если кольцо $(A/N)((x,\overline{\varphi}))$ полупримитивно и $N((x,\varphi)) \subseteq J(R)$, то $J(R) = N((x,\varphi))$.*

(6) *Если R конечномерно справа, то A конечномерно справа.*

(7) *Если кольца R и $(A/N)((x,\overline{\varphi}))$ конечномерны справа, то кольца A и A/N конечномерны справа.*

Доказательство. Утверждения (1)–(3) проверяются непосредственно.

(4) Согласно (2) полупримитивность кольца $(A/N)((x,\overline{\varphi}))$ влечет полупримитивность кольца $R/(N((x,\varphi))\,)$. Поэтому $N((x,\varphi)) \supseteq J(R)$.

Утверждение (5) следует из (4). Утверждение (6) следует из (1). Утверждение (7) следует из (6) и (2). □

1.7. Замечание. Нам потребуется следующий хорошо известный факт (см., например, [23, Corollary 9.13]): Для кольца A равносильны следующие условия:

(1) A — полупервичное правое кольцо Голди;
(2) A несингулярно справа, конечномерно справа и полупервично;
(3) в кольце A множество всех существенных правых идеалов совпадает со множеством всех правых идеалов, содержащих неделитель нуля.

1.8. Лемма. *Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ, $R = A((x,\varphi))$ и N — первичный радикал кольца A.*

(1) *$\varphi(N) = N$.*
(2) *Если A/N — конечномерное справа несингулярное справа кольцо и $N((x,\varphi)) \subseteq J(R)$, то $J(R) = N((x,\varphi))$.*
(3) *Если первичный радикал N нильпотентен и A/N — конечномерное справа несингулярное справа кольцо, то радикал Джекобсона $J(R)$ кольца A нильпотентен и $J(R) = N((x,\varphi))$.*
(4) *Пусть первичный радикал N нильпотентен, A — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов и A/N — конечномерное справа кольцо. Тогда радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R нильпотентен и $J(R) = N((x,\varphi))$.*

Доказательство. (1) Для любого первичного идеала P кольца A верно, что идеалы $\varphi(P)$ и $\varphi^{-1}(P)$ первичны и $P = \varphi(\varphi^{-1}(P))$. Кроме того, N — пересечение всех первичных идеалов кольца A. Поэтому $\varphi(N) = N$.

(2) Пусть $\overline{\varphi}$ — автоморфизм фактор-кольца A/N, индуцированный автоморфизмом φ. Так как A/N — конечномерное справа несингулярное справа полупервичное кольцо, то по теореме 1.5 и замечанию 1.7 кольцо $(A/N)((x,\overline{\varphi}))$ полупримитивно. По лемме 1.6(5) $J(R) = N((x,\varphi))$.

(3) По лемме 1.6(3) $N((x,\varphi))$ — нильпотентный идеал кольца R. В частности, $N((x,\varphi)) \subseteq J(R)$. Согласно (2), $J(R) = N((x,\varphi))$.

(4) Утверждение вытекает из (3) и следующего факта: если A — произвольное кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то его фактор-кольцо по первичному радикалу несингулярно справа (см. [31]). □

1.9. Группа $[[x^{-1},x]]A[[x,x^{-1}]]$ и некоторые ее подгруппы.

Пусть A — аддитивная абелева группа и x — формальная переменная. Обозначим через $[[x^{-1},x]]A[[x,x^{-1}]]$ аддитивную абелеву группу, образованную всеми формальными рядами $\sum\limits_{m,n\in\mathbb{Z}} x^m a_{mn} x^n$, $a_{mn} \in A$, со сложением

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} x^m a_{mn} x^n + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} x^m a'_{mn} x^n = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} x^m (a_{mn} + a'_{mn}) x^n.$$

Вместо $x^0 a x^n$, $x^m a x^0$ и $x^0 a x^0$ будем писать ax^n, $x^m a$ и a соответственно. Мы будем отождествлять нулевые элементы 0 и $\sum\limits_{m,n\in\mathbb{Z}} x^m 0 x^n$ групп A и $[[x^{-1},x]]A[[x,x^{-1}]]$.

Через $A[[x,x^{-1}]]$ и $[[x^{-1},x]]A$ обозначаются подгруппы в $[[x^{-1},x]]A[[x,x^{-1}]]$, образованные всеми рядами $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$ и $\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} x^m a_m$ соответственно.

Через $A((x))$ обозначается подгруппа в $A[[x,x^{-1}]]$, образованная всеми рядами $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_nx^n$, у которых $a_n=0$ для почти всех отрицательных n. Элементы $f(x)$ группы $A((x))$ называются *левыми рядами Лорана* от x над A с коэффициентами $a_n\in A$, причем наименьший индекс n, для которого $a_n\neq 0$, называется *младшей степенью* ряда $f(x)$, а соответствующие одночлен a_nx^n и коэффициент a_n называются *младшим членом* и *младшим коэффициентом* ряда $f(x)$, причем младший коэффициент обозначается через $\lambda(f)$ и по определению полагаем $\lambda(0)=0$. Для каждого подмножества $F\subseteq A((x))$ через $\lambda(F)$ обозначается подмножество $\{\lambda(f)\mid f\in F\}\subseteq A$.

Через $A[[x]]$ обозначается подгруппа в $A((x))\subset A[[x,x^{-1}]]$, образованная всеми рядами $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_nx^n$, у которых $n\geqslant 0$. Элементы группы $A[[x]]$ называются *левыми степенными рядами* от x над A.

Через $A((x^{-1}))$ обозначается подгруппа в $A[[x,x^{-1}]]$, образованная всеми рядами $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_nx^n$, у которых $a_n=0$ для почти всех положительных n, причем наибольший индекс n, для которого $a_n\neq 0$, называется *старшей степенью* ряда $f(x)$, соответствующие одночлен a_nx^n и коэффициент a_n называются *старшим членом* и *старшим коэффициентом* ряда $f(x)$, а коэффициент a_0 называется *свободным членом* ряда $f(x)$.

Через $A[[x^{-1}]]$ обозначается подгруппа в $A((x^{-1}))\subset A[[x,x^{-1}]]$, образованная всеми рядами $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_nx^n$, у которых $n\leqslant 0$.

Через $A[x,x^{-1}]$ обозначается подгруппа $A((x))\cap A((x^{-1}))$ в $A((x))$ и $A((x^{-1}))$. Элементы группы $A[x,x^{-1}]$ называются *левыми многочленами Лорана* от x над A и состоят из всех $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_nx^n$, у которых $a_n=0$ для почти всех n.

Через $A[x]$ обозначается подгруппа в $A[x,x^{-1}]$, образованная всеми $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_nx^n$, у которых $n\geqslant 0$ и $a_n=0$ для почти всех n. Элементы группы $A[x]$ называются *левыми многочленами* от x над A.

Группы $((x))A$, $[[x]]A$, $((x^{-1}))A$, $[[x^{-1}]]A$, $[x^{-1},x]A$ и $[x]A$ определяются аналогично группам $A((x))$, $A[[x]]$, $A((x^{-1}))$, $A[[x^{-1}]]$, $A[x,x^{-1}]$ и $A[x]$ соответственно. Элементы групп $((x))A$, $[[x]]A$, $[x^{-1},x]A$ и $[x]A$ называются *правыми рядами Лорана*, *правыми степенными рядами*, *правыми многочленами Лорана* и *правыми многочленами* от x над A соответственно, причем аналогично левостороннему случаю определяются младшая и старшая степени, младший и старший члены, младший и старший коэффициенты и свободный член. Мы будем также иногда писать $A_r((x))$, $A_r[[x]]$, $A_r[x,x^{-1}]$, $A_r[x]$ вместо $((x))A$, $[[x]]A$, $[x^{-1},x]A$ и $[x]A$ соответственно.

Через $[x^{-1}]A[[x]]$ обозначается подгруппа в $[[x^{-1},x]]A[[x,x^{-1}]]$, образованная всеми рядами $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} x^ma_{mn}x^n$, у которых $m\leqslant 0$, $n\geqslant 0$ и $a_{mn}=0$ для почти всех m.

Через $[[x^{-1},x]]A[x^{-1}]$ обозначается подгруппа в $[[x^{-1},x]]A[[x,x^{-1}]]$, образованная всеми рядами $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} x^ma_{mn}x^n$, у которых $n\leqslant 0$ и $a_{mn}=0$ для почти всех n.

1.10. Кольца $A[[x,\varphi]]$, $S^{-1}A[[x,\varphi]]$, $[[\varphi,x]]A$.

Пусть A — кольцо с инъективным эндоморфизмом φ, x — формальная переменная и $S=\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$.

Через $A[[x,\varphi]]$ или $A_\ell[[x,\varphi]]$ обозначается *левое кольцо косых степенных рядов*, состоящее из формальных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ от переменной x с каноническими коэффициентами $a_n\in A$, где сложение определяется естественным образом, а умножение — с помощью правила $x^na=\varphi^n(a)x^n$, $a\in A$, $n=0,1,2,\ldots$.

Через $[[\varphi, x]]A$ или $A_r[[x, \varphi]]$ обозначается *правое кольцо косых степенных рядов*, состоящее из формальных рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n a_n$ от переменной x с каноническими коэффициентами $a_n \in A$, где сложение определяется естественным образом, а умножение — с использованием правила $ax^n = x^n\varphi^n(a)$, $a \in A$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Кольца $A[[x, \varphi]]$ и $[[\varphi, A]]$ содержат как унитарные подкольца *левое кольцо косых многочленов* $A[x, \varphi]$ и *правое кольцо косых многочленов* $[\varphi, x]A$, состоящие из рядов с конечным числом ненулевых коэффициентов.

Непосредственно проверяется, что S — левое подмножество Оре левого кольца косых рядов $A[[x, \varphi]]$, и S — правое подмножество Оре правого кольца косых рядов $[[\varphi, x]]A$.

Обобщенным левым кольцом косых рядов Лорана называется левое кольцо частных $S^{-1}A[[x, \varphi]]$ кольца $A[[x, \varphi]]$ относительно левого множества Оре S. Кольцо $S^{-1}A[[x, \varphi]]$ состоит из формальных выражений вида

$$x^{-k}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n}(x^{-k}a_i x^i), \quad k \geqslant 0, \quad a_i \in A.$$

Кольцо $S^{-1}A[[x, \varphi]]$ содержит как унитарное подкольцо левое кольцо частных $S^{-1}A[x, \varphi]$ левого кольца косых многочленов $A[x, \varphi]$ относительно левого множества Оре S, называемое *обобщенным левым кольцом косых многочленов Лорана*.

Аналогично определяются *обобщенное правое кольцо косых рядов Лорана* $[[\varphi, x^{-1}, x]]AS^{-1}$ и *обобщенное правое кольцо косых многочленов Лорана* $[\varphi, x^{-1}, x]AS^{-1}$.

Если φ — автоморфизм кольца A, то обобщенное левое кольцо косых рядов Лорана $S^{-1}A[[x, \varphi]]$ совпадает с левым кольцом косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$, а обобщенное левое кольцо косых многочленов Лорана $S^{-1}A[x, \varphi]$ совпадает с левым кольцом косых многочленов Лорана $A(x, \varphi)$.

Аналогичные утверждения верны для *правых колец косых рядов Лорана* $((\varphi, x))A = [[\varphi, x]]AS^{-1}$ и *правых колец косых многочленов Лорана* $(\varphi, x)A = [\varphi, x]AS^{-1}$.

Если φ — автоморфизм кольца A, то имеются кольцевые изоморфизмы

$$\begin{gathered}
((\varphi, x))A \to A((x, \varphi^{-1})), \quad \sum x^i a_i \to \sum \varphi^i(a_i)x^n,\\
[[\varphi, x]]A \to A[[x, \varphi^{-1}]], \quad \sum x^i a_i \to \sum \varphi^i(a_i)x^n,\\
(\varphi, x)A \to A(x, \varphi^{-1}), \quad \sum x^i a_i \to \sum \varphi^i(a_i)x^n,\\
[\varphi, x]A \to A[x, \varphi^{-1}], \quad \sum x^i a_i \to \sum \varphi^i(a_i)x^n,
\end{gathered}$$

превращающиеся при $\varphi = 1_A$ в естественные кольцевые изоморфизмы

$$((x))A \to A((x)), \quad [[x]]A \to A[[x]], \quad (x)A \to A(x), \quad [x]A \to A[x],$$

при которых суммы $\sum x^i a_i$ переходят в суммы $\sum a_i x^i$.

При $\varphi = 1_A$ полагаем

$$\begin{gathered}
A((x, 1_A)) = ((1_A, x))A = A((x)) = ((x))A, \quad A[[x, 1_A]] = [[1_A, x]]A = A[[x]] = [[x]]A,\\
A(x, 1_A) = (1_A, x)A = A(x) = (x)A, \quad A[x, 1_A] = [1_A, x]A = A[x] = [x]A.
\end{gathered}$$

2. Нётеровы кольца $A((x, \varphi))$

2.1. Предложение. *Пусть A — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, φ — его автоморфизм и N — первичный радикал кольца A.*

(1) *Если кольца A и A/N конечномерны справа, то радикал Джекобсона кольца $A((x, \varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x, \varphi))$.*

(2) *Если все фактор-кольца кольца $A((x,\varphi))$ конечномерны справа, то радикал Джекобсона кольца $A((x,\varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x,\varphi))$.*

Доказательство. (1) Так как A — конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то нильидеал N нильпотентен (см. [35]). По лемме 1.8(4) радикал Джекобсона кольца $A((x,\varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x,\varphi))$.

(2) Из леммы 1.6(7) и леммы 1.6(2) следует, что кольца A и A/N конечномерны справа. Согласно (1) радикал Джекобсона кольца $A((x,\varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x,\varphi))$. □

2.2. Предложение. *Если φ — автоморфизм кольца A, то следующие условия равносильны*:

(1) *$A((x,\varphi))$ — артиново справа кольцо*;

(2) *A — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов и $A((x,\varphi))$ — полулокальное кольцо, у которого все фактор-кольца конечномерны справа.*

Доказательство. Положим $R = A((x,\varphi))$.

(1)⇒(2). Ясно, что R — полулокальное кольцо, у которого все фактор-кольца конечномерны справа. Так как R — нётерово справа кольцо, то R — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов. Кроме того, любое подкольцо произвольного кольца с условием максимальности для правых аннуляторов обладает этим свойством.

(2)⇒(1). По предложению 2.1(2) $J(R)$ — нильпотентный идеал кольца R. Из условия следует, что $R/J(R)$ — полупростое кольцо и для каждого натурального числа n $J^n(R)/J^{n+1}(R)$ — полупростой артинов правый R-модуль. Поэтому R — артиново справа кольцо. □

2.3. Предложение. *Пусть A — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, N — первичный радикал кольца A и φ — автоморфизм кольца A.*

(1) *Если кольца A и A/N конечномерны справа, то радикал Джекобсона кольца $A((x,\varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x,\varphi))$.*

(2) *$A((x,\varphi))$ — артиново справа кольцо в точности тогда, когда $A((x,\varphi))$ — полулокальное кольцо и все его фактор-кольца конечномерны справа.*

Предложение 2.3 вытекает из предложения 2.1(1) и предложения 2.2.

В связи с предложением 2.3(2) заметим, что полулокальное кольцо, у которого все фактор-кольца конечномерны справа, не обязано быть артиновым справа. Например, таким кольцом является кольцо формальных степенных рядов $F[[x]]$ над любым полем F (заметим, что кольцо $F[[x]]$ нётерово).

2.4. Теорема (см. [73]). *Если A — нётерово справа кольцо с автоморфизмом φ, то радикал Джекобсона кольца $A((x,\varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x,\varphi))$, где N — первичный радикал кольца A.*

Теорема 2.4 вытекает из предложения 2.3(1).

2.5. Лемма. *Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ, M — правый A-модуль и $M((x,\varphi))$ — соответствующий $A((x,\varphi))$-модуль рядов Лорана.*

(1) *Если P — $A((x,\varphi))$-подмодуль в $M((x,\varphi))$ и существуют такие ряды $f_1, f_2, \dots, f_n$ из P, что*

$$f_i = f_{i,0} + f_{i,1}x + f_{i,2}x^2 + \dots$$

для каждого i и

$$g_m \in f_{1,0}A + f_{2,0}A + \dots + f_{n,0}A$$

для каждого ряда $g = g_m x^m + g_{m+1}x^{m+1} + \dots$ из P, где все $f_{i,k}, g_k$ лежат в A, то $A((x,\varphi))$-модуль P порождается n рядами $f_1, f_2, \dots, f_n$. В частности, если M — нётеров A-модуль Безу, то $M((x,\varphi))$ — нётеров $A((x,\varphi))$-модуль Безу.

(2) *$M((x,\varphi))$ является простым $A((x,\varphi))$-модулем в точности тогда, когда M является простым A-модулем.*

Доказательство. Обозначим $R = A((x,\varphi))$ и $N = M((x,\varphi))$.

(1) Обозначим через Q подмодуль $f_1R + f_2R + \dots + f_nR$ в P_R. Так как все ряды f_i лежат в модуле P и $Q = f_1R + f_2R + \dots + f_nR$, то $Q \subseteq P$. Допустим, что утверждение леммы не верно. Тогда существует такой ряд $h \in P$, что $h \notin Q$. Без ограничения общности можно считать, что $h = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \dots$. По условию

$$h_0 = f_{1,0}a_{1,0} + f_{2,0}a_{2,0} + \dots + f_{n,0}a_{n,0}$$

для некоторых элементов $a_{1,0}, \dots, a_{n,0}$ кольца A. Рассмотрим ряд

$$h - (f_1a_{1,0} + \dots + f_na_{n,0}) = h' = h'_1x + h'_2x^2 + \dots.$$

Ряд h' также лежит в модуле P и к нему применимо условие леммы:

$$h'_1 = f_{1,0}a_{1,1} + f_{2,0}a_{2,1} + \dots + f_{n,0}a_{n,1}.$$

Ряд h'' положим равным $h' - (f_1a_{1,1} + \dots + f_na_{n,1})x$. Последовательность $h, h', h'', \dots$ можно продолжить до бесконечности, причем степень младшего члена элементов последовательности будет возрастать. Непосредственно проверяется, что

$$h = f_1\Big(a_{1,0} + a_{1,1}x + a_{1,2}x^2 + \dots\Big) + \dots + f_n\Big(a_{n,0} + a_{n,1}x + \dots\Big).$$

Это противоречит предположению $h \notin Q$.

(2) Пусть M не является простым A-модулем. Тогда в нем содержится собственный ненулевой подмодуль L, откуда следует, что в модуле N_R содержится собственный ненулевой подмодуль $\overline{L}$.

Пусть теперь M_A — простой модуль. Достаточно доказать, что $N_R = fR$ для любого ненулевого ряда f из N. Без ограничения общности можно считать, что $f = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots$, где f_0 отлично от нуля, так что $M = f_0A$. Тогда $f_0A = M = \lambda(N)$ и можно применить п. (1) к модулю N и системе рядов, состоящей из единственного ряда f, что и завершает доказательство. □

2.6. Лемма. *Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ и $R = A((x,\varphi))$ — кольцо косых рядов Лорана.*

(1) *Кольцо R полупросто в точности тогда, когда кольцо A полупросто.*
(2) *Выполнено включение $J(R) \subseteq \overline{J(A)}$. Если радикал $J(A)$ кольца A нильпотентен, то $J(R) = \overline{J(A)}$ — нильпотентный идеал кольца R.*
(3) *Если I — двусторонний идеал кольца A и $\varphi(I) = I$, то $R/\overline{I} \cong (A/I)((x,\varphi_I))$.*
(4) *Если кольцо R полулокально, то кольцо A полулокально.*
(5) *Если кольцо A нётерово справа и $I \subseteq J$ — правые идеалы кольца R, то равенство $\lambda(I) = \lambda(J)$ влечёт равенство $I = J$.*
(6) *Кольцо A является нётеровым справа (соответственно, артиновым справа) в точности тогда, когда кольцо R нётерово справа (соответственно, артиново справа).*
(7) *Если A — редуцированное кольцо и $\varphi(I) = I$ для любого правого идеала I кольца A, то $J(R) = 0$.*

Доказательство. (1) Пусть кольцо R полупросто. Достаточно доказать, что кольцо A регулярно и не содержит бесконечного множества попарно ортогональных идемпотентов. Для любого элемента a кольца A в силу регулярности кольца R можно найти такой ряд $f \in R$, что $afa = a$. Следовательно, $af_0a = a$, где $f_0 \in A$. Поэтому A — регулярное кольцо.

Допустим теперь, что в кольце A есть бесконечная система попарно ортогональных идемпотентов. Так как эта система лежит в кольце R, получаем противоречие с полупростотой кольца R.

Пусть теперь кольцо A полупросто. Тогда оно представимо в виде конечной прямой суммы каких-то своих минимальных правых идеалов I_i. В силу леммы 2.5(2) правые идеалы $\overline{I_i}$ кольца R также являются минимальными. Тогда кольцо R полупросто в силу равенства $R = \sum \overline{I_i}$.

(2) По лемме 1.4(1), если I — максимальный правый идеал кольца A, то $\overline{I}$ — максимальный правый идеал кольца R. Отсюда следует, что $J(R) \subseteq \overline{J(A)}$.

Множество $\overline{J(A)}$ является двусторонним идеалом кольца R, так как $\varphi(J(A)) = J(A)$. Допустим теперь, что идеал $J(A)$ нильпотентен. Тогда и идеал $\overline{J(A)}$ нильпотентен. Следовательно, $J(R) \supseteq \overline{J(A)}$, что и завершает доказательство.

(3) Действительно, $\overline{I}$ — двусторонний идеал кольца R, поскольку $\varphi(I) = I$. Оставшаяся часть утверждения проверяется непосредственно.

(4) Действительно, кольцо $R/J(R)$ полупросто. Тогда согласно п. (2) $R/\overline{J(A)}$ изоморфно фактор-кольцу полупростого кольца $R/J(R)$ и, следовательно, тоже полупросто. Поскольку $\varphi(J(A)) = J(A)$, можно воспользоваться п. (3). Получаем, что кольцо $(A/J(A))((x, \varphi_{J(A)}))$ полупросто. Тогда по п. (1) кольцо $A/J(A)$ также полупросто.

(5) Правый идеал $\lambda(I)$ является конечно порождённым, поскольку кольцо A нётерово. Пусть $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — система образующих правого идеала $\lambda(I)$. Для каждого i выберем ряд $f_i \in I$ так, чтобы его младший коэффициент был равен a_i. Для каждого i можно выбрать ряд f_i так, чтобы степень его младшего члена была равна нулю. Применяя к идеалу I лемму 2.5(1), получаем, что $I = f_1R + f_2R + \cdots + f_nR$. Аналогично, $J = f_1R + f_2R + \ldots + f_nR$, поскольку все f_i лежат в J.

(6) Пусть A — нётерово справа (соответственно, артиново справа) кольцо и $\{I_i\}$ — возрастающая (соответственно, убывающая) цепь правых идеалов в кольце R. Возрастающая (соответственно, убывающая) цепь $\{\lambda(I_i)\}$ правых идеалов нётерова справа (соответственно, артинова справа) кольца A стабилизируется. Тогда, согласно п. (5), стабилизируется цепь $\{I_i\}$, и R — нётерово справа (соответственно, артиново справа) кольцо.

Пусть R — нётерово справа (соответственно, артиново справа) кольцо. Отображение $I \to \overline{I}$ является инъективным решеточным гомоморфизмом из решетки правых идеалов кольца A в решетку правых идеалов нётерова справа (соответственно, артинова справа) кольца R. Поэтому кольцо A нётерово справа (соответственно, артиново справа).

(7) В доказательстве мы будем пользоваться следующим свойством редуцированного кольца A: если $a, b \in A$ и $ab = 0$, то $(ba)^2 = b(ab)a = 0$, откуда, в силу отсутствия нильпотентных элементов, $ba = 0$. Кроме того, каждый обратимый справа элемент редуцированного кольца A обратим слева.

Допустим теперь, что радикал $J(R)$ отличен от нуля. Тогда в нем содержится ряд f, у которого степень младшего члена равна -1. В силу п. (2) все коэффициенты ряда f лежат в радикале $J(A)$. Пусть g — ряд из R, обратный к $1 + f$, а $g_m x^m$ — младший член ряда g.

Допустим, что $m < 0$. Приравнивая коэффициенты в равенстве $(1 + f)g = 1$, получаем равенства

$$f_{-1}\varphi^{-1}(g_m) = 0, \quad f_{-1}\varphi^{-1}(g_{m+1}) + (1 + f_0)g_m = 0.$$

Из первого равенства следует, что $f_{-1}\varphi^{-1}(g_m)A = 0$. Тогда $f_{-1}\varphi^{-1}(g_m A) = 0$, откуда (с использованием $\varphi^{-1}(g_m A) = g_m A$) получаем равенство $f_{-1}g_m A = 0$. Поэтому $f_{-1}g_m = 0$, откуда $g_m f_{-1} = 0$.

С учетом этого, домножив второе равенство на f_{-1}, получаем равенство

$$f_{-1}\varphi^{-1}(g_{m+1})f_{-1} = 0.$$

Тогда $(f_{-1}\varphi^{-1}(g_{m+1}))^2 = 0$. Из редуцированности кольца A следует, что $f_{-1}\varphi^{-1}(g_{m+1}) = 0$ и (учитывая второе равенство) получаем $(1 + f_0)g_m = 0$. Кроме того, элемент $1 + f_0$ обратим в кольце A, поскольку $f_0 \in J(A)$. Тогда $g_m = 0$, что противоречит выбору коэффициента g_m.

Допустим теперь, что $m = 0$. Аналогично предыдущему случаю получаем равенства

$$f_{-1}\varphi^{-1}(g_m) = 0, \quad f_{-1}\varphi^{-1}(g_{m+1}) + (1 + f_0)g_m = 1.$$

Как и в предыдущем случае, $f_{-1}g_m = g_m f_{-1} = 0$. Из второго равенства следует, что

$$(1 + f_0)g_m = 1 - f_{-1}\varphi^{-1}(g_{m+1}).$$

Правая часть этого равенства обратима в A, поскольку f_{-1} лежит в $J(A)$. Поэтому $(1 + f_0)g_m$ — обратимый элемент кольца A. Тогда и элемент g_m обратим в A, что противоречит равенству $g_m f_{-1} = 0$ и выбору ряда f.

Наконец, допустим, что $m > 0$. Тогда $f_{-1}\varphi^{-1}(g_1) = 1$, что невозможно, поскольку элемент f_{-1} лежит в радикале $J(A)$ и не может быть обратимым. □

2.7. Замечание. Пусть A — кольцо, P — его правый идеал, и a — обратимый справа элемент кольца A. Если a лежит в множестве $1 + P$, то a^{-1} тоже лежит в $1 + P$. Действительно,

$$a^{-1} = 1 + (a^{-1} - 1) = 1 + (a^{-1} - aa^{-1}) = 1 + (1 - a)a^{-1} \in 1 + P.$$

2.8. Теорема (см. [78]). *Пусть A — кольцо с радикалом Джекобсона J и $Ja \subseteq aA$ для любого элемента $a \in J$. Тогда у любого ряда f из радикала Джекобсона $J(A((x)))$ кольца рядов Лорана $A((x))$ младший коэффициент порождает в кольце A нильпотентный правый идеал.*

Доказательство. Пусть f — произвольный ряд из $J(A((x)))$ с младшим коэффициентом f_k. Обозначим ряд $f - f_k x^k$ через f'. Тогда младшая степень ряда f' не ниже $k + 1$. Кроме того, $J(A((x))) \subseteq \overline{J}$ по лемме 2.6(2). Поэтому все коэффициенты рядов f и f' лежат в J. Тогда ряд $1 - f'x^{-k-1}$ имеет младшую степень 0 и его младший коэффициент равен $1 - f_{k+1}$ и, следовательно, обратим. Тогда согласно 1.2(7) обратим и сам ряд $1 - f'x^{-k-1}$, причём его обратный ряд h лежит в $1 + \overline{J}$ по замечанию 2.7. Младший коэффициент h_0 ряда h лежит в $1 + J$ и, следовательно, обратим.

Рассмотрим тогда ряд $(1 - fx^{-k-1})h$. С одной стороны, он является произведением двух обратимых рядов и, следовательно, обратим. С другой стороны, он равен

$$\Big(1 - f'x^{-k-1} - f_k x^{-1}\Big)h = 1 - f_k h x^{-1}.$$

Легко видеть, что младший член этого ряда равен $f_k h_0 x^{-1}$. Пусть g — ряд, обратный ряду $1 - f_k h x^{-1}$. Легко видеть, что его младшая степень не может быть положительна, поскольку тогда коэффициент при x^0 произведения $g(1 - f_k h x^{-1})$ был бы равен $g_1 f_k h_0 \in J$, что невозможно, так как он должен быть равен единице. Пусть младшая степень ряда g равна $-n + 1$, где n — натуральное число.

Рассмотрим равенство

$$\Big(1 + f_k h x^{-1} + (f_k h x^{-1})^2 + \ldots + (f_k h x^{-1})^n\Big)\big(1 - f_k h x^{-1}\big) = 1 - (f_k h x^{-1})^{n+1}.$$

Домножив обе его части на g справа, получим:

$$1 + f_k h x^{-1} + (f_k h x^{-1})^2 + \ldots + (f_k h x^{-1})^n = g - (f_k h x^{-1})^{n+1} g.$$

Приравнивая коэффициенты при x^{-n} левой и правой частей, получаем (с учётом того, что младшая степень g больше $-n$), что элемент $(f_k h_0)^n$ лежит в правом идеале, порождённом элементами вида $(f_k h_{i_1})(f_k h_{i_2}) \ldots (f_k h_{i_{n+1}})$, где $i_1, i_2, \ldots, \text{ß}_{n+1}$ — произвольные неотрицательные целые числа.

Обозначим $f_k h_0$ через a, $a \in J$, тогда получаем, что элемент a^n лежит в правом идеале, порождённом элементами вида $ah_0{}^{-1}h_{i_1}ah_0{}^{-1}h_{i_2}\dots ah_0{}^{-1}h_{i_{n+1}}$. При этом для всех k, отличных от нуля, h_k лежит в J.

Докажем, что все элементы $ah_0{}^{-1}h_{i_1}ah_0{}^{-1}h_{i_2}\dots ah_0{}^{-1}h_{i_{n+1}}$ лежат в правом идеале кольца A, порождённом элементом a^{n+1}. Действительно, если i_1 не равно 0, то по условию выполнено включение $h_{i_1}ah_0{}^{-1}h_{i_2}\dots ah_0{}^{-1} \in ah_0{}^{-1}h_{i_2}\dots ah_0{}^{-1}A$. Применив это условие ко всем i_k, отличным от нуля, мы получим нужное включение

$$ah_0{}^{-1}h_{i_1}ah_0{}^{-1}h_{i_2}\dots ah_0{}^{-1}h_{i_{n+1}} \in a^{n+1}A.$$

Таким образом, мы получаем, что $a^n \in a^{n+1}A$, т.е. $a^n = a^{n+1}b$, где b — некоторый элемент кольца A. Тогда $a^n(1-ab) = 0$. Поскольку элемент a лежит в радикале Джекобсона J кольца A, то элемент $1-ab$ обратим, и, следовательно, $a^n = 0$.

Докажем теперь, что aA — нильпотентный правый идеал кольца A. Действительно, из того, что AaA лежит в J, вытекает, что $(aA)^{2n}$ лежит в $aJaJa\dots JaA$ (a повторено в выражении n раз). По условию JaJ лежит в $aAJ = aJ$ и Ja лежит в aA. Применяя эти включения нужное количество раз, получаем, что $(aA)^{2n}$ лежит в $a^nA = 0$, т.е. $aA = ah_0{}^{-1}A = f_kA$ — нильпотентный правый идеал, что и требовалось доказать. $\square$

2.9. Теорема (см. [78]). *Пусть A — такое кольцо, что $J(A)a \subseteq aA$ для всех $a \in J(A)$. Тогда радикал Джекобсона $J(A((x)))$ кольца рядов Лорана $A((x))$ совпадает с идеалом $N((x))$, образованным всеми рядами, канонические коэффициенты которых лежат в первичном радикале N кольца A.*

Доказательство. Обозначим $J = J(A)$. Напомним, что для любого подмножества P кольца A через $\overline{P}$ обозначается множество таких рядов из $A((x))$, все коэффициенты которых лежат в P. Кроме того, радикал Джекобсона кольца $A((x))$ содержится в $\overline{J}$ по лемме 2.6(2).

Сначала докажем, что если a — произвольный элемент первичного радикала N, то правый идеал aA нильпотентен. Действительно, сам элемент a нильпотентен, пусть $a^n = 0$. Из того, что AaA лежит в $N \subseteq J$, вытекает, что $(aA)^{2n}$ лежит в $aJaJa\dots JaA$ (a повторено в выражении n раз). По условию JaJ лежит в $aAJ = aJ$ и Ja лежит в aA. Применяя эти включения нужное количество раз, получаем, что $(aA)^{2n}$ лежит в $a^nA = 0$, что и требовалось доказать.

Если правый идеал aA нильпотентен, то нильпотентен и правый идеал $aA((x))$, откуда получаем, что произвольный элемент из первичного радикала N кольца A обязан лежать и в первичном радикале кольца $A((x))$ и, как следствие, лежать в радикале Джекобсона кольца $A((x))$.

Пусть теперь f — произвольный ряд из радикала Джекобсона кольца A. Тогда, по теореме 2.8, его младший коэффициент f_k лежит в N и, по вышедоказанному, он лежит в радикале Джекобсона кольца $A((x))$. Тогда ряд $f' = f - f_kx^k$ лежит в радикале Джекобсона кольца A. Применяя к ряду f' те же рассуждения, мы докажем, что f_{k+1} лежит в N. Продолжая далее, получаем, что все коэффициенты ряда f лежат в N. Таким образом, доказано, что радикал Джекобсона кольца $A((x))$ лежит в $\overline{N}$.

Докажем теперь обратное включение. Достаточно доказать, что если f — произвольный ряд из $\overline{N}$, то ряд $1+f$ обратим справа. Если младшая степень ряда f неотрицательна, то это вытекает из 1.2(7). Пусть теперь младшая степень ряда f отрицательна и равна $-n$. Тогда рассмотрим ряд $f' = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots$. Согласно 1.2(7) ряд $1+f'$ обратим, поэтому достаточно доказать, что обратим ряд

$$(1+f)(1+f')^{-1} = 1 + (f-f')(1+f')^{-1}.$$

Но ряд $f - f'$ представляет собой конечную сумму $f_{-n}x^{-n} + \dots + f_{-1}x^{-1}$, причём все элементы f_{-i} лежат в N и, как доказано выше, в $J(A((x)))$, поэтому ряд $f - f'$ также лежит в $J(A((x)))$.

Отсюда получаем, что ряд

$$(1+f)(1+f')^{-1} = 1 + (f - f')(1+f')^{-1}$$

обратим, что и требовалось доказать. $\square$

2.10. Следствие (см. [78]). *Пусть A — кольцо с первичным радикалом N.*

(1) *Если в кольце A любые два элемента радикала $J(A)$ коммутируют по умножению друг с другом, то радикал Джекобсона $J(A((x)))$ кольца рядов Лорана $A((x))$ совпадает с идеалом $N((x))$.*

(2) *Если кольцо A инвариантно справа или слева, то радикал Джекобсона $J(A((x)))$ кольца рядов Лорана $A((x))$ совпадает с идеалом $N((x))$.*

Следствие 2.10 вытекает из теоремы 2.9.

2.11. Открытые вопросы.
Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ и $R = A((x,\varphi))$.

(1) Верно ли, что $\lambda(J(R))$ — нильидеал кольца A?

(2) Верно ли, что $J(R)$ — нильидеал кольца R?

3. Полуцепные кольца и кольца Безу $A((x,\varphi))$

3.1. Замечание. Пусть R — полуцепное справа кольцо. Тогда R — полулокальное кольцо и любое фактор-кольцо кольца R является конечной прямой суммой цепных правых идеалов. Хорошо известно, что для произвольного кольца правая конечномерность равносильна тому, что это кольцо имеет существенный правый идеал, являющийся конечной прямой суммой равномерных правых идеалов. Поэтому каждое фактор-кольцо кольца R конечномерно справа.

3.2. Предложение. *Если φ — автоморфизм кольца A, то равносильны следующие условия*:

(1) $A((x,\varphi))$ — *артиново справа полуцепное справа кольцо*;

(2) A — *артиново справа кольцо полуцепное справа кольцо*;

(3) $A((x,\varphi))$ — *полуцепное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов*;

(4) $A((x,\varphi))$ — *полуцепное справа кольцо и A — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов*;

(5) $A((x,\varphi))$ — *полуцепное справа кольцо и A — полупримарное кольцо.*

Доказательство. Обозначим $R = A((x,\varphi))$ и $J = J(R)$.

(1)$\Rightarrow$(2). Отображение $I \to \overline{I}$ является инъективным решеточным гомоморфизмом из решетки правых идеалов кольца A в решетку правых идеалов артинова справа кольца R. Поэтому кольцо A артиново справа. Таким образом, радикал J нильпотентен. В силу леммы 2.6(2) $J(R) = \overline{J}$.

Рассмотрим полупростое кольцо $B = A/J$ и в нем систему примитивных попарно ортогональных идемпотентов $\{e_i\}$ такую, что $\sum e_i = 1$. Автоморфизм φ кольца естественным образом индуцирует автоморфизм φ_J кольца B. Все модули e_iB являются простыми. В силу леммы 2.5(2) соответствующие им правые идеалы $e_iB((x,\varphi_J))$ кольца $B((x,\varphi_J))$ также являются простыми модулями. Таким образом, идемпотенты e_i являются примитивными также и в полупростом кольце $B((x,\varphi_J))$. В силу леммы 2.6(3) кольцо $B((x,\varphi_J))$ изоморфно кольцу $R/J(R)$. В силу нильпотентности идеала J конечную систему попарно ортогональных идемпотентов $\{e_i\}$ в кольце A/J можно поднять до системы примитивных попарно ортогональных идемпотентов $\{d_i\}$ кольца A так, что $\sum d_i = 1$ (см., например, [69, 4.19(1)]). Тогда все идемпотенты d_i будут примитивны и в кольце R, поскольку примитивны их образы в кольце $R/J(R)$.

Так как R — полуцепное справа кольцо и любое прямое разложение артинова справа кольца R в прямую сумму ненулевых неразложимых правых идеалов является единственным с точностью до изоморфизма, то все правые идеалы d_iR кольца R являются цепными модулями над R. Кроме того, для каждого i решетка подмодулей правого идеала d_iA вкладывается в решетку подмодулей d_iR с помощью отображения $M \to \overline{M}$. Поэтому модуль d_iA тоже является цепным, и кольцо A представляется в виде прямой суммы конечного числа цепных модулей d_iA. Следовательно, A — полуцепное справа кольцо. $\rhd$

(2)$\Rightarrow$(1). Поскольку A — полуцепное справа кольцо, в нём существует такая конечная система попарно ортогональных идемпотентов e_i, $i = 1, \dots, n$, что $\sum e_i = 1$ и e_iA — цепной модуль над A для каждого i. Для каждого идемпотента e и двустороннего идеала I верно равенство $eA \cap I = eI$. В частности, для всех $i = 1, \dots, n$ и неотрицательных целых k выполнено равенство $e_iA \cap J^k = e_iJ^k$ (полагаем, что $J^0 = A$).

В силу того, что A — артиново справа кольцо, идеал J нильпотентен и кольцо A/J является полупростым. Следовательно, все модули J^k/J^{k+1} над A/J также являются полупростыми. Поэтому для всех i и k цепной модуль

$$e_iJ^k/e_iJ^{k+1} \cong (e_iJ^k + J^{k+1})/J^{k+1} \subseteq J^k/J^{k+1}$$

является простым (над кольцом A/J и, следовательно, над кольцом A). Так как модуль e_iA является цепным для каждого i, то все его подмодули исчерпываются модулями e_iJ^k, среди которых лишь конечное число отлично от нуля в силу нильпотентности J. При этом каждый модуль e_iJ^k порождается любым своим элементом, не лежащим в модуле e_iJ^{k+1}.

Рассмотрим теперь радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R. Радикал J артинова справа кольца A нильпотентен и в силу леммы 2.6(2) $J(R) = \overline{J}$. Очевидно, что $\overline{J^k} = \overline{J}^k$ для любого натурального k. Рассмотрим теперь правые идеалы $e_iR = \overline{e_iA}$ кольца R. Их прямая сумма равна R.

Докажем теперь, что для каждого i правый идеал e_iR является цепным модулем над R.

Пусть $f \in e_iR$ — ненулевой ряд из R. Для некоторого неотрицательного k выполнено включение $f \in \overline{e_iJ^k} \setminus \overline{e_iJ^{k+1}}$. Тогда, в силу простоты модуля $\overline{e_iJ^k}/\overline{e_iJ^{k+1}}$, в правом идеале fR найдется ряд g такой, что все его коэффициенты, кроме g_0, лежат в e_iJ^{k+1}, а g_0 лежит в множестве $e_iJ^k \setminus e_iJ^{k+1}$. Тогда элемент g_0 порождает весь правый идеал e_iJ^k, откуда $g = g_0(1+h)$, где $h \in \overline{J} = J(R)$. Поэтому $fR = gR = g_0R = \overline{e_iJ^k}$. Таким образом, все подмодули модуля e_iR исчерпываются модулями $\overline{e_iJ^k}$ и e_iR — цепной артинов модуль.

Следовательно, модуль R_R является конечной прямой суммой цепных артиновых модулей. Поэтому R — полуцепное справа артиново справа кольцо, что и требовалось доказать.

Импликации (1)$\Rightarrow$(3) и (2)$\Rightarrow$(5) очевидны.

Импликация (3)$\Rightarrow$(4) следует из того, что каждое подкольцо кольца с условием максимальности для правых аннуляторов является кольцом с условием максимальности для правых аннуляторов.

Импликация (4)$\Rightarrow$(3) следует из предложения 2.2 и замечания 3.1.

(5)$\Rightarrow$(4). Пусть $J = J(A)$. По условию A/J — полупростое кольцо и идеал J нильпотентен. Возьмем любое натуральное число n. Непосредственно проверяется, что J^{n-1}/J^n — полупростой правый A-модуль, $\varphi(J^n) = J^n$, автоморфизм φ индуцирует автоморфизм φ_n фактор-кольца A/J^n и существует естественный кольцевой изоморфизм

$$(A/J_n)((x, \varphi_n)) \cong A((x, \varphi))/J_n((x, \varphi)).$$

Так как кольцо $(A/J_n)((x, \varphi_n))$ изоморфно фактор-кольцу полуцепного справа кольца $A((x, \varphi))$, то $(A/J_n)((x, \varphi_n))$ — полуцепное справа кольцо. Так как кольцо $A((x, \varphi))$ конечномерно справа, то по лемме 1.6(6) кольцо A конечномерно справа. Тогда для любого натурального числа n конечномерный полупростой правый A-модуль J^{n-1}/J^n является артиновым модулем. Кроме того, идеал J нильпотентен. Поэтому A — артиново справа кольцо. В частности, A — нётерово справа кольцо. $\square$

3.3. Следствие. *Если φ — автоморфизм кольца A и $A((x,\varphi))$ — полуцепное справа кольцо, то $A/\operatorname{Sing} A_A$ — артиново справа полуцепное справа кольцо.*

Доказательство. Положим $S = \operatorname{Sing} A_A$ и $\overline{A} = A/S$. Так как кольцо $A((x,\varphi))$ конечномерно справа, то по лемме 1.6(6) кольцо A конечномерно справа. Поэтому $\overline{A}$ — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов (см. [65]). Для любого существенного правого идеала B кольца A правый идеал $\varphi(B)$ тоже является существенным. Поэтому $\varphi S = S$ и φ индуцирует автоморфизм $\overline{\varphi}$ кольца $\overline{A}$. Так как существует естественный кольцевой изоморфизм $\overline{A}((x,\overline{\varphi})) \cong A((x,\varphi))/S((x,\varphi))$, то кольцо $\overline{A}((x,\overline{\varphi}))$ изоморфно фактор-кольцу полуцепного справа кольца $A((x,\varphi))$. Поэтому $\overline{A}((x,\overline{\varphi}))$ — полуцепное справа кольцо. По предложению 3.2 $\overline{A}$ — артиново справа кольцо полуцепное справа кольцо. $\square$

3.4. Следствие. *Пусть A — кольцо с автоморфизм φ и $S = \operatorname{Sing} A_A$. Если $A((x,\varphi))$ — полуцепное справа кольцо, то равносильны следующие условия*:

(1) *идеал S нильпотентен*;
(2) *S — артинов правый A-модуль*;
(3) *S — нётеров правый A-модуль*;
(4) *A — артиново справа полуцепное справа кольцо.*

Доказательство. Согласно следствию 3.3 A/S — артиново справа полуцепное справа кольцо. В частности, A/S — нётерово справа кольцо.

(1)⇒(2). Так как идеал S нильпотентен и A/S — артиново справа кольцо, то A — полупримарное кольцо. По предложению 3.2 A — артиново справа кольцо.

(2)⇒(3). Так как правые A-модули A/S и S являются артиновыми, то A — артиново справа кольцо. В частности, A — нётерово справа кольцо и S_A — нётеров модуль.

(3)⇒(4). Так как правые A-модули A/S и S являются нётеровыми, то A — нётерово справа кольцо. По предложению 3.2 A — артиново справа кольцо полуцепное справа кольцо.

Импликация (4)⇒(1) проверяется непосредственно. $\square$

3.5. Теорема (см. [7]). *Если A — кольцо с автоморфизмом φ, то равносильны следующие условия*:

(1) *$A((x,\varphi))$ — полуцепное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов*;
(2) *$A((x,\varphi))$ — полуцепное справа артиново справа кольцо*;
(3) *$A((x,\varphi))$ — полуцепное справа кольцо и A — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов*;
(4) *$A((x,\varphi))$ — полуцепное справа кольцо и правый сингулярный идеал кольца A нильпотентен*;
(5) *A — полуцепное справа артиново справа кольцо.*

Теорема 3.5 вытекает из предложения 3.2 и следствия 3.4.

3.6. Сократимые и несократимые суммы подмодулей.

Сумма подмодулей называется *сократимой*, если в ней есть такое слагаемое, при удалении которого из суммы сумма не меняется. Сумма подмодулей (или идеалов) называется *несократимой*, если при удалении любого из её слагаемых сумма меняется.

(1) Если A — кольцо и M — правый A-модуль, то равносильны следующие условия:

(i) любая бесконечная сумма подмодулей $\{M_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ модуля M_A сократима;
(ii) все фактор-модули модуля M_A конечномерны.

(2) Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ, M — правый A-модуль и $A((x,\varphi))$ — кольцо косых рядов Лорана. Если все фактор-модули правого $A((x,\varphi))$-модуля $M((x,\varphi))$ конечномерны, то этот модуль нётеров.

Доказательство. (1) Идея доказательства взята из [67].

(i)⇒(ii). Действительно, пусть N — фактор-модуль модуля M и в нём существует бесконечная прямая сумма ненулевых подмодулей N_α. Тогда рассмотрим их прообразы M_α при каноническом гомоморфизме M_A на N_A. По условию, сумма подмодулей M_α должна быть сократима, т.е. для некоторого β модуль M_β лежит в сумме $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$. Но тогда и модуль N_β лежит в сумме $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} N_\alpha$, что противоречит предположению.

(ii)⇒(i). Пусть $\{M_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ — бесконечное множество подмодулей модуля M. Рассмотрим подмодуль P модуля M, равный сумме

$$\sum_{\beta\in\Omega}\left(M_\beta \cap \sum_{\alpha\neq\beta} M_\alpha\right).$$

Пусть $p = \sum\limits_{\beta\in\Omega} m_\beta$ (лишь конечное число членов суммы отлично от нуля) — какой-то элемент подмодуля P, причём $m_\beta \in M_\beta \cap \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$ для всех β из Ω. Тогда для каждого $\beta\in\Omega$ элемент m_β лежит в модуле $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$, и элемент $p - m_\beta = \sum\limits_{\alpha\neq\beta} m_\alpha$ лежит в модуле $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$, поэтому элемент p также лежит в модуле $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$. Таким образом, для каждого $\beta\in\Omega$ выполнено включение $P \subseteq \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$.

Обозначим через N фактор-модуль M/P, а через N_α — образ подмодуля M_α при каноническом гомоморфизме M на N. Докажем, что модули N_α образуют прямую сумму, для этого нужно доказать, что для каждого $\beta\in\Omega$ пересечение модуля N_β с модулем $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} N_\alpha$ равно нулю или, что то же самое, доказать, что пересечение модуля $M_\beta + P$ с модулем $P + \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$ лежит в P. Как доказано выше, выполнено включение $P \subseteq \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$, поэтому надо доказать только, что пересечение модуля M_β с модулем $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$ лежит в P. Но это верно по определению модуля P.

Таким образом, модули N_α образуют бесконечную прямую сумму в фактор-модуле $N = M/P$ и по условию не могут быть все ненулевыми. Поэтому для некоторого $\beta\in\Omega$ модуль N_β равен нулю и, следовательно, $M_\beta \subseteq P$. Как было доказано выше, выполнено включение $P \subseteq \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$, поэтому $M_\beta \subseteq \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$. Но это и означает, что сумма $\sum\limits_{\beta\in\Omega} M_\beta$ сократима.

(2) Обозначим $R = A((x,\varphi))$. По **1** достаточно доказать, что правый R-модуль $M((x,\varphi))$ не содержит бесконечных несократимых сумм подмодулей.

Допустим, что модуль M_A не является нётеровым. Тогда существует строго возрастающая цепь его подмодулей

$$m_1A \subset m_1A + m_2A \subset m_1A + m_2A + m_3A \subset \ldots.$$

Построим такую систему рядов $f^i \in M((x,\varphi)$, что R-модули f^iR являются слагаемыми бесконечной несократимой суммы в R-модуле $M((x,\varphi)$.

Пусть $g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — сюръективное отображение натуральных чисел на натуральные числа, причем $g^{-1}(n)$ — бесконечное множество для каждого n. (Можно положить, например, $g(n) = n - [\sqrt{n}]^2 + 1$, где через $[x]$ обозначается целая часть от x.)

Зададим ряды $f^i \in M((x,\varphi)$ следующим образом: $f^{g(n)}_{2^n} = m_n$ для каждого n, а все остальные коэффициенты (отличные от вышеуказанных) всех рядов f^i равны нулю.

Предположим теперь, что f^iR не образуют несократимую сумму. Тогда существует такое i, что $f^i \in \sum_{j\neq i} f^jR$. Поэтому $f^i = \sum_{j\neq i} f^jr_j$, причем эта сумма содержит лишь конечное число ненулевых членов. Обозначим через λ наименьшую из степеней младших коэффициентов r_j. В силу выбора отображения g множество $g^{-1}(i)$ бесконечно. Поэтому это множество содержит натуральное число n такое, что $2^n > -\lambda$.

Тогда $f^i_{2^n} = f^{g(n)}_{2^n} = m_n$. Из равенства $f^i = \sum_{j\neq i} f^jr_j$ следует, что

$$m_n \in \sum_{j\neq i, k\leqslant 2^n-\lambda} f^j_kA.$$

Кроме того, коэффициент f^j_k может быть отличен от нуля только если k совпадает с какой-то степенью двойки, причем $k \leqslant 2^n - \lambda < 2^{n+1}$. При k равном 2^n коэффициент f^j_k (при j отличном от i) также равен нулю. Таким образом, $m_n \in \sum_{j\neq i, k<2^n} f^j_kA$, из чего следует включение $m_n \in \sum_{m<n} m_mA$, что противоречит выбору последовательности $\{m_m\}$. Поэтому M — нётеров модуль. $\rhd$ $\square$

3.7. Теорема. *Если A — кольцо с автоморфизмом φ, то все циклические правые $A((x,\varphi))$-модули являются конечномерными в точности тогда, когда кольцо $A((x,\varphi))$ нётерово справа (или в точности тогда, когда кольцо A нётерово справа). При этих условиях радикал Джекобсона кольца $A((x,\varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x,\varphi))$, где N — первичный радикал кольца A*

Доказательство. Так как все циклические правые модули над нётеровым справа кольцом конечномерны, то первое утверждение следует из 3.6(2) и леммы 2.6(6). Второе утверждение следует из теоремы 2.4. $\square$

3.8. Модули над полулокальными кольцами.

Пусть A — полулокальное кольцо.

(1) Существует такое натуральное число n, что полупростой правый A-модуль $A/J(A)$ является прямой суммой n простых модулей. Кроме того, каждый простой правый A-модуль S изоморфен прямому слагаемому полупростого правого A-модуля $A/J(A)$.

(2) Если $S_1, \ldots, S_k$ — попарно неизоморфные простые правые A-модули, то модуль $S_1 \oplus \ldots \oplus S_k$ изоморфен прямому слагаемому циклического полупростого правого A-модуля $A/J(A)$ и, в частности, цикличен.

(3) Каждый циклический полупростой правый A-модуль N изоморфен прямому слагаемому циклического полупростого правого A-модуля $A/J(A)$. Следовательно, N не является прямой суммой k ненулевых модулей при $k > n$, где n — натуральное число из (1).

(4) Если N — прямая сумма k простых модулей и $k > n$, где n — натуральное число из (1), то конечнопорождённый модуль N не цикличен.

(5) Для любого правого A-модуля Безу M все фактор-модули модуля M конечномерны.

(6) Если A — правое кольцо Безу, то все циклические правые A-модули конечномерны.

Доказательство. Утверждения (1)–(3) проверяются непосредственно. Утверждение (4) следует из (3).

(5) Так как все фактор-модули модуля Безу M являются модулями Безу, то достаточно доказать, что M — конечномерный модуль. Допустим противное. Тогда модуль M содержит подмодуль $X = \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$, где все X_i — ненулевые циклические модули. Каждый ненулевой циклический

модуль X_i имеет простой фактор-модуль $X_i/Y_i = S_i$. Обозначим через h естественный эпиморфизм модуля Безу M на фактор-модуль $M/\Big(\bigoplus_{i=1}^{\infty} Y_i\Big)$. Модуль $h(M)$ содержит прямую сумму бесконечного числа простых модулей $h(X_i)$. В силу (4) $h(M)$ содержит конечнопорождённый полупростой подмодуль, не являющийся циклическим. Поэтому модуль $h(M)$ не является модулем Безу. Это противоречит тому, что каждый гомоморфный образ модуля Безу является модулем Безу.

(6) Так как все циклические правые A-модули являются гомоморфными образами модуля A_A, то утверждение следует из (5). □

3.9. Дистрибутивные модули и кольца.

Модуль M называется *дистрибутивным*, если

$$(X + Y) \cap Z = X \cap Z + Y \cap Z$$

для любых его подмодулей X, Y, Z, т.е. решетка подмодулей модуля M дистрибутивна. Прямая сумма дистрибутивных модулей называется *полудистрибутивным* модулем.

Кольцо A называется *дистрибутивным справа* (соответственно, *полудистрибутивным справа*), если A является дистрибутивным (соответственно, полудистрибутивным) правым A-модулем.

Приведенные ниже утверждения (1) и (2) хорошо известны (см. [68], а также, например, [69, утверждения 1.17 и 1.19]). Нам также потребуется известное утверждение (3) (см., например, [69, Theorem 3.22]). Для удобства мы приведем доказательства этих утверждений.

(1) Если A — кольцо и M — правый A-модуль, то модуль M дистрибутивен в точности тогда, когда для любых двух элементов x, y модуля M существуют такие элементы a, b кольца A, что
$$a + b = 1, \quad xaA + ybA \subseteq xA \cap yA.$$

(2) Пусть A — кольцо, M — дистрибутивный правый A-модуль и X, Y — два подмодуля в M с условием $X \cap Y = 0$. Тогда для любых двух элементов $x \in X$ и $y \in Y$ существуют такие элементы a, b кольца A, что
$$a + b = 1, \quad xaA = ybA = 0.$$
Кроме того, между модулями X и Y нет ненулевых гомоморфизмов.

(3) Если A — полулокальное кольцо и M — дистрибутивный правый A-модуль, то M — фактор-конечномерный модуль Безу. В частности, каждое дистрибутивное справа полулокальное кольцо является правым кольцом Безу, над которым все циклические правые модули конечномерны.

(4) Если A — полулокальное кольцо и M — конечная прямая сумма дистрибутивных правых A-модулей, то M — фактор-конечномерный модуль. В частности, каждый циклический правый модуль над полудистрибутивным справа полулокальным кольцом является конечномерным модулем.

Доказательство. (1) Пусть модуль M дистрибутивен и $x, y \in M$. Так как

$$(x + y)A = (x + y)A \cap xA + (x + y)A \cap yA,$$

то существуют такие элементы $b, d \in A$, что

$$(x + y)b \in xA, \quad (x + y)d \in yA, \quad x + y = (x + y)b + (x + y)d.$$

Поэтому

$$yb = (x + y)b - xb \in xA \cap yA, \quad xd = (x + y)d - yd \in xA \cap yA.$$

Положим $a = 1 - b$ и $z = a - d = 1 - b - d$. Тогда

$$1 = a + b, \quad (x + y)z = (x + y) - (x + y)b - (x + y)d = 0,$$
$$xa = xd + xz = xd + (x + y)z - yz = xd - yz,$$
$$yz = -xz \in xA \cap yA, \quad xa \in xA \cap yA.$$

Обратно, пусть $X, Y, Z \in M$ и $z = x + y \in (X + Y) \cap Z$, где $x \in X$ и $y \in Y$. По условию существуют такие элементы $a, b \in A$, что

$$1 = a + b, \quad xa \in yA, \quad yb \in xA.$$

Тогда $zb = xb + yb \in xA \cap zA$,

$$za = xa + ya \in yA \cap zA, \quad z = zb + za \in X \cap Z + Y \cap Z,$$
$$(X + Y) \cap Z \subseteq X \cap Z + Y \cap Z \subseteq (X + Y) \cap Z.$$

(2) Так как $X \cap Y = 0$, то $xA \cap yA = 0$. Согласно (1) существуют такие элементы $a, b \in A$, что

$$a + b = 1, \quad xaA, ybA \subseteq xA \cap yA = 0.$$

Пусть $f\colon X \to Y$ — модульный гомоморфизм, $x' \in X$, $y' = f(x') \in Y$. По доказанному существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $x'a = 0$, $y'b = 0$. Тогда

$$f(x') = y' = y'a + y'b = f(x'a) + 0 = f(0) = 0, \quad f = 0.$$

(3) В силу 3.8(5) достаточно доказать, что M — модуль Безу. Пусть N — конечнопорождённый подмодуль модуля M и $J = J(A)$. Тогда N/NJ — прямая сумма конечного числа простых модулей $S_1, \ldots, S_k$. Так как N/NJ — дистрибутивный модуль, то согласно (2) все модули S_i попарно неизоморфны. Согласно 3.8(2) модуль N/NJ цикличен. Поэтому $N = X + NJ$, где X — циклический модуль. По лемме Накаямы $N = X$ — циклический модуль и M — модуль Безу.

(4) Согласно (3), M — конечная прямая сумма фактор-конечномерных модулей. В [22, Corollary 5.7] доказано, что любая конечная прямая сумма фактор-конечномерных модулей является фактор-конечномерным модулем (см. также [21, Corollary 5.24]). □

3.10. Лемма. *Пусть B — кольцо, содержащее некоторое счётное множество $\{e(i)\}_{i=1}^{\infty}$ таких ненулевых центральных попарно ортогональных идемпотентов $e(i)$, что все кольца $A(i) = e(i)A$ — области, и существует такой элемент $b \in B$, что $e(i)b$ — необратимый ненулевой элемент области $A(i)$ для каждого i.*

Если φ — такой автоморфизм кольца B, что $\varphi(e(i)) = e(i)$ для всех i, то кольцо $B((x, \varphi))$ не является правым кольцом Безу и не является дистрибутивным справа кольцом.

Доказательство. Пусть $R = B((x, \varphi))$ и $C = \bigoplus_{i=1}^{\infty} e(i)B$. Тогда C — идеал кольца B. Обозначим через D идеал кольца B, состоящий из всех таких элементов d, что лишь конечное число проекций $de(i)$ отличны от нуля. Ясно, что $C \subseteq D$ и элемент b не лежит в идеале D, поскольку $be(i) \neq 0$ для всех i. Поскольку $\varphi(e(i)) = e$, то ограничение автоморфизма φ на кольцо $A(i)$ является автоморфизмом кольца $A(i)$. Будем отождествлять кольца $R(i) = e(i)R$ с кольцами $A(i)((x, \varphi_i))$ косых рядов Лорана над $A(i)$. Для каждого элемента a кольца A обозначим через $a(i)$ его проекцию ae_i на кольцо $A(i)$.

Рассмотрим элементы $f = e(1)x + e(2)x^2 + \ldots$ и $b = bx^0$ кольца рядов R. Допустим, что R — правое кольцо Безу. Тогда существует такой ряд g, что $fR + bR = gR$. Из этого равенства вытекает, что все коэффициенты ряда g лежат в правом идеале $C + bB$ кольца B, порождённом коэффициентами рядов f и b. С другой стороны, элемент b также должен лежать в правом идеале кольца B, порождённом коэффициентами ряда g. Поэтому все коэффициенты ряда g не могут лежать в идеале D.

Выберем среди коэффициентов ряда g, не лежащих в D, самый младший. Пусть это g_i. Все коэффициенты ряда g, которые младше g_i, лежат в идеале D. Более того, поскольку их конечное число, то найдется такое натуральное число k, что проекции этих коэффициентов на $A(n)$ равны нулю для всех n, превосходящих k. Поскольку коэффициент g_i лежит в правом идеале $C+bA$ и не лежит в идеале D, то найдется такое число $n > k$, что элемент $g_i(n)$ лежит в правом идеале $bA(n)$ и не равен нулю. Тогда рассмотрим проекцию равенства $gR = fR + bR$ на кольцо $R(n) = e(n)R$. Получаем равенства

$$e(n)gR = g(n)R(n) = f(n)R(n) + b(n)R(n) = e(n)x^n R(n) + b(n)R(n) = R(n) + b(n)R(n) = R(n).$$

Таким образом, ряд $g(n) = e(n)g$ обратим в кольце $R(n)$. Младшим коэффициентом ряда $g(n)$ является элемент $g_i(n) \in A(n)$, поскольку все коэффициенты при более низких степенях равны нулю (в силу того, что $n > k$). Кроме того, элемент $g_i(n)$ лежит в собственном правом идеале $bA(n) = e(n)bA(n)$ кольца $A(n)$ и, следовательно, не обратим в кольце $A(n)$. Тогда, в силу того, что младший член произведения равен произведению младших членов (поскольку $A(n)$ — область), ряд $g(n)$ не обратим в кольце $R(n)$. Получено противоречие; таким образом $B((x,\varphi))$ не является правым кольцом Безу.

Предположим теперь, что кольцо R дистрибутивно справа. Согласно 3.9(1) для элементов b и f дистрибутивного справа кольца R существует такой элемент g кольца R, что $bg \in fR$ и $f(1-g) \in bR$. Непосредственно проверяется, что все коэффициенты всех рядов из fR лежат в правом идеале C, который порождён всеми коэффициентами ряда f. Тогда все коэффициенты ряда bg лежат в C. В частности, для каждого i лишь конечное число проекций $e(n)bg_i = b(n)g_i(n)$ отлично от нуля. Поскольку все кольца $A(n)$ являются областями и проекции $b(n)$ отличны от нуля для всех n, то для каждого i лишь конечное число проекций $g_i(n)$ отлично от нуля. Поэтому все коэффициенты g_i лежат в D.

Пусть младший член ряда g равен $g_{-t}x^{-t}$. Поскольку множество таких индексов i, что $-t \leqslant i \leqslant 0$, конечно, и все коэффициенты g_i лежат в D, найдется такое натуральное n, что все проекции $g_i(n)$ равны нулю при $-t \leqslant i \leqslant 0$. Домножив включение $f(1-g) \in bR$ на центральный идемпотент $e(n)$, получим включение $e(n)f(1-g) \in b(n)R$. Таким образом, $e(n)x^n(1-g) \in b(n)R(n)$. Поскольку $A(n)$ — область, то произвольный ряд из кольца $R(n)$ обратим в точности тогда, когда обратим его младший коэффициент. В силу выбора n младший член ряда $e(n)(1-g)$ равен $e(n)$. Следовательно, ряд $e(n)x^n(1-g)$ обратим в кольце $R(n)$. Тогда элемент $b(n)$ обратим в кольце $R(n)$. Тогда элемент $b(n)$ обратим в кольце $A(n)$. Получено противоречие. □

3.11. Кольца Безу и кольца главных правых идеалов.

(1) Если A — кольцо с автоморфизмом φ, являющееся кольцом главных правых идеалов, то $A((x,\varphi))$ — кольцо главных правых идеалов и радикал Джекобсона кольца $A((x,\varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x,\varphi))$, где N — первичный радикал кольца A.

(2) Кольцо A с автоморфизмом φ является областью главных правых идеалов в точности тогда, когда $A((x,\varphi))$ — область главных правых идеалов. При этих условиях $A((x,\varphi))$ — полупримитивная область.

(3) Если A — кольцо с автоморфизмом φ и $A((x,\varphi))$ — полулокальное правое кольцо Безу, то $A((x,\varphi))$ — кольцо главных правых идеалов.

(4) Если A — дистрибутивная справа правая область Безу, не являющаяся телом (например, кольцо целых чисел), и

$$B = A(1)\times A(2)\times A(3)\times \ldots$$

— прямое произведение счётного числа экземпляров $A(i)$ области A, то B и $B((x))$ — редуцированные кольца, в каждом из которых правый аннулятор каждого элемента порождается центральным идемпотентом и совпадает с левым аннулятором, B — дистрибутивное справа правое кольцо Безу, а кольцо $B((x))$ не является ни правым кольцом Безу, ни дистрибутивным справа кольцом.

Доказательство. Обозначим $R = A((x,\varphi))$.

Утверждение (1) следует из леммы 2.6(8) и теоремы 3.7.

(2) Если A — область главных правых идеалов, то, согласно (1) и 1.2(6), R — область главных правых идеалов.

Теперь пусть R — область главных правых идеалов. Тогда его подкольцо A тоже является областью. Из леммы 1.4(1) вытекает, что область R полупримитивна.

Теперь пусть B — произвольный ненулевой правый идеал области A. Правый идеал $B((x,\varphi))$ области R является главным и порождается каким-либо ненулевым рядом f. Ряд f можно представить в виде ux^k, где $k \in \mathbb{Z}$, а ряд u лежит в $A[[x,\varphi]]$ и имеет ненулевой свободный член b. Так как x^k — обратимый элемент области R, то $gR = fR = B((x,\varphi))$ и $b \in B$. Пусть b' — произвольный элемент изЁB. Тогда $b' =\in B((x,\varphi)) = gR$. Поэтому $b' = gh$ для некоторого ряда h из области R. Так как $b = g_0$ и R — область, то $b' = bh_0$, где h_0 — свободный член ряда $h \in R$ и $h_0 \in A$. Поэтому $B = bA$ — главный правый идеал области A.

(3) Согласно 3.8(6), R — правое кольцо Безу и все циклические правые R-модули конечномерны. По теореме 3.7 правое кольцо Безу R является кольцом главных правых идеалов, его радикал Джекобсона нильпотентен и совпадает с $N((x,\varphi))$, где N — первичный радикал кольца A.

(4) Так как любое прямое произведение редуцированных колец является редуцированным кольцом, то B — редуцированное кольцо. Поскольку B — редуцированное кольцо, то $B((x))$ — редуцированное кольцо.

Для каждого элемента b кольца B его правый аннулятор совпадает с левым аннулятором и порождается центральным идемпотентом e, где компоненты идемпотента e задаются следующим образом: $e(i)$ равно единице области $A(i)$ для тех i, для которых $b(i) = 0$ и $e(i)$ равно нулю для всех остальных i.

Для каждого натурального числа i обозначим через $e(i)$ единицу кольца $A(i)$. В кольце $B((x))$ правый аннулятор каждого его элемента f совпадает с его левым аннулятором и порождается центральным идемпотентом t кольца B, где компоненты идемпотента t задаются следующим образом: $t(i)$ равно единице области $A(i)$ для тех i, для которых $fe(i) = 0$ и $t(i)$ равно нулю для всех остальных i.

Для того, чтобы доказать, что B — правое кольцо Безу, достаточно показать, что любой 2-порождённый правый идеал является главным правым идеалом. Пусть u, v — произвольные элементы кольца B, а $u(i), v(i)$ — проекции элементов u и v на компоненту $A(i)$. Тогда для каждого i существует такое $w(i) \in A$, что $w(i)A = u(i)A + v(i)A$. Для элемента w кольца B с компонентами $w(i)$ выполнено равенство $wB = uB + vB$, что и требовалось доказать.

Чтобы показать, что B — дистрибутивное справа кольцо, достаточно проверить критерий дистрибутивности из 3.9(1). Пусть u, v — произвольные элементы кольца B, а $u(i), v(i)$ — проекции элементов u и v на компоненту $A(i)$. Тогда, в силу дистрибутивности A, для каждого i существует такое $w(i) \in A$, что

$$u(i)w(i) \in v(i)A(i), \quad v(i)(e(i) - w(i)) \in u(i)A(i).$$

Для элемента $w \in B$ с компонентами $w(i)$ выполнены равенства $uw \in v$ и $v(1-w) \in uB$, что и требовалось доказать.

Оставшаяся часть утверждения п. (4) следует из леммы 3.10, применённой к кольцу B, где нужно положить $\varphi = 1_B$. Все компоненты элемента b можно взять равными a, где a — произвольный ненулевой необратимый элемент кольца A. □

3.12. Теорема (см. [75]). *Пусть A — кольцо, φ — его автоморфизм и $R = A((x,\varphi))$ — кольцо косых рядов Лорана. Равносильны следующие условия:*

(1) R — *полуцепное справа кольцо*;
(2) R — *полуцепное справа артиново справа кольцо*;
(3) A — *полуцепное справа артиново справа кольцо.*

Доказательство. Эквивалентность условий (2) и (3) доказана в предложении 3.2. Импликация (2)$\Rightarrow$(1) очевидна.

(1)$\Rightarrow$(2). Так как каждое полуцепное справа кольцо полулокально, то согласно 3.9(4) каждый циклический правый модуль над полуцепным справа кольцом R является фактор-конечномерным модулем. По теореме 3.7 R — нётерово справа кольцо. По предложению 3.2 R — артиново справа полуцепное справа кольцо. □

3.13. (см. [80]).
Пусть A — кольцо и $a \in A$. Строго убывающая цепь

$$a_0A \supsetneq a_1A \supsetneq a_2A \supsetneq a_3A \supsetneq \dots$$

называется *правой пустотелой цепью* элемента a, если $a_0 = a$ и $a_{n+1} = a_n - a_nb_na_n$ для всех $n \geqslant 0$ и некоторых элементов $b_n \in A$.

(1) Кольцо A является полулокальным в точности тогда, когда A не содержит правых пустотелых цепей

$$a_0A \supsetneq a_1A \supsetneq a_2A \supsetneq \dots \supsetneq a_nA \supsetneq \dots, \quad \text{где} \quad a_{i+1} = a_i - a_ib_ia_i$$

(см. [80, Corollary 10]).

(2) Пусть A — кольцо, $a, b \in A$ и $a \in (1-ab)A$. Тогда элемент a обратим справа в кольце A.

Действительно, так как $abA + (1-ab)A = A$ и $ab \in (1-ab)A$, то $abA = A$ (см. [80, Lemma 3]). Следовательно, если кольцо A полулокально, то элемент a обратим.

3.14. Теорема (см. [81]). *Если A — такое кольцо, что кольцо рядов Лорана $A((x))$ полулокально, то A — полусовершенное кольцо и его радикал Джекобсона — нильидеал кольца A.*

Доказательство. Обозначим $R = A((x))$. Допустим, что кольцо A полулокально. По лемме 2.6(4) кольцо A полулокально. Хорошо известно, что если доказать, что радикал Джекобсона $J(A)$ кольца A — нильидеал, то идемпотенты кольца $A/J(A)$ поднимаются по модулю идеала $J(A)$, откуда из полулокальности A вытекает его полусовершенность.

Для доказательства того, что $J(A)$ — нильидеал, рассмотрим элемент $r \in J(A)$. Предположим противное, т.е. $r^\ell \neq 0$ для каждого натурального числа ℓ. Рассмотрим следующую последовательность элементов кольца R:

$$a_0 = rx^{-1}, \quad a_{n+1} = a_n - a_nrx^{-1}a_n \quad \text{для всех } n \geqslant 0.$$

Так как R полулокально, то согласно 3.13(1) существует такое натуральное число $n_0 \in \mathbb{N}$, что $a_{n_0}R = a_{n_0+1}R$. Поэтому

$$a_{n_0} \in (1 - a_{n_0}rx^{-1})R,$$

откуда, согласно 3.13(2), $1 - a_{n_0}rx^{-1}$ — обратимый элемент кольца R. Мы утверждаем, что для любого $n \geqslant 1$ элемент $1 - a_nrx^{-1}$ имеет вид

$$1 - a_nrx^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{2^{n+1}-1} k_ir^ix^{i-1} + r^{2^{n+1}}x^{-2^{n+1}}, \tag{$*$}$$

где $k_i \in \mathbb{Z}$ при $i \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$. Действительно, $1 - a_1 r x^{-1} = 1 - r^2 x^{-2} + r^4 x^{-4}$. Учитывая $(*)$, получаем

$$1 - a_{n+1} r x^{-1} = 1 - \big(a_n - a_n r x^{-1} a_n\big) r x^{-1} = 1 - a_n r x^{-1} + (a_n r x^{-1})^2 =$$
$$= 1 + \sum_{i=1}^{2^{n+1}-1} k_i (r x^{-1})^i + (r x^{-1})^{2^{n+1}} + \left(\sum_{i=1}^{2^{n+1}-1} k_i (r x^{-1})^i + (r x^{-1})^{2^{n+1}} \right)^2 .$$

Теперь наше утверждение доказывается по индукции. Поэтому $f = 1 - a_{n_0} r x^{-1}$ — обратимый элемент вида

$$f = k_0 \cdot 1 + \sum_{i=1}^{2^m-1} k_i r^i x^{-i} + k_{2^m} r^{2^m} x^{-2^m},$$

где $m = n_0 + 1$ и $k_0 = k_{2^m} = 1$.

Так как $f \in U(R)$, то существует такое $g \in R$, что $fg = 1$. Пусть $g = \sum\limits_{j=q} b_j x^j$ для некоторого $q \in \mathbb{Z}$. Заметим, что для каждого $i \neq 0$ коэффициент при x^i в f принадлежит правому идеалу $rA \subseteq J(A)$. Рассматривая коэффициент при x^0 в fg, получаем

$$1 = 1 \cdot b_0 + \sum_{i=1}^{2^m} k_i r^i b_i = b_0 + ra$$

для некоторого $a \in A$. Поэтому $b_0 = 1 - ra \in U(A)$, поскольку $r \in J(A)$. Тогда для коэффициента при x^{-2^m} в fg, имеем

$$0 = r^{2^m} b_0 + \sum_{i=1}^{2^m-1} k_i r^i b_{-(2^m-1)} + k_0 r^0 b_{-2^m}.$$

Так как $b_0 \in U(A)$, то по нашему предположению об r имеем $r^{2^m} \cdot b_0 \neq 0$. Более того, ясно, что $rh \cdot r^{2^m} \cdot b_0 \neq 0$ для каждого натурального числа h. Поэтому существует такое $d < 2^m$, что

$$k_d r^d b_{-(2^m-d)} \neq 0$$

и $r^h \cdot k_d r^d b_{-(2^m-d)} \neq 0$ для каждого h. Кроме того, $k_d \in \mathbb{Z}$; поэтому ясно, что

$$r^h r^d b_{-(2^m-d)} \neq 0 \quad \text{для каждого } h.$$

Так как $2^m - d > 0$, то можно найти наибольшее натуральное число c со свойством

$$r^e \cdot b_{-c} \neq 0$$

для каждого e. Рассматривая коэффициент при $x^{-(2^m+c)}$, получаем

$$0 = r^{2^m} b_{-c} + \sum_{i=1}^{2^m-1} k_i r^i b_{-(2^m+c-i)} + k_0 r^0 b_{-(2^m+c)}.$$

Из предположения о c не трудно видеть, что можно найти такое натуральное число v, что

$$r^v \cdot \left(\sum_{i=1}^{2^m-1} k_i r^i b_{-(2^m+c-i)} + k_0 r^0 b_{-(2^m+c)} \right) = 0.$$

Но тогда

$$0 = r^v \cdot \left(r^{2^m} b_{-c} + \sum_{i=1}^{2^m-1} k_i r^i b_{-(2^m+c-i)} + k_0 r^0 b_{(-2^m+c)} \right) = r^v r^{2^m} b_{-c} \neq 0,$$

противоречие. Поэтому r — нильпотентный элемент of A. $\square$

3.15. Предложение (см. [74])**.** *Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ. Если $A((x,\varphi))$ — полудистрибутивное справа полулокальное кольцо, то $A((x,\varphi))$ и A — артиновы справа кольца.*

Доказательство. Согласно 3.9(4) каждый циклический правый модуль над кольцом $A((x,\varphi))$ является фактор-конечномерным модулем. По теореме 3.7 $A((x,\varphi))$ — нётерово справа кольцо. По предложению 3.2 $A((x,\varphi))$ — артиново справа кольцо. Согласно 2.6(6) кольцо A артиново справа. □

3.16. Открытые вопросы.
Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ.

(1) Если кольцо $A((x,\varphi))$ полулокально, то верно ли, что радикал Джекобсона $J(A)$ — нильидеал кольца A?
(2) В терминах кольца A найти критерий того, что кольцо $A((x))$ полулокально.
(3) В терминах кольца A и автоморфизма φ найти критерий того, что кольцо $A((x,\varphi))$ полулокально.
(4) Верно ли, что $A((x,\varphi))$ является полудистрибутивным справа полулокальным кольцом в точности тогда, когда A — артиново справа полудистрибутивное справа кольцо?

4. Первичные и полупервичные кольца косых рядов Лорана

В 4.1 ниже мы напомним ряд хорошо известных определений и утверждений, которые используются без специальных ссылок и проверяются непосредственно (см., например, [69]).

4.1. Некоторые классы модулей и колец.

(1) Подмодуль N модуля M называется *вполне инвариантным*, если $f(N) \subseteq N$ для любого эндоморфизма f модуля M. Модуль называется *инвариантным*(соответственно, *квазиинвариантным*), если в нем все подмодули (соответственно, максимальные подмодули) вполне инвариантны. Таким образом, инвариантные справа (соответственно, квазиинвариантные справа) кольца — это кольца, у которых все правые идеалы (соответственно, максимальные правые идеалы) являются идеалами.
(2) Кольцо называется *нормальным* или *абелевым*, если все его идемпотенты центральны. Каждое инвариантное справа или слева кольцо является нормальным. Кольцо эндоморфизмов инвариантного модуля является нормальным кольцом.
(3) Кольцо называется *первичным* (соответственно, областью), если произведение любых его двух ненулевых идеалов (соответственно, элементов) не равно нулю. Кольцо называется *полупервичным* (соответственно, редуцированным), если любая степень каждого его ненулевого идеала (соответственно, элемента) не равна нулю. Все первичные кольца (соответственно, области) и подпрямые произведения полупервичных (соответственно, редуцированных) колец являются полупервичными (соответственно, редуцированными) кольцами.
(4) Кольцо A называется *простым*, если любой его ненулевой идеал совпадает с A. Все тела являются простыми кольцами и все кольца матриц над простыми кольцами являются простыми кольцами.

4.2.
Пусть A — кольцо и φ — его автоморфизм и $R = A((x,\varphi))$.

(1) $R = ((\varphi^{-1},x))A$ и $A[x,\varphi] = [\varphi^{-1},x]A$. Если B и C — любые правые идеалы в A, то
$$(B+C)((x,\varphi)) = B((x,\varphi)) + C((x,\varphi)), \quad B((x,\varphi)) \cap C((x,\varphi)) = (B\cap C)((x,\varphi)).$$
Поэтому решетка правых идеалов кольца A изоморфна подрешетке решетки правых идеалов в R.
(2) Если B — правый идеал в A, то $B((x,\varphi))$ — правый идеал в R. Кроме того, если $B^n = 0$ и $\varphi(B) \subseteq B$, то $(B((x,\varphi)))^n = 0$. В частности, $B((x,\varphi)) \subseteq J(R)$.

(3) Если B — идеал в A, то $B((x,\varphi))$ — идеал в R в точности тогда, когда $\varphi(B) \subseteq B$. Кроме того, если B — идеал в A и $\varphi(B) = B$, то $B((x,\varphi))$ — идеал в R, а фактор-кольцо $R/B((x,\varphi))$ изоморфно кольцу косых рядов Лорана $(A/B)((x,\overline{\varphi}))$, где $\overline{\varphi}$ — автоморфизм кольца A/B, индуцированный автоморфизмом φ кольца A.

(4) Если B и C — такие идеалы в A, что $\varphi(B) \subseteq B$, $\varphi(C) \subseteq C$ и $BC = 0$, то $B((x,\varphi))$ и $C((x,\varphi))$ — идеалы в R и $B((x,\varphi))C((x,\varphi)) = 0$.

(5) Если F — правый идеал в R, то $\lambda(F)$ — правый идеал в A и $\lambda(F)$ совпадает со множеством свободных членов всех рядов из $F \cap A[[x,\varphi]]$.

(6) Если A — конечное прямое произведение колец $A_1, \ldots, A_n$ с единицами $e_1, \ldots, e_n$ и $\varphi(e_i) = e_i$ для всех i, то для каждого i автоморфизм φ индуцирует автоморфизм φ_i кольца A_i и

$$R \cong A_1((x,\varphi_1)) \times \ldots \times A_n((x,\varphi_n)).$$

(7) Если F — ненулевой идеал в R, то $\lambda(F)$ — ненулевой идеал в A, $\lambda(F) = \varphi(\lambda(F))$ и $\lambda(F)\lambda(G) \subseteq \lambda(FG)$ для каждого идеала G в R.

(8) Если элемент $a \in A$ обратим справа (соответственно, слева) в R, то a обратим справа (соответственно, слева) в A. Если $f = \sum\limits_{i=m}^{\infty} a_i x^i$ — такой ряд из R, что $a_i \in A$ и младший коэффициент a_m обратим справа (соответственно, слева) в A, то ряд f обратим справа (соответственно, слева) в R, причем если f имеет степень 0 (т.е. $m = 0$), то обратный справа (соответственно, слева) ряд для f тоже имеет степень 0.

(9) Если F — правый идеал в R и $\lambda(F) = A$, то $F = R$.

(10) Если M — максимальный правый идеал в A, то $M((x,\varphi))$ — максимальный правый идеал в R.

Доказательство. Утверждения (1)–(6) проверяются непосредственно.

(7) Без ограничения общности можно считать, что $F \neq 0$ и $\lambda(F)$ — ненулевой идеал в A. Пусть $0 \neq a \in \lambda(F)$. Существует такой ряд $f \in F \cap A[[x,\varphi]]$, что a — свободный член ряда f. Так как F — идеал в R, то $xf \in F$ и $x^{-1}f \in F$. Кроме того,

$$\varphi(a) = \lambda(xf), \quad \varphi^{-1}(a) = \lambda(x^{-1}f).$$

Поэтому

$$\varphi(\lambda(F)) \subseteq \lambda(F), \quad \varphi^{-1}(\lambda(F)) \subseteq \lambda(F).$$

(8) Первое утверждение проверяется непосредственно. Докажем второе. Допустим, что $a_m a = 1$ для некоторого $a \in A$. Для каждого целого числа $j \geqslant 0$ положим $g_j = a_{m+j}\varphi^j(a) \in A$. Кроме того, положим

$$g = fx^{-m}a = \sum_{i=m}^{\infty} a_i x^{i-m} a = \sum_{j=0}^{\infty} g_j x^j \in A[[x,\varphi]] \subseteq R.$$

Тогда $g_0 = 1$. Согласно 1.1(3) ряд g обратим в $A[[x,\varphi]] \subseteq R$. Поэтому

$$fx^{-m}ag^{-1} = gg^{-1} = 1.$$

Таким образом, ряд f обратим справа в R, причем если f имеет степень 0, то обратный справа ряд для f тоже имеет степень 0. Левая обратимость рассматривается аналогично.

(9) Согласно (5), $\lambda(F)$ — правый идеал в A и существует ряд $f \in F$ с младшим членом 1. Согласно (8), $f \in U(R)$. Поэтому $F = A$.

(10) Достаточно доказать, что для каждого ряда $t \in R \setminus M((x,\varphi))$ существуют такие $h \in M((x,\varphi))$ и $g \in R$, что $h + tg = 1$. Без ограничения общности можно считать, что $t = \sum\limits_{i=0}^{\infty} t_i x^i$,

где $0 \neq t_0 \in A \setminus M$ и $t_i \in A$ для всех i. Так как M — максимальный правый идеал кольца A, то $m_0 + t_0 a_0 = 1$ для некоторых $m_0 \in M$ и $a_0 \in A$. Тогда

$$m_0 + t a_0 = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} t_i \varphi^i(a_0) x^i.$$

Поэтому $(m_0 + t a_0) f = 1$ для некоторого $f \in R$. Обозначим $h = m_0 f \in \overline{M}$ и $g = a_0 f \in R$. Тогда $h + tg = 1$. □

4.3.

Пусть A — кольцо и φ — его автоморфизм и $R = A((x, \varphi))$.

(1) $J(R) \subseteq (J(A))((x, \varphi))$, т.е. для любого ряда

$$f = \sum_{i=m}^{\infty} f_i x^i \in J(R), \quad f_i \in A,$$

все коэффициенты f_i лежат в $J(A)$, $\varphi(J(A)) = J(A)$, а кольцо $R/(J(A))((x, \varphi))$ изоморфно кольцу косых рядов Лорана $(A/J(A))((x, \overline{\varphi}))$, где $\overline{\varphi}$ — автоморфизм кольца $A/J(A)$, индуцированный автоморфизмом φ кольца A. Поэтому кольца $R/(J(A))((x, \varphi))$ и $(A/J(A))((x, \overline{\varphi}))$ изоморфны одному фактор-кольцу кольца $R/J(R)$. В частности, если A полупримитивно, то R полупримитивно.

(2) Если R полулокально, то A полулокально.

(3) Если $n \in \mathbb{N}$ и $(J(A))^n = 0$, то

$$J(R) = (J(A))((x, \varphi)), \quad (J(R))^n = 0.$$

(4) Если R конечномерно справа, то A конечномерно справа.

(5) Пусть N — идеал в A, $\varphi(N) = N$, $\overline{\varphi}$ — автоморфизм A/N, индуцированный автоморфизмом φ, и кольца R и $(A/N)((x, \overline{\varphi}))$ конечномерны справа. Тогда кольца A и A/N конечномерны справа.

(6) Пусть B — такой идеал в A, что $\varphi(B) = B$ и кольцо косых рядов Лорана $(A/B)((x, \overline{\varphi}))$ полупримитивно, где $\overline{\varphi}$ — автоморфизм кольца A/B, индуцированный автоморфизмом φ. Тогда $B((x, \varphi)) \supseteq J(R)$. Поэтому если $B((x, \varphi)) \subseteq J(R)$, то $J(R) = B((x, \varphi))$.

(7) Если N_1 — сумма всех нильпотентных идеалов в A, то $N_1((x))$ — идеал в $A((x))$, лежащий в сумме всех нильпотентных идеалов кольца $A((x))$; в частности, идеал $N_1((x))$ лежит в радикале Джекобсона кольца $A((x))$.

(8) R — тело в точности тогда, когда A — тело.

(9) $A((x, \varphi))$ — область $\Leftrightarrow$ $A[x, x^{-1}, \varphi]$ — область $\Leftrightarrow$ A — область.

Доказательство. (1) Пусть $\{M_i\}_{i \in I} = \max(A_A)$. Согласно 4.2(10) $M_i((x, \varphi)) \in \max(R_R)$ для любого i. Поэтому

$$J(R) \subseteq \bigcap_{i \in I} \big(M_i((x, \varphi))\big) = (J(A))((x, \varphi)).$$

Если M — правый идеал в A, то

$$M \in \max(A_A) \ \Leftrightarrow \ \varphi(M) \in \max(A_A) \ \Leftrightarrow \ \varphi^{-1}(M) \in \max(A_A).$$

Поэтому $\varphi(J(A)) = J(A)$. Согласно 4.2(3)

$$R/(J(A))((x, \varphi)) \cong (A/J(A))((x, \overline{\varphi})).$$

(2) Утверждение следует из (1) и того факта, что каждое фактор-кольцо полулокального кольца полулокально.

(3) Утверждение следует из того, что $(J(A))((x, \varphi)) \subseteq J(R)$ согласно 4.2(2) и $J(R)$ лежит в $(J(A))((x, \varphi))$ согласно (1).

Утверждение (4) следует из 4.2(1). Утверждение (5) следует из (4) и 4.2(3).

(6) Так как кольцо $(A/B)((x,\overline{\varphi}))$ полупримитивно и существует естественный кольцевой изоморфизм
$$R/(B((x,\varphi))\ ) \cong (A/B)((x,\overline{\varphi})),$$
то кольцо $R/(B((x,\varphi))\ )$ полупримитивно. Поэтому $B((x,\varphi)) \supseteq J(R)$.

Утверждение (7) следует из 4.2(2). Утверждение (8) следует из 4.2(8).

(9) Если R — область, то его подкольцо $A[x,x^{-1},\varphi]$ — область. Если $A[x,x^{-1},\varphi]$ — область, то его подкольцо A — область. Если A — область, то младший коэффициент произведения любых двух ненулевых рядов в R не равен нулю, откуда R — область. □

4.4.

Пусть A — кольцо и φ — его автоморфизм, M — правый A-модуль и $R \equiv A((x,\varphi))$.

(1) Если $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_iA$ для некоторых $m_1,\dots,m_n \in M$, то $M((x,\varphi)) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_iR$.

(2) Если Y и Z — не совпадающие подмодули в M_A, то
$$Y((x,\varphi)) \neq Z((x,\varphi)), \quad (Y+Z)((x,\varphi)) = Y((x,\varphi)) + Z((x,\varphi)),$$
$$(Y\cap Z)((x,\varphi)) = Y((x,\varphi)) \cap Z((x,\varphi)).$$
Поэтому решетка всех подмодулей в M_A изоморфна подрешетке решетки подмодулей правого R-модуля $M((x,\varphi))$.

(3) $N = \lambda(N((x,\varphi)))$ для каждого подмодуля N в M_A.

(4) Решетка всех подмодулей в M_A изоморфна подрешетке решетки всех подмодулей правого R-модуля $M((x,\varphi))$. В частности, если $M((x,\varphi))$ — нётеров (соответственно, артинов, дистрибутивный, цепной) R-модуль, то M — нётеров (соответственно, артинов, дистрибутивный, цепной) A-модуль.

(5) Для каждого ряда $f \in M((x,\varphi))$ существует такой ряд $g \in M[[x,\varphi]]$, что g имеет младшую степень 0 и $f\overline{A} = g\overline{A}$.

(6) Пусть F и G — подмодули правого R-модуля $M((x,\varphi))$, $F \subseteq G$, $\lambda(F) = \lambda(G)$ и правый A-модуль $\lambda(G)$ конечно порождён. Тогда $F = G$.

(7) Если M_A — нётеров модуль, то существует такое отображение λ множества всех подмодулей правого R-модуля $M((x,\varphi))$ в множество всех подмодулей A-модуля M, что λ сохраняет собственные включения; в частности, $M((x,\varphi))$ — нётеров R-модуль.

(8) M — артинов и нётеров A-модуль в точности тогда, когда $M((x,\varphi))$ — артинов и нётеров R-модуль. В этом случае композиционная длина d_A модуля M_A равна длине d_R модуля $M((x,\varphi))_R$.

(9) M — простой A-модуль в точности тогда, когда $M((x,\varphi))$ — простой R-модуль.

(10) Если M — конечно порождённый полупростой A-модуль, то $M((x,\varphi))$ — конечно порождённый полупростой R-модуль.

Доказательство. Утверждения (1)–(3) проверяются непосредственно. Утверждение (4) следует из (2).

(5) Пусть t — младшая степень ряда f и $g \equiv fx^{-t}$. Так как $x^{-t} \in U(R)$ и g имеет младшую степень 0, то g — требуемый ряд.

(6) Можно считать, что $F \neq 0$. Существуют такие ненулевые $f_1,\dots,f_m \in F$, что
$$\lambda(F) = \sum_{i=1}^{m} \lambda(f_i)A.$$
Согласно (5) можно считать, что все f_i имеют младшую степень 0. Надо доказать, что F содержит все ненулевые $g \in G$. Согласно (5) можно считать, что g имеет младшую степень 0. Мы построим

такие $a_{ij} \in A$ (при $i = 1, \ldots, m$ и $j = 0, 1, 2 \ldots$), что

$$g - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} f_i a_{ij} x^j$$

имеет младшую степень $> n$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Так как

$$\lambda(g) \in \lambda(G) = \lambda(F) = \sum_{i=}^{m} \lambda(f_i) A,$$

то $\lambda(g) = \lambda(f_1)a_{10} + \ldots + \lambda(f_m)a_{m0}$ для некоторых $a_{i0} \in A$. Так как все $f_1, \ldots, f_m, g$ имеют младшую степень 0, то $g - (f_1 a_{10} + \ldots + f_m a_{m0})$ должен иметь младшую степень > 0.

Допустим, что при $i = 1, \ldots, m$ и $j = 0, 1, \ldots, n$ построены такие $a_{ij} \in A$, что

$$h = g - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} f_i a_{ij} x^j$$

имеет младшую степень $> n$. Заметим, что $h \in G$. Обозначим через h_{n+1} коэффициент при x^{n+1} в h.

Либо $h_{n+1} = 0$, либо $h_{n+1} = \lambda(h)$. Тогда $h_{n+1} \in \lambda(G)$ в обоих случаях. Существуют такие $a_{i,n+1} \in A$, что

$$h_{n+1} = \lambda(f_1)a_{1,n+1} + \ldots + \lambda(f_m)a_{m,n+1},$$
$$h_{n+1} - (f_1 a_{1,n+1} x^{n+1} + \ldots + f_m a_{m,n+1} x^{n+1})$$

имеет младшую степень $> n + 1$. Это завершает шаг индукции. Наконец, полагая

$$d_i \equiv \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

получаем $g = f_1 d_1 + \ldots + f_m d_m$. Поэтому $g \in F$.

Утверждение (7) следует из (6).

(8) Согласно (7) и (4), M — артинов и нётеров A-модуль в точности тогда, когда $M((x, \varphi))$ — артинов и нётеров R-модуль. Согласно (4), $d_A \leqslant d_R$. Согласно (7), $d_R \leqslant d_A$.

Утверждение (9) следует из (7) и (4).

(10) Пусть $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i A$, где все A-модули $m_i A$ просты. Согласно 4.2, $M((x, \varphi)) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i R$. Согласно (9), все R-модули $m_i R$ просты. Поэтому $M((x, \varphi))$ — конечно порождённый полупростой R-модуль. □

4.5. Предложение. *Если φ — автоморфизм кольца A, то равносильны следующие условия*:

(1) *$A((x, \varphi))$ — простое кольцо*;

(2) *$\varphi(B) \not\subseteq B$ для любого ненулевого собственного идеала B в A*;

(3) *$\varphi(B) \neq B$ для любого ненулевого собственного идеала B в A.*

Доказательство. Обозначим $R = A((x, \varphi))$. Импликация (2)⇒(3) очевидна.

(3)⇒(1). Пусть F — ненулевой идеал в R. Тогда $\lambda(F)$ — ненулевой идеал в A и $\lambda(F) = \varphi(\lambda(F))$. Согласно условию (3), $\lambda(F) = A$. Согласно 4.2(9), $F = R$.

(1)⇒(2). Допустим противное. Согласно 4.2(3), $B((x, \varphi))$ — ненулевой идеал в R. Так как R — простое кольцо, то $B((x, \varphi)) = R$. Поэтому $B = A$. Получено противоречие. □

4.6. Пример. Существуют простые кольца косых рядов Лорана, у которых кольца коэффициентов не просты.

Пусть A_1 и A_2 — два экземпляра поля F, A — прямое произведение колец A_1 и A_2, φ — такой автоморфизм кольца A, что $\varphi(a_1, a_2) = (a_2, a_1)$ для всех $a_1 \in A_1$ и $a_2 \in A_2$. Тогда A не просто и согласно 4.2 кольцо $A((x, \varphi))$ просто.

4.7. Предложение. *Если φ — автоморфизм кольца A, то равносильны следующие условия*:

(1) *$A((x, \varphi))$ — первичное кольцо*;

(2) *A не имеет таких ненулевых идеалов B и C, что*

$$BC = 0, \quad \varphi(B) \subseteq B, \quad \varphi(C) \subseteq C;$$

(3) *A не имеет таких ненулевых идеалов B и C, что*

$$BC = 0, \quad \varphi(B) = B, \quad \varphi(C) = C.$$

Доказательство. Обозначим $R = A((x, \varphi))$. Импликация (2)$\Rightarrow$(3) очевидна.

(3)$\Rightarrow$(1). Допустим, что R имеет такие ненулевые идеалы F и G, что $FG = 0$. Согласно 4.2(7),

$$\lambda(F)\lambda(G) \subseteq \lambda(FG) = \lambda(0) = 0.$$

Согласно 4.2(7),

$$\varphi(\lambda(F)) = \lambda(F), \quad \varphi(\lambda(G)) = \lambda(G).$$

Получено противоречие.

(1)$\Rightarrow$(2). Допустим, что A имеет такие ненулевые идеалы B и C, что

$$BC = 0, \quad \varphi(B) \subseteq B, \quad \varphi(C) \subseteq C.$$

Согласно 4.2(4), $B((x, \varphi))$ и $C((x, \varphi))$ — идеалы кольца R и $B((x, \varphi))C((x, \varphi)) = 0$. Получено противоречие. □

4.8. Предложение. *Если φ — автоморфизм кольца A, то равносильны следующие условия*:

(1) *$A((x, \varphi))$ — полупервичное кольцо*;

(2) *$\varphi(B) \not\subseteq B$ для любого ненулевого нильпотентного идеала B в A*;

(3) *A не имеет такого ненулевого идеала B, что $\varphi(B) = B$ и $B^2 = 0$.*

Доказательство. Обозначим $R = A((x, \varphi))$. Импликация (2)$\Rightarrow$(3) очевидна.

(3)$\Rightarrow$(1). Допустим, что R имеет такой ненулевой идеал F, что $F^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Согласно 4.2(7),

$$(\lambda(F))^n \subseteq \lambda(F^n) = \lambda(0) = 0.$$

Кроме того, $\varphi(\lambda(F)) = \lambda(F)$ согласно 4.2(7). Получено противоречие.

(1)$\Rightarrow$(2). Допустим, что A имеет такой ненулевой нильпотентный идеал B, что $\varphi(B) \subseteq B$. Согласно 4.2(4) $B((x, \varphi))$ — идеал в R и $(B((x, \varphi)))^n = 0$. Получено противоречие. □

4.9.

Пусть A — кольцо и φ — его автоморфизм.

(1) Если A полупервично, то $A((x, \varphi))$ — полупервичное кольцо.

(2) Если A — кольцо с условием максимальности для нильпотентных идеалов, то $A((x, \varphi))$ полупервично в точности тогда, когда A полупервично.

Доказательство. Утверждение (1) следует из 4.8.

(2) Импликация $\Leftarrow$ следует из (1). Для доказательства импликации $\Rightarrow$ допустим противное. Тогда $B^2 = 0$ для некоторого ненулевого идеала B в A. Для каждого $i \in \mathbb{Z}$ имеем

$$(\varphi^i(B))^2 = 0, \quad (B + \varphi(B) + \ldots + \varphi^i(B))^{i+2} = 0.$$

Так как A — кольцо с условием максимальности для нильпотентных идеалов, то

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i(B) = \sum_{i=0}^{n} \varphi^i(B) \equiv \overline{B}$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\overline{B}$ — ненулевой нильпотентный идеал в A и $\varphi(\overline{B}) \subseteq \overline{B}$. Согласно 4.8, $A((x,\varphi))$ не полупервично; получено противоречие. □

4.10. Пример. Существуют кольцо A и его автоморфизм α, для которых кольцо $A((x,\varphi))$ полупервично и A не полупервично.

Пусть F — поле, $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ — счётное множество переменных, $\overline{A} \equiv F[\{x_i\}]_{i\in\mathbb{Z}}$ — кольцо многочленов от всех переменных x_i, A — фактор-кольцо кольца $\overline{A}$ по идеалу, порождённому всеми элементами x_i^2, $h\colon \overline{A} \to A$ — естественный эпиморфизм и $\overline{L}$ — множество всех полилинейных многочленов над $\overline{A}$. Тогда $A = h(\overline{L})$ и A не полупервично. Каждый элемент $a \in A$ имеет следующий вид:

$$a = h\left(\sum f_{i_1,\ldots,i_n} x_{i_1} \ldots x_{i_n}\right), \quad f_{i_1,\ldots,i_n} \in F, \quad i_j \neq i_k \text{ при } j \neq k.$$

Равенство

$$\alpha\left(h\left(\sum f_{i_1,\ldots,i_n} x_{i_1} \ldots x_{i_n}\right)\right) = h\left(\sum f_{i_1,\ldots,i_n} x_{i_1+1} \ldots x_{i_n+1}\right)$$

задает автоморфизм α кольца A. Допустим, что кольцо $A((x,\alpha))$ не полупервично. Согласно 4.8 A имеет такой ненулевой идеал B, что $\alpha(B) = B$ и $B^2 = 0$. Пусть

$$0 \neq b = h\left(\sum f_{i_1,\ldots,i_n} x_{i_1} \ldots x_{i_n}\right) \in B.$$

Существует такое натуральное число m, что

$$\alpha^m(b) = h\left(\sum f_{i_1,\ldots,i_n} x_{i_1+m} \ldots x_{i_n+m}\right), \quad i_j \neq i_k + m,$$

для $j,k = 1,\ldots,n$. Тогда $b\alpha^m(b) \neq 0$. С другой стороны, $b\alpha^m(b) \in B^2 = 0$, поскольку $\alpha(B) = B$ и $B^2 = 0$. Получено противоречие.

4.11. Предложение. *Пусть A — кольцо и φ — его автоморфизм.*

(1) *$A((x,\varphi))$ — нётерово справа полупервичное кольцо в точности тогда, когда A — нётерово справа полупервичное кольцо.*

(2) *$A((x,\varphi))$ — полупростое кольцо в точности тогда, когда A — полупростое кольцо.*

(3) *$A((x,\varphi))$ — первичное артиново кольцо в точности тогда, когда A — полупростое кольцо и A не имеет таких ненулевых идеалов B и C, что*

$$BC = 0, \quad \varphi(B) = B, \quad \varphi(C) = C.$$

Доказательство. Обозначим $R = A((x,\varphi))$.

(1) Так как согласно 4.4(4) и 4.4(7) можно считать, что R и A — нётеровы справа кольца, то (1) следует из 4.9(2).

(2) Импликация $\Leftarrow$ следует из 4.4(10). Докажем импликацию $\Rightarrow$. Полупростое кольцо R — артиново справа полупервичное кольцо. Согласно 4.4(4), A артиново справа. Согласно (1), A полупервично. Артиново справа полупервичное кольцо A полупросто.

(3) Согласно (2) можно считать, что R и A — полупростые кольца. Поэтому утверждение следует из 4.5. □

4.12. Пример. Существует первичное артиново кольцо косых рядов Лорана, у которого кольцо коэффициентов не первично.

Доказательство. Пусть B_1 и B_2 — две копии поля F, B — прямое произведение полей B_1 и B_2 и φ — такой автоморфизм кольца B, что $\varphi(b_1, b_2) = (b_2, b_1)$ для всех $b_1 \in B_1$ и $b_2 \in B_2$. Тогда B — полупростое непервичное кольцо и $B((x, \varphi))$ — первичное артиново кольцо согласно 4.11(3). $\square$

4.13. Открытые вопросы.
Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ и $R = A((x, \varphi))$.

(1) Найти условия для A и φ, равносильные тому, что R — примитивное справа (соответственно, слева) кольцо.
(2) Найти условия для A и φ, равносильные тому, что R — несингулярное справа (соответственно, слева) кольцо.

5. Регулярные и бирегулярные кольца рядов Лорана

В п. 5.1 собран ряд хорошо известных определений и утверждений, которые используются без специальных ссылок и проверяются непосредственно (см., например, [25, 69, 71]). Напомним, что $\operatorname{End} M$ — это *кольцо эндоморфизмов* модуля M.

5.1. Регулярные и строго регулярные модули и кольца.

(1) Модуль M называется *регулярным*, если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:
  (a) в M каждый циклический подмодуль является прямым слагаемым;
  (b) в M каждый конечнопорождённый подмодуль является прямым слагаемым;
  (c) для каждого конечнопорождённого подмодуля X модуля M существует такой идемпотент e кольца эндоморфизмов $\operatorname{End} M$ модуля M, что $X = eM$.

  Каждый полупростой модуль регулярен. Прямые произведения бесконечного числа тел являются регулярными неполупростыми модулями.
(2) Модуль M называется *строго регулярным*, если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:
  (a) в M каждый циклический подмодуль является вполне инвариантным прямым слагаемым;
  (b) в M каждый конечнопорождённый подмодуль является вполне инвариантным прямым слагаемым;
  (c) для каждого конечнопорождённого подмодуля X модуля M существует такой центральный идемпотент e кольца эндоморфизмов $\operatorname{End} M$, что $X = eM$.
(3) Кольцо A называется *регулярным* (по фон Нейману), если оно удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:
  (a) модуль A_A (модуль ${}_AA$) регулярен;
  (b) в A каждый главный правый (левый) идеал порождается идемпотентом;
  (c) в A каждый конечнопорождённый правый (левый) идеал порождается идемпотентом;
  (d) $a \in aAa$ для любого элемента $a \in A$.
(4) Кольцо A называется *строго регулярным*, если оно удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:
  (a) модуль A_A (модуль ${}_AA$) строго регулярен;
  (b) в A каждый главный правый (левый) идеал порождается центральным идемпотентом;
  (c) в A каждый конечнопорождённый правый (левый) идеал порождается центральным идемпотентом;
  (d) $a \in a^2A$ для любого элемента $a \in A$;
  (e) $a \in Aa^2$ для любого элемента $a \in A$;
  (f) A — регулярное нормальное кольцо;

(g) A — регулярное дистрибутивное инвариантное кольцо;
(h) A — регулярное квазиинвариантное справа или слева кольцо;
(i) A — регулярное дистрибутивное справа или слева кольцо;
(j) A — регулярное редуцированное кольцо;
(k) каждый элемент кольца A является произведением центрального идемпотента и обратимого элемента.

При $n \geqslant 2$ кольцо всех $n \times n$ матриц над телом регулярно, но не строго регулярно.

(5) Кольцо называется *бирегулярным*, если каждый его двусторонний идеал, порождённый одним элементом, порождается центральным идемпотентом. Любое конечное прямое произведение простых колец является бирегулярным кольцом. Каждое бирегулярное кольцо полупервично. Все строго регулярные кольца бирегулярны. При $n \geqslant 2$ кольцо всех $n \times n$ матриц над телом бирегулярно, но не строго регулярно.

5.2. φ-Редуцированные кольца.

Кольцо A с автоморфизмом φ называется *φ-редуцированным*, если A — редуцированное кольцо и $AaA \cap A\varphi(a)A \neq 0$ для каждого ненулевого $a \in A$.

Если φ — автоморфизм кольца A, то равносильны следующие условия:

(1) $((\varphi, x))A$ — редуцированное кольцо;
(2) A — φ-редуцированное кольцо;
(3) A — редуцированное кольцо и
$$X \cap \varphi(X) \neq 0, \qquad X \cap \varphi^{-1}(X) \neq 0$$
для каждого ненулевого идеала X в A;
(4) A — редуцированное кольцо и $B \cap \varphi^n(C) \neq 0$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$ и любых таких идеалов B и C в A, что $B \cap C \neq 0$;
(5) $((\varphi, x))A$ — полупримитивное редуцированное кольцо и A — φ-редуцированное кольцо.

Доказательство. Обозначим $R = ((\varphi, x))A$. Импликации (2)⇒(3) и (5)⇒(1) проверяются непосредственно.

(1)⇒(2). Пусть $a \in A$ и $AaA \cap A\varphi(a)A = 0$. Тогда
$$\varphi(a)a \in AaA \cap A\varphi(a)A = 0, \quad (xa)^2 = xaxa = x^2\varphi(a)a = 0.$$
Так как R редуцированно, то $xa = 0$ и $a = 0$.

(3)⇒(4). По условию (3)
$$0 \neq (B \cap C) \cap \varphi(B \cap C) \subseteq B \cap \varphi(C),$$
$$0 \neq (B \cap C) \cap \varphi^{-1}(B \cap C) \subseteq B \cap \varphi^{-1}(C).$$
Мы доказали(4) для случаев $n = 1$ и $n = -1$.

Будем вести индукцию по $|n|$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Допустим, что условие (4) верно для всех таких n, что $|n| \leqslant k$. Тогда
$$B \cap \varphi^k(C) \neq 0, \quad B \cap \varphi^{-k}(C) \neq 0.$$
По условию (3)
$$0 \neq (B \cap \varphi^k(C)) \cap \varphi(B \cap \varphi^k(C)) \subseteq B \cap \varphi^{k+1}(C),$$
$$0 \neq (B \cap \varphi^{-k}(C)) \cap \varphi^{-1}(B \cap \varphi^{-k}(C)) \subseteq B \cap \varphi^{-k-1}(C).$$

(4)⇒(1). Допустим, что $f = \sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i x^i \in R$, $a_i \in A$ для всех i и $a_n \neq 0$. По условию (4) $Aa_nA \cap A\varphi^n(a_n)A \neq 0$. Так как кольцо A редуцировано, то $a_n\varphi^n(a_n) \neq 0$. Поэтому $0 \neq a_n\varphi^n(a_n)$ — канонический коэффициент младшего члена ряда f^2, $f^2 \neq 0$ и R редуцированно.

(1)+(2)+(3)+(4)⇒(5). Согласно (1) и (2) кольцо R является редуцированным, а кольцо A — φ-редуцированным. Допустим, что $J(R) \neq 0$. Существует такой ряд $f = \sum\limits_{i=-1}^{\infty} f_i x^i \in J(R)$, что $f_{-1} \neq 0$ и все f_i лежат в A. Так как $f \in J(R)$, то $1 - f \in U(R)$. Обозначим

$$g = (1-f)^{-1} = \sum_{j=-m}^{\infty} g_j x^j \in R, \quad g_{-m} \neq 0, \quad \forall g_j \in A.$$

Рассмотрим случай $m > 0$. Сравнив коэффициенты при x^{-m-1}, получим $f_{-1}\varphi^{-1}(g_{-m}) = 0$. Так как кольцо A редуцировано, то $Af_{-1}A \cap A\varphi^{-1}(g_{-m})A = 0$. По условию (3) $g_{-m}f_{-1} = 0$. Сравнив коэффициенты при x^{-m}, получаем

$$f_{-1}\varphi^{-1}(g_{-m+1}) + (1 - f_0)g_{-m} = 0.$$

Домножая это равенство на g_{-m} и учитывая, что $g_{-m}f_{-1} = 0$, получаем

$$0 = g_{-m}f_{-1}\varphi^{-1}(g_{-m+1}) + g_{-m}(1-f_0)g_{-m} = g_{-m}(1-f_0)g_{-m}.$$

Тогда $(g_{-m}(1-f_0))^2 = 0$. Поэтому $g_{-m}(1-f_0) = 0$. Согласно 4.3(1) имеем $f_0 \in J(A)$, откуда $1 - f_0 \in U(A)$. Поэтому $g_{-m} = 0$. Получено противоречие.

Рассмотрим случай $m = 0$. Тогда

$$f_{-1}\varphi^{-1}(g_1) + (1-f_0)g_0 = 1,$$

откуда

$$g_0 = (1-f_0)^{-1}(1 - f_{-1}\varphi^{-1}(g_1)) \in U(A).$$

Поэтому $g^{-1} = 1 - f \in A[[x,\varphi]]$, $f_{-1} = 1 - f \in A[[x,\varphi]]$ и $f_{-1} = 0$.

Рассмотрим случай $m < 0$. Тогда

$$f = \sum_{i=-1}^{\infty} f_i x^i \in J(R), \quad f_{-1} \neq 0, \quad g = (1-f)^{-1} = \sum_{j=-m}^{\infty} g_j x^j.$$

Поэтому $m = -1$ и $f_{-1}\varphi^{-1}(g_1) = 1$. Согласно 4.3(1) $f_{-1} \in J(A)$. Получено противоречие. □

5.3.

Пусть A — кольцо и φ — его автоморфизм и $R = A((x,\varphi))$.

(1) Если e — центральный идемпотент в R и $e \in A$, то $\varphi(e) = e$.

(2) R не имеет ненулевого идемпотента f с младшей степенью $m > 0$.

(3) Если $e = \sum\limits_{i=m}^{\infty} e_i x^i$ — ненулевой центральный идемпотент в R, где $e_i \in A$ и $e_m \neq 0$, то либо $e \in A$ и $\varphi(e) = e$, либо A имеет такой ненулевой нильпотентный элемент a, что

$$aA = Aa = AaA, \quad (AaA)^2 = 0, \quad \varphi(a) = a;$$

в частности, кольцо A не полупервично.

(4) Если кольцо A полупервично, то каждый центральный идемпотент e кольца R лежит в A и $\varphi(e) = e$.

(5) Если A содержит такое бесконечное множество $\{e_i \mid 0 \leqslant i < \infty\}$ ненулевых ортогональных идемпотентов, что $\varphi^i(e_i) \notin \sum\limits_{k=0}^{i-1} \varphi^k(e_k)A$ для всех i, то для ряда $z = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varphi^i(e_i)x^i \in A((x,\varphi))$ не существует такого идемпотента $f \in R$, что $zR = fR$.

(6) Если A содержит такое бесконечное множество $\{e_i \mid 0 \leqslant i < \infty\}$ ненулевых центральных ортогональных идемпотентов, что $\varphi(e_i) = e_i$ для всех i, то двусторонний идеал в R, порождённый рядом $z = \sum\limits_{i=0}^{\infty} e_i x^i$, не порождён центральным идемпотентом кольца R.

Доказательство. Утверждение (1) следует из того, что $ex = xe = \varphi(e)x$.

(2) Допустим, что существует такой идемпотент $f = \sum\limits_{i=m}^{\infty} f_i x^i \in R$, что $m > 0$, $f_i \in A$ и $f_m \neq 0$. Тогда

$$f = (f_m + gx)x^m, \quad g \in A[[x, \varphi]].$$

Поэтому

$$(f_m + gx)x^m = f = f^2 = (f_m + gx)x^m(f_m + gx)x^m,$$

откуда

$$f_m + gx = (f_m + gx)x^m(f_m + gx).$$

Тогда $f_m = 0$ и получаем противоречие.

(3) Рассмотрим случай $m < 0$. Так как $xe = ex$, то $\varphi(e_m) = e_m$. Кроме того, $e_m\varphi^m(e_m) = 0$, поскольку $e^2 = e$. Поэтому $e_m^2 = 0$. Так как e — центральный идемпотент в R, то $be_mx^m = e_mx^mb$ для всех $b \in A$. Поэтому $Ae_m = e_mA = Ae_mA$. Теперь можно положить $a = e_m$.

Случай $m > 0$ невозможен согласно (2).

Рассмотрим случай $m = 0$. Тогда $e = e_0 + ux$, где $e_0 \in A$. Так как $ex = xe$, то e_0 — ненулевой центральный идемпотент в R, $\varphi(e_0) = e_0$ и $u \in A[[x, \varphi]]$. Элемент $(1 - e_0)e = (1 - e_0)ux$ — центральный идемпотент в R. Согласно (2) имеем $(1 - e_0)e = 0$. Поэтому

$$e = e_0e = e_0(e_0 + ux) = e_0(1 + ux).$$

Согласно 4.2(8) $1 + ux \in U(R)$. Поэтому $e_0(1 + ux) = e = e^2 = e_0(1 + ux)^2$, откуда $e = e_0(1 + ux) = e_0 \in A$.

Утверждение (4) следует из (3).

(5) Допустим, что существует такой идемпотент $f = \sum\limits_{j=t}^{\infty} f_j x^j$, $t \leqslant 0$, что $fR = zR$. Тогда $fz = z$. Сравнив коэффициенты при x^i, получим

$$f_t\varphi^i(e_{i-t}) + \ldots + f_0\varphi^i(e_i) + \ldots + f_i\varphi^i(e_0) = \varphi^i(e_i), \quad 0 \leqslant i < \infty.$$

Так как e_i — ортогональные идемпотенты, то идемпотенты $\varphi^i(e_0)$, $\varphi^i(e_1)$, $\ldots$ ортогональны для каждого фиксированного индекса i. Поэтому $f_0\varphi^i(e_i) = \varphi^i(e_i)$. Кроме того, $f = zh$ для некоторого $h \in A$. Поэтому $f_0 = \sum\limits_{k=0}^{r} \varphi^k(e_k)h_k$ для некоторых $h_0, \ldots, h_r \in A$. Тогда

$$\varphi^{r+1}(e_{r+1}) = f_0\varphi^{r+1}(e_{r+1}) = \sum_{k=0}^{r} \varphi^r(e_k)h_k\varphi^{r+1}(e_{r+1}) \in \sum_{k=0}^{r} \varphi^k(e_k)A;$$

это противоречит предположению.

(6) Так как $\varphi(e_i) = e_i$, то ряд z лежит в центре кольца R. Поэтому идеал в R, порождённый z, совпадает с zR. Если $zR = fR$ для некоторого центрального идемпотента f, то получено противоречие с (5). $\square$

5.4. Теорема (см. [6]). *Если φ — автоморфизм кольца A, то равносильны следующие условия:*

(1) *$A((x, \varphi))$ — бирегулярное кольцо;*
(2) *$A((x, \varphi))$ — конечное прямое произведение простых колец $R_1, \ldots, R_n$;*
(3) *A — конечное прямое произведение колец $A_1, \ldots, A_n$ с единицами $e_1, \ldots, e_n$, $\varphi(e_i) = e_i$ для всех i и каждое кольцо A_i совпадает с любым таким его ненулевым идеалом B, что $\varphi(B) = B$.*

Доказательство. Пусть $R = A((x,\varphi))$. Импликация (2)⇒(1) проверяется непосредственно.

(1)⇒(3). Докажем, что A бирегулярно. Пусть $0 \neq b \in A$. Существует такой ненулевой центральный идемпотент e бирегулярного кольца R, что $RbR = eR$. Если $e \in A$, то $AbA = eA$ и A бирегулярно.

Допустим, что $e \notin A$. Согласно 5.3(3) найдется такой ненулевой нильпотентный элемент $a \in A$, что
$$aA = Aa = AaA, \quad (AaA)^2 = 0, \quad \varphi(a) = a.$$
Так как $\varphi(a) = a$ и $(AaA)^2 = 0$, то $(AaA)((x,\varphi))$ — ненулевой нильпотентный идеал бирегулярного кольца R, что невозможно. Поэтому A бирегулярно. В частности, A полупервично. Согласно 5.3(4) и 5.3(6) бирегулярное кольцо R не содержит бесконечное множество центральных ортогональных идемпотентов. Тогда R — конечное прямое произведение простых колец $R_1,\dots,R_n$. Пусть e_i — единица простого кольца R_i и $A_i \equiv e_iA$. Согласно 5.3(4) все идемпотенты e_i лежат в A и $\varphi(e_i) = e_i$ для всех i. Поэтому A — прямое произведение колец A_i, φ индуцирует автоморфизмы φ_i колец A_i, $R_i \cong A_i((x,\varphi_i))$ и
$$A((x,\varphi)) \cong A_1((x,\varphi_1)) \times \ldots \times A_n((x,\varphi_n)).$$
Согласно 4.5 каждое кольцо A_i не имеет такого ненулевого собственного идеала B, что $\varphi(B) = B$.

(3)⇒(2). Так как $\varphi(e_i) = e_i$, то автоморфизм φ индуцирует автоморфизм φ_i кольца A_i для каждого i и
$$A((x,\varphi)) \cong A_1((x,\varphi_1)) \times \ldots \times A_n((x,\varphi_n)).$$
Согласно 4.5 все кольца $A_i((x,\varphi_i))$ просты. □

5.5.

Если φ — автоморфизм кольца A, то равносильны следующие условия:

(1) $A((x,\varphi))$ — редуцированное кольцо и его фактор-кольцо по радикалу Джекобсона регулярно;
(2) $A((x,\varphi))$ — регулярное нормальное кольцо;
(3) $A((x,\varphi))$ — конечное прямое произведение тел;
(4) A — конечное прямое произведение тел и $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$.

Доказательство. Обозначим $R = A((x,\varphi))$. Импликация (2)⇒(1) проверяется непосредственно.

(1)⇒(2). Так как R редуцированно, то согласно 5.2 $J(R) = 0$. Тогда R регулярно, поскольку по условию $R/J(R)$ регулярно. Регулярное редуцированное кольцо R строго регулярно.

(2)⇒(3). Строго регулярное кольцо R бирегулярно. Согласно 5.4, R — конечное прямое произведение простых колец $R_1,\dots R_n$. Каждое простое строго регулярное кольцо R_i — тело.

(3)⇒(4). Так как R редуцированно, то A редуцированно. Согласно 5.3(4) $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$. Так как R полупросто, то согласно 4.11(2) A полупросто. Ясно, что редуцированное полупростое кольцо A — конечное прямое произведение тел.

(4)⇒(2). Так как A полупросто, то, согласно 4.11(2), R полупросто. С помощью 5.2 непосредственно проверяется, что R редуцированно. Так как редуцированное полупростое кольцо — конечное прямое произведение тел, то R строго регулярно. □

5.6.
Пусть A — кольцо и φ — его автоморфизм.

(1) Если A регулярно и имеет такой собственный существенный правый идеал B в A, что $\varphi(B) \subseteq B$, то A содержит такое бесконечное множество ненулевых ортогональных идемпотентов $\{e_i \mid 0 \leqslant i < \infty\}$, что
$$\varphi^i(e_i) \notin \sum_{k=0}^{i-1} \varphi^k(e_k)A \quad \text{для всех } i.$$

(2) Если $A((x,\varphi))$ — регулярное неполупростое кольцо, то A — регулярное неполупростое кольцо и $\varphi(B) \nsubseteq B$ для любого собственного существенного правого идеала B в A.

Доказательство. (1) Из леммы Цорна следует, что B_A — существенное расширение прямой суммы циклических модулей. Поэтому существует такой правый идеал $C = \bigoplus_{s\in S} a_sA$, что B_A — существенное расширение C_A. Тогда C — собственный существенный правый идеал в A и $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(C) \subseteq B \neq A$. Выберем любое $b_0 \in \{a_s \mid s \in S\}$. Выберем такие $b_i \in \{a_s \mid s \in S\} \setminus \{b_0, \ldots, b_{i-1}\}$, что $b_i \notin C_i$, где
$$C_i \equiv \sum_{k=0}^{i}\sum_{j=0}^{i-1} \varphi^k(b_j)A \neq A.$$
Докажем возможность выбора элементов b_i. Допустим, что выбор b_m невозможен, т.е. $\varphi^m(a_s) \in C_m$ для каждого $a_s \in \{a_s \mid s \in S\} \setminus \{b_0, \ldots, b_{m-1}\}$. Существенный правый идеал C лежит в собственном конечно порождённом правом идеале $\varphi^{-m}(C_m)$; это противоречит тому, что A регулярно. Согласно 4.5 существуют такие ортогональные идемпотенты e_i, $0 \leqslant i < \infty$, что
$$\bigoplus_{i=0}^{d} e_iA = \bigoplus_{i=0}^{d} b_iA$$
для каждого d. Допустим, что существует такой индекс $i \geqslant 1$, что
$$\varphi^i(e_i) \in \sum_{k=0}^{i-1} \varphi^k(e_k)A.$$
Тогда $\varphi^i(e_i) \in C_i$, поскольку
$$\varphi^j(e_j) \in \varphi^j\left(\sum_{k=0}^{j} b_kA\right) \subseteq C_i, \quad 0 \leqslant j \leqslant i-1.$$
Поэтому $\varphi^i(b_i) \in C_i$, поскольку
$$\varphi^i(e_q) \in \varphi^q\left(\sum_{k=0}^{q} b_kA\right) \subseteq C_i, \quad q \leqslant i-1;$$
это противоречит выбору b_i.

(2) Так как $A((x,\varphi))$ не полупросто, то согласно 4.11(2) A не полупросто. Для каждого $a \in A$ существует такой ряд $f = \sum_{i=t}^{\infty} f_ix^i$, что $afa = a$. Тогда $af_0a = a$ и A регулярно.

Допустим, что A имеет такой собственный существенный правый идеал B, что $\varphi(B) \subseteq B$. Согласно 5.6 существует такое бесконечное множество $\{e_i \mid 0 \leqslant i < \infty\}$ ортогональных идемпотентов в A, что $\varphi^i(e_i) \notin \sum_{k=0}^{i-1} \varphi^k(e_k)A$ для всех i. Это противоречит 5.3(5). □

5.7. Предложение. *Если φ — автоморфизм кольца A, то равносильны следующие условия*:

(1) $A((x,\varphi))$ *— регулярное кольцо и* $\mathrm{Soc}(A_A)$ *— существенный правый идеал в* A;

(2) $A((x,\varphi))$ *— полупростое кольцо*;

(3) A *— полупростое кольцо.*

Доказательство. Эквивалентность (2)⇔(3) доказана в 4.11(2). Импликация (2)+(3)⇒(1) следует из того, что любое полупростое кольцо регулярно.

(1)⇒(3). Обозначим $R = A((x,\varphi))$, $B = \mathrm{Soc}(A_A)$. Допустим, что A не полупросто. Тогда B — собственный существенный правый идеал в A. Согласно 4.11(2), R не полупросто. Тогда A — регулярное неполупростое кольцо. Согласно 5.6(2) $\varphi(B) \not\subseteq B$. Получено противоречие, поскольку цоколь кольца замкнут относительно автоморфизмов. □

5.8. Теорема (см. [5])**.** *Если φ — автоморфизм кольца A и $\varphi^n \equiv 1_A$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то равносильны следующие условия*:

(1) $A((x,\varphi))$ *— регулярное кольцо*;

(2) A *— полупростое кольцо.*

Доказательство. Импликация (2)⇒(1) следует из 5.7.

(1)⇒(2). Обозначим $A((x,\varphi))$ через R. Допустим, что A не полупросто. Согласно 4.11(2) R не полупросто. Согласно 5.6(2), A — регулярное неполупростое кольцо. Тогда A имеет собственный существенный правый идеал C. Обозначим через B собственный существенный правый идеал $\bigcap\limits_{k=0}^{n} \varphi^k(C)$ кольца A. Так как $\varphi^n \equiv 1_A$, то $\varphi(B) \subseteq B$. Это противоречит 5.6(2). □

5.9.

Пусть A — кольцо и φ — его автоморфизм и $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$.

(1) Если A — бирегулярное редуцированное кольцо, то $A((x,\varphi))$ — редуцированное кольцо и все его идемпотенты лежат в A.

(2) Если A — строго регулярное кольцо, то $A((x,\varphi))$ — редуцированное кольцо, у которого все идемпотенты лежат в A и каждый ненулевой правый идеал содержит ненулевой центральный идемпотент.

Доказательство. Обозначим $R = A((x,\varphi))$.

(1) Пусть $0 \neq a \in A$. Так как A бирегулярно, то $AaA = eA$ для некоторого центрального идемпотента $e \in A$. По условию $\varphi(e) = e$. Поэтому $A\varphi(a)A = \varphi(eA) = eA = AaA$. Согласно 5.2, R редуцированно. Тогда кольцо R нормально. Согласно 5.3(4), все идемпотенты кольца R лежат в A.

(2) Строго регулярное кольцо A — бирегулярное редуцированное кольцо. Согласно (1), R редуцированно и все его идемпотенты лежат в A. Докажем, что каждый ненулевой правый идеал F в R содержит ненулевой центральный идемпотент. Пусть $f = \sum\limits_{i=m}^{\infty} f_i x^i$ — ненулевой ряд в F, где $0 \neq f_m \in A$ и $f_i \in A$ для всех i. Так как A строго регулярно, то $f_m = ev$ для некоторого ненулевого центрального в A идемпотента $e \in A$ и $v \in U(A)$. Так как $\varphi(e) = e$, то идемпотент e централен в R. Поэтому $fe = e\sum\limits_{i=m}^{\infty} ef_i x^i$, где $ef_m = ev$ — обратимый элемент кольца eA. Поэтому fe — обратимый элемент кольца eR с обратным элементом eg. Тогда $e = feg$ — ненулевой центральный идемпотент и $e \in F$. □

5.10. Открытые вопросы.

Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ и $R = A((x, \varphi))$.

(1) Если кольцо R регулярно, то верно ли, что A — артиново полупростое кольцо?
(2) Найти условия для A и φ, равносильные тому, что каждый правый идеал кольца R равен своему квадрату.

6. Эквивалентные определения лорановских колец

Конструкция кольца обычных рядов Лорана допускает разные обобщения. В этом разделе будут приведены два эквивалентных определения. Частными случаями лорановских колец являются кольцо косых рядов Лорана и кольцо псевдодифференциальных операторов.

6.1. Кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1}, \delta))$.

Пусть A — кольцо и δ — его *дифференцирование* (т.е. δ — эндоморфизм аддитивной абелевой группы A^+ по сложению, удовлетворяющий условию $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$). Через $A((t^{-1}, \delta))$ обозначается *кольцо псевдодифференциальных операторов* над кольцом коэффициентов A, образованное формальными рядами $f = \sum\limits_{i=-\infty}^{m} f_i t^i$, где t — переменная, m — целое (возможно, отрицательное) число, а коэффициенты f_i ряда f — элементы кольца A. В кольце $A((t^{-1}, \delta))$ сложение определяется обычным образом, а умножение задается с учетом правил

$$ta = at + \delta(a), \quad t^{-1}a = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \delta^i(a) t^{-i-1}.$$

Проверка того, что множество $A((t^{-1}, \delta))$ является кольцом, будет дана ниже (см. предложение 9.7). В случае, когда δ — нулевое дифференцирование, существует изоморфизм кольца $A((t^{-1}, \delta))$ на кольцо обычных рядов Лорана $A((x))$ (этот изоморфизм переводит t^{-1} в x).

Из определений кольца косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$ и кольца псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1}, \delta))$ над одним и тем же кольцом коэффициентов A нетрудно заметить, что между этими двумя кольцами имеется естественная биекция, переводящая x в t^{-1}, а формальные суммы степеней x — в соответствующие формальные суммы степеней t^{-1}. Эта биекция является изоморфизмом левых модулей ${}_AA((x, \varphi))$ и ${}_AA((t^{-1}, \delta))$ над кольцом A. Такое сходство этих двух конструкций придает им близкие кольцевые свойства и дает возможность в некоторых случаях доказывать очень похожие теоремы для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов, причем доказательства тоже очень похожи.

В связи с этим будет удобно определить лорановское кольцо, частными случаями которого будут являться кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов, и доказать максимальное число теорем в такой общности. В 6.2 и 6.3 даются два эквивалентных определения лорановского кольца. Эквивалентность этих определений доказана в 6.5.

6.2. Первое определение лорановского кольца.

Кольцо R называется *лорановским кольцом* с кольцом коэффициентов A, если существует изоморфизм π абелевой группы по сложению кольца рядов Лорана $A^+((x))$ на абелеву группу по сложению R^+, обладающий перечисленными ниже свойствами (1)–(4).

(1) Ограничение отображения π на кольцо A является унитарным кольцевым мономорфизмом кольца A в кольцо R;
(2) π задает изоморфизм левого модуля ${}_AA((x))$ на левый модуль ${}_AR$, где модуль ${}_AR$ определяется в соответствии с правилом $ar = \pi(a)r$;
(3) младшая степень произведения двух рядов больше или равна суммы их младших степеней;
(4) ограничение отображения π на группу по умножению, порождённую элементом x, является групповым мономорфизмом.

Свойства (a), (b) *отображения* π. Пусть R — лорановское кольцо с отображением π из $A((x))$ в R. Тогда указанное выше отображение π обладает следующими свойствами:

(a) для любого ряда f из $A((x))$ и любого элемента a кольца A выполнено равенство $\pi(a)\pi(f) = \pi(af)$;

(b) для любого ряда f из $A((x))$ и любого целого числа n выполнено равенство $\pi(f)\pi(x^n) = \pi(fx^n)$.

Доказательство. Из условия (2) вытекает, что для всех элементов a и b из кольца A и всех целых чисел n выполнено равенство $\pi(a)\pi(bx^m) = \pi(abx^m)$, а из условия (4) вытекает, что для любого элемента a из кольца A и для любых целых n и m выполнено равенство $\pi(bx^m)\pi(x^n) = \pi(bx^{n+m})$. Таким образом, равенства

$$\pi(a)\pi(f) = \pi(af), \quad \pi(f)\pi(x^n) = \pi(fx^n)$$

доказаны, когда f имеет вид bx^m. По закону дистрибутивности умножения эти равенства распространяются на все кольцо многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$. Для любого ряда f из $A((x))$ и для любого целого m можно найти такой многочлен Лорана f', что $f - f' \in V_m$, откуда

$$\pi(a)\pi(f) - \pi(af) = \pi(a)\pi(f - f') - \pi(a(f - f')) \in \pi(V_m).$$

В силу произвольности m получаем $\pi(a)\pi(f) - \pi(af) = 0$; это означает, что равенство $\pi(a)\pi(f) = \pi(af)$ распространяется на все ряды f из $A((x))$. Аналогично равенство $\pi(f)\pi(x^n) = \pi(fx^n)$ распространяется на все ряды f из $A((x))$. $\square$

Переформулировка первого определения лорановского кольца. Если отождествить каждый ряд f из кольца рядов Лорана $A((x))$ с соответствующим ему элементом $\pi(f)$ лорановского кольца, то из доказанных свойств (a) и(b) вытекает, что можно дать первое определение лорановского кольца можно сформулировать так: аддитивная абелева группа $A^+((x))$ с умножением $\circ$ называется *лорановским кольцом*, если она является кольцом, удовлетворяет соотношению $(af) \circ (gx^n) = a(f \circ g)x^n$, где $a \in A$, и при этом младшая степень произведения двух рядов больше или равна суммы их младших степеней.

Ясно, что само кольцо $A((x))$ является лорановским при $\pi = 1_{A((x))}$.

Теперь дадим второе определение лорановского кольца. В 6.5 ниже будет доказана эквивалентность двух определений лорановского кольца.

6.3. Второе определение лорановского кольца.

Кольцо R называется *лорановским кольцом*, если в нем определен набор подгрупп по сложению $\{U_i | -\infty < i < +\infty\}$, обладающий следующими свойствами:

(i) Для всех целых n и k выполнены включения

$$U_{n+1} \subseteq U_n, \quad U_n U_k \subseteq U_{n+k};$$

в частности, отсюда следует, что U_0 — подкольцо в R, а U_1 — двусторонний идеал в U_0. Кроме того, объединение U_n по всем целым n дает все кольцо R, а пересечение U_n по всем целым числам n состоит из одного нуля.

(ii) Существует пара таких элементов $y \in U_1$ и $y^{-1} \in U_{-1}$, что

$$yy^{-1} = y^{-1}y = 1;$$

с учетом условия (i) отсюда следует, что $1 = yy^{-1} \in U_0$, т.е. что U_0 — унитарное подкольцо в R.

(iii) Для любого набора
$$u_n \in U_n, \quad u_{n+1} \in U_{n+1}, \quad u_{n+2} \in U_{n+2}, \quad \dots$$
найдется такой элемент $u \in U_n$, называемый *обобщенной бесконечной суммой* элементов u_i, что для всех натуральных чисел k выполнено включение
$$\left(u - \sum_{i=n}^{n+k} u_i\right) \in U_{n+k+1}.$$

(iv) Канонический кольцевой гомоморфизм кольца U_0 на свое фактор-кольцо $A = U_0/U_1$ расщепляется, т.е. существует вложение $\pi\colon A \to R$, для которого его композиция с каноническим гомоморфизмом U_0 на A дает тождественный автоморфизм кольца A.

Кольцо коэффициентов лорановского кольца. Если R — кольцо, удовлетворяющее условиям (i) и (ii) второго определения лорановского кольца, то фактор-кольцо $A = U_0/U_1$ называется его *кольцом коэффициентов.*

Ниже будет доказано, что кольцо косых рядов Лорана и кольцо псевдодифференциальных операторов являются лорановскими кольцами, так что понятие кольца коэффициентов в них совпадает с обычным определением.

6.4. Замечания о втором определении лорановского кольца.

Условие (i) требует, чтобы R было $\mathbb{Z}$-фильтрованным кольцом. Остальные условия накладывают дополнительные ограничения на эту фильтрацию.

Условие (ii) составляет специфику рядов Лорана с отрицательными степенями переменной; например, кольцо формальных степенных рядов удовлетворяет условиям (i), (iii), (iv), но не удовлетворяет условию (ii).

Условие (iii) составляет специфику бесконечных рядов; например, кольцо многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$ удовлетворяет условиям (i), (ii), (iv), но не удовлетворяет условию (iii).

Наконец, условие (iv), необязательное для доказательства некоторых утверждений, требует существования естественного вложения кольца коэффициентов в обобщенное кольцо рядов.

Второе определение 6.3 лорановского кольца, в отличие от первого определения 6.2, симметрично относительно умножения справа или слева.

6.5. Эквивалентность двух определений лорановских колец.

Всякое лорановское кольцо R в смысле первого определения 6.2 является также и лорановским кольцом в смысле второго определения 6.3 с набором подмножеств $U_n = \pi(V_n)$, причем кольцо U_0/U_1 изоморфно кольцу A. Кроме того, всякое лорановское кольцо R в смысле второго определения 6.3 является также и лорановским кольцом в смысле первого определения 6.2 с кольцом коэффициентов $A = U_0/U_1$.

Доказательство. Пусть R — лорановское кольцо по в смысле первого определения 6.2 с кольцом коэффициентов A. Положим $U_n = \pi(V_n)$ для каждого целого числа n. Условие (i) проверяется непосредственно, в качестве двух взаимно обратных элементов для условия (ii) можно взять $y = \pi(x)$ и $y^{-1} = \pi(x^{-1})$.

Поскольку в кольце $A((x))$ выполнены равенства
$$A \cap V_1 = 0, \quad A + V_1 = V_0,$$
то в кольце R выполнены равенства
$$\pi(A) \cap U_1 = 0, \quad \pi(A) + U_1 = U_0.$$
Отсюда вытекает, что кольцо U_0/U_1 изоморфно кольцу $\pi(A)$ и, следовательно, кольцу A. При этом кольцо $\pi(A) \cong U_0/U_1$ лежит в кольце U_0, поэтому канонический гомоморфизм $U_0 \to U_0/U_1$

расщепляется, что и доказывает, что выполнено условие (iv). Остается доказать, что выполнено условие (iii).

Действительно, пусть имеется набор элементов

$$u_n \in U_n, \quad u_{n+1} \in U_{n+1}, \quad u_{n+2} \in U_{n+2}, \quad \dots$$

из кольца R. Пусть $f_k = \pi^{-1}(u_k) \in V_k$. Обозначим через $f_{k,i}$ такой соответствующий коэффициент ряда f_k, чтобы выполнялось равенство

$$f_k = f_{k,k}x^k + f_{k,k+1}x^{k+1} + \dots,$$

и составим ряд f, у которого коэффициент при x^k будет равняться $\sum\limits_{i=n}^{k} f_{i,k}$ для целых k, больших либо равных n (коэффициенты при степенях, меньших n, положим равными нулю). Положим теперь $u = \pi(f)$. Непосредственно проверяется, что элемент u удовлетворяет условию (iii) как «обобщенная бесконечная сумма» элементов u_n.

Пусть теперь R — лорановское кольцо в смысле второго определения 6.3 и $A = U_0/U_1$ — его кольцо коэффициентов. Пусть π — существующее в силу (iv) вложение кольца A в U_0. Продолжим вложение π до вложения $A((x))$ в R указанным ниже образом. По условию (ii) можно положить $\pi(x)$ и $\pi(x^{-1})$ равными двум таким взаимно обратным элементам, что $\pi(x) \in U_1$ и $\pi(x^{-1}) \in U_{-1}$. Для любого элемента a из кольца A и любого натурального n положим

$$\pi(ax^n) = \pi(a)(\pi(x))^n \in U_n, \quad \pi(ax^{-n}) = \pi(a)(\pi(x^{-1}))^n \in U_{-n}.$$

Теперь для каждого ряда $f = f_nx^n + f_{n+1}x^{n+1} + \dots$ положим $\pi(f)$ равным «обобщенной бесконечной сумме» элементов $\pi(f_kx^k)$ для целых k, больших либо равных n. Такая «обобщенная бесконечная сумма» существует по условию (iii). Непосредственно проверяется, что выполнено условие (1) первого определения 6.2, π — корректно определенный гомоморфизм левых модулей, осуществляющий вложение $A((x))$ в R, и $\pi(V_n) \subseteq U_n$ для любого целого числа n (где V_n — множество всех рядов, в которые x входит в степени не ниже n). Легко видеть, что условие (4) первого определения 6.2 выполнено в силу определения гомоморфизма π.

Докажем теперь, что π — сюръективное отображение. Пусть r — произвольный элемент кольца R. Обозначим через n наибольшее целое число, при котором r лежит в U_n (в силу условия(i) такое n существует). Тогда $r\pi x^{-n}$ лежит в U_0. Пусть r_n — образ элемента $r\pi x^{-n}$ при каноническом гомоморфизме $U_0 \to U_0/U_1 = A$. Тогда элемент $r - \pi(r_nx^n)$ лежит в U_{n+1}. Применив к элементу $r - \pi(r_nx^n)$ ту же процедуру, что и к r, получим, что элемент $r - \pi(r_nx^n) - \pi(r_{n+1}x^{n+1})$ лежит в U_{n+2}. Продолжим эту процедуру до бесконечности и получим последовательность элементов r_k из A. Непосредственно проверяется, что для ряда $f = r_nx^n + r_{n+1}x^{n+1} + \dots$ выполнено равенство $\pi(f) = r$; таким образом $\pi(A((x))) = R$, и тогда π — изоморфизм левых модулей над A. Из построения видно также, что $\pi^{-1}(U_n) \subseteq V_n$ (с учетом $\pi(V_n) \subseteq U_n$ получаем $\pi(V_n) = U_n$), поэтому выполнено условие (3) первого определения 6.2: действительно,

$$\pi(V_n)\pi(V_m) = U_nU_m \subseteq U_{n+m} = \pi(V_{n+m}).$$

Таким образом доказано, что выполнены все условия первого определения 6.2, и доказательство завершено. □

6.6. Замечание. В силу эквивалентности двух определений мы иногда будем объединять эти определения в одно и будем говорить об условиях (1), (2), (3), (4), (i), (ii), (iii), (iv) определения лорановского кольца. Кроме того, поскольку существует вложение кольца коэффициентов в лорановское кольцо, мы часто будем полагать, что кольцо коэффициентов лежит в лорановском кольце.

Покажем, что понятие «обобщенной бесконечной суммы», введенное во втором определении 6.3 лорановского кольца, согласовано с формальной бесконечной суммой в кольце $A((x))$.

6.7. Согласованность обобщенной бесконечной суммы с формальной бесконечной суммой в кольце $A((x))$.

Пусть R — лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов, π — биекция из $A((x))$ на R из первого определения 6.2 лорановского кольца. Тогда для любой последовательности элементов $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ из кольца A, элементы $\pi(a_i x^i)$ образуют «обобщенную бесконечную сумму», равную $\pi(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots)$.

Доказательство. Действительно, элемент $\pi(a_i x^i)$ лежит в $U_i = \pi(V_i)$, поэтому элементы $\pi(a_i x^i)$ образуют «обобщенную бесконечную сумму». Остается доказать, что для любого $k > n$ разность

$$\pi\Big(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots\Big) - \sum_{i=n}^{i\leqslant k} \pi(a_i x^i)$$

лежит в U_{k+1}. Но

$$\pi\Big(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots\Big) - \sum_{i=n}^{i\leqslant k} \pi(a_i x^i) = \pi(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots) - \pi\left(\sum_{i=n}^{i\leqslant k} a_i x^i\right) =$$
$$= \pi\Big(a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+2}x^{k+2} + \ldots\Big) \in \pi(V_n) = U_n,$$

что и завершает доказательство. □

6.8. Открытые вопросы.

Пусть R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A.

(1) Если кольцо R полулокально, то верно ли, что радикал Джекобсона $J(R)$ — нильидеал кольца R?
(2) Найти критерий того, что кольцо R полулокально, не содержащий условий для кольца R.
(3) Найти критерий того, что кольцо R полулокально, не содержащий условий для кольца R.
(4) Пусть A — артиново справа полудистрибутивное справа кольцо. Верно ли, что R — полудистрибутивное справа полулокальное кольцо?

7. Обобщенные лорановские кольца

Часть результатов работы будет доказана для более широкого класса колец, чем лорановские кольца, а именно, для тех колец, которые удовлетворяют только условиям (i)–(iii) второго определения 6.3 лорановского кольца.

В 9.11 будет приведен пример кольца дробных n-адических чисел Q_n, удовлетворяющего условиям (i)–(iii), но не условию (iv).

7.1. Обобщенные лорановские кольца.

Кольца, которые удовлетворяют только условиям (i)–(iii) второго определения 6.3 лорановского кольца, называются *обобщенными лорановскими кольцами.*

А именно, кольцо R называется *обобщенным лорановским кольцом*, если в нем определен набор подгрупп по сложению $\{U_i \mid -\infty < i < +\infty\}$, удовлетворяющий следующим свойствам (i)–(iii).

(1) Для всех целых n и k выполнены включения

$$U_{n+1} \subseteq U_n, \quad U_n U_k \subseteq U_{n+k};$$

в частности, отсюда следует, что U_0 — подкольцо в R, а U_1 — двусторонний идеал в U_0. Кроме того, объединение U_n по всем целым числам n дает все кольцо R, а пересечение U_n по всем целым числам n состоит из одного нуля.

(2) Существует пара элементов $y \in U_1$ и $y^{-1} \in U_{-1}$, для которых
$$yy^{-1} = y^{-1}y = 1;$$
с учетом условия (i) отсюда следует, что $1 = yy^{-1} \in U_0$, т.е. что U_0 — унитарное подкольцо в R.

(3) Для любого набора
$$u_n \in U_n, u_{n+1} \in U_{n+1}, \quad u_{n+2} \in U_{n+2}, \quad \dots$$
найдется такой элемент $u \in U_n$, называемый *обобщенной бесконечной суммой* элементов u_i, что для всех натуральных чисел k выполнено включение
$$\left(u - \sum_{i=n}^{n+k} u_i\right) \in U_{n+k+1}.$$

7.2. Свойства обобщенной бесконечной суммы.

В условии (iii) определения 6.3 были определены «обобщенные бесконечные суммы» для некоторых наборов слагаемых. Ниже будет показано, что это просто сумма абсолютно сходящегося в некоторой топологии ряда. Сейчас докажем несколько полезных простых свойств этой суммы.

Пусть R — обобщенное лорановское кольцо. Будем обозначать в 7.2 «обобщенную бесконечную сумму» обычным знаком $\sum$.

(1) Обобщенная сумма элементов
$$u_n \in U_n, \quad u_{n+1} \in U_{n+1}, \quad u_{n+2} \in U_{n+2}, \quad \dots$$
определена единственным образом, т.е. найдется ровно один элемент, удовлетворяющий условию (iii) из определения 6.3.

(2) Для любого целого числа n выполнено равенство $\sum\limits_{i=n}^{+\infty} 0 = 0$.

(3) Если элементы
$$u_n \in U_n, \quad u_{n+1} \in U_{n+1}, \quad u_{n+2} \in U_{n+2}, \quad \dots$$
и элементы
$$v_m \in U_m, \quad v_{m+1} \in U_{m+1}, \quad v_{m+2} \in U_{m+2}, \quad \dots$$
образуют «обобщенную бесконечную сумму», причем есть такое биективное отображение η из неотрицательных целых чисел на неотрицательные целые числа, что $u_{n+i} = v_{m+\eta(i)}$ для всех целых неотрицательных i, то выполнено равенство
$$\sum_{i=n}^{+\infty} u_i = \sum_{i=m}^{+\infty} v_i.$$

(4) Пусть r — произвольный элемент кольца R, а элементы
$$u_n \in U_n, \quad u_{n+1} \in U_{n+1}, \quad u_{n+2} \in U_{n+2}, \quad \dots$$
образуют «обобщенную бесконечную сумму»; тогда выполнены равенства
$$r\sum_{i=n}^{+\infty} u_i = \sum_{i=n}^{+\infty} ru_i, \quad \sum_{i=n}^{+\infty} u_i r = \sum_{i=n}^{+\infty} u_i r,$$
причем правая их часть всегда определена.

(5) Если $u_n \in U_n$, $u_{n+1} \in U_{n+1}$, $u_{n+2} \in U_{n+2}$, … — элементы, образующие «обобщенную бесконечную сумму», то для любого целого $m > n$ выполнено равенство
$$\sum_{i=n}^{+\infty} u_i = \sum_{i=n}^{m-1} u_i + \sum_{i=m}^{+\infty} u_i,$$

где выражение $\sum\limits_{i=n}^{m-1} u_i$ обозначает обыкновенную конечную сумму, причем правая часть всегда определена.

(6) Для любого такого набора элементов $\{u_{i,j} \mid n \leqslant i < +\infty,\ m \leqslant j < +\infty\}$, что $u_{i,j} \in U_{i+j}$, выполнено равенство

$$\sum_{i=n}^{+\infty}\sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{i=n+m}^{+\infty}\sum_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j},$$

причем обе его части всегда определены.

(7) Для любого такого набора элементов $\{u_{i,j} \mid n \leqslant i < +\infty,\ m \leqslant j < +\infty\}$, что $u_{i,j} \in U_{i+j}$, выполнено равенство

$$\sum_{i=n}^{+\infty}\sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=m}^{+\infty}\sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,j},$$

причем обе его части всегда определены.

Доказательство. (1) Действительно, допустим, существует два разных элемента u и v, удовлетворяющих условию (iii). Тогда, по условию, для каждого натурального k выполнены включения

$$u - \sum_{i=n}^{k} u_i \in U_{k+1}, \quad v - \sum_{i=n}^{k} u_i \in U_{k+1}.$$

Поэтому $u - v \in U_{k+1}$, откуда, в силу произвольности k, имеем $u - v = 0$, что и требовалось доказать.

(2) Утверждение проверяется непосредственно.

(3) Обозначим бесконечную сумму u_i через u, а бесконечную сумму v_i через v. Для того, чтобы доказать, что $u = v$, достаточно доказать, что для всех целых k, больших некоторого, выполнено включение $u - v \in U_k$. Пусть k' — максимальное значение, принимаемое функцией $m + \eta(i)$ при $i \leqslant k - n$, а k'' — максимум из двух чисел k и k'. Тогда

$$u - v = \left(u - \sum_{i=n}^{k} u_i\right) + \left(\sum_{i=n}^{k} u_i - \sum_{i=m}^{k''} v_i\right) - \left(v - \sum_{i=m}^{k''} v_i\right),$$

где первое и третье слагаемое лежат в U_{k+1} по определению «обобщенной бесконечной суммы». Остается доказать, что второе слагаемое также лежит в U_k.

Действительно, по условию и по выбору k'' сумма $\sum\limits_{i=m}^{k''} v_i$ содержит все те же члены, что и сумма $\sum\limits_{i=n}^{k} u_i$, а также некоторые дополнительные члены v_i, для которых выполнено условие $\eta^{-1}(i-m) > k - n$. Но если $\eta^{-1}(i-m) > k-n$, то $v_i = u_{n+\eta^{-1}(i-m)} \in U_{k+1}$, что и завершает доказательство.

(4) Пусть младшая степень элемента r равна m. Тогда если u_i лежит в U_i, то $u_i r$ и $r u_i$ лежат в U_{i+m}, поэтому правые части доказываемых равенств определены. Доказательства этих равенств аналогичны друг другу; для определенности докажем первое равенство. Надо доказать, что элемент $r\sum\limits_{i=n}^{+\infty} u_i$ удовлетворяет условию (iii) определения 6.3 для набора элементов $\{ru_i\}$. Действительно, для всех целых чисел k имеем

$$r\sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{k} r u_i = r\left(\sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{k} u_i\right) \in U_{n+m},$$

что и требовалось доказать.

(5) Действительно, если набор элементов $u_n, u_{n+1}, \ldots$ удовлетворяет условиям «обобщенной бесконечной суммы», то набор $u_m, u_{m+1}, \ldots$ тоже удовлетворяет им. Для любого целого $k > m$ имеем

$$\left(\sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{m-1} u_i\right) - \sum_{i=m}^{k} u_i = \sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{k} u_i \in U_{k+1},$$

что означает, в соответствии с условием (iii) определения 6.3, что

$$\sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{m-1} u_i = \sum_{i=m}^{+\infty} u_i,$$

что и требовалось доказать.

(6) Действительно, по условию (iii) определения 6.3 для всех $i \geqslant n$ выполнено включение $\sum\limits_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} \in U_{i+m}$. Поэтому левая часть требуемого равенства всегда определена. Поскольку $\sum\limits_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j} \in U_i$, то определена и правая часть; осталось доказать их равенство.

Действительно, достаточно доказать, что для всех достаточно больших целых k разность

$$\sum_{i=n}^{+\infty} \sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} - \sum_{i=n+m}^{+\infty} \sum_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j}$$

лежит в U_{k+1}. Для этого покажем, что разность

$$\sum_{i=n}^{k-m} \sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} - \sum_{i=n+m}^{k} \sum_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j}$$

лежит в U_{k+1}, а для это выполнено, если разность

$$\sum_{i=n}^{k-m} \sum_{j=m}^{k-n} u_{i,j} - \sum_{i=n+m}^{k} \sum_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j}$$

лежит в U_{k+1}. Но последнее равенство содержит только конечные суммы и непосредственно следует из того, что $u_{i,j} \in U_{i+j}$.

(7) Требуемое равенство следует из п. (6), примененного по отдельности к правой и левой частям искомого равенства. □

7.3. Замечание (о знаке $\sum$ в 7.2)**.** В 7.2 знак $\sum$ обозначает «обобщенную бесконечную сумму». Это обозначение для обобщенной суммы используется только в 7.2, чтобы не возникало противоречия с обозначением формального степенного ряда в кольцах рядов Лорана и кольцах псевдодифференциальных операторов; однако, в этих кольцах формальный бесконечный степенной ряд является «обобщенной бесконечной суммой» своих членов.

7.4. Некоторые обозначения и определения для обобщенных лорановских колец и свойства таких колец.

Пусть R — обобщенное лорановское кольцо и $\{U_i\}$ — набор его подмножеств как во втором определении 6.3 лорановского кольца.

Для каждого элемента из U_0 назовем его *свободным членом* его образ при каноническом гомоморфизме U_0 на $A = U_0/U_1$. В случае кольца рядов Лорана это определение совпадает с естественным определением свободного члена, поэтому свободный член (когда он определен) элемента f будет обозначаться через f_0.

(a) Легко видеть, что свободный член суммы (произведения) двух элементов из U_0 равен сумме (произведению) их свободных членов.

Для каждого ненулевого элемента f из R назовем его *младшей степенью* такое целое число n, что f лежит в U_n и не лежит в U_{n+1} (для кольца обычных рядов Лорана младшая степень совпадает со степенью младшего члена). Иногда будет удобно считать, что младшая степень нуля равна плюс бесконечности. Младшая степень определена единственным образом. Элементы с младшей степенью 0 — это в точности все элементы из U_0 с ненулевым свободным членом.

(b) Каждый ненулевой элемент f кольца R может быть представлен в виде произведения вида uy^n, где $u \in U_0$ — элемент с ненулевым свободным членом, y — обратимый элемент, описанный в условии (ii) из второго определения 6.3 лорановского кольца, а n — младшая степень f. Из этого вытекает, что для любых целых n и m выполнено равенство $y^n U_m = U_{n+m}$.

(c) Пусть R — обобщенное лорановское кольцо и y — какой-либо обратимый элемент, описанный в условии (ii) определения 6.3. Если $u_0 + U_1$ — какой-либо элемент кольца коэффициентов U_0/U_1, то для любого целого числа n элемент $y^n u_0 y^{-n} + U_1$ также является элементом кольца коэффициентов и не зависит от выбора конкретного представителя u_0 (поскольку $y^n U_1 y^{-n} = U_1$). Поэтому отображение $\varphi\colon u_0 + U_1 \to y u_0 y^{-1} + U_1$ задает автоморфизм кольца коэффициентов, причем φ^n переводит элемент $u_0 + U_1$ в $y^n u_0 y^{-n} + U_1$. В случае кольца косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$ и элемента y, равного x, этот автоморфизм совпадает с автоморфизмом, задающим косое умножение в кольце косых рядов Лорана, поэтому для него используется то же самое обозначение φ, и мы называем его *скручивающим автоморфизмом* обобщенного лорановского кольца. Скручивающий автоморфизм, вообще говоря, зависит от выбора конкретного элемента y. В случае кольца псевдодифференциальных операторов и элемента $y = t^{-1}$ этот автоморфизм является тождественным автоморфизмом кольца коэффициентов.

Для каждого подмножества P обобщенного лорановского кольца R обозначим через $\lambda(P)$ образ множества $U_0 \cap P$ при каноническом гомоморфизме U_0 на U_0/U_1 (т.е. $\lambda(P)$ — это множество всех свободных членов всех рядов из $U_0 \cap P$).

(d) Непосредственно проверяется, что если P — левый (правый) идеал кольца R, то $\lambda(P)$ является левым (правым) идеалом кольца коэффициентов $A = U_0/U_1$. Таким образом отображение λ осуществляет отображение решетки левых (правых) идеалов кольца R в решетку левых (правых) идеалов кольца A, причем это отображение сохраняет отношение включения. Кроме того, если P — ненулевой правый (левый) идеал кольца R, то $\lambda(P)$ — ненулевой правый (левый) идеал (действительно, если $f \in P$ и n — целое число такое, что $f \in U_n \setminus U_{n+1}$, то $fx^{-n} \in U_0 \cap P$ или $x^{-n} f \in U_0 \cap P$, при этом элементы fx^{-n} и $x^{-n} f$ имеют ненулевые свободные члены).

Докажем теперь некоторые вспомогательные утверждения об обобщенных лорановских кольцах.

7.5. Лемма. *Пусть R — обобщенное лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов и A — область. Тогда для любых двух ненулевых элементов f и g из R младшая степень их произведения равна сумме их младших степеней.*

Доказательство. Действительно, если n — младшая степень элемента f, а k — младшая степень элемента g, то найдутся такие элементы f' и g' из $U_0 \setminus U_1$, что $f = y^n f'$ и $g = g' y^k$. Поскольку элементы f' и g' имеют ненулевые свободные члены, то и их произведение $f'g'$ имеет ненулевой свободный член и, следовательно, лежит в $U_0 \setminus U_1$.

Произведение $fg = y^n f' g' y^k$ лежит в U_{n+k}. Допустим, оно лежит также в U_{n+k+1}, тогда произведение $f'g' = y^{-n} fg y^{-k}$ лежит в U_1, чего не может быть. Таким образом, произведение $fg = y^n f' g' y^k$ лежит в $U_{n+k} \setminus U_{n+k+1}$, что и требовалось доказать. $\square$

7.6. Лемма. *Пусть R — обобщенное лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов, P — правый идеал в R. Допустим, что существуют такие элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из $P \cap U_0$, что для каждого элемента g из $P \cap U_0$ выполнено включение $g_0 \in f_{1,0}A + f_{2,0}A + \ldots + f_{n,0}A$, где $f_{i,0}$ — это свободный член элемента f_i, а g_0 — свободный член элемента g. Тогда правый идеал P порождается n элементами $f_1, f_2, \ldots, f_n$.*

Доказательство. Обозначим через Q правый идеал $f_1R + f_2R + \ldots + f_nR$ кольца R. Так как все элементы f_i лежат в идеале P и $Q = f_1R + f_2R + \ldots + f_nR$, то $Q \subseteq P$. Допустим, что утверждение леммы не верно. Тогда существует такой ряд $h \in P$, что $h \notin Q$. Без ограничения общности можно считать, что $h \in U_0$ (если это не так, то можно домножить h на элемент y из условия (ii) определения 6.3 в соответствующей степени). Пусть h_0 — свободный член элемента h. По условию

$$h_0 = f_{1,0}a_{1,0} + f_{2,0}a_{2,0} + \ldots + f_{n,0}a_{n,0}$$

для некоторых элементов $a_{1,0}, \ldots, a_{n,0}$ кольца A. Рассмотрим элемент

$$\Big(h - \big(f_1a_{1,0} + \ldots + f_na_{n,0}\big)\Big)y^{-1} = h' \in U_0.$$

Элемент h' также лежит в $P \cap U_0$ и к нему применимо условие леммы:

$$h'_0 = f_{1,0}a_{1,1} + f_{2,0}a_{2,1} + \ldots + f_{n,0}a_{n,1}.$$

Ряд h'' положим равным

$$\Big(h' - \big(f_1a_{1,1} + \ldots + f_na_{n,1}\big)\Big)y^{-1}.$$

Последовательность $h, h', h'', \ldots$ можно продолжить до бесконечности. Непосредственно проверяется, что выполнено равенство (в смысле «обобщенных бесконечных сумм», которые существуют по условию (iii) определения 6.3)

$$h = f_1\big(a_{1,0} + a_{1,1}y + a_{1,2}y^2 + \ldots\big) + \ldots + f_n\big(a_{n,0} + a_{n,1}y + \ldots\big).$$

Это противоречит предположению $h \notin Q$. □

7.7. Предложение. *Пусть R — обобщенное лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Если свободный член элемента $r \in U_0$ обратим справа (слева) в кольце A, то и сам элемент r обратим справа (слева) в кольце R. Кроме того, если A — тело, то и R — тело.*

Доказательство. Действительно, пусть свободный член элемента r обратим справа. Тогда применим лемму 7.6, положив $n = 1$, $f_1 = r$ и $P = R$. Получим, что $R = P = rR$, т.е., что элемент r обратим справа.

Пусть теперь A — тело, тогда из уже доказанного вытекает, что всякий элемент u из U_0 с ненулевым свободным членом обратим справа (и слева). Но всякий ненулевой элемент r кольца R может быть представлен в виде произведения uy^n, где $u \in U_0$ имеет ненулевой свободный член, а y — обратимый элемент. Поэтому r является произведением двух обратимых элементов и, следовательно, обратим. □

7.8. Замечания.

(1) Аналог леммы 7.6 для левых идеалов также верен.

(2) В связи с предложением 7.7 заметим, что в качестве простого следствия леммы 7.6 можно получить следующее утверждение (его частные случаи для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов хорошо известны): лорановское кольцо является телом в точности тогда, когда его кольцо коэффициентов является телом (см. 10.1). Для обобщенных лорановских колец это неверно, соответствующий пример будет построен

ниже (кольцо дробных p^n-адических чисел Q_{p^n}, при $n > 1$, которое является телом, в то время как его кольцо коэффициентов не является областью).

К введенному во втором определении 6.3 лорановского кольца понятию «обобщенной бесконечной суммы» можно подойти с топологической точки зрения, представив его как сумму ряда, абсолютно сходящегося в определенной топологии.

7.9. Нормированные кольца.

Напомним, что кольцо A с введенной на нем функцией $\|\cdot\|$ в $A \to [0;+\infty)$ называется *нормированным кольцом*, если:

(1) равенство $\|x\| = 0$ выполнено в точности тогда, когда $x = 0$;

(2) для всех элементов x и y из кольца A выполнено неравенство
$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|;$$

(3) для всех элементов x и y из кольца A выполнено неравенство
$$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|;$$

(4) выполнены равенства $\|1\| = \|-1\| = 1$.

В нормированном кольце обычным образом вводятся метрика $\rho(x,y) = \|x-y\|$ и топология, при этом операции умножения и сложения в кольце оказываются равномерно непрерывными функциями от двух переменных. Покажем, что на обобщенном лорановском кольце можно естественным образом ввести топологию, согласованную с нормой.

7.10. Теорема. *Пусть R — обобщенное лорановское кольцо, а $f\colon \mathbb{Z} \to (0;+\infty)$ — строго монотонно убывающая функция от целого аргумента, обладающая свойствами*
$$f(n+m) \leqslant f(n)f(m), \quad f(0) = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$$
(например, можно взять функцию $f(n) = 2^{-n}$). Тогда на R можно ввести норму с указанными ниже свойствами (1)–(4).

(1) $\|0\| = 0$ *и для ненулевого элемента r из R с младшей степенью n его норма $\|r\|$ равна $f(n)$;*

(2) *R с такой нормой является нормированным кольцом, причем порождаемая нормой топология при этом не зависит от выбора конкретной функции f;*

(3) *R — полное метрическое пространство и всякое унитарное подкольцо R' в R, удовлетворяющее условию $\lambda(R') = A$ и содержащее хотя бы одну пару взаимно обратных элементов из U_1 и U_{-1}, всюду плотно в R;*

(4) *отображение π из $A((x))$ в R, как в определении лорановского кольца, является гомеоморфизмом топологических пространств, если в $A((x))$ ввести топологию таким же образом, как в R.*

Доказательство. Выполнение всех условий определения нормированного кольца для кольца R с указанной нормой следует из свойств функции f и из того, что младшая степень произведения двух элементов кольца R больше или равна сумме их младших степеней, а младшая степень суммы двух элементов кольца R больше или равна минимуму их младших степеней.

Чтобы проверить, что порождаемая нормой топология не зависит от выбора функции f, достаточно доказать, что фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из окрестностей вида $U'_\varepsilon = \{r | \|r\| < \varepsilon\}$ при $0 < \varepsilon < 1$ не зависит от выбора функции f. Действительно,
$$U'_\varepsilon = \{r \mid \|r\| < \varepsilon\} = \bigcup_{f(n)<\varepsilon} U_n = U_{g(\varepsilon)},$$

где $g(\varepsilon)$ — минимальное натуральное число n, для которого $f(n) < \varepsilon$. Из свойств функции f следует, что $g(\varepsilon)$ пробегает все натуральные числа при $0 < \varepsilon < 1$, поэтому фундаментальная система окрестностей нуля состоит из U_n при $n > 0$ и только из них. Таким образом, эта система не зависит от выбора функции f.

Проверим, что R — полное метрическое пространство. Действительно, пусть есть последовательность Коши $\{r_n\}$ элементов из кольца R. Выделим из нее такую подпоследовательность $\{r'_n\}$, что для всех натуральных n выполнено неравенство

$$\|r'_{n+1} - r'_n\| \leqslant f(n).$$

Тогда для всех натуральных n выполнено включение $r'_{n+1} - r'_n \in U_n$. По условию (iii) второго определения 6.3 лорановского кольца это означает, что существует «обобщенная бесконечная сумма» s элементов всех $r'_{n+1} - r'_n$ при $n \geqslant 1$. Тогда элемент $r = r_1 + s$ будет пределом последовательности $\{r'_n\}$, а значит и последовательности $\{r_n\}$. Докажем это.

Действительно, по определению «обобщенной бесконечной суммы» для всех натуральных n выполнено включение

$$r - r'_n = s - \sum_{i=1}^{n-1}(r'_{i+1} - r'_i) \in U_n,$$

которое и означает, что $\|r - r'_n\| \leqslant f(n)$, откуда без труда получаем, что элемент r равен пределу последовательности $\{r'_n\}$.

Пусть теперь R' — подкольцо кольца R, удовлетворяющее условию $\lambda(R') = A$ и содержащее пару взаимно обратных элементов y из U_1 и y^{-1} из U_{-1}. Пусть r — произвольный ненулевой элемент кольца R с младшей степенью n. Нужно доказать, что для любого целого k найдется такое $r_k \in R'$, что $r - r_k \in U_k$. Будем доказывать это индукцией по $k - n$. Действительно, если $n - k \leqslant 0$, то можно взять $r_k = 0$.

Пусть теперь $k - n$ — произвольное целое число. Тогда рассмотрим свободный член r_n элемента $ry^{-n} \in U_0$. По условию $\lambda(R') = A$ и поэтому r_n лежит в $\lambda(R')$, поэтому в $R' \cap U_0$ найдется элемент r' со свободным членом r_n. Тогда разность $ry^{-n} - r'$ лежит в U_1, и поэтому разность $r - r'y^n$ лежит в U_{n+1}. Тогда к разности $r - r'y^n$ применимо предположение индукции и существует такой элемент r'' из R', что $r - r'y^n - r''$ лежит в U_k. Поскольку элемент $r'y^n + r''$ лежит в R', доказательство завершено.

Остается доказать, что π — гомеоморфизм. Действительно, π — биекция, и при этом π и π^{-1} сохраняют фундаментальную систему окрестностей любой точки:

$$\pi^{-1}(r + U_n) = \pi^{-1}(r) + V_n, \quad \pi(g + V_n) = \pi(g) + U_n;$$

поэтому π — гомеоморфизм. □

7.11. Замечание. С учетом нормы и топологии, введенной в этом предложении, «обобщенная бесконечная сумма» в определении лорановского кольца, является просто суммой абсолютно сходящегося ряда. Полнота лорановского кольца как метрического пространства непосредственно связана с условием (iii) второго определения 6.3. Так, в кольце многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$, не удовлетворяющем условию (iii), можно ввести норму и топологию аналогичным образом, но полученное пространство не будет полным. При этом кольцо $A[x, x^{-1}]$ как подкольцо в $A((x))$ удовлетворяет требуемым в предложении условиям и поэтому является всюду плотным подмножеством пространства $A((x))$.

7.12. Открытые вопросы.

Пусть R — обобщенное лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A.

(1) Если кольцо R полулокально, то верно ли, что радикал Джекобсона $J(R)$ — нильидеал кольца R?

(2) Найти критерий того, что кольцо R полулокально, не содержащий условий для кольца R.
(3) Найти критерий того, что кольцо R полулокально, не содержащий условий для кольца R.
(4) Пусть A — артиново справа полудистрибутивное справа кольцо. Верно ли, что R — полудистрибутивное справа полулокальное кольцо?

8. Свойства лорановских колец

8.1. Коэффициенты и свободные члены лорановских колец.

Пусть R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A, а π — фиксированное отображение из $A((x))$ в R, как в первом определении 6.2 лорановского кольца. Тогда если $f = \sum f_i x^i$ — ряд из кольца рядов Лорана $A((x))$, то будем называть элементы f_i из кольца A *левыми коэффициентами* элемента $\pi(f) \in R$. Поскольку отображение π — биекция $A((x))$ на R, у каждого элемента из R существует один и только один набор левых коэффициентов (при фиксированном отображении π). Непосредственно проверяется, что если элемент u лежит в U_0, то его свободный член совпадает с его левым коэффициентом u_0, вне зависимости от выбранного отображения π из $A((x))$ в R.

8.2. Отображение $\mu : 2^A \to 2^R$ для лорановского кольца R.

Пусть R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A. Для каждого подмножества B кольца A обозначим через $\mu(B)$ множество всех тех элементов кольца R, все левые коэффициенты которых лежат в B. Непосредственно проверяются указанные ниже свойства.

(1) Если B — правый идеал кольца A, то $\mu(B)$ — правый идеал кольца R и $\lambda(\mu(B)) = B$.
(2) Если B — правый идеал кольца A, то правый идеал $\mu(B)$ кольца R замкнут относительно взятия «обобщенных бесконечных сумм» (как в условии (iii) второго определения 6.3 лорановского кольца).
(3) Отображение μ осуществляет вложение решетки правых идеалов кольца A в решетку правых идеалов кольца R (это вложение является решеточным гомоморфизмом, сохраняющим бесконечные суммы и пересечения).
(4) Для любого главного правого идеала aA кольца коэффициентов A выполнено равенство $\mu(aA) = \pi(a)R$.

8.3. Замечание. Отображение μ, в отличие от отображения λ, определено несимметрично относительно умножения справа или слева. Можно было бы определить его для правых коэффициентов и тогда оно осуществляло бы вложение решетки левых идеалов. Кроме того, наличие такого отображения влечет условие (iv) второго определения 6.3 и само отображение (поскольку оно использует понятие левых коэффициентов) зависит от выбора конкретного биективного отображения $\pi\colon A((x)) \to R$.

8.4. Лемма. *Пусть R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A. Если B — максимальный правый идеал кольца A, то $\mu(B)$ — максимальный правый идеал кольца R.*

Доказательство. Действительно, пусть r — какой-то элемент кольца R, не лежащий в $\mu(B)$. Тогда достаточно доказать, что $rR + \mu(B) = R$.

Поскольку элемент r не лежит в $\mu(B)$, то некоторые из его левых коэффициентов не лежат в B; выберем из них коэффициент с наименьшим номером (такой, который стоит при самой младшей степени переменной в $A((x))$); пусть этот коэффициент будет r_n. Тогда, вычитая из элемента r элементы, лежащие в $\mu(B)$, можно добиться того, чтобы все левые коэффициенты r с номерами меньше n будут равны нулю. Поэтому будем считать, что r_n имеет наименьший номер среди ненулевых коэффициентов. Перейдя от элемента r к элементу $r\pi(x^{-n})$, можно добиться того, чтобы число n было равно нулю. Тогда элемент r лежит в U_0 и его свободный член r_0 не лежит в B.

Поскольку B — максимальный правый идеал кольца A, найдутся такие элементы a из A и b из B, что $r_0a + b = 1$. Тогда у элемента $r\pi(a) + \pi(b)$ свободный член равен единице (а сам этот элемент лежит в $rR+\mu(B)$), следовательно, по предложению 7.7, он обратим в кольце R. Поэтому $rR + \mu(B) = R$, что и требовалось доказать. □

8.5. Предложение. *Пусть R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A. Тогда радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R лежит в $\mu(J(A))$, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A.*

Доказательство. Пусть $\{B_i\}_{i\in I}$ — множество всех максимальных правых идеалов кольца A. Поскольку радикал $J(A)$ совпадает с пересечением всех правых идеалов B_i, то правый идеал $\mu(J(A))$ совпадает с пересечением соответствующих им правых идеалов $\mu(B_i)$. По лемме 8.4 все правые идеалы $\mu(B_i)$ являются максимальными правыми идеалами кольца R, поэтому все они содержат радикал $J(R)$. Отсюда получаем, что $J(R)$ лежит в $\mu(J(A))$. □

8.6. Лемма. *Пусть R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A и P — такой двусторонний идеал кольца A, что $\mu(P)$ — двусторонний идеал кольца R. Тогда на фактор-кольце $R/\mu(P)$ можно естественно ввести структуру лорановского кольца с кольцом коэффициентов, которое изоморфно A/P.*

Доказательство. Действительно, проверим выполнение первого определения 6.2 лорановского кольца. Пусть $B = A/P$. Построим отображение χ из $B((x))$ в $R/\mu(P)$. Пусть b — ряд из $B((x))$, а $\{b_i\}$ — его коэффициенты, так что $b = \sum b_ix^i$. Пусть для каждого i выполнено равенство $b_i = a_i + P$, где $\{a_i\}$ — набор элементов из кольца A. Тогда обозначим через a ряд $\sum a_ix^i$ и положим $\chi(b) = \pi(a) + \mu(P)$. Непосредственно проверяется, что это определение не зависит от выбора a_i и что выполнены все свойства, требуемые в первом определении 6.2 лорановского кольца. □

Для построения конкретных примеров лорановских колец нужно задать то или иное правило умножения рядов из $A((x))$ (поскольку правило сложения зафиксировано в определении). Однако прямая проверка аксиом кольца (особенно закона ассоциативности умножения) является очень трудоемкой процедурой. Поэтому будет целесообразно доказать несколько общих лемм, которые позволят упростить проверку аксиом кольца и построение умножения в кольце.

8.7. Лемма. *Пусть A — кольцо, а f — отображение, которое каждому одночлену вида ax^m, (где a — элемент кольца A, а m — произвольное целое число), ставит в соответствие ряд из кольца рядов Лорана $A((x))$, причем для всех a и b из A и всех целых m выполнено равенство $f((a + b)x^m) = f(ax^m) + f(bx^m)$. Пусть существует такое целое n, что для всякого элемента a из A и для всякого целого m младшая степень ряда $f(ax^m)$ больше или равна $n + m$. Тогда отображение f можно единственным образом расширить до эндоморфизма f' абелевой группы $A^+((x))$, так, что ограничение f' на множество одночленов вида ax^m будет совпадать с f и при этом для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет больше или равна $n+m$, где m — младшая степень ряда r.*

Если при этом для некоторого $c \in A$ для всех одночленов ax^n выполняется условие $f(cax^n) = cf(ax^n)$ или для некоторого целого j для всех одночленов ax^n выполняется условие $f(ax^nx^j) = f(ax^n)x^j$, то такое же условие будет выполнено и для отображения f'. Если же для всякого элемента a из A и для всякого целого m младшая степень ряда $f(ax^m)$ равна $n + m$, то для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет равна $n + m$, где m — младшая степень ряда r.

Доказательство. Поскольку для каждого фиксированного m отображение f задает гомоморфизм абелевой группы по сложению Ax^m, состоящей из всех одночленов вида ax^m в абелеву группу $A^+((x))$, то отображение f расширяется до гомоморфизма прямой суммы абелевых групп Ax^m в абелеву группу $A^+((x))$. Прямая сумма абелевых групп Ax^m по всем целым m совпадает с кольцом многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$, поэтому можно считать, что f — гомоморфизм абелевой группы $A^+[x, x^{-1}]$ в абелеву группу $A^+((x))$. Условие $f(cax^n) = cf(ax^n)$ или $f(ax^n x^j) = f(ax^n)x^j$, если оно было выполнено, при этом, очевидно, сохраняется. Легко видеть, что если для всякого элемента a из A и для всякого целого m младшая степень ряда $f(ax^m)$ равна $n+m$, то для всякого многочлена Лорана r с младшей степенью m младшая степень ряда $f(r)$ будет равна $n + m$.

Докажем существование такого продолжения f'. Пусть r — произвольный ряд, равный $\sum_{i=m}^{+\infty} f_i x^i$. Для каждого целого k обозначим через $r^{(k)}$ многочлен Лорана $\sum_{i=m}^{k} f_i x^i$. При $k < m$ будем считать, что $r^{(k)} = 0$.

Будем строить ряд $f'(r)$. Положим, что коэффициент ряда $f'(r)$ при x^k равен коэффициенту ряда $f(r^{(k-n)})$ при x^k. Легко видеть, что все коэффициенты ряда $f'(r)$ при степенях переменной x младше $n + m$ равны нулю, поэтому ряд $f'(r)$ определен корректно и его младшая степень больше или равна $n + m$. Очевидно, что полученное отображение f' будет эндоморфизмом абелевой группы $A^+((x))$, поскольку $(r + s)^{(k)} = r^{(k)} + s^{(k)}$. Остается доказать, что для любого многочлена Лорана r выполнено равенство $f(r) = f'(r)$.

Действительно, коэффициент ряда $f'(r)$ при x^k равен коэффициенту ряда $f(r^{(k-n)})$ при x^k; следовательно, нужно доказать, что для всякого целого k коэффициент ряда $f(r^{(k-n)})$ при x^k равен коэффициенту ряда $f(r)$ при x^k. Для этого достаточно доказать включение $f(r) - f(r^{(k-n)}) \in V_{k+1}$, где через V_m обозначается множество всех рядов с младшей степенью не ниже m. Но

$$f(r) - f(r^{(k-n)}) = f(r - r^{(k-n)}),$$

а многочлен $r - r^{(k-n)}$ является суммой одночленов со степенью выше $k - n$, поэтому ряд $f(r - r^{(k-n)})$ является суммой рядов со степенью выше k и, следовательно, лежит в V_{k+1}, что и требовалось доказать.

Нетрудно проверить по построению, что если было выполнено условие $f(cax^n) = cf(ax^n)$ или $f(ax^n x^j) = f(ax^n)x^j$, то оно сохранится и для отображения f' и что если для всякого многочлена Лорана r с младшей степенью m младшая степень ряда $f(r)$ равна $n + m$, то для любого ряда r с младшей степенью m младшая степень ряда $f'(r)$ будет равна $n + m$.

Теперь докажем единственность такого продолжения f'. Действительно, если таких продолжений два, то их разность g также является эндоморфизмом абелевой группы $A^+((x))$, причем $g(A[x, x^{-1}]) = 0$ и для любого ряда r младшая степень ряда $g(r)$ больше или равна $n + m$, где m — младшая степень ряда r. Допустим, что существует такой ряд r, что $g(r)$ отлично от нуля. Пусть k — младшая степень ряда $g(r)$. Тогда ряд

$$g(r - r^{(k-n)}) = g(r) - g(r^{(k-n)}) = g(r)$$

имеет младшую степень k. С другой стороны, поскольку младшая степень ряда $r - r^{(k-n)}$ не ниже $k - n + 1$, то младшая степень ряда $g(r - r^{(k-n)})$ не ниже $k + 1$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

8.8. Замечание. С точки зрения топологии, введенной в теореме 7.10, лемма 8.7 является следствием того, что равномерно непрерывное отображение, определенное на всюду плотном подмножестве $A[x, x^{-1}]$, продолжается на все полное метрическое пространство, причем единственным образом.

Иногда будет удобно пользоваться не непосредственно леммой 8.7, а следующим ее простым следствием.

8.9. Предложение. *Пусть A — кольцо, n — целое число, а $f\colon A^+ \to V_n$ — гомоморфизм абелевых групп, который каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие ряд из кольца рядов*

Лорана $A((x))$, младшая степень которого не ниже n. Тогда отображение f можно единственным образом расширить до эндоморфизма f' абелевой группы $A^+((x))$ так, что ограничение f' на A будет совпадать с f, для всех рядов r и всех целых k будет выполнено равенство $f'(rx^k) = f'(r)x^k$ и при этом для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет больше или равна $n + m$, где m — младшая степень ряда r.

Если же для всякого элемента a из A младшая степень ряда $f(a)$ равна n, то для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет равна $n + m$, где m — младшая степень ряда r.

Доказательство. С учетом условия $f'(ax^m) = f'(a)x^m$ существует и единственно продолжение f' отображения f с абелевой группы A^+ на множество всех одночленов вида ax^m, где a — элемент кольца A, а m — произвольное целое число. К отображению f' можно применить лемму 8.7, что и завершает доказательство. □

8.10. Открытые вопросы.

Пусть R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A.

(1) Найти критерий того, что кольцо R примитивно справа (соответственно, слева), не содержащий условий для кольца R.

(2) Найти критерий того, что R — несингулярное справа (соответственно, слева) кольцо.

(3) Если кольцо R регулярно, то верно ли, что A — артиново полупростое кольцо?

(4) Найти критерий того, что каждый правый идеал кольца R равен своему квадрату, не содержащий условий для кольца R.

9. Лорановские кольца: примеры, соотношения

9.1. Лемма. *Пусть A — кольцо, $A((x))$ — кольцо рядов Лорана над A, $\omega(\cdot,\cdot)$ — функция, которая каждой паре рядов из $A((x))$ ставит в соответствие ряд из $A((x))$ и удовлетворяет следующим условиям* (1)–(7)*, где f, g и h в соотношениях обозначают произвольные ряды из $A((x))$, n и m — произвольные целые числа, a и b — произвольные элементы из A*:

(1) $\omega(f+g,h) \equiv \omega(f,h) + \omega(g,h)$ *и* $\omega(f,g+h) \equiv \omega(f,g) + \omega(f,h)$;

(2) *младшая степень ряда $\omega(f,g)$ больше или равна сумме младших степеней рядов f и g, при этом младшая степень ряда $\omega(x,f)$ всегда ровно на единицу больше младшей степени ряда f, а младшая степень ряда $\omega(x^{-1},f)$ — ровно на единицу меньше*;

(3) $\omega(1,f) \equiv f$, $\omega(x,1) = x$ *и* $\omega(x^{-1},1) = x^{-1}$;

(4) $\omega(af, gx^n) \equiv a\omega(f,g)x^n$;

(5) $\omega(x^n,g) \equiv \omega(x,\omega(x^{n-1},g))$ *при* $n > 0$ *и* $\omega(x^n,g) \equiv \omega(x^{-1},\omega(x^{n+1},g))$ *при* $n < 0$;

(6) $\omega(x,\omega(x^{-1},a)) \equiv a$;

(7) $\omega(x^{-1},ab) \equiv \omega(\omega(x^{-1},a),b)$.

Тогда на абелевой группе $A^+((x))$ можно задать такое умножение $f \circ g = \omega(f,g)$, что будут выполнены все аксиомы кольца.

Доказательство. Всюду в доказательстве f, g и h в соотношениях обозначают произвольные ряды из $A((x))$, n и m — произвольные целые числа, а a, b — произвольные элементы из A.

Доказательство будет основано на следующем приеме: если некоторое соотношение $\beta(f) \equiv \gamma(f)$ выполнено для всех одночленов f вида ax^n и при этом функции β и γ удовлетворяют условиям леммы 8.7, то это соотношение выполнено для всех рядов f из $A((x))$. Это вытекает из того, что по лемме 8.7 продолжение функции $\beta - \gamma$ на все кольцо $A((x))$ единственно и тождественно равно нулю (непосредственно проверяется, что если функции β и γ удовлетворяют условиям леммы 8.7 для каких-то целых n_β и n_γ, то функция $\beta - \gamma$ удовлетворяет условиям леммы 8.7 для $\min(n_\beta, n_\gamma)$). Как правило, в качестве функций β и γ будет браться функция ω с одним зафиксированным аргументом или ее композиция с самой собой, поэтому, в силу условий (1) и (2) будут выполнены условия леммы 8.7.

Основную трудность представляет доказательство ассоциативности умножения, задаваемого функцией ω. Выведем необходимые соотношения. Из условий (3) и (5) вытекает, что $\omega(x^n, 1) \equiv x^n$, откуда по условию (4) получаем $\omega(ax^n, 1) \equiv ax^n$ для всех a из A и, в силу леммы 8.7, $\omega(f, 1) \equiv f$ для всех f из $A((x))$, откуда по условию (4) $\omega(f, x^n) \equiv fx^n$ для всех целых n, в частности $\omega(x^n, x^m) \equiv x^{n+m}$. Из условий (3) и (4) вытекает, что $\omega(a, f) \equiv af$ для всех a и f.

Линейные эндоморфизмы β и β_{-1} абелевой группы $A^+((x))$, задаваемые соотношениями

$$\beta(f) = \omega(x, f), \quad \beta_{-1}(f) = \omega(x^{-1}, f),$$

являются, по условию (2), инъективными. Из условий (6) и (4) получаем, что $\omega(x, \omega(x^{-1}, ax^n)) \equiv ax^n$, откуда, согласно лемме 8.7, получаем соотношение $\omega(x, \omega(x^{-1}, f)) \equiv f$. Таким образом, $\beta\beta_{-1} = 1_{A^+((x))}$, поэтому эндоморфизм β сюръективен и, в силу своей инъективности, является автоморфизмом. Тогда β_{-1} совпадает с автоморфизмом β^{-1}. Из условий (3) и (5) тогда получаем, что $\beta^n(f) = \omega(x^n, f)$ для всех целых n. Отсюда для всех целых n и m получаем

$$\omega(x^n, \omega(x^m, f)) \equiv \omega(x^{n+m}, f) \equiv \omega(\omega(x^n, x^m), f).$$

Из этих соотношений с помощью (4) получаем, что для всех целых n и m, всех a из A и всех рядов g выполнено соотношение

$$\omega(ax^n, \omega(x^m, g)) \equiv \omega(\omega(ax^n, x^m), g).$$

По лемме 8.7 отсюда получаем, что

$$\omega(f, \omega(x^m, g)) = \omega(\omega(f, x^m), g)$$

для всех рядов f и g и всех целых m.

Из условий (7), (4) и доказанного выше вытекают соотношения

$$\omega(x^{-1}, \omega(a, bx^n)) \equiv \omega(x^{-1}, abx^n) \equiv \omega(x^{-1}, ab)x^n \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), b)x^n \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), bx^n).$$

По лемме 8.7 получаем соотношение

$$\omega(x^{-1}, \omega(a, f)) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), f).$$

Подставляя в последнее соотношение $f = \omega(x^n, g)$ и пользуясь ранее выведенными соотношениями, получаем

$$\omega(x^{-1}, \omega(ax^n, g)) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(\omega(a, x^n), g)) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(a, \omega(x^n, g))) \equiv$$
$$\equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), \omega(x^n, g)) \equiv \omega(\omega(\omega(x^{-1}, a), x^n), g) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, ax^n), g).$$

Отсюда с помощью леммы 8.7 получаем соотношение

$$\omega(x^{-1}, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, f), g).$$

Будем по индукции доказывать соотношение $\omega(x^{-n}, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(x^{-n}, f), g)$ для всех натуральных n. При $n = 1$ оно доказано, пусть оно доказано для некоторого $n = k$. Тогда по условию (5), пользуясь доказанным соотношением для $n = k$ и для $n = 1$, получаем

$$\omega(x^{-k-1}, \omega(f, g)) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(x^{-k}, \omega(f, g))) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(\omega(x^{-k}, f), g)) \equiv$$
$$\equiv \omega(\omega(x^{-1}, \omega(x^{-k}, f)), g) \equiv \omega(\omega(x^{-k-1}, f), g).$$

Поэтому соотношение

$$\omega(x^{-n}, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(x^{-n}, f), g)$$

доказано для всех натуральных n (для $n = 0$ оно вытекает из условия (3)).

Пусть теперь $n > 0$. Тогда, используя доказанное выше, получаем

$$\omega(\omega(x^n, f), g) \equiv \beta^n(\beta^{-n}(\omega(\omega(x^n, f), g))) \equiv \omega(x^n, \omega(x^{-n}, \omega(\omega(x^n, f), g))) \equiv \\ \equiv \omega(x^n, \omega(\omega(x^{-n}, \omega(x^n, f)), g)) \equiv \omega(x^n, \omega(\omega(x^{-n}, \omega(x^n, f)), g)) \equiv \\ \equiv \omega(x^n, \omega(\beta^{-n}(\beta^n(f)), g)) \equiv \omega(x^n, \omega(f, g)).$$

Таким образом, соотношение $\omega(x^n, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(x^n, f), g)$ доказано для всех целых n. С учетом условия (4) доказано соотношение

$$\omega(ax^n, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(ax^n, f), g),$$

которое можно с помощью леммы 8.7 расширить на все ряды, получив таким образом соотношение $\omega(h, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(h, f), g)$. Итак, ассоциативность доказана.

Дистрибутивность умножения, задаваемого функцией ω, прямо следует из условия (1), соотношение $\omega(f, 1) \equiv f$ было доказано выше, а соотношение $\omega(1, f) \equiv f$ выполнено согласно условию (3). Таким образом, абелева группа $A^+((x))$ с умножением ω действительно является кольцом. □

9.2. Лемма. *Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ и $\Delta\colon A^+ \to A^+[[x]]$ — произвольный гомоморфизм абелевых групп, который каждому элементу кольца A ставит в соответствие ряд без отрицательных степеней переменной с коэффициентами из A. Тогда существует и единственна функция $\omega(\cdot, \cdot)$, которая каждой паре рядов из $A((x))$ ставит в соответствие ряд из $A((x))$, удовлетворяющая указанным ниже условиям (1)–(7), в которых f, g и h обозначают произвольные ряды из $A((x))$, n и m — произвольные целые числа, а a и b — произвольные элементы кольца A.*

(1) $\omega(f + g, h) \equiv \omega(f, h) + \omega(g, h)$ *и* $\omega(f, g + h) \equiv \omega(f, g) + \omega(f, h)$;
(2) *младшая степень ряда $\omega(f, g)$ больше или равна сумме младших степеней рядов f и g, при этом младшая степень ряда $\omega(x, f)$ всегда ровно на единицу больше младшей степени ряда f, а младшая степень ряда $\omega(x^{-1}, f)$ — ровно на единицу меньше*;
(3) $\omega(1, f) \equiv f$;
(4) $\omega(af, gx^n) \equiv a\omega(f, g)x^n$;
(5) $\omega(x^n, g) \equiv \omega(x, \omega(x^{n-1}, g))$ *при* $n > 0$ *и* $\omega(x^n, g) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(x^{n+1}, g))$ *при* $n < 0$;
(6) $\omega(x, \omega(x^{-1}, a)) \equiv a$;
(7) $\omega(x^{-1}, a) = \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a)$.

Если обозначить через $\overline{\varphi}$ продолжение отображения φ до эндоморфизма $A^+((x))$, которое существует по предложению 8.9 и аналогично через $\overline{\varphi^{-1}}$ и $\overline{\Delta}$ такие же продолжения φ и Δ, а через $\gamma(\cdot)$ обозначить эндоморфизм $-\overline{\Delta}(\overline{\varphi^{-1}}(\cdot))$, то для функции ω будет выполнено соотношение

$$\omega(x, a) \equiv \sum_{i=0}^{+\infty} \overline{\varphi}(\gamma^i(a))x^{i+1},$$

где знак $\sum$ обозначает введенную ранее «обобщенную бесконечную сумму» в кольце $A((x))$.

Доказательство. В доказательстве f и g обозначают произвольные ряды из $A((x))$, n и m — произвольные целые числа, а a и b — произвольные элементы кольца A.

«Обобщенная бесконечная сумма» элементов $\overline{\varphi}(\gamma^i(a))x^{i+1}$ в условии определена корректно, поскольку ее младшая степень равна $i + 1$.

Допустим, что такая функция ω существует; тогда докажем по индукции, что при соблюдении этих условий для любого натурального n выполнено соотношение (для всех рядов f из $A((x))$):

$$\omega(x,f)=\omega(x,\gamma^n(f)x^n)+\sum_{i=0}^{n-1}\overline{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1}. \tag{$*$}$$

Действительно, для $n=1$ из выполненного по условию (7) равенства

$$\omega(x^{-1},a)=\varphi^{-1}(a)x^{-1}+\Delta(a)$$

и условия (4) получаем $\omega(x^{-1},ax)=\varphi^{-1}(a)+\Delta(a)x$, откуда

$$\omega(x,\omega(x^{-1},ax))=\omega(x,\varphi^{-1}(a))+\omega(x,\Delta(a)x)$$

и, применяя условие (6), получаем

$$ax=\omega(x,\varphi^{-1}(a))+\omega(x,\Delta(a)x),$$

затем делаем замену $b=\varphi^{-1}(a)$ и получаем

$$\omega(x,b)=\varphi(b)x-\omega(x,\Delta(\varphi(b))x)=\varphi(b)x+\omega(x,\gamma(b)x).$$

Тогда согласно предложению 8.9 выполнено соотношение

$$\omega(x,f)\equiv\overline{\varphi}(f)x+\omega(x,\gamma(f)x), \tag{$**$}$$

что и требовалось для доказательства базы индукции.

Допустим теперь, что равенство $(*)$ верно для некоторого n. Тогда, применяя $(**)$ к равенству $(*)$ для n, получаем

$$\omega(x,f)=\overline{\varphi}(\gamma^n(f)x^n)x+\omega(x,\gamma(\gamma^n(f)x^n)x)+\sum_{i=0}^{n-1}\overline{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1}.$$

Отсюда с учетом того, что $\gamma(gx^m)\equiv\gamma(g)x^m$, и условия (4) получаем

$$\omega(x,f)=\omega(x,\gamma^{n+1}(f)x^{n+1})+\sum_{i=0}^{n}\overline{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1},$$

что завершает индуктивный переход.

Таким образом, равенство $(*)$ верно для всех натуральных n. Тогда получаем, что для всех натуральных n выполнено включение

$$\omega(x,f)-\sum_{i=0}^{n-1}\overline{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1}\in U_{n+1};$$

это и означает по определению «обобщенной бесконечной суммы», что

$$\omega(x,f)=\sum_{i=0}^{+\infty}\overline{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1}.$$

Будем теперь строить функцию ω, постепенно расширяя область определения так, чтобы каждый шаг был единственно возможным. Для всех рядов g из $A((x))$ и всех элементов b из A положим

$$\omega(1,g)\equiv g,\qquad \omega(x^{-1},b)\equiv\varphi^{-1}(b)x^{-1}+\Delta(b),$$

положим также (как показано выше, единственно возможным образом)

$$\omega(x,b)\equiv\sum_{i=0}^{+\infty}\overline{\varphi}(\gamma^i(b))x^{i+1}.$$

С помощью предложения 8.9 расширим область определения функции ω по второму аргументу до всего кольца $A((x))$. Таким образом, функция $\omega(f,g)$ определена для всех рядов g из $A((x))$ и для рядов $f = x^{-1}, 1, x$. В соответствии с условием (5), для $n > 1$ определим индуктивно

$$\omega(x^n, g) \equiv \omega(x, \omega(x^{n-1}, g)),$$

а для $n < -1$ положим $\omega(x^n, g) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(x^{n+1}, g))$. Зададим

$$\omega(ax^n, g) \equiv a\omega(x^n, g)$$

и по лемме 8.7 расширим область определения ω по первому аргументу до всего кольца $A((x))$. Легко проверить, что каждый шаг построения был единственно возможным, и что при построении соблюдались все требуемые свойства функции ω, кроме, возможно, (6).

Докажем, что выполнено условие (6). Действительно,

$$\omega(x, \omega(x^{-1}, a)) = \omega(x, \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a)) = \omega(x, \varphi^{-1}(a))x^{-1} + \omega(x, \Delta(a)) =$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \overline{\varphi}\Big(\gamma^i\big(\varphi^{-1}(a)\big)\Big)x^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \overline{\varphi}\Big(\gamma^i\big(\Delta(a)\big)\Big)x^{i+1}\right) = a. \quad \square$$

9.3. Предложение. *Если A — кольцо и R — множество с бинарными операциями сложения и умножения, то равносильны условия*:

(1) *R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A*;

(2) *существует автоморфизм φ кольца A, гомоморфизм абелевых групп $\Delta\colon A^+ \to A^+[[x]]$ и биективное отображение π из $A((x))$ на R такое, что сложение в R задается формулой $\pi(f) + \pi(g) = \pi(f+g)$, а умножение — формулой $\pi(f)\pi(g) = \pi(\omega(f,g))$, где ω — функция, построенная по лемме 9.2 на основе φ и Δ, при этом φ и Δ таковы, что для всех a и b из A выполнено соотношение*

$$\Delta(ab) \equiv \omega(\Delta(a), b) + \varphi^{-1}(a)\Delta(b).$$

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2). Действительно, возьмем биективное отображение π из $A((x))$ на R, как в первом определении 6.2 лорановского кольца. Тогда будет выполнено требуемое соотношение $\pi(f) + \pi(g) = \pi(f+g)$. Обозначим через $\beta(\cdot,\cdot)$ функцию, ставящую в соответствие двум рядам из $A((x))$ ряд в $A((x))$ по правилу $\beta(f,g) \equiv \pi^{-1}(\pi(f)\pi(g))$.

Пусть φ — скручивающий автоморфизм для элемента $\pi(x)$ (т.е. автоморфизм фактор-кольца $A = U_0/U_1$, индуцированный автоморфизмом $r \to \pi(x)r(\pi(x))^{-1}$ кольца U_0, сохраняющим U_1). Тогда φ^{-1} совпадает с автоморфизмом фактор-кольца U_0/U_1, индуцированным автоморфизмом $r \to (\pi(x))^{-1}r\pi(x)$. Значит для каждого элемента a из A свободный член элемента $(\pi(x))^{-1}\pi(a)\pi(x)$ совпадает с $\varphi^{-1}(a)$, поэтому

$$(\pi(x))^{-1}\pi(a)\pi(x) - \pi(\varphi^{-1}(a)) \in U_1,$$

откуда с учетом свойств (a), (b) из 6.2 получаем

$$\pi(x^{-1})\pi(a) - \pi(\varphi^{-1}(a)x^{-1}) \in U_0 = \pi(V_0),$$

поэтому образ отображения $\Delta(a) \equiv \beta(x^{-1}, a) - \varphi^{-1}(a)x^{-1}$ лежит в V_0. Очевидно, что Δ — гомоморфизм абелевых групп по сложению.

Непосредственно проверяется, что, в силу свойств (a) и (b) из 6.2, функция β удовлетворяет всем условиям леммы 9.2 для φ и Δ. Поэтому, в силу единственности, функция ω совпадает с функцией β.

Остается доказать соотношение

$$\Delta(ab) \equiv \omega(\Delta(a), b) + \varphi^{-1}(a)\Delta(b).$$

Действительно, в силу ассоциативности умножения в кольце R, выполнено соотношение
$$\omega(x^{-1}, \omega(ab)) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), b).$$
Пользуясь свойствами отображения ω и соотношением
$$\omega(x^{-1}, a) \equiv \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a),$$
получаем
$$\varphi^{-1}(ab)x^{-1} + \Delta(ab) = \omega(\Delta(a), b) + \omega(\varphi^{-1}(a)x^{-1}, b) = \omega(\Delta(a), b) + \varphi^{-1}(a)(\Delta(b) + \varphi^{-1}(b)x^{-1}),$$
откуда и следует требуемое соотношение.

(2)⇒(1). Чтобы применить к функции ω лемму 9.1, надо проверить равенства
$$\omega(x, 1) = x,\ \omega(x^{-1}, 1) = x^{-1}, \quad \omega(x^{-1}, ab) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), b).$$
Первые два равенства непосредственно вытекают из условия $\omega(x^{-1}, a) = \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a)$. Остается доказать третье равенство.

Действительно, $\omega(x^{-1}, ab) = \varphi^{-1}(ab)x^{-1} + \Delta(ab)$; с другой стороны
$$\omega(\omega(x^{-1}, a), b) = \omega(\varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a), b) = \omega(\varphi^{-1}(a)x^{-1}, b) + \omega(\Delta(a), b) =$$
$$= \varphi^{-1}(a)\omega(x^{-1}, b) + \omega(\Delta(a), b) = \varphi^{-1}(ab)x^{-1} + \varphi^{-1}(a)\Delta(b) + \Delta(a)b,$$
поэтому, по условию получаем, что
$$\omega(x^{-1}, ab) = \omega(\omega(x^{-1}, a), b).$$
Применяя теперь к функции ω лемму 9.1 получаем, что абелева группа $A^+((x))$ с умножением, заданным функцией ω, является кольцом. Тогда кольцом является и само множество R с операциями сложения и умножения. Условия первого определения 6.2 лорановского кольца непосредственно вытекают из соответствующих свойств функции ω. □

9.4. Замечание. Предложение 9.3, хотя и дает формально полное описание лорановских колец, не позволяет строить их в общем случае достаточно эффективно, поскольку проверка требуемого соотношения для φ и Δ не существенно проще, чем непосредственная проверка аксиом кольца. Тем не менее, если образ гомоморфизма абелевых групп Δ содержится в A, то можно использовать это предложение для построения некоторых важных примеров. В этом случае (после переобозначения $\delta = \Delta$) условие, накладываемое в предложении 9.3 на φ и δ, упрощается до равенства
$$\delta(ab) = \delta(a)b + \varphi^{-1}(a)\delta(b).$$

9.5. Косые рядов Лорана с косым дифференцированием.

Пусть A — кольцо, φ — его автоморфизм, и δ — φ^{-1}-*дифференцирование* (т.е. эндоморфизм абелевой группы по сложению A^+, удовлетворяющий условию $\delta(ab) = \delta(a)b + \varphi^{-1}(a)\delta(b)$ для всех a и b из A). Тогда по предложению 9.3 с помощью φ и δ строится лорановское кольцо, которое называется *кольцом косых рядов Лорана с косым дифференцированием.*

Тождественно нулевой эндоморфизм δ является φ^{-1}-дифференцированием, в этом случае получаем кольцо косых рядов Лорана.

В случае $\varphi = 1_A$ φ^{-1}-дифференцирование становится обычным дифференцированием и кольцо косых рядов Лорана с косым дифференцированием в этом случае изоморфно кольцу псевдодифференциальных операторов.

В качестве примера нетривиального φ^{-1}-дифференцирования при нетождественном автоморфизме φ можно взять функцию
$$\delta(a) = c(a - \varphi^{-1}(a)),$$

где c — какой-либо фиксированный центральный элемент кольца A. Полученный пример кольца косых рядов Лорана с косым дифференцированием показывает, что класс лорановских колец состоит не только из колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов.

9.6. Предложение. *Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ. Тогда всем условиям первого определения 6.2 лорановского кольца удовлетворяет кольцо рядов Лорана $R = A((x,\varphi))$ с естественным изоморфизмом абелевых групп $A((x,\varphi))$ и $A((x))$, который переводит формальную сумму $a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots$ в одном кольце в точно такую же формальную сумму в другом кольце. При этом, если $a_n, a_{n+1}, \ldots$ — произвольная последовательность элементов кольца A, то «обобщенная бесконечная сумма» одночленов $a_i x^i$ по $i \geqslant n$ всегда определена и совпадает с формальным рядом $a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots$.*

Предложение 9.6 проверяется непосредственно.

9.7. Предложение. *Пусть A — кольцо с дифференцированием δ. Тогда существует и единственно с точностью до изоморфизма кольцо $A((t^{-1},\delta))$, состоящее из формальных сумм $f = \sum\limits_{i=-\infty}^{m} f_i t^i$, где t — переменная, m — целое (возможно, отрицательное) число, а коэффициенты f_i ряда f — элементы кольца A, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1. *кольцо $A((t^{-1},\delta))$ является лорановским кольцом, если в качестве отображения π из $A((x))$ в $A((t^{-1},\delta))$ в первом определении 6.2 лорановского кольца взять отображение, переводящее формальную сумму $\sum\limits_{i=m}^{+\infty} f_i x^i$ в формальную сумму $\sum\limits_{i=-\infty}^{-m} f_{-i} t^i$;*
2. *в кольце $A((t^{-1},\delta))$ для каждого элемента a из кольца A выполнено равенство $ta = at + \delta(a)$.*

При этом, если $\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ — произвольная последовательность элементов кольца A, то «обобщенная бесконечная сумма» одночленов $a_i x^i$ по $i \geqslant n$ всегда определена и совпадает с формальным рядом $a_n t^{-n} + a_{n+1}t^{-n-1} + \ldots$. Кроме того, в кольце $A((t^{-1},\delta))$ для каждого элемента a из кольца A будет выполнено равенство

$$t^{-1}a = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \delta^i(a) t^{-i-1}.$$

Доказательство. Предложение 9.7 вытекает из предложения 9.3 и доказанной в 6.7 согласованности обобщенной бесконечной суммы с формальной бесконечной суммой в кольце $A((x))$. $\square$

Выбранный метод построения кольца псевдодифференциальных операторов позволил не задавать произведение двух рядов явной формулой для коэффициентов, а доказать существование такого произведения итеративной процедурой.

Тем не менее, выпишем явную формулу, хотя проверка с ее помощью каких-либо свойств произведения является трудной.

Для формулы умножения нам потребуется дополнительное обозначение. Обычно биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$ определяются только для неотрицательных целых n и неотрицательных целых $k \leqslant n$ с помощью формулы

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!},$$

где предполагается, что $0! = 1$. Распространим это же определение на все целые значения n и все неотрицательные целые значения k. При этом, если$k > n \geqslant 0$, то $\binom{n}{k} = 0$. Для того, чтобы доказать, что для отрицательных n число $\binom{n}{k}$ является целым, отметим, что

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{(n)(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

9.8. Лемма. *Пусть A — кольцо с дифференцированием δ и $A((t^{-1},\delta))$ — кольцо псевдодифференциальных операторов. Тогда для любого целого числа n и для любого элемента a из A в кольце $A((t^{-1},\delta))$ выполнено равенство*

$$t^n a = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{n}{i} \delta^i(a) t^{n-i}.$$

Доказательство. В рамках этого доказательства для обозначения «обобщенной бесконечной суммы» из условия (iii) определения 6.3 лорановского кольца будет использоваться обычный знак суммирования $\sum$. При этом используется то, что формальная сумма в записи элементов кольца псевдодифференциальных операторов является частным случаем «обобщенной бесконечной суммы».

Для неотрицательных n в равенстве

$$t^n a = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{n}{i} \delta^i(a) t^{n-i}$$

можно считать, что сумма является конечной, поскольку для всех $i > n$ биномиальный коэффициент $\binom{n}{i}$ равен нулю.

Докажем требуемое соотношение по индукции для неотрицательных n. Для $n = 0$ соотношение тривиально, для $n = 1$ оно совпадает с соотношением $ta = at + \delta(a)$, которое входит в определение кольца псевдодифференциальных операторов. Пусть теперь оно доказано для некоторого n, докажем его тогда для $n + 1$.

Действительно, имеем:

$$t^{n+1}a = t(t^n a) = t \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \delta^i(a) t^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\delta^i(a)t + \delta^{i+1}(a)) t^{n-i} =$$

$$= at^{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) \delta^i(a) t^{n+1-i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \delta^i(a) t^{n+1-i}.$$

Остается доказать требуемое соотношение для отрицательных n. Для $n = -1$ оно совпадает с соотношением

$$t^{-1}a = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \delta^i(a) t^{-i-1},$$

которое выполнено в силу предложения 9.7. Пусть оно доказано для некоторого $-n$, где n — натуральное число. С учетом 7.2 получаем

$$t^{-n-1}a = t^{-1} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \binom{-n}{i} \delta^i(a) t^{-n-i} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} t^{-1} \binom{-n}{i} \delta^i(a) t^{-n-i} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{-n}{i} \delta^{i+j}(a) t^{-j-1} \right) t^{-n-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{-n}{i} \delta^{i+j}(a) t^{-n-i-j-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{-n}{i-j} \delta^i(a) t^{-n-i-1}.$$

Учитывая равенство $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$ и делая замену $j = i - j$ получаем, что

$$t^{-n-1}a = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n+j-1}{j} \right) \delta^i(a) t^{-n-i-1}.$$

Индукцией по i легко доказать арифметическое соотношение

$$\sum_{j=0}^{i}\binom{n+j-1}{j}=\binom{n+i}{i},$$

которое влечет равенство

$$t^{-n-1}a=\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\binom{n+i}{i}\delta^i(a)t^{-n-i-1}=\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{-n-1}{i}\delta^i(a)t^{-n-i-1}.\qquad\square$$

Теперь можно выписать явную формулу для умножения двух рядов.

9.9. Явная формула для умножения двух рядов.

Пусть A — кольцо с дифференцированием δ и $A((t^{-1},\delta))$ — кольцо псевдодифференциальных операторов. Тогда для любых двух элементов

$$f=\sum_{i=-\infty}^{n}f_it^i\in A((t^{-1},\delta)),\quad g=\sum_{i=-\infty}^{m}g_it^i\in A((t^{-1},\delta))$$

выполнено равенство

$$fg=\sum_{k=-\infty}^{n+m}\left(\sum_{i=k-m}^{n}\sum_{j=k-i}^{m}\binom{i}{i+j-k}f_i\delta^{i+j-k}(g_j)\right)t^k.$$

Доказательство. В рамках этого доказательства для обозначения «обобщенной бесконечной суммы» из условия (iii) второго определения 6.3 лорановского кольца будет использоваться обычный знак суммирования $\sum$. При этом используется тот факт, что формальная сумма в записи элементов кольца псевдодифференциальных операторов является частным случаем «обобщенной бесконечной суммы».

Действительно, применяя 7.2 и формулу, доказанную в лемме 9.8, получаем

$$fg=\left(\sum_{i=-\infty}^{n}f_it^i\right)\left(\sum_{i=-\infty}^{m}g_it^i\right)=\sum_{i=-\infty}^{n}\sum_{j=-\infty}^{m}f_it^ig_jt^j=$$
$$=\sum_{i=-\infty}^{n}\sum_{j=-\infty}^{m}f_i\left(\sum_{k=-\infty}^{i}\binom{i}{i-k}\delta^{i-k}(g_j)t^k\right)t^j=\sum_{i=-\infty}^{n}\sum_{j=-\infty}^{m}\sum_{k=-\infty}^{i}\binom{i}{i-k}f_i\delta^{i-k}(g_j)t^{k+j}=$$
$$=\sum_{i=-\infty}^{n}\sum_{j=-\infty}^{m}\sum_{k=-\infty}^{i+j}\binom{i}{i+j-k}f_i\delta^{i+j-k}(g_j)t^k.$$

Положив временно, что для отрицательных k биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ равен нулю, можно расширить в последнем выражении верхний предел суммирования по k до $n+m$ (сделав его, таким образом, не зависящим от i и j) и тогда, согласно 7.2, можно поменять порядок суммирования. Получаем

$$fg=\sum_{k=-\infty}^{n+m}\sum_{i=-\infty}^{n}\sum_{j=-\infty}^{m}\binom{i}{i+j-k}f_i\delta^{i+j-k}(g_j)t^k.$$

При $i+j-k<0$ коэффициент $\binom{i}{i+j-k}$ равен нулю. Это позволяет изменить нижние пределы суммирования по i и j. Получаем

$$fg=\sum_{k=-\infty}^{n+m}\sum_{i=k-m}^{n}\sum_{j=-k-i}^{m}\binom{i}{i+j-k}f_i\delta^{i+j-k}(g_j)t^k.\qquad\square$$

9.10. Кольца целых и дробных n-адических чисел.

Пусть n — произвольное целое число, большее единицы. По аналогии с кольцом целых p-адических чисел *кольцом целых n-адических чисел* называется кольцо $\mathbb{Z}_n$ всех последовательностей элементов $a_1 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a_2 \in \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$, $\ldots$ таких, что $a_k \equiv a_{k-1} \pmod{n^{k-1}}$ с почленным сложением и умножением. Непосредственно проверяется, что это определение корректно и что кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ естественным образом лежит в кольце $\mathbb{Z}_n$ (целому числу a можно поставить в соответствие последовательность образов числа a в кольце вычетов $\mathbb{Z}/n^k\mathbb{Z}$).

Кольцом дробных n-адических чисел $\mathbb{Q}_n$ называется кольцо частных кольца целых n-адических чисел по мультипликативно замкнутому множеству $\{1, n, n^2, n^3, \ldots\}$. Кольцо целых p-адических чисел является частным случаем кольца целых n-адических чисел (при простом $n = p$), а поле p-адических чисел является частным случаем кольца дробных n-адических чисел.

Приведем пример обобщенного лорановского кольца, не являющегося лорановским кольцом.

9.11. Пример обобщенного лорановского кольца, не являющегося лорановским кольцом.

Для любого целого числа n, большего единицы, кольцо дробных n-адических чисел $\mathbb{Z}_n$ удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii) второго определения 6.3 лорановского кольца, если положить $U_k = n^k\mathbb{Z}_n$, где $\mathbb{Z}_n$ — кольцо целых n-адических чисел, вложенное в $\mathbb{Q}_n$.

При этом кольцо U_0/U_1 изоморфно кольцу вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и не вкладывается в кольцо Q_n как унитарное подкольцо.

Кольцо $\mathbb{Q}_n$ является полем в точности тогда, когда $n = p^m$, где p — простое, а m — натуральное число, а для других n оно даже не является областью.

Доказательство. Докажем, что пересечение U_k по всем целым k состоит из одного нуля, остальная часть условия (i) проверяется тривиально. Достаточно заметить, что для положительных k множество $U_k \subset U_0 = \mathbb{Z}_n$ содержит только целые n-адические числа и состоит из тех и только тех последовательностей $\{a_i\}$ (удовлетворяющих условию n-адического числа), у которых первые k членов равны нулю. Отсюда вытекает, что пересечение U_k по положительным k состоит из одного нуля.

Условие (ii) также выполнено — достаточно взять в качестве взаимно обратных элементов $n \in U_1$ и $n^{-1} \in U_{-1}$.

Пусть теперь $u_k \in U_k, u_{k+1} \in U_{k+1}, \ldots$ — последовательность элементов как в условии (iii) определения 6.3. Можно откинуть любое конечное количество начальных членов этой последовательности, определить «обобщенную бесконечную сумму» оставшихся элементов, а затем добавить к этой сумме прежде откинутые члены. Поэтому можно считать, что k — неотрицательное целое число, а добавив в сумму конечное число нулевых слагаемых, можно сделать так, чтобы k равнялось нулю. Определим теперь «обобщенную бесконечную сумму» v как последовательность $v_i \in \mathbb{Z}/n^i\mathbb{Z}$, где v_i равно $\sum\limits_{j=0}^{i-1} u_j i$ и $u_j i \in \mathbb{Z}/n^i\mathbb{Z}$ — соответствующий член последовательности, определяющей элемент u_j кольца целых n-адических чисел. Непосредственно проверяется, что v и есть искомая сумма.

Из того, что U_1 содержит те и только те последовательности, у которых первый член — нулевой, очевидно следует, что кольцо U_0/U_1 изоморфно кольцу вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Кольцо $\mathbb{Q}_n$ по сложению является абелевой группой без кручения (поскольку содержит поле рациональных чисел), следовательно, кольцо U_0/U_1 не может быть в него вложено.

Докажем теперь, что кольцо целых (дробных) n^m-адических чисел изоморфно кольцу целых (дробных) n-адических чисел для любого натурального m, тогда будет доказано, что для простого p кольцо дробных p^m-адических чисел является полем (хорошо известно, что кольцо дробных p-адических чисел является полем).

Действительно, последовательности $a_1 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a_2 \in \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$, $\ldots$, определяющей элемент a кольца $\mathbb{Z}_n$, можно поставить в соответствие ее подпоследовательность $a_m \in \mathbb{Z}/n^m\mathbb{Z}$, $a_{2m} \in \mathbb{Z}/n^2m\mathbb{Z}$, $\ldots$, определяющую элемент из кольца $\mathbb{Z}_{n^m}$. Наоборот, каждой последовательности $a_m \in \mathbb{Z}/n^m\mathbb{Z}$, $a_{2m} \in \mathbb{Z}/n^2m\mathbb{Z}$, $\ldots$ можно поставить в соответствие последовательность $a_1 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a_2 \in \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$, $\ldots$, определив недостающие члены из условия $a_k \equiv a_{k-1} \pmod{n^{k-1}}$. Непосредственно проверяется, что эти соответствия определяют изоморфизм колец.

Пусть теперь n — натуральное число, большее единицы и не являющееся степенью простого числа. Тогда можно представить число n в виде ab, где a и b — взаимно простые натуральные числа, отличные от единицы. Определим целое n-адическое число v такой последовательностью v_i, что $v_1 = a$ и v_i делится на a^i в кольце $\mathbb{Z}/n^i\mathbb{Z}$. Такую последовательность можно построить индуктивно.

Действительно, пусть $v_i \equiv a^i q_i \pmod{n^i}$ для некоторого целого q_i. Поскольку целые числа a и b^i взаимно просты, то a обратимо в кольце вычетов по модулю b^i и можно найти такое q_{i+1}, что $aq_{i+1} \equiv q_i \pmod{b^i}$. Тогда $a^{i+1}q_{i+1} \equiv a^i q_i \pmod{a^i b^i}$, что и требовалось.

Аналогично можно определить целое n-адическое число w так, чтобы $w_1 = b$ и w_i делилось на b^i в кольце $\mathbb{Z}/n^i\mathbb{Z}$. Элементы w и v отличны от нуля (поскольку w_1 и v_1 отличны от нуля), при этом $wv = 0$, поскольку для каждого натурального i элемент $w_i v_i$ делится на $a^i b^i = n^i$ в кольце $\mathbb{Z}/n^i\mathbb{Z}$, а следовательно равен нулю. Поэтому кольцо $\mathbb{Q}_n$ не является областью и, как следствие, не является телом. □

9.12. Замечание. В [15,16,32,33,45,49–51] изучались кольца инверсных косых рядов Лорана.

9.13. Открытый вопрос.
Получить явную формулу для умножения двух инверсных косых рядов Лорана (ср. 9.9).

10. Нётеровы и артиновы лорановские кольца

Из предложений 9.6 и 9.7 вытекает, что все результаты, полученные для лорановских колец, переносятся на кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов. Будем полагать, что в кольцах косых рядов Лорана U_n обозначает множество всех рядов, в которые переменная входит в степени не ниже n, а в кольцах псевдодифференциальных операторов — множество всех рядов, в которые переменная входит в степени не выше $-n$. Некоторые другие обозначения и понятия также переносятся на кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов (например, понятие свободного члена, отображение λ и отображение μ).

С учетом условия (iv) определения 6.3 лорановского кольца из предложения 7.7 можно получить предложение, частные случаи которой для кольца косых рядов Лорана[1] и кольца псевдодифференциальных операторов хорошо известны.

10.1. Теорема (о лорановских телах). *Пусть A — кольцо.*

(1) *Если R — лорановское кольцо и A совпадает с его кольцом коэффициентов, то кольцо R является телом в точности тогда, когда кольцо A является телом.*

(2) *Если φ — автоморфизм кольца A, то кольцо косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ является телом в точности тогда, когда его кольцо коэффициентов A является телом.*

(3) *Если δ — дифференцирование кольца A, то кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ является телом в точности тогда, когда его кольцо коэффициентов A является телом.*

Доказательство. С учетом предложений 9.6 и 9.7 утверждения (2) и (3) являются частными случаями утверждения (1). В одну сторону утверждение (1) доказано в предложении 7.7. Пусть

[1] Утверждение 10.1(2) было уже доказано в 1.2(7).

теперь R — тело. Тогда кольцо A является областью, поскольку вкладывается в тело R. Пусть a — произвольный ненулевой элемент кольца A. Элемент $\pi(a)$ обратим в теле R, пусть r — его обратный. Согласно первому определению 6.2 лорановского кольца, элементу r соответствует какой-то ряд f из $A((x))$, так что $r = \pi(f)$. Из первого определения лорановского кольца легко вытекает, что $\pi(a)r = \pi(af)$. Пусть $f_n x^n$ — младший член ряда f. A — область, поэтому элемент $af_n x^n$ отличен от нуля. Тогда $1 = \pi(a)r = \pi(a)\pi(f) = \pi(af) = \pi(af_n x^n + v_{n+1})$, где v_{n+1} лежит в V_{n+1}. Отсюда получаем, что $1 - \pi(af_n x^n) \in U_{n+1}$, что возможно только в случае $n = 0$ и $1 = \pi(af_0)$, поскольку элемент $af_n x^n$ отличен от нуля. Но тогда элемент a обратим справа, что и требовалось доказать. $\square$

10.2. Теорема (о нётеровых лорановских кольцах)**.**

(1) *Пусть R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A.*
   - (a) *Кольцо R нётерово справа в точности тогда, когда кольцо A нётерово справа.*
   - (b) *Кольцо R нётерово справа в точности тогда, когда все циклические правые R-модули конечномерны.*
   - (c) *Если R — полудистрибутивное справа полулокальное кольцо, то R — нётерово справа кольцо.*

(2) *Если φ — автоморфизм кольца A, то кольцо косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ нётерово справа в точности тогда, когда его кольцо коэффициентов A нётерово справа*; *кроме того кольцо R нётерово справа в точности тогда, когда все правые циклические R-модули конечномерны.*

(3) *Если δ — дифференцирование кольца A, то кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ нётерово справа в точности тогда, когда его кольцо коэффициентов A нётерово справа*; *кроме того кольцо R нётерово справа в точности тогда, когда все правые циклические R-модули конечномерны.*

Доказательство. С учетом предложений 9.6 и 9.7 утверждения (3) и (2) являются частными случаями утверждения (1).

(1a) Если кольцо R нётерово справа, то, поскольку решетка правых идеалов кольца A инъективно вкладывается в решетку правых идеалов кольца R (с помощью отображения μ), то и кольцо A нётерово справа.

Пусть теперь A — нётерово справа кольцо. Допустим, что кольцо R не нётерово справа; тогда в нем существует бесконечная строго возрастающая цепь правых идеалов $B_1, B_2, B_3, \ldots$. Рассмотрим возрастающую цепь правых идеалов $\lambda(B_1), \lambda(B_2), \ldots$ в кольце A. По условию кольцо A нётерово справа, поэтому существует такое натуральное число k, что $\lambda(B_n) = \lambda(B_k)$ для всех $n > k$. Но кольцо A нётерово справа, поэтому все правые идеалы $\lambda(B_n)$ конечно порождены. Тогда правый идеал $\lambda(B_k)$ порождается конечным числом элементов кольца A, которые являются свободными членами каких-то элементов $\{c_i\}$ из множества $U_0 \cap B_k$. Тогда для любого $n > k$ к правым идеалам B_n и B_k и к набору элементов $\{c_i\}$ применима лемма 7.6, откуда вытекает, что все правые идеалы B_n совпадают при $n > k$, что противоречит предположению.

(1b) Все правые циклические модули над кольцом R — это в точности все фактор-модули модуля R_R, поэтому если кольцо R нётерово справа, то и все правые циклические модули над ним нётеровы, и следовательно, конечномерны.

Пусть все правые циклические R-модули конечномерны. Идея оставшейся части доказательства взята из [67].

Допустим, что кольцо A не является нётеровым справа. Тогда существует строго возрастающая цепь правых идеалов $a_1A \subset a_1A + a_2A \subset \ldots$. Построим такую систему рядов Лорана $f^i \in A((x))$, что правые идеалы $\pi(f^i)R$ образуют бесконечную несократимую сумму, что противоречит условию.

Пусть $g\colon N \to N$ — какое-либо сюръективное отображение натуральных чисел на натуральные числа, обладающее тем свойством, что $g^{-1}(n)$ — бесконечное множество для каждого натурального n. (Можно положить, например, $g(n) = n - [\sqrt{n}]^2 + 1$, где через $[x]$ обозначается целая часть от x.)

Зададим ряды f^i следующим образом: $f_{2^n}^{g(n)} = a_n$ для каждого n, а все остальные коэффициенты всех рядов f^i равны нулю.

Предположим теперь, что $\pi(f^i)R$ не образуют несократимую сумму. Тогда существует такое i, что $\pi(f^i) \in \sum_{j \neq i} \pi(f^j)R$. Поэтому для некоторого набора элементов r_j из R выполнено равенство $\pi(f^i) = \sum_{j \neq i} \pi(f^j) r_j$, причем эта сумма содержит лишь конечное число ненулевых членов. Обозначим через ℓ наименьшую из младших степеней r_j. В силу выбора отображения g множество $g^{-1}(i)$ бесконечно. Поэтому это множество содержит такое натуральное число n, что $2^n > -\ell$.

Тогда $f_{2^n}^i = f_{2^n}^{g(n)} = a_n$. Из равенства

$$\pi(f^i) = \sum_{j \neq i} \pi(f^j) r_j$$

следует, что

$$a_n \in \sum_{j \neq i, k \leqslant 2^n - \ell} f_k^j A.$$

Кроме того, коэффициент f_k^j может быть отличен от нуля только если k совпадает с какой-то степенью двойки, причем $k \leqslant 2^n - \ell < 2^{n+1}$. При $k = 2^n$ коэффициент f_k^j (при $j \neq i$) также равен нулю. Таким образом, $a_n \in \sum_{j \neq i, k < 2^n} f_k^j A$, из чего следует включение $a_n \in \sum_{m<n} a_m A$, что противоречит выбору последовательности $\{a_m\}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

(1c) Так как R — полудистрибутивное справа полулокальное кольцо, то согласно 3.9(4) все циклические правые R-модули конечномерны. Согласно (1b) R — нётерово справа кольцо. $\square$

10.3. Теорема (об артиновых лорановских кольцах)**.** *Пусть A — кольцо.*

(1) *Если R — лорановское кольцо и A совпадает с его кольцом коэффициентов, то кольцо R артиново справа в точности тогда, когда кольцо A артиново справа.*

(2) *Если φ — автоморфизм кольца A, то кольцо косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$ артиново справа в точности тогда, когда его кольцо коэффициентов A артиново справа.*

(3) *Если δ — дифференцирование кольца A, то кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1}, \delta))$ артиново справа в точности тогда, когда его кольцо коэффициентов A артиново справа.*

Доказательство теоремы 10.3 аналогично доказательству теоремы 10.2.

10.4. Замечание об обобщенных лорановских нётеровых или артиновых кольцах. Можно отметить, что доказательство теорем 10.2 и 10.3 использует условие (iv) второго определения 6.3 лорановского кольца только для доказательства в одну сторону. Следовательно, если кольцо коэффициентов A нётерово справа (артиново справа) и R — обобщенное лорановское кольцо, то кольцо R нётерово справа (артиново справа).

10.5. Предложение. *Пусть A — кольцо.*

(1) *Если R — лорановское кольцо и A совпадает с его кольцом коэффициентов, то кольцо R является областью в точности тогда, когда кольцо A является областью.*

(2) *Если φ — автоморфизм кольца A, то кольцо косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$ является областью в точности тогда, когда его кольцо коэффициентов A является областью.*

(3) *Если δ — дифференцирование кольца A, то кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1}, \delta))$ является областью в точности тогда, когда его кольцо коэффициентов A является областью.*

Доказательство. С учетом предложений 9.6 и 9.7 утверждения (3) и (2) являются частными случаями утверждения (1). Докажем его.

Пусть R — область. Тогда A тоже является областью, поскольку изоморфно подкольцу области R.

Пусть теперь A — область и r_1, r_2 — произвольные ненулевые элементы кольца R. Тогда представим их в виде $r_1 = w_1v_1$ и $r_2 = v_2w_2$, где v_1 и v_2 — элементы из U_0 с ненулевыми свободными членами, а w_1 и w_2 — обратимые элементы кольца R. Тогда $r_1r_2 = w_1(v_1v_2)w_2$, при этом элемент v_1v_2 отличен от нуля, поскольку его свободный член равен произведению двух ненулевых элементов области A. Но тогда и элемент r_1r_2 отличен от нуля, что и требовалось доказать. □

10.6. Замечание об обобщенных лорановских областях.

Для обобщенных лорановских колец утверждение предложения 10.5 остается в силе только в одну сторону. В 9.11 построен пример обобщенного лорановского кольца Q_{p^n}, которое является телом, а его кольцо коэффициентов (при $n > 1$) не является областью.

10.7. Предложение. *Пусть A — кольцо главных правых идеалов.*

(1) *Если R — обобщенное лорановское кольцо и A — его кольцо коэффициентов, то R — кольцо главных правых идеалов.*
(2) *Если φ — автоморфизм кольца A, то кольцо косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$ — кольцо главных правых идеалов.*
(3) *Если δ — дифференцирование кольца A, то кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1}, \delta))$ — кольцо главных правых идеалов.*

Доказательство. С учетом предложений 9.6 и 9.7 утверждения (2) и (3) являются частными случаями утверждения (1). Докажем его.

Действительно, пусть P — правый идеал кольца R. Тогда $\lambda(P)$ — правый идеал кольца A и по условию порождается некоторым элементом a из A. Поскольку a лежит в $\lambda(P)$, найдется элемент r из $P \cap U_0$ такой, что свободный член r равенЁa. Тогда к правому идеалу P и к элементу r применима лемма 7.6, из которой следует, что $rR = P$, что и требовалось доказать. □

10.8. Теорема. *Пусть R — лорановское кольцо и A — его кольцо коэффициентов. Тогда эквивалентны следующие условия*:

(1) *R — область главных правых идеалов*;
(2) *R — кольцо главных правых идеалов и A — область*;
(3) *A — область главных правых идеалов.*

Доказательство. Условия (1) и (2) равносильны в силу предложения 10.5. Из условия (3) вытекает условие (2) в силу предложения 10.7. Остается доказать, что из условия (2) вытекает условие (3).

Действительно, пусть B — произвольный ненулевой правый идеал кольца A. Тогда правый идеал $\mu(B)$ кольца R является главным и порождается некоторым элементом f. Поскольку элемент f можно представить в виде uv, где u лежит в U_0 и имеет ненулевой свободный член, а v обратим, то можно считать, что f лежит в U_0 и имеет ненулевой свободный член. Пусть a — свободный член f; очевидно, что a лежит в B. Для всякого элемента b из B выполнено включение $\pi(b) \in \mu(B)$, поэтому для некоторого элемента g из R выполнено равенство $fg = \pi(b)$. Поскольку

A — область, в силу леммы 7.5 получаем, что младшая степень элемента g равна нулю (так как младшие степени f и $\pi(b)$ равны нулю).

Поскольку свободный член произведения равен произведению свободных членов, получаем, что $ag_0 = b$, где g_0 — свободный член g. Следовательно, b лежит в aA и тогда $B = aA$ — главный правый идеал, что и требовалось доказать. $\square$

Из теоремы 10.8 с помощью предложений 9.6 и 9.7 получаем две теоремы 10.9 и 10.10.

10.9. Теорема. *Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ. Тогда эквивалентны следующие условия*:

(1) $A((x,\varphi))$ *— область главных правых идеалов*;
(2) $A((x,\varphi))$ *— кольцо главных правых идеалов и A — область*;
(3) A *— область главных правых идеалов.*

10.10. Теорема. *Пусть A — кольцо и δ — его дифференцирование. Тогда эквивалентны следующие условия*:

(1) $A((t^{-1},\delta))$ *— область главных правых идеалов*;
(2) $A((t^{-1},\delta))$ *— кольцо главных правых идеалов и A — область*;
(3) A *— область главных правых идеалов.*

10.11. Замечание. Из теоремы 10.9 вытекает, что кольцо рядов Лорана $\mathbb{Z}((x))$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ является кольцом главных идеалов. В связи с этим заметим, что кольцо многочленов $\mathbb{Z}[x]$ и кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Z}[[x]]$ не являются кольцами главных идеалов, поскольку идеал, порождённый 2 и x не является главным. Это показывает, что и в этом случае кольца рядов Лорана отличается от случаев колец многочленов и колец формальных степенных рядов.

10.12. Открытые вопросы.

Пусть R — лорановское кольцо и A — его кольцо коэффициентов.

(1) Если кольцо R нетерово справа, то является ли радикал Джекобсона $J(R)$ нильпотентным?
(2) Найти условия, не содержащие кольцо R, равносильные тому, что R — кольцо главных правых идеалов.
(3) Найти условия, не содержащие кольцо R, равносильные тому, что все конечнопорожденные правые идеалы кольца R являются главными.

11. Простые и полупростые лорановские кольца

Для того, чтобы получать для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов следствия из предложений о лорановских кольцах, понадобится несколько вспомогательных утверждений.

11.1. Лемма. *Пусть A — кольцо с автоморфизмом φ. Если Q — двусторонний идеал в кольце косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$, то $\mu(\lambda(Q))$ — также двусторонний идеал в кольце $A((x,\varphi))$.*

Доказательство. В связи с утверждением 4.2(3) достаточно доказать, что $\varphi(\lambda(Q)) = \lambda(Q)$. Действительно, пусть a — какой-либо элемент из $\lambda(Q)$; тогда элемент a является свободным членом некоторого ряда f из $Q \cap U_0$. Тогда элемент xfx^{-1} также лежит в $Q \cap U_0$ и его свободный член равен $\varphi(a)$. Аналогично, свободный член элемента $x^{-1}fx$ равен $\varphi^{-1}(a)$, откуда получаем включения

$$\varphi(\lambda(Q)) \subseteq \lambda(Q), \quad \varphi^{-1}(\lambda(Q)) \subseteq \lambda(Q),$$

что и требовалось доказать. $\square$

11.2. Лемма. *Пусть A — кольцо с дифференцированием δ.*

(1) *Если P — двусторонний идеал кольца A, то правый идеал $\mu(P)$ в кольце псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ является двусторонним в точности тогда, когда $\delta(P) \subseteq P$.*

(2) *Если Q — двусторонний идеал в кольце псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$, то $\mu(\lambda(Q))$ — также двусторонний идеал в $A((t^{-1},\delta))$.*

Доказательство. (1) Пусть $\mu(P)$ — двусторонний идеал. Тогда для любого элемента a из P выполнено включение $\delta(a) = ta - at \in \mu(P) \cap A = P$.

Пусть теперь $\delta(P) \subseteq P$. Пусть $f = \sum_{i=-\infty}^{m} f_i t^i$ — некоторый ряд из $\mu(P)$, так что все его коэффициенты f_i лежат в P, а $g = \sum_{i=-\infty}^{k} f_i t^i$ — произвольный ряд из $A((t^{-1},\delta))$. Непосредственно проверяется, что gf лежит в $\mu(P)$ и, таким образом, $\mu(P)$ — двусторонний идеал кольца $A((t^{-1},\delta))$.

(2) В связи с утверждением (1) достаточно доказать, что $\delta(\lambda(Q)) \subseteq \lambda(Q)$. Действительно, пусть a — какой-то элемент из $\lambda(Q)$, тогда элемент a является свободным членом некоторого ряда f из $Q \cap U_0$, т.е. $f = a + u_1$, где b — некоторый элемент кольца A, а u_1 — некоторый ряд из U_1. Тогда элемент $tft^{-2} - ft^{-1} = \delta(a) + u_1'$ также лежит в $Q \cap U_0$, а его свободный член равен $\delta(a)$. Отсюда получаем включение $\delta(\lambda(Q)) \subseteq \lambda(Q)$, что и требовалось доказать. □

11.3. Теорема. *Пусть R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A и для каждого двустороннего идеала P кольца R правый идеал $\mu(\lambda(P))$ также является двусторонним. Тогда равносильны следующие условия*:

(1) *R — простое кольцо*;

(2) *в кольце A нет такого собственного ненулевого двустороннего идеала B, что правый идеал $\mu(B)$ в кольце R является двусторонним.*

Доказательство. (1)⇒(2). Действительно, допустим B — собственный ненулевой двусторонний идеал кольца A. Тогда $\mu(B)$ — собственный ненулевой правый идеал кольца R. Поскольку R — простое кольцо, правый идеал $\mu(B)$ не является двусторонним идеалом, что и требовалось доказать.

(2)⇒(1). Допустим R — не простое кольцо. Тогда в нём найдётся собственный ненулевой двусторонний идеал P. По условию правый идеал $\mu(\lambda(P))$ также является двусторонним. Это означает, что двусторонний идеал $\lambda(P)$ кольца A равен либо нулю, либо всему кольцу A. Он не может быть равен нулю, так как идеал P отличен от нуля. Следовательно, $\lambda(P) = A$, в частности $1 \in \lambda(P)$, т.е. в P лежит некоторый элемент $f \in U_0$, свободный член которого равен единице. По предложению 7.7 получаем, что f — обратимый элемент и идеал P равен всему кольцу R. Полученное противоречие завершает доказательство. □

На основе теоремы 11.3 можно получить критерии простоты кольца псевдодифференциальных операторов и кольца косых рядов Лорана.

11.4. Теорема. *Пусть A — кольцо и δ — его дифференцирование. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *$A((t^{-1},\delta))$ — простое кольцо*;

(2) *кольцо A не имеет таких нетривиальных двусторонних идеалов B, что $\delta(B) \subseteq B$.*

Доказательство. В силу леммы 11.2 в кольце псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ выполнены условия теоремы 11.3. Применение леммы 11.2(1) завершает доказательство. □

11.5. Лемма. *Пусть R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A и B — такой двусторонний идеал кольца A, что $\mu(B)$ — двусторонний идеал кольца R. Тогда для любого правого идеала C кольца A выполнено включение $\mu(C)\mu(B) \subseteq \mu(CB)$. В частности, если идеал B нильпотентен, то и идеал $\mu(B)$ кольца R нильпотентен.*

Доказательство. Нужно доказать, что если f — произвольный элемент из $\mu(C)$, а g — произвольный элемент из $\mu(B)$, то произведение fg лежит в $\mu(CB)$. В силу закона дистрибутивности для «обобщённой бесконечной суммы» и того, что правый идеал $\mu(CB)$ замкнут относительно взятия «обобщённой бесконечной суммы», достаточно доказать это утверждение для элемента f вида $\pi(cx^n)$, где c — произвольный элемент из C, а n — целое число. Тогда $fg = \pi(c)\pi(x^n)g$, а поскольку $\mu(B)$ — двусторонний идеал, элемент $g'\pi(x^n)g$ лежит в $\mu(B)$. Если теперь $\{b_i\}$ — левые коэффициенты элемента g', то левые коэффициенты элемента $\pi(c)g'$ — это $\{cb_i\}$, поэтому элемент $\pi(c)g'$ лежит в $\mu(CB)$, что и требовалось доказать.

Из доказанного выше вытекает, что

$$\mu(B^{n-1})\mu(B) \subseteq \mu(B^n),$$

откуда легко получаем включение $(\mu(B))^n \subseteq \mu(B^n)$. Поэтому если идеал B нильпотентен, то и идеал $\mu(B)$ нильпотентен. $\square$

11.6. Теорема. *Пусть R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A и для каждого двустороннего идеала P кольца R правый идеал $\mu(\lambda(P))$ также является двусторонним. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *R — полупростое артиново кольцо;*
(2) *A — артиново кольцо и в его радикале $J(A)$ не содержится никакой ненулевой двусторонний идеал B такой, что правый идеал $\mu(B)$ в кольце R является двусторонним.*

Доказательство. Допустим, R — полупростое артиново кольцо. Тогда, в силу теоремы 10.3, A — артиново справа кольцо и, следовательно, его радикал $J(A)$ нильпотентен. Допустим, что в $J(A)$ содержится такой ненулевой двусторонний идеал B, что правый идеал $\mu(B)$ в кольце R является двусторонним. Тогда B — нильпотентный идеал и по лемме 11.5 двусторонний идеал $\mu(B)$ также является нильпотентным. Но в R нет ненулевых нильпотентных идеалов. Полученное противоречие завершает доказательство в одну сторону.

Пусть теперь A — артиново кольцо и в $J(A)$ не содержится никакой ненулевой двусторонний идеал B такой, что правый идеал $\mu(B)$ в кольце R является двусторонним. Согласно теореме 10.3 кольцо R также является артиновым справа. Допустим, радикал Джекобсона $J(R)$ отличен от нуля. Тогда $\lambda(J(R))$ — двусторонний идеал кольца A, лежащий в $J(A)$ (в силу предложения 8.5). При этом $\mu(\lambda(J(R)))$ — двусторонний идеал кольца R, что противоречит условию. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Можно также получить следствия теоремы 11.6 для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов.

11.7. Теорема. *Пусть A — кольцо с дифференцированием δ. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$A((t^{-1}, \delta))$ — полупростое артиново кольцо;*
(2) *A — артиново справа кольцо, причём для любого ненулевого элемента j радикала $J(A)$ существует такое натуральное число n, что элемент $\delta^n(j)$ не лежит в $J(A)$.*

Доказательство. В силу леммы 11.4, в кольце косых рядов Лорана $A((t^{-1}, \delta))$ выполнены условия теоремы 11.6. С учётом леммы 11.2(1) остаётся проверить, что в $J(A)$ в точности тогда, когда есть такой ненулевой двусторонний идеал B, что $\delta(B) \subseteq B$, когда в $J(A)$ найдётся такой ненулевой элемент j, что $\delta^n(j)$ лежит в $J(A)$ для всех натуральных n.

Действительно, если такой идеал B существует, то в качестве j можно взять любой его ненулевой элемент. Обратно, пусть существует такой элемент j. Рассмотрим двусторонний идеал, порождённый элементами j, $\delta(j)$, $\delta^2(j)$ и т. д. Все его элементы являются конечными суммами произведений вида $a_1\delta^n(j)a_2$, где n — неотрицательное целое число. Достаточно показать, что дифференцирование δ переводит произведение такого вида в сумму произведений такого же вида. Действительно,

$$\delta(a_1\delta^n(j)a_2) = \delta(a_1)\delta^n(j)a_2 + a_1\delta^{n+1}(j)a_2 + a_1\delta^n(j)\delta(a_2),$$

что и требовалось доказать. $\square$

11.8. Открытые вопросы.
Пусть R — лорановское кольцо и A — его кольцо коэффициентов.

(1) Найти условия, не содержащие кольцо R, равносильные тому, что кольцо R примитивно справа (соответственно, слева).
(2) Найти условия, не содержащие кольцо R, равносильные тому, что $J(R) = 0$.

12. Цепные и полуцепные лорановские кольца

12.1. Несколько определений и замечаний.
Следующие утверждения хорошо известны и проверяются непосредственно.

(1) Каждый конечнопорождённый полуцепной (соответственно, цепной) модуль полулокален (соответственно, локален).
(2) Каждый цепной модуль равномерен.
(3) Если A — цепное справа кольцо и $J(A)$ — нильпотентный идеал, то A — артиново справа кольцо главных правых идеалов, в котором все собственные правые идеалы совпадают со степенями $J(A)$ и, следовательно, являются идеалами.
(4) В кольце A множество $\operatorname{Sing} A_A$ всех элементов a, у которых правый аннулятор $r(a)$ — существенный правый идеал кольца A, является (двусторонним) идеалом кольца A и называется *правым сингулярным идеалом* кольца A. Если A — нётерово справа кольцо, то идеал $\operatorname{Sing} A_A$ нильпотентен.
(5) Если каждый элемент $a \in A \setminus \operatorname{Sing} A_A$ обратим справа, то $J(A) = \operatorname{Sing} A_A$ и A — локальное кольцо.
(6) Пусть A — равномерное справа (например, цепное справа) кольцо. Тогда идеал $\operatorname{Sing} A_A$ совпадает со множеством всех левых делителей кольца A и фактор-кольцо $A/\operatorname{Sing} A_A$ является областью. Следовательно, если каждый элемент a кольца A с нулевым правым аннулятором обратим справа в кольце A, то из (5) вытекает, что A — локальное кольцо и $J(A)$ совпадает с идеалом $\operatorname{Sing} A_A$ и со множеством всех левых делителей нуля кольца A.
(7) Если A — цепное справа нётерово справа кольцо, и каждый элемент a кольца A с нулевым правым аннулятором обратим справа в A, то A — артиново справа кольцо главных правых идеалов, в котором все собственные правые идеалы совпадают со степенями $J(A)$ и, следовательно, являются идеалами.

Доказательство. Утверждения (4), (5) и (6) хорошо известны. Утверждение (7) вытекает из (6), (4) и (3). $\square$

12.2. Теорема (о цепных лорановских кольцах; см. [79]). *Если R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A, то равносильны следующие условия*:

(1) *R — цепное справа кольцо*;

(2) *R — цепное справа артиново справа кольцо*;

(3) *A — цепное справа артиново справа кольцо и $\mu(J(A))$ — двусторонний идеал кольца R, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A.*

Доказательство. Импликация (2)⇒(1) очевидна.

(1)⇒(3). Так как R — цепное справа кольцо, то все циклические правые R-модули равномерны и, следовательно, конечномерны. По теореме 10.2(1) кольца R и A нётеровы справа.

$(*)$ Докажем сначала, что A — цепное справа кольцо. Пусть a, b — ненулевые элементы кольца коэффициентов A и $\pi(a)$, $\pi(b)$ их образы в лорановском кольце R при каноническом вложении (см. первое определение лорановского кольца в 6.2). Так как R — цепное справа кольцо, то можно без ограничения общности считать, что существует такой элемент $f \in R$, что $\pi(a) = \pi(b)f$. Пусть $f = \pi(g)$, где g — некоторый ряд из $A((x))$. Тогда получаем

$$\pi(a) = \pi(b)\pi(g) = \pi(bg),$$

откуда $a = bg$. Приравняв коэффициенты при x^0, получим, что $a = bg_0$, где $g_0 \in A$ — соответствующий коэффициент ряда g. Таким образом, A — цепное справа кольцо.

$(**)$ Докажем теперь, что каждый элемент a кольца A, не являющийся левым делителем нуля, обратим справа в A. Рассмотрим элементы $a, a + y$ кольца R, где y — обратимый элемент из условия (ii) во втором определении 6.3 лорановского кольца. Так как R — цепное справа кольцо, то либо $a + y \in aR$, либо $a \in (a + y)R$. Поэтому либо существует такой элемент $f \in R$, что

$$y = (a + y) - a = afy,$$

либо существует такой элемент $f \in R$, что

$$y = (a + y) - a = (a + y)fy.$$

В первом случае обозначим a через a', во втором случае обозначим $a + y$ через a' и получим, что в обоих случаях $1 = a'f$, где $a' \in U_0$ и свободный член a' равен a.

Представим f в виде $f'y^n$, где $f' \in U_0$ и свободный член f' отличен от нуля. Тогда свободный член произведения $a'f'$ отличен от нуля (поскольку свободный член a' не является левым делителем нуля) и получаем, что $1 = a'f = a'f'y^n$ лежит в U_n, но не лежит в U_{n+1}. Поэтому $n = 0$ и определен свободный член элемента f, обозначим его через f_0. Из равенства $a'f = 1$ получаем $af_0 = 1$, т.е. элемент a обратим справа, что и требовалось доказать.

Из $(**)$ и 12.1(7) следует, что A — артиново справа кольцо главных правых идеалов, в котором все собственные правые идеалы совпадают со степенями $J(A)$ и, следовательно, являются идеалами. Поэтому $\mu(J(A))$ — идеал кольца R.

(3)⇒(2). Так как A — цепное справа артиново справа кольцо, то A — локальное кольцо с нильпотентным радикалом Джекобсона J. Согласно 12.1(3), A — кольцо главных правых идеалов, в котором каждый собственный правый идеал совпадает с какой-либо степенью J, причем A/J — тело. Рассмотрим фактор-кольцо $R/\mu(J)$ (по условию $\mu(J)$ — идеал). В силу леммы 8.6 кольцо $R/\mu(J)$ является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов A/J, откуда по теореме 10.1 получаем, что $R/\mu(J)$ — тело.

Так как A — кольцо главных правых идеалов, то J как правый идеал порождается одним элементом j, а $\mu(J)$ — элементом $\pi(j)$. Тогда

$$J^2 = jAjA = j(AjA) = jJ = jjA = j^2A.$$

Аналогично доказывается, что $J^n = j^nA$ и $\mu(J)^n = \pi(j^n)R$. Поэтому $\mu(J)^n = \mu(J^n)$. Так как идеал J нильпотентен, то $\mu(J)$ — нильпотентный идеал кольца R. Ввиду того, что идеал $\mu(J^n)$ является главным правым идеалом кольца R, модуль $\mu(J^n)/\mu(J^{n+1})$ — одномерное линейное пространство над телом $R/\mu(J)$.

Докажем теперь, что $\mu(J^n)$ как правый идеал порождается любым элементом $r \in \mu(J^n) \setminus \mu(J^{n+1})$ (число n может быть равно нулю; тогда $\mu(J^n) = R$). Действительно, так как $\mu(J^n)/\mu(J^{n+1})$ — одномерное линейное пространство над телом $R/\mu(J)$, то существует такой элемент $a \in R$, что $(r+\mu(J^{n+1}))(a+\mu(J)) = j^n + \mu(J^{n+1})$. Значит, $ra = j^n(1+k)$, где $k \in \mu(J)$. Поскольку k — нильпотентный элемент, то $1+k$ — обратимый элемент. Поэтому $ra(1+k)^{-1} = j^n$, а отсюда следует, что элемент r порождает (как правый идеал) весь идеал $\mu(J^n)$.

Пусть теперь B — какой-либо собственный правый идеал кольца R, а n — минимальное натуральное число, для которого $\mu(J^n) \subseteq B$. Допустим, что $B \neq \mu(J^n)$; тогда существует такое натуральное $i < n$, что пересечение $(\mu(J^i) \setminus \mu(J^{i+1})) \cap B$ непусто. Но тогда по доказанному выше $\mu(J^i) \subseteq B$. Получили противоречие. Поэтому любой собственный правый идеал в R совпадает с какой-то степенью $\mu(J)$, откуда R — цепное справа артиново справа кольцо. $\square$

Из теоремы 12.2 получим следствия для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов.

12.3. Теорема. *Если A — кольцо с автоморфизмом φ, то равносильны следующие условия*:

(1) $A((x,\varphi))$ — *цепное справа кольцо*;

(2) $A((x,\varphi))$ — *цепное справа артиново справа кольцо*;

(3) A — *цепное справа артиново справа кольцо.*

Доказательство. Из 4.2(3) вытекает, что правый идеал $\mu(J(A))$ кольца $A((x,\varphi))$ является двусторонним идеалом (поскольку радикал Джекобсона любого кольца переходит в себя при любом автоморфизме). Тогда утверждение теоремы вытекает из теоремы 12.2 и предложения 9.6. $\square$

12.4. Теорема. *Если A — кольцо с дифференцированием δ, то равносильны следующие условия*:

(1) $A((t^{-1},\delta))$ — *цепное справа кольцо*;

(2) $A((t^{-1},\delta))$ — *цепное справа артиново справа кольцо*;

(3) A — *цепное справа артиново справа кольцо и $\delta(J(A)) \subseteq J(A)$, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A.*

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно вытекает из леммы 11.2(1), теоремы 12.2 и предложения 9.7. $\square$

В связи с теоремой 12.4 построим ниже пример 12.5 цепного артинова кольца A с таким дифференцированием δ, что кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ не является цепным.

12.5. Пример. Пусть F — поле ненулевой характеристики p, $K = F[x]$ — кольцо многочленов. Тогда коммутативное кольцо $A = K/x^pK$ является цепным артиновым, но не является полем. В кольце A можно ввести дифференцирование δ с учетом правил

$$\delta(x^n) = nx^{n-1}, \quad \delta(a) = 0$$

для каждого элемента a из поля F. При этом кольцо $A((t^{-1},\delta))$ изоморфно кольцу всех $p \times p$ матриц над полем $F((t^{-p}))$, состоящим из рядов вида $f = \sum_{i=-\infty}^{m} f_i t^{pi}$, где все коэффициенты f_i лежат в F. В частности, $A((t^{-1},\delta))$ — простое артиново кольцо, не являющееся цепным кольцом.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что все идеалы в кольце A исчерпываются идеалами вида x^kA, где k — целое число от 0 до p. Отсюда следует, что A — цепное артиново кольцо (при этом $1 \in \delta(J(A))$). Легко видеть, что множество $F((t^{-p}))$ является подкольцом в $A((t^{-1},\delta))$ и изоморфно кольцу рядов Лорана $F((s))$ (изоморфизм переводит s в t^{-p}); следовательно, оно является полем. Согласно лемме 9.8 для всех натуральных k элементы x^k и t^p кольца $A((t^{-1},\delta))$ коммутируют. Поэтому все элементы поля $F((t^{-p}))$ лежат в центре кольца $A((t^{-1},\delta))$. Таким образом, кольцо $A((t^{-1},\delta))$ является алгеброй над полем $F((t^{-p}))$. Ясно, что размерность этой алгебры как линейного пространства над полем составляет p^2.

Если B — какой-либо двусторонний идеал кольца $A((t^{-1},\delta))$, а $f = \sum\limits_{i=-\infty}^{m} f_i t^i$ — его произвольный элемент, то идеал B содержит также элемент $ft - tf = \sum\limits_{i=-\infty}^{m} \delta(f_i)t^i$. Поэтому правый идеал $\lambda(B)$ кольца A обладает свойством $\delta(\lambda(B)) \subseteq \lambda(B)$. Однако кольцо A не имеет нетривиальных правых идеалов с этим свойством. Поэтому если B — ненулевой идеал, то $\lambda(B) = A$ и, следовательно, в B найдётся элемент $b \in U_0$ со свободным членом, равным единице. Из предложения 7.7 следует, что $B = A((t^{-1},\delta))$. Значит, $A((t^{-1},\delta))$ — простое кольцо.

Согласно теореме 10.3 $A((t^{-1},\delta))$ — артиново справа простое кольцо. Поэтому существуют такое тело H и натуральное число ℓ, что $A((t^{-1},\delta))$ изоморфно кольцу всех $\ell\times\ell$-матриц над H. Центр кольца матриц лежит в подкольце скалярных матриц, изоморфном телу H, а поле $F((t^{-p}))$ лежит в центре кольца $A((t^{-1},\delta))$. Поэтому тело H содержит подполе, изоморфное полю $F((t^{-p}))$.

Пусть размерность тела H как линейного пространства над $F((t^{-p}))$ составляет s. Тогда размерность кольца $A((t^{-1},\delta))$ над полем $F((t^{-p}))$ равна $p^2 = \ell^2 s$. Поскольку p — простое число, то либо $\ell = 1$, либо $s = 1$ и $\ell = p$. Если $\ell = 1$, то $A((t^{-1},\delta))$ — тело, но это невозможно, так как $A((t^{-1},\delta))$ имеет ненулевой нильпотентный элемент x. Если $s = 1$ и $\ell = p$, то $H = F((t^{-p}))$. Таким образом, кольцо $A((t^{-1},\delta))$ изоморфно кольцу всех $p\times p$-матриц над полем $F((t^{-p}))$.

Для наглядности построим в явном виде p ненулевых взаимно ортогональных идемпотентов в кольце $A((t^{-1},\delta))$, дающих в сумме единицу. Для этого выведем некоторые соотношения в кольце $A((t^{-1},\delta))$. Заметим вначале, что имеет место соотношение $tx = xt + 1$. Для любого натурального n имеем

$$x^n t^n = x^{n-1}(xt^{n-1})t = x^{n-1}(t^{n-1}x) - (n-1)t^{n-2}t =$$
$$= x^{n-1}t^{n-1}(xt) - (n-1)x^{n-1}t^{n-1} = x^{n-1}t^{n-1}(xt - (n-1)).$$

Отсюда легко получаем, что

$$x^n t^n = \prod_{i=0}^{n-1}(xt - i).$$

В частности,

$$0 = x^p t^p = \prod_{i=0}^{p-1}(xt - i).$$

Обозначим xt через y и из хорошо известного равенства

$$\prod_{i=0}^{p-1}(y - i) \equiv y^p - y \pmod p$$

получаем, что $y^p = y$. Нетрудно видеть, что ни один многочлен от y степени меньше p над полем F хотя бы с одним ненулевым коэффициентом не равен нулю, поскольку из доказанных выше соотношений вытекает, что множество всех многочленов от y над F совпадает с линейной оболочкой всех одночленов $x^n t^n$ над полем F и, следовательно, размерность этого множества как линейного пространства равна p.

Рассмотрим теперь для каждого j от 0 до $p-1$ многочлен

$$e_j(u) = \prod_{i\in\{0,\ldots,p-1\}\setminus j}(u - i)$$

от переменной u над полем F. Тогда, очевидно, степень многочлена $e_j(u)$ равна $p-1$. Поэтому элемент $e_j(y)$ отличен от нуля для всех j. Кроме того, если $j_1 \neq j_2$, то многочлен $e_{j_1}(u)e_{j_2}(u)$ делится на

$$\prod_{i=0}^{p-1}(u-i) = u^p - u.$$

Значит, $e_{j_1}(y)e_{j_2}(y) = 0$. Из известного равенства $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ вытекает, что $e_j(j) = -1$ для всех j. Поэтому многочлен $e_j(u)+1$ делится на $u-j$. Следовательно, $e_j(u)(e_j(u)+1)$ делится на

$$\prod_{i=0}^{p-1}(u-i) = u^p - u.$$

Это значит, что $e_j(y)(e_j(y)+1) = 0$, т.е. $e_j^2(y) = -e_j(y)$. Непосредственно проверяется, что для каждого i от 0 до $p-1$ выполняется равенство

$$\sum_{j=0}^{p-1} e_j(i) \equiv -1 \pmod{p}.$$

Поэтому многочлен

$$1 + \sum_{j=0}^{p-1} e_j(u)$$

степени не выше $p-1$ имеет по крайней мере p корней. Отсюда следует, что

$$\sum_{j=0}^{p-1} e_j(u) = -1;$$

в частности,

$$\sum_{j=0}^{p-1} e_j(y) = -1.$$

Из доказанного выше вытекает, что элементы $-e_j(y)$ $(j = 0, 1, \dots, p-1)$ образуют систему из p ненулевых попарно ортогональных идемпотентов кольца $A((t^{-1}, \delta))$, дающих в сумме единицу. $\square$

12.6. Теорема. *Пусть R — лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов с радикалом Джекобсона $J(A)$, и правый идеал $\mu(J(A))$ кольца R является двусторонним идеалом. Тогда равносильны следующие условия*:

(1) *R — полуцепное справа артиново справа кольцо*;

(2) *A — полуцепное справа артиново справа кольцо.*

Доказательство. Обозначим радикал Джекобсона кольца A через J.

(2)⇒(1). Поскольку кольцо A является полуцепным справа, в нём существует такая конечная система попарно ортогональных идемпотентов e_i $(i = 1, \dots, n)$, что $\sum e_i = 1$ и e_iA — цепной модуль над A для каждого i. Для каждого идемпотента e и двустороннего идеала I верно равенство $eA \cap I = eI$. В частности, для всех $i = 1, \dots, n$ и неотрицательных целых k выполнено равенство $e_iA \cap J^k = e_iJ^k$ (полагаем, что $J^0 = A$).

В силу того, что A — артиново справа кольцо, идеал J нильпотентен и кольцо A/J является полупростым. Следовательно, все модули J^k/J^{k+1} над A/J также являются полупростыми. Поэтому для всех i и k цепной модуль

$$e_iJ^k/e_iJ^{k+1} \cong (e_iJ^k + J^{k+1})/J^{k+1} \subseteq J^k/J^{k+1}$$

является простым. Так как модуль e_iA является цепным для каждого i, то все его подмодули исчерпываются модулями e_iJ^k, среди которых лишь конечное число отлично от нуля в силу нильпотентности J. При этом каждый модуль e_iJ^k порождается любым своим элементом, не лежащим в модуле e_iJ^{k+1}.

Рассмотрим теперь радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R. Согласно предложению 8.5 он лежит в правом идеале $\mu(J)$. Радикал J кольца A нильпотентен и, поскольку правый идеал $\mu(J)$ по условию является двусторонним, можно применить лемму 11.5, откуда получаем, что идеал $\mu(J)$ также является нильпотентным и, следовательно, лежит в $J(R)$. Поэтому $J(R) = \mu(J)$. Рассмотрим теперь правые идеалы $e_iR = \mu(e_iA)$ кольца R. Их прямая сумма равна R. Докажем теперь, что для каждого i правый идеал e_iR является цепным модулем над R.

Пусть $f \in e_iR$ — ненулевой элемент. Для некоторого неотрицательного k выполнено включение

$$f \in \mu(e_iJ^k) \setminus \mu(e_iJ^{k+1}).$$

Рассмотрим правый идеал $P = fR+\mu(e_iJ^{k+1})$ кольца R. Он лежит в $\mu(e_iJ^k)$ и содержит $\mu(e_iJ^{k+1})$. Тогда $\lambda(P)$ лежит в e_iJ^k и содержит e_iJ^{k+1}. Так как e_iJ^k/e_iJ^{k+1} — простой модуль, то $\lambda(P)$ совпадает либо с e_iJ^k, либо с e_iJ^{k+1}. Но правые идеалы e_iJ^{k+1} и e_iJ^k являются главными, поэтому можно применить лемму 7.6 и получить, что либо $P = \mu(e_iJ^k)$, либо $P = \mu(e_iJ^{k+1})$, что невозможно по выбору k.

Из равенства

$$fR + \mu(e_iJ^{k+1}) = \mu(e_iJ^k)$$

следует, что в правом идеале fR найдется элемент g вида $\pi(e_ij_k)+r$, где e_ij_k — элемент кольца A, порождающий правый идеал e_iJ^k, а r — произвольный элемент из $\mu(e_iJ^{k+1})$. Тогда порождающий элемент главного правого идеала e_iJ^{k+1} может быть представлен в виде e_ij_kj, где j — некоторый элемент из J, и поэтому

$$r \in \mu(e_iJ^{k+1}) = \pi(e_ij_kj)R = \pi(e_ij_k)\pi(j)R,$$

откуда

$$f \in \pi(e_ij_k)(1 + \pi(j)R).$$

В силу того, что $J(R) = \mu(J)$, все элементы из $1 + \pi(j)R$ обратимы, следовательно, $\pi(e_ij_k) \in fR$, откуда $fR = \mu(e_iJ^k)$. Таким образом, все подмодули модуля e_iR исчерпываются модулями $\mu(e_iJ^k)$ и e_iR — цепной артинов модуль.

Следовательно, модуль R_R является конечной прямой суммой цепных артиновых модулей. Поэтому R — полуцепное справа артиново справа кольцо, что и требовалось доказать.

(1)⇒(2). Пусть π — вложение кольца A в кольцо R как во втором определении 6.3 лорановского кольца. В силу теоремы 10.3 кольцо A артиново справа. Таким образом, радикал J нильпотентен. По предложению 8.5 радикал $J(R)$ лежит в правом идеале $\mu(J)$. Радикал J кольца A нильпотентен и, поскольку правый идеал $\mu(J)$ по условию является двусторонним, можно применить лемму 11.5, откуда получаем, что идеал $\mu(J)$ также является нильпотентным и, следовательно, лежит в $J(R)$. Поэтому $J(R) = \mu(J)$.

Рассмотрим полупростое кольцо $B \equiv A/J$ и в нем систему примитивных попарно ортогональных идемпотентов $\{e_i\}$ такую, что $\sum e_i = 1$. По лемме 8.6 кольцо $S = R/\mu(J)$ также является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов B. Легко видеть, что отображение π_S из B в S, определённое соотношением $\pi_S(a + J) = \pi(a) + \mu(J)$ является вложением кольца B в кольцо S, удовлетворяющим условию (iv) второго определения 6.3 лорановского кольца. Все идеалы e_iB являются минимальными. Поэтому для каждого i по лемме 7.6 правый идеал $\pi_S(e_i)S$ порождается своим любым ненулевым элементом, т.е. является минимальным. Таким образом, идемпотенты $\pi_S(e_i)$ являются примитивными в полупростом кольце S. В силу полупримарности кольца A полную конечную систему примитивных попарно ортогональных идемпотентов $\{e_i\}$ кольца A/J можно поднять до полной системы примитивных попарно ортогональных идемпотентов $\{d_i\}$

кольца A. Тогда все идемпотенты $\pi(d_i)$ будут примитивны в кольце R, поскольку примитивны их образы $\pi(d_i) + J(R) = \pi_S(e_i)$ в кольце $R/J(R)$.

Так как R — полуцепное справа кольцо и любое прямое разложение артинова справа кольца R в прямую сумму ненулевых неразложимых правых идеалов является единственным с точностью до изоморфизма, то все правые идеалы $\pi(d_i)R$ кольца R являются цепными модулями над R. Кроме того, для каждого i решетка подмодулей правого идеала d_iA вкладывается в решетку подмодулей d_iR с помощью отображения $M \to \mu(M)$. Поэтому модуль d_iA тоже является цепным, и кольцо A представляется в виде прямой суммы конечного числа цепных модулей d_iA. Следовательно, A — полуцепное справа кольцо. □

12.7. Следствие. *Если A — кольцо с дифференцированием δ и для радикала Джекобсона $J(A)$ кольца A верно включение $\delta(J(A)) \subseteq J(A)$, то равносильны следующие условия*:

(1) *кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1}, \delta))$ является полуцепным справа артиновым справа*;
(2) *кольцо A является полуцепным справа артиновым справа.*

Доказательство. Отметим, что в силу леммы 11.2(1) выполнены условия теоремы 12.6, из которой и следует заключение следствия 12.7. □

12.8. Замечание. Пусть R — полулокальное лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A. Если R является правым кольцом Безу или дистрибутивным справа кольцом, то R — кольцо главных правых идеалов.

Доказательство. Согласно 3.9(3) в обоих случаях R — правое кольцо Безу. Все циклические правые R-модули конечномерны. Согласно теореме 10.2(1) кольцо R нётерово справа. Кроме того, R — правое кольцо Безу. Поэтому R — кольцо главных правых идеалов. □

12.9. Открытые вопросы.
Пусть R — лорановское кольцо и A — его кольцо коэффициентов.

(1) Найти условия, не содержащие кольцо R, равносильные тому, что кольцо R дистрибутивно справа (соответственно, слева).
(2) Найти условия, не содержащие кольцо R, равносильные тому, что R — дистрибутивное справа (соответственно, слева) редуцированное кольцо.

13. Полулокальные лорановские кольца

Следующая лемма содержит известные утверждения (см., например, [68, 69, 71]) и приведена с доказательством только для удобства.

13.1. Лемма. *Пусть R — инвариантное справа лорановское кольцо с редуцированным кольцом коэффициентов A.*

(1) *Если φ — автоморфизм кольца коэффициентов A, переводящий элемент u_0+U_1 в элемент $\pi(x)u_0\pi(x^{-1}) + U_1$, то $\varphi^n(a)A = aA$ для всех a из A и для всех целых n.*
(2) *Если для элементов r, s из U_0 и для целого числа n выполнено соотношение $r\pi(x^n)s \in U_{n+1}$, то для свободных членов r_0 и s_0 выполнено соотношение $r_0s_0 = 0$ и $s_0r_0 = 0$.*
(3) *Если для свободных членов r_0 и s_0 элементов r, s из U_0 выполнено соотношение $r_0s_0 = 0$, то для любого целого числа m выполнены соотношения $r\pi(x^m)s \in U_{m+1}$ и $s\pi(x^m)r \in U_{m+1}$.*
(4) *Радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R равен нулю.*

Доказательство. В доказательстве потребуется следующее свойство редуцированного кольца A: если $a, b \in A$ и $ab = 0$, то $(ba)^2 = b(ab)a = 0$, откуда, в силу отсутствия нильпотентных элементов, $ba = 0$. Кроме того, каждый обратимый справа элемент редуцированного кольца A обратим слева.

(1) Пусть a — элемент кольца A, а n — целое число. Тогда элемент $\varphi^n(a)$ из A равен свободному члену элемента $\pi(x^n)\pi(a)\pi(x^{-n})$ из U_0. В силу правой инвариантности кольца R элемент $\pi(x^n)\pi(a)\pi(x^{-n})$ лежит в правом идеале $\pi(a)R = \mu(aA)$, поэтому все его левые коэффициенты лежат в aA. Поэтому $\varphi^n(a)A \subseteq aA$. В силу того, что n может принимать и отрицательные значения, получаем, что $\varphi^n(a)A = aA$ для всех a из A и для всех целых n.

(2) Действительно, $r\pi(x^n)s\pi(x^{-n}) \in U_1$, поэтому произведение свободных членов элементов r и $\pi(x^n)s\pi(x^{-n})$ равно нулю, т.е. $r_0\varphi^n(s_0) = 0$. Из (1) вытекает, что $s_0 \in \varphi^n(s_0)A$, поэтому $r_0s_0 = 0$, откуда вытекает также, что $s_0r_0 = 0$.

(3) Пусть m — произвольное целое число. Тогда в силу (1) $\varphi^m(s_0) \in s_0A$ и поэтому $r_0\varphi^m(s_0) = 0$, т.е. произведение свободных членов элементов r и $\pi(x^m)s\pi(x^{-m})$ равно нулю, откуда $r\pi(x^m)s\pi(x^{-m}) \in U_1$. Получаем, что $r\pi(x^m)s \in U_{m+1}$. Аналогично из соотношения $s_0r_0 = 0$, получаем $s\pi(x^m)r \in U_{m+1}$, что и требовалось доказать.

(4) Допустим, что радикал $J(R)$ отличен от нуля. Тогда в нем найдётся элемент $r = \pi(fx^{-1})$, младшая степень которого равна -1 (и тогда младшая степень ряда f равна нулю). В силу предложения 8.5 все коэффициенты ряда fx^{-1} (и, следовательно, все коэффициенты ряда f) лежат в радикале $J(A)$. Пусть $(1 + r)^{-1} = \pi(gx^m)$ — элемент из R, обратный к $1 + \pi(fx^{-1})$ и младшая степень ряда g равна нулю.

Допустим, что $m < 0$. Из равенства $(1 + \pi(fx^{-1}))\pi(gx^m) = 1$ получаем

$$(\pi(x) + \pi(f))\pi(x^{-1})\pi(g) = \pi(x^{-m}) \in U_{-m} \subseteq U_0.$$

По (1) получаем, что $f_0g_0 = 0$ и $g_0f_0 = 0$. В силу правой инвариантности кольца R выполнено включение

$$\pi(f_0)R\pi(g_0) \subseteq \pi(f_0)\pi(g_0)R = \pi(f_0g_0)R = 0.$$

Из равенства

$$\begin{aligned}\pi(x^{-m}) &= \big(\pi(x) + \pi(f)\big)\pi(x^{-1})\pi(g) = \\ &= \Big(\pi(f_0) + \pi(1 + f_1)\pi(x) + \dots\Big)\pi(x^{-1})\Big(\pi(g_0) + \pi(g_1)\pi(x) + \dots\Big) = \\ &\qquad = \pi(x^{-m}) \in U_{-m}\end{aligned}$$

получаем

$$\pi(1 + f_1)\pi(g_0) + \pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_0) + \pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x) \in U_1.$$

В силу доказанного выше $\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_0) = 0$, поэтому

$$\pi(1 + f_1)\pi(g_0) + \pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x) \in U_1.$$

Домножив справа на $\pi(x^{-1})\pi(f_0)$ и учитывая, что

$$g_0\pi(x^{-1})f_0 \in g_0f_0R = 0,$$

получаем

$$\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(f_0) \in U_0,$$

откуда, согласно (2), получаем, что $f_0g_1f_0 = 0$, откуда $(f_0g_1)^2 = 0$ и $f_0g_1 = 0$. Отсюда получаем, что

$$\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1) \in \pi(f_0)\pi(g_1)R = 0,$$

и поэтому из включения

$$\pi(1 + f_1)\pi(g_0) + \pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x) \in U_1$$

получаем $\pi(1+f_1)\pi(g_0) \in U_1$, откуда $(1+f_1)g_0 = 0$. Но элемент f_1 согласно предложению 8.5 лежит в радикале Джекобсона, поэтому элемент $1+f_1$ обратим и, следовательно, $g_0 = 0$, что противоречит выбору элемента g.

Допустим теперь, что $m = 0$. Аналогично предыдущему случаю получаем равенства $f_0g_0 = 0$ и $g_0f_0 = 0$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем

$$\pi(1+f_1)\pi(g_0) + \pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x) - 1 \in U_1.$$

Тогда

$$\pi(1+f_1)\pi(g_0) \in 1 - \pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x) + U_1 = 1 - \pi(f_0)\pi\big(\varphi^{-1}(g_1)\big) + U_1,$$

откуда $(1+f_1)g_0 = 1 - f_0\varphi^{-1}(g_1)$. Элемент f_0 согласно предложению 8.5 лежит в радикале Джекобсона $J(A)$, поэтому элемент $1 - f_0\varphi^{-1}(g_1)$ обратим, аналогично обратим и элемент $1+f_1$. Поэтому элемент g_0 также обратим, что противоречит равенству $f_0g_0 = 0$ и выбору ряда f.

Наконец, допустим, что $m > 0$. Тогда из равенства

$$(1+\pi(fx^{-1}))\pi(gx^m) = 1 \in U_0$$

вытекает, что $m = 1$ и произведение свободных членов элементов $\pi(f)$ и $\pi(x^{-1})\pi(g)\pi(x)$ равно единице. Но этого не может быть, поскольку по предложению 8.5 свободный член элемента $\pi(f)$ лежит в радикале $J(A)$ и не может быть обратимым. Полученное противоречие завершает доказательство. □

13.2. Предложение. *Пусть A — кольцо.*

(1) *Если R — лорановское кольцо и A — его кольцо коэффициентов, и кольцо R полулокально, то кольцо A полулокально.*

(2) *Если φ — автоморфизм кольца A, и кольцо $A((x,\varphi))$ косых рядов Лорана полулокально, то кольцо A полулокально.*

(3) *Если δ — дифференцирование кольца A, и кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ полулокально, то кольцо A полулокально.*

Доказательство. (1) Действительно, допустим, что кольцо A не полулокально. Тогда в нём существует такая бесконечная последовательность максимальных правых идеалов $B_1, B_2, B_3, \ldots$, что правые идеалы B_1, $B_1 \cap B_2$, $B_1 \cap B_2 \cap B_3$, ... образуют строго убывающую последовательность. В силу леммы 8.4 правые идеалы $\mu(B_i)$ являются максимальными правыми идеалами кольца R, при этом правые идеалы $\mu(B_1)$, $\mu(B_1) \cap \mu(B_2)$, $\mu(B_1) \cap \mu(B_2) \cap \mu(B_3)$, ... тоже образуют строго убывающую последовательность, что противоречит полулокальности кольца R. Полученное противоречие завершает доказательство.

Утверждения (2), (3) непосредственно вытекают из (1), предложения 9.6 и предложения 9.7. □

Из того факта, что отображение μ является инъективным вложением решётки правых идеалов кольца A в решётку правых идеалов кольца R, непосредственно вытекает следующее простое утверждение.

13.3. Предложение. *Пусть A — кольцо.*

(1) *Если R — дистрибутивное справа лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A, то кольцо A дистрибутивно справа.*

(2) *Если φ — автоморфизм кольца A, и кольцо $A((x,\varphi))$ косых рядов Лорана дистрибутивно справа, то и кольцо коэффициентов A дистрибутивно справа.*

(3) *Если δ — дифференцирование кольца A, и кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ дистрибутивно справа, то кольцо коэффициентов A дистрибутивно справа.*

13.4. Лемма. *Пусть A — дистрибутивное справа кольцо.*

(1) *Если I и J — правые идеалы кольца A, то между $I/(I \cap J)$ и $J/(I \cap J)$ нет ненулевых модульных гомоморфизмов.*

(2) *Если A нётерово справа, то A инвариантно справа.*

(3) *Если A — полупростое кольцо, то A является прямым произведением конечного числа тел.*

(4) *Если A полулокально, то A не содержит бесконечных несократимых сумм правых идеалов.*

(5) *Предположим, что A инвариантно справа, идеал $J(A)$ нильпотентен и фактор-кольцо $A/J(A)$ является прямым произведением конечного числа тел. Тогда A — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец.*

Доказательство. (1) Достаточно доказать, что если $(X \oplus Y)_A$ — дистрибутивный модуль и $f \in \operatorname{Hom}_A(X, Y)$, то $f = 0$ для любого $x \in X$. Согласно 3.9(1) для элементов $x \in X$ и $f \in Y$ найдется такой элемент $a \in A$, что

$$xa,\ f(1-a) \in xA \cap fA \subseteq X \cap Y = 0.$$

Тогда

$$f = f(a + (1-a)) = fa = f(xa) = f(0) = 0.$$

(2) Пусть I — правый идеал кольца A, а $y \in A$ — произвольный элемент этого кольца. Тогда, в силу нётеровости кольца A, возрастающая цепь

$$I \subseteq (I + yI) \subseteq (I + yI + y^2I) \subseteq \ldots$$

должна стабилизироваться. Пусть

$$J = I + yI + \cdots + y^nI, \quad J + y^{n+1}I \subseteq J.$$

Тогда $yJ \subseteq J$. Пусть k — такое минимальное целое число, что

$$J = I + yI + \cdots + y^kI.$$

Предположим, что $yI \not\subseteq I$. Тогда k отлично от нуля. Пусть

$$K = I + yI + \ldots + y^{k-1}I.$$

Тогда $J \neq K$ и $J = K + yK$.

Правилом $x \to yx$ задается модульный гомоморфизм ψ из J в J, который естественным образом индуцирует гомоморфизм $\overline{\psi}$ из J/K в J/yK. Кроме того,

$$J/K = (yK + K)/K \cong yK/(K \cap yK)$$

и, аналогично, $J/yK \cong K/(K \cap yK)$. Поэтому (в силу (1)) гомоморфизм $\overline{\psi}$ должен быть нулевым. Тогда

$$\psi(J) = yJ \subseteq yK = \psi(K).$$

Таким образом,

$$J = \psi^{-1}(\psi(J)) = \psi^{-1}(\psi(K)) = K + \ker\psi.$$

Тогда обозначим через K_1 правый идеал $\psi^{-1}(K)$. Непосредственно проверяется, что

$$J = K + \ker\psi \subseteq K + K_1 = K_1 + \psi(K_1).$$

Применяя к K_1 те же рассуждения, что и ранее к K, получаем равенство $K_1 + \ker\psi = J$. Кроме того, $\ker\psi \subseteq K_1$. Поэтому $\psi^{-1}(K) = K_1 = J$. Тогда $yK \subseteq yJ = \psi(J) \subseteq K$, откуда $J = K + yK = K$, что противоречит выбору K.

(3) Поскольку кольцо A полупросто, то оно является прямым произведением конечного числа простых колец A_i. Согласно п. (2) кольцо A (а, следовательно, и каждое из колец A_i) является

инвариантным справа. Инвариантное справа простое кольцо является телом. Следовательно, A является прямым произведением конечного числа тел.

(4) Так как кольцо A полулокально, то существует лишь конечное число неизоморфных простых правых модулей над A.

Предположим теперь, что $S = \sum I_i$ — счётная несократимая сумма ненулевых правых идеалов кольца A (без ограничения общности можно считать, что $\{I_i\}$ — главные правые идеалы). Тогда положим $J_j = \sum\limits_{i \neq j} I_i$. Заметим, что все подмодули J_j отличны от модуля S. Каждый правый модуль S/J_j является циклическим ненулевым модулем и обладает поэтому простым фактор-модулем. Поскольку j пробегает бесконечное множество значений и общее число неизоморфных простых правых модулей над A конечно, то среди вышеупомянутых простых фактор-модулей имеется хотя бы два изоморфных модуля. Это означает, что найдутся такие различные индексы i, j и собственные подмодули M, N в модуле S, что $S/M \cong S/N$, причем $J_i \subseteq M$ и $J_j \subseteq N$. Кроме того, $S = J_i + J_j \subseteq M + N$. Следовательно,

$$S/M = (M+N)/M = N/(M \cap N), \quad S/N = (M+N)/N = M/(M \cap N).$$

Поэтому $N/(M \cap N) \cong M/(M \cap N)$, что в силу пункта **1** противоречит дистрибутивности A.

(5) Пусть фактор-кольцо $A/J(A)$ является прямым произведением конечного числа тел F_i. Обозначим через f_i единицу тела F_i. Единица фактор-кольца $A/J(A)$ является суммой попарно ортогональных идемпотентов f_i. Конечная система $\{f_i\}$ попарно ортогональных идемпотентов фактор-кольца $A/J(A)$ поднимается до системы попарно ортогональных идемпотентов e_i кольца A, поскольку $J(A)$ — нильидеал. Тогда $A = \bigoplus e_i A$.

Все идемпотенты инвариантного справа кольца A являются центральными в A. Кроме того,

$$F_i = (e_i A + J(A))/J(A) \cong e_i A/(e_i A \cap J(A))$$

— тело. Тогда $e_i A$ — дистрибутивное кольцо (обозначим его A_i), причем кольцо $A_i/(A_i \cap J(A))$ является телом и идеал $A_i \cap J(A)$ нильпотентен. Умножение на e_i является гомоморфизмом из кольца A в кольцо A_i. Поэтому

$$A_i \cap J(A) = e_i J(A) \subseteq J(e_i A) = J(A_i),$$

и $e_i J(A) = J(A_i)$, поскольку $A_i/e_i J(A)$ — тело. Таким образом, A_i — дистрибутивное справа инвариантное справа локальное кольцо с нильпотентным радикалом Джекобсона.

Тогда дистрибутивный правый модуль $J^n(A_i)/J^{n+1}(A_i)$ является векторным пространством над телом $A_i/J(A_i)$ и (в силу дистрибутивности) является простым. Поэтому

$$J(A_i)/J^2(A_i) = \overline{j}(A_i/J(A_i)),$$

где j — произвольный элемент из $J(A_i) \setminus J^2(A_i)$, а $\overline{j}$ — его образ в модуле $J(A)/J^2(A)$ при естественном эпиморфизме. Получаем

$$J(A_i) = jA_i + J^2(A_i) = jA_i + (jA_i + J^2(A_i))^2 = jA_i + j^2 A_i + J^3(A_i) = \cdots = jA_i$$

в силу нильпотентности $J(A_i)$ и инвариантности A_i. Тогда $J^n(A_i)$ как правый идеал порождается любым элементом из $j^n A_i \backslash j^{n+1} A_i$, из чего следует, что любой правый идеал кольца A_i совпадает с некоторой степенью $J(A)$. Поэтому для каждого i кольцо A_i является цепным справа и артиновым справа, а кольцо A изоморфно прямому произведению A_i. □

13.5. Теорема. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда равносильны следующие условия*:

(1) *кольцо R дистрибутивно справа и полулокально*;

(2) *R — прямое произведение конечного числа цепных справа колец*;

(3) *R — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец*;

(4) *A — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i, причем правый идеал $\mu(A_i)$ является двусторонним для всех i.*

Доказательство. (1)⇒(4). Из предложений 13.3 и 13.2 следует, что кольцо A дистрибутивно справа и полулокально. По лемме 13.4(4) кольцо R не содержит бесконечных несократимых сумм правых идеалов. Кроме того, из теоремы 10.2(1) следует, что кольца A и R нётеровы справа. По лемме 13.4(2) кольца A и R инвариантны справа.

Пусть $N(A)$ — первичный радикал кольца A. Так как A — нётерово справа кольцо, то идеал $N(A)$ нильпотентен. Из правой инвариантности кольца A следует, что $N(A)$ совпадает с множеством всех нильпотентных элементов кольца A. Тогда $A/N(A)$ — редуцированное кольцо. Поскольку R — инвариантное справа кольцо, идеал $\mu(N(A))$ является двусторонним. Согласно лемме 8.6 кольцо $R/\mu(N(A))$ является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов $A/N(A)$. Согласно лемме 13.1(4) радикал Джекобсона $J(R/\mu(N(A)))$ равен нулю, поэтому радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R равен $\mu(N(A))$. По условию кольцо R полулокально, поэтому кольцо $R/J(R) = R/\mu(N(A))$ артиново полупросто. По теореме 11.6 $A/N(A)$ — артиново кольцо. Тогда его радикал Джекобсона нильпотентен и, следовательно, равен нулю, так как в фактор-кольце $A/N(A)$ не может быть ненулевых нильпотентных идеалов. Поэтому $A/N(A)$ — полупростое артиново кольцо и $J(A) = N(A)$.

Применяя лемму 13.4(3) к кольцу $A/J(A)$ и лемму 13.4(5) к кольцу A, получаем, что A — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i. Поскольку кольцо R инвариантно справа, то все правые идеалы $\mu(A_i)$ являются двусторонними, что и требовалось доказать.

(4)⇒(3). Действительно, пусть кольцо A разлагается в прямую сумму конечного числа колец A_i, причём $\mu(A_i)$ — двусторонние идеалы кольца R. Тогда, поскольку отображение $B \to \mu(B)$ сохраняет конечные суммы и пересечения правых идеалов, то кольцо R разлагается в прямую сумму правых идеалов $\mu(A_i)$, являющихся по условию также и двусторонними идеалами. Остаётся доказать, что каждое из колец $\mu(A_i)$ является цепным справа артиновым справа. Для этого докажем, что кольцо $\mu(A_i)$ является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов A_i.

Пусть π — отображение из $A((x))$ в R, удовлетворяющее условиям (1)–(4) первого определения 6.2 лорановского кольца. Кольцо $A_i((x))$ естественным образом вкладывается в кольцо $A((x))$, поэтому можно рассмотреть ограничение π_i отображения π на $A_i((x))$. Непосредственно проверяется, что отображение π_i осуществляет биекцию кольца $A_i((x))$ на кольцо $\mu(A_i)$ и удовлетворяет условиям (1)–(4). Поэтому кольцо $\mu(A_i)$ является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов A_i и по теореме 12.2 является цепным справа артиновым справа кольцом, что и требовалось доказать.

Импликация (3)⇒(2) очевидна.

(2)⇒(1). Кольцо R дистрибутивно справа, поскольку любое прямое произведение дистрибутивных справа колец является дистрибутивным справа кольцом (этот факт известен и проверяется с помощью 3.9(1)). Кольцо R полулокально, поскольку является прямым произведением конечного числа локальных колец. □

13.6. Замечания.

(a) Множество всех рациональных чисел, знаменатели которых не делятся ни на 2, ни на 3, является дистрибутивным справа полулокальным кольцом, но не является прямым произведением цепных справа колец.

(b) Множество A всех рациональных чисел с нечетными знаменателями является цепным кольцом, но не является полуцепным артиновым кольцом. В частности, A не является прямым произведением цепных артиновых колец.

(c) Из примеров (a) и (b) следует, что для произвольного кольца условия, сформулированные в пп. (1)–(3) теоремы 13.5 не равносильны (хотя третье влечет второе, а второе влечет первое).

(d) Отметим, что дистрибутивные кольца рядов Лорана не обязаны быть ни полулокальными, ни нётеровыми справа или слева. Можно проверить, что нужный пример дает кольцо $A((x))$, где A — прямое произведение бесконечного числа полей A_i ($i = 1, 2, 3 \ldots$). Действительно, $A[[x]]$ — коммутативное дистрибутивное кольцо, поскольку

$$A[[x]] \cong \prod_{i=1}^{+\infty} A_i[[x]]$$

и все $A_i[[x]]$ — цепные кольца. Таким образом, кольцо $A((x))$ изоморфно кольцу частных дистрибутивного кольца $A[[x]]$ относительно мультипликативно замкнутого множества $\{1, x, x^2, \ldots\}$.

В качестве непосредственного следствия теоремы 13.5, используя 4.2(3) и 11.2(1) можно получить следующие теоремы 13.7 и 13.8.

13.7. Теорема. *Если A — кольцо с автоморфизмом φ, то равносильны следующие условия*:

(1) $A((x,\varphi))$ — *дистрибутивное справа полулокальное кольцо*;

(2) $A((x,\varphi))$ — *конечное прямое произведение цепных справа колец*;

(3) $A((x,\varphi))$ — *конечное прямое произведение цепных справа артиновых справа колец*;

(4) A — *конечное прямое произведение цепных справа артиновых справа колец A_i, причем $\varphi(A_i) = A_i$ для всех i.*

13.8. Теорема. *Если A — кольцо с дифференцированием δ, то равносильны следующие условия*:

(1) *кольцо $A((t^{-1},\delta))$ дистрибутивно справа и полулокально*;

(2) *кольцо $A((t^{-1},\delta))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа колец*;

(3) *кольцо $A((t^{-1},\delta))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец*;

(4) *кольцо A является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i, причем $\delta(A_i) \subseteq A_i$ для всех i.*

В связи с теоремой 13.7 заметим, что ситуация в случае колец рядов Лорана отличается от случая колец формальных степенных рядов, поскольку можно проверить, что кольцо формальных степенных рядов от одной переменной является прямым произведением конечного числа цепных справа колец в точности тогда, когда кольцо коэффициентов является конечным прямым произведением тел.

13.9. Полудистрибутивные полулокальные лорановские кольца.
Пусть R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A. Если R — полудистрибутивное справа полулокальное кольцо, то R и A — нётеровы справа кольца.

Доказательство. Согласно 3.9(4) все циклические правые R-модули конечномерны. По теореме 10.2(1) кольца R и A нётеровы справа. $\square$

13.10. Открытые вопросы.
Пусть R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A.

(1) Если кольцо R полулокально, то верно ли, что радикал Джекобсона $J(R)$ — нильидеал кольца R?

(2) Найти условия, не содержащие кольцо R, полулокальности кольца R.

14. Фильтрации и (обобщенные) кольца Мальцева—Неймана

В данном разделе определяются кольца Мальцева—Неймана. Класс всех колец Мальцева—Неймана строго содержит кольца рядов Мальцева—Неймана, кольца косых формальных рядов Лорана и кольца формальных псевдодифференциальных операторов. В разделе исследуются теоретико-кольцевые свойства колец Мальцева—Неймана. Кольца рядов Мальцева—Неймана, кольца косых формальных рядов Лорана и кольца формальных псевдодифференциальных операторов имеют близкие теоретико-кольцевые свойства, связанные с существованием фильтрации по младшей степени ряда.

14.1. Фильтрованные кольца и упорядоченные группы.

Пусть G — произвольная группа. Единицу 1_G группы G будем обозначать просто 1. Кольцо R называется *G-фильтрованным кольцом*, если в нём задан такой набор подгрупп по сложению $\{U_g\}$ (где g — произвольный элемент группы G), что для любых g и h из G выполнено включение $U_gU_h \subseteq U_{gh}$ и для единицы 1_R кольца R выполнено включение $1_R \in U_1$. В этом случае будем также говорить, что на кольце R задана *фильтрация* $\{U_g\}$. Фильтрация называется *исчерпывающей*, если объединение U_g по всем g из G составляет всё кольцо R. Фильтрация называется *отделимой*, если пересечение U_g по всем g из G состоит из одного нуля.

Отметим, что U_1 всегда является унитарным подкольцом кольца R.

Группа G называется *упорядоченной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(1) множество G линейно упорядочено, т.е. все элементы G сравнимы между собой относительно некоторого рефлексивного, антисимметричного и транзитивного отношения $\leqslant$;

(2) для любых элементов $x, y, z \in G$ из $x \leqslant y$ следует $xz \leqslant yz$ и $zx \leqslant zy$.

Если на кольце R задана фильтрация $\{U_g\}$ упорядоченной группой G и для каждой пары таких элементов g и h из G, что $g \leqslant h$, выполнено включение $U_h \subseteq U_g$, то будем говорить, что на R задана *упорядоченная фильтрация*. Очевидно, что для любого $g\geqslant 1$ множество U_g является двусторонним идеалом в кольце U_1.

Для упорядоченной фильтрации будем обозначать через U_{g+} объединение U_h по всем $h > g$. Очевидно, $U_{g+} \subseteq U_g$. Аналогично через U_{g-} обозначим пересечение всех U_h по всем $h < g$. Очевидно, $U_g \subseteq U_{g-}$. Будем говорить, что упорядоченная фильтрация является *строго исчерпывающей сверху*, если объединение $U_g \setminus U_{g+}$ по всем g из G составляет всё кольцо R за исключением нулевого элемента. Легко видеть, что всякая строго исчерпывающая сверху фильтрация является исчерпывающей и отделимой. В случае, когда G — свободная циклическая группа, верно и обратное утверждение, что всякая отделимая исчерпывающая фильтрация является строго исчерпывающей сверху.

В случае строго исчерпывающей сверху фильтрации для всякого r из R будем обозначать через $\deg r$ такой элемент $g \in G$, что r лежит в $U_g \setminus U_{g+}$. Из определения строго исчерпывающей сверху фильтрации видно, что для всякого ненулевого элемента r из R элемент $\deg r$ из G определён, причём единственным образом. Будем считать, что $\deg 0 = +\infty$. Элемент $\deg r \in G$ будем также называть *младшей степенью* элемента r. Легко видеть, что для любых r_1, r_2 из R выполнено неравенство

$$\deg r_1r_2 \geqslant \deg r_1 \deg r_2.$$

Из того, что единица 1_R кольца R лежит в U_1, и из неравенства $\deg 1_R \geqslant \deg 1_R \deg 1_R$ вытекает, что $\deg 1_R = 1$.

Будем называть обратимый элемент $y \in R$ *сильно обратимым*, если для него выполнено равенство $\deg y^{-1} = (\deg y)^{-1}$). Нетрудно видеть, что для любого сильно обратимого элемента $y \in R$ и любого элемента $r \in R$ выполнены равенства

$$\deg yr = \deg y \deg r, \quad \deg ry = \deg r \deg y.$$

Непосредственно проверяется, что все сильно обратимые элементы фильтрованного кольца образуют группу.

14.2. Сильно фильтрованные кольца, кольца Мальцева—Неймана и обобщенные кольца Мальцева—Неймана.

Пусть G — упорядоченная группа и R — кольцо, на котором задана фильтрация $\{U_g\}$ упорядоченной группой G.

Кольцо R называется *кольцом Мальцева—Неймана*, если выполнены следующие свойства:

(i) $\{U_g\}$ — строго исчерпывающая сверху фильтрация;

(ii) для любого g из G найдётся хотя бы один сильно обратимый элемент $y \in U_g$;

(iii) для любого множества $\{r_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ элементов кольца R найдётся хотя бы один такой элемент $r \in R$ (*обобщённая сумма* элементов r_α), что если для некоторого $g \in G$ все элементы $\{r_\alpha\}$ (кроме конечного числа $r_1, \ldots, r_n$) лежат в U_g, то и разность

$$r - \sum_{i=1}^{n} r_n$$

между «полной» и частичной суммой лежит в U_g;

(iv) канонический кольцевой гомоморфизм кольца U_1 на своё фактор-кольцо $A = U_1/U_{1+}$ расщепляется, т.е. существует такое вложение $\pi : A \Rightarrow U_1$, что его композиция с каноническим гомоморфизмом U_1 на A даёт тождественный автоморфизм кольца A. Кроме того, для любого a из A выполнены равенства

$$\pi(a)R \cap U_1 = \pi(a)U_1, \quad R\pi(a) \cap U_1 = U_1\pi(a).$$

Кольцо, в котором выполнены условия (i)–(ii), но не обязательно выполнены условия (iii)–(iv), будем называть *сильно фильтрованным кольцом* или кольцом, на котором задана *сильная фильтрация.* Кольцо, в котором выполнены условия (i)–(iii), но не обязательно выполнено условие (iv), будем называть *обобщённым кольцом Мальцева—Неймана.*

14.3. Замечание (об условии (iii) бесконечного суммирования)**.** В рамках данной работы главным изучаемым свойством, позволяющим получить наиболее нетривиальные результаты, является условие (iii). Наличие «бесконечного суммирования» отличает кольца рядов от колец многочленов. В общем случае обобщённая сумма из условия (iii) определена не единственным образом.

14.4. Замечание (о примерах колец Мальцева—Неймана)**.** Ниже будет показано, что примерами колец Мальцева—Неймана являются кольца рядов Лорана, кольца косых рядов Лорана (где фильтрация группой $\mathbb{Z}$ вводится по младшей степени формального ряда), кольца псевдодифференциальных операторов (где фильтрация группой $\mathbb{Z}$ вводится по старшей степени формального ряда) и кольца рядов Мальцева—Неймана. Понятие кольца Мальцева—Неймана позволяет доказать ряд общих утверждений, которые будут справедливы для всех перечисленных классов колец.

14.5. Кольцо коэффициентов кольца с упорядоченной фильтрацией.

Непосредственно проверяется, что для всякого кольца R с упорядоченной фильтрацией, U_1 — унитарное подкольцо в R, а U_{1+} — двусторонний идеал в U_1. Поэтому можно рассмотреть фактор-кольцо $A = U_1/U_{1+}$, которое будет называться *кольцом коэффициентов* кольца с упорядоченной фильтрацией. Ниже будет доказано, что кольцо косых рядов Лорана, кольцо псевдодифференциальных операторов и кольцо рядов Мальцева—Неймана являются кольцами Мальцева—Неймана так, что понятие кольца коэффициентов в них совпадает с обычным определением.

14.6. Некоторые определения и обозначения.

Пусть R — кольцо с упорядоченной фильтрацией, а $\{U_g\}$ — набор множеств в нём, как в определении. Тогда для каждого элемента из U_1 назовём его *свободным членом* его образ при каноническом гомоморфизме U_1 на $A = U_1/U_{1+}$. В случае кольца рядов Лорана это определение совпадает с естественным определением свободного члена (если рассматривать фильтрацию группой $\mathbb{Z}$ по младшей степени ряда). Свободный член определен только для элементов из U_1. Свободный член элемента f будем обозначать через $\hat{f}$. Легко видеть, что свободный член суммы (произведения) двух элементов из U_1 равен сумме (произведению) их свободных членов.

В сильно фильтрованном кольце элементы с младшей степенью 1 — это в точности все элементы из U_1 с ненулевым свободным членом. Из определения сильно фильтрованного кольца вытекает, что каждый ненулевой элемент f кольца R может быть представлен в виде произведения вида uy, где $u \in U_1$ — элемент с ненулевым свободным членом, y — сильно обратимый элемент.

Для каждого подмножества P кольца R с упорядоченной фильтрацией обозначим через $\lambda(P)$ образ множества $U_1 \cap P$ при каноническом гомоморфизме U_1 на U_1/U_{1+} (т.е. $\lambda(P)$ — это множество всех свободных членов всех элементов из $U_1 \cap P$). Непосредственно проверяется, что если P — левый (правый) идеал кольца R, то $\lambda(P)$ является левым (правым) идеалом кольца коэффициентов $A = U_1/U_{1+}$. Таким образом, отображение λ осуществляет отображение решётки левых (правых) идеалов кольца R в решётку левых (правых) идеалов кольца A, причём это отображение сохраняет отношение включения. В сильно фильтрованном кольце R, кроме того, если P — ненулевой правый (левый) идеал, то $\lambda(P)$ — ненулевой правый (левый) идеал кольца коэффициентов (действительно, если $f \in P$ и $g = \deg f$, а y — сильно обратимый элемент из U_g, то $fy^{-1} \in U_1 \cap P$ или $y^{-1}f \in U_1 \cap P$, при этом элементы fy^{-1} и $y^{-1}f$ имеют ненулевые свободные члены).

Если y — сильно обратимый элемент сильно фильтрованного кольца R, то внутренний автоморфизм $r \Rightarrow yry^{-1}$ сохраняет младшую степень элементов и, в частности, сохраняет на месте U_1 и U_{1+}. Поэтому он индуцирует автоморфизм φ_y кольца коэффициентов U_1/U_{1+}. Будем говорить, что он индуцирует *скручивающий автоморфизм* φ_y кольца коэффициентов A.

Докажем некоторые вспомогательные утверждения о сильно фильтрованных кольцах.

14.7. Лемма. *Пусть R — сильно фильтрованное кольцо, A — его кольцо коэффициентов и A — область. Тогда для любых двух ненулевых элементов r_1 и r_2 из R младшая степень их произведения равна произведению их младших степеней.*

Доказательство. Действительно, если g — младшая степень элемента r_1, а h — младшая степень элемента r_2, то найдутся такие элементы s_1 и s_2 из $U_1 \setminus U_{1+}$, что $r_1 = y_g s_1$ и $r_2 = s_2 y_h$, где y_g и y_h — сильно обратимые элементы, как в определении сильно фильтрованного кольца. Поскольку элементы s_1 и s_2 имеют ненулевые свободные члены, то и их произведение $s_1 s_2$ имеет ненулевой свободный член и, следовательно, лежит в $U_1 \setminus U_{1+}$.

Произведение $r_1 r_2 = y_g s_1 s_2 y_h$ лежит в U_{gh}. Допустим, оно лежит также в U_{gh+}; тогда произведение $s_1 s_2 = y_g^{-1} r_1 r_2 y_h^{-1}$ лежит в U_{1+}, чего не может быть. Таким образом, произведение $r_1 r_2 = y_g s_1 s_2 y_h$ лежит в $U_{gh} \setminus U_{gh+}$, что и требовалось доказать. □

Для всякого сильно фильтрованного кольца R с группой G отображение $r \Rightarrow \deg r$, ограниченное на множество сильно обратимых элементов R^*, является гомоморфизмом группы R^* на группу G, причём образ гомоморфизма совпадает со всей группой G. Поэтому группа G изоморфна факторгруппе группы R^* по подгруппе R_1^* всех сильно обратимых элементов кольца R с младшей степенью 1_G. Поэтому структуру кольца Мальцева—Неймана на каком-либо кольце R можно задавать не непосредственно через группу G, а путём указания группы сильно обратимых элементов R^* и множества U_1 (указывая таким образом и подгруппу R_1^*). При этом достаточно указать не всю группу сильно обратимых элементов R^*, а некоторую её «репрезентативную подгруппу» $R^/$. Приведём точное определение и докажем соответствующее утверждение.

Для всякого сильно фильтрованного кольца R с группой G будем называть подмножество $R^/ \subset R$ *репрезентативной группой*, если $R^/$ является подгруппой группы сильно обратимых элементов кольца R и для каждого элемента g из G в множестве $R^/$ найдётся элемент степени g.

14.8. Замечание. В кольце рядов Лорана (с фильтрацией по младшим степеням рядов) или кольце многочленов Лорана от одной переменной x репрезентативной группой всегда является множество одночленов, являющихся степенями переменной x с единичным коэффициентом.

14.9. Лемма. *Пусть R — кольцо, $R^/$ — подгруппа $U(R)$ (группы обратимых элементов кольца R). Пусть U_1 — такое унитарное подкольцо в R, что для каждого элемента r из $R^/$ выполнено включение $r \in U_1$ или $r^{-1} \in U_1$, и при этом $rU_1r^{-1} \subseteq U_1$. Пусть для каждого ненулевого $r \in R$ среди всех множеств вида $r'U_1$ (где r' — произвольный элемент из $R^/$), содержащих r, найдётся наименьшее в смысле упорядочивания по включению. Пусть, наконец, $U_1R^/ = R$ или $R^/U_1 = R$. Тогда существуют такие группа G и сильная фильтрация $\{U_g\}$, что $U_{1_G} = U_1$ и множество $R^/$ — репрезентативная подгруппа кольца R.*

Доказательство. Из условия $rU_1r^{-1} \subseteq U_1$ сразу вытекает, что требуемые в условии равенства $R^/U_1 = R$ и $U_1R^/ = R$ равносильны.

Пусть $R_1^/$ — множество таких элементов $r \in R^/$, что $r \in U_1$ и $r^{-1} \in U_1$. Легко видеть, что $R_1^/$ — подгруппа в $R^/$. Докажем, что она нормальна. Действительно, пусть r_1 — произвольный элемент из $R_1^/$, а r — произвольный элемент из R. Тогда

$$rr_1r^{-1} \in rU_1r^{-1} \subseteq U_1, \quad rr_1^{-1}r^{-1} \in rU_1r^{-1} \subseteq U_1,$$

т.е. и элемент rr_1r^{-1}, и его обратный лежат в U_1. Это и означает, что элемент rr_1r^{-1} лежит в $R_1^/$.

Тогда можно рассмотреть факторгруппу $G \equiv R^/ / R_1^/$. Для каждого $g = rR_1^/$ из группы G положим $U_g \equiv rU_1$. Это определение корректно (не зависит выбора конкретного r), так как $rU_1 \subseteq rR_1^/U_1 \subseteq rU_1U_1 = rU_1$. Пусть $g = rR_1^/$ и $h = sR_1^/$ — два произвольных элемента группы G. Тогда

$$U_gU_h = rU_1sU_1 = rs(s^{-1}U_1s)U_1 \subseteq rsU_1U_1 = rsU_1 = U_{gh};$$

таким образом, множества U_g действительно задают фильтрацию на кольце R.

Для любой пары элементов r и s из $R^/$ по условию выполнено включение $s^{-1}r \in U_1$ или включение $r^{-1}s \in U_1$. В первом случае получаем $r \in sU_1$, во втором $s \in rU_1$. Поэтому для любых g и h из G либо U_g лежит в U_h, либо U_h лежит в U_g. Поэтому набор множеств U_g линейно упорядочен по включению. Непосредственно проверяется, что если $U_g = U_h$, то $g = h$ (действительно, если $r \in sU_1$ и $s \in rU_1$, то и $s^{-1}r \in U_1$ и $r^{-1}s \in U_1$, откуда $r^{-1}s \in R_1^/$). Это позволяет, воспользовавшись линейной упорядоченностью набора U_g, задать соответствующий линейный порядок на группе G так, чтобы фильтрация стала упорядоченной. Действительно, достаточно положить, что $g \leqslant h$ в точности тогда, когда $U_h \subseteq U_g$. Из того, что $R^/U_1 = R$, следует, что построенная фильтрация является исчерпывающей.

Докажем, что построенная фильтрация является строго исчерпывающей сверху. Действительно, пусть r — произвольный ненулевой элемент кольца R. Тогда по условию среди всех множеств U_g существует наименьшее (в смысле упорядоченности по включению), содержащее r. Непосредственно проверяется, что элемент g группы G и будет младшей степенью элемента r (т.е. $r \in U_g \setminus U_{g+}$).

Непосредственно проверяется, что для каждого элемента r' из $R^/$ его младшей степенью является его образ при каноническом гомоморфизме $R^/$ на G. Отсюда вытекает, что все элементы $R^/$ являются сильно обратимыми. Поэтому построенная фильтрация является также и сильной (т.е. в каждом множестве $U_g = r'U_1$ найдётся хотя бы один сильно обратимый элемент, а именно r'). Наконец, по построению $U_{1_G} = U_1$. Из того, что множества U_g выбирались равными $r'U_1$, вытекает, что множество всех элементов r' (т.е. $R^/$) будет репрезентативной группой. $\square$

Непосредственно проверяется ещё одно вспомогательное утверждение о репрезентативной группе.

14.10. Лемма. *Пусть R — сильно фильтрованное кольцо с фильтрацией $\{U_g\}$, где g — элементы упорядоченной группы G. Пусть $R^/$ — репрезентативная группа в нём. Тогда множество $R^/_1$, состоящее из всех элементов $R^/$ с единичной младшей степенью, является нормальной подгруппой в группе $R^/$, причём факторгруппа $R^/ / R^/_1$ изоморфна G, где в качестве изоморфизма можно взять отображение, которое элементу $r' R^/_1$ ставит в соответствие младшую степень $\deg r'$ элемента r'. Кроме того, для элементов $R^/$ выполнено утверждение, что r'_1 в точности тогда лежит в $r'_2 U_1$, когда для их младших степеней g_1 и g_2 выполнено неравенство $g_1 \geqslant g_2$.*

Докажем теперь утверждение, которое покажет, что конструкция сильно фильтрованного кольца допускает последовательное итерирование с сохранением своих свойств (так, кольцо многочленов Лорана над кольцом многочленов Лорана также является кольцом многочленов Лорана от двух переменных над исходным кольцом).

14.11. Предложение. *Пусть S — сильно фильтрованное кольцо с кольцом коэффициентов R, и фильтрацией $\{U_g\}$, где g — элементы упорядоченной группы G. Пусть R — сильно фильтрованное кольцо с кольцом коэффициентов A и фильтрацией $\{V_h\}$, где h — элементы упорядоченной группы H. Пусть в S существует репрезентативная группа $S^/$ (в смысле фильтрации $\{U_g\}$). Пусть, кроме того, множество $R^/$, образ $S^/_1$ (множества всех элементов из $S^/$ с младшей степенью 1_G) при каноническом гомоморфизме на кольцо коэффициентов R, является репрезентативной группой в смысле фильтрации $\{V_h\}$. Пусть при этом для каждого $s \in S^/$ скручивающий автоморфизм φ_s кольца R, индуцированный элементом s, сохраняет младшую степень всех элементов R (в смысле фильтрации $\{V_h\}$). Тогда существует такая упорядоченная группа $G \circ H$, что в ней есть нормальная подгруппа, изоморфная H, факторгруппа по которой изоморфна G, а отношение порядка в $G \circ H$ естественным образом согласовано с порядком в G и H. При этом S является сильно фильтрованным кольцом с фильтрацией $\{W\}$ группой $G \circ H$, а кольцо коэффициентов изоморфно A. Все элементы из $S^/$ при этом являются сильно обратимыми в смысле новой фильтрации $\{W\}$.*

Доказательство. Определим W_1 как множество всех таких элементов из U_1, свободные члены (в смысле фильтрации $\{U_g\}$) которых лежат в V_1. Проверим все условия леммы 14.9.

Проверим вначале, что $S = S^/ W_1$. Действительно, из того факта, что $R^/$, образ $S^/_1$, является репрезентативной группой в кольце R, вытекает равенство $S^/_1 W_1 + U_{1+} = U_1$. Поскольку множество U_{1+} лежит в множестве W_1, отсюда вытекает равенство $S^/_1 W_1 = U_1$. Но тогда

$$S = S^/ U_1 = S^/ S^/_1 U_1) W_1 = S^/ W_1.$$

Из условия о том, что для всех элементов s' из $S^/$ скручивающий автоморфизм $\varphi_{s'}$ сохраняет младшую степень всех элементов R также вытекает, что $s' W_1 s'^{-1} \subseteq W_1$. Все элементы s' из $S^/$ имеют младшую степень (в смысле фильтрации $\{U_g\}$) либо отличную от единицы (и тогда либо s', либо s'^{-1} лежит в $U_{1+} \subseteq W_1$), либо равную единице (и тогда младший член s' или младший член s'^{-1} лежит в V_1, из чего также вытекает, что или s', или s'^{-1} лежит в W_1).

Остаётся проверить, что для каждого ненулевого элемента s из кольца S существует наименьшее (в смысле упорядоченности по включению) множество $s' W_1$, где элемент s' лежит в $S^/$. Действительно, поскольку $S^/$ — репрезентативная группа в S, элемент s можно представить в форме

$s'_1 u_1$, где u_1 лежит в U_1 и имеет ненулевой свободный член $\hat{u_1}$. В свою очередь, этот свободный член имеет аналогичное представление в кольце R, откуда получаем, что $s \in s'_1(s'_2 w_1 + U_{1+})$, где w_1 лежит в W_1, причём свободный член (в смысле кольца S) элемента w_1 имеет ненулевой свободный член (в смысле кольца R). Отсюда и вытекает необходимое утверждение, если положить $s' = s'_1 s'_2$.

Тогда можно применить лемму 14.9 и получить в кольце S такие сильную фильтрацию $\{W_f\}$ и группу F, что множество $S^/$ будет репрезентативной группой. Остаётся проверить искомые свойства группы $G \circ H \equiv F$.

Действительно, по лемме 14.10 группа F изоморфна факторгруппе $S^/$ по подгруппе $S^/_1 1$, состоящей из всех элементов $S^/$, имеющих единичную младшую степень (в смысле новой фильтрации $\{W_f\}$). По той же лемме группа G изоморфна факторгруппе $S^/$ по подгруппе $S^/_1$, а группа H изоморфна факторгруппе $R^/$ по подгруппе $R^/_1$ При этом выполнена цепь вложений $S^/_1 1 \subseteq S^/_1 \subseteq S^/$. Остаётся отметить, что $R^/$ и $R^/_1$ являются образами $S^/_1$ и $S^/_1 1$ соответственно при каноническом гомоморфизме U_1 на R. С учётом того, что прообраз единицы при этом гомоморфизме лежит в $S^/_1 1$, отсюда и получается искомое утверждение о том, что $G \cong S^/ / S^/_1$ и $H \cong S^{/1}/S^/_1 1$. Необходимые свойства порядка, заданного на этой группе, проверяются непосредственно с учётом леммы 14.10. $\square$

15. Свойства обобщённых колец Мальцева—Неймана

Для обобщённых кольца Мальцева—Неймана справедливо следующее важное утверждение.

15.1. Лемма. *Пусть R — обобщённое кольцо Мальцева—Неймана, A — его кольцо коэффициентов, P — правый идеал в R. Допустим, что существуют такие элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из $P \cap U_1$, что свободные члены всех элементов из $P \cap U_1$ лежат в правом идеале, порождённом свободными членами элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$, т.е. для каждого элемента g из $P \cap U_1$ выполнено включение*

$$\hat{g} \in \hat{f}_1 A + \hat{f}_2 A + \ldots + \hat{f}_n A,$$

где $\hat{f}_i$ — это свободный член элемента f_i, а $\hat{g}$ — свободный член элемента g. Тогда правый идеал P порождается n элементами $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Доказательство. Выберем для каждого $g \in G$ какой-либо сильно обратимый элемент y_g из U_g, существующий по условию (ii) определения из 14.2.

Обозначим через Q правый идеал $f_1R+f_2R+\ldots+f_nR$ кольца R. Так как все элементы f_i лежат в идеале P и $Q = f_1R + f_2R + \ldots + f_nR$, то $Q \subseteq P$. Допустим, что утверждение леммы не верно. Тогда существует такой элемент $h \in P$, что $h \notin Q$. Без ограничения общности можно считать, что $h \in U_1$ (если это не так, то можно домножить h на сильно обратимый элемент $y_{\deg h^{-1}}$).

На множестве всех возможных наборов $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ введём отношение частичного порядка. Будем говорить, что набор $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ *больше* набора $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ в точности тогда, когда младшая степень g_s элемента $h - f_1s_1 - f_2s_2 - \ldots - f_ns_n$ больше, чем младшая степень g_r элемента $h - f_1r_1 - f_2r_2 - \ldots - f_nr_n$ и при этом для всех k выполнено включение $s_k - r_k \in U_{g_r}$.

Применим лемму Цорна. Для этого надо доказать, что любая возрастающая цепь имеет верхнюю грань. Действительно, пусть $\{r_1^{(i)}, r(i)_2, \ldots, r(i)_n\}$ при $0 < i < +\infty$ — возрастающая цепь таких наборов и

$$h^{(i)} = h - f_1r_1^{(i)} - f_2r_2^{(i)} - \ldots - f_nr_n^{(i)}.$$

Тогда для каждого натурального числа i и каждого k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ по условию выполнено включение $r_k^{(i+1)} - r_k^{(i)} \in U_{\deg h^{(i)}}$. Для каждого k существует «обобщённая бесконечная сумма» элементов

$r_k^{(i+1)} - r_k^{(i)}$ по всем $1 \leqslant i < +\infty$. Поскольку «обобщённая бесконечная сумма может быть определена не единственным образом, выберем произвольную. Прибавим к этой сумме $r_k^{(1)}$ и обозначим полученный результат r_k. Докажем тогда, что набор $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ и является искомой верхней гранью. Действительно, для всякого k и всякого i элемент $r_k - r_k^{(i)}$ по определению «обобщённой бесконечной суммы» имеет младшую степень не ниже, чем у элемента $r_k^{(i+1)} - r_k^{(i)}$, а это и означает, что элемент $r_k - r_k^{(i)}$ лежит в $U_{\deg h^{(i)}}$. Остаётся доказать, что для каждого i младшая степень g_r элемента $h - f_1r_1 - f_2r_2 - \ldots - f_nr_n$ больше, чем младшая степень $g_{r^{(i)}}$ элемента $h - f_1r_1^{(i)} - f_2r_2^{(i)} - \ldots - f_nr_n^{(i)}$. Достаточно доказать нестрогое неравенство, поскольку последовательность $g_{r^{(i)}}$ строго возрастает, и если элемент g_r нестрого больше каждого её члена, то он и строго больше каждого из них. Для этого достаточно доказать, что младшая степень элемента

$$s = (h - f_1r_1 - f_2r_2 - \ldots - f_nr_n) - (h - f_1r_1^{(i)} - f_2r_2^{(i)} - \ldots - f_nr_n^{(i)})$$

не ниже $g_{r^{(i)}}$. Но

$$s = f_1(r_1^{(i)} - r_1) + \ldots + f_n(r_n^{(i)} - r_n),$$

так что искомое утверждение следует из включений $f_i \in U_1$ и $r_k - r_k^{(i)} \in U_{g_{r^{(i)}}}$.

Из леммы Цорна получаем, что существует максимальный набор $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Поскольку h не лежит в $Q = f_1R + f_2R + \ldots + f_nR$, то элемент

$$s = h - f_1r_1 - f_2r_2 - \ldots - f_nr_n$$

отличен от нуля. Найдём сильно обратимый элемент y из $U_{\deg s}$. Тогда sy^{-1} лежит в $U_1 \subseteq P$. Тогда свободный член s_0 элемента sy^{-1} лежит в λP, и поэтому элемент s_0 кольца коэффициентов может быть представлен в виде

$$\hat{f}_1a_1 + \hat{f}_2a_2 + \ldots + \hat{f}_na_n.$$

Пусть каждый элемент $a_i \in A$ является свободным членом некоторого элемента $r_i' \in U_1$. Тогда свободный член элемента $sy^{-1} - f_1r_1' - \ldots - f_nr_n'$ равен $s_0 - s_0 = 0$. Поэтому младшая степень элемента

$$s - f_1r_1'y - \ldots - f_nr_n'y = h - f_1(r_1 + r_1'y) - \ldots - f_n(r_n + r_n'y)$$

строго больше младшей степени y, которая равна младшей степени s. С учётом того, что $r_i'y$ лежит в $U_{\deg s}$ для всех i, получаем противоречие с тем, что $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ — наибольший набор. Полученное противоречие и завершает доказательство. $\square$

15.2. Замечание. Аналог леммы 15.1 для левых идеалов также верен.

В качестве простого следствия леммы 15.1 можно получить следующее утверждение (его частные случаи для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов хорошо известны).

15.3. Предложение. *Пусть R — обобщённое кольцо Мальцева—Неймана с кольцом коэффициентов A. Если свободный член элемента $r \in U_1$ обратим справа (слева) в кольце A, то сам элемент r обратим справа (слева) в кольце R. Кроме того, если A — тело, то R — тело.*

Доказательство. Действительно, пусть свободный член элемента r обратим справа. Применим лемму 15.1, где положим $n = 1$, $f_1 = r$, $P = R$. Получим, что $R = P = rR$, т.е. что элемент r обратим справа.

Пусть теперь A — тело; тогда из уже доказанного вытекает, что всякий элемент u из U_1 с ненулевым свободным членом обратим справа (и слева). Но всякий ненулевой элемент r кольца R может быть представлен в виде произведения uy, где $u \in U_1$ имеет ненулевой свободный член, а y — сильно обратимый элемент. Поэтому r является произведением двух обратимых элементов и, следовательно, обратим. $\square$

В связи с предложением 15.3 заметим, что кольцо Мальцева—Неймана является телом в точности тогда, когда его кольцо коэффициентов является телом (см. предложение 16.2). Для обобщённых кольца Мальцева—Неймана это неверно, соответствующий пример будет построен ниже (кольцо дробных p^n-адических чисел Q_{p^n}, при $n > 1$, которое является телом, в то время как его кольцо коэффициентов не является областью).

Для облегчения построения примеров колец Мальцева—Неймана и обобщённых колец Мальцева—Неймана покажем, что в условии (iii) определения кольца Мальцева—Неймана достаточно проверять существование «обобщённой суммы» только для счётных множеств элементов специального вида.

15.4. Лемма. *Пусть R — сильно фильтрованное кольцо с фильтрацией $\{U_g\}$. Пусть для любой бесконечной последовательности ненулевых элементов $r_1, r_2, \ldots$, у которой что младшие степени $\deg r_1, \deg r_2, \ldots$ образуют строго возрастающую последовательность, существует такой элементËr, что для всех натуральных n выполнено неравенство*

$$\deg r - \sum_{i=1}^{n} \geqslant \deg r_{n+1}.$$

Тогда элемент r является «обобщённой суммой» элементов $r_1, r_2, \ldots$, и «обобщённая сумма» существует для любых множеств элементов из R, т.е. R является обобщённым кольцом Мальцева—Неймана.

Доказательство. Тот факт, что элемент r является «обобщённой суммой» элементов $r_1, r_2, \ldots$, проверяется непосредственно.

Отметим некоторые общие свойства «обобщённой суммы». В любом сильно фильтрованном кольце, если существует элемент a, «обобщённая сумма» набора элементов A, и элемент b, «обобщённая сумма» набора элементов B, то существует и по крайней мере одна «обобщённая сумма» объединённого набора $A \cup B$, равная $a + b$. Поэтому, если удаётся разбить множество элементов на две части, для каждой из которых «обобщённая сумма» существует, то она существует и для всего множества. Отметим также, что «обобщённая сумма» существует для любого конечного множества элементов (она равна обычной их сумме). Также «обобщённая сумма» любого количество нулей равна нулю, поэтому достаточно доказывать существование обобщённой суммы только для множеств ненулевых элементов.

«Обобщённая сумма» также существует для любого множества элементов такого, что в множестве их младших степеней нет наименьшего элемента. Их «обобщённой суммой», является, например, ноль. Это вытекает из того, что в таком множестве A, если все элементы, кроме, быть может, конечного числа, лежат в некотором фильтрующем множестве U_g, то в нем лежат все элементы множества A.

Пусть теперь $\{r_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ — произвольный набор элементов кольца R. Докажем, что для него существует «обобщённая сумма». Без ограничения общности можно считать, что все элементы r_α отличны от нуля. Если множество $\{r_\alpha\}$ можно разбить на два подмножества, одно из которых конечно, а для второго выполнено условие, что в множестве младших степеней нет наименьшего элемента, то существование «обобщённой суммы» уже доказано. Поэтому можно предполагать, что в множестве $\{r_\alpha\}$, если из него изъять любое конечное количество элементов, всегда найдётся элемент с наименьшей младшей степенью.

Построим следующую цепь элементов: r_1 — элемент с наименьшей младшей степенью из всех $\{r_\alpha\}$, r_2 — элемент с наименьшей младшей степенью из оставшихся и т.д. цепь младших степеней этих элементов является монотонно неубывающей. Если эта цепь стабилизируется на какой-то степени g, то в качестве «обобщённой суммы» всего множества $\{r_\alpha\}$ можно взять сумму всех тех элементов, младшая степень которых строго меньше g (их конечное число).

Если же эта цепь не стабилизируется, то можно объединить в этой цепи элементы с одинаковыми младшими степенями (просуммировав их, поскольку их для каждой младшей степени будет только конечное число) и получить цепь со строго возрастающей последовательностью младших степеней, к которой можно применить условие. Оставшаяся часть утверждения проверяется непосредственно. □

Докажем ещё одно важное предложение, позволяющее строить дополнительные примеры обобщённых кольца Мальцева—Неймана.

15.5. Предложение. *Если в условиях предложения 14.11 сильно фильтрованные кольца S и R являются ещё и обобщёнными кольцами Мальцева—Неймана (в смысле фильтраций U и V), то и для построенной в предложении новой фильтрации W кольцо S будет обобщённым кольцом Мальцева—Неймана.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 15.4. Пусть $s_1, s_2, \ldots$ — такая последовательность ненулевых элементов кольца S, что последовательность их младших степеней $f_1, f_2, \ldots$ (в смысле фильтрации $\{W_f\}$) строго возрастает. Пусть $g_1, g_2, \ldots$ — это последовательность их младших степеней в смысле фильтрации $\{U_g\}$. Эта последовательность также является неубывающей, но может возрастать нестрого. В случае, если эта последовательность не стабилизируется, легко видеть, что можно взять «обобщённую сумму» элементов $s_1, s_2, \ldots$ в смысле кольца Мальцева—Неймана S с фильтрацией $\{U_g\}$, она же будет и «обобщённой суммой» в смысле кольца Мальцева—Неймана S с фильтрацией $\{W_f\}$.

Если же последовательность $g_1, g_2, \ldots$ стабилизируется на элементе g, то можно, удалив из «обобщённой суммы» конечное число членов с младшей степенью $< g$, и домножив все элементы цепи с одной стороны на какой-нибудь сильно обратимый элемент с младшей степенью g^{-1}, считать, что все члены последовательности $s_1, s_2, \ldots$ имеют единичную младшую степень (в смысле фильтрации U). После этого достаточно перейти к фактор-кольцу R, рассмотреть соответствующую цепь $r_1, r_2, \ldots$ (образ при каноническом гомоморфизме) и получить её «обобщённую сумму» в смысле кольца R. Любой прообраз этой «обобщённой суммы» в кольце S будет «обобщённой суммой» исходных элементов $s_1, s_2, \ldots$ (это проверяется непосредственно). □

Новые обобщённые кольца Мальцева—Неймана можно строить также как фактор-кольца уже построенных.

15.6. Предложение. *Пусть R — обобщённое кольцо Мальцева—Неймана с фильтрацией $\{U_g\}$ и кольцом коэффициентов A. Пусть I — такой двусторонний собственный идеал кольца R, что для любого набора элементов $\{r_\alpha \in I | \alpha \in \Omega\}$ этого идеала, существует по крайней мере одна их «обобщённая сумма», лежащая в том же идеале I. Тогда фактор-кольцо R/I также является обобщённым кольцом Мальцева—Неймана с фильтрацией $\{V_g\}$, где каждое фильтрующее множество V_g является образом при каноническом гомоморфизме соответствующего множества U_g. Кольцо коэффициентов при этом будет изоморфно $A/\lambda(I)$.*

Доказательство. Докажем, что $\{V_g\}$ — строго исчерпывающая сверху фильтрация. Пусть s — произвольный ненулевой элемент кольца R/I. Достаточно доказать, что в множестве всех таких элементов g группы G, что $s \in V_g$, есть наибольший. Пусть $s = r + I$, где r — какой-то элемент кольца R, не лежащий в I. Тогда достаточно доказать, что в множестве всех таких элементов g группы G, что $r \in U_g + I$, есть наибольший. Или, что то же самое, что среди элементов вида $r + j$, где j лежит в идеале I, есть элемент с наибольшей младшей степенью. Применим лемму Цорна.

Действительно, пусть $r+j_1, r+j_2, r+j_3, \ldots$ — бесконечная последовательность элементов кольца R со строго увеличивающимися младшими степенями $g_1, g_2, g_3, \ldots$, причём все элементы j_n лежат в идеале I. Отметим, что для всякого натурального n выполнено включение

$$j_{n+1} - j_n = (r + j_{n+1}) - (r + j_n) \in U_{g_n}.$$

По условию для элементов $(j_2 - j_1), (j_3 - j_2), \ldots$ должна найтись хотя бы одна «обобщённая сумма» j, лежащая в I. Непосредственно проверяется, что элемент $r + j_1 + j$ имеет младшую степень, которая больше, чем все g_n и, таким образом, является искомой верхней гранью последовательности $r + j_1, r + j_2, r + j_3, \ldots$, что и позволяет применить лемму Цорна.

Таким образом доказано, что $\{V_g\}$ — строго исчерпывающая сверху фильтрация. Оставшиеся условия определения кольца Мальцева—Неймана проверяются тривиально. Действительно, если r — сильно обратимый элемент в кольце R с младшей степенью g, то $r + I$ — сильно обратимый элемент в кольце R/I с той же младшей степенью, поскольку выполнены включения $r + I \in V_g$ и $r^{-1} + I \in V_{g^{-1}}$. Если $\{s_\alpha\}$ — набор элементов кольца R/I, а $\{r_\alpha\}$ — такой набор их прообразов в кольце R, что младшая степень элемента s_α в кольце R/I совпадает с младшей степенью элемента r_α в кольце R для всех α, то образ «обобщённой суммы» элементов r_α в кольце R/I будет «обобщённой суммой» элементов s_α (проверяется непосредственно). $\square$

15.7. Замечание. Аналог этого утверждения для кольца Мальцева—Неймана не верен. Так, ниже будет приведён пример фактор-кольца кольца рядов Лорана, которое является обобщённым кольцом Мальцева—Неймана, но не является кольцом Мальцева—Неймана.

16. Свойства и примеры колец Мальцева—Неймана

Пусть R — кольцо Мальцева—Неймана, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть π — вложение кольца A в кольцо R как в определении кольца Мальцева—Неймана. Тогда для каждого правого идеала B кольца A обозначим через $\mu(B)$ правый идеал $\pi(B)R$. Из условия (iv) определения вытекает, что $\pi(B)R \cap U_1 = \pi(B)U_1$, поэтому $\lambda(\mu(B)) = B$. Отображение μ осуществляет вложение решётки правых идеалов кольца A в решётку правых идеалов кольца R (это вложение является гомоморфизмом относительно решёточных операций сложения и пересечения, в том числе и бесконечных сумм и пересечений). Легко видеть, что для любого главного правого идеала aA кольца коэффициентов выполнено равенство $\mu(aA) = \pi(a)R$.

16.1. Замечание. Отображение μ, в отличие от отображения λ, определено не симметрично относительно умножения справа или слева. Можно было бы определить его для левых коэффициентов и тогда оно осуществляло бы вложение решётки левых идеалов. Кроме того, наличие такого отображения требует выполнения условия (iv) определения кольца Мальцева—Неймана и само отображение зависит от выбора конкретного биективного отображения π из A в R.

16.2. Предложение. *Если R — кольцо Мальцева—Неймана с кольцом коэффициентов A, то кольцо R является телом в точности тогда, когда кольцо A является телом.*

Доказательство. В одну сторону утверждение доказано в предложении 15.3. Пусть теперь R — тело. Тогда кольцо A является областью, поскольку вкладывается в тело R. Пусть a — произвольный ненулевой элемент кольца A. Элемент $\pi(a)$ обратим в теле R, пусть r — его обратный. По лемме 14.7 выполнено равенство

$$\deg r = \deg \pi(a) \deg r = \deg 1_R = 1,$$

откуда получаем, что $r \in U_1$, и тогда можно рассмотреть $\hat{r}$, свободный член элемента r. С учётом того, что произведение свободных членов равно свободному члену произведения, получаем, что $a\hat{r} = 1$. Аналогично $\hat{r}a = 1$, что и требовалось доказать. $\square$

Можно получить для кольца Мальцева—Неймана критерии артиновости и нётеровости, которые также были известны ранее для колец косых рядов Лорана, колец псевдодифференциальных операторов и колец рядов Мальцева—Неймана.

16.3. Предложение. *Пусть R — кольцо Мальцева—Неймана с кольцом коэффициентов A.*

(1) *Кольцо R нётерово справа в точности тогда, когда кольцо A нётерово справа.*

(2) *Кольцо R артиново справа в точности тогда, когда кольцо A артиново справа.*

Доказательство. (1) Если кольцо R нётерово справа, то, поскольку решетка правых идеалов кольца A инъективно вкладывается в решетку правых идеалов кольца R (с помощью отображения μ), то и кольцо A нётерово справа.

Пусть теперь A — нётерово справа кольцо. Допустим, что кольцо R не нётерово справа; тогда в нем существует бесконечная строго возрастающая цепь правых идеалов $B_1, B_2, B_3, \ldots$. Рассмотрим возрастающую цепь правых идеалов $\lambda(B_1), \lambda(B_2), \ldots$ в кольце A. По условию кольцо A нётерово справа, поэтому существует такое натуральное число k, что $\lambda(B_n) = \lambda(B_k)$ для всех $n > k$. Но кольцо A нётерово справа, поэтому все правые идеалы $\lambda(B_n)$ конечно порождены. Тогда идеал $\lambda(B_k)$ порождается конечным числом элементов кольца A, которые являются свободными членами некоторых элементов $\{c_i\}$ из множества $U_1 \cap B_k$. Тогда для любого $n > k$ к правым идеалам B_n и B_k и к набору элементов $\{c_i\}$ применима лемма 15.1, откуда вытекает, что все правые идеалы B_n совпадают при $n > k$, что противоречит выбору цепи $B_1, B_2, B_3, \ldots$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Доказательство утверждения (2) аналогично доказательству (1). □

16.4. Замечание. Можно отметить, что доказательство предложения 16.3 использует условие (iv) определения кольца Мальцева—Неймана только для доказательства в одну сторону. Поэтому, если кольцо коэффициентов A нётерово справа (соответственно, артиново справа), то кольцо R нётерово (соответственно, артиново справа), даже если R — обобщённое кольцо Мальцева—Неймана.

16.5. Предложение. *Если в условиях предложения 3.4 обобщённые кольца Мальцева—Неймана S и R являются ещё и кольцами Мальцева—Неймана (в смысле фильтраций U и V), то и для построенной в предложении новой фильтрации W кольцо S будет кольцом Мальцева—Неймана.*

Доказательство. Необходимое вложение π кольца A в кольцо S строится путём простой композиции вложений π_1 из A в R и π_2 из R в S, которые существуют по условию.

Нужно доказать, что для любого a из A выполнены равенства

$$\pi(a)S \cap W_1 = \pi(a)W_1, \quad S\pi(a) \cap W_1 = W_1\pi(a).$$

Достаточно доказать первое равенство, второе доказывается аналогично. Включение $\pi(a)W_1 \subseteq \pi(a)S \cap W_1$ очевидно; докажем обратное. Пусть s — произвольный элемент из множества $\pi(a)S \cap W_1$. Он лежит также в U_1, и его образ при каноническом гомоморфизме U_1 на R лежит в $\pi_1(a)R \cap V_1$. По условию это означает, что этот образ лежит в $\pi_1(a)V_1$, т.е. имеет вид $\pi_1(a)v_1$. Это означает, что $s \in \pi(a)\pi_2(v_1) + U_{1+}$. Пусть g — младшая степень элемента $s - \pi(a)\pi_2(v_1)$ (в смысле фильтрации U), а s_g — произвольный сильно обратимый элемент с младшей степенью g. Отметим, что g строго больше единицы. Тогда элемент $s' \equiv (s - \pi(a)\pi_2(v_1))s_g^{-1}$ лежит в U_1. С другой стороны, этот же элемент лежит и в $\pi(a)S$, поэтому, по условию, он лежит и в $\pi(a)U_1$. Но тогда элемент $s's_g$ лежит в $\pi(a)U_{1+} \subseteq \pi(a)W_1$, и поэтому элемент $s = \pi(a)\pi_2(v_1) + s's_g$ также лежит в $\pi(a)W_1$, что и требовалось доказать. □

Назовём упорядоченное множество *вполне упорядоченным снизу*, если в любом его непустом подмножестве найдётся наименьший элемент.

16.6. Кольца рядов Мальцева—Неймана.

Одним из основных примеров кольца Мальцева—Неймана является кольцо рядов Мальцева—Неймана (а также кольца рядов Лорана и кольца косых рядов Лорана как его частные случаи).

Пусть A — кольцо, G — упорядоченная группа; рассмотрим отображение $\varphi\colon G \Rightarrow \mathrm{Aut(A)}$.

Для любого $g \in G$ положим $\varphi_g = \varphi(g)$. Кроме того, пусть имеется некоторое отображение

$$\varepsilon\colon G \times G \to U(A),$$

ставящее в соответствие каждой паре элементов группы G какой-либо обратимый элемент кольца A. Обозначим через $A((G, \varphi, \varepsilon))$ множество всех таких формальных сумм

$$r = \sum_{g \in G} r_g \overline{g}, \quad r_g \in A,$$

что множества

$$\operatorname{Supp} r = \{g \in G \mid r_g \neq 0\}$$

вполне упорядочены снизу. На множестве $A((G, \varphi, \varepsilon))$ можно ввести структуру кольца, определив сложение обычным образом, а умножение — при помощи правила перемножения одночленов

$$(a\overline{g}) \times (b\overline{h}) = (a\varphi_g(b)\varepsilon(g, h))\overline{gh}.$$

Умножение может быть распространено на бесконечные формальные суммы одночленов, поскольку в сумме, задающей коэффициент при данном $\overline{g}$, лишь конечное число членов будет отлично от нуля. Вообще говоря, необходимо наложить некоторые условия на отображения φ и ε, чтобы это умножение было ассоциативно и чтобы в кольце существовала единица. Для любых g, h, f из группы G и любого a из кольца A должны быть выполнены равенства:

$$\text{(i)} \quad \varepsilon(g, h)\varepsilon(gh, f) = \varphi_g(\varepsilon(h, f))\varepsilon(g, hf);$$

$$\text{(ii)} \quad \varphi_{gh}(a) = (\varepsilon(g, h))^{-1}\varphi_g(\varphi_h(a))\varepsilon(g, h).$$

Второе условие может быть переписано в виде $\varphi_{gh} = \delta(g, h)\varphi_g\varphi_h$, где $\delta(g, h)$ — внутренний автоморфизм кольца A, индуцированный элементом $\varepsilon(g, h)$.

16.7. Предложение. *Множество $R = A((G, \varphi, \varepsilon))$, где φ и ε заданы как в определении кольца рядов Мальцева—Неймана, является кольцом, причём единицей в нём является одночлен $1_R = (\varepsilon(1, 1))^{-1}\overline{1_G}$, где 1_G — это единица группы G.*

Предложение 16.7 проверяется непосредственно.

16.8. Кольцо $A((x, \varphi))$ — частный случай кольца рядов Мальцева—Неймана.

Если положить G равной свободной циклической группе $\langle x \rangle$, положить $e(g, h) \equiv 1$ и $\varphi_{x^n} = \varphi^n$, где φ — фиксированный автоморфизм кольца коэффициентов A, то условия определения будут выполнены автоматически и получится кольцо $A((x, \varphi))$ косых рядов Лорана, являющееся, таким образом, частным случаем кольца рядов Мальцева—Неймана.

Определённое выше понятие кольца Мальцева—Неймана является дальнейшим обобщением конструкции колец рядов Мальцева—Неймана и включает в себя также и кольца псевдодифференциальных операторов, свойства которых близки к свойствам колец рядов Мальцева—Неймана (и, в частности, колец косых рядов Лорана).

16.9. Кольцо рядов Мальцева—Неймана является кольцом Мальцева—Неймана.

Кольцо $A((G, \varphi, \varepsilon))$ рядов Мальцева—Неймана является кольцом Мальцева—Неймана, причём его кольцо коэффициентов (как кольца Мальцева—Неймана) изоморфно кольцу A.

Доказательство. Обозначим $R = A((G, \varphi, \varepsilon))$. Для каждого элемента $g \in G$ обозначим через U_g множество таких формальных сумм $r \in R$, что все элементы $\operatorname{Supp} R$ не меньше чем g.

Условие (i) определения кольца Мальцева—Неймана проверяется непосредственно.

Для доказательства выполнения условия (ii) достаточно заметить, что для любого g из G элемент $1_A\overline{g}$ обратим и обратный к нему равен $(\varepsilon(g^{-1}, g))^{-1}\overline{g^{-1}}$. Легко видеть, что младшая степень элемента r всегда совпадает с наименьшим элементом множества $\operatorname{Supp} r \subset G$.

Докажем выполнение условия (iii). Пусть $\{r_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ — произвольное множество элементов кольца R. Будем строить формальную сумму s, являющуюся обобщённой суммой элементов $\{r_\alpha\}$. Для всех g из G, таких, что не более чем конечное число элементов $\{r_\alpha\}$ имеет степень, меньше или равную g, положим s_g равным сумме коэффициентов $\{r_\alpha\}$ при $\overline{g}$ (эта сумма определена корректно, поскольку лишь конечное число этих коэффициентов отлично от нуля). Для всех остальных g из G положим $s_g = 0$. Тогда формальная сумма $s = \sum s_g\overline{g}$ и будет искомой обобщённой суммой $\{r_\alpha\}$. Докажем это.

Вначале докажем, что формальная сумма $s = \sum s_g\overline{g}$ лежит в кольце R, т.е. что $\operatorname{Supp} s$ — вполне упорядоченное снизу множество. Действительно, предположим, что это не так. Тогда в нём существует непустое подмножество без наименьшего элемента и, следовательно, можно построить бесконечную строго убывающую цепь элементов $g_1 > g_2 > g_3 > \ldots$, лежащих в $\operatorname{Supp} s$. По построению s существует лишь конечное число элементов r_α с младшей степенью меньше либо равной g_1. Пусть это будет набор $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Поскольку коэффициент s_{g_i} отличен от нуля для всех i и коэффициент s_{g_i} равен сумме коэффициентов при $\overline{g_i}$ всех r_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, то для каждого натурального i найдётся хотя бы один такой r_j, что коэффициент r_j при $\overline{g_i}$ отличен от нуля. Поскольку i пробегает весь натуральный ряд, а j может принимать лишь конечное число значений, то одно из значений j будет встречаться бесконечное число раз, без ограничения общности можно считать, что это $j = 1$. Тогда в последовательности $g_1, g_2, \ldots$ можно выделить подпоследовательность $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots$, для которой коэффициент r_1 при g_{i_k} отличен от нуля для всех k. Но тогда $\operatorname{Supp} r_1$ не является вполне упорядоченным снизу множеством, что противоречит включению $r \in R$.

Остаётся доказать, что элемент s удовлетворяет определению обобщённой суммы. Действительно, пусть для некоторого $g \in G$ все элементы $\{r_\alpha\}$ (кроме конечного числа $r_1, \ldots, r_n$) лежат в U_g. Тогда разность

$$t = \left(s - \sum_{i=1}^{n} r_n\right)$$

должна лежать в U_g. Действительно, допустим, что это не так; тогда младшая степень t должна быть меньше g. Пусть младшая степень t равна h. Коэффициент s при $\overline{h}$ по построению равен сумме таких же коэффициентов $\sum\limits_{i=1}^{n} r_n$, поэтому коэффициент t при $\overline{h}$ равен нулю, что противоречит выбору h. Полученное противоречие завершает доказательство выполнения условия (iii).

Остаётся доказать выполнения условия (iv).

Докажем вначале существование инъективного кольцевого гомоморфизма π из A в R. Обозначим $\varepsilon(1, 1)$ через e. Положим $\pi(a) = ae^{-1}\overline{1_G}$; при этом отображении единица 1_A кольца A переходит в единицу $1_R = e^{-1}\overline{1_G}$ кольца R. Очевидным образом, $\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b)$, проверим, что $\pi(ab) = \pi(a) \times \pi(b)$. Действительно,

$$\pi(a) \times \pi(b) = (ae^{-1}\overline{1_G}) \times (be^{-1}\overline{1_G}) = ae^{-1}\varphi_1(be^{-1})e\overline{1_G}.$$

С другой стороны,

$$be^{-1}\overline{1_G} = 1_R \times (be^{-1}\overline{1_G}) = e^{-1}\varphi_1(be^{-1})e\overline{1_G},$$

так что $be^{-1} = e^{-1}\varphi_1(be^{-1})e$. Поэтому

$$\pi(a) \times \pi(b) = ae^{-1}\varphi_1(be^{-1})e\overline{1_G} = abe^{-1}\overline{1_G} = \pi(ab),$$

что и требовалось доказать.

По построению π видно, что $\pi(A) \cap U_{1+} = 0$. Докажем ещё, что $\pi(A) + U_{1+} = U_1$. Действительно, каждый элемент r из U_1 может быть представлен в виде суммы $a\overline{1_G} + s$, где a — элемент кольца A, а s лежит в U_{1+}. Но $a\overline{1_G} = \pi(ae)$, что и доказывает требуемое равенство $\pi(A) + U_{1+} = U_1$. Тогда получаем, что кольцо A изоморфно U_1/U_{1+} и существует требуемое вложение π.

Остаётся проверить, что $\pi(a)R \cap U_1 = \pi(a)U_1$ и $R\pi(a) \cap U_1 = U_1\pi(a)$. Докажем только первое равенство, второе доказывается полностью аналогично. Действительно, пусть $s = \pi(a)r \in \pi(a)R \cap U_1$. Тогда если r — это формальная сумма одночленов $r_g\overline{g}$, то s — формальная сумма одночленов $ae^{-1}\varphi_1(r_g)\varepsilon(1, g)\overline{g}$. Из того, что s лежит в U_1, следует, что все одночлены $\pi(a) \times r_g\overline{g} = ae^{-1}\varphi_1(r_g)\varepsilon(1, g)\overline{g}$ равны нулю при $g < 1$. Но это означает, что $0 = \pi(a)(r - r')$, где r' — формальная сумма тех одночленов $r_g\overline{g}$, у которых $g \geqslant 1$. При этом r' лежит в U_1, поэтому $s = \pi(a)r' \in \pi(a)U_1$, что и требовалось доказать. $\square$

16.10. Косые ряды Лорана с косым дифференцированием.

Помимо колец рядов Мальцева—Неймана, под определение кольца Мальцева—Неймана попадают также кольца косых рядов Лорана с косым дифференцированием, которые включают в себя кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов. Формально строгое построение кольца косых рядов Лорана с косым дифференцированием слишком длинно, поэтому здесь будет приведена только формулировка без доказательства.

Пусть A — кольцо, φ — его автоморфизм, а δ — φ^{-1}-*дифференцирование* (т.е. эндоморфизм абелевой группы по сложению A^+, удовлетворяющий условию $\delta(ab) = \delta(a)b + \varphi^{-1}(a)\delta(b)$ для всех a и b из A). Тогда существует и единственно кольцо $A((x, \varphi, \delta))$, совпадающее как абелева группа по сложению с кольцом рядов Лорана $A((x))$, в котором умножение удовлетворяет соотношениям

$$x^{-1}a = \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \delta(a), \quad (ax^n)(1x^m) = ax^{n+m}, \quad (ax^0)(bx^n) = (ab)x^n,$$

и, кроме того, младшая степень произведения двух рядов всегда больше или равна сумме их младших степеней. Под младшей степенью ряда здесь подразумевается степень младшего члена ряда.

Непосредственно проверяется, что кольцо косых рядов Лорана с косым дифференцированием также является кольцом Мальцева—Неймана, если в качестве группы G взять свободную циклическую группу $\langle x \rangle$, а в качестве U_{x^n} взять множество всех рядов, младшая степень которых не ниже n. При этом его кольцо коэффициентов как кольца Мальцева—Неймана будет изоморфно A.

16.11. Кольца итерированных рядов Лорана.

Конструкция кольца рядов Лорана допускает итерирование — можно рассмотреть *кольцо итерированных рядов Лорана* от n переменных $A((x_1))((x_2))\cdots((x_n))$, определив его по индукции как кольцо обычных рядов Лорана от переменной x_n с кольцом коэффициентов $A((x_1))((x_2))\cdots((x_{n-1}))$. При таком определении переменные не равноправны и их порядок существен. Свойства кольца итерированных рядов Лорана близки к свойствам кольца обычных рядов Лорана; можно показать, что на кольце итерированных рядов Лорана $A((x_1))((x_2))\cdots((x_n))$ можно ввести структуру кольца Мальцева—Неймана так, чтобы его кольцо коэффициентов было изоморфно A. Конструкцию кольца Мальцева—Неймана можно итерировать (при соблюдении некоторых условий), как показано в предложении 16.5.

16.12. Факторизация (обобщенных) колец Мальцева—Неймана.

Обобщённые кольца Мальцева—Неймана можно получать также факторизацией других колец Мальцева—Неймана (или обобщённых колец Мальцева—Неймана).

Например, кольцо целых p-адических чисел может быть получено как фактор-кольцо кольца формальных степенных рядов $\mathbb{Z}[[x]]$ по идеалу, порождённому рядом $(x-p)$, а кольцо дробных p-адических чисел может быть получено как фактор-кольцо кольца рядов Лорана $\mathbb{Z}((x))$ по идеалу, порождённому рядом $(x-p)$. В силу предложения 15.6 кольцо дробных p-адических чисел является обобщённым кольцом Мальцева—Неймана с кольцом коэффициентов $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Аналогично можно рассмотреть и кольцо дробных n-адических чисел для любого целого $n > 2$, которое будет обобщённым кольцом Мальцева—Неймана с кольцом коэффициентов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Интересно отметить следующий факт.

16.13. Предложение. *Пусть A — кольцо, $A((x))$ — кольцо рядов Лорана над A, a — некоторый центральный необратимый элемент кольца коэффициентов A, не являющийся делителем нуля, I — двусторонний идеал кольца $A((x))$, порождённый рядом $x-a$, и n — произвольное натуральное число. Тогда фактор-кольцо $A((x))/I$ изоморфно фактор-кольцу $A((y))/J$, где J — двусторонний идеал кольца рядов Лорана $A((y))$, порождённый рядом $y-a^n$.*

Доказательство. Рассмотрим кольцевой гомоморфизм φ, который отображает кольцо $A((y))$ в кольцо $A((x))$, переводя y в x^n, а бесконечные формальные суммы степеней y в соответствующие бесконечные формальные суммы степеней x^n. Ясно, что φ — кольцевой мономорфизм. Очевидно также, что идеал J при этом вложении переходит внутрь идеала I (поскольку его порождающий элемент $y-a^n$ переходит в элемент x^n-a^n, лежащий в идеале I). Докажем теперь, что идеал J совпадает с прообразом идеала I при гомоморфизме φ. Для этого достаточно доказать, что прообраз $\varphi^{-1}(I)$ идеала I порождается центральным элементом $y-a^n$. В силу леммы 15.1 для этого достаточно доказать, что множество всех свободных членов всех рядов без отрицательных степеней из прообраза $\varphi^{-1}(I)$ лежит в идеале a^nA кольца A. При вложении φ свободные члены рядов сохраняются (а ряды без отрицательных степеней переходят в ряды без отрицательных степеней), поэтому достаточно доказать, что все свободные члены всех рядов без отрицательных степеней из пересечения $I \cap \varphi(A((y)))$ лежат в a^nA.

Обозначим образ $\varphi(A((y)))$ через $A((x^n))$ (поскольку он состоит из тех и только тех рядов в $A((x))$, у которых отличны от нуля только коэффициенты при степенях x, кратных n). Пусть f — ряд без отрицательных степеней, лежащий в $I \cap A((x^n))$, а f_0 — его свободный член. Тогда ряд f имеет вид $f_0 + f_nx^n + \ldots$. Предположим, что f_0 не лежит в a^nA. Пусть тогда $f_0 = a^kb$, где k — некоторое натуральное число, а элемент b кольца A не лежит в aA. Согласно предположению $k < n$. Тогда ряд $f - b(a^k - x^k)$ также лежит в I, причём его младший член равен bx^k, а младший коэффициент равен b. Однако, поскольку элемент a не является делителем нуля, младший коэффициент любого ряда из идеала $I = (x-a)A((x))$ должен лежать в идеале aA. Полученное противоречие доказывает, что идеал J совпадает с прообразом идеала I при гомоморфизме φ.

Докажем теперь равенство $A((x)) = A((x^n)) + I$. Действительно, всякий ряд

$$f = f_mx^m + f_{m+1}x^{m+1} + \ldots \in A((x))$$

может быть представлен в виде конечной суммы рядов

$$f^{(k)} = f_{m+k}x^{m+k} + f_{n+m+k}x^{n+m+k} + f_{2n+m+k}x^{2n+m+1} + \ldots,$$

где k пробегает все целые значения от 0 до $n-1$. При этом ряд $f^{(k)}$ имеет вид $x^kg^{(k)}$, где $g^{(k)}$ — ряд из $A((x^n))$. Тогда ряд f может быть представлен в виде

$$f = f_0 + xg^{(1)} + x^2g^{(2)} + \ldots + x^{n-1}g^{(n-1)} \in f_0 + ag^{(1)} + a^2g^{(2)} + \ldots + a^{n-1}g^{(n-1)} + I,$$

что и требовалось.

Построим теперь изоморфизм $\overline{\varphi}$ между кольцами $A((y))/J$ и $A((x))/I$. Если f — ряд из $A((y))$, то поставим элементу $f+J$ в соответствие элемент $\varphi(f)+I$. Из того, что кольцевой гомоморфизм

φ переводит идеал J внутрь идеала I, следует, что соответствие $\overline{\varphi}$ определено корректно и не зависит от выбора конкретного ряда f. Из того, что идеал J совпадает с прообразом идеала I, вытекает, что соответствие $\overline{\varphi}$ взаимно однозначно. Из того, что $A((x)) = A((x^n)) + I = \varphi(A((y))) + I$, вытекает, что образом кольцевого гомоморфизма $\overline{\varphi}$ является всё кольцо $A((x))/I$, что и требовалось доказать. □

Из доказанного утверждения вытекает, в частности, что поле дробных p-адических чисел для всех натуральных k изоморфно кольцу дробных p^k-адических чисел, при этом они не изоморфны как кольца Мальцева—Неймана (например, потому, что у одного из них кольцо коэффициентов — поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, а у другого даже не область — $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$).

16.14. Открытые вопросы.

Пусть R — кольцо Мальцева—Неймана с кольцом коэффициентов A.

(1) Если кольцо R регулярно, то верно ли, что A — артиново кольцо?
(2) Верно ли, что $J(R)$ — нильидеал?
(3) Если кольцо R нетерово справа или слева, то верно ли, что $J(R)$ — нильпотентный идеал?

17. Ряды Лорана от двух переменных

Представляется естественным попытаться определить кольца рядов Лорана от нескольких переменных:

17.1. Кольца рядов Лорана от нескольких переменных.

Пусть A — кольцо. Кольцом рядов Лорана от n переменных называется кольцо $A((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ формальных сумм вида

$$f = \sum_{i_1=m_1}^{+\infty} \sum_{i_2=m_2}^{+\infty} \cdots \sum_{i_n=m_n}^{+\infty} f_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n},$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — произвольные (возможно, отрицательные) целые числа, а $f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ — произвольные элементы кольца A. Сложение и умножение в кольце $A((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ вводятся обычным образом, с учётом того, что переменные коммутируют друг с другом и с коэффициентами. Отметим, что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равноправны и любая их перестановка задаёт корректный автоморфизм кольца $A((x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

Изучение показывает, что свойства колец рядов Лорана от двух и более переменных резко отличаются от свойств кольца рядов Лорана от одной переменной. Пусть A — кольцо, а $A((x, y))$ — кольцо рядов Лорана от двух переменных над ним. Тогда рассмотрим кольца итерированных рядов Лорана $A((x))((y))$ и $A((y))((x))$. Легко видеть, что эти два кольца не совпадают как множества формальных сумм от степеней x и y (так, например, элемент $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} x^i y^{-i}$ лежит в $A((y))((x))$, но не лежит в $A((x))((y))$). Переменные x и y в этих кольцах не равноправны, а перестановка переменных задаёт изоморфизм $A((x))((y))$ на $A((y))((x))$ и наоборот. При этом кольцо $A((x, y))$ является подкольцом кольца $A((x))((y))$ и одновременно кольца $A((y))((x))$ (более того, кольцо $A((x, y))$ в точности совпадает с пересечением $A((x))((y))$ и $A((y))((x))$ как множеств формальных сумм).

17.2. Замечание о младших членах рядов Лорана от нескольких переменных.

При изучении рядов Лорана от одной переменной важную роль играет младший член, т.е. член суммы, содержащий наименьшую степень переменной. Для ряда от нескольких переменных понятие младшего члена необходимо уточнить. Рассматривая ненулевой ряд Лорана от двух переменных x и y, выберем из всех членов этого ряда те, в которые x входит в наименьшей степени, а из них выберем тот член, который содержит наименьшую степень переменной y и назовём его *младшим членом* ряда для перестановки (x, y). Поменяв местами переменные x и y мы получим определение младшего члена (y, x) этого ряда. В случае n переменных для любой заданной перестановки переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно определить свой младший член. Если зафиксировать одну перестановку переменных, то, очевидно, что произведение младших членов двух рядов либо равно нулю, либо равно младшему члену произведения этих двух рядов. Важной характеристикой ряда Лорана от двух переменных является совпадение или несовпадение двух его младших членов.

В 10.3 доказано, что кольцо рядов Лорана от одной переменной является артиновым справа кольцом в точности тогда, когда кольцо коэффициентов является артиновым справа кольцом. Следующие предложения показывают, что эти утверждения не переносятся на кольца рядов Лорана от нескольких переменных.

17.3. Предложение. *Если A — произвольное кольцо, то кольцо рядов Лорана от двух переменных $A((x, y))$ содержит необратимый справа элемент $x + y$, не являющийся левым делителем нуля. В частности, $A((x, y))$ не является артиновым справа кольцом.*

Доказательство. Действительно, допустим, что f — некоторый ряд из $A((x, y))$, такой, что $(x + y)f = 0$. Пусть f_{xy} — младший член (x, y) ряда f. Тогда младший член (x, y) ряда $(x+y)f$ должен быть равен yf_{xy} и, следовательно, отличен от нуля, что противоречит равенству $(x + y)f = 0$.

Заметим теперь, что элемент $x+y$ обратим в кольце $A((x))((y))$, причём его обратный равен $(x+y)^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}(-1)^i x^{-i-1}y^i$, но элемент $(x+y)^{-1}$ не лежит в кольце $A((x, y))$, вложенном в $A((x))((y))$. В силу единственности обратного элемента в кольце $A((x))((y))$, получаем, что элемент $x + y$ не обратим (ни слева, ни справа) в кольце $A((x, y))$. □

17.4. Замечание. Рассмотренный в доказательстве предложения 17.3 элемент $x + y$ обратим и в кольце $A((x))((y))$ и в кольце $A((y))((x))$, но его обратные в этих кольцах отличаются друг от друга как формальные суммы одночленов от x и y.

17.5. Предложение. *Если A — произвольное кольцо, то кольцо рядов Лорана от двух переменных $A((x, y))$ не является локальным.*

Доказательство. Действительно, если $A((x, y))$ — локальное кольцо, то либо элемент $(x^{-1} + y^{-1})$ обратим, либо элемент $1 + (x^{-1} + y^{-1})$ обратим. Пусть один из них (обозначим его f) обратим. Заметим, что младшие члены ряда f равны $f_{xy} = x^{-1}$ и $f_{yx} = y^{-1}$. Тогда пусть g — ряд, обратный к f, а его младшие члены равны g_{xy} и g_{yx} (возможно, совпадают). Тогда младшие члены ряда fg равны $x^{-1}g_{xy}$ и $y^{-1}g_{yx}$ и не могут совпадать (поскольку в первый из них x входит в по крайней мере на единицу в меньшей степени, чем во второй). Но это противоречит тому, что $fg = 1$. □

17.6. Теорема. *Для произвольного кольца A равносильны следующие условия*:

(1) *$A((x, y))$ — полупримитивная область, не являющаяся телом*;

(2) *кольцо рядов Лорана от двух переменных $A((x, y))$ — область=*;

(3) *A — область.*

Доказательство. Эквивалентность условий (3) и (2) легко следует из того, что младший член (x, y) произведения двух рядов равен произведению их младших членов (x, y) и из того, что кольцо A естественным образом вкладывается в $A((x, y))$.

Импликация (1)⇒(2) тривиальна.

(2)⇒(1). Действительно, пусть f — ненулевой ряд, лежащий в радикале Джекобсона кольца $A((x, y))$. Тогда пусть $f_{xy} = ax^l y^n$ и $f_{yx} = bx^k y^m$ — его младшие члены (x, y) и (y, x) соответственно (при этом $\ell \leqslant k$ и $m \leqslant n$). Заменив в случае необходимости f на $fx^{-\ell}y^{-m}$, мы можем считать, что $\ell = 0$, $m = 0$ и $f_{xy} = ay^n$, $f_{yx} = bx^k$. Допустим, что $f_{xy} = f_{yx}$, тогда $n = k = 0$. Тогда заменим f на $g = f(x+y)$ и получим, что $g_{xy} \neq g_{yx}$. Поэтому можно считать, что $f_{xy} \neq f_{yx}$ и $n > 0$, $k > 0$. Ряд f лежит в радикале Джекобсона кольца $A((x,y))$, поэтому ряд $1+x^{-1}y^{-1}f$ обратим, но тогда обратим и ряд $g = xy + f$. Нетрудно видеть, что младшие члены ряда g равны $g_{xy} = f_{xy} = ay^n$ и $g_{yx} = f_{yx} = bx^k$ и, следовательно, не совпадают друг с другом. Пусть h — ряд, обратный к ряду g. Пусть h_{xy} и h_{yx} — его младшие члены (возможно, они совпадают). Тогда младшие члены ряда gh равны, соответственно, $h_{xy}g_{xy}$ и $h_{yx}g_{yx}$. Нетрудно видеть, что младшие члены ряда gh также не совпадают друг с другом. Но h — обратный к g, поэтому $gh = 1$. Получено противоречие.

Осталось доказать, что кольцо $A((x,y))$ не является телом; это следует из предложения 17.3. $\square$

17.7. Открытые вопросы.

Пусть A — кольцо.

(1) Найти условия на кольцо A, равносильные тому, что $A((x,y))$ — полупримитивное кольцо.
(2) Найти условия на кольцо A, равносильные тому, что $A((x,y))$ — полупервичное кольцо.
(3) Найти условия на кольцо A, равносильные тому, что $A((x,y))$ — первичное кольцо.
(4) Найти условия на кольцо A, равносильные тому, что $A((x,y))$ — несингулярное справа кольцо.
(5) Найти условия на кольцо A, равносильные тому, что $A((x,y))$ — нетерово справа кольцо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.* Интегрируемые нелинейные уравнения и теорема Лиувилля// Функц. анал. прилож. — 1979. — *13*, № 1. — С. 8–20.
2. *Джумадильдаев А. С.* Дифференцирования и центральные расширения алгебры Ли формальных псевдодифференциальных операторов// Алгебра и анализ. — 1994. — *6*, № 1. — С. 140–158.
3. *Паршин А. Н.* О кольце формальных псевдодифференциальных операторов// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1999. — *224*. — С. 291–305.
4. *Сонин К. И.* Регулярные кольца рядов Лорана// Фундам. прикл. мат. — 1995. — *1*, № 1. — С. 315–317.
5. *Сонин К. И.* Регулярные кольца косых рядов Лорана// Фундам. прикл. мат. — 1995. — *1*, № 2. — С. 565–568.
6. *Сонин К. И.* Бирегулярные кольца рядов Лорана// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1997. — № 4. — С. 20–22.
7. *Туганбаев А. А.* Кольца косых рядов Лорана и условие максимальности для правых аннуляторов// Дискр. мат. — 2008. — *20*, № 1. — С. 80–86.
8. *Туганбаев А. А.* О полуцепных кольцах// Дискр. мат. — 2016. — *28*, № 4. — С. 150–157.
9. *Туганбаев Д. А.* Цепные кольца рядов Лорана// Фундам. при. мат. — 1997. — *3*, № 3. — С. 947–951.
10. *Туганбаев Д. А.* Цепные кольца косых рядов Лорана// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2000. — № 1. — С. 52–55.
11. *Туганбаев Д. А.* Кольца косых рядов Лорана и кольца главных идеалов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2000. — № 5. — С. 55–57.
12. *Туганбаев Д. А.* Полулокальные дистрибутивные кольца косых рядов Лорана// Фундам. прикл. мат. — 2000. — *6*, № 3. — С. 913–921.
13. *Туганбаев Д. А.* Кольца псевдодифференциальных операторов и условия на цепи// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2002. — № 4. — С. 26–32.
14. *Туганбаев Д. А.* Мальцевские кольца// Дискр. мат. — 2008. — *20*, № 2. — С. 63–81.
15. *Alhevaz A., Kiani D.* Radicals of skew inverse Laurent series rings// Commun. Algebra. — 2013. — *41*, № 8. — P. 2884–2902.
16. *Alhevaz A., Kiani D.* On zero divisors in skew inverse Laurent series over noncommutative rings// Commun. Algebra. — 2014. — *42*, № 2. — P. 469–487.

17. *Amitsur S. A.* Radicals of polynomial rings// Can. J. Math. — 1956. — *8*. — P. 355–361.
18. *Bergman G. M.* Conjugates and nth roots in Hahn–Laurent group rings// Bull. Malaysian Math. Soc. — 1978. — *1*, № 2. — P. 29–41; Historical addendum// Bull. Malaysian Math. Soc. — 1979. — *2*, № 2. — P. 41–42.
19. *Cohn P. M.* Skew Fields. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
20. *Elliott G. A., Ribenboim P.* Fields of generalized power series// Arch. Math. — 1990. — *54*, № 4. — P. 365–371.
21. *Facchini A.* Semilocal Categories and Modules with Semilocal Endomorphism Rings. — Basel: Birkhäuser, 2019.
22. *Facchini A., Herbera D.* Local morphisms and modules with a semilocal endomorphism ring// Alg. Represent. Th. — 2006. — *9*, № 4. — P. 403–422.
23. *Faith C.* Algebra: Rings, Modules, and Categories. — Berlin: Springer-Verlag, 1973.
24. *Faith C.* Algebra: Ring Theory. — New York: Springer-Verlag, 1976.
25. *Goodearl K. R.* Von Neumann Regular Rings. — London: Pitman, 1979.
26. *Goodearl K. R.* Centralizers in differential, pseudo-differential, and fractional differential operator rings// Rocky Mountain J. Math. — 1983. — *13*, № 4. — P. 573–618.
27. *Goodearl K. R., Small L. W.* Krull versus global dimension in Noetherian PI-rings// Proc. Am. Math. Soc. — 1984. — *92*, № 2. — P. 175–178.
28. *Goodearl K. R., Warfield R. B.* An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
29. *Guillemin V., Quillen D., Sternberg S.* The integrability of characteristics// Commun. Pure Appl. Math. — 1970. — *23*. — P. 39–77.
30. *Guillemin V., Sternberg S.* Symplectic Techniques in Physics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
31. *Johns B.* Chain conditions and nil ideals// J. Algebra. — 1981. — *73*, № 2. — P. 287–294.
32. *Hashemi E., Hamidizadeh M., Alhevaz A.* On the Jacobson radical of skew inverse Laurent series ring// J. Algebra Appl. — 2019. — *18*, № 9. — P. 1950177.1–50177.
33. *Karimi S., Sahebi Sh., Habibi M.* The Jacobson radical of inverse Laurent power series of rings// J. Algebra Appl. — 2018. — *17*, № 4. — P. 1850061.1–1850061.6.
34. *Lam T. Y.* Lectures on Modules and Rings. — New York: Springer-Verlag, 1999.
35. *Lanski C.* Nil subrings of Goldie rings are nilpotent// Can. J. Math. — 1969. — *21*. — P. 904–907.
36. *Liu Z.* On n-root closedness of generalized power series rings over pairs of rings// J. Pure Appl. Algebra. — 1999. — *144*, № 3. — P. 303–312.
37. *Liu Z.* A note on Hopfian modules// Commun. Algebra. — 2000. — *28*, № 6. — P. 3031–3040.
38. *Liu Z.* The ascending chain condition for principal ideals of rings of generalized power series// Commun. Algebra. — 2004. — *32*, № 9. — P. 3305–3314.
39. *Liu Z., Ahsan J.* The Tor-groups of modules of generalized power series// Algebra Colloq. — 2005. — *12*. — P. 477–484.
40. *Liu Z., Cheng H.* Quasi-duality for the rings of generalized power series// Commun. Algebra. — 2000. — *28*, № 3. — P. 1175–1188.
41. *Liu Z., Li F.* PS-rings of generalized power series// Commun. Algebra. — 1998. — *26*, № 7. — P. 2283–2291.
42. *Lorenz M.* Division algebras generated by finitely generated nilpotent groups// J. Algebra. — 1983. — *85*. — P. 368–381.
43. *Makar-Limanov L.* The skew field of fractions of the first Weyl algebra contains a free noncommutative subalgebra// Commun. Algebra. — 1983. — *11*, № 17. — P. 2003–2006.
44. *Mal'cev A. I.* On the embedding of group algebras in division algebras// Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1948. — *60*. — P. 1499–1501.
45. *Manaviyat R., Moussavi A.* On annihilator ideals of pseudo-differential operator rings// Algebra Colloq. — 2015. — *4 (22)*. — P. 607–620.

46. *Mulase M.* Solvability of the super KP equation and a generalization of the Birkhoff decomposition// Invent. Math. — 1988. — *92.* — P. 1–46.
47. *Musson I., Stafford K.* Malcev–Neumann group rings// Commun. Algebra. — 1993. — *21*, № 6. — P. 2065–2075.
48. *Neumann B. H.* On ordered division rings// Trans. Am. Math. Soc. — 1949. — *66.* — P. 202–252.
49. *Paykan K., Moussavi A.* Special properties of differential inverse power series rings// J. Algebra Appl. — 2016. — *15*, № 9. — P. 1650181.1–1650181.23.
50. *Paykan K., Moussavi A.* Study of skew inverse Laurent series rings// J. Algebra Appl. — 2017. — *16*, № 11. — P. 1750221.1–1750221.33.
51. *Paykan K., Moussavi A.* Primitivity of skew inverse Laurent series rings and related rings// J. Algebra Appl. — 2019. — *18*, № 6. — P. 1950116.1–1950116.12.
52. *Ribenboim P.* Squares in fields of generalized power series// C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Can. — 1990. — *12*, № 5. — P. 199–203.
53. *Ribenboim P.* Rings of generalized power series: nilpotent elements// Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1991. — *61.* — P. 15–33.
54. *Ribenboim P.* Noetherian rings of generalized power series// J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — *79*, № 3. — P. 293–312.
55. *Ribenboim P.* Extension of Hironaka's standard basis theorem for generalized power series// Arch. Math. — 1993. — *60*, № 5. — P. 436–439.
56. *Ribenboim P.* Multiplicative structures on power series and the construction of skewfields// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math. — 1993. — *316*, № 11. — P. 1117–1121.
57. *Ribenboim P.* Rings of generalized power series. II. Units and zero-divisors// J. Algebra. — 1994. — *168*, № 1. — P. 71–89.
58. *Ribenboim P.* Special properties of generalized power series// J. Algebra. — 1995. — *173*, № 3. — P. 566–586.
59. *Ribenboim P.* Multiplicative structures on power series and the construction of skewfields// J. Algebra. — 1996. — *185*, № 2. — P. 267–297.
60. *Ribenboim P.* Semisimple rings and von Neumann regular rings of generalized power series// J. Algebra. — 1997. — *198*, № 2. — P. 327–338.
61. *Risman L.* Twisted rational functions and series// J. Pure Appl. Algebra. — 1978. — *12.* — P. 181–199.
62. *Rowen L. H.* Ring Theory. — New York: Academic Press, 1988.
63. *Sato M., Sato Y.* Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassman manifold// Lect. Notes Num. Appl. Anal. — 1982. — *5.* — P. 259–271.
64. *Schur I.* Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke// Sitzungsber. Berliner Math. Ges. — 1905. — *4.* — P. 2–8.
65. *Shock R. C.* Nil subrings in finiteness conditions// Am. Math. Mon. — 1971. — *78.* — P. 741–748.
66. *Smits T. H.* Skew-Laurent series over semisimple rings// Delft. Progr. Rep. — 1977. — *2.* — P. 131–136.
67. *Sonin K.* Krull dimension of Malcev–Neumann rings// Commun. Algebra. — 1998. — *26*, № 9. — P. 2915–2931.
68. *Stephenson W.* Modules whose lattice of submodules is distributive// Proc. London Math. Soc. — 1974. — *28*, № 2. — P. 291–310.
69. *Tuganbaev A. A.* Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 1998.
70. *Tuganbaev A. A.* Distributive Modules and Related Topics. — Amsterdam: Gordon & Breach, 1999.
71. *Tuganbaev A. A.* Rings Close to Regular. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
72. *Tuganbaev A. A.* Polynomial and series rings and principal ideals// J. Math. Sci. — 2003. — *114*, № 2. — P. 1204–1226.
73. *Tuganbaev A. A.* The Jacobson radical of the Laurent series ring// J. Math. Sci. — 2008. — *149*, № 2. — P. 1182–1186.
74. *Tuganbaev A. A.* Semidistributive Laurent Series Rings/ `arXiv: 2006.06757 [math.RA]`.
75. *Tuganbaev A. A.* Right serial skew Laurent series rings// J. Algebra Appl. — 2021.

76. *Tuganbaev D. A.* Some ring and module properties of skew power series// in: Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (*Krob D., Mikhalev A. A., Mikhalev A. V.*, eds.). — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2000. — P. 613–622.
77. *Tuganbaev D. A.* Laurent series rings and pseudo-differential operator rings// J. Math. Sci. — 2005. — *128*, № 3. — P. 2843–2893.
78. *Tuganbaev D. A.* Jacobson radical and Laurent series rings// J. Math. Sci. — 2008. — *152*, № 2. — P. 304–306.
79. *Tuganbaev D. A.* Laurent rings// J. Math. Sci. — 2008. — *149*, № 3. — P. 1286–1337.
80. *Zhang H.* On semilocal rings// Proc. Am. Math. Soc. — 2009. — *137*. — P. 845–852.
81. *Ziembowski M.* Laurent serial rings over a semiperfect ring can not be semiperfect// Commun. Algebra. — 2014. — *42*. — P. 664–666.

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет МЭИ,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `tuganbaev@gmail.com`