

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 180



Москва 2020

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

С. С. Акбаров (НИУ ВШЭ, ВИНТИ РАН)

Е. П. Кругова (ВИНТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Н. Х. Розов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

С. Е. Степанов (Финуниверситет при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Редакторы-составители:

С. Е. Степанов (Финуниверситет при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Н. И. Гусева (МПГУ, ВИНТИ РАН)

Научный редактор:

Н. А. Архипова (ВИНТИ РАН)

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 180

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«КЛАССИЧЕСКАЯ И СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ»,
ПОСВЯЩЕННОЙ 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
ПРОФЕССОРА ВЯЧЕСЛАВА ТИМОФЕЕВИЧА БАЗЫЛЕВА

Москва, 22–25 апреля 2019 г.

Часть 2



Москва 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Редукция расслоений грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей при нормализации (<i>О. О. Белова</i>)	3
О строении некоторых комплексов m -мерных плоскостей проективного пространства P^n , содержащих конечное число торсов (<i>И. В. Бубякин</i>)	2
5282 9	
Пространства подвижности (<i>М. П. Бурлаков</i>)	17
Эквивариантные расслоения (<i>П. С. Геворкян</i>)	23
Пространство аффинных связностей почти эрмитова многообразия (<i>Ю. А. Горгинян, Л. А. Игнаточкина</i>)	31
О предписанных значениях оператора секционной кривизны на трехмерных локально однородных лоренцевых многообразиях (<i>С. В. Клепикова, О. П. Хромова</i>)	41
О геликоидах Дини в пространстве Минковского (<i>А. В. Костин</i>)	50
Линейные реперы как орбиты проективных реперов (<i>А. В. Кулешов</i>)	58
Контактно-проективные преобразования почти контактной метрической структуры (<i>А. В. Никифорова</i>)	66
Геометризация пучка связностей первого типа, порожденного композиционным оснащением на распределении плоскостей (<i>О. М. Омельян</i>)	69
Субримановы геодезические на многомерной группе Гейзенберга (<i>В. И. Панъженский, О. П. Сурина</i>)	74
Нормали высшего порядка на многообразии (<i>К. В. Полякова</i>)	85
Отображения и преобразования поворота (<i>Л. Рыпарова, Й. Микеш</i>)	91
О полусимметрических горизонтальных лифтах линейных связностей с базы в расслоение дважды ковариантных тензоров (<i>А. Я. Султанов, О. А. Монахова</i>)	96
Об алгебрах Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений (<i>Г. А. Султанова</i>)	103
Поверхности в квазигиперболическом пространстве $^{11}S_3^1$ (<i>В. Б. Цыренова</i>)	109
Плоскостное пространство проективной связности (<i>Ю. И. Шевченко, Е. В. Скрыдлова</i>)	113



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 3–8
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-3-8

УДК 514.76

РЕДУКЦИЯ РАССЛОЕНИЙ ГРАССМАНОПОДОБНОГО МНОГООБРАЗИЯ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРИ НОРМАЛИЗАЦИИ

© 2020 г. О. О. БЕЛОВА

Аннотация. В проективном пространстве P_n рассмотрено грассманоподобное многообразие $Gr^*(m, n)$ центрированных плоскостей. С ним ассоциировано главное расслоение. Произведены нормализация многообразия $Gr^*(m, n)$ полями нормалей первого и второго порядков и адаптация репера соответствующим нормальям. Исследованы полунормализованные пространства первого и второго рода, а также нормализованное пространство. Установлена динамика изменений соответствующих расслоений при переходе от пространства $Gr^*(m, n)$ к нормализованному пространству.

Ключевые слова: метод Картана—Лаптева, грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей, нормализация, редукция.

REDUCTION OF BUNDLES OF A GRASSMANN-LIKE MANIFOLD OF CENTERED PLANES UNDER NORMALIZATION

© 2020 О. О. BELOVA

ABSTRACT. In the projective space P_n , we consider the Grassmann-like manifold $Gr^*(m, n)$ of centered planes and the associated principal bundle. We perform the normalization of the manifold $Gr^*(m, n)$ by the normal fields of the first and second orders and the adaptation of the bundle corresponding to these normals. Semi-normalized spaces of the first and second kind and the normalized space are examined. The dynamics of changes of the corresponding bundles is established when passing from the space $Gr^*(m, n)$ to the normalized space.

Keywords and phrases: Cartan–Laptev method, Grassmann-like manifold of centered planes, normalization, reduction.

AMS Subject Classification: 53A20, 53A99

1. Введение. В работе используются метод Картана—Лаптева, базирующийся на теории конечных и бесконечных групп Ли, исчислении внешних форм Э. Картана и теории Г. Ф. Лаптева полей геометрических объектов (см. [12]). При использовании метода Картана подвижного репера исследование геометрии самого многообразия с фиксированной на нем геометрической структурой сводится к исследованию геометрии другого многообразия: пространства расслоения реперов над данным многообразием или подрасслоений этого расслоения. Таким образом, автоматически строится аналитический аппарат, который наиболее приспособлен к исследованию исходной структуры (см. [6]). Метод продолжений и охватов Лаптева основан на инвариантном дифференциально-алгебраическом аппарате структурных дифференциальных форм рассматриваемых расслоений (см. [5, 13]).

Поскольку поверхность X_m можно рассматривать как m -мерное многообразие m -мерных центрированных плоскостей T_m (см. [8]), то при исследовании грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей используется аналог нормализации А. П. Нордена (см. [4, 11]), который осуществлял нормализацию поверхности полями нормалей первого и второго рода и обозначал их соответственно через P_I и P_{II} . В [10] Ю. Г. Лумисте ввел аналогичную нормализацию многообразия m -мерных плоскостей в проективном пространстве.

В данной статье проводится анализ динамики изменений расслоений при последовательных канонизациях и переходе от многообразия $Gr^*(m, n)$ к нормализованному многообразию.

2. Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей. Отнесем n -мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$, $I, \dots = 1, \dots, n$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \quad (1)$$

где 1-форма θ играет роль множителя пропорциональности, а формы Пфаффа ω^I , ω_J^I , ω_I удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\begin{aligned} D\omega^I &= \omega^J \wedge \omega_J^I, \\ D\omega_J^I &= \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K \wedge \omega_J, \\ D\omega_I &= \omega_I^J \wedge \omega_J \end{aligned} \quad (2)$$

проективной группы $GP(n)$, действующей эффективно в пространстве P_n .

Замечание 1. Проективное пространство P_n можно представить как фактор-пространство $L_{n+1}/\sim$ линейного пространства L_{n+1} по отношению эквивалентности (коллинеарности) $\sim$ ненулевых векторов (см. [15]). Таким образом, аналитическая точка $\bar{A} \in L_{n+1} \setminus \{\bar{0}\}$ используется в формулах, но черточка опускается для упрощения записи, а геометрическая точка $A = \{\lambda \bar{A}\} \in P_n$, $\lambda \in R \setminus 0$, — в рассуждениях. Уравнения (1) описывают инфинитезимальный закон перемещения сопутствующего репера из проективного слоя вдоль рассматриваемого многообразия. Во многих геометрических исследованиях (см. [17]) и в работах, где применяются математические методы для решения физических задач (см., например, [1, 7]), используются уравнения аналогичных инфинитезимальных перемещений реперов. Первые слагаемые в (1) не существенны, так как коллинеарным аналитическим точкам соответствует одна геометрическая точка, т.е. θ не влияет на смещение dA . Формы Пфаффа ω^I , ω_J^I , ω_I (1-формы) содержат параметры, от которых зависит семейство реперов, и их дифференциалы: $\omega = \omega(u, du)$ (см. [18]).

Замечание 2. В данной работе применяется неоднородный аналитический аппарат с производными формулами (1) и структурными уравнениями (2) (см. [15]). Данный аппарат наиболее удобен при выделении подгруппы проективной группы.

Определение 1. Грассманоподобным многообразием $Gr^*(m, n)$ центрированных плоскостей называется многообразие m -мерных плоскостей n -мерного проективного пространства P_n , проходящих через фиксированную точку (см. [3]).

Многообразие $Gr^*(m, n)$ задается уравнениями

$$\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha, \quad (3)$$

где Λ_α^a , Λ_α^{ab} — произвольные функции, являющиеся компонентами фундаментального объекта (см. [8]). Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения: $a, \dots = 1, \dots, m$; $\alpha, \dots = m+1, \dots, n$.

Уравнения (3) получаются при специализации подвижного репера (вершины A , A_a — на плоскости P_m , а центр A фиксирован). При этом формы ω^α , ω_a^α , обнуление которых фиксирует центрированную плоскость $P_m^0 \omega^a$, являются главными, формы ω^α , ω_a^α — базисные, а остальные формы — слоевые.

Замечание 3. Если $Gr(m, n)$ — многообразие Грассмана (см. [2]), то

$$\dim Gr^*(m, n) = \dim Gr(m, n) = (n - m)(m + 1).$$

Фундаментальный объект $\Lambda = \{\Lambda_\alpha^a, \Lambda_\alpha^{ab}\}$ является квазитензором, так как его компоненты удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм $\omega^\alpha, \omega_a^\alpha$:

$$\Delta \Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b + \omega_\alpha^a \equiv 0, \quad \Delta \Lambda_\alpha^{ab} \equiv 0,$$

причем дифференциальный тензорный оператор Δ действует по закону

$$\Delta \Lambda_\alpha^{ab} = d\Lambda_\alpha^{ab} + \Lambda_\alpha^{cb} \omega_c^a + \Lambda_\alpha^{ac} \omega_c^b - \Lambda_\beta^{ab} \omega_\alpha^\beta.$$

Замечание 4. Фундаментальный объект Λ содержит подтензор Λ_α^{ab} , обращение в нуль которого характеризует такое подмногообразие, когда центр A описывает $(n-m)$ -поверхность с уравнениями $\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha$.

3. Главное расслоение. Специализация подвижного репера для грассманоподобного многообразия $Gr^*(m, n)$ центрированных плоскостей приводит к главному расслоению $G(Gr^*)$, типовым слоем которого является подгруппа G стационарности центрированной плоскости P_m^0 , а базой — многообразие $Gr^*(m, n)$, причем $\dim G = n^2 - mn + m^2 + n$. Пространством расслоения $G(Gr^*)$ (см. [6]) является проективная группа $GP(n)$, а проекция $\pi : GP(n) \rightarrow Gr^*(m, n)$ относит произвольному элементу группы $GP(n)$ ту плоскость P_m^0 многообразия $Gr^*(m, n)$, которая инвариантна под действием этого элемента.

Базисные формы $\omega^\alpha, \omega_a^\alpha$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана (2), поэтому получим

$$\begin{aligned} D\omega^\alpha &= -\omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + \Lambda_\beta^a \omega^\beta \wedge \omega_a^\alpha + \Lambda_\beta^{ab} \omega_b^\beta \wedge \omega_a^\alpha, \\ D\omega_a^\alpha &= \left(\delta_\beta^\alpha \omega_a^b - \delta_a^b \omega_\beta^\alpha \right) \wedge \omega_b^\beta + \omega_a \wedge \omega^\alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

Внешние дифференциалы слоевых форм имеют вид

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega_{b\alpha}^a \wedge \omega^\alpha + \omega_{b\alpha}^{ac} \wedge \omega_c^\alpha; \quad (5)$$

$$D\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b - \omega_\alpha \wedge \omega_a^\alpha; \quad (6)$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega_{\beta\gamma}^\alpha \wedge \omega^\gamma + \omega_{\beta\gamma}^{\alpha a} \wedge \omega_a^\gamma; \quad (7)$$

$$D\omega_\alpha^a = \omega_\alpha^b \wedge \omega_b^a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^a + \omega_{\alpha\beta}^a \wedge \omega^\beta + \omega_{\alpha\beta}^{ab} \wedge \omega_b^\beta; \quad (8)$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^a \wedge \omega_a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta,$$

где

$$\omega_{b\alpha}^a = \delta_b^a \Lambda_\alpha^c \omega_c + \delta_b^a \omega_\alpha + \Lambda_\alpha^a \omega_b, \quad \omega_{b\alpha}^{ac} = \delta_b^a \lambda_\alpha^{ec} \omega_e - \delta_b^c \omega_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ac} \omega_b,$$

$$\omega_{\beta\gamma}^\alpha = \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^a \omega_a + \delta_\beta^\alpha \omega_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta, \quad \omega_{\beta\gamma}^{\alpha a} = \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^{ba} \omega_b + \delta_\gamma^a \omega_\beta^\alpha,$$

$$\omega_{\alpha\beta}^a = \Lambda_\beta^a \omega_\alpha, \quad \omega_{\alpha\beta}^{ab} = \Lambda_\beta^{ab} \omega_\alpha.$$

Теорема 1. Главное расслоение $G(Gr^*)$ многообразия $Gr^*(m, n)$ содержит следующие пять фактор-расслоений:

1. фактор-расслоение линейных реперов $L_{m^2}(P_n)$ со структурными уравнениями (4), (5) и слоевыми формами ω_b^a . Данные реперы принадлежат плоскостям P_m^0 . Типовым слоем данного расслоения является линейная фактор-группа $L_{m^2} = GL(m) \subset G$, которая действует в пучке прямых, принадлежащих образующей плоскости P_m^0 ;
2. фактор-расслоение нормальных линейных реперов $\mathfrak{L}_{(n-m)^2}(P_n)$ со структурными уравнениями (4), (7) и слоевыми формами ω_β^α . Данное расслоение является двойственным фактор-расслоению линейных реперов. Типовым слоем здесь является линейная фактор-группа $\mathfrak{L}_{(n-m)^2} = GL(n-m) \subset G$, действующая в проективном фактор-пространстве $P_{n-m-1} = P_n/P_m^0$;
3. фактор-расслоение плоскостных коэффинных реперов $C_{m(m+1)}(P_n)$ со структурными уравнениями (4)–(6) и слоевыми формами ω_b^a, ω_a . Данные реперы принадлежат плоскости P_m^0 . Типовым слоем указанного расслоения является коэффинная (центропроективная) фактор-группа $C_{m(m+1)} = GA^*(m) \subset G$, действующая в плоскости P_m^0 ;

4. *аффинное фактор-расслоение* $H_k(P_n)$, $k = n(n - m) + m^2$, со структурными уравнениями (4), (5), (7), (8) и слоевыми формами ω_b^a , ω_β^α и ω_α^a . Типовым слоем здесь будет аффинная фактор-группа (см. [16]) H_k группы $G \subset GP(n)$, действующая в пучке прямых с центром в точке A ;
5. *максимальное фактор-расслоение*, составленное из фактор-расслоения плоскостных коаффинных реперов и аффинного фактор-расслоения, со структурными уравнениями (4)–(8) и слоевыми формами ω_b^a , ω_a , ω_β^α и ω_α^a .

Замечание 5. Подгруппы группы G связаны отношением

$$C_{m(m+1)} \cap H_k = L_{m^2}.$$

Произведем нормализацию многообразия $Gr^*(m, n)$ полями следующих геометрических образов: нормалью первого рода (см. [9]), т.е. $(n - m)$ -мерной плоскостью N_{n-m} , пересекающейся с плоскостью P_m^0 в точке A , и нормалью второго рода (см. [9]), т.е. $(m - 1)$ -мерной плоскостью N_{m-1} , принадлежащей плоскости P_m^0 и не проходящей через ее центр A .

Проследим динамику изменений расслоения $G(Gr^*)$ при последовательных канонизациях:

- (1) *первая канонизация*: репер адаптирован нормали первого рода N_{n-m} , т.е. вершины A_α помещены на плоскость N_{n-m} . Полученное пространство будем называть полунормализованным пространством первого рода и обозначать Gr^{*1} ;
- (2) *вторая канонизация*: репер адаптирован нормали второго рода N_{m-1} , т.е. вершины A_a помещены на плоскость N_{m-1} . Полученное пространство будем называть полунормализованным пространством второго рода и обозначать Gr^{*2} ;
- (3) *полная канонизация*: репер адаптирован нормальям первого и второго рода, т.е. одновременное размещение данных вершин в соответствующих нормалях. Полученное пространство будем называть нормализованным пространством и обозначать $Gr^{*1,2}$.

3.1. *Расслоение $G^1(Gr^*)$* . Поместим вершины A_α в нормаль первого рода N_{n-m} ; тогда

$$\omega_\alpha^a = g_{\alpha\beta}^a \omega^\beta + g_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta, \quad (9)$$

т.е. слоевые формы ω_α^a становятся главными, причем имеют место дифференциальные сравнения

$$\Delta g_{\alpha\beta}^a + g_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b - \Lambda_\beta^a \omega_\alpha \equiv 0, \quad \Delta g_{\alpha\beta}^{ab} - \Lambda_\beta^{ab} \omega_\alpha \equiv 0.$$

Из структурных уравнений (2) находим

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega_{b\alpha}^a \wedge \omega^\alpha + \left(\Lambda_\alpha^{ac} \omega_b + g_{\beta\alpha}^{ac} \omega_b^\beta + \delta_b^a \Lambda_\beta^{ec} \omega_e \right) \wedge \omega_c^\alpha + g_{\alpha\beta}^a \omega_b^\alpha \wedge \omega^\beta; \quad (10)$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega_{\beta\gamma}^\alpha \wedge \omega^\gamma + \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^{ab} \omega_a \wedge \omega_b^\gamma + g_{\beta\gamma}^a \omega^\gamma \wedge \omega_a^\alpha + g_{\beta\gamma}^{ab} \omega_b^\gamma \wedge \omega_a^\alpha; \quad (11)$$

$$D\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b - \omega_\alpha \wedge \omega_a^\alpha; \quad (12)$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta - g_{\alpha\beta}^a \omega_a \wedge \omega^\beta - g_{\alpha\beta}^{ab} \omega_a \wedge \omega_b^\beta. \quad (13)$$

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Главное расслоение $G(Gr^*)$ при первой канонизации сужается до главного расслоения $G^1(Gr^*)$ с типовым слоем — подгруппой стационарности $G^1 \subset G$ пары аффинно-дополнительных плоскостей $\{P_m, N_{n-m}\}$. В подрасслоении $G^1(Gr^*)$ выделяются следующие четыре фактор-расслоения:*

- (1) *расслоение плоскостных линейных реперов* со структурными уравнениями (4), (10);
- (2) *расслоение нормальных линейных реперов* (4), (11);
- (3) *расслоение плоскостных коаффинных реперов* (4), (10), (12);
- (4) *расслоение нормальных коаффинных реперов* (4), (11), (13).

Замечание 6. Указанные реперы рассматриваются на полунормализованном многообразии Gr^{*1} .

3.2. *Расслоение $G^2(Gr^*)$.* Если отказаться от предыдущей канонизации и поместить вершины A_a в нормаль второго рода N_{m-1} , то

$$\omega_a = g_{a\alpha}\omega^\alpha + g_{a\alpha}^b\omega_b^\alpha, \quad (14)$$

т.е. слоевые формы ω_a становятся главными, причем

$$\Delta g_{a\alpha} \equiv 0, \quad \Delta g_{a\alpha}^b + \delta_a^b \omega_\alpha \equiv 0.$$

Из структурных уравнений (2) находим

$$\begin{aligned} D\omega_b^a = & \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \delta_b^a \omega_\alpha \wedge \omega^\alpha - \delta_b^c \omega_\alpha^c \wedge \omega_c^\alpha + (\delta_b^a g_{c\alpha} \Lambda_\beta^c + g_{b\alpha} \Lambda_\beta^a) \omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \\ & + (\delta_b^a g_{e\alpha} \Lambda_\beta^{ec} - \delta_b^c g_{e\beta} \Lambda_\alpha^e + g_{b\alpha} \Lambda_\beta^{ac} - g_{b\beta} \Lambda_\alpha^a) \omega^\alpha \wedge \omega_c^\beta + (g_{b\alpha} \Lambda_\beta^{ae} + \delta_b^a g_{d\alpha} \Lambda_\beta^{de}) \omega_c^\alpha \wedge \omega_e^\beta; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} D\omega_\beta^\alpha = & \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + (\delta_\beta^\alpha \omega_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta) \wedge \omega^\gamma + \omega_\beta^a \wedge \omega_a^\alpha + \delta_\beta^\alpha g_{a\gamma} \Lambda_\mu^a \omega^\gamma \wedge \omega^\mu + \\ & + (\delta_\beta^\alpha g_{a\gamma} \Lambda_\mu^{ab} - \delta_\beta^\gamma g_{a\mu} \Lambda_\gamma^a) \omega^\gamma \wedge \omega_b^\mu + \delta_\beta^\alpha g_{a\gamma} \Lambda_\mu^{ac} \omega_b^\gamma \wedge \omega_c^\mu; \end{aligned} \quad (16)$$

$$D\omega_\alpha^a = \omega_\alpha^b \wedge \omega_b^a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^a + \Lambda_\beta^a \omega_\alpha \wedge \omega^\beta + \Lambda_\beta^{ab} \omega_\alpha \wedge \omega_b^\beta; \quad (17)$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + g_{a\beta} \omega_\alpha^a \wedge \omega^\beta + g_{a\beta}^b \omega_\alpha^a \wedge \omega_b^\beta. \quad (18)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *При второй канонизации главное расслоение $G(Gr^*)$ сужается до главного расслоения $G^2(Gr^*)$ с типовым слоем — подгруппой стационарности $G^2 \subset G$ пары $\{A, N_{m-1}\}$. В подрасслоении $G^2(Gr^*)$ выделяются четыре фактор-расслоения:*

- (1) *расслоение плоскостных линейных реперов (4), (15);*
- (2) *расслоение нормальных линейных реперов (4), (16);*
- (3) *расслоение $H(Gr^*)$ (4), (15)–(17) с типовым слоем H — аффинной фактор-группой (см. [15]);*
- (4) *расслоение нормальных коэффинных реперов (4), (16), (18).*

Замечание 7. Указанные реперы рассматриваются на полунормализованном многообразии Gr^{*2} .

3.3. *Расслоение $G^{1,2}(Gr^*)$.* Произведем одновременно канонизации, рассмотренные в предыдущих пунктах, т.е. $A_\alpha \in N_{n-m}$, $A_a \in N_{m-1}$. При этом будут выполняться одновременно условия (9) и (14). В этом случае структурные уравнения (2) примут вид

$$\begin{aligned} D\omega_b^a = & \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \delta_b^a \omega_\alpha \wedge \omega^\alpha + (\delta_b^a g_{c\alpha} \Lambda_\beta^c + g_{b\alpha} \Lambda_\beta^a) \omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \\ & + (\delta_b^a g_{e\alpha} \Lambda_\beta^{ec} - \delta_b^c g_{e\beta} \Lambda_\alpha^e + g_{b\alpha} \Lambda_\beta^{ac} - \delta_b^c g_{\beta\alpha}^a - g_{b\beta}^c \Lambda_\alpha^a) \omega^\alpha \wedge \omega_c^\beta + \\ & + (g_{b\alpha} \Lambda_\beta^{ae} + \delta_b^a g_{d\alpha} \Lambda_\beta^{de}) \omega_c^\alpha \wedge \omega_e^\beta; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} D\omega_\beta^\alpha = & \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + (\delta_\beta^\alpha \omega_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta) \wedge \omega^\gamma + \delta_\beta^\alpha g_{a\gamma} \Lambda_\mu^a \omega^\gamma \wedge \omega^\mu + \\ & + (\delta_\mu^\alpha g_{\beta\gamma}^a + \delta_\beta^\alpha g_{b\gamma} \Lambda_\mu^{ba} - \delta_\beta^\gamma g_{b\mu}^a \Lambda_\gamma^a) \omega^\gamma \wedge \omega_a^\mu + (\delta_\mu^\alpha g_{\beta\gamma}^{ba} + \delta_\beta^\alpha g_{c\gamma}^a \Lambda_\mu^{cb}) \omega_a^\gamma \wedge \omega_b^\mu; \end{aligned} \quad (20)$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + g_{\alpha\beta}^a g_{a\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + (g_{\alpha\beta}^b g_{b\gamma}^a - g_{a\gamma}^{ba} g_{b\beta}) \omega^\beta \wedge \omega_a^\gamma + g_{\alpha\beta}^{ab} g_{a\gamma} \omega_b^\beta \wedge \omega_c^\gamma. \quad (21)$$

Итак, верна следующая теорема.

Теорема 4. *При одновременной канонизации из сужения $G^{1,2}(Gr^*)$ главного расслоения $G(Gr^*)$, где $G^{1,2}$ — подгруппа стационарности центрированной $(n-m)$ -пары $\{N_{n-m}^*, N_{m-1}\}$ (см. [14]), выделяются следующие три фактор-расслоения:*

- (1) *расслоение плоскостных линейных реперов (4), (19);*
- (2) *расслоение нормальных линейных реперов (4), (20);*
- (3) *расслоение нормальных коэффинных реперов (4), (20), (21).*

Замечание 8. Все реперы, обозначенные в теореме 4, рассматриваются на нормализованном многообразии $Gr^{*1,2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аль-Хассани М. А., Молдованова Е. А. Отображение аффинного пространства в многообразии нуль-пар проективного пространства// Изв. Томск. пед. ун-та. — 2013. — 322, № 2. — С. 24–28.
2. Белова О. О. Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей// Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 2. — С. 29–67.
3. Белова О. О. Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей// Мат. заметки. — 2018. — 104, № 6. — С. 812–822.
4. Евтушик Л. Е. Структуры высших порядков. — М.: Интеллект-центр, 2014.
5. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1979. — 9. — С. 5–246.
6. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: МПГУ, 2003.
7. Кривоносов Л. Н., Лукьянов В. А. Уравнения Эйнштейна на четырехмерном многообразии конформной связности без кручения// Ж. Сиб. фед. ун-та. Сер. мат. физ. — 2012. — 5, № 3. — С. 393–408.
8. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1953. — 2. — С. 275–382.
9. Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности// Тр. геом. сем. ВИНТИ. — 1971. — 3. — С. 49–94.
10. Лумисте Ю. Г. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях// Уч. зап. Тартуск. ун-та. — 1965. — 177. — С. 6–41.
11. Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
12. Остиану Н. М. Метод Картана—Лаптева в исследовании G -структур на многообразиях// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2002. — 30. — С. 5–124.
13. Полякова К. В. Тангенциальнозначные формы 2-го порядка// Мат. заметки. — 2019. — 105, № 1. — С. 84–94.
14. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. — М.: Наука, 1966.
15. Шевченко Ю. И. Оснащения центропроективных многообразий. — Калининград: КГУ, 2000.
16. Шевченко Ю. И. Аффинная, коаффинная и линейная факторгруппы в подгруппе проективной группы// в кн.: Проблемы мат. и физ. наук. — Калининград, 2002. — С. 38–39.
17. Шелехов А. М. О три-тканях, образованных семействами окружностей// Тр. Междунар. геом. центра. — 2012. — 5, № 2. — С. 6–16.
18. Akiwis M. A., Goldberg V. V. A conformal differential invariant and the conformal rigidity of hypersurfaces// Proc. Am. Math. Soc. — 1997. — 125, № 8. — P. 2415–2424.

Белова Ольга Олеговна

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

E-mail: olgaobelova@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 9–16
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-9-16

УДК 514.755.5

О СТРОЕНИИ НЕКОТОРЫХ КОМПЛЕКСОВ m -МЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P^n , СОДЕРЖАЩИХ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ТОРСОВ

© 2020 г. И. В. БУБЯКИН

Аннотация. Статья посвящена дифференциальной геометрии ρ -мерных комплексов C^ρ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n , содержащих конечное число торсов. В работе найдено необходимое условие, при котором комплекс C^ρ содержит конечное число торсов. Выясняется строение ρ -мерных комплексов C^ρ , для которых все торсы, принадлежащие комплексу C^ρ , имеют одну общую характеристическую $(m+1)$ -мерную плоскость, касающуюся вдоль m -мерной образующей торса. Такие комплексы обозначаются через $C^\rho(1)$. Определено изображение комплексов $C^\rho(1)$ на $(m+1)(n-m)$ -мерном алгебраическом многообразии $\Omega(m, n)$ пространства P^N , где $N = \binom{m+1}{n+1} - 1$, являющемся образом многообразия $G(m, n)$ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n при грассмановом отображении.

Ключевые слова: грассманово многообразие, комплекс многомерных плоскостей, многообразие Серге.

ON THE STRUCTURE OF SOME COMPLEXES OF m -DIMENSIONAL PLANES OF THE PROJECTIVE SPACE P^n CONTAINING A FINITE NUMBER OF TORSES

© 2020 I. V. BUBYAKIN

ABSTRACT. This paper is devoted to the differential geometry of ρ -dimensional complexes C^ρ of m -dimensional planes in the projective space P^n containing a finite number of torse. We find a necessary condition under which the complex C^ρ contains a finite number of torse. We clarify the structure of ρ -dimensional complexes C^ρ for which all torse belonging to the complex C^ρ have one common characteristic $(m+1)$ -dimensional plane that touches the torse along an m -dimensional generator. Such complexes are denoted by $C^\rho(1)$. Also, we determine the image of complexes $C^\rho(1)$ in the $(m+1)(n-m)$ -dimensional algebraic variety $\Omega(m, n)$ of the space P^N , where $N = \binom{m+1}{n+1} - 1$, which is the image of the manifold $G(m, n)$ of m -dimensional planes of the projective space P^n under the Grassmann mapping.

Keywords and phrases: Grassmannian, complex of multidimensional planes, Segre manifold.

AMS Subject Classification: 53B25, 53C15

1. Введение. Данные исследования являются продолжением работы [6]. Актуальность работы заключается в том, что дифференциальная геометрия грассмановых многообразий расширяет алгебраическую теорию грассмановых многообразий, связана с исследованиями лагранжевых и квантовых грассмановых многообразий (см. [3, 4, 12, 13]), а также представляет интерес для интегральной геометрии Радона—Хелгасона (см. [7]). Данная работа посвящена дифференциальной геометрии допустимых (см. [7]) подмногообразий многообразия $G(m, n)$ m -мерных плоскостей

проективного пространства P^n , содержащих конечное число торсов. Для изучения таких подмногообразий применяется грассманово отображение многообразия $G(m, n)$ на $(m+1)(n-m)$ -мерное алгебраическое многообразие $\Omega(m, n)$ пространства P^N , где $N = \binom{m+1}{n+1} - 1$. В [1, 10] М. А. Аквис отмечал, что пересечение алгебраического многообразия $\Omega(m, n)$ с его касательным пространством $T_l\Omega(m, n)$ представляет собой конус Сегре $C(m+1, n-m)$. Этот конус имеет размерность n и несет плоские образующие размерностей $n-m$ и $m+1$, пересекающиеся по прямым. Проективизация $PB_l(2)$ этого конуса есть многообразие Сегре

$$S(m, n-m-1) = P^m \times P^{n-m-1}.$$

Многообразие Сегре $S(m, n-m-1)$ инвариантно при проективных преобразованиях пространства $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$, являющегося проективизацией с центром в точке l касательного пространства $T_l\Omega(m, n)$ к алгебраическому многообразию $\Omega(m, n)$; будем использовать его для классификации рассматриваемых подмногообразий грассманова многообразия $G(m, n)$, а также для интерпретации их свойств в терминах проективных алгебраических многообразий. Так как дифференциальная геометрия грассмановых многообразий далеко еще не изучена, то такой подход к их исследованию представляется актуальным. Следует заметить, что дифференциальная геометрия грассмановых многообразий представляет самостоятельный интерес, а также является одним из важных средств построения и изучения других многообразий в проективных пространствах. Одной из наиболее красивых областей дифференциальной геометрии, где во всей полноте проявляются преимущества инвариантных бескоординатных методов исследования, является теория многообразий многомерных плоскостей проективного пространства (см. [2, 5, 8, 9, 11]). Настоящая работа относится к той части многомерной проективно-дифференциальной геометрии, в которой изучаются комплексы плоскостей различных размерностей в проективном пространстве. Некоторые комплексы m -мерных плоскостей в проективном пространстве P^n и являются объектом изучения в данной работе. При этом для различных классов этих комплексов будем определять изображение на алгебраическом многообразии $\Omega(m, n)$ с помощью различных видов взаимного расположения многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1)$ и касательного пространства $PT_l\Omega(m, n)$.

2. Основные результаты. В настоящей работе мы продолжаем исследования, начатые в [6]. В проективном пространстве P^n рассмотрим ρ -мерные комплексы C^ρ m -мерных плоскостей, содержащих конечное число торсов — разветвляющихся поверхностей. Условие, при котором комплексы C^ρ содержат конечное число торсов, определяется из следующих рассуждений. Рассмотрим проективизацию касательной плоскости $T_l\Omega(m, n)$ с центром в точке l . Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$. На основании теоремы Грассмана (см. [14]) в этом проективном пространстве должно выполняться следующее равенство:

$$\dim PT_lV^\rho + \dim S_l(m, n-m-1) = \dim P^{(m+1)(n-m)-1} + \dim(PT_lV^\rho \cap S_l(m, n-m-1)).$$

Если размерность пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1)$ равна r , то получим

$$(\rho-1) + (m + (n-m-1)) = (m+1)(n-m) - 1 + r.$$

Отсюда следует, что

$$\rho-1 = m(n-m-1) + r.$$

Утверждение, что комплекс C^ρ m -мерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов, означает равенство нулю размерности пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1)$, т.е. $r = 0$. Если $r = 0$, то искомую зависимость размерности комплекса C^ρ , его m -мерной образующей и проективного пространства P^n получаем в виде

$$\rho-1 = m(n-m-1).$$

Таким образом, комплекс C^ρ m -мерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов тогда и только тогда, когда размерность комплекса C^ρ , его m -мерной образующей и проективного пространства P^n связаны соотношением $\rho-1 = m(n-m-1)$.

Для конгруэнций прямых трехмерного пространства и пятимерных комплексов двумерных плоскостей пятимерного пространства, которые содержат конечное число торсов, обнаруживается инвариантная зависимость их строения от конфигурации характеристических $(m+1)$ -мерных плоскостей, касательных к торсам, и характеристических $(m-1)$ -мерных плоскостей в m -мерной образующей L этих многообразий (4). Отсюда возникает вопрос: имеют ли рассматриваемые комплексы C^ρ m -мерных плоскостей, содержащие конечное число торсов, подобную инвариантную зависимость?

Комплексу C^ρ при грассмановом отображении (см. [10]) соответствует ρ -мерное многообразие V^ρ , лежащее на алгебраическом многообразии $\Omega(m, n)$, являющемся образом многообразия $G(m, n)$ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n . В каждой своей точке l , соответствующей m -мерной плоскости L проективного пространства P^n , многообразие V^ρ имеет ρ -мерную касательную плоскость $T_l V^\rho$. Проективизация касательной плоскости $T_l V^\rho$ с центром в точке l представляет собой $(\rho-1)$ -мерную проективную плоскость $PT_l V^\rho$. Различным видам взаимного расположения плоскости $PT_l V^\rho$ и инвариантного многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1) = P^m \times P^{n-m-1}$, являющимся проективизацией асимптотического конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка, соответствуют различные классы комплексов $C^\rho \subset G(m, n)$. При этом конус $B_l(2)$ есть конус Сегре $C(m+1, n-m)$ и представляет собой пересечение алгебраического многообразия $\Omega(m, n)$ и его касательного пространства $T_l \Omega(m, n)$, т.е.

$$B_l(2) = \Omega(m, n) \cap T_l \Omega(m, n).$$

В проективном пространстве P^n рассмотрим семейство точечных реперов

$$A_I, \quad I, J, K = 0, 1, \dots, n,$$

и семейство реперов, образованных гиперплоскостями

$$\alpha^I = (-1)^I A_0 \wedge \dots \wedge A_{I-1} \wedge A_{I+1} \wedge \dots \wedge A_n.$$

Уравнения перемещения этих реперов имеют вид

$$dA_I = \omega_I^J A_J, \quad d\alpha^I = -\omega_I^J \alpha^J,$$

где ω_I^J — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства P^n :

$$d\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J.$$

Пусть L — m -мерная плоскость пространства P^n . Свяжем с этой плоскостью семейство точечных реперов так, чтобы точки A_i , $i = 0, 1, \dots, m$, принадлежали плоскости L . Тогда

$$dA_i = \omega_i^j A_j + \omega_i^p A_p, \quad dA_p = \omega_p^i A_i + \omega_p^q A_q,$$

где $i, j = 0, 1, \dots, m$ и $p, q = m+1, m+2, \dots, n$. Отсюда видно, что m -мерная плоскость L в пространстве P^n зависит от $(m+1)(n-m)$ параметров, линейными комбинациями дифференциалов которых являются формы ω_i^p . На многообразии $\Omega(m, n)$ асимптотические направления второго порядка, выходящие из точки l , определяются условием

$$d^2 l = 0 \pmod{T_l \Omega(m, n)}.$$

Откуда следует, что уравнения конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка имеют вид

$$\omega_i^p \omega_j^q - \omega_i^q \omega_j^p = 0. \quad (1)$$

Из этих уравнений видно, что координаты ω_i^p точки конуса $B_l(2)$ допускают параметрическое представление

$$\omega_i^p = a_i x^p. \quad (2)$$

Поэтому конус $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка совпадает с конусом Сегре $C_l(m+1, n-m)$.

Рассмотрим теперь проективизацию касательной плоскости $T_l \Omega(m, n)$ с центром в точке l . Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l \Omega(m, n)$,

в котором формы ω_i^p являются однородными координатами произвольной точки. При проективизации асимптотическому конусу $B_l(2)$ соответствует многообразие Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ проективного пространства $P^{(n-m)(m+1)-1}$, определяемого теми же уравнениями (1), что и конус $B_l(2)$ в касательном пространстве $T_l\Omega(m, n)$. Многообразие Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ представляет собой $((m + 1)(n - m) - 1) - m(n - m - 1) = (n - 1)$ -мерную алгебраическую поверхность порядка $\binom{n-1}{m} = \binom{n-1}{n-m-1}$ (см. [14, 15]), несущую два семейства плоских образующих размерностей m и $n - m - 1$, зависящих соответственно от $n - m - 1$ и m параметров. При этом две образующие, принадлежащие различным семействам, имеют общую точку, а две образующие, принадлежащие одному семейству, не пересекаются. Через каждую его точку проходит по одной образующей из каждого семейства. Многообразие Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ остается инвариантным при проективных преобразованиях пространства $P^{(n-m)(m+1)-1}$. Плоскость PT_lV^p в пространстве $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$ определяется теми же уравнениями, что и касательная плоскость T_lV^p в касательном пространстве $T_l\Omega(m, n)$. Поскольку на комплексе C^p m -мерная плоскость L зависит от p параметров, то среди форм ω_i^p лишь p линейно независимых. Следовательно, комплекс C^p задается α ($\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$) дифференциальными уравнениями

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, \quad (3)$$

где ω_i^p — линейные дифференциальные формы, обращение в нуль которых фиксирует m -мерную плоскость L на комплексе C^p .

Рассмотрим однопараметрическое семейство m -мерных плоскостей L в пространстве P^n . Такое семейство представляет собой $(m + 1)$ -мерную поверхность с m -мерными плоскими образующими. Эта поверхность называется торсом (см. [2, 11]), если она является тангенциально вырожденной поверхностью ранга один. Торсу на алгебраическом многообразии $\Omega(m, n)$ соответствует кривая, касательные к которой служат прямолинейными образующими этого многообразия. Данная кривая является асимптотической линией многообразия $\Omega(m, n)$, поэтому в произвольной точке этой линии выполняются уравнения (1). Следовательно, дифференциальные уравнения торсов в пространстве P^n можно записать в виде

$$\omega_i^p = a_i x^p dt. \quad (4)$$

Каждый торс, проходящий через m -мерную плоскость L , определяет на ней характеристическую $(m - 1)$ -мерную плоскость, которая является пересечением двух бесконечно близких образующих, и характеристическую $(m + 1)$ -мерную плоскость, касательную плоскость к торсу. Найдем уравнения характеристических образов торсов. Пусть $M = x^i A_i$, $i = 0, 1, \dots, m$, — произвольная точка m -мерной плоскости L . Дифференциал этой точки в силу (4) вычисляется следующим образом:

$$dM = (dx^i + x^j \omega_j^i) A_i + (a_i x^i) (x^p A_p) dt,$$

где $p = m + 1, m + 2, \dots, n$. Отсюда видно, что характеристическая $(m - 1)$ -мерная плоскость в m -мерной плоской образующей L комплекса C^p определяется уравнением

$$a_i x^i = 0,$$

а характеристическая $(m + 1)$ -мерная плоскость, содержащая m -мерную плоскую образующую L комплекса C^p определяется m -мерной плоскостью L и точкой:

$$S = x^p A_p.$$

Из уравнений (3), ввиду (4), получим следующую систему уравнений:

$$\Lambda_p^{\alpha i} a_i x^p = 0, \quad (5)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$. Эта система уравнений определяет характеристическую $(m - 1)$ -мерную плоскость торса, принадлежащего комплексу C^p , если выполняется условие

$$\text{rank}(\Lambda_p^{\alpha i}) = n - m. \quad (6)$$

Из этого соотношения определяются характеристические $(m-1)$ -мерные плоскости на m -мерной образующей L комплекса C^ρ . Условие

$$\text{rank}(\Lambda_p^{\alpha i} x^p) = m + 1 \quad (7)$$

определяет точки S пересечения характеристических $(m+1)$ -мерных плоскостей с двойственной $(n-m)$ -мерной плоскостью к m -мерной плоскости L в пространстве P^n . Эти точки вместе с m -мерной плоскостью L определяют $(m+1)$ -мерные характеристические плоскости тора.

В проективном пространстве P^n рассмотрим ρ -мерный комплекс C^ρ ($\rho = m(n-m-1) + 1$) m -мерных плоскостей L и $m+1$ различных торсов, принадлежащих этому комплексу C^ρ , и пусть эти торсы имеют общую характеристическую $(m+1)$ -мерную плоскость, касающуюся вдоль m -мерной образующей тора. Обозначим рассматриваемые комплексы через $C^\rho(1)$. Свяжем с комплексами $C^\rho(1)$ репер так, чтобы плоскости

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m, \quad A_0 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m, \quad \dots, \quad A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_{m-1}$$

совместились с $(m-1)$ -мерными характеристическими плоскостями $m+1$ различных торсов. В общую $(m+1)$ -мерную характеристическую плоскость этих торсов поместим вершину A_n . Тогда, ввиду этого, из (4) получим

$$\Lambda_n^{\alpha 0} = \Lambda_n^{\alpha 1} = \dots = \Lambda_n^{\alpha m} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n-1. \quad (8)$$

Специализация репера позволяет выбрать линейные дифференциальные формы $\omega_0^n, \omega_1^n, \dots, \omega_m^n$ в качестве базисных на комплексе $C^\rho(1)$.

Дополним данные линейные формы до базиса комплекса $C^\rho(1)$ линейными формами $\omega_{i^*}^{p^*}$, где $i^* = 0, 1, \dots, m-1$ и $p^* = m+2, m+3, \dots, n$. Рассмотрим комплексы $C^\rho(1)$ общего вида и определим их системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \omega_1^{m+1} &= \omega_0^{m+2}, \quad \omega_2^{m+1} = \omega_1^{m+2} = \omega_0^{m+3}, \quad \dots, \\ \omega_m^{n-3} &= \omega_{m-1}^{n-2} = \omega_{m-2}^{n-1}, \quad \omega_m^{n-2} = \omega_{m-1}^{n-1}, \quad \Lambda_{p^*}^{\alpha^* i} \omega_i^{p^*} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $i = 1, 2, \dots, m$; $p^* = m+1, m+2, \dots, n-1$; $\alpha^* = 1, 2, \dots, (n-1) - m(n-m-2)$ и

$$|\alpha| - |\alpha^*| = m(n-m-2); \quad |\alpha| = n-1.$$

Дифференцируя внешним образом первую группу уравнений (9), получим независимые квадратичные уравнения, из которых согласно теореме Картана (см. [14]) будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_n^{m+1} &= \lambda_n^{m+10} \omega_0^n + \lambda_n^{m+11} \omega_1^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \omega_n^{m+2} &= \lambda_n^{m+20} \omega_0^n + \lambda_n^{m+21} \omega_1^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \lambda_n^{m+20} &= \lambda_n^{m+11}, \\ \omega_n^{m+1} &= \lambda_n^{m+11} \omega_1^n + \lambda_n^{m+12} \omega_2^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \omega_n^{m+2} &= \lambda_n^{m+21} \omega_1^n + \lambda_n^{m+22} \omega_2^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \lambda_n^{m+21} &= \lambda_n^{m+12}, \\ \omega_n^{m+2} &= \lambda_n^{m+20} \omega_0^n + \lambda_n^{m+21} \omega_1^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \omega_n^{m+3} &= \lambda_n^{m+30} \omega_0^n + \lambda_n^{m+31} \omega_1^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \lambda_n^{m+30} &= \lambda_n^{m+11}, \\ &\dots\dots\dots \\ \omega_n^{n-3} &= \lambda_n^{n-3m-1} \omega_{m-1}^n + \lambda_n^{n-3m} \omega_m^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \omega_n^{n-2} &= \lambda_n^{n-2m-1} \omega_{m-1}^n + \lambda_n^{n-2m} \omega_m^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \lambda_n^{n-2m-1} &= \lambda_n^{n-3m}, \\ \omega_n^{n-2} &= \lambda_n^{n-2m-2} \omega_{m-2}^n + \lambda_n^{n-2m-1} \omega_{m-1}^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \omega_n^{n-1} &= \lambda_n^{n-1m-2} \omega_{m-2}^n + \lambda_n^{n-1m-1} \omega_{m-1}^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{n-1m-2} &= \lambda_n^{n-2m-1}, \\
\omega_n^{n-2} &= \lambda_n^{n-2m-1} \omega_{m-1}^n + \lambda_n^{n-2m} \omega_m^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\
\omega_n^{n-1} &= \lambda_n^{n-1m-1} \omega_{m-1}^n + \lambda_n^{n-1m} \omega_m^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\
\lambda_n^{n-1m-1} &= \lambda_n^{n-2m}.
\end{aligned}$$

При этом

$$|\rho^*| = |\rho| - (m+1) = (m(n-m-1)+1) - (m+1) = m(n-m-2).$$

Ввиду симметричности матрицы коэффициентов разложения форм $\omega_n^{m+1}, \omega_n^{m+2}, \dots, \omega_n^{n-1}$ получим

$$\omega_n^{m+1} = 0 \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \quad \omega_n^{m+2} = 0 \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \quad \dots, \quad \omega_n^{n-1} = 0 \pmod{\Theta^{\rho^*}}.$$

Таким образом, $(m+1)$ -мерная плоскость $A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_n$ описывает $m(n-m-2)$ -мерное многообразие.

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим произвольное $m(n-m-2)$ -мерное многообразие $(m+1)$ -мерных плоскостей. Точки $A_0, A_1, \dots, A_m, A_n$ поместим в текущую $(m+1)$ -мерную плоскость рассматриваемого многообразия. Перемещение $(m+1)$ -мерной образующей $m(n-m-2)$ -мерного многообразия определяется формами $\omega_i^{p^*}$, где $i = 1, 2, \dots, m, p^* = m+1, m+2, \dots, n-1$. Поскольку рассматриваемое многообразие представляет собой $m(n-m-2)$ -параметрическое семейство $(m+1)$ -мерных плоскостей, то формы $\omega_i^{p^*}$ и $\omega_n^{p^*}$ выражаются через $m(n-m-2)$ линейно независимые формы Θ^{ρ^*} :

$$\omega_i^{p^*} = \lambda_{i\rho^*}^{p^*} \Theta^{\rho^*}, \quad \omega_n^{p^*} = \lambda_{n\rho^*}^{p^*} \Theta^{\rho^*}, \quad (10)$$

где $\rho^* = 1, 2, \dots, m(n-m-2)$. Совокупность m -мерных плоскостей, лежащих в $(m+1)$ -мерной плоскости $A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_n$ некоторого $m(n-m-2)$ -мерного многообразия, образует $(m+1)$ -параметрическое семейство. Следовательно, m -мерные плоскости, лежащие во всех $(m+1)$ -мерных плоскостях $m(n-m-2)$ -мерного многообразия, образуют ρ -мерный комплекс C^ρ размерности

$$\rho = m(n-m-2) + (m+1) = m(n-m-1) + 1.$$

Покажем, что построенный комплекс является комплексом $C^\rho(1)$. Поместим вершины $A_0, A_1, \dots, A_m$ в текущую m -мерную плоскость комплекса $C^\rho(1)$. Тогда, исключая из первой группы дифференциальных уравнений (10) формы Θ^{ρ^*} , получим

$$(m+1)((n-1) - (m+1) - 1) - \rho^* = (m+1)((n-1) - (m+1) - 1) - m(n-m-2) = n-1$$

линейных однородных уравнений, связывающих формы $\omega_i^{p^*}$, которые можно записать в виде

$$\Lambda_{p^*}^{\alpha i} \omega_i^{p^*} = 0. \quad (11)$$

Отсюда следует, что выполняются соотношения (8). Значит, построенный комплекс является комплексом $C^\rho(1)$. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Комплекс C^ρ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n , содержащий конечное число торсов, является комплексом $C^\rho(1)$ тогда и только тогда, когда его m -мерные образующие принадлежат $(m+1)$ -мерным плоскостям некоторого $m(n-m-2)$ -мерного многообразия.*

Изображение комплексов $C^\rho(1)$ на алгебраическом многообразии $\Omega(m, n)$ устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. *Комплекс C^ρ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n , содержащий конечное число торсов, является комплексом $C^\rho(1)$ тогда и только тогда, когда для каждой его m -мерной образующей пересечение плоскости $PT_l V^\rho$ с многообразием Сегре $S_l(m, n-m-1)$ содержит α -образующую многообразия $S_l(m, n-m-1)$.*

Действительно, пусть комплекс C^ρ является комплексом $C^\rho(1)$. Выбирая специальным образом репер, уравнения комплекса, а следовательно, и соответствующей плоскости $PT_l V^\rho$ пространства $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l \Omega(m, n)$, можно привести к виду (11) или к параметрическим уравнениям вида

$$\omega_i^{p^*} = \lambda_{i\rho^*}^{p^*} \Theta^{\rho^*}. \quad (12)$$

В силу этих уравнений пересечение плоскости $PT_l V^\rho$ и многообразия Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ определяется условием

$$\text{rank}(\omega_i^{p^*} \omega_i^n) = 1, \quad (13)$$

где формы $\omega_i^{p^*}$ удовлетворяют уравнениям (12) и выражаются через $m(n - m - 2)$ базисных форм Θ^{ρ^*} ($\rho^* = 1, 2, \dots, m(n - m - 2)$). Поскольку формы ω_i^n и θ^{ρ^*} являются однородными координатами произвольной точки плоскости $PT_l V^\rho$, получим, что m -мерная плоскость, лежащая в плоскости $PT_l V^\rho$ и определяемая уравнениями

$$\Theta^{\rho^*} = 0, \quad (14)$$

принадлежит многообразию Сегре $S_l(m, n - m - 1)$. Такая m -мерная плоскость совпадает с α -образующей многообразия $S_l(m, n - m - 1)$, заданной уравнениями

$$\omega_i^{p^*} = 0. \quad (15)$$

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть пересечение плоскости $PT_l V^\rho$ и многообразия $S_l(m, n - m - 1)$ содержит α -образующую многообразия $S_l(m, n - m - 1)$, определяемую уравнениями (15). Предположим, что гиперплоскость $\alpha^n = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_{n-1}$ является неособой, т.е. формы ω_i^n линейно независимы, и их можно принять за $m + 1$ из $\rho = m(n - m - 1) + 1$ однородных координат произвольной точки плоскости $PT_l V^\rho$. Плоскость $PT_l V^\rho$ в пространстве $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l \Omega(m, n)$ определяется уравнениями

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, \quad (16)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$; $i = 0, 1, \dots, m$. Поскольку рассматриваемая α -образующая многообразия $S_l(m, n - m - 1)$ лежит в данной плоскости, то уравнения (16) должны выполняться тождественно в силу (15). Подставляя (15) в (16) получим

$$\Lambda_n^{\alpha i} \omega_i^n = 0. \quad (17)$$

Так как формы ω_i^n линейно независимы, то из уравнений (17) следует, что

$$\Lambda_n^{\alpha i} = 0.$$

Очевидно, что это соотношение совпадает с соотношениями (8). Следовательно, комплекс C^ρ является комплексом $C^\rho(1)$. Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акивис М. А. Ткани и почти грассмановы структуры // Сиб. мат. ж. — 1982. — 23, № 6. — С. 6–15.
2. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Многообразия с вырожденным гауссовым отображением с кратными фокусами и скрученные конусы // Изв. вузов. Мат. — 2003. — № 11. — С. 3–14.
3. Арнольд В. И. Комплексный лагранжев грассманиан // Функц. анализ. прилож. — 2000. — 34, № 3. — С. 63–65.
4. Арнольд В. И. Лагранжев грассманиан кватернионного гиперсимплектического пространства // Функц. анализ. прилож. — 2001. — 35, № 1. — С. 74–77.
5. Бубякин И. В. Геометрия пятимерных комплексов двумерных плоскостей. — Новосибирск: Наука, 2001.
6. Бубякин И. В. О строении комплексов m -мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов // Мат. заметки СВФУ. — 2017. — 24, № 4. — С. 3–16.
7. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Избранные задачи интегральной геометрии. — М.: Добросвет, 2007.
8. Макоха А. Н. Геометрическая конструкция линейного комплекса плоскостей B_3 // Изв. вузов. Мат. — 2018. — № 11. — С. 15–26.

9. *Стеганцева П. Г., Гречнева М. А.* Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 2. — С. 65–75.
10. *Akivis M. A.* On the differential geometry of a Grassmann manifold// Tensor. — 1982. — 38. — P. 273–282.
11. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Projective Differential Geometry of Submanifolds. — Amsterdam: North-Holland, 1993.
12. *Arkani-Hamed N., Bourjaily J. L., Cachazo F., Goncharov A. B., Postnikov A., Trnka J.* Scattering Amplitudes and the Positive Grassmannian, 2012/ [arXiv:1212.5605 \[hep-th\]](#).
13. *Arkani-Hamed N., Trnka J.* The Amplituhedron// J. High Energy Phys. — 2014. — № 10. — P. 1–35.
14. *Landsberg J. M.* Algebraic Geometry and Projective Differential Geometry, 1998/ [arXiv:math/9809184 \[math.AG\]](#).
15. *Room T. G.* The Geometry of Determinantal Loci. — Cambridge, 1938.

Бубякин Игорь Витальевич

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск

E-mail: bubyakiniv@mail.ru



ПРОСТРАНСТВА ПОДВИЖНОСТИ

© 2020 г. М. П. БУРЛАКОВ

Аннотация. В статье рассматриваются пространства, обобщающие пространства Галилея, в которых действует нелинейная группа преобразований. Показано, что такие пространства соответствуют пространству-времени динамики, фундаментальные уравнения которой имеют порядок больше двух.

Ключевые слова: пространство Галилея, группа движений, динамическое уравнение.

MOBILITY SPACES

© 2020 M. P. BURLAKOV

ABSTRACT. In this paper, we consider spaces generalizing Galileo spaces endowed with an action of a nonlinear transformation group. We prove that such spaces correspond to the space-time of a dynamics whose fundamental equations have order >2 .

Keywords and phrases: Galilean space, motion group, dynamic equation.

AMS Subject Classification: 51P05, 51A06

По всей видимости, Эли Картан первым обратил внимание на то, что группа *преобразований Галилея*

$$x' = x + x_0 + u_1 t, \quad y' = y + y_0 + u_2 t, \quad z' = z + z_0 + u_3 t, \quad t' = t$$

порождает в четырехмерном аффинном пространстве некоторую метрическую геометрию, в которой «длина» вектора

$$\rho = t e_0 + x e_1 + y e_2 + z e_3 \equiv t e_0 + r$$

дается его нулевой координатой (см. [3]). В дальнейшем эту геометрию стали называть *геометрией Галилея*.

Геометрия Галилея имеет естественную механическую интерпретацию, в которой точки характеризуются положением в трехмерном пространстве и моментом времени. При этом преобразования Галилея взяты так, чтобы дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0$$

были инвариантны под действием этих преобразований, что означает независимость свободного движения материальных точек от скорости равномерного и прямолинейного движения системы отсчета. В этом состоит *принцип относительности Галилея*.

Пространство-время Галилея обобщают *пространства подвижности m -го порядка Π_m^n* , геометрия которых порождена группой преобразований следующего вида: $t' = t$ и

$$x'^k = x^k + b_0^k + b_1^k t + b_2^k t^2 + \dots + b_{m-1}^k t^{m-1}. \quad (1)$$

Такую группу мы будем называть *группой подвижности m -того порядка* и обозначать $\mathbf{G}_m$. При этом легко видеть, что преобразования этой группы сохраняют дифференциальные уравнения

$$\frac{d^m x^k(t)}{dt^m} = 0. \quad (2)$$

Мы будем также считать, что гиперповерхности $t = \text{const}$ всегда представляют собой n -мерное евклидово (аффинное) пространство.

Таким образом, пространства подвижности m -того порядка дают геометрическую интерпретацию механики, в которой принцип относительности Галилея расширен до скоростей, порядок которых не превышает $m - 1$. Иначе говоря, свободное движение материальных точек в пространствах подвижности m -того порядка определяется дифференциальными уравнениями (2).

Интегрируя дифференциальные уравнения (2), мы получим параметрические уравнения *траекторий свободного движения* материальных частиц (или короче — уравнения *свободных траекторий*) в пространстве подвижности m -того порядка:

$$x^k(t) = u_0^k + u_1^k t + u_2^k t^2 + \dots + u_{m-1}^k t^{m-1}. \quad (3)$$

Свободные траектории представляют собой обобщение *неособых прямых* геометрии Галилея (см. [5]); их свойства аналогичны свойствам неособых прямых пространства Галилея.

В частности, в пространстве Галилея через любые две точки, у которых не совпадают временные координаты, проходит единственная прямая. Аналогичное свойство справедливо и для свободных траекторий. Мы будем называть m точек *разделенными*, если у них нет совпадающих временных координат. Тогда можно утверждать, что через m разделенных точек $X_\alpha(x_\alpha^k, t_\alpha)$ проходит одна и только одна свободная траектория. Это следует из того, что системы линейных уравнений для отыскания в параметрических уравнениях (3) свободной траектории, проходящей через точки $X_\alpha(x_\alpha^k, t_\alpha)$, коэффициентов u_α^k

$$u_0^k + u_1^k t_\alpha + u_2^k t_\alpha^2 + \dots + u_{m-1}^k t_\alpha^{m-1} = x_\alpha^k \quad (4)$$

имеют одинаковый определитель

$$\Delta_m(t) \equiv \Delta_m(t_1, t_2, \dots, t_m) = \begin{vmatrix} t_m^{m-1} & t_m^{m-2} & \dots & t_m & 1 \\ t_{m-1}^{m-1} & t_{m-1}^{m-2} & \dots & t_{m-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^{m-1} & t_1^{m-2} & \dots & t_1 & 1 \end{vmatrix} = \prod_{k>h} (t_k - t_h), \quad (5)$$

отличный от нуля в случае разделенных точек $X_\alpha(x_\alpha^k, t_\alpha)$.

Величина $\Delta_2(t_1, t_2) = t_2 - t_1$ представляет собой *галилеево расстояние* между двумя точками $X_1(t_1, x_1, y_1, z_1)$ и $X_2(t_2, x_2, y_2, z_2)$ пространства-времени Галилея. Тогда определитель $\Delta_m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ можно принять за некоторую «меру близости» m точек в пространстве подвижности m -того порядка; мы будем называть эту величину *плотностью кортежа точек* $X_\alpha(x_\alpha^k, t_\alpha) \in \Pi_m^n$, где $\alpha = \overline{1, m}$.

Важнейшим свойством расстояния является *аддитивность* этой величины. Очевидно, что галилеево расстояние обладает свойством аддитивности, так как $\Delta_2(t_1, t_2) + \Delta_2(t_2, t_3) = t_2 - t_1 + t_3 - t_2 = \Delta_2(t_1, t_3)$. Своеобразным свойством аддитивности обладает и плотность кортежа точек. Нетрудно видеть, что имеет место тождество:

$$\Delta_m(t_0, t_2, \dots, t_m) + \Delta_m(t_1, t_0, \dots, t_m) + \dots + \Delta_m(t_1, t_2, \dots, t_0) = \Delta_m(t_1, t_2, \dots, t_m). \quad (6)$$

Например:

$$\begin{vmatrix} t_3^2 & t_3 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_0^2 & t_0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_3^2 & t_3 & 1 \\ t_0^2 & t_0 & 1 \\ t_1^2 & t_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_0^2 & t_0 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_1^2 & t_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_3^2 & t_3 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_1^2 & t_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь произвольную линию l с параметрическими уравнениями $x^k = x^k(t)$ в пространстве подвижности Π_m^n и сконструируем величины $\Delta_{m+1}(x)$, $\Delta_{m+1}(y)$, $\Delta_{m+1}(z)$, где

$$\Delta_{m+1}(x^k) = \begin{vmatrix} x^k(t_m) & t_m^{m-1} & t_m^{m-2} & \dots & t_m & 1 \\ x^k(t_{m-1}) & t_{m-1}^{m-1} & t_{m-1}^{m-2} & \dots & t_{m-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^k(t_1) & t_1^{m-1} & t_1^{m-2} & \dots & t_1 & 1 \\ x^k(t_0) & t_0^{m-1} & t_0^{m-2} & \dots & t_0 & 1 \end{vmatrix} \quad (7)$$

и так далее. Нетрудно видеть, что эти величины инвариантны относительно действия группы подвижности.

Каков механический смысл величин $\Delta_{m+1}(x)$, $\Delta_{m+1}(y)$, $\Delta_{m+1}(z)$?

Мы рассмотрим этот вопрос на модельном примере пространства-времени Галилея. Если мы положим

$$x(t) = x_0 + v_x t + a_x t^2 + \dots, \quad y(t) = y_0 + v_y t + a_y t^2 + \dots, \quad z(t) = z_0 + v_z t + a_z t^2 + \dots,$$

то

$$\begin{aligned} \Delta_3(x) &= \begin{vmatrix} x(t_1) & t_1 & 1 \\ x(t_2) & t_2 & 1 \\ x(t_3) & t_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 + v_x t_1 + a_x t_1^2 + \dots & t_1 & 1 \\ x_0 + v_x t_2 + a_x t_2^2 + \dots & t_2 & 1 \\ x_0 + v_x t_3 + a_x t_3^2 + \dots & t_3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= a_x(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_1) + o((t_3 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)), \end{aligned}$$

и так далее. Таким образом, величины

$$a_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta_3(x)}{\Delta_3(t)}, \quad a_y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta_3(y)}{\Delta_3(t)}, \quad a_z = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta_3(z)}{\Delta_3(t)},$$

инвариантны относительно действия группы Галилея, представляют собой значения координат мгновенного ускорения (в начальный момент времени). Аналогичный смысл мгновенной скорости m -того порядка имеют и пределы отношений $\Delta_{m+1}(x^k)/\Delta_{m+1}(t)$, инвариантных относительно действия группы подвижности m -того порядка.

Изучение пространств подвижности m -того порядка представляет интерес как *простейший пример* геометрии с *нелинейной* группой движений. Более сложные примеры геометрий с нелинейными группами преобразований получаются если композицию преобразований брать на некотором факторкольце кольца многочленов. Например, если в группе подвижности m -того порядка, тривиальное преобразование времени $t' = t$ заменить на преобразование вида

$$t' = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{m-1} t^{m-1},$$

а композицию таких преобразований вычислять не в кольце многочленов $\mathbb{R}[t]$, а в факторкольце $\mathbb{R}[t]/(t^m)$. Нетрудно видеть, что в этом случае пространственная часть группы подвижности сохраняется, а инвариантом будет отношение плотностей кортежей точек, расположенных на свободных траекториях. Можно также отказаться от аффинной структуры сечений постоянного времени. В галилеевом случае это приводит нас к геометрической трактовки ньютоновской теории тяготения (см. [3]). Но мы не будем касаться здесь геометрии таких пространств, так как это уведет нас далеко от темы данной статьи.

Вместо этого мы покажем, что расширение группы Галилея до групп подвижности диктуется некоторыми соображениями теоретической механики, дополненной принципом эквивалентности тяготения и инерции. И это дает нам дополнительный резон для изучения геометрии пространств подвижности.

Как известно, в фундаментальных уравнениях Ньютона

$$m \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = F(t, r(t), v(t)) \quad (8)$$

силовые поля могут зависеть лишь от времени t , положения в пространстве $r(t)$ и скорости $v(t) = dr(t)/dt$. По сути дела это утверждение есть просто другая формулировка динамического закона (8). Владимир Игоревич Арнольд формулирует это так: «Начальное состояние механической системы (совокупность положений и скоростей точек системы в какой-нибудь момент времени) однозначно определяет все ее движение». И дальше академик замечает: «Мы не успеваем удивиться этому факту, так как узнаем его очень рано. Можно представить себе мир, в котором для определения будущего системы нужно в начальный момент знать также ускорения. Опыт показывает, что наш мир не таков» (см. [1]).

Последнее, впрочем, не совсем верно. На самом деле могут существовать силы, зависящие от ускорения движущегося материального тела. Чтобы показать это, мы обратим внимание читателя на реактивное движение ракеты, которое описывает формула Мещерского (см. [2])

$$M(t) \frac{dv(t)}{dt} = -u(t) \frac{dm(t)}{dt} + F_0,$$

где $M(t)$ — переменная масса ракеты, $v(t)$ — ее скорость, $m(t)$ — масса отбрасываемого вещества реактивной струи, $u(t)$ — скорость частиц реактивной струи, F_0 — результирующая сторонних сил. Таким образом, реактивная сила $F_p = -u(t)dm(t)/dt$ зависит от скорости расхода топлива и скорости истечения реактивной струи.

Теперь представим себе космический корабль, снабженный ионными двигателями, в которых скорость истечения реактивной струи зависит от напряженности электрического поля, разгоняющего ионы, которые и образуют реактивную струю. Согласно принципу относительности Галилея, экипаж космического корабля может определить лишь его *относительную скорость*, наблюдая какие-либо внешние объекты. Напротив, ускорение космического корабля абсолютное, и может быть определено без привязки к тем или иным внешним ориентирам, так как согласно принципу эквивалентности ускорение будет ощущаться как некоторое гравитационное поле. Таким образом, космический корабль можно снабдить *акселерометром*, который, если его синхронизировать с электромагнитными ускорителями заряженных частиц, образующих реактивную струю, создаст нам реактивную силу, зависящую от ускорения самого космического корабля.

Существование (в принципе) сил, зависящих от ускорения, приводит нас к динамическому уравнению *третьего порядка*

$$\mu \frac{d^3 r(t)}{dt^3} = F(t, r(t), v(t), a(t)), \quad (9)$$

где $a(t) = d^2 r(t)/dt^2$ — ускорение движущегося материального тела, а μ — *коэффициент подвижности*, заменяющий в механике третьего порядка массу классической механики. То есть описанный выше мысленный эксперимент с космическим кораблем, ионные двигатели которого синхронизированы с акселерометром, приводит нас к ситуации, упомянутой академиком Арнольдом «Можно представить себе мир, в котором для определения будущего системы нужно в начальный момент знать также ускорения». И так как свободное движение в таком мире дается уравнениями

$$\frac{d^3 r(t)}{dt^3} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^3 x(t)}{dt^3} = 0, \quad \frac{d^3 y(t)}{dt^3} = 0, \quad \frac{d^3 z(t)}{dt^3} = 0,$$

то пространство-время такого мира будет иметь геометрию пространства подвижности третьего порядка.

Здесь, однако, возникает естественное возражение. В пространстве подвижность третьего порядка свободно движущаяся материальная точка может иметь любое (постоянное) ускорение. В то время как весь наш опыт говорит о том, что если на материальную точку не действуют сторонние силы (или их равнодействующая равна нулю), то материальная точка будет двигаться с нулевым ускорением, т.е. равномерно и прямолинейно. Это и констатирует Арнольд в приведенной выше цитате: «Опыт показывает, что наш мир не таков».

Впрочем, мы можем устранить противоречие между опытом, говорящим в пользу пространства-времени Галилея и существованием сил, зависящих от ускорения, откуда следует, что пространство-время имеет структуру пространства подвижности третьего порядка. Для этого представим себе, что какая-то обширная область Вселенной заполнена некой средой, которая оказывает сопротивление движению материальных тел с силой, пропорциональной ускорению движущегося материального тела с коэффициентом пропорциональности равным массе этого тела. По сути, эта среда представляет собой физическую причину сил инерции. Эйнштейн называл ее *эфиром механики*.

«В динамике Ньютона, — пишет Альберт Эйнштейн в своей статье «Об эфире», — „пространство“ обладает физической реальностью — в противоположность геометрии и кинематике. Мы будем называть эту физическую реальность, входящую в закон движения Ньютона „эфиром механики“. Появление центробежных сил при вращении тела, материальные точки которого не изменяют взаимных расстояний, показывает, что этот эфир следует понимать не только как некое воображаемое представление теории Ньютона, но что ему соответствует в природе нечто реальное» (см. [2]). И мы (вслед за Эйнштейном) также для краткости будем называть *эфиром* среду, оказывающую движению материальных тел сопротивление, пропорциональное ускорению.

Посмотрим теперь, как гипотеза «*эфира механики*» устанавливает согласие между опытом, говорящим в пользу уравнения Ньютона (8) и уравнением (9). Согласно (9) уравнение свободного движения материального тела сквозь эфир, заполняющий некоторую область пространства подвижности третьего порядка, будет иметь вид

$$\mu \frac{da(t)}{dt} = -ma(t), \quad (10)$$

а его решением будет убывающая экспонента

$$a(t) = a_0 e^{-mt/\mu}, \quad (11)$$

где a_0 — начальное ускорение. Отсюда видно, что если на материальное тело не действуют сторонние силы, то каково бы ни было начальное ускорение a_0 , через некоторое время ускорение $a(t)$ станет практически равным нулю, как и должно быть согласно механике Ньютона. Вопрос лишь в том, как быстро уменьшается ускорение $a(t)$, стремясь к нулю? Очевидно, что скорость убывания вектор-функции $a(t)$ зависит от параметра $\tau = \mu/m$, который имеет размерность времени и называется *характеристическим временем*. (Например, за время $10\tau \ln 2$ величина ускорения уменьшится более чем в тысячу раз).

Наряду с характеристическим временем целесообразно также ввести *время релаксации* $T = k\tau$, которое определяется принципиальной возможностью наших приборов регистрировать величину ускорения, т.е. T определяется из условия $a(T) = 0$ по показаниям наших приборов, измеряющих ускорение.

Посмотрим теперь, как будет двигаться материальная точка с коэффициентом подвижности μ и массой m под действием постоянной силы F_0 и силы сопротивления эфира. В этом случае динамическое уравнение (9) примет вид

$$\frac{da(t)}{dt} + \frac{m}{\mu}a(t) = \frac{1}{\mu}F_0, \quad (12)$$

а его решением при условии $a(0) = 0$ будет вектор-функция

$$a(t) = \left(1 - e^{-mt/\mu}\right) \frac{F_0}{m}. \quad (13)$$

Отсюда видно, что при $t > T$ ускорение материальной точки станет постоянным и равным отношению силы к массе, т.е. для материального тела, движущегося под действием постоянной силы сквозь *мировой эфир* в пространстве подвижности третьего порядка, мы получим динамическое уравнение Ньютона $ma = F_0$.

А как обстоят дела, когда сила меняется со временем? В этом случае мы будем иметь динамическое уравнение

$$\frac{da(t)}{dt} + \frac{m}{\mu}a(t) = \frac{1}{\mu}F(t), \quad (14)$$

решением которого при $a(0) = 0$ будет вектор-функция

$$a(t) = \frac{e^{-\frac{m}{\mu}t}}{\mu} \int_0^t F(\lambda) e^{m\lambda/\mu} d\lambda.$$

Характер поведения этой вектор-функции можно понять, применяя формулу интегрирования по частям. В результате мы получим:

$$a(t) = \frac{F(t)}{m} - \frac{\dot{F}(t)}{m} \frac{\mu}{m} + \frac{\ddot{F}(t)}{m} \frac{\mu^2}{m^2} - \dots - \left(\frac{F(0)}{m} - \frac{\dot{F}(0)}{m} \frac{\mu}{m} + \frac{\ddot{F}(0)}{m} \frac{\mu^2}{m^2} - \dots \right) e^{-mt/\mu},$$

или, учитывая формулу для ряда Маклорена,

$$a(t) = \frac{1}{m}F(t - \tau) - \frac{1}{m}F(\tau)e^{-t/\tau}. \quad (15)$$

Формула (15) показывает, что при малом характеристическом времени τ мы фактически получаем динамическое уравнение Ньютона.

Возникает резонный вопрос: если отклонения динамики материальных тел подчиненной уравнению (9) в доступной нам части Вселенной лежат за пределами возможностей измерительных приборов, то имеет ли «практический» смысл рассматривать такую динамику? Этому есть несколько причин. Во-первых, в динамике третьего порядка сохраняющиеся величины иные, нежели в механике Ньютона, а привычные для нас законы сохранения энергии, импульса и момента импульса имеют лишь приближенный характер. Это в свою очередь приводит к некоторым явлениям, которые в принципе отсутствуют в механике Ньютона. К числу таких явлений, в частности, относятся некоторые антигравитационные эффекты, которые могут проявляться в космологических масштабах.

Последнее замечание относится к релятивистской механике, где считается, что группа Галилея заменяется группой Лоренца. На самом деле уравнения релятивистской механики также инвариантны относительно группы Галилея, только эта группа будет действовать не в четырехмерном аффинном пространстве, а в пятимерном. При этом роль *универсального времени* Ньютона будет играть *собственное время* Лоренца, которое мы обозначим t , и тогда преобразования Галилея в релятивистском варианте будут иметь такой вид:

$$x'^\alpha = x^\alpha + u^\alpha t,$$

где $\alpha = 0, 1, 2, 3$, т.е. x^0, x^1, x^2, x^3 — координаты «события» или «мировой точки» в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве Минковского, а u^0, u^1, u^2, u^3 — компоненты четырехмерной скорости. И таким образом мы группу Галилея, действующую в пятимерном пространстве-времени, можем расширить до группы подвижности того или иного порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979.
2. Космодемьянский А. А. Теоретическая механика и современная техника. — М.: Просвещение, 1969.
3. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 1. — М.: Мир, 1977.
4. Эйнштейн А. Об эфире// в кн.: Собрание научных трудов. — М.: Наука, 1966.
5. Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. — М.: Наука, 1969.

Бурлаков Михаил Петрович
Тверской государственный университет
E-mail: burlakovmihail@mail.ru



ЭКВИВАРИАНТНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

© 2020 г. П. С. ГЕВОРКЯН

Аннотация. В работе изучаются эквивариантные расслоения Гуревича. Получены их внутренние характеристики. Доказаны теоремы о связях эквивариантных расслоений с порожденными ими расслоениями. Исследуются локальные и глобальные свойства эквивариантных расслоений. Доказан эквивариантный аналог теоремы Гуревича о переходе от локальных расслоений к глобальным расслоениям. Дана классификация эквивариантных расслоений со свойством единственности накрывающего пути.

Ключевые слова: эквивариантная накрывающая гомотопия, эквивариантные расслоения, эквивариантная гомотопия, H -неподвижная точка, пространство H -орбит, нормальное G -покрытие, слабо локально тривиальное G -расслоение.

EQUIVARIANT BUNDLES

© 2020 P. S. GEVORGYAN

ABSTRACT. In this paper, we study equivariant Hurewicz bundles, obtain their internal characteristics, and prove theorems on relationship between equivariant bundles and bundles generated by them. Local and global properties of equivariant bundles are examined. An equivariant analog of the Hurewicz theorem on passing from local bundles to global bundles is proved. A classification of equivariant bundles with the uniqueness property of the covering path is given.

Keywords and phrases: equivariant covering homotopy, equivariant bundles, equivariant homotopy, H -fixed point, H -orbit space, normal G -covering, weakly locally trivial G -bundle.

AMS Subject Classification: 55R05, 55R65, 55R91

1. Введение. Пусть G — топологическая группа, E , B и X — произвольные G -пространства, а $p : E \rightarrow B$ и $f : X \rightarrow B$ — некоторые эквивариантные отображения. *Задача поднятия* эквивариантного отображения f в E состоит в нахождении такого эквивариантного отображения $\tilde{f} : X \rightarrow E$, что $f = p \circ \tilde{f}$. Для того чтобы эта задача стала корректной задачей G -гомотопической категории, отображение $p : E \rightarrow B$ должно удовлетворять дополнительному условию.

Говорят, что эквивариантное отображение $p : E \rightarrow B$ обладает *свойством эквивариантной накрывающей гомотопии* относительно G -пространства X , если для произвольных эквивариантных отображений $\tilde{f} : X \rightarrow E$ и $F : X \times I \rightarrow B$ таких, что $F \circ i_0 = p \circ \tilde{f}$, где $i_0 : X \rightarrow X \times I$ — вложение, определенное формулой $i_0(x) = (x, 0)$, $x \in X$, существует такое эквивариантное отображение $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ i_0 \downarrow & \tilde{F} \nearrow & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

т.е. $p \circ \tilde{F} = F$ и $\tilde{F} \circ i_0 = \tilde{f}$.

Если $p : E \rightarrow B$ обладает свойством эквивариантной накрывающей гомотопии относительно G -пространства X , а $f, g : X \rightarrow B$ — G -гомотопные эквивариантные отображения, то f можно поднять в E тогда и только тогда, когда g можно поднять в E . Иначе говоря, поднятие эквивариантного отображения $f : X \rightarrow B$ является свойством G -гомотопического класса этого отображения.

Свойство эквивариантной накрывающей гомотопии приводит к понятию эквивариантного расслоения. Эквивариантное отображение $p : E \rightarrow B$ называется *эквивариантным расслоением Гуревича* или *G -расслоением Гуревича*, если p обладает свойством эквивариантной накрывающей гомотопии относительно любого G -пространства X .

В данной статье изучаются эквивариантные расслоения Гуревича. Получены их внутренние характеристики с помощью эквивариантных накрывающих функций (теорема 1) и расширенных эквивариантных накрывающих функций (теорема 2). Доказаны теоремы о связях G -расслоений с порожденными ими расслоениями (теоремы 3, 4, 5 и следствия 1, 2). Исследуются локальные и глобальные свойства G -расслоений. Доказан эквивариантный аналог теоремы Гуревича об эквивалентности понятий локального и глобального G -расслоения в случае паракомпактной базы (теорема 7). Определяется понятие слабо локально тривиального G -расслоения (определение 3). Класс этих расслоений шире класса локально тривиальных G -расслоений, но в случае паракомпактной базы уже класса G -расслоений Гуревича (теорема 8). При некотором дополнительном ограничении на базу расслоения классы слабо локально тривиальных G -расслоений и G -расслоений Гуревича совпадают (теорема 10). Дана классификация G -расслоений со свойством единственности накрывающего пути (теорема 11).

Используемые в статье без ссылок понятия, определения и результаты из эквивариантной топологии и теории расслоений можно найти в [2, 3, 5, 7].

2. G -Расслоения и их внутренняя характеристика. Пусть G — компактная топологическая группа, E и B — G -пространства, а $p : E \rightarrow B$ — эквивариантное отображение.

Действие группы G на B индуцирует естественное действие группы G на пространстве путей B^I формулой $(g\alpha)(t) = g\alpha(t)$ для произвольных $g \in G$, $\alpha \in B^I$, $t \in I$. Рассмотрим подпространство $\Delta \subset E \times B^I$, определенное формулой

$$\Delta = \{(e, \alpha) \in E \times B^I; \alpha(0) = p(e)\}.$$

Очевидно, что Δ — инвариантное подмножество G -пространства $E \times B^I$.

Определение 1. Эквивариантное отображение $\lambda : \Delta \rightarrow E^I$, удовлетворяющее условиям

$$\lambda(e, \alpha)(0) = e, \quad [p \circ \lambda(e, \alpha)](t) = \alpha(t),$$

называется *эквивариантной накрывающей функцией* или *накрывающей G -функцией* для p .

Следующая теорема описывает связь между эквивариантными расслоениями Гуревича и эквивариантными накрывающими функциями. Она дает внутреннюю характеристику эквивариантного расслоения Гуревича.

Теорема 1. Эквивариантное отображение $p : E \rightarrow B$ является G -расслоением Гуревича тогда и только тогда, когда p обладает эквивариантной накрывающей функцией.

Доказательство. Пусть $\lambda : \Delta \rightarrow E^I$ — эквивариантная накрывающая функция для p . Рассмотрим произвольные G -пространство X , эквивариантное отображение $\tilde{f} : X \times 0 \rightarrow E$ и эквивариантная гомотопия $F : X \times I \rightarrow B$, $F(x, 0) = p(\tilde{f}(x, 0))$. Заметим, что для произвольного $x \in X$ формулой $F_x(t) = F(x, t)$ определяется путь $F_x \in B^I$. Несложно убедиться, что гомотопия $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$, определенная формулой $\tilde{F}(x, t) = \lambda(\tilde{f}(x, 0), F_x)(t)$, является искомой эквивариантной накрывающей гомотопией.

Обратно, предположим, что $p : E \rightarrow B$ является G -расслоением Гуревича. Пусть $X = \Delta$; рассмотрим отображения

$$\tilde{f} : \Delta \times 0 \rightarrow E, \quad \tilde{f}[(e, \alpha), 0] = e, \quad F : \Delta \times I \rightarrow B, \quad F[(e, \alpha), t] = \alpha(t).$$

Несложно проверить, что $\tilde{f}$ и F являются эквивариантными отображениями и

$$F[(e, \alpha), 0] = \alpha(0) = p(e) = (p \circ \tilde{f})[(e, \alpha), 0].$$

Следовательно, существует эквивариантная накрывающая гомотопия $\tilde{F} : \Delta \times I \rightarrow E$ для гомотопии F :

$$\tilde{F}[(e, \alpha), 0] = \tilde{f}, \quad p \circ \tilde{F} = F.$$

Теперь определим отображение

$$\lambda : \Delta \rightarrow E^I, \quad \lambda(e, \alpha)(t) = \tilde{F}[(e, \alpha), t].$$

Несложно заметить, что λ — эквивариантная накрывающая функция для p . □

Пусть $W \subset B^I$ — инвариантное подмножество G -пространства B^I . Рассмотрим множество $\Delta_W \subset E \times B^I \times I$, определенное формулой

$$\Delta_W = \{(e, \alpha, s) \in E \times W \times I; \quad \alpha(s) = p(e)\}.$$

Очевидно, Δ_W — инвариантное подмножество G -пространства $E \times B^I \times I$.

Определение 2. Эквивариантное отображение $\Lambda : \Delta_W \rightarrow E^I$, удовлетворяющее условиям

$$\Lambda(e, \alpha, s)(s) = e, \quad [p \circ \Lambda(e, \alpha, s)](t) = \alpha(t),$$

называется *расширенной эквивариантной накрывающей функцией* или *расширенной накрывающей G -функцией* над W .

Как показывает следующая лемма, существование расширенной накрывающей G -функции над B^I эквивалентно существованию эквивариантной накрывающей функции.

Лемма 1. *Эквивариантное отображение $p : E \rightarrow B$ обладает эквивариантной накрывающей функцией тогда и только тогда, когда существует расширенная накрывающая G -функция над B^I .*

Эта лемма доказывается так же, как аналогичное утверждение в неэквивариантном случае (см. [2, лемма 9, с. 124]).

Из теоремы 1 и леммы 1 непосредственно получается следующее утверждение.

Теорема 2. *Эквивариантное отображение $p : E \rightarrow B$ является G -расслоением Гуревича тогда и только тогда, когда существует расширенная накрывающая G -функция над B^I .*

Теоремы 1 и 2 имеют важное практическое значение и в дальнейшем неоднократно будут применены для доказательства того, что данное эквивариантное отображение является G -расслоением Гуревича.

3. G -Расслоения и порожденные ими расслоения. Пусть H — замкнутая подгруппа компактной группы G . Тогда любое G -пространство является также H -пространством и любое G -отображение является H -отображением. Итак, существует естественный ковариантный функтор из категории G -ТОР в категорию H -ТОР. Возникает естественный вопрос: сохраняет ли этот функтор свойство эквивариантного отображения быть эквивариантным расслоением Гуревича. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть G -отображение $p : E \rightarrow B$ является G -расслоением Гуревича. Тогда для произвольной замкнутой подгруппы H компактной группы G отображение $p : E \rightarrow B$ является H -расслоением Гуревича.*

Доказательство. В силу теоремы 1 существует накрывающая G -функция $\lambda : \Delta \rightarrow E^I$ для G -отображения p . Так как $\lambda : \Delta \rightarrow E^I$ является также H -отображением, то λ — накрывающая H -функция для H -отображения p . Значит, $p : E \rightarrow B$ является H -расслоением Гуревича в силу теоремы 1. □

Из теоремы 3, в частности, вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Произвольное G -расслоение Гуревича $p : E \rightarrow B$ является расслоением Гуревича.

Пусть X и Y — G -пространства, а H — некоторая замкнутая подгруппа группы G . Множество

$$X^H = \{x \in X; hx = x, \text{ для всех } h \in H\}$$

называется *пространством H -неподвижных точек* G -пространства X . Эquivариантное отображение $f : X \rightarrow Y$ порождает естественное отображение между пространствами H -неподвижных точек X^H и Y^H , которое обозначается через p^H .

Теорема 4. Пусть $p : E \rightarrow B$ является G -расслоением Гуревича. Тогда для произвольной замкнутой подгруппы H компактной группы G индуцированное отображение $p^H : E^H \rightarrow B^H$ между пространствами H -неподвижных точек является расслоением Гуревича.

Доказательство. В силу теоремы 1 для G -отображения p существует накрывающая G -функция $\lambda : \Delta \rightarrow E^I$. Тогда $\lambda^H : \Delta^H \rightarrow (E^H)^I$ является накрывающей функцией для отображения $p^H : E^H \rightarrow B^H$. Значит, $p^H : E^H \rightarrow B^H$ является расслоением Гуревича. $\square$

В случае, когда G — компактная группа Ли, а E и B — G -CW-комплексы, верно и обратное утверждение теоремы 4 (см. [1, теорема 9]).

Свойство equivариантного отображения быть G -расслоением Гуревича сохраняется также при переходе к пространствам H -орбит.

Теорема 5. Пусть $p : E \rightarrow B$ является G -расслоением Гуревича. Тогда для произвольной замкнутой подгруппы H компактной группы G индуцированное G -отображение $p^* : E|H \rightarrow B|H$ между пространствами H -орбит является G -расслоением Гуревича.

Доказательство. Пусть $\lambda : \Delta \rightarrow E^I$ — накрывающая G -функция для G -отображения p (см. теорему 1). Рассмотрим множество

$$\Delta_H = \{(e^*, \alpha^*) \in E|H \times (B|H)^I; \alpha^*(0) = p^*(e^*)\}$$

и определим отображение

$$\lambda^* : \Delta_H \rightarrow (E|H)^I, \quad \lambda^*(e^*, \alpha^*)(t) = (\lambda(e, \alpha)(t))^*.$$

Отображение λ^* определено корректно и является накрывающей G -функцией для $p^* : E|H \rightarrow B|H$. Следовательно, согласно теореме 1, $p^* : E|H \rightarrow B|H$ является G -расслоением Гуревича. $\square$

Из последней теоремы в частном случае $H = G$ получается следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть $p : E \rightarrow B$ является G -расслоением Гуревича. Тогда индуцированное отображение между пространствами орбит $p^* : E|G \rightarrow B|G$ является расслоением Гуревича.

4. Локальные и глобальные G -расслоения. Эquivариантное отображение $p : E \rightarrow B$ называется *локальным G -расслоением Гуревича*, если для произвольной точки $b \in B$ существует такая ее инвариантная окрестность U , что $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow U$ является G -расслоением Гуревича.

Открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_i; i \in \mathcal{I}\}$ G -пространства X , состоящее из инвариантных подмножеств U_i , называется *G -покрытием*.

G -Покрытие $\mathcal{U} = \{U_i; i \in \mathcal{I}\}$ называется *нормальным G -покрытием*, если для каждого U_i существует такая функция $\chi_i : X \rightarrow I$, что $\chi_i(gx) = \chi_i(x)$ для произвольных $x \in X$ и $g \in G$, а $U_i = \{x \in X; \chi_i(x) \neq 0\}$. Функция χ_i называется *характеристической G -функцией* открытого инвариантного подмножества $U_i \subset X$.

Лемма 2. Пусть G — компактная группа. Тогда произвольное паракомпактное G -пространство X обладает локально конечным нормальным G -покрытием.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_i; i \in \mathcal{I}\}$ — локально конечное нормальное покрытие, состоящее из открытых инвариантных подмножеств паракомпактного G -пространства X , а $h_i : X \rightarrow I$ — характеристическая функция (не equivариантная) подмножества U_i , $i \in \mathcal{I}$. Тогда функция $\chi_i : X \rightarrow I$,

определенная с помощью интеграла Хаара формулой $\chi_i(x) = \int h_i(gx)dg$, является характеристической G -функцией инвариантного подмножества U_i . Значит, $\mathcal{U} = \{U_i; i \in \mathcal{I}\}$ — локально конечное нормальное G -покрытие паракомпактного G -пространства X . $\square$

Следующая теорема показывает, что при достаточно общих предположениях локальное G -расслоение Гуревича является глобальным G -расслоением Гуревича.

Теорема 6. Пусть G — компактная группа, $p : E \rightarrow B$ — эквивариантное отображение, а $\mathcal{U} = \{U_i; i \in \mathcal{I}\}$ — локально конечное нормальное G -покрытие G -пространства B . Если $p|_{p^{-1}(U_i)} : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ является G -расслоением Гуревича для произвольного $U_i \in \mathcal{U}$, то p — G -расслоение Гуревича.

Доказательство. Для всякого конечного набора индексов $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{I}$ ($k \geq 1$) определим множество $V_{i_1 \dots i_k} \subset B^I$ следующим образом:

$$V_{i_1 \dots i_k} = \left\{ \alpha \in B^I; \quad \alpha \left(\left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right] \right) \subset U_{i_j}, \quad j = 1, \dots, k \right\}.$$

Ясно, что $V_{i_1 \dots i_k}$ — инвариантное подмножество G -пространства B^I . Докажем, что существует расширенная накрывающая G -функция над каждым $V_{i_1 \dots i_k}$. В силу теоремы 4 существует расширенная накрывающая G -функция $\Lambda_j : \Delta_{U_{i_j}} \rightarrow E^I$ над каждым U_{i_j} , $j = 1, \dots, k$. Рассмотрим произвольный элемент $(e, \alpha, s) \in \Delta_{V_{i_1 \dots i_k}}$. Предположим, что $s \in [(n-1)/k, n/k]$ для некоторого натурального n . Пусть $\alpha_j \in B^I$, $j = 1, \dots, k$, — путь, определенный формулой

$$\alpha_j(t) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{j-1}{k} \right), & t \in \left[0, \frac{j-1}{k} \right], \\ \alpha(t), & t \in \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right], \\ \alpha \left(\frac{j}{k} \right), & t \in \left[\frac{j}{k}, 1 \right]. \end{cases}$$

Теперь определим расширенную накрывающую G -функцию $\Lambda : \Delta_{V_{i_1 \dots i_k}} \rightarrow E^I$ следующим образом. Путь $\Lambda(e, \alpha, s)$ сначала определим на отрезке $[(n-1)/k, n/k]$ формулой

$$\Lambda(e, \alpha, s)(t) = \Lambda_n(e, \alpha_n, s), \quad t \in \left[\frac{n-1}{k}, \frac{n}{k} \right].$$

Теперь $\Lambda(e, \alpha, s)$ определим последовательно на отрезках $[(n-2)/k, (n-1)/k]$, $[(n-3)/k, (n-2)/k]$, $\dots$, $[0, 1/k]$ формулой

$$\Lambda(e, \alpha, s)(t) = \Lambda_j \left(\Lambda(e, \alpha, s) \left(\frac{j}{k} \right), \alpha_j, \frac{j}{k} \right), \quad t \in \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right], \quad j = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Наконец, на отрезках $[n/k, (n+1)/k]$, $[(n+1)/k, (n+2)/k]$, $\dots$, $[(k-1)/k, 1]$ определим $\Lambda(e, \alpha, s)$ последовательно по формуле

$$\Lambda(e, \alpha, s)(t) = \Lambda_{j+1} \left(\Lambda(e, \alpha, s) \left(\frac{j}{k} \right), \alpha_{j+1}, \frac{j}{k} \right), \quad t \in \left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k} \right], \quad j = n, n+1, \dots, k-1.$$

Очевидно, что построенное эквивариантное отображение $\Lambda : \Delta_{V_{i_1 \dots i_k}} \rightarrow E^I$ удовлетворяет определению 2, т.е. является расширенной накрывающей G -функцией над $V_{i_1 \dots i_k}$.

Семейство $\{V_{i_1 \dots i_k}; k = 1, 2, \dots\}$ является нормальным G -покрытием G -пространства B^I и обладает вписанным G -покрытием $\{W_\mu\}$ с линейно упорядоченным множеством индексов $\mathcal{M}$, которое является также локально конечным (см. [4, лемма 3.4] или [6]).

Пусть $\chi_\mu : B^I \rightarrow I$ — характеристическая G -функция инвариантного подмножества $W_\mu \subset B^I$, т.е. $\chi_\mu(g\alpha) = \chi_\mu(\alpha)$ для произвольных $g \in G$, $\alpha \in B^I$, и $W_\mu = \{\alpha \in B^I; \chi_\mu(\alpha) \neq 0\}$. Расширенную накрывающую G -функцию над инвариантным множеством $W_\mu \subset B^I$ обозначим через Λ_μ . Теперь рассмотрим произвольный элемент $(e, \alpha) \in \Delta \subset E \times B^I$. Пусть $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$ множество всех

тех индексов для которых выполняется $\alpha \in W_{\mu_i}$, $i = 1, \dots, n$. Определим точки t_i , $i = 1, \dots, n$, единичного отрезка I формулой

$$t_i = \frac{\sum_{j=1}^i \chi_{\mu_j}(\alpha)}{\sum_{j=1}^n \chi_{\mu_j}(\alpha)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Построим путь $\lambda(e, \alpha) \in E^I$, определив его последовательно на отрезках $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\dots$, $[t_{n-1}, 1]$ следующими формулами

$$\begin{aligned} \lambda(e, \alpha)(t) &= \Lambda_{\mu_1}(e, \alpha, 0)(t), \quad t \in [0, t_1] \\ \lambda(e, \alpha)(t) &= \Lambda_{\mu_{i+1}}(\lambda(e, \alpha)(t_i), \alpha, t_i)(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\lambda(e, \alpha)(0) = e$ и $[p \circ \lambda(e, \alpha)](t) = \alpha(t)$. Кроме того, $\lambda : \Delta \rightarrow E^I$ — эквивариантное отображение, поскольку таковыми являются Λ_μ , $\mu \in \mathcal{M}$. Значит, $\lambda : \Delta \rightarrow E^I$ — накрывающая G -функция для p , т.е. $p : E \rightarrow B$ — G -расслоение Гуревича согласно теореме 1. $\square$

Из последней теоремы и леммы 2 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 7. Пусть G — компактная группа, а B — паракомпактное G -пространство. Эквивариантное отображение $p : E \rightarrow B$ является G -расслоением Гуревича тогда и только тогда, когда оно является локальным G -расслоением Гуревича.

Итак, в случае паракомпактной базы B понятия локального и глобального G -расслоения совпадают. Теорема 7 является эквивариантным аналогом известной теоремы Гуревича (см. [6]).

5. Слабо локально тривиальные G -расслоения. Пусть G — компактная группа, B и F — произвольные G -пространства, а $p : B \times F \rightarrow B$ — проекция на первый сомножитель: $p(x, y) = x$. Эквивариантное отображение $p : B \times F \rightarrow B$ является G -расслоением Гуревича. Действительно, пусть X — произвольное G -пространство, $\tilde{f} : X \rightarrow B \times F$ — эквивариантное отображение, а $F : X \times I \rightarrow B$ — такая эквивариантная гомотопия, что $F(x, 0) = p\tilde{f}(x)$, $x \in X$. Очевидно, что отображение $\tilde{F} : X \times I \rightarrow B \times F$, определенное формулой $\tilde{F}(x, t) = (F(x, t), pr_2(\tilde{f}(x, 0)))$, является эквивариантной накрывающей гомотопией для $F : X \times I \rightarrow B$. Проекция $p : B \times F \rightarrow B$ называется *тривиальным G -расслоением*.

Эквивариантное отображение $p : E \rightarrow B$ называется *локально тривиальным G -расслоением*, если для произвольной точки $b \in B$ существует такая ее инвариантная окрестность U , что $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow U$ является тривиальным G -расслоением.

Из теоремы 7 следует, что если B паракомпактное G -пространство, то локально тривиальное G -расслоение $p : E \rightarrow B$ является G -расслоением Гуревича.

Определение 3. Эквивариантное отображение $p : E \rightarrow B$ назовем *слабо локально тривиальным G -расслоением*, если для произвольной точки G -пространства B существуют открытая инвариантная окрестность U этой точки и эквивариантное отображение $\omega : U \times p^{-1}(U) \rightarrow p^{-1}(U)$, что

- (i) $p \circ \omega(b, e) = b$ для всех $(b, e) \in U \times p^{-1}(U)$,
- (ii) $\omega(p(e), e) = e$ для всех $e \in p^{-1}(U)$.

Условие (i) последнего определения означает, что композиция

$$U \times p^{-1}(U) \xrightarrow{\omega} p^{-1}(U) \xrightarrow{p} U$$

представляет собой проекцию на первый сомножитель. Очевидно, что локально тривиальное G -расслоение $p : E \rightarrow B$ является слабо локально тривиальным G -расслоением. Но, в отличие от тривиального G -расслоения, эквивариантное отображение $\omega : U \times p^{-1}(U) \rightarrow p^{-1}(U)$ в определении 3, вообще говоря, не является эквивариантным гомеоморфизмом.

Лемма 3. Слабо локально тривиальное G -расслоение $p : E \rightarrow B$ является локальным G -расслоением Гуревича.

Доказательство. Пусть $b_0 \in B$ — произвольная точка. Рассмотрим инвариантную окрестность U этой точки и эквивариантное отображение $\omega : U \times p^{-1}(U) \rightarrow E$, которое удовлетворяет условиям (i) и (ii) определения 3. Докажем, что $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow U$ является G -расслоением Гуревича. Определим отображение $\lambda : \Delta \rightarrow (p^{-1}(U))^I$ формулой $\lambda(e, \alpha)(t) = \omega(\alpha(t), e)$. Несложно проверить, что λ является накрывающей G -функцией для G -отображения $p|_{p^{-1}(U)}$. $\square$

Из последней леммы, учитывая теорему 7, непосредственно получаем следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть $p : E \rightarrow B$ — слабо локально тривиальное G -расслоение, где B — паракомпактное G -пространство. Тогда $p : E \rightarrow B$ является G -расслоением Гуревича.

Обратное утверждение верно при достаточно слабых ограничениях на G -пространство B (см. теорему 10).

Определение 4. G -пространство X назовем *эквивариантно равномерно локально стягиваемым*, если для произвольной точки $x_0 \in X$ существует такая инвариантная окрестность U этой точки и такое эквивариантное отображение $\sigma : U \times U \times I \rightarrow X$, что выполняются следующие условия:

- (i) $\sigma(x, y, 0) = x$ и $\sigma(x, y, 1) = y$ для всех $(x, y) \in U \times U$,
- (ii) $\sigma(x, x, t) = x$ для всех $x \in U$ и $t \in I$.

Как показывает следующая лемма, эквивариантно равномерно локально стягиваемых G -пространств много.

Лемма 4. Произвольное G -ANR-пространство является эквивариантно равномерно локально стягиваемым.

Доказательство этой леммы простое и оно оставляется читателю.

Из леммы 4, в частности, следует, что G -CW-комплексы являются эквивариантно равномерно локально стягиваемыми G -пространствами.

Теорема 9. Пусть B — эквивариантно равномерно локально стягиваемое G -пространство. Тогда $p : E \rightarrow B$ является локальным G -расслоением Гуревича тогда и только тогда, когда $p : E \rightarrow B$ — слабо локально тривиальное G -расслоение.

Доказательство. Достаточность утверждения без дополнительных ограничений на G -пространство B доказана в лемме 3.

Докажем необходимость. Пусть $p : E \rightarrow B$ — локальное G -расслоение Гуревича. Для произвольной точки $b_0 \in B$ рассмотрим такую эквивариантную окрестность V точки b_0 , что $p|_{p^{-1}(V)} : p^{-1}(V) \rightarrow V$ является G -расслоением Гуревича. Пусть $\lambda : \Delta \rightarrow (p^{-1}(V))^I$ — накрывающая G -функция отображения $p|_{p^{-1}(V)}$. Так как B — эквивариантно равномерно локально стягиваемое G -пространство, то существуют такие инвариантная окрестность U точки b_0 , $U \subset V$, и эквивариантное отображение $\sigma : U \times U \times I \rightarrow B$, что выполняются условия $\sigma(b, b', 0) = b$, $\sigma(b, b', 1) = b'$ и $\sigma(b, b, t) = b$ для всех $b, b' \in U$ и $t \in I$. При этом инвариантную окрестность U можно выбрать так, что $\sigma(U \times U \times I) \subset V$. Для этого достаточно заметить, что $(b_0, b_0, I) \in \sigma^{-1}(V)$ и применить компактность I .

Пусть теперь $(b, e) \in U \times p^{-1}(U)$. Рассмотрим путь $\tilde{\alpha} \in B^I$, определенный формулой $\tilde{\alpha}(t) = \sigma(p(e), b, t)$. Заметим, что $\tilde{\alpha}$ соединяет точку $p(e)$ с точкой b . Определим эквивариантное отображение $\omega : U \times p^{-1}(U) \rightarrow p^{-1}(U)$ формулой

$$\omega(b, e) = \lambda(e, \tilde{\alpha})(1).$$

Несложно убедиться, что ω удовлетворяет условиям (i) и (ii) определения 3. $\square$

Из теорем 7 и 9 непосредственно получается следующая важная для применения теорема.

Теорема 10. Пусть B — паракомпактное и эквивариантно равномерно локально стягиваемое G -пространство. Тогда $p : E \rightarrow B$ является G -расслоением Гуревича тогда и только тогда, когда $p : E \rightarrow B$ — слабо локально тривиальное G -расслоение.

6. G -Расслоения со свойством единственности накрывающего пути. Говорят, что отображение $p : E \rightarrow B$ обладает *свойством единственности накрывающего пути*, если для любых двух путей $\alpha, \alpha' : I \rightarrow E$, которые удовлетворяют условиям $\alpha(0) = \alpha'(0)$ и $p \circ \alpha = p \circ \alpha'$, выполняется равенство $\alpha = \alpha'$.

Рассмотрим произвольные G -пространства E и B , где G — компактная топологическая группа.

Лемма 5. Пусть эквивариантное отображение $p : E \rightarrow B$ является расслоением Гуревича со свойством единственности накрывающего пути. Тогда $p : E \rightarrow B$ — G -расслоение Гуревича.

Доказательство. Пусть X — произвольное G -пространство, а $\tilde{f} : X \rightarrow E$ и $F : X \times I \rightarrow B$ — произвольные эквивариантные отображения, удовлетворяющие условиям $F(x, 0) = (p \circ \tilde{f})(x)$. Так как $p : E \rightarrow B$ — расслоение Гуревича, то существует такая гомотопия $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$, что $\tilde{F}(x, 0) = \tilde{f}(x)$ и $p \circ \tilde{F} = F$. Для завершения доказательства достаточно показать, что накрывающая гомотопия $\tilde{F}$ на самом деле является эквивариантной накрывающей гомотопией. Рассмотрим пути $\alpha, \alpha' : I \rightarrow E$, определенные формулами

$$\alpha(t) = \tilde{F}(gx, t) \text{ и } \alpha'(t) = g\tilde{F}(x, t),$$

где $g \in G$, $x \in X$ — произвольные фиксированные элементы. Заметим, что

$$\alpha(0) = \tilde{F}(gx, 0) = \tilde{f}(gx) = g\tilde{f}(x), \quad \alpha'(0) = g\tilde{F}(x, 0) = g\tilde{f}(x).$$

Итак, $\alpha(0) = \alpha'(0)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} (p \circ \alpha)(t) &= (p \circ \tilde{F})(gx, t) = F(gx, t) = gF(x, t), \\ (p \circ \alpha')(t) &= p(g\tilde{F}(x, t)) = gp(\tilde{F}(x, t)) = g(p \circ \tilde{F})(x, t) = gF(x, t). \end{aligned}$$

Таким образом, $p \circ \alpha = p \circ \alpha'$. Значит, $\alpha = \alpha'$, т.е. $\tilde{F}(gx, t) = g\tilde{F}(x, t)$, поскольку $p : E \rightarrow B$ обладает свойством единственности накрывающего пути. $\square$

Из леммы 5 и следствия 1 непосредственно получается следующая теорема.

Теорема 11. Эквивариантное отображение $p : E \rightarrow B$ со свойством единственности накрывающего пути является G -расслоением Гуревича тогда и только тогда, когда оно является расслоением Гуревича.

Иначе говоря, в классе всех эквивариантных отображений со свойством единственности накрывающего пути понятия G -расслоения Гуревича и расслоения Гуревича совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Геворкян П. С., Хименес Р. Об эквивариантных расслоениях G -CW-комплексов // Мат. сб. — 2019. — 210, № 10. — С. 91–98.
2. Спеньер Э. Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.
3. tom Dieck T. Transformation Groups. — Walter de Gruyter, 1987.
4. Dugundji J. Topology. — Boston, Massachusetts: Allyn and Bacon, 1960.
5. James I. M., Segal G. B. On equivariant homotopy type // Topology. — 1978. — 17. — P. 267–272.
6. Hurewicz W. On the concept of fiber space // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1955. — 41. — P. 956–961.
7. May J., Sigurdsson J. Parametrized Homotopy Theory. — Am. Math. Soc., 2006.

Геворкян Павел Самвелович

Московский педагогический государственный университет

E-mail: pgev@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 31–40
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-31-40

УДК 514.76

ПРОСТРАНСТВО АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ ПОЧТИ ЭРМИТОВА МНОГООБРАЗИЯ

© 2020 г. Ю. А. ГОРГИНЯН, Л. А. ИГНАТОЧКИНА

Аннотация. Рассмотрены аффинные связности, определяемые почти эрмитовой структурой гладкого многообразия. Доказано, что аффинное пространство рассмотренных связностей имеет размерность 12 тогда и только тогда, когда форма Ли почти эрмитовой структуры отлична от нуля. Найдены связности, которые задают постримановы геометрии. В классе W_4 найдены почти эрмитовы связности. Рассмотрено конформное преобразование почти эрмитовой структуры и аффинное отображение связностей, порождаемое этим преобразованием. Найдена связность, инвариантная относительно этого отображения.

Ключевые слова: аффинная связность, почти эрмитово многообразие, конформное преобразование.

THE SPACE OF AFFINE CONNECTIONS OF AN ALMOST HERMITIAN MANIFOLD

© 2020 YU. A. GORGINYAN, L. A. IGNATOCHKINA

ABSTRACT. We consider affine connections determined by an almost Hermitian structure of a smooth manifold. We prove that the affine space of connections considered has dimension 12 if and only if the Lie form of the almost Hermitian structure is nonzero. We find connections that define post-Riemannian geometries and almost Hermitian connections in the class W_4 . We examine a conformal transformation of an almost Hermitian structure and an affine mapping of connections generated by this transformation and find a connection invariant under this mapping.

Keywords and phrases: affine connection, almost Hermitian manifold, conformal transformation.

AMS Subject Classification: 53B05, 51E15

1. Введение. В настоящее время для решения задач в области космологии активно используется аппарат современной геометрии. Обобщенная теория гравитации потребовала использования многообразий, структура которых сложнее, чем структура пространств Римана (см. [1]). Пространство Римана характеризуется наличием псевдоримановой метрики и римановой связности. Риманова связность однозначно определяется метрикой: метрика в ней имеет нулевой ковариантный дифференциал и кручение этой связности равно нулю. Для проведения исследований в области космологии таких объектов на гладком многообразии оказалось недостаточно. Потребовалось ввести псевдориманову метрику и аффинную связность, не зависящую от нее. В этом случае кроме кривизны, появлялись еще две, вообще говоря, не нулевые характеристики связности: кручение и тензор неметричности. Пара, состоящая из псевдоримановой метрики и аффинной связности, называется аффинно-метрической структурой на многообразии. Среди аффинно-метрических структур выделяются те, для которых тензор неметричности распадается в тензорное произведение 1-формы и метрики. Добавляя к этому условию требования на тензор неметричности, либо на кручение, получают еще два вида аффинно-метрических структур,

которые представляют интерес в физике. Этот интерес обусловлен тем, что в четырехмерных пространствах с аффинной связностью и метрикой лоренцевой сигнатуры причинная структура сохраняется тогда и только тогда, когда тензор неметричности распадается в тензорное произведение 1-формы и метрики (см. [1, с. 24]). Указанные аффинно-метрические структуры задают на многообразиях геометрии, которые называются постримановыми.

Классическим объектом в геометрии пространств Римана является конформное преобразование метрики. Оно однозначно определяет конформное преобразование римановой связности. В постримановых геометриях, так как метрика и связность независимы друг от друга, возникает необходимость в обобщении понятия конформного преобразования, а именно, кроме классического конформного преобразования метрики, требуется еще задание преобразования связности, зависящее или не зависящее от преобразования метрики. Основным критерием выбора таких преобразований в физике является сохранение причинной структуры. Различные виды обобщений конформных преобразований приведены в монографии [1].

В настоящей работе были рассмотрены четномерные многообразия с псевдоримановой метрикой и почти комплексной структурой, согласованной с ней. Такие многообразия называются почти эрмитовыми. Наличие почти комплексной структуры позволило построить некоторое конечномерное аффинное пространство аффинных связностей, в котором оказались связности, задающие постримановы геометрии для четномерных многообразий с псевдоримановой метрикой четной сигнатуры. Конформное преобразование почти эрмитовой структуры естественным образом определило множество отображений связностей, среди которых оказались как аналоги некоторых из приведенных в [1], так и не аналогичные им.

2. Почти эрмитовы многообразия и расслоение A -реперов. Почти эрмитовой структурой на гладком многообразии M называется пара тензорных полей (J, g) , где J — тензорное поле типа $(1, 1)$, $J^2 = -\text{id}$, g — псевдориманова метрика на M , согласованная с J , т.е. $g(JX, JY) = g(X, Y)$ для любых векторных полей X, Y на M (см. [4]). Тензорное поле J называется почти комплексной структурой.

Так как необходимым условием существования почти эрмитовой структуры на гладком многообразии является его четномерность (а также ориентируемость), обозначим размерность M через $2n$, $n > 1$.

На почти эрмитовом многообразии определяется *кэлера форма* $F(X, Y) = g(JX, Y)$ и *форма Ли* $\alpha(X) = 1/(1-n)\delta F(JX)$, где δ — оператор кодифференцирования (см. [4, 7]). Векторное поле ξ двойственное форме Ли, т.е. $g(\xi, X) = \alpha(X)$, называется *вектором Ли*.

Договоримся, что индексы $a, b, c, d, \dots$ (начало латинского алфавита) будут пробегать значения от 1 до n , индексы $i, j, k, l, \dots$ (вторая половина латинского алфавита) будут пробегать значения от 1 до $2n$ и $\hat{a} = a + n$.

Мы будем проводить исследования, используя присоединенную G -структуру, которая состоит из реперов $p = (m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$ или, короче, $p = (m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$, где $a = 1, \dots, n$, $\hat{a} = n+1, \dots, 2n$. Они называются A -реперами. Векторы A -реперов получаются из ортонормированного относительно эрмитовой формы $\langle\langle X, Y \rangle\rangle = g(X, Y) + ig(X, JY)$, $X, Y \in T_m(M)$ репера $(m, e_1, \dots, e_n)$ комплексного векторного пространства $T_m(M)$ по формулам

$$\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a), \quad \varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}(e_a),$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} - iJ), \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\text{id} + iJ)$$

(см. [4]).

Задание тензорного поля на многообразии M равносильно заданию системы функций на пространстве расслоения реперов. Эти функции называются *компонентами тензорного поля* на пространстве расслоения A -реперов. В частности, для почти комплексной структуры J система функций $\{J_j^i(p)\}$ на пространстве расслоения всех комплексных реперов определяется формулой $J_m^C(\varepsilon_i) = J_i^j(p)\varepsilon_j$, а для псевдоримановой метрики g система функций $\{g_{ij}(p)\}$ определяется формулой $g_{ij}(p) = g_m^C(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$. Здесь $p = (m, \varepsilon_i)$, $m \in M$ — произвольный комплексный репер, знак $\mathbb{C}$

обозначает комплексификацию тензора, а $J_m^{\mathbb{C}}$ — значение тензорного поля $J^{\mathbb{C}}$ в точке m (для g аналогично).

На пространстве расслоения A -реперов эти системы функций имеют простой вид:

$$(J_j^i) = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_{n,s} \\ I_{n,s} & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

где $I_{n,s}$ — матрица порядка n , на диагонали стоят числа 1 в количестве $n - s$ штук и -1 в количестве s штук, $2s$ — индекс метрики g , а $i = \sqrt{-1}$ (см. [4]).

Обозначим через $\{\alpha_a, \alpha_{\hat{a}}\}$ компоненты формы Ли на пространстве расслоения A -реперов, а через $\{\xi^b, \xi^{\hat{b}}\}$ — компоненты вектора Ли ξ на пространстве расслоения A -реперов. В силу вида компонент метрики (g_{ij}) (см. (1)) очевидно, что

$$\xi^a = \varepsilon(a)\alpha_{\hat{a}}; \quad \xi^{\hat{a}} = \varepsilon(a)\alpha_a, \quad (2)$$

где $\varepsilon(a) = g_{a\hat{a}}$.

Для почти эрмитова многообразия определяются тензорные поля типа (2, 1) по формулам

$$B(X, Y) = \frac{1}{4}(\nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JY}(J)X), \quad C(X, Y) = -\frac{1}{4}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX)),$$

где ∇ — риманова связность метрики g . Они называются *виртуальным тензором* и *структурным тензором* соответственно. Их ненулевые компоненты на пространстве расслоения A -реперов связаны с компонентами ковариантного дифференциала J римановой связности по формулам

$$B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2}\varepsilon(b)J_{\hat{b},c}^a; \quad B_{ab}{}^c = \frac{i}{2}\varepsilon(b)J_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}; \quad \overline{B_{ab}{}^c} = B^{ab}{}_c. \quad (3)$$

$$C_{abc} = -\frac{i}{2}\varepsilon(b, c)J_{b,c}^{\hat{a}}; \quad C^{abc} = \frac{i}{2}\varepsilon(b, c)J_{\hat{b},\hat{c}}^a, \quad \overline{C_{abc}} = C^{abc}, \quad (4)$$

где $\varepsilon(b, c) = g_{b\hat{b}}g_{c\hat{c}}$ (см. [4]). Компоненты вектора Ли и виртуального тензора связаны равенствами

$$\xi^a = \frac{2}{n-1}B^{ab}{}_b; \quad \xi^{\hat{a}} = \frac{2}{n-1}B_{ab}{}^{\hat{b}} \quad (5)$$

(см. [4]). Для классификации используется также альтернированный структурный тензор, который также называют структурным тензором. Его компоненты имеют вид

$$B_{abc} = C_{a[bc]}; \quad B^{abc} = C^{a[bc]}.$$

Отметим, что в силу кососимметричности компонент C_{abc} по первым двум индексам, равенство $C_{abc} = 0$ равносильно равенству $B_{abc} = 0$.

3. Аффинно-метрическая геометрия гладкого многообразия. Пусть на гладком многообразии M заданы псевдориманова метрика g , и аффинная связность ∇ . Тогда (см. [3, с. 312]) *тензором неметричности* называется тензорное поле Q , определяемое формулой

$$Q(X, Y, Z) = -\nabla_X(g)(Y, Z).$$

Говорят (см. [3, с. 313]), что на многообразии M задана *геометрия Римана—Картана—Вейля*, если тензор неметричности имеет вид

$$Q(X, Y, Z) = W(X)g(Y, Z), \quad (6)$$

где X, Y, Z — векторные поля на многообразии M . При этом 1-форма W называется *формой Вейля*. Если тензор неметричности тождественно равен нулю, а кручение отлично от тождественного нуля, то говорят, что на многообразии задана *геометрия Римана—Картана*. Если тензор кручения равен нулю, а тензор неметричности имеет вид (6), то говорят, что на многообразии M задана *геометрия Римана—Вейля*. Отметим, что используются также иные названия указанных геометрий (см., например, диаграмму [6, с. 170], [1, с. 6]). Многообразие с геометрией Римана—Картана—Вейля называется многообразием Вейля—Картана (Weyl—Cartan manifolds), а многообразие с геометрией Римана—Вейля названы многообразиями Вейля (Weyl manifolds). Указанные геометрии также называют *постримановыми*.

4. Аффинное подпространство в пространстве аффинных связностей почти эрмитова многообразия. Пусть дано гладкое многообразие M размерности $2n$, $n > 1$, и почти эрмитова структура (J, g) на нем, α — форма Ли, ξ — вектор Ли. Рассмотрим множество линейных связностей (короче, связностей)

$$\begin{aligned} \Delta_X Y = & \nabla_X Y + \lambda_1 \alpha(X)Y + \lambda_2 \alpha(Y)X + \lambda_3 \alpha(JX)Y + \lambda_4 \alpha(JY)X + \\ & + \lambda_5 \alpha(X)JY + \lambda_6 \alpha(Y)JX + \lambda_7 \alpha(JX)JY + \lambda_8 \alpha(JY)JX + \lambda_9 g(X, Y)\xi + \\ & + \lambda_{10} g(JX, Y)\xi + \lambda_{11} g(X, Y)J\xi + \lambda_{12} g(JX, Y)J\xi, \end{aligned} \quad (7)$$

где λ_β , $\beta = 1, \dots, 12$ — произвольные вещественные числа.

Теорема 1. Если форма Ли α отлична от тождественного нуля, то множество связностей (7) является 12-мерным аффинным пространством A (12-мерной плоскостью в бесконечномерном аффинном пространстве связностей гладкого многообразия).

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \alpha(X)Y + \lambda_2 \alpha(Y)X + \lambda_3 \alpha(JX)Y + \lambda_4 \alpha(JY)X + \lambda_5 \alpha(X)JY + \\ & + \lambda_6 \alpha(Y)JX + \lambda_7 \alpha(JX)JY + \lambda_8 \alpha(JY)JX + \lambda_9 g(X, Y)\xi + \\ & + \lambda_{10} g(JX, Y)\xi + \lambda_{11} g(X, Y)J\xi + \lambda_{12} g(JX, Y)J\xi = 0. \end{aligned}$$

На пространстве расслоения A -реперов это равенство примет вид

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \alpha_i \delta_j^k + \lambda_2 \alpha_j \delta_i^k + \lambda_3 \alpha_l J_i^l \delta_j^k + \lambda_4 \alpha_l J_j^l \delta_i^k + \\ & + \lambda_5 \alpha_i J_j^k + \lambda_6 \alpha_j J_i^k + \lambda_7 \alpha_l J_i^l J_j^k + \lambda_8 \alpha_l J_j^l J_i^k + \lambda_9 g_{ij} \xi^k + \\ & + \lambda_{10} g_{lj} J_i^l \xi^k + \lambda_{11} g_{ij} J_l^l \xi^l + \lambda_{12} g_{lj} J_i^l J_l^k \xi^l = 0. \end{aligned}$$

В частности, при $i = a$, $j = b$, $k = c$ (индексы i, j, k пробегают значения от 1 до n) с учетом (2) получим

$$\left(\lambda_1 - \lambda_7 + i(\lambda_3 + \lambda_5) \right) \alpha_a \delta_b^c + \left(\lambda_2 - \lambda_8 + i(\lambda_4 + \lambda_6) \right) \alpha_b \delta_a^c = 0.$$

Положим сначала $c = b$ и $c \neq a$, а затем $c = a$ и $c \neq b$. Тогда для почти эрмитовых многообразий, для которых форма Ли отлична от тождественного нуля, получаем

$$\lambda_1 - \lambda_7 = 0, \quad \lambda_3 + \lambda_5 = 0, \quad \lambda_2 - \lambda_8 = 0, \quad \lambda_4 + \lambda_6 = 0. \quad (8)$$

Для случая $i = \hat{a}$, $j = b$, $k = c$ получаем

$$\left(\lambda_1 + \lambda_7 - i\lambda_3 + i\lambda_5 \right) \varepsilon(a) \xi^a \delta_b^c + \left(\lambda_9 + \lambda_{12} - i\lambda_{10} + i\lambda_{11} \right) \varepsilon(a) \xi^c \delta_b^a = 0.$$

Аналогично предыдущему случаю, положив сначала $c = b$ и $c \neq a$, а затем $c = a$ и $c \neq b$, находим

$$\lambda_1 + \lambda_7 = 0, \quad \lambda_5 - \lambda_3 = 0, \quad \lambda_9 + \lambda_{12} = 0, \quad \lambda_{10} - \lambda_{11} = 0; \quad (9)$$

Наконец, для случая $i = a$, $j = \hat{b}$, $k = c$ имеем

$$\left(\lambda_2 + \lambda_8 - i\lambda_4 + i\lambda_6 \right) \varepsilon(b) \xi^b \delta_a^c + \left(\lambda_9 - \lambda_{12} + i\lambda_{10} + i\lambda_{11} \right) \varepsilon(b) \xi^c \delta_a^b = 0.$$

Тогда

$$\lambda_2 + \lambda_8 = 0, \quad \lambda_6 - \lambda_4 = 0, \quad \lambda_9 - \lambda_{12} = 0, \quad \lambda_{11} + \lambda_{10} = 0. \quad (10)$$

Объединяя уравнения (8), (9), (10), получим систему уравнений, из которой следует, что $\lambda_\beta = 0$, $\beta = 1, \dots, 12$. Здесь мы учли, что форма Ли тождественно равна нулю тогда и только тогда, когда вектор Ли тождественно равен нулю, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 2. Для классов $\{0\}$, W_1 , W_2 , W_3 , $W_1 \oplus W_2$, $W_1 \oplus W_3$, $W_2 \oplus W_3$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ почти эрмитовых многообразий из классификации Грея—Хервеллы (см. [4, 7]) аффинное пространство аффинных связностей (7) тривиально (состоит только из римановой связности псевдоримановой метрики g). Для остальных восьми классов W_4 , $W_1 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_4$, $W_3 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ (в случае, когда многообразие не содержится в меньшем классе из указанной классификации) пространство связностей (7) 12-мерно.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем рассматривать нетривиальный случай. Вычислим тензор неметричности (6) для связностей (7). Так как

$$Q(X, Y, Z) = -\Delta_X(g)(Y, Z) = g(\Delta_X Y, Z) + g(Y, \Delta_X Z),$$

то с учетом (7) получим

$$\begin{aligned} Q(X, Y, Z) = & 2(\lambda_1 \alpha(X) + \lambda_3 \alpha(JX))g(Y, Z) + (\lambda_2 + \lambda_9)(\alpha(Y)g(X, Z) + \alpha(Z)g(X, Y)) + \\ & + (\lambda_4 - \lambda_{11})(\alpha(JY)g(X, Z) + \alpha(JZ)g(X, Y)) + (\lambda_6 + \lambda_{10})(\alpha(Y)g(JX, Z) + \alpha(Z)g(JX, Y)) + \\ & + (\lambda_8 - \lambda_{12})(\alpha(JY)g(JX, Z) + \alpha(JZ)g(JX, Y)). \end{aligned} \quad (11)$$

На пространстве расслоения A -реперов получим

$$\begin{aligned} Q_{ijk} = -g_{jk|i} = & 2(\lambda_1 \alpha_i + \lambda_3 \alpha_l J_i^l)g_{jk} + (\lambda_2 + \lambda_9)(\alpha_j g_{ik} + \alpha_k g_{ij}) + \\ & + (\lambda_4 - \lambda_{11})(\alpha_l J_j^l g_{ik} + \alpha_l J_k^l g_{ij}) + (\lambda_6 + \lambda_{10})(\alpha_j g_{lk} J_i^l + \alpha_k g_{lj} J_i^l) + \\ & + (\lambda_8 - \lambda_{12})(\alpha_l J_j^l g_{tk} J_i^t + \alpha_l J_k^l g_{tj} J_i^t), \end{aligned}$$

где $\{g_{jk|i}\}$ — компоненты ковариантного дифференциала метрики g в связности $\hat{\nabla}$. В частности, для $i = a, j = b, k = c$ получим

$$Q_{abc} = -g_{bc|a} = 0. \quad (12)$$

При $i = \hat{a}, j = b, k = c$ получаем

$$Q_{\hat{a}bc} = -g_{bc|\hat{a}} = (\lambda_2 + \lambda_9 + \lambda_8 - \lambda_{12} + i(\lambda_4 - \lambda_{11} - \lambda_6 - \lambda_{10}))(\alpha_b \delta_c^a + \alpha_c \delta_b^a). \quad (13)$$

При $i = a, j = \hat{b}, k = c$ получим

$$Q_{a\hat{b}c} = -g_{\hat{b}c|a} = 2(\lambda_1 + i\lambda_3)\alpha_a \delta_c^b + (\lambda_2 + \lambda_9 - \lambda_8 + \lambda_{12} + i(\lambda_4 - \lambda_{11} + \lambda_6 + \lambda_{10}))\alpha_c \delta_a^b. \quad (14)$$

Остальные компоненты тензора неметричности на пространстве расслоения A -реперов получаются из приведенных выше с использованием симметричности тензора неметричности по последним двум аргументам и комплексной сопряженности его компонент. Например, $Q_{\hat{a}b\hat{c}} = \bar{Q}_{a\hat{b}c}$.

Тензор кручения S связности Δ из (7) имеет вид

$$\begin{aligned} S(X, Y) = & (\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha(X)Y - \alpha(Y)X) + (\lambda_3 - \lambda_4)(\alpha(JX)Y - \alpha(JY)X) + \\ & + (\lambda_5 - \lambda_6)(\alpha(X)JY - \alpha(Y)JX) + (\lambda_7 - \lambda_8)(\alpha(JX)JY - \alpha(JY)JX) + \\ & + 2\lambda_{10}g(JX, Y)\xi + 2\lambda_{12}g(JX, Y)J\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

На пространстве расслоения A -реперов получаем

$$\begin{aligned} S_{ij}{}^k = & (\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_i \delta_j^k - \alpha_j \delta_i^k) + (\lambda_3 - \lambda_4)(\alpha_l J_i^l \delta_j^k - \alpha_l J_j^l \delta_i^k) + \\ & + (\lambda_5 - \lambda_6)(\alpha_i J_j^k - \alpha_j J_i^k) + (\lambda_7 - \lambda_8)(\alpha_l J_i^l J_j^k - \alpha_l J_j^l J_i^k) + \\ & + 2\lambda_{10}g_{lj} J_i^l \xi^k + 2\lambda_{12}g_{lj} J_i^l J_t^k \xi^t. \end{aligned}$$

Запишем существенные группы компонент тензора кручения (остальные группы компонент получаются из свойства кососимметричности тензора кручения и с помощью комплексного сопряжения):

$$S_{ab}{}^c = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_8 - \lambda_7 + i(\lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6))(\alpha_a \delta_b^c - \alpha_b \delta_a^c); \quad S_{ab}{}^{\hat{c}} = 0. \quad (16)$$

$$S_{\hat{a}b}{}^c = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_7 - \lambda_8 + i(\lambda_4 - \lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_6))\varepsilon(a)\xi^a \delta_b^c + 2(\lambda_{12} - i\lambda_{10})\xi^c \delta_b^a. \quad (17)$$

Вычислим ковариантный дифференциал J в связности Δ . Так как

$$\Delta_X(J)Y = \Delta_X(JY) - J\Delta_X Y,$$

с учетом (7) получим

$$\begin{aligned}\Delta_X(J)Y &= \nabla_X(J)Y + (\lambda_2 + \lambda_8)(\alpha(JY)X - \alpha(Y)JX) + (\lambda_6 - \lambda_4)(\alpha(Y)X + \alpha(JY)JX) + \\ &+ (\lambda_9 - \lambda_{12})(g(X, JY)\xi - g(X, Y)J\xi) + (\lambda_{10} + \lambda_{11})(g(X, Y)\xi + g(X, JY)J\xi).\end{aligned}$$

На пространстве расслоения A -реперов получаем

$$\begin{aligned}J_{j|i}^k &= J_{j,i}^k + (\lambda_2 + \lambda_8)(\alpha_l J_j^l \delta_i^k - \alpha_j J_i^k) + (\lambda_6 - \lambda_4)(\alpha_j \delta_i^k + \alpha_l J_j^l J_i^k) + \\ &+ (\lambda_9 - \lambda_{12})(g_{il} J_j^l \xi^k - g_{ij} J_i^k \xi^l) + (\lambda_{10} + \lambda_{11})(g_{ij} \xi^k + g_{il} J_j^l J_m^k \xi^m).\end{aligned}$$

Запишем существенные группы компонент для ковариантного дифференциала J в связности Δ (остальные группы компонент будут получаться с помощью комплексного сопряжения):

$$J_{b|a}^c = J_{b,a}^c = 0; \quad J_{b|\hat{a}}^c = J_{b,\hat{a}}^c = 0; \quad J_{b|a}^{\hat{c}} = J_{b,a}^{\hat{c}}; \quad (18)$$

$$J_{\hat{b}|a}^c = J_{\hat{b},a}^c + 2\left(\lambda_6 - \lambda_4 + i(\lambda_2 + \lambda_8)\right)\varepsilon(b)\xi^b \delta_a^c + 2\left(\lambda_{10} + \lambda_{11} - i(\lambda_9 - \lambda_{12})\right)\varepsilon(b)\xi^c \delta_a^b. \quad (19)$$

5. Структура пространства A -аффинных связностей. Пусть дано произвольное почти эрмитово многообразие, для которого пространство A не тривиально. Выясним, есть ли среди связностей (7) те, которые задают вместе с метрикой g геометрии Римана—Картана—Вейля, Римана—Картана, Римана—Вейля.

Тензор неметричности Q имеет вид (6) тогда и только тогда, когда на пространстве расслоения A -реперов имеет вид $Q_{ijk} = W_i g_{jk}$. Существенными равенствами будут следующие (остальные будут получаться из них с помощью свойства симметричности Q по последним индексам и с помощью комплексного сопряжения):

$$Q_{abc} = 0; \quad Q_{\hat{a}bc} = 0; \quad Q_{a\hat{b}c} = W_a \delta_c^b.$$

Сравнивая эти равенства соответственно с (12), (13), (14), получаем, что тензор неметричности представим в виде (6) тогда и только тогда, когда

$$\lambda_2 + \lambda_9 = 0; \quad \lambda_8 - \lambda_{12} = 0; \quad \lambda_4 - \lambda_{11} = 0; \quad \lambda_6 + \lambda_{10} = 0. \quad (20)$$

Эти уравнения задают 8-мерную плоскость Π в A с координатами $(\lambda_1, \dots, \lambda_8)$. Подставляя эти равенства в (11), получаем, что тензор неметричности Q и форма Вейля W в этом случае имеют вид

$$Q(X, Y, Z) = 2\left(\lambda_1 \alpha(X) + \lambda_3 \alpha(JX)\right)g(Y, Z); \quad W(X) = 2\left(\lambda_1 \alpha(X) + \lambda_3 \alpha(JX)\right). \quad (21)$$

Рассмотрим Π как декартово произведение 2-плоскости Σ с координатами $(\lambda_1, \lambda_3) \equiv (\lambda_1, 0, \lambda_3, 0, \dots, 0)$ и 6-плоскости F с координатами $(\lambda_2, \lambda_4, \dots, \lambda_8) \equiv (0, \lambda_2, 0, \lambda_4, \dots, \lambda_8)$. Тогда Π можно рассматривать как тотальное пространство тривиального расслоения с 2-мерной базой Σ и с 6-мерными слоями — 6-плоскостями, параллельными F . Проекция $\pi: \Pi \rightarrow \Sigma$ задается так: $(\lambda_1, \dots, \lambda_8) \rightarrow (\lambda_1, \lambda_3)$. Каждый слой состоит из связностей, имеющих один и тот же тензор неметричности Q и форму Вейля (21). Из формул (21), (17), (16) следует, что слой, висящий над точкой $\lambda_1 = 0, \lambda_3 = 0$, состоит из связностей, задающих геометрию Римана—Картана и римановой связности.

Найдем связности в Π , которые задают геометрию Римана—Вейля. Согласно (17), (16), (20) они задаются уравнениями

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0; \quad \lambda_3 - \lambda_4 = 0; \quad \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0.$$

Это 2-плоскость, пересекающая каждый слой расслоения (Π, Σ, F, π) в единственной точке. При этом базу Σ (и висящий над ней слой) данная 2-плоскость пересекает только в римановой связности метрики g . Таким образом, 2-плоскость связностей, задающих геометрию Римана—Вейля (и риманову геометрию), является образом некоторого сечения расслоения (Π, Σ, F, π) . Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Множество связностей 12-мерного аффинного пространства A , задающих геометрию Римана—Картана—Вейля, является 8-плоскостью Π . Эта 8-плоскость может быть рассмотрена как тривиальное расслоение с 2-мерной базой и 6-мерными слоями. Связности, задающие геометрию Римана—Картана (и риманова связность), составляют один из слоев этого расслоения. Множество связностей, задающих геометрию Римана—Вейля (и риманова связность), являются образом некоторого сечения этого расслоения.

6. Ковариантный дифференциал почти комплексной структуры. Напомним, что связность Δ является почти эрмитовой тогда и только тогда, когда $\Delta g = \Delta J = 0$ (см. [5]). Отсюда следует, что почти эрмитовы связности определяют геометрию Римана—Картана. Из третьей группы равенств (18) вытекает, что, вообще говоря, в пространстве A почти эрмитовых связностей нет.

Выясним, существуют ли классы из классификации Грея—Хервеллы почти эрмитовых структур, для которых в пространстве A имеются почти эрмитовы связности.

Заметим, что в силу третьей группы равенств из (18) для выполнения равенства $\Delta J = 0$ необходимо, чтобы $J_{a,b}^c = 0$. В силу (4) это равносильно $C_{cab} = 0$ или, эквивалентно, $B_{abc} = 0$. Кроме того, потребуем чтобы

$$J_{b,c}^a = 2i\varepsilon(b)B^{ab}_c = 2i\varepsilon(b)\xi^{[a}\delta_c^{b]}.$$

Эти условия определяют класс W_4 (см. [4]). Тогда из равенств (19) и (3) получаем, что для $\Delta J = 0$ должно выполняться соотношение

$$2i\varepsilon(b)\xi^{[c}\delta_a^{b]} + 2(\lambda_6 - \lambda_4 - i(\lambda_2 + \lambda_8))\varepsilon(b)\xi^b\delta_a^c + 2(\lambda_{10} + \lambda_{11} - i(\lambda_9 - \lambda_{12}))\varepsilon(b)\xi^c\delta_a^b = 0.$$

Тогда

$$(i + 2(\lambda_{10} + \lambda_{11}) - i(\lambda_9 - \lambda_{12}))\varepsilon(b)\xi^c\delta_a^b + (-i + 2(\lambda_6 - \lambda_4) - i(\lambda_2 + \lambda_8))\varepsilon(b)\xi^b\delta_a^c = 0.$$

Рассуждая так же, как в теореме 1, получим

$$\lambda_{10} + \lambda_{11} = 0; \quad \lambda_6 - \lambda_4 = 0; \quad \lambda_9 - \lambda_{12} = \frac{1}{2}; \quad \lambda_2 + \lambda_8 = -\frac{1}{2}.$$

Для ковариантного постоянства метрики g необходимо и достаточно выполнение условий (20) и $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Объединяя полученные уравнения и записывая только линейно независимые уравнения, получаем

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_9 = \lambda_6 - \lambda_4 = \lambda_4 - \lambda_{11} = \lambda_{10} + \lambda_{11} = 0; \quad \lambda_2 + \lambda_8 = -\frac{1}{2}; \quad \lambda_9 - \lambda_{12} = \frac{1}{2}.$$

Эти уравнения задают 4-плоскость почти эрмитовых связностей. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 4. В пространстве A для почти эрмитовых многообразий класса W_4 существует 4-плоскость почти эрмитовых связностей.

Теорема 5. В 8-плоскости Π связностей, задающих геометрию Римана—Картана—Вейля, существует 6-плоскость связностей, для которых ковариантный дифференциал почти комплексной структуры совпадает с ее ковариантным дифференциалом в римановой связности.

Доказательство. Действительно, из (19) следует, что $\Delta J = \nabla J$ тогда и только тогда, когда

$$(\lambda_6 - \lambda_4 + i(\lambda_2 + \lambda_8))\varepsilon(b)\xi^b\delta_a^c + (\lambda_{10} + \lambda_{11} - i(\lambda_9 - \lambda_{12}))\varepsilon(b)\xi^c\delta_a^b = 0.$$

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 1, получаем систему

$$\lambda_6 - \lambda_4 = 0; \quad \lambda_2 + \lambda_8 = 0; \quad \lambda_{10} + \lambda_{11} = 0; \quad \lambda_9 - \lambda_{12} = 0.$$

Объединяя ее с системой (20), получаем 6 линейно независимых уравнений

$$\lambda_4 = \lambda_6; \quad \lambda_{11} = \lambda_6; \quad \lambda_{10} = -\lambda_6; \quad \lambda_8 = \lambda_9; \quad \lambda_{12} = \lambda_9; \quad \lambda_2 = -\lambda_9.$$

Эти уравнения задают 6-плоскость. Добавляя к этим уравнениям $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, получаем 4-плоскость связностей, задающих геометрию Римана—Картана, причем ковариантный дифференциал J в них совпадает с ковариантным дифференциалом J в римановой связности. $\square$

7. Отображения пространства аффинных связностей. Пусть на многообразии M задана почти эрмитова структура (J, g) . Рассмотрим конформно преобразованную почти эрмитову структуру $(J, \tilde{g} = e^{2f}g)$, где f — произвольная гладкая функция на многообразии M . Для нее построим множество связностей по формуле, аналогичной формуле (7):

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_X Y = & \tilde{\nabla}_X Y + \lambda_1 \tilde{\alpha}(X)Y + \lambda_2 \tilde{\alpha}(Y)X + \lambda_3 \tilde{\alpha}(JX)Y + \\ & + \lambda_4 \tilde{\alpha}(JY)X + \lambda_5 \tilde{\alpha}(X)JY + \lambda_6 \tilde{\alpha}(Y)JX + \lambda_7 \tilde{\alpha}(JX)JY + \lambda_8 \tilde{\alpha}(JY)JX + \\ & + \lambda_9 \tilde{g}(X, Y)\xi + \lambda_{10} \tilde{g}(JX, Y)\tilde{\xi} + \lambda_{11} \tilde{g}(X, Y)J\tilde{\xi} + \lambda_{12} \tilde{g}(JX, Y)J\tilde{\xi}, \end{aligned} \quad (22)$$

где λ_β , $\beta = 1, \dots, 12$, — произвольные вещественные числа, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\xi}$ — форма Ли и вектор Ли преобразованной почти эрмитовой структуры, $\tilde{\nabla}$ — риманова связность псевдоримановой метрики $\tilde{g}$. Согласно теореме 1 множество таких связностей является 12-мерным аффинным пространством в случае $\tilde{\alpha} \neq 0$ и состоит из одной связности $\tilde{\nabla}$ в противном случае. Обозначим полученное множество связностей $\tilde{A}$.

Зададим отображение σ пространства A в пространство $\tilde{A}$, поставив в соответствие связности Δ из (7) связность $\tilde{\Delta}$ из (22) с теми же значениями λ_β , $\beta = 1, \dots, 12$. Найдём явное задание этого отображения.

При конформном преобразовании почти эрмитовой структуры форма Ли и вектор Ли преобразуются по формулам

$$\tilde{\alpha}(X) = \alpha(X) + 2\beta(X); \quad \tilde{\xi} = e^{-2f}\xi + 2e^{-2f}\beta^\sharp, \quad (23)$$

где $\beta(X) = df(X)$, $\beta^\sharp$ — векторное поле, двойственное форме β , т.е. $g(X, \beta^\sharp) = \beta(X)$. Тогда из (22) и (7) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_X Y = & \Delta_X Y + (1 + 2\lambda_1)\beta(X)Y + (1 + 2\lambda_2)\beta(Y)X + (-1 + 2\lambda_9)g(X, Y)\beta^\sharp + \\ & + 2\lambda_3\beta(JX)Y + 2\lambda_4\beta(JY)X + 2\lambda_5\beta(X)JY + 2\lambda_6\beta(Y)JX + 2\lambda_7\beta(JX)JY + \\ & + 2\lambda_8\beta(JY)JX + 2\lambda_{10}g(JX, Y)\beta^\sharp + 2\lambda_{11}g(X, Y)J\beta^\sharp + 2\lambda_{12}g(JX, Y)J\beta^\sharp. \end{aligned} \quad (24)$$

Согласно теореме 2 пространство связностей A не тривиально для классов вида $U \oplus W_4$, где $U = W_1, W_2$ и т. д., кроме W_4 . В [7] для римановой метрики g доказано, что для многообразий этих классов с замкнутой (соответственно, точной) формой Ли локально (соответственно, глобально) существует такое конформное преобразование метрики, что преобразованная почти эрмитова структура принадлежит классу U . В этих классах согласно той же теореме 2 пространство связностей $\tilde{A}$ будет состоять из единственной римановой связности метрики $\tilde{g}$. Например, для класса $(W_1 \oplus W_4) \setminus W_1$ для каждого многообразия локально существует (и единственно) такое преобразование метрики $(J, \tilde{g})$, принадлежащее классу W_1 (см. [2]). В этом классе форма Ли тождественно равна нулю, и пространство связностей тривиально. Поэтому интерес представляет случай, когда аффинное пространство связностей A исходного многообразия является 12-мерным, а пространство $\tilde{A}$ тривиально. Тогда из формул (23) и (24) получаем, что

$$\tilde{\Delta}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}\alpha(X)Y - \frac{1}{2}\alpha(Y)X + \frac{1}{2}g(X, Y)\xi. \quad (25)$$

Согласно (11) тензор неметричности имеет вид

$$Q(X, Y, Z) = -\alpha(X)g(Y, Z),$$

а кручение равно нулю. Следовательно, эта связность задает геометрию Римана—Вейля.

Рассмотрим общий случай: обе формы Ли α и $\tilde{\alpha}$ отличны от нуля, A и $\tilde{A}$ являются 12-мерными аффинными пространствами, метрики g и $\tilde{g}$ являются псевдоримановыми. В этом случае отображение σ будет биекцией. Кроме того, из определения этого отображения следует, что оно

переведет 8-плоскость Π связностей, задающих геометрию Римана—Картана—Вейля, в 8-плоскость $\tilde{\Pi}$, также задающих геометрию Римана—Картана—Вейля, базу Σ — в базу $\tilde{\Sigma}$, сохраняя слои расслоения. Следовательно, является морфизмом расслоений.

Заметим, что если в формуле (24) положить

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_{10} = \lambda_{11} = \lambda_{12} = 0, \quad -\lambda_2 = \lambda_9 = \frac{1}{2},$$

то получится преобразование, которое рассматривалось в [8] в случае 4-мерного многообразия с лоренцевой метрикой и было названо *расширенным конформным преобразованием*.

Выясним, существуют ли инвариантные связности относительно отображения σ . Из (24) следует, что связности Δ будет инвариантной тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} (1 + 2\lambda_1)\beta(X)Y + (1 + 2\lambda_2)\beta(Y)X + (-1 + 2\lambda_9)g(X, Y)\beta^\# + 2\lambda_3\beta(JX)Y + \\ + 2\lambda_4\beta(JY)X + 2\lambda_5\beta(X)JY + 2\lambda_6\beta(Y)JX + 2\lambda_7\beta(JX)JY + 2\lambda_8\beta(JY)JX + \\ + 2\lambda_{10}g(JX, Y)\beta^\# + 2\lambda_{11}g(X, Y)J\beta^\# + 2\lambda_{12}g(JX, Y)J\beta^\# = 0. \end{aligned}$$

На пространстве расслоения A -реперов получим

$$\begin{aligned} (1 + 2\lambda_1)\beta_i\delta_j^k + (1 + 2\lambda_2)\beta_j\delta_i^k + (-1 + 2\lambda_9)g_{ij}(\beta^\#)^k + 2\lambda_3\beta_iJ_j^l\delta_j^k + \\ + 2\lambda_4\beta_lJ_j^l\delta_i^k + 2\lambda_5\beta_iJ_j^k + 2\lambda_6\beta_jJ_i^k + 2\lambda_7\beta_lJ_i^lJ_j^k + 2\lambda_8\beta_lJ_j^lJ_i^k + \\ + 2\lambda_{10}g_{lj}J_i^l(\beta^\#)^k + 2\lambda_{11}g_{ij}J_l^k(\beta^\#)^l + 2\lambda_{12}g_{lj}J_l^lJ_i^k(\beta^\#)^t = 0. \end{aligned}$$

Здесь четыре существенные группы равенств (остальные четыре группы получаются из них комплексным сопряжением). При $i = a, j = b, k = \hat{c}$ получим тривиальное тождество, поэтому выпишем только оставшиеся три группы:

$$\begin{aligned} (1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_7 + 2i\lambda_3 + 2i\lambda_5)\beta_a\delta_b^c + (1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_8 + 2i\lambda_4 + 2i\lambda_6)\beta_b\delta_a^c = 0, \\ (1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_7 + 2i\lambda_5 - 2i\lambda_3)\varepsilon(a)(\beta^\#)^a\delta_b^c + (-1 + 2\lambda_9 + 2\lambda_{12} + 2i\lambda_{11} - 2i\lambda_{10})\varepsilon(a)(\beta^\#)^c\delta_b^a = 0, \\ (1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_8 + 2i\lambda_6 - 2i\lambda_4)\varepsilon(b)(\beta^\#)^b\delta_a^c + (-1 + 2\lambda_9 - 2\lambda_{12} + 2i\lambda_{10} + 2i\lambda_{11})\varepsilon(b)(\beta^\#)^c\delta_a^b = 0. \end{aligned}$$

Пусть функция f , задающая конформное преобразование метрики g , не константа. Так как форма β и двойственное векторное поле $\beta^\#$ отличны от нулевых, из последних трех равенств получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_7 = 0; \quad \lambda_3 + \lambda_5 = 0; \quad 1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_8 = 0; \quad \lambda_4 + \lambda_6 = 0; \\ 1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_7 = 0; \quad \lambda_3 - \lambda_5 = 0; \quad -1 + 2\lambda_9 + 2\lambda_{12} = 0; \quad \lambda_{11} - \lambda_{10} = 0; \\ 1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_8 = 0; \quad \lambda_6 - \lambda_4 = 0; \quad -1 + 2\lambda_9 - 2\lambda_{12} = 0; \quad \lambda_{11} + \lambda_{10} = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем, что для отображения σ существует единственная инвариантная связность Δ ($\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_9 = -1/2$, остальные λ_β равны нулю):

$$\Delta_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}\alpha(X)Y - \frac{1}{2}\alpha(Y)X + \frac{1}{2}g(X, Y)\xi.$$

Из формулы (15) следует, что эта связность имеет нулевое кручение. Тензор неметричности имеет вид

$$Q(X, Y, Z) = -\alpha(X)g(Y, Z).$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 6. Пусть обе формы Li исходного и конформно преобразованного почти эрмитова многообразия отличны от тождественного нуля. Тогда существует единственная связность (7), инвариантная относительно отображения σ . Она задает геометрию Римана—Вейля, и ее форма Вейля с точностью до знака совпадает с формой Li .

Заметим, что полученная связность совпадает со связностью, которая была получена в случае тривиального пространства $\tilde{A}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабурова О. В., Фролов Б. Н.* Математические основы современной теории гравитации. — М.: Прометей, 2012.
2. *Игнаточкина Л. А.* Локальное строение многообразий Вайсмана—Грея// Совр. мат. прилож. Геом. анал. — 2015. — 96. — С. 70–80.
3. *Катанаев М. О.* Геометрические методы в математической физике/ [arXiv: 1311.0733v3 \[math.ph\]](#).
4. *Кириченко В. Ф.* Обобщенные классы Грея—Хервеллы и голоморфно-проективные преобразования обобщенных почти эрмитовых структур// Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — 69, № 5. — С. 107–132.
5. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Одесса: Печатный дом, 2013.
6. *Степанов С. Е., Гордеева И. А.* Геометрия многообразий Римана—Картана// Вестн. КемГУ. — 2001. — 3, № 1. — С. 168–181.
7. *Gray A., Hervella L.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants// Ann. Mat. Pura Appl. IV. — 1980. — 123. — P. 35–58.
8. *Smalley L. L.* Brans–Dicke-type models with nonmetricity// Phys. Rev. D. — 1986. — 33. — P. 3590–3593.

Горгинян Юлия Ашотовна

Московский педагогический государственный университет

E-mail: kiyulia0@gmail.com

Игнаточкина Лия Анатольевна

Московский педагогический государственный университет

E-mail: ignlia@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 41–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-41-49

УДК 514.765

О ПРЕДПИСАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОПЕРАТОРА СЕКЦИОННОЙ КРИВИЗНЫ НА ТРЕХМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2020 г. С. В. КЛЕПИКОВА, О. П. ХРОМОВА

Аннотация. В работе решена задача о предписанных значениях оператора секционной кривизны на трехмерном локально однородном лоренцевом многообразии. Получены теоремы о необходимых и достаточных условиях на оператор секционной кривизны такого многообразия.

Ключевые слова: алгебра Ли, группа Ли, левоинвариантная лоренцева метрика, оператор кривизны, спектр.

ON PRESCRIBED VALUES OF THE OPERATOR OF SECTIONAL CURVATURE ON THREE-DIMENSIONAL LOCALLY HOMOGENEOUS LORENTZIAN MANIFOLDS

© 2020 S. V. KLEPIKOVA, O. P. KHROMOVA

ABSTRACT. In this paper, the problem of prescribed values of the operator of sectional curvature on a three-dimensional locally homogeneous Lorentzian manifolds is solved. Necessary and sufficient conditions for the operator of sectional curvature of such manifolds are obtained.

Keywords and phrases: Lie algebra, Lie group, left-invariant Lorentzian metric, curvature operator, spectrum.

AMS Subject Classification: 53B20, 53C30, 53C50

1. Введение. Задачи о восстановлении (псевдо)риманова многообразия по предписанному спектру оператора кривизны являются актуальным направлением в исследовании операторов кривизны. Римановы локально однородные пространства с предписанными значениями спектра оператора Риччи были определены О. Ковальским и С. Никчевич в [10]. В случае левоинвариантных лоренцевых метрик на трехмерных группах Ли известна работа Дж. Кальварузо, О. Ковальского [7], в которой исследуется задача о существовании группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и заданными значениями спектра оператора Риччи. Имеется также несколько работ по этой проблеме в неоднородном случае (см. [6, 9]).

Подобные результаты были получены Д. Н. Оскорбиным, Е. Д. Родионовым, О. П. Хромовой для оператора одномерной кривизны и оператора секционной кривизны в случае трехмерных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00033 мол_а).

групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой (см. [1, 2]). Некоторые результаты о восстановлении (псевдо)римановых метрик и аффинных связностей по заданному тензору кривизны содержится в статье Й. Микеша и А. Ванжуровой [12], а также в монографии [11].

Основная цель данной работы — изучить вопрос о предписанных значениях оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ на трехмерных локально однородных лоренцевых многообразиях.

В отличие от случая римановой метрики, где всегда существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{K}$ диагональна, в лоренцевом случае могут возникнуть различные случаи, известные как *типы Сегре* (см. [4]). Возможны следующие варианты:

1. Тип Сегре $\{111\}$: $\mathcal{K}$ имеет три действительных собственных значения (возможно, совпадающих), каждому из которых соответствует одномерное собственное подпространство.
2. Тип Сегре $\{1z\bar{z}\}$: $\mathcal{K}$ имеет одно действительное и два комплексно сопряженных собственных значения.
3. Тип Сегре $\{21\}$: $\mathcal{K}$ имеет два действительных собственных значения (возможно, совпадающих), первый из которых имеет алгебраическую кратность 2, каждому из которых соответствует одномерное собственное подпространство.
4. Тип Сегре $\{3\}$: $\mathcal{K}$ имеет одно действительное собственное значение алгебраической кратности 3 и соответствующее ему одномерное собственное подпространство.

2. Трехмерные однородные лоренцевы многообразия. Пусть (M, g) — трехмерное однородное многообразие с лоренцевой метрикой g сигнатуры $(+, +, -)$. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивиты и через R тензор кривизны, который определим следующим образом:

$$R(X, Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X, Y]}Z.$$

Лоренцева метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на расслоении $\Lambda^2 M$ по правилу

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle = \det(\langle X_i, Y_j \rangle).$$

Тензор кривизны R в любой точке можно рассматривать как оператор $\mathcal{K}: \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$, называемый *оператором секционной кривизны* и определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{K}(Z \wedge T) \rangle = R(X, Y, Z, T).$$

Исследование операторов кривизны на трехмерных локально однородных лоренцевых многообразиях основывается на следующей теореме.

Теорема 1 (Дж. Кальварузо, см. [5]). *Пусть (M, g) — трехмерное локально однородное лоренцево многообразие. Тогда либо (M, g) является локально симметричным, либо оно локально изометрично трехмерной группе Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой.*

Следующая классификация для трехмерных лоренцевых групп Ли была получена в [3].

Теорема 2. *Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если G унимодулярна, то в алгебре Ли группы G существует такой псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:*

(а) *случай $\mathcal{A}_1$:*

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1,$$

где e_1 времениподобен;

(б) *случай $\mathcal{A}_2$:*

$$[e_1, e_2] = (1 - \lambda_2)e_3 - e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3 - (1 + \lambda_2)e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1,$$

где e_3 времениподобен;

(с) *случай $\mathcal{A}_3$:*

$$[e_1, e_2] = e_1 - \lambda e_3, \quad [e_1, e_3] = -\lambda e_2 - e_1, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1 + e_2 + e_3,$$

где e_3 времениподобен;

Таблица 1. Трехмерные унимодулярные алгебры Ли

Алгебра Ли	Ограничения на структурные константы			
	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_4$
$\mathfrak{su}(2)$	$(+, +, +)$	—	—	—
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$(+, +, -)$	$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$	$\lambda \neq 0$	$\lambda_3 \neq 0$
$\mathfrak{e}(2)$	$(+, +, 0)$	—	—	—
$\mathfrak{e}(1, 1)$	$(+, -, 0)$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ или $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$	$\lambda = 0$	$\lambda_3 = 0$
$\mathfrak{h}$	$(+, 0, 0)$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$	—	—
$\mathbb{R}^3$	$(0, 0, 0)$	—	—	—

(d) случай $\mathcal{A}_4$:

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_2, \quad [e_1, e_3] = -\beta e_1 - \alpha e_2, \quad [e_2, e_3] = -\alpha e_1 + \beta e_2,$$

где e_1 временноподобен и $\beta \neq 0$.

2. Если G не является унимодулярной, то в алгебре Ли группы G существует такой псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:

(a) случай $\mathcal{A}$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \lambda \sin \varphi e_1 - \mu \cos \varphi e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda \cos \varphi e_1 + \mu \sin \varphi e_2,$$

где e_3 временноподобен и $\sin \varphi \neq 0$, $\lambda + \mu \neq 0$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$;(a) случай $\mathcal{B}$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = t e_1 - s e_2, \quad [e_2, e_3] = p e_1 + q e_2,$$

с ненулевыми $\langle e_2, e_2 \rangle = -\langle e_1, e_3 \rangle = 1$ и $q \neq t$;(a) случай $\mathcal{C}_1$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = s e_1 + p e_2, \quad [e_2, e_3] = p e_1 + q e_2,$$

где e_2 временноподобен и $q \neq s$;(a) случай $\mathcal{C}_2$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = q e_1 - r e_2, \quad [e_2, e_3] = p e_1 + q e_2,$$

где e_2 временноподобен и $q \neq 0$, $p + r \neq 0$.

Замечание 1. Существуют ровно шесть неизоморфных трехмерных унимодулярных алгебр Ли и соответствующих им типов унимодулярных трехмерных групп Ли (см. [13]). Все они приведены в таблице 1 вместе с условиями на структурные константы, при которых алгебра Ли имеет данный тип. Если в таблице 1 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли, и столбца, соответствующему типу, стоит знак «—», значит, что для данной алгебры Ли невозможен соответствующий тип базиса. Для случая алгебры Ли $\mathcal{A}_1$ указаны только знаки тройки $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ с точностью до перестановки и замены знака. Отметим, что подобные базисы также были построены в [5, 8].

Следующий классификационный результат для случая трехмерных лоренцевых локально симметричных пространств был получен в [5].

Теорема 3. Трехмерное локально симметричное многообразие (M, g) локально изометрично одному из следующих многообразий:

- (I) лоренцевой пространственной форме $\mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{S}_1^3$ или $\mathbb{H}_1^3$ (с нулевой, положительной или отрицательной секционной кривизной соответственно);
 (II) прямому произведению $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{H}_1^2$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_1$ или $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$;

(III) многообразию с лоренцевой метрикой g , которое допускает такую локальную систему координат (u_1, u_2, u_3) , что метрический тензор имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f(u_2, u_3) \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $f(u_2, u_3) = u_2^2 \alpha + u_2 \beta(u_3) + \xi(u_3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, β, ξ — произвольные гладкие функции.

3. Трехмерные лоренцевы группы Ли. Далее под «трехмерной лоренцевой группой Ли $(G, \mathfrak{g})$ » будем понимать трехмерную группу Ли G с левоинвариантной лоренцевой метрикой g и метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Теперь мы готовы доказать следующую теорему.

Теорема 4. Трехмерная унимодулярная лоренцева группа Ли $(G, \mathcal{A}_1)$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$, а собственные значения k_1, k_2, k_3 удовлетворяют одному (или более) из условий:

- (i) $k_1 = k_2 = k_3 = 0$;
- (ii) ровно два из $k_1 + k_2, k_1 + k_3$ и $k_2 + k_3$ равны нулю;
- (iii) $(k_1 + k_2)(k_1 + k_3)(k_2 + k_3) < 0$.

Доказательство. В рассматриваемом случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ диагональна, причем собственные значения k_1, k_2, k_3 действительны и равны

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{1}{4}(\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2)^2 + \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_3), \\ k_2 &= -\frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2), \\ k_3 &= -\frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2 + \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2). \end{aligned}$$

Пусть

$$\mu_i = \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \delta_i \lambda_i,$$

где $\delta_1 = 1, \delta_2 = \delta_3 = -1$. Тогда

$$k_1 + k_2 = -2\mu_1\mu_2, \quad k_1 + k_3 = -2\mu_1\mu_3, \quad k_2 + k_3 = -2\mu_2\mu_3.$$

Предположим, что как минимум два из μ_i равны нулю. Тогда все три правые части в вышеприведенных уравнениях равны нулю, и система имеет единственное решение $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Пусть один из μ_i равен нулю; тогда ровно два из чисел $k_1 + k_2, k_1 + k_3, k_2 + k_3$ равны нулю.

Предположим, что $\mu_i \neq 0$; тогда

$$\mu_i^2 = -\frac{1}{2} \frac{(k_1 + k_2)(k_1 + k_3)(k_2 + k_3)}{(k_1 + k_2 + k_3 - k_i)^2},$$

и система разрешима тогда и только тогда, когда

$$(k_1 + k_2)(k_1 + k_3)(k_2 + k_3) < 0. \quad \square$$

Теорема 5. Трехмерная унимодулярная лоренцева группа Ли $(G, \mathcal{A}_2)$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с собственными значениями $k_1 = -k_2 = -k_3 \geq 0$ с точностью до переобозначения;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ с собственными значениями
 - (a) $k_1 = k_2 = 0$ или
 - (b) $k_2 < 0$.

Доказательство. В рассматриваемом случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ имеет вид

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_2 - \lambda_1 - \frac{1}{4}\lambda_1^2 & 2\lambda_2 - \lambda_1 \\ 0 & -2\lambda_2 + \lambda_1 & -2\lambda_2 + \lambda_1 - \frac{1}{4}\lambda_1^2 \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda_1 = 2\lambda_2$, то матрица диагонализируема с собственными значениями $k_1 = -k_2 = -k_3 \geq 0$. Иначе, матрица оператора $\mathcal{K}$ имеет следующую жорданову форму:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} -\lambda_1\lambda_2 + \frac{3}{4}\lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\lambda_1^2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\lambda_1^2 \end{pmatrix},$$

и собственные значения равны

$$k_1 = -\lambda_1\lambda_2 + \frac{3}{4}\lambda_1^2, \quad k_2 = -\frac{1}{4}\lambda_1^2 \leq 0.$$

Если $k_2 = 0$, то $\lambda_1 = 0$ и все собственные значения равны нулю.

Предположим, что $k_2 < 0$; тогда $\lambda_1 = \pm 2\sqrt{-k_2}$. Выражая λ_2 , получаем

$$\lambda_2 = \mp \frac{k_1 + 3k_2}{2\sqrt{-k_2}}.$$

□

Теорема 6. *Трехмерная унимодулярная лоренцева группа $Li(G, \mathcal{A}_3)$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{21\}$ с собственными значениями $k_1 = k_2 = 0$;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{3\}$ с собственным значением $k_1 < 0$.

Доказательство. В данном случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ имеет вид

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\lambda^2 & \lambda & -\lambda \\ \lambda & 2 - \frac{1}{4}\lambda^2 & -2 \\ \lambda & 2 & -2 - \frac{1}{4}\lambda^2 \end{pmatrix}$$

с совпадающими собственными значениями равными $-\lambda^2/4 \leq 0$. Если $\lambda = 0$, то $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{21\}$ и $k_1 = k_2 = 0$. Если $\lambda \neq 0$, то $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{3\}$ и $k_1 < 0$. □

Теорема 7. *Трехмерная унимодулярная лоренцева группа $Li(G, \mathcal{A}_4)$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ и $k_1 = k_2 = -k_3 < 0$ с точностью до переобозначения;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{z\bar{z}1\}$ и $k_1 + k_2 < 0$.

Доказательство. В данном случае оператор $\mathcal{K}$ имеет собственные значения

$$k_1 = \bar{k}_2 = -\beta^2 - \frac{1}{4}\lambda_3^2 \pm i\beta(2\alpha - \lambda_3), \quad k_3 = -\lambda_3\alpha + \frac{3}{4}\lambda_3^2 + \beta^2,$$

где i — мнимая единица.

Пусть $x = -\beta^2 - \lambda_3^2/4 < 0$ и $y = \beta(2\alpha - \lambda_3)$; тогда $k_1 = \bar{k}_2 = x + iy$. Если $\lambda_3 = 2\alpha$, то

$$k_3 = \alpha^2 + \beta^2 > 0, \quad x = -\alpha^2 - \beta^2 < 0, \quad y = 0.$$

Следовательно, $k_1 = k_2 = -k_3 < 0$, и собственные значения действительны.

Предположим, что $\lambda_3 \neq 2\alpha$; тогда

$$\beta = \frac{y}{2\alpha - \lambda_3} \neq 0, \quad k_3 + x = -\lambda_3\alpha + \frac{1}{2}\lambda_3^2.$$

Если $\lambda_3 = 0$, то

$$k_3 = \beta^2, \quad x = -\beta^2, \quad y = 2\alpha\beta.$$

Иначе $\lambda_3 \neq 0$ и $k_3 + x \neq 0$. Тогда

$$\alpha = \frac{\lambda_3^2 - 2k_3 - 2x}{2\lambda_3}, \quad \lambda_3 = \pm 2|k_3 + x| \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{(k_3 + x)^2 + y^2}}. \quad \square$$

Теорема 8. *Трехмерная неунимодулярная лоренцева группа Ли $(G, \mathcal{A})$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$, и собственные значения k_1, k_2, k_3 удовлетворяют одному (или более) из следующих условий:*

- (i) $k_1 = k_2 = k_3 > 0$;
- (ii) $k_1 k_3 \leq k_2^2 < \left(\frac{k_1 + k_3}{2}\right)^2$ и $k_2 < \frac{k_1 + k_3}{2}$ с точностью до переобозначения.

Доказательство. В данном случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ диагонализируема с действительными собственными значениями k_1, k_2, k_3 равными

$$k_1 = -\frac{1}{4}(\lambda + \mu)^2 \cos^2 \varphi + \lambda^2, \quad k_2 = -\frac{1}{4}(\lambda + \mu)^2 \cos^2 \varphi + \mu\lambda, \quad k_3 = -\frac{1}{4}(\lambda + \mu)^2 \cos^2 \varphi + \mu^2. \quad (1)$$

Отметим, что $k_1 - 2k_2 + k_3 = (\lambda - \mu)^2 \geq 0$. Если выполняется равенство нулю, то $\lambda = \mu \neq 0$ и $k_1 = k_2 = k_3 = \lambda^2 \sin^2 \varphi > 0$.

Предположим, что $k_1 - 2k_2 + k_3 > 0$ и $\lambda \neq \mu$. Рассмотрим разности

$$k_1 - k_2 = \lambda(\lambda - \mu), \quad k_1 - k_3 = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu) \neq 0, \quad k_3 - k_2 = \mu(\mu - \lambda).$$

В силу условий $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ система имеет решение

$$\lambda = \frac{|k_1 - k_2|}{\sqrt{k_1 - 2k_2 + k_3}}, \quad \mu = \frac{|k_2 - k_3|}{\sqrt{k_1 - 2k_2 + k_3}}.$$

Подставляя данное решение назад в (1), получаем

$$0 \leq \cos^2 \varphi = 4 \frac{k_2^2 - k_1 k_3}{(k_1 - k_3)^2} < 1.$$

Тогда необходимо $k_2^2 - k_1 k_3 \geq 0$ и $(k_1 + k_3)^2 - 4k_2^2 > 0$. $\square$

Теорема 9. *Трехмерная неунимодулярная лоренцева группа Ли $(G, \mathcal{B})$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ и $k_1 = -3k_2 = -3k_3 \geq 0$ с точностью до переобозначения;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ и $k_1 = -3k_2 \geq 0$.

Доказательство. В данном случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ имеет вид

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}s^2 & qs & ps - q^2 - qt \\ 0 & \frac{3}{4}s^2 & -qs \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}s^2 \end{pmatrix}.$$

Если $s = q = 0$ или $s = 0, q = -t$, то матрица оператора $\mathcal{K}$ тривиальна.

Если $ps - qt = 0$, то матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с собственными значениями $k_1 = 3s^2/4, k_2 = k_3 = -s^2/4$.

Иначе, матрица оператора $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ с собственными значениями $k_1 = 3s^2/4, k_2 = -s^2/4$. $\square$

Теорема 10. *Трехмерная неунимодулярная лоренцева группа Ли $(G, \mathcal{C}_1)$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с собственными значениями $k_2 \leq 0, k_3 \leq 0, k_2^2 + k_3^2 > 0, |k_1| \leq \sqrt{k_2 k_3}$ с точностью до переобозначения;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{1z\bar{z}\}$, причем $|k_1| \leq -\frac{k_2 + k_3}{2}$.

Доказательство. В данном случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ диагонализируема, а ее собственные значения k_1, k_2, k_3 равны

$$\begin{aligned} k_1 &= qs, \\ k_2 &= -\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}|q+s|\sqrt{(q-s)^2 - 4p^2}, \\ k_3 &= -\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}|q+s|\sqrt{(q-s)^2 - 4p^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим величину $k_2k_3 - k_1^2 = (q+s)^2p^2 \geq 0$. Если выполняется равенство нулю, то

$$p = 0, \quad s = \pm\sqrt{-k_2}, \quad q = \pm\sqrt{-k_3}, \quad k_1 = qs \quad \text{или} \quad q = -s, \quad k_1 = k_2 = k_3 = -s^2 < 0.$$

В противном случае

$$k_2k_3 - k_1^2 > 0, \quad p^2 = \frac{k_2k_3 - k_1^2}{(q+s)^2}.$$

Далее рассмотрим систему

$$k_1 = qs, \quad k_2 + k_3 = -q^2 - s^2 < 0,$$

имеющую решение

$$s = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{(k_2 + k_3)^2 - 4k_1^2} - 2(k_2 + k_3)}, \quad q = \frac{k_1}{s},$$

с необходимым условием $(k_2 + k_3)^2 - 4k_1^2 \geq 0$.

Отметим, что даже если k_2, k_3 — комплексно сопряженные собственные значения, то k_2k_3 и $k_2 + k_3$ действительны. $\square$

Теорема 11. *Трехмерная неунимодулярная лоренцева группа Ли (G, C_2) с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с собственными значениями $\left| \frac{k_2 + k_3}{2} \right| < -k_1$ с точностью до переобозначения;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{1z\bar{z}\}$, причем $\left| \frac{k_2 + k_3}{2} \right| < -k_1$.

Доказательство. В данном случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ диагонализируема с собственными значениями k_1, k_2, k_3 равными

$$\begin{aligned} k_1 &= -q^2 - \frac{1}{4}(p+r)^2 < 0, \\ k_2 &= \frac{1}{4}(p+r)^2 - q^2 + \frac{1}{2}|p+r|\sqrt{(p-r)^2 - 4q^2}, \\ k_3 &= \frac{1}{4}(p+r)^2 - q^2 - \frac{1}{2}|p+r|\sqrt{(p-r)^2 - 4q^2}. \end{aligned}$$

Имеем

$$k_2 + k_3 + 2k_1 = -4q^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad q = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-k_2 - k_3 - 2k_1}.$$

Пусть $x = p + r \neq 0$, $y = p - r$. Тогда

$$x^2 = k_2 + k_3 - 2k_1 > 0, \quad 4k_1^2 - 4k_2k_3 = y^2x^2 \geq 0.$$

Данная система имеет решение

$$x = \pm \sqrt{k_2 + k_3 - 2k_1}, \quad y = \pm 2 \frac{\sqrt{k_1^2 - k_2k_3}}{\sqrt{k_2 + k_3 - 2k_1}}.$$

Отметим, что даже если k_2, k_3 — комплексно сопряженные собственные значения, то k_2k_3 и $k_2 + k_3$ действительны. $\square$

4. Трехмерные локально симметричные лоренцевы многообразия. Теорема 3 позволяет разделить задачу изучения оператора секционной кривизны трехмерных локально симметричных лоренцевых многообразий на три подзадачи. В то же время, очевидно, что оператор секционной кривизны $\mathcal{K}$ диагоналируем для лоренцевых многообразий постоянной секционной кривизны $\mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{S}_1^3$ и $\mathbb{H}_1^3$ (т.е. $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$) и $\mathcal{K}$ имеет три совпадающих собственных значения (равных нулю, положительных или отрицательных соответственно).

В случае прямых произведений (случай (II) теоремы 3) оператор секционной кривизны $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с двумя равными нулю и третьим ненулевым собственными значениями.

В случае (III) теоремы 3 матрица оператора секционной кривизны имеет вид

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha/\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда либо оператор секционной кривизны $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с собственными значениями $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ для $\alpha = 0$; либо $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ с $k_1 = k_2 = 0$ для $\alpha \neq 0$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 12. *Трехмерное лоренцево локально симметричное многообразие с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с равными собственными значениями;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с двумя нулевыми и третьим ненулевым собственными значениями;
- (iii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ с нулевыми собственными значениями.

5. Оператор секционной кривизны на трехмерных локально однородных лоренцевых многообразиях. В данном разделе, используя результаты предыдущих разделов, мы определим возможный вид оператора секционной кривизны на трехмерных локально однородных лоренцевых многообразиях. Начнем со случая недиагоналируемого оператора секционной кривизны.

Теорема 13. *Трехмерное локально однородное лоренцево многообразие (M, g) с недиагоналируемым оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ и
 - (a) оба собственных значения равны нулю или
 - (b) $k_2 < 0$;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{3\}$ с отрицательным собственным значением;
- (iii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{1z\bar{z}\}$ и
 - (a) комплексно сопряженные собственные значения имеют отрицательную действительную часть, или
 - (b) $0 \leq \frac{k_2 + k_3}{2} < -k_1$.

Доказательство. Тип Сегре $\{12\}$ возможен только для трехмерных лоренцевых групп Ли $(G, \mathcal{A}_2)$, $(G, \mathcal{A}_3)$ и $(G, \mathcal{B})$ и для лоренцева локально симметричного пространства из теоремы 3 (случай (III)). Тогда случай (i) теоремы 13 следует из теорем 5, 6, 9 и 12.

Среди всех вариантов, перечисленных выше, тип Сегре $\{3\}$ возможен только для трехмерной группы Ли $(G, \mathcal{A}_3)$. Тогда из теоремы 6 следует случай (ii) данной теоремы.

Если $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{1z\bar{z}\}$, то (M, g) локально изометрично трехмерной лоренцевой группе Ли $(G, \mathcal{A}_4)$, $(G, \mathcal{C}_1)$ или $(G, \mathcal{C}_2)$. Тогда случай (iii) данной теоремы следует из теорем 7, 10 и 11.

□

Следующая теорема является следствием результатов предыдущих разделов.

Теорема 14. *Трехмерное локально однородное лоренцево многообразие (M, g) с недиагнализируемым оператором секционной кривизны K с типом Сегре $\{111\}$ существует тогда и только тогда, когда собственные значения k_1, k_2, k_3 удовлетворяют одному (или более) из следующих условий:*

- (i) *все собственные значения равны друг другу;*
- (ii) *два собственных значения равны нулю, а третье ненулевое;*
- (iii) *ровно два из чисел $k_1 + k_2, k_1 + k_3$ и $k_2 + k_3$ равны нулю;*
- (iv) *$(k_1 + k_2)(k_1 + k_3)(k_2 + k_3) < 0$;*
- (v) *с точностью до переобозначения*

$$k_2 k_3 \leq k_1^2 < \left(\frac{k_2 + k_3}{2} \right)^2 \quad \text{и} \quad k_1 < \frac{k_2 + k_3}{2};$$

- (vi) *с точностью до переобозначения*

$$k_2 < 0, \quad k_3 < 0, \quad |k_1| \leq \sqrt{k_2 k_3};$$

- (vii) *с точностью до переобозначения*

$$k_1 < - \left| \frac{k_2 + k_3}{2} \right|.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладунова О. П., Оскорбин Д. Н.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Изв. АлтГУ. — 2013. — 1-1 (77). — С. 19–23.
2. *Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д.* О спектре оператора кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Докл. РАН. — 2013. — 450, № 3. — С. 271–273.
3. *Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н.* Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Мат. тр. — 2006. — 9, № 1. — С. 130–168.
4. *Bueken P., Djorić M.* Three-dimensional Lorentz metrics and curvature homogeneity of order one // Ann. Glob. Anal. Geom. — 2000. — 18. — P. 85–103.
5. *Calvaruso G.* Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. — 2007. — 57. — P. 1279–1291.
6. *Calvaruso G.* Pseudo-Riemannian 3-manifolds with prescribed distinct constant Ricci eigenvalues // Differ. Geom. Appl. — 2008. — 26. — P. 419–433.
7. *Calvaruso G., Kowalski O.* On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds // Cent. Eur. J. Math. — 2009. — 7, № 1. — P. 124–139.
8. *Cordero L. A., Parker P. E.* Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups // Rend. Mat. — 1997. — 17. — P. 129–155.
9. *Kowalski O.* Nonhomogeneous Riemannian 3-manifolds with distinct constant Ricci eigenvalues // Nagoya Math. J. — 1993. — 132. — P. 1–36.
10. *Kowalski O., Nikčević S.* On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedic. — 1996. — № 1. — P. 65–72.
11. *Mikeš J., Stepanova E., Vanžurová A. et al.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacký University, 2015.
12. *Mikeš J., Vanžurová A.* Reconstruction of an affine connection in generalized Fermi coordinates // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2017. — 40, № 1. — P. 205–213.
13. *Milnor J.* Curvature of left invariant metric on Lie groups // Adv. Math. — 1976. — 21. — P. 293–329.

Клепикова Светлана Владимировна
Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: klepikova.svetlana.math@gmail.com

Хромова Олеся Павловна
Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: khromova.olesya@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 50–57
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-50-57

УДК 514.13, 514.752

О ГЕЛИКОИДАХ ДИНИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

© 2020 г. А. В. КОСТИН

Аннотация. Геликоид Дини — поверхность, полученная винтовым движением трактрисы. В работе рассматриваются различные аналоги геликоида Дини в трехмерном пространстве Минковского. В качестве профилей берутся нетривиальные псевдоевклидовы аналоги трактрисы, отличные от псевдоевклидовых окружностей. Показано, что на аналогах геликоида Дини в псевдоевклидовом пространстве индуцируется либо метрика плоскости Лобачевского, либо метрика плоскости де Ситтера, либо вырожденная метрика.

Ключевые слова: плоскость Лобачевского, плоскость де Ситтера, геликоид Дини.

ON DINI HELICOIDS IN THE MINKOWSKI SPACE

© 2020 А. V. KOSTIN

ABSTRACT. The Dini helicoid is a surface obtained by screw motion of the tractrix. In this paper, we consider various analogs of the Dini helicoid in the three-dimensional Minkowski space. As profiles, we take nontrivial pseudo-Euclidean analogs of the tractrix different from pseudo-Euclidean circles. We prove that on analogs of the Dini helicoid in a the pseudo-Euclidean space, one of the following metrics is induced: the metric of the Lobachevsky plane, the metric of the de Sitter plane, or the degenerate metric.

Keywords and phrases: Lobachevsky plane, de Sitter plane, Dini helicoid.

AMS Subject Classification: 53A35, 53B30

1. Предварительные сведения. Напомним, что трактрисой называется линия, обладающая постоянным отрезком касательной до некоторой фиксированной прямой. Геликоидом Дини (см. [7]) называется поверхность, полученная винтовым движением трактрисы (см. рис. 1):

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v, \\ y = a \sin u \sin v, \\ z = a \left(\cos u + \ln \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) \right) + b \cdot v. \end{cases} \quad (1)$$

Если меридиан поверхности вращения постоянной кривизны пространства Минковского выражается с помощью элементарных функций, то он обладает постоянным отрезком касательной. Это свойство меридиана аналогично свойству меридиана поверхностей вращения постоянной кривизны в евклидовом пространстве. Интегрируемый в элементарных функциях меридиан поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны евклидова пространства является трактрисой, постоянной положительной кривизны — окружностью. Трактриса обладает постоянным вещественным отрезком касательной до базы, окружность — постоянным мнимым отрезком касательной до изотропной прямой, проходящей через центр окружности. В пространстве

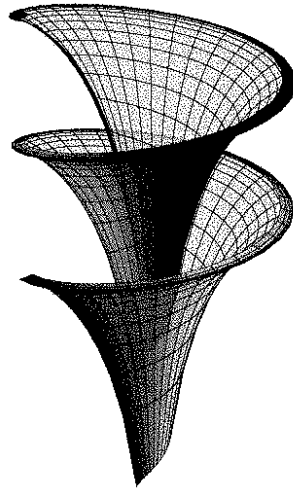


Рис. 1. Геликоид Дини

Минковского кроме окружностей с точностью до антидвижения есть еще два типа трактрис. Вид их представлен на рис. 2 и 3. Модуль отрезка касательной до оси абсцисс в стандартной псевдоевклидовой метрике $ds^2 = (dx_1)^2 - (dx_2)^2$ на обоих рисунках равен единице.

Если параметр такой трактрисы равен a , то ее можно задать следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x^1 = a(\operatorname{sh} t - \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} t)), \\ x^2 = a \operatorname{ch} t. \end{cases} \quad (2)$$

Каждая ветвь этой трактрисы имеет изотропную асимптоту.

Другой вид трактрис может быть параметрически задан следующим образом:

$$\begin{cases} x^1 = a \left(\ln \left(\operatorname{th} \frac{t}{2} \right) + \operatorname{ch} t \right), \\ x^2 = a \operatorname{sh} t. \end{cases} \quad (3)$$

Длина отрезка касательной до оси вращения в метрике $ds^2 = -(dx^1)^2 + (dx^2)^2$ у первой кривой равна a , у второй — $-a \cdot i$. При вращении их также образуются поверхности постоянной кривизны с метрикой

$$ds^2 = a^2 \frac{(du^1)^2 \pm (du^2)^2}{(u^2)^2}.$$

Касательная прямая и ось вращения для первой трактрисы являются прямыми разных типов, для второй трактрисы — прямыми одного типа.

Гауссову кривизну поверхности с невырожденной метрикой в трехмерном пространстве Минковского будем определять по формуле $K = \varepsilon h/g$, где g, h — дискриминанты первой и второй квадратичных форм соответственно, а $\varepsilon = \mathbf{n}^2 = -\operatorname{sign} g$. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей трехмерного пространства Минковского изложена в работе [11]. Поверхностям вращения в этом пространстве посвящена работа [5]. Поверхности вращения эволют рассматриваемых в данной работе трактрис (см. [3]) имеют нулевую среднюю кривизну, как и соответствующая поверхность в евклидовом пространстве. Поверхности такого типа в псевдоевклидовом пространстве рассматриваются в работах [4, 12].

2. Геликоиды Дини в пространстве Минковского. Винтовыми движениями меридианов поверхностей вращения постоянной кривизны пространства Минковского можно получить различные аналоги геликоида Дини. Разберем несколько примеров. Всюду в данной работе будем для определенности предполагать, что $a > 0$, $b \geq 0$.

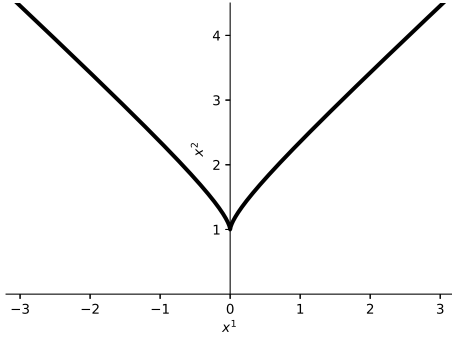


Рис. 2. Псевдоевклидова трактриса (2), у которой база и касательная являются прямыми разных типов

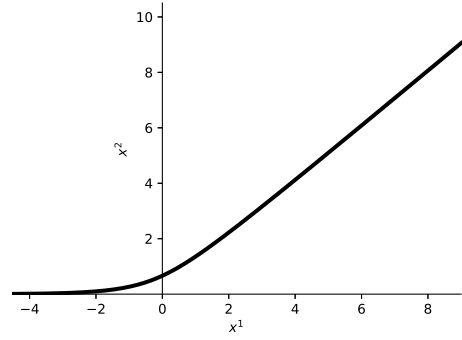


Рис. 3. Псевдоевклидова трактриса (3), у которой база и касательная являются прямыми одного типа

Вначале коснемся геликоида, полученного эллиптическим винтовым движением трактрисы (2).

Теорема 1. В трехмерном пространстве Минковского с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$ рассмотрим поверхность

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} u \cos v, \\ y = a \operatorname{ch} u \sin v, \\ z = a(\operatorname{sh} u - \arctg(\operatorname{sh} u)) + b \cdot v \end{cases} \quad (4)$$

(см. рис. 4). На поверхности (4) реализуется один из трех следующих вариантов:

- (1) при $a > b$ локально реализуется геометрия Лобачевского;
- (2) при $a < b$ локально реализуется геометрия плоскости де Ситтера;
- (3) при $a = b$ реализуется геометрия с вырожденной метрикой.

Доказательство. Поверхность (4) получена эллиптическим винтовым движением с осью Oz трактрисы, у которой касательная имеет вещественную длину, а база — мнимую. Первая квадратичная форма этой поверхности имеет следующий вид:

$$I = a^2 \operatorname{th}^2 u \, du^2 - 2ab \operatorname{th} u \operatorname{sh} u \, du \, dv + (a^2 \operatorname{ch}^2 u - b^2) \, dv^2.$$

Дискриминант этой формы равен $a^2 \operatorname{sh}^2 u (a^2 - b^2)$. При $a > b$ метрика поверхности будет положительно определенной. Рассмотрим сначала этот случай. Орт нормали поверхности при $a > b$ будет иметь следующие координаты:

$$\mathbf{n} = \left(\frac{a \operatorname{sh} u \cos v - b \sin v}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \frac{a \operatorname{sh} u \sin v + b \cos v}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \frac{a \operatorname{ch} u}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right).$$

Вторая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$II = -\frac{a^2 \operatorname{th} u}{\sqrt{a^2 - b^2}} \, du^2 + \frac{2ab \operatorname{sh} u}{\sqrt{a^2 - b^2}} \, du \, dv - \frac{a^2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v}{\sqrt{a^2 - b^2}} \, dv^2.$$

Гауссова кривизна дефинитной метрики поверхности трехмерного пространства Минковского удовлетворяет условию $K = -h/g$, где g, h — дискриминанты первой и второй квадратичных форм соответственно. Кривизна поверхности в данном случае постоянна и равна $-1/(a^2 - b^2)$.

Подсчитаем геодезическую кривизну винтовых линий на этой поверхности. Имеем:

$$k_g = \frac{a \operatorname{ch} u}{\sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 u - b^2}}.$$

Геодезическая кривизна при всех значениях параметра u больше $1/R$, где $R = \sqrt{a^2 - b^2}$, поэтому винтовые орбиты во внутренней геометрии поверхности являются окружностями. Ребру поверхности соответствует значение $u = 0$. Геодезическая кривизна ребра равна $a/(a^2 - b^2)$.

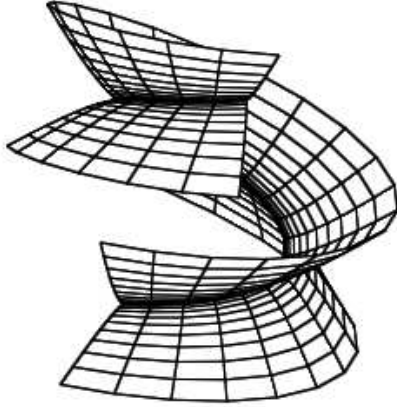


Рис. 4. Геликоид, полученный эллиптическим винтовым движением трактрисы (2)

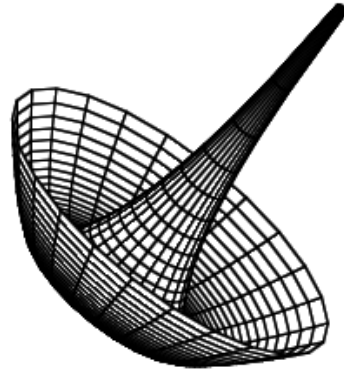


Рис. 5. «Полная» псевдосфера

Отсюда следует, что поверхность (4) изометрично накрывает плоскость Лобачевского кривизны $K = -\frac{1}{a^2 - b^2}$, из которой вырезан круг радиуса $r = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. При $b \neq 0$ трактрисы, как и при $b = 0$, являются линиями кривизны на поверхности, но уже не играют роль прямых во внутренней геометрии поверхности, и, вообще, перестают быть линиями постоянной кривизны. Ортогональные траектории трактрис, как и в евклидовом случае, являются сферическими кривыми — в данном случае кривыми на сфере вещественного радиуса трехмерного пространства Минковского — и образуют второе семейство линий кривизны на поверхности.

При $a < b$ на поверхности (4) индуцируется индефинитная метрика. Орт нормали будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{n} = \left(\frac{a \operatorname{sh} u \cos v - b \sin v}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \frac{a \operatorname{sh} u \sin v + b \cos v}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \frac{a \operatorname{ch} u}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right).$$

Квадрат орта нормали поверхности в этом случае равен единице. Гауссова кривизна поверхности будет определяться по формуле $K = h/g$. Формально ее значение будет иметь тот же вид: $K = -1/(a^2 - b^2)$, но кривизна метрики будет положительной. То есть, при $a < b$ на поверхности (4) индуцируется метрика идеальной области плоскости Лобачевского, или метрика де Ситтера. При $a = b$ на поверхности индуцируется вырожденная метрика. Таким образом, в зависимости от скорости трансляции при эллиптическом винтовом движении этой трактрисы мы получим три различные геометрии. Доказательство теоремы завершено. $\square$

Следствие 1. Как видно из доказательства теоремы, геометрии геликоида Дини (1) и поверхности (4) согласуются (т.е. одна поверхность является продолжением другой) только при $b = 0$ (см. [1]). Случай $b = 0$ изображен ниже на рис. 5. В этом случае поверхность, составленная из одной полости псевдосферы Бельтрами—Миндинга и ее псевдоевклидова продолжения, будет глобально изометрична поверхности вращения прямой вокруг параллельной ей прямой в трехмерном гиперболическом пространстве (см. [2]).

Рассмотрим теперь геликоид, полученный гиперболическим винтовым движением трактрисы (2). Оказывается, что вне зависимости от значения параметра b на нем реализуется локально геометрия постоянной кривизны с индефинитной метрикой.

Теорема 2. В трехмерном пространстве Минковского с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$ рассмотрим поверхность

$$\begin{cases} x = a(\operatorname{sh} u - \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} u) + b \cdot v), \\ y = a \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v, \\ z = a \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v. \end{cases} \quad (5)$$

На поверхности (5) локально реализуется геометрия плоскости де Ситтера (геометрия постоянной положительной кривизны с индефинитной метрикой). При $b \neq 0$ винтовые линии во внутренней геометрии представляют собой эквидистанты эллиптической прямой плоскости де Ситтера. При $b = 0$ (чистое гиперболическое вращение) орбиты точек во внутренней геометрии представляют собой орициклы.

Доказательство. Отметим, что поверхность из формулировки теоремы получена гиперболическим винтовым движением, т.е. гиперболическим вращением с осью Ox и переносом вдоль этой оси трактрисы (2).

При $b = 0$ имеем чистое вращение. В этом случае на поверхности индуцируется индефинитная метрика постоянной положительной кривизны $1/a^2$. Покажем, что и в общем случае ситуация будет аналогичной, отличающейся лишь величиной кривизны.

Первая квадратичная форма поверхности (5) имеет вид:

$$I = -a^2 \operatorname{th}^2 u \, du^2 + 2ab \operatorname{th} u \operatorname{sh} u \, du \, dv + (a^2 \operatorname{ch}^2 u + b^2) \, dv^2.$$

Поверхность (5) допускает однопараметрическую группу изометрий и может быть изометрично отображена на поверхность вращения, параллелями которой будут орбиты однопараметрической группы. Орт нормали поверхности имеет следующие координаты:

$$\mathbf{n} = \left(\frac{a \operatorname{ch} u}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v - b \operatorname{ch} v}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v - b \operatorname{sh} v}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Найдя вторую квадратичную форму поверхности, убедимся, что кривизна поверхности постоянна. Действительно,

$$II = \frac{a^2 \operatorname{th} u}{\sqrt{a^2 + b^2}} \, du^2 - \frac{2ab \operatorname{sh} u}{\sqrt{a^2 + b^2}} \, du \, dv - \frac{a^2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v}{\sqrt{a^2 + b^2}} \, dv^2.$$

Отсюда, учитывая выражение гауссовой кривизны поверхности с индефинитной метрикой через дискриминанты первой и второй квадратичных форм, получим:

$$K = \frac{h}{g} = \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, на винтовой поверхности (5) также индуцируется метрика плоскости де Ситтера, или метрика идеальной области плоскости Лобачевского. Зависимость между кривизной и скоростью трансляции вдоль оси Oz такая же, как у геликоида Дини в евклидовом пространстве. Кривизна его равна $-1/(a^2 + b^2)$. Ребро геликоида Дини при $b \neq 0$ во внутренней геометрии поверхности является эквидистантой, как, впрочем, и все остальные винтовые линии, являющиеся орбитами точек евклидовой трактрисы. Параметр эквидистанты при удалении от ребра уменьшается. В соответствии с этим при удалении от ребра (при стремлении u к бесконечности) геодезическая кривизна орбиты стремится к нулю. Под геодезической кривизной кривой в данной работе всюду понимается модуль проекции вектора кривизны на касательную плоскость.

Вернемся к поверхности (5). Найдём геодезическую кривизну винтовых линий на этой поверхности. Имеем:

$$k_g = \frac{a \operatorname{ch} u}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 u + b^2}}.$$

Ребру поверхности соответствует значение $u = 0$. Для этого значения $k_g = a/(a^2 + b^2) < 1/R$, где $R = \sqrt{a^2 + b^2}$. То есть, как и для геликоида Дини, при ненулевой скорости трансляции граничный орицикл превращается в эквидистанту. В данном случае это будет эквидистанта эллиптической прямой плоскости де Ситтера. Кривизна эквидистанты эллиптической прямой, удаленной от нее

на расстояние $h \cdot i$, будет равна $\frac{1}{R} \operatorname{th} \frac{h}{R}$, если кривизна плоскости де Ситтера равна $1/R^2$. Отсюда следует, что в индуцированной на винтовой поверхности (5) геометрии плоскости де Ситтера граничное ребро удалено от эллиптической прямой на расстояние $i\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{arth} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Следует отметить, что самой эллиптической прямой среди винтовых орбит нет. Данная винтовая поверхность вообще не содержит ни одной полной прямой эллиптического, гиперболического или изотропного типа. $\square$

Замечание 1. Теорема Бура (см. [6]) гласит, что любая винтовая поверхность в евклидовом пространстве изометрична поверхности вращения. Аналогам этой теоремы в псевдоевклидовом пространстве посвящены работы (см. [8–10]). Для каждой из рассматриваемых в данной работе винтовых поверхностей можно построить изометричную поверхность вращения. Покажем это на примере поверхности (5).

Доказательство. Зададим в плоскости Oxz меридиан:

$$\begin{cases} x = \int \sqrt{\frac{R^2(1+B^2) - z^2}{R^2B^2 - z^2}} dz, & z^2 \geq R^2(1+B^2), \\ y = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим гиперболическое вращение этой кривой вокруг оси Ox . После введения псевдоевклидовых цилиндрических координат

$$x = x(\rho), \quad y = \rho \operatorname{sh} \varphi, \quad z = \rho \operatorname{ch} \varphi.$$

Индукцированная на поверхности вращения метрика примет вид

$$ds^2 = \left((x'_\rho)^2 - 1 \right) d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2.$$

В данном случае получим:

$$ds^2 = \frac{R^2}{R^2B^2 - \rho^2} d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2.$$

Введем на поверхности новые координаты:

$$\rho = RB \operatorname{ch} \frac{r}{R}, \quad \varphi = \frac{\omega}{RB}.$$

Тогда метрика на поверхности примет вид

$$ds^2 = -dr^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{r}{R} d\omega^2.$$

Подставив в эту формулу значение $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, получим:

$$ds^2 = -dr^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{r}{\sqrt{a^2 + b^2}} d\omega^2.$$

Меридианы поверхности имеют мнимую длину, параллели — вещественную. Параллели представляют собой семейство эквидистант эллиптической прямой, меридианы — пучок гиперболических прямых, ортогональных этой эллиптической прямой и всем ее эквидистантам. Именно на такую поверхность глобально изометрично отображается поверхность (5) при $b \neq 0$. $\square$

Перейдем к рассмотрению винтовых движений трактрисы (3).

Теорема 3. Рассмотрим геликоид, полученный эллиптическим винтовым движением трактрисы (3) в пространстве Минковского (см. рис. 7):

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sh} u \cos v, \\ y = a \operatorname{sh} u \sin v, \\ z = a \left(\ln \left(\operatorname{th} \frac{u}{2} \right) + \operatorname{ch} u \right) + b \cdot v. \end{cases}$$

При всех значениях параметра b данная поверхность несет на себе локальную геометрию плоскости де Ситтера.

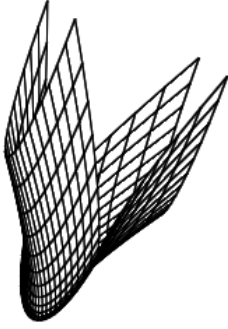


Рис. 6. Геликоид, полученный винтовым гиперболическим движением трактрисы (2)

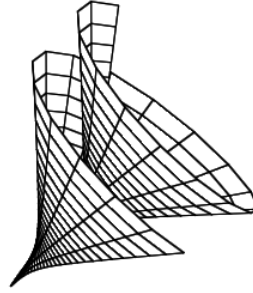


Рис. 7. Геликоид, полученный винтовым эллиптическим движением трактрисы (3)

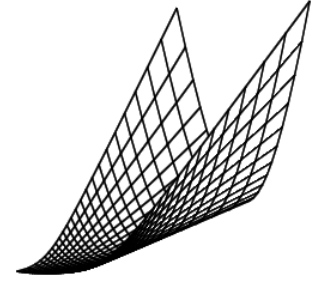


Рис. 8. Геликоид, полученный винтовым гиперболическим движением трактрисы (3)

Доказательство. Первая квадратичная форма поверхности имеет вид:

$$I = -a^2 \operatorname{cth}^2 u \, du^2 - 2ab \operatorname{cth} u \operatorname{ch} u \, du \, dv + (a^2 \operatorname{sh}^2 u - b^2) \, dv^2.$$

Дискриминант этой формы равен $-a^2 \operatorname{ch}^2 u (a^2 + b^2)$. Метрика поверхности индефинитна. Для вычисления кривизны найдем вторую квадратичную форму. Орт псевдоевклидовой нормали имеет такие координаты:

$$\mathbf{n} = \left(\frac{a \operatorname{ch} u \cos v - b \sin v}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a \operatorname{ch} u \sin v + b \cos v}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a \operatorname{sh} u}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Вторая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$II = \frac{a^2 \operatorname{cth}^2 u}{a^2 + b^2} \, du^2 + \frac{2ab \operatorname{ch} u}{\sqrt{a^2 + b^2}} \, du \, dv - \frac{a^2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v}{\sqrt{a^2 + b^2}} \, dv^2.$$

Отсюда следует, что кривизна поверхности постоянна и равна $1/(a^2 + b^2)$. □

В заключение рассмотрим гиперболическое винтовое движение трактрисы (3). Оказывается, что эта ситуация близка к ситуации, описанной в теореме 1.

Теорема 4. *Зададим в пространстве Минковского следующую поверхность — геликоид, полученный гиперболическим винтовым движением трактрисы (3) (см. рис. 8):*

$$\begin{cases} x = a \ln \left(\operatorname{th} \frac{u}{2} \right) + \operatorname{ch} u + b \cdot v, \\ y = a \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v, \\ z = a \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v. \end{cases}$$

Возможен один из следующих трех случаев:

- (1) *при $a > b$ реализуется геометрия плоскости Лобачевского;*
- (2) *при $a < b$ реализуется геометрия плоскости де Ситтера;*
- (3) *при $a = b$ реализуется геометрия с вырожденной метрикой.*

Доказательство. Если $b = 0$, то получим чистое гиперболическое вращение трактрисы (3). На поверхности в этом случае индуцируется метрика плоскости Лобачевского. Меридианы поверхности образуют пучок параллельных прямых этой плоскости, параллели — пучок ортогональных им орициклов. Поверхность глобально изометрична плоскости Лобачевского. Рассмотрим случай общего винтового движения. Первая квадратичная форма поверхности имеет такой вид:

$$I = a^2 \operatorname{cth}^2 u \, du^2 + 2ab \operatorname{cth} u \operatorname{ch} u \, du \, dv + (a^2 \operatorname{sh}^2 u + b^2) \, dv^2.$$

Дискриминант этой формы равен $a^2 \operatorname{ch}^2 u (a^2 - b^2)$. При $a > b$ метрика на поверхности будет положительно определенной. Орт псевдоевклидовой нормали будет иметь такие координаты:

$$\mathbf{n} = \left(\frac{a \operatorname{sh} u}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \frac{a \operatorname{ch} u \sin v - b \operatorname{ch} v}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \frac{a \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v - b \operatorname{sh} v}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right).$$

Вторая квадратичная форма поверхности имеет вид:

$$\Pi = -\frac{a^2 \operatorname{cth}^2 u}{\sqrt{a^2 - b^2}} du^2 - \frac{2ab \operatorname{ch} u}{\sqrt{a^2 - b^2}} du dv - \frac{a^2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v}{\sqrt{a^2 - b^2}} dv^2.$$

Отсюда следует, что в данном случае кривизна поверхности также постоянна и равна $-1/(a^2 - b^2)$.

Подсчитаем геодезическую кривизну винтовых линий на этой поверхности. Имеем:

$$k_g = \frac{a \operatorname{sh} u}{\sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 u + b^2}}.$$

Геодезическая кривизна меньше, чем $1/\sqrt{a^2 - b^2}$, поэтому винтовые линии во внутренней геометрии являются эквидистантами. Одно семейство линий кривизны образуют трактрисы, второе семейство — ортогональные им сферические кривые. Трактрисы при $b \neq 0$ перестают быть геодезическими во внутренней геометрии поверхности.

При $a = b$ метрика на поверхности становится вырожденной, при $a < b$ метрика становится индефинитной. Таким образом, в последнем случае на поверхности опять индуцируется метрика де Ситтера, поскольку кривизна поверхности остается постоянной. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Костин А. В. Геликоиды Дини в пространстве Минковского // Междунар. конф. «Дни геометрии в Новосибирске–2013», 2013. — С. 52.
2. Костин А. В. Об асимптотических линиях на псевдосферических поверхностях // Владикавказ. мат. ж. — 2019. — 21, № 1. — С. 14–24.
3. Костин А. В., Костина Н. Н. Об эволютах некоторых кривых на псевдоевклидовой плоскости // в кн.: Тр. Междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова, 2004. — С. 34–35.
4. Albuje A. L., Caballero M. Geometric properties of surfaces with the same mean curvature in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{L}^3$ // J. Math. Anal. Appl. — 2017. — 445, № 1. — P. 1013–1024.
5. Barros M., Caballero M., Ortega M. Rotational surfaces in $\mathbb{L}^3$ and solutions of the nonlinear sigma model // Commun. Math. Phys. — 2009. — 290, № 2. — P. 437–477.
6. Bour E. Memoire sur le deformation de surfaces // J. Ecole Polytechn. — 1862. — 39. — P. 1–148.
7. Dini U. Sur les surface à courbure constante négative et les surfaces applicables sur les surfaces à aire minima // C. R. Acad. Sci. — 1865. — P. 340–341.
8. Güler E., Vanli A. T. Bour's theorem in Minkowski 3-space // J. Math. Kyoto Univ. — 2006. — 46, № 1. — P. 47–63.
9. Ikawa T. Bour's theorem in Minkowski geometry // Tokyo J. Math. — 2001. — 24, № 2. — P. 377–394.
10. Ji F., Kim Y. H. Isometries between minimal helicoidal surfaces and rotation surfaces in Minkowski space // Appl. Math. Comput. — 2013. — 220. — P. 1–11.
11. Lopez R. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz–Minkowski space // Int. Electron. J. Geom. — 2014. — 7, № 1. — P. 44–107.
12. Lopez R., Kaya S. New examples of maximal surfaces in Lorentz–Minkowski space // Kyushu J. Math. — 2017. — 71, № 2. — P. 311–327.

Костин Андрей Викторович

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт, Елабуга

E-mail: kostin_andrei@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 58–65
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-58-65

УДК 514.75

ЛИНЕЙНЫЕ РЕПЕРЫ КАК ОРБИТЫ ПРОЕКТИВНЫХ РЕПЕРОВ

© 2020 г. А. В. КУЛЕШОВ

Аннотация. Рассматривается многомерное проективное пространство с выделенной точкой (центром). На многообразии проективных реперов данного пространства, адаптированных центру, определено действие стабилизатора центра в группе проективных преобразований. Показано, что линейные реперы, т.е. базисы касательного векторного пространства к проективному пространству в его центре, можно отождествить с орбитами адаптированных проективных реперов по действию ядра эпиморфизма групп Ли, сопоставляющего каждому преобразованию из стабилизатора его дифференциал в центре. При помощи многомерного обобщения теоремы Дезарга получен критерий принадлежности двух адаптированных проективных реперов одной орбите.

Ключевые слова: проективное пространство, проективный репер, линейный репер, пространство орбит, теорема Дезарга.

LINEAR FRAMES AS ORBITS OF PROJECTIVE FRAMES

© 2020 A. V. KULESHOV

ABSTRACT. A multidimensional projective space with a marked point (center) is considered. On the manifold of projective frames of the given space that are adapted to the center, the action of the stabilizer of the center of the group of projective transformations is defined. We prove that linear frames, i.e., bases of the tangent vector space of the projective space at its center, can be identified with orbits of the adapted projective frames with respect to the action of the kernel of the epimorphism of Lie groups, which assigns to each transformation from the stabilizer its differential at the center. Using a multidimensional generalization of the Desargues theorem, we obtain a criterion for two adapted projective frames to belong to the same orbit.

Keywords and phrases: projective space, projective frame, linear frame, orbit space, Desargues theorem.

AMS Subject Classification: 53A20, 14N20

1. Введение. Метод внешних дифференциальных форм и подвижного репера, разработанный Э. Картаном в первой половине XX в. (см., например, [9, 11]), успешно применяется при изучении однородных пространств и пространств со связностями и, в частности, в задачах локальной проективной дифференциальной геометрии подмногообразий (см. монографию [7]). В рамках данного метода с подмногообразием однородного пространства ассоциируется главное расслоение реперов, адаптированных данному подмногообразию, и дальнейшее исследование производится в терминах так называемых структурных уравнений, т.е. уравнений на внешние дифференциалы базисных и слоевых форм данного расслоения. Анализируя систему структурных уравнений, можно, в частности, установить существование главных фактор-расслоений данного расслоения. Однако описание явной конструкции таких фактор-расслоений является самостоятельной задачей, зачастую нетривиальной. Ее решение основано на следующем принципе: *точки фактор-*

расслоения суть орбиты точек исходного расслоения по действию некоторой подгруппы структурной группы последнего. Таким образом, понять, как устроены такие орбиты не только с топологической, но также и с геометрической точки зрения — первый шаг на пути решения данной задачи.

В частности, в ряде работ (см., например, [1, 5, 6]) рассматривается главное расслоение центропроективных реперов над различного вида гладкими семействами плоскостных элементов в проективном пространстве. Исходя из вида структурных уравнений данного расслоения, авторы заключают о наличии главного фактор-расслоения, структурная группа которого изоморфна полной линейной группе, не описывая элементы такого фактор-расслоения явным образом. Цель настоящей работы — восполнить указанный пробел, что в свете сформулированного принципа означает изучение геометрического устройства орбит проективных реперов по действию подходящей нормальной подгруппы H структурной группы G исходного расслоения. Ввиду того, что в проективной геометрии реперы приобретают наглядный геометрический смысл, естественно поставить вопрос о критерии принадлежности двух реперов одной H -орбите в бескоординатной форме, т.е. в виде геометрической конструкции в духе синтетической геометрии. Заметим, что для достижения поставленной цели достаточно ограничиться одним отдельно взятым слоем рассматриваемого расслоения.

Кратко опишем структуру и результаты настоящей работы. В разделе 2 рассматривается n -мерное проективное пространство $\mathbb{P}_n$ вместе с выделенной точкой $A \in \mathbb{P}_n$. На многообразии $\mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$ всех адаптированных проективных реперов пространства $\mathbb{P}_n$ (т.е. проективных реперов с первой вершиной A) естественным образом задается левое действие стабилизатора G точки A в группе проективных преобразований $GP(n)$ пространства $\mathbb{P}_n$. Аналогично, на многообразии $\mathcal{F}(V)$ всех базисов касательного векторного пространства $V = T_A\mathbb{P}_n$ к $\mathbb{P}_n$ в точке A определено левое действие группы $\mathbf{GL}(V)$ невырожденных эндоморфизмов пространства V . Нормальный делитель H группы G определяется как ядро эпиморфизма групп Ли $\beta: G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$, $g \mapsto d_A g$ (раздел 3). При этом факторгруппа G/H канонически изоморфна группе $\mathbf{GL}(V)$, их можно отождествить и обозначить общим символом $\bar{G}$. На пространстве H -орбит $\mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)$ корректно определяется правое действие факторгруппы $\bar{G}$, причем $\mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)$ и $\mathcal{F}(V)$ канонически изоморфны как $\bar{G}$ -пространства (теорема 1). Таким образом, базисы (линейные реперы) касательного пространства V можно трактовать как H -орбиты адаптированных проективных реперов.

В разделе 4 показано, что необходимым условием эквивалентности (т.е. принадлежности одной H -орбите) двух адаптированных реперов является их перспективность (теорема 2). Однако это условие не является достаточным, и с целью уточнения геометрической характеристики отношения эквивалентности вводится в рассмотрение отношение строгой перспективности. Для двух строго перспективных реперов имеет место n -мерное обобщение теоремы Дезарга (теорема 3), в соответствии с которым при $n \geq 2$ определена гиперплоскость Дезарга $\mathcal{L}(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$. Основным результатом данной работы состоит в следующем: *при $n \geq 2$ два строго перспективных репера эквивалентны тогда и только тогда, когда порожденная ими гиперплоскость Дезарга проходит через центр A* (теорема 4). Таким образом, получено искомое геометрическое описание таких H -орбит, не привлекающее образы касательного пространства V .

Наконец, в разделе 5 описаны действия матричных групп на пространствах $\mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$, $\mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)$ и $\mathcal{F}(V)$, и показано, что $\mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)$ и $\mathcal{F}(V)$ изоморфны как $\mathbf{GL}(n)$ -пространства.

2. Основные понятия и утверждения. Пусть V_{n+1} — векторное пространство размерности $(n+1)$ над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и пусть через $\sim$ обозначено отношение коллинеарности на $V_{n+1}^0 = V_{n+1} \setminus \{0\}$. Тогда под n -мерным проективным пространством $\mathbb{P}_n$, как и в [2], будем понимать факторпространство $\mathbb{P}_n = V_{n+1}^0 / \sim$. При этом векторное пространство V_{n+1} будем называть ассоциированным с $\mathbb{P}_n$, а отображение $\pi: V_{n+1}^0 \rightarrow \mathbb{P}_n$, сопоставляющее каждому вектору $\mathbf{a} \in V_{n+1}^0$ его класс эквивалентности $[\mathbf{a}]$, назовем канонической сюръекцией.

Отображение $g: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ называется проективным преобразованием, если найдется невырожденный линейный оператор $\tilde{g}: V_{n+1} \rightarrow V_{n+1}$ такой, что $\pi \circ \tilde{g}_0 = g \circ \pi$, где $\tilde{g}_0$ — сужение $\tilde{g}$ на V_{n+1}^0 . При этом $\tilde{g}$ будем называть оператором, накрывающим g . Группу проективных преобразований пространства $\mathbb{P}_n$ обозначим через $GP(n)$.

Проективный репер в $\mathbb{P}_n$ — это упорядоченный набор $\mathcal{R}$ из $n + 2$ точек $A_0, A_1, \dots, A_n, E \in \mathbb{P}_n$ таких, что любая совокупность из $n + 1$ точек этого набора находится в общем положении:

$$\mathcal{R} = \{A_0, A_1, \dots, A_n, E\}. \quad (1)$$

Замечание 1. Здесь и далее элементы упорядоченных наборов заключаются в фигурные скобки.

Говорят, что базис

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\} \quad (2)$$

пространства V_{n+1} порождает репер (1), если

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{A}_0) &= A_0, \quad \pi(\mathbf{A}_1) = A_1, \quad \dots, \quad \pi(\mathbf{A}_n) = A_n, \\ \pi(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_n) &= E. \end{aligned}$$

Однородными координатами точки M относительно репера $\mathcal{R}$ называются координаты некоторого вектора $\mathbf{M} \in \pi^{-1}(M)$ относительно базиса $\mathcal{R}$, порождающего этот репер:

$$M(x^0 : x^1 : \dots : x^n)_{\mathcal{R}} \iff \mathbf{M} = x^0 \mathbf{A}_0 + x^1 \mathbf{A}_1 + \dots + x^n \mathbf{A}_n.$$

Через $U_{\mathcal{R}}$ обозначим подмножество пространства $\mathbb{P}_n$, задаваемое уравнением $x^0 \neq 0$. Аффинными (неоднородными) координатами точки $M \in U_{\mathcal{R}}$ относительно репера $\mathcal{R}$ называются отношения:

$$X^i = \frac{x^i}{x^0}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Заметим, что $U_{\mathcal{R}}$ является открытой окрестностью центра A .

Аффинной картой в репере $\mathcal{R}$ называется локальная карта $(U_{\mathcal{R}}, \varphi_{\mathcal{R}})$, где $\varphi_{\mathcal{R}}$ — отображение, сопоставляющее каждой точке $M \in U_{\mathcal{R}}$ набор ее неоднородных координат относительно данного репера:

$$\varphi_{\mathcal{R}} : U_{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad M \mapsto (X^1, \dots, X^n). \quad (3)$$

Определение 1. Выделим некоторую точку $A \in \mathbb{P}_n$ и назовем ее центром пространства $\mathbb{P}_n$. Назовем проективный репер (1) адаптированным (центропроективным), если его первая вершина A_0 совпадает с центром, т.е. $A_0 = A$. Множество всех адаптированных проективных реперов обозначим через $\mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$. Стабилизатор точки A в группе $GP(n)$ обозначим через G .

Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ — адаптированные реперы. Тогда существует единственный набор коэффициентов α_i, α_j^i таких, что для любой точки $M \in U_{\mathcal{R}} \cap U_{\mathcal{R}'}$ справедливы равенства

$$X^i = \frac{\alpha_j^i \tilde{X}^j}{1 + \alpha_j \tilde{X}^j}, \quad \det(\alpha_j^i) \neq 0, \quad (4)$$

где X^i и $\tilde{X}^i$ — аффинные координаты точки M относительно реперов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ соответственно. Уравнения (4) назовем формулами перехода от репера $\mathcal{R}$ к реперу $\mathcal{R}'$.

Любой линейный оператор $\tilde{g}$, накрывающий преобразование $g \in G$, корректно определяет оператор

$$\tilde{g}^{\sharp} : V_{n+1}/\hat{A} \rightarrow V_{n+1}/\hat{A},$$

такой, что

$$\tilde{g}^{\sharp}(\mathbf{M} + \hat{A}) = \tilde{g}(\mathbf{M}) + \hat{A}, \quad \mathbf{M} \in V_{n+1},$$

где $\hat{A}$ — линейная оболочка прообраза $\pi^{-1}(A)$ в пространстве V_{n+1} .

Пусть V — касательное векторное пространство $T_A \mathbb{P}_n$ к $\mathbb{P}_n$ в точке A . Имеет место

Лемма 1 (см. [11]). *Существует канонический изоморфизм векторных пространств*

$$T_A \mathbb{P}_n \cong \hat{A}^* \otimes (V_{n+1}/\hat{A}).$$

В дальнейшем каждый вектор ξ пространства V будем отождествлять с линейным оператором $\xi: \hat{A} \rightarrow V_{n+1}/\hat{A}$ соответствующим вектору ξ при данном изоморфизме; при этом для любого преобразования $g \in G$ его дифференциал $d_A g: V \rightarrow V$ можно интерпретировать как оператор, действующий по закону композиции отображений

$$d_A g: \xi \mapsto \tilde{g}^\# \circ \xi,$$

где $\tilde{g}$ — такой оператор, накрывающий g , что $\tilde{g}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ для некоторого $\mathbf{A} \in \pi^{-1}(A)$.

Хорошо известно, что каждая локальная карта на произвольном гладком многообразии порождает поле натурального базиса в точках области данной карты. В случае аффинной карты (3) такой базис может быть интерпретирован следующим образом:

Утверждение 1. *Для любого адаптированного репера (1) найдется единственный базис*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$$

касательного пространства V такой, что для некоторого (и, как следствие, любого) базиса (2), порождающего данный репер, справедливы равенства

$$\xi_i(\mathbf{A}_0) = \mathbf{A}_i + \hat{A}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Через $\mathcal{F}(V)$ обозначим множество всех базисов пространства V , а через $\mathbf{GL}(V)$ — группу невырожденных линейных операторов, действующих на V .

Кроме того, для произвольного множества X обозначим через $S(X)$ группу биекций данного множества на себя.

Следующие отображения являются корректно определенными свободными транзитивными представлениями групп Ли G и $\mathbf{GL}(V)$, действующих слева соответственно на многообразиях $\mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$ и $\mathcal{F}(V)$:

$$\begin{aligned} \Phi: G &\rightarrow S(\mathcal{F}(\mathbb{P}_n)), \quad \Psi: \mathbf{GL}(V) \rightarrow S(\mathcal{F}(V)), \\ \Phi_g(\mathcal{R}) &:= g \cdot \mathcal{R} = \{g(A_0), g(A_1), \dots, g(A_n), g(E)\}, \quad g \in G; \\ \Psi_\rho(\mathcal{B}) &:= \rho \cdot \mathcal{B} = \{\rho(\xi_1), \dots, \rho(\xi_n)\}, \quad \rho \in \mathbf{GL}(V), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{R} = \{A_0, A_1, \dots, A_n, E\}, \quad \mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}.$$

Определение 2. Пусть $g \in G$, $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$. Уравнениями преобразования g относительно репера $\mathcal{R}$ назовем формулы перехода от репера $\mathcal{R}$ к реперу $g \cdot \mathcal{R}$.

3. Пространство H -орбит.

Лемма 2 (см. [10]). Пусть $\varphi: G \rightarrow G'$ — непрерывный гомоморфизм групп Ли и $H = \ker \varphi$. Тогда H — нормальный делитель группы Ли G , а G/H — группа Ли; при этом индуцированное отображение $\bar{\varphi}: G/H \rightarrow G'$ есть инъективная иммерсия этой группы Ли в G' .

В силу свойств дифференциала отображения и леммы 2 справедливо

Утверждение 2. *Отображение*

$$\beta: G \rightarrow \mathbf{GL}(V), \quad g \mapsto d_A g$$

является эпиморфизмом групп Ли, причем ядро $H = \ker \beta$ является замкнутой нормальной подгруппой в G , а факторгруппа G/H канонически изоморфна группе $\mathbf{GL}(V)$:

$$\bar{\beta}: G/H \rightarrow \mathbf{GL}(V), \quad gH \mapsto d_A g.$$

Утверждение 2 позволяет нам отождествить группы Ли G/H и $\mathbf{GL}(V)$.

Определение 3. Группа Ли $\bar{G} := G/H = \mathbf{GL}(V)$ называется линейной факторгруппой группы G .

Пусть $g \in G$, $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$, и пусть (4) суть уравнения преобразования g относительно $\mathcal{R}$. Тогда

$$g \in H \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_j^i = \delta_j^i \quad \Longleftrightarrow \quad X^i = \frac{\tilde{X}^i}{1 + \alpha_j \tilde{X}^j}. \quad (5)$$

Определение 4. Два адаптированных репера $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ назовем эквивалентными ($\mathcal{R} \sim \mathcal{R}'$), если они принадлежат одной H -орбите. Обозначим через $[\mathcal{R}]$ класс эквивалентности репера $\mathcal{R}$, через $\mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)$ — множество всех таких классов эквивалентности, и через $p: \mathcal{F}(\mathbb{P}_n) \rightarrow \mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)$ обозначим каноническую проекцию $\mathcal{R} \mapsto [\mathcal{R}]$.

Каждое действие G на $\mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$ отображает H -орбиты в H -орбиты, причем любые два элемента $g_1, g_2 \in G$, принадлежащие одному и тому же смежному классу по H , действуют на пространстве H -орбит $\mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)$ одинаковым образом. Тем самым получено

На пространстве H -орбит $\mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)$ корректно определено свободное транзитивное действие факторгруппы $\bar{G}$ слева:

$$\bar{\Psi}: \bar{G} \rightarrow S(\mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)), \quad \bar{\Psi}_{gH}([\mathcal{R}]) = gH \cdot [\mathcal{R}] = [g \cdot \mathcal{R}], \quad g \in G, \mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbb{P}_n).$$

Утверждение 3. Рассмотрим отображение

$$\alpha: \mathcal{F}(\mathbb{P}_n) \rightarrow \mathcal{F}(V), \quad \alpha: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{B}_{\mathcal{R}},$$

где базис $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ определен однозначно в силу утверждения 1.

1. Для любого $g \in G$ справедливо равенство

$$\alpha \circ g = \Psi_{d_A g} \circ \alpha.$$

2. α — сюръективная субмерсия.

3. H -Орбиты реперов суть в точности полные прообразы базисов пространства V относительно отображения α , т.е.

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{R}' \iff \alpha(\mathcal{R}) = \alpha(\mathcal{R}').$$

4. Корректно определено отображение

$$\bar{\alpha}: \mathcal{Q}(\mathbb{P}_n) \rightarrow \mathcal{F}(V), \quad [\mathcal{R}] \mapsto \mathcal{B}_{\mathcal{R}}.$$

Теорема 1. $\bar{\alpha}: \mathcal{Q}(\mathbb{P}_n) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ — изоморфизм $\bar{G}$ -пространств.

Доказательство. Теорема 1 вытекает из коммутативности следующей диаграммы для любого $g \in G$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Q}(\mathbb{P}_n) & \xrightarrow{\bar{\Phi}_{gH}} & \mathcal{Q}(\mathbb{P}_n) & & \\ \downarrow \bar{\alpha} & \swarrow p & \downarrow p & & \\ \mathcal{F}(\mathbb{P}_n) & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}(\mathbb{P}_n) & & \\ \downarrow \alpha & \swarrow \alpha & \downarrow \alpha & & \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\Psi_{d_A g}} & \mathcal{F}(V) & & \end{array}$$

4. Геометрическое описание H -орбит. Далее ограничимся случаем $n \geq 2$. Пусть $\mathcal{R}, \mathcal{R}' \in \mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$, где

$$\mathcal{R} = \{A, A_1, \dots, A_n, E\}, \quad \mathcal{R}' = \{A, A'_1, \dots, A'_n, E'\}.$$

Определение 5. Два репера $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ называются перспективными ($\mathcal{R} \cong \mathcal{R}'$), если

$$A'_i \in A_i A_0 \quad (i = \overline{1, n}), \quad E' \in E A_0,$$

где, например, $E A_0$ — прямая, проходящая через точку E и центр A_0 .

Утверждение 4. Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ — произвольные адаптированные реперы. Тогда $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ перспективны в том и только в том случае, если формулы перехода от $\mathcal{R}$ к $\mathcal{R}'$ имеют вид

$$X^i = \frac{h \tilde{X}^i}{1 + a_j \tilde{X}^j}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

для некоторых коэффициентов $h \neq 0, a_1, \dots, a_n$.

Замечание 2. В частном случае, когда все коэффициенты a_i равны 0 ($i = \overline{1, n}$), преобразование (6) является гомотетией в аффинной карте $(\varphi_{\mathcal{R}}, U_{\mathcal{R}})$.

Непосредственно из (6) и (5) вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Два адаптированных проективных репера $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ эквивалентны тогда и только тогда, когда, во-первых, они перспективны, и, во-вторых, коэффициент h (см. формулу (6)) равен единице:

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{R}' \iff \begin{cases} \mathcal{R} \cong \mathcal{R}', \\ h = 1. \end{cases}$$

Определение 6. Назовем реперы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ строго перспективными, если они перспективны и их соответствующие точки не совпадают, т.е.

$$A'_i \neq A_i \quad (i = \overline{1, n}), \quad E' \neq E.$$

Определение 7. Для любого набора подмножеств $Y_1, \dots, Y_s \subset \mathbb{P}_n$ обозначим через $\langle Y_1, \dots, Y_s \rangle$ наименьшую (по включению) плоскость пространства $\mathbb{P}_n$, содержащую все данные подмножества.

Далее введем следующие обозначения:

$$\mathcal{M} := \langle A_1, \dots, A_n \rangle, \quad \mathcal{M}' := \langle A'_1, \dots, A'_n \rangle, \quad \mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'.$$

Для двух строго перспективных реперов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ определены точки

$$B_i = A_i E \cap A'_i E', \quad i = \overline{1, n},$$

и плоскость

$$\mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')} := \langle B_1, \dots, B_n, \mathcal{N} \rangle.$$

Кроме того, в данном случае $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ не совпадают, и поэтому $\dim \mathcal{N} = n - 2$.

Теорема 3. Для любых строго перспективных реперов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ плоскость $\mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')}$ является гиперплоскостью в $\mathbb{P}_n$.

Доказательство. В случае $n = 2$ утверждение совпадает с классической теоремой Дезарга (см., например, [3]). Далее будем полагать $n > 2$.

Покажем, что $\dim \mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')} \geq n - 1$. Для этого убедимся в том, что $B_1 \notin \mathcal{N}$. В самом деле, если предположить, что $B_1 \in \mathcal{N}$, то $B_1 \in \mathcal{M}$. С учетом $B_1 \in A_1 E$ и $A_1 \in \mathcal{M}$ мы приходим к тому, что $E \in \mathcal{M}$, что невозможно, так как E — единичная точка репера $\mathcal{R}$. Заметим, что аналогичным образом можно убедиться в том, что $B_j \notin \mathcal{N}$ ($j = \overline{2, n}$).

Покажем теперь, что $\dim \mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')} \leq n - 1$, т.е. что $B_j \in \langle B_1, \mathcal{N} \rangle$ для любого $j = \overline{2, n}$. Действительно, рассмотрим 3-плоскость $\langle A_0 A_1, A_0 A_j, A_0 E \rangle$. Она содержит 2-плоскости $\langle A_1, A_j, E \rangle$ и $\langle A'_1, A'_j, E' \rangle$. Пересечение этих 2-плоскостей представляет собой прямую, содержащую точки C_j , B_i и B_j , где $C_j = A_1 A_j \cap A'_1 A'_j$. Значит, точка B_j лежит на прямой $B_1 C_j$ для любого $2 \leq j \leq n$. Тогда $B_j \in \langle B_1, \mathcal{N} \rangle$, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 3. Неравенство $\dim \mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')} \leq n - 1$ также непосредственно вытекает из результатов работы [8].

Определение 8. Назовем $\mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')}$ гиперплоскостью Дезарга, порожденной реперами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ — строго перспективные реперы n -мерного проективного пространства $\mathbb{P}_n$ с центром A . Тогда они эквивалентны в том и только в том случае, когда гиперплоскость Дезарга $\mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')}$ проходит через центр.

Доказательство. Пусть реперы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ строго перспективны. Тогда они перспективны, и в силу утверждения 4 для них справедливы равенства (6). Пусть $(x^0 : x^1 : \dots : x^n)$ — однородные координаты на $\mathbb{P}_n$ относительно репера $\mathcal{R}$. В этих координатах гиперплоскости $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ задаются соответственно уравнениями

$$\mathcal{M}: x^0 = 0, \quad \mathcal{M}': a_i x^i - h x^0 = 0.$$

Таким образом, уравнение пучка S гиперплоскостей $S_{(\lambda: \mu)}$, проходящих через плоскость $\mathcal{N}$, можно представить в виде

$$S_{(\lambda: \mu)}: \lambda x^0 + \mu a_i x^i = 0, \quad \lambda^2 + \mu^2 \neq 0. \quad (7)$$

Для точки B_1 найдется такой вектор $\mathbf{B}_1 \in \pi^{-1}(B_1)$, что

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{e}{a_1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{E},$$

где

$$e = a_1 + \dots + a_n + 1 - h.$$

Гиперплоскость $\mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')}$ выделяется из данного пучка условием $B_1 \in \mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')}$, которое, в свою очередь, равносильно соотношению

$$\lambda = (1 - h)\mu.$$

Подставляя его в (7), получим уравнение гиперплоскости $\mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')}$:

$$\mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')} : (1 - h)x^0 + a_i x^i = 0, \quad \lambda^2 + \mu^2 \neq 0. \quad (8)$$

Таким образом,

$$A_0 \in \mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')} \xLeftrightarrow{(8)} h = 1 \xLeftrightarrow{\text{теорема 2}} \mathcal{R} \sim \mathcal{R}'.$$

□

5. Правые действия матричных групп на многообразиях $\mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$ и $\mathcal{F}(V)$. Опишем действия матричных групп на реперах и базисах, поскольку именно матричные группы обычно выступают в роли структурных групп главных расслоений (см., например, конструкции расслоений в [4]).

Рассмотрим два адаптированных репера $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$, и пусть формула перехода от первого ко второму имеет вид (4). Из коэффициентов данной формулы составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_1^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $A_0 \in \mathbf{GL}(n)$, α — строка из n элементов. Хорошо известно (см. [4]), что множество всех невырожденных матриц вида (9) образует группу $\mathbf{GA}(n)$. Ее важнейшими подгруппами являются

- (1) группа $\mathbf{GA}_0(n)$, образованная матрицами вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}$, изоморфная полной линейной группе $\mathbf{GL}(n)$;
- (2) группа $\mathbf{T}(n)$, образованная матрицами вида $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}$, изоморфная аддитивной группе $\mathbb{R}^n$ (здесь $\mathbb{I}_n$ — единичная матрица порядка n).

Будем рассматривать (4) как формулу действия матрицы A на репер $\mathcal{R}$, а репер $\mathcal{R}'$ — соответственно как образ репера $\mathcal{R}$ по данному действию:

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cdot A. \quad (10)$$

При этом для любых базисов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$, порождающих реперы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ соответственно, найдется скалярный множитель $\lambda \neq 0$ такой, что

$$\lambda \mathbf{R}' = \mathbf{R} \cdot A,$$

где справа стоит обычное произведение матрицы-строки из элементов базиса $\mathbf{R}$ на матрицу A .

Аналогично, действие матрицы $A_0 \in \mathbf{GL}(n)$ на многообразии $\mathcal{F}(V)$ можно задать по формуле

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cdot A_0, \quad \mathbf{B}, \mathbf{B}' \in \mathcal{F}(V). \quad (11)$$

Формула (10) задает правое действие матричной группы $\mathbf{GA}(n)$ на многообразии $\mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$, а формула (11) — правое действие группы $\mathbf{GL}(n)$ на $\mathcal{F}(V)$.

Рассмотрим гомоморфизм групп Ли

$$\gamma: \mathbf{GA}(n) \rightarrow \mathbf{GL}(n), \quad A \mapsto A_0,$$

где матрица A имеет строение (9). Его ядром является $\mathbf{T}(n)$, причем факторгруппа по ядру изоморфна $\mathbf{GL}(n)$.

Если в (10) матрица A принадлежит $\mathbf{T}(n)$, то формула перехода между реперами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ имеет вид (5), а потому $\mathbf{T}(n)$ -орбита любого репера $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$ совпадает с его H -орбитой, т.е. $\mathcal{F}(\mathbb{P}_n)/\mathbf{T}(n) = \mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)$.

Утверждение 5. *Группа $\mathbf{GL}(n)$ действует справа на пространстве $\mathbf{T}(n)$ -орбит $\mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)$ по правилу*

$$[\mathcal{R}] \cdot A_0 = [\mathcal{R} \cdot A], \quad A \in \gamma^{-1}(A_0).$$

Многообразия $\mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)$ и $\mathcal{F}(V)$ изоморфны как $\mathbf{GL}(n)$ -пространства, причем $\bar{\alpha}$ — соответствующий изоморфизм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белова О. О. Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей // Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 2. — С. 29–67.
2. Берже М. Геометрия. — М.: Мир, 1984.
3. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. — М.: Физматлит, 2004.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1981.
5. Омелян О. М., Шевченко Ю. И. Редукции объекта центропроективной связности и тензора аффинного кручения на распределении плоскостей // Мат. заметки. — 2008. — 84, № 1. — С. 99–107.
6. Полякова К. В. Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства // Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 2. — С. 129–177.
7. Aikvis A., Goldberg V. Projective Differential Geometry of Submanifolds. — Amsterdam: North-Holland, 1993.
8. Bell P. O. Generalized theorems of Desargues for n -dimensional projective space // Proc. Am. Math. Soc. — 1955. — № 6. — P. 675–681.
9. Cartan E. La théorie de groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode di repère mobile. — Paris: Gauthier-Villars, 1937.
10. Conlon L. Differential Manifolds: A First Course. — Boston: Birkhäuser, 1993.
11. Ivey T. A., Landsberg J. M. Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2003.

Кулешов Артур Владимирович

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

E-mail: arturkuleshov@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 66–68
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-66-68

УДК 514.76

КОНТАКТНО-ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

© 2020 г. А. В. НИКИФОРОВА

Аннотация. В статье рассматривается вопрос о формулах перехода от одной почти контактной метрической структуры к другой. Определены условия, которые накладываются на четверку тензорных полей почти контактной метрической структуры.

Ключевые слова: контактно-проективное преобразование, почти контактная метрическая структура.

CONTACT-PROJECTIVE TRANSFORMATIONS OF ALMOST CONTACT METRIC STRUCTURE

© 2020 А. V. NIKIFOROVA

ABSTRACT. In this paper, the problem on the transition from one almost contact metric structure to another is examined. We obtain conditions for four tensor fields of an almost contact metric structure.

Keywords and phrases: contact-projective transformation, almost contact metric structure.

AMS Subject Classification: 53B05, 51E15

Пусть M — почти эрмитово многообразие, т.е. связное гладкое $2n$ -мерное многообразие, на котором определена почти эрмитова структура — пара тензорных полей (J, g) , где J — тензорное поле типа $(1, 1)$, обладающее свойством $J^2 = -\text{id}$, а g — риманова метрика.

Голоморфно-проективным преобразованием почти эрмитова многообразия называется такой переход от почти эрмитовой структуры (J, g) к почти эрмитовой структуре $(J, \tilde{g})$, при котором обе структуры имеют общие голоморфно почти геодезические кривые, т.е. такие кривые многообразия M , для которых любой касательный вектор μ_p после параллельного переноса из точки p в произвольную точку q на M принадлежит линейной оболочке $L(\mu_q, J\mu_q)$ (см. [1]).

Известно, что на произвольной гиперповерхности N почти эрмитова многообразия M естественным образом возникает почти контактная метрическая структура (АС-структура; см. [2]), т.е. такая четверка тензорных полей (Φ, ξ, η, g) , где Φ — тензорное поле типа $(1, 1)$, η — 1-форма, ξ — векторное поле, g — риманова метрика, что выполняются соотношения

$$\Phi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \Phi = 0, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \Phi^2 = -\text{id} + \xi \otimes \eta, \quad g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \quad (1)$$

Таким образом, гладкое многообразие N становится почти контактным метрическим многообразием.

Голоморфно-проективное преобразование почти эрмитовой структуры (J, g) произвольного многообразия M индуцирует на гиперповерхности N преобразование АС-структуры (g, Φ, ξ, η) , возникающей на N следующим образом. Пусть ν — поле единичной нормали; положим

$$\xi = J(\nu), \quad \eta(X) = g(\xi, X), \quad \zeta(X) = g(\nu, X), \quad \Phi = J \circ (\text{id} - \xi \otimes \nu - \eta \otimes \xi)|_{\mathfrak{X}(M)}.$$

В этом случае связь между старой AC -структурой (g, Φ, ξ, η) и новой AC -структурой $(\tilde{g}, \tilde{\Phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ многообразия N выражается следующими соотношениями (см. [3]):

$$\tilde{g}(X, Y) = g(X, fY), \quad \tilde{\xi} = \lambda f^{-1}(\xi), \quad \tilde{\eta} = \lambda \eta, \quad \tilde{\Phi} = \Phi - \eta \otimes \nu + \lambda^2 \eta \otimes f^{-1}\nu, \quad (2)$$

где f — тензор голоморфно-проективной деформации,

$$\lambda = \pm \sqrt{(\zeta(f^{-1}\nu))^{-1}}.$$

Такой переход называется *контактно-проективным преобразованием* (см. [3]).

Рассмотрим теперь произвольную AC -структуру (g, Φ, ξ, η) и выясним, когда формулы (2), где f — произвольный невырожденный эндоморфизм, ν — векторное поле, λ — гладкая функция, определяют переход к новой AC -структуре $(\tilde{g}, \tilde{\Phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$. Подставляя в первые три равенства, определенные формулами (1), соответствующие выражения из формул (2), после преобразований получим

$$\eta(f^{-1}(\xi)) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \Phi(f^{-1}\xi) = \frac{1}{\lambda^2}\vartheta,$$

где введено обозначение $\vartheta = \nu - \lambda^2 f^{-1}\nu$;

$$\xi - \lambda^2 f^{-1}\xi = \Phi\vartheta;$$

λ не обращается в нуль ни в какой точке многообразия.

Заметим, что четвертое равенство в условии (2) с учетом введенного обозначения можно записать в виде

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \eta \otimes \vartheta.$$

Подставим это выражение и выражение $\tilde{\eta}$ из формул (2) в равенство $\tilde{\eta} \circ \tilde{\Phi} = 0$:

$$(\lambda\eta) \circ (\Phi - \eta \otimes \vartheta) = 0.$$

Тогда для произвольного векторного поля X с учетом $\eta \circ \Phi = 0$ получим $\lambda\eta(X)\eta(\vartheta) = 0$. Положим $X = \xi$. Так как $\eta(\xi) = 1$, то имеем условие $\eta(\vartheta) = 0$, откуда следует, что $\vartheta \in L$, где L — первое фундаментальное распределение почти контактной метрической структуры.

Далее, подставляя в равенство

$$\tilde{g}(\tilde{\Phi}X, \tilde{\Phi}Y) = \tilde{g}(X, Y) - \tilde{\nu}(X)\tilde{\nu}(Y)$$

определенные выше выражения для $\tilde{g}$, $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\Phi}$, получим

$$g(\Phi X, f\Phi) - \eta(X)g(\vartheta, f\Phi Y) - \eta(Y)g(\Phi X, f\vartheta) + \eta(X)\eta(Y)g(\vartheta, f\vartheta) = g(X, fY) - \lambda^2\nu(X)\nu(Y).$$

Тогда имеем

$$g(\Phi\vartheta, f\Phi\vartheta) = g(\vartheta, f\vartheta).$$

Подставим теперь в равенство

$$\tilde{\Phi}^2 = -\text{id} + \tilde{\eta} \otimes \tilde{\xi}$$

выражения $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\Phi}$, определенные выше:

$$(\Phi - \eta \otimes \vartheta)^2 = -\text{id} + \lambda\eta \otimes \lambda f^{-1}\xi.$$

Учитывая, что $\Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi$ и $\eta \circ \Phi = 0$, получим

$$\eta \otimes \xi - \lambda^2 \eta \otimes f^{-1}\xi - \eta \otimes \Phi\vartheta - \eta(\vartheta)(\eta \otimes \vartheta) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\eta \otimes (\xi - \lambda^2 f^{-1}\xi) - \eta \otimes \Phi\vartheta - \eta(\vartheta)(\eta \otimes \vartheta) = 0.$$

Так как имеют место формулы $\xi - \lambda^2 f^{-1}\xi = \Phi\vartheta$ и $\eta(\vartheta) = 0$, то полученное условие выполняется тождественно; следовательно, условие

$$\tilde{\Phi}^2 = -\text{id} + \tilde{\eta} \otimes \tilde{\xi}$$

выполняется тождественно.

Теорема 1. *Формулы (2) определяют переход от АС-структуры (g, Φ, ξ, η) к новой АС-структуре $(\tilde{g}, \tilde{\Phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\eta(f^{-1}(\xi)) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \Phi(f^{-1}\xi) = \frac{1}{\lambda^2}\vartheta, \quad \eta(\vartheta) = 0, \quad g(\Phi\vartheta, f\Phi\vartheta) = g(\vartheta, f\vartheta),$$

где $\vartheta = \nu - \lambda^2 f^{-1}\nu$.

Назовем переход от одной почти контактной метрической структуры к другой при выполнении полученных условий *обобщенным контактно-проективным преобразованием* АС-структуры. Примером такого преобразования может также служить конформное преобразование почти контактной метрической структуры, т.е. переход от почти контактной метрической структуры (Φ, ξ, η, g) к почти контактной метрической структуре $(\Phi, \tilde{\xi} = e^{-f}\xi, \tilde{\eta} = e^f\eta, \tilde{g} = e^{2f}g)$, где f — гладкая функция на многообразии M . Для него полученные условия выполняются.

Кроме того, имеют место следующие утверждения.

Теорема 2. *Если f — скалярный эндоморфизм с собственным значением μ , заданный на почти контактном метрическом многообразии, то*

- (1) $\mu > 0$, причем $\mu = \lambda^2$;
- (2) f — конформное преобразование АС-структуры.

Теорема 3. *Пусть ξ — собственное векторное поле эндоморфизма f с собственным значением β . Тогда*

- (1) $\beta = \lambda^2$;
- (2) ν — собственный вектор эндоморфизма с тем же собственным значением λ^2 ;
- (3) формулы преобразования АС-структуры имеют вид

$$\tilde{g}(X, Y) = g(X, fY), \quad \tilde{\xi} = \frac{1}{\lambda}\xi, \quad \tilde{\eta} = \lambda\eta, \quad \tilde{\Phi} = \Phi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
2. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Одесса: Печатный дом, 2013.
3. Nikiforova A. V., Ignatovich L. A. The transformations induced on hypersurfaces of almost Hermitian manifolds// J. Basrah Res. — 2011. — 37, № 4C. — P. 1–7.

Никифорова Анна Валентиновна

Московский педагогический государственный университет

E-mail: anik7@bk.ru



ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ПУЧКА СВЯЗНОСТЕЙ ПЕРВОГО ТИПА, ПОРОЖДЕННОГО КОМПОЗИЦИОННЫМ ОСНАЩЕНИЕМ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ

© 2020 г. О. М. ОМЕЛЯН

Аннотация. В работе продолжается исследование распределения плоскостей в многомерном проективном пространстве, с которым ассоциировано главное расслоение. Производится композиционное оснащение распределения, представляющее собой аналог оснащения Картана и нормализации второго рода Нордена. Доказано, что распределение плоскостей и его композиционное оснащение индуцируют в ассоциированном расслоении групповую связность. Приведена геометрическая характеристика индуцированной связности с помощью параллельных переносов оснащающих плоскостей. Построен пучок связностей первого типа и описаны параллельные переносы в пучке связностей и его подсвязностях.

Ключевые слова: распределение, расслоение, связность, оснащение Картана, нормализация Нордена, композиционное оснащение, пучок связностей.

GEOMETRIZATION OF A SHEAF OF FIRST-TYPE CONNECTIONS GENERATED BY A COMPOSITIONAL FRAME ON A DISTRIBUTION OF PLANES

© 2020 O. M. OMEL'YAN

ABSTRACT. In this paper, we continue the study of distributions of planes in the multidimensional projective space with an associated principal bundle. We perform compositional framing of the distribution, which is an analog of the Cartan framing and the Norden normalization of the second kind. We prove that a distribution of planes and its compositional framing induce a group connection in the associated bundle. A geometric characteristic of the induced connection by parallel transfers of framing planes is given. Also, a sheaf of connections of the first type is constructed and parallel transfers in the sheaf of connections and its subconnections are described.

Keywords and phrases: distribution, bundle, connection, Cartan equipment, Norden normalization, compositional equipment, sheaf of connections.

AMS Subject Classification: 58A05, 58R65

1. Расслоение, ассоциированное с распределением. Будем относить n -мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $R = \{A, A_I\}$, $I, \dots = \overline{1, n}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A; \quad (1)$$

базисные формы ω^I , ω_I , ω_I^J проективной группы $GP(n)$, действующей эффективно в P_n , удовлетворяют структурным уравнениям Картана (см. [2])

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \quad D\omega_I^J = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \quad (2)$$

Продолжим рассмотрение распределения 1-го рода (см. [3]) NS_n m -мерных плоскостей P_m . В работе будем использовать следующее разбиение значений индекса $I = (i, a)$: $i, \dots = \overline{1, m}$; $a, \dots = \overline{m+1, n}$. Уравнения распределения NS_n имеют вид

$$\omega_i^a = \Lambda_{iJ}^a \omega^J,$$

где формы $\omega^I = \{\omega^i, \omega^a\}$ являются базисными формами распределения NS_n , а совокупность функций $\Lambda = \{\Lambda_{iJ}^a\}$ образует фундаментальный объект 1-го порядка.

Структурными уравнениями главного расслоения $G(NS_n)$, ассоциированного с распределением NS_n , являются уравнения

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + \omega^a \wedge \omega_a^i, \quad (3)$$

$$D\omega^a = \omega^b \wedge (\omega_b^a - \Lambda_{ib}^a \omega^i) + \Lambda_{ij}^a \omega^i \wedge \omega^j, \quad (4)$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^K \wedge \omega_{jK}^i, \quad (5)$$

$$D\omega_j = \omega_j^k \wedge \omega_k + \omega^K \wedge \omega_{jK}, \quad (6)$$

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega^K \wedge \omega_{bK}^a, \quad (7)$$

$$D\omega_a^i = \omega_a^j \wedge \omega_j^i + \omega_a^b \wedge \omega_b^i + \omega^K \wedge \omega_{aK}^i, \quad (8)$$

$$D\omega_a = \omega_a^i \wedge \omega_i + \omega_a^b \wedge \omega_b, \quad (9)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \omega_{jK}^i &= \Lambda_{jK}^a \omega_a^i - \delta_{jK}^i \omega_K - \delta_K^i \omega_j, & \omega_{jK} &= \Lambda_{jK}^a \omega_a, \\ \omega_{bK}^a &= -\Lambda_{iK}^a \omega_b^i - \delta_b^K \omega_K - \delta_K^a \omega_b, & \omega_{aK}^i &= -\delta_K^i \omega_a. \end{aligned}$$

В расслоении $G(NS_n)$ выделяются четыре главных фактор-расслоения с базой NS_n и структурными уравнениями:

- (i) уравнения (3)–(5) — расслоение линейных реперов $L(NS_n)$, типовым слоем которого является линейная факторгруппа $L = \mathbf{GL}(m)$, действующая во множестве всех направлений плоскости P_m^* , исходящих из точки A ;
- (ii) уравнения (3)–(6) — расслоение центропроективных реперов $A^*(NS_n)$, типовым слоем которого является центропроективная (коаффинная) факторгруппа $A^* = GA^*(m)$, действующая в плоскости P_m^* ;
- (iii) уравнения (3), (4), (7) — расслоение двойственных (нормальных) линейных реперов $L^*(NS_n)$, типовым слоем которого является факторгруппа $L^* = \mathbf{GL}(n-m)$, действующая в проективной факторплоскости $P_{n-m-1} = P_n/P_m^*$;
- (iv) уравнения (3)–(5), (7), (8) — расслоение $H(NS_n)$ с типовым слоем — факторгруппой H , являющейся аффинной частью (см. [6]) группы G и действующей во множестве всех направлений, исходящих из точки A .

2. Связности и параллельные перенесения оснащающих плоскостей. В расслоении $G(NS_n)$ связность [1, 4] зададим с помощью форм

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_j^i &= \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega^k - \Gamma_{ja}^i \omega^a, & \tilde{\omega}_i &= \omega_i - \Gamma_{ij} \omega^j - \Gamma_{ia} \omega^a, \\ \tilde{\omega}_b^a &= \omega_b^a - \Gamma_{bi}^a \omega^i - \Gamma_{bc}^a \omega^c, & \tilde{\omega}_a^i &= \omega_a^i - \Gamma_{aj}^i \omega^j - \Gamma_{ab}^i \omega^b, \\ \tilde{\omega}_a &= \omega_a - \Gamma_{ai} \omega^i - \Gamma_{ab} \omega^b, \end{aligned}$$

причем компоненты объекта связности

$$\Gamma = \left\{ \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ja}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ia}, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{bc}^a, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ab}^i, \Gamma_{ai}, \Gamma_{ab} \right\}$$

удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям:

$$\begin{aligned}
\Delta\Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i &\equiv 0, & \Delta\Gamma_{ja}^i - \Gamma_{jk}^i\omega_a^k + \omega_{ja}^i &\equiv 0, \\
\Delta\Gamma_{ij} + \Gamma_{ij}^k\omega_k + \omega_{ij} &\equiv 0, & \Delta\Gamma_{ia} - \Gamma_{ij}\omega_a^j + \Gamma_{ia}^j\omega_j + \omega_{ia} &\equiv 0, \\
\Delta\Gamma_{bi}^a + \omega_{bi}^a &\equiv 0, & \Delta\Gamma_{bc}^a - \Gamma_{bi}^a\omega_c^i + \omega_{bc}^a &\equiv 0, \\
\Delta\Gamma_{aj}^i - \Gamma_{kj}^i\omega_a^k + \Gamma_{aj}^b\omega_b^i + \omega_{aj}^i &\equiv 0, & \Delta\Gamma_{ab}^i - \Gamma_{aj}^i\omega_b^j - \Gamma_{jb}^i\omega_a^j + \Gamma_{ab}^c\omega_c^i &\equiv 0, \\
\Delta\Gamma_{ai} + \Gamma_{ai}^j\omega_j + \Gamma_{ai}^b\omega_b - \Gamma_{ji}\omega_a^j &\equiv 0, & \Delta\Gamma_{ab} - \Gamma_{ai}\omega_b^i + \Gamma_{ab}^i\omega_i + \Gamma_{ab}^c\omega_c - \Gamma_{ib}\omega_a^i &\equiv 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^I .

Объект Γ будем называть объектом ассоциированной связности. Из сравнений (10) вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Объект групповой связности Γ в главном расслоении $G(NS_n)$ содержит следующие подобъекты (см. [4]: объект плоскостной линейной связности $\{\Gamma_{jK}^i\}$, объект центропроективной связности $\{\Gamma_{jK}^i, \Gamma_{iJ}\}$, объект нормальной линейной связности $\{\Gamma_{bI}^a\}$ и объект аффинно-групповой связности $\{\Gamma_{jK}^i, \Gamma_{bI}^a, \Gamma_{aJ}^i\}$, задающие связности в указанных выше фактор-расслоениях.*

Ранее (см. [4]) произведено композиционное оснащение распределения NS_n , т.е. к каждой плоскости P_m^* распределения присоединены:

- (а) плоскость Картана $C_{n-m-1} : P_m^* \oplus C_{n-m-1} = P_n$;
- (б) нормаль 2-го рода Нордена $N_{m-1} : A \oplus N_{m-1} = P_m^*$.

Эти плоскости зададим совокупностями точек

$$B_a = A_a + \lambda_a^i A_i + \lambda_a A, \quad B_i = A_i + \lambda_i A,$$

причем

$$\Delta\lambda_a^i + \omega_a^i = \lambda_{aJ}^i\omega^J, \quad \Delta\lambda_a + \lambda_a^i\omega_i + \omega_a = \lambda_{aI}\omega^I, \quad \Delta\lambda_i + \omega_i = \lambda_{iJ}\omega^J.$$

Выражения для дифференциалов точек B_a, B_i записываются в виде

$$\begin{aligned}
dB_a &= (\dots)_a^b B_b + (t_{aj}^i\omega^j + t_{ab}^i\omega^b)B_i + ((t_{ai} - \lambda_j t_{ai}^j)\omega^i + (t_{ab} - \lambda_i t_{ab}^i)\omega^b)A, \\
dB_i &= (\dots)_i^j B_j + (\dots)_i^a B_a + (t_{ij}\omega^j + t_{ia}\omega^a)A.
\end{aligned}$$

Определение 1. Объект $t = \{t_{aj}^i, t_{ab}^i, t_{ai}, t_{ab}, t_{ij}, t_{ia}\}$, компоненты которого выражаются через компоненты оснащающего тензора $\lambda = \{\lambda_a^i, \lambda_a, \lambda_i\}$, его пфаффовы производные $\lambda' = \{\lambda_{aJ}^i, \lambda_{aI}, \lambda_{iJ}\}$ и фундаментальный объект Λ по формулам

$$\begin{aligned}
t_{aj}^i &= \lambda_{aj}^i - \Lambda_{kj}^b \lambda_b^i \lambda_a^k + \delta_j^i \lambda_a, & t_{ab}^i &= \lambda_{ab}^i - \Lambda_{jb}^c \lambda_c^i \lambda_a^j - \lambda_b^i \lambda_a, \\
t_{ai} &= \lambda_{ai} - \Lambda_{ji}^b \lambda_b^j \lambda_a, & t_{ab} &= \lambda_{ab} - \Lambda_{ib}^c \lambda_a^i \lambda_c - \lambda_a \lambda_b, \\
t_{ij} &= \lambda_{ij} + \Lambda_{ij}^a (\lambda_k \lambda_a^k - \lambda_a) - \lambda_i \lambda_j, & t_{ia} &= \lambda_{ia} + \Lambda_{ia}^b (\lambda_j \lambda_b^j - \lambda_b) + \lambda_a^j \lambda_i \lambda_j - \lambda_i \lambda_a,
\end{aligned} \tag{11}$$

назовем тензором неспециальных смещений (см. [4]).

Обращение тензора t в нуль влечет охваты $\lambda' = f(\lambda, \Lambda)$ компонент совокупности пфаффовых производных λ' объекта λ , а также специальные смещения оснащающих плоскостей. Например, из (11) видно, что при $t_{aj}^i = 0, t_{ab}^i = 0$ плоскость Картана смещается в нормали 1-го рода $N_{n-m} = [A, B_a]$. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Распределение плоскостей NS_n и его композиционное оснащение индуцируют в ассоциированном расслоении $G(NS_n)$ групповую связность $\overset{0}{\Gamma}$.*

Доказательство. Действительно, справедливы формулы

$$\begin{aligned}\overset{0}{\Gamma}_{jk}^i &= \Lambda_{jk}^a \lambda_a^i - \delta_j^i \lambda_k - \delta_k^i \lambda_j, & \overset{0}{\Gamma}_{ja}^i &= \Lambda_{ja}^b \lambda_b^i - \delta_j^i \lambda_a + \delta_j^i \lambda_k \lambda_a^k + \lambda_a^i \lambda_j, & \overset{0}{\Gamma}_{ij}^0 &= \Lambda_{ij}^a \lambda_a - \lambda_i \lambda_j, \\ \overset{0}{\Gamma}_{ia}^0 &= \Lambda_{ia}^b \lambda_b + \lambda_i \lambda_j \lambda_a^j, & \overset{0}{\Gamma}_{bi}^a &= -\Lambda_{ji}^a \lambda_b^j - \delta_b^a \lambda_i, & \overset{0}{\Gamma}_{bc}^a &= -\Lambda_{ic}^a \lambda_b^i - \delta_b^a \lambda_c - \delta_c^a \lambda_b + \delta_b^a \lambda_c^i \lambda_i, \\ \overset{0}{\Gamma}_{aj}^i &= -\Lambda_{kj}^b \lambda_b^i \lambda_a^k + \delta_j^i \lambda_a^k \lambda_k - \delta_j^i \lambda_a, & \overset{0}{\Gamma}_{ab}^i &= -\Lambda_{jb}^c \lambda_c^i \lambda_a^j - \lambda_b^i \lambda_a^j \lambda_j, \\ \overset{01}{\Gamma}_{ai} &= -\Lambda_{ji}^b \lambda_a^j \lambda_b + \lambda_i (\lambda_a^j \lambda_j - \lambda_a), & \overset{01}{\Gamma}_{ab} &= -\Lambda_{ib}^c \lambda_a^i \lambda_c - \lambda_b^i \lambda_i (\lambda_a^j \lambda_j - \lambda_a) - \lambda_a \lambda_b,\end{aligned}$$

дающие охват $\overset{0}{\Gamma} = \Gamma(\Lambda, \lambda)$. □

Объект $\overset{0}{\Gamma}$ является объектом индуцированной связности (см. [4]).

Замечание 1. В [4] построены три типа охватов, отличные от данного.

Выражения

$$\begin{aligned}dB_a &= (\dots)_a^b B_b + \overset{0}{\nabla} \lambda_a^i B_i + \left(\overset{0}{\nabla} \lambda_a - \lambda_i \overset{0}{\nabla} \lambda_a^i \right) A, \\ dB_i &= (\dots)_i^j B_j + (\dots)_i^a B_a + \overset{0}{\nabla} \lambda_i A\end{aligned}$$

для дифференциалов точек B_a и B_i , записанные с помощью ковариантных дифференциалов $\overset{0}{\nabla} \lambda$ оснащающего тензора λ в индуцированной связности $\overset{0}{\Gamma}$, позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Связность $\overset{0}{\Gamma}$ и ее подсвязности характеризуются следующими параллельными перенесениями:

- (i) нормаль 2-го рода N_{m-1} переносится параллельно $\left(\overset{0}{\nabla} \lambda_i|_\rho = 0 \right)$ в индуцированной центро-проективной связности $\left\{ \overset{0}{\Gamma}_{jK}^i, \overset{0}{\Gamma}_{iJ}^0 \right\}$ тогда и только тогда, когда она смещается в гиперплоскости Бортोलотти $P_{n-1} = [B_i, B_a]$;
- (ii) плоскость Картана переносится параллельно $\left(\overset{0}{\nabla} \lambda_a^i|_\rho = 0 \right)$ в индуцированной аффинно-групповой связности $\left\{ \overset{0}{\Gamma}_{jK}^i, \overset{0}{\Gamma}_{bI}^a, \overset{0}{\Gamma}_{aJ}^i \right\}$ тогда и только тогда, когда она смещается в нормали 1-го рода $N_{n-m} = [A, B_a]$;
- (iii) плоскость C_{n-m-1} переносится параллельно $\left(\overset{0}{\nabla} \lambda_a^i|_\rho = 0, \overset{0}{\nabla} \lambda_a|_\rho = 0 \right)$ в индуцированной связности $\overset{0}{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда она неподвижна, т.е. параллельное перенесение связано вырожденное (см. [4]).

Теорема 3 дает полное представление о геометрической характеристике связности $\overset{0}{\Gamma}$ и ее подсвязностей.

Обращая в нуль ковариантные производные $\nabla_J \lambda$ оснащающего тензора λ в ассоциированной связности Γ , получим

$$\begin{aligned}\overset{1}{\Gamma}_{ij} &= \lambda_{ij} + \lambda_k \Gamma_{ij}^k, & \overset{1}{\Gamma}_{ia} &= \lambda_{ia} + \lambda_j \Gamma_{ia}^j, \\ \overset{1}{\Gamma}_{aj}^i &= \lambda_{aj}^i - \lambda_a^k \Gamma_{kj}^i + \lambda_b^i \Gamma_{aj}^b, & \overset{1}{\Gamma}_{ab}^i &= \lambda_{ab}^i - \lambda_a^j \Gamma_{jb}^i + \lambda_c^i \Gamma_{ab}^c, \\ \overset{1}{\Gamma}_{ai} &= \lambda_{ai} - \lambda_a^j \overset{1}{\Gamma}_{ji} + \lambda_b \Gamma_{ai}^b, & \overset{1}{\Gamma}_{ab} &= \lambda_{ab} - \lambda_a^i \overset{1}{\Gamma}_{ib} + \lambda_c \Gamma_{ab}^c.\end{aligned} \tag{12}$$

Определение 2. Пучком связностей $\overset{1}{\Gamma}$ с параметрами $\Gamma_0 = \{\Gamma_{jJ}^i, \Gamma_{bI}^a\}$ будем называть множество групповых связностей, определяемых объектом $\overset{1}{\Gamma}$, компоненты которого удовлетворяют соотношениям (12).

Определение 3. Композиционное оснащение распределения NS_n назовем специальным (см. [4]) в случае обращения тензора t в нуль:

$$(a) \ t_{iJ} = 0; \quad (b) \ t_{aJ}^i = 0; \quad (c) \ t_{aI} = 0.$$

Такое оснащение назовем абс-специальным. В случае выполнения части условий в названии специального оснащения будут упоминаться только соответствующие буквы.

Выражения для дифференциалов точек B_a, B_i , записанные с помощью ковариантных дифференциалов $\overset{1}{\nabla}\lambda$ оснащающего тензора λ в пучке (12) связностей $\overset{1}{\Gamma}$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} dB_a &= (\dots)_a^b B_b + \left(\overset{1}{\nabla}\lambda_a^i + t_{aJ}^i \omega^J \right) B_i + \left(\overset{1}{\nabla}\lambda_a - \lambda_i \overset{1}{\nabla}\lambda_a^i + (t_{aI} - \lambda_j t_{aI}^j) \omega^I \right) A, \\ dB_i &= (\dots)_i^j B_j + (\dots)_i^a B_a + \left(\overset{1}{\nabla}\lambda_i + t_{iJ} \omega^J \right) A. \end{aligned}$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Плоскость Картана C_{n-m-1} переносится параллельно тогда и только тогда, когда она смещается в нормали 1-го рода Нордена P_{n-m} , причем перенесение $\left(\overset{1}{\nabla}\lambda_a^i|_\rho = 0 \right)$ осуществляется в пучке групповых подсвязностей $\left\{ \Gamma_0, \overset{1}{\Gamma}_{aJ}^i \right\}$, если композиционное оснащение b -специальное. Нормаль 2-го рода Нордена N_{m-1} переносится параллельно в пучке групповых подсвязностей $\left\{ \overset{0}{\Gamma}_{jK}^i, \overset{1}{\Gamma}_{iJ} \right\}$ тогда и только тогда, когда она смещается:

- (a) в гиперплоскости Бортолотти P_{n-1} , если композиционное оснащение a -специальное: $\left(\overset{1}{\nabla}\lambda_i|_\rho = 0 \right)$;
- (b) произвольно в случае a -неспециального композиционного оснащения.

Замечание 2. Отметим (см. [5]), что все полученные выше теоремы нашли применение при осуществлении внутреннего композиционного оснащения распределения (в предположении существования относительного инварианта, охваченного подобъектом фундаментального объекта 1-го порядка распределения плоскостей) и построения внутренней связности и ее геометрической характеристики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евтушик Л. Е., Омелян О. М. Теоретико-категорный подход, естественно расширяющий фундаментальное понятие связности, и его приложение к геометрии дифференциальных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 1. — С. 55–63.
2. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.
3. Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. Распределения t -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности// Тр. геом. семин. — 1971. — 3. — С. 49–94.
4. Омелян О. М. Четыре индуцированных связности на распределении плоскостей// Тр. Междунар. конф. по геометрии и анализу. — Пенза, 2003. — С. 63–69.
5. Омелян О. М. О совпадении групповых связностей, индуцированных внутренним композиционным оснащением распределения// Мат. заметки. — 2017. — 102, № 6. — С. 896–907.
6. Шевченко Ю. И. Аффинная, коаффинная и линейная факторгруппы в подгруппе проективной группы// в кн.: Проблемы математических и физических наук. — Калининград, 2002. — С. 38–39.

Омелян Ольга Михайловна

Балтийский Федеральный Университет им. И. Канта, Калининград

E-mail: olga_omelyan2002@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 74–84
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-74-84

УДК 514.763

СУБРИМАНОВЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА МНОГОМЕРНОЙ ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

© 2020 г. В. И. ПАНЬЖЕНСКИЙ, О. П. СУРИНА

Аннотация. Изучается строение геодезических усеченной связности на многомерной группе Гейзенберга, наделенной левоинвариантной субримановой структурой. Установлено, что субримановыми геодезическими являются параболы, ортогональные проекции которых на соответствующие контактные плоскости являются прямыми линиями. Кроме таких парабол, геодезическими являются также некоторые прямые, лежащие в контактных плоскостях.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, субриманова структура, левоинвариантная контактная метрическая структура, геодезическая.

SUB-RIEMANNIAN GEODESICS ON THE MULTIDIMENSIONAL HEISENBERG GROUP

© 2020 V. I. PANZHENSKII, O. P. SURINA

ABSTRACT. In this paper, we study the structure of truncated connections on the multidimensional Heisenberg group endowed with a left-invariant sub-Riemannian structure. We find that sub-Riemannian geodesics are parabolas whose orthogonal projections onto the corresponding contact planes are straight lines. In addition to such parabolas, some straight lines lying in contact planes are also geodesics.

Keywords and phrases: Heisenberg group, sub-Riemannian structure, left-invariant contact metric structure, geodesic.

AMS Subject Classification: 53B21

1. Введение. Группа Гейзенберга — это трехмерная связная односвязная нильпотентная группа Ли G , состоящая из всех вещественных верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали. На этой группе имеется левоинвариантная контактная дифференциальная 1-форма η и полная риманова метрика g , которые задают на G контактную метрическую структуру. Вполне неголономное контактное распределение $\ker \eta$ вместе с ограничением метрики g на это распределение определяет на G субриманову структуру. Среди трехмерных групп Ли группа Гейзенберга является одним из наиболее известных и простых примеров в исследованиях по субримановой геометрии, теории динамических систем и теории оптимального управления (см. [1, 2, 4, 8, 9]). В подобных исследованиях часто геодезическими называют экстремали вариационной задачи на минимум функционала длины кривой. В неголономной механике считается, что механическая система с лагранжианом L и неголономным распределением на конфигурационном пространстве движется по траектории, которая, вообще говоря, не является решением вариационной задачи на минимум. В [3] доказано, что траектории движения такой механической системы с квадратичным лагранжианом являются геодезическими усеченной связности.

В настоящей работе изучается строение геодезических усеченной связности на многомерной группе Гейзенберга, наделенной левоинвариантной субримановой структурой. Установлено, что субримановыми геодезическими являются параболы, ортогональные проекции которых на соответствующие контактные плоскости являются прямыми линиями. Кроме таких парабол геодезическими являются также некоторые прямые, лежащие в контактных плоскостях.

В разделе 2 приведены основные определения. Показано, как с помощью левых сдвигов на многомерной группе Гейзенберга можно получить левоинвариантные контактную форму и риманову метрику и как они порождают контактную метрическую структуру, которая является сасакиевой. Доказано, что для многомерной группы Гейзенберга имеет место утверждение о существовании единственности контактной метрической связности с кососимметрическим кручением, установленное в [7] для трехмерной группы Гейзенберга. При этом, в отличие от трехмерного случая, мы дополнительно требуем инвариантность связности относительно автоморфизмов сасакиевой структуры. Доказано также, что обнаруженная связность является контактной метрической связностью для любой k -контактной метрической структуры и, следовательно, для любой сасакиевой структуры.

В разделе 3 вычислены компоненты связности Леви-Чивиты и контактной метрической связности в ортонормированном репере, адаптированном к контактной структуре. Проектирование этой связности на контактное распределение приводит к одной и той же усеченной связности. Выписывая дифференциальные уравнения субримановых геодезических, т.е. геодезических усеченной связности, касательные векторы которых лежат в контактном распределении, и интегрируя эти уравнения, находим общее решение, что позволяет выяснить строение геодезических.

В разделе 4 дана оценка секционной кривизны, а именно, доказано, что секционная кривизна группы Гейзенберга с контактной метрической связностью принадлежит числовому отрезку $[-1; 0]$.

2. Контактная метрическая связность. Многомерная группа Гейзенберга — это нильпотентная m -мерная ($m = 2n + 1$) группой Ли $((n + 2) \times (n + 2))$ -матриц вида

$$G = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ \theta^t & E_n & x^t \\ 0 & \theta & 1 \end{pmatrix}$$

(см. [11]), где $x^t = (x^1, \dots, x^n)^t$, $y = (x^{n+1}, \dots, x^{2n})$, $\theta = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $z = x^m \in \mathbb{R}$, E_n — единичная $(n \times n)$ -матрица, $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел. Левые сдвиги на группе G определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= x^i + c^i, \quad i = \overline{1, 2n}; \\ \bar{x}^m &= x^m + c^{n+1}x^1 + \dots + c^{2n}x^n + c^m. \end{aligned}$$

Дифференцируя по параметрам и вычисляя полученные производные в единице группы, находим базисные левоинвариантные векторные поля:

$$X_\alpha = \partial_\alpha, \quad X_{n+\alpha} = \partial_{n+\alpha} + x_\alpha \partial_m, \quad X_m = \partial_m, \quad x_\alpha = x^\alpha; \quad \alpha = \overline{1, n}; \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Левоинвариантную риманову метрику на группе G можно получить следующим образом. В касательном пространстве единицы группы $T_e G$ возьмем евклидову метрику $ds^2 = dx^{1^2} + \dots + dx^{m^2}$ и «сдвинем» ее в произвольную точку $\bar{x}$. Так как

$$dx^i = d\bar{x}^i, \quad dx^m = d\bar{x}^m - c^{n+1}d\bar{x}^1 - \dots - c^{2n}d\bar{x}^n, \quad c^k = \bar{x}^k,$$

то

$$d\bar{s}^2 = d\bar{x}^{1^2} + \dots + d\bar{x}^{2n^2} + (d\bar{x}^m - \bar{x}^{n+1}d\bar{x}^1 - \dots - \bar{x}^{2n}d\bar{x}^n)^2.$$

Аналогично можно получить левоинвариантную дифференциальную 1-форму, взяв в касательном пространстве единицы группы форму dx^m и сдвинув ее в точку $\bar{x}$. В результате получим

$$d\bar{x}^m - \bar{x}^{n+1}d\bar{x}^1 - \dots - \bar{x}^{2n}d\bar{x}^n.$$

Таким образом, левоинвариантные форма η и риманова метрика g имеют вид

$$\eta = dx^m - x^{n+1}dx^1 - \dots - x^{2n}dx^n,$$

$$ds^2 = dx^{1^2} + \dots + dx^{2n^2} + (dx^m - x^{n+1}dx^1 - \dots - x^{2n}dx^n)^2$$

и определяют на группе Гейзенберга контактную метрическую структуру (η, ξ, Φ, g) . Действительно, так как $\eta \wedge (dn)^n \neq 0$ ($\wedge$ — внешнее произведение, d — внешний дифференциал), то форма η является контактной и определяет контактное $2n$ -мерное распределение $\mathfrak{L} = \ker \eta$. Контактное распределение $\mathfrak{L}$ называется первым фундаментальным распределением, или горизонтальным распределением, а 1-мерное распределение $\mathfrak{M} = \ker d\eta$ — вторым фундаментальным распределением, или вертикальным распределением. Характеристическое векторное поле ξ и структурный эндоморфизм Φ однозначно определяются условиями

$$\eta(Y) = g(\xi, Y), \quad d\eta(X, Y) = g(\Phi X, Y).$$

Теперь нетрудно убедиться, что выполняются условия

$$\eta(\xi) = 1, \tag{1}$$

$$\eta \circ \Phi = 0, \tag{2}$$

$$\Phi(\xi) = 0, \tag{3}$$

$$\Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi, \tag{4}$$

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{5}$$

и, следовательно, четверка тензорных полей (η, ξ, Φ, g) определяет на группе Гейзенберга контактную метрическую структуру. Кроме того, нетрудно убедиться, что $N_\Phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$, где N_Φ — тензор Нейенхейса структурного эндоморфизма, т.е. контактная метрическая структура, является нормальной и, следовательно, сасакиевой.

Линейная связность $\tilde{\nabla}$ называется контактной метрической связностью, если в этой связности контактная форма η и метрический тензор g ковариантно постоянны: $\tilde{\nabla}\eta = 0$, $\tilde{\nabla}g = 0$. При параллельном перенесении векторов в этой связности сохраняются длины векторов и углы между векторами (связность метрическая: $\tilde{\nabla}g = 0$) и контактное распределение $\mathfrak{L}(\tilde{\nabla}\eta = 0)$, а, следовательно, и распределение $\mathfrak{M}$. Из соотношения $\tilde{\nabla}\eta = 0$ следует, что связность $\tilde{\nabla}$ необходимо имеет кручение $\tilde{S}$, а из $\tilde{\nabla}g = 0$ следует, что ковариантный тензор деформации T связности Леви-Чивиты ∇ кососимметричен по последним двум аргументам. Если тензор T кососимметричен по всем своим аргументам, то имеем связность $\tilde{\nabla}$ с кососимметрическим кручением. В этом случае $T = \frac{1}{2}S$ и

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2}S_{ij}^k,$$

где $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ — коэффициенты связности $\tilde{\nabla}$, Γ_{ij}^k — коэффициенты связности Леви-Чивиты ∇ , S_{ij}^k — компоненты тензора кручения $\tilde{S}$, а $S_{ijk} = S_{ij}^p g_{kp}$ кососимметричны по всем индексам и, следовательно, определяют дифференциальную 3-форму S — форму кручения; $i, j, k, \dots = \overline{1, m}$.

Теорема 1. *На группе Гейзенберга существует единственная контактная метрическая связность с кососимметрическим кручением, инвариантная относительно группы автоморфизмов сасакиевой структуры. Эта связность определяется следующей формулой*

$$g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2}d\eta(X, Y) \wedge \eta(Z),$$

где X, Y, Z — векторные поля на G .

Доказательство. Заметим, что компоненты контактной формы η и метрического тензора g зависят только от переменных $x^{n+\alpha}$, поэтому $\partial_\alpha \eta_i = 0$, $\partial_m \eta_i = 0$, $\partial_\alpha g_{ij} = 0$, $\partial_m g_{ij} = 0$. Кроме того, $\xi = \partial_m$ и, следовательно, $g^{ip} \eta_p = \xi^i = \delta_m^i$, где δ_m^i — символ Кронекера.

Теперь мы можем найти условия на компоненты формы кручения, которые следуют из ковариантного постоянства контактной формы

$$\tilde{\nabla}_i \eta_j = \partial_i \eta_j - \frac{1}{2} g^{kp} (\partial_i g_{pj} + \partial_j g_{ip} - \partial_p g_{ij}) \eta_k - \frac{1}{2} S_{ijp} g^{pk} \eta_k = 0.$$

С учетом вышесказанных замечаний эти уравнения примут вид

$$\partial_i \eta_j - \frac{1}{2} (\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im}) - \frac{1}{2} S_{ijm} = 0.$$

Придавая индексам i, j различные значения, получим следующие условия на компоненты формы кручения

$$S_{\alpha\beta m} = 0, \quad S_{n+\alpha n+\beta m} = 0, \quad S_{\alpha n+\beta m} = \delta_{\alpha\beta}, \quad S_{n+\alpha\beta m} = -\delta_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, из условия ковариантного постоянства контактной формы следует, что

$$S_{\alpha n+\alpha m} = S_{n+\alpha m\alpha} = S_{n\alpha n+\alpha} = -S_{n+\alpha\alpha m} = -S_{mn+\alpha\alpha} = -S_{\alpha mn+\alpha} = 1.$$

Остальные компоненты, содержащие индекс m , равны нулю. На компоненты S_{ijk} , не содержащие индекс m , ковариантная постоянность формы η не накладывает условий.

Потребуем инвариантность связности $\tilde{\nabla}$ относительно группы автоморфизмов сасакиевой структуры. Так как связность Леви-Чивиты ∇ метрики g инвариантна относительно изометрий, то она инвариантна и относительно автоморфизмов. Поэтому связность $\tilde{\nabla}$ инвариантна тогда и только тогда, когда инвариантна форма кручения. Согласно известной теореме Танно (см. [12]), левоинвариантная сасакиева структура обладает группой Ли автоморфизмов максимальной размерности $(n+1)^2$. Пусть $\varphi_t = \exp tX$ — однопараметрическая подгруппа автоморфизмов, порожденная векторным полем X . Тогда производная Ли вдоль X от контактной формы η и метрического тензора g равны нулю: $L_X \eta = 0$, $L_X g = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} X^p \partial_p \eta_i + \partial_i X^p \eta_p &= 0, \\ X^p \partial_p g_{ij} + \partial_i X^p g_{pj} + \partial_j X^p g_{ip} &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, находим общее решение, а затем и операторы группы — базисные векторные поля ее алгебры.

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \partial_\alpha, \quad X_{n+\alpha} = \partial_{n+\alpha} + x^\alpha \partial_m, \quad X_m = \partial_m, \\ X_\alpha^\beta &= x^\beta \partial_\alpha - x^\alpha \partial_\beta + x^{n+\beta} \partial_{n+\alpha} - x^{n+\alpha} \partial_{n+\beta}, \\ X_{n+\beta}^\beta &= x^{n+\beta} \partial_\beta - x^\beta \partial_{n+\beta} + \frac{1}{2} \left((x^{n+\beta})^2 - (x^\beta)^2 \right) \partial_m, \\ X_{n+\alpha}^\beta &= x^{n+\beta} \partial_\alpha - x^\alpha \partial_{n+\beta} + x^{n+\alpha} \partial_\beta - x^\beta \partial_{n+\alpha} + \left(x^{n+\alpha} x^{n+\beta} - x^\alpha x^\beta \right) \partial_m, \end{aligned}$$

$\alpha < \beta$, $\alpha, \beta = \overline{1, n}$. Заметим, что первые $2n+1$ векторных полей являются левоинвариантными и определяют сдвиги на группе Гейзенберга, остальные векторные поля — операторы вращений.

Уравнения инвариантности формы кручения имеют вид ($L_X S = 0$):

$$X^p \partial_p S_{ijk} + \partial_i X^p S_{pjk} + \partial_j X^p S_{ipk} + \partial_k X^p S_{ijp} = 0.$$

Эти уравнения должны обращаться в тождества для каждого из $(n+1)^2$ операторов группы. Найдем условия, которые накладывают на S_{ijk} операторы сдвигов. Для $X_{n+\alpha} = \partial_{n+\alpha} + x^\alpha \partial_m$ имеем

$$\partial_{n+\alpha} S_{ijk} + \delta_{i\alpha} S_{mjk} + \delta_{j\alpha} S_{imk} + \delta_{k\alpha} S_{ijm} = 0,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} S_{\alpha, \beta, n+\alpha} &= x^{n+\beta} + c^{n+\beta}, \quad S_{\alpha, \beta, n+\beta} = -(x^{n+\alpha} + c^{n+\alpha}), \\ S_{\alpha, n+\alpha, n+\beta} &= c^\beta, \quad S_{\beta, n+\alpha, n+\beta} = c^\alpha, \end{aligned}$$

$\alpha < \beta$, $c^{n+\beta}, c^{n+\alpha}, c^\beta, c^\alpha = \text{const.}$

Далее исследуем уравнения инвариантности для операторов вращения. Для X_α^β имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} x^{n+\beta} \partial_{n+\alpha} S_{ijk} - x^{n+\alpha} \partial_{n+\beta} S_{ijk} + \delta_{i\beta} S_{\alpha jk} - \delta_{i\alpha} S_{\beta jk} + \delta_{i,n+\beta} S_{n+\alpha,j,k} - \\ - \delta_{i,n+\alpha} S_{n+\beta,j,k} + \delta_{j\beta} S_{i\alpha k} - \delta_{j\alpha} S_{i\beta k} + \delta_{j,n+\beta} S_{i,n+\alpha,k} - \delta_{j,n+\alpha} S_{i,n+\beta,k} + \\ + \delta_{k\beta} S_{ij\alpha} - \delta_{k\alpha} S_{ij\beta} + \delta_{k,n+\beta} S_{i,j,n+\alpha} - \delta_{k,n+\alpha} S_{i,j,n+\beta} = 0. \end{aligned}$$

Для компонент $S_{\alpha,\beta,n+\alpha}$ ($\alpha < \beta$) имеем

$$-x^{n+\alpha} \partial_{n+\beta} S_{\alpha,\beta,n+\alpha} - S_{\alpha,\beta,n+\beta} = 0,$$

т.е. $-x^{n+\alpha} \cdot 1 + (x^{n+\alpha} + c^{n+\alpha}) = 0$, откуда $c^{n+\alpha} = 0$. Для компонент $S_{\alpha,\beta,n+\beta}$ ($\alpha < \beta$) имеем

$$x^{n+\beta} \partial_{n+\alpha} S_{\alpha,\beta,n+\beta} - S_{\alpha,\beta,n+\alpha} = 0,$$

т.е. $x^{n+\beta} \cdot (-1) + (x^{n+\beta} + c^{n+\beta}) = 0$, откуда $c^{n+\beta} = 0$.

Аналогично, выписывая уравнения инвариантности, для операторов $X_{n+\beta}^\beta$ находим, что $c^\alpha = 0$ и $c^\beta = 0$, поэтому

$$S_{\alpha,\beta,n+\beta} = S_{\beta,n+\beta,\alpha} = S_{n+\beta,\alpha,\beta} = -S_{\beta,\alpha,n+\beta} = -S_{n+\beta,\beta,\alpha} = -S_{\alpha,n+\beta,\beta} = -x^{n+\alpha}, \quad \alpha < \beta,$$

$$S_{\alpha,\beta,n+\alpha} = S_{\beta,n+\alpha,\alpha} = S_{n+\alpha,\alpha,\beta} = -S_{\beta,\alpha,n+\alpha} = -S_{n+\alpha,\beta,\alpha} = -S_{\alpha,n+\alpha,\beta} = x^{n+\beta}, \quad \alpha < \beta.$$

Далее, исследуя уравнения инвариантности для операторов вращения, заключаем, что на компоненты S_{ijk} , содержащие хотя бы один индекс m , условий нет, а остальные компоненты, не содержащие индекс m , необходимо равны нулю. Таким образом, условия ковариантного постоянства контактной формы и инвариантность связности относительно автоморфизмов сасакиевой структуры однозначно определяют форму связности и, следовательно, связность $\tilde{\nabla}$. Форма связности имеет следующий вид ($\alpha < \beta$):

$$\begin{aligned} S = \sum_{\alpha=1}^n dx^\alpha \wedge dx^{n+\alpha} \wedge dx^m + \sum_{\alpha,\beta=1}^n x^{n+\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^{n+\alpha} - \sum_{\alpha,\beta=1}^n x^{n+\alpha} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^{n+\beta} = \\ = \left(\sum_{\alpha=1}^n dx^\alpha \wedge dx^{n+\alpha} \right) \wedge \left(dx^m - \sum_{\alpha=1}^n x^{n+\alpha} dx^\alpha \right), \end{aligned}$$

т.е. $S = d\eta \wedge \eta$. Теперь инвариантность формы кручения относительно автоморфизмов сасакиевой структуры очевидна, так как

$$L_X(d\eta \wedge \eta) = L(d\eta) \wedge \eta + d\eta \wedge L_X\eta = d(L_X\eta) \wedge \eta + d\eta \wedge L_X\eta = 0.$$

Таким образом, вычислительная формула для коэффициентов $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ связности $\tilde{\nabla}$ имеет вид

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kp} (\partial_i g_{pj} + \partial_j g_{ip} - \partial_p g_{ij} + (d\eta \wedge \eta)_{ijp}),$$

а в бескоординатной форме имеем искомую формулу. □

Теорема 2. *Линейная связность $\tilde{\nabla}$ является контактной метрической связностью для любой k -контактной метрической структуры.*

Доказательство. Так как связность $\tilde{\nabla}$ имеет кососимметрическое кручение, то она является метрической. Докажем, что она является и контактной для любой k -контактной метрической структуры. Известно (см., например, [6, 10]), что на гладком многообразии существует атлас Дарбу, в каждой карте которого контактная форма η имеет вид

$$\eta = -x^{n+1} dx^1 - \dots - x^{2n} dx^n + dx^m.$$

В координатах Дарбу имеем

$$d\eta = dx^1 \wedge dx^n + \dots + dx^n \wedge dx^{2n}, \quad \xi = \partial_m, \quad \xi^i = g^{is} \eta_s = \delta_m^i.$$

Найдем ковариантную производную от контактной формы

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_i \eta_i &= \partial_i \eta_j - \tilde{\Gamma}_{ij}^k \eta_k = \partial_i \eta_j - \frac{1}{2} g^{kp} (\partial_i g_{pj} + \partial_j g_{ip} - \partial_p g_{ij}) \eta_k - \frac{1}{2} S_{ijp} g^{pk} \eta_k = \\ &= \partial_i \eta_j - \frac{1}{2} (\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) - \frac{1}{2} S_{ijm}.\end{aligned}$$

Так как $S_{ijm} = (d\eta \wedge \eta)_{ijm}$, а $\eta_m = 1$, то $S_{ijm} = (d\eta)_{ij}$. Поскольку мы имеем k -контактную структуру, т.е. контактная форма η является формой Киллинга, то вектор ξ есть вектор Киллинга и, следовательно, уравнения Киллинга

$$\xi^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \xi^k g_{kj} + \partial_j \xi^k g_{ik} = 0$$

обращаются в тождества, откуда следует, что $\partial_m g_{ij} = 0$. Теперь ковариантная производная от формы η примет вид

$$\tilde{\nabla}_i \eta_j = \partial_i \eta_j - \frac{1}{2} (\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im}) - \frac{1}{2} (d\eta)_{ij}.$$

Далее из условия (5) определения контактной метрической структуры следует, что

$$g(X, Y) = h(X, Y) + \eta(X)\eta(Y),$$

где $h(X, Y) = g(\Phi X, \Phi Y)$. Структурный эндоморфизм Φ определяется условием $(d\eta)_{ij} = g_{is} \Phi_j^s$, поэтому $\Phi_j^i = g^{is} (d\eta)_{sj}$ и, следовательно,

$$h_{ij} = g_{sp} \Phi_i^s \Phi_j^p = g_{sp} g^{sl} (d\eta)_{li} g^{pk} (d\eta)_{kj}.$$

Но $(d\eta)_{im} = 0$, тогда $h_{im} = h_{mi} = 0$ и, следовательно,

$$g_{mj} = \eta_m \eta_j = \eta_j, \quad g_{im} = \eta_i \eta_m = \eta_i.$$

Поэтому

$$\tilde{\nabla}_i \eta_j = \partial_i \eta_j - \frac{1}{2} (\partial_i \eta_j + \partial_j \eta_i) - \frac{1}{2} (\partial_i \eta_j - \partial_j \eta_i) = \frac{1}{2} \partial_i \eta_j - \frac{1}{2} \partial_j \eta_i - \frac{1}{2} \partial_i \eta_j + \frac{1}{2} \partial_j \eta_i = 0. \quad \square$$

Так как любая сасакиева структура является k -контактной (см. [6, 10]), то данная теорема верна и для любой сасакиевой структуры.

3. Субримановы геодезические. На группе Гейзенберга рассмотрим неголономное поле реперов $\{p, e_i\}$, адаптированное к структуре почти произведения $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}$:

$$e_\alpha = \partial_\alpha + x_{n+\alpha} \partial_m, \quad e_{n+\alpha} = \partial_{n+\alpha}, \quad e_m = \partial_m,$$

где первые $2n$ векторных полей принадлежат контактному распределению, а $e_m = \xi$. Разложение коммутаторов координатных векторных полей

$$[e_i, e_j] = \Omega_{ij}^k e_k$$

являются структурными уравнениями поля реперов $\{p, e_i\}$, а коэффициенты разложения Ω_{ij}^k определяют объект неголономности. Для рассматриваемого поля реперов имеем

$$[e_\alpha, e_\beta] = 0, \quad [e_i, e_m] = 0, \quad [e_\alpha, e_{n+\alpha}] = -e_m, \quad [e_\alpha, e_{n+\beta}] = 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

Таким образом, $\Omega_{\alpha n+\alpha}^m = -\Omega_{n+\alpha \alpha}^m = -1$, остальные компоненты равны нулю. Дуальный реперу $\{p, e_i\}$ корепер $\{p, \theta^j\}$ определяется условием $\theta^j(e_i) = \delta_i^j$ и имеет вид

$$\theta^\alpha = dx^\alpha, \quad \theta^{n+\alpha} = dx^{n+\alpha}, \quad \theta^m = -x^{n+1} dx^1 - \dots - x^{2n} dx^n + dx^m.$$

Левинвариантная метрика в неголономном репере $\{p, e_i\}$ имеет следующий вид

$$g(X, X) = X^{12} + X^{22} + \dots + X^{m2},$$

где X^i — неголономные координаты вектора $X = X^i e_i$, а репер $\{p, e_i\}$ является ортонормированным.

Вычислим неголономные коэффициенты γ_{ij}^k связности Леви-Чивиты ∇ и неголономные коэффициенты $\tilde{\gamma}_{ij}^k$ контактной метрической связности $\tilde{\nabla}$:

$$\nabla_{e_i} e_j = \gamma_{ij}^k e_k, \quad \tilde{\nabla}_{e_i} e_j = \tilde{\gamma}_{ij}^k e_k.$$

Для связности Леви-Чивиты имеем следующую вычислительную формулу (см., например, [5])

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \left(Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) \right).$$

Полагая $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$, $Z = Z^k e_k$, получим

$$\gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \delta^{ks} \left(e_i(\delta_{sj}) + e_j(\delta_{is}) - e_s(\delta_{ij}) + \Omega_{ij}^l \delta_{sl} + \Omega_{si}^l \delta_{jl} - \Omega_{js}^l \delta_{il} \right).$$

Так как $e_i(\delta_{jk}) = 0$ и $\Omega_{ij}^k = -\Omega_{ji}^k$, то

$$\gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\Omega_{ij}^k + \delta^{ks} \Omega_{si}^l \delta_{jl} + \delta^{ks} \Omega_{sj}^l \delta_{il} \right),$$

откуда находим, что

$$\gamma_{n+\alpha, \alpha}^m = \frac{1}{2}, \quad \gamma_{\alpha, n+\alpha}^m = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_{\alpha m}^{n+\alpha} = \gamma_{m\alpha}^{n+\alpha} = \frac{1}{2}, \quad \gamma_{n+\alpha, m}^\alpha = \gamma_{m, n+\alpha}^\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Так как

$$\tilde{\gamma}_{ij}^k = \gamma_{ij}^k + \frac{1}{2} S_{ij}^k,$$

где $S_{ij}^k = \delta^{ks} S_{ijs}$ — неголономные коэффициенты тензора кручения $\tilde{S}$, а S_{ijs} — компоненты формы кручения

$$d\eta \wedge \eta = \theta^1 \wedge \theta^{n+1} \wedge \theta^m + \dots + \theta^n \wedge \theta^{2n} \wedge \theta^m.$$

Поэтому

$$S_{\alpha, n+\alpha, m} = S_{n+\alpha, m, \alpha} = S_{m, \alpha, n+\alpha} = -S_{n+\alpha, \alpha, m} = -S_{m, n+\alpha, \alpha} = -S_{\alpha, m, n+\alpha} = 1, \\ S_{\alpha, n+\alpha}^m = S_{n+\alpha, m}^\alpha = S_{m\alpha}^{n+\alpha} = 1, \quad S_{n+\alpha, \alpha}^m = S_{m, n+\alpha}^\alpha = S_{\alpha m}^{n+\alpha} = -1,$$

остальные коэффициенты равны нулю. Теперь находим ненулевые коэффициенты связности $\tilde{\nabla}$:

$$\tilde{\gamma}_{m\alpha}^{n+\alpha} = 1, \quad \tilde{\gamma}_{m, n+\alpha}^\alpha = -1 \quad \left(\tilde{\nabla}_{e_m} e_\alpha = e_{n+\alpha}, \quad \tilde{\nabla}_{e_m} e_{n+\alpha} = -e_\alpha \right).$$

Контактное распределение $\mathfrak{L} = \ker \eta$ $2n$ -мерных площадок вместе с ограничением метрики g на это распределение

$$ds_{\mathfrak{L}}^2 = dx^{1^2} + \dots + dx^{2n^2}$$

определяет на группе Гейзенберга субриманову структуру. Горизонтальная (допустимая) кривая $\gamma: x^i = x^i(s)$ (s — естественный параметр) называется субримановой геодезической, если она является геодезической относительно усеченной связности $\tilde{\nabla}$: $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, где $\tilde{\nabla}$ — ортогональная проекция связности $\tilde{\nabla}$ (или ∇) на распределение $\mathfrak{L}$, а $\dot{\gamma}$ — поле касательных векторов кривой γ , лежащих в распределении $\mathfrak{L}$. Так как $\tilde{\nabla}_{e_i} e_j = 0$ и $\nabla_{e_i} e_j = 0$, $i, j = \overline{1, 2n}$, то проекции контактной метрической связности $\tilde{\nabla}$ и связности Леви-Чивиты ∇ совпадают и, следовательно, определяют одну и ту же усеченную связность: $\tilde{\nabla}_{e_i} e_j = 0$.

Найдем сначала уравнения параллельного перенесения допустимых векторов вдоль горизонтальных кривых. Как обычно, векторное поле v назовем параллельным вдоль кривой γ , если $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} v = 0$. Пусть $\dot{x}^i$ и v^i — естественные координаты векторных полей $\dot{\gamma}$ и v , т.е.

$$\dot{\gamma} = \dot{x}^i \partial_i, \quad v = v^k \partial_k \quad i, k = \overline{1, m},$$

а ξ^i и η^k — их координаты в ортонормированном базисе e_i ($i = \overline{1, 2n}$) контактного распределения $\mathfrak{L}$, т.е.

$$\dot{\gamma} = \xi^i e_i, \quad v = \eta^k e_k.$$

Так как

$$\partial_\alpha = e_\alpha - x_{n+\alpha} e_m, \quad \partial_{n+\alpha} = e_{n+\alpha}, \quad \partial_m = e_m,$$

то

$$\dot{\gamma} = \dot{x}^i \partial_i = \dot{x}^\alpha (e_\alpha - x_{n+\alpha} e_m) + \dot{x}^{n+\alpha} e_{n+\alpha} + \dot{x}^m e_m = \dot{x}^i e_i + (\dot{x}^m - \dot{x}^\alpha x_{n+\alpha}) e_m \quad (i = \overline{1, 2n}).$$

Поэтому $\dot{x}^i = \xi^i$ ($i = \overline{1, 2n}$), а $\dot{x}^m - \dot{x}^\alpha x_{n+\alpha} = 0$, так как $\dot{\gamma} \in \mathfrak{L}$. Аналогично,

$$v = v^k \partial_k = v^k e_k + (v^m - v^\alpha x_{n+\alpha}) e_m$$

и, следовательно, $v^k = \eta^k$ ($k = \overline{1, 2n}$), а $v^m - v^\alpha x_{n+\alpha} = 0$, так как $v \in \mathfrak{L}$. Далее имеем

$$\nabla_{\dot{\gamma}} v = \xi^i \nabla_{e_i} (\eta^k e_k) = \xi^i e_i (\eta^k) e_k + \xi^i \eta^k \nabla_{e_i} e_k = \xi^i e_i (\eta^k) e_k.$$

Поэтому уравнения параллельного перенесения примут вид

$$\xi^i e_i (\eta^k) = 0.$$

Перепишем эти уравнения в естественных координатах, учитывая, что

$$\begin{aligned} \xi^i &= \dot{x}^i, \quad \eta^k = v^k \quad (i, k = \overline{1, 2n}), \\ e_\alpha &= \partial_\alpha + x_{n+\alpha} \partial_m, \quad e_{n+\alpha} = \partial_{n+\alpha}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\dot{x}^\alpha (\partial_\alpha v^k + x_{n+\alpha} \partial_m v^k) + \dot{x}^{n+\alpha} \partial_{n+\alpha} v^k = 0.$$

Но

$$\dot{x}^\alpha x_{n+\alpha} = \dot{x}^m, \quad (\dot{\gamma} \in \mathfrak{L}),$$

поэтому получим

$$\dot{x}^\alpha \partial_\alpha v^k + \dot{x}^m \partial_m v^k + \dot{x}^{n+\alpha} \partial_{n+\alpha} v^k = 0,$$

т.е. $\dot{x}^p \partial_p v^k = 0$ ($p = \overline{1, m}; k = \overline{1, 2n}$) или $\dot{v}^k = 0$. А так как $v \in \mathfrak{L}$, то $v^m = x^\alpha x_{n+\alpha}$ и, следовательно, уравнения параллельного перенесения имеют вид

$$\dot{v}^k = 0, \quad k = \overline{1, 2n}, \quad v^m = v^\alpha x_{n+\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, n}.$$

Положив теперь $v^i = \dot{x}^i$, получим дифференциальные уравнения субримановых геодезических

$$\ddot{x}^k = 0, \quad k = \overline{1, 2n}, \quad \dot{x}^m = \dot{x}^\alpha x_{n+\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, n}.$$

Интегрируя полученные уравнения, находим общее решение

$$x^k = a^k s + b^k, \quad x^m = \frac{1}{2} (a_\alpha a^{n+\alpha}) s^2 + (a_\alpha b^{n+\alpha}) s + b^m, \quad a_\alpha = a^\alpha.$$

множество всех субримановых геодезических на группе Гейзенберга.

При исследовании строения геодезических, в силу левоинвариантности субримановой структуры, можно ограничиться геодезическими, выходящими из единицы группы

$$x^k = a^k s, \quad x^m = \frac{1}{2} (a^1 a^{n+1} + \dots + a^n a^{2n}) s^2.$$

Заметим, что ортогональные проекции геодезических на контактную плоскость являются прямыми линиями. Чтобы провести анализ строения геодезических, отождествим матрицы группы Гейзенберга с точками m -мерного числового пространства $\mathbb{R}^m$, поставив в соответствие каждой матрице группы G с определяющими элементами x^i точку $x = (x^i)$ из $\mathbb{R}^m$. Так как в единице группы

$$e_\alpha = \partial_\alpha, \quad e_{n+\alpha} = \partial_{n+\alpha}, \quad e_m = \partial_m,$$

то ортонормированному реперу $\{e, e_i\}$ группы G будет отвечать репер $\{O, e_i\}$ в $\mathbb{R}^m$, где $O = (0, \dots, 0)$, $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_m = (0, \dots, 0, 1)$. Этот репер является ортонормированным относительно стандартной евклидовой метрики ρ_E в $\mathbb{R}^m$. Контактной плоскости в единице группы соответствует координатная плоскость векторов $e_1, \dots, e_{2n}$. Теперь мы можем исследовать строение субримановых геодезических, используя геометрию евклидова пространства $\mathbb{E}^m = (\mathbb{R}^m, \rho_E)$.

Рассмотрим несколько подробнее трехмерный случай. В евклидовом пространстве параметрические уравнения субримановых геодезических примут вид

$$x = a_1 s, \quad y = a_2 s, \quad z = \frac{1}{2} a_1 a_2 s^2,$$

где $x = x^1, y = x^2, z = x^3, a_i = a^i$. Так как s — естественный параметр, то $a_1^2 + a_2^2 = 1$, и единичный вектор $a(a_1, a_2)$ в контактной плоскости xOy определяет направление геодезической, т.е. он является касательным вектором к геодезической в начале координат. В координатной плоскости xOy рассмотрим числовую прямую l , заданную первыми двумя уравнениями геодезических с единичным вектором a и параметром s . Обозначим направленный угол между единичным вектором e_1 оси Ox и вектором a через $\theta = (\widehat{e_1, a})$. Тогда уравнения геодезических примут вид:

$$x = s \cos \theta, \quad y = s \sin \theta, \quad z = \frac{1}{2} s^2 \cos \theta \sin \theta.$$

Первые два уравнения в плоскости xOy определяют прямую l , а в пространстве — плоскость lOz . Третье уравнение в плоскости lOz определяет параболу, а в пространстве — параболический цилиндр. Искомая система определяет субриманову геодезическую как пересечение параболического цилиндра и плоскости. Это пересечение является параболой, если $\cos \theta \sin \theta \neq 0$ (ее уравнение в репере $\{O, a, e_3\}$ является третьим уравнением системы). Если $\cos \theta \sin \theta = 0$, то при $\sin \theta = 0$ ($z = 0$), геодезической является ось $Ox = (xOy) \cap (xOz)$. Если $\cos \theta = 0$, то геодезической является ось $Oy = (xOy) \cap (yOz)$. При малых θ имеем $\sin \theta \rightarrow 0$, коэффициент $\cos \theta \sin \theta > 0$ мал, ветви параболы расположены в полупространстве $z > 0$, и парабола мало отличается от прямой Ox . С возрастанием θ это отличие растет, и при $\theta = \pi/4$ достигает своего максимума. При $\theta > \pi/4$ происходит «распрямление» параболы, и при $\theta = \pi/2$, $\cos \theta = 0$, парабола «превращается» в прямую Oy . При $\theta > \pi/2$ ветви параболы опускаются «вниз» ($\cos \theta \sin \theta < 0$, $\pi/2 < \theta < \pi$). С увеличением θ парабола становится круче, достигает максимума при $\theta = 3\pi/4$, затем опять распрямляется и становится прямой Ox при $\theta = \pi$. Далее ветви параболы опять поднимутся вверх. В третьем координатном угле ($\pi < \theta < 3\pi/2$) имеем те же параболы, что и в первом ($0 < \theta < \pi/2$), а в четвертом ($3\pi/2 < \theta < 2\pi$) имеем то же самое, что и во втором ($\pi/2 < \theta < \pi$), т.е. направления a и $-a$ определяют одну и ту же геодезическую (система обладает свойством симметрии). Напомним, что в каждой точке геодезической касательный к ней вектор лежит в соответствующей контактной плоскости.

Аналогичное поведение геодезических мы наблюдаем и в многомерном случае. Если допустимые направления a лежат в координатных плоскостях $(e_\alpha, e_{n+\alpha})$, то геодезические ведут себя так же, как и в трехмерном случае. Из уравнений геодезических следует, что все координатные прямые репера $\{O, e_i\}$ являются геодезическими, кроме того, все прямые, лежащие в координатных плоскостях, отличных от $(e_\alpha, e_{n+\alpha})$, также являются геодезическими.

4. Секционная кривизна. Имея коэффициенты связности $\tilde{\nabla}$, нетрудно вычислить компоненты $\tilde{R}_{ijk}^l$ тензора кривизны

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z, \\ \tilde{R}_{ijk}^l &= e_i(\tilde{\gamma}_{jk}^l) - e_j(\tilde{\gamma}_{ik}^l) + \tilde{\gamma}_{is}^l \tilde{\gamma}_{jk}^s - \tilde{\gamma}_{js}^l \tilde{\gamma}_{ik}^s - \Omega_{ij}^s \tilde{\gamma}_{sk}^l. \end{aligned}$$

В результате получаем следующие ненулевые компоненты тензора кривизны:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha, n+\alpha, \alpha}^{n+\alpha} &= -\tilde{R}_{\alpha, n+\alpha, n+\alpha}^\alpha = 1, \quad \tilde{R}_{n+\alpha, \alpha, \alpha}^{n+\alpha} = -\tilde{R}_{n+\alpha, \alpha, n+\alpha}^\alpha = -1, \\ \tilde{R}_{\alpha, n+\alpha, \alpha, n+\alpha} &= -\tilde{R}_{n+\alpha, \alpha, \alpha, n+\alpha} = -\tilde{R}_{\alpha, n+\alpha, n+\alpha, \alpha} = \tilde{R}_{n+\alpha, \alpha, n+\alpha, \alpha} = 1. \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями нетрудно убедиться, что в связности $\tilde{\nabla}$ тензоры кручения и кривизны ковариантно постоянны:

$$\tilde{\nabla} \tilde{S} = 0, \quad \tilde{\nabla} \tilde{R} = 0.$$

Действительно, для ковариантных компонент тензора кручения имеем

$$\tilde{\nabla}_l S_{ijk} = e_l(S_{ijk}) - S_{pjk} \tilde{\gamma}_{li}^p - S_{ipk} \tilde{\gamma}_{lj}^p - S_{ijp} \tilde{\gamma}_{lk}^p.$$

Но $e_l(S_{ijk}) = 0$, а для ненулевых компонент при $i = \alpha, j = n + \alpha, k = m$ имеем

$$-\tilde{\nabla}_{e_l} S_{\alpha, n+\alpha, m} = S_{\alpha, n+\alpha, m} \tilde{\gamma}_{l\alpha}^\alpha + S_{\alpha, n+\alpha, m} \tilde{\gamma}_{l, n+\alpha}^{n+\alpha} + S_{\alpha, n+\alpha, m} \tilde{\gamma}_{lm}^m \equiv 0,$$

так как $\tilde{\gamma}_{l\alpha}^\alpha = \tilde{\gamma}_{l,n+\alpha}^{n+\alpha} = \tilde{\gamma}_{lm}^m = 0$. Аналогично для тензора кривизны:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{e_r}\tilde{R}_{ijkl} &= e_r(\tilde{R}_{ijkl}) - \tilde{R}_{pjkl}\tilde{\gamma}_{ri}^p - \tilde{R}_{ipkl}\tilde{\gamma}_{rj}^p - \tilde{R}_{ijpl}\tilde{\gamma}_{rk}^p - \tilde{R}_{ijkp}\tilde{\gamma}_{rl}^p, \\ -\tilde{\nabla}_{e_r}\tilde{R}_{\alpha,n+\alpha,\alpha,n+\alpha} &= \tilde{R}_{\alpha,n+\alpha,\alpha,n+\alpha}\tilde{\gamma}_{r\alpha}^\alpha + \tilde{R}_{\alpha,n+\alpha,\alpha,n+\alpha}\tilde{\gamma}_{r,n+\alpha}^{n+\alpha} + \tilde{R}_{\alpha,n+\alpha,\alpha,n+\alpha}\tilde{\gamma}_{r,n+\alpha}^{n+\alpha} \equiv 0.\end{aligned}$$

Заметим, что ковариантный тензор кривизны $g(\tilde{R}(X, Y)Z, W)$ кососимметричен по первой и второй паре аргументов, и эти пары можно менять местами. Поэтому мы можем ввести понятие секционной кривизны аналогично тому, как это делается в римановой геометрии, т.е. в каждой точке $p \in G$ и в каждом двумерном направлении $\mathfrak{S}$, определяемом векторами $u, v \in T_p G$, кривизна $\tilde{k}$ определяется формулой

$$\tilde{k} = \frac{g(\tilde{R}(u, v)v, u)}{g(u, u) \cdot g(v, v) - g(u, v)^2}.$$

Теорема 3. *Секционная кривизна $\tilde{k}$ группы Гейзенберга с контактной метрической связностью принадлежит числовому отрезку $[-1, 0]$.*

Доказательство. Будем считать, что векторы $u, v \in \mathfrak{S}_p$ единичны и ортогональны, тогда

$$\begin{aligned}\tilde{k} &= g(\tilde{R}(u, v)v, u) = \tilde{R}_{\alpha,n+\alpha,\alpha,n+\alpha}u^\alpha v^{n+\alpha}v^\alpha u^{n+\alpha} + \tilde{R}_{n+\alpha,\alpha,\alpha,n+\alpha}u^{n+\alpha}v^\alpha v^\alpha u^{n+\alpha} + \\ &\quad + \tilde{R}_{\alpha,n+\alpha,n+\alpha,\alpha}u^\alpha v^{n+\alpha}v^{n+\alpha}u^\alpha + \tilde{R}_{n+\alpha,\alpha,n+\alpha,\alpha}u^{n+\alpha}v^\alpha v^{n+\alpha}u^\alpha = \\ &= -\left[\left((u^1)^2(v^{n+1})^2 + \dots + (u^n)^2(v^{2n})^2\right) - 2\left(u^1v^1u^{n+1}v^{n+1} + \dots + u^nv^nu^{2n}v^{2n}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left((u^{n+1})^2(v^1)^2 + \dots + (u^{2n})^2(v^n)^2\right)\right].\end{aligned}$$

Пусть $m = 3$; тогда

$$\tilde{k} = -(u^1v^2 - u^2v^1)^2 \leq 0.$$

Если поле двумерных направлений $\mathfrak{S}$ определяется контактным распределением $\mathfrak{L}$, то в качестве вектора v можно взять Φu , где Φ — структурный эндоморфизм, действующий в $\mathfrak{L}$ как оператор комплексной структуры, т.е. $v^1 = -u^2$, $v^2 = u^1$. Тогда

$$\tilde{k} = -\left((u^1)^2 + (u^2)^2\right) = -1,$$

так как вектор u — единичный. Если плоскость $\mathfrak{S}_p$ содержит вектор $\xi(0, 0, 1)$, то $\tilde{k} = 0$. Если плоскость $\mathfrak{S}_p$ не совпадает с $\mathfrak{L}$ и не содержит вектор ξ , то поступая так же, как в [7], вектор u возьмем в пересечении $\mathfrak{S}_p \cap \mathfrak{L}_p$, а v ему перпендикулярно. Тогда $u^1v^1 + u^2v^2 = 0$. Возводя это равенство в квадрат, получим

$$-2u^1v^1u^2v^2 = (u^1)^2(v^1)^2 + (u^2)^2(v^2)^2,$$

поэтому

$$\tilde{k} = -\left((u^1)^2(v^2)^2 - 2u^1v^1u^2v^2 + (u^2)^2(v^1)^2\right) = -\left((u^1)^2 + (u^2)^2\right)\left((v^1)^2 + (v^2)^2\right).$$

Так как $(u^1)^2 + (u^2)^2 = 1$, $(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = 1$, то

$$\tilde{k} = -\left(1 - (u^3)^2\right) > -1.$$

Таким образом, $-1 \leq \tilde{k} \leq 0$. Данная оценка кривизны получена в [7] с использованием естественных координат.

Пусть $m > 3$; тогда, перегруппировав слагаемые, $\tilde{k}$ можно представить так

$$\tilde{k} = -\left[\left(u^1v^{n+1} - u^{n+1}v^1\right)^2 + \dots + \left(u^nv^{2n} - v^{2n}v^n\right)^2\right] \leq 0.$$

Докажем, что $\tilde{k} \geq -1$, т.е. величина в квадратных скобках ≤ 1 . Так же, как и в случае $m = 3$, вектор u возьмем в пересечении $\mathfrak{S}_p \cap \mathfrak{L}_p$. Так как u и v единичны и ортогональны, знаменатель в исходной формуле для $\tilde{k}$ равен единице, однако в числителе этот факт пока не отражен. Поэтому

векторы u и v мы пронормируем, разделив их координаты на длины векторов u и v . В результате необходимо доказать, что выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \left[(u^1)^2 (v^{n+1})^2 + \dots + (u^n)^2 (v^{2n})^2 - 2u^1 v^1 u^{n+1} v^{n+1} - \dots - \right. \\ & \quad \left. - 2u^n v^n u^{2n} v^{2n} + (u^{n+1})^2 (v^1)^2 + \dots + (u^{2n})^2 (v^n)^2 \right] \leqslant \\ & \leqslant \left((u^1)^2 + \dots + (u^n)^2 + (u^{n+1})^2 + \dots + (u^{2n})^2 \right) \left((v^1)^2 + \dots + (v^n)^2 + (v^{n+1})^2 + \dots + (v^{2n})^2 \right). \end{aligned}$$

Действительно, если перенести левую часть вправо, сократить слагаемые вида $\pm (u^\alpha)^2 (v^{n+\alpha})^2$ и $\pm (u^{n+\alpha})^2 v^{n^2}$ и свернуть выражения вида $(u^\alpha)^2 (v^\alpha)^2 + 2u^\alpha v^\alpha u^{n+\alpha} v^{n+\alpha} + (u^{n+\alpha})^2 (v^{n+\alpha})^2$, то получим сумму квадратов вида

$$(u^1 v^1 + u^{n+1} v^{n+1})^2 + \dots + (u^n v^n + u^{2n} v^{2n})^2 + (u^1)^2 (v^2)^2 + \dots + (u^{2n})^2 (v^m)^2 \geqslant 0,$$

что и доказывает наше утверждение. Таким образом, как и в случае $m = 3$, для секционной кривизны выполняется неравенство $-1 \leqslant \tilde{k} \leqslant 0$, причем, например, -1 достигается в направлениях, определяемых координатными плоскостями, натянутыми на векторы e_α , $e_{n+\alpha}$, а 0 — оставшимися координатными плоскостями, а также в случае, когда направление $\mathfrak{S}$ содержит характеристический вектор ξ . $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграчев А. А. Некоторые вопросы субримановой геометрии // Усп. мат. наук. — 2016. — 71, № 6 (432). — С. 3–36.
2. Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — 1987. — 16. — С. 5–85.
3. Вершик А. М., Фадеев Л. Д. Лагранжева механика в инвариантном изложении // в кн.: Проблемы теоретической физики. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. — С. 129–141.
4. Горбачев В. В. Субримановы геометрии на компактных однородных пространствах // Изв. РАН. Сер. мат. — 2014. — 78, № 3. — С. 35–52.
5. Громов Д., Клингенберг В., Майер В. Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971.
6. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Одесса: Печатный Дом, 2013.
7. Паньженский В. И., Климова Т. Р. Контактная метрическая связность на группе Гейзенберга // Изв. вузов. Мат. — 2018. — 11. — С. 51–59.
8. Сачков Ю. Л. Теория управления на группах Ли // Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 26. — С. 5–59.
9. Agrachev A., Barilari D., Boscain U. Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry. — Trieste: SISSA, 2012.
10. Blair D. E. Contact Manifolds in Riemannian geometry. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1976.
11. Boyer C. P. The Sasakian Geometry of the Heisenberg Group. — Albuquerque, 2009.
12. Tanno S. The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds // Tôhoku Math. J. — 1969. — 21, № 2. — Р. 21–38.

Паньженский Владимир Иванович
Пензенский государственный университет
E-mail: kaf-geom@yandex.ru

Сурина Ольга Петровна
Пензенский государственный университет
E-mail: o.surina2013@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 85–90
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-85-90

УДК 514.76

НОРМАЛИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА НА МНОГООБРАЗИИ

© 2020 г. К. В. ПОЛЯКОВА

Аннотация. На n -мерном гладком многообразии рассмотрены нормали высших порядков двух видов, т.е. пространства, дополняющие касательное пространство порядка 1 или $r - 1$ до касательного пространства порядка r . Показано, что производные одних базисных векторов по направлению данных базисных векторов первого (второго) порядка равны значениям дифференциалов первого (второго) порядка первых векторов на данных векторах. С помощью дифференциалов базисных касательных векторов первого и второго порядков построены отображения из множества касательных векторов первого порядка во множество векторов нормалей второго и третьего порядков. Заданы отображения, порождающие горизонтальные векторы второго и третьего порядков для канонической аффинной связности первого и второго порядков соответственно.

Ключевые слова: дифференциальная форма, касательное пространство, нормаль на многообразии, аффинная связность.

HIGHER-ORDER NORMALS ON MANIFOLDS

© 2020 К. V. POLYAKOVA

ABSTRACT. On an n -dimensional smooth manifold, we consider higher-order normals of two types, i.e., the spaces that complement the tangent space of orders 1 or $r - 1$ to the tangent space of order r . We prove that the derivatives of some basic vectors in the direction of the given first-order (second-order) basis vectors are equal to the values on these vectors of the first-order (second-order) differentials of the first vectors. Using the differentials of basic tangent vectors of the first and second orders, we construct mappings from the set of first-order tangent vectors to the set of second- and third-order normal vectors. Also, we introduce mappings that generate horizontal second- and third-order vectors for the canonical first- and second-order affine connections, respectively.

Keywords and phrases: differential form, tangent space, normal on a manifold, affine connection.

AMS Subject Classification: 53B05, 58A10

1. Введение. Данная работа относится к дифференциальной геометрии, а методика исследования основана на применении способа Г. Ф. Лаптева (см. [7, 8]) задания связности в главных расслоениях и разработанного им метода продолжений и охватов, который обобщает метод подвижного репера и внешних форм Э. Картана. Применение метода Картана—Лаптева, оперирующего структурными уравнениями и деривационными формулами, позволяет эффективно использовать тангенциальнозначные формы, т.е. дифференциальные формы со значениями в касательных пространствах различных порядков. Указанные формы широко применяются во многих разделах современной физики (см., например, [2, 15]).

Отправным пунктом для построения различных тангенциальнозначных форм на расслоении линейных реперов является каноническая форма на этом расслоении; связывая касательное и кокасательное пространства этого расслоенного многообразия, она соответствует тождественным

отображениям этих пространств. При этом действия тангенциальнозначных форм имеют двойственный характер: они действуют как в пространстве касательных векторов к расслоению линейных реперов, так и в пространстве ковекторов. Все тангенциальнозначные формы, возникающие в результате продолжения (внешнего дифференцирования и последующего разрешения по лемме Э. Картана), дают возможность строить касательные пространства 2-го и более высоких порядков, кроме того, эти формы задают важные отображения как касательных, так и кокасательных пространств различных порядков. В частности, отображения, определяемые дифференциалами базисных касательных векторных полей, переводят касательные векторы в нормальные векторы (см. [13]), т.е. векторы второго порядка, дополняющие касательное пространство 1-го порядка до касательного пространства 2-го порядка.

Метод Лаптева, базируясь на операции внешнего дифференцирования обычных (а также тангенциальнозначных) форм, с применением координатного задания векторов и форм дает возможность шире использовать деривационные формулы на многообразии.

Каноническая форма 1-го порядка $\theta = \omega^i \varepsilon_i$ ($i, j, k, \dots = 1, \dots, m$) на многообразии X_m связывает касательное $TX_m = \text{span}(\varepsilon_i)$ и кокасательное $T^*X_m = \text{span}(\omega^i)$ пространства к этому многообразию в его текущей точке M , а также соответствует тождественным преобразованиям этих пространств, т.е. (см. [12])

$$\theta = \text{id}_{TX_m}, \quad \theta = \text{id}_{T^*X_m}.$$

Каноническая форма является тензорнозначной (см. [2, 5]), точнее, тангенциальнозначной. Дифференциальные 1-формы $\{\omega^i\}$ образуют кобазис, сопряженный подвижному базису $\{\varepsilon_i\}$, т.е. $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta_j^i$. Фактически $\theta = \omega^i \otimes \varepsilon_i \in T^*X_m \otimes TX_m$, но значок тензорного умножения в форме $\theta = \omega^i \varepsilon_i$ будем опускать.

Реализуем подход, связанный с координатным выражением базисных и слоевых форм, а также векторов репера в слоях. Рассмотрим некоторую окрестность m -мерного многообразия X_m , в которой текущая точка определяется локальными координатами x^i . Слойные координаты x_j^i , x_{jk}^i , x_{jkl}^i на многообразии X_m (см. [8, с. 149]) удовлетворяют соотношениям $\det(x_j^i) \neq 0$, $x_k^i x_j^k = \delta_j^i$ и симметричны по нижним индексам. При этом базисные ω^i и слоевые ω_j^i , ω_{jk}^i формы имеют вид

$$\begin{aligned} \omega^i &= x_j^i dx^j, \\ \omega_j^i &= -x_j^{*k} dx_k^i - x_{jk}^i \omega^k, \\ \omega_{jk}^i &= dx_{jk}^i + x_{jk}^l \omega_l^i - x_{lk}^i \omega_j^l - x_{jl}^i \omega_k^l + (x_{jk}^s x_{sl}^i - x_{jkl}^i) \omega^l. \end{aligned} \quad (1)$$

Структурные уравнения совокупности базисных ω^i и слоевых ω_j^i , ω_{jk}^i форм главного расслоения реперов 2-го порядка, построенного над многообразием X_m , находятся внешним дифференцированием форм (1) (см. [8]).

Относительно натурального (голономного) репера $\{\partial_i = \partial/\partial x^i, \partial_{ij} = \partial^2/\partial x^i \partial x^j\}$ векторы ε_i и ε_{ij} раскладываются по формулам (см. [9])

$$\varepsilon_i = x_i^j \partial_j, \quad \varepsilon_{ij} = x_i^{*k} x_j^{*l} \partial_{kl} + x_{ij}^k x_k^l \partial_l. \quad (2)$$

Пространство $T^2X_m = \text{span}(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij})$ в текущей точке M многообразия X_m называется касательным пространством порядка 2, а также соприкасающимся пространством порядка 1 (см., например, [13]). Слойные формы интерпретируются как компоненты инфинитезимального перемещения векторного репера ε_i , ε_{ij} , удовлетворяющего деривационным уравнениям

$$\begin{aligned} d\varepsilon_i &= \varepsilon_j \omega_i^j + \omega^j \varepsilon_{ij}, \\ d\varepsilon_{ij} &= \omega_i^k \varepsilon_{kj} + \omega_j^k \varepsilon_{ik} + \omega_{ij}^k \varepsilon_k + \omega^k \varepsilon_{ijk}, \end{aligned} \quad (3)$$

которые получены дифференцированием векторов (2).

Дифференцируя каноническую форму $\theta = \omega^i \varepsilon_i$ обычным образом, получим каноническую форму 2-го порядка на многообразии X_m (см., например, [1, 9, 16])

$$d\theta = (d\omega^i + \omega^j \omega_j^i) \varepsilon_i + \omega^i \omega^j \varepsilon_{ij},$$

причем $d\theta \in (T^2 X_m)^* \otimes T^2 X_m$, поскольку

$$d\omega^i + \omega^j \omega_j^i, \omega^i \omega^j \in (T^2 X_m)^*, \quad \varepsilon_{ij} \in T^2 X_m.$$

Пространство $(T^2 X_m)^*$, сопряженное касательному пространству 2-го порядка $T^2 X_m$, называется кокасательным пространством 2-го порядка. Репер $\{\varepsilon_i, \varepsilon_{ij}\}$ и корепер $\{d\omega^i + \omega^j \omega_j^i, \omega^i \omega^j\}$ 2-го порядка являются сопряженными. Условия сопряженности для произвольных (не являющихся натуральными) базиса и кобазиса 2-го порядка имеют вид

$$(d\omega^i + \omega^j \omega_j^i)(\varepsilon_k) = \delta_k^i, \quad \omega^i \omega^j(\varepsilon_{kl}) = \frac{1}{2}(\delta_k^i \delta_l^j + \delta_l^i \delta_k^j), \quad (d\omega^i + \omega^j \omega_j^i)(\varepsilon_{kl}) = 0, \omega^i \omega^j(\varepsilon_k) = 0.$$

Известно (см. [17]), что $\{d^2 x^i, dx^i dx^j\}$ — натуральный корепер (см. [6, с. 54], [4, с. 175]) кокасательного пространства 2-го порядка $(T^2 X_m)^*$, $\{\partial_i, \partial_{ij}\}$ — натуральный корепер касательного пространства 2-го порядка $T^2 X_m$. Ненулевые условия сопряженности можно записать следующим образом:

$$d^2 x^i(\partial_j) = \delta_j^i, \quad dx^i dx^j(\partial_{kl}) = \frac{1}{2}(\delta_k^i \delta_l^j + \delta_l^i \delta_k^j).$$

При этом

$$TX_m \subset T^2 X_m, \quad \{\partial_i\} \in \{\partial_i, \partial_{ij}\}; \\ T^* X_m \not\subset (T^2 X_m)^*, \quad \{dx^i\} \notin \{d^2 x^i, dx^i dx^j\}.$$

Выражение обычного дифференциала канонической формы $\theta = \omega^i \varepsilon_i$ многообразия X_m относительно натуральных репера и корепера 2-го порядка принимает следующий вид:

$$d\theta = d^2 x^i \partial_i + dx^i dx^j \partial_{ij}.$$

2. Нормали на многообразии. *Нормалью* (см. [13, 14]) *порядка r* в точке M многообразия называется такое подпространство N^r соприкасающегося пространства $O^r X_m$, которое имеет пересечение нулевой размерности с пространством $O^{r-1} X_m$, и размерность которого является дополнительной по отношению к размерности $O^{r-1} X_m$, т.е.

$$N^r \oplus O^{r-1} X_m = O^r X_m.$$

Для определения порядка нормали будем использовать порядки касательных, а не соприкасающихся пространств, полагая, что соприкасающееся пространство r -го порядка — это касательное пространство $(r+1)$ -го порядка, т.е. $T^{r+1} X_m = O^r X_m$. Кроме того, в качестве нормалей будем рассматривать также пространства, дополняющие пространство TX_m (а не только пространство $T^r X_m$) до пространства $T^{r+1} X_m$.

Нормалью порядка r касательного пространства TX_m (многообразия X_m) в точке M будем называть подпространство N_1^r , дополняющее пространство TX_m до пространства $T^r X_m$, т.е.

$$N_1^r \oplus TX_m = T^r X_m.$$

В частности, для пространства TX_m имеем следующие две нормали N_1^2 и N_1^3 :

$$N_1^2 \oplus TX_m = T^2 X_m; \quad N_1^3 \oplus TX_m = T^3 X_m.$$

Нормаль N_1^r можно представить в следующем виде: $N_1^r = T^r X_m \setminus TX_m$; тогда $N_1^2 = T^2 X_m \setminus TX_m$, $N_1^3 = T^3 X_m \setminus TX_m$.

Нормалью порядка $r+1$ касательного пространства $T^r X_m$ в точке M будем называть подпространство N_r^{r+1} , дополняющее пространство $T^r X_m$ до пространства $T^{r+1} X_m$, т.е. (ср. [13])

$$N_r^{r+1} \oplus T^r X_m = T^{r+1} X_m.$$

Например, для пространства $T^2 X_m$ имеем нормаль $N_2^3 = T^3 X_m \setminus T^2 X_m$.

Если в равенстве $\varepsilon_j(f) = df(\varepsilon_j)$ заменить функцию f векторами ε_i , то будет иметь место следующая лемма.

Лемма 1. *Для базисных касательных векторов 1-го порядка ε_i справедливо равенство $d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \varepsilon_j(\varepsilon_i)$.*

При линейном отображении $d\varepsilon_i$, определяемом соотношением (3), имеем

$$d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \varepsilon_k \omega_i^k(\varepsilon_j) + \varepsilon_{ik} \omega^k(\varepsilon_j) = \dot{\varepsilon}_{ij}.$$

Кроме того,

$$\varepsilon_j(\varepsilon_i) = \partial_{\varepsilon_j} \varepsilon_i = \partial_{x_j^l \partial_l} \left(x_i^k \partial_k \right) = x_i^k x_j^l \partial_{kl} = \varepsilon_{ij} - x_{ij}^k \varepsilon_k = \dot{\varepsilon}_{ij}.$$

Векторы $\dot{\varepsilon}_{ij}$ удовлетворяют уравнениям $\Delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ijk} \omega^k$, т.е. инвариантны в совокупности, причем $\dot{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk} - x_{ij}^l \dot{\varepsilon}_{lk} - x_{ijk}^l \varepsilon_l$, где векторы

$$\varepsilon_{ijk} = x_i^l x_j^s x_k^t \partial_{lst} + x_{ijk}^l \varepsilon_l + \left(x_l^p x_j^q x_{ik}^l + x_i^p x_l^q x_{jk}^l + x_l^p x_k^q x_{ij}^l \right) \partial_{pq}$$

принадлежат касательному пространству 3-го порядка $T^3 X_m$. Дифференциальный тензорный оператор Δ имеет вид (см., например, [1, 3, 16])

$$\Delta t_{jk}^i = dt_{jk}^i + t_{jk}^l \omega_l^i - t_{lk}^i \omega_j^l - t_{jl}^i \omega_k^l.$$

Линейные отображения

$$d\varepsilon_i: TX_m \rightarrow N_1^2 = T^2 X_m \setminus TX_m$$

определяют нормаль 2-го рода $N_1^2 = \text{span}(\dot{\varepsilon}_{ij})$ для пространства TX_m .

Базисные векторы $\dot{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - x_{ij}^k \varepsilon_k$ нормали 2-го порядка N_1^2 являются:

- (i) производными векторов ε_i по их направлениям, т.е. $\dot{\varepsilon}_{ij} = \partial_{\varepsilon_j} \varepsilon_i$,
- (ii) образами векторов ε_j при отображениях $d\varepsilon_i$, т.е. $\dot{\varepsilon}_{ij} = d\varepsilon_i(\varepsilon_j)$.

Для касательных векторов $u = u^i \varepsilon_i$, $v = v^i \varepsilon_i$ справедливо:

$$du(v) = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x^k} x_i^k \varepsilon_j + u^j \dot{\varepsilon}_{ji} \right) v^i.$$

Теорема 1. Пусть $u: X_m \rightarrow TX_m$ — векторное поле, тогда $du: TX_m \rightarrow T^2 X_m$ — линейное отображение из касательного пространства 1-го порядка TX_m в касательное пространство 2-го порядка $T^2 X_m$. Причем для базисных векторов $\varepsilon_i: X_m \rightarrow TX_m$ линейное отображение $d\varepsilon_i: TX_m \rightarrow N_1^2 \subset T^2 X_m$ поднимает касательный вектор 1-го порядка в нормаль 2-го порядка N_1^2 .

Отображение $d\varepsilon_i$ всем касательным векторам ставит в соответствие векторы нормали 2-го порядка N_1^2 . Такое расщепление соприкасающегося пространства $T^2 X_m$ определяет простейшую (каноническую) аффинную связность $\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i = -x_{jk}^i$ с формами $\overset{\circ}{\omega}_j^i = \omega_j^i|_{\omega^i=0}$ (см. [10]). Эта связность является плоской и симметричной. Векторы $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ являются горизонтальными векторами для простейшей связности 1-го порядка (см. [10]), а нормаль N_1^2 — горизонтальным подпространством простейшей (канонической) связности, т.е. $HT^2 X_m = N_1^2$ (см. [13, 16]).

3. Нормали 3-го порядка. Обобщим равенство $\partial_{\varepsilon_j} \varepsilon_i = d\varepsilon_i(\varepsilon_j)$, справедливое для базисных касательных векторов 1-го порядка, на случай базисных касательных векторов 2-го порядка.

Теорема 2 (см. [12]). Для базисных касательных векторов 1-го и 2-го порядка $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon' = \{\varepsilon'_{ij}\}$ справедливы равенства

$$\partial_\varepsilon \varepsilon' = d\varepsilon'(\varepsilon), \quad \partial_{\varepsilon'} \varepsilon = d^2 \varepsilon(\varepsilon'), \quad \partial_{\varepsilon'} \varepsilon' = d^2 \varepsilon'(\varepsilon').$$

т.е. производные одних базисных векторов по направлению данных базисных векторов 1-го (2-го) порядка равны значениям дифференциалов 1-го (2-го) порядка первых векторов на данных векторах.

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_i} \varepsilon_{pq} = \varepsilon_i(\varepsilon_{pq})$ или действуя линейным отображением $d\varepsilon_{pq}$ на касательные векторы ε_i , получим следующие равные выражения:

$$\begin{aligned} \partial_{\varepsilon_k} \varepsilon_{ij} &= x_i^s x_j^p x_k^q \partial_{spq} + x_{ij}^s x_k^q x_s^p \partial_{pq}, \\ d\varepsilon_{ij}(\varepsilon_k) &= \varepsilon_{ijk} - \varepsilon_s x_{ijk}^s - \dot{\varepsilon}_{sj} x_{ik}^s - \dot{\varepsilon}_{is} x_{jk}^s, \end{aligned}$$

которые обозначим $\partial_{\varepsilon_k} \varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}(\varepsilon_k) = \varepsilon_{ij,k}$.

Второй дифференциал касательных векторов ε_i , т.е. обычный дифференциал деривационной формулы (3) имеет вид (см. [11])

$$d^2\varepsilon_i = \varepsilon_{ijk}\omega^j\omega^k + \varepsilon_{ij}\left(d\omega^j + \omega_k^j\omega^k\right) + 2\varepsilon_{jk}\omega^k\omega_i^j + \varepsilon_j\left(d\omega_i^j + \omega_k^j\omega_i^k + \omega^k\omega_{ik}^j\right). \quad (4)$$

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_{pq}}\varepsilon_i = \varepsilon_{pq}(\varepsilon_i)$ или действуя линейным отображением $d^2\varepsilon_i$, определяемым по закону (4), на соприкасающиеся векторы ε_{pq} , получим следующие равные выражения:

$$\begin{aligned} \partial_{\varepsilon_{ij}}\varepsilon_k &= x_i^s x_j^p x_k^q \partial_{spq} + x_{ij}^s x_k^q x_s^p \partial_{qp}, \\ d^2\varepsilon_k(\varepsilon_{ij}) &= \varepsilon_{kij} - \varepsilon_s x_{kij}^s - \dot{\varepsilon}_{sj} x_{ki}^s - \dot{\varepsilon}_{si} x_{kj}^s, \end{aligned}$$

которые обозначим $\partial_{\varepsilon_{ij}}\varepsilon_k = d^2\varepsilon_k(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{k,ij}$.

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_{kl}}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{kl}(\varepsilon_{ij})$ или действуя линейным отображением $d\varepsilon_{ij}$ на соприкасающиеся векторы ε_{kl} , также получим равные выражения.

Поскольку слоевые координаты x_{jk}^i, x_{jkl}^i симметричны по нижним индексам, то $\varepsilon_{ij,k} = \varepsilon_{k,ij}$, причем $\Delta\varepsilon_{ij,k} = \omega_{ij}^l \dot{\varepsilon}_{lk}$. Векторы $\dot{\varepsilon}_{ij}, \varepsilon_{kl,p}$ инвариантны в совокупности и определяют нормаль 3-го порядка $N_1^3 = T^3X_m \setminus TX_m$ пространства TX_m , т.е. $N_1^3 = \text{span}(\dot{\varepsilon}_{ij}, \varepsilon_{kl,p})$.

Векторы $\dot{\varepsilon}_{ij,k} = \varepsilon_{ij,k} - x_{ij}^l \dot{\varepsilon}_{kl}$ инвариантны сами по себе, причем для отображения, определяемого базисными векторами нормали 2-го порядка, имеем

$$d\dot{\varepsilon}_{ij}: \varepsilon_k \in TX_m \rightarrow d\dot{\varepsilon}_{ij}(\varepsilon_k) = \dot{\varepsilon}_{ij,k} \in N_2^3 = T^3X_m \setminus T^2X_m.$$

Векторы $\dot{\varepsilon}_{ij}, \varepsilon_{ij,k}$ являются горизонтальными векторами для простейшей (канонической) связности 2-го порядка (см. [10, 11]). Эта связность является плоской, а ее тензор кручения 2-го порядка равен нулю. Действительно, горизонтальные векторы 3-го порядка

$$\tilde{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{lj} \Gamma_{ik}^l + \varepsilon_{il} \Gamma_{jk}^l + \varepsilon_l \Gamma_{ijk}^l \quad (\tilde{\varepsilon}_{ijk} \in T^3X_m)$$

для простейшей аффинной связности 2-го порядка $\overset{\circ}{\Gamma}^2$ с компонентами

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i = -x_{jk}^i, \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{jkl}^i = -x_{jkl}^i + x_{sk}^i x_{jl}^s + x_{js}^i x_{kl}^s,$$

имеют вид $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ijk} = \varepsilon_{ij,k}$. Формы $\overset{\circ}{\tilde{\omega}}_{jk}^i = \omega_{jk}^i|_{\omega^i=0}$, $\overset{\circ}{\omega}_j^i = \omega_j^i|_{\omega^i=0}$ являются формами канонической связности 2-го порядка.

Для горизонтальных векторов простейшей связности 2-го порядка $\overset{\circ}{\Gamma}^2$ справедливо разложение

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ijk} = x_{jk}^l \dot{\varepsilon}_{li} + \dot{\varepsilon}_{jk,i}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$$

по базисным векторам $\dot{\varepsilon}_{ij} \in N_1^2$ и $\dot{\varepsilon}_{jk,i} \in N_2^3$.

Теорема 3. Пусть $U: X_m \rightarrow T^2X_m$ — векторное поле. Тогда $dU: TX_m \rightarrow T^3X_m$ — линейное отображение из касательного пространства 1-го порядка TX_m в касательное пространство 3-го порядка T^3X_m . При этом для базисных векторов $\dot{\varepsilon}_{ij}: X_m \rightarrow N_1^2 \subset T^2X_m$ нормали 2-го порядка линейное отображение $d\dot{\varepsilon}_{ij}: TX_m \rightarrow N_2^3 \subset T^3X_m$ поднимает касательный вектор 1-го порядка в нормаль 3-го порядка N_2^3 пространства T^2X_m .

Обобщая данный результат, можно утверждать, что отображения, задаваемые дифференциалами базисных векторов нормали N_{r-1}^r , переводят базисные касательные векторы 1-го порядка в базисные векторы нормали N_r^{r+1} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акивис М. А. Многомерная дифференциальная геометрия. — Калинин, 1977.
2. Бабурова О. В., Фролов Б. Н. Математические основы современной теории гравитации. — М.: Прометей, 2012.
3. Белова О. О. Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей // Мат. заметки. — 2018. — 104, № 6. — С. 812–822.

4. Веблен О., Уайтхед Дж. Основания дифференциальной геометрии. — М.: ИЛ, 1949.
5. Восиллюс Р. В. Контравариантная теория дифференциального продолжения в модели пространства со связностью// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1983. — 14. — С. 101–176.
6. Гурса Э. Курс математического анализа. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1933.
7. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1979. — 9. — С. 5–246.
8. Лаптев Г. Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии// Тр. геом. семина. ВИНТИ. — 1966. — 1. — С. 139–189.
9. Полякова К. В. Двойственные методы исследования дифференциально-геометрических структур// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2014. — 45. — С. 92–104.
10. Полякова К. В. Специальные аффинные связности 1-го и 2-го порядков// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2015. — 46. — С. 114–128.
11. Полякова К. В. О задании аффинной связности 2-го порядка векторнозначными формами 1-го, 2-го и 3-го порядков// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2016. — 47. — С. 108–125.
12. Полякова К. В. Тангенциальнозначные формы 2-го порядка// Мат. заметки. — 2019. — 105, № 1. — С. 84–94.
13. Рыбников А. К. Об аффинных связностях второго порядка// Мат. заметки. — 1981. — 29, № 2. — С. 279–290.
14. Рыбников А. К. Об обобщенных аффинных связностях второго порядка// Изв. вузов. Мат. — 1983. — № 1. — С. 73–80.
15. Сарданашвили Г. А. Геометрия и классические поля. Современные методы теории поля. Т. 1. — М.: УРСС, 1996.
16. Шевченко Ю. И. Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. — Калининград, 1998.
17. Catuogno P. A geometric Itô formula// Mat. Contemp. — 2005. — 33. — P. 85–99.

Полякова Катерина Валентиновна

Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, Калининград

E-mail: KaPolyakova@kantiana.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 91–95
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-91-95

УДК 514.76

ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОВОРОТА

© 2020 г. Л. РЫПАРОВА, Й. МИКЕШ

Аннотация. В статье изложены некоторые результаты, полученные для отображений и преобразований поворота. Здесь также приводятся новые уравнения изопериметрических экстремалей поворота. Устранен ошибочный результат С. Г. Лейко, полученный для отображений поворота.

Ключевые слова: отображение поворота, преобразование поворота, изопериметрическая экстремаль поворота.

ROTATION MAPPINGS AND ROTATION TRANSFORMATIONS

© 2020 L. RÝPAROVÁ, J. MIKEŠ

ABSTRACT. In this paper, we present some results obtained for rotation mappings and rotation transformations. We also obtain new equations for isoperimetric rotation extremals. Moreover, we propose a correction of an erroneous result of S. G. Leiko for rotation mappings.

Keywords and phrases: rotation mapping, rotation transformation, isoperimetric rotation extremal.

AMS Subject Classification: 53B05, 53A05

1. Введение. Диффеоморфизмы поворота поверхностей $\mathcal{S}_2$ в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_3$, а также двумерных римановых многообразий $\mathbb{V}_2$ изучались в работах С. Г. Лейко [1–3, 5, 6, 8–10, 14]. Эти результаты являются локальными и основаны на известном факте, что двумерное риманово многообразие $\mathbb{V}_2$ локально реализуется как поверхность $\mathcal{S}_2$ в $\mathbb{E}_3$.

Работа посвящена изложению результатов, полученных авторами в теории отображений поворота и преобразований поворота. Мы предлагаем более короткие решения по сравнению с указанными выше результатами Лейко. Кроме того, что в работе Лейко [1] нами обнаружена ошибка, которая, к сожалению, имеет влияние на последующие исследования.

Так как изучение отображений и преобразований поворота является предметом внутренней геометрии, ограничимся исследованием двумерного риманова пространства, при этом не исключая псевдоримановы пространства $\mathbb{V}_2$.

2. Изопериметрические экстремали поворота. В этом разделе мы приводим результаты существования и единственности изопериметрических экстремалей поворота на двумерных (псевдо)римановых многообразиях $\mathbb{V}_2$ и на поверхностях $\mathcal{S}_2$ в евклидовом пространстве.

Изопериметрическая экстремаль поворота представляет собой кривую, определяемую следующим образом (см. [1]).

Работа выполнена при поддержке гранта Университета им. Ф. Палацкого (Оломоуц, Чехия) «Алгебраические и геометрические структуры», IGA PrF 2019015.

Определение 1. Кривую ℓ называют *изопериметрической экстремалью поворота*, если ℓ является экстремальной для $\theta[\ell]$ и $s[\ell] = \text{const}$ с фиксированными концами, где

$$s[\ell] = \int_{t_0}^{t_1} |\lambda| dt, \quad \theta[\ell] = \int_{t_0}^{t_1} k(t) dt,$$

k и λ — кривизна и касательный вектор кривой соответственно.

С. Г. Лейко доказал (см. [1]), что в (неплоском) пространстве $\mathbb{V}_2$ кривая является изопериметрической экстремалью вращения тогда и только тогда, когда ее кривизна Френе k_g и гауссова кривизна K пропорциональны:

$$k_g = c \cdot K, \quad (1)$$

где $c = \text{const}$. Также было доказано, что условие $k_g = c \cdot K$ можно записать в виде следующих уравнений внутреннего характера:

$$\lambda_2 = -\frac{g(\lambda_1, \lambda_1)}{g(\lambda, \lambda)} \cdot \lambda + \frac{\nabla_\alpha K \cdot \lambda^\alpha}{K} \cdot \lambda_1, \quad (2)$$

где $g(\lambda, \lambda_1) = 0$, $\nabla_i K$ — градиентный вектор гауссовой кривизны ($K \neq 0$) и

$$\lambda_2^h = \nabla_t \lambda_1^h \equiv \frac{d\lambda_1^h}{dt} + \lambda_1^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^h(x(t)) \lambda^\beta.$$

Эти уравнения требуют, чтобы метрика пространства принадлежала классу C^3 , а единственность гарантирована при C^4 .

В [16] эти уравнения упрощены так, что применимы для метрик класса дифференцируемости C^2 . Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Уравнение изопериметрической экстремали поворота можно записать в виде

$$\nabla_s \lambda = c \cdot K \cdot F \lambda, \quad c = \text{const}. \quad (3)$$

Структура F в $\mathbb{V}_2$ определена формулами

$$F_i^h = g^{h\alpha} \varepsilon_{\alpha i}, \quad \varepsilon_{ij} = \sqrt{|g_{11}g_{22} - g_{12}^2|} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

она удовлетворяет условиям $F^2 = \pm \text{Id}$ и $\nabla F = 0$.

Уравнения (3) проще, чем уравнения (2). Они имеют решение для метрик класса C^2 .

Дальнейшим анализом приведенного выше уравнения были даны условия единственности изопериметрических экстремалей поворота.

Теорема 2 (см. [16]). Пусть $\mathbb{V}_2$ — (не плоское) риманово многообразие класса C^3 . Тогда существует точно одна изопериметрическая экстремаль поворота, проходящая через точку $x_0 \in \mathbb{V}_2$ в заданном неизотропном направлении $\lambda_0 \in T\mathbb{V}_2$ для постоянной c .

3. Диффеоморфизм поворота. Определение диффеоморфизма поворота было введено в [1, 7] для поверхностей в евклидовом пространстве и двумерного собственно риманова многообразия $\mathbb{V}_2$.

Определение 2. Диффеоморфизм между двумерными римановыми многообразиями называется *отображением поворота*, если любая геодезическая отображается на изопериметрическую экстремаль поворота.

Понятие диффеоморфизма поворота обобщено в [12] следующим образом.

Пусть $\mathbb{V}_2 = (M, g)$ — двумерное риманово многообразие M с метрикой g и $\bar{\mathbb{A}}_2 = (\bar{M}, \bar{\nabla})$ — двумерное многообразие $\bar{M}$ с аффинной связностью $\bar{\nabla}$.

Определение 3. Диффеоморфизм $f: \mathbb{V}_2 \rightarrow \bar{\mathbb{A}}_2$ называется *отображением поворота*, если любая геодезическая из $\bar{\mathbb{A}}_2$ отображается на изопериметрическую экстремаль поворота на $\mathbb{V}_2$.

Дальнейшие исследования были сосредоточены на поиске условий, характеризующих отображения поворота. Доказана следующая теорема.

Теорема 3 (см. [12]). Пусть $\mathbb{V}_2$ допускает отображение поворота f на $\bar{\mathbb{A}}_2$. Если $\mathbb{V}_2$ и $\bar{\mathbb{A}}_2$ в общей системе координат принадлежат классам C^2 и C^1 соответственно, то гауссова кривизна K на $\mathbb{V}_2$ дифференцируема.

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Если гауссова кривизна $K \notin C^1$, то диффеоморфизма поворота $\mathbb{V}_2 \rightarrow \bar{\mathbb{A}}_2$ не существует.

Далее найдены фундаментальные уравнения диффеоморфизма поворота $\mathbb{V}_2 \rightarrow \bar{\mathbb{A}}_2$, которые вытекают из определения 2, когда $\mathbb{V}_2 \in C^2$ и $\bar{\mathbb{A}}_2 \in C^1$. Более того, теорема 3 налагает необходимое условие на гауссову кривизну: $K \in C^1$.

После более глубокого анализа (см. [12]) доказана следующая теорема.

Теорема 5. Риманово многообразие $\mathbb{V}_2$ допускает отображение поворота на $\bar{\mathbb{A}}_2$ тогда и только тогда, когда в $\mathbb{V}_2$ выполняется следующее уравнение:

$$\nabla_X \theta = (\mathcal{A}(X) + \nabla_X K/K) \cdot \theta + \nu \cdot X \quad (4)$$

для любого касательного вектора X , где ∇ — связность Леви-Чивиты, K — гауссова кривизна, $\mathcal{A}$ — такая линейная форма, что $\mathcal{A}(X) = g(X, \theta)$, g — метрический тензор, ν — некоторая функция на $\mathbb{V}_2$.

С. Г. Лейко установил (см. [1]) уравнения (4) как необходимые условия существования отображения поворота двумерных римановых пространств. Эти условия (4) характеризуют θ как частный случай торсообразующего векторного поля.

В [1] (см. также [2, 5, 8]) Лейко утверждает, что из уравнений (4) вытекает, что $\mathbb{V}_2$ изометрично поверхности вращения. В [11] доказано, что это утверждение неверно, но справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Существует риманово пространство $\mathbb{V}_2$, которое не изометрично поверхности вращения, и в нем существует векторное поле, удовлетворяющее уравнениям (4).

Уравнения (4) можно записать в следующем виде:

$$\theta_j^h = \theta^h (\theta_j + \partial_j \ln |K|) + \nu \delta_j^h. \quad (5)$$

Очевидно, что θ является специальным торсообразующим векторным полем. Как известно, в любом $\mathbb{V}_2$ существуют торсообразующие векторные поля. В пространстве $\mathbb{V}_2$, метрика которого имеет вид

$$ds^2 = (dx^1)^2 + f(x^1, x^2)(dx^2)^2,$$

где

$$f = c(x^2) \cdot \exp \int F dx^1,$$

функция F удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\partial_1 F = -\frac{F^2}{2} + \frac{F}{\varkappa} - 2\frac{\varkappa'}{\varkappa^2}.$$

Это уравнение — хорошо известное дифференциальное уравнение Бернулли относительно неизвестной функции F ; переменная x^2 играет роль параметра. Общее решение этого уравнения зависит от одной произвольной функции параметра x^2 , которая играет роль постоянной интегрирования. Поэтому не в каждом $\mathbb{V}_2$ существует вышеуказанное векторное поле. С другой стороны, имеет место следующая теорема.

Теорема 7 (см. [17]). *Двумерное (псевдо)риманово многообразие $\mathbb{V}_2$ допускает векторное поле поворота θ в том и только в том случае, когда в нем следующая замкнутая система типа Коши уравнений в ковариантных производных имеет решение относительно функций $\theta_i(x)$ и $\nu(x)$:*

$$\begin{aligned}\theta_{i,j} &= \theta_i(\theta_j + \partial_j K/K) + \nu g_{ij}, \\ \nu_i &= \nu(\theta_i - \partial_i K/K) - K\theta_i - \theta_\alpha \theta_\beta g^{\alpha\beta} \partial_i K/K + \theta_i g^{\alpha\beta} \theta_\alpha \partial_\beta K/K.\end{aligned}\quad (6)$$

Для начальных условий Коши

$$\theta_i(x_0) = \theta_i^0, \quad \nu(x_0) = \nu_0, \quad (7)$$

где $x_0 \in \mathbb{V}_2 \in C^3$, система (6) имеет не более одного решения $\theta_i(x)$, $\nu(x)$. Также можно заменить условие $\mathbb{V}_2 \in C^3$ более слабым условием: $g \in C^2$ и $K \in C^1$.

Отметим, что общее решение (6) для начальных условий (7) зависит не более чем от трех вещественных параметров, в качестве которых могут быть выбраны, например, числа θ_i^0 и ν_0 .

4. Отображения поворота поверхностей вращения. Далее рассмотрим риманово многообразие, которое изометрично поверхности вращения. С. Г. Лейко (см. [1]) изучил уравнения отображений поворота поверхностей вращения и определил особые случаи поверхностей вращения, которые допускают эти отображения. Л. Рыпарова и Й. Микеш доказали (см. [19]), что любая поверхность вращения с дифференцируемой гауссовой кривизной допускает диффеоморфизм поворота, и то же самое верно для (псевдо)римановых пространств (эти результаты верны локально).

В статье Лейко [1] метрики поверхности вращения $\mathcal{S}_2$ представлены в виде

$$ds^2 = f(r)dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (8)$$

Он доказал, что отображение поворота римановых пространств $\mathbb{V}_2$ и $\bar{\mathbb{V}}_2$ существует тогда и только тогда, когда эти пространства являются изометрическими поверхностям вращения, а метрики $\mathbb{V}_2$ и $\bar{\mathbb{V}}_2$ имеют следующую форму:

$$\begin{aligned}(\tilde{g}_{ij}) &= \frac{f(r)}{A^2(B + \sqrt{f(r)})^2} \text{diag}(f(r), r^2), \\ (\tilde{g}_{ij}) &= B^2 f(r) \text{diag}(f(r), r^2), \quad A \neq 0, \quad B = \text{const}\end{aligned}\quad (9)$$

(см. [1, теорема 2]).

Мы рассмотрели метрику поверхности вращения в более общем виде:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + f(x^1)(dx^2)^2. \quad (10)$$

Эта метрика, в отличие от метрики (9), включает в себя горловые окружности.

Теорема 8 (см. [18]). *Любая поверхность вращения $\mathcal{S}_2$ с дифференцируемой гауссовой кривизной K допускает отображение поворота на $\bar{\mathbb{A}}_2$.*

Более того, эта теорема справедлива даже для псевдоримановых пространств, имеющих неопределенную метрику в случае, когда $f(x^1) < 0$.

5. Бесконечно малые поворотные преобразования. Бесконечно малые преобразования (псевдо)римановых пространств V_n можно в координатной форме определить следующим образом:

$$\bar{x}^h = x^h + \varepsilon \xi^h(x), \quad (11)$$

где x^h — координаты определенной точки в V_n , и $\bar{x}^h$ являются координатами его изображения при бесконечно малом преобразовании, ε является бесконечно малым параметром, не зависящим от x^h , и ξ^h — вектор смещения (см. [13, 15]).

В заключение в [19] доказана следующая теорема, которая значительно улучшает результат [4].

Теорема 9. Дифференциальный оператор $\xi = \xi^\alpha(x)\partial_\alpha$ ($\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$) определяет бесконечно малое преобразование поворота (псевдо)риманова пространства $\mathbb{V}_2$ тогда и только тогда, когда ξ удовлетворяет уравнениям

$$\mathcal{L}_\xi \Gamma_{ij}^h = \delta_{(i}^h \psi_{j)} + \theta^h g_{ij}, \quad \theta_i^h = \theta^h (\theta_i + K_i/K) + \nu \delta_i^h, \quad (12)$$

где ψ_i — ковектор, δ_i^h — символ Кронекера, θ^h — векторное поле, g — метрический тензор, K ($K \neq 0$) — гауссова кривизна и $\mathcal{L}_\xi$ — производная Ли относительно ξ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лейко С. Г. Поворотные диффеоморфизмы на поверхностях евклидова пространства // Мат. заметки. — 1990. — 47, № 3. — С. 52–57.
2. Лейко С. Г. Вариационные задачи для функционалов поворота и спин-отображения псевдоримановых пространств // Изв. вузов. Мат. — 1990. — № 10. — С. 9–17.
3. Лейко С. Г. Экстремали функционалов поворота кривых псевдориманова пространства и траекторий спин-частиц в гравитационных полях // Докл. РАН. — 1992. — 325, № 4. — С. 659–663.
4. С. Г. Лейко Инфинитезимальные поворотные преобразования и деформации поверхностей евклидова пространства // Докл. РАН. — 1995. — 344, № 2. — С. 162–164.
5. Лейко С. Г. Изопериметрические экстремали поворота на поверхностях в евклидовом пространстве E^3 // Изв. вузов. Мат. — 1996. — № 6. — С. 25–32.
6. Лейко С. Г. О конформных, конциркулярных и спиновых отображениях гравитационных полей // Мат. методы физ.-мех. поля. — 1997. — 40, № 2. — С. 44–47.
7. Лейко С. Г. Поворотные преобразования поверхностей // Мат. физ., анал., геом. — 1998. — 5, № 3/4. — С. 203–211.
8. Лейко С. Г. Изопериметрические задачи для функционалов поворота первого и второго порядков в (псевдо)римановых многообразиях // Изв. вузов. Мат. — 2005. — № 5. — С. 49–55.
9. Лейко С. Г., Федченко Ю. С. Інфінітезимальні поворотні деформації поверхонь та їх застосування в теорії пружних оболонок // Укр. мат. ж. — 2003. — 55, № 12. — С. 1697–1703.
10. Лейко С. Г., аль Хуссен С. Поворотные квазиконциркулярные диффеоморфизмы на (псевдо)римановых пространствах // Мат. методы физ.-мех. поля. — 2001. — 44, № 1. — С. 22–27.
11. Микеш Й., Рыпарова Л., Худа Г. К теории поворотных отображений // Мат. заметки. — 2018. — 104, № 4. — С. 637–640.
12. Chudá H., Mikeš J., Sochor M. Rotary diffeomorphism onto manifolds with affine connection // in: Geometry, Integrability, and Quantization. — Sofia: Bulgar. Acad. Sci., 2017. — Vol. 18. — P. 130–137.
13. Hinterleitner I. Special mappings of equidistant spaces // J. Appl. Math. — 2008. — 2. — P. 31–36.
14. Leiko S. G. Conservation laws for spin trajectories generated by isoperimetric extremals of rotation // Grav. Theor. Relativ. — 1988. — 26. — P. 117–124.
15. Mikeš J. et al. Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc, Czech Republic: Palacky Univ. Press, 2015.
16. Mikeš J., Sochor M., Stepanova E. On the existence of isoperimetric extremals of rotation and the fundamental equations of rotary diffeomorphisms // Filomat. — 2015. — 29, № 3. — P. 517–523.
17. Rýparová L., Křížek J., Mikeš J. On fundamental equations of rotary vector fields // Proc. 18th Conf. APLIMAT. — 2019. — P. 1030–1034.
18. Rýparová L., Mikeš J. On rotary mappings of surfaces of revolution // Proc. Int. Conf. “MITAV-2017” (Brno, June 15–16, 2017). — Brno, 2017. — P. 208–216.
19. Rýparová L., Mikeš J. Infinitesimal rotary transformation // Filomat — 2019. — 33, № 4.

Рыпарова Ленка

Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия

E-mail: lenka.ryparova01@upol.cz

Микеш Йозеф

Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия

E-mail: josef.mikes@upol.cz



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 96–102
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-96-102

УДК 514.76

О ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЛИФТАХ ЛИНЕЙНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ С БАЗЫ В РАССЛОЕНИЕ ДВАЖДЫ КОВАРИАНТНЫХ ТЕНЗОРОВ

© 2020 г. А. Я. СУЛТАНОВ, О. А. МОНАХОВА

Аннотация. В работе получены необходимые и достаточные условия того, чтобы горизонтальный лифт линейной связности на расслоении дважды ковариантных тензоров являлся полусимметрической связностью.

Ключевые слова: расслоение дважды ковариантных тензоров, горизонтальный лифт линейной связности, полусимметрическая связность.

SEMISYMMETRIC HORIZONTAL LIFTS OF LINEAR CONNECTIONS FROM THE BASE TO THE BUNDLE OF DOUBLY COVARIANT TENSORS

© 2020 А. YA. SULTANOV, O. A. MONAKHOVA

ABSTRACT. In this paper, we obtain necessary and sufficient conditions under which the horizontal lift of a linear connection on the bundle of doubly covariant tensors is a semisymmetric connection.

Keywords and phrases: bundle of doubly covariant tensors, horizontal lift of a linear connection, semisymmetric connection.

AMS Subject Classification: 53B05, 53A55

1. Введение. В теории движений И. П. Егоров установил (см. [1]), что в случае, когда линейная связность имеет кручение, максимальная размерность групп аффинных преобразований достигается в пространствах с полусимметрической линейной связностью. В связи с этим изучение полусимметрических линейных связностей имеет интерес и перспективу развития в направлении изучения инфинитезимальных аффинных преобразований.

Раздел 2 настоящей работы посвящен определениям лифтов функций и тензорных полей в расслоение дважды ковариантных тензоров. Приведены свойства построенных лифтов (см. [2]). В разделе 3 описывается построение горизонтального лифта линейной связности, заданной на базе, в ее расслоение дважды ковариантных тензоров (см. [2]). Горизонтальный лифт линейной связности строится с помощью другой линейной связности, заданной на базе расслоенного пространства. Приведены тождества, которым удовлетворяют тензоры кручения и кривизны построенного горизонтального лифта линейной связности. Раздел 4 посвящен исследованию свойств полусимметрических горизонтальных лифтов линейных связностей.

2. Лифты функций и векторных полей с базы в ее расслоение дважды ковариантных тензоров. Пусть M_n — гладкое класса C^∞ многообразие размерности n ($n > 1$), p — произвольная точка на нем, T_p^* — кокасательное пространство к M_n в этой точке. Обозначим через $(T_2^0)_p = T_p^* \otimes T_p^*$ пространство дважды ковариантных тензоров в точке p многообразия M_n . Объединение всех пространств $(T_2^0)_p$ называется тензорным расслоением типа $(0, 2)$ над базой M_n :

$$T_2^0(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} (T_2^0)_p.$$

Элементом расслоения $T_2^0(M_n)$ является совокупность точки p и тензора t типа $(0, 2)$ в этой точке; введем обозначение $\tilde{p} = (p, t) \in T_2^0(M_n)$, $p \in M_n$, $t \in (T_2^0)_p$. Канонической проекцией служит отображение $\pi: T_2^0(M_n) \rightarrow M_n$, определяемое по закону: для каждой точки $\tilde{p}$ расслоения $T_2^0(M_n)$ образ есть $\pi(\tilde{p}) = p$. Каноническая проекция позволяет ввести понятие вертикального лифта функций с базы в расслоенное пространство, так же как для касательных и кокасательных расслоений (см. [5]).

Обозначим через $C^\infty(M_n)$ алгебру C^∞ -гладких функций над полем действительных чисел, заданных на базе расслоенного пространства.

Определение 1. Для любой функции $f \in C^\infty(M_n)$ функция f^V на расслоении $T_2^0(M_n)$, определенная условием: $f^V = f \circ \pi$, называется вертикальным лифтом функции f .

Для любой точки $\tilde{p} = (p, t)$ расслоенного пространства

$$f^V(\tilde{p}) = (f \circ \pi)(\tilde{p}) = f(\pi(\tilde{p})) = f(p).$$

Отметим некоторые свойства вертикальных лифтов функций. Из определения вертикального лифта функций следует, что функции f^V постоянны на слоях. Имеет место следующая теорема.

Предложение 1. Для произвольных гладких функций f и g , заданных на M_n , выполняются следующие равенства:

$$(f + g)^V = f^V + g^V, \quad (Cf)^V = Cf^V, \quad (f \cdot g)^V = f^V \cdot g^V,$$

где C — произвольная константа.

На расслоении $T_2^0(M_n)$ естественным образом возникает структура гладкого многообразия, индуцированная соответствующей структурой на базе. А именно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2. Расслоение $T_2^0(M_n)$ является гладким многообразием размерности $n + n^2$.

Построим отображение $f: \pi^{-1}(U) \rightarrow W \subset \mathbb{R}^{n+n^2}$ с помощью координатных функций $(x^i)^V$, x_{jk} , $i, j, k = 1, \dots, n$. В каждой точке $\tilde{p} = (p, t) \in \pi^{-1}(U)$ положим

$$f(\tilde{p}) = ((x^i)^V(\tilde{p}), x_{jk}(\tilde{p})),$$

где $(x^i)^V(\tilde{p}) = p^i$ — координаты точки p в карте (U, x^i) ; $x_{jk}(\tilde{p}) = t_{jk}$ — компоненты тензора t в точке $p \in U$. Получили карту $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$ на $T_2^0(M_n)$, индуцированную картой (U, x^i) на M_n . Совокупность таких карт, построенных для всех областей атласа A , образует атлас на $T_2^0(M_n)$. Пусть $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$ и $(\pi^{-1}(V), x^{i'}, x_{j'k'})$ — две карты, имеющие непустое пересечение их областей. Тогда закон преобразования координатных функций на $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$ имеет вид

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n), \quad x_{j'k'} = x_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}. \quad (1)$$

Функции в правых частях равенств (1) являются C^∞ -гладкими. Соответствующая якобиева матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^s} & x_{jk} \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{s'}} \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^s} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'} \partial x^{s'}} \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^s} \right) \\ 0 & \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \end{pmatrix}.$$

Якобиан преобразования (1) не равен нулю, откуда следует, что построенное отображение f является гомеоморфизмом. Тем самым доказали, что $T_2^0(M_n)$ — гладкое класса C^∞ многообразие размерности $n + n^2$.

Векторные поля

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \partial^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_{jk}}, \quad i, j, k = \overline{1, n},$$

образуют поле натурального репера на $\pi^{-1}(U) \subset T_2^0(M_n)$. Дуальный ему корепер образуют 1-формы dx^i, dx_{jk} на $T_2^0(M_n)$. Закон преобразования полей натурального репера имеет вид

$$\partial_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \partial_i + x_{j'k'} \left(\frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \right) \partial^{jk}, \quad \partial^{j'k'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \partial^{jk}.$$

Ковекторные поля dx^i, dx_{jk} преобразуются по закону

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i, \quad dx_{j'k'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} dx_{jk} + x_{jk} \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \right) dx^i.$$

Обозначим через $\mathfrak{T}_q^p(M_n)$ модуль тензорных полей типа (p, q) , заданных на многообразии M_n над алгеброй гладких функций $C^\infty(M_n)$.

На расслоении $T_2^0(M_n)$ определим функции, порожденные тензорными полями типа $(2, 0)$ на базе расслоенного пространства. Пусть $T \in \mathfrak{T}_0^2(M_n)$ в карте (U, x^i) имеет вид $T = T^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$. Для каждой точки $\tilde{p} = (p, t)$ значение $\gamma T(p)$ определим следующим образом. Выберем область локальной карты $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$, содержащую точку $\tilde{p}$, и положим

$$\gamma T(\tilde{p}) = T^{ij}(p) x_{ij}.$$

Определенная таким образом функция не зависит от выбора локальной карты.

Определим вертикальный лифт тензорных полей типа $(0, 2)$ с базы M_n в расслоение $T_2^0(M_n)$. Пусть в локальной карте (U, x^i) тензорное поле $Q \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$ имеет разложение $Q = Q_{ij} dx^i \otimes dx^j$.

Определение 2. Вертикальным лифтом тензорного поля $Q \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$, назовем векторное поле Q^V , заданное на расслоении $T_2^0(M_n)$, удовлетворяющее следующему условию:

$$Q^V(\gamma T) = (Q \circ T)^V, \quad \text{где} \quad Q \circ T = Q_{ij} T^{ij}.$$

Предложение 3. Для произвольных тензорных полей $Q, W \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$ и любых функций $f \in C^\infty(M_n)$ выполнены следующие равенства:

$$Q^V(f^V) = 0, \quad Q^V + W^V = (Q + W)^V, \quad (f^Q)^V = f^V Q^V, \quad [Q^V, W^V] = 0.$$

Полный лифт векторных полей с базы в тензорное расслоение типа (p, q) определен Б. Н. Шапуковым в [4]. Для расслоения $T_2^0(M_n)$ компоненты полного лифта векторного поля X в локальной карте $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$ имеют вид

$$X^C = X^k \partial_k + (-\partial_i X^m x_{mj} - \partial_j X^t x_{it}) \partial^{ij}.$$

Теорема 1. На расслоенном пространстве $T_2^0(M_n)$ полный лифт X^C является единственным векторным полем, удовлетворяющим условию

$$X : C(\gamma T) = \gamma(L_X T),$$

где $L_X T$ — производная Ли тензорного поля T типа $(2, 0)$ вдоль векторного поля X .

Предложение 4. Для любых тензорных полей $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$, $Q \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$ выполняются следующие равенства:

$$[X^C, Q^V] = (L_X Q)^V, \quad [X^C, Y^C] = [X, Y]^C.$$

Определим лифты V_1, V_2 тензорных полей типа $(1, 1)$ с базы в расслоение $T_2^0(M_n)$. Пусть тензорное поле S типа $(1, 1)$ в локальной карте (U, x^i) на базе имеет представление $S = S_j^i \partial_i \otimes dx^j$.

Определение 3. Лифтом V_1 тензорного поля $S \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$ назовем векторное поле S^{V_1} на $T_2^0(M_n)$, имеющее следующий вид в локальной карте $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$:

$$S^{V_1} = S_j^i x_{ik} \partial^{jk}.$$

Определение 4. Лифтом V_2 тензорного поля $S \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$ назовем векторное поле S^{V_2} на $T_2^0(M_n)$, имеющее следующий вид в локальной карте $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$:

$$S^{V_2} = S_j^i x_{ki} \partial^{kj}.$$

Предложение 5. Для любых тензорных полей $S \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$, $T \in \mathfrak{T}_0^2(M_n)$ выполняются следующие равенства:

$$S^{V_1}(\gamma T) = \gamma(T^1 \circ S), \quad S^{V_2}(\gamma T) = \gamma(T^2 \circ S),$$

где свертки определены следующим образом для произвольных 1-форм ω, τ на базе:

$$(T^1 \circ S)(\omega, \tau) = T(\omega \circ S, \tau); \quad (T^2 \circ S)(\omega, \tau) = T(\omega, \tau \circ S).$$

Предложение 6. Для произвольных тензорных полей

$$S, Q \in \mathfrak{T}_1^1(M_n), \quad X \in \mathfrak{T}_0^1(M_n), \quad T \in \mathfrak{T}_0^2(M_n), \quad D \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$$

выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} [S^{V_1}, Q^{V_2}] &= 0, \quad [S^{V_1}, Q^{V_1}] = [S, Q]^{V_1}, \quad [S^{V_2}, Q^{V_2}] = [S, Q]^{V_2}, \quad [X^C, Q^{V_1}] = (L_X Q)^{V_1}, \\ [X^C, Q^{V_2}] &= (L_X Q)^{V_2}, \quad [D^V, S^{V_1}](\gamma T) = (D \circ (T^1 \circ S))^V, \quad [D^V, S^{V_2}](\gamma T) = (D \circ (T^2 \circ S))^V. \end{aligned}$$

Пусть на базе M_n расслоения дважды ковариантных тензоров задана линейная связность ∇ , и в локальной карте (U, x^i) компонентами связности ∇ являются функции Γ_{ij}^k , так что

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Б. Н. Шапуков в [4] определил горизонтальный лифт векторного поля X с базы M_n в расслоенное пространство $T_2^0(M_n)$, как векторное поле, имеющее следующее локальное представление в карте $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$:

$$X^H = X^k \partial_k + X^s (\Gamma_{si}^m x_{mj} + \Gamma_{sj}^m x_{im}) \partial^{ij}.$$

Теорема 2. На расслоенном пространстве $T_2^0(M_n)$ горизонтальный лифт X^H является единственным векторным полем, удовлетворяющим условию

$$X^H(\gamma T) = \gamma(\nabla_X T).$$

Предложение 7. Для любых тензорных полей $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$, $Q \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$, $S \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$ и любых функций $f \in C^\infty(M_n)$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} (X + Y)^H &= X^H + Y^H, \quad (fX)^H = f^V X^H, \quad [X^H, Q^V] = (\nabla_X Q)^V, \\ [X^H, Y^H] &= [X, Y]^H + R(X, Y)^{V_1} + R(X, Y)^{V_2}, \\ [X^H, S^{V_1}] &= (\nabla_X S)^{V_1}, \quad [X^H, S^{V_2}] = (\nabla_X S)^{V_2}. \end{aligned}$$

где R — тензор кривизны связности ∇ на базе расслоенного пространства.

3. Горизонтальный лифт линейной связности на расслоение дважды ковариантных тензоров. Пусть на базе M_n в карте (U, x^i) задана линейная связность $\overset{\circ}{\nabla}$ с компонентами $\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i$ и связность ∇ с компонентами Γ_{jk}^i в натуральном репере. С помощью связности $\overset{\circ}{\nabla}$ можно построить горизонтальные лифты векторных полей, а также горизонтальный лифт ∇^H связности ∇ на расслоение дважды ковариантных тензоров (см. [2]).

Теорема 3. На расслоении $T_2^0(M_n)$ существует единственная линейная связность ∇^H , удовлетворяющая следующим условиям:

$$\nabla_{Q^V}^H W^V = 0, \quad \nabla_{X^H}^H Y^H = (\nabla_X Y)^H, \quad \nabla_{Q^V}^H X^H = 0, \quad \nabla_{X^H}^H Q^V = (\nabla_X Q)^V$$

для любых тензорных полей $Q, W \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$, $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$.

Найдем тензоры кривизны и кручения построенной связности ∇^H на $T_2^0(M_n)$. Пусть на базе расслоенного пространства связность $\overset{\circ}{\nabla}$ имеет тензоры кручения $\overset{\circ}{T}$ и кривизны $\overset{\circ}{R}$, а связность ∇ — тензоры кручения T и кривизны R . Для тензора кручения построенного горизонтального лифта связности ∇^H имеет место следующее утверждение.

Предложение 8. Пусть $\tilde{T}$ — тензор кручения связности ∇^H , тогда для произвольных тензорных полей $Q, W \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$, $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\tilde{T}(Q^V, W^V) &= 0, \quad \tilde{T}(X^H, Q^V) = -\tilde{T}(Q^V, X^H) = (\nabla_X Q - \overset{\circ}{\nabla}_X Q)^V, \\ \tilde{T}(X^H, Y^H) &= (T(X, Y))^H - (\overset{\circ}{R}(X, Y))^{V_1} - (\overset{\circ}{R}(X, Y))^{V_2}.\end{aligned}$$

Для тензора кривизны построенной связности имеет место

Предложение 9. Пусть $\tilde{R}$ — тензор кривизны связности ∇^H , тогда для произвольных тензорных полей $Q, U, W \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\tilde{R}(Q^V, W^V)U^V &= 0, \quad \tilde{R}(Q^V, X^H)Y^H = 0, \quad \tilde{R}(Q^V, W^V)Y^H = 0, \quad \tilde{R}(Q^V, X^H)W^V = 0, \\ \tilde{R}(X^H, Y^H)Z^H &= (R(X, Y)Z)^H, \quad \tilde{R}(X^H, Y^H)Q^V = (-Q^1 \bullet R(X, Y) - Q^2 \bullet R(X, Y))^V.\end{aligned}$$

Свертки $Q^1 \bullet R(X, Y)$, $Q^2 \bullet R(X, Y)$ — тензорные поля типа $(0, 2)$ на базе определяются следующим образом: для любых векторных полей $A, B \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ выполняются равенства

$$(Q^1 \bullet R(X, Y))(A, B) = Q(R(X, Y)A, B), \quad (Q^2 \bullet R(X, Y))(A, B) = Q(A, R(X, Y)B).$$

4. Полусимметрические горизонтальные лифты линейных связностей. Полусимметрическая линейная связность ∇ на гладком многообразии M_n по А. П. Нордену (см. [3]) характеризуется тем, что тензор кручения T этой связности имеет следующее строение

$$T = \phi \otimes I - I \otimes \phi$$

для некоторой 1-формы ϕ , заданной на M_n . Это условие в локальных координатах равносильно выполнимости следующих соотношений

$$T_{ij}^k = \varphi_i \delta_j^k - \varphi_j \delta_i^k,$$

где δ_i^k — символ Кронекера. Отсюда следует, что $T \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\phi \neq 0$.

Выясним, при каких условиях линейная связность ∇^H , заданная на $T_2^0(M_n)$, является полусимметрической. Для этого обратимся к тождествам, которым удовлетворяет тензор кручения $\tilde{T}$ связности ∇^H . Эти тождества перечислены в предложении 8.

Выберем координатную окрестность $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$ произвольной точки $\tilde{p} \in T_2^0(M_n)$ и адаптированный к ∇^H подвижной репер на $\pi^{-1}(U)$ с векторными полями

$$\partial_i^H = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^H, \quad D^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_{jk}}.$$

Предположим, что $\tilde{T} = \tilde{\phi} \otimes \tilde{I} - \tilde{I} \otimes \tilde{\phi}$, где $\tilde{\phi}$ — 1-форма, а $\tilde{I}$ — единичный аффинор на $T_2^0(M_n)$. Для векторных полей D^{jk}, D^{lm} имеем

$$\tilde{T}(D^{jk}, D^{lm}) = \tilde{\phi}^{jk} D^{lm} - \tilde{\phi}^{lm} D^{jk}, \quad \text{где } \tilde{\phi}^{jk} = \tilde{\phi}(D^{jk}).$$

В силу предложения 8 и определения 2 вертикального лифта тензорного поля типа $(0, 2)$, а также в силу представления векторного поля

$$D^{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} = (dx^i \otimes dx^j)^V$$

имеем $\tilde{T}(D^{jk}, D^{lm}) = 0$, поэтому

$$(\tilde{\phi}^{jk} \delta_s^l \delta_t^m - \tilde{\phi}^{lm} \delta_s^j \delta_t^k) D^{st} = 0.$$

В силу линейной независимости в каждой точке $\tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ векторных полей D^{st} , из полученных соотношений следует, что

$$\tilde{\phi}^{jk} \delta_s^l \delta_t^m - \tilde{\phi}^{lm} \delta_s^j \delta_t^k = 0.$$

Свернув эти соотношения по s и j , t и k , получим

$$\tilde{\phi}^{lm} - n^2 \tilde{\phi}^{lm} = 0.$$

Учитывая ограничение $n > 1$ для размерности базы M_n , имеем, что $\tilde{\phi}^{lm} = 0$. Теперь обратимся ко второму тождеству предложения 8:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\partial_i^H, D^{jk}) &= (\nabla_{\partial_i}(dx^j \otimes dx^k) - \overset{\circ}{\nabla}_{\partial_i}(dx^j \otimes dx^k))^V = \\ &= (\nabla_{\partial_i} dx^j \otimes dx^k + dx^j \otimes \nabla_{\partial_i} dx^k - \overset{\circ}{\nabla}_{\partial_i} dx^j \otimes dx^k - dx^j \otimes \overset{\circ}{\nabla}_{\partial_i} dx^k)^V = \\ &= ((\nabla_{\partial_i} dx^j - \overset{\circ}{\nabla}_{\partial_i} dx^j) \otimes dx^k + dx^j \otimes (\nabla_{\partial_i} dx^k - \overset{\circ}{\nabla}_{\partial_i} dx^k))^V. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\nabla_{\partial_i} dx^j = -\Gamma_{it}^j dx^t$, $\overset{\circ}{\nabla}_{\partial_i} dx^j = -\overset{\circ}{\Gamma}_{it}^j dx^t$, получим

$$\tilde{T}(\partial_i^H, D^{jk}) = (S_{it}^j dx^t \otimes dx^k + S_{it}^k dx^j \otimes dx^t)^V = S_{it}^j D^{tk} + S_{it}^k D^{jt} = (S_{it}^j \delta_l^k + S_{it}^k \delta_t^j) D^{tl},$$

где $S_{it}^j = -\Gamma_{it}^j + \overset{\circ}{\Gamma}_{it}^j$ — компоненты тензора деформации S . С другой стороны,

$$\tilde{T}(\partial_i^H, D^{jk}) = \tilde{\phi}_i D^{jk} - \tilde{\phi}^{jk} \partial_i^H.$$

Учитывая, что $\tilde{\phi}^{jk} = 0$, из последних соотношений следует

$$S_{it}^j \delta_l^k + S_{it}^k \delta_t^j = \tilde{\phi}_i \delta_l^j \delta_t^k. \quad (2)$$

Свернем обе части соотношений (2) по j и t . Тогда

$$s_i \delta_l^k + n S_{il}^k = n \tilde{\phi}_i \delta_l^k, \quad (3)$$

где $s_i = S_{it}^t$. Полученные соотношения (3) свернем по индексам k и l . В результате чего получим $2s_i = n \tilde{\phi}_i$. Отсюда находим $\tilde{\phi}_i = \frac{2}{n} s_i$. Учитывая эти равенства, из (3) получим, что

$$S_{il}^k = \frac{1}{n} s_i \delta_l^k.$$

Прямые вычисления позволяют заключить, что соотношения (2) будут выполняться тождественно, если в (2) заменим $\tilde{\phi}_i$ и S_{il}^k по полученным формулам.

На основании третьего тождества предложения 8 имеем:

$$\tilde{T}(\partial_i^H, \partial_j^H) = T_{ij}^k \partial_k^H - (\overset{\circ}{R}_{lij}^k \partial_k \otimes dx^l)^{V_1} - (\overset{\circ}{R}_{lij}^k \partial_k \otimes dx^l)^{V_2} = T_{ij}^k \partial_k^H - (\overset{\circ}{R}_{lij}^k x_{kt} + \overset{\circ}{R}_{tij}^k x_{lk}) D^{lt}.$$

Но $\tilde{T}(\partial_i^H, \partial_j^H) = \tilde{\phi}_i \partial_j^H - \tilde{\phi}_j \partial_i^H = (\tilde{\phi}_i \delta_j^k - \tilde{\phi}_j \delta_i^k) \partial_k^H$. Из полученных соотношений следует, что

$$T_{ij}^k = \tilde{\phi}_i \delta_j^k - \tilde{\phi}_j \delta_i^k, \quad \overset{\circ}{R}_{lij}^k x_{kt} + \overset{\circ}{R}_{tij}^k x_{lk} = 0. \quad (4)$$

Дифференцируя тождества (4) по переменным x_{sm} , получим

$$\overset{\circ}{R}_{lij}^k \delta_k^s \delta_t^m + \overset{\circ}{R}_{tij}^k \delta_l^s \delta_k^m = 0,$$

или

$$\overset{\circ}{R}_{lij}^s \delta_t^m + \overset{\circ}{R}_{tij}^m \delta_l^s = 0.$$

Свернув эти равенства по s и t , находим, что $\overset{\circ}{R}_{lij}^m = 0$. Таким образом, если $\tilde{T} = \tilde{\phi} \otimes \tilde{I} - \tilde{I} \otimes \tilde{\phi}$ для некоторой 1-формы $\tilde{\phi}$, то

$$T = \frac{2}{n} (s \otimes I - I \otimes s), \quad \overset{\circ}{R} = 0, \quad (5)$$

где s — 1-форма, полученная сверткой $C_2^1 S$ тензора деформации связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$. Обратно, если выполняются условия (5), то

$$\tilde{T} = \tilde{\phi} \otimes \tilde{I} - \tilde{I} \otimes \tilde{\phi}.$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Линейная связность ∇^H является полусимметрической тогда и только тогда, когда связность ∇ — полусимметрическая и тензор кривизны линейной связности $\overset{\circ}{\nabla}$ тождественно равен 0.*

Из этой теоремы получаем еще несколько утверждений.

Следствие 1. *Если $\nabla = \overset{\circ}{\nabla}$, то следующие условия эквивалентны:*

- (а) ∇^H — полусимметрическая связность;
- (б) линейная связность ∇ — локально плоская связность.

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б). Для тензора деформации имеем $S = 0$, поэтому $s_i = 0$, т.е. $T = 0$; второе условие $R = \overset{\circ}{R} = 0$. Значит, связность ∇ — локально плоская.

Импликация (б) $\Rightarrow$ (а) очевидна: если $T = 0$ и $R = 0$, то $\tilde{T} = \tilde{\phi} \otimes \tilde{I} - \tilde{I} \otimes \tilde{\phi} = 0$. $\square$

Следствие 2. *Если линейная связность ∇ не является полусимметрической или $\overset{\circ}{R} \neq 0$, то линейная связность ∇^H не является полусимметрической.*

Отметим также следующий частный случай.

Следствие 3. *Пусть $\nabla = \overset{\circ}{\nabla}$. Если $T \neq 0$ или $R \neq 0$, то линейная связность ∇^H не является полусимметрической.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров И. П. Движения в пространствах аффинной связности. — М.: Либроком, 2016.
2. Монахова О. А. Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения дважды ковариантных тензоров со связностью горизонтального лифта/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Пенза: Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского, 2004.
3. Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
4. Шапужов Б. Н. Структуры на расслоенных многообразиях и вопросы редукции/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Казань: Казанский государственный университет, 1990.
5. Yano K., Ishihara S. Tangent and Cotangent Bundles. — New York: Marcel Dekker, 1973.

Султанов Адгам Яхиевич

Пензенский государственный университет

E-mail: sultanovaya@rambler.ru

Монахова Оксана Александровна

Пензенский государственный университет

E-mail: oxmonakh@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 103–108
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-103-108

УДК 514.76

ОБ АЛГЕБРАХ ЛИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ

© 2020 г. Г. А. СУЛТАНОВА

Аннотация. В работе исследуются максимальные размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений со связностью полного лифта над пространствами полусимметрической связности.

Ключевые слова: касательное расслоение, инфинитезимальное аффинное преобразование, алгебра Ли, полусимметрическая связность.

LIE ALGEBRAS OF INFINITESIMAL AFFINE TRANSFORMATIONS OF TANGENT BUNDLES

© 2020 G. A. SULTANOVA

ABSTRACT. In this paper, we examine maximal dimensions of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of tangent bundles with a complete lift connection over spaces with a semisymmetric connection.

Keywords and phrases: tangent bundle, infinitesimal affine transform, Lie algebra, semisymmetric connection.

AMS Subject Classification: 53B05, 53A55

1. Введение. Касательные расслоения первого порядка TM гладких многообразий возникли в середине 1930-х гг. прошлого столетия в связи с созданием теории расслоенных пространств. Первые результаты по теории касательных расслоений принадлежали А. Моримото, Ш. Сасаки, К. Яно, С. Исихара. Среди отечественных ученых касательные расслоения и их обобщения исследовали А. П. Широков, В. В. Вишневецкий, В. В. Шурыгин, Б. Н. Шапуков, Ф. И. Каган и другие.

Вопросами аффинных преобразований в касательных расслоениях занимались К. Яно, Ш. Кобаяси, К. Сато, Ш. Танно. Исследованию касательных расслоений и их обобщений, а также их автоморфизмов, снабженных различными геометрическими структурами, посвящены работы В. Г. Подольского, Х. Шадыева. В настоящее время автоморфизмы расслоений А. Вейля рассматриваются А. Я. Султановым.

В данной работе исследуются максимальные размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях, снабженных полным лифтом полусимметрической связности, заданной на многообразии.

2. Основные понятия. Пусть M — связное гладкое многообразие класса C^∞ размерности n ($n \geq 2$), $C^\infty(M)$ — алгебра вещественнозначных функций класса C^∞ на M .

Рассмотрим линейную связность ∇ , заданную на M . С этой связностью связаны два тензорных поля T и R кручения и кривизны, соответственно, определяемые тождествами

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \\ R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned}$$

Линейная связность ∇ позволяет задавать на M еще одну линейную связность $\hat{\nabla}$ условием (см. [2])

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$$

для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}_0^1(M)$. Линейные связности $\hat{\nabla}$ и ∇ удовлетворяют тождеству

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - T(X, Y).$$

Тензорные поля кручения T и $\hat{T}$ связностей ∇ и $\hat{\nabla}$ связаны между собой соотношением $\hat{T} + T = 0$. Ясно, что если $T = 0$, то $\hat{\nabla} = \nabla$. С помощью линейных связностей $\hat{\nabla}$, ∇ определим линейную связность $\overset{0}{\nabla}$ на M условием

$$\overset{0}{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \hat{\nabla}_X Y).$$

Прямые вычисления позволяют установить, что ее тензорное поле $\overset{0}{T}$ кручения равно нулю.

Линейную связность $\overset{0}{\nabla}$ принято называть сопутствующей связностью без кручения для связности ∇ (см. [2]).

Пространство линейной связности с ненулевым тензорным полем кручения T обозначим, следуя И. П. Егорову, через Λ_n .

Определение 1 (см. [3]). Пространство Λ_n называется пространством полусимметрической линейной связности, если тензорное поле кручения T удовлетворяет условию

$$T = \varphi \otimes I - I \otimes \varphi, \quad (1)$$

где φ — некоторая 1-форма на M , I — единичный аффино́р на M .

В карте (U, x^i) компоненты тензорного поля T кручения, удовлетворяющего условию (1), представимы в виде

$$T_{jk}^i = \delta_j^i T_k - \delta_k^i T_j, \quad (2)$$

где δ_j^i — символ Кронекера.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы пространство линейной связности с кручением было пространством с полусимметрической линейной связностью, является выполнение в каждой системе координат равенств (см. [1]):

$$T_{jk}^i = 0, \quad i \neq j, k.$$

Определение 2 (см. [1]). Векторное поле X называется инфинитезимальным аффинным преобразованием связности ∇ , если

$$L_X \nabla = 0,$$

где $L_X \nabla$ — тензорное поле типа $(1, 2)$, называемое производной Ли и задаваемое тождеством

$$L_X \nabla(Y, Z) = L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Известно, что если X — инфинитезимальное аффинное преобразование связности ∇ , то выполняются следующие условия

$$L_X \nabla^m R = 0, \quad L_X \nabla^m T = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $\nabla^m R$, $\nabla^m T$ — ковариантные дифференциалы тензорных полей кривизны R и кручения T связности ∇ . Здесь $\nabla^0 R = R$, $\nabla^0 T = T$.

Исходя из определения линейных связностей $\hat{\nabla}, \overset{0}{\nabla}$, можно доказать, что уравнение $L_X \nabla = 0$ равносильно системе уравнений

$$L_X \overset{0}{\nabla} = 0, \quad L_X T = 0. \quad (4)$$

Тогда равенства (3) оказываются равносильными для связности $\overset{0}{\nabla}$ следующим соотношениям:

$$L_X \overset{0}{\nabla}^m \overset{0}{R} = 0, \quad L_X \nabla^m T = 0, \quad (5)$$

где $\overset{0}{R}$ — тензорное поле кривизны связности $\overset{0}{\nabla}$.

Соотношения (5) называются условиями интегрируемости уравнения $L_X \nabla = 0$. При $m = 0$ соответствующая система представляет собой первую серию условий интегрируемости (см. [1]).

3. Касательные расслоения. Для связного дифференцируемого многообразия M обозначим через TM его касательное расслоение. Атлас естественной гладкой структуры на TM состоит из карт $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$. Приведем определения лифтов некоторых объектов, которые нам понадобятся в дальнейшем. Все рассматриваемые объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Для любой функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f_{(0)} = f \circ \pi$, где $\pi: TM \rightarrow M$ — каноническая проекция, называется вертикальным лифтом, а функция $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$ — полным лифтом функции f с многообразия M в его касательное расслоение TM .

Если на многообразии M задано векторное поле $X \in \mathfrak{X}_0^1(M)$, то на касательном расслоении TM существуют векторные поля $X^{(1)}$ и $X^{(0)}$, называемые вертикальным и полным лифтами векторного поля X , соответственно, и в локальных координатах имеющие вид

$$X^{(1)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^1, \quad X^{(0)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (\partial_j X^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^1$$

(см. [7]).

Определение 3 (см. [4]). Полным лифтом линейной связности ∇ , заданной на многообразии M , называется единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$ на TM , удовлетворяющая условиям

$$\nabla_{X^{(0)}}^{(0)} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(0)}, \quad \nabla_{X^{(0)}}^{(0)} Y^{(1)} = \nabla_{X^{(1)}}^{(0)} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(1)}, \quad \nabla_{X^{(1)}}^{(0)} Y^{(1)} = 0,$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}_0^1(M)$.

В локальной системе координат (x_0^i, x_1^i) компоненты полного лифта линейной связности $\nabla^{(0)}$ будут следующие:

$$\Gamma_{ij0}^{00k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)}, \quad \Gamma_{ij1}^{00k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(1)}, \quad \Gamma_{ij1}^{10k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)}, \quad \Gamma_{ij1}^{01k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)},$$

все остальные коэффициенты связности $\nabla^{(0)}$ равны нулю.

Составляющие тензорных полей кручения $T^{(0)}$ и кривизны $\overset{0}{R}^{(0)}$ связности $\nabla^{(0)}$ относительно естественного подвижного репера $(\partial_i^\alpha)(\alpha = 0, 1)$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} T_{ij0}^{00k} &= (T_{ij}^k)_{(0)}, \quad T_{ij1}^{10k} = (T_{ij}^k)_{(0)}, \quad T_{ij1}^{01k} = (T_{ij}^k)_{(0)}, \quad T_{ij1}^{00k} = (T_{ij}^k)_{(1)}, \\ \overset{0}{R}_{ijk0}^{000i} &= (\overset{0}{R}_{ijk}^i)_{(0)}, \quad \overset{0}{R}_{ijk1}^{000i} = (\overset{0}{R}_{ijk}^i)_{(1)}, \quad \overset{0}{R}_{ijk1}^{100i} = (\overset{0}{R}_{ijk}^i)_{(0)}, \\ \overset{0}{R}_{ijk1}^{010i} &= (\overset{0}{R}_{ijk}^i)_{(0)}, \quad \overset{0}{R}_{ijk1}^{001i} = (\overset{0}{R}_{ijk}^i)_{(0)}, \end{aligned}$$

остальные компоненты равны нулю.

4. Инфинитезимальные аффинные преобразования касательных расслоений полного лифта полусимметрической связности. В этом разделе будем исследовать инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения TM , снабженного связностью $\nabla^{(0)}$ полного лифта полусимметрической связности ∇ , заданной на многообразии M .

В координатной форме уравнение $L_{\tilde{X}}\nabla^{(0)} = 0$ равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\partial_j^\alpha \partial_k^\beta X_\sigma^i + \Gamma_{mk\sigma}^{\tau\beta i} \partial_j^\alpha X_\tau^m + \Gamma_{j\sigma\tau}^{\alpha\tau i} \partial_k^\beta X_\tau^m - \Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta m} \partial_m^\tau X_\sigma^i + X_\tau^m \partial_m^\tau \Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0. \quad (6)$$

Здесь X_α^i — координаты векторного поля $\tilde{X} = X_\alpha^i \partial_i^\alpha$.

Систему (6) можно представить в виде системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, введя новые неизвестные и полагая $A_{k\sigma}^{\alpha i} = \partial_k^\alpha X_\sigma^i$:

$$\partial_j^\alpha A_{k\sigma}^{\beta i} + \Gamma_{mk\sigma}^{\tau\beta i} A_{j\tau}^{\alpha m} + \Gamma_{j\sigma\tau}^{\alpha\tau i} A_{k\tau}^{\beta m} - \Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta m} A_{m\sigma}^{\tau i} + X_\tau^m \partial_m^\tau \Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0. \quad (7)$$

Первую серию условий интегрируемости системы (7) представляют собой соотношения

$$L_{\tilde{X}}T^{(0)} = 0, \quad L_{\tilde{X}}\overset{0}{R}^{(0)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Для оценки сверху размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM, \nabla^{(0)})$ мы ограничимся исследованием условия $L_{\tilde{X}}T^{(0)} = 0$. В локальных координатах это равенство равносильно системе

$$T_{mk\sigma}^{\tau\beta i} A_{j\tau}^{\alpha m} + T_{j\sigma\tau}^{\alpha\tau i} A_{k\tau}^{\beta m} - T_{jk\tau}^{\alpha\beta m} A_{m\sigma}^{\tau i} + X_\tau^m \partial_m^\tau T_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0. \quad (8)$$

Систему (8) мы рассмотрим, учитывая структуру инфинитезимального аффинного преобразования $\tilde{X}$.

Так как линейная связность $\overset{0}{\nabla}$ не имеет кручения, то воспользуемся результатами Х. Шадыева (см. [6]), что векторное поле $\tilde{X}$ в пространстве $(TM, \overset{0}{\nabla}^{(0)})$ является инфинитезимальным аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(1) существуют векторные поля X, Y , тензорные поля G, F типа $(1, 1)$ на M такие, что

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + G^{V\gamma} + F^{H\gamma}, \quad (9)$$

где

$$G^{V\gamma} = (G_i^j)_{(0)} x_1^i \partial_j^1, \quad F^{H\gamma} = (F_m^r)_{(0)} x_1^m (\partial_r^0 - (\Gamma_{rj}^k)_{(0)} x_1^j \partial_k^1);$$

(2) имеют место равенства

$$\begin{aligned} L_X \overset{0}{\nabla} &= 0, \quad L_Y \overset{0}{\nabla} = 0; \quad \overset{0}{\nabla} G = 0, \quad \overset{0}{\nabla} F = 0; \\ \overset{0}{R}_{mkl}^i F_j^m &= F_m^i \overset{0}{R}_{jkl}^m = 0; \quad \overset{0}{R}_{mkl}^i G_j^m - G_m^i \overset{0}{R}_{jkl}^m = 0. \end{aligned}$$

Представив систему (8) в развернутой форме (индексы α, β, σ могут принимать только два значения: 0 или 1) и подставив в получившиеся уравнения разложение (9), приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} L_X T &= 0, \quad L_Y T = 0, \\ T_{jk}^m F_m^i &= T_{mk}^i F_j^m = T_{jm}^i F_k^m = 0, \\ T_{mk}^i G_j^m &= T_{jm}^i G_k^m = T_{jk}^m G_m^i. \end{aligned}$$

Совокупность всевозможных инфинитезимальных аффинных преобразований образует алгебру Ли относительно естественных операций сложения и умножения на скаляр из $\mathbb{R}$ и операции коммутирования. Обозначив через $\tilde{L}$ алгебру Ли векторных полей вида (9), а через L^p ($p = 0, 1, 2, 3$) — множество векторных полей вида $X^{(0)}, Y^{(1)}, G^{V\gamma}, F^{H\gamma}$, можно показать, что подпространства L^p , $p = 0, 1, 2, 3$, являются подалгебрами алгебры Ли $\tilde{L}$ и

$$\dim \tilde{L} = \dim L^0 + \dim L^1 + \dim L^2 + \dim L^3,$$

причем размерности подалгебр L^0 и L^1 равны размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(M, \overset{0}{\nabla})$ (см. [5]). Таким образом, чтобы исследовать размерность алгебры Ли $\tilde{L}$, необходимо и достаточно оценить размерность каждой из подалгебр L^p , $p = 0, 1, 2, 3$.

Оценим размерность подалгебр L^0 и L^1 . И. П. Егоровым доказано, что пространства полусимметрической линейной связности с нулевым или ненулевым тензорным полем кривизны R и ненулевым тензорным полем кручения T имеют максимальную размерность n^2 (см. [1]). Для доказательства точности оценки рассматривается пространство $(\mathbb{R}^n, \nabla)$, где линейная связность ∇ определяется следующими коэффициентами

$$\begin{aligned}\Gamma_{1n}^1 &= \Gamma_{2n}^2 = \dots = \Gamma_{n-1n}^{n-1} = a + b, \\ \Gamma_{n1}^1 &= \Gamma_{n2}^2 = \dots = \Gamma_{nn}^{n-1} = a - b, \\ \Gamma_{nn}^n &= 2a,\end{aligned}$$

другие $\Gamma_{jk}^i = 0$. Инфинитезимальные аффинные преобразования данного пространства будут иметь вид

$$\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n, x^i \partial_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad x^n \partial_1, x^n \partial_2, \dots, x^n \partial_{n-1}. \quad (10)$$

Отсюда следует, что $\dim L^0 + \dim L^1 = 2n^2$. Базис подалгебры L^0 составляют векторные поля:

$$\begin{aligned}\partial_1^0, \partial_2^0, \dots, \partial_n^0, x_0^i \partial_j^0 + x_1^i \partial_j^1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1, \\ x_0^n \partial_1^0 + x_1^n \partial_1^1, x_0^n \partial_2^0 + x_1^n \partial_2^1, \dots, x_0^n \partial_{n-1}^0 + x_1^n \partial_{n-1}^1,\end{aligned}$$

а базисом подалгебры L^1 являются векторные поля

$$\partial_1^1, \partial_2^1, \dots, \partial_n^1, x_0^i \partial_j^1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad x_0^n \partial_1^1, x_0^n \partial_2^1, \dots, x_0^n \partial_{n-1}^1.$$

Оценим размерность подалгебры L^2 . Для этого рассмотрим пространство решений уравнения $\overset{0}{\nabla} G = 0$, где $G \in \mathfrak{T}_1^1(M)$, равносильное в локальных координатах следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\partial_j G_k^i - G_p^i \overset{0}{\Gamma}_{kj}^p + G_k^p \overset{0}{\Gamma}_{pj}^i = 0. \quad (11)$$

Компоненты G_k^i тензорного поля G удовлетворяют условиям

$$G_k^m T_{mj}^i - G_m^i T_{kj}^m = 0.$$

Учитывая строение тензорного поля кручения T пространств полусимметрической связности, приходим к соотношениям

$$G_k^m (\delta_m^i T_j - \delta_j^i T_m) - G_m^i (\delta_k^m T_j - \delta_j^m T_k) = 0$$

или, раскрыв скобки, к соотношениям

$$G_j^i T_k - G_k^m \delta_j^i T_m = 0. \quad (12)$$

Для аффинора G справедливы равенства

$$G_j^m T_{km}^i - G_m^i T_{kj}^m = 0.$$

С учетом равенств (2) получаем следующие соотношения:

$$\delta_k^i G_j^m T_m - G_k^i T_j = 0. \quad (13)$$

Свернув формулы (13) по индексам i и k и обозначив $g = G_m^m$, приходим к равенствам

$$n G_j^m T_m - g T_j = 0,$$

откуда

$$G_j^m T_m = \frac{1}{n} g T_j. \quad (14)$$

Из равенств (14) и (12) следует, что

$$\left(\frac{1}{n}\delta_j^i g - G_j^i\right) T_k = 0. \quad (15)$$

Так как для тензорного поля T найдется компонента $T_k \neq 0$, то будем иметь

$$G_j^i = \frac{1}{n}g\delta_j^i.$$

Подставив найденные компоненты G_j^i в уравнения (11), получим, что $\partial_k g = 0$, следовательно, g — произвольная постоянная. Таким образом, размерность пространства решений уравнения $\overset{0}{\nabla} G = 0$ равна 1, отсюда заключаем, что $\dim L^2 = 1$. Базис алгебры L^2 на TM составляет векторное поле Лиувилля

$$x_1^k \partial_k^1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Оценим размерность подалгебры L^3 . Для аффинора F справедливы равенства

$$F_j^m T_{mk}^i = 0, \quad F_k^m T_{jm}^i = 0, \quad F_m^i T_{jk}^m = 0. \quad (16)$$

Учитывая строение тензорного поля кручения T , соотношения (16) дают

$$F_j^i T_k - F_j^m \delta_k^i T_m = 0, \quad F_k^i T_j - F_k^m \delta_j^i T_m = 0, \quad F_j^i T_k - F_k^i T_j = 0. \quad (17)$$

Равенства $F_j^i T_k - F_j^m \delta_k^i T_m = 0$ свернем по индексам i и k , получим:

$$F_j^m T_m - F_j^m T_m n = 0.$$

Отсюда следует, что $F_j^m T_m = 0$. Подставляя их в первую группу уравнений системы (17), получим, что $F_j^i T_k = 0$.

Поскольку $T \neq 0$, то найдется компонента $T_k \neq 0$, поэтому $F_j^i = 0$. Следовательно, размерность пространства решений уравнения $\nabla F = 0$ равна нулю, т.е. $\dim L^3 = 0$. Тогда

$$\dim \tilde{L} = \dim L^0 + \dim L^1 + \dim L^2 = 2n^2 + 1.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений со связностью полного лифта над пространствами полусимметрической линейной связности с нулевым и ненулевым тензорным полем кривизны равна $2n^2 + 1$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров И. П. Движения в пространствах аффинной связности. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965.
2. Егоров И. П. Геометрия. — М.: Просвещение, 1979.
3. Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
4. Султанов А. Я. Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов. Мат. — 1999. — № 9. — С. 64–72.
5. Султанова Г. А. О некоторых подалгебрах алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM со связностью полного лифта // Сб. науч. статей Междунар. конф. «Ломоносовские чтения на Алтае: Фундаментальные проблемы науки и образования». — Барнаул: Изд-во Алтайск. ун-та, 2014. — С. 378–381.
6. Шадыев Х. Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении // Тр. геом. семин. — 1984. — 16. — С. 117–127.
7. Yano K. Tangent and Cotangent Bundles. — New York: Marcel Dekker, 1973.

Султанова Галия Алиевна

Филиал Военной Академии материально-технического обеспечения, Пенза

E-mail: sultgaliya@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 109–112
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-109-112

УДК 514.753

ПОВЕРХНОСТИ В КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ${}^{11}S_3^1$

© 2020 г. В. Б. ЦЫРЕНОВА

Аннотация. Квазигиперболические пространства являются проективными пространствами с распадающимся абсолютном. В работе рассмотрены поверхности в одном из таких пространств методами внешних форм и подвижного репера. Найдены геометрические характеристики для инвариантов линии на поверхности. Получены аналоги поверхностей Фосса.

Ключевые слова: квазигиперболическое пространство, абсолют, поверхность, канонический репер, инвариант, линия на поверхности, геодезическая линия.

SURFACES IN THE QUASI-HYPERBOLIC SPACE ${}^{11}S_3^1$

© 2020 V. B. TSYRENOVA

ABSTRACT. Quasi-hyperbolic spaces are projective spaces with decomposable absolute. In this paper, we analyze surfaces in such spaces using the method of external forms and the method of movable frames. Geometric characteristics of invariants of lines on such surfaces are found. Analogs of Foss surfaces are obtained.

Keywords and phrases: quasi-hyperbolic space, absolute, surface, canonical frame, invariant, line on the surface, geodesic line.

AMS Subject Classification: 53A35

1. Введение. Квазигиперболические пространства изучались многими учениками Б. А. Розенфельда и Р. Н. Щербакова (см. [1, 3]). Автором была наиболее полно изучена дифференциальная геометрия квазиэллиптического пространства. Построена теория поверхностей, регулюсов, конгруэнций и комплексов методом внешних форм. Далее, во всех перечисленных пространствах нами изучены линейчатые поверхности и конгруэнции, построены и геометрически характеризованы их канонические реперы, получены геометрические характеристики инвариантов и простейшие классы. В данной работе продолжим рассмотрение поверхности в трехмерном квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$, линий на поверхности.

2. Квазигиперболическое пространство ${}^{11}S_3^1$. Квазигиперболическое пространство ${}^{11}S_3^1$ — проективное 3-пространство, в котором метрика определяется абсолютном, заданным совокупностью пары действительных плоскостей и пары действительных точек на прямой их пересечения.

Будем пользоваться такой системой координат, в которой абсолютные плоскости q_1, q_2 , абсолютная прямая T_0 и абсолютные точки на ней Q_1, Q_2 имеют соответственно уравнения

$$(X, X)_1 = (x^0)^2 + 2x^0x^1 = 0, \quad x^0 = x^1 = 0, \quad (X, X)_2 = (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0.$$

Абсолютные плоскости пространства ${}^{11}S_3^1$ разбивают многообразие точек проективного пространства, не принадлежащих абсолютному, на две связные области. Мы рассматриваем ту область, для

точек которой $(X, X)_1 > 0$, а их координаты и координаты точек абсолютной прямой будем нормировать соответственно условиям $(X, X)_1 = 1$ и $(X, X)_2 = 1$.

Расстояния δ_0 , d и δ_1 между точками X и Y с нормированными координатами гиперболической, абсолютной и евклидовой прямых находятся по формулам

$$\operatorname{ch} \delta_0 = (X, Y)_1, \quad \operatorname{ch} \delta_1 = (X, Y)_2, \quad d^2 = (X, Y)_2.$$

Деривационные формулы наиболее общего репера пространства имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0(A_0 - A_1) + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3, & dA_2 &= \omega_2^3 A_3, \\ dA_1 &= -\omega_0^0 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3, & dA_3 &= \omega_2^3 A_2. \end{aligned}$$

3. Поверхности в пространстве $^{11}S_3^1$. В [5] автором был построен полуканонический и два канонических репера поверхности. При этом поверхность задавалась параметрическим уравнением $A = A(u^1, u^2)$. Точка поверхности и касательная плоскость (а следовательно, и нормаль) были включены в репер в качестве точки A_0 и плоскости $(A_0 A_1 A_2)$. Деривационные формулы полуканонического репера поверхности были получены в следующем виде:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0 A_0 - \omega_0^0 A_1 + \omega_0^2 A_2, \\ dA_1 &= -\omega_0^0 A_1 + (\mu \omega_0^0 + \nu \omega_0^2) A_2 + (\alpha \omega_0^0 + \beta \omega_0^2) A_3, \\ dA_2 &= (-\beta \omega_0^0 + \gamma \omega_0^2) A_3, \\ dA_3 &= (-\beta \omega_0^0 + \gamma \omega_0^2) A_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Для базисных форм ω_0^0 и ω_0^2 имеем

$$D\omega_0^0 = 0, \quad D\omega_0^2 = (1 - \nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2,$$

а основная система дифференциальных уравнений [5] имеет вид

$$\begin{aligned} d\alpha \wedge \omega_0^0 + d\beta \wedge \omega_0^2 &= \gamma\mu + \beta(\nu - 1)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2; \\ d\beta \wedge \omega_0^0 - d\gamma \wedge \omega_0^2 &= \gamma(1 - \nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2; \\ d\mu \wedge \omega_0^0 + d\nu \wedge \omega_0^2 &= (\nu^2 - 2\nu + \alpha\gamma + \beta^2)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Решение этой системы существует с произволом в две функции двух аргументов, что соответствует произволу существования поверхности, отнесенной к произвольному семейству линий (см. [5]).

Полную систему инвариантов поверхности образуют инварианты γ , $I = \beta^2 + 2\alpha\gamma$ и значения μ и ν при какой-либо канонизации репера. При $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ и $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$ получаются канонические реперы R_1 и R_2 .

Полную систему инвариантов линии $\omega_0^2 = 0$ на поверхности составляют значения коэффициентов α , β , μ , вычисленных вдоль этой линии. Линии $\omega_0^0 = 0$ высекаются на поверхности евклидовыми плоскостями и называются евклидовыми сечениями (см. [6]). В [3] они названы изотропными линиями кривизны.

На поверхности определены две первые квадратичные формы

$$\varphi_1 = (dA_0, dA_0)_1 = -(\omega_0^0)^2, \quad \varphi_1' = (dA_0, dA_0)_2 = -(\omega_0^2)^2.$$

Вторая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$\varphi_2 = (d^2 A_0, A_0, A_1, A_2) = -\alpha(\omega_0^0)^2 - 2\beta\omega_0^0\omega_0^2 + \gamma(\omega_0^2)^2.$$

Геометрическое значение второй квадратичной формы получается из соотношения

$$\varphi_2 = \pm 2\delta,$$

где δ — расстояние между точками A_0 и

$$B = \operatorname{pr}_{A_0 A_1 A_2}^{A_3} \left(A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2 A_0 + \dots \right).$$

Уравнения торсов конгруэнции $\{A_0 A_3\}$ нормалей поверхности имеют вид

$$\omega_0^0 = 0, \quad \beta\omega_0^0 - \gamma\omega_0^2 = 0,$$

фокусами образующих являются точки

$$F_1 = A_0 + \frac{1}{\gamma}A_3, \quad F_2 = A_3;$$

это означает, что одна из эволют вырождается в абсолютную прямую.

Инвариант $a = \varphi_2/\varphi_1$ называют нормальной кривизной линии $\omega_0^0 : \omega_0^2$ на поверхности (см. [5]). Для линии $\omega_0^0 = 0$ имеем $\varphi_1 = 0$, а нормальная кривизна равна

$$a = \frac{\varphi_2}{\varphi_1'} = \gamma.$$

Поверхности $\nu = 0$ характеризуются тем, что евклидово сечение $\omega_0^0 = 0$ является горловой линией регулуса $\{A_0A_1\}$ касательных к асимптотической линии $\omega_0^2 = 0$ и существуют с произволом трех функций одного аргумента.

4. Линии на поверхности. Полагая $\omega_0^2 = 0$, $\omega_0^0 = ds$, $\mu = m$, $\alpha = a$, $\beta = b$, получим деривационные формулы канонического репера линии на поверхности в виде

$$\frac{dA_0}{ds} = A_0 - A_1, \quad \frac{dA_1}{ds} = -A_1 + mA_2 + aA_3, \quad \frac{dA_2}{ds} = -bA_3, \quad \frac{dA_3}{ds} = -bA_2.$$

Формулы Френе пространственной кривой имеют вид

$$\frac{dA_0}{ds} = A_0 - A_1, \quad \frac{dA_1}{ds} = -A_1 + kA_2, \quad \frac{dA_2}{ds} = kA_3, \quad \frac{dA_3}{ds} = kA_2.$$

Сравнивая эти формулы, видим, что s — длина дуги линии на поверхности, а для кривизн k^* , κ^* линии на поверхности получаем

$$(k^*)^2 = a^2 + m^2, \quad \kappa^* = -b.$$

Из деривационных формул канонического репера линии на поверхности получаются вычислительные формулы для инвариантов линии на поверхности

$$\begin{aligned} a &= (-\alpha(\omega_0^0)^2 - 2\beta\omega_0^0\omega_0^2 + \gamma(\omega_0^2)^2) : (\omega_0^0)^2, \\ b &= (-\beta\omega_0^0 + \gamma\omega_0^2) : \omega_0^0, \\ m &= (\mu\omega_0^0 + (1 - \nu)\omega_0^2) : \omega_0^0 - (\omega_0^0d\omega_0^2 - \omega_0^2d\omega_0^0) : (\omega_0^0)^3. \end{aligned}$$

Видим отсюда, что только инвариант m является инвариантом второго порядка.

Можно выделить следующие три основных класса линий на поверхности:

- (1) $a = 0$ — асимптотические линии, для них репер совпадает с каноническим репером, а также может служить каноническим репером пространственной кривой, рассматриваемой независимо от поверхности;
- (2) $b = 0$ — конические линии, конусы имеют вершины на абсолютной прямой; нормаль также описывает такой конус;
- (3) $m = 0$ — квазигиперболические геодезические линии с гиперболическими касательными.

5. Аналоги поверхностей Фосса. Поверхности $\mu = 0$ (в каноническом репере R_2) характеризуются тем, что только на этих поверхностях существуют конические линии с вершинами конусов на абсолютной прямой, т.е. линии $b = 0$, являющиеся одновременно линиями $m = 0$. Так как линии $\omega_0^0 = 0$ являются геодезическими с евклидовыми касательными, то поверхности $\mu = 0$ можно назвать поверхностями Фосса (см. [6]). Такие поверхности существуют с произволом трех функций одного аргумента.

Найдем более общий аналог поверхностей Фосса, несущих сопряженные сети квазигиперболических геодезических линий, оба семейства которых имеют гиперболические касательные.

Будем решать задачу в полуканоническом репере. Координатному семейству $\omega_0^2 = 0$ будет сопряжено семейство

$$\alpha\omega_0^0 + \beta\omega_0^2 = 0,$$

причем $\alpha \neq 0$. Если координатные линии $\omega_0^2 = 0$ — геодезические, то $\mu = 0$. Соприкасающаяся плоскость линии

$$\alpha\omega_0^0 + \beta\omega_0^2 = 0$$

будет проходить через нормаль (A_0A_3) только при условии

$$\alpha\beta^2\nu - \alpha\beta^2 - \beta^2\alpha_1 - \alpha\beta\alpha_2 + \alpha\beta\beta_1 - \alpha^2\beta_2 = 0, \quad (3)$$

где

$$d\alpha = \alpha_1\omega_0^0 + \alpha_2\omega_0^2, \quad d\beta = \beta_1\omega_0^0 + \beta_2\omega_0^2.$$

Присоединяя условие (3) к основной системе внешних дифференциальных уравнений (2), получим стандартную систему, имеющую старший характер $s_1 = 4$. Следовательно, поверхности Фосса, несущие сопряженные сети квазигиперболических геодезических линий, оба семейства которых имеют гиперболические касательные, в квазигиперболическом пространстве $^{11}S_3^1$ существуют с произволом четырех функций одного аргумента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурьева В. П., Абдурахманова Х. К. К теории поверхностей в трехмерных квазиэллиптическом и квазигиперболических пространствах // Геом. сб. — 1976. — № 17. — С. 132–139.
2. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
3. Слободской В. И. Теория поверхностей в трехмерном квазигиперболическом пространстве $^{11}S_3^1$ // Геом. сб. — 1980. — № 21. — С. 55–67.
4. Цыренова В. Б. К теории поверхностей в квазиэллиптическом пространстве // Геом. сб. — 1978. — № 19. — С. 96–108.
5. Цыренова В. Б. Поверхности в квазигиперболическом пространстве $^{11}S_3^1$ // Мат. 5 науч. конф., посв. 100-летию проф. Р. Н. Щербакова «Геометрия многообразий и ее приложения». — Улан-Удэ, 2018. — С. 56–60.
6. Цыренова В. Б., Щербаков Р. Н. Основы теории поверхностей трехмерного квазиэллиптического пространства // Геом. сб. — 1975. — № 15. — С. 183–204.
7. Щербаков Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1960.

Цыренова Валентина Бабасановна

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ

E-mail: v.ts@mail.ru



ПЛОСКОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ

© 2020 г. Ю. И. ШЕВЧЕНКО, Е. В. СКРЫДЛОВА

Аннотация. Проективное пространство, в котором неэффективно действует линейная группа, позволяет построить соответствующее пространство проективной связности Картана. Показано, что структурные уравнения пространства Картана дают возможность получить дифференциальные уравнения для компонент тензора проективной кривизны-кручения. Этот тензор содержит тензор кручения, расширенный тензор кручения и тензор аффинной кривизны-кручения. Найден аналог тождеств Бианки. Сформулирован допускающий обобщение алгоритм построения структурных уравнений пространства проективной связности Картана. С помощью обобщенного алгоритма построены структурные уравнения плоскостного пространства проективной связности, частными случаями которого являются линейчатое пространство проективной связности Акивиса, точечное пространство проективной связности Картана и двойственное ему гиперплоскостное пространство проективной связности. Доказано, что тензор кривизны-кручения плоскостного пространства проективной связности имеет три подтензора, один из которых — аналог тензора кручения пространства Картана.

Ключевые слова: пространство проективной связности Картана, тензор кривизны-кручения, аналог тождеств Бианки, линейчатое пространство проективной связности, плоскостное пространство проективной связности.

PLANAR SPACE WITH PROJECTIVE CONNECTION

© 2020 YU. I. SHEVCHENKO, E. V. SKRYDLOVA

ABSTRACT. A projective space in which a linear group acts ineffectively allows one to construct the corresponding space of Cartan projective connection. We show that the structure equations of the Cartan space allow one to obtain differential equations for the components of the projective curvature-torsion tensor. This tensor contains the torsion tensor, the extended torsion tensor, and the affine curvature-torsion tensor. An analog of the Bianchi identities is found. A generalizable algorithm for constructing structure equations of the space of Cartan projective connection is formulated. Using a generalized algorithm, we construct the structure equations of the planar space of projective connection, whose special cases are the ruled space of Akivis projective connection, point space of Cartan projective connection, and its dual hyperplanar space of projective connection. We also prove that the curvature-torsion tensor of a plane space with projective connection has three subtensors, one of which is an analog of the torsion tensor of the Cartan space.

Keywords and phrases: space of Cartan projective connection, curvature-torsion tensor, analog of Bianchi identities, ruled space of projective connection, planar space of projective connection.

AMS Subject Classification: 53B10

1. Пространство проективной связности Картана. Рассмотрим n -мерное проективное пространство P_n , отнесенное к однородному подвижному реперу $\{A_{I'}\}$ с деривационными формулами

$$dA_{I'} = \theta_{I'}^{J'} A_{J'}, \quad I', J', \dots = \overline{0, n}, \quad (1)$$

причем линейные дифференциальные формы $\theta_{J'}^{I'}$ удовлетворяют структурным уравнениям линейной группы $GL(n+1)$:

$$d\theta_{J'}^{I'} = \theta_{J'}^{K'} \wedge \theta_{K'}^{I'}. \quad (2)$$

Эти уравнения выражают полную интегрируемость дифференциальных уравнений (1).

Группа $GL(n+1)$ действует в проективном пространстве P_n неэффективно. От этого избавляются двумя способами:

- (1) берут специальную линейную группу $SGL(n+1)$, выделяемую условием $\theta_{I'}^{I'} = 0$, тогда имеем эффективное проективное пространство;
- (2) используют проективную группу $GP(n)$ — фактор-группу с $n(n+2)$ структурными формами $\theta_0^I, \theta_J^I - \delta_J^I \theta_0^0, \theta_I^0, I, J, \dots = \overline{1, n}$; тогда можно говорить о фактор-эффективном проективном пространстве.

Будем рассматривать неэффективное проективное пространство P_n и соответствующие пространства проективной связности.

В пространстве P_n зафиксируем точку A , превратив его в центропроективное пространство P_n^0 . Совместим вершину A_0 репера $\{A_0, A_I\}$ с центром A -пространства P_n^0 . Формулы (1) и уравнения (2) запишем подробнее:

$$dA_0 = \theta_0^0 A_0 + \theta_I^I A_I, \quad (3)$$

$$dA_I = \theta_I^0 A_0 + \theta_I^J A_J, \quad (4)$$

$$d\theta_0^I = \theta_0^J \wedge (\theta_J^I - \delta_J^I \theta_0^0), \quad (5)$$

$$d\theta_J^I = \theta_J^0 \wedge \theta_0^I + \theta_J^K \wedge \theta_K^I, \quad (6)$$

$$d\theta_I^0 = \theta_I^0 \wedge \theta_0^0 + \theta_I^J \wedge \theta_J^0, \quad (7)$$

$$d\theta_0^0 = \theta_0^I \wedge \theta_I^0. \quad (8)$$

Из формулы (3) следуют уравнения стационарности точки A_0 :

$$\theta_0^I = 0. \quad (9)$$

В силу структурных уравнений (5) эта система уравнений вполне интегрируема. Она выделяет из линейной группы $GL(n+1)$ центролинейную подгруппу стационарности G_{n^2+n+1} со структурными уравнениями

$$d\vartheta_J^I = \vartheta_J^K \wedge \vartheta_K^I, \quad d\vartheta_I^0 = \vartheta_I^0 \wedge \vartheta_0^0 + \vartheta_I^J \wedge \vartheta_J^0, \quad d\vartheta_0^0 = 0 \quad (\vartheta = \theta|_{(5)}). \quad (10)$$

Возьмем n -мерное гладкое многообразие M_n . Для любой точки $x \in M_n$ имеем деривационную формулу Аквиса (см. [2, с. 54]):

$$dx = \omega^I e_I, \quad (11)$$

где векторы e_I образуют базис касательного пространства $T_n(x)$ к многообразию M_n в точке x . Базисные формы ω^I удовлетворяют структурным уравнениям Лаптева (см. [7]):

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \Omega_J^I, \quad (12)$$

которые показывают полную интегрируемость системы уравнений

$$\omega^I = 0, \quad (13)$$

фиксирующей точку $x = x_0$.

К каждой точке x многообразия M_n присоединим проективное пространство $P_n(x)$; тогда для семейства пространств $P_n(x)$ обобщения структурных уравнений (2) будут иметь следующий вид:

$$d\omega_{J'}^{I'} = \omega_{J'}^{K'} \wedge \omega_{K'}^{I'} + \omega^K \wedge \omega_{J'K}^{I'}, \quad (14)$$

причем

$$\bar{\omega}_{J'}^{I'} = \theta_{J'}^{I'} \quad (\bar{\omega} = \omega|_{(13)}). \quad (15)$$

Действительно, уравнения (13)–(15) позволяют выделить линейную группу $GL(n+1)$ со структурными уравнениями (2), действующую в фиксированном проективном пространстве $P_n(x_0)$. Более того, из условия (15) следует $\bar{\omega}_0^I = \theta_0^I$, поэтому при отождествлении

$$\omega_0^I = \omega^I \quad (16)$$

в пространстве $P_n(x_0)$ выполняются равенства (9). Значит, фиксированное присоединяемое пространство $P_n(x_0)$ является центропроективным пространством $P_n^0(x_0)$ с центром $x_0 = A_0$. В этом случае будем говорить о приклеивании (ср. [3, с. 109]) проективных пространств $P_n(x)$ к базе M_n , в результате чего они становятся центропроективными пространствами $P_n^0(x)$.

Картан показал (см. [4]), что смежное пространство $P_n^0(x+dx)$ отображается на исходное пространство $P_n^0(x)$, если формы $\omega_{J'K}^{I'}$ в структурных уравнениях (14) являются линейными комбинациями базисных форм ω_0^I :

$$\omega_{J'K}^{I'} = R_{J'KL}^{I'} \omega_0^L.$$

Тогда уравнения (14) становятся структурными уравнениями пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$:

$$d\omega_{J'}^{I'} = \omega_{J'K'}^{K'} \wedge \omega_{K'}^{I'} + R_{J'KL}^{I'} \omega_0^K \wedge \omega_0^L. \quad (17)$$

Антикоммутативность внешних произведений линейных форм объясняет антисимметрию коэффициентов:

$$R_{J'(KL)}^{I'} = 0, \quad (18)$$

где круглые скобки обозначают симметрирование.

Из уравнений (17) следует, что базисные формы ω_0^I удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega_0^I = \omega_0^J \wedge (\omega_J^I - \delta_J^I \omega_0^0 + R_{0JK}^I \omega_0^K). \quad (19)$$

Сопоставляя их с уравнениями (12), убеждаемся в возможности отождествления (16) при

$$\Omega_J^I = \omega_J^I - \delta_J^I \omega_0^0 + R_{0JK}^I \omega_0^K.$$

Если выполнится вполне интегрируемая в силу (19) система уравнений

$$\omega_0^I = 0,$$

то уравнения (17) превратятся в структурные уравнения (10) центролинейной группы G_{n^2+n+1} .

Утверждение 1. Пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ со структурными уравнениями (17) (ср. [9]) есть главное расслоение $G_{n^2+n+1}(M_n)$ над базой M_n — гладким многообразием со структурными уравнениями (19), типовым слоем которого служит центролинейная группа $G_{n^2+n+1} \subset GL(n+1)$, действующая неэффективно в каждом центропроективном пространстве $P_n^0(x)$, приклеенном к базе в точке $x \in M_n$.

Утверждение 2. Пространство $P_{n,n}$ является особым пространством фундаментально-групповой связности Лаптева (см. [6], так как базисные формы ω_0^I входят в состав форм связности $\omega_{J'}^{I'}$, поэтому пространство $P_{n,n}$, рассматриваемое как $G_{n^2+n+1}(M_n)$, не является главным расслоением со связностью (см., например, [5, с. 167]).

2. Тензор кривизны-кручения и его подтензоры. Структурные уравнения (17) пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$ позволяют найти дифференциальные уравнения для компонент тензора кривизны-кручения $R_{J'KL}^{I'}$. Продифференцируем уравнения (17) внешним образом:

$$\nabla R_{J'KL}^{I'} \wedge \omega_0^K \wedge \omega_0^L + 2R_{J'KL}^{I'} R_{0MN}^K \omega_0^L \wedge \omega_0^M \wedge \omega_0^N = 0, \quad (20)$$

где ковариантный дифференциал ∇ от компонент $R_{J'KL}^{I'}$ относительно проективной связности имеет следующий вид:

$$\nabla R_{J'KL}^{I'} = \Delta R_{J'KL}^{I'} + 2R_{J'KL}^{I'} \omega_0^0, \quad (21)$$

а дифференциальный оператор Δ действует по формуле

$$\Delta R_{J'KL}^{I'} = dR_{J'KL}^{I'} + R_{J'KL}^{M'} \omega_{M'}^{I'} - R_{M'KL}^{I'} \omega_{J'}^{M'} - R_{J'ML}^{I'} \omega_K^M - R_{J'KM}^{I'} \omega_L^M.$$

Представим кубические уравнения (20) в виде

$$\left(\nabla R_{J'KL}^{I'} \wedge \omega_0^L + 2R_{J'NL}^{I'} R_{0MK}^N \omega_0^M \wedge \omega_0^L \right) \wedge \omega_0^K = 0.$$

Разрешим их по лемме Лаптева (см. [7]):

$$\nabla R_{J'KL}^{I'} \wedge \omega_0^L + 2R_{J'NL}^{I'} R_{0MK}^N \omega_0^M \wedge \omega_0^L = \omega_0^L \wedge \omega_{J'KL}^{I'}, \quad (22)$$

причем выполняются условия полуголономности (см. [10]):

$$\omega_{J'KL}^{I'} \wedge \omega_0^K \wedge \omega_0^L = 0 \iff \omega_{J'[KL]}^{I'} \wedge \omega_0^K \wedge \omega_0^L = 0 \iff \omega_{J'[KL]}^{I'} = \lambda_{J'KLM}^{I'} \omega_0^M, \quad (23)$$

$$\lambda_{J'(KL)M}^{I'} = 0, \quad (24)$$

$$\lambda_{J'\{KLM\}}^{I'} = 0, \quad (25)$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование, а фигурные скобки — циклирование.

Преобразуем квадратичные уравнения (22):

$$\left(\nabla R_{J'KL}^{I'} + 2R_{J'NL}^{I'} R_{0MK}^N \omega_0^M + \omega_{J'KL}^{I'} \right) \wedge \omega_0^L = 0.$$

Разрешим эти уравнения по лемме Картана и проальтернируем результат по индексам K, L с учетом условий антисимметрии (18):

$$\nabla R_{J'KL}^{I'} + 2R_{J'N[L} R_{0M|K]}^N \omega_0^M + \omega_{J'[KL]}^{I'} = R_{J'[KL]M}^{I'} \omega_0^M, \quad (26)$$

причем $R_{J'K[LM]}^{I'} = 0$. С помощью условия полуголономности (23) дифференциальные уравнения (26) примут окончательный вид

$$\nabla R_{J'KL}^{I'} = R_{J'KL;M}^{I'} \omega_0^M, \quad (27)$$

где

$$R_{J'KL;M}^{I'} = R_{J'[KL]M}^{I'} - 2R_{J'N[L} R_{0M|K]}^N - \lambda_{J'KLM}^{I'}.$$

Отсюда в силу антисимметрии (24) следует, что ковариантные производные $R_{J'KL;M}^{I'}$ компонент $R_{J'KL}^{I'}$ антисимметричны по двум индексам:

$$R_{J'(KL);M}^{I'} = 0. \quad (28)$$

Используя равенства (21), запишем подробнее дифференциальные уравнения (27) в виде сравнений по модулю базисных форм ω_0^J :

$$\Delta R_{0KL}^I + R_{0KL}^I \omega_0^0 \cong 0 \pmod{\omega_0^J}, \quad (29)$$

$$\Delta R_{JKL}^I + 2R_{JKL}^I \omega_0^0 - R_{0KL}^I \omega_J^0 \cong 0, \quad (30)$$

$$\Delta R_{0KL}^0 + 2R_{0KL}^0 \omega_0^0 + R_{0KL}^0 \omega_I^0 \cong 0, \quad (31)$$

$$\Delta R_{JKL}^0 + 3R_{JKL}^0 \omega_0^0 + R_{JKL}^0 \omega_I^0 - R_{0KL}^0 \omega_J^0 \cong 0. \quad (32)$$

Теорема 1. Структурные уравнения (17) пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$ содержат компоненты тензора проективной кривизны-кручения $R_{J'KL}^{I'}$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (27). Дифференциальные сравнения (29)–(32) показывают, что тензор $R_{J'KL}^{I'}$ имеет три подтензора: R_{0KL}^I — тензор кручения, $\{R_{0KL}^0, R_{0KL}^I\}$ — расширенный тензор кручения, $\{R_{JKL}^I, R_{0KL}^I\}$ — тензор аффинной кривизны-кручения.

При аннулировании тензора кручения: $R_{0KL}^I = 0$ дифференциальные сравнения (32) не изменятся, а сравнения (30)–(31) упростятся:

$$\Delta R_{JKL}^I + 2R_{JKL}^I \omega_0^0 \cong 0, \quad \Delta R_{0KL}^0 + 2R_{0KL}^0 \omega_0^0 \cong 0. \quad (33)$$

Следствие. Компоненты тензора кривизны $\{R_{JKL}^I, R_{0KL}^0, R_{JKL}^0\}$ пространства проективной связности Картана без кручения $P_{n,n}^0$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям (32), (33), поэтому тензор кривизны имеет два подтензора: R_{0KL}^0 и R_{JKL}^I — аналог тензора кривизны аффинной связности.

Замечание. Если тензор проективной кривизны-кручения обратится в нуль: $R_{J'KL}^{I'} = 0$, то уравнения (17) примут вид

$$d\omega_{J'}^{I'} = \omega_{J'}^{K'} \wedge \omega_{K'}^{I'},$$

совпадающие со структурными уравнениями (2) линейной группы $GL(n+1)$. Значит, пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ обобщает линейную группу $GL(n+1)$, действующую неэффективно в проективном пространстве P_n .

3. Аналог тождеств Бианки. Кубичные уравнения (20) дают возможность не только найти дифференциальные уравнения (27) компонент тензора кривизны-кручения, но и получить аналог тождеств Бианки. Из уравнений (20), (27) следует

$$\left(R_{J'KL;M}^{I'} + 2R_{J'NL}^{I'} R_{0MK}^N \right) \omega_0^K \wedge \omega_0^L \wedge \omega_0^M = 0,$$

откуда получим

$$R_{J'[KL;M]}^{I'} + 2R_{J'N[L}^{I'} R_{0|MK]}^N = 0.$$

При альтернировании по трем индексам, используя условия (18), (28) — антисимметрию по двум индексам, перейдем к циклированию:

$$R_{J'\{KL;M\}}^{I'} + 2R_{J'N\{K}^{I'} R_{0|LM\}}^N = 0. \quad (34)$$

Утверждение 3. Компоненты тензора кривизны-кручения $R_{J'KL}^{I'}$ и их ковариантные производные $R_{J'KL;M}^{I'}$ относительно проективной связности Картана удовлетворяют аналогу тождеств Бианки (34).

4. Построение структурных уравнений пространств проективной связности. Отталкиваясь от структурных уравнений (2) линейной группы $GL(n+1)$, действующую неэффективно в проективном пространстве P_n , сформулируем алгоритм построения структурных уравнений (17) пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$.

- А. Относим проективное пространство P_n к однородному реперу $\{A_{I'}\}$. В пространстве P_n неэффективно действует линейная группа $GL(n+1)$ со структурными уравнениями (2).
- В. Берем точку $A_0 \in P_n$ и находим уравнения ее стационарности. Левые части этих уравнений содержат n структурных форм группы $GL(n+1)$, которые называются базисными формами.
- С. Структурные уравнения (17) пространства $P_{n,n}$ получаются в результате обобщения уравнений (2) путем добавления линейных комбинаций внешних произведений аналогов базисных форм с коэффициентами — компонентами тензора кривизны-кручения.

Назовем точку A_0 фигурой приклеивания, а пространство $P_{n,n}$ — точечным пространством проективной связности. В обозначении Картана пространства проективной связности $P_{n,n}$ первое n будем считать размерностью проективного пространства, $n = \dim P_n$, а второе n — размерностью базы, равной размерности пространства фигур приклеивания в пространстве P_n .

Алгоритм построения структурных уравнений пространства $P_{n,n}$ легко распространяется на другие пространства проективной связности, в которых в качестве фигуры приклеивания берется не точка, а любая линейная фигура (см. [8]). Например, гиперплоскостное пространство проективной связности $P_{n,n}^*$, двойственное пространству $P_{n,n}$, имеет следующие структурные уравнения:

$$d\omega_{J'}^{I'} = \omega_{J'}^{K'} \wedge \omega_{K'}^{I'} + R_{J'}^{I'KL} \omega_K^0 \wedge \omega_L^0, \quad R_{J'}^{I'(KL)} = 0. \quad (35)$$

5. Пространство плоскостной проективной связности. Введем новое пространство проективной связности. В качестве фигуры приклеивания возьмем m -мерную плоскость $P_m \subset P_n$ ($0 \leq m \leq n-1$). Разобьем значения штрихованных индексов на две серии:

$$I' = (\alpha, i); \quad \alpha, \dots = \overline{0, m}; \quad i, \dots = \overline{m+1, n}.$$

Поместим вершины A_α подвижного репера $\{A_\alpha, A_i\}$ на плоскость P_m . Из деривационных формул (1) следует

$$dA_\alpha = \theta_\alpha^\beta A_\beta + \theta_\alpha^i A_i,$$

откуда получаем уравнения стационарности плоскости P_m :

$$\theta_\alpha^i = 0. \quad (36)$$

Значит, θ_α^i — базисные формы, число которых равно $(m+1)(n-m)$. Структурные уравнения (2) дают уравнения

$$d\theta_\alpha^i = \theta_\beta^j \wedge (\delta_\alpha^\beta \theta_j^i - \delta_j^\alpha \theta_\alpha^\beta),$$

которые обеспечивают полную интегрируемость системы уравнений (36).

Применяя алгоритм из п. 4 в случае плоскости приклеивания P_m , построим структурные уравнения плоскостного пространства проективной связности $P_{n,(m+1)(n-m)}$:

$$d\omega_{J'}^{I'} = \omega_{J'}^{K'} \wedge \omega_{K'}^{I'} + R_{J'ij}^{I'\alpha\beta} \omega_\alpha^i \wedge \omega_\beta^j, \quad (37)$$

причем выполняются условия антисимметрии по парам индексов:

$$R_{J'}^{I'} \left(\begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ ij \end{smallmatrix} \right) = 0. \quad (38)$$

Выделим три частных случая пространства $P_{n,(m+1)(n-m)}$:

- (1) $m = 0$ — пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ со структурными уравнениями (17),
- (2) $m = 1$ — линейчатое пространство проективной связности Акивиса $P_{n,2(n-1)}$ (см. [1]),
- (3) $m = n - 1$ — гиперплоскостное пространство проективной связности $P_{n,n}^*$ со структурными уравнениями (35).

Замкнем структурные уравнения (28):

$$\nabla R_{J'ij}^{I'\alpha\beta} \wedge \omega_\alpha^i \wedge \omega_\beta^j + 2R_{J'ij}^{I'\alpha\beta} R_{\alpha kl}^{i\gamma\delta} \omega_\gamma^j \wedge \omega_\delta^k \wedge \omega_l^\gamma = 0, \quad (39)$$

где ковариантный дифференциал ∇ действует следующим образом:

$$\nabla R_{J'ij}^{I'\alpha\beta} = dR_{J'ij}^{I'\alpha\beta} + R_{J'ij}^{K'\alpha\beta} \omega_{K'}^{I'} + R_{J'ij}^{I'\gamma\beta} \omega_\gamma^\alpha + R_{J'ij}^{I'\alpha\gamma} \omega_\gamma^\beta - R_{K'ij}^{I'\alpha\beta} \omega_{J'}^{K'} - R_{J'kj}^{I'\alpha\beta} \omega_i^k - R_{J'ik}^{I'\alpha\beta} \omega_j^k.$$

Кубичные уравнения (39) позволяют найти дифференциальные уравнения

$$\nabla R_{J'ij}^{I'\alpha\beta} = R_{J'ij}^{I'\alpha\beta, \gamma} \omega_\gamma^k, \quad (40)$$

причем из условий антисимметрии (38) следует

$$R_{J'}^{I'} \left(\begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ ij \end{smallmatrix} \right);_\gamma^k = 0. \quad (41)$$

Уравнения (39), (40) дают:

$$\left(R_{J'ij}^{I'\alpha\beta, \gamma} + 2R_{J'lj}^{I'\delta\beta} R_{\delta ki}^{l\gamma\alpha} \right) \omega_\alpha^i \wedge \omega_\beta^j \wedge \omega_\gamma^k = 0,$$

откуда получим

$$R_{J'}^{I'} \left[\begin{smallmatrix} \alpha\beta, \gamma \\ ij, k \end{smallmatrix} \right] + 2R_{J'l}^{I'\delta} \left[\begin{smallmatrix} \beta \\ j \end{smallmatrix} R \left| \begin{smallmatrix} l \\ \delta \end{smallmatrix} \right| \begin{smallmatrix} \gamma\alpha \\ ki \end{smallmatrix} \right] = 0.$$

Преобразуем эти равенства с помощью условий антисимметрии (38), (41):

$$R_{J'}^{I'} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ ij \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} \gamma \\ k \end{smallmatrix} \right\} + 2R_{J'l}^{I'\delta} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ i \end{smallmatrix} R \left| \begin{smallmatrix} l \\ \delta \end{smallmatrix} \right| \begin{smallmatrix} \beta\gamma \\ jk \end{smallmatrix} \right\} = 0. \quad (42)$$

Запишем дифференциальные уравнения (40) в виде подобных сравнений:

$$\begin{aligned} \nabla R_{\gamma ij}^{k\alpha\beta} &\cong 0 \pmod{\omega_\alpha^i}, & \nabla R_{\delta ij}^{\gamma\alpha\beta} - R_{\delta ij}^{k\alpha\beta} \omega_k^\gamma &\cong 0, \\ \nabla R_{kij}^{l\alpha\beta} + R_{\gamma ij}^{l\alpha\beta} \omega_k^\gamma &\cong 0, & \nabla R_{kij}^{\gamma\alpha\beta} + R_{\delta ij}^{\gamma\alpha\beta} \omega_k^\delta - R_{kij}^{l\alpha\beta} \omega_l^\gamma &\cong 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Теорема 2. Пространство плоскостной проективной связности $P_{n,(m+1)(n-m)}$ определяется структурными уравнениями (37), которые содержат компоненты аналога тензора кривизны-кручения $R_{J'ij}^{I'\alpha\beta}$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (40). Эти компоненты вместе с их ковариантными производными $R_{J'ij}^{I'\alpha\beta, \gamma};_k$ относительно плоскостной проективной

связности подчиняются аналогу тождеств Бианки (42). Подробные дифференциальные сравнения (43) для компонент тензора $R_{j'ij}^{l'\alpha\beta}$ показывают, что он имеет три подтензора: $\{R_{\delta ij}^{\gamma\alpha\beta}, R_0\}$, $\{R_{kij}^{l\alpha\beta}, R_0\}$, $R_0 = \{R_{ij}^{k\alpha\beta}\}$ — аналог тензора кручения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акивис М. А. Об изоклинных три-тканях и их интерпретации в линейчатом пространстве проективной связности // Сиб. мат. ж. — 1974. — 15, № 1. — С. 3–15.
2. Акивис М. А. Многомерная дифференциальная геометрия. — Калинин, 1977.
3. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. — 1979. — 9. — С. 3–248.
4. Картан Э. Пространство аффинной, проективной и конформной связности. — Из-во Казан. ун-та, 1962.
5. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М., 1986.
6. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1953. — 2. — С. 275–382.
7. Лаптев Г. Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. ВИНТИ. — 1966. — 1. — С. 139–189.
8. Шевченко Ю. И. Структура оснащения многообразия линейных фигур // Тез. докл. VI Прибалт. геом. конф.. — Таллин, 1984. — С. 136–137.
9. Шевченко Ю. И. Центропроективная связность в пространстве проективной связности Картана // Дифф. геом. многообр. фигур. — 2005. — 36. — С. 154–160.
10. Шевченко Ю. И. Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Дифф. геом. многообр. фигур. — 2015. — 46. — С. 168–177.

Шевченко Юрий Иванович

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

E-mail: IUShevchenko@kantiana.ru

Скрыдлова Елена Викторовна

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

E-mail: ESkrydlova@kantiana.ru