ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 177

Москва 2020

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 177

АЛГЕБРА

Москва 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-3-9

УДК 512.54

О НИЛЬПОТЕНТНЫХ СТЕПЕННЫХ MR-ГРУППАХ

© 2020 г. М. АМАГЛОБЕЛИ, Т. БОКЕЛАВАДЗЕ

Аннотация. Понятие степенной MR-группы, где R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей, было введено Р. Линдоном. А. Г. Мясников и В. Н. Ремесленников дали более точное определение R-группы, введя дополнительную аксиому. В частности, это новое понятие степенной MR-группы является непосредственным обобщением понятия R-модуля на случай некоммутативных групп. В статье вводятся центральные ряды и ряды коммутантов в MR-группах. Обсуждаются три варианта определения нильпотентных степенных MR-групп ступени n. Доказано, что для $n = 1, 2$ все эти определения эквивалентны. Вопрос о совпадении этих понятий для $n > 2$ остается открытым. Кроме того, доказано, что тензорное пополнение двуступенно нильпотентной MR-группы двуступенно нильпотентно.

Ключевые слова: R-группа Линдона, R-группа Холла, MR-группа, α-коммутатор, тензорное пополнение, нильпотентная MR-группа.

ON NILPOTENT POWER MR-GROUPS

© 2020 M. AMAGLOBELI, T. BOKELAVADZE

Abstract. The notion of a power MR-group, where R is an arbitrary associative ring with unity, was introduced by R. Lyndon. A. G. Myasnikov and V. N. Remeslennikov gave a more precise definition of an R-group by introducing an additional axiom. In particular, the new notion of a power MR-group is a direct generalization of the notion of an R-module to the case of noncommutative groups. In the present paper, central series and series of commutants in MR-groups are introduced. Three variants of the definition of nilpotent power MR-groups of step n are discussed. It is proved that, for $n = 1, 2$, all these definitions are equivalent. The question on the coincidence of these notions for $n > 2$ remains open. Moreover, it is proved that the tensor completion of a 2-step nilpotent MR-group is 2-step nilpotent.

Keywords and phrases: Lyndon R-group, Hall R-group, MR-group, α-commutator, tensor completion, nilpotent MR-group.

AMS Subject Classification: 20F10, 20J15, 20E06

1. Предварительные сведения. Понятие степенной MR-группы, где R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей, было введено Р. Линдоном (см. [13]). А. Г. Мясников и В. Н. Ремесленников (см. [6]) дали более точное определение R-группы, введя дополнительную аксиому. В частности, их модифицированное понятие степенной MR-группы является непосредственным обобщением понятия R-модуля на случай некоммутативных групп. М. Г. Амаглобели и В. Н. Ремесленников (см. [2]) назвали R-группы с дополнительной аксиомой MR-группами (R — кольцо). Систематическое изучение MR-групп было предпринято в [1–4, 7, 8, 10, 14]. Результаты этих исследований оказались полезными для решения хорошо известных проблем Тарского.

Напомним основные определения и факты из [6, 13].

Пусть $L_{gr} = \{\,\cdot\,,\ ^{-1}, e\}$ — сигнатура группового языка, где $\cdot$ — бинарная операция умножения, $^{-1}$ — унарная операция инверсии, e — постоянное обозначение для единицы группы. Расширим групповой язык L_{gr} до языка $L^*_{gr} = L_{gr} \cup \{f_\alpha(g) : \alpha \in R\}$, где $f_\alpha(g)$ — унарная алгебраическая операция.

Определение 1 (см. [13])**.** Множество G называется R-группой Линдона, если на нем определены операции $\cdot$, $^{-1}$, e, $\{f_\alpha(g) : \alpha \in R\}$ и выполняются следующие аксиомы (для краткости выражение $f_\alpha(g)$ ниже будет записываться в виде g^α):

(a) аксиомы группы;
(b) для всех $g, h \in G$ и $\alpha, \beta \in R$ выполняются следующие равенства:
  (1) $g^1 = g$, $g^0 = e$, $e^\alpha = e$;
  (2) $g^{\alpha+\beta} = g^\alpha g^\beta$, $g^{\alpha\beta} = (g^\alpha)^\beta$;
  (3) $(h^{-1}gh)^\alpha = h^{-1}g^\alpha h$.

Обозначим через $\mathfrak{L}_R$ категорию R-групп Линдона. Указанные выше аксиомы являются тождествами языка L^*_{gr} и, следовательно, класс $\mathfrak{L}_R$ является многообразием алгебраических систем языка L^*_{gr} и из общих теорем универсальной алгебры следует, что можно говорить об R-гомоморфизмах, свободных R-группах и т. д.

Существуют абелевы R-группы Линдона, которые не являются R-модулями (в [9] проведено подробное изучение свободной абелевой R-группы). Авторы работы [6] добавили к аксиомам Линдона следующую дополнительную аксиому (квазитождество):

$$(4)\ \forall\, g, h \in G,\ \alpha \in R\ [g,h] = e \longrightarrow (gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha, \qquad (MR\text{-аксиома})$$

где $[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh$.

Определение 2 (см. [6])**.** Группа G называется MR-группой, если операция g^α определена на G для всех $g \in G$, $\alpha \in R$ и выполняются аксиомы (1)–(4).

Обозначим $\mathfrak{M}_R$ класс всех R-групп, удовлетворяющих аксиомам (1)–(4). Очевидно, что $\mathfrak{L}_R \supset \mathfrak{M}_R$. Аналогично, ясно, что этот класс является квазимногообразием в языке L^*_{gr}, и для него имеются понятия свободной MR-группы, R-гомоморфизма и т. д. Кроме того, любая абелева MR-группа является R-модулем, и наоборот.

Большинство естественных примеров степенных R-групп обеспечиваются классом $\mathfrak{M}_R$. Например, свободная степенная R-группа Линдона является MR-группой, унипотентная группа над полем K нулевой характеристики является MR-группой, произвольная про-p-группа является $M\mathbb{Z}_p$-группой над кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ и т. д. (другие примеры см. в [6]).

Определение 3 (см. [6])**.** Гомоморфизм R-групп $\varphi : G \to G^*$ называется *R-гомоморфизмом*, если $\varphi(g^\alpha) = \varphi(g)^\alpha$ для любых $g \in G$, $\alpha \in R$.

Определение 4 (см. [6])**.** Для $g, h \in G$, $\alpha = inR$ элемент $(g,h)_\alpha = h^{-\alpha}g^{-\alpha}(gh)^\alpha$ называется *α-коммутатором* элементов g и h.

Очевидно, что α-коммутатор $(g,h)_\alpha$ при $\alpha = -1$ совпадает с обычным коммутатором $[h^{-1}, g^{-1}]$. Ясно, что $(gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha (g,h)_\alpha$ и $G \in \mathfrak{M}_R \iff ([g,h] = e \Longrightarrow (g,h)_\alpha = e)$. Последнее соотношение эквивалентности приводи к определению $\mathfrak{M}_R$-идеала.

Определение 5 (см. [6])**.** Нормальная MR-подгруппа $H \trianglelefteq G$, $G \in \mathfrak{L}_R$ называется $\mathfrak{M}_R$-идеалом, если $(g,h)_\alpha \in H$ для всех $g, h \in G$, $\alpha \in R$.

Предложение 1 (см. [6])**.** *Пусть $G \in \mathfrak{L}_R$.*

(a) *Если $\varphi : G \to G^*$ — R-гомоморфизм групп из $\mathfrak{M}_R$, то* $\operatorname{Ker}\varphi$ *— $\mathfrak{M}_R$-идеал в G.*
(b) *Если H — $\mathfrak{M}_R$-идеал в G, то $G/H \in \mathfrak{M}_R$.*

В [6] показано, что при изучении степенных MR-групп основную роль играет операция тензорного пополнения. Эта операция является естественным обобщением понятия расширения скалярного кольца для модулей на некоммутативный случай. Идея такого обобщения для класса некоммутативных групп изложена в [5].

Определение 6 (см. [6])**.** Пусть G — MR-группа, $\mu : R \to S$ — гомоморфизм колец. Тогда MS-группа $G^{S,\mu}$ называется тензорным S-пополнением MR-группы G, если $G^{S,\mu}$ удовлетворяет следующим универсальным свойствам:

(1) существует такой R-гомоморфизм $\lambda : G \to G^{s,\mu}$, что $\lambda(G)$ S-порождает $G^{s,\mu}$; иными словами, $\langle \lambda(G) \rangle_S = G^{s,\mu}$;

(2) для любой MS-группы H и любого R-гомоморфизма $\varphi : G \to H$ согласованного с μ (т.е. $\varphi(g^\alpha = (\varphi(g))^{\mu(\alpha)}))$ существует S-гомоморфизм $\psi : G^{s,\mu} \to H$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varphi"'] & G^{S,\mu} \arrow[dl, dashed, "\exists\psi"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad (\varphi = \lambda\psi)$$

коммутативной.

Отметим, что, если G — абелева MR-группа, то $G^{S,\mu} \cong G \underset{R}{\otimes} S$ — тензорное произведение R-модуля G на кольцо S. В [6] доказано, что для любой MR-группы G и любого гомоморфизма $\mu : R \to S$ тензорное пополнение $G^{S,\mu}$ существует и единственно с точностью до R-гомоморфизма. Реализация тензорного пополнения MR-группы в форме конкретной конструкции с помощью метода комбинаторной теории групп дана в [1].

2. Нильпотентные R-группы. Пусть $c > 1$ — натуральное число. Обозначим $\mathcal{N}_{c,R}$ категорию нильпотентных R-групп нильпотентности c из класса $\mathfrak{L}_R$, т.е. R-групп, в которых выполняется тождество

$$\forall\, x_1, \ldots, x_{c+1} \;\; [x_1, \ldots, x_{c+1}] = e,$$

и $\mathcal{N}^0_{c,R}$ категорию нильпотентных MR-групп ступени c. Структура R-групп без аксиомы выбора (MR) очень сложна, и поэтому в большинстве работ изучаются только MR-группы. В оставшейся части статьи будут рассматриваться только MR-группы.

MR-группы Холла. Чтобы ввести это понятие, следуя [12], ограничим класс рассматриваемых колец.

Определение 7. Кольцо R называется *биномиальным*, если R — целочисленная область, содержащая $\mathbb{Z}$ как подкольцо и вместе с каждым элементом $\alpha \in R$ содержащая все биномиальные коэффициенты

$$C^n_\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Любое поле нулевой характеристики, кольцо полиномов над полем и кольцо целых чисел являются примерами биномиальных колец.

Определение 8. Нильпотентная группа G нильпотентности c называется *R-группой Холла* (где R — биномиальное кольцо), если элемент $x^\alpha \in G$ определен единственным образом для любых $\alpha \in R$ и $x \in G$ и для всех элементов группы G и кольца R выполняются следующие аксиомы $(x, y, x-1, \ldots, x_n \in G,\ \alpha, \beta \in R)$:

(1) $x^1 = x$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$;

(2) $(y^{-1}xy)^\alpha = y^{-1}x^\alpha y$;

(3) $x_1^\alpha \cdots x_n^\alpha = (x_1, \ldots, x_n)^\alpha \tau_2^{C^2_\alpha}(X) \cdots \tau_c^{C^c_\alpha}(X)$, где $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\tau_n(X)$ — k-е слово Петреску.

Напомним, что для любого натурального числа k, k-е слово Петреску рекурсивно определяется формулой

$$\tau_k(x) = \tau_k(x_1, \ldots, x_n) = \tau_1^{C^1_k}(X)\tau_2^{C^2_k}(X)\cdots\tau_{k-1}^{C^{k-1}_k}(X)\tau_k^{C^k_k}(X)$$

в свободной группе F с генераторами $x_1, \ldots, x_n$. В частности,

$$\tau_1(X) = x_1x_2 \cdot x_n, \quad \tau_2(X) = \prod_{\substack{i>j,\\ i,j=1}}^{n} [x_i, x_j] \mod \gamma_3(F),$$

где $\gamma_3(F)$ — третий член нижнего третьего ряда группы F. Хорошо известно (см., например, [13]), что для любого $n \in \mathbb{N}$, $\tau_k(X)$ принадлежит подгруппе $\tau_k(F)$, т.е. k-му члену третьего центрального ряда группы F, $\gamma_1(F) = F$.

Обозначим через $\mathcal{HN}_{c,R}$ многообразие нильпотентных элементов из класса c R-групп Холла.

Если G абелева, то аксиомы (1)–(3) сводятся к обычным аксиомам R-модулей. Действительно, $\tau_2, \tau_3, \ldots$ лежат в $G' = e$ (см. [12, теорема 6.3]). Таким образом, произвольная степенная нильпотентная R-группа Холла над биномиальным кольцом R является MR-группой. Любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения может служить примером степенной MR-группы Холла. Частным случаем является группа $UT_n(R)$ всех унитреугольных матриц с элементами из R (другие примеры см. в [12]).

Покажем, что структура групп из $\mathcal{N}_{c,R}$ существенно отличается от структуры R-групп Холла из $\mathcal{HN}_{c,R}$. Для этого приведем структуру свободной MR-группы из многообразия $\mathcal{HN}_{c,R}$, как это сделано в работе [2] М. Г. Амаглобели и В. Н. Ремесленникова. Ограничим наше рассмотрение двумя биномиальными кольцами $R = \mathbb{Q}[t]$, $R = \mathbb{Q}(t)$. Обозначим G_0 свободную двуступенно нильпотеную R-группу из многообразия $\mathcal{HN}_{c,R}$ с генераторами x, y. Хорошо известно, что база Мальцева этой группы состоит из трех элементов x, y, $[y, x]$. Общий вид элемента $g \in G_0$ таков: $g = x^\gamma y^\delta [y, x]^\varepsilon$, $\gamma, \delta, \varepsilon \in R$. В частности, в этой группе коммутант G_0' является свободным R-модулем ранга 1 с генератором $[y, x]$. Если теперь G — свободная MR-группа из многообразия $\mathcal{HN}^0_{c,R}$, то, как показано в [2], G' — свободный R-модуль бесконечного ранга, и база этого модуля найдена.

Ряды коммутантов в MR-группах. Пусть G — произвольная MR-группа. Предположим, что

$$(G, G)_R = \big\langle (g, h)_\alpha : \ g, h \in G, \ \alpha \in R \big\rangle_R.$$

Подгруппа $(G, G)_R$ называется R-коммутантом группы G.

С помощью общих теорем из теории многообразий групп (см., например, [15]) нетрудно доказать следующее предложение.

Предложение 2. *Для любой MR-группы G справедливы следующие утверждения*:

(1) *R-коммутант G — вербальная MR-подгруппа, определенная словом $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$;*
(2) *R-коммутант — это наименьший $\mathfrak{M}_R$-идеал, факторгруппа по которому абелева.*

Первым R-коммутантом группы $G \in \mathfrak{M}_R$ называется R-коммутант $(G, G)_R$; обозначение $G^{(1,R)}$. R-Коммутант $G^{(1,R)}$ называется *вторым R-коммутантом* и обозначается $G^{(2,R)}$ и т. д. Возникает убывающий ряд R-коммутантов

$$G = G^{(0,R)} \geqslant G^{(1,R)} \geqslant \cdots \geqslant G^{(n,R)} \geqslant \cdots . \tag{1}$$

Определение 9. Степенная MR-группа G называется *разрешимой*, если существует такое натуральное число n, что $G^{(n,R)} = e$.

По индукции относительно n легко показать, что обычный n-й коммутант $G^{(n)}$ содержится в $G^{(n,R)}$. Следовательно, n-ступенно разрешимая группа из категории $\mathfrak{M}_R$ является n-ступенно разрешимой в категории групп.

Приведем определение нижнего центрального ряда в категории степенных MR-групп. Первый член этого ряда — R-коммутант группы G, который обозначим $G_{(1,R)}$. Предположим, что n-й член нижнего центрального ряда $G_{(R,R)}$ уже определен. Тогда $G_{(R+1,R)} = \mathrm{id}([G, G_{(R,R)}])$, т.е. $G_{(R+1,R)}$ — $\mathfrak{M}_R$-идеал, порожденный обратным коммутантом G и $G_{(R,R)}$. Возникает нижний центральный ряд

$$G = G_{(0,R)} \geqslant G_{(1,R)} \geqslant \cdots \geqslant G_{(R,R)} \geqslant \cdots . \tag{2}$$

Определение 10. Нижняя MR-группа называется *нижней R-нильпотентной*, если существует такое натуральное число n, что $G_{(R,R)} = e$. Наименьшее число n с таким свойством называется *ступенью R-нильпотентности*.

Поскольку обычный член нижнего центрального ряда $G_{(R)}$ содержится в $G_{(R,R)}$, n-ступенно нижняя нильпотентная группа из категории $\mathfrak{M}_R$ является нильпотентной группой ступени $\leqslant n$ в категории групп. Из определения рядов (1), (2) и определения вербальной MR-подгруппы непосредственно следует, что для любого натурального числа n и кольца R группы $G^{(n,R)}$ и $G_{(n,R)}$ являются вербальными MR-подгруппами. Следовательно, возникают следующие вопросы.

Вопрос 1. Верно ли, что $G^{(n,R)} = \operatorname{id} G^{(n)}$, $G_{(n,R)} = \operatorname{id} G_{(n)}$, где $G^{(n)}$ — n-й член обычного ряда коммутантов и $G_{(n)}$ — n-й член нижнего центрального ряда?

Этот вопрос можно переформулировать следующим образом:

(a) порождается ли вербальная подгруппа $G^{(n,R)}$ словом $v_n = [v_{n-1}(\overline{x}, v_{n-1}(\overline{y})]$, где $v_1 = [x,y]$?

(b) порождается ли вербальная подгруппа коммутатором $[x_1, \ldots, x_n]$?

Вопрос 2.

(a) Будет ли n-ступенно нильпотентная MR-группа n-ступенно нижней R-нильпотентной группой?

(b) Будет ли n-ступенно разрешимая MR-группа n-ступенно R-разрешимой?

Ряды (1), (2) можно продолжить вплоть до любого порядкового числа α. Если α не является предельным порядковым числом, то $G^{(\alpha,R)}$ получается из $G^{(\alpha-1,R)}$, в то время как $G_{(\alpha,R)}$ получается из $G(\alpha-1,R)$, как описано выше. Если α — предельное порядковое число, то

$$G^{(\alpha,R)} = \bigcap_{\beta<\alpha} G^{(\beta,R)}, \quad G_{(\alpha,R)} = \bigcap_{\beta<\alpha} G_{(\alpha,R)}.$$

Вопрос 3. Пусть $F = F_R(X)$ — свободная MR-группа с базой X. В самом ли деле для любого кольца R существуют порядковые числа α и β, зависящие от R и такие, что $F^{(\alpha,R)} = e$ и $F_{(\alpha,R)} = e$?

Обозначим через $\underline{\mathfrak{N}}_{n,R}$ класс нижних R-нильпотентных групп ступени n. Кроме того, введем другие определения нильпотентности в категории ступенчатых MR-групп. Для этого, по индукции относительно n, определим понятие простого $\overline{\alpha}$-коммутатора веса n, где $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Если $n = 2$, то $\overline{\alpha} = (\alpha)$ — это определенный выше α-коммутатор $(g_1, g_2)_\alpha$ элементов g_1, g_2 из G. Предположим, что для $n \geqslant 2$ простые $\overline{\alpha}$-коммутаторы веса n уже определены. Тогда простой $(\overline{\alpha}, \alpha_n)$-коммутатор является элементом $(x, g_n)_{\alpha_n}$, где x — простой $\overline{\alpha}$-коммутатор.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — множество букв. Обозначим через W_n множество

$$W_n = \Big\{ \big(\cdots ((x_1, x_2)_{\alpha_1}, x_3)_{\alpha_2}, \ \ldots, \ x_{n+1})_{\alpha_n} : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R \Big\}$$

всех простых $\overline{\alpha}$-коммутаторов веса $n+1$ букв $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим через $\mathfrak{N}_{n,R}$ многообразие групп, определенное множеством R-слов W_n. Группы из этого многообразия называются *R-нильпотентными* MR-группами ступени нильпотентности n.

Обозначим через $\overline{\mathfrak{N}}_{n,R}$ многообразие R-групп, определенных словом

$$v_n = \big[\cdots [[x_1, x_2], x_3], \ldots, x_{n+1} \big].$$

Группы из этого многообразия называются *верхними нильпотентными* группами ступени n. Соответствующая вербальная MR-подгруппа обозначается $\overline{\mathfrak{N}}_{n,R}$. Очевидно, выполняются включения $\underline{\mathfrak{N}}_{n,R} \subseteq \mathfrak{N}_{n,R} \subseteq \overline{\mathfrak{N}}_{n,R}$. Проясним природу этих включений для малых значений n.

Теорема 1. *При $n = 1, 2$ все три определения нильпотентности совпадают.*

Доказательство. Пусть $n = 1$. Поскольку по предположению R-коммутант $G_{(1,R)}$ группы G является вербальной MR-подгруппой, порожденной коммутатором $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$, мы имеем $G_{(1,R)} = \gamma_{1,R}(G) = \overline{\gamma}_{1,R}(G)$. Следовательно, все три определения степенных MR-групп, являющихся абелевыми, совпадают.

Пусть $n = 2$. Докажем, что $\gamma_{2,R}(G) = \overline{\gamma}_{2,R}(G)$. Достаточно доказать это равенство только для групп из многообразия $\overline{\mathfrak{N}}_{2,R}$, т.е. для групп, являющихся двуступенно нильпотентными в категории групп. Пусть $G \in \overline{\mathfrak{N}}_{2,R}$. Из соотношений для коммутаторов получаем $[x^\alpha, y] = [x,y]^\alpha$ для любой группы из этого класса и любого $\alpha \in R$. Чтобы доказать равенство $\gamma_{2,R}(G) = \overline{\gamma}_{2,R}(G)$, достаточно показать, что $\gamma_{2,R}(G) = e$. Иначе говоря, любой простой $\overline{\alpha}$-коммутатор веса 3 совпадает с e. Чтобы доказать последнее утверждение, достаточно проверить, что любой $\overline{\alpha}$-коммутатор вида $(x_1, x_2)_\alpha$ принадлежит центру $Z(G)$ группы G. В самом деле,

$$[(x_1,x_2)_\alpha, y] = \left[x_2^{-\alpha}x_1^{-\alpha}(x_1x_2)^\alpha, y\right] = [x_2^{-\alpha}, y]\,[x_1^{-\alpha}, y]\,[(x_1x_2)^\alpha, y] = \\ = [x_2,y]^{-\alpha}[x_1,y]^{-\alpha}[x_1x_2,y]^\alpha = [x_2,y]^{-\alpha}[x_1,y]^{-\alpha}[x_1,y]^\alpha[x_2,y]^\alpha = e.$$

Проверка того факта, что $G_{(2,R)} = \gamma_{2,R}(G)$, очень проста, поскольку $G_{(2,R)} = \mathrm{id}\ ([G_{(1,R)}, G] = G_{(2,R)})$ и $G_{(1,R)}$ как MR-подгруппа порожден α-коммутаторами, принадлежащими центру G. $\square$

В [6] установлено, что тензорные пополнения абелевых групп являются абелевыми группами. В общем случае тензорное пополнение в категории всех степенных MR-групп строится с помощью свободных структур и, следовательно, в некоммутативном случае оно содержит свободные подгруппы. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если $G \in \mathfrak{N}_{2,R}$, то ее тензорное пополнение $G^S \in \mathfrak{N}_{2,S}$.*

Доказательство. Предварительно докажем, что в любой степенной R-группе G для любых $g, f \in G$ и $\alpha, \beta \in R$ выполнено следующее тождество для α-коммутаторов:

$$[g^\alpha, f] = [g,f]^\alpha \big(g, [g,f]\big)_\alpha. \tag{3}$$

В самом деле, аксиома (3) из определения MR-группы утверждает, что $(f^{-1}gf)^\alpha = f^{-1}g^\alpha f$ для всех $f, g \in G$ и $\alpha \in R$. Перепишем это равенство, принимая во внимание, что

$$f^{-1}gf = g^\alpha g^{-\alpha} f^{-1} g^\alpha f = g^\alpha [g^\alpha, f],$$
$$(f^{-1}gf)^\alpha = (gg^{-1}f^{-1}gf)^\alpha = \big(g, [g,f]\big)^\alpha = g^\alpha [g,f]^\alpha \big(g,[g,f]\big)_\alpha.$$

Сокращая g^α, получим требуемый результат.

Докажем теорему. Обозначим R-центр группы G через $\boldsymbol{Z}$. Поскольку ступень нильпотентности G равна 2, R-коммутант $\gamma_1(G) \subseteq \boldsymbol{Z}$. Непосредственная проверка показывает, что $\boldsymbol{Z}^S$ — центральная подгруппа группы G^S. Покажем, что $\gamma_1(G^S) \subseteq \boldsymbol{Z}^S$. Поскольку $\gamma_1(G^S)$ порождается α-коммутаторами, для этого достаточно доказать, что любой α-коммутатор содержится в $\boldsymbol{Z}^S$. Поскольку G^S порождается $\langle \lambda(G) \rangle_S$ и обычный коммутант лежит в центре, с помощью соотношений для коммутаторов (см. [11, с. 171]) легко проверить, что обычный коммутант находится в центре. Более того, тождество (3) показывает, что в этом случае $[x^\alpha, y] = [x,y]^\alpha$. Проверим, что α-коммутатор $(x,y)_\alpha$ лежит в центре G^S:

$$[(x,y)_\alpha, z] = \left[y^{-\alpha}x^{-\alpha}(xy)^\alpha, z\right] = [y^{-\alpha}, z]\,[x^{-\alpha}, z]\,[(xy)^\alpha, z] = \\ = [y,z]^{-\alpha}[x,z]^{-\alpha}[xy,z]^\alpha = [y,z]^{-\alpha}[x,z]^{-\alpha}[x,z]^\alpha[y,z]^\alpha = e. \quad \square$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амаглобели М. Г.* Функтор тензорного пополнения в категориях степенных MR-групп// Алгебра и логика. — 2018. — *57*, № 2. — С. 137–148.
2. *Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н.* Свободные нильпотентные R-группы класса 2// Докл. РАН. — 2012. — *443*, № 4. — С. 410–413.
3. *Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н.* Расширение централизатора в нильпотентных группах// Сиб. мат. ж. — 2013. — *54*, № 1. — С. 8–19.
4. *Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н.* Основы теории многообразий нильпотентных MR-групп// Сиб. мат. ж. — 2016. — *57*, № 6. — С. 1197–1207.
5. *Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Формульность множества мальцевских баз и элементарные свойства конечномерных алгебр, II// Сиб. мат. ж. — 1983. — *24*, № 2. — С. 97–113.
6. *Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Степенные группы. I: основы теории и тензорные пополнения// Сиб. мат. ж. — 1994. — *35*, № 5. — С. 1106–1118.
7. *Amaglobeli M. G.* On the permutability of a functor of tensor completion with principal group operations// Appl. Math. Inform. Mech. — 2010. — *15*, № 1. — P. 3–10.

8. *Amaglobeli M. G. and Remeslennikov V. N.* Algorithmic problems for class-2 nilpotents MR-groups// Georgian Math. J. — 2015. — *22*, № 4. — P. 441–449.
9. *Baumslag G.* Free abelian X-groups// Illinois J. Math. — 1986. — *30*, № 2. — P. 235–245.
10. *Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V.* Discriminating completions of hyperbolic groups// Geom. Dedicata. — 2002. — *92*. — P. 115–143.
11. *Hall M., Jr.* The Theory of Groups. — New York: Chelsea Publ., 1976.
12. *Hall P.* The Edmonton Notes on Nilpotent Groups. — London: Queen Mary College, 1969.
13. *Lyndon R. C.* Groups with parametric exponents// Trans. Am. Math. Soc. — 1960. — *96*. — P. 518–533.
14. *Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N.* Exponential groups. II. Extensions of centralizers and tensor completion of CSA-groups// Int. J. Algebra Comput. — 1996. — *6*, № 6. — P. 687–711.
15. *Neumann H.* Varieties of Groups. — New York: Springer-Verlag, 1967.

Амаглобели М.
Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия
E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge

Бокелавадзе Т.
Кутаисский государственный университет им. А. Церетели, Кутаиси, Грузия
E-mail: tengiz.bokelavadze@atsu.edu.ge

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 10–23
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-10-23

УДК 512.554.3

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ И ПЛОСКИЕ ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОДАЛГЕБРЫ В НИЛЬПОТЕНТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ ЛИ

© 2020 г. **А. АЛЬ-АБАЙЕХИ, А. ФИГУЛА**

Аннотация. Определены геодезические и плоские вполне геодезические подалгебры в нильпотентных метрических алгебрах высшей ступени размерности 5. Установлено, что в неравномерных метрических алгебрах Ли с одномерным центром геодезические векторы и плоские вполне геодезические подалгебры не зависят от выбора скалярного произведения.

Ключевые слова: нильпотентная метрическая алгебра Ли, геодезический вектор, нефилиформная метрическая алгебра Ли, плоская вполне геодезическая подалгебра, скалярное произведение.

GEODESIC VECTORS AND FLAT TOTALLY GEODESIC SUBALGEBRAS IN NILPOTENT METRIC LIE ALGEBRAS

© 2020 **A. AL-ABAYECHI, Á. FIGULA**

Abstract. We determine geodesics and flat totally geodesic subalgebras in higher-step nilpotent metric Lie algebras of dimension 5. It is surprising that in nonfiliform metric Lie algebras with one-dimensional center, the geodesic vectors and flat totally geodesic subalgebras are independent of the choice of the inner product.

Keywords and phrases: nilpotent metric Lie algebra, geodesic vector, nonfiliform metric Lie algebras, flat totally geodesic subalgebras, inner product.

AMS Subject Classification: 17B60

1. Введение. Риманову геометрию групп Ли можно успешно изучать, работая с их алгебрами Ли (см. [8]). Геометрия нильмногообразий второй ступени N разработана понята П. Эберлейном; в частности, в [3] он получил простые и полезные критерии, являющиеся необходимыми и достаточными для того, чтобы подалгебра алгебры Ли для N была вполне геодезической. Геометрия нильмногообразий высших ступеней также имеет замечательные свойства. В частности, для филиформных нильпотентных групп Ли они описаны М. М. Керром и Т. Л. Пейном (см. [6]). Дж. Кейрнс, А. Хинич Галич и Ю. Николаевский привели несколько результатов о возможной размерности вполне геодезических подалгебр нильпотентных метрических алгебр Ли (см. [1]); для $\mathbb{N}$-градуированных филиформных алгебр Ли они определили максимальную размерность этих подалгебр и показали, что эта оценка достигается (см. [2]).

Конкретная классификация геодезических векторов и плоских вполне геодезических подалгебр в нильпотентных метрических алгебрах Ли $\mathbf{n}$ дана П. Т. Надем и З. Гомолией в [9] для случая,

Работа выполнена при поддержке проекта EFOP-3.6.1-16-2016-00022, софинансируемого Европейским Союзом и Европейским Социальным Фондом.

когда $\mathbf{n}$ является двуступенно нильпотентной и имеет размерность $\leqslant 6$. При проведении этой классификации весьма полезным оказался тот факт, что линейная структура геодезических векторов и плоских вполне геодезических подалгебр двуступенно нильпотентных метрических алгебр Ли зависит только от класса изоморфизма алгебры Ли. Это выдающийся результат, поскольку в общем случае свойство подалгебр быть вполне геодезическими очень чувствительно к изменению скалярного произведения метрической алгебры Ли (см. [1]). В [4] были найдены классы эквивалентности изометрически изоморфных филиформных метрических алгебр Ли, а также классы эквивалентности изометрически изоморфных пятимерных метрических алгебр Ли, имеющих класс нильпотентности >2. Оказалось, что существует взаимно однозначное соответствие между этими классами эквивалентности и семейством метрических алгебр Ли на евклидовом векторном пространстве $\mathbb{E}^n$ с выделенным ортонормированным базисом, зависящим от вещественных параметров, определяемых структурой коэффициентов алгебры Ли. С помощью этого мы вводим геодезические векторы и плоские вполне геодезические подалгебры в нильпотентных метрических алгебрах Ли высокой ступени размерности $\leqslant 5$, получив их зависимости от вещественных параметров, описывающих различные классы изометрически изоморфных метрических алгебр Ли.

В разделе 2 собраны некоторые основные определения и результаты о геодезических векторах и плоских вполне геодезических подалгебрах в нильпотентных метрических алгебрах Ли. Раздел 3 посвящен трехступенно нильпотентным филиформным метрическим алгебрам Ли, а в разделе 4 изучаются филиформные метрические алгебры Ли. Показано, что все эти метрические алгебры Ли имеют двумерную плоскую вполне геодезическую подалгебру, но только пятимерные стандартные филиформные метрические алгебры Ли имеют трехмерную плоскую вполне геодезическую подалгебру. Наиболее удивительным является то, что в нефилиформных метрических алгебрах Ли с одномерным центром геодезические векторы и плоские вполне геодезические подалгебры не зависят от параметров, характеризующих различные классы изометрически изоморфных метрических алгебр Ли (см. теорему 3.1). Кроме того, в нильмногообразиях, имеющих группы изометрии большей размерности как нильмногообразия, плоские вполне геодезические подгруппы имеют один и тот же вид для произвольного скалярного произведения (см. теорему 3.2(3)).

2. Предварительные сведения.

Обозначим *нижний центральный ряд* алгебры Ли $\mathfrak{n}$ символами $\mathcal{C}^0\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ и $\mathcal{C}^{j+1}\mathfrak{n} = [\mathfrak{n}, \mathcal{C}^j\mathfrak{n}]$, $j \in \mathbb{N}$. Алгебра Ли $\mathfrak{n}$ называется *k-ступенно нильпотентной*, если $\mathcal{C}^k\mathfrak{n} = \{0\}$, но $\mathcal{C}^{k-1}\mathfrak{n} \neq \{0\}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$; n-мерная алгебра Ли $\mathfrak{n}$ называется *филиформной*, если она $(n-1)$-ступенно нильпотентна. Филиформная алгебра Ли $\mathfrak{n}$ называется *стандартно филиформной*, если она обладает таким базисом $\{F_1, \dots, F_n\}$, что нетривиальные скобки Ли имеют вид

$$[F_1, F_i] = F_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Изучаются *нильпотентные алгебры Ли размерности* $\leqslant 5$ класса нильпотентности >2, не являющиеся прямыми суммами алгебр Ли более низких размерностей. С точностью до изоморфизма эти неразложимые алгебры Ли заданы следующими нетривиальными коммутаторами в базисе $\{F_1, F_2, \dots\}$ (см. [5, с. 646-647]):

$$\begin{array}{ll}
& \text{Трехступенно нильпотентные алгебры Ли:} \\
\mathfrak{l}_{4,3}: & [F_1, F_2] = F_3, \quad [F_1, F_3] = F_4; \\
\mathfrak{l}_{5,5}: & [F_1, F_2] = F_4, \quad [F_1, F_4] = F_5, \quad [F_2, F_3] = F_5; \\
\mathfrak{l}_{5,9}: & [F_1, F_2] = F_3, \quad [F_1, F_3] = F_4, \quad [F_2, F_3] = F_5, \\
& \text{Четырехступенно нильпотентные алгебры Ли:} \\
\mathfrak{l}_{5,6}: & [F_1, F_2] = F_3, \quad [F_1, F_3] = F_4, \quad [F_1, F_4] = F_5, \quad [F_2, F_3] = F_5; \\
\mathfrak{l}_{5,7}: & [F_1, F_2] = F_3, \quad [F_1, F_3] = F_4, \quad [F_1, F_4] = F_5.
\end{array} \tag{2.1}$$

Говорят, что d-мерная нильпотентная алгебра Ли $\mathbf{n}$ является $\mathbb{N}$-градуированной, если ее можно разложить в прямую сумму одномерных подпространств

$$\mathbf{n} = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i, \quad [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N},$$

где предполагается, что $V_i = 0$ при $i > d$. Говорят, что $\mathbf{n}$ имеет адаптированный базис $\mathcal{B} = \{X_1, \dots X_d\}$ относительно градуировки, если любой вектор этого базиса X_k лежит в некотором V_i. Алгебры Ли, перечисленные в (2.1), кроме трехступенно нильпотентной нефилиформной алгебры Ли $\mathfrak{l}_{5,5}$ с одномерным центром, являются $\mathbb{N}$-градуированно нильпотентными алгебрами Ли с адаптированным базисом $\{F_1, F_2, \dots\}$.

Метрическая алгебра Ли $(\mathbf{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — это алгебра Ли $\mathbf{g}$, наделенная евклидовым скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathbf{g}$. Скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathbf{g}$ естественным образом индуцирует левоинвариантную риманову метрику на связной односвязной группе Ли G. Связная подгруппа Ли H нильпотентной группы Ли G с левоинвариантной римановой метрикой (нильмногообразие) играет важную роль в левых смежных классах H, определяя вполне геодезическое расслоение на G. Подгруппа H является вполне геодезическим римановым подмногообразием G, и соответствующая подалгебра $\mathbf{h}$ алгебры $\mathbf{g}$ называется *вполне геодезической подалгеброй* $\mathbf{g}$. Подалгебра $\mathbf{h}$ алгебры $\mathbf{g}$ называется *плоской*, если соответствующая подгруппа Ли является плоской как риманово подмногообразие G. Ненулевой вектор $X \in \mathbf{g}$ называется геодезическим, если порожденная подалгебра $\{tX;\ t \in \mathbb{R}\}$ является вполне геодезической. В [1, лемма 1.2, замечание 1.4] приведена следующая чисто алгебраическая формулировка условия вполне геодезической подалгебры.

Лемма 2.1. *Подалгебра $\mathbf{h}$ метрической алгебры Ли $(\mathbf{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ является вполне геодезической тогда и только тогда, когда соотношение*

$$\big\langle [X,Y], Z \big\rangle + \big\langle [X,Z], Y \big\rangle = 0$$

выполняется для всех $Y, Z \in \mathbf{h}$ и для всех X из ортогонального дополнения $\mathbf{h}$ в $\mathbf{g}$. Ненулевой вектор $Y \in \mathbf{g}$ является геодезическим в точности тогда, когда $\langle [X,Y], Y\rangle = 0$ для всех $X \in \mathbf{g}$.

Следующие результаты доказаны в [9, леммы 1, 2]; и они будут использованы ниже для определения плоских вполне геодезических подалгебр.

Лемма 2.2. *Подалгебра $\mathbf{h}$ нильпотентеной метрической алгебры Ли $(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ является плоской тогда и только тогда, когда она абелева. Подалгебра $\mathbf{h}$ в $(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ является плоской вполне геодезической в точности тогда, когда каждый ненулевой элемент $\mathbf{h}$ является геодезическим.*

Пусть $(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — k-ступенно нильпотентная метрическая неразложимая алгебра Ли. Тогда центр $\mathfrak{z}$ является собственной подалгеброй идеала $\mathcal{C}^{k-2}\mathfrak{n}$. Пусть $\mathfrak{a}_{k-1}$ — ортогональное дополнение центра $\mathfrak{z}$ в $\mathcal{C}^{k-2}\mathfrak{n}$, т.е.

$$\mathcal{C}^{k-2}\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_{k-1} \oplus \mathfrak{z}, \quad \mathcal{C}^{k-1}\mathfrak{n} = \big[\mathcal{C}^{k-2}\mathfrak{n},\ \mathfrak{n}\big] = \big[\mathfrak{a}_{k-1}, \mathfrak{n}\big] \subseteq \mathfrak{z}.$$

Обозначим через $\mathfrak{a}_j$ ортогональное дополнение $\mathcal{C}^j\mathfrak{n}$ в $\mathcal{C}^{j-1}\mathfrak{n}$, $j = 1, 2, \dots, k-2$, т.е.

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{j=1}^{k-1} \mathfrak{a}_j \oplus \mathfrak{z}.$$

Имеем $[\mathfrak{a}_j, \mathfrak{n}] \subseteq \mathcal{C}^j\mathfrak{n}$ и при $i < j$ имеем $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] \subseteq \mathcal{C}^j\mathfrak{n}$.

Предложение 2.3. *Ненулевой вектор*

$$Y = \sum_{j=1}^{k-1} A_j + Z \in \bigoplus_{j=1}^{k-1} \mathfrak{a}_j \oplus \mathfrak{z}$$

в k-ступенно нильпотентной метрической неразложимой алгебре Ли $\mathfrak{n}$ является геодезическим тогда и только тогда, когда

$$\left\langle \left[X, \sum_{j=1}^{k-1} A_j\right], \ \sum_{j=2}^{k-1} A_j + Z \right\rangle = 0$$

для всех $X \in \mathfrak{n}$.

Доказательство. Вектор

$$Y = \sum_{j=1}^{k-1} A_j + Z, \quad A_j \in \mathfrak{a}_j, \quad Z \in \mathfrak{z}$$

является геодезическим тогда и только тогда, когда

$$\left\langle \left[X, \sum_{j=1}^{k-1} A_j + Z\right], \ \sum_{j=1}^{k-1} A_j + Z \right\rangle = \left\langle \left[X, \ \sum_{j=1}^{k-1} A_j\right], \ \sum_{j=1}^{k-1} A_j + Z \right\rangle = \left\langle \left[X, \ \sum_{j=1}^{k-1} A_j\right], \ \sum_{j=2}^{k-1} A_j + Z \right\rangle,$$

поскольку $Z \in \mathfrak{z}$,

$$\left[X, \ \sum_{j=1}^{k-1} A_j\right] \in \mathcal{C}^1\mathfrak{n}$$

и $A_1 \in (\mathcal{C}^1\mathfrak{n})^\perp$. Это доказывает утверждение. □

Следствие 2.4.

(a) *Векторы из $\bigcup_{j=1}^{k-1} \mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{z}$ являются геодезическими векторами k-ступенно нильпотентной метрической алгебры Ли $(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.*

(b) *Любая подалгебра k-ступенно нильпотентной метрической алгебры Ли $\mathfrak{n}$, содержащаяся в $\bigcup_{j=1}^{k-1} \mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{z}$, является плоской вполне геодезической.*

Доказательство. Утверждение (a) следует из условия, что ненулевой вектор $Y \in \mathbf{n}$ является геодезическим (см. лемму 2.1). Условие (b) следует из условия (a) и второго условия леммы 2.2. □

Предложение 2.5.

(a) *Не существует геодезического вектора вида $Y = A_{k+1} + Z$, $0 \neq A_{k+1} \in \mathfrak{a}_{k-1}$, $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ad}_{A_{k-1}}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{z}$ для всех $0 \neq A_{k+1} \in \mathfrak{a}_{k-1}$.*

(b) *Не существует геодезического вектора вида $Y = A_j + Z$, $0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j$, $j = 1, \ldots, k-2$, $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{z} \subset \mathrm{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})$ для всех $0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j$, $j = 1, \ldots, k-2$.*

(c) *Не существует геодезического вектора вида $Y = A_j + A_{j+1}$, $0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j$, $j = 1, \ldots, k-2$, $0 \neq A_{j+1} \in \mathfrak{a}_{j+1}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})\big|_{\mathfrak{a}_{j+1}} = \mathfrak{a}_{j+1}$ для всех $0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j$, $j = 1, \ldots, k-2$.*

(d) *Вектор $Y = A_1 + A_2 + Z$, $0 \neq A_1 \in \mathfrak{a}_1$, $0 \neq A_2 \in \mathfrak{a}_2$, $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$ является геодезическим в трехступенно нильпотентной метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}$ тогда и только тогда, когда*

$$\big\langle [X, A_1]\big|_{\mathfrak{a}_2}, A_2 \big\rangle + \big\langle [X, A_1 + A_2]_{\mathfrak{z}}, Z \big\rangle = 0 \quad X \in \mathfrak{n}.$$

Доказательство. Если $Y = A_{k-1} + Z$ — геодезический вектор с ненулевыми компонентами $A_{k-1} \in \mathfrak{a}_{k-1}$, $Z \in \mathfrak{z}$, то для всех $X \in \mathfrak{n}$ имеем:

$$\big\langle [X, A_{k-1} + Z], A_{k-1} + Z \big\rangle = \big\langle [X, A_{k-1}], Z \big\rangle = 0,$$

так как $[X, A_{k-1}] \in \mathfrak{z}$. Следовательно, $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$ ортогонален к $\mathrm{ad}_{A_{k-1}}(\mathfrak{n})$. Отсюда следует, что $\mathrm{ad}_{A_{k-1}}(\mathfrak{n}) \neq \mathfrak{z}$. Наоборот, если $\mathrm{ad}_{A_{k-1}}(\mathfrak{n}) \neq \mathfrak{z}$, причем $0 \neq A_{k-1} \in \mathfrak{a}_{k-1}$, то существует $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$, ортогональный к $\mathrm{ad}_{A_{k-1}}(\mathfrak{n})$. В этом случае вектор $A_{k-1}+Z$, $0 \neq A_{k-1} \in \mathfrak{a}_{k-1}$, $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$, удовлетворяет условию

$$\big\langle [X, A_{k-1}], Z \big\rangle = \big\langle [X, A_{k-1}+Z], A_{k-1}+Z \big\rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{n}.$$

Поэтому $A_{k-1}+Z$ — геодезический вектор. Это доказывает утверждение (a).

Пусть $Y = A_j + Z$ — геодезический вектор с ненулевыми компонентами $A_j \in \mathfrak{a}_j$, $Z \in \mathfrak{z}$. Тогда для всех $X \in \mathfrak{n}$ имеем

$$\big\langle [X, A_j+Z], A_j+Z \big\rangle = \big\langle [X, A_j], Z \big\rangle = 0,$$

так как $[X, A_j]$ ортогонален к $A_j \in \mathfrak{a}_j$. Поэтому $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$ ортогонален к $\mathrm{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})$. В этом случае $\mathfrak{z}$ не содержится в $\mathrm{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})$. Наоборот, если $\mathfrak{z}$ не содержится в $\mathrm{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})$, то существует вектор $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$, ортогональный к $\mathrm{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})$. В этом случае вектор $A_j + Z$, $0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j$, $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$, удовлетворяет условию

$$\langle [X, A_j], Z \rangle = \langle [X, A_j+Z], A_j+Z \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{n}.$$

Следовательно, вектор $A_j + Z$ геодезический. Отсюда следует утверждение (b).

Если $Y = A_j + A_{j+1}$ — геодезический вектор с ненулевыми компонентами $A_j \in \mathfrak{a}_j$, $A_{j+1} \in \mathfrak{a}_{j+1}$, $j = 1, \ldots, k-2$, то для всех $X \in \mathfrak{n}$ имеем

$$\big\langle [X, A_j + A_{j+1}], A_j + A_{j+1} \big\rangle = \big\langle [X, A_j + A_{j+1}]|_{\mathfrak{a}_{j+1}}, A_{j+1} \big\rangle = \big\langle [X, A_j]|_{\mathfrak{a}_{j+1}}, A_{j+1} \big\rangle = 0,$$

так как $[X, A_{j+1}] \in \mathcal{C}^{j+1}\mathfrak{n}$ и

$$[X, A_j] = [X, A_j]\big|_{\mathfrak{a}_{j+1}} + [X, A_j]\big|_{\mathcal{C}^{j+1}\mathfrak{n}} \in \mathfrak{a}_{j+1} \oplus \mathcal{C}^{j+1}\mathfrak{n}.$$

Поэтому $0 \neq A_{j+1} \in \mathfrak{a}_{j+1}$ ортогонален к проекции $\mathrm{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})_{\mathfrak{a}_{j+1}}$ из $\mathrm{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})$ на подпространство $\mathfrak{a}_{j+1}$. В этом случае имеем $\mathrm{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})|_{\mathfrak{a}_{j+1}} \neq \mathfrak{a}_{j+1}$. Наоборот, если

$$\mathrm{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})\big|_{\mathfrak{a}_{j+1}} \neq \mathfrak{a}_{j+1}, \quad 0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j,$$

то существует вектор $0 \neq A_{j+1} \in \mathfrak{a}_{j+1}$, ортогональный к $\mathrm{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})|_{\mathfrak{a}_{j+1}}$. В этом случае вектор $A_j + A_{j+1}$, $0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j$, $0 \neq A_{j+1} \in \mathfrak{a}_{j+1}$, удовлетворяет условию

$$\big\langle [X, A_j]\big|_{\mathfrak{a}_{j+1}}, A_{j+1} \big\rangle = \big\langle [X, A_j + A_{j+1}], A_j + A_{j+1} \big\rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{n}.$$

Поэтому $A_j + A_{j+1}$ является геодезическим, и утверждение (c) доказано.

Вектор $Y = A_1 + A_2 + Z$ является геодезическим вектором с ненулевыми компонентами $A_1 \in \mathfrak{a}_1$, $A_2 \in \mathfrak{a}_2$, $Z \in \mathfrak{z}$ тогда и только тогда, когда для всех $X \in \mathfrak{n}$ имеем

$$\begin{aligned}\big\langle [X, A_1 + A_2], A_2 + Z \big\rangle &= \big\langle [X, A_1 + A_2]|_{\mathfrak{a}_2} + [X, A_1 + A_2]|_{\mathfrak{z}}, A_2 + Z \big\rangle = \\ &= \big\langle [X, A_1]|_{\mathfrak{a}_2}, A_2 \big\rangle + \big\langle [X, A_1 + A_2]\big|_{\mathfrak{z}}, Z \big\rangle = 0.\end{aligned}$$

Это доказывает утверждение (d). □

3. Геодезические векторы и плоские вполне геодезические подалгебры в трехступенно нильпотентных нефилиформных метрических алгебрах Ли. Если метрическая алгебра Ли $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ имеет ортонормированный базис $\{E_1, \ldots, E_n\}$, то критерий того, чтобы вектор $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i E_i$ является геодезическим, квадратичен по коэффициентам a_i. Следовательно, множество геодезических является вещественным полуалгебраическим многообразием. Сначала рассмотрим трехступенно нильпотентную алгебру Ли $\mathfrak{l}_{5,5}$, имеющую одномерный центр. Эта алгебра Ли не является $\mathbb{N}$-градуированной. Докажем, что геодезические векторы и вполне геодезические подалгебры имеют один и тот же вид в метрических алгебрах Ли $(\mathfrak{l}_{5,5}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ для произвольного скалярного произведения.

Метрическая алгебра Ли $(\mathfrak{l}_{5,5}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ изометрически изоморфна единственной метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}_{5,5}(a, b, c, d, f)$, где $a, d, f > 0$, $b, c \geqslant 0$, определенной на пятимерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^5$ с помощью неисчезающих коммутаторов

$$[E_1, E_2] = aE_4 + bE_5, \quad [E_1, E_3] = cE_5, \quad [E_1, E_4] = dE_5, \quad [E_2, E_3] = fE_5 \tag{3.1}$$

(см. [4, теорема 11(1)]).

Теорема 3.1.

(1) *Геодезические векторы из* $\mathfrak{n}_{5,5}(a,b,c,d,f)$, *не принадлежащие* $\mathfrak{a}_1\cup\mathfrak{a}_2\cup\mathfrak{z}$, *являются векторами из множества* $S=\{\gamma E_3+\varepsilon E_4;\ \gamma\varepsilon\neq 0\}$.

(2) *Двумерная подалгебра* $\mathrm{Span}(E_3,E_4)$ *является плоской вполне геодезической подалгеброй размерности* >1 *в* $\mathfrak{n}_{5,5}(a,b,c,d,f)$.

Геодезические векторы и плоские вполне геодезические подалгебры в метрических алгебрах Ли $(\mathfrak{l}_{5,5},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *не зависят от выбора скалярного произведения на* $\mathfrak{l}_{5,5}$.

Доказательство. Вектор

$$Y=A+B+Z\in\mathfrak{n}_{5,5}(a,b,c,d,f),\quad A=\alpha E_1+\beta E_2+\gamma E_3\in\mathfrak{a}_1,\quad B=\varepsilon E_4\in\mathfrak{a}_2,\quad Z=\delta E_5\in\mathfrak{z},$$

является геодезическим тогда и только тогда, когда для всех

$$X=\sum_{i=1}^{5}x_iE_i\in\mathfrak{n}_{5,5}(a,b,c,d,f),\quad x_i\in\mathbb{R},\quad i=1,\dots,5,$$

имеем

$$\Big\langle[X,A+B],B+Z\Big\rangle=0$$

(см. предложение 2.3). Это происходит в точности тогда, когда для всех $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}&\Big\langle\big[x_1E_1+x_2E_2+x_3E_3+x_4E_4,\ \alpha E_1+\beta E_2+\gamma E_3+\varepsilon E_4\big],\ \varepsilon E_4+\delta E_5\Big\rangle=\\&\quad=\Big\langle(x_1\beta-x_2\alpha)(aE_4+bE_5),\varepsilon E_4+\delta E_5\Big\rangle+\\&\qquad\qquad+\Big\langle((x_1\gamma-x_3\alpha)c+(x_1\varepsilon-x_4\alpha)d+(x_2\gamma-x_3\beta)f)E_5,\varepsilon E_4+\delta E_5\Big\rangle=\\&\qquad=(x_1\beta-x_2\alpha)(a\varepsilon+b\delta)+(x_1\gamma-x_3\alpha)c\delta+(x_1\varepsilon-x_4\alpha)d\delta+(x_2\gamma-x_3\beta)f\delta=0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Так как $a,d,f>0$, уравнение (3.2) сводится к следующей системе уравнений:

$$\alpha\delta=0=\beta\delta,\quad\delta(\gamma f-\alpha b)-\alpha a\varepsilon=0,\quad\delta(\gamma c+\varepsilon d)+\beta a\varepsilon=0.\tag{3.3}$$

Из первого уравнения в (3.3) следует, что либо $\delta=0$, либо $\alpha=0=\beta$. Если $\delta=0$, то из второго и третьего уравнений в (3.3) следует, что $a\alpha\varepsilon=0=a\beta\varepsilon$. Поскольку $a>0$, имеем $\varepsilon=0$ или $\alpha=0=\beta$. Если $\delta=0=\varepsilon$, то любой геодезический вектор принадлежит $\mathfrak{a}_1$. Если $\delta=0=\alpha=\beta$, то вектор $Y=A+B\in\mathfrak{a}_1\cup\mathfrak{a}_2$ является геодезическим тогда и только тогда, когда $A+B=\gamma E_3+\varepsilon E_4$, $\gamma\varepsilon\neq 0$.

Пусть $\alpha=0=\beta$. Так как $d>0$, $f>0$, из второго и третьего уравнений в (3.3) следует, что $\delta\gamma=0=\delta\varepsilon$. Следовательно, либо $\delta=0$, либо $\gamma=0=\varepsilon$. Случай $\delta=0$ обсуждался выше. Если $\gamma=0=\varepsilon=\alpha=\beta$, то любой геодезический вектор лежит в $\mathfrak{z}$. Это доказывает первое утверждение.

Подпространство $\mathfrak{a}_1=\langle E_1,e_2,E_3\rangle$ не имеет двумерной абелевой подалгебры. Любая абелева подалгебра нильпотентной метрической алгебры Ли $\mathfrak{n}_{5,5}(a,b,c,d,f)$ такова, что ее ненулевые элементы являются элементами множества S из предложения 3.1(1), является двумерной подалгеброй $\mathrm{Span}(E_3,E_4)$. $\square$

Теперь рассмотрим трехступенно нильпотентную алгебру Ли $\mathfrak{l}_{5,9}$, имеющую двумерный центр. Метрическая алгебра Ли $(\mathfrak{l}_{5,9},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ изометрически изоморфна единственной $\mathfrak{n}_{5,9}(l,m,n,p,q)$, где $l>0$, $q>p>0$ и $m,n\geqslant 0$, или единственной $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l,m,p)=\mathfrak{n}_{5,9}(l,m,0,p,p)$, где $l,p>0$, $m\geqslant 0$, определяется с помощью

$$[E_1,E_2]=lE_3+mE_4+nE_5,\quad[E_1,E_3]=pE_4,\ [E_2,E_3]=qE_5,\tag{3.4}$$

где $\{E_1,E_2,E_3,E_4,E_5\}$ — ортонормированный базис в евклидовом векторном пространстве $\mathbb{E}^5$ (см. [4, теорема 14(1)]). Метрические алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l,m,p)$ играют особую роль. Среди филиформных нильмногообразий и пятимерных недвуступенных нильмногообразий только нильмногообразия, соответствующие метрическим алгебрам Ли $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l,0,p)$, $l,p>0$, имеют группы изометрии большей размерности как нильмногообразие (см. [4, теорема 14(2)]). Теперь покажем, что плоские вполне геодезические подалгебры метрических алгебр Ли $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l,m,p)$ не зависят от выбора скалярного произведения.

Теорема 3.2.

(1) *Геодезические векторы в нильпотентной метрической алгебре Ли* $\mathfrak{n}_{5,9}(l,m,n,p,q)$*, не принадлежащие* $\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2 \cup \mathfrak{z}$*, являются ненулевыми векторами из следующих множеств*:

$$C_1 = \{bE_2 + cE_3 + dE_4 : \ lbc + mbd + pcd = 0\}, \tag{3.5}$$

$$C_2 = \{aE_1 + cE_3 + eE_5 : \ -lac - nae + qce = 0\}, \tag{3.6}$$

$$C_3 = \{aE_1 + bE_2 + dE_4 + eE_5 : \ adp = -beq\}; \tag{3.7}$$

в случаях $m = n = 0$ *или* $mn \neq 0$,

$$C_4 = \left\{ \frac{c}{cl + en + dm}(eqE_1 - dpE_2) + cE_3 + dE_4 + eE_5, \ cde \neq 0 \right\}. \tag{3.8}$$

Геодезические векторы в нильпотентной метрической алгебре Ли $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l,m,p)$*, не принадлежащие* $\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2 \cup \mathfrak{z}$*, составляют те же самые множества* C_1, C_2, C_3, C_4*, где* $p = q$, $n = 0$.

(2) *Плоские вполне геодезические подалгебры размерности* >1 *в метрической алгебре Ли* $\mathfrak{n}_{5,9}(l,m,n,p,q)$ *имеют размерность* 2*. Это следующие подалгебры*: $\mathrm{Span}(E_1, E_5)$ *в случае* $n = 0$; $\mathrm{Span}(E_2, E_4)$ *в случае* $m = 0$; $\mathrm{Span}\left(E_2 + \dfrac{qs}{p}E_1, E_5 - \dfrac{1}{s}E_4\right)$*, где* $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *в случае* $m = n = 0$ *и* $s = m/n$ *в случае* $mn \neq 0$*, и центр* $\mathfrak{z} = \mathrm{Span}(E_4, E_5)$.

(3) *Плоские вполне геодезические подалгебры размерности* >1 *в метрических алгебрах Ли* $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l,m,p)$ *не зависят от параметров* l, m, p *классов эквивалентности с точностью до изоморфизмов. Эти подалгебры следующие*: $\mathrm{Span}(E_2, E_4)$ *и* $\mathrm{Span}\left(E_2 + sE_1, E_5 - \dfrac{1}{s}E_4\right)$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, в случае* $m = 0$, $\mathrm{Span}(E_1, E_5)$ *и центр* $\mathfrak{z} = \mathrm{Span}(E_4, E_5)$.

Доказательство. Вектор $Y = A + B + Z$, где $A = aE_1 + bE_2 \in \mathfrak{a}_1$, $B = cE_3 \in \mathfrak{a}_2$, $Z = dE_4 + eE_5 \in \mathfrak{z}$, является геодезическим в метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}_{5,9}(l,m,n,p,q)$ тогда и только тогда, когда для всех

$$X = \sum_{i=1}^{5} x_i E_i \in \mathfrak{n}_{5,9}(l,m,n,p,q), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 5,$$

имеем

$$\langle [X, A + B], B + Z \rangle = 0$$

(см. предложение 2.3) или, эквивалентно, для всех $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ выполняется уравнение

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \big[x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3, aE_1 + bE_2 + cE_3\big], \ cE_3 + dE_4 + eE_5 \Big\rangle = \\
&\quad = \Big\langle (x_1b - x_2a)(lE_3 + mE_4 + nE_5), \ cE_3 + dE_4 + eE_5 \Big\rangle + \\
&\qquad + \Big\langle (x_1c - x_3a)pE_4 + (x_2c - x_3b)qE_5, \ cE_3 + dE_4 + eE_5 \Big\rangle = \\
&\qquad = (x_1b - x_2a)(lc + md + ne) + (x_2c - x_3b)qe + (x_1c - x_3a)pd = 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Из уравнения (3.9) вытекает система уравнений

$$cdp + b(lc + dm + en) = 0, \tag{3.10}$$

$$ceq - a(lc + dm + en) = 0, \tag{3.11}$$

$$adp + beq = 0. \tag{3.12}$$

Так как $q > p > 0$, из (3.12) получим $be = -adp/q$ и поэтому из $ad = 0$ следует, что $be = 0$. Подставляя выражение be в (3.10) и принимая во внимание (3.11), получим следующую систему уравнений:

$$bcl + bdm + cdp - \frac{adpn}{q} = 0, \quad -acl - adm - aen + ceq = 0. \tag{3.13}$$

Если $a = b = 0$, то из (3.13) следует $cd = ce = 0$, и геодезический вектор Y принадлежит $\mathfrak{a}_2$ или $\mathfrak{z}$. Если $d = e = 0$, то получим $ac = bc = 0$, так как $l > 0$ и геодезический вектор Y принадлежит $\mathfrak{a}_1$ или $\mathfrak{a}_2$. Предположим, что $a = e = 0$. В этом случае геодезические векторы в $\mathfrak{n}_{5,9}(l,m,n,p,q)$ и в $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l,m,p)$ — это ненулевые векторы конуса $C_1 = \{bE_2 + cE_3 + dE_4 : lbc + mbd + pcd = 0\}$. Кроме того, в $\mathfrak{n}_{5,9}(l,0,n,p,q)$ и в $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l,0,p)$ имеется двумерная плоская вполне геодезическая подалгебра $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}(E_2, E_4)$. Аналогично, если $b = d = 0$, то геодезические векторы в $\mathfrak{n}_{5,9}(l,m,n,p,q)$ — это ненулевые векторы конуса $C_2 = \{aE_1 + cE_3 + eE_5 : -lac - nae + qce = 0\}$. При $b = d = 0$ геодезические векторы в $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l,m,p)$ — это такие ненулевые векторы из C_2, что $n = 0$, $q = p$. Более того, в $\mathfrak{n}_{5,9}(l,m,0,p,q)$ и в $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l,m,p)$ имеется двумерная плоская вполне геодезическая подалгебра $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}(E_1, E_5)$.

Если $ad \neq 0$, то имеем $be \neq 0$. Сначала предположим, что $m = n = 0$. В этом случае уравнения (3.13) сводятся к уравнениям

$$c(lb + dp) = 0, \quad c(eq - la) = 0. \tag{3.14}$$

Если $c = 0$, то геодезические векторы в $\mathfrak{n}_{5,9}(l,0,0,p,q)$ — это ненулевые элементы множества

$$C_3 = \big\{aE_1 + bE_2 + dE_4 + eE_5 : \ adp = -beq\big\} \subseteq \mathrm{Span}(E_1, E_2, E_4, E_5). \tag{3.15}$$

Тогда не существует никакой трехмерной плоской вполне геодезической подалгебры $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{n}_{5,9}(l,0,0,p,q)$, однако существуют две двумерные плоские вполне геодезические подалгебры: $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}\left(E_2 + \dfrac{qs}{p}E_1, E_5 - \dfrac{1}{s}E_4\right)$ и $\mathfrak{z}$. Если $c \neq 0$, то из (3.14) получаем $a = eq/l$, $b = -dp/l$, и геодезические векторы из $\mathfrak{n}_{5,9}(l,0,0,p,q)$ — это векторы множества

$$\left\{\frac{eq}{l}E_1 - \frac{dp}{l}E_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 : \ c \neq 0, \ d, e \in \mathbb{R}\right\}. \tag{3.16}$$

Тогда не существует плоских вполне геодезических подалгебр $\mathfrak{h}$ размерности $\geqslant 2$ в $\mathfrak{n}_{5,9}(l,0,0,p,q)$. Для алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l,0,p)$ геодезические векторы — это ненулевые элементы множества, заданного с помощью (3.15) и (3.16) с $p = q$, а плоские вполне геодезические подалгебры — это $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}\left(E_2 + sE_1, E_5 - \dfrac{1}{s}E_4\right)$ и $\mathfrak{z}$.

Пусть $m = 0$, $n > 0$. В этом случае уравнения (3.13) принимают вид

$$c(lb + dp) - \frac{adpn}{q} = 0, \quad ceq = a(cl + en). \tag{3.17}$$

Так как $ad \neq 0$, имеем $c \neq 0$. Поскольку $be \neq 0$, имеем $ceq \neq 0$ и поэтому $cl + en \neq 0$. Из (3.17) получаем

$$a = \frac{ceq}{cl + en}, \quad b = -\frac{cdp}{cl + en}.$$

Тогда геодезические векторы из $\mathfrak{n}_{5,9}(l,0,n,p,q)$ имеют вид

$$Y = \frac{c}{cl + en}(eqE_1 - dpE_2) + cE_3 + dE_4 + eE_5, \quad cde \neq 0. \tag{3.18}$$

При $n = 0$ уравнение (3.18) дает (3.16). Если $p = q$, получим, что векторы

$$Y = \frac{cp}{cl + en}(eE_1 - dE_2) + cE_3 + dE_4 + eE_5, \quad cde \neq 0,$$

являются геодезическими в $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l,0,p)$.

Случай $n = 0$, $m > 0$ рассматривается аналогично. Получаем, что геодезические векторы в $\mathfrak{n}_{5,9}(l,m,0,p,q)$ имеют вид

$$Y = \frac{c}{cl + dm}(eqE_1 - dpE_2) + cE_3 + dE_4 + eE_5, \quad cde \neq 0. \tag{3.19}$$

При $m = 0$ из уравнения (3.19) следует (3.16). При $p = q$ получим, что векторы

$$Y = \frac{cp}{cl + dm}(eE_1 - dE_2) + cE_3 + dE_4 + eE_5, \quad cde \neq 0,$$

являются геодезическими в $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l,m,p)$.

Наконец, можем предположить, что $m,n>0$. Тогда из первого уравнения в (3.13) имеем

$$a=\frac{(bcl+cdp+bdm)q}{dpn}.$$

Так как $be=-adp/q\neq 0$, получим

$$eb=-\frac{bcl+cdp+bdm}{n}. \tag{3.20}$$

Из (3.20) имеем $b(en+dm+cl)=-cdp$. Если $en+dm+cl=0$, то получим $c=0$. Отсюда следует, что $en+dm=0$, или, эквивалентно, $e/d=-m/n$. В этом случае из (3.20) следует, что b — произвольное вещественное число и

$$a=-\frac{bqe}{pd}=\frac{bqm}{pn}.$$

Следовательно, геодезические векторы

$$Y=\frac{bqm}{np}E_1+bE_2-\frac{en}{m}E_4+eE_5,\quad b,e\in\mathbb{R},$$

из $\mathfrak{n}_{5,9}(l,m,n,p,q)$ принадлежат множеству C_3 из (3.15). Эти геодезические векторы образуют двумерную плоскую вполне геодезическую подалгебру $\mathfrak{h}=\operatorname{Span}\left(E_2+\frac{qm}{np}E_1,E_5-\frac{n}{m}E_4\right)$. Предположим, что $en+dm+cl\neq 0$. В этом случае имеем

$$b=-\frac{cdp}{en+dm+cl},\quad a=\frac{ceq}{en+dm+cl},$$

и геодезические векторы из $\mathfrak{n}_{5,9}(l,m,n,p,q)$ имеют вид

$$Y=\frac{c}{cl+en+dm}(eqE_1-dpE_2)+cE_3+dE_4+eE_5,\quad cde\neq 0. \tag{3.21}$$

Если $n=0$, то получим (3.19); если $m=0$, то получим (3.18); если $m=n=0$, то получим (3.16). Это доказывает утверждение теоремы. □

4. Геодезические векторы и плоские вполне геодезические подалгебры в филиформных нильпотентных метрических алгебрах Ли. В списке (2.1) алгебры Ли $\mathfrak{l}_{4,3}$ и $\mathfrak{l}_{5,7}$ — стандартные филиформные, в то время как $\mathfrak{l}_{5,6}$ — наименьшая нестандартная филиформная алгебра Ли.

Ж. Лоре в [7] определил с точностью до изометрии четырехмерные однородные многообразия, принадлежащие алгебре Ли $\mathfrak{l}_{4,3}$. Метрическая алгебра Ли $(\mathfrak{l}_{4,3},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ изометрически изоморфна единственной метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}_{(\kappa,\lambda,\mu)}$ с κ, λ, $\mu\in\mathbb{R}$, $\kappa,\mu>0$, $\lambda\geqslant 0$, определенной с помощью нетривиальных коммутаторов $[E_1,E_2]=\kappa E_3+\lambda E_4$, $[E_1,E_3]=\mu E_4$, где $\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ — выделенный ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$ (см. [4, замечание 2]). Дж. Кейрнс, А. Хинич Галич и Ю. Николаевский доказали, что множество геодезических векторов в $\mathfrak{n}_{(\kappa,\lambda,\mu)}$ — это множество ненулевых векторов в объединении подпространства $\mathfrak{a}_1$ и конуса $\{xE_2+yE_3+zE_4;\ \kappa xy+\lambda xz+\mu yz=0\}\subseteq\operatorname{Span}(E_2,E_3,E_4)$. Более того, если $\mathfrak{n}_{(\kappa,\lambda,\mu)}$ имеет двумерную вполне геодезическую подалгебру $\mathfrak{h}$, то $\lambda=0$, и в этом случае либо $\mathfrak{h}=\operatorname{Span}(E_2,E_4)$, либо $\mathfrak{h}=\operatorname{Span}(\kappa E_4-\mu E_2,E_3)$ (см. [1, предложение 1.12]).

Метрическая алгебра Ли $(\mathfrak{l}_{5,7},\langle\cdot,\cdot\rangle)$, соответственно, $(\mathfrak{l}_{5,6},\langle\cdot,\cdot\rangle)$, изометрически изоморфна единственной метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}(a,b,c,d,f,g,h)$, определенной с помощью

$$\begin{aligned}&[E_1,E_2]=aE_3+bE_4+cE_5, && [E_1,E_3]=dE_4+fE_5,\\ &[E_1,E_4]=gE_5, && [E_2,E_3]=hE_5,\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\{E_1,E_2,E_3,E_4,E_5\}$ — выделенный ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^5$, и для вещественных параметров a, b, c, d, f, g, h имеем $a,d,g>0$ и либо $b>0$, либо $b=0$, $f\geqslant 0$. Кроме того, имеем $h=0$ в случае $\mathfrak{l}_{5,7}$, в то время как $h>0$ в случае $\mathfrak{l}_{5,6}$ (см. [4, замечание 3, теорема 9]). Мы утверждаем, что на самом деле метрические алгебры Ли $(\mathfrak{l}_{5,7},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ и $(\mathfrak{l}_{5,6},\langle\cdot,\cdot\rangle)$

имеют одну и ту же структуру геодезических векторов и вполне геодезических подалгебр, что и метрическая алгебра Ли $(\mathfrak{l}_{4,3}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Предложение 4.1.

(1) *Множество геодезических векторов в метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}(a,b,c,d,f,g,h)$ — это множество ненулевых векторов из объединения подпространства $\mathfrak{a}_1 = \mathrm{Span}(E_1, E_2)$, конуса*

$$C = B\Big\{\alpha_2E_2 + \alpha_3E_3 + \alpha_4E_4;\ \alpha_2\alpha_3a + \alpha_2\alpha_4b + \alpha_3\alpha_4d = 0\Big\} \subseteq \mathrm{Span}(E_2, E_3, E_4)$$

и центра $\mathfrak{z} = \mathrm{Span}(E_5)$. Если $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g,h)}$ имеет двумерную вполне геодезическую подалгебру $\mathfrak{h}$, то имеем $b = 0$, и в этом случае либо $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}(E_2, E_4)$, либо $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}(E_3, dE_2 - aE_4)$.

(2) *Множество геодезических векторов в метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}(a,b,c,d,f,g)$ — это множество ненулевых векторов из объединения подпространства $\mathfrak{a}_1 = \mathrm{Span}(E_1, E_2)$ и конуса*

$$S = \Big\{\alpha_2E_2 + \alpha_3E_3 + \alpha_4E_4 + \alpha_5E_5; \alpha_2\alpha_3a + \alpha_2\alpha_4b + \alpha_3\alpha_4d + \\ + \alpha_2\alpha_5c + \alpha_3\alpha_5f + \alpha_4\alpha_5g = 0\Big\} \subseteq \mathrm{Span}(E_2, E_3, E_4, E_5).$$

Если $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ имеет трехмерную вполне геодезическую подалгебру $\mathfrak{h}$, то имеем $b = 0 = f$, $c = ag/d$, и в этом случае либо $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}(E_2, cE_3 - aE_5, E_4)$, либо $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}(gE_2 - cE_4, E_3, E_5)$. Перечислим двумерные плоские вполне геодезические алгебры для $\mathfrak{n}(a,b,c,d,f,g)$.

В $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,0,g)}$:

$$\mathfrak{h}_1 = \mathrm{Span}(E_3, E_5), \quad \mathfrak{h}_2 = \mathrm{Span}(gE_3 - dE_5, E_4), \tag{4.2}$$

$$\mathfrak{h}_3 = \mathrm{Span}\left(E_2 - \frac{cl_1}{b+gl_1}E_4 + l_1E_5, E_3 + \frac{cd-ag}{g(b+gl_1)}E_4 - \frac{d}{g}E_5\right), \quad l_1 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{g}\right\}. \tag{4.3}$$

В $\mathfrak{n}_{(a,0,c,d,f,g)}$:

$$\mathfrak{h}_4 = \mathrm{Span}\left(E_2 - \frac{a+cl_2}{d+l_2g}E_4,\ E_3 - \frac{fl_2}{d+l_2g}E_4 + l_2E_5\right), \quad l_2 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{g}\right\}, \tag{4.4}$$

В $\mathfrak{n}_{(a,0,ag/d,d,0,g)}$:

$$\mathfrak{h}_5 = \mathrm{Span}(E_2 + k_1E_4, gE_3 + gk_2E_4 - dE_5), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \tag{4.5}$$

В $\mathfrak{n}_{(a,b,0,d,f,g)}$:

$$\mathfrak{h}_6 = \mathrm{Span}\left(E_2 + \frac{fb-ag}{g(d+l_2g)}E_4 - \frac{b}{g}E_5,\ E_3 - \frac{fl_2}{d+l_2g}E_4 + l_2E_5\right), \quad l_2 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{g}\right\}, \tag{4.6}$$

В $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$:

$$\mathfrak{h}_7 = \mathrm{Span}(gE_2 + gk_1E_3 - (c+k_1f)E_4, E_5), \tag{4.7}$$

где k_1 — решение уравнения $k_1^2fd - k_1(ag - bf - cd) + bc = 0$,

$$\mathfrak{h}_8 = \mathrm{Span}(dE_2 - (gm_1 + b)E_3 + dm_1E_5, E_4), \tag{4.8}$$

где m_1 — решение уравнения $m_1^2gf + m_1(ag + bf - cd) + ab = 0$,

$$\mathfrak{h}_9 = \mathrm{Span}\left(E_2 - \frac{cl_1}{b+gl_1}E_4 + l_1E_5,\ E_3 - \frac{fl_2}{d+gl_2}E_4 + l_2E_5\right), \tag{4.9}$$

где l_2 — решение уравнения

$$0 = bcgl_2^2 + l_2(bcd + abg - b^2f + l_1(ag^2 - cdg - bfg)) + abd + \\ + l_1(bdf + adg - cd^2) + dgfl_1^2 \tag{4.10}$$

для данного l_1.

Доказательство. Вектор

$$Y = A + B + C + Z, \quad A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 \in \mathfrak{a}_1, \quad B = \alpha_3 E_3 \in \mathfrak{a}_2, \quad C = \alpha_4 E_4 \in \mathfrak{a}_3, \quad Z = \alpha_5 E_5 \in \mathfrak{z}$$

является геодезическим в $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g,h)}$ тогда и только тогда, когда

$$\langle [X, A+B+C], B+C+Z\rangle = 0 \quad \forall X = \sum_{i=1}^{5} x_i E_i \in \mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g,h)}, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 5$$

(см. предложение 2.3). Поэтому уравнение

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left[\sum_{i=1}^{4} x_i E_i,\ \sum_{j=1}^{4} \alpha_j E_j \right],\ \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5 \right\rangle = \\
&\quad = \Big\langle (x_1\alpha_2 - x_2\alpha_1)(aE_3 + bE_4 + cE_5),\ \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5 \Big\rangle + \\
&\qquad + \Big\langle (x_1\alpha_3 - x_3\alpha_1)(dE_4 + fE_5),\ \alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5 \Big\rangle + \\
&\qquad\quad + \Big\langle \big[(x_1\alpha_4 - x_4\alpha_1)g + (x_2\alpha_3 - x_3\alpha_2)h\big] E_5,\ \alpha_5 E_5 \Big\rangle = \\
&\quad = (x_1\alpha_2 - x_2\alpha_1)\alpha_3 a + \big[(x_1\alpha_2 - x_2\alpha_1)b + (x_1\alpha_3 - x_3\alpha_1)d\big]\alpha_4 + \\
&\qquad + \Big[(x_1\alpha_2 - x_2\alpha_1)c + (x_1\alpha_3 - x_3\alpha_1)f + (x_1\alpha_4 - x_4\alpha_1)g + (x_2\alpha_3 - x_3\alpha_2)h\Big]\alpha_5 = 0 \quad (4.11)
\end{aligned}$$

выполняется для всех $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Так как $g > 0$, уравнение (4.11) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\alpha_1\alpha_5 = 0,\ \alpha_1\alpha_4 d + \alpha_2\alpha_5 h = 0, \quad \alpha_1\alpha_3 a + \alpha_1\alpha_4 b - \alpha_3\alpha_5 h = 0, \tag{4.12}$$

$$\alpha_2\alpha_3 a + \alpha_2\alpha_4 b + \alpha_3\alpha_4 d + \alpha_2\alpha_5 c + \alpha_3\alpha_5 f + \alpha_4\alpha_5 g = 0. \tag{4.13}$$

Пусть $h > 0$. При $a > 0$, $d > 0$ из (4.12), (4.13) получим следующее.

Случай 1: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2\alpha_5 = 0 = \alpha_3\alpha_5$ и выполняется тождество (4.13).

Случай 2: $\alpha_5 = 0$, $\alpha_1\alpha_4 = 0 = \alpha_1\alpha_3$, $\alpha_3(\alpha_2 a + \alpha_4 d) + \alpha_2\alpha_4 b = 0$.

Если $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$, то в обоих случаях выполняется уравнение $\alpha_3(\alpha_2 a + \alpha_4 d) + \alpha_2\alpha_4 b = 0$. В этом случае вектор является геодезическим в $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g,h)}$ тогда и только тогда, когда он лежит в конусе

$$C = \Big\{\alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4;\ \alpha_2\alpha_3 a + \alpha_2\alpha_4 b + \alpha_3\alpha_4 d = 0\Big\}$$

в утверждении (1).

Если $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_5 \neq 0$, то из случая 1 получаем $\alpha_2 = \alpha_3 = 0 = \alpha_4$ и, следовательно, любой геодезический вектор Y принадлежит $\mathfrak{z}$.

Если $\alpha_5 = 0$ и $\alpha_1 \neq 0$, то из случая 2 получаем $\alpha_4 = 0 = \alpha_3$. Поэтому любой геодезический вектор Y лежит в $\mathfrak{a}_1$.

Филиформная нильпотентная метрическая алгебра Ли $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g,h)}$ не имеет вполне геодезической подалгебры коразмерности 1 (см. [1, предложение 1.13]). Так как $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g,h)}$ не изоморфна стандартной филиформной алгебре Ли $\mathfrak{l}_{5,7}$, она не имеет вполне геодезической подалгебры коразмерности 2 (см. [1, теорема 1.18]). Конус C имеет двумерную подалгебру $\mathfrak{h}$, если $b = 0$, и в этом случае либо $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}(E_2, E_4)$, либо $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}(E_3, dE_2 - aE_4)$. Двумерное подпространство $\mathfrak{a}_1$ не является подалгеброй. Это доказывает утверждение (1).

Пусть $h = 0$. Так как $a > 0$, $d > 0$, получаем из (4.12), (4.13) следующее.

Случай 1: $\alpha_1 = 0$ и выполняется тождество (4.13). В этом случае любой геодезический вектор в $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ лежит в множестве

$$S = \Big\{\alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5;\ \alpha_2\alpha_3 a + \alpha_2\alpha_4 b + \alpha_3\alpha_4 d + \alpha_2\alpha_5 c + \alpha_3\alpha_5 f + \alpha_4\alpha_5 g = 0\Big\}$$

в утверждении (2).

Случай 2: $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$. В этом случае любой геодезический вектор Y находится в $\mathfrak{a}_1$.

Так как $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ изоморфна стандартной филиформной алгебре Ли $\mathfrak{l}_{5,7}$ (см. [4, лемма 6, замечание 3]), любая вполне геодезическая подалгебра $\mathfrak{h}$ имеет коразмерность как минимум 2 (см. [1, теоремы 1.17, 1.18, предложение 1.13]). Если S имеет трехмерную вполне геодезическую подалгебру $\mathfrak{h}$, то получим $b = 0 = f$ и $c = ag/d$. В этом случае имеем либо $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}\left(E_2, E_3 - \dfrac{a}{c}E_5, E_4\right)$, либо $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}\left(E_2 - \dfrac{c}{g}E_4, E_3, E_5\right)$. Так как обе подалгебры абелевы, они являются плоскими вполне геодезическими подалгебрами.

Алгебра Ли $\mathfrak{l}_{5,7}$ является $\mathbb{N}$-градуированной с адаптированным базисом $\mathcal{B} = \{F_i, i = 1, \ldots, 5\}$. Можно ввести идеалы $\mathfrak{n}_i := \bigoplus\limits_{j\geqslant i} E_j$, $i = 1, \ldots, 5$, для $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$. При $Y \in \mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ степень $\deg(Y)$ вектора Y — это наибольшее натуральное число k, для которого $Y \in \mathfrak{n}_k$. Для любого $i \in \{1, \ldots, 5\}$ имеем $\deg(E_i) = i$, $\mathrm{Span}(E_k, \ldots, E_5) = \mathfrak{n}_k$ и $[E_i, E_j] \in \mathfrak{n}_{i+j}$ для всех i, j. Теперь будем искать двумерные вполне геодезические подалгебры $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$. Поскольку каждый геодезический вектор удовлетворяет условию $\alpha_1 = 0$, имеем $E_1 \in \mathfrak{h}^\perp$ и $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Span}(E_2, \ldots, E_5)$ (см. [2, лемма 3.2]). Поскольку $\mathrm{Span}(E_2, \ldots, E_5)$ абелева, любая вполне геодезическая подалгебра $\mathfrak{h}$ является плоской (см. лемму 2.2).

Невозможно, чтобы $\mathfrak{h}$ порождалась $Y_1 = E_4$ степени 4 и $Y_2 = E_5$ степени 5, потому что

$$0 = \langle [E_1, E_4], E_5\rangle + \langle [E_1, E_5], E_4\rangle = g > 0$$

(см. [2, лемма 3.2]).

Предположим, что $\mathfrak{h}$ порождается векторами $Y_1 = E_3 + k_1E_4$ степени 3 и $Y_2 = E_5$ степени 5 с некоторым $k_1 \in \mathbb{R}$. Так как

$$0 = 2\big\langle [E_1, E_3 + k_1E_4],\ E_3 + k_1E_4\big\rangle = 2k_1\big\langle [E_1, E_3], E_4\big\rangle = 2k_1 d$$

и $d > 0$, получаем $k_1 = 0$. Так как $0 = \langle [E_1, E_3], E_5\rangle + \langle [E_1, E_5], E_3\rangle = f$, имеем $f = 0$.

Предположим, что $\mathfrak{h}$ порождается векторами $Y_1 = E_3 + m_1E_5$ степени 3 и $Y_2 = E_4 + m_2E_5$ степени 4 с некоторыми $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$. Так как

$$0 = 2\big\langle [E_1, E_4 + m_2E_5], E_4 + m_2E_5\big\rangle = 2m_2\big\langle [E_1, E_4], E_5\big\rangle = 2m_2 g$$

и $g > 0$, получаем $m_2 = 0$. Так как

$$0 = \big\langle [E_1, E_3 + m_1E_5],\ E_4\big\rangle + \big\langle [E_1, E_4], E_3 + m_1E_5\big\rangle = d + gm_1$$

и $d > 0$, имеем $m_1 = -d/g$. Более того, из соотношения

$$0 = 2\left\langle \Big[E_1, E_3 - \frac{d}{g}E_5\Big],\ E_3 - \frac{d}{g}E_5\right\rangle = -2f\frac{d}{g}$$

следует, что $f = 0$. Поэтому в алгебре Ли $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,0,g)}$ имеются вполне геодезические подалгебры, задаваемые (4.2).

Предположим, что $\mathfrak{h}$ порождается $Y_1 = E_2 + k_1E_3 + l_1E_4$ степени 2 и $Y_2 = E_5$ степени 5 с $k_1, l_1 \in \mathbb{R}$. Так как

$$0 = \big\langle [E_1, E_2 + k_1E_3 + l_1E_4], E_5\big\rangle + \big\langle [E_1, E_5], E_2 + k_1E_3 + l_1E_4\big\rangle = c + k_1 f + l_1 g$$

и $g > 0$, получим $l_1 = -(c + k_1 f)/g$. Более того, имеем

$$0 = 2\big\langle [E_1, E_2 + k_1E_3 + l_1E_4],\ E_2 + k_1E_3 + l_1E_4\big\rangle = 2(k_1a + l_1b + k_1l_1d). \tag{4.14}$$

Подставляя этот вид l_1 в (4.14), получим

$$-bc + k_1(ag - bf - cd) - k_1^2 fd = 0. \tag{4.15}$$

Тогда в $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ имеется вполне геодезическая подалгебра, задаваемая (4.7), где k_1 — решение уравнения (4.15).

Предположим, что $\mathfrak{h}$ порождается векторами $Y_1 = E_2 + k_1E_3 + m_1E_5$ степени 2 и $Y_2 = E_4 + m_2E_5$ степени 4, где $k_1, m_1, m_2 \in \mathbb{R}$. Так как

$$0 = 2\big\langle [E_1, E_4 + m_2E_5],\ E_4 + m_2E_5\big\rangle = 2gm_2$$

и $g > 0$, получим $m_2 = 0$. Так как

$$0 = \big\langle [E_1, E_4],\ E_2 + k_1E_3 + m_1E_5 \big\rangle + \big\langle [E_1, E_2 + k_1E_3 + m_1E_5],\ E_4 \big\rangle = gm_1 + b + k_1d$$

и $d > 0$, имеем $k_1 = -(gm_1 + b)/d$. Так как

$$0 = 2\big\langle [E_1, E_2 + k_1E_3 + m_1E_5],\ E_2 + k_1E_3 + m_1E_5 \big\rangle = 2(ak_1 + cm_1 + k_1fm_1),$$

получим, что m_1 является решением уравнения

$$0 = gfm_1^2 + m_1(ag + bf - cd) + ab. \tag{4.16}$$

Поэтому в $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ имеется вполне геодезическая подалгебра, задаваемая (4.8), где m_1 — решение уравнения (4.16).

Предположим, что $\mathfrak{h}$ порождается векторами $Y_1 = E_2 + k_1E_4 + l_1E_5$ степени 2 и $Y_2 = E_3 + k_2E_4 + l_2E_5$ степени 3, где $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Так как

$$\big\langle [E_1, Y_i], Y_j \big\rangle + \big\langle [E_1, Y_j], Y_i \big\rangle = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2\},$$

имеем следующую систему уравнений:

$$dk_2 + (f + k_2g)l_2 = 0, dk_1 + (f + k_2g)l_1 + a + bk_2 + (c + k_1g)l_2 = 0, \quad bk_1 + (c + gk_1)l_1 = 0. \tag{4.17}$$

Пусть $l_2 = -d/g$. Тогда первое уравнение в (4.17) выполняется в точности тогда, когда $f = 0$. Таким образом, второе уравнение в (4.17) принимает вид

$$a - \frac{cd}{g} + k_2(gl_1 + b) = 0. \tag{4.18}$$

Если $l_1 = -b/g$, то из третьего уравнения в (4.17) следует или $c = 0$, или $l_1 = b = 0$. Равенство $c = 0$ невозможно, так как в этом случае из (4.18) следует $a = 0$. Если $l_1 = b = 0$, то из (4.18) получим $c = ag/d$. Следовательно, в алгебре Ли $\mathfrak{n}_{(a,0,\frac{ag}{d},d,0,g)}$ имеется вполне геодезическая подалгебра, заданная (4.5).

Если $l_1 \neq -b/g$, то из третьего уравнения в (4.17) получим $k_1 = -(cl_1)/(b + gl_1)$, а из второго уравнения в (4.17) получим $k_2 = (cd - ag)/(g(b + gl_1))$. Поэтому подалгебра, заданная (4.3) является вполне геодезической в алгебре Ли $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,0,g)}$.

Если $l_2 \neq -d/g$, то из первого уравнения в (4.17) получаем $k_2 = -fl_2/(d + gl_2)$. Если $l_1 = -b/g$, то из третьего уравнения в (4.17) имеем либо $c = 0$, либо $l_1 = b = 0$. Если $c = 0$, то из второго уравнения в (4.17) получим $k_1 = (fb - ag)/(g(d + gl_2))$. Следовательно, в алгебре Ли $\mathfrak{n}_{(a,b,0,d,f,g)}$, имеется вполне геодезическая подалгебра, заданная (4.6).

Если $l_1 = b = 0$, то из второго уравнения в (4.17) получаем $k_1 = -(a + cl_2)/(d + gl_2)$. Следовательно, подалгебра, заданная (4.4) является вполне геодезической в $\mathfrak{n}_{(a,0,c,d,f,g)}$.

Пусть $l_2 \neq -d/g$, $l_1 \neq -b/g$. Тогда из первого уравнения в (4.17) имеем $k_2 = -fl_2/(d + l_2g)$, из третьего уравнения в (4.17) получаем $k_1 = -l_1c/(b + l_1g)$. Из второго уравнения в (4.17) следует, что

$$a = \big[c(d + gl_2) - f(b + gl_1)\big] \left(\frac{l_1}{b + gl_1} - \frac{l_2}{d + gl_2} \right).$$

Поэтому имеем

$$0 = bcgl_2^2 + l_2\big(bcd + abg - b^2f + l_1(ag^2 - cdg - bfg)\big) + abd + l_1(bdf + adg - cd^2) + dgfl_1^2. \tag{4.19}$$

Следовательно, в $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ имеется вполне геодезическая подалгебра, заданная с помощью (4.9), где l_2 — решение (4.19) для данного l_1. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cairns G., Hinić Galić A., Nikolayevsky Yu.* Totally geodesic subalgebras of nilpotent Lie algebras// J. Lie Theory. — 2013. — *23.* — P. 1023–1049.
2. *Cairns G., Hinić Galić A., Nikolayevsky Yu.* Totally geodesic subalgebras of filiform nilpotent Lie algebras// J. Lie Theory. — 2013. — *23.* — P. 1051–1074.
3. *Eberlein P.* Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric, II// Trans. Am. Math. Soc. — 1994. — *343.* — P. 805–828.

4. *Figula Á., Nagy P. T.* Isometry classes of simply connected nilmanifolds// J. Geom. Phys.. — *132*. — P. 370–381.
5. *de Graaf W. A.* Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2// J. Algebra. — 2007. — *309*. — P. 640–653.
6. *Kerr M. M., Payne T. L.* The geometry of filiform nilpotent Lie groups// Rocky Mountain J. Math. — 2010. — *40*. — P. 1587–1610.
7. *Lauret J.* Homogeneous nilmanifolds of dimension 3 and 4// Geom. Dedicata. — 1997. — *68*. — P. 145–155.
8. *Milnor J.* Curvatures of left invariant metrics on Lie groups// Adv. Math. — 1976. — *21*. — P. 293–329.
9. *Nagy P. T., Homolya Sz.* Geodesic vectors and subalgebras in two-step nilpotent metric Lie algebras// Adv. Geom. — 2015. — *15*. — P. 121–126.

Al-Abayechi A.
Дебреценский университет, Дебрецен, Венгрия
E-mail: `ameer@science.unideb.hu`

Figula Á.
Дебреценский университет, Дебрецен, Венгрия
E-mail: `figula@science.unideb.hu`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 24–33
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-24-33

УДК 512.54

О ЧИСЛЕ ХАРАКТЕРОВ ГЕЙЗЕНБЕРГА ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

© 2020 г. **А. ЗОЛФИ, А. Р. АШРАФИ**

Аннотация. Неприводимый характер χ конечной группы G называется характером Гейзенберга, если $\operatorname{Ker}\chi \supseteq [G,[G,G]]$. В статье доказано, что группа G имеет в точности r, $r \leqslant 3$, характеров Гейзенберга тогда и только тогда, когда $|G/G'| = r$. Если G имеет в точности четыре характера Гейзенберга, то $|G/G'| = 4$, но обратное в общем случае неверно. Наконец, доказано, что если G имеет в точности пять характеров Гейзенберга, то $|G/G'| = 5$ или $|G/G'| = 4$, и ровно один характер Гейзенберга группы G имеет степень 2.

Ключевые слова: неприводимый характер, характер Гейзенберга, конечная группа.

ON THE NUMBER OF HEISENBERG CHARACTERS OF FINITE GROUPS

© 2020 **A. ZOLFI, A. R. ASHRAFI**

Abstract. An irreducible character χ of a finite group G is called a Heisenberg character if $\operatorname{Ker}\chi \supseteq [G,[G,G]]$. In this paper, we prove that the group G has exactly r, $r \leqslant 3$, Heisenberg characters if and only if $|G/G'| = r$. If G has exactly four Heisenberg characters, then $|G/G'| = 4$, but the converse is not correct in general. Finally, it is proved that if G has exactly five Heisenberg characters, then $|G/G'| = 5$ or $|G/G'| = 4$ and one of the Heisenberg characters of G has the degree 2.

Keywords and phrases: irreducible character, Heisenberg character, finite group.

AMS Subject Classification: 20C20, 20E34

1. Введение. Пусть G — конечная группа и $\operatorname{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых характеров G. Характер $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$ называется *характером Гейзенберга*, если $\operatorname{Ker}\chi \supseteq [G,[G,G]]$ (см. [2]). Легко видеть, что характер $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$ является характером Гейзенберга тогда и только тогда, когда $\overline{\chi}$ является характером Гейзенберга. Кроме того, можно отождествить характеры Гейзенберга группы G с неприводимыми характерами факторгруппы $G/[G,[G,G]]$ (см. [2,3]). Группа G называется *n-группой Гейзенберга*, если она имеет в точности n характеров Гейзенберга.

Э. Марберг в [11] вычислил характеры Гейзенберга унитарной группы $U_n(q)$. Он дал полную классификацию характеров Гейзенберга этой группы, построив взаимно однозначное соответствие между множеством этих характеров и некоторым множеством отмеченных путей на решетке $\mathbb{N}^2$, где $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел. Как следствие этого результата, он доказал, что число характеров Гейзенберга группы $U_n(q)$ — это полином по $q-1$ степени $n-1$ с неотрицательными целыми коэффициентами, причем старший коэффициент равен $(n-1)$-му числу Фибоначчи.

Работа выполнена при поддержке гранта Университета Кашана (проект № 572760/2).

Тривиальный характер группы G обозначается 1_G. Группа G называется совершенной, если $G' = G$. Далее в работе используется стандартная система обозначений, взятая из знаменитой книги Айзекса (см. [8]).

Следующая простая лемма будет полезна в следующем разделе.

Лемма 1.1. *Любой линейный характер группы является характером Гейзенберга.*

Доказательство. Пусть $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ — линейный характер группы G. Поскольку $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi \leqslant \mathbb{C}^*$, имеем $G' \leqslant \operatorname{Ker}\varphi$. Следовательно, $[G, G'] \subseteq [G, \operatorname{Ker}\varphi] \leqslant \operatorname{Ker}\varphi$, что и требовалось доказать. □

Следствие 1.2. *Любой неприводимый характер абелевой группы является характером Гейзенберга.*

Лемма 1.3. *Неприводимый характер χ является характером Гейзенберга тогда и только тогда, когда $\overline{\chi}$ — характер Гейзенберга.*

Доказательство. Ясно, что $\operatorname{Ker}\chi = \operatorname{Ker}\overline{\chi}$. Поэтому $[G, G'] \subseteq \operatorname{Ker}\chi$ тогда и только тогда, когда $[G, G'] \subseteq \operatorname{Ker}\overline{\chi}$. □

Пусть $\operatorname{nc}(G)$ — класс нильпотентности конечной нильпотентной группы G. Следующая лемма также полезна при исследовании таких конечных групп, что все их неприводимые характеры являются характерами Гейзенберга.

Лемма 1.4. *Пусть G — конечная группа. Все неприводимые характеры G являются характерами Гейзенберга тогда и только тогда, когда G — нильпотентная группа класса нильпотентности 2.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{nc}(G) = 2$. Тогда $[G, G'] = 1$ и, следовательно, все неприводимые характеры являются характерами Гейзенберга. Если все неприводимые характеры являются характерами Гейзенберга, то $[G, G'] \leqslant \bigcap\limits_{\chi \in \operatorname{Irr}(G)} = \{e\}$, что и требовалось доказать. □

Обозначения в этой статье стандартны и взяты главным образом из [1, 14]. Вычисления проведены с помощью системы символьных вычислений GAP (см. [14]); программы могут быть получены у авторов по запросу.

2. n-Группы Гейзенберга, $n \leqslant 5$. В этом разделе вычислены характеры Гейзенберга семи различных типов групп Гейзенберга. Отметим, что, поскольку характеры Гейзенберга неприводимы, сумма двух характеров Гейзенберга не может быть характером Гейзенберга.

Теорема 2.1. *Группа G имеет единственный характер Гейзенберга тогда и только тогда, когда она совершенна.*

Доказательство. Предположим, что G имеет единственный характер Гейзенберга. Тогда $G/[G, G']$ имеет единственный неприводимый характер. Следовательно, $[G, G'] = G$. Это показывает, что $G' = G$, т.е. G совершенна. Наоборот, если G совершенна, то $[G, G'] = [G, G] = G' = G$. Теперь, по определению, группа G имеет единственный характер Гейзенберга. □

Следствие 2.2. *Группы $\mathrm{SP}(2n, \mathbb{F})$ и $\mathrm{SU}(V, \mathbb{F})$, $(2n, |\mathbb{F}|) \neq (2, 2), (2, 3), (4, 2)$, имеют единственные характеры Гейзенберга.*

Для доказательства достаточно применить теорему 2.1.

Теорема 2.3. *Группа G имеет в точности два характера Гейзенберга тогда и только тогда, когда $|G|/|G'| = 2$.*

Доказательство. Предположим, что G имеет в точности два характера Гейзенберга. Тогда $G/[G, G'] \simeq \mathbb{Z}_2$, и поскольку $[G, G'] = G'$, имеем $|G|/|G'| = 2$. Наоборот, предположим, что $|G|/|G'| = 2$. Тогда G' является максимальной подгруппой в G. Докажем, что G не имеет нелинейного характера Гейзенберга. Напротив, предположим, что χ — такой характер. По определению,

$\operatorname{Ker}\chi \supseteq [G, G']$. Чтобы доказать, что $[G, G'] = G'$, выберем произвольный элемент $[g, h] \in G'$. Если один из элементов g и h принадлежит G', то, очевидно, $[g, h] \in G'$. В противном случае $g, h \in G$, $G = G' \cup gG'$ и, следовательно, $h = gt$, где $t \in G'$. Следовательно,

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1} = g\underbrace{gtg^{-1}}_{\in G'}g^{-1}\underbrace{gt^{-1}g^{-1}}_{\in G'} \in [G, G'].$$

Пусть $G' \subseteq [G, G']$. Так как $[G, G'] \subseteq G'$, имеем $[G, G'] = G'$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\chi \supset G'$. Если $G' \neq \operatorname{Ker}\chi$, то $\operatorname{Ker}\chi = G$, и χ — тривиальный характер. Пришли к противоречию. Теперь предположим, что $\operatorname{Ker}\chi = G'$ и $\chi(1) = d$. Тогда

$$1 = \langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{G}\sum_{g \in G}\chi(g)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|}\left(\frac{|G|}{2}d^2 + \sum_{i=|G|/2+1}^{|G|} x_i^2\right) = \frac{d^2}{2} + \frac{1}{|G|}\sum_{i=|G|/2+1}^{|G|} x_i^2.$$

Положим

$$\beta = \sum_{i=|G|/2+1}^{|G|} x_i^2.$$

Таким образом, $0 < \beta = (1 - d^2/2)|G|$, причем равенство здесь выполняется тогда и только тогда, когда $d = 1$, что приводит к противоречию. Следовательно, G имеет в точности два характера Гейзенберга. □

Следствие 2.4. *Общая линейная группа* $\mathrm{GL}(n, q)$, $(n, q) \neq (2, 2)$, *имеет в точности два характера Гейзенберга, и оба они линейны.*

Доказательство. Так как $(n, q) \neq (2, 2)$, имеем $\mathrm{GL}(n, q)' = \mathrm{SL}(n, q)$ и $[\mathrm{GL}(n, q) : \mathrm{SL}(n, q)] = 2$. Поэтому по теореме 2.3 группа $\mathrm{GL}(n, q)$ имеет в точности два характера Гейзенберга. □

Лемма 2.5. *Не существует такой конечной группы G, что $G/[G, G'] \cong S$ и $[S, S'] \neq 1$.*

Доказательство. Предположим, что $H = [G, G']$, $G/H \cong S$ и $[S, S'] \neq 1$. Поскольку $[S, S'] \neq 1$, то существуют такие aH, bH и cH, что $[aH, [bH, cH]] \neq H$. Поэтому $[a, [b, c]] \in H$, и мы имеем $H = [a, [b, c]]H = [aH, [bH, cH]]$, что невозможно. □

Хорошо известно, что $\kappa(G) = 3$ тогда и только тогда, когда $G \cong \mathbb{Z}_3$ или S_3. Этот результат потребуется в следующей теореме.

Теорема 2.6. *Группа G имеет в точности три характера Гейзенберга тогда и только тогда, когда $|G|/|G'| = 3$.*

Доказательство. Предположим, что G имеет ровно три характера Гейзенберга. Тогда $\kappa(G/[G, G']) = 3$ и, следовательно, $G/[G, G'] \simeq \mathbb{Z}_3$ or S_3. Так как $[S_3, S_3'] \neq 1$, получаем согласно лемме 2.5, что $G/[G, G'] \not\simeq S_3$. С другой стороны, если $G/[G, G'] \simeq \mathbb{Z}_3$, то $[G, G'] = G'$ и $|G|/|G'| = 3$, что и требовалось доказать.

Наоборот, предположим, что $|G|/|G'| = 3$. Тогда G' — максимальная подгруппа в G, и G имеет ровно три линейных характера. Докажем, что G не имеет нелинейных характеров Гейзенберга. Пусть χ — такой характер. Чтобы доказать, что $[G, G'] = G'$, выберем произвольно такой коммутатор $[g, h] \in G'$, что $g, h \in G - G'$. Следовательно, $G = G' \cup gG' \cup yG'$, где $y \notin G'$. Ясно, что $h \in gG'$ или $h \in yG'$. Если $h \in gG'$, то существует $h = gt$, где $t \in G'$ и, следовательно,

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1} = g\underbrace{gtg^{-1}}_{\in G'}g^{-1}\underbrace{gt^{-1}g^{-1}}_{\in G'} \in [G, G']$$

и, следовательно, $G' \subseteq [G, G']$. Если $h \in yG'$, то $h \notin gG'$ и, следовательно, $g^{-1}h \notin G'$. Поэтому $g^{-1}h \in gG'$ or $g^{-1}h \in yG'$. Сначала предположим, что $g^{-1}h \in gG'$. Тогда существует такое $t' \in G'$, что $g^{-1}h = gt'$ или $h = ggt'$ и, следовательно,

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1} = g\underbrace{ggt'g^{-1}g^{-1}}_{\in G'}g^{-1}\underbrace{gg(t')^{-1}g^{-1}g^{-1}}_{\in G'} \in [G, G'].$$

Это доказывает, что $G' \subseteq [G, G']$. Если $g^{-1}h \in yG'$, то $h \in gyG'$. По предположению $gG' = G'$, что противоречит соотношению $G = G' \cup gG' \cup yG'$. Таким образом, мы доказали, что $G' = [G, G']$. Как при доказательстве теоремы 2.3, соотношение $G' \subset \operatorname{Ker}\chi$ не может иметь места; следовательно, можно предположить, что $\operatorname{Ker}\chi = G'$ и $\chi(1) = d$, и поэтому

$$1 = \langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{G} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \left(\frac{|G|}{3} d^2 + \sum_{i=|G|/3+1}^{|G|} x_i^2 \right) = \frac{d^2}{3} + \frac{1}{|G|} \sum_{i=|G|/3+1}^{|G|} x_i^2,$$

что доказывает соотношение

$$\sum_{i=|G|/3+1}^{|G|} x_i^2 = \left(1 - \frac{d^2}{3}\right) |G|.$$

Следовательно, $d = 1$; противоречие. □

Хорошо известный результат о структуре конечных групп с небольшим числом классов сопряженности утверждает, что $\kappa(G) = 4$ тогда и только тогда, когда $G \cong \mathbb{Z}_4$, A_4 или D_{10}. Мы применим этот результат в следующей теореме.

Теорема 2.7. *Если G имеет ровно четыре характера Гейзенберга, то $|G|/|G'| = 4$.*

Доказательство. Так как $\kappa\left(G/[G, G']\right) = 4$, имеем $G/[G, G'] \simeq \mathbb{Z}_4$, A_4 или D_{10}. С другой стороны, $[A_4, A_4] \neq 1$ и $[D_{10}, D_{10}] \neq 1$; следовательно, по лемме 2.5 имеем $G/[G, G'] \not\simeq A_4$ или D_{10}. Наконец, предположим, что G имеет ровно четыре характера Гейзенберга и $G/[G, G'] \simeq \mathbb{Z}_4$. Тогда $G' \subseteq [G, G']$ и, следовательно, $|G|/|G'| = 4$, что и требовалось доказать. □

Замечание 2.8. Обратное утверждение к теореме 2.7 в общем случае неверно. Чтобы показать это, рассмотрим группу диэдра D_{8n}. Эта группа имеет в точности пять характеров Гейзенберга, но $|D_{8n}|/|D_{8n}'| = 4$. Более того, группы $C_k \times D_8$ и $C_k \times Q_8$, $k \geqslant 1$, удовлетворяют условию $|G|/|G'| = 4k$, но они имеют $5k$ характеров Гейзенберга.

В следующей теореме нам потребуется один старый результат Г. А. Миллера и В. Бернсайда, упомянутый в [10], о классификации конечных групп, имеющих в точности пять классов сопряженности. Этот результат утверждает, что $\kappa(G) = 5$ тогда и только тогда, когда G изоморфна $\mathbb{Z}_5$, D_8, Q_8, D_{14}, S_4, A_5, неабелевой группе порядка 21 или $\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$, где последняя группа изоморфна $\mathrm{SmallGroup}(20, 3)$ в обозначениях GAP.

Теорема 2.9. *Если G имеет в точности пять характеров Гейзенберга, то $|G|/|G'| = 5$ или $|G|/|G'| = 4$, и G имеет характер Гейзенберга степени 2.*

Доказательство. Пусть G — группа, имеющая ровно пять характеров Гейзенберга. Тогда $|G/G'| \leqslant 5$ и $|G|/|[G, G']| = n$, где $n \geqslant 5$. Если $|G/G'| = 1, 2, 3$, то по теоремам 2.1, 2.3 и 2.6 группа G имеет ровно один, два или три характера Гейзенберга и, следовательно, $|G/G'| = 4, 5$. Если $|G/G'| = 5$, то все характеры Гейзенберга группы G линейны. Теперь предположим, что $|G/G'| = 4$. Тогда G имеет нелинейный характер Гейзенберга степени d, скажем, χ. По определению, $\operatorname{Ker}\chi \supseteq [G, G']$. Так как $n \geqslant 5$, $|[G, G']| \leqslant |G|/5$.

Случай 1. Пусть $|[G, G']| = |G|/5$. В этом случае $|\operatorname{Ker}\chi| \geqslant |G|/5$. Сначала предположим, что $|\operatorname{Ker}\chi| = |G|/5$. Тогда

$$1 = \langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \left(\frac{|G|}{5} d^2 + \sum_{i=|G|/5+1}^{|G|} x_i^2 \right) = \frac{d^2}{5} + \frac{1}{|G|} \sum_{i=|G|/5+1}^{|G|} x_i^2.$$

Положим

$$\beta = \sum_{i=|G|/5+1}^{|G|} x_i^2.$$

Тогда $\beta = \bigl(1 - d^2/5\bigr)\,|G|$. Так как $\beta > 0$ и характер χ нелинеен, имеем $d = 2$. далее, предположим, что $|\operatorname{Ker}\chi| > |G|/5$. Тогда $[G : \operatorname{Ker}\chi] \leqslant 4$. Если $|G : \operatorname{Ker}\chi| = 1$, то характер χ тривиален, противоречие. Предположим, что $|G : \operatorname{Ker}\chi| = 2$. Так как χ неприводим,

$$1 = \langle\chi, \chi\rangle = \frac{1}{|G|}\left(\frac{|G|}{2}d^2 + \sum_{i=|G|/2+1}^{|G|} x_i^2\right) = \frac{d^2}{2} + \frac{1}{|G|}\sum_{i=|G|/2+1}^{|G|} x_i^2 > 2,$$

противоречие. Если $|G : \operatorname{Ker}\chi| = 3$, то аналогичная аргументация также приводит к противоречию. Предположим, что $|G : \operatorname{Ker}\chi| = 4$. Тогда $d = 2$ и

$$\sum_{i=|G|/3+1}^{|G|} x_i^2 = 0,$$

что противоречит условию $\sum\limits_{g\in G}\chi(g) = 0$.

Случай 2. Пусть $|[G, G']| < |G|/5$. В этом случае $|G : [G, G']| = |G : G'||G' : [G, G']|$. По предположению, $|G|/|G'| = 4$ и, следовательно, $|G|/|[G, G']| \geqslant 8$. С другой стороны, $G/[G, G']$ имеет ровно пять классов сопряженности и поэтому $G/[G, G'] \cong \mathbb{Z}_5$, D_8, Q_8, D_{14}, S_4, A_5, неабелевой группе порядка 21 или $\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4 \cong \mathrm{SmallGroup}(20, 3)$. Так как $|G|/|[G, G']| = 4k$, $k \geqslant 2$, G не может быть изоморфна $\mathbb{Z}_5$, D_{14} и неабелевой группе порядка 21.

Случай 2a. $G/[G, G'] \cong D_8$ или Q_8. Таким образом, $|[G, G']| = |G|/8$. Выберем нелинейный характер Гейзенберга χ степени $d = \chi(1)$. Это показывает, что $|\operatorname{Ker}\chi| \geqslant |G|/8$. Сначала предположим, что $|\operatorname{Ker}\chi| = |G|/8$. Тогда

$$1 = \langle\chi, \chi\rangle = \frac{1}{|G|}\left(\frac{|G|}{8}d^2 + \sum_{i=1+|G|/8}^{|G|}\chi^2(g_i)\right),$$

где $G = \{g_1, \ldots, g_{|G|}\}$. Положим $\alpha = \sum\limits_{i=1+|G|/8}^{|G|}\chi^2(g_i)$. Тогда $\alpha = \bigl(1 - d^2/8\bigr)\,|G| > 0$ и, следовательно, $d = 2$, что и требовалось. Следовательно, достаточно изучить случай, когда $|\operatorname{Ker}\chi| > |G|/8$ или, эквивалентно, $|G : \operatorname{Ker}\chi| < 8$. Поскольку характер χ нелинеен, $5 \leqslant |G : \operatorname{Ker}\chi| = i < 8$. Следовательно,

$$1 = \langle\chi, \chi\rangle = \frac{1}{|G|}\left(\frac{|G|}{i}d^2 + \sum_{k=1+\frac{|G|}{i}}^{|G|}\chi^2(g_k)\right).$$

Положим $\beta = \sum\limits_{k=1+|G|/i}^{|G|}\chi^2(g_k)$. Тогда $\beta = \bigl(1 - d^2/i\bigr)\,|G| > 0$. Отсюда следует, что $d = 2$.

Случай 2b. $G/[G, G'] \cong S_4, A_5$ или $\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$. Так как $[S_4, S_4'] = A_4$, $[A_5, A_5'] = A_5$ и $\bigl[\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4, (\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4)'\bigr] \cong \mathbb{Z}_5$, по лемме 2.5 не существует группы G, удовлетворяющей условиям теоремы. Это завершает доказательство. □

Наши вычисления с помощью библиотеки малых групп GAP показывают, что обращение теоремы 2.9 верно для групп порядков $\leqslant$1000. Завершим этот раздел следующей гипотезой.

Гипотеза 2.10. Пусть G — конечная группа. Если $|G|/|G'| = 5$ или $|G|/|G'| = 4$ и G имеет характер Гейзенберга степени 2, то G имеет ровно пять характеров Гейзенберга.

3. Примеры. В последнем разделе этой статьи обсуждаются характеры Гейзенберга некоторых конечных групп. Для этого нам потребуются некоторые определения.

Группа диэдра D_{2n}, *полудиэдральная группа* SD_{8n}, *дициклическая группа* T_{4n} и группы U_{6n} и V_{8n} могут быть представлены следующим образом:

$$D_{2n} = \langle x, y \mid x^n = y^2 = e,\ y^{-1}xy = x^{-1}\rangle, \tag{3.1}$$

$$SD_{8n} = \langle x, y \mid x^{4n} = y^2 = e,\ yxy = x^{2n-1}\rangle, \tag{3.2}$$

$$T_{4n} = \langle x, y \mid x^{2n} = 1,\ x^n = y^2,\ y^{-1}xy = x^{-1}\rangle, \tag{3.3}$$

$$U_{6n} = \langle x, y \mid x^{2n} = y^3 = e,\ x^{-1}yx = y^{-1}\rangle. \tag{3.4}$$

Легко видеть, что дициклическая группа T_{4n} имеет порядок $4n$, группа U_{6n} — порядок $6n$, полудиэдральная группа SD_{8n} и группа V_{8n} — порядок $8n$. В известной книге Г. Джеймса и М. Либека [9] приведены таблицы групп D_{2n}, U_{6n}, T_{4n} и V_{8n} (для нечетных n). Таблицы характеров групп V_{8n} для четных n и SD_{8n} были вычислены М. Дарафше и Н. Пурсалавати (см. [5]) и М. Хормози и К. Родтсом (см. [7]) соответственно.

Пример 3.1. Вычислим характеры Гейзенберга группы диэдра D_{2n}, используя представление, заданное уравнением (3.1). Легко видеть, что $D'_{2n} = \langle x^2\rangle$ и $[D_{2n}, D'_{2n}] = \langle x^4\rangle$. Утверждается, что группа диэдра D_{2n} имеет нелинейный характер Гейзенберга тогда и только тогда, когда $4|n$. Более того, если $4|n$, то характер Гейзенберга единственен. Для доказательства этого применим результат [9, п. 18.3] и рассмотрим следующие случаи, где n нечетно или четно.

Случай 1: *n нечетно.* В этом случае $[D_{2n}, D'_{2n}] = \langle x\rangle$. Следовательно, неприводимый характер χ является характером Гейзенберга тогда и только тогда, когда $\langle x\rangle \subseteq \operatorname{Ker}\chi$. Так как $D_{2n}/D'_{2n} \cong \mathbb{Z}_2$, группа диэдра D_{2n} имеет ровно два линейных характера. Вид нелинейных неприводимых характеров этой группы приведен в таблице 1, где $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ и $n = 2m+1$.

Таблица 1. Нелинейные характеры D_{2n}, n нечетно.

Характер	e	$a^r \quad (1 \leqslant r \leqslant m)$	b
$\psi_j \quad (1 \leqslant j \leqslant m)$	2	$\varepsilon^{jr} + \varepsilon^{-jr}$	0

Предположим, что ψ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, — характер Гейзенберга группы D_{2n}. Тогда $\langle x\rangle \subseteq \operatorname{Ker}\psi_j$; следовательно, для любого t, $1 \leqslant t \leqslant m$, $\psi_j(x^t) = \psi_j(e) = 2$. Согласно таблице 1 получаем, что $\psi_j(x^t) = \varepsilon^{jt} + \varepsilon^{-jt}$, откуда следует, что $2\cos(2\pi jt/n) = 1$. Поэтому $n|jt$ для любого значения t, $1 \leqslant t \leqslant m$. Чтобы доказать, что $n|j$, выберем $t = 1$; приходим к противоречию с условием $1 \leqslant j \leqslant (n-1)/2$.

Случай 2: *n четно.* В этом случае $D_{2n}/D'_{2n} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; следовательно, группа диэдра D_{2n} имеет ровно четыре линейных характера, являющихся характерами Гейзенберга. В таблице 2 дан общий вид нелинейных неприводимых характеров D_{2n}.

Таблица 2. Нелинейные характеры группы D_{2n}, n четно.

Характер	e	x^m	$x^r \ (1 \leqslant r \leqslant m)$	b	ab
ψ_j	2	$2(-1)^j$	$\varepsilon^{jr} + \varepsilon^{-jr} \ (1 \leqslant j \leqslant m-1)$	0	0

Случай 2a: *$n = 2m$ и $m = 2k+1$.* В этом случае $[D_{2n}, D'_{2n}] = \langle x^2\rangle$. Предположим, что ψ_j, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, — характер Гейзенберга. Так как $\langle x^2\rangle \subseteq \operatorname{Ker}\psi_j$, для каждого t, $1 \leqslant t \leqslant m$, имеем $\psi_j(x^{2t}) = \psi_j(e) = 2$. Согласно таблице 2 получаем $\psi_j(x^{2t}) = \varepsilon^{2jt} + \varepsilon^{-2jt}$, откуда следует, что

$2\cos(2\pi jt/m) = 1$. Это доказывает, что $m|jt$ для любого t из интервала $[1, m]$. Чтобы доказать, что $m|j$, выберем $t = 1$; получаем противоречие с условием $1 \leqslant j \leqslant m-1$.

Случай 2b: *$n = 2m$ и $m = 2k$.* Сначала отметим, что $[D_{2n}, D'_{2n}] = \langle x^4\rangle$. Снова предположим, что ψ_j, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, — характер Гейзенберга. Тогда $\psi_j(x^{4t}) = \psi_j(e) = 2$ и из таблицы 2, рассуждая как выше, получим, что $m|2j$, где $1 \leqslant j \leqslant m-1$. Следовательно, $j = m/2$. Теперь легко видеть, что $\psi_{m/2}$ — характер Гейзенберга, что завершает доказательство.

Пример 3.2. Вычислим характеры Гейзенберга дициклической группы T_{4n}; ее представление приведено в (3.3). Докажем, что эта группа имеет нелинейный характер Гейзенберга тогда и только тогда, когда n четно. Более того, в случае четного n нелинейный характер T_{4n} единствен. Чтобы доказать это, сначала отметим, что $T'_{4n} = \langle x^2\rangle$ и $T_{4n}/T'_{4n} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Поэтому эта группа имеет в точности четыре линейных характера. Положим $\omega = e^{\pi i/n}$. В таблице 3 приведен вид нелинейных неприводимых характеров этой группы.

Таблица 3. Нелинейные неприводимые характеры дициклической группы T_{4n}.

Характеры	e	a^n	$a^r \quad (1 \leqslant r \leqslant n-1)$	b	ab
$\psi_j \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1)$	2	$2(-1)^j \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1)$	$\omega^{jr} + \omega^{-jr} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1)$	0	0

В основном доказательстве рассмотрим следующие три отдельных случая.

Случай 1: *n нечетно.* Предположим, что $n = 2m+1$ и ψ_j, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, — характер Гейзенберга. Тогда $\langle x^2\rangle \subseteq \operatorname{Ker}\psi_j$ и, следовательно, $\psi_j(x^{2t}) = \omega^{2jt} + \omega^{2jt}$, для любого t, $1 \leqslant t \leqslant m$. Как следствие, $n|j$, что невозможно.

Случай 2: *n четно и $n/2$ четно.* Положим $n = 2m$ и $m = 2k$. Ясно, что $[T_{4n}, T'_{4n}] = \langle x^4\rangle$. Предположим, что $\psi_j \in \operatorname{Irr}(T_{4n})$ — характер Гейзенберга. Рассуждение, аналогичное проведенному в примере 3.1, показывает, что $\psi_j(x^{4t}) = \omega^{4jt} + \omega^{-4jt}$; следовательно, j четно и $m|2j$. Поэтому $j = m$, и поскольку ψ_m — характер Гейзенберга, доказательство этой части завершено.

Случай 3: *n четно и $n/2$ нечетно.* Положим $n = 2m$ и $m = 2k+1$. Тогда, очевидно, $[T_{4n}, T'_{4n}] = \langle x^8\rangle$. Снова выберем нелинейный характер Гейзенберга ψ_j. Так как $\psi_j(x^{8t}) = \omega^{8jt} + \omega^{-8jt} = 2$, имеем $m|2j$. Поэтому $j = m$, и ψ_m — единственный характер Гейзенберга группы T_{4n}.

Пример 3.3. Покажем, что неприводимый характер группы U_{6n} является характером Гейзенберга тогда и только тогда, когда он линеен; вид неприводимых характеров этой группы приведен в таблице 4.

Таблица 4. Нелинейные неприводимые характеры группы U_{6n}.

Характер	$a^{2r} \quad (0 \leqslant r \leqslant n-1)$	$a^{2r+1} \quad (0 \leqslant r \leqslant n-1)$	$a^{2r}b \quad (0 \leqslant r \leqslant n-1)$
$\chi_r \quad (0 \leqslant r \leqslant n-1)$	$2\omega^{2rj} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1)$	0	$-\omega^{2rj} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1)$

Отметим, что $|U_{6n}/U'_{6n}| = 2n$ и, следовательно, группа U_{6n} имеет в точности $2n$ линейных характеров. Так как $U'_{6n} = \langle y\rangle$, можно легко видеть, что $[U_{6n}, U'_{6n}] = \langle y\rangle$. Предположим, что χ_l, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, — характер Гейзенберга. Тогда $\chi_l(x^{2j}y) = -\omega^{2lj}$; следовательно, $\chi_l(y) = -1 \neq 2$. Это показывает, что $y \notin \operatorname{Ker}\chi_l$, что невозможно. Следовательно, U_{6n} не имеет характеров Гейзенберга.

Пример 3.4. Рассмотрим полудиэдральную группу SD_{8n}, представление которой приведено в (3.3). Следуя [7], положим

$$C_{\text{ч}} = C_1 \cup C_2^{\text{ч}} \cup C_3^{\text{ч}}, \quad C_{\text{н}} = C_1 \cup C_2^{\text{н}} \cup C_3^{\text{н}},$$
$$C_1 = \{0, 2, 4, \dots, 2n\}, \quad C_2^{\text{ч}} = \{1, 3, 5, \dots, n-1\}, \quad C_3^{\text{ч}} = \{2n+1, 2n+3, 2n+5, \dots, 3n\},$$
$$C_2^{\text{н}} = \{1, 3, 5, \dots, n\}, \quad C_3^{\text{н}} = \{2n+1, 2n+3, 2n+5, \dots, 3n\},$$
$$C_{\text{ч}}^{+} = C_1 - \{0, 2n\}, \quad C_{\text{н}}^{+} = C_2^{\text{ч}} \cup C_3^{\text{ч}}, \quad C_{2,3}^{\text{н}} = C_2^{\text{н}} \cup C_3^{\text{н}},$$
$$C_{\star}^{\text{ч}} = C^{\text{ч}} - \{0, 2n\}, \quad C_{\star}^{\text{н}} = C^{\text{н}} - \{0, n, 2n, 3n\}.$$

Нелинейные неприводимые характеры этой группы представлены в таблицах 5 и 6 (вычисления см. в [7]).

Таблица 5. Нелинейные неприводимые характеры группы SD_{8n}, n четно.

Характеры	$x^r \quad (r \in C_1)$	$x^r \quad (r \in C_{\text{н}}^{+})$	y	xy
$\zeta_j \quad (j \in C_{\text{ч}}^{+})$	$2\cos(jr\pi/2n)$	$2\cos(jr\pi/2n)$	0	0
ψ_j	$2\cos(jr\pi/2n)$	$2i\sin(jr\pi/2n)$	0	0

Таблица 6. Нелинейные неприводимые характеры группы SD_{8n}, n нечетно.

Характеры	$x^r \quad (r \in C_1)$	$x^r \quad (r \in C_{2,3}^{\text{н}})$	y	xy	x^2y	x^3y
$\zeta_j \quad (j \in C_{\text{ч}}^{+})$	$2\cos(jr\pi/2n)$	$2\cos(jr\pi/2n)$	0	0	0	0
$\psi_j \quad \left(j \in C_{2,3}^{\text{н}} - \{n, 3n\}\right)$	$2\cos(jr\pi/2n)$	$2i\sin(jr\pi/2n)$	0	0	0	0

Случай 1: *n четно.* В этом случае полудиэдральная группа SD_{8n} имеет ровно четыре линейных характера, $SD'_{8n} = \langle x^2 \rangle$ и $[SD_{8n}, SD'_{8n}] = \langle x^4 \rangle$. Нелинейные неприводимые характеры SD_{8n} имеют степень 2; они приведены в таблице 5. Если ζ_j, $j \in C_{\text{ч}}^{+}$, или ψ_j, $j \in C_{\text{ч}}^{+}$, — характер Гейзенберга, то, аналогично примерам 3.1, 3.2 и 3.3, $n|j$. По определению $C_{\text{ч}}^{+}$, первый случай невозможен, но второй случай может иметь место при $n = 3m$. Следовательно, если n четно, то группа SD_{8n} имеет ровно пять характеров Гейзенберга.

Случай 1: *n нечетно.* В этом случае полудиэдральная группа SD_{8n} имеет в точности восемь линейных характеров, $SD'_{8n} = \langle x^4 \rangle$ и $[SD_{8n}, SD'_{8n}] = \langle x^8 \rangle$. Аналогично случаю четного n можно доказать, что все характеры Гейзенберга группы SD_{8n} линейны.

Пример 3.5. Пусть $GF(q)$ — конечное поле порядка q, где $q = p^m$ — степень простого числа и $V = V_n(q)$ — n-мерное векторное пространство над $GF(q)$. В этом примере изучаются характеры Гейзенберга классической группы Гейзенберга $H^n(q)$. Классическая группа Гейзенберга $H^n(q)$ над $GF(q)$ — это множество всех верхнетреугольных матриц вида

$$(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведение в $H^n(q)$ определяется правилом

$$(x, y, z)(r, s, t) = (x + r, y + s, z + t + x.s)$$

(здесь мы следуем обозначениям [6]; дополнительная информация об этой группе может быть найдена в [4, 12]). Легко видеть, что $(0, 0, 0)$ — единичный элемент этой группы и

$$(x, y, z)^{-1} = (-x, -y, -z + x.y).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} H^n(q)' &= \Big\langle \big[(x,y,z),(x',y',z')\big] \ \Big| \ (x,y,z),(x',y',z') \in H^n(q) \Big\rangle \\ &= \Big\langle (x,y,z)(x',y',z')(x,y,z)^{-1}(x',y',z')^{-1} \Big| \ (x,y,z),(x',y',z') \in H^n(q) \Big\rangle \\ &= \Big\langle (0,0,x.y'-x'.y) \ \Big| \ x,y,x',y' \in GF(q) \Big\rangle \\ &= \Big\{ (0,0,t) \mid t \in GF(q) \Big\}; \end{aligned}$$

легко видеть, что $[H^n(q), H^n(q)'] = \{(0,0,0)\}$. Таким образом, $\mathrm{nc}(H^n(q)) = 2$, и по лемме 1.4 все неприводимые характеры $H^n(q)$ являются характерами Гейзенберга.

4. Заключительные замечания. Естественно задать вопрос о структуре конечных групп с малым числом негейзенберговых характеров. Предположим, что K — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Чтобы получить последний результат этой статьи, нам потребуется один результат Г. Зейтца (см. [13, Theorem]), согласно которому конечная группа G имеет ровно одно неприводимое K-представление степени >1 тогда и только тогда, когда $|G| = 2^k$, k нечетно, $G' = Z(G)$ и $|G'| = 2$, или G изоморфна группе всех преобразований $x \mapsto ax + b$, $a \neq 0$, над полем порядка $q = p^n \neq 2$.

Лемма 4.1. *Пусть G — такая конечная группа, что $|\mathrm{Irr}(G)| = q$ и G имеет ровно $q-1$ характеров Гейзенберга.*

(1) *Если $|G/G'| = q-1$ и q — нечетная степень простого числа, то G — группа Фробениуса порядка $q(q-1)$.*

(2) *Если G — p-группа и $|G/G'| < q-1$, то $p = 2$.*

Доказательство. Так как $|G/G'| = q-1$, G имеет в точности $q-1$ линейных характеров, которые являются характерами Гейзенберга. Таким образом, G имеет в точности один нелинейный неприводимый характер. Поэтому, согласно упомянутому результату Зейтца и лемме 1.4, G является группой Фробениуса порядка $q(q-1)$.

Далее, предположим, что G — p-группа, $|G/G'| < q-1$ и α — единственный негейзенбергов характер группы G. По лемме 1.3, $\overline{\alpha}$ — также характер Гейзенберга и, следовательно, это вещественнозначный характер. Теперь, используя [9, следствие 23.2], заключаем, что порядок G четный, так что это 2-группа, как и требовалось. □

Предыдущая лемма — элементарный результат на пути к характеризации конечных групп с заданным числом негейзенберговых характеров.

Благодарность. Авторы выражают благодарны проф. Б. Алломберту за критические комментарии на форуме GAP, которые привели к доказательству леммы 2.5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abbott R., Bray J., Linton S., Nickerson S., Norton S., Parker R., Suleiman I., Tripp J., Walsh P., and Wilson R.* ATLAS of Finite Group Representations. Version 3/ `http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3`.
2. *Boyarchenko M., Drinfeld V.* A motivated introduction to character sheaves and the orbit method for unipotent groups in positive characteristic/ `arXiv:math/0609769 [math.RT]`.
3. *Brodlie A.* The representation theory of the Heisenberg group and beyond// XI Int. Conf. “Symmetry Methods in Physics” (Prague, Czech Republic, June 21-24, 2004).
4. *Darafsheh M. R. and Misaghian M. M.* On the ordinary irreducible characters of the Heisenberg group and a similar special group// Algebra Colloq. — 2008. — *15*, № 3. — P. 471–478.
5. *Darafsheh M. R. and Poursalavati N. S.* On the existence of the orthogonal basis of the symmetry classes of tensors associated with certain groups// SUT J. Math. — 2001. — *37*, № 1. — P. 1–17.
6. *Hegyvari N. and Hennecart F.* A note on Freiman models in Heisenberg group// Israel J. Math. — 2012. — № 189. — P. 397–411.
7. *Hormozi M. and Rodtes K.* Symmetry classes of tensors associated with the semi-dihedral groups SD_{8n}// Colloq. Math. — 2013. — *131*, № 1. — P. 59–67.

8. *Isaacs I. M.* Character Theory of Finite Groups. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2006.
9. *James G. and Liebeck M.* Representations and Characters of Groups. — London: Cambridge Univ. Press, 1993.
10. *Lopez A. V. and Lopez J. V.* Classification of finite groups according to the number of conjugacy classes// Israel J. Math. — 1985. — *51*, № 4. — P. 305–338.
11. *Marberg E.* Heisenberg characters, unitriangular groups, and Fibonacci numbers// J. Combib. Theory, Ser. A. — 2012. — *119*. — P. 882–903.
12. *Misaghian M.* The representations of the Heisenberg group over a finite field// Arm. J. Math. — 2010. — *3*, № 4. — P. 162–173.
13. *Seitz G.* Finite groups having only one irreducible representation of degree greater than one// Proc. Am. Math. Soc. — 1968. — *19*. — P. 459–461.
14. GAP: Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.5.5/ `http://www.gap-system.org`.

Zolfi A.
Университет Кашана, Кашан, Иран
E-mail: `zolfi.aliye@gmail.com`

Ashrafi A. R.
Университет Кашана, Кашан, Иран
E-mail: `ashrafi@kashanu.ac.ir`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 34–38
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-34-38

УДК 512.552, 514.16

ПРОЕКТИВНЫЕ ГЕОМЕТРИИ НАД РЕШЕТКАМИ И ИХ МОРФИЗМЫ

© 2020 г. **Т. БОКЕЛАВАДЗЕ, Т. КВИРИКАШВИЛИ**

Аннотация. В статье изучаются проективные геометрии колец, их связь с проективными решетками и морфизмы между геометриями и между решетками. Кроме того, изучаются фактор-геометрии проективных геометрий на кольцах, морфизмы между ними и их основные свойства.

***Ключевые слова*:** проективная геометрия, кольцо, проективная решетка, морфизм.

PROJECTIVE GEOMETRIES OVER LATTICES AND THEIR MORPHISMS

© 2020 **T. BOKELAVADZE, T. KVIRIKASHVILI**

Abstract. In this paper, we study ring projective geometries, their association with projective lattices, and morphisms between geometries and between lattices. Factor-geometries of projective geometries on the rings, morphisms between them, and their main properties are also studied.

***Keywords and phrases*:** projective geometry, ring, projective lattice, morphism.

***AMS Subject Classification*:** 51C05, 51A10, 16D40

В статье изучаются проективные геометрии колец и их морфизмы, по аналогии с классическим случаем (см. [1, 2]).

1. Определение. Проективная геометрия кольца (K-проективная геометрия) — это множество G с бинарным отношением $P \subseteq G \times G$ и тернарным отношением $l \subseteq G \times G \times G$, удовлетворяющими следующим аксиомам:

(1) $l(a,b,a)\ \forall\, a,b \in G$;
(2) $l(a,p,q),\ I(b,p,q) \Longrightarrow \exists\, a_1 \in G,\ P(a_1,a),\ l(a_1,b,p)$;
(3) $l(p,a,q),\ I(p,c,d) \Longrightarrow \exists\, q \in G,\ l(q,a,d),\ l(q,c,b)$;
(4) $P(a,a)\ \forall\, a \in G,\ P(a,b), P(b,a) \Longrightarrow a=b,\ P(A,b), P(b,c) \Longrightarrow P(a,c)$;
(5) $l(a,b,c) \Longleftrightarrow l(a,c,b)$.

Если a и c не инцидентны и $l(a,b,c)$, то существует элемент $b_1 \in G$ такой, что $P(b_1,b)$ и $l(b_1,a,c)$.

Элементы множества G называются точками геометрии. Говорят, что точки a и b инцидентны, если существует такая точка $c \in G$, что $P(c,a)$, $P(c,b)$. Точки $a,b,c \in G$ называются коллинеарными, если существуют такие элементы $a_1,b_1,c_1 \in G$, что $P(a_1,a)$, $P(b_1,b)$, $P(c_1,c)$ инцидентны и $l(a_1,b_1,c_1)$.

2. Пример. Пусть M — модуль без кручения на кольце главных идеалов R. Рассмотрим множество $PM = \{\langle x^1\rangle :\ x \in M,\ x \neq 0\}$. На множестве PM определим бинарное отношение $P \subset PM \times PM$ следующим образом: $\langle x\rangle P\langle y\rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle x\rangle \subseteq \langle y\rangle$, и определим тернарное отношение l: $l(\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle)$, если $\langle x\rangle \subseteq \langle y\rangle \vee \langle x\rangle$. Отношения l и P, определенные таким образом, удовлетворяют аксиомам (1)–(5). Множество PM является K-проективной геометрией и называется проективной геометрией, ассоциированной с R-модулем M.

3. Определение. Подмножество E K-проективной геометрии G называется подпространством, если для $b, c \in E$ и $l(a, b, c)$ имеем $a \in E$.

Для подмножества $A \subseteq G$ существует наименьшее подпространство, содержащее A; обозначим его $\varepsilon(A)$.

4. Предложение (см. [1]). *Пусть $L(G)$ — множество всех подпространств K-проективной геометрии G, упорядоченной по включению множеств. Тогда $L(G)$ — решетка, обладающая следующими свойствами*:

(1) $L(G)$ — *полная решетка, т.е. для любого подмножества $S \subset L(G)$ существуют наименьшая верхняя оценка $\vee S$ и наибольшая нижняя оценка $\wedge S$*;
(2) $L(G)$ — *модулярная решетка*;
(3) $L(G)$ — *непрерывная сверху решетка.*

Напомним, что множество D называется направленным вверх, если для любых $x, y \in D$ существует такой $z \in D$, что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$. Для любого направленного вверх подмножества $D \subset L$: $a \wedge (\vee D) = \vee(a \wedge x,\ x \in D)$.

5. Предложение (см. [1]). *Если для любого элемента $a \in G$ множество всех $x \in G$, для которых $P(x, a)$, бесконечно, то решетка $L(G)$ называется решеткой без кручения, т.е. никакой из элементов не покрывает $0 \in L(G)$.*

6. Определение (см. [1]). Элемент $x \in L$ называется P-точкой, если $\mathrm{Rank}([0, x]) = 1$. Решетка L называется P-точечной, если любой из ее элементов можно представить в виде комбинации P-точек.

7. Определение. Решетка L называется K-проективной решеткой, если она полна, модулярна, непрерывна сверху и является P-точечной решеткой без кручения.

8. Определение. Пусть L — модулярная решетка, $0 \in L$. Определим функцию высоты $H : L \to N \cup \{\infty\}$ следующим образом:

1) $H(O) = 0$;
2) $x \leqslant y \Longrightarrow H(x) + H(y)$;
3) $x < y \Longrightarrow H(y) = H(x) + 1$;
4) $x \leqslant y$, $H(x) = H(y) < \infty \Longrightarrow [0, x] = [0, y]$.

Символ $<$ означает, что $[x, y]$ без кручения и что $\mathrm{Rank}([x, y]) = 1$.

9. Предложение (см. [1]). *Для модулярной решетки без кручения L с 0 обозначим $G(L)$ множество всех P-точек с тернарным отношением $l(a, b, c) \iff a \leqslant b \vee c$. Тогда $G(L)$ — K-проективная геометрия.*

10. Предложение. *Пусть G — K-проективная геометрия. Тогда K-проективную геометрию $G(L(G))$ можно отождествить с G.*

11. Теорема. *Пусть L — модулярная решетка, $0 \in L$. Тогда L изоморфна решетке $L(G(L))$, если L — K-проективная решетка.*

12. Предложение. *Пусть G и G' — две K-проективные геометрии. Для отображения $g : G/E \to G'$, определенного на дополнении подмножества $E \subseteq G$, следующие условия эквивалентны*:

(1) $E \cup g^{-1}(F)$ — *подмножество для каждого подпространства $F \subseteq G'$*;
(2) (a) E — *подпространство G*;
    (b) $a, b \notin E$, $x \in E$ *и* $l(a, b, x) \Longrightarrow P(ga, gb)$;
    (c) $a, b, c \in E$ *и* $l(a, b, c) \Longrightarrow l(ga, gb, gc)$;
    (d) $a, b, c \in E$, $l(a, b, c)$, $P(gb, gc) \Longrightarrow P(ga, gc)$.

13. Замечание. $P(a,b) \Longrightarrow P(ga,gb)$.

14. Определение. Отображение $g : G/E \to G$ называется морфизмом, если оно удовлетворяет условиям предложения. Подпространство E называется ядром морфизма g.

15. Определение (см. [1])**.** Пусть $g_1 : G_1 \to G_2$, $g_2 : G_2 \to G_3$ — два морфизма с ядрами E_1 и E_2 соответственно. Композиция морфизмов g_1 и g_2 определяется следующим образом: ядро этого морфизма — это подпространство $E_1 \cup g_1^{-1}(E_2)$, и он отображает любое $a \notin E_1 \cup g_1^{-1}(E_2)$ в $g_2(g_1(a))$. Таким образом мы получаем морфизм, определенный с помощью $g_2 \circ g_1$.

16. Определение. Морфизм $g : G \to G'$ называется изоморфизмом, если существует такой морфизм $h : G' \to G'$, что $h \circ g = \mathrm{id}$, $g \circ h = \mathrm{id}$.

17. Замечание. Изоморфизм g — это такое биективное отображение с пустым ядром, что

$$l(a,b,c) \Longleftrightarrow l(ga,gb,gc).$$

18. Определение (см. [1])**.** Пусть M и M' — два модуля без кручения над кольцами R и R' соответственно. Отображение $f : M \to M'$ называется полулинейным, если существует такой гомоморфизм $\sigma : R \to R'$, что

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \sigma(\lambda)\varphi(x) + \sigma(\mu)\varphi(y) \quad \forall\, x, y \in M, \quad \forall\, \lambda, \mu \in R.$$

19. Предложение. *Любое полулинейное отображение индуцирует морфизм K-проективных геометрий $P(M)\backslash P(\mathrm{Ker}\,\varphi) \to P(M')$. Этот морфизм будем обозначать $P\varphi : P(M) \to P(M')$.*

20. Пример. Пусть G — K-проективная геометрия, E — подпространство G и F — Δ-дополнение, т.е. $E \cap F = \varnothing$, $G \cong E \vee F$. Отображение $g : G\backslash E \to F$, определяемое с помощью соотношения $ga = (a \vee E) \wedge F$ для всех $a \in G \setminus F$, является морфизмом.

21. Определение. Пусть L и L' — две K-проективные решетки. Отображение $\varphi : L \to L'$ называется морфизмом K-проективных решеток, если

(1) φ сохраняет супремумы, т.е. $\varphi(\vee A) = \vee\varphi(A)$ для любого подмножества $A \subseteq L$;

(2) φ отображает P-точку решетки L в P-точку решетки $L' : \varphi(a) \in G(L') \cup \{0\}$, $a \in G(L)$, т.е. φ «сохраняет P-точки».

22. Предложение. *Пусть $\varphi : L \to L'$ — морфизм K-проективных решеток L и L' и $E = \{a : \ a \in G(L),\ \varphi(a) = 0\}$. Тогда сужение φ на множество $G(L) \setminus E$ является морфизмом K-проективных геометрий: $G\varphi : G(L) \to G(L')$.*

23. Предложение. *Пусть $\varphi_1 : L_1 \to L_2$ и $\varphi_2 : L_2 \to L_1$ — два морфизма K-проективных решеток. Тогда $G(\varphi_2 \circ \varphi_1) = G\varphi_2 \circ G\varphi_1$. Следовательно, G — функтор из категории K-проективных решеток в категорию K-проективных геометрий.*

24. Предложение. *Пусть $g : G \to G'$ — морфизм K-проективных геометрий с ядром E. Тогда отображение $L_g : L(G) \to L(G')$, определенное с помощью $L_g(F) = \varepsilon(g(F \setminus E))$, является морфизмом K-проективных решеток.*

25. Предложение. *Пусть $g_1 : G_1 - \to G_2$ и $g_2 : G_2 - \to G_3$ — морфизмы K-проективных геометрий. Тогда $L(g_2 \circ g_1) = Lg_2 \circ Lg_1$. Следовательно, L — функтор, действующий из категории K-проективных геометрий в категорию K-проективных решеток.*

26. Теорема (см. [3])**.** *Категории K-проективных решеток и K-проективных геометрий эквивалентны.*

27. Предложение. *Пусть F — подпространство K-проективной геометрии G. Тогда любые два Δ-дополнительных к F подпространства E_1 и E_2 изоморфны.*

На языке решеток описаны проективные геометрии модулей на общих кольцах. Идеология берет начало в [2–4].

Пусть G — K-проективная геометрия с тернарным отношением $l \subset G \times G \times G$ и бинарным отношением $P \subset G \times G$. Предположим, что E — подпространство G. Напомним, что множество всех подпространств G является модулярной решеткой $L(G)$.

28. Определение. На множестве $G \setminus E$ рассмотрим следующее отношение: $a \sim b$ тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $x_1, x_2 \in E$, что $l(a, b, x_1)$ и $l(b, a, x_2)$.

29. Лемма (см. [2]). *Пусть a и b — элементы K-проективной геометрии. Тогда $a \sim b$ в том и только том случае, когда $a \vee E = b \vee E$.*

Очевидно, что бинарное отношение $\sim$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. это отношение эквивалентности.

Рассмотрим множество классов эквивалентности, т.е. фактормножество G/E.

30. Определение (см. [2]). Пусть G/E — фактормножество. На G/E рассмотрим бинарное отношение $\widetilde{P}(A, B)$, если существуют такие представители $a \in A$, $b \in B$, что $P(a, b)$, либо существует такой элемент $x \in B$, что $l(a, b, x)$, и тернарное отношение $\widetilde{l}(A, B, C)$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, что $l(a, b, c)$.

31. Лемма (см. [2]). *Пусть $a, b, c \in G$ — представители классов $A, B, C \in G/E$ соответственно. Пусть $B \neq C$. Тогда $\widetilde{l}(A, B, C)$ в том и только том случае, когда $a \vee E \subseteq (b \vee E) \vee (c \vee E)$.*

32. Предложение (см. [2]). *Пусть G/E — фактормножество с отношениями $\widetilde{P}$ и $\widetilde{l}$. Тогда G/E — K-проективная геометрия, изоморфная $G([E, G])$, где $[E, G] = \{F : \ F \in G(L), \ E \subseteq F\}$.*

Пусть G — K-проективная геометрия, E — подпространство G и G/E — факторгеометрия. Рассмотрим каноническую проекцию $\pi : G \setminus E \to G/E$, $\pi a = A$, $a \in A$.

33. Предложение (см. [2]). *Каноническая проекция $\pi : G \setminus E \to G/E$, $\pi : a \to a \in A$, является морфизмом K-проективных геометрий.*

34. Определение. Пусть $g : G \to G'$ — морфизм K-проективных геометрий с ядром $K \subseteq G$.

(a) Морфизм g называется регулярным, если для нетождественных $a, b \notin K$ и $P'(ga, gb)$ существует такой $x \in K$, что $l(a, b, x)$.
(b) Морфизм g называется рефлективным, если для любых коллинеарных точек $a', b', c' \in G'$ существуют прообразы $a, b, c \in G$, которые коллинеарны, $l(a, b, c)$.

Из этих определений непосредственно следует, что проекция $\pi : G \to G/E$ — это регулярный, рефлективный и сюръективный морфизм.

35. Лемма. *Пусть $K \subseteq G$ — такое подпространство, что $E \subseteq K$. Тогда $\pi(K \setminus E)$ — подпространство G/E и $\pi'(\pi(K \setminus E)) = K \setminus E)$.*

36. Следствие. *$\pi(K \setminus E)$ является K-проективной геометрией K/E.*

37. Следствие. *Решетка $L(G/E)$ изоморфна решетке $[E, G]$.*

38. Теорема. *Пусть $g : G \to G'$ — морфизм K-проективных геометрий с ядром $K \subseteq G$. Морфизм g можно представить в виде композиции $g = \overline{g} \circ \pi$ тогда и только тогда, когда $E \subseteq K$.*

Поскольку $\pi : G \setminus E \to G/E$ — сюръекция, разложение $g = \overline{g} \circ \pi$ определено единственным образом.

39. Предложение. *Пусть $\pi : G \to G'$ — морфизм K-проективных геометрий с ядром K, $E \subseteq K$ и $g = \overline{g} \circ \pi$. Индуцированный морфизм $\overline{g} : G/E \to G'$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $K = E$ и g — сюръективный, регулярный и рефлективный морфизм.*

40. Следствие. *Пусть M — модуль без кручения над кольцом главных идеалов R, K-подмодули M, $P(M)$, $P(K)$, $P(M/K)$ ассоциированы с K-проективными геометриями. Тогда $P(M/K)$ изоморфно факторгеометрии $P(M)/P(K)$.*

41. Определение. Пусть $g : G \to G'$ — морфизм K-проективных геометрий и F — подпространство G. Тогда сужение g^* является композицией $g \circ i$, где $i : F_- \to G$ — морфизм включения.

42. Лемма (см. [3]). *Пусть F — Δ-дополнение подпространства $E \subseteq G$. Тогда в любом классе эквивалентности $A \in G/E$ существует единственный представитель $a \in F$, если $A \subset E \vee F$.*

43. Замечание. Поскольку G является K-проективной геометрией, не все виды подпространств имеют дополнения.

Напомним, что подпространство F называется Δ-дополнением подпространства $E \subseteq G$, если $F \cap E = \varnothing$, $V \vee E \cong G$.

44. Предложение. *Пусть F — Δ-дополнение подпространства $E \subseteq G$. Тогда сужение π^* ($\pi/F \equiv \pi_F$) является изоморфизмом $\pi_F : F \to E \vee F/E$.*

45. Следствие. (1) *Включение $i : F_- \to G$ любого подпространства F является сечением, т.е. существует такой морфизм $r : G_- \to F$, что $r \circ i = \mathrm{id}$.*
(2) *Проекция $\pi : G_- \to G/E$ является ретракцией, т.е. существует такой морфизм $s : G/E_- \to G$, что $\pi \circ s = \mathrm{id}$.*

Пусть $g : G_- \to G'$ — морфизм K-проективных геометрий. Обозначим через $\mathrm{Ker}(g)$ ядро g и через $\mathrm{im}(g)$ — образ $g(G)$ в G'.

46. Лемма (см. [4]). *Пусть $r : G_- \to G'$ и $s : G' \to G$ — такие два морфизма K-проективных геометрий, что $r \circ s = \mathrm{id}$. Тогда*
(a) $\mathrm{Ker}(s) = \varnothing$ *и* $\mathrm{im}(s) \cap \mathrm{Ker}(r) = \varnothing$;
(b) *r — сюръективный и рефлективный морфизм, а s — инъективный и рефлективный морфизм.*

47. Теорема. *Пусть $s : G' \to G$ — морфизм K-проективных геометрий. Тогда следующие условия эквивалентны*:
(a) *s — селектор*;
(b) *s — инъективный и рефлективный морфизм подпространств* $\mathrm{Ker}(S) = \varnothing$ *и* $\mathrm{im}(s)$;
(c) *существуют такие подпространство $F \subseteq G$ и изоморфизм $v : G' \to F$, что $s = i \circ v$.*

48. Теорема. *Пусть $r : G \to G'$ — морфизм K-проективных геометрий. Предположим, что любая прямая геометрии G содержит как минимум три точки и что* $\mathrm{rank}\, G' \geqslant 1$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:
(a) *r — ретракция*;
(b) *r — сюръективный, регулярный и рефлективный морфизм*;
(c) *существуют такие подпространство $F \subseteq G$ и изоморфизм $u : G/E \to G'$, что $r = u \circ \pi$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Faure C. A., Frölicher A.* Morphisms of projective geometries and of corresponding lattices// Geom. Dedicata. — 1993. — *47*, № 1. — P. 25–40.
2. *Faure C. A., Frölicher A.* Morphisms of projective geometries and semilinear maps// Geom. Dedicata. — 1994. — *53*, № 3. — P. 237–262.
3. *Lashkhi A. A.* General geometric lattices and projective geometry of modules. Geometry, 1// J. Math. Sci. — 1995. — *74*, № 3. — P. 1044–1077.
4. *Buekenhout F.* Handbook of Incidence Geometry. Buildings and Foundations. — Amsterdam: North-Holland, 1995.

Бокелавадзе Т.
Кутаисский государственный университет им. А. Церетели, Кутаиси, Грузия
E-mail: `tengiz.bokelavadze@atsu.edu.ge`

Квирикашвили Т.
Грузинский технический университет, Тбилиси, Грузия
E-mail: `t.kviri@yahoo.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 39–62
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-39-62

УДК 512.532, 512.534.1, 512.562

ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ПОЛНОЙ ПОЛУГРУППЫ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ПОЛУРЕШЕТКАМИ КЛАССА $\Sigma_1(X,6)$

© 2020 г. **Я. ДИАСАМИДЗЕ, Г. ПАРТЕНАДЗЕ, Г. ТАВДГИРИДЗЕ**

Аннотация. В статье изучаются порождающие множества полной полугруппы бинарных отношений, определенные X-полурешетками объединений класса $\Sigma_1(X,6)$.

Ключевые слова: полурешетка объединений, полная полугруппа бинарных отношений, порождающее множество, квазинормальное представление бинарных отношений.

GENERATING SETS OF THE COMPLETE SEMIGROUP OF BINARY RELATIONS DEFINED BY SEMILATTICES OF THE CLASS $\Sigma_1(X,6)$

© 2020 **YA. DIASAMIDZE, G. PARTENADZE, G. TAVDGIRIDZE**

Abstract. In this paper, we study generating sets of the complete semigroup of binary relations defined by X-semilattices of unions of the class $\Sigma_1(X,6)$.

Keywords and phrases: semilattice of unions, complete semigroup of binary relations, generating set, quasinormal representation of binary relations.

AMS Subject Classification: 20M05, 20M10

1. Введение. Пусть X — произвольное непустое множество, D — X-полурешетка объединений, замкнутая относительно теоретико-множественного объединения элементов из D, f — произвольное отображение множества X в множество D. Любому отображению f поставим в соответствие бинарное отношение α_f на множестве X, удовлетворяющее условию

$$\alpha_f = \bigcup_{x\in X} (\{x\} \times f(x)).$$

Множество всех таких α_f $(f : X \to D)$ обозначается $B_X(D)$. Легко доказать, что $B_X(D)$ является полугруппой относительно операции умножения бинарных отношений. Эта полугруппа называется полной полугруппой бинарных отношений, определенной X-полурешеткой объединений D.

Обозначим через $\varnothing$ пустое бинарное отношение или пустое подмножество множества X. Условие $(x,y) \in \alpha$ записывается в виде $x\alpha y$. Далее, пусть

$$x, y \in X, \quad Y \subseteq X, \quad \alpha \in B_X(D), \quad \breve{D} = \bigcup_{Y\in D} Y, \quad T \in D.$$

Обозначим символами $y\alpha$, $Y\alpha$, $V(D,\alpha)$, X^* и $V(X^*,\alpha)$ следующие множества:

$$y\alpha=\{x\in X \mid y\alpha x\},\quad Y\alpha=\bigcup_{y\in Y} y\alpha,\quad V(D,\alpha)=\{Y\alpha \mid Y\in D\},$$
$$X^*=\{Y \mid \varnothing\neq Y\subseteq X\},\quad V(X^*,\alpha)=\{Y\alpha \mid \varnothing\neq Y\subseteq X\},$$
$$D_T=\{Z\in D \mid T\subseteq Z\},\quad Y_T^{\alpha}=\{y\in X \mid y\alpha=T\}.$$

Следующие утверждения хорошо известны.

Теорема 1.1. *Пусть $D=\{\breve{D},Z_1,Z_2,\dots,Z_{m-1}\}$ — некоторая конечная X-полурешетка объединений и $C(D)=\{P_0,P_1,P_2,\dots,P_{m-1}\}$ — семейство множеств попарно непересекающихся подмножеств множества X (множество $\varnothing$ может повторяться несколько раз). Если φ — отображение полурешетки D в семейство множеств $C(D)$, удовлетворяющее условиям*

$$\varphi=\begin{pmatrix}\breve{D} & Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{m-1}\\ P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_{m-1}\end{pmatrix},\quad \widehat{D}_Z=D\setminus D_Z,$$

то выполняются следующие равенства:

$$\breve{D}=P_0\cup P_1\cup P_2\cup\ldots\cup P_{m-1},\quad Z_i=P_0\cup\bigcup_{T\in\widehat{D}_{Z_i}}\varphi(T). \tag{1.1}$$

В дальнейшем эти равенства будут называться *формальными.*

Доказано, что, если элементы полурешетки D представлены в виде (1.1), то среди параметров P_i, $0<i\leqslant m-1$, существуют такие параметры, которые не могут быть пустыми множествами для D. Такие множества P_i называются *базисными источниками*, в то время как множества P_j, $0\leqslant j\leqslant m-1$, которые могут быть пустыми множествами, называются *источниками полноты.*

Доказано, что при отображении φ число накрывающих элементов прообраза базисного источника всегда равно 1, в то время как число накрывающих элементов прообраза источника полноты или равно нулю, или больше 1 (см. [2, Chap. 11]).

Пусть $P_0,P_1,P_2,\dots,P_{m-1}$ — параметры в формальных равенствах, β — любое бинарное отношение из полугруппы $B_X(D)$ и

$$\overline{\beta}=\bigcup_{i=0}^{m-1}\Big(P_i\times\bigcup_{t\in P_i}t\beta\Big)\cup\bigcup_{t'\in X\setminus\breve{D}}\big(\{t'\}\times\overline{\beta}_2(t')\big), \tag{1.2}$$

где $\overline{\beta}_2$ — любое отображение множества $X\setminus\breve{D}$ в множество D. Тогда представление бинарного отношения β вида $\overline{\beta}$ называется *субквазинормальным.*

Если $\overline{\beta}$ — субквазинормальное представление бинарного отношения β, то для бинарного отношения $\overline{\beta}$ выполняются следующие утверждения:

(a) $\overline{\beta}\in B_X(D)$;

(b) $\bigcup\limits_{i=0}^{m-1}\Big(P_i\times\bigcup\limits_{t\in P_i}t\beta\Big)\subseteq\beta$ и $\beta=\overline{\beta}$ для некоторого отображения $\overline{\beta}_2$ множества $X\setminus\breve{D}$ в множество D;

(c) субквазинормальное представление бинарного отношения β квазинормально;

(d) если $\overline{\beta}_1=\begin{pmatrix}P_0 & P_1 & \dots & P_{m-1}\\ P_0\overline{\beta} & P_1\overline{\beta} & \dots & P_{m-1}\overline{\beta}\end{pmatrix}$, то $\overline{\beta}_1$ — отображение семейства множеств $C(D)$ в множество $D\cup\{\varnothing\}$.

Отметим, что, если P_j $(0\leqslant j\leqslant m-1)$ — такие источники полноты, что $P_j=\varnothing$, то равенство $P_j\overline{\beta}=\varnothing$ всегда выполняется. Также существуют такие базисные источники P_i, $0\leqslant i\leqslant m-1$, что $\bigcup\limits_{t\in P_i}t\beta=\varnothing$, т.е. $P_i\overline{\beta}=\varnothing$.

Определение 1.1. В дальнейшем, элементы $\overline{\beta}_1$ и $\overline{\beta}_2$ называются нормальным и дополнительным отображениями для бинарного отношения $\overline{\beta}\in B_X(D)$.

Теорема 1.2 (см. [1, теорема 1.2])**.** *Пусть D — конечное множество и $\alpha, \beta \in B_X(D)$. Тогда для любого субквазинормального представления $\overline{\beta}$ бинарного отношения β выполняется равенство $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \overline{\beta}$.*

Теорема 1.3 (см. [1, теорема 1.3])**.** *Пусть $\widetilde{B}$ — любое порождающее множество полугруппы $B_X(D)$. Если для некоторых α и δ из множества $\widetilde{B}$ и субквазинормального представления $\overline{\beta} \in B_X(D)$ бинарного отношения β выполняется неравенство $\alpha \neq \delta \circ \overline{\beta}$, то соотношение $\alpha \neq \delta \circ \beta$ также верно.*

Определение 1.2 (см. [2, Определение 1.15.1])**.** Говорят, что элемент α полугруппы $B_X(D)$ является *внешним*, если $\alpha \neq \delta \circ \beta$ для всех $\delta, \beta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$.

Хорошо известно, что если B — множество всех внешних элементов полугруппы $B_X(D)$ и B' — любое порождающее множество для $B_X(D)$, то $B \subseteq B'$ (см. [2, Лемма 1.15.1]).

Определение 1.3. Представление $\alpha = \bigcup\limits_{T \in D} (Y_T^\alpha \times T)$ бинарного отношения α называется *квазинормальным*, если $\bigcup\limits_{T \in D} Y_T^\alpha = X$ и $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha = \varnothing$ для любых $T, T' \in D$, $T \neq T'$.

2. Порождающие множества полугруппы бинарных отношений, определенные полурешетками класса $\Sigma_{10}(X, 6)$, где $P = \varnothing$ и $|X \setminus \breve{D}| \geqslant 1$ или $X = \breve{D}$.

Определение 2.1. Обозначим через $\Sigma_1(X, 6)$ класс всех X-полурешеток объединений, каждый элемент которого изоморфен некоторой X-полурешетке объединений $D = \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, удовлетворяющей соотношениям

$$Z_4 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D}, \quad Z_5 \subset Z_3 \subset Z_1 \subset \breve{D}, \quad Z_2 \subset \breve{D}, \quad Z_5 \setminus Z_4 \neq \varnothing,$$
$$Z_4 \setminus Z_5 \neq \varnothing, \quad Z_3 \setminus Z_2 \neq \varnothing, \quad Z_2 \setminus Z_3 \neq \varnothing, \quad Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing, \quad Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing,$$
$$Z_5 \cup Z_4 = Z_3, \quad Z_5 \cup Z_2 = Z_4 \cup Z_2 = Z_3 \cup Z_2 = Z_1 \cup Z_2 = \breve{D}$$

(см. рис. 1).

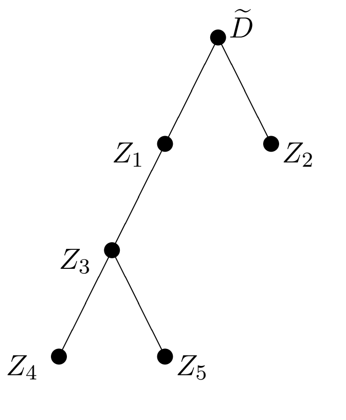

Рис. 1

Легко видеть, что $\widetilde{D} = \{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1\}$ — неприводимое порождающее множество для полурешетки D.

Пусть $C(D) = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ — семейство множеств, где P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 — попарно дизъюнктные подмножества множества X и

$$\varphi = \begin{pmatrix} \breve{D} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{pmatrix}$$

— отображение полурешетки D на семейство множеств $C(D)$. Тогда формальные равенства полурешетки D имеют вид

$$\begin{aligned} \breve{D} &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5, \\ Z_1 &= P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5, \\ Z_2 &= P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5, \\ Z_3 &= P_0 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5, \\ Z_4 &= P_0 \cup P_2 \cup P_5, \\ Z_5 &= P_0 \cup P_2 \cup P_4 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь элементы P_5, P_4, P_3, P_2, P_1 — базисные источники и элемент P_0 — источник полноты для полурешетки D. Следовательно, $|X| \geqslant 5$, поскольку $|P_5| \geqslant 1$, $|P_4| \geqslant 1$, $|P_3| \geqslant 1$, $|P_2| \geqslant 1$ и $|P_1| \geqslant 1$ (см. [2, Chap. 11]). Из формальных равенств полурешетки D непосредственно следует, что

$$\begin{gathered} P_5 = Z_4 \setminus Z_5, \quad P_4 = Z_5 \setminus Z_4, \quad P_3 = Z_1 \setminus Z_3, \\ P_2 = Z_1 \setminus Z_2, \quad P_1 = Z_2 \setminus Z_1, \quad P_0 = Z_5 \cap Z_4 \cap Z_2. \end{gathered} \tag{2.2}$$

В статье изучаются неприводимые порождающие множества полугруппы $B_X(D)$, порожденные полурешетками класса $\Sigma_1(X, 6)$.

Определение 2.2. Символами $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_1$ обозначим следующие множества:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_5 = \Big\{ &\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \Big\}, \\ \mathfrak{A}_4 = \Big\{ &\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \\ &\{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\} \Big\}, \\ \mathfrak{A}_3 = \Big\{ &\{Z_5, Z_4, Z_3\},\ \{Z_5, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_1\},\ \{Z_4, Z_3, Z_1\}, \\ &\{Z_5, Z_3, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_3, Z_1, \breve{D}\} \Big\}; \\ \mathfrak{A}_2 = \Big\{ &\{Z_5, Z_3\},\ \{Z_5, Z_1\},\ \{Z_4, Z_3\},\ \{Z_4, Z_1\},\ \{Z_3, Z_1\},\ \{Z_5, \breve{D}\}, \\ &\{Z_4, \breve{D}\},\ \{Z_3, \breve{D}\},\ \{Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_1, \breve{D}\} \Big\}, \\ \mathfrak{A}_1 = \Big\{ &\{Z_5\},\ \{Z_4\},\ \{Z_3\},\ \{Z_2\},\ \{Z_1\},\ \{\breve{D}\} \Big\}. \end{aligned}$$

Определение 2.3. Символом $\Sigma_{1.0}(X, 6)$ обозначим полурешетки $D = \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ класса $\Sigma_1(X, 6)$, для которых $Z_5 \cap Z_4 \cap Z_2 \neq \varnothing$. Из последнего неравенства из формальных равенств (2.1) полурешетки D следует, что

$$Z_5 \cap Z_4 \cap Z_2 = P_0 \neq \varnothing,$$

т.е. $|X| \geqslant 6$, так как

$$P_5 \neq \varnothing, \quad P_4 \neq \varnothing, \quad P_3 \neq \varnothing, \quad P_2 \neq \varnothing, \quad P_1 \neq \varnothing, \quad P_0 \neq \varnothing.$$

В этом случае мы предполагаем, что $D \in \Sigma_{1.0}(X, 6)$.

Лемма 2.1. *Пусть $D \in \Sigma_{1.0}(X, 6)$ и $\alpha = \delta \circ \beta$ для некоторых $\alpha, \delta, \beta \in B_X(D)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Пусть $T, T' \in \{Z_5, Z_4, Z_2\}$, $T \neq T'$. Если $T, T' \in V(D, \alpha)$, то α — внешний элемент полугруппы $B_X(D)$.*

(b) *Если $T \in \{Z_3, Z_1\}$ и $T, Z_2 \in V(D, \alpha)$, то α — внешний элемент полугруппы $B_X(D)$.*

Доказательство. Пусть $Z_0 = \breve{D}$ и $\alpha = \delta \circ \beta$ для некоторых $\delta, \beta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$. Если квазинормальное представление бинарного отношения δ имеет вид

$$\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3) \cup (Y_2^\delta \times Z_2) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times Z_0),$$

то

$$\alpha = \delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) \cup \\ \cup (Y_3^\delta \times Z_2\beta) \cup (Y_1^\delta \times Z_1\beta) \cup (Y_0^\delta \times Z_0\beta). \quad (2.3)$$

Из формальных равенств (2.1) для полурешетки D получаем:

$$\begin{aligned} Z_0\beta &= P_0\beta \cup P_1\beta \cup P_2\beta \cup P_3\beta \cup P_4\beta \cup P_5\beta, \\ Z_1\beta &= P_0\beta \cup P_2\beta \cup P_3\beta \cup P_4\beta \cup P_5\beta, \\ Z_2\beta &= P_0\beta \cup P_1\beta \cup P_3\beta \cup P_4\beta \cup P_5\beta, \\ Z_3\beta &= P_0\beta \cup P_2\beta \cup P_4\beta \cup P_5\beta, \\ Z_4\beta &= P_0\beta \cup P_2\beta \cup P_5\beta, \\ Z_5\beta &= P_0\beta \cup P_2\beta \cup P_4\beta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $P_i\beta \neq \varnothing$ для любых $P_i \neq \varnothing$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ и $\beta \in B_X(D)$. В самом деле, по предположению $P_i \neq \varnothing$ для любого $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ и $\beta \neq \varnothing$, так как $\varnothing \notin D$. Пусть $y \in P_i$ для некоторого $y \in X$. Тогда $y \in \check{D}$, $\beta = \alpha_f$ для некоторого $f : X \to D$ и

$$\alpha_f = \bigcup_{x \in X} \big(\{x\} \times f(x)\big) \supseteq \{y\} \times f(y),$$

т.е. существует такой элемент $z \in f(y)$, что $y\alpha_f z$ и $y\beta z$. Отсюда согласно определению множества $P_i\beta$ получаем, что $z \in P_i\beta$, так как $y \in P_i$, $y\beta z$. Таким образом, $P_i\beta \neq \varnothing$, т.е. $P_i\beta \in D$ для любого $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Пусть теперь $Z_i\beta = T$ и $Z_j\beta = T'$ для некоторых $0 \leqslant i \neq j \leqslant 5$ и $T \neq T'$, $T, T' \in \{Z_5, Z_4, Z_2\}$. Тогда из уравнения (2.4) следует, что $T = P_0\beta = T'$, так как T и T' — минимальные элементы полурешетки D. Равенство $T = T'$ противоречит неравенству $T \neq T'$. Пункт (a) леммы 2.1 доказан.

(b) Пусть $Z_i\beta = Z_2$ и $Z_j\beta = T$ $(T \in \{Z_3, Z_1\})$ для некоторых $0 \leqslant i \neq j \leqslant 5$. Если $0 \leqslant i \leqslant 5$, то из формальных равенств для полурешетки D мы получаем, что

$$\begin{aligned} Z_0\beta &= P_0\beta \cup P_1\beta \cup P_2\beta \cup P_3\beta \cup P_4\beta \cup P_5\beta = P_0\beta = P_1\beta = P_2\beta = P_3\beta = P_4\beta = P_5\beta = Z_2, \\ Z_1\beta &= P_0\beta \cup P_2\beta \cup P_3\beta \cup P_4\beta \cup P_5\beta = P_0\beta = P_2\beta = P_3\beta = P_4\beta = P_5\beta = Z_2, \\ Z_2\beta &= P_0\beta \cup P_1\beta \cup P_3\beta \cup P_4\beta \cup P_5\beta = P_0\beta = P_1\beta = P_3\beta = P_4\beta = P_5\beta = Z_2, \\ Z_3\beta &= P_0\beta \cup P_2\beta \cup P_4\beta \cup P_5\beta = P_0\beta = P_2\beta = P_4\beta = P_5\beta = Z_2, \\ Z_4\beta &= P_0\beta \cup P_2\beta \cup P_5\beta = P_0\beta = P_2\beta = P_5\beta = Z_2, \\ Z_5\beta &= P_0\beta \cup P_2\beta \cup P_4\beta = P_0\beta = P_2\beta = P_4\beta = Z_2, \end{aligned}$$

так как Z_2 — минимальный элемент полурешетки D.

Пусть теперь $i \neq j$.

(1) Если $Z_0\beta = P_0\beta = P_1\beta = P_2\beta = P_3\beta = P_4\beta = P_5\beta = Z_2$ и $j = 1, 2, 3, 4, 5$, то имеем

$$T = Z_1\beta = Z_2\beta = Z_3\beta = Z_4\beta = Z_5\beta = Z_2,$$

что противоречит неравенству $T \neq Z_2$.

(2) Если $Z_1\beta = P_0\beta = P_2\beta = P_3\beta = P_4\beta = P_5\beta = Z_2$ и $j = 0, 2, 3, 4, 5$, то имеем

$$T = Z_0\beta = Z_2\beta = Z_2 \cup P_1\beta, \quad T = Z_3\beta = Z_4\beta = Z_5\beta = Z_2,$$

где $P_1\beta \in D$. Последние неравенства невозможны, потому что $T \neq Z_2 \cup Z$ для любого $Z \in D$ и $T \neq Z_2$ по определению полурешетки D.

(3) Если $Z_2\beta = P_0\beta = P_1\beta = P_3\beta = P_4\beta = P_5\beta = Z_2$ и $j = 0, 1, 3, 4, 5$, то имеем

$$T = Z_0\beta = Z_1\beta = Z_3\beta = Z_4\beta = Z_5\beta = Z_2 \cup P_2\beta,$$

где $P_2\beta \in D$. Последние равенства невозможны, потому что $T \neq Z_2 \cup Z$ для любого $Z \in D$ по определению полурешетки D.

(4) Если $Z_3\beta = P_0\beta = P_2\beta = P_4\beta = P_5\beta = Z_2$ и $j = 0, 1, 2, 4, 5$, то имеем

$$T = Z_0\beta = Z_2\beta = Z_2 \cup P_1\beta \cup P_3\beta,$$
$$T = Z_1\beta = Z_2 \cup P_3\beta, \quad T = Z_4\beta = Z_5\beta = Z_2,$$

где $P_1\beta, P_3\beta \in D$. Последние равенства невозможны, потому что $T \neq Z_2 \cup Z \cup Z'$, $T \neq Z_2 \cup Z$ и $T \neq Z_2$ для любых $Z, Z' \in D$ по определению полурешетки D.

(5) Если $Z_4\beta = P_0\beta = P_2\beta = P_5\beta$ и $j = 0, 1, 2, 3, 5$, то имеем

$$T = Z_0\beta = Z_2\beta = Z_2 \cup P_1\beta \cup P_3\beta \cup P_4\beta,$$
$$T = Z_1\beta = Z_2 \cup P_3\beta \cup P_4\beta, \quad T = Z_3\beta = Z_5\beta = Z_2 \cup P_4\beta,$$

где $P_1\beta, P_3\beta, P_4\beta \in D$. Последние равенства невозможны, потому что $T \neq Z_2 \cup Z \cup Z' \cup Z''$, $T \neq Z_2 \cup Z \cup Z'$ и $T \neq Z_2 \cup Z$ для любых $Z, Z', Z'' \in D$ по определению полурешетки D.

(6) Если $Z_5\beta = P_0\beta = P_2\beta = P_4\beta$ и $j = 0, 1, 2, 3, 4$, то имеем

$$T = Z_0\beta = Z_2\beta = Z_2 \cup P_1\beta \cup P_3\beta \cup P_5\beta,$$
$$T = Z_1\beta = Z_2 \cup P_3\beta \cup P_5\beta, \quad T = Z_3\beta = Z_4\beta = Z_2 \cup P_5\beta,$$

где $P_1\beta, P_3\beta, P_5\beta \in D$. Последние равенства невозможны, потому что $T \neq Z_2 \cup Z \cup Z' \cup Z''$, $T \neq Z_2 \cup Z \cup Z'$ и $T \neq Z_2 \cup Z$ для любых $Z, Z', Z'' \in D$ по определению полурешетки D.

Пункт (b) леммы 2.1 также доказан. □

Пусть $D \in \Sigma_{1.0}(X, 6)$. Символами $\mathfrak{A}_0$, $B(\mathfrak{A}_0)$ и B_0 обозначим следующие множества:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_0 = \Big\{ &\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\\
&\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\\
&\{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3\},\ \{Z_5, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_2, Z_1, \breve{D}\}\Big\},
\end{aligned}$$
$$B(\mathfrak{A}_0) = \Big\{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*, \alpha) \in \mathfrak{A}_0\Big\},$$
$$B_0 = \Big\{\alpha \in B_X(D) \mid \ V(X^*, \alpha) = D\Big\}.$$

Из леммы 2.1 следует, что множества B_0 и $B(\mathfrak{A}_0)$ являются внешними элементами для полугруппы $B_X(D)$.

Лемма 2.2. *Пусть $D \in \Sigma_{1.0}(X, 6)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(a) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_5^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, то α порождается элементами элементов множества B_0.

(b) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, то α порождается элементами элементов множества B_0.

Доказательство. (a) Пусть представления бинарных отношений δ и β имеют вид

$$\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_2^\delta \times Z_2) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}),$$
$$\beta = (Z_5 \times Z_5) \cup ((Z_4 \setminus Z_5) \times Z_4) \cup ((Z_2 \setminus Z_1) \times Z_2) \cup \big(((Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3) \times Z_1\big) \cup ((X \setminus \breve{D}) \times \breve{D}),$$

где $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$,

$$\begin{aligned}
&Z_5 \cup (Z_4 \setminus Z_5) \cup (Z_2 \setminus Z_1) \cup ((Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3) \cup (X \setminus \breve{D}) =\\
&\qquad = (P_0 \cup P_2 \cup P_4) \cup P_5 \cup P_1 \cup P_3 \cup (X \setminus \breve{D}) = \breve{D} \cup (X \setminus \breve{D}) = X
\end{aligned}$$

(см. (2.1) и (2.2)). Тогда $\delta, \beta \in B_0$ и

$$\begin{gathered}
Z_5\beta = Z_5, \quad Z_4\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3, \\
Z_2\beta = (P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5)\beta = \breve{D}, \\
Z_1\beta = (P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4)\beta = Z_1, \quad \breve{D}\beta = \breve{D}, \\
\alpha = \delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_2^\delta \times Z_2\beta) \cup (Y_1^\delta \times Z_1\beta) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}\beta) = \\
= (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_3) \cup (Y_2^\delta \times \breve{D}) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}) = \\
= (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_3) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) \cup ((Y_2^\delta \cup Y_0^\delta) \times \breve{D}) = \alpha,
\end{gathered}$$

если

$$Y_5^\delta = Y_5^\alpha, \quad Y_4^\delta = Y_3^\alpha, \quad Y_1^\delta = Y_1^\alpha, \quad Y_2^\delta \cup Y_0^\delta = Y_0^\alpha.$$

Последние равенства возможны, поскольку $|Y_2^\delta \cup Y_0^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_0^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (a) леммы 2.2 доказан.

(b) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ и β имеют вид

$$\begin{aligned}
&\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_2^\delta \times Z_2) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}), \\
&\beta = ((Z_4 \setminus Z_5) \times Z_5) \cup (Z_5 \times Z_4) \cup ((Z_2 \setminus Z_1) \times Z_2) \cup \big(((Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3) \times Z_1\big) \cup ((X \setminus \breve{D}) \times \breve{D}),
\end{aligned}$$

где $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$,

$$\begin{aligned}
&(Z_4 \setminus Z_5) \cup Z_5 \cup (Z_2 \setminus Z_1) \cup ((Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_3) \cup (X \setminus \breve{D}) = \\
&\qquad = P_5 \cup (P_0 \cup P_2 \cup P_4) \cup P_1 \cup P_3 \cup (X \setminus \breve{D}) = \breve{D} \cup (X \setminus \breve{D}) = X
\end{aligned}$$

(см. (2.1) и (2.2)). Тогда $\delta, \beta \in B_0$ и

$$\begin{gathered}
Z_5\beta = Z_4, \quad Z_4\beta = Z_4 \cup Z_5 = Z_3, \quad Z_2\beta = (P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5)\beta = \breve{D}, \\
Z_1\beta = (P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4)\beta = Z_1, \quad \breve{D}\beta = \breve{D}, \\
\alpha = \delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_2^\delta \times Z_2\beta) \cup (Y_1^\delta \times Z_1\beta) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}\beta) = \\
= (Y_5^\delta \times Z_4) \cup (Y_4^\delta \times Z_3) \cup (Y_2^\delta \times \breve{D}) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}) = \\
= (Y_5^\delta \times Z_4) \cup (Y_4^\delta \times Z_3) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) \cup ((Y_2^\delta \cup Y_0^\delta) \times \breve{D}) = \alpha,
\end{gathered}$$

если

$$Y_5^\delta = Y_4^\alpha, \quad Y_4^\delta = Y_3^\alpha, \quad Y_1^\delta = Y_1^\alpha, \quad Y_2^\delta \cup Y_0^\delta = Y_0^\alpha.$$

Последние равенства возможны, поскольку $|Y_2^\delta \cup Y_0^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_0^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (b) леммы 2.2 также доказан. □

Лемма 2.3. *Пусть $D \in \Sigma_{1.0}(X, 6)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(a) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1),$$

где $Y_5^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, то α порождается элементами элементов множества $B(\mathfrak{A}_0)$.

(b) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1),$$

где $Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, то α порождается элементами элементов множества $B(\mathfrak{A}_0)$.

(c) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_5^\alpha, Y_3^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, то α порождается элементами множества $B(\mathfrak{A}_0)$.

(d) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

(e) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_5^\alpha, Y_1^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

(f) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_4^\alpha, Y_1^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

(g) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_3^\alpha, Y_1^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

Доказательство. (a) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3) \cup (Y_1^\delta \times Z_1),$$
$$\beta = (Z_5 \times Z_5) \cup ((Z_4 \setminus Z_5) \times Z_4) \cup ((Z_2 \setminus Z_1) \times Z_3) \cup \big(\big(X \setminus (\breve{D} \setminus (Z_1 \setminus Z_3))\big) \times Z_1\big),$$

где $Y_5^\delta, Y_4^\delta, Y_1^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда по определению множества $\mathfrak{A}_0$ получаем, что $\delta, \beta \in B(\mathfrak{A}_0)$,

$$Z_5 \cup (Z_4 \setminus Z_5) \cup (Z_2 \setminus Z_1) \cap \big(X \setminus (\breve{D} \setminus (Z_1 \setminus Z_3))\big) =$$
$$= (P_0 \cup P_2 \cup P_4) \cup P_5 \cup P_1 \cup (X \setminus (\breve{D} \setminus P_3)) = (\breve{D} \setminus P_3) \cup (X \setminus (\breve{D} \setminus P_3)) = X$$

и $Z_5\beta = Z_5$, $Z_4\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3$, $Z_3\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3$, $Z_1\beta = Z_5 \cup Z_4 \cup Z_1 = Z_1$,

$$\delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) \cup (Y_1^\delta \times Z_1\beta) =$$
$$= (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_3) \cup (Y_3^\delta \times Z_3) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) =$$
$$= (Y_5^\delta \times Z_5) \cup ((Y_4^\delta \cup Y_3^\delta) \times Z_3) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) = \alpha,$$

если $Y_5^\delta = Y_5^\alpha$, $Y_4^\delta \cup Y_3^\delta = Y_3^\alpha$ и $Y_1^\delta = Y_1^\alpha$. Последние равенства возможны, поскольку $|Y_4^\delta \cup Y_3^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_3^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (a) леммы 2.3 доказан.

(b) Пусть представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3) \cup (Y_1^\delta \times Z_1),$$
$$\beta = ((Z_4 \setminus Z_5) \times Z_5) \cup (Z_5 \times Z_4) \cup ((Z_2 \setminus Z_1) \times Z_3) \cup \big(\big(X \setminus (\breve{D} \setminus (Z_1 \setminus Z_3))\big) \times Z_1\big),$$

где $Y_5^\delta, Y_4^\delta, Y_1^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда по определению множества $\mathfrak{A}_0$ имеем, что $\delta, \beta \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $Z_5\beta = Z_4$, $Z_4\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3$, $Z_3\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3$, $Z_1\beta = Z_5 \cup Z_4 \cup Z_1 = Z_1$,

$$\delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) \cup (Y_1^\delta \times Z_1\beta) =$$
$$= (Y_5^\delta \times Z_4) \cup (Y_4^\delta \times Z_3) \cup (Y_3^\delta \times Z_3) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) =$$
$$= (Y_5^\delta \times Z_4) \cup ((Y_4^\delta \cup Y_3^\delta) \times Z_3) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) = \alpha,$$

если

$$Y_5^\delta = Y_4^\alpha, \quad Y_4^\delta \cup Y_3^\delta = Y_3^\alpha, \quad Y_1^\delta = Y_1^\alpha.$$

Последние равенства возможны, поскольку $|Y_4^\delta \cup Y_3^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_3^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (b) леммы 2.3 доказан.

(c) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}),$$
$$\beta = (Z_5 \times Z_5) \cup ((Z_4 \setminus Z_5) \times Z_4) \cup ((Z_2 \setminus Z_1) \times Z_3) \cup \big(\big(X \setminus (\breve{D} \setminus (Z_1 \setminus Z_3))\big) \times \breve{D}\big),$$

где $Y_5^\delta, Y_4^\delta, Y_0^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда по определению множества $\mathfrak{A}_0$ имеем, что $\delta, \beta \in B(\mathfrak{A}_0)$,

$$Z_5 \cup (Z_4 \setminus Z_5) \cup (Z_2 \setminus Z_1) \cap \big(X \setminus (\breve{D} \setminus (Z_1 \setminus Z_3))\big) =$$
$$= (P_0 \cup P_2 \cup P_4) \cup P_5 \cup P_1 \cup (X \setminus (\breve{D} \setminus P_3)) = (\breve{D} \setminus P_3) \cup (X \setminus (\breve{D} \setminus P_3)) = X,$$

и, кроме того,

$$Z_5\beta = Z_5, \quad Z_4\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3, \quad Z_3\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3, \quad \breve{D}\beta = Z_5 \cup Z_4 \cup Z_3 \cup \breve{D} = \breve{D},$$

$$\delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}\beta) =$$
$$= (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_3) \cup (Y_3^\delta \times Z_3) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}) =$$
$$= (Y_5^\delta \times Z_5) \cup ((Y_4^\delta \cup Y_3^\delta) \times Z_3) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}) = \alpha,$$

если

$$Y_5^\delta = Y_5^\alpha, \quad Y_4^\delta \cup Y_3^\delta = Y_3^\alpha, \quad Y_0^\delta = Y_0^\alpha.$$

Последние равенства возможны, поскольку $|Y_4^\delta \cup Y_3^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_3^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (c) леммы 2.3 доказан.

(d) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}),$$
$$\beta = ((Z_4 \setminus Z_5) \times Z_5) \cup (Z_5 \times Z_4) \cup ((Z_2 \setminus Z_1) \times Z_3) \cup \big(\big(X \setminus (\breve{D} \setminus (Z_1 \setminus Z_3))\big) \times \breve{D}\big),$$

где $Y_5^\delta, Y_4^\delta, Y_0^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда по определению множества $\mathfrak{A}_0$ имеем

$$\delta, \beta \in B(\mathfrak{A}_0), \quad Z_5\beta = Z_4, \quad Z_4\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3, \quad Z_3\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3, \quad \breve{D}\beta = Z_5 \cup Z_4 \cup Z_3 \cup \breve{D} = \breve{D},$$

$$\delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}\beta) =$$
$$= (Y_5^\delta \times Z_4) \cup (Y_4^\delta \times Z_3) \cup (Y_3^\delta \times Z_3) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}) =$$
$$= (Y_5^\delta \times Z_4) \cup ((Y_4^\delta \cup Y_3^\delta) \times Z_3) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}) = \alpha,$$

если

$$Y_5^\delta = Y_4^\alpha, \quad Y_4^\delta \cup Y_3^\delta = Y_3^\alpha, \quad Y_0^\delta = Y_0^\alpha.$$

Последние равенства возможны, потому что $|Y_4^\delta \cup Y_3^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_3^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (d) леммы 2.3 доказан.

(e) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_2^\delta \times Z_2) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}),$$
$$\beta = ((Z_2 \cap Z_1) \times Z_5) \cup ((Z_2 \setminus Z_1) \times Z_2) \cup ((Z_1 \setminus Z_2) \times Z_1) \cup ((X \setminus \breve{D}) \times \breve{D}),$$

где $Y_5^\delta, Y_2^\delta, Y_1^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда по определению множества $\mathfrak{A}_0$ имеем $\delta, \beta \in B(\mathfrak{A}_0)$,

$$(Z_2 \cap Z_1) \cup (Z_2 \setminus Z_1) \cup (Z_1 \setminus Z_2) \cap (X \setminus \breve{D}) =$$
$$= (P_0 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5) \cup P_1 \cup P_2 \cup (X \setminus \breve{D}) = \breve{D} \cup (X \setminus \breve{D}) = X$$

и

$$Z_5\beta = Z_5, \quad Z_2\beta = Z_5 \cup Z_2 \cup Z_1 = \breve{D}, \quad Z_1\beta = Z_5 \cup Z_1 = Z_1, \quad \breve{D}\beta = \breve{D},$$

$$\begin{aligned}\delta\circ\beta = (Y_5^\delta\times Z_5\beta)\cup(Y_2^\delta\times Z_2\beta)\cup(Y_1^\delta\times Z_1\beta)\cup(Y_0^\delta\times \breve{D}\beta) = \\ = (Y_5^\delta\times Z_5)\cup(Y_2^\delta\times \breve{D})\cup(Y_1^\delta\times Z_1)\cup(Y_0^\delta\times \breve{D}) = \\ = (Y_5^\delta\times Z_5)\cup(Y_1^\delta\times Z_1)\cup((Y_2^\delta\cup Y_0^\delta)\times \breve{D}) = \alpha\end{aligned}$$

если
$$Y_5^\delta = Y_5^\alpha,\quad Y_1^\delta = Y_1^\alpha,\quad Y_2^\delta\cup Y_0^\delta = Y_0^\alpha.$$
Последние равенства возможны, потому что $|Y_2^\delta\cup Y_0^\delta|\geqslant 1$ (напомним, что $|Y_0^\delta|\geqslant 0$ по предположению). Пункт (e) леммы 2.3 доказан.

(f) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ,β имеют вид
$$\begin{aligned}\delta &= (Y_5^\delta\times Z_5)\cup(Y_2^\delta\times Z_2)\cup(Y_1^\delta\times Z_1)\cup(Y_0^\delta\times \breve{D}),\\ \beta &= ((Z_2\cap Z_1)\times Z_4)\cup((Z_2\setminus Z_1)\times Z_2)\cup((Z_1\setminus Z_2)\times Z_1)\cup((X\setminus \breve{D})\times \breve{D}),\end{aligned}$$
где $Y_5^\delta, Y_2^\delta, Y_1^\delta\in\{\varnothing\}$. Тогда по определению множества $\mathfrak{A}_0$ имеем
$$\delta,\beta\in B(\mathfrak{A}_0),\quad Z_5\beta = Z_4,\quad Z_2\beta = Z_5\cup Z_2\cup Z_1 = \breve{D},\quad Z_1\beta = Z_5\cup Z_1 = Z_1,\quad \breve{D}\beta = \breve{D},$$

$$\begin{aligned}&\delta\circ\beta = (Y_5^\delta\times Z_5\beta)\cup(Y_2^\delta\times Z_2\beta)\cup(Y_1^\delta\times Z_1\beta)\cup(Y_0^\delta\times \breve{D}\beta) = \\ &= (Y_5^\delta\times Z_4)\cup(Y_2^\delta\times \breve{D})\cup(Y_1^\delta\times Z_1)\cup(Y_0^\delta\times \breve{D}) = (Y_5^\delta\times Z_4)\cup(Y_1^\delta\times Z_1)\cup((Y_2^\delta\cup Y_0^\delta)\times \breve{D}) = \alpha,\end{aligned}$$
если
$$Y_5^\delta = Y_4^\alpha,\quad Y_1^\delta = Y_1^\alpha,\quad Y_2^\delta\cup Y_0^\delta = Y_0^\alpha.$$
Последние равенства возможны, потому что $|Y_2^\delta\cup Y_0^\delta|\geqslant 1$ (напомним, что $|Y_0^\delta|\geqslant 0$ по предположению). Пункт (f) леммы 2.3 доказан.

(g) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ,β имеют вид
$$\begin{aligned}\delta &= (Y_3^\delta\times Z_3)\cup(Y_2^\delta\times Z_2)\cup(Y_1^\delta\times Z_1)\cup(Y_0^\delta\times \breve{D}),\\ \beta &= (Z_3\times Z_3)\cup((Z_2\setminus Z_1)\times Z_2)\cup((Z_1\setminus Z_3)\times Z_1)\cup((X\setminus \breve{D})\times \breve{D}),\end{aligned}$$
где $Y_3^\delta, Y_2^\delta, Y_1^\delta\in\{\varnothing\}$. Тогда по определению множества $\mathfrak{A}_0$ имеем $\delta,\beta\in B(\mathfrak{A}_0)$,
$$Z_3\cup(Z_2\setminus Z_1)\cup(Z_1\setminus Z_3)\cap(X\setminus \breve{D}) = (P_0\cup P_2\cup P_4\cup P_5)\cup P_1\cup P_3\cup(X\setminus \breve{D}) = \breve{D}\cup(X\setminus \breve{D}) = X,$$
$$Z_3\beta = Z_3,\quad Z_2\beta = Z_3\cup Z_2\cup Z_1 = \breve{D},\quad Z_1\beta = Z_3\cup Z_1 = Z_1,\quad \breve{D}\beta = \breve{D},$$

$$\begin{aligned}\delta\circ\beta = (Y_3^\delta\times Z_3\beta)\cup(Y_2^\delta\times Z_2\beta)\cup(Y_1^\delta\times Z_1\beta)\cup(Y_0^\delta\times \breve{D}\beta) = \\ = (Y_3^\delta\times Z_3)\cup(Y_2^\delta\times \breve{D})\cup(Y_1^\delta\times Z_1)\cup(Y_0^\delta\times \breve{D}) = \\ = (Y_3^\delta\times Z_3)\cup(Y_1^\delta\times Z_1)\cup((Y_2^\delta\cup Y_0^\delta)\times \breve{D}) = \alpha,\end{aligned}$$

если
$$Y_3^\delta = Y_3^\alpha,\quad Y_1^\delta = Y_1^\alpha,\quad Y_2^\delta\cup Y_0^\delta = Y_0^\alpha.$$
Последние равенства возможны, потому что $|Y_2^\delta\cup Y_0^\delta|\geqslant 1$ (напомним, что $|Y_0^\delta|\geqslant 0$ по предположению). Пункт (g) леммы 2.3 доказан.

Лемма 2.3 доказана. □

Лемма 2.4. *Пусть $D\in\Sigma_{1.0}(X,6)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(a) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*
$$\alpha = (Y_5^\alpha\times Z_5)\cup(Y_3^\alpha\times Z_3),$$
где $Y_5^\alpha, Y_3^\alpha\notin\{\varnothing\}$, то α порождается элементами элементов множества $B(\mathfrak{A}_0)$.

(b) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*
$$\alpha = (Y_5^\alpha\times Z_5)\cup(Y_1^\alpha\times Z_1),$$
где $Y_5^\alpha, Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$, то α порождается элементами элементов множества $B(\mathfrak{A}_0)$.

(c) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*
$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3),$$
где $Y_4^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

(d) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*
$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1),$$
где $Y_4^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

(e) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*
$$\alpha = (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1),$$
где $Y_3^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

(f) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*
$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где $Y_5^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

(g) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*
$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где $Y_4^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

(h) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*
$$\alpha = (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где $Y_3^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

(i) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*
$$\alpha = (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где $Y_2^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

(j) *Если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*
$$\alpha = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где $Y_1^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

Доказательство. (a) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид
$$\begin{aligned}
&\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3),\\
&\beta = (Z_5 \times Z_5) \cup ((Z_1 \setminus Z_5) \times Z_4) \cup \big((X \setminus (\breve{D} \setminus (Z_2 \setminus Z_1))\big) \times Z_3\big),
\end{aligned}$$
где $Y_5^\delta, Y_4^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда мы имеем $\delta, \beta \in B(\mathfrak{A}_0)$,
$$\begin{aligned}
&Z_5 \cup (Z_1 \setminus Z_5) \cup \big(X \setminus (\breve{D} \setminus (Z_2 \setminus Z_1))\big) =\\
&\qquad = (P_0 \cup P_2 \cup P_4) \cup (P_3 \cup P_5) \cup (X \setminus (\breve{D} \setminus P_1)) = (\breve{D} \setminus P_1) \cup (X \setminus (\breve{D} \setminus P_1)) = X
\end{aligned}$$
и $Z_5\beta = Z_5$, $Z_4\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3$, $Z_3\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3$,
$$\begin{aligned}
&\delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) =\\
&\qquad = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_3) \cup (Y_3^\delta \times Z_3) = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup ((Y_4^\delta \cup Y_3^\delta) \times Z_3) = \alpha,
\end{aligned}$$
если $Y_5^\delta = Y_5^\alpha$, $Y_4^\delta \cup Y_3^\delta = Y_3^\alpha$. Последние равенства возможны, потому что $|Y_4^\delta \cup Y_3^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_3^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (a) леммы 2.4 доказан.

(b) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид
$$\begin{aligned}
&\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3),\\
&\beta = (Z_5 \times Z_5) \cup ((Z_2 \setminus Z_1) \times Z_3) \cup \big((X \setminus (\breve{D} \setminus (Z_1 \setminus Z_5))\big) \times Z_1\big),
\end{aligned}$$

где $Y_4^\delta, Y_1^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда из п. (a) леммы 2.3 следует, что β порождается элементами множества $B(\mathfrak{A}_0)$, $\delta \in B(\mathfrak{A}_0)$,

$$Z_5 \cup (Z_2 \setminus Z_1) \cup \big(X \setminus (\breve{D} \setminus (Z_1 \setminus Z_5))\big) = \\ = (P_0 \cup P_2 \cup P_4) \cup P_1 \cup \big(X \setminus (\breve{D} \cup (P_3 \cup P_5))\big) = (\breve{D} \cup (P_3 \cup P_5)) \cup (X \setminus (\breve{D} \cup (P_3 \cup P_5))) = X,$$

и $Z_5\beta = Z_5$, $Z_4\beta = Z_5 \cup Z_1 = Z_1$, $Z_3\beta = Z_5 \cup Z_1 = Z_1$,

$$\delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) = \\ = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_1) \cup (Y_3^\delta \times Z_1) = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup ((Y_4^\delta \cup Y_3^\delta) \times Z_1) = \alpha,$$

если $Y_5^\delta = Y_5^\alpha$, $Y_4^\delta \cup Y_3^\delta = Y_1^\alpha$. Последние равенства возможны, потому что $|Y_4^\delta \cup Y_3^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_3^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (b) леммы 2.4 доказан.

(c) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3), \\ \beta = ((Z_1 \setminus Z_5) \times Z_5) \cup (Z_5 \times Z_4) \cup \big((X \setminus (\breve{D} \setminus (Z_2 \setminus Z_1))) \times Z_3\big),$$

где $Y_5^\delta, Y_4^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда имеем $\delta, \beta \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $Z_5\beta = Z_4$, $Z_4\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3$, $Z_3\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3$,

$$\delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) = \\ = (Y_5^\delta \times Z_4) \cup (Y_4^\delta \times Z_3) \cup (Y_3^\delta \times Z_3) = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup ((Y_4^\delta \cup Y_3^\delta) \times Z_3) = \alpha,$$

если $Y_5^\delta = Y_4^\alpha$, $Y_4^\delta \cup Y_3^\delta = Y_3^\alpha$. Последние равенства возможны, потому что $|Y_4^\delta \cup Y_3^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_3^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (c) леммы 2.4 доказан.

(d) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3), \\ \beta = (Z_5 \times Z_4) \cup ((Z_2 \setminus Z_1) \times Z_3) \cup \big((X \setminus (\breve{D} \setminus (Z_1 \setminus Z_5))) \times Z_1\big),$$

где $Y_5^\delta, Y_4^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда из п. (b) леммы 2.3 следует, что β порождается элементами множества $B(\mathfrak{A}_0)$, $\delta \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $Z_5\beta = Z_4$, $Z_4\beta = Z_5 \cup Z_1 = Z_1$, $Z_3\beta = Z_5 \cup Z_1 = Z_1$,

$$\delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) = \\ = (Y_5^\delta \times Z_4) \cup (Y_4^\delta \times Z_1) \cup (Y_3^\delta \times Z_1) = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup ((Y_4^\delta \cup Y_3^\delta) \times Z_1) = \alpha,$$

если $Y_5^\delta = Y_4^\alpha$, $Y_4^\delta \cup Y_3^\delta = Y_1^\alpha$. Последние равенства возможны, потому что $|Y_4^\delta \cup Y_3^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_3^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (d) леммы 2.4 доказан.

(e) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3), \\ \beta = ((Z_2 \setminus Z_1) \times Z_4) \cup (Z_5 \times Z_3) \cup \big((X \setminus (\breve{D} \setminus (Z_1 \setminus Z_5))) \times Z_1\big),$$

где $Y_5^\delta, Y_4^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда из п. (b) леммы 2.3 следует, что β порождается элементами множества $B(\mathfrak{A}_0)$, $\delta \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $Z_5\beta = Z_3$, $Z_4\beta = Z_5 \cup Z_1 = Z_1$, $Z_3\beta = Z_5 \cup Z_1 = Z_1$,

$$\delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) = \\ = (Y_5^\delta \times Z_3) \cup (Y_4^\delta \times Z_1) \cup (Y_3^\delta \times Z_1) = (Y_5^\delta \times Z_3) \cup ((Y_4^\delta \cup Y_3^\delta) \times Z_1) = \alpha$$

если $Y_5^\delta = Y_3^\alpha$, $Y_4^\delta \cup Y_3^\delta = Y_1^\alpha$. Последние равенства возможны, потому что $|Y_4^\delta \cup Y_3^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_3^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (e) леммы 2.4 доказан.

(f) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3), \\ \beta = ((P_0 \cup P_2 \cup P_4) \times Z_5) \cup (P_1 \times Z_1) \cup \big((X \setminus (\breve{D} \setminus (P_3 \cup P_5))) \times \breve{D}\big),$$

где $Y_5^\delta, Y_4^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда из п. (e) леммы 2.3 следует, что β порождается элементами множества $B(\mathfrak{A}_0)$, $\delta \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $Z_5\beta = Z_5$, $Z_4\beta = Z_5 \cup \breve{D} = \breve{D}$, $Z_3\beta = Z_5 \cup \breve{D} = \breve{D}$,

$$\begin{aligned}\delta \circ \beta &= (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) = \\ &= (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times \breve{D}) \cup (Y_3^\delta \times \breve{D}) = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup ((Y_4^\delta \cup Y_3^\delta) \times \breve{D}) = \alpha,\end{aligned}$$

если $Y_5^\delta = Y_5^\alpha$, $Y_4^\delta \cup Y_3^\delta = Y_0^\alpha$. Последние равенства возможны, потому что $|Y_4^\delta \cup Y_3^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_3^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (f) леммы 2.4 доказан.

(g) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\begin{aligned}\delta &= (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3), \\ \beta &= ((P_0 \cup P_2 \cup P_4) \times Z_4) \cup (P_1 \times Z_1) \cup \big((X \setminus (\breve{D} \setminus (P_3 \cup P_5))) \times \breve{D}\big),\end{aligned}$$

где $Y_5^\delta, Y_4^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда из п. (f) леммы 2.3 следует, что β порождается элементами множества $B(\mathfrak{A}_0)$, $\delta \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $Z_5\beta = Z_4$, $Z_4\beta = Z_5 \cup \breve{D} = \breve{D}$, $Z_3\beta = Z_5 \cup breveD = \breve{D}$,

$$\begin{aligned}\delta \circ \beta &= (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) = \\ &= (Y_5^\delta \times Z_4) \cup (Y_4^\delta \times \breve{D}) \cup (Y_3^\delta \times \breve{D}) = (Y_5^\delta \times Z_4) \cup ((Y_4^\delta \cup Y_3^\delta) \times \breve{D}) = \alpha,\end{aligned}$$

если $Y_5^\delta = Y_4^\alpha$, $Y_4^\delta \cup Y_3^\delta = Y_0^\alpha$. Последние равенства возможны, потому что $|Y_4^\delta \cup Y_3^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_3^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (g) леммы 2.4 доказан.

(h) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\begin{aligned}\delta &= (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3), \\ \beta &= ((P_0 \cup P_2 \cup P_4) \times Z_3) \cup (P_1 \times Z_1) \cup \big((X \setminus (\breve{D} \setminus (P_3 \cup P_5))) \times \breve{D}\big),\end{aligned}$$

где $Y_5^\delta, Y_4^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда из п. (g) леммы 2.3 следует, что β порождается элементами множества $B(\mathfrak{A}_0)$, $\delta \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $Z_5\beta = Z_3$, $Z_4\beta = Z_5 \cup \breve{D} = \breve{D}$, $Z_3\beta = Z_5 \cup \breve{D} = \breve{D}$,

$$\begin{aligned}\delta \circ \beta &= (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) = \\ &= (Y_5^\delta \times Z_3) \cup (Y_4^\delta \times \breve{D}) \cup (Y_3^\delta \times \breve{D}) = (Y_5^\delta \times Z_3) \cup ((Y_4^\delta \cup Y_3^\delta) \times \breve{D}) = \alpha,\end{aligned}$$

если $Y_5^\delta = Y_3^\alpha$, $Y_4^\delta \cup Y_3^\delta = Y_0^\alpha$. Последние равенства возможны, потому что $|Y_4^\delta \cup Y_3^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_3^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (h) леммы 2.4 доказан.

(i) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\begin{aligned}\delta &= (Y_2^\delta \times Z_2) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}), \\ \beta &= ((P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5) \times Z_2) \cup (P_2 \times Z_1) \cup ((X \setminus \breve{D}) \times \breve{D}),\end{aligned}$$

где $Y_2^\delta, Y_1^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда имеем $\delta, \beta \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $Z_2\beta = Z_2$, $Z_1\beta = Z_2 \cup Z_1 = \breve{D}$, $\breve{D}\beta = \breve{D}$,

$$\begin{aligned}\delta \circ \beta &= (Y_2^\delta \times Z_2\beta) \cup (Y_1^\delta \times Z_1\beta) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}\beta) = \\ &= (Y_2^\delta \times Z_2) \cup (Y_1^\delta \times \breve{D}) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}) = (Y_2^\delta \times Z_2) \cup ((Y_1^\delta \cup Y_0^\delta) \times \breve{D}) = \alpha,\end{aligned}$$

если $Y_2^\delta = Y_2^\alpha$, $Y_1^\delta \cup Y_0^\delta = Y_0^\alpha$. Последние равенства возможны, потому что $|Y_1^\delta \cup Y_0^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_0^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (i) леммы 2.4 доказан.

(j) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\begin{aligned}\delta &= (Y_2^\delta \times Z_2) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}), \\ \beta &= \big((P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5) \times Z_1\big) \cup (P_1 \times Z_2) \cup ((X \setminus \breve{D}) \times \breve{D}),\end{aligned}$$

где $Y_2^\delta, Y_1^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда имеем $\delta, \beta \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $Z_1\beta = Z_1$, $Z_2\beta = Z_1 \cup Z_2 = \breve{D}$, $\breve{D}\beta = \breve{D}$,

$$\delta \circ \beta = (Y_2^\delta \times Z_2\beta) \cup (Y_1^\delta \times Z_1\beta) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}\beta) =$$
$$= (Y_2^\delta \times \breve{D}) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}) = (Y_1^\delta \times Z_1) \cup ((Y_2^\delta \cup Y_0^\delta) \times \breve{D}) = \alpha,$$

если $Y_1^\delta = Y_1^\alpha$, $Y_2^\delta \cup Y_0^\delta = Y_0^\alpha$. Последние равенства возможны, потому что $|Y_2^\delta \cup Y_0^\delta| \geqslant 1$ (напомним, что $|Y_0^\delta| \geqslant 0$ по предположению). Пункт (j) леммы 2.4 доказан.

Лемма 2.4 доказана. □

Лемма 2.5. *Пусть $D \in \Sigma_{1.0}(X, 6)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(a) *Пусть $T' \in \{Z_3, Z_1, \breve{D}\}$ и $\alpha = X \times T'$; тогда α порождается элементами элементов множества $B(\mathfrak{A}_0)$.*

(b) *Если $|X \setminus \breve{D}| \geqslant 1$ и $T \in \{Z_5, Z_4, Z_2\}$, то бинарное отношение $\alpha = X \times T$ порождается элементами элементов множества $B(\mathfrak{A}_0)$.*

(c) *Если $X = \breve{D}$ и $T \in \{Z_5, Z_4, Z_2\}$, то бинарное отношение $\alpha = X \times T$ является внешним элементом для полугруппы $B_X(D)$.*

Доказательство. (a) Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\delta = (Y_2^\delta \times Z_2) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}),$$
$$\beta = (Z_5 \times Z_2) \cup ((\breve{D} \setminus Z_5) \times Z_1) \cup ((X \setminus \breve{D}) \times \breve{D}),$$

где $Y_2^\delta, Y_1^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда имеем $\delta, \beta \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $Z_2\beta = Z_2 \cup Z_1 = \breve{D}$, $Z_1\beta = Z_2 \cup Z_1 = \breve{D}$, $\breve{D}\beta = \breve{D}$,

$$\delta \circ \beta = (Y_2^\delta \times Z_2\beta) \cup (Y_1^\delta \times Z_1\beta) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}\beta) =$$
$$= (Y_2^\delta \times \breve{D}) \cup (Y_1^\delta \times \breve{D}) \cup (Y_0^\delta \times \breve{D}) = (Y_2^\delta \times Z_2) = X \times \overline{D} = \alpha.$$

Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\delta = (Y_3^\delta \times Z_3) \cup (Y_1^\delta \times Z_1),$$
$$\beta = (Z_5 \times Z_3) \cup ((\breve{D} \setminus Z_5) \times Z_1) \cup ((X \setminus \breve{D}) \times \breve{D}),$$

где $Y_3^\delta, Y_1^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда, согласно лемме 2.4(e) и лемме 2.3(g), бинарные отношения δ и β порождаются элементами множества $B(\mathfrak{A}_0)$ и $Z_3\beta = Z_3 \cup Z_1 = Z_1$, $Z_1\beta = Z_3 \cup Z_1 = Z_1$,

$$\delta \circ \beta = (Y_3^\delta \times Z_3\beta) \cup (Y_1^\delta \times Z_1\beta) = (Y_3^\delta \times Z_1) \cup (Y_1^\delta \times Z_1) = X \times Z_1 = \alpha.$$

Пусть квазинормальные представления бинарных отношений δ, β имеют вид

$$\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3),$$
$$\beta = ((Z_5 \cap Z_4) \times Z_5) \cup ((\breve{D} \setminus (Z_5 \cap Z_4)) \times Z_4) \cup ((X \setminus \breve{D}) \times Z_3),$$

где $Y_5^\delta, Y_4^\delta \in \{\varnothing\}$. Тогда мы имеем $\delta, \beta \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $Z_5\beta = Z_5 \cup Z_4 = Z_3$, $Z_4\beta = Z_4 \cup Z_5 = Z_3$, $Z_3\beta = Z_3$,

$$\delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) = (Y_5^\delta \times Z_3) \cup (Y_4^\delta \times Z_3) \cup (Y_3^\delta \times Z_3) = X \times Z_3 = \alpha.$$

Пункт (a) леммы 2.5 доказан.

(b) Пусть квазинормальное представление бинарного отношения δ имеет вид

$$\delta = (Y_5^\delta \times Z_5) \cup (Y_4^\delta \times Z_4) \cup (Y_3^\delta \times Z_3) \cup (Y_1^\delta \times Z_1),$$

где $Y_5^\delta, Y_4^\delta, Y_1^\delta \notin \{\varnothing\}$, то $\delta \in B(\mathfrak{A}_0) \setminus \{\alpha\}$. Пусть квазинормальное представление бинарного отношения β имеет вид

$$\beta = (\breve{D} \times T) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} (\{t'\} \times f(t')),$$

где f — любое отображение множества $X \setminus \breve{D}$ в множество $\{Z_5, Z_4, Z_2\} \setminus \{T\}$. Легко видеть, что $\beta \neq \alpha$ и два элемента множества $\{Z_4, Z_{3,}, Z_2\}$ принадлежат полурешетке $V(D, \beta)$, т.е. $\delta \in B(\mathfrak{A}_0) \setminus \{\alpha\}$. В этом случае имеем $Z_5\beta = Z_4\beta = Z_3\beta = Z_1\beta = T$,

$$\delta \circ \beta = (Y_5^\delta \times Z_5\beta) \cup (Y_4^\delta \times Z_4\beta) \cup (Y_3^\delta \times Z_3\beta) \cup (Y_1^\delta \times Z_1\beta) =$$
$$= (Y_5^\delta \times T) \cup (Y_4^\delta \times T) \cup (Y_3^\delta \times T) \cup (Y_1^\delta \times T) = (Y_5^\delta \cup Y_4^\delta \cup Y_3^\delta \cup Y_1^\delta) \times T = X \times T = \alpha,$$

поскольку представление бинарного отношения δ квазинормально. Таким образом, элемент α порождается элементами множества $B(\mathfrak{A}_0)$. Пункт (b) леммы 2.5 доказан.

(c) Пусть $X = \breve{D}$, $\alpha = X \times T$ для некоторого $T \in \{Z_5, Z_4, Z_2\}$ и $\alpha = \delta \circ \beta$ для некоторого $\delta, \beta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$. Тогда из (2.3) и (2.4) получаем, что

$$Z_5\beta = Z_4\beta = Z_3\beta = Z_2\beta = Z_1\beta = \breve{D}\beta = T,$$
$$P_0\beta = P_1\beta = P_2\beta = P_3\beta = P_4\beta = P_5\beta = T,$$

поскольку T — минимальный элемент полурешетки D.

Пусть теперь квазинормальное представление $\overline{\beta}$ бинарного отношения β имеет вид

$$\overline{\beta} = \big((P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5) \times T\big) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{D}} \big(\{t'\} \times \overline{\beta}_2(t')\big),$$

где $\overline{\beta}_1 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ T & T & T & T & T & T \end{pmatrix}$ — нормальное отображение. Но дополнительное отображение $\overline{\beta}_2$ пусто, поскольку $X \setminus \breve{D} = \varnothing$, т.е. в этом случае квазинормальное представление $\overline{\beta}$ бинарного отношения β определено единственным образом. Следовательно, мы имеем $\beta = \overline{\beta} = X \times T = \alpha$, что противоречит условию, что $\beta \notin B_X(D) \setminus \alpha$.

Следовательно, если $X = \breve{D}$ и $\alpha = X \times T$ для некоторого $T \in \{Z_5, Z_4, Z_2\}$, то α является внешним элементом полугруппы $B_X(D)$. Пункт (c) леммы 2.5 доказан.

Лемма 2.5 доказана. □

Теорема 2.6. *Пусть* $D \in \Sigma_{1.0}(X, 6)$ *и*

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_0 = \Big\{ &\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\\ &\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\\ &\{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3\},\ \{Z_5, Z_2, \breve{D}\},\\ &\{Z_4, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_2, Z_1, \breve{D}\}\Big\},\end{aligned}$$

$$B(\mathfrak{A}_0) = \Big\{\alpha \in B_X(D) \mid\ V(X^*, \alpha) \in \mathfrak{A}_0\Big\}, \qquad B_0 = \Big\{\alpha \in B_X(D) \mid\ V(X^*, \alpha) = D\Big\}.$$

Тогда выполняются следующие утверждения.

(a) *Если* $|X \setminus \breve{D}| \geqslant 1$, *то* $S_0 = B_0 \cup B(\mathfrak{A}_0)$ — *неприводимое порождающее множество для полугруппы* $B_X(D)$.

(b) *Если* $X = \breve{D}$, *то* $S_1 = B_0 \cup B(\mathfrak{A}_0) \cup \{X \times Z_5, X \times Z_4, X \times Z_2\}$ — *неприводимое порождающее множество для полугруппы* $B_X(D)$.

Доказательство. Пусть $D \in \Sigma_{1.0}(X, 5)$ и $|X \setminus \breve{D}| \geqslant 1$. Сначала мы докажем, что любой элемент полугруппы $B_X(D)$ порождается элементами множества S_0. В самом деле, пусть α — произвольный элемент полугруппы $B_X(D)$. Тогда квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где

$$Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup Y_0^\alpha = X$$

и $Y_i^\alpha \cap Y_j^\alpha = \varnothing$, $0 \leqslant i \neq j \leqslant 4$. Для $|V(X^*, \alpha)|$ рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. $|V(X^*,\alpha)| = 6$; тогда $\alpha \in B_0$ и $B_0 \subset S_0$ по определению множества S_0.

Случай 2. $|V(X^*,\alpha)| = 5$; тогда

$$\mathfrak{A}_5 = \Big\{\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\Big\} \subset \mathfrak{A}_0,$$

т.е. $\alpha \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $B(\mathfrak{A}_0) \subset S_0$ по определению множества S_0.

Случай 3. $|V(X^*,\alpha)| = 4$; тогда

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_4 = \Big\{&\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\\ &\{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}\Big\}.\end{aligned}$$

По определению множества $\mathfrak{A}_0$ имеем

$$\begin{aligned}V(X^*,\alpha) \in \big\{&\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\\ &\{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\big\},\end{aligned}$$

т.е. в этом случае $\alpha \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $B(\mathfrak{A}_0) \subset S_0$ по определению множества S_0.

Если $V(X^*,\alpha) \in \{\{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}\}$, то из пп. (a) и (b) леммы 2.2 следует, что элемент α порождается элементами $B(\mathfrak{A}_0)$ и $B(\mathfrak{A}_0) \subset S_0$ по определению множества S_0.

Случай 4. $|V(X^*,\alpha)| = 3$; тогда имеем

$$\begin{aligned}V(X^*,\alpha) \in \mathfrak{A}_3 = \Big\{&\{Z_5, Z_4, Z_3\}, \{Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_2, \breve{D}\},\\ &\{Z_2, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_1\}, \{Z_4, Z_3, Z_1\}, \{Z_5, Z_3, \breve{D}\},\\ &\{Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_3, \breve{D}\}\{Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_3, Z_1, \breve{D}\}\Big\}.\end{aligned}$$

По определению множества $\mathfrak{A}_0$ имеем

$$\Big\{\{Z_5, Z_4, Z_3\},\ \{Z_5, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_2, Z_1, \breve{D}\}\Big\} \subset \mathfrak{A}_0,$$

т.е. в этом случае $\alpha \in B(\mathfrak{A}_0)$ и $B(\mathfrak{A}_0) \subset S_0$ по определению множества S_0. Если

$$\begin{aligned}V(X^*,\alpha) \in \Big\{&\{Z_5, Z_3, Z_1\},\ \{Z_4, Z_3, Z_1\},\ \{Z_5, Z_3, \breve{D}\},\\ &\{Z_5, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_3, Z_1, \breve{D}\}\Big\},\end{aligned}$$

то из пп. (a)–(g) леммы 2.3 следует, что элемент α порождается элементами $B(\mathfrak{A}_0)$ и $B(\mathfrak{A}_0) \subset S_0$ по определению множества S_0.

Случай 5. $|V(X^*,\alpha)| = 2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}V(X^*,\alpha) \in \mathfrak{A}_2 = \Big\{&\{Z_5, Z_3\},\ \{Z_5, Z_1\},\ \{Z_4, Z_3\},\ \{Z_4, Z_1\},\\ &\{Z_3, Z_1\},\ \{Z_5, \breve{D}\},\ \{Z_4, \breve{D}\},\ \{Z_3, \breve{D}\},\ \{Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_1, \breve{D}\}\Big\}.\end{aligned}$$

Тогда из пп. (a)–(j) леммы 2.4 следует, что элемент α порождается элементами $B(\mathfrak{A}_0)$ и $B(\mathfrak{A}_0) \subset S_0$ по определению множества S_0.

Случай 6. $|V(X^*,\alpha)|=1$. Тогда имеем

$$V(X^*,\alpha)\in\mathfrak{A}_1=\Big\{\{Z_5\},\ \{Z_4\},\ \{Z_3\},\ \{Z_2\},\ \{Z_1\},\ \{\breve{D}\}\Big\}.$$

Если $V(X^*,\alpha)\in\{\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}\}$, то из п. (a) леммы 2.5 следует, что элемент α порождается элементами $B(\mathfrak{A}_0)$ и $B(\mathfrak{A}_0)\subset S_0$ по определению множества S_0. Таким образом, S_0 является порождающим множеством для полугруппы $B_X(D)$.

Если $|X\setminus\breve{D}|\geqslant 1$, то множество S_0 является неприводимым порождающим множеством для полугруппы $B_X(D)$, поскольку S_0 — множество внешних элементов полугруппы $B_X(D)$. Пункт (a)) теоремы 2.6 доказан.

(b) Пусть теперь $D\in\Sigma_{1.0}(X,6)$ и $X=\breve{D}$. Сначала докажем, что каждый элемент полугруппы $B_X(D)$ порождается элементами множества S_1. Случаи (1)–(5) доказываются аналогично случаям (1)–(5), доказанным выше. Рассмотрим случай, когда

$$V(X^*,\alpha)\in\mathfrak{A}_1=\Big\{\{Z_5\},\ \{Z_4\},\ \{Z_3\},\ \{Z_2\},\ \{Z_1\},\ \{\breve{D}\}\Big\}.$$

Если $V(X^*,\alpha)\in\big\{\{Z_3\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}\big\}$, то из п. (a) леммы 2.5 следует, что элемент α порождается элементами $B(\mathfrak{A}_0)$ и $B(\mathfrak{A}_0)\subset S_0$ по определению множества S_1.

Если $V(X^*,\alpha)\in\big\{\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_2\}\big\}$, то $\alpha\in S_1$ по определению множества S_1.

Таким образом, S_1 является порождающим множеством для полугруппы $B_X(D)$.

Если $X=\breve{D}$, то множество S_1 является неприводимым порождающим множеством для полугруппы $B_X(D)$, потому что S_1 — множество внешних элементов полугруппы $B_X(D)$. Пункт (b) теоремы 2.6 доказан. Теорема 2.6 доказана. $\square$

Теорема 2.7. *Пусть* $D=\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_{1.0}(X,6)$ *и*

$$\mathfrak{A}_0=\Big\{\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\ \{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\ \{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ \{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},$$
$$\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\},\ \{Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\ \{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\ \{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ \{Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\ \{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},$$
$$\{Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ \{Z_5,Z_4,Z_3\},\ \{Z_5,Z_2,\breve{D}\},\ \{Z_4,Z_2,\breve{D}\},\ \{Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_2,Z_1,\breve{D}\}\Big\},$$

$$B(\mathfrak{A}_0)=\Big\{\alpha\in B_X(D)\ \Big|\ V(X^*,\alpha)\in\mathfrak{A}_0\Big\},\quad B_0=\Big\{\alpha\in B_X(D)\ \Big|\ V(X^*,\alpha)=D\Big\}.$$

Тогда выполняются следующие утверждения:

(a) *если* $|X\setminus\breve{D}|\geqslant 1$, *то число* $|S_0|$ *элементов множества*

$$S_0=B_0\cup B(\mathfrak{A}_0)$$

равно

$$|S_0|=6^n-4^n-2\cdot 3^n+2\cdot 2^n;$$

(b) *если* $X=\breve{D}$, *то число* $|S_1|$ *элементов множества*

$$S_1=B_0\cup B(\mathfrak{A}_0)\cup\big\{X\times Z_4,X\times Z_3,X\times Z_2\big\}$$

равно

$$|S_1|=6^n-4^n-2\cdot 3^n+2\cdot 2^n+3.$$

Доказательство. Пусть число элементов множества X равно n, т.е. $|X|=n$. Пусть $S_n=\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n!}\}$ — группа всех взаимно однозначных отображений множества $M=\{1,2,\ldots,n\}$ в себя и пусть $\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},\ldots,\varphi_{i_m}$ $(m\leqslant n)$ — произвольные элементы группы S_n, $Y_{\varphi_1},Y_{\varphi_2},\ldots,Y_{\varphi_m}$ — произвольное разбиение множества X. Обозначим через k_n^m число элементов множества $\{Y_{\varphi_1},Y_{\varphi_2},\ldots,Y_{\varphi_m}\}$. Хорошо известно, что

$$k_n^m=\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{m+i}}{(i-1)!\cdot(m-i)!}\cdot i^{n-1}.$$

Если $m = 2, 3, 4, 5, 6$, то имеем

$$\begin{aligned}
&k_n^2 = 2^{n-1} - 1, \quad k_n^3 = \frac{1}{2}\cdot 3^{n-1} - 2^{n-1} + \frac{1}{2},\\
&k_n^4 = \frac{1}{6}\cdot 4^{n-1} - \frac{1}{2}\cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}\cdot 2^{n-1} - \frac{1}{6},\\
&k_n^5 = \frac{1}{24}\cdot 5^{n-1} - \frac{1}{6}\cdot 4^{n-1} + \frac{1}{4}\cdot 3^{n-1} - \frac{1}{6}\cdot 2^{n-1} + \frac{1}{24},\\
&k_n^6 = \frac{1}{120}\cdot 6^{n-1} - \frac{1}{24}\cdot 5^{n-1} + \frac{1}{12}\cdot 4^{n-1} - \frac{1}{12}\cdot 3^{n-1} + \frac{1}{24}\cdot 2^{n-1} - \frac{1}{120}.
\end{aligned}$$

Пусть Y_{φ_1}, Y_{φ_2} — любые два элемента разбиения множества X и

$$\overline{\beta} = (Y_{\varphi_1} \times T_1) \cup (Y_{\varphi_2} \times T_2),$$

где $T_1, T_2 \in D$ и $T_1 \neq T_2$. Тогда число различных бинарных отношений $\overline{\beta}$ полугруппы $B_X(D)$ равно

$$2 \cdot k_n^2 = 2^n - 2. \tag{2.5}$$

Пусть Y_{φ_1}, Y_{φ_2}, Y_{φ_3} — любое трехэлементное разбиение множества X и $\overline{\beta} = (Y_{\varphi_1} \times T_1) \cup (Y_{\varphi_2} \times T_2) \cup (Y_{\varphi_3} \times T_3)$, где T_1, T_2, T_3 — попарно различные элементы данной полурешетки D. Тогда число различных бинарных отношений $\overline{\beta}$ полугруппы $B_X(D)$ равно

$$6 \cdot k_n^3 = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3. \tag{2.6}$$

Пусть Y_{φ_1}, Y_{φ_2}, Y_{φ_3}, Y_{φ_4} — любое четырехэлементное разбиение множества X и

$$\overline{\beta} = (Y_{\varphi_1} \times T_1) \cup (Y_{\varphi_2} \times T_2) \cup (Y_{\varphi_3} \times T_3) \cup (Y_{\varphi_4} \times T_4),$$

где T_1, T_2, T_3, T_4 — попарно различные элементы данной полурешетки D. Тогда число различных бинарных отношений $\overline{\beta}$ полугруппы $B_X(D)$ равно

$$24 \cdot k_n^4 = 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4. \tag{2.7}$$

Пусть Y_{φ_1}, Y_{φ_2}, Y_{φ_3}, Y_{φ_4}, Y_{φ_5} — любое четырехэлементное разбиение множества X и

$$\overline{\beta} = (Y_{\varphi_1} \times T_1) \cup (Y_{\varphi_2} \times T_2) \cup (Y_{\varphi_3} \times T_3) \cup (Y_{\varphi_4} \times T_4) \cup (Y_{\varphi_5} \times T_5),$$

где T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 — попарно различные элементы данной полурешетки D. Тогда число различных бинарных отношений $\overline{\beta}$ полугруппы $B_X(D)$ равно

$$120 \cdot k_n^5 = 5^n - 5 \cdot 4^n + 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^n + 5. \tag{2.8}$$

Если Y_{φ_1}, Y_{φ_2}, Y_{φ_3}, Y_{φ_4}, Y_{φ_5}, Y_{φ_6} — любое шестиэлементное разбиение множества X и

$$\overline{\beta} = (Y_{\varphi_1} \times T_1) \cup (Y_{\varphi_2} \times T_2) \cup (Y_{\varphi_3} \times T_3) \cup (Y_{\varphi_4} \times T_4) \cup (Y_{\varphi_5} \times T_5) \cup (Y_{\varphi_6} \times T_6),$$

где T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 — попарно различные элементы данной полурешетки D, то число различных бинарных отношений $\overline{\beta}$ полугруппы $B_X(D)$ равно

$$720 \cdot k_n^6 = 6^n - 6 \cdot 5^n + 15 \cdot 4^n - 20 \cdot 3^n + 15 \cdot 2^n - 6. \tag{2.9}$$

Если $\alpha \in B_0$, то квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$ и система Y_5^α, Y_4^α, Y_2^α, Y_1^α, или система Y_5^δ, Y_4^δ, Y_3^δ, Y_2^δ, Y_1^δ, или система Y_5^δ, Y_4^δ, Y_2^δ, Y_1^δ, Y_0^δ, или система Y_5^δ, Y_4^δ, Y_3^δ, Y_2^δ, Y_1^δ, Y_0^δ является разбиением множества X.

Пусть система Y_5^δ, Y_4^δ, Y_2^δ, или система Y_5^α, Y_4^α, Y_2^α, Y_1^α, или система Y_5^δ, Y_4^δ, Y_3^δ, Y_2^δ, Y_1^δ или система Y_5^δ, Y_4^δ, Y_2^δ, Y_1^δ, Y_0^δ, или система Y_5^α, Y_4^α, Y_3^α, Y_2^α, Y_1^α, Y_0^α является разбиением множества X. Из этого и уравнений (2.6)–(2.9) следует, что

$$\begin{aligned}
|B_0| = (4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4) + 2 \cdot (5^n - 5 \cdot 4^n + 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^n + 5) +\\
+ (6^n - 6 \cdot 5^n + 15 \cdot 4^n - 20 \cdot 3^n + 15 \cdot 2^n - 6) = 6^n - 4 \cdot 5^n + 6 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n + 2^n.
\end{aligned}$$

Теперь найдем число элементов множества $B(\mathfrak{A}_0)$. Справедливы следующие утверждения.

1. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид
$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_2^\alpha \notin \{\varnothing\}$, то разбиение множества X имеет следующий вид: Y_5^δ, Y_4^δ, Y_3^δ, Y_2^δ, Y_0^δ, или Y_5^δ, Y_4^δ, Y_2^δ, Y_0^δ, или Y_5^α, Y_4^α, Y_3^α, Y_2^α, или Y_5^α, Y_4^α, Y_2^α и, согласно (2.6)–(2.8), число бинарных отношений α равно
$$m_1 = (5^n - 5\cdot 4^n + 10\cdot 3^n - 10\cdot 2^n + 5) + \\ + 2\cdot(4^n - 4\cdot 3^n + 6\cdot 2^n - 4) + (3^n - 3\cdot 2^n + 3) = 5^n - 3\cdot 4^n + 3\cdot 3^n - 2^n.$$
2. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид
$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_5^δ, Y_4^δ, Y_3^δ, Y_1^δ, Y_0^δ, или Y_5^δ, Y_4^δ, Y_1^δ, Y_0^δ, или Y_5^δ, Y_4^δ, Y_3^δ, Y_0^δ, или Y_5^α, Y_4^α, Y_1^α и, согласно (2.6)–(2.8), число бинарных отношений α равно
$$m_2 = (5^n - 5\cdot 4^n + 10\cdot 3^n - 10\cdot 2^n + 5) + \\ + 2\cdot(4^n - 4\cdot 3^n + 6\cdot 2^n - 4) + (3^n - 3\cdot 2^n + 3) = 5^n - 3\cdot 4^n + 3\cdot 3^n - 2^n.$$
3. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид
$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где $Y_5^\delta, Y_3^\delta, Y_2^\delta, Y_1^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_5^δ, Y_3^δ, Y_2^δ, Y_1^δ, Y_0^δ или Y_5^δ, Y_3^δ, Y_2^δ, Y_1^δ и, согласно (2.7) и (2.8), число бинарных отношений α равно
$$m_3 = (5^n - 5\cdot 4^n + 10\cdot 3^n - 10\cdot 2^n + 5) + (4^n - 4\cdot 3^n + 6\cdot 2^n - 4) = 5^n - 4\cdot 4^n + 6\cdot 3^n - 4\cdot 2^n + 1.$$
4. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид
$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где $Y_4^\delta, Y_3^\delta, Y_2^\delta, Y_1^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_4^δ, Y_3^δ, Y_2^δ, Y_1^δ, Y_0^δ или Y_4^δ, Y_3^δ, Y_2^δ, Y_1^δ и, согласно (2.7) и (2.8), число бинарных отношений α равно
$$m_4 = (5^n - 5\cdot 4^n + 10\cdot 3^n - 10\cdot 2^n + 5) + (4^n - 4\cdot 3^n + 6\cdot 2^n - 4) = 5^n - 4\cdot 4^n + 6\cdot 3^n - 4\cdot 2^n + 1.$$
5. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид
$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1),$$
где $Y_5^\delta, Y_4^\delta, Y_1^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_5^δ, Y_4^δ, Y_3^δ, Y_1^δ, or Y_5^δ, Y_4^δ, Y_1^δ и, согласно (2.6) и (2.7), число бинарных отношений α равно
$$m_5 = (4^n - 4\cdot 3^n + 6\cdot 2^n - 4) + (3^n - 3\cdot 2^n + 3) = 4^n - 3\cdot 3^n + 3\cdot 2^n - 1.$$
6. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид
$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где $Y_5^\delta, Y_4^\delta, Y_0^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_5^δ, Y_4^δ, Y_3^δ, Y_0^δ или Y_5^δ, Y_4^δ, Y_0^δ и, согласно (2.6) и (2.7), число бинарных отношений α равно
$$m_7 = (4^n - 4\cdot 3^n + 6\cdot 2^n - 4) + (3^n - 3\cdot 2^n + 3) = 4^n - 3\cdot 3^n + 3\cdot 2^n - 1.$$
7. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид
$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где $Y_5^\delta, Y_3^\delta, Y_2^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_5^δ, Y_3^δ, Y_2^δ, Y_0^δ или Y_5^δ, Y_3^δ, Y_2^δ и, согласно (2.6) и (2.7), число бинарных отношений α равно
$$m_8 = (4^n - 4\cdot 3^n + 6\cdot 2^n - 4) + (3^n - 3\cdot 2^n + 3) = 4^n - 3\cdot 3^n + 3\cdot 2^n - 1.$$

8. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_5^\delta, Y_2^\delta, Y_1^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_5^δ, Y_2^δ, Y_1^δ, Y_0^δ или Y_5^δ, Y_2^δ, Y_1^δ и, согласно (2.6) и (2.7), число бинарных отношений α равно

$$m_9 = (4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4) + (3^n - 3 \cdot 2^n + 3) = 4^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 1.$$

9. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид

$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_4^\delta, Y_3^\delta, Y_2^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_4^δ, Y_3^δ, Y_2^δ, Y_0^δ или Y_4^δ, Y_3^δ, Y_2^δ и, согласно (2.6) и (2.7), число бинарных отношений α равно

$$m_9 = (4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4) + (3^n - 3 \cdot 2^n + 3) = 4^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 1.$$

10. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид

$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_4^\delta, Y_2^\delta, Y_1^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_4^δ, Y_2^δ, Y_1^δ, Y_0^δ или Y_4^δ, Y_2^δ, Y_1^δ и, согласно (2.6) и (2.7), число бинарных отношений α равно

$$m_{10} = (4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4) + (3^n - 3 \cdot 2^n + 3) = 4^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 1.$$

11. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид

$$\alpha = (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_3^\delta, Y_2^\delta, Y_1^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_3^δ, Y_2^δ, Y_1^δ, Y_0^δ или Y_3^δ, Y_2^δ, Y_1^δ и, согласно (2.6) и (2.7), число бинарных отношений α равно

$$m_{11} = (4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4) + (3^n - 3 \cdot 2^n + 3) = 4^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 1.$$

12. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3),$$

где $Y_5^\delta, Y_4^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_5^δ, Y_4^δ, Y_3^δ или Y_5^δ, Y_4^δ и, согласно (2.5) и (2.6), число бинарных отношений α равно

$$m_{12} = (3^n - 3 \cdot 2^n + 3) + (2^n - 2) = 3^n - 2 \cdot 2^n + 1.$$

13. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_5^\delta, Y_2^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_5^δ, Y_2^δ, Y_0^δ или Y_5^δ, Y_2^δ и, согласно (2.5) и (2.6), число бинарных отношений α равно

$$m_{13} = (3^n - 3 \cdot 2^n + 3) + (2^n - 2) = 3^n - 2 \cdot 2^n + 1.$$

14. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид

$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_4^\delta, Y_2^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_4^δ, Y_2^δ, Y_0^δ или Y_4^δ, Y_2^δ и, согласно (2.5) и (2.6), число бинарных отношений α равно

$$m_{14} = (3^n - 3 \cdot 2^n + 3) + (2^n - 2) = 3^n - 2 \cdot 2^n + 1.$$

15. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид

$$\alpha = (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_3^\delta, Y_2^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_3^δ, Y_2^δ, Y_0^δ или Y_3^δ, Y_2^δ и, согласно (2.5) и (2.6), число бинарных отношений α равно

$$m_{15} = (3^n - 3 \cdot 2^n + 3) + (2^n - 2) = 3^n - 2 \cdot 2^n + 1.$$

16. Если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид
$$\alpha = (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где $Y_2^\delta, Y_1^\delta \notin \{\varnothing\}$, то разбиения множества X имеют следующий вид: Y_2^δ, Y_1^δ, Y_0^δ или Y_2^δ, Y_1^δ и, согласно (2.5) и (2.6), число бинарных отношений α равно
$$m_{16} = (3^n - 3 \cdot 2^n + 3) + (2^n - 2) = 3^n - 2 \cdot 2^n + 1.$$

Отсюда следует, что
$$m = |B(\mathfrak{A}_0)| = \sum_{i=1}^{16} m_i = 2 \cdot \Big(5^n - 3 \cdot 4^n + 3 \cdot 3^n - 2^n\Big) + 2 \cdot \Big(5^n - 4 \cdot 4^n + 6 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n + 1\Big) +$$
$$+ 7 \cdot \Big(4^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 1\Big) + 5 \cdot \Big(3^n - 2 \cdot 2^n + 1\Big) =$$
$$= \Big(2 \cdot 5^n - 6 \cdot 4^n + 6 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n\Big) + \Big(2 \cdot 5^n - 8 \cdot 4^n + 12 \cdot 3^n - 8 \cdot 2^n + 2\Big) +$$
$$+ \Big(7 \cdot 4^n - 21 \cdot 3^n + 21 \cdot 2^n - 7\Big) + \Big(5 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^n + 5\Big) = 4 \cdot 5^n - 7 \cdot 4^n + 2 \cdot 3^n + 2^n.$$

Следовательно, мы имеем
$$|S_0| = \Big|B_0 \cup B(\mathfrak{A}_0)\Big| = \Big(6^n - 4 \cdot 5^n + 6 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n + 2^n\Big) + \Big(4 \cdot 5^n - 7 \cdot 4^n + 2 \cdot 3^n + 2^n\Big) =$$
$$= 6^n - 4^n - 2 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n,$$
$$|S_1| = \Big|B_0 \cup B(\mathfrak{A}_0) \cup \big\{X \times Z_5, X \times Z_4, X \times Z_2\big\}\Big| = 6^n - 4^n - 2 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n + 3,$$
так как
$$B_0 \cap B(\mathfrak{A}_0) = B_0 \cap \big\{X \times Z_5, X \times Z_4, X \times Z_2\big\} = B(\mathfrak{A}_0) \cap \big\{X \times Z_5, X \times Z_4, X \times Z_2\big\} = \varnothing.$$
Теорема 2.7 доказана. □

3. Порождающие множества полугруппы бинарных отношений, определенных полурешетками класса $\Sigma_{11}(X,6)$ (где $P = \varnothing$ и $|X \setminus \breve{D}| \geqslant 1$ или $X = \breve{D}$).

Определение 3.1. Обозначим через $\Sigma_{1.1}(X,6)$ все полурешетки $D = \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ класса $\Sigma_1(X,6)$, для которых $Z_5 \cap Z_4 \cap Z_2 = \varnothing$. Из этого неравенства и формальных равенств (2.1) полурешетки D следует, что $Z_5 \cap Z_4 \cap Z_2 = P_0 = \varnothing$, т.е. $|X| \geqslant 5$, так как $P_5 \neq \varnothing$, $P_4 \neq \varnothing$, $P_3 \neq \varnothing$, $P_2 \neq \varnothing$, $P_1 \neq \varnothing$.

В этом разделе изучаются неприводимые порождающие множества полугруппы $B_X(D)$, определенной полурешетками класса $\Sigma_{1.1}(X,6)$.

Следующие леммы 3.1, 3.3, 3.4 и 3.5 и теоремы 3.6 и 3.7 можно доказать аналогично леммам 2.1, 2.3, 2.4 и 2.5 и теоремам 2.6 и 2.7.

Лемма 3.1. *Пусть $D \in \Sigma_{1.1}(X,6)$ и $\alpha = \delta \circ \beta$ для некоторых $\alpha, \delta, \beta \in B_X(D)$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(a) *пусть $T, T' \in \{Z_5, Z_4, Z_2\}$, $T \neq T'$; если $T, T' \in V(D,\alpha)$, то α — внешний элемент полугруппы $B_X(D)$*;

(b) *если $T \in \{Z_3, Z_1\}$ и $T, Z_2 \in V(D,\alpha)$, то α — внешний элемент полугруппы $B_X(D)$.*

Лемма 3.2. *Пусть $D \in \Sigma_{1.1}(X,6)$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(a) *если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид*
$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где Y_5^α, Y_3^α, $Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, то α порождается элементами элементов множества B_0;

(b) *если квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид*
$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$
где $Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, то α порождается элементами элементов множества B_0.

Лемма 3.3. *Пусть* $D \in \Sigma_{1.1}(X, 6)$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(a) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1),$$

где Y_5^α, Y_3^α, $Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(b) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1),$$

где Y_4^α, Y_3^α, $Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(c) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где Y_5^α, Y_3^α, $Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(d) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где Y_4^α, Y_3^α, $Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(e) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где Y_5^α, Y_1^α, $Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(f) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где Y_4^α, Y_1^α, $Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(g) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где Y_3^α, Y_1^α, $Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

Лемма 3.4. *Пусть* $D \in \Sigma_{1.1}(X, 6)$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(a) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3),$$

где $Y_5^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(b) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1),$$

где $Y_5^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(c) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3),$$

где $Y_4^\alpha, Y_3^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(d) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1),$$

где $Y_4^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(e) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1),$$

где $Y_3^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(f) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_5^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(g) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_4^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(h) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_3^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(i) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_2^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(j) *если квазинормальное представление бинарного отношения имеет вид*

$$\alpha = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D}),$$

где $Y_1^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$.

Лемма 3.5. *Пусть* $D \in \Sigma_{1.1}(X, 6)$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(a) *если* $T' \in \{Z_3, Z_1, \breve{D}\}$ *и* $\alpha = X \times T'$, *то* α *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(b) *если* $|X \setminus \breve{D}| \geqslant 1$ *и* $T \in \{Z_5, Z_4, Z_2\}$, *то бинарное отношение* $\alpha = X \times T$ *порождается элементами элементов множества* $B(\mathfrak{A}_0)$;

(c) *если* $X = \breve{D}$ *и* $T \in \{Z_5, Z_4, Z_2\}$, *то бинарное отношение* $\alpha = X \times T$ *является внешним элементом для полугруппы* $B_X(D)$.

Теорема 3.6. *Пусть* $D \in \Sigma_{1.1}(X, 6)$ *и*

$$\mathfrak{A}_0 = \Big\{\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$$
$$\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$$
$$\{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3\},\ \{Z_5, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_2, Z_1, \breve{D}\}\Big\},$$

$$B(\mathfrak{A}_0) = \Big\{\alpha \in B_X(D) \ \Big|\ V(X^*, \alpha) \in \mathfrak{A}_0\Big\}, \quad B_0 = \Big\{\alpha \in B_X(D) \ \Big|\ V(X^*, \alpha) = D\Big\}.$$

Тогда выполняются следующие утверждения:

(a) *если* $|X \setminus \breve{D}| \geqslant 1$, *то*

$$S_0 = B_0 \cup B(\mathfrak{A}_0)$$

— *неприводимое порождающее множество для полугруппы* $B_X(D)$;

(b) *если* $X = \breve{D}$, *то*

$$S_1 = B_0 \cup B(\mathfrak{A}_0) \cup \big\{X \times Z_5, X \times Z_4, X \times Z_2\big\}$$

— *неприводимое порождающее множество для полугруппы* $B_X(D)$.

Теорема 3.7. *Пусть* $D = \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_{1.1}(X, 6)$ *и*

$$\mathfrak{A}_0 = \Big\{\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$$
$$\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\},$$
$$\{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{Z_5, Z_4, Z_3\},\ \{Z_5, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_4, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_3, Z_2, \breve{D}\},\ \{Z_2, Z_1, \breve{D}\}\Big\},$$

$$B(\mathfrak{A}_0) = \Big\{\alpha \in B_X(D) \mid\ V(X^*, \alpha) \in \mathfrak{A}_0\Big\}, \quad B_0 = \Big\{\alpha \in B_X(D) \mid\ V(X^*, \alpha) = D\Big\}.$$

Тогда выполняются следующие утверждения:

(a) *если* $|X \setminus \breve{D}| \geqslant 1$*, то число* $|S_0|$ *элементов множества*

$$S_0 = B_0 \cup B(\mathfrak{A}_0)$$

равно

$$|S_0| = 6^n - 4^n - 2 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n;$$

(b) *если* $X = \breve{D}$*, то число* $|S_1|$ *элементов множества*

$$S_1 = B_0 \cup B(\mathfrak{A}_0) \cup \big\{X \times Z_4, X \times Z_3, X \times Z_2\big\}$$

равно

$$|S_1| = 6^n - 4^n - 2 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n + 3.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Diasamidze Ya., Givradze O., Bakuridze A.* Generated Sets of the Complete Semigroups Binary Relations Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X, 3)$// Internat. J. Engineering Science & Innovative Technology (IJESIT) — 2016. — *5*, № 6. — P. 52–69.
2. *Diasamidze Ya., Makharadze Sh.* Complete Semigroups of Binary Relations. — Turkey: Kriter, 2013.

Диасамидзе Я.
Батумский государственный университет им. Шота Руставели, Батуми, Грузия
E-mail: diasamidze_ya@mail.ru

Партенадзе Г.
Батумский государственный университет им. Шота Руставели, Батуми, Грузия
E-mail: guladi@gmail.com

Тавдгиридзе Г.
Батумский государственный университет им. Шота Руставели, Батуми, Грузия
E-mail: g.tavdgiridze@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 63–68
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-63-68

УДК 517.972, 517.518.14

ТРИ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДА НА ГИБКОЙ КРИВОЙ

© 2020 г. Г. К. ГИОРГАДЗЕ, Г. Н. ХИМШИАШВИЛИ

Аннотация. Рассматриваются равновесные конфигурации трех взаимно отталкивающих точечных зарядов с кулоновским взаимодействием, расположенных на кривой без самопересечений постоянной длины с фиксированными положениями концов. Для данных значений зарядов, длины кривой и расстояния между ее концами вычислены все возможные равновесные конфигурации. Изучено поведение равновесных конфигураций для переменных значений зарядов; показано, что единственная возможная бифуркация — это бифуркация «вилка». Аналогичные результаты получены для гибкой петли, подчиняющейся закону Гука, и для зарядов, взаимодействующих посредством потенциала Рисса.

Ключевые слова: равновесная конфигурация, бифуркация, потенциал Рисса, точечный заряд.

ON THREE POINT CHARGES ON A FLEXIBLE ARC

© 2020 G. K. GIORGADZE, G. N. KHIMSHIASHVILI

Abstract. We consider equilibrium configurations of three mutually repelling point charges with the Coulomb interaction confined to a simple arc of a constant length with fixed positions of ends. For given values of the charges, the length of the arc, and the distance between its ends, we calculate all possible equilibrium configurations. We also study the behavior of equilibrium configurations for variable values of charges and show that a unique possible bifurcation is the pitchfork bifurcation. Similar results are presented for elastic loop obeying Hooke's law and for charges interacting via a Riesz potential.

Keywords and phrases: equilibrium configuration, bifurcation, Riesz potential, point charge.

AMS Subject Classification: 31B15

1. Введение. В данной работе изучаются равновесные состояния трех взаимно отталкивающих точечных зарядов, расположенных на простой кривой постоянной длины с фиксированными концами. Эта задача возникает как естественное обобщение предыдущих результатов авторов о равновесиях точечных зарядов на гибкой петле (см. [5]) и в линейной ионной ловушке (см. [1,2]).

В чисто математической постановке изучаемая задача формулируется следующим образом. Выберем два положительных вещественных числа D и L, $0 < D \leqslant L$, и рассматриваем их как расстояние D между двумя точками P_1, P_2, которые являются неподвижными концами плоской гибкой простой кривой Γ постоянной длины L. Для краткости мы называем такой геометрический объект *закрепленной гибкой кривой*. Затем выбираем тройку $Q = (q_1, q_2, q_3)$ положительных вещественных чисел и рассматриваем их как значения точечных зарядов с кулоновским взаимодействием, лежащих на кривой Γ. Затем для любой точки P_3, принадлежащей кривой Γ, рассмотрим потенциал Кулона $E(Q@P)$ системы $Q@P$, состоящей из зарядов q_1, q_2, q_3, помещенных в точках P_1, P_2, P_3 соответственно:

$$E(Q@P) = \frac{q_1 q_2}{d_{12}} + \frac{q_2 q_3}{d_{23}} + \frac{q_1 q_3}{d_{13}}, \tag{1.1}$$

Работа выполнена при поддержке Национального научного фонда им. Шота Руставели (проект № FR17-96).

где d_{ij} — расстояние между точками P_i и P_j.

В этой постановке равновесные конфигурации введенной системы точечных зарядов с ограничениями определяются как критические точки потенциала Кулона, рассматриваемого как функция точки P_3, удовлетворяющая единственному ограничению $d_{13}+d_{23} \leqslant L$. Итак, для любых пяти положительных чисел $(D, L; q_1, q_2, q_3)$ задача $E(D, L; Q)$ формулируется как задача подсчета числа и вычисления форм равновесных конфигураций в заданной постановке. В дальнейшем мы найдем точные формы решений $E(D, L; Q)$, т.е. все положения точки P_3, при которых $E(Q@P)$ имеет критическую точку. Отметим, что в этой постановке $d_{12} = D$ и, следовательно, изучаемый потенциал Кулона является функцией только двух расстояний d_{13}, d_{23}, т.е. его значение определяется положением точки P_3.

Замечание 1. Отметим, что при $D = 0$ изучаемая задача совпадает с задачей расположения точечных зарядов на гибкой петле, рассмотренной в [3, 5]. Кроме того, легко видеть, что при $D = L$ изучаемая задача совпадает с моделью линейной ионной ловушки, рассмотренной в [2].

Подчеркнем, что мы всегда предполагаем, что значения зарядов строго положительны. Тогда легко видеть, что форма Γ в конфигурации с минимальной энергией будет определяться двумя линейными отрезками, т.е. «кривую надо выпрямить». То же самое верно для всех остальных равновесных конфигураций.

Предложение 1. *Для любого решения $E(D, L; Q)$ точка P_3 удовлетворяет равенству*

$$d_{13} + d_{23} = L.$$

При $L = D$ это очевидно, потому что единственная возможная форма кривой — это прямолинейный отрезок, соединяющий точки P_1 и P_2. При $L > D$ отметим, что минимальное и максимальное значения расстояний d_{13} и d_{23} — это $(L-D)/2$ и $(L+D)/2$ соответственно. Далее, при $L > D$ всегда существуют две выровненные равновесные конфигурации с точкой P_3, принадлежащей продолжению отрезка I. Отметим, что обе эти конфигурации являются критическими точками потенциала Кулона $E(Q@P)$. В самом деле, результирующие силы действуют вдоль отрезка I и, следовательно, они ортогональны ограничению. Если обе длины d_{13} и d_{23} находятся внутри интервала $\left[\dfrac{L-D}{2}, \dfrac{L+D}{2}\right]$ и их сумма меньше, чем L, то очевидно, что можно увеличить как d_{13}, так и d_{23} без нарушения ограничения в виде неравенства. Эта ситуация соответствует минимуму кулоновского потенциала. Если оба расстояния принимают экстремальные значения, то конфигурация выровнена и, следовательно, это равновесная конфигурация.

Замечание 2. Таким образом, при $L > D$ равновесные положения точки P_3 лежат на эллипсе с фокусами P_1 и P_2.

Замечание 3. Отметим, что не требуется, чтобы выровненные конфигурации всегда были минимумами или максимумами потенциала Кулона. На самом деле, ниже будет показано, что они могут менять свой критический тип при изменяющихся значениях зарядов.

2. Формы равновесных конфигураций. Дадим полное решение задачи $E(D, L; Q)$.

Теорема 1. *Пусть $(D, L; Q)$ — данная пятерка положительных чисел с $L \geqslant D$ и $q_1 \leqslant q_2$. Тогда решения задачи $E(D, L; Q)$, т.е. критические точки $E(Q@P)$, можно описать следующим образом.*

1. *Если $L = D$, то $E(D, L; Q)$ имеет единственное решение, для которого P_3 лежит на отрезке $[P_1, P_2]$ и совпадает с лакуной линейной ионной ловушки, рассмотренной в [2], т.е.*

$$d_{13} = \frac{L\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}.$$

2. *Если* $L > D$ *и* $\dfrac{q_1}{q_2} > \left(\dfrac{L-D}{L+D}\right)^2$*, то существует четыре решения задачи* $E(D, L; Q)$*: две выровненные конфигурации и два зеркально симметричных треугольника со сторонами*
$$d_{13} = \frac{L\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}, \quad d_{23} = \frac{L\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}. \tag{2.1}$$
Минимальное значение E *достигается на треугольных равновесных конфигурациях. Две выровненные конфигурации являются локальными максимумами потенциала Кулона.*
3. *Если* $L > D$ *и* $\dfrac{q_1}{q_2} < \left(\dfrac{L-D}{L+D}\right)^2$*, то существуют только две выровненные равновесные конфигурации. При* $d_{13} = (L-D)/2$ *это минимум* E*, а при* $d_{13} = (L+D)/2$ *— максимум* E*.*

Доказательство. Выразим кулоновскую энергию как функцию длины $l_1 = d_{23}$, меняющуюся на отрезке $[(L-D)/2, (L+D)/2]$, и найдем ее производную:
$$\frac{dE}{dl_1} = -\frac{q_2 q_3}{l_1^2} + \frac{q_3 q_1}{(L-l_1)^2}.$$
Из условия $dE/dl_1 = 0$ легко получаются выражения (2.1). Это дает критические точки открытого интервала $((L-D)/2, (L+D)/2)$. Кроме того, выровненные конфигурации также являются равновесными конфигурациями. Чтобы определить тип экстремумов в критических точках, вычислим вторую производную от E:
$$\frac{d^2E}{dl_1^2} = \frac{2q_2q_3}{l_1^3} - \frac{2q_3q_1}{(L-l_1)^3}.$$
Остается определить знак второй производной в критических конфигурациях. Имеем
$$\left.\frac{d^2E}{dl_1^2}\right|_{l_1=\frac{l\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}} = \frac{2q_3(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2})^3}{L^3}\left(\frac{1}{\sqrt{q_2}} - \frac{1}{\sqrt{q_1}}\right),$$
$$\left.\frac{d^2E}{dl_1^2}\right|_{l_1=\frac{L+d}{2}} = 16q_3\left(\frac{q_2}{(L+D)^3} - \frac{q_1}{(L-D)^3}\right).$$
Теперь элементарно проверяется, что типы экстремальных конфигураций в точности таковы, как указано в теореме, что и завершает ее доказательство. □

Таким образом, видим, что при $\dfrac{q_1}{q_2} = \left(\dfrac{L-D}{L+D}\right)^2$ два треугольных решения сталкиваются с выровненной максимальной конфигурацией и превращаются в одну минимальную равновесную конфигурацию. Изучая это явление более подробно, мы получим следующее утверждение.

Следствие 1. *При* $\dfrac{q_1}{q_2} = \left(\dfrac{L-D}{L+D}\right)^2$ *решения* $E(D, L; Q)$ *имеют бифуркацию «вилка».*

В самом деле, нетрудно проверить, что это единственная возможная бифуркация решений задачи $E(L, D; Q)$. Стоит отметить, что в этот момент левая выровненная конфигурация становится простым устойчивым равновесием и остается «замороженной» при $q_1 < \left(\dfrac{L-D}{L+D}\right)^2 q_2$.

Обращая формулы (2.1), легко видеть, что для любого положения P_3 на эллипсе $E(L)$ существуют такие пары значений q_1, q_2, что эта конфигурация является равновесием в нашей постановке задачи.

Следствие 2. *Для любого положения* P_3 *на эллипсе* $E(L)$ *существуют такие пары положительных чисел* q_1*,* q_2*, что эта конфигурация является решением задачи* $E(D, L; q_1, q_2, 1)$*. Значения стационарных зарфдов определяются с точностью до положительного сомножителя.*

В терминологии [3] это означает, что обратная задача электростатики универсально разрешима в такой постановке.

3. Равновесные конфигурации на гибкой кривой. В этом разделе мы обсудим обобщение задачи и результаты, полученные выше. Именно, вместо предположения, что кривая Γ имеет постоянную длину (т.е. нерастяжима), теперь предположим, что это упругая струна длины L с постоянной Гука k. Следовательно, в этой постановке минимизируемая энергия E_H является суммой энергии Кулона, рассмотренной выше, и упругой энергии, пропорциональной квадрату приращения длины в данной конфигурации:

$$E_H(P@Q) = \frac{q_1q_2}{d_{12}} + \frac{q_2q_3}{d_{23}} + \frac{q_1q_3}{d_{13}} + k\big(d_{23}+d_{13}-L\big)^2. \tag{3.1}$$

Задача $E(D,L,k;Q)$ связана с критическими точками $E_H(Q@P)$ при предположении, что $d_{12}=D$. Следующий результат является аналогом теоремы 1 и дает полное решение задачи $E(D,L,k;Q)$.

Теорема 2. *Пусть $(D,L,k;Q)$ — данная шестерка положительных чисел с $L \geqslant D$ и $q_1 \leqslant q_2$. Тогда решения задачи $E(D,L,k;Q)$, т.е. критические точки $E(Q@P)$, можно описать следующим образом.*

1. *Если $L=D$, то существует единственное решение задачи $E(D,L,k;Q)$, для которого точка P_3 лежит на отрезке $[P_1,P_2]$ и для любого $k>0$ совпадает с лакуной линейной ионной ловушки, рассмотренной в* [2], *т.е.*

$$d_{13} = \frac{L\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}.$$

2. *Если $L>D$ и $k>0$, то имеется четыре равновесных конфигурации: две выровненные конфигурации и два зеркально симметричных треугольника. В обоих случаях длину d_{13} можно вычислить как единственный положительный корень кубического уравнения с явно заданными коэффициентами. В треугольном случае коэффициенты и вещественный корень этого кубического уравнения выражаются формулами* (3.2), (3.3), (3.4) *(см. ниже). Минимальное значение E_H достигается на треугольных равновесных конфигурациях. Две выровненные конфигурации являются локальными минимумами потенциала E_H.*

Доказательство. Для данного положения P_3 положим $x=d_{13}$, $y=d_{23}$ и вычислим частные производные E_k:

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = -\frac{q_1q_3}{x^2} + 2k(x+y-L), \quad \frac{\partial E_k}{\partial y} = -\frac{q_2q_3}{y^2} + 2k(x+y-L).$$

Следовательно, $\dfrac{q_1q_3}{x^2} = \dfrac{q_2q_3}{y^2}$, и поэтому $y = \dfrac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}}x$. В этой конфигурации основным моментом является то, что обе частные производные исчезают, и мы немедленно получаем равенство

$$\frac{q_1q_3}{x^2} = 2k\left(x + \frac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}}x - L\right).$$

Отсюда получаем кубическое уравнение для значения x в равновесной конфигурации, которое можно явно решить с помощью формулы Кардано. Более того, оказывается, что это кубическое уравнение имеет только один вещественный положительный корень. Опуская детали вычислений, приведем явную формулу для расстояния d_{13} в равновесной конфигурации. Положим

$$\begin{aligned}\alpha = 6\sqrt{3}q_3q_1\Big(&27q_3q_2^2q_1^2 + 108q_3q_2^{5/2}q_1^{3/2} + 162q_3q_2^3q_1 + 8q_2q_1^2L^3k \\ &+ 108q_3q_2^{7/2}q_1^{1/2} + 16q_2^{3/2}q_1^{3/2}L^3k + 27q_3q_2^4 + 8q_2^2L^3q_1k\Big)^{1/2},\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\beta = 54q_1^{3/2}q_3q_2 + 108q_3q_2^{3/2}q_1 + 54q_1^{1/2}q_3q_2^2 + 8q_1^{3/2}L^3k. \tag{3.3}$$

Тогда единственный вещественный корень рассматриваемого уравнения имеет вид

$$x = \frac{\big((\beta+\alpha)k^2\big)^{1/3}}{6k\big(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}\big)} + \frac{2L^2q_1k}{3\big(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}\big)\big((\beta+\alpha)k^2\big)^{1/3}} + \frac{L\sqrt{q_1}}{3\big(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}\big)}. \tag{3.4}$$

Очевидно, что это выражение положительно и, следовательно, расстояние d_{13} в равновесной конфигурации может принимать только это значение, что означает, что имеются две зеркально симметричные равновесные конфигурации. Случай выровненной равновесной конфигурации можно рассмотреть аналогично. $\square$

С помощью этого результата мы получим решение обратной задачи электростатики в случае упругой кривой.

Следствие 3. *Для любой точки P_3, отличной от P_1, P_2, существуют такие значение k постоянной Гука и пара положительных чисел q_1, q_2, что конфигурация P_1, P_2, P_3 является решением задачи $E(D,L,k;q_1,q_2,1)$.*

4. Случай потенциала Рисса. Обозначим E_s потенциал Рисса порядка $s>1$. Для заданного набора из пяти чисел $(D,L;Q)$, как и ранее, аналогичная задача $E_s(D,L;Q,s)$ связана с положениями равновесия трех зарядов закрепленной гибкой кривой Γ типа (D,L), взаимодействующих с потенциалом E_s. Иначе говоря, мы теперь ищем положения P_3, которые соответствуют критическим точкам выражения

$$E_s(Q@P) = \frac{q_1q_2}{D^s} + \frac{q_2q_3}{d_{23}^s} + \frac{q_1q_3}{d_{13}^s},$$

где d_{ij} — расстояние между точками P_i и P_j.

Анализируя доказательство теоремы 1, заключаем, что она также справедлива для потенциала E_s. Повторение тех же самых рассуждений дает следующий аналог теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $(D,L;Q,s)$ — данный набор из шести положительных чисел, где $L \geqslant D$, $s>1$ и $q_1 \leqslant q_2$. Тогда решения задачи $E_s(D,L,k;Q)$, т.е. критические точки $E_s(Q@P)$, можно описать следующим образом.*

1. *Если $L=D$, то существует единственное решение задачи $E_s(D,L,k;Q)$, для которого точка P_3 лежит на отрезке $[P_1,P_2]$ и удовлетворяет соотношению*

$$d_{13} = \frac{Lq_1^{1/(s+1)}}{q_1^{1/(s+1)}} + q_2^{1/(s+1)}.$$

2. *Если $L>D$ и $\dfrac{q_1}{q_2} > \left(\dfrac{L-D}{L+D}\right)^{s+1}$, то существуют четыре равновесные конфигурации: две выровненные конфигурации и два зеркально симметричных треугольника со сторонами*

$$d_{13} = \frac{Lq_1^{1/(s+1)}}{q_1^{1/(s+1)} + q_2^{1/(s+1)}}, \quad d_{23} = \frac{Lq_2^{1/(s+1)}}{q_1^{1/(s+1)} + q_2^{1/(s+1)}}.$$

   Минимальное значение E достигается на треугольных равновесных конфигурациях. Две выровненные конфигурации являются локальными максимумами потенциала Кулона.

3. *Если $L>D$ и $\dfrac{q_1}{q_2} < \left(\dfrac{L-D}{L+D}\right)^{s+1}$, то существуют только две выровненные равновесные конфигурации. При $d_{13}=(L-D)/2$ это минимум E, а при $d_{13}=(L+D)/2$ — максимум E.*

Теперь легко понять, что аналогичные результаты выполняются для упругой кривой и потенциала Рисса. Для упругой кривой и потенциала Рисса общего вида невозможно дать явные формулы для расстояний d_{13}, d_{23} в критической конфигурации. Однако есть твердая уверенность в том, что выполняется аналог следствия 3. Это и другие следствия теоремы 3 авторы будут обсуждать в следующих работах.

5. Заключительные замечания. В заключение отметим, что задачи, рассмотренные в статье, предполагают несколько возможных продолжений. Наиболее очевидным направлением исследования является задача обобщения полученных результатов на случаи с количеством зарядов больше трех. Такие обобщения не очевидны даже в случае четырех равных зарядов. Например, для двух равных зарядов на гибкой кривой с такими же зарядами, помещенными на ее концах, задача нетривиальна даже при $L = D$. В этом случае можно показать, что задача сводится к нахождению положительного корня следующего уравнения четвертой степени:

$$x^4 + 6Dx^3 - 11D^2x^2 + 6D^3x - D^4 = 0.$$

Это уравнение можно явно решить с помощью формул Тартальи–Феррари, и мы получим, что оно имеет только два действительных корня, приблизительно равных $-7{,}562$ и $0{,}321$. Первый корень, очевидно, не подходит, и, следовательно, мы заключаем, что в состоянии равновесия расстояние между P_1 и самым левым зарядом приблизительно равно 0,321. Естественно посмотреть, что случится, когда L растет. Возникающее алгебраическое уравнение для d_{13} с коэффициентами, зависящими от L, имеет восьмую степень. С помощью симметрии и результатов из [1] можно найти выпуклую форму равновесия в четырех случаях: при $L = D$ она приведена выше; при $L = 3D/2$ это половина правильного шестиугольника со стороной $D/2$; при $L = 3D$ — квадрат со стороной D; при $L = 4D$ — половина правильного шестиугольника со стороной D. Используя эту информацию, можно уменьшить степень уравнения для d_{13} до четырех, что в принципе позволяет найти явные формулы для всех корней, однако вычисления оказываются слишком громоздкими. Таким образом, проблема подсчета формы равновесий остается открытой даже в этом случае.

Другая естественная перспектива — получить аналоги результатов статьи в важном случае зарядов, взаимодействующих с помощью логарифмического потенциала, заданного соотношением

$$E_l(Q@P) = -q_1q_2 \log d_{12} - q_2q_3 \log d_{23} - q_1q_3 \log d_{13},$$

где d_{ij} — расстояние между точками P_i и P_j.

Для трех зарядов, взаимодействующих посредством логарифмического потенциала, легко проверить, что выполняются аналоги теорем 1 и 2. Линейные ионные ловушки, соответствующие выровненным конфигурациям с логарифмическим взаимодействием, изучались долгое время, начиная с основополагающей статьи Т. Стилтьеса [6]. Следовательно, можно попытаться использовать известные результаты, чтобы пролить свет на равновесия в случае гибкой кривой. В частности, для $L = D$ и четырех равных зарядов можно заключить, что положения P_3 и P_4 совпадают с корнями полинома Якоби, данного в [6]. Динамика этих положений для растущего L предполагает дальнейшие интересные задачи.

Подводя итог, видим, что изучение равновесных конфигураций нескольких точечных зарядов на закрепленной гибкой кривой является обширным и практически неизученным полем исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Exner P.* An isoperimetric problem for point interactions// J. Phys. A: Math. Gen. — 2005. — *A38.* — P. 4795–4802.
2. *Giorgadze G., Khimshiashvili G.* Concyclic and aligned equilibrium configurations of point charges// Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math. — 2017. — *67.* — P. 20–33.
3. *Khimshiashvili G.* Equilibria of constrained point charges// Bull. Georgian Natl. Acad. Sci. — 2013. — *7*, № 2. — P. 15–20.
4. *Khimshiashvili G.* Equilibria of point charges on elastic contour// Bull. Georgian Natl. Acad. Sci. — 2017. — *11*, № 4. — P. 7–12.
5. *Khimshiashvili G., Panina G., and Siersma D.* Equilibria of three constrained point charges// J. Geom. Phys. — 2015. — *98*, № 2. — P. 110–117.
6. *Stieltjes T. J.* Sur les racines de l'equation $X_n = 0$// Acta Math. — 1886. — *9.* — P. 385–400.

Гиоргадзе Г. К.
Тбилисский государственный университет им. И. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия
E-mail: gia.giorgadze@tsu.ge

Химшиашвили Г. Н.
Государственный университет Ильи (Чавчавадзе), Тбилиси, Грузия
E-mail: gogikhim@yahoo.com, giorgi.khimshiashvili@iliauni.edu.ge

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 69–73
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-69-73

УДК 512.532, 512.534.1, 512.562

НЕПРИВОДИМЫЕ ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ПОЛНЫХ ПОЛУГРУПП ОБЪЕДИНЕНИЙ $B_X(D)$, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ПОЛУРЕШЕТКАМИ КЛАССА $\Sigma_1(X,4)$

© 2020 г. **О. ГИВРАДЗЕ**

Аннотация. Для полных полугрупп объединений $B_X(D)$, определенных полурешетками класса $\Sigma_1(X,4)$, описано множество всех внешних элементов и показано, что оно является порождающим (и, следовательно, неприводимым) множеством полугруппы $B_X(D)$. Для конечной полугруппы $B_X(D)$ дана формула для вычисления числа элементов порождающего множества.

Ключевые слова: полурешетка объединений, полная полугруппа бинарных отношений, порождающее множество, квазинормальное представление бинарных отношений.

IRREDUCIBLE GENERATING SETS OF COMPLETE SEMIGROUPS OF UNIONS $B_X(D)$ DEFINED BY SEMILATTICES OF THE CLASS $\Sigma_1(X,4)$

© 2020 **O. GIVRADZE**

Abstract. In complete semigroups of unions $B_X(D)$ defined by semilattices of the class $\Sigma_1(X,4)$, we describe the set of all external elements and show that it is a generating (and, therefore, irreducible) set of the semigroup $B_X(D)$. For a finite semigroup $B_X(D)$, we give a formula for calculating the number of elements of the generating set.

Keywords and phrases: semilattice of unions, complete semigroup of binary relations, generating set, quasinormal representation of binary relations.

AMS Subject Classification: 20M05, 20M10

Пусть X — произвольное непустое множество, D — X-полурешетка объединений, замкнутая относительно теоретико-множественного объединения элементов из D, f — произвольное отображение множества X во множество D. Каждому отображению f мы поставим в соответствие бинарное отношение α_f на множестве X, удовлетворяющее условию

$$\alpha_f = \bigcup_{x\in X} \big(\{x\} \times f(x)\big).$$

Множество всех таких α_f $(f : X \to D)$ обозначается $B_X(D)$. Нетрудно доказать, что $B_X(D)$ является полугруппой относительно операции умножения бинарных отношений. Эта полугруппа называется полной полугруппой бинарных отношений, определенных X-полурешеткой объединений D.

Обозначим через $\varnothing$ пустое бинарное отношение или пустое подмножество множества X. Условие $(x, y) \in \alpha$ будем записывать в виде $x\alpha y$. Далее, пусть

$$x, y \in X, \quad Y \subseteq X, \quad \alpha \in B_X(D), \quad \breve{D} = \bigcup_{Y \in D} Y, \quad T \in D.$$

Введем следующие множества:

$$y\alpha = \{x \in X \mid y\alpha x\}, \quad Y\alpha = \bigcup_{y \in Y} y\alpha,$$
$$V(D,\alpha) = \{Y\alpha \mid Y \in D\}, \quad X^* = \{Y \mid \varnothing \neq Y \subseteq X\},$$
$$V(X^*,\alpha) = \{Y\alpha \mid \varnothing \neq Y \subseteq X\}, \quad Y_T^\alpha = \{y \in X \mid y\alpha = T\},$$
$$\widetilde{D}(\alpha) = \{T \in V(X^*,\alpha) \mid Y_T^\alpha \neq \varnothing\}.$$

Если $\alpha \in B_X(D)$, то бинарное отношение α имеет единственное представление вида

$$\alpha = \bigcup_{T \in \widetilde{D}(\alpha)} (Y_T^\alpha \times T),$$

где $Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha = \varnothing$, $T \neq T'$ $(T, T' \in \widetilde{D}(\alpha))$ и $\bigcup\limits_{T \in \widetilde{D}(\alpha)} Y_T^\alpha = X$. Такое представление бинарного отношения α называется *нормальным*.

Полная полурешетка объединений D принадлежит классу $\Sigma_1(X,4)$, если она имеет вид $D = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$, где элементы Z_1, Z_2, Z_3 и Z_4 — подмножества непустого множества X, удовлетворяющие следующим условиям:

$$Z_1 \subset Z_3 \subset Z_4, \quad Z_2 \subset Z_3 \subset Z_4, \quad Z_1 \cup Z_2 = Z_3, \quad Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing. \tag{1}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только полные полугруппы объединений $B_X(D)$, определенные полурешетками класса $\Sigma_1(X,4)$. Таким образом, будем рассматривать каждый элемент этих полугрупп как бинарное отношение, записанное в нормальной форме. Отметим, что нормальное представление каждого элемента α полной полугруппы объединений $B_X(D)$, определенной полурешетками класса $\Sigma_1(X,4)$, принадлежит следующим возможным четырем типам:

(1) $\alpha = (X \times Z)$, где $Z \in D$;
(2) $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z')$, где $Z, Z' \in D$, $Z \neq Z'$, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha = X$ и $Y_Z^\alpha \cap Y_{Z'}^\alpha = \varnothing$;
(3) $\alpha = (Y_Z^\alpha \times Z) \cup (Y_{Z'}^\alpha \times Z') \cup (Y_{Z''}^\alpha \times Z'')$, где $Z, Z', Z'' \in D$ попарно различны, $Y_Z^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{Z''}^\alpha = X$ и подмножества Y_Z^α, $Y_{Z'}^\alpha$, $Y_{Z''}^\alpha$ множества X попарно не пересекаются;
(4) $\alpha = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4)$, где $Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha = X$ и подмножества Y_1^α, Y_2^α, Y_3^α, Y_4^α множества X попарно не пересекаются (см. [1]).

Для любого элемента $\alpha \in B_X(D)$ из условия (1) следует, что

$$Z_1\alpha \subseteq Z_3\alpha \subseteq Z_4\alpha, \quad Z_2\alpha \subseteq Z_3\alpha \subseteq Z_4\alpha, \quad Z_3\alpha = Z_1\alpha \cup Z_2\alpha. \tag{2}$$

Для полугруппы $B_X(D)$ определим подмножества B_2, $B_{3,3}$ $B_{3,4}$ и B_4 следующим образом:

$$B_2 = \{\beta \mid \beta = (Y_1^\beta \times Z_1) \cup (Y_2^\beta \times Z_2)\},$$
$$B_{3,3} = \{\beta \mid \beta = (Y_1^\beta \times Z_1) \cup (Y_2^\beta \times Z_2) \cup (Y_4^\beta \times Z_3)\},$$
$$B_{3,4} = \{\beta \mid \beta = (Y_1^\beta \times Z_1) \cup (Y_2^\beta \times Z_2) \cup (Y_4^\beta \times Z_4)\},$$
$$B_4 = \{\beta \mid \beta = (Y_1^\beta \times Z_1) \cup (Y_2^\beta \times Z_2) \cup (Y_3^\beta \times Z_3) \cup (Y_4^\beta \times Z_4)\}$$

(как и выше, каждое бинарное отношение β записано в нормальной форме). Введем обозначение $S = B_2 \cup B_{3,3} \cup B_{3,4} \cup B_4$.

Определение 1. Говорят, что элемент α полугруппы $B_X(D)$ является *внешним*, если $\alpha \neq \delta \circ \beta$ для всех $\delta, \beta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$. Хорошо известно, что если S — множество всех внешних элементов полугруппы $B_X(D)$ и S' — любое порождающее множество для $B_X(D)$, то $S \subseteq S'$.

Теорема 2. *Множество S является множеством всех внешних элементов полугруппы $B_X(D)$.*

Доказательство. Пусть α — любой элемент множества S. Из определения множества S следует, что $\{Z_1, Z_2\} \subseteq \widetilde{D}(\alpha)$. Если $\alpha = \delta \circ \beta$ для некоторых элементов $\delta, \beta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$, то $\widetilde{D}(\delta)\beta \supseteq \{Z_1, Z_2\}$. Отсюда следует, что существуют такие элементы $Z, Z' \in \widetilde{D}(\delta)$, что $Z\beta = Z_1$ и $Z'\beta = Z_2$. Из (2) следует, что эти условия выполняются, если

$$Z = Z_1 \text{ и } Z' = Z_2 \quad \text{или} \quad Z = Z_2 \text{ и } Z' = Z_1.$$

Таким образом, имеем

$$Z_1\beta = Z_1 \text{ и } Z_2\beta = Z_2 \quad \text{или} \quad Z_1\beta = Z_2 \text{ и } Z_2\beta = Z_1.$$

В этом случае существует такой элемент $t \in Z_1 \cap Z_2$, что $t\beta \subseteq Z_1$ и $t\beta \subseteq Z_2$. Это противоречит структуре $D = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$. Отсюда следует, что $\alpha \neq \delta \circ \beta$ для всех $\delta, \beta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$. Следовательно, α — внешний элемент полугруппы $B_X(D)$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. *Множество S является единственным наприводимым порождающим множеством полной полугруппы объединений $B_X(D)$, определенной полурешеткой класса $\Sigma_1(X, 4)$.*

Доказательство. Сначала покажем, что множество S является порождающим множеством полугруппы $B_X(D)$. Пусть α — произвольный элемент множества $B_X(D) \setminus S$. Рассмотрим следующие три случая.

1. $|\widetilde{D}(\alpha)| = 3$. Тогда бинарное отношение α имеет вид

$$\alpha = (Y_i^\alpha \times Z_i) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4), \quad i = 1, 2.$$

Пусть $i = 1$ (случай $i = 2$ рассматривается аналогично), т.е.

$$\alpha = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4).$$

Рассмотрим элементы

$$\delta = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_3^\alpha \times Z_2) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \in S,$$
$$\beta = (Z_1 \times Z_1) \cup ((Z_3 \setminus Z_1) \times Z_2) \cup ((X \setminus Z_3) \times Z_4) \in S.$$

Имеем

$$Z_1\beta = Z_1, \quad Z_2\beta = Z_1 \cup Z_2 = Z_3, \quad Z_4\beta = Z_4.$$

Следовательно,

$$\delta \circ \beta = (Y_1^\alpha \times Z_1\beta) \cup (Y_3^\alpha \times Z_2\beta) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4\beta) = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) = \alpha.$$

Таким образом, элемент α можно представить в виде конечного произведения элементов множества S.

2. $|\widetilde{D}(\alpha)| = 2$. Тогда бинарное отношение α имеет один из трех следующих возможных видов:
(a) $\alpha = (Y_i^\alpha \times Z_i) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3)$, где $i = 1, 2$;
(b) $\alpha = (Y_i^\alpha \times Z_i) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4)$, где $i = 1, 2$;
(c) $\alpha = (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4)$.
Рассмотрим каждый случай отдельно.

(a) $\alpha = (Y_i^\alpha \times Z_i) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3)$, где $i = 1, 2$. Пусть $i = 1$ (случай $i = 2$ рассматривается аналогично), т.е.

$$\alpha = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3).$$

Рассмотрим элементы

$$\delta = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_3^\alpha \times Z_2) \in S, \quad \beta = (Z_1 \times Z_1) \cup ((X \setminus Z_1) \times Z_2) \in S.$$

Легко видеть, что $\alpha = \delta \circ \beta$. Таким образом, элемент α можно представить в виде конечного произведения элементов множества S.

(b) $\alpha = (Y_i^\alpha \times Z_i) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4)$, где $i = 1,2$. Пусть $i = 1$ (случай $i = 2$ рассматривается аналогично), т.е.

$$\alpha = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4).$$

Рассмотрим элементы

$$\delta = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_4^\alpha \times Z_2) \in S, \quad \beta = (Z_1 \times Z_1) \cup ((X \setminus Z_3) \times Z_2) \cup ((Z_2 \setminus Z_1) \times Z_4) \in S.$$

Легко видеть, что $\alpha = \delta \circ \beta$. Таким образом, элемент α можно представить в виде конечного произведения элементов множества S.

(c) $\alpha = (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4)$. Рассмотрим элементы

$$\delta = (Y_3^\alpha \times Z_1) \cup (Y_4^\alpha \times Z_2) \in S, \quad \beta = ((Z_1 \setminus Z_2) \times Z_1) \cup ((Z_1 \cap Z_2) \times Z_2) \cup ((X \setminus Z_1) \times Z_4) \in S.$$

Легко видеть, что $\alpha = \delta \circ \beta$. Таким образом, элемент α можно представить в виде конечного произведения элементов множества S.

3. $|\widetilde{D}(\alpha)| = 1$. Тогда бинарное отношение α имеет один из следующих трех возможных видов:
(a) $\alpha = X \times Z_i$, где $i = 1,2$;
(b) $\alpha = X \times Z_3$;
(c) $\alpha = X \times Z_4$.

Рассмотрим каждый случай отдельно.

(a) $\alpha = X \times Z_i$, где $i = 1,2$. Пусть $i = 1$ (случай $i = 2$ рассматривается аналогично), т.е. $\alpha = X \times Z_1$. Рассмотрим элементы

$$\delta = (Y_1 \times Z_1) \cup (Y_2 \times Z_2) \in S, \quad \beta = (Z_3 \times Z_1) \cup ((X \setminus Z_3) \times Z_2) \in S,$$

где $Y_1 \cup Y_2 = X$, $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. Легко видеть, что $\alpha = \delta \circ \beta$. Таким образом, элемент α можно представить в виде конечного произведения элементов множества S.

(b) $\alpha = X \times Z_3$. Рассмотрим элементы

$$\delta = (Y_1 \times Z_1) \cup (Y_2 \times Z_2) \in S, \quad \beta = ((Z_1 \setminus Z_2) \times Z_1) \cup ((Z_1 \cap Z_2) \times Z_2) \cup ((X \setminus Z_1) \times Z_3) \in S,$$

где $Y_1 \cup Y_2 = X$, $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. Легко видеть, что $\alpha = \delta \circ \beta$. Таким образом, элемент α можно представить в виде конечного произведения элементов множества S.

(c) $\alpha = X \times Z_4$. Рассмотрим элементы

$$\delta = (Y_1 \times Z_1) \cup (Y_2 \times Z_2) \in S, \quad \beta = ((Z_1 \setminus Z_2) \times Z_1) \cup ((X \setminus Z_1) \times Z_2) \cup ((Z_1 \cap Z_2) \times Z_4) \in S,$$

где $Y_1 \cup Y_2 = X$, $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. Легко видеть, что $\alpha = \delta \circ \beta$. Таким образом, элемент α можно представить в виде конечного произведения элементов множества S.

Результаты, полученные в пп. 1–3, показывают, что любой элемент $\alpha \in B_X(D) \setminus S$ можно представить в виде конечного произведения элементов множества S, т.е. множество S является порождающим множеством полугруппы $B_X(D)$. Но поскольку S — множество всех внешних элементов, множество S является неприводимым (и единственным) порождающим множеством полугруппы $B_X(D)$. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Если полугруппа $B_X(D)$ конечна, то число элементов множества S вычисляется по формуле*

$$|S| = 2^{|X|} - 2 \cdot 3^{|X|} + 4^{|X|}.$$

Это легко доказать с помощью формулы

$$K_n^m = \frac{(-1)^{m+1}}{(i-1)! \cdot (m-i)!} \cdot i^{n-1}$$

(см. [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Givradze O.* Irreducible generating sets of complete semigroups of unions $B_X(D)$ defined by semilattices of the class $\Sigma_2(X, 4)$// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2012. — *186*, № 5. — P. 745–750.
2. *Givradze O.* The number of equivalences on a finite set// Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 2003. — *131*. — P. 121–122.

Гиврадзе О.
Батумский государственный университет им. Шота Руставели, Батуми, Грузия
E-mail: omari@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 74–79
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-74-79

УДК 512.542.74, 512.544

О СУММЕ ПОРЯДКОВ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

© 2020 г. М. ГЕРЦОГ, П. ЛОНГОБАРДИ, М. МАЙ

Аннотация. В статье дан обзор некоторых недавних результатов авторов, касающихся функции $\psi(G)$, которая является суммой порядков элементов конечной группы: авторы рассматривают вопрос о том, как значение $\psi(G)$ влияет на структуру группы G.

Ключевые слова: порядок элемента группы, разрешимая группа, конечная группа.

ON THE SUM OF ORDERS OF ELEMENTS IN FINITE GROUPS

© 2020 M. HERZOG, P. LONGOBARDI, M. MAJ

Abstract. This paper is a survey of some recent authors' results concerning the function $\psi(G)$, which is the sum of orders of elements of a finite group. More precisely, the authors consider the question how the value of $\psi(G)$ affects the structure of G.

Keywords and phrases: order of element of group, solvable group, finite group.

AMS Subject Classification: 20D60, 20E34, 20F16

1. Введение. Пусть G — конечная группа. Для элемента $x \in G$ обозначим через $o(x)$ его порядок. Положим

$$\psi(G) := \sum_{x \in G} o(x).$$

Например, если S_3 — симметрическая группа степени 3, то $\psi(S_3) = 1\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot 3 = 13$. Нетрудно доказать, что из соотношения $\psi(G) = \psi(S_3)$ следует, что $G \simeq S_3$.

В дальнейшем C_n обозначает циклическую группу порядка n.

Легко видеть, что

$$\psi(C_5) = 1\cdot 1 + 4\cdot 5 = 21, \quad \psi(C_6) = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 6 = 21;$$

следовательно, из соотношения $\psi(G_1) = \psi(G_2)$ не следует, что $G_1 \simeq G_2$. Кроме того, из равенств $|G_1| = |G_2|$ и $\psi(G_1) = \psi(G_2)$ не следует, что $G_1 \simeq G_2$; в самом деле, если

$$G_1 = C_8 \times C_2, \quad G_2 = C_8 \rtimes C_2,$$

где

$$C_8 = \langle a\rangle, \quad C_2 = \langle b\rangle, \quad a^b = a^{-1},$$

то $\psi(G_1) = \psi(G_2) = 87$. Тем не менее, С. М. Джафариан Амири доказал (см. [15]), что A_5 и $PSL(2,7)$ характеризуются своими порядком и суммой порядков элементов, т.е. если G — группа порядка 60 (порядка 168) и $\psi(G) = \psi(A_5)$ ($\psi(G) = \psi(PSL(2,7))$), то $G \simeq A_5$ ($G \simeq PSL(2,7)$). Более того, конечные абелевы группы определяются своими порядком и суммой порядков элементов, как доказали М. Тарнаучеану и Д. Г. Фодор (см. [23]).

Если p — простое число и α — положительное целое число, то легко доказать, что
$$\psi(C_{p^\alpha}) = \frac{p^{2\alpha+1}}{p+1}.$$
Кроме того, функция ψ мультипликативна, т.е., если A и B взаимно простые порядки, то
$$\psi(A \times B) = \psi(A)\psi(B).$$
Следовательно, если $n > 1$ — целое число, $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$, где $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, то
$$\psi(C_n) = \prod_{i \in \{1,\dots,s\}} \frac{p_i^{2\alpha_i+1}}{p_i+1}.$$

Рассмотрим следующую задачу: *Как значение $\psi(G)$ влияет на структуру G?*

Обозначение $\psi(G)$ было введено Х. Амири, С. М. Джафарианом Амири и И. М. Айзексом в [2] в 2009 г. В этой статье была доказана следующая основная теорема.

Теорема 1. *Если G — нециклическая конечная группа порядка n, то $\psi(G) < \psi(C_n)$. Следовательно, $\psi(G) = \psi(C_n)$ тогда и только тогда, когда $G \simeq C_n$.*

Основываясь на этих результатах, многие авторы в последнее время исследовали функцию $\psi(G)$ (см., например, [1,3,7,14,16,18]). М. Амири и С. М. Джафариан Амири в [19] изучали функцию $\psi(G)$ в случае, когда G — конечная p-группа, и в [20], когда G имеет порядок, свободный от квадратов. И. Марефат, А. Иранманеш и А. Теранииан в [21] изучали случай конечной простой группы G. В [17,22] М. Амири и С. М. Джафариан Амири и, независимо, Р. Шен, Г. Чен и Ц. Ву начали исследование групп со вторым наибольшим значением суммы порядков элементов.

Цель этого обзора — проиллюстрировать некоторые недавние результаты, касающиеся функции $\psi(G)$, полученные авторами в [9–11].

2. Некоторые новые результаты, касающиеся функции $\psi(G)$. В [9] мы сначала усилили результат теоремы 1, доказав лучшее соотношение между $\psi(G)$ и $\psi(C_n)$, если G — нециклическая группа порядка n. Именно, был доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть G — конечная нециклическая группа порядка n. Тогда*
$$\psi(G) \leqslant \frac{7}{11}\psi(C_n).$$

Эта верхняя оценка — наилучшая возможная. В самом деле, как показано в следующем предложении, для каждого $n = 4k$, где k — нечетное целое число, существует нециклическая группа G порядка n, удовлетворяющая соотношению $\psi(G) = \frac{7}{11}\psi(C_n)$.

Предложение 3. *Пусть k — нечетное целое число и $n = 4k$. Тогда $|C_{2k} \times C_2| = n$ и*
$$\psi(C_{2k} \times C_2) = \frac{7}{11}\psi(C_n).$$

Другим результатом статьи [9] является следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть G — нециклическая группа порядка n и q — наименьший простой делитель n. Тогда*
$$\psi(G) < \frac{1}{q-1}\psi(C_n).$$

Для групп четного порядка имеем $q = 2$ и, следовательно, из теоремы 4 следует только то, что $\psi(G) < \psi(C_n)$, как уже показано в теореме 1. Но для групп нечетных порядков имеем $q \geqslant 3$ и, следовательно, из теоремы 4 вытекает следующее важное утверждение.

Следствие 5. *Пусть G — нециклическая конечная группа нечетного порядка n. Тогда*
$$\psi(G) < \frac{1}{2}\psi(C_n).$$

Отметим, что для групп нечетных порядков следствие 5 сильнее, чем теорема 2, которая утверждает лишь, что $\psi(G) \leqslant \frac{7}{11}\psi(C_n)$.

Для случая, когда порядок $|G|$ четный, но $|G| = 2m$, где m нечетно, в [10] доказан следующий результат.

Теорема 6. *Пусть G — нециклическая группа порядка $n = 2m$, где m — нечетное целое число. Тогда*

$$\psi(G) \leqslant \frac{13}{21}\psi(C_n).$$

Кроме того, $\psi(G) = \frac{13}{21}\psi(C_n)$ тогда и только тогда, когда

$$G = S_3 \times C_{\frac{n}{6}}, \quad n = 6m_1, \quad (m_1, 6) = 1.$$

Более общим образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть Δ_n — класс нециклических групп фиксированного порядка $n = 2m$, где m нечетно, и предположим, что $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$, где p_i — различные простые числа и α_i — положительные целые числа для всех и i. Если $G \in \Delta_n$, то*

$$\psi(G) \leqslant \frac{1}{3} + \frac{2l}{3\psi(C_l)}\psi(C_n),$$

где $l = \min\{p_i^{\alpha_i} \mid i \in \{1, \dots, t\}\}$.

Кроме того, $G \in \Delta_n$ удовлетворяет соотношению

$$\psi(G) = \frac{1}{3} + \frac{2l}{3\psi(C_l)}\psi(C_n)$$

тогда и только тогда, когда $G = D_{2l} \times C_{n/2l}$, где D_{2l} — группа диэдра порядка $2l$.

Так, если $n = 2m$, где m нечетно, то $D_{2l} \times C_{n/2l}$ — единственная группа порядка n со вторым наибольшим значением ψ для групп этого порядка.

Если G — нециклическая группа нечетного порядка n, то, согласно следствию 5, $\psi(G) < \frac{1}{2}\psi(C_n)$. Следовательно, естественно спросить, при каких $n = 2m$ с нечетным m выполняется аналогичное неравенство. Ответ на этот вопрос обеспечивает следующее следствие.

Следствие 8. *Пусть G — нециклическая группа порядка $n = 2m$ с нечетным m. Тогда*

$$\psi(G) < \frac{1}{2}\psi(C_n),$$

кроме случая, когда $n = 6m_1$ и $(m_1, 6) = 1$. В этом случае группа $G = S_3 \times C_{n/6}$, являющаяся единственной группой порядка n со вторым наибольшим значением ψ для групп этого порядка, удовлетворяет соотношению

$$\psi(G) = \frac{13}{21}\psi(C_n) > \frac{1}{2}\psi(C_n).$$

Завершим этот раздел следующим вопросом.

Вопрос. Существуют ли другие группы G порядка $n = 6m_1$, где $(m_1, 6) = 1$, удовлетворяющие соотношению $\psi(G) \geqslant \frac{1}{2}\psi(C_n)$?

3. Новый критерий разрешимости. В [11] мы доказали следующий критерий разрешимости, связанный с функцией $\psi(G)$.

Теорема 9. *Пусть G — конечная группа порядка n и*

$$\psi(G) \geqslant \frac{1}{6{,}68}\psi(C_n).$$

Тогда G — разрешимая группа.

В частности, из этой теоремы вытекает следующий результат.

Теорема 10. *Если G — неразрешимая группа порядка n, то*

$$\psi(G) < \frac{1}{6{,}68}\psi(C_n).$$

В частности, это выполняется для всех неабелевых простых групп.

Важной составляющей нашего доказательства теоремы 9 является следующий результат Х. Амири, С. М. Джафариана Амири и И. М. Айзекса.

Лемма 11 (см. [2, следствие B]). *Если R — нормальная циклическая силовская подгруппа группы G, то*

$$\psi(G) \leqslant \psi(R)\psi(G/R),$$

причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда подгруппа R центральна в G.

Другой важной составляющей нашего доказательства является следующая теорема И. Н. Герштейна (см. [8]).

Теорема 12. *Если G содержит абелеву максимальную подгруппу, то G разрешима.*

Третий результат, который мы использовали, — следующий (см. [9, предложение 2.5]).

Теорема 13. *Пусть p — наибольший простой делитель числа $|G|$ и $[G : \langle x\rangle] < 2p$ для некоторого $x \in G$. Тогда или силовская p-подгруппа G — циклическая и нормальная в G, или G — разрешимая группа.*

Два других важных результата, полученных, соответственно, М. Холлом (мл.) (см. [6, теорема 1.3]) и А. Луччини (см. [13, теорема 2.20]), приведены в следующих двух теоремах, .

Теорема 14. *Пусть p — простое число и $n = 1 + rp$, где r — целое число, удовлетворяющее соотношению $1 < r < (p + 3)/2$. Тогда никакая группа не имеет n силовских p-подгрупп, за исключением случаев, когда или $n = q^t$ для некоторого простого q, или $r = (p - 3)/2$ и $p > 3$ — простое число Ферма.*

Теорема 15. *Пусть A — циклическая собственная полугруппа группы G и $K = \mathrm{core}_G(A)$. Тогда $[A : K] < [G : A]$; в частности, если $|A| \geqslant [G : A]$, то $K > 1$.*

И наконец, в своем доказательстве мы использовали такое следствие из теоремы Гупперта и Ито (см. [12]).

Теорема 16. *Пусть G содержит подгруппу B индекса степени простого числа и B содержит циклическую подгруппу H индекса $[B : H] \leqslant 2$. Тогда G — разрешимая группа.*

Более общим образом, используя также результаты Е. Фисмана и З. Арада (см. [5]), мы смогли доказать следующий критерий разрешимости.

Теорема 17. *Пусть G — конечная группа порядка n, содержащая подгруппу A индекса степени простого числа p^s. Предположим, что A содержит нормальную циклическую подгруппу B, удовлетворяющую следующему условию: A/B — циклическая группа порядка 2^r для некоторого неотрицательного целого числа r. Тогда G — разрешимая группа.*

Отметим, что $\psi(A_5) = 211$ и $\psi(C_{60}) = 1617$. Следовательно,

$$\psi(A_5) = \frac{211}{1617}\psi(C_{60}).$$

Таким образом, наша нижняя оценка $1/6{,}68$ в теореме 9 не так уж далека от наилучшей возможной. В [11] мы высказали следующую гипотезу.

Гипотеза. Если G — группа порядка n и

$$\psi(G) > \frac{211}{1617}\psi(C_n),$$

то G разрешима.

Недавно М. Баниасад Азад и Б. Хосрави (см. [4]) доказали, что эта гипотеза верна. Следовательно, нижняя оценка $\psi(G) > \frac{211}{1617}\psi(C_n)$ для разрешимости является наилучшей возможной.

Закончим этот обзор предложением и вопросом.

В доказательстве теоремы 9 мы использовали следующее предложение.

Предложение 18. *Пусть G — конечная группа. Если H — нормальная подгруппа G, то*

$$\psi(G) \leqslant \psi(G/H)|H|^2.$$

Вопрос. Если G — конечная группа и H — подгруппа группы G, верно ли, что

$$\psi(G) \leqslant \psi(H)\big(|G|/|H|\big)^2?$$

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке Министерствп образования, университетов и науки Италиии и Национальным институтом высшей математики (Национальная группа по алгебраическим и геометрическим структурам и ихприложениям).

М. Герцог такде выражает благодарность Отделению математики университета Салерно за гостеприимство и поддержку во время проведения исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Amiri H., Jafarian Amiri S. M.* Sum of element orders on finite groups of the same order// J. Algebra Appl. — 2011. — *10*, № 2. — P. 187–190.
2. *Amiri H., Jafarian Amiri S. M., Isaacs I. M.* Sums of element orders in finite groups// Commun. Algebra. — 2009. — *37*. — P. 2978–2980.
3. *Amiri H., Jafarian Amiri S. M.* Sums of element orders on maximal subgroups of the symmetric group// Commun. Algebra. — 2012. — *40*, № 3. — P. 770–778.
4. *Baniasad Azad M., Khosravi B.* A criterion for solvability of a finite group by the sum of element orders// J. Algebra. — 2018. — *516*. — P. 115–124.
5. *Fisman E., Arad Z.* A proof of Szep's conjecture on nonsimplicity of certain finite groups// J. Algebra. — 1987. — *108*, № 2. — P. 340–354.
6. *Hall M., Jr.* On the number of Sylow subgroups in a finite group// J. Algebra. — 1967. — *7*. — P. 363–371.
7. *Harrington J., Jones L., Lamarche A.* Characterizing finite groups using the sum of the orders of the elements// Int. J. Comb. — *2014*. — Article ID 835125.
8. *Herstein I. N.* A remark on finite groups// Proc. Amer. Math. Soc. — 1958. — *71*. — P. 255–257.
9. *Herzog M., Longobardi P., Maj M.* An exact upper bound for sums of element orders in non-cyclic finite groups// J. Pure Appl. Algebra. — 2018. — *222*, № 7. — P. 1628–1642.
10. *Herzog M., Longobardi P., Maj M.* Sums of element orders in groups of order $2m$ with m odd// Commun. Algebra (to appear).
11. *Herzog M., Longobardi P., Maj M.* Two new criteria for solvability of finite groups// J. Algebra. — 2018. — *511*. — P. 215–226.
12. *Huppert B. and Itô N.* Über die Auflosbarkeit faktorisierbarer Gruppen, II// Math. Z. — 1954. — *61*. — P. 94–99.
13. *Isaacs I. M.* Finite Group Theory. — Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 2008.
14. *Jafarian Amiri S. M.* Maximum sum of element orders of all proper subgroups of $PGL(2, q)$// Bull. Iran. Math. Soc. — 2013. — *39*, № 3. — P. 501–505.
15. *Jafarian Amiri S. M.* Characterization of A_5 and $PSL(2, 7)$ by sum of elements orders// Int. J. Group Theory. — 2013. — *2*. — P. 35–39.
16. *Jafarian Amiri S. M.* Second maximum sum of element orders on finite nilpotent groups// Commun. Algebra. — 2013. — *41*, № 6. — P. 2055–2059.
17. *Jafarian Amiri S. M., Amiri M.* Second maximum sum of element orders on finite groups// J. Pure Appl. Algebra. — 2014. — *218*, № 3. — P. 531–539.
18. *Jafarian Amiri S. M., Amiri M.* Sum of the products of the orders of two distinct elements in finite groups// Commun. Algebra. — 2014. — *42*, № 12. — P. 5319–5328.
19. *Jafarian Amiri S. M., Amiri M.* Characterization of p-groups by sum of the element orders// Publ. Math. Debrecen. — 2015. — *86*, № 1–2. — P. 31–37.
20. *Jafarian Amiri S. M., Amiri M.* Sum of the element orders in groups with the square-free orders// Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2017. — *40*. — P. 1025–1034.

21. *Marefat Y., Iranmanesh A., Tehranian A.* On the sum of element orders of finite simple groups// J. Algebra Appl. — 2013. — *12*, № 7. — P. 135–138.
22. *Shen R., Chen G., Wu C.* On groups with the second largest value of the sum of element orders// Commun. Algebra. — 2015. — *43*, № 6. — P. 2618–2631.
23. *Tărnăuceanu M., Fodor D. G.* On the sum of element orders of finite abelian groups// Sci. An. Al. I. Cuza Univ. Ser. Math. — 2014. — *2LX*. — P. 1–7.

Herzog M.
Университет Тель-Авива, Израиль
E-mail: herzogm@post.tau.ac.il

Longobardi P.
Университет Салерно, Фиськьяно (Салерно), Италия
E-mail: plongobardi@unisa.it

Maj M.
Университет Салерно, Фиськьяно (Салерно), Италия
E-mail: mmaj@unisa.it

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 80–86
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-80-86

УДК 512.552; 509.07; 289.23.15.25

ОБ ОДНОСТОРОННИХ ГОМОМОРФИЗМАХ КОЛЕЦ

© 2020 г. **Н. ИНАССАРИДЗЕ, М. ХАЗАРАДЗЕ, Э. ХМАЛАДЗЕ, Б. МЕСАБЛИШВИЛИ**

Аннотация. В статье предложен новый кандидат на роль одностороннего гомоморфизма кольца, вводимый с помощью одностороннего гомоморфизма (неабелевых) групп. В качестве приложения предложенного одностороннего гомоморфизма кольца приведена многосторонняя схема цифровой подписи.

Ключевые слова: односторонний гомоморфизм, групповое кольцо, многостадийная схема цифровой подписи.

ON ONE-WAY RING HOMOMORPHISMS

© 2020 **N. INASSARIDZE, M. KHAZARADZE, E. KHMALADZE, B. MESABLISHVILI**

Abstract. In this article, we propose a new candidate for a one-way ring homomorphism induced by a one-way (non-abelian) group homomorphism. A multi-party digital signature scheme is also given as an application of the proposed one-way ring homomorphism.

Keywords and phrases: one-way homomorphism, group ring, multi-party digital signature scheme.

AMS Subject Classification: 94A60, 94A62, 16S34

1. Введение. В криптографии односторонними функциями называются функции, которые легко вычислить для любых исходных данных, но для которых трудно найти обратную функцию от образа при случайных начальных данных. Односторонние функции представляют собой фундаментальную основу современной криптографии и играют важную роль в построении криптосистем, поскольку понятие односторонности было впервые введено для функций кодирования (см. [4,5,15]). Они используются в основанных на хэше схемах цифровой подписи (см. [8,11,14,16]), которые составляют многообещающую альтернативу схемам цифровой подписи RSA и схемам, основанным на эллиптических кривых, в современную эпоху постквантовых криптосистем. Хотя есть всеобщая убежденность, что односторонние функции существуют, дать доказательство их существования по крайней мере не легче, чем показать, что $P \neq NP$. Таким образом, ниже мы всегда будем ссылаться на односторонние функции при предположении, что они существуют.

Делалось много попыток использовать современные алгебраические структуры в различных криптографических конструкциях (см., например, [1, 2, 6, 13, 17, 18]). Данная статья может рассматриваться в этом контексте, поскольку в ней предложена конструкция, которая могла бы служить новым кандидатом на роль односторонней функции, имеющей алгебраическую природу (некоммутативного) гомоморфизма кольца. Поскольку определение односторонних функций зависит только от длины двоичных последовательностей входа-выхода и от их вычислимости за полиномиальное время, это определение мало что говорит о лежащих в их основе алгебраических

Работа Н. Инассаридзе выполнена при поддержке гранта STCU-2016-08/MTCU 6321 и гранта № MTM2016-79661-P (Agencia Estatal de Investigacíon).

Работа Э. Хмаладзе выполнена при поддержке гранта № MTM2016-79661-P (Agencia Estatal de Investigacíon).

структурах. Однако некоторые типичные и полезные функции кодирования (т.е. те функции, для которых неизвестен алгоритм, обращающий их за полиномиальное время), которые могут оказаться односторонними, являются гомоморфизмами групп (см. ниже примеры 6 и 7). Очевидно, возникает следующий естественный вопрос.

Вопрос 1 (см. [2])**.** Существуют ли односторонние гомоморфизмы, ассоциированные с какими-либо алгебраическими структурами, отличными от групп?

В [2] обсуждаются соотношения между односторонними гомоморфизмами групп и односторонними гомоморфизмами колец. Показано, что если существует односторонний гомоморфизм групп $f : U \to V$, то существует односторонний гомоморфизм колец

$$F : \mathbb{Z}_n \ltimes U \to \mathbb{Z}_m \ltimes V, \quad ([k], u) \mapsto ([k], f(u))$$

где U, V — такие конечные абелевы группы, что $|U| = n$, $|V| = m$, $m \mid n$; здесь $\ltimes$ означает полупрямое произведение (см. определение 9). Приведены некоторые примеры таких гомоморфизмов колец, которые являются односторонними при стандартных криптографических предположениях.

Этот результат также отвечает утвердительно на следующий вопрос, поставленный в [2].

Вопрос 2. Существует ли такая функция кодирования $f : A \to B$, что для данных $f(x)$ и $f(y)$ как $f(x+y)$, так и $f(xy)$ можно эффективно вычислить для некоторых алгебраических структур?

Построенный гомоморфизм колец, основанный на одностороннем гомоморфизме групп, зависит от порядка лежащей в основе группы и, следовательно, не является односторонним, если порядок группы не вычисляется за полиномиальное время. Таким образом, возникают еще два вопроса.

Вопрос 3. Существует ли односторонний гомоморфизм колец, основанный на одностороннем гомоморфизме групп, не зависящий от порядка лежащей в основе группы?

Вопрос 4. Существует ли односторонний гомоморфизм колец, основанный на одностороннем гомоморфизме неабелевых групп?

В данной статье предложен кандидат на роль одностороннего гомоморфизма колец, основанный на одностороннем гомоморфизме групп, положительно отвечающий как на вопрос 3, так и на вопрос 4, что заполняет пробел, упомянутый в [2]. Затем эта конструкция применяется для получения многосторонней схемы цифровой подписи. Структура статьи такова. После напоминания в разделе 2 определений, известных результатов и различных аспектов теории односторонних функций, которые нам потребуются, в разделе 3 мы покажем, как построить односторонний гомоморфизм колец для данного одностороннего гомоморфизма групп и как использовать такие гомоморфизмы колец для того, чтобы получить многостороннюю схему цифровой подписи аналогично тому, как это сделано в [2]. В конце раздела 3 мы обсудим рассмотрим эффективность этой схемы.

2. Предварительные сведения и известные результаты.

2.1. Обозначения. В этом разделе мы напомним некоторые основные факты об односторонних функциях, а также зафиксируем систему обозначений и терминологию. Будем следовать обычным соглашениям, как, например, в [3]. Всюду в статье будем использовать обозначение l в качестве параметра безопасности, включенного в наши определения.

Говорят, что функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ является пренебрежимой, если для любого положительного целого числа c существует такое целое число N_c, что

$$f(n) < 1/n^c \quad \text{для всех} \quad n > N_c.$$

Будем обозначать через $\{0,1\}^*$ и $\{0,1\}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) множества всех последовательностей битов конечной длины и длины n соответственно.

Говорят, что алгоритм $\mathcal{A}$ является *вероятностным за полиномиальное время* (*ВПВ-алгоритмом*), если его поведение определяется подбрасыванием монеты и существует такой полином p, что среднее время прохождения алгоритма $\mathcal{A}$ на входах размера l меньше, чем $p(l)$.

Обозначим через $\mathcal{A}(x)$ значение, выдаваемое алгоритмом $\mathcal{A}$ на выходе для значения x на входе. Пишем $y \in \mathcal{A}(x)$, если алгоритм $\mathcal{A}$ выдает y при входном значении x для некоторых значений внутреннего случайного подбрасывания монеты, в то время как $y = \mathcal{A}(x)$ означает результат работы алгоритма $\mathcal{A}$ при входном значении x и присвоения ему значения y на выходе.

Говорят, что вычислительная задача вычислительно неосуществима, если никакой ВПВ-алгоритм не выполняет поставленную задачу с ненулевой вероятностью.

Говорят, что конечное множество $\mathfrak{R}$ выборочно, если существует ВПВ-алгоритм, который случайным образом выбирает элемент из равномерного распределения на $\mathfrak{R}$. Если $\mathfrak{R}$ выборочно, то пишем $r \xleftarrow{\$} \mathfrak{R}$ для эксперимента равномерного выбора случайной величины из $\mathfrak{R}$ и присвоения r его значения.

Через $\Pr[A : B; C]$ обозначим вероятность того, что логическое выражение A выполняется для данного эксперимента, состоящего из последовательного выполнения B и C.

2.2. Односторонние функции. Интуитивно, односторонняя функция (ОФ) — это функция, которую легко вычислить, но вычислительно сложно обратить.

Определение 5. Функция $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ называется *односторонней функцией*, если ее:
легко вычислить: существует ВПВ-алгоритм, который на входе x выдает значение $f(x)$;
трудно обратить: не существует такого ВПВ-алгоритма $\mathcal{A}$, что

$$\Pr\Big[f(x') = y : x \xleftarrow{\$} \{0,1\}^l;\ y = f(x);\ x' = \mathcal{A}(y)\Big]$$

— непренебрежимая функция длины x.

В дальнейшем пишем «односторонняя функция» (соответственно, «гомоморфизм»), имея в виду кандидата на роль односторонней функции (соответственно, гомоморфизма).

Приведем несколько хорошо известных примеров односторонних функций, широко используемых в криптографических схемах в настоящее время.

Пример 6. Пусть f — классическая функция кодирования

$$f : \mathbb{Z}_{p-1} \to \mathbb{Z}_p^*, \quad f(x) = g^x \pmod{p},$$

где p — простое число >2 и $g \in \mathbb{Z}_p^*$. Тогда f — гомоморфизм групп, действующий из $\mathbb{Z}_{p-1}$ на циклическую группу $\langle g\rangle \subseteq \mathbb{Z}_p^*$, порожденную g. В частности, если g — примитивный корень в $\mathbb{Z}_{p-1}$, то f — изоморфизм абелевых групп $\mathbb{Z}_{p-1}$ и $\mathbb{Z}_p^*$.

Пример 7. Пусть h — хорошо известная RSA-функция кодирования

$$h : \mathbb{Z}_n^* \to \mathbb{Z}_n^*, \quad h(x) = x^e \pmod{n},$$

где n (модуль) и e (показатель кодирования) — подходящим образом выбранные целые числа. Тогда h — изоморфизм групп.

Следовательно, если f в примере 6 и h в примере 7 действительно односторонние, то они являются односторонними гомоморфизмами групп.

Пример 8. Так называемая увеличенная матричная степенная функция (МСФ), представленная в [17], может рассматриваться как кандидат на роль одностороннего гомоморфизма неабелевых групп.

2.3. Основные результаты (см. [2]). Хорошо известно, что криптографические отображения, приведенные в примерах 6 и 7, являются гомоморфизмами групп, на которых конкретные гомоморфизмы колец, рассмотренные в [2], отождествляются как односторонние функции. В этом разделе сформулируем основной результат работы [2] в терминах полупрямых произведений колец. Сначала напомним следующее определение.

Определение 9. Пусть R — коммутативное кольцо и M — R-модуль. Полупрямое произведение R и M — это кольцо, обозначаемое $R \ltimes M$ и определенное следующим образом:

(i) множество, на котором оно определено, — это декартово произведение $R \times M$;
(ii) для всех $r, r' \in R$ и $m, m' \in M$ операции заданы следующим образом:

$$(r,m) + (r',m') = (r + r', m + m'), \quad (r,m) \cdot (r',m') = (rr', rm' + r'm).$$

Легко проверить, что $R \ltimes M$ действительно является коммутативным кольцом. Кроме того, полупрямое произведение функториально в следующем смысле: рассмотрим категорию, объекты которой — все пары (R, M), где R — коммутативное кольцо, M — R-модуль и морфизм из (R, M) в (R', M') является парой (ϕ, f), где $\phi : R \to R'$ — гомоморфизм колец и $f : M \to M'$ — гомоморфизм абелевых групп, для которых равенство $f(rm) = \phi(r)f(m)$ выполняется при всех $r \in R$, $m \in M$. Тогда полупрямое произведение является функтором, действующим из этой категории в категорию коммутативных колец (о категориях и функторах см. [10]). Следовательно, для любой такой пары (ϕ, f) существует естественный гомоморфизм колец

$$\phi \ltimes f : R \ltimes M \to R' \ltimes M', \quad (\phi \ltimes f)(r, m) = (\phi(r), f(m)).$$

Сформулируем основной результат [2] следующим образом.

Теорема 10. *Пусть U и V — такие конечные абелевы группы, что $|U| = n$ и $|V| = m$, $m \mid n$. Если существует односторонний гомоморфизм групп $f : U \to V$, то существует односторонний гомоморфизм колец*

$$\pi \ltimes f : \mathbb{Z}_n \ltimes U \to \mathbb{Z}_m \ltimes V,$$

где $\pi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ — естественная проекция колец и U (соответственно, V) рассматривается как $\mathbb{Z}_n$-модуль (соответственно, $\mathbb{Z}_m$-модуль).

С помощью этого результата в [2] получены конкретные примеры гомоморфизмов колец, являющиеся односторонними при стандартном криптографическом предположении. Это дает утвердительный ответ на вопросы 1 и 2.

Односторонние гомоморфизмы колец можно широко использовать в криптосистемах как важное основание. Например, фундаментальное приложение теоремы 10 дано в [2] в виде построения новой схемы многосторонней цифровой подписи.

3. Новые односторонние гомоморфизмы колец и схема многосторонней цифровой подписи. Сначала напомним хорошо известную алгебраическую конструкцию, которая потребуется в дальнейшем.

Определение 11. Пусть G — группа и R — коммутативное кольцо. Групповое кольцо группы G над R обозначается $R[G]$ и определяется как множество всех формальных сумм $\sum r_i g_i$, где $g_i \in G$, $r_i \in R$, и все r_i, кроме их конечного числа, являются нулевыми. Сумма двух элементов из $R[G]$ определяется формулой

$$\sum r_i g_i + \sum r_i' g_i = \sum (r_i + r_i') g_i,$$

где умножение определено дистрибутивно с помощью $g \cdot r = rg$.

В дальнейшем для элемента общего вида из кольца $R[G]$ пишем $\sum\limits_{i=1}^{k} r_i g_i$, где $r_i \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и называем k *длиной* этого элемента.

Следующее предложение, утверждающее, что конструкция группового кольца функториальна, является хорошо известным фактом в алгебре (см., например, [9, 10]).

Предложение 12. *Пусть R — коммутативное кольцо и $\alpha : G \to G'$ — гомоморфизм групп. Тогда существует естественным образом индуцированный гомоморфизм колец*

$$R[\alpha] : R[G] \to R[G'],$$

заданный формулой

$$R[\alpha]\left(\sum_{i=1}^{k} r_i g_i\right) = \sum : k_{i=1} r_i \alpha(g_i).$$

В частности, для кольца целых чисел $R = \mathbb{Z}$ справедлива следующая теорема.

Теорема 13. *Пусть G и G' — группы. Если существует односторонний гомоморфизм групп $\alpha : G \to G'$, то существует односторонний гомоморфизм колец*

$$\mathbb{Z}[\alpha] : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G'],$$

заданный как в предложении 12.

Замечание 14. Теорема 13 и пример 8 дают положительный ответ на вопросы 3 и 4.

Теперь дадим приложение нашего одностороннего гомоморфизма колец, построив новую схему многосторонней цифровой подписи аналогично [2]. Дальнейшую информацию о многосторонних цифровых подписях см. в [7, 12].

Чтобы предложить конкретную схему цифровой подписи, нужно разложить любой элемент группового кольца $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_q]$:

$$w = \sum_{i=1}^{k} n_i g_i, \quad \text{где} \quad n_i \in \mathbb{Z} \quad \text{и}q \quad g_i \in \mathbb{Z}_q,$$

следующим образом:

$$w = w_{\mathrm{pos}} + w_{\mathrm{neg}}, \quad \text{где} \quad w_{\mathrm{pos}} = \sum_{j=1}^{k_1} n_{i_j} g_{i_j} \quad \text{и} \quad w_{\mathrm{neg}} = \sum_{j'=1}^{k_2} m_{i_{j'}} g_{i_{j'}}; \tag{3.1}$$

здесь $n_{i_j} > 0$ для всех $1 \leqslant j \leqslant k_1$, $m_{i_{j'}} < 0$ для всех $1 \leqslant j' \leqslant k_2$ и $k_1 + k_2 = k$.

Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_t$ — персоны, которые подписываются, и V — проверяющий. Пусть

$$H : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^l \subseteq \mathbb{Z}_{p-1}$$

— хэш-функция для некоторого простого числа $p > 2$ и $M \in \{0,1\}^*$ — сообщение, которое должно быть подписано всеми сторонами. Схема многосторонней подписи позволяет проверяющему V установить, что M подписано всеми U_i, $1 \leqslant i \leqslant t$.

3.1. Генерация ключа. Для каждого подписывающегося U_i, $1 \leqslant i \leqslant t$, пара из секретного и открытого ключа генерируется следующим образом.

Зафиксируем некоторое положительное целое число N и рассмотрим подмножество K множества $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p-1}]$, состоящее из всех элементов $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i g_i$ при $-N \leqslant n_i \leqslant N$ для всех $i = 1, 2, \ldots, q$. Секретный ключ — это случайно порождаемый и равномерно распределенный элемент $k_i^{\mathrm{priv}} \in K \subset \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p-1}]$, а открытый ключ является таким элементом $k_i^{\mathrm{pub}} \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p^*]$ группового кольца, что

$$\mathbb{Z}[\alpha](k_i^{\mathrm{priv}}) = k_i^{\mathrm{pub}},$$

где α дано в примере 6. Из того факта, что $\mathbb{Z}[\alpha]$ — изоморфизм колец (согласно предложению 12), вытекает следующее утверждение.

Лемма 15. *Пусть*

$$k_i^{\mathrm{priv}} = k_{\mathrm{pos},i}^{\mathrm{priv}} + k_{\mathrm{neg},i}^{\mathrm{priv}}, \quad k_i^{\mathrm{pub}} = k_{\mathrm{pos},i}^{\mathrm{pub}} + k_{\mathrm{neg},i}^{\mathrm{pub}}$$

— разложения секретного и открытого ключа согласно (3.1)*. Тогда выполняются равенства*

$$\mathbb{Z}[\alpha](k_{\mathrm{pos},i}^{\mathrm{priv}}) = k_{\mathrm{pos},i}^{\mathrm{pub}}, \quad \mathbb{Z}[\alpha](k_{\mathrm{neg},i}^{\mathrm{priv}}) = k_{\mathrm{neg},i}^{\mathrm{pub}}.$$

3.2. Генерация подписи. Для данного элемента $v = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i h_i \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p^*]$ обозначим через $\tilde{v}$ элемент

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \left(h_i \mod (p-1)\right).$$

Очевидно, $\tilde{v} \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p-1}]$.

Сообщение $M \in \{0,1\}^*$ подписывается каждым участником U_i, $1 \leqslant i \leqslant t$, с помощью его секретного ключа k_i^{priv}. Сначала вычисляется дайджест сообщения $H(M) = D \in \mathbb{Z}_{p-1}$.

(i) Участник U_1 раскладывает свой секретный и открытый ключ согласно (3.1) следующим образом:

$$k_1^{\mathrm{priv}} = k_{\mathrm{pos},1}^{\mathrm{priv}} + k_{\mathrm{neg},1}^{\mathrm{priv}} \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p-1}], \quad k_1^{\mathrm{pub}} = k_{\mathrm{pos},1}^{\mathrm{pub}} + k_{\mathrm{neg},1}^{\mathrm{pub}} \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p^*].$$

Наконец, U_1 вычисляет

$$s_1 = k_{\mathrm{pos},1}^{\mathrm{priv}} \cdot \widetilde{k_{\mathrm{neg},1}^{\mathrm{pub}}} + D \cdot k_{\mathrm{neg},1}^{\mathrm{priv}}$$

и посылает M и s_1 участнику U_2.

(ii) Участник U_i, $2 \leqslant i \leqslant t-1$, раскладывает свой секретный ключ согласно (3.1) следующим образом:
$$k_i^{\mathrm{priv}} = k_{\mathrm{pos},i}^{\mathrm{priv}} + k_{\mathrm{neg},i}^{\mathrm{priv}} \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p-1}], \quad k_i^{\mathrm{pub}} = k_{\mathrm{pos},i}^{\mathrm{pub}} + k_{\mathrm{neg},i}^{\mathrm{pub}} \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p^*].$$
Наконец, U_i вычисляет
$$s_i = s_{i-1} \cdot \left(k_{\mathrm{pos},i}^{\mathrm{priv}} \cdot \widetilde{k_{\mathrm{neg},i}^{\mathrm{pub}}} + D \cdot k_{\mathrm{neg},i}^{\mathrm{priv}} \right)$$
и посылает M и s_i участнику U_{i+1}.

(iii) Участник U_t раскладывает свой секретный ключ согласно (3.1) следующим образом:
$$k_t^{\mathrm{priv}} = k_{\mathrm{pos},t}^{\mathrm{priv}} + k_{\mathrm{neg},t}^{\mathrm{priv}} \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p-1}], \quad k_t^{\mathrm{pub}} = k_{\mathrm{pos},t}^{\mathrm{pub}} + k_{\mathrm{neg},t}^{\mathrm{pub}} \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p^*].$$
Наконец, U_t вычисляет
$$s_t = s_{t-1} \cdot \left(k_{\mathrm{pos},t}^{\mathrm{priv}} \cdot \widetilde{k_{\mathrm{neg},t}^{\mathrm{pub}}} + D \cdot k_{\mathrm{neg},t}^{\mathrm{priv}} \right)$$
и посылает M и s_t проверяющему V.

Замечание 16. Коммутативность кольца $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{p-1}]$ обеспечивает тот важный факт, что порядок подписывающихся не важен в этой схеме многосторонней подписи.

3.3. Проверка подписи. Чтобы проверить подпись s сообщения M, проверяющий V вычисляет дайджест сообщения $H(M) = D \in \mathbb{Z}_{p-1}$. Затем он раскладывает открытый ключ согласно (3.1) следующим образом:
$$k_i^{\mathrm{pub}} = k_{\mathrm{pos},i}^{\mathrm{pub}} + k_{\mathrm{neg},i}^{\mathrm{pub}} \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p^*], \quad 0 \leqslant i \leqslant t,$$
и затем подсчитывает элемент
$$v = \left(k_{\mathrm{pos},1}^{\mathrm{pub}} \cdot \mathbb{Z}[\alpha](\widetilde{k_{\mathrm{neg},1}^{\mathrm{pub}}}) + \mathbb{Z}[\alpha](D) \cdot k_{\mathrm{neg},1}^{\mathrm{pub}} \right) \cdots \left(k_{\mathrm{pos},t}^{\mathrm{pub}} \cdot \mathbb{Z}[\alpha](\widetilde{k_{\mathrm{neg},t}^{\mathrm{pub}}}) + \mathbb{Z}[\alpha](D) \cdot k_{\mathrm{neg},t}^{\mathrm{pub}} \right).$$
Наконец, V проверяет, верно ли, что
$$\mathbb{Z}[\alpha](s_t) = v.$$
Очевидно, что проверка этой схемы основана на свойстве гомоморфизма колец $\mathbb{Z}[\alpha]$ (см. теорему 13) и лемме 15.

3.4. Эффективность схемы. Для оценки эффективности этой схемы предположим, что длина k_i^{priv} не более, чем k. Тогда генерирование ключа для U_i требует 1 вычислений одностороннего гомоморфизма кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$, что эквивалентно не более чем k вычислениям одностороннего гомоморфизма групп α (см. пример 6).

Размер секретных ключей, k_i^{priv}, составляет $\mathcal{O}(k \log(N(p-1))$ бит, а размер открытых ключей, k_i^{pub}, составляет $\mathcal{O}(k \log(Np)$ бит.

Вычисляя размер подписи, можно вывести, что размер s_1 равен размеру s_i/s_{i-1} для всех $2 \leqslant i \leqslant t$ и составляет $\mathcal{O}(k^2 \log(N(p-1))$ бит.

Подпись для всех t участников и проверка требуют одного и того же времени работы алгоритма, $\mathcal{O}(tk^2 + k^{2t})$, в то время как проверка требует кроме этого одно вычисление одностороннего гомоморфизма колец $\mathbb{Z}[\alpha]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Anshel I., Anshel M., Goldfeld D.* An algebraic method for public-key cryptography// Math. Res. Lett. — 1999. — *6*. — P. 287–291.
2. *Chida E., Nishizeki T., Ohmori M., Shizuva H.* On the one-way algebraic homomorphism// IEICE Trans. Fundam. — 1996. — *E79-A*, № 1. — P. 54–60.
3. *Delfs H., Knebl H.* Introduction to Cryptography. Principles and Applications. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2015.
4. *Diffie W., Hellman M. E.* New directions in cryptography// IEEE Trans. Information Theory. — 1976. — *22*. — P. 644–654.

5. *ElGamal T.* A public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms// Lect. Notes Comp. Sci. — 1985. — *196.* — P. 10–18.
6. *Inassaridze N., Kandelaki T., Ladra M.* Categorical interpretations of some key agreement protocols// J. Math. Sci. — 2013. — *195*, № 4. — P. 439–444.
7. *Itakura K., Nakamura K.* A public-key cryptosystem suitable for digital multi-signatures// Trans. Inform. Process. Soc. Jpn. — 1983. — *24*, № 2. — P. 474–480.
8. *Lamport L.* Constructing digital signatures from a one way function. `http://www.cacr.math.uwaterloo.ca`
9. *Lang S.* Algebra. — New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
10. *MacLane S.* Categories for the Working Mathematician. — New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1978.
11. *Merkle R. C.* A certified digital signature// Lect. Notes Comput. Sci. — 1989. — *435.* — P. 218–238.
12. *Micali S., Ohta K., Reyzin L.* Accountable subgroup multisignatures// in: Proc. 8th ACM Conf. on Computer and Communications Security. — New York: ACM, 2001. — P. 245–254.
13. *Pavlovic D.* Chasing diagrams in cryptography// Lect. Notes Comput. Sci. — 2014. — *8222.* — P. 353–367.
14. *Rabin M. O.* Digitalized signatures// in: Foundations of Secure Communication. — Academic Press, 1978. — P. 155–168.
15. *Rivest R. L., Shamir A., Adleman L.* A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems// Commun. ACM. — 1978. — *21*, № 2. — P. 120–126.
16. *Rompel J.* One-way functions are necessary and sufficient for secure signatures// in: Proc. ACM STOC'90, 1990. — P. 387–394.
17. *Sakalauskas E.* Enhanced matrix power function for cryptographic primitive construction// Symmetry. — 2018. — *10*, № 2. — P. 43.
18. *Yanai N., Chida E., Mambo M.* A secure structured multisignature scheme based on a non-commutative ring homomorphism// IEICE Trans. Fundam. — 2011. — *E94-A*, № 6. — P. 54–60.

Инассаридзе Н.
Математический институт им. А. Размадзе, Тбилиси, Грузия;
Тбилисский государственный университет, Тбилиси, Грузия;
Грузинский технический университет, Тбилиси, Грузия
E-mail: `niko.inas@gmail.com`

Хазарадзе М.
Грузинский технический университет, Тбилиси, Грузия

Хмаладзе Э.
Математический институт им. А. Размадзе, Тбилиси, Грузия;
Тбилисский государственный университет, Тбилиси, Грузия;
Грузинский технический университет, Тбилиси, Грузия

Месаблишвили Б.
Математический институт им. А. Размадзе, Тбилиси, Грузия;
Тбилисский государственный университет, Тбилиси, Грузия
E-mail: `bachuki.mesablishvili@tsu.ge`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 87–96
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-87-96

УДК 512.665.43, 515.145.5

СТРУКТУРА $A(\infty)$-АЛГЕБРЫ В КОГОМОЛОГИИ И КОГОМОЛОГИИ СВОБОДНОГО ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ

© 2020 г. **Т. КАДЕИШВИЛИ**

Аннотация. Алгебра когомологий пространства $H^*(X)$ не определяет ни модули когомологий пространства петель $H^*(\Omega X)$, ни когомологии свободного пространства петель $H^*(\Lambda X)$. Однако согласно теореме минимальности, доказанной автором, существует структура $A(\infty)$-алгебры $(H^*(X), \{m_i\})$ на $H^*(X)$, определяющая $H^*(\Omega X)$. Показано, что та же самая $A(\infty)$-алгебра $(H^*(X), \{m_i\})$ определяет также модули когомологий $H^*(\Lambda X)$.

Ключевые слова: гомология Хохшильда, морфизм, $A(\infty)$-алгебра, алгебра когомологий, модуль когомологий, пространство петель.

$A(\infty)$-ALGEBRA STRUCTURE IN THE COHOMOLOGY AND COHOMOLOGIES OF A FREE LOOP SPACE

© 2020 **T. KADEISHVILI**

Abstract. The cohomology algebra of the space $H^*(X)$ defines neither cohomology modules of the loop space $H^*(\Omega X)$ nor cohomologies of the free loop space $H^*(\Lambda X)$. But by the author's minimality theorem, there exists a structure of $A(\infty)$-algebra $(H^*(X), \{m_i\})$ on $H^*(X)$, which determines $H^*(\Omega X)$. We also show that the same $A(\infty)$-algebra $(H^*(X), \{m_i\})$ determines also cohomology modules $H^*(\Lambda X)$.

Keywords and phrases: Hochschild homology, morphism, $A(\infty)$-algebra, cohomology algebra, cohomology module, loop space.

AMS Subject Classification: 19D55, 55P35

Коцепная алгебра $C^*(X)$ определяет когомологию $H^*(\Omega X)$ пространства петель — это хорошо известная bar-конструкция Адамса $B(C^*(X))$:

$$H(B(C^*(X))) \approx H^*(\Omega X).$$

Что касается когомологий $H^*(\Lambda X)$ свободного пространства петель $\Lambda X = X^{S^1}$, то их можно вычислить с помощью комплекса Хохшильда $C^*(X) \otimes B(C^*(X))$ (см. [4]):

$$H(C^*(X) \otimes B(C^*(X))) \approx H^*(\Lambda X).$$

Если вместо $B(C^*(X))$, рассматривать bar-конструкцию $B(H^*(X))$, то в общем случае мы не получим $H^*(\Omega X)$. Аналогично, комплекс Хохшильда алгебры когомологий $H^*(X) \otimes B(H^*(X))$ не порождает $H^*(\Lambda X)$. Следовательно, переходя от $C^*(X)$ к $H^*(X)$, мы теряем часть информации, и одна структура *градуированной алгебры* на $H^*(X)$ слишком бедна, чтобы определить $H^*(\Omega X)$ и $H^*(\Lambda X)$.

В $[1,5]$ была построена дополнительная структура на $H^*(X)$, последовательность мультиопераций

$$\Big\{m_i : \underbrace{H^*(X)\otimes\cdots\otimes H^*(X)}_{i \text{ раз}} \to H^*(X),\ i=1,2,3,4,\dots\Big\},$$

превращающая $(H^*(X),\{m_i\})$ в $A(\infty)$-алгебру в смысле Сташеффа (см. [11]). Эта структура является расширением обычной структуры алгебры когомологий: $m_1=0$ и m_2 совпадает с умножением когомологий.

Этот объект полностью определяет когомологии пространства петель $H^*(\Omega X)$: операции $\{m_i\}$ определяют возмущенный дифференциал d_m на bar-конструкции $B(H^*(X))$ так, что

$$H(B(H^*(X)),d_m)\approx H(B(C^*(X))\approx H^*(\Omega X).$$

В этой заметке будет показано, что та же самая структура $A(\infty)$-алгебры когомологий $(H^*(X),\{m_i\})$ достаточна для определения когомологий свободного пространства петель $H^*(\Lambda X)$.

В разделе 1 приведено классическое определение гомологий Хохшильда для строго ассоциативных DG-алгебр и модулей. В разделе 2 описано хорошо известное понятие гомологий Хохшильда для $A(\infty)$-алгебр и бимодулей. Раздел 3 посвящен теореме минимальности, описывающей структуру $A(\infty)$-алгебры в алгебре когомологий пространства, а в разделе 4 показано, что эта структура определяет не только когомологии пространства петель, но и когомологии свободного пространства петель.

1. Комплекс Хохшильда, ассоциативная постановка

Опишем классический комплекс Хохшильда и его применение в топологии — конструкцию, которая порождает когомологии свободного пространства петель.

Пусть $(A,\mu : A\otimes A\to A, d : A^*\to A^{*+1})$ — ассоциативная дифференциальная градуированная алгебра (DG-алгебра для краткости) и M — дифференциальный градуированный A-бимодуль, т.е. цепные отображения $A\otimes M\to M$, $M\otimes A\to M$ заданы так, что выполняются стандартные условия *ассоциативности*: для $a,b\in A$, $x\in M$ имеем

$$(a\cdot b)\cdot x = a\cdot(b\cdot x),\quad (x\cdot a)\cdot b = x\cdot(a\cdot b),\quad (a\cdot x)\cdot b = a\cdot(x\cdot b).$$

Предположим, что A является 1-приведенной, т.е. $A^0=R$ (основное кольцо), $A^1=0$ и $A^{<0}=0$. В этой ситуации мы можем определить

(i) обычную bar-конструкцию

$$BA = T^c(s^{-1}A^{>0}) = \sum_{i=0}^{\infty}\otimes^i s^{-1}A^{>0},$$

тензорную коалгебру обратной надстройки A (на самом деле это *косвободная коалгебра*, копорождаемая $s^{-1}A$) (см., например, [6]) с дифференциалом

$$d_B([a_1\otimes\cdots\otimes a_n]) = \sum_k\big[a_1\otimes\cdots\otimes da_k\otimes\cdots\otimes a_n\big] + \sum_k\big[a_1\otimes\cdots\otimes a_k\cdot a_{k+1}\otimes\cdots\otimes a_n\big]$$

(для простоты опускаем знаки);

(ii) *односторонняя bar-конструкция* $M\otimes BA$ с дифференциалом

$$d(x\otimes[a_1\otimes\cdots\otimes a_n]) = dx\otimes\big[a_1\otimes\cdots\otimes a_n\big] + x\otimes d_B\big[a_1\otimes\cdots\otimes a_n\big] + x\cdot a_1\otimes\big[a_2,\dots,a_n\big];$$

(iii) *комплекс Хохшильда* $C_*(A,M)) = M\otimes BA$ с дифференциалом

$$d\Big(x\otimes\big[a_1\otimes\cdots\otimes a_n\big]\Big) = dx\otimes\big[a_1\otimes\cdots\otimes a_n\big] + x\otimes d_B\big[a_1\otimes\cdots\otimes a_n\big] + \\ + x\cdot a_1\otimes\big[a_2\otimes\cdots\otimes a_n\big] + a_n\cdot x\otimes\big[a_1\otimes\cdots\otimes a_{n-1}\big].$$

Гомология этого комплекса называется *гомологией Хохшильда* алгебры A с коэффициентами из M и обозначается $HH_*(A, M)$.

Пусть $A = C^*(X)$. Конечно, $C^*(X)$ является бимодулем над собой; следовательно, можно рассматривать комплекс Хохшильда $C^*(X) \otimes B(C^*(X))$. Классический результат Джонса (см. [4]) утверждает, что гомология этого комплекса $HH_*(C^*(X), C^*(X))$ совпадает с $H^*(\Lambda X)$.

2. Комплекс Хохшильда, $A(\infty)$-постановка

Опишем комплекс Хохшильда и гомологию в $A(\infty)$-постановке, введя предварительно понятия $A(\infty)$-алгебр, $A(\infty)$-модулей и $A(\infty)$-бимодулей.

2.1. Категория $A(\infty)$-алгебр.

2.1.1. $A(\infty)$-алгебра. Кратко напомним определение $A(\infty)$-алгебры Сташеффа (см. [11]).

Определение 2.1. $A(\infty)$-Алгебра $(A, \{m_i\})$ — это градуированный модуль A, наделенный последовательностью операций $\{m_i : A^{\otimes i} \to A,\ i = 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, удовлетворяющий следующим условиям: $\deg m_i = 2 - i$ и

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{k=0}^{n-j} m_{n-j+1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes m_j(a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_{k+j}) \otimes a_{k+j+1} \otimes \cdots \otimes a_n) = 0.$$

Определение Сташеффа этого условия при $n = 1$ дает $m_1 m_1 = 0$, т.е. m_1 — это дифференциал; при $n = 2$ из него следует, что m_1 — дифференцирование относительно умножения m_2; при $n = 3$ оно влечет тот факт, что m_2 ассоциативно по гомотопии, и соответствующая гомотопия — это m_3. Таким образом, $(A, \{m_i\})$ — *сильно ассоциативная по гомотопии* (сar) алгебра.

bar-Интерпретация. Условие Сташеффа гарантирует, что кодифференцирование $d_m : B(A) \to B(A)$, заданное соотношением

$$d_m(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{n-k} a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes m_j(a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_{k+j}) \otimes a_{k+j+1} \otimes \cdots \otimes a_n,$$

удовлетворяет условию $d_m d_m = 0$: условие Сташеффа является проекцией этого равенства на копорождающий модуль A. Следовательно, bar-конструкция $(B(A, \{m_i\}), d_m)$ с этим возмущенным дифференциалом является DG-коалгеброй.

Частный случай 1. Понятие $A(\infty)$-алгебры является обобщением понятия DG-алгебры: $A(\infty)$-алгебра типа $(A, \{m_1, m_2, m_3 = 0, m_4 = 0, \ldots\})$ является DG-алгеброй с дифференциалом m_1 и ассоциативным умножением m_2.

Частный случай 2. $A(\infty)$-Алгебра $(A, \{m_i\})$ называется *минимальной*, если $m_1 = 0$. В этом случае $(A, m_1 = 0, m_2)$ — строго ассоциативная DG-алгебра.

2.1.2. Морфизмы $A(\infty)$-алгебр.

Определение 2.2. Морфизм $A(\infty)$-алгебр $(A, \{m_i\}) \to (A', \{m'_i\})$ определяется в [1] как последовательность гомоморфизмов $\{f_i : A^{\otimes i} \to A',\ i = 1, 2, \ldots, \}$, удовлетворяющая следующим условиям: $\deg f_i = 1 - i$ и

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{k=0}^{n-j} f_i(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes m_j(a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_{k+j}) \otimes \cdots \otimes a_n) \cdot$$
$$\cdot \sum_{t=1}^{n} \sum_{k_1+\cdots+k_t=n} m'_t(f_{k_1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k_1}) \otimes f_{k_2}(a_{k_1+1} \otimes \cdots \otimes a_{k_1+k_2}) \otimes$$
$$\otimes \cdots \otimes f_{k_t}(a_{k_1+\cdots+k_{t-1}+1} \otimes \cdots \otimes a_n)).$$

bar-Интерпретация. Морфизм $\{f_i\}$ определяет отображение градуированной коалгебры bar-конструкций $B(\{f_i\}) : B(A, \{m_i\}) \to B(A', \{m_i'\})$, заданное соотношением

$$f(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{k_1+\dots+k_t=n} f_{k_1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_{k_1}) \otimes \dots \otimes f_{k_t}(a_{k_1+\dots+k_{t-1}+1} \otimes \dots \otimes a_n),$$

и это определяющее условие гарантирует, что $B(\{f_i\})$ — цепное отображение: это условие является проекцией равенства $B(\{f_i\})d_m = d_{m'}B(\{f_i\})$ на A' и, следовательно, оно является морфизмом DG-коалгебр. Таким образом, B — функтор, действующий из категории $A(\infty)$-алгебр в категорию DG-коалгебр.

Частный случай. Морфизм $A(\infty)$-алгебр

$$\{f_1, f_2 = 0, f_3 = 0, \dots\} : (A, \{m_1, m_2, m_3 = 0, m_4 = 0, \dots\}) \to (A', \{m_1', m_2', m_3' = 0, m_4' = 0, \dots\})$$

— это обычное отображение DG-алгебр.

2.2. Категория $A(\infty)$-модулей.

2.2.1. $A(\infty)$-модуль над $A(\infty)$-алгеброй. Определение из [1] является обобщением понятия DG-модуля над DG-алгеброй.

Определение 2.3. $A(\infty)$-Модуль над $A(\infty)$-алгеброй $(A, \{m_i\})$ — это градуированный модуль P, наделенный последовательностью «действий»

$$\{p_i : P \otimes A^{\otimes i} \to A,\ i = 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

удовлетворяющих условиям $\deg p_i = 1 - i$ и, для $a_k \in A$ и $x \in P$,

$$\sum_{i=0}^{n} p_{n-i}(p_i(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-k} p_{n-i+1}(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_k \otimes m_i(a_{k+1} \otimes \dots \otimes a_{k+i}) \otimes a_{k+i+1} \otimes \dots \otimes a_n) = 0.$$

bar-Интерпретация. Эти операции индуцируют отображение $d_p : P \otimes B(A) \to P \otimes B(A)$, заданное соотношениями

$$d_p(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-k} x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_k \otimes m_i(a_{k+1} \otimes \dots \otimes a_{k+i}) \otimes a_{k+i+1} \otimes \dots \otimes a_n,$$

удовлетворяющее условию $d_p d_p = 0$ и, следовательно, $(P \otimes B(A), d_p)$ с этим возмущенным дифференциалом является DG-комодулем над DG-коалгеброй $(B(A, \{m_i\}), d_m)$.

Частный случай 1. $A(\infty)$-Модуль $(P, \{p_1, p_2, 0, 0, \dots\})$ над $A(\infty)$-алгеброй $(A, \{m_1, m_2, 0, 0, \dots\})$ является DG-модулем над DG-алгеброй (A, m_1, m_2) с дифференциалом $p_0 : P \to P$ и строго ассоциативным действием $p_1 : P \otimes A \to A$.

Частный случай 2. $A(\infty)$-Алгебра $(A, \{m_i\})$ является $A(\infty)$-модулем над собой со структурными отображениями

$$p_n(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = m_{n+1}(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n).$$

2.2.2. Морфизмы $A(\infty)$-модулей. Пусть $(P,\{p_i\})$ — $A(\infty)$-модуль над $A(\infty)$-алгеброй $(A,\{m_i\})$ и пусть $(P',\{p'_i\})$ — $A(\infty)$-модуль над $A(\infty)$-алгеброй $(A',\{m'_i\})$.

Определение 2.4 (см. [1]). Морфизм пар

$$((P,\{p_i\}),(A,\{m_i\})) \to ((P',\{p'_i\}),(A',\{m'_i\}))$$

определяется как морфизм $A(\infty)$-алгебр $\{f_i\}:(A,\{m_i\})\to(A',\{m'_i\})$ и такая последовательность гомоморфизмов $\{g_i : P\otimes A^{\otimes i}\to P',\ i=0,1,2,3,\dots\}$, что $\deg g_i=-i$ и

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{n-k} g_{n-j+1}(x\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_k\otimes m_j(a_{k+1}\otimes\cdots\otimes a_{k+j})\otimes a_{k+j+1}\otimes\cdots\otimes a_n)+$$
$$+\sum_{k=0}^{n} g_{n-k}(p_k(x\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_k)\otimes a_{k+1}\otimes\cdots\otimes a_n)=$$
$$=\sum_{t=1}^{n+1}\sum_{k_1+\cdots+k_t=n+1} p_t(g_{k_1}(x\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_{k_1})\otimes f_{k_2}(a_{k_1+1}\otimes\cdots\otimes a_{k_1+k_2})\otimes$$
$$\otimes f_{k_3}(a_{k_1+k_2+1}\otimes\cdots\otimes a_{k_1+k_2+k_3})\otimes\cdots\otimes f_{k_t}(a_{k+k_1+\cdots+k_{t-1}+1}\otimes\cdots\otimes a_n))$$

bar-Интерпретация. Такой морфизм индуцирует отображение

$$G:(P\otimes BA,d_p)\to(P'\otimes BA',d_{p'})$$

по формуле

$$G(x\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n)=\sum_{t=1}^{n+1}\sum_{k_1+\cdots+k_t=n+1} g_{k_1}(x\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_{k_1})\otimes$$
$$\otimes f_{k_2}(a_{k_1+1}\otimes\cdots\otimes a_{k_1+k_2})\otimes\cdots\otimes f_{k_t}(a_{k+k_1+\cdots+k_{t-1}+1}\otimes\cdots\otimes a_n);$$

определяющее условие морфизма гарантирует, что это — цепное отображение.

2.3. Категория $A(\infty)$-бимодулей.

2.3.1. $A(\infty)$-бимодуль над $A(\infty)$-алгеброй. Следующее определение $A(\infty)$-бимодуля над $A(\infty)$-алгеброй из [3, 7–9, 12] является обобщением понятия DG-бимодуля над DG-алгеброй.

Определение 2.5. $A(\infty)$-Бимодуль над $A(\infty)$-алгеброй $(A,\{m_i\})$ — это такой градуированный модуль M с заданной последовательностью гомоморфизмов

$$\{p_{i,k}: A^{\otimes i}\otimes M\otimes A^{\otimes k}\to M,\ i,k=0,1,2,3,\dots\},$$

что $\deg p_{i,k}=1-i-k$ и

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{r-k} p_{r-i+1,n-r}(a_1\otimes\cdots\otimes a_k\otimes m_i(a_{k+1}\otimes\cdots\otimes a_{k+i})\otimes a_{k+i+1}\otimes$$
$$\otimes\cdots\otimes a_r\otimes x\otimes a_{r+1}\otimes\cdots\otimes a_n)+$$
$$+\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=r}^{n} p_{k,n-r-s}(a_1\otimes\cdots\otimes a_k\otimes p_{r-k,s}(a_{k+1}\otimes\cdots\otimes a_r\otimes x\otimes a_{r+1}\otimes$$
$$\otimes\cdots\otimes a_{r+s})\otimes a_{r+s+1}\otimes\cdots\otimes a_n)+$$
$$+\sum_{k=r}^{n}\sum_{i=1}^{n-k} p_{r,n-r-i+1}(a_1\otimes\cdots\otimes a_r\otimes x\otimes a_{r+1}\otimes\cdots\otimes a_k\otimes m_i(a_{k+1}\otimes$$
$$\otimes\cdots\otimes a_{k+i})\otimes a_{k+i+1}\otimes\cdots\otimes a_n)=0.$$

bar-Интерпретация. Операции $\{m_i\}$ и $\{p_{i,k}\}$ определяют дифференциал $d_p : M\otimes BA \to M\otimes BA$ на $M\otimes BA$ по формуле

$$d_p(x\otimes[a_1\otimes\cdots\otimes a_i\otimes a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_j\otimes a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_n]) = x\otimes d_B[a_1\otimes\cdots\otimes a_n]+ \\ +\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} p_{n-j,i}(a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_n\otimes x\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_i)\otimes[a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_j]; \tag{2.1}$$

из определяющих соотношений для $\{m_i\}$ и $\{p_{i,k}\}$ следует, что $d_pd_p = 0$ (см. [9]).

Частный случай 1. $A(\infty)$-аАгебра $(A,\{m_i\})$ является $A(\infty)$-модулем над собой, операция $p_{i,k} : A^{\otimes i}\otimes A\otimes A^{\otimes k}\to A$ — это в точности m_{i+k+1}.

Частный случай 2. Другим частным случаем являются DG-алгебра A и DG-A-бимодуль M: операции $m_1 = d_A$, $m_2(a\otimes b) = a\cdot b$, $m_{>2} = 0$, $p_{0,0} = d_M$, $p_{1,0}(a\otimes x) = a\cdot x$, $p_{0,1}(x\otimes a) = x\cdot a$, $p_{1,1} = 0$, $p_{>1,k} = 0$, $p_{k,>1} = 0$ обладают требуемыми свойствами.

2.3.2. Морфизмы $A(\infty)$-бимодулей над данной $A(\infty)$-алгеброй. Пусть $(M,\{p_{i,k}\})$ b $(M',\{p'_{i,k}\})$ — $A(\infty)$-бимодули над *одной и той же* $A(\infty)$-алгеброй $(A,\{m_i\})$.

Определение 2.6 (см. [9]). Морфизм $(M,\{p_{i,k}\})\to(M',\{p'_{i,k}\})$ $A(\infty)$-бимодулей над данной $A(\infty)$-алгеброй $(A,\{m_i\})$ определяется как последовательность гомоморфизмов

$$\{g_{i,k} : A^{\otimes k}\otimes M\otimes A^{\otimes i}\to M',\ i,k = 0,1,2,\ldots\},$$

для которой $\deg g_{i,k} = -i-k$ и

$$\sum_{k=0}^{r}\sum_{i=1}^{r-k} g_{r-i+1,n-r}(a_1\otimes\cdots\otimes a_k\otimes m_i(a_{k+1}\otimes\cdots\otimes a_{k+i})\otimes a_{k+i+1}\otimes \\ \otimes\cdots\otimes a_r\otimes x\otimes a_{r+1}\otimes\cdots\otimes a_n)+ \\ +\sum_{k=0}^{r}\sum_{s=r}^{n} g_{k,n-r-s}(a_1\otimes\cdots\otimes a_k\otimes p_{r-k,s}(a_{k+1}\otimes\cdots\otimes a_r\otimes x\otimes a_{r+1}\otimes \\ \otimes\cdots\otimes a_{r+s})\otimes a_{r+s+1}\otimes\cdots\otimes a_n)+ \\ +\sum_{k=r}^{n}\sum_{i=1}^{n-k} g_{r,n-r-i+1}(a_1\otimes\cdots\otimes a_r\otimes x\otimes a_{r+1}\otimes\cdots\otimes a_k\otimes m_i(a_{k+1}\otimes \\ \otimes\cdots\otimes a_{k+i})\otimes a_{k+i+1}\otimes\cdots\otimes a_n) = \\ =\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{n-r} p_{k,n-r-j}(a_1\otimes\cdots\otimes a_k\otimes g_{r-k,j}(a_{k+1}\otimes\cdots\otimes a_r\otimes x\otimes a_{r+1}\otimes \\ \otimes\cdots\otimes a_{r+j})\otimes a_{r+j+1}\otimes\cdots\otimes a_n).$$

bar-Интерпретация. Такой морфизм индуцирует отображение $F : M\otimes BA\to M'\otimes BA$ по формуле

$$F(x\otimes[a_1\otimes\cdots\otimes a_i\otimes a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_j\otimes a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_n]) = \\ =\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} g_{n-j,i}(a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_n\otimes x\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_i)\otimes[a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_j].$$

Это определяющее условие позволяет показать, что F — цепное отображение.

2.3.3. Морфизмы пар. Далее нам потребуется несколько более общее понятие морфизма.

Пусть $(A, \{m_i\})$ и $(A', \{m'_i\})$ — $A(\infty)$-алгебры, и пусть $(M, \{p_{i,k}\})$ и $(M', \{p'_{i,k}\})$ — $A(\infty)$-бимодули над $(A, \{m_i\})$ и $(A', \{m'_i\})$ соответственно.

Определение 2.7. Морфизм пар

$$((A, \{m_i\}), (M, \{p_{i,k}\})) \to ((A', \{m'_i\}), (M', \{p'_{i,k}\}))$$

определяется как пара $(\{f_i\}, \{g_{i,k}\})$, где $\{f_i\} : (A, \{m_i\}) \to (A', \{m'_i\})$ — морфизм $A(\infty)$-алгебр и

$$\{g_{i,k} : A^{\otimes i} \otimes M \otimes A^{\otimes k} \to M',\ i, k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

— такой набор гомоморфизмов, что $\deg g_{i,k} = -i - k$ и

$$\begin{gathered}
\sum_{k=0}^{r}\sum_{i=1}^{r-k} g_{r-i+1,n-r}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes m_i(a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_{k+i}) \otimes a_{k+i+1} \otimes \\
\otimes \cdots \otimes a_r \otimes x \otimes a_{r+1} \otimes \cdots \otimes a_n) + \\
+ \sum_{k=0}^{r}\sum_{s=r}^{n} g_{k,n-r-s}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes p_{r-k,s}(a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_r \otimes x \otimes a_{r+1} \otimes \\
\otimes \cdots \otimes a_{r+s}) \otimes a_{r+s+1} \otimes \cdots \otimes a_n) + \\
+ \sum_{k=r}^{n}\sum_{i=1}^{n-k} g_{r,n-r-i+1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes x \otimes a_{r+1} \otimes \cdots \otimes a_k \otimes m_i(a_{k+1} \otimes \\
\otimes \cdots \otimes a_{k+i}) \otimes a_{k+i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) = \\
= \sum_{t=1}^{n+1}\sum_{s=1}^{t}\sum_{k_1+\cdots+k_t=n+1} p_{s-1,t-s}(f_{k_1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k_1}) \otimes \\
\otimes f_{k_2}(a_{k_1+1} \otimes \cdots \otimes a_{k_1+k_2}) \otimes \cdots \otimes f_{k_{s-1}}(a_{k_1+\cdots+k_{s-2}+1} \otimes \cdots \otimes a_{k_1+\cdots+k_{s-1}}) \otimes \\
\otimes g_{r-k_1-\cdots-k_{s-1}, k_1+\cdots+k_s-r}(a_{k_1+\cdots+k_{s-1}+1} \otimes \cdots \otimes a_r \otimes x \otimes a_{r+1} \otimes \cdots \otimes a_{k_1+\cdots+k_s}) \otimes \\
\otimes f_{k_{s+1}}(a_{k_1+\cdots+k_s+1} \otimes \cdots \otimes a_{k_1+\cdots+k_{s+1}}) \otimes \cdots \otimes f_{k_t}(a_{k_1+\cdots+k_{t-1}+1} \otimes \cdots \otimes a_n)).
\end{gathered}$$

bar-Интерпретация. Такой морфизм индуцирует отображение $F : M \otimes BA \to M' \otimes BA'$ по формуле

$$\begin{gathered}
F(x \otimes [a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_j \otimes a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n]) = \\
= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{k_1+\cdots+k_s=j-i} g_{n-j,i}(a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes \\
\otimes [f_{k_1}(a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{i+k_1}) \otimes \cdots \otimes f_{k_s}(a_{j-k_s} \otimes \cdots \otimes a_j)]. \qquad (2.2)
\end{gathered}$$

Указанное выше определяющее условие позволяет показать, что F — цепное отображение.

Слабая эквивалентность. Морфизм пар $(\{f_i\}, \{g_{i,k}\})$ называется *слабой эквивалентностью*, если $f_1 : (A, m_1) \to (A', m'_1)$ и $g_{0,0} : (M, p_1) \to (M', p'_1)$ — слабые эквивалентности DGЭ=модулей, т.е. изоморфизмы по гомологии. Стандартное рассуждение позволяет показать, что в этом случае индуцированное отображение

$$F : (M \otimes BA, d_p) \to (M' \otimes BA', d_{p'})$$

также является слабой эквивалентностью.

2.4. Гомология Хохшильда $A(\infty)$-алгебры с коэффициентами из $A(\infty)$-бимодуля. Теперь предположим, что $(A, \{m_i\})$ — 1-приведенная $A(\infty)$-алгебра и $(M, \{p_{i,k}\})$ — $A(\infty)$-бимодуль над ней. Приведем определение гомологии Хохшильда $(A, \{m_i\})$ с коэффициентами из $(M, \{p_{i,k}\})$ (см., например, [9, 10]).

Как было отмечено выше (см. (2.1)), структурные отображения $\{m_i\}$ и $\{p_{i,k}\}$ определяют дифференциал $d_p : M \otimes BA \to M \otimes BA$.

Определение 2.8. Гомология Хохшильда $A(\infty)$-алгебры $(A, \{m_i\})$ с коэффициентами из $A(\infty)$-бимодуля $(M, \{p_{i,k}\})$

$$HH_*((A, \{m_i\}), (M, \{p_{i,k}\}))$$

определяется как гомология цепного комплекса Хохшильда $(M \otimes BA, d_p)$.

Функториальность. Морфизм пар

$$(\{f_i\}, \{p_{i,k}\}) : ((A, \{m_i\}), (M, \{p_{i,k}\})) \to ((A', \{m'_i\}), (M', \{p'_{i,k}\}))$$

индуцирует цепное отображение комплексов Хохшильда $F : M \otimes BA \to M' \otimes BA'$ по формуле (2.2) и, следовательно, он также индуцирует гомоморфизм гомологий Хохшильда

$$F^* : HH_*((A, \{m_i\}), (M, \{p_{i,k}\})) \to HH_*((A', \{m'_i\}), (M', \{p'_{i,k}\})).$$

Если первоначальный морфизм $(\{f_i\}, \{p_{i,k}\})$ является слабой эквивалентностью, то F тоже является слабой эквивалентностью, и F^* — изоморфизм.

Частный случай 1. Если A — ассоциативная DG-алгебра и M — DG-A-бимодуль, то это понятие совпадает с обычным понятием гомологии Хохшильда.

Частный случай 2. Как было сказано выше, $A(\infty)$-алгебра $(A, \{m_i\})$ является $A(\infty)$-модулем над собой, операция $p_{i,k} : A^{\otimes i} \otimes A \otimes A^{\otimes k} \to A$ — это в точности m_{i+k+1}. Дифференциал $d_p : A \otimes BA \to A \otimes BA$ из (2.1) здесь имеет вид

$$\begin{aligned} d_p(x \otimes [a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_j \otimes a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n]) = x \otimes d_B[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n] + \\ + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} m_{n-j+i+1}(a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes [a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_j]; \end{aligned} \tag{2.3}$$

следовательно, в этом случае имеем $HH_*((A, \{m_i\}), (A, \{m_i\})) = H(A \otimes BA, d_p)$.

Далее, морфизм $A(\infty)$-алгебр $\{f_i\} : (A, \{m_i\}) \to (A', \{m'_i\})$ порождает морфизм пар

$$(\{f_i\}, \{g_{i,k}\}) : ((A, \{m_i\}), (A, \{p_{i,k}\})) \to ((A', \{m'_i\}), (A', \{p'_{i,k}\})),$$

где $g_{i,k} = f_{i+k+1}$, который, в свою очередь, порождает по формуле (2.2) цепное отображение комплексов Хохшильда $F : (A \otimes BA, d_p) \to (A' \otimes BA', d_{p'})$, заданное соотношением

$$\begin{aligned} F(x \otimes [a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_j \otimes a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n]) = \\ = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k_1+\cdots+k_s=j-i} f_{n-j+i+1}(a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes \\ \otimes [f_{k_1}(a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{i+k_1}) \otimes \cdots \otimes f_{k_s}(a_{j-k_s} \otimes \cdots \otimes a_j)]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Это цепное отображение индуцирует гомоморфизм гомологий Хохшильда

$$F^* : HH_*((A, \{m_i\}), (A, \{m_i\})) \to HH_*((A', \{m'_i\}), (A', \{m'_i\})).$$

Отметим также, что если первоначальный морфизм $\{f_i\}$ является слабой эквивалентностью $A(\infty)$-алгебр, то $(\{f_i\}, \{g_{i,k}\})$ тоже является слабой эквивалентностью $A(\infty)$-алгебр и, следовательно, индуцированный морфизм гомологий Хохшильда является изоморфизмом.

3. Теорема минимальности — перенос структур на гомологию

Пусть $(A, d, \mu : A \otimes A \to A)$ — DG-алгебра. Ее гомология $H(A)$ — также DG-алгебра с тривиальным дифференциалом и индуцированным умножением $\mu^* : H(A) \otimes H(A) \to H(A)$.

Только структуры градуированной алгебры $(H(A), d = 0, \mu^*)$ недостаточно для определения гомологии bar-конструкции BA. В общем случае bar-конструкции BA и $BH(A)$ имеют разные гомологии. Недостаток структуры компенсируется следующей теоремой минимальности из [1].

Теорема 3.1. *Для DG-алгебры (A, d, μ) со свободными модулями гомологии $H^k(A)$ существуют такие структура минимальной $A(\infty)$-алгебры $(H(A), \{m_i\})$ на $H(A)$ и морфизм $A(\infty)$-алгебр $\{f_i\} : (H(A), \{m_i\}) \to A$, что $m_1 = 0$, $m_2 = \mu^*$, $f_1^* = \mathrm{id}_{H(A)}$.*

Так как $f_1^* = \mathrm{id}_{H(A)}$, морфизм $A(\infty)$-алгебр $\{f_i\}$ является слабой эквивалентностью и, следовательно, непосредственно из этой теоремы вытекает такое следствие.

Следствие 3.2. *Морфизм* $\{f_i\}$ *индуцирует слабую эквивалентность bar-конструкций* $B(\{f_i\}) : B(H(A), \{m_i\}) \to BA$, *т.е. изоморфизм гомологий* $H(B(H(A), \{m_i\}) \approx H(BA)$.

Более того, согласно частному случаю 2 из п. 2.4, тот же самый морфизм $\{f_i\}$ порождает морфизм пар

$$(\{f_i\}, \{g_{i,k}\}) : ((H(A), \{m_i\}), (H(A), \{p_{i,k}\})) \to (A, A),$$

где $p_{i,k} = m_{i+k+1}$ и $g_{i,k} = f_{i+k+1}$, который, в свою очередь, по формуле (2.4) порождает слабую эквивалентность комплексов Хохшильда $(H(A) \otimes BH(A)) \to (A \otimes BA)$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.3. *Морфизм* $\{f_i\}$ *индуцирует слабую эквивалентность комплексов Хохшильда*

$$(H(A), \{m_i\}) \otimes B(H(A), \{m_i\})) \to A \otimes BA$$

и, следовательно, изоморфизм гомологий Хохшильда

$$HH_*((H(A), \{m_i\}), (H(A), \{m_i\})) \approx HH_*(A, A).$$

4. Когомологии пространства петель и свободного пространства петель

Пусть $A = C^*(X)$. Тогда по теореме 3.1 имеем структуру минимальной $A(\infty)$-алгебры на когомологиях $(H^*(X), \{m_i\})$.

Так как $H(B(C^*(X))) \approx H^*(\Omega X)$, из следствия 3.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Когомологическая* $A(\infty)$*-алгебра* $(H^*(X), \{m_i\})$ *определяет когомологии пространства петель* $H^*(\Omega X)$:

$$H(B(H^*(X), \{m_i\}) \approx H(B(C^*(X))) \approx H^*(\Omega X).$$

Так как $HH_*((C^*(X), C^*(X))) \approx H^*(\Lambda X)$, из следствия 3.3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.2. *Когомологическая* $A(\infty)$*-алгебра* $(H^*(X), \{m_i\})$ *определяет когомологии свободного пространства петель* $H^*(\Lambda X)$:

$$HH_*((H^*(X), \{m_i\}), (H^*(X), \{m_i\})) \approx HH_*((C^*(X), C^*(X))) \approx H^*(\Lambda X).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кадеишвили Т. В.* К теории гомологии расслоенных пространств// Усп. мат. наук. — 1980. — *35*, № 3 (213). — С. 183–188.
2. *Кадеишвили Т. В.* Структура $A(\infty)$-алгебры и когомологии Хохшильда и Харрисона// Тр. Мат. ин-та им. А. Размадзе. — 1988. — *91*. — С. 19–27.
3. *Getzler E., Jones J. D. S.* A_∞"=Algebras and the cyclic bar complex// Ill. J. Math. — 1990. — *34*, № 2. — P. 256–283.
4. *Jones J. D. S.* Cyclic homology and equivariant homology// Invent. Math. — 1987. — *87*. — P. 403–423.
5. *Kadeishvili T.* On the differentials of spectral sequence of a fiber bundle/ `arXiv: math/0609747v1 [math.DG]`.
6. *Kadeishvili T.* Twisting elements in homotopy G-algebras// Progr. Math. — 2011. — *287*. — P. 181–200.
7. *J.-L. Loday* Free loop space and homology/ `arXiv: 1110.0405v1 [math.DG]`.
8. *Markl M.* A cohomology theory for $A(m)$-algebras and applications// J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — *83*, № 2. — P. 141–175.
9. *Mescher S.* A primer on A-infinity-algebras and their Hochschild homology/ `arXiv: 1601.03963v1 [math.RA]`.
10. *Seidel P.* Symplectic homology as Hochschild homology// Proc. Symp. Pure Math. — 2009. — *80*. — P. 415—-434.
11. *Stasheff J. D.* Homotopy associativity of H-spaces, I, II// Trans. Am. Math. Soc. — 1963. — *108*. — P. 275–312.

12. *Terilla J., Tradler T.* Deformations of associative algebraswith inner products/ `arXiv: math/0305052v1 [math.QA].`

Кадеишвили Т.
Математический институт им. А. Размадзе, Тбилиси, Грузия;
Тбилисский государственный университет, Тбилиси, Грузия
E-mail: kade@rmi.acnet.ge

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 97–101
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-97-101

УДК 512.542, 512.544, 512.546.37

РЕШЕТКА ВПОЛНЕ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДГРУПП КОПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

© 2020 г. **Т. КЕМОКЛИДЗЕ**

Аннотация. Рассматриваются решетки вполне инвариантных подгрупп копериодических оболочек для различных классов сепарабельных примарных абелевых групп. На основе результатов А. Мадера, А. И. Москаленко, А. Л. С. Корнера и Р. С. Пирса эти решетки обсуждаются в ситуациях, когда примарная группа является прямой суммой циклических p-групп, прямой суммой вполне периодических групп или когда аддитивная группа примарной группы эндоморфизмов кольца является прямой суммой группы малых эндоморфизмов и p-адического пополнения прямой суммы бесконечных циклических групп. Обсуждаются вопросы, связанные с полной транзитивностью копериодической оболочки.

Ключевые слова: сепарабельная p-группа, копериодическая оболочка, полная транзитивность, решетка вполне инвариантных подгрупп.

THE LATTICE OF FULLY INVARIANT SUBGROUPS OF A COTORSION HULL

© 2020 **T. KEMOKLIDZE**

Abstract. We consider lattices of fully invariant subgroups of cotorsion hulls for various classes of separable primary abelian groups. Based on the results of A. Mader, A. I. Moskalenko, A. L. S. Corner, and R. S. Pierce, we examine these lattices in situations where the primary group is the direct sum of cyclic p-groups, the direct sum of torsion-complete groups, or an additive group of the primary group of ring endomorphisms is the direct sum of a group of small endomorphisms and a p-adic completion of the direct sum of infinite cyclic groups. The questions concerning the full transitivity of a cotorsion hull are discussed.

Keywords and phrases: separable p-group, cotorsion hull, full transitivity, lattice of fully invariant subgroups.

AMS Subject Classification: 20E07, 20F22

1. Введение. Группы, обсуждаемые в статье, являются абелевыми, а операция записывается в аддитивных обозначениях. Мы используем понятия и терминологию из монографий [2, 3].

Символ p означает фиксированное простое число, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ — группы целых и рациональных чисел соответственно. Пополнение примарной группы T в p-адической топологии обозначается $\hat{T}$, его периодическая часть $t\hat{T}$ — это вполне периодическая группа, обозначаемая $\bar{T}$. Подгруппа B группы A называется *вполне инвариантной*, если для любого эндоморфизма группы A эта подгруппа B отображается в B. Примерами таких подгрупп являются $nA = \{na \mid a \in A\}$, $A[n] = \{a \mid na = 0,\ a \in A\}$, $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, периодическая часть группы A.

Знание структуры вполне инвариантных подгрупп абелевой группы и их решетки очень полезно при изучении свойств самой группы, а также при исследовании свойств ее колец эндоморфизмов и квазиэндоморфизмов, группы автоморфизмов и других алгебраических систем, связанных с первоначальной группой.

Для достаточно широкого класса p-групп эти темы изучали Р. Баер, И. Капланский, П. Линтон, Р. Пирс, Д. Мур, Е. Хьюэтт и др. А. Мадер, Р. Гобель, П. А. Крылов, С. Я. Гриншпун, А. И. Москаленко и другие авторы исследовали эти вопросы для групп без кручения и смешанных групп.

Однако мало что известно о результатах, полученных в этой области для класса копериодических групп. Группа A называется копериодической группой, если ее расширение с помощью любой группы без кручения C расщепляется следующим образом: $\operatorname{Ext}(C, A) = 0$. Важность класса копериодических групп в теории абелевых групп определяется двумя факторами: для любых групп A и B группа $\operatorname{Ext}(A, B)$ является копериодической группой и любая приведенная группа G изоморфно вкладывается в группу $G^\bullet = \operatorname{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, G)$, называемую *копериодической оболочкой* группы G. Если периодическую часть группы G обозначить tG, то

$$\operatorname{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, tG) \cong \prod_p \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}(p^\infty), T_p),$$

где $tG = \oplus T_p$. Таким образом, изучение копериодических групп в основном сводится к изучению групп вида $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}(p^\infty), T) = T^\bullet$, где T — p-примарная группа.

Стоит отметить, что эндоморфизмы копериодических групп полностью определяются своим действием на периодической части и, как показано в [10], для смешанной группы A кольцо эндоморфизмов $E(A)$ изоморфно $E(tA)$ тогда и только тогда, когда A — вполне инвариантная подгруппа копериодической оболочки $(tA)^\bullet$.

Понятие вполне транзитивной группы для приведенных примарных групп (модулей) было введено И. Капланским (см. [5]). Оно играет ключевую роль для описания вполне инвариантных подгрупп (подмодулей) и решетки, которую они образуют.

Под p-индикатором или последовательностью Ульма элементов a из группы A мы понимаем возрастающую последовательность порядковых чисел

$$H_A(a) \equiv H(a) = (h(a), h(pa), \dots, h(p^n a), \dots),$$

где h — обобщенная p-высота, т.е. для порядкового числа σ полагаем $h(a) = \sigma$, если $a \in p^\sigma A \backslash p^{\sigma+1} A$ и $h(0) = \infty$ (конечно, если $h(p^n a) = h(0) = \infty$, то $h(p^{n+1} a) = \infty$; см. [2, § 37]). На множестве индикаторов можно ввести порядок

$$H(a) \leqslant H(b) \Leftrightarrow h(p^i a) \leqslant h(p^i b), \quad i = 0, 1, \dots.$$

Приведенная p-группа называется вполне транзитивной, если для произвольных ее элементов a и b, где $H(a) \leqslant H(b)$, существует такая группа эндоморфизмов φ, что $\varphi a = b$. Во вполне транзитивных группах вполне инвариантные подгруппы описываются с помощью индикаторов. В частности, И. Капланский показал, что любая из таких подгрупп имеет вид

$$A(u) = \{a \in A \mid H(a) \geqslant u\},$$

где $u = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots)$ — возрастающая последовательность порядковых чисел и символов ∞, удовлетворяющая следующему условию: если существует скачок между σ_n и σ_{n+1} (т.е. $\sigma_{n+1} > \sigma_n + 1$), то существует элемент из A порядка p и высоты σ_n (см. [3, теорема 67.1]; см. также [4, 9, 11, 12]).

Понятие вполне транзитивной группы можно определить для смешанных групп и групп без кручения по аналогии с p-группами. Однако могут встретиться случаи, когда группа A не является вполне транзитивной и использование индикаторов для описания решетки вполне инвариантных подгрупп не дает результата. В [9] приведены более общие условия, выполнение которых позволяет описать решетку вполне инвариантных подмодулей модуля над коммутативным кольцом.

Теорема 1.1 (см. [9])**.** *Пусть A — модуль над коммутативным кольцом R, Δ — решетка вполне инвариантных подмодулей, Ω — некоторая меньшая полурешетка и $\Phi : A \to \Omega$ — отображение со следующими свойствами*:

(1) Φ *сюръективно*;
(2) $\Phi(fa) \geqslant \Phi(a)$ *для всех* $a \in A$ *и* $f \in \operatorname{End} A$;
(3) $\Phi(a+b) \geqslant \Phi(a)\Lambda\Phi(b)$;
(4) *если* $\Phi(a) \geqslant \Phi(b)$, *то существует такой эндоморфизм* f *модуля* A, *что* $f(b) = a$;
(5) *если* $C \in \Delta$, *то для любых* $a, b \in C$ *существует такое* $c \in C$, *что* $\Phi(c) = \Phi(a)\Lambda\Phi(b)$.

Тогда множество Ω^* всех фильтров Ω, упорядоченное по включению, является решеткой, и отображение $\alpha : \Omega^* \to \Delta$, определенное правилом $\alpha(D) = \{a \in A \mid \Phi(a) \in D\}$, является изоморфизмом решеток.

Если T — вполне периодическая группа, то она является алгебраически компактной группой и, как показано в [9], она вполне транзитивна. Следовательно, в этом случае решетка вполне инвариантных подгрупп группы $T^\bullet$ описывается с помощью индикаторов.

А. И. Москаленко доказал (см. [12]), что, если T — прямая сумма циклических p-групп, то $T^\bullet$ также вполне транзитивна, и все условия теоремы Мадера выполнены. Следовательно, в этом случае решетка индикаторов описывает решетку вполне инвариантных подгрупп. Прямая сумма вполне периодических групп является естественным обобщением прямой суммы циклических p-групп и вполне периодических групп. Как показано в [6], в этом классе групп копериодическая оболочка не является вполне транзитивной, если сумма бесконечна, и для того, чтобы описать решетку вполне инвариантных подгрупп с помощью теоремы 1.1 4, требуется найти функцию, отличную от индикатора. Такая функция найдена в [7].

2. Вполне инвариантные подгруппы копериодической оболочки группы Пирса. Для изучения задач, связанных с этой темой, мы часто используем представление Москаленко для элементов копериодической оболочки, согласно которому их можно записать в виде следующих последовательностей (см. [12]):

$$T^\bullet = \{(a_0, a_1 + T, \dots, a_i + T, \dots) \mid a_i \in \hat{T},\ pa_{i+1} - a_i \in T,\ i = 0, 1, \dots\}. \tag{2.1}$$

Записав элементы в этом виде, легко вычислить высоту и индикатор. В частности, если $a = (a_0, a_1 + T, \dots)$, то

$$H_{T^\bullet}(a) = \begin{cases} H_{\hat{T}}(a_0), & \text{если } O(a_0) = \infty, \\ (h_{\hat{T}}(a_0), h_{\hat{T}}(pa_0)), \dots, h_{\hat{T}}(p^{n-1}a_0, \omega + m, \omega + m + 1, \dots), & \\ \qquad\qquad \text{если } a_0 \in \hat{T} \setminus T,\ O(a_0) = p^n,\ O(a_0 + T) = p^{n-m}, & \\ (h_T(a_0), h_T(pa_0)), \dots, h_T(p^{n-1}a_0, \omega + n + k, \omega + n + k + 1, \dots), & \\ \qquad\qquad \text{если } O(a_0) = p^n,\ a_0, a_1, \dots, a_k \in T,\ a_{k+1} \notin T, & \\ H_T(a_0), & \text{если } a_i \in T \text{ для всех } i, \end{cases} \tag{2.2}$$

где ω — наименьшее бесконечное порядковое число. Периодическая часть группы $T^\bullet$ состоит из последовательностей $(c, 0, 0, \dots)$, где $c \in T$. Если B — основная подгруппа группы T, $B = \bigoplus_{a \in l} \langle x_a \rangle$ и $\{x_a\}$ — фиксированный базис B, то для элемента $a = (a_0, a_1 + T, \dots)$ группы $T^\bullet$ существует последовательность (b_i) таких элементов из B, что для любого $i = 0, 1, \dots$ имеем

$$b_i = \sum_{j=1}^{S} m_j x_{a_j}, \quad 0 \leqslant m_j < p, \qquad a_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{s=0}^{n} p^s b_{i+s}.$$

Представление элемента a в этом виде называется *каноническим*; при этом говорят, что последовательность (b_i) соответствует каноническому представлению элемента $a \in T^\bullet$.

Следующая примарная группа с копериодической оболочкой, которую мы обсудим, найдена в [1].

Гомоморфизм $\varphi : G \to G'$ примарных групп называется *малым* (см. [13, § 3]), если для любого положительного целого числа e существует такое положительное целое число n, что $\varphi(p^n G)[p^e] = 0$. Обозначим $E(G)$ кольцо эндоморфизмов группы G, и пусть $E_S(G)$ — подкольцо малых эндоморфизмов. Следующая теорема была доказана Корнером (см. [1]).

Теорема 2.1 (см. [1]). *Пусть $\bar{B}$ — вполне периодическая p-группа с неограниченной основной подгруппой B мощности $\leqslant 2^{\aleph_0}$, и пусть Φ — сепарабельное замкнутое (унитальное) подкольцо $E(\bar{B})$, оставляющее B инвариантной и удовлетворяющее следующему условию:*

$$\text{если } \varphi \in \Phi \text{ и } \varphi(p^n(\bar{B}))[p] = 0 \text{ для некоторого } n, \text{ то } \varphi \in p\,\Phi.$$

Тогда существует семейство G_ρ, $\rho \in P$, состоящее из $2^{\aleph_0}$ чистых подгрупп $\bar{B}$, содержащих B и таких, что справедливы следующие утверждения:

(i) *$E(G_\rho) = \Phi \oplus E_S(G_\rho)$ для любого $\rho \in P$;*
(ii) *для различных $\rho, \sigma \in P$ любой гомоморфизм $G_\rho \to G_\sigma$ является малым.*

Будем называть примарную группу G_ρ, упомянутую в теореме 2.1, группой Корнера. Аддитивная группа подкольца Φ кольца эндоморфизмов $E(G_\rho)$, которая описана в теореме 2.1, является пополнением счетной прямой суммы бесконечных циклических групп в p-адической топологии. В [8] было показано, что копериодическая оболочка группы Корнера не является вполне транзитивной. Следовательно, чтобы описать решетку вполне инвариантных подгрупп этой группы, требуется найти функцию, которая отличается от индикатора и удовлетворяет условиям теоремы Мадера.

Сепарабельную p-группу T, упомянутую в [13] и имеющую кольцо эндоморфизмов вида

$$E(T) = E_S \oplus \mathbb{Q}_p^*, \tag{2.3}$$

можно рассматривать как частный случай группы Корнера. Здесь $E_S(T)$ — кольцо малых эндоморфизмов группы T и $\mathbb{Q}_p^*$ — кольцо p-адических целых чисел.

Теорема 2.2. *Подгруппа U копериодической оболочки группы Пирса T вполне инвариантна тогда и только тогда, когда она является p-адическим подмодулем группы $T^\bullet$, которая вместе с каждым своим элементом a содержит элемент $x \in T$, для которого $H(a) \leqslant H(x)$.*

Доказательство. Копериодическая оболочка примарной группы T имеет вид $T^\bullet = \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}(p^\infty), T)$, где T — периодическая часть группы $T^\bullet$. Кольцо эндоморфизмов группы T, так же как и группа $T^\bullet$, имеет вид (2.3). Как известно (см. [2, Lemma 52.1]), группа $T^\bullet$ также является p-адическим модулем; следовательно, если U — подмодуль, удовлетворяющий условиям теоремы 2.2, то он, очевидно, инвариантен относительно умножения на элементы из кольца $\mathbb{Q}_p^*$. Кроме того, если α — малый эндоморфизм группы T и $a \in U$, то имеем

$$a = (a_0, a_1 + T, \dots), \quad a_0 = b_0 + pb_1 + p^2 b_2 + \dots, \tag{2.4}$$

где b_i — элементы из основой подгруппы B группы $T^\bullet$. По определению α, можно найти такое неотрицательное целое число k, что

$$\alpha a_0 = \alpha b_0 + \alpha p b_1 + \dots = \alpha b_0 + \dots + \alpha p^k b_k = \alpha(b_0 + \dots + p^k b_k) = b \in T$$

при $b_0 + \dots + p^k b_k \in B$. Аналогично, $\alpha a_i \in T$ для любого $i = 1, 2 \dots$, что в силу (2.2) дает $\alpha a = b \in T$. Поскольку высота элемента не уменьшается при эндоморфизме, мы имеем $H(a) \leqslant H(b)$. Таким образом, U — волне инвариантная подгруппа группы $T^\bullet$.

Наоборот, пусть U — вполне инвариантная подгруппа группы $T^\bullet$. Тогда она должна быть инвариантной относительно эндоморфизма $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$, т.е. это p-адический модуль $T^\bullet$. Далее, пусть элемент (2.4) принадлежит U и $x \in T$ — такой элемент, что $H(a) \leqslant H(x)$. Пусть

$$x = (x_0, x_1 + T, \dots), \quad x_0 = d_0 + pd_1 + \dots, \quad d_i \in B, \quad i = 0, 1, \dots.$$

Если $a_0 \neq 0$ и выполняется соотношение

$$H(x) = (k_0, k_1, \dots, k_n, \infty, \dots) \tag{2.5}$$

то по определению индикатора существует сумма конечного числа слагаемых из элементов a_0, $a_0' = b_0 + pb_1 + \cdots + p^m b_m \in B$, так что $H(b_0 + pb_1 + \cdots + p^m b_m) \leqslant H(x_0)$. Очевидно, что a_0' содержит конечное число генераторов $c_0, c_1, \dots, c_n$ циклических слагаемых подгруппы основной группы B. Поскольку $B \subset T$ и T — сепарабельная p-группа, согласно [3, лемма 65.5], существует эндоморфизм β группы T, для которого $\beta a' = x_0$. Если мы предположим, что $\beta c_i = 0$ и $i > n$, где $\langle c_i \rangle$ — резидуальные циклические прямые слагаемые группы B, то β — малый эндоморфизм группы $T^\bullet$, для которой $\beta a_0 = \beta a' = x_0$. Так как каждый смежный класс $x_i + T$ совпадает с $x_i' + T$, где x_i' не содержит элементов из подгруппы $\langle c_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle c_n \rangle$ в качестве слагаемых, имеем $\beta x_i + T = T$. Таким образом,

$$\beta a = (\beta a_0, \beta a_1 + T, \dots) = (x_0, T, \dots) = x.$$

Если $a_0 = 0$, то из (2.2) следует, что $H(a) = (w+k, w+k+1, \dots)$, где k — неотрицательное целое число. Так как $H(x)$ имеет вид (2.5), мы можем написать $H(x) = (\infty, \infty, \dots)$, т.е. $x = x_0 = 0$. Таким образом, условие $\alpha a = x$ выполняется для нулевого гомоморфизма $\alpha = 0$. Это означает, что вполне инвариантная подгруппа U имеет вид подмодуля из теоремы 2.2. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Corner A. L. S.* On endomorphism rings of primary abelian groups// Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). — 1969. — *20*. — P. 277–296.
2. *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups. Vol. 1. — New York–London: Academic Press, 1970.
3. *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups. Vol. 2. — New York–London: Academic Press, 1973.
4. *Grinshpon S. Ya., Krylov P. A.* Fully invariant subgroups, full transitivity, and homomorphism groups of abelian groups// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2005. — *128*, № 3. — P. 2894–2997.
5. *Kaplansky I.* Infinite Abelian Groups. — Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1969.
6. *Kemoklidze T.* On the full transitivity of a cotorsion hull// Georgian Math. J. — 2006. — *13*, № 1. — P. 79–84.
7. *Kemoklidze T.* The lattice of fully invariant subgroups of a cotorsion hull// Georgian Math. J. — 2009. — *16*, № 1. — P. 89–104.
8. *Kemoklidze T.* On the full transitivity of a cotorsion hull// Georgian Math. J. — 2019. — *26*, № 1.
9. *Mader A.* The fully invariant subgroups of reduced algebraically compact groups// Publ. Math. Debrecen. — 1971. — *17*. — P. 299–306.
10. *May W., Toubassi E.* Endomorphisms of abelian groups and the theorem of Baer and Kaplansky// J. Algebra. — 1976. — *43*, № 1. — P. 1–13.
11. *Moore J. D., Hewett l. J.* On fully invariant subgroups of Abelian p-groups// Comment. Math. Univ. St. Paul. — 1971/72. — *20*. — P. 97–106.
12. *Moskalenko A. I.* Cotorsion hull of a separable p-group// Algebra and Logic. — 1990. — *28*, № 2. — P. 139–151.
13. *Pierce R. S.* Homomorphisms of primary abelian groups// in: Topics in Abelian Groups. — Chicago: Scott, Foresman and Co., 1963. — P. 215–310.

Кемоклидзе Т.
Кутаисский государственный университет им. А. Церетели, Кутаиси, Грузия
E-mail: `kemoklidze@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 102–110
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-102-110

УДК 512.542.63, 512.544

ГРУППЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ИЗОМОРФНЫХ КЛАССОВ ПОДХОДЯЩИХ ПОДГРУПП

© 2020 г. **Л. А. КУРДАЧЕНКО, П. ЛОНГОБАРДИ, М. МАЙ**

Аннотация. Изучаются группы, обладающие следующим свойством: для некоторых подходящих семейств $\mathcal{M}$ подгрупп группы G подгруппы из $\mathcal{M}$ распадаются на конечное число изоморфных классов.

***Ключевые слова*:** радикальная группа, семейство подгрупп, нормальная подгруппа, группа Дедекинда, группа Черникова.

GROUPS WITH FINITELY MANY ISOMORPHIC CLASSES OF RELEVANT SUBGROUPS

© 2020 **L. A. KURDACHENKO, P. LONGOBARDI, M. MAJ**

Abstract. We study groups possessing the following property: for some relevant families $\mathcal{M}$ of subgroups of G, subgroups from $\mathcal{M}$ fall into finitely many isomorphic classes.

***Keywords and phrases*:** radical group, family of subgroups, normal subgroup, Dedekind group, Chernikov group.

***AMS Subject Classification*:** 20E07, 20F14, 20F19, 20F22

1. Введение. Основной задачей этой статьи является изучение влияния на структуру группы некоторых семейств ее подгрупп.

Пусть G — группа и $\mathcal{P}$ — некоторое свойство ее подгрупп. Обозначим через $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(G)$ семейство всех подгрупп группы G, обладающих свойством $\mathcal{P}$, а через $\mathcal{L}_{\text{non-}\mathcal{P}}(G)$ семейство всех подгрупп группы G, не обладающих этим свойством. Цель статьи — изучить группы, в которых семейство $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(G)$ достаточно велико или, эквивалентно, $\mathcal{L}_{\text{non-}\mathcal{P}}(G)$ достаточно мало для некоторых свойств подгрупп. Имеется два типа свойств подгрупп, которые мы будем изучать: свойства, внутренние для группы G, например, свойство быть нормальной или субнормальной подгруппой группы G, и свойства, внешние по отношению к группе G, например, свойство быть абелевой, нильпотентной или разрешимой группой.

Конечно, выражения «быть достаточно большим» или «быть достаточно малым» можно трактовать множеством возможных способов. Одна из возможностей — предположить, что $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(G)$ совпадает с семейством $\mathcal{L}(G)$ всех подгрупп группы G или с семейством всех собственных подгрупп G. Первый шаг в этой программе был сделан Р. Дедекиндом в его классической работе [15], где он описал конечные группы, все подгруппы которых нормальны. Это в точности тот класс

Работа выполнена при поддержке «Национальной группы по алгебраическим и геометрическим структурам и их приложениям» (GNSAGA–INdAM), Италия. Л. А. Курдаченко выражает благодарность отделению математики университета Салерно за гостеприимство и поддержку.

конечных групп G, в которых семейство $\mathcal{L}_{\text{normal}}(G)$, состоящее из всех нормальных подгрупп, совпадает с семейством всех подгрйпп, т.е. в котором семейство $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G)$ пусто. В своей знаменитой работе [36] Г. А. Миллер и Х. Морено описали конечные группы, все собственные подгруппы которых абелевы, т.е. минимальные неабелевы группы. Этот класс совпадает с классом конечных групп G, где $\mathcal{L}_{\text{ab}}(G)$, семейство всех абелевых подгрупп совпадает с семейством всех собственных подгрупп. Альтернативно, это класс конечных групп, в которых семейство $\mathcal{L}_{\text{non-ab}}(G)$ всех неабелевых подгрупп состоит в точности из одного элемента, группы G.

В теории бесконечных групп понятия «быть достаточно малым» или «быть очень большим» могут иметь другое интересное значение: они могут означать «удовлетворять некоторым условиям конечности». Группы, в которых $\mathcal{L}_{\text{non-}\mathcal{P}}(G)$ удовлетворяет некоторым естественным условиям конечности, изучались многими авторами. Такие условия конечности включают, в частности, некоторые классические условия конечности, такие, как минимальное (min) и максимальное (Max) условия. Этот подход был введен С. Н. Черниковым (см. [6–8]). В [6] он изучал группы, в которых семейство $\mathcal{L}_{\text{non-ab}}(G)$ удовлетворяет минимальному условия, а в [7] — группы G, в которых множество $\mathcal{L}_{\text{normal}}(G)$ состоит только из конечных подгрупп. Описание других, в том числе недавних результатов в этой области см. в [19].

Нас интересует другое вполне естественное условие конечности: мы рассмотрим группы, в которых элементы $\mathcal{L}_{\text{non-}\mathcal{P}}(G)$ распадаются на конечное число классов изоморфизма. Точнее, пусть G — группа, $\mathcal{M}$ — семейство подгрупп группы G и $H, K \in \mathcal{M}$. Тогда отношение «H изоморфно K» является отношением эквивалентности в $\mathcal{M}$. Обозначим через $\mathbf{Isom}_{\mathcal{M}}(H)$ класс эквивалентности H, определенный этим отношением. Выберем по одному представителю из каждого класса эквивалентности и обозначим множество всех этих представителей $\mathbf{Itype}(\mathcal{M})$. Множество $\mathbf{Itype}(\mathcal{M})$ называется *изоморфным типом* семейства $\mathcal{M}$. Естественное условие конечности — предположить, что мощность множества $\mathbf{Itype}(\mathcal{M})$ конечна.

Основная цель данного обзора — сообщить о новых результатах, касающихся групп, в которых множество $\mathbf{Itype}(\mathcal{M})$ мало́ для некоторых семейств подгрупп группы G. В частности, в п. 2 будем изучать группы G, в которых $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G))$ конечно, в п. 3 — такие группы G, что $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-ab}}(G))$ конечно, а в п. 4 — группы, в которых $\mathbf{Itype}(\mathcal{M})$ мало́ для некоторых других подходящих семейств подгрупп группы G.

В п. 2 мы также добавим некоторые подробности доказательств, чтобы дать представление об используемых методах.

2. Группы с «малыми» семействами не нормальных подгрупп. Как было отмечено выше, конечные группы G, в которых все подгруппы нормальны, т.е. для которых $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G) = \varnothing$, были описаны Р. Дедекиндом в [15]. Позднее Р. Бэр (см. [13]) обобщил результат Дедекинда на бесконечные группы; полученные группы называют сейчас *группами Дедекинда.* Доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Группа G является группой Дедекинда тогда и только тогда, когда либо G — абелева группа, либо $G = Q_8 \times E \times A$, где Q_8 — группа кватернионов порядка 8, E — элементарная абелева 2-группа и A — абелева группа, все элементы которой имеют нечетный порядок.*

В [6] С. Н. Черников начал изучение групп G, в которых $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G)$ удовлетворяет минимальному условию. Имеется много интересных примеров групп с этим свойством. В [5] А. Ю. Ольшанский построил бесконечную простую p-группу, собственные нетривиальные подгруппы которой имеют порядок p, где p — очень большое простое число. Очевидно, для этих групп G множество $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G)$ удовлетворяет минимальному и максимальному условию. Эти примеры называются монстрами Тарского, и группы, которые включают монстры Тарского в качестве сечений, могут иметь очень сложную структуру. Поэтому содержательное описание групп, в которых семейство $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G)$ удовлетворяет минимальному или максимальному условию, возможно только при некоторых дополнительных ограничениях. С. Н. Черников доказал следующую теорему.

Теорема 2.2. *Пусть G — бесконечная группа. Если G не периодична, то $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G)$ удовлетворяет минимальному условию тогда и только тогда, когда G абелева. Если G локально* *конечна, то* $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G)$ *удовлетворяет минимальному условию тогда и только тогда, когда либо* G *дедекиндова, либо* $\mathcal{L}(G)$ *удовлетворяет минимальному условию.*

Отметим, что локально конечные группы G, в которых $\mathcal{L}(G)$ удовлетворяет минимальному условию, хорошо известны: это конечные расширения абелевой группы A, которая является прямым произведением конечного числа p-квазициклических групп, где p — простое число (см. [10, 11]). Группы с этой структурой также называются группами Черникова. Напомним, что p-квазициклическая группа, или p-группа Прюфера, — это группа

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \langle a_n \mid a_1^p = 1, a_{n+1}^p = a_n,\ n \in \mathbb{N}\rangle.$$

Группы, в которых множество $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G)$ удовлетворяет максимальному условию, изучались в статьях Л. А. Курдаченко, Н. Ф. Кузенного и Н. Н. Семко в [3] и Г. Кутоло в [14]. Монстры Тарского снова являются примерами таких групп, так что необходимо добавить некоторые условия на G; например, можно предположить, что G — локально градуированная группа (напомним, что группа G называется локально градуированной, если любая конечно порожденная нетривиальная подгруппа группы G имеет нетривиальный конечный образ). Упомянутые результаты объединены в следующей теореме.

Теорема 2.3. *Пусть* G *— локально градуированная группа, в которой* $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G)$ *удовлетворяет максимальному условию. Тогда* G *— группа одного из следующих видов*:

(i) G *имеет разрешимую подгруппу* H *конечного индекса и* $\mathcal{L}(G)$ *удовлетворяет максимальному условию*;

(ii) G *— группа Дедекинда*;

(iii) G *содержит такую* p*-подгруппу Прюфера* P*, что* G/P *— конечно порожденная группа Дедекинда*;

(iv) $G = H \times L$*, где* $H \simeq \mathbb{Q}_2$ *и* L *— конечная неабелева группа Дедекинда.*

Здесь $\mathbb{Q}_p$ — аддитивная группа рациональных чисел вида a/p^b, где p — простое число, a, b — целые числа.

Разрешимые группы G, для которых $\mathcal{L}(G)$ удовлетворяет максимальному условию, также хорошо изучены: это полициклические группы (напомним, что полициклической группой называется группа с (конечным) рядом с циклическими факторами). Таким образом, группа из теоремы 2.3 i) является почти полициклической группой.

В недавней работе [28] мы изучали класс групп G, для которого множество $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G))$ конечно, т.е. в котором имеется лишь конечное множество неизоморфных подгрупп, не являющихся нормальными. Очевидно, конечные группы, группы Дедекинда и, более общим образом, группы с конечным числом подгрупп, не являющихся нормальными, обладают этим свойством. Последний класс групп был описан Н. С. Хекстером и Х. В. Ленстра (мл.) в [26].

Если H — подгруппа группы G, то, очевидно, $\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(H) \subseteq \mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G)$ и, следовательно, класс групп G, для которого множество $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G))$ конечно, замкнут относительно взятия подгрупп. Он не замкнут относительно прямых произведений, поскольку легко доказать, что прямое произведение конечной недедекиндовой группы нечетного порядка и бесконечной дедекиндовой 2-группы имеет бесконечно много неизоморфных подгрупп, не являющихся нормальными.

p-Группы (монстры) Тарского являются примерами групп из этого класса, так как множество $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G))$ состоит из единственной циклической группы порядка p. А. Ю. Ольшанский также построил в [4] простую группу без кручения, собственные нетривиальные подгруппы которой — бесконечные циклические. Для этой группы G множество $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G))$ состоит только из бесконечных циклических групп. Предыдущие примеры показывают, что для того, чтобы получить информацию о структуре группы, у которой множество $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G))$ конечно, требуется наложить некоторые дополнительные ограничения на группу G. Сначала изучим периодические группы в рассматриваемом классе и предположим, что G локально конечна. Наш первый результат следующий.

Предложение 2.4. *Пусть G — локально конечная бесконечная группа, для которой множество $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G))$ конечно. Для любой бесконечной подгруппы F группы G существует такая конечная нормальная подгруппа D группы G, $F \leqslant D$, что любая подгруппа G/D нормальна в G/D.*

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.5. *Пусть G — локально конечная группа, для которой $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G))$ конечно. Тогда G — FC-группа.*

Здесь G — FC-группа, если для любого элемента $x \in G$ класс сопряженности $x^G = \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$ конечен. В [18, 43] приведено множество результатов, касающихся FC-групп.

Предложение 2.6. *Пусть G — группа, для которой множество $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G))$ конечно. Предположим, что P — бесконечная локально конечная подгруппа группы G. Если P — нечерниковская подгруппа, то любая подгруппа группы P нормальна в G.*

Пусть теперь G — бесконечная локально конечная группа, для которой $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G))$ конечно. Если G не является группой Дедекинда, то G является группой Черникова согласно предложению 2.6. Следовательно, G имеет нормальную подгруппу D конечного индекса, которая является прямым произведением конечного числа p-групп Прюфера. Пусть P — p-подгруппа Прюфера группы G. Тогда P имеет цепь из циклических подгрупп:

$$\langle a_1\rangle < \langle a_2\rangle < \dots < \langle a_n\rangle < \dots, \quad |\langle a_i\rangle| = p^i \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, подгруппы $\langle a_i\rangle$ не изоморфны друг другу и, следовательно, бесконечное число из них нормально в G. Можно доказать, что они все нормальны в G. Более того, получаем следующее утверждение.

Лемма 2.7. *Пусть G — такая локально конечная группа, что $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G))$ конечно. Если D — p-подгруппа Прюфера группы G, то $D \leqslant \zeta(G)$.*

С помощью предыдущих замечаний можно дать полное описание локально конечных групп, для которых множество $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G))$ конечно.

Теорема 2.8. *Пусть G — локально конечная бесконечная группа. Тогда $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-norm}}(G))$ конечно в том и только том случае, когда либо G — группа Дедекинда, либо $G = A \times P$, где P — p-группа, p — простое число, $\zeta(P)$ включает такую подгруппу Прюфера D, что P/D конечна и абелева и A — конечная p'-группа Дедекинда.*

В непериодическом случае мы также получим некоторую информацию о структуре G, налагая, как и раньше, некоторые дополнительные условия на G.

Сначала напомним некоторые определения.

Для произвольной группы G обозначим через $\mathbf{Tor}(G)$ ее максимальную нормальную периодическую подгруппу. Отметим, что если G локально нильпотентна, то $\mathbf{Tor}(G)$ содержит все элементы конечных порядков из группы G.

Говорят, что группа G имеет 0-*ранг* $r_0(G) = r$, если G имеет конечный субнормальный ряд, факторы которого — либо бесконечные циклические группы, либо периодические, и если число бесконечных циклических факторов равно в точности r.

Нетрудно доказать, что число циклических факторов является инвариантом группы G. В некоторых работах 0-ранг также называется *рангом без кручения* группы G.

Легко видеть, что если A — абелева группа без кручения, то $r_0(A)$ конечен тогда и только тогда, когда A изоморфна подгруппе конечномерного векторного пространства.

Группа G называется *минимаксной* группой, если она имеет конечный ряд, факторы которого лежат или в Max, или в min. Если G — минимаксная почти разрешимая группа, то G имеет конечный субнормальный ряд, факторы которого являются группами Черникова или почти полициклическими группами. Отметим, что, если G — почти разрешимая группа, то $T = \mathbf{Tor}(G)$ — группа Черникова, и периодические подгруппы группы G/T конечны. Если $\mathbf{Tor}(G)$ конечно (т.е. G не включает делимой абелевой группы), то G называется *приведенной минимаксной* группой.

Группа G называется *радикальной*, если G имеет восходящий ряд, каждый фактор которого локально нильпотентен. Легко доказать, что любая радикальная группа имеет восходящий ряд из нормальных подгрупп, факторы которых локально нильпотентны.

Группа G называется *обобщенно радикальной*, если G имеет восходящий ряд, факторы которого локально нильпотентны или локально конечны. Следует отметить, что в прошлом некоторые авторы использовали более ограничительное определение, где требовалось, чтобы факторы были локально нильпотентны или конечны.

Из определения легко получается, что обобщенно радикальная группа G имеет либо восходящую локально нильпотентную подгруппу, либо восходящую локально конечную подгруппу. В первом случае локально нильпотентный радикал нетривиален. В последнем случае G содержит нетривиальную нормальную локально конечную подгруппу и, следовательно, локально конечный радикал нетривиален. Таким образом, любая обобщенно радикальная группа имеет восходящий ряд из нормальных подгрупп с факторами, которые либо локально нильпотентны, либо локально конечны (см. [2, 18, 39]).

Теорема 2.9 (см. [28])**.** *Пусть G — локально обобщенно радикальная группа, в которой семейство всех подгрупп, не являющихся нормальными, имеет конечный изоморфный тип. Тогда либо G — группа Дедекинда, либо G — почти абелева и минимаксна.*

Отметим, что прямое произведение конечной недедекиндовой группы и минимаксной абелевой группы без кручения с бесконечным числом неизоморфных подгрупп имеет бесконечно много неизоморфных подгрупп, не являющихся нормальными, и, следовательно, обращение теоремы 2.9 в общем случае неверно.

Если G — непериодическая группа, имеющая бесконечную локально конечную подгруппу, имеем более сильный результат.

Теорема 2.10. *Пусть G — непериодическая группа, в которой семейство всех подгрупп, не являющихся нормальными, имеет конечный изоморфный тип. Предположим, что G имеет бесконечную локально конечную подгруппу. Если G неабелева, то $\zeta(G)$ имеет такую подгруппу Прюфера D, что G/D — абелева минимаксная группа, имеющая конечную периодическую часть. Более того, G является почти центральной.*

3. Группы с «малыми» семействами неабелевых подгрупп. Как было упомянуто во введении, имеются важные классические результаты Г. А. Миллера и Х. Морено о неабелевых конечных группах, все собственные подгруппы которых абелевы, т.е. группах G с $\mathcal{L}_{\text{non-ab}}(G) = \{G\}$ (см. [36]). Эти группы также называются *минимальными неабелевыми группами.* Монстры Тарского являются примерами бесконечных минимальных неабелевых групп, поэтому невозможно ожидать полного описания минимальных неабелевых групп. Группы, для которых множество $\mathcal{L}_{\text{non-ab}}(G)$ удовлетворяет минимальному условию, впервые рассматривались С. Н. Черниковым в [6]. Из его результатов следует, что неабелева локально разрешимая группа с этим свойством удовлетворяет минимальному условию на всех подгруппах, т.е. является группой Черникова. Этот результат был обобщен на локально конечные группы В. П. Шунковым (см. [11]). Напротив, класс групп G, для которых $\mathcal{L}_{\text{non-ab}}(G)$ удовлетворяет максимальному условию, не совпадает с классом групп, удовлетворяющих условию Max, даже если накладывать ограничительные условия. Простым примером здесь является группа, которая представляет собой сплетение группы простого порядка и бесконечной циклической группы. Группы G, для которых $\mathcal{L}_{\text{non-ab}}(G)$ удовлетворяет условию Max, рассматривались несколько позже Д. И. Зайцевым и Л. А. Курдаченко (см. [1]), и их основным результатом является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть G — почти локально разрешимая группа. Тогда $\mathcal{L}_{\text{non-ab}}(G)$ удовлетворяет условию* Max *тогда и только тогда, когда либо G удовлетворяет условию* Max (*и тогда G — полициклическая группа*)*, либо G содержит нормальную абелеву подгруппу A со следующими свойствами*:

(a) $A = C_G(A)$;

(b) *G/A — локально порожденная, почти абелева группа без кручения*;

(c) *A — конечно порожденный $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-модуль для всех $g \in G$.*

Из предыдущих результатов вытекает, что если G — почти локально разрешимая группа и $\mathcal{L}_{\text{non-ab}}(G)$ конечно, то G или абелева, или конечна. В самом деле, предположим, что G неабелева. Если a, b — некоммутирующие элементы группы G, то каждая подгруппа G, содержащая $\langle a, b\rangle$, неабелева. Следовательно, G конечно порождена. Таким образом, G — почти разрешимая группа, и существует нормальная разрешимая подгруппа A группы G конечного индекса. Если A неабелева, то A удовлетворяет минимальному условию на всех подгруппах; следовательно, она периодическая, и поэтому она конечна, ибо конечно порождена. Следовательно, G конечна, что и требовалось доказать. Очевидно, то же самое верно, если A периодическая и если G разрешима. Теперь предположим, что G неразрешима и A — непериодическая и абелева. Для любого $x \in G$ подгруппа $A\langle x\rangle$ разрешима, конечно порождена и бесконечна; следовательно, она не удовлетворяет условию min, и поэтому она абелева. Таким образом, $A \leqslant Z(G)$, и поскольку $G/Z(G)$ конечна, отсюда следует, что производная подгруппа G' конечна. Очевидно, G' неразрешима, и если элемент $z \in Z(G)$ апериодичен, то подгруппы $G'\langle z^{2^n}\rangle = G' \times \langle z^{2^n}\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, образуют бесконечную цепь неабелевых подгрупп группы G;. противоречие.

В [29], рассматривались группы G, для которых $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-ab}}(G))$ конечно, т.е. группы с конечным числом неабелевых неизоморфных подгрупп. Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть G — неабелева локально обобщенно радикальная группа, в которой семейство всех неабелевых подгрупп имеет конечный изоморфный тип. Тогда G почти абелева и приведенно минимаксная. В частности, G резидуально конечная.*

Следующий класс двойствен классу обобщенно радикальных групп. Группа G называется *обобщенно корадикальной*, если G имеет нисходящий ряд нормальных подгрупп, факторы которых локально нильпотентны или локально конечны.

Теорема 3.3. *Пусть G — неабелева локально обобщенно корадикальная группа, в которой семейство всех неабелевых подгрупп имеет конечный изоморфный тип. Тогда G почти абелева и приведенно минимаксная.*

Следующий результат играет важную роль в доказательстве теоремы 3.3.

Теорема 3.4. *Пусть G — группа, неабелевы конечно порожденные группы которой могут порождаться d элементами. Если G резидуально конечна, то G почти гиперабелева и имеет конечный специальный ранг.*

Отметим, что если G — конечно порожденная почти абелева группа, то подгруппы G распадаются на конечное число изоморфных классов. На самом деле G имеет абелеву конечно порожденную подгруппу без кручения F конечного индекса, скажем, t. Если F является s-порожденной, то любая подгруппа группы F является группой без кручения с $\leqslant s$ генераторами. Следовательно, F имеет конечный изоморфный тип, скажем, v. Но если P — полициклическая группа и t — положительное целое число, то группа H, которая имеет подгруппу индекса $\leqslant t$, изоморфная P, лежит в конечном числе изоморфных классов (см., например, [40, теорема 6, с. 176]). Следовательно, обращение теоремы 3.1(a), (b) выполняется для конечно порожденных групп. С другой стороны, рассмотрение прямого произведения разрешимой неабелевой группы и минимаксной абелевой группы без кручения с бесконечным числом неизоморфных подгрупп показывает, что обращение теорем 3.2 и 3.3 в общем случае неверно (см. [21]).

Завершим этот раздел напоминанием о том, что структура неабелевых групп G, в которых $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-ab}}(G)) = \{G\}$, была подробно описана Х. Смитом и Дж. Виголдом в [42].

4. Группы с «малыми» семействами других подходящих подгрупп. Дальнейшими семействами подгрупп для дополнительного изучения являются семейство субнормальных подгрупп и семейство нильпотентных подгрупп.

Если G — конечная группа, $\mathcal{L}_{\text{non-subnorm}}(G) = \varnothing$, т.е. любая подгруппа G субнормальна в G тогда и только тогда, когда G нильпотентна. Это неверно в бесконечном случае; на самом деле, существуют разрешимые локально нильпотентные группы с тривиальным центром, все подгруппы которых субнормальны. Примеры таких групп были построены Х. Хейнекеном и И. Мохамедом (см. [24,25]), Б. Хартли (см. [23]) и Ф. Менегаццо (см. [35]). Группы, все подгруппы которых субнормальны, изучались во многих статьях и книгах; книга [31] Дж. К. Леннокса и С. Е. Стоунхьюэра — один из блестящих источников для ссылок. Весьма замечательный результат был получен В. Мёресом; он доказал в [37], что если любая подгруппа группы G субнормальна, то G разрешима. Группы G, в которых множество $\mathcal{L}_{\text{non-subnorm}}(G)$ удовлетворяет минимальному условию, рассматривались Р. Е. Филлипсом и Дж. С. Уилсоном в [38] и С. Франциози и Ф. де Джованни в [20]. В частности, было доказано, что если G — локально разрешимая группа, обладающая этим свойством, то либо G — группа Черникова, либо все подгруппы группы G субнормальны в G. Группы, в которых множество $\mathcal{L}_{\text{non-subnorm}}(G)$ удовлетворяет максимальному условию, рассматривались Л. А. Курдаченко и Х. Смитом в [30]. Основные результаты этой работы можно объединить в следующей теореме. Здесь обозначаем $B(G)$ радикал Бэра группы G, т.е. подгруппу группы G, порожденную всеми циклическими субнормальными подгруппами группы G.

Теорема 4.1.

(i) *Если G — локально нильпотентная группа, в которой $\mathcal{L}_{\text{non-subnorm}}(G)$ удовлетворяет максимальному условию, то все подгруппы G субнормальны в G.*

(ii) *Если G — локально разрешимая группа, то $\mathcal{L}_{\text{non-subnorm}}(G)$ удовлетворяет максимальному условию в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий:*
   (1) *G — почти полициклическая;*
   (2) *каждая подгруппа группы G субнормальна;*
   (3) *$G \neq B(G)$ и $G/B(G)$ — конечно порожденная, почти абелева группа без кручения.*
   В этом случае $B(G)$ нильпотентна, и для любого элемента $g \notin B(G)$ любой G-инвариантный абелев фактор группы $B(G)$ конечно порожден как $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-модуль.

Из предыдущих результатов следует, что если G — локально разрешимая группа с конечным числом субнормальных подгрупп, то либо G конечна, либо любая подгруппа G субнормальна. В самом деле, предположим, что существует не субнормальная подгруппа H группы G. Тогда G — группа Черникова согласно [20] и, следовательно, G — периодическая группа. Более того, H имеет конечное число сопряженных; следовательно, $N_G(H)$ имеет конечный индекс в G, и любая подгруппа $N_G(H)$, содержащая H, не субнормальна в G. Следовательно, группа $N_G(H)/H$ имеет конечное число подгрупп и поэтому является конечной группой. Следовательно, H имеет конечный индекс в G. Если G — не группа Бэра, то можно предположить, что H — циклическая; следовательно, H конечна и G конечна; если G — группа Бэра, то G — почти полициклическая согласно теореме 4.1, и снова G конечна.

Естественно задать следующий вопрос.

Задача 4.2. Какова структура локально обобщенно радикальной группы Gб для котороый множество $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-subnorm}}(G))$ конечно?

Описание конечных нильпотентных групп, не являющихся нильпотентными, в которых все собственные подгруппы нильпотентны, т.е. групп с $\mathcal{L}_{\text{non-nil}}(G) = \{G\}$, было получено О. Ю. Шмидтом в [9]. Примеры монстров Тарского, построенные А. Ю. Ольшанским, оставляют мало надежды на получение полного описания таких групп в бесконечном случае. Есть много результатов по этому вопросу; в частности, упомянем интересную теорему А. О. Азара, который доказал в [12], что любая локально градуированная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны, разрешима. Х. Смит в [41] начал изучение групп G, в которых семейство $\mathcal{L}_{\text{non-nil}}(G)$ удовлетворяет максимальному или минимальному условию. Например, он доказал, что локально нильпотентная группа без кручения, удовлетворяющая одному из этих условий, нильпотентна. Группы G, для которых $\mathcal{L}_{\text{non-nil}}(G)$ удовлетворяет максимальному условию, также изучались М. Р. Диксоном и Л. А. Курдаченко в [16,17].

С помощью предыдущих результатов попытаемся решить следующую проблему.

Вопрос 4.3. Какова структура локально обобщенно радикальной группы G, для которой семейство $\mathbf{Itype}(\mathcal{L}_{\text{non-nil}}(G))$ конечно?

Аналогичные задачи можно изучать для многих других семейств подгрупп G. Мы хотим завершить этот обзор, напомнив, что аналогичная задача изучалась для семейства $\mathcal{M}$ коммутаторов всех подгрупп группы G, т.е.

$$\mathcal{M} = \{H' \mid H \leqslant G\}.$$

Ф. де Джованни и Д. Дж. С. Робинсон в [22] и, независимо, М. Герцог, П. Лонгобарди и М. Май в [27] изучали такие группы, что $\mathcal{M}$ конечно; П. Лонгобарди, М. Май, Д. Дж. С. Робинсон и Х. Смит в ряде статей изучали группы такие, что семейство всех коммутаторов имеет конечный изоморфный тип (см. [32–34]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зайцев Д. И., Курдаченко Л. А.* Группы с условием максимальности на неабелевых подгруппах// Укр. мат. ж. — 1991. — *43*, № 7–8. — С. 925–930.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. — М.: Наука, 1982.
3. *Курдаченко Л. А., Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Группы с некоторыми условиями максимальности// Изв. АН УССР. Сер. А. — 1998. — *1*. — С. 9–11.
4. *А. Ю. Ольшанский* Бесконечная простая нётерова группа без кручения// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — *43*, № 6. — С. 1328–1393.
5. *А. Ю. Ольшанский* Группы ограниченного периода с подгруппами простого порядка// Алгебра и логика. — 1982. — *21*, № 5. — С. 369–418.
6. *Черников С. Н.* Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп// Докл. АН СССР. — 1964. — *159*. — С. 759–760.
7. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп// Укр. мат. ж. — 1967. — *19*, № 6. — С. 111–131.
8. *Черников С. Н.* Исследование групп с заданными свойствами подгрупп// Укр. мат. ж. — 1969. — *21*, № 2. — С. 193–209.
9. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные// Мат. сб. — 1924. — *31*. — С. 366–372.
10. *Шунков В. П.* О проблеме минимальности для локально конечных групп// Алгебра и логика. — 1970. — *9*. — С. 220–248.
11. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп// Алгебра и логика. — 1970. — *9*. — С. 579–615.
12. *Asar A. O.* Locally nilpotent p-groups whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-Černikov// J. London Math. Soc. — 2000. — *61*. — P. 412–422.
13. *Baer R.* Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe// Sitzgsber. Heidelberg. Akad. Wiss. — 1933. — *2*. — P. 12–17.
14. *Cutolo G.* On groups satisfying the maximal condition on non-normal subgroups// Riv. Mat. Pura Appl. — 1991. — *91*. — P. 49–59.
15. *Dedekind R.* Über Gruppen deren sammtliche Teiler Normalteiler sind// Math. Ann. — 1897. — *48*. — P. 548–561.
16. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A.* Locally nilpotent groups with the maximum condition on non-nilpotent subgroups// Glasgow Math. J. — 2001. — *43*, № 1. — P. 85–102.
17. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A.* Groups with the maximum condition on non-nilpotent subgroups// J. Group Theory. — 2001. — *4*, № 1. — P. 75–87.
18. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Ranks of groups. The tools, characteristics and restrictions. — New York: Wiley, 2017.
19. *Dixon M. R., Subbotin I. Ya.* Groups with finiteness conditions on some subgroup systems: a contemporary stage// Alg. Discr. Math. — 2009. — *4*. — P. 29–54.
20. *Franciosi S., de Giovanni F.* Groups satisfying the minimal condition on non-subnormal subgroups// in: Infinite groups. 1994. Ravello. — Berlin: de Gruyter, 1996. — P. 63–72.
21. *Fuchs L.* Infinite abelian groups. — New York: Academic Press, 1970.
22. *de Giovanni F., Robinson D. J. S.* Groups with finitely many derived subgroups// J. London Math. Soc. — 2005. — *71*, № 2. — P. 658–668.
23. *Hartley B.* A note on the normalizer condition// Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1973. — *74*, № 1. — P. 11–15.

24. *Heineken H., Mohamed I. J.* A group with trivial center satisfying the normalizer condition// J. Algebra. — 1968. — *10.* — P. 368–376.
25. *Heineken H., Mohamed I. J.* Non-nilpotent groups with normalizer condition// Lect. Notes Math. — 1974. — *372.* — P. 357–360.
26. *Hekster N. S., Lenstra H. W. Jr.* Groups with finitely many non-normal subgroups// Arch. Math. — 1990. — *54.* — P. 225–231.
27. *Herzog M., Longobardi P., Maj M.* On the number of commutators in groups// in: Ischia Group Theory. 2004. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2006. — P. 181–192.
28. *Kurdachenko L. A., Longobardi P., Maj M.* Groups with finitely many isomorphism classes of non-normal subgroups/ submitted.
29. *Kurdachenko L. A., Longobardi P., Maj M., Subbotin I. Ya.* Groups with finitely many isomorphic classes of non-abelian subgroups// J. Algebra. — 2018. — *507.* — P. 439–466.
30. *Kurdachenko L. A., Smith H.* Groups with the maximal condition on non-subnormal subgroups// Boll. Unione Mat. Ital. — 1996. — *10B.* — P. 441–460.
31. *Lennox J. C., Stonehewer S. E.* Subnormal subgroups of groups. — Oxford: Clarendon Press, 1987.
32. *Longobardi P., Maj M., Robinson D. J. S.* Locally finite groups with finitely many isomorphism classes of derived subgroups// J. Algebra. — 2013. — *393.* — P. 102–119.
33. *Longobardi P., Maj M., Robinson D. J. S.* Recent results on groups with few isomorphism classes of derived subgroups// Contemp. Math. — 2014. — *611.* — P. 121–135.
34. *Longobardi P., Maj M., Robinson D. J. S., Smith H.* On groups with two isomorphism classes of derived subgroups// Glasgow Math. J. — 2013. — *55*, № 3. — P. 655–668.
35. *Menegazzo F.* Groups of Heineken–Mohamed// J. Algebra. — 1995. — *171.* — P. 807–825.
36. *Miller G. A., Moreno H.* Non-abelian groups in which every subgroup is abelian// Trans. Am. Math. Soc. — 1903. — *4.* — P. 389–404.
37. *Möhres W.* Auflösbarkeit von Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind// Arch. Math. — 1990. — *54.* — P. 232–235.
38. *Phillips R. E., Wilson J. S.* On certain minimal conditions for infinite groups// J. Algebra. — 1978. — *51.* — P. 41–68.
39. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. — New York: Springer, 1982.
40. *Segal D.* Polycyclic groups. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
41. *Smith H.* Groups with few non-nilpotent subgroups// Glasgow Math. J. — 1997. — *39.* — P. 141–151.
42. *Smith H., Wiegold J.* Groups which are isomorphic to their non-abelian subgroups// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1997. — *97.* — P. 7–16.
43. *Tomkinson M. J.* FC-groups. — Melbourne: Pitman, 1984.

Курдаченко Л. А.
Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днипро, Украина
E-mail: lkurdachenko@i.ua

Longobardi P.
Университет Салерно, Фиськьяно (Салерно), Италия
E-mail: plongobardi@unisa.it

Maj M.
Университет Салерно, Фиськьяно (Салерно), Италия
E-mail: mmaj@unisa.it

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 111–120
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-111-120

УДК 512.66, 515.145

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ K-ТЕОРИИ СКРЕЩЕННЫХ АЛГЕБР ХОПФА

© 2020 г. **Г. РАКВИАШВИЛИ**

Аннотация. Для алгебраических K-функторов скрещенных произведений коммутативной алгебры и кокоммутативной алгебры Хопфа построено некоторое умножение; изучается вопрос о том, являются ли эти функторы функторами Фробениуса относительно построенного умножения.

Ключевые слова: алгебраическая K-теория, алгебры Хопфа, K-функторы, скрещенные произведения, функторы Фробениуса.

ON PRODUCTS IN ALGEBRAIC K-THEORY OF CROSSED HOPF ALGEBRAS

© 2020 **G. RAKVIASHVILI**

Abstract. Some multiplication is constructed for algebraic K-functors of the crossed products of a commutative algebra and a Hopf cocommutative algebra; the question on these functors to be Frobenius functors with respect to the constructed multiplication is studied.

Keywords and phrases: algebraic K-theory, Hopf algebras, K-functors, crossed products, Frobenius functors.

AMS Subject Classification: 19D10, 19D55, 55N15

1. Введение. В статье построено произведение для алгебраических K-функторов (см. [8, 13, 17]) скрещенного произведения коммутативного кольца и кокоммутативной алгебры Хопфа. Это произведение обощает соответствующие результаты для групповых колец (см. [1, 11, 16]), скрещенных групповых колец (см. [3, 15, 19]) и для суженных скрещенных обертывающих алгебр конечномерных p-алгебр Ли (см. [5]). Аналогичные вопросы для некоторых видов алгебраических K-функторов групповых колец рассматривались в 1986 г. К. Кавакубо (см. [10]) и в 2005 г. А. Бартелсом и У. Люком (см. [7]). Часть основных результатов статьи была опубликована в [6] на русском языке.

Пусть k — коммутативное кольцо с единичным элементом. Все модули и ассоциативные алгебры будут определены над k; всегда предполагаем, что все ассоциативные алгебры имеют единичный элемент.

Пусть H — алгебра Хопфа и

$$\mu : H\otimes_k H \to H, \quad \eta : k \to H, \quad \Delta : H \to H \otimes_k H, \quad \varepsilon : H \to k$$

— произведение, единица, копроизведение и коединица в H соответственно. Введем обозначение

$$\Delta(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}.$$

Пусть C — коалгебра и A — ассоциативная алгебра. Тогда $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ — ассоциативная алгебра с единичным элементом $\eta\varepsilon$ и умножением

$$(f * g)(c) = \mu(f \otimes g)\Delta(c) = \sum_{(c)} f(c_{(1)}) \otimes g(c_{(2)}).$$

Морфизм $S : H \to H$ называется антиподом, если $S * \mathrm{id} = \mathrm{id} * S = \eta\varepsilon$, т.е.

$$\sum_{(h)} h_{(1)} S(h_{(2)}) = \sum_{(h)} h_{(1)} S(h_{(1)}) = \varepsilon(h).$$

Хорошо известно, что антиподы являются антиизоморфизмами относительно произведений и копроизведений.

Если ассоциативная алгебра A является H-модулем и произведение μ_A и копроизведение η_A — морфизмы H-модуля, т.е.

$$h(ab) = \sum_{(h)} (h_{(1)}a)(h_{(2)}b), \qquad h1_A = \varepsilon(h)1_A,$$

то A называется *H-модульной алгеброй*; аналогично, если коалгебра C является H-модулем и копроизведение Δ_C и коединица ε_C — морфизмы H-модуля, то C называется *H-модульной коалгеброй.*

Далее предполагаем, что все коалгебры кокоммутативны и, следовательно, левые и правые комодули изоморфны. Затем будем предполагать, что все комодули — это левые комодули.

Напомним определение когомологии Свидлера $H^n(H, \Lambda)$ (см. [18]) алгебры Хопфа H с коэффициентами из коммутативной H-модульной алгебры Λ (в [18] предполагалось, что k — поле, но в [2] доказано, что результаты Свидлера справедливы для произвольных ассоциативных коммутативных колец с единичным элементом). Пусть $\otimes^q H$ — q-кратное тензорное произведение H как k-модулей и пусть $\mathrm{Reg}(\otimes^q H, \Lambda)$ — группа обратимых элементов относительно умножения $*$. Определим дифференциалы

$$d^{q-1} : \mathrm{Reg}(\otimes^{q-1} H, \Lambda) \to \mathrm{Reg}(\otimes^q H, \Lambda)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} d^{q-1}(f) = \Big[\psi(I \otimes f)\Big] * \Big[f^{-1}(\mu \otimes I \otimes \cdots \otimes)\Big] * \Big[f(I \otimes \mu \otimes I \otimes \cdots \otimes I)\Big] \otimes \\ \otimes \cdots \otimes \Big[f^{\pm}(I \otimes \cdots \otimes I \otimes \mu)\Big] * \Big[f^{\mp} \otimes \varepsilon\Big], \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\psi : H \otimes \Lambda \to \Lambda$ — действие H на Λ. Далее,

$$\mathrm{Reg}^0_+(H, \Lambda) = \mathrm{Reg}(\otimes^0 H, \Lambda),$$

$$\mathrm{Reg}^q_+(H, \Lambda) = \Big\{ f \in \mathrm{Reg}(\otimes^q H, \Lambda) \;\Big|\; \exists i (h_i \in k) \;\Rightarrow\; f(h_1 \otimes \cdots \otimes h_n) = \varepsilon(h_1) \ldots \varepsilon(h_n) \Big\},$$

где $q = 1, 2, \ldots,$ — подкомплекс рассмотренного комплекса, и включение индуцирует изоиорфизм групп гомологии.

Пусть $\sigma \in \mathrm{Reg}^2_+(H, A)$ — 2-коцикл. Определим скрещенную алгебру Хопфа (см. [18]) $\Lambda \# H$ как Λ-модуль $\Lambda \otimes H$ с умножением

$$(\lambda \#_\sigma g)(\mu \#_\sigma h) = \sum_{(g),(h)} \lambda(g_{(1)}\mu)\sigma(g_2 \otimes h_{(1)}) \#_\sigma g_{(3)} h_{(2)}. \tag{1.2}$$

Это умножение ассоциативно и сохраняет единичный элемент, поскольку σ — 2-коцикл. Пусть A — комодульная алгебра над H, т.е. такая ассоциативная алгебра и H-комодуль, что кодействие $\chi : A \to A \otimes H$ является морфизмом алгебр. Тогда χ называется расширением H с помощью Λ, если $\Lambda \subseteq A$ — подалгебра, $\Lambda = \chi^{-1}(A \otimes 1)$, $a\lambda = \Sigma_a (a_{(1)}\lambda) a_{(0)}$, где $a \in A$, $\lambda \in \Lambda$, $\sum_a a_{(1)} \otimes a_{(0)} = \chi(a)$. Морфизм таких расширений должен сохранять все структуры и должен быть тождественным на Λ. Очевидно, что любое скрещенное произведение является таким расширением.

2. Умножение для алгебраических K-функторов скрещенных произведений. Расширение $\chi : A \to A \otimes H$ называется *расщепленным*, если существуют антипод S в H и морфизм комодулей $\gamma \in \operatorname{Reg}(H, A)$. Это означает, что $\gamma\gamma^{-1} = \eta\varepsilon$, т.е.

$$\sum_h \gamma(h_{(1)})\gamma^{-1}(h_{(2)}) = \varepsilon(h). \tag{2.1}$$

При этих условиях $A \simeq \Lambda\#_\sigma H$, где

$$\sigma(h \otimes g) = \sum_{(h),(g)} \gamma(h_{(1)})\gamma(g_{(1)})\gamma^{-1}(h_{(2)}g_{(2)}). \tag{2.2}$$

Следовательно, согласно [18, теорема 8.6], существует биективное соответствие между классами эквивалентности рассеченных расширений A с помощью H и $H^2(H, A)$. Так как H кокоммутативно, из (2.2) следует, что

$$\sigma = \mu(\gamma \otimes \gamma) * \gamma^{-1}\mu = \gamma^{-1}\mu * \mu(\gamma \otimes \gamma).$$

Из (2.1) следует, что

$$\mu(\gamma^{-1} \otimes \gamma^{-1}) * \mu(\gamma \otimes \gamma) = \mu(\gamma^{-1} \otimes \gamma^{-1})t * \mu(\gamma \otimes \gamma) = \eta\varepsilon,$$

где t — перестановка. Следовательно,

$$\sigma * \mu(\gamma^{-1} \otimes \gamma^{-1}) = \gamma^{-1}\mu * \mu(\gamma \otimes \gamma) * \mu(\gamma^{-1} \otimes \gamma^{-1}) = \gamma^{-1}\mu. \tag{2.3}$$

Аналогично,

$$\gamma\mu = \mu(\gamma \otimes \gamma) * \sigma^{-1}, \tag{2.4}$$

так как из (2.2) следует, что

$$\sigma^{-1} = \mu(\gamma^{-1} \otimes \gamma^{-1}) * \gamma\mu.$$

Лемма 2.1. *Пусть расширение является расщепленным, M — правый A-модуль и правый H-комодуль и пусть*

$$\chi_M : M \to M \otimes H, \quad m \to \sum_{(m)} m_0 \otimes m_1$$

— соответствующее кодействие, для которого

$$\chi_M(ma) = \chi_M(m)\chi(a) = \sum_{(m),(a)} m_0a_0 \otimes m_1a_1. \tag{2.5}$$

Тогда существует такой изоморфизм правых A-модулей и правых H-комодулей, что

$$M \simeq P(M) \otimes_\Lambda A, \tag{2.6}$$

где

$$P(M) = \{m \mid \chi_M(m) = m \otimes 1\}.$$

Доказательство. Построим отображение

$$P_\gamma : M \to M, \quad P_\gamma = \mu(\operatorname{id} \otimes \gamma^{-1})\chi_M, \quad P_\gamma(m) = \sum_m m_0\gamma^{-1}(m_1).$$

Так как $\chi\gamma^{-1} = (\gamma^{-1} \otimes S)\Delta$, согласно (2.5) имеем

$$\chi_M P_\gamma(m) = \sum_{(m)} \chi_M(m_{(0)}\gamma^{-1}(m_{(1)}) = \sum_{(m)} m_0\gamma^{-1}(m_{(3)} \otimes m_{(1)}S(m_{(2)})) =$$

$$= \sum_{(m)} m_0\gamma^{-1}(m_{(2)} \otimes \varepsilon(m_{(1)})) = \sum_{(m)} m_0\gamma^{-1}(m_{(1)} \otimes 1),$$

т.е. $P_\gamma(m) \in P(M)$. Определим отображения

$$\alpha : P(M) \otimes_\Lambda A \to M, \quad m \otimes a \to ma,$$
$$\beta : M \to P(M) \otimes_\Lambda A, \quad m \to \sum_{(m)} P_\gamma(m_{(0)}) \otimes_\Lambda \gamma(m_{(1)}) = \sum_{(m)} m_{(0)}\gamma^{-1}(m_{(1)}\gamma(m_{(2)})).$$

Легко проверить, что α и β — взаимно обратные отображения:

$$\alpha\beta(m) = \sum_{(m)} \alpha(m_{(0)}\gamma^{-1}m_{(1)} \otimes \gamma(m_{(2)})) = \sum_{(m)} m_{(0)}\gamma^{-1}m_{(1)}\gamma(m_{(2)})) = \sum_{(m)} m_{(0)}\varepsilon(m_{(1)}) = m,$$

$$\beta\alpha(m \otimes \alpha) = \beta(m\alpha) = \sum_{(a)} ma_{(0)}\gamma^{-1}(a_{(1)}) \otimes_\Lambda \gamma(a_{(2)}) =$$
$$= m \otimes a_{(0)}\gamma^{-1}(a_{(1)}\gamma(a_{(2)}) = \sum_{(a)} m \otimes a_{(0)}\varepsilon(a_{(1)}) = m \otimes a.$$

Здесь мы используем тот факт, что $\sum\limits_{(a)} a_{(0)}\gamma^{-1}(_{(1)}) \in \Lambda$, так как

$$\chi(a_{(0)}\gamma^{-1}(a_{(1)}) = \sum_{(a)} a_{(0)}\gamma^{-1}(a_{(1)}) \otimes 1. \qquad \square$$

Для рассеченного расширения и для k-подмодуля $U \subseteq H$ положим

$$T(U) = \Lambda \#_\sigma U \subseteq A. \tag{2.7}$$

Предложение 2.2.

(1) *Если U — подкоалгебра, то $T(U)$ — U-комодуль;*
(2) *если U — подалгебра Хопфа, то $T(U)$ — рассеченное расширение U с помощью Λ;*
(3) *если U — подкоалгебра, $G \subseteq H$ — подалгебра Хопфа и U — G-модуль, то $T(U)$ является $T(G)$-модулем.*

Доказательство. (1) В самом деле, если $u \in U$, то

$$\chi(\lambda \#_\sigma U) = \sum_u \lambda \#_\sigma u_{(1)} \otimes u_{(2)} \in T(U) \otimes U.$$

(2) следует из закона умножения в $\Lambda \#_\sigma H$.
(3) Пусть $u \in U$, $g \in G$; тогда

$$(\lambda \#_\sigma u)(\mu \#_\sigma g) = \sum_{(u),(g)} \lambda(u_{(1)}\mu)\sigma(u_{(2)} \otimes g_{(1)}) \# u_{(3)}g_{(2)} \in T(U). \qquad \square$$

Пусть A — H-комодульная алгебра, $M \in A$-mod, $N \in H$-mod. Рассмотрим $M \otimes N$ и $N \otimes M$ как A-модули по действию

$$a(m \otimes n) = \sum_{(a)} a_{(0)}m \otimes a_{(1)}n, \quad a(n \otimes m) = \sum_{(a} a_{(1)}n \otimes a_{(0)}m. \tag{2.8}$$

Тогда $M \otimes N \simeq N \otimes M$, так как H кокоммутативна. Если H имеет антипод, то $\mathrm{Hom}(N, M)$ — A-модуль по действию

$$(af)(n) = \sum_{(a)} a_{(0)} f(S(a_{(1)})n).$$

Предложение 2.3. *Пусть A — H-комодульная алгебра, $M_1, M_2 \in A$-mod, $N \in H$-mod, и пусть H снабжена антиподом S. Тогда существует естественный изоморфизм A-модулей*

$$\mathrm{Hom}_A(M_1 \otimes N, M_2) \simeq \mathrm{Hom}_A(M_1, \mathrm{Hom}(N, M_2)).$$

Доказательство. Требуемый изоморфизм индуцируется естественным изоморфизмом F, действующим из $\mathrm{Hom}_A(M_1 \otimes N, M_2)$ в $\mathrm{Hom}_A(M_1, \mathrm{Hom}(N, M_2))$:

$$aF(f)(m_1)(n) = \sum_{(a)} a_{(0)} F(f)(m_1)(S(a_{(1)})n) = \sum_{(a)} a_{(0)} f(m_1 \otimes S(a_{(1)})n) =$$
$$= \sum_{(a)} f(a_{(0)}(m_1 \otimes S(a_{(1)})n)) = \sum_{(a)} f(a_{(0)} m_1 \otimes a_{(1)} S(a_{(2)})n) =$$
$$= \sum_{(a)} f(a_{(0)} m_1 \otimes \varepsilon(a_{(1)})n) = f(am_1 \otimes n) = F(f)(am_1)(n). \quad \square$$

Следствие 2.4. *Если модуль M_1 является A-проективным, а N — k-проективным, то $M_1 \otimes N$ является A-проективным.*

Обозначим через $\langle A \otimes M \rangle$ левый A-модуль по действию $a(b \otimes m) = ab \otimes m$.

Предложение 2.5. *Пусть H снабжена антиподом S, $A' \subseteq A$ — комодульная подалгебра и $M' \in A'$-mod, $N \in H$-mod. Тогда существует естественный изоморфизм A-модулей*

$$\langle A \otimes_{A'} (M' \otimes N) \rangle \simeq \langle A \otimes_{A'} M' \rangle \otimes N.$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(\langle a \otimes (m' \otimes n) \rangle) = \sum_{(a)} \langle a_{(0)} \otimes m' \rangle \otimes a_{(1)} n.$$

Докажем корректность этого определения. Если $b \in A'$, то

$$\varphi(\langle ab \otimes (m' \otimes n) \rangle) = \sum_{(a),(b)} \langle a_{(0)} b_{(0)} \otimes m' \rangle \otimes a_{(1)} b_{(1)} n =$$
$$= \sum_{(a),(b)} \langle a_{(0)} \otimes b_{(0)} m' \rangle \otimes a_{(1)} b_{(1)} n = \varphi\Bigg(\sum_{(b)} a \otimes (b_{(0)} m' \otimes b_{(1)} n) \Bigg) = \varphi(a \otimes b(m' \otimes n)).$$

Легко доказать, что φ — изоморфизм A-модулей. Определим

$$\psi_n : \langle A \otimes_{A'} \otimes M' \rangle \to \langle A \otimes A'(M' \otimes N) \rangle$$

следующим образом:

$$\psi_n(a \otimes m') = \sum_{(a)} a_{(0)} \otimes (m' \otimes S(a_{(1)} n)),$$

где $n \in N$. Это определение корректно, так как

$$\psi_n(ab \otimes m') = \sum_{(a),(b)} a_{(0)} b_{(0)} \otimes (m' \otimes S(a_{(1)} b_{(1)}))n =$$
$$= \sum_{(a),(b)} a_{(0)} \otimes b_{(0)}(m' \otimes S(b_{(1)}) S(a_{(1)}))n =$$
$$= \sum_{(a),(b)} a_{(0)} \otimes (b_0 m' \otimes b_{(1)} S(b_{(2)}) S(a_{(1)} n)) = \sum_{(a)} a_{(0)} \otimes (bm' S(a_{(1)} n)) = \psi_n(a \otimes bm').$$

Положим $\psi(\langle a \otimes m' \rangle \otimes n) = \psi_n(ab \otimes m')$. Легко доказать, что $\psi\varphi = \mathrm{id}$ и $\varphi\psi = \mathrm{id}$. $\square$

Предложение 2.6. *Пусть расширение является рассеченным, $H' \subseteq H$ — подалгебра Хопфа $A' = T(H')$. Тогда для любых модулей $M \in A$-mod, $N' \in H$-mod существует естественный изоморфизм левых A-модулей*

$$\langle A \otimes A'(N' \otimes M) \rangle \simeq \langle H \otimes_{H'} N' \rangle \otimes M.$$

Доказательство. Положим

$$\varphi\langle a\otimes(n'\otimes m)\rangle=\sum_{(a)}\langle a_{(1)}\otimes n'\rangle\otimes a_{(0)}m.$$

Легко доказать, что это определение корректно и φ — морфизм A-модулей. Определим для $m\in M$

$$\psi_m:\langle H\otimes_{H'}N'\rangle\to\langle A\otimes_{A'}(N'\otimes M)\rangle,$$
$$h\otimes n'\to\sum_{(h)}\gamma(h_{(2)})\otimes(n'\otimes\gamma^{-1}(h_{(1)})).$$

Мы докажем, что ψ_m корректно определено. Пусть $g\in H'$; согласно (2.3), (2.4)

$$\begin{aligned}\psi_m(hg\otimes n')&=\sum_{(h),(g)}\gamma(h_{(2)}g_{(2)})(n'\otimes\gamma^{-1}(h_{(1)}g_{(1)}))=\\&=\sum_{(h),(g)}\gamma(h_{(4)})\gamma(g_{(4)})\sigma^{-1}(h_{(3)}\otimes g_{(3)})\otimes(n'\otimes\sigma(h_{(2)}\otimes g_{(2)}))\gamma^{-1}(g_{(1)})\gamma^{-1}(h_{(1)})=\\&=\sum_{(h),(g)}\gamma(h_{(4)})\gamma(g_{(4)})\otimes\sigma^{-1}(h_{(3)}\otimes g_{(3)})\sigma(h_{(2)}\otimes g_{(32)})(n'\otimes\gamma^{-1}(g_{(1)})\gamma^{-1}(h_{(1)}))=\\&=\sum_{(h),(g)}\gamma(h_{(2)})\gamma(g_{(2)})\otimes(n'\otimes\gamma^{-1}(g_{(1)})\gamma^{-1}(h_{(1)}))=\\&=\sum_{(h),(g)}\gamma(h_{(2)})\otimes\gamma(g_{(2)})(n'\otimes\gamma^{-1}(g_{(1)})\gamma^{-1}(h_{(1)}))=\\&=\sum_{(h),(g)}\gamma(h_{(2)}\otimes(g_{(3)}))n'\otimes\gamma(g_{(2)})\gamma^{-1}(g_{(1)})\gamma^{-1}(h_{(1)})=\\&=\sum_{(h)}\gamma(h_{(2)})\otimes(gn'\otimes\gamma^{-1}(h_{(1)}))=\psi_m(h\otimes gn').\quad\square\end{aligned}$$

Положим $\psi(\langle h\otimes n'\rangle\otimes m)=\psi_m(h\otimes n')$; легко проверить, что $\varphi\psi=\mathrm{id}$, $\psi\varphi=\mathrm{id}$.

Следствие 2.7. *Если модуль $N\in H$-mod является (H,k)-проективным, то для любого $M\in A$-mod модуль $N\otimes M$ является (A,Λ)-проективным.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $N=\langle H\otimes N'\rangle$. Если предположить, что $H'=k$, то из предложения 2.6 следует, что A-модуль $\langle H\otimes N'\rangle\otimes M$ является (A,Λ)-проективным. $\square$

Контравариантный функтор $G:X\to\mathrm{Rings}$, действующий из некоторой категории X в категорию колец, называется *функтором Фробениуса* (см. [11]) если любому морфизму $i:\pi'\to\pi$ соответствует такой морфизм $i_*:G(\pi')\to G(\pi)$ в Rings, что $(ij)_*=i_*j_*$, когда ij имеет смысл и

$$i_*(i^*x\cdot y)=x\cdot i_*(y),\tag{2.9}$$

где $i^*=G(i):G(\pi)\to G(\pi')$, $x\in G(\pi)$, $y\in G(\pi')$.

Контравариантный функтор $F:X\to\mathrm{Ab}$, действующий в категорию коммутативных групп, называется *модулем Фробениуса* над функтором Фробениуса G, если $F(\pi)$ — $G(\pi)$-модуль для каждого $\pi\in X$ и, аналогично, существует морфизм $i_\#:F(\pi')\to F(\pi)$ такой, что

$$(ij)_\#=i_\#j_\#,\quad i_\#(y\cdot i^\#(a))=i_*(y)\cdot a,\quad i_\#(i^*(x)\cdot b)=x\cdot i_\#(b),\tag{2.10}$$

где $i^\#=F(i)$, $x\in G(\pi)$, $y\in G(\pi')$, $a\in F(\pi)$, $b\in F(\pi')$.

Пусть $\underline{P}(A)$ — категория конечно порожденных проективных A-модулей, $\underline{G}(H)$ — категория подалгебр Хопфа для H с мономорфизмами в качестве морфизмов.

Теорема 2.8. *Пусть $\chi : A \to A \otimes H$ — рассеченное расширение кокоммутативной алгебры Хопфа H с помощью коммутативной H-модульной алгебры Λ. Предположим, что*

$$H' \in \underline{P}(k), \quad H' \in \underline{P}(H''), \quad T(H') \in \underline{P}(H'') \tag{2.11}$$

для любых $H', H'' \in \underline{G}(H)$, $H'' \subseteq H'$. Тогда группа Гротендика $G_0^k(H')$ категории $\underline{P}^k(H')$ конечно порожденных k-проективных H-модулей индуцирует функтор Фробениуса на $\underline{G}(H)$ и алгебраические K-функторы $K_n(T(-))$ (см [13]) являются модулями Фробениуса над $G_0^k(H')$ на категории $\underline{G}(H)$.

Доказательство. 1. Сначала докажем, что $G_0^k(-)$ — функтор Фробениуса. Рассмотрим аддитивные функторы

$$\begin{aligned} I^* : \underline{P}^k(H) \to \underline{P}^k(H'), &\quad M \to \operatorname{Res}_{H'} M; \\ I_* : \underline{P}^k(H')\underline{P}^k(H) \to \underline{P}^k(H), &\quad M \to \operatorname{Ind}_H M = H \otimes_{H'} M; \\ I_M = M \otimes - : \underline{P}^k(H'') \to \underline{P}^k(H''); &\quad M' \to M \otimes M'. \end{aligned}$$

Поскольку эти функторы сохраняют точность коротких точных последовательностей в $\underline{P}^k(-)$, они определяют гомоморфизмы

$$i^* : G_0^k(H) \to G_0^k(H'), \quad i_* : G_0^k(H') \to G_0^k(H), \quad i(M) : G_0^k(H'') \to G_0^k(H'').$$

Определим умножение в $G_0^k(H'')$ формулой $[M] \cdot [M'] = i(M)(M')$. Ясно, что $G_0^k(H'')$ становится ассоциативным кольцом с единичным элементом $[k]$ и $(ij)_* = i_* j_*$, если ij имеет смысл. Услови-еЁ(2.9) эквивалентно

$$\langle H \otimes_{H'} (M \otimes M')\rangle \simeq M \otimes \langle H \otimes H'M'\rangle, \quad M \in H\text{-}\operatorname{mod}, \quad M' \in H'\text{-}\operatorname{mod},$$

что следует из (2.4).

2. Рассмотрим функторы $K_n(-)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Построим аддитивные функторы

$$\begin{aligned} I^{\#} : \underline{P}(T(H)) \to \underline{P}(T(H')), &\quad P \to \operatorname{Res}_{T(H')} P; \\ I_{\#} : \underline{P}(T(H')) \to \underline{P}(H), &\quad P \to \operatorname{Ind}_{T(H)} P = T(H) \otimes_{T(H')} P; \\ I_M = M \otimes - : \underline{P}(T(H'')) \to \underline{P}(T(H'')), &\quad P \to M \otimes P, \quad M \in \underline{P}^k(H''). \end{aligned}$$

Из условий теоремы следует, что $I_{\#}$ и $I^{\#}$ корректно определены, поэтому согласно следствию 2.4 модуль $M \otimes P$ является $T(H'')$-проективным и, следовательно, I_M корректно определен. Из [1] следует, что $I_{\#}$, $I^{\#}$ и I_M индуцируют гомоморфизмы

$$\begin{aligned} i_m^{\#} : K_m(T(H)) \to K_m(T(H')), &\quad m \geqslant 0; \\ i_{\#}^m : K_m(T(H')) \to K_m(T(H)), &\quad m \geqslant 0; \\ i_m(M) : K_m(T(H'')) \to K_m(T(H'')), &\quad m \geqslant 0. \end{aligned}$$

Определим действие $G_0^k(H'')$ на $K_m(T(H'')$ по формуле

$$[M] \cdot a = i_m(M)(a), \quad a \in K_m(T(H'')).$$

Это действие корректно определено, ибо если $0 \to M'' \to M \to M' \to 0$ — точная короткая последовательность в $P^k(H'')$, то последовательность

$$0 \to M'' \otimes P \to M \otimes P \to M' \otimes P \to 0$$

точна в $P(T(H''))$. Поэтому из [1] и предложения 2.2 следует, что $i_m(M) = i_m(M'') + i_m(M')$. Далее, ясно, что $[M](a_1 + a_2) = [M]a_1 + [M]a_2$. С другой стороны, поскольку кодействие коассоциативно, то существует изоморфизм A-модулей $M_1 \otimes (M_2 \otimes P) \simeq (M_1 \otimes M_2) \otimes P$, откуда следует (см. [1]), что $i(M_1)i(M_1) = i(M_1 \otimes M_2)$; следовательно, это действие кольца на коммутативной группе.

Условие $(ij)_{\#}^m = (i)_{\#}^m (j)_{\#}^m$ следует из изоморфизма

$$\langle T(H) \otimes T(H')\langle T(H') \otimes_{T(H'')} P\rangle\rangle \simeq \langle T(H) \otimes_{T(H'')} \otimes P\rangle;$$

согласно [1], заключаем, что (2.9) следует из предложений 2.6 и 2.5. □

Следствие 2.9. *Пусть $k \in k_0$-Alg и $H \simeq k \otimes_{k_0} H$, где H — k_0-алгебра Хопфа. Для рассеченного расширения H определим с помощью Λ функтор $G(H)$ следующим образом:* $T_0(H') = \Lambda\#_\sigma(k \otimes k_0)H$. *Предположим, что для любых $H', H'' \in \underline{G}(H)$, $H' \subseteq H''$ выполняются следующие условия:*

$$H' \in \underline{P}(k_0), \quad H' \in \underline{P}(H''), \quad T_0(H') \in \underline{P}(T_0(H')).$$

Тогда $G_0^{k_0}(-)$ — функтор Фробениуса и $K_n(T_0(-))$ — модуль Фробениуса над $G_0^{k_0}(-)$ в категории $\underline{G}(H)$.

Доказательство. Функтор $\underline{P}^{k_0}(H') \to \underline{P}^k(H')$, $M \to k \otimes_{k_0} M$, $H' \in \underline{G}H)$ определяет морфизм функторов Фробениуса $G_0^{k_0}(H') \to G_0^k(H')$. Таким образом, следствие вытекает из теоремы 2.8. □

До конца этого раздела предполагаем, что k — поле.

Пусть C — k-коалгебра, $U, V \subseteq C$ — ее подпространства. Обозначим символом $U \wedge V$ (см. [9]) подпространство $U \wedge V = \Delta^{-1}(U \otimes C + C \otimes V)$. Если $U = V$, то положим $U^{(0)} = U$, $U^{(1)} = U \wedge U$, $U^n = U^{(n-1)} \wedge U$, $U^\infty = \coprod_n U^{(n)}$. Если $U, V \subseteq C$ — подкоалгебры, то $U \wedge V$ — также подкоалгебра (см. [9]). Если $G \subseteq H$ — подалгебра Хопфа и $U, V \subseteq G$ — G-модули, то $U \wedge V$ — G-модуль.

Предложение 2.10. *Пусть $G \subseteq H$ — алгебры Хопфа, $C \subseteq G$ — подкоалгебра и G-модуль. Тогда для любого рассеченного расширения H модуль $T(G \wedge C)$ является свободным $T(G)$-модулем.*

Доказательство. Так как $C \subseteq G \wedge C$, имеем $T(C) \subseteq T(G \wedge C)$. Предложение 2.10 верно, потому что из предложения 2.2(3) следует, что $T(G \wedge C)$ и $T(C)$ — $T(G)$-модули. Так как $G \wedge C$ — подкоалгебра, имеем

$$\Delta(G \wedge C) \subseteq G \otimes (G \wedge C) + (G \wedge C) \otimes C.$$

Следовательно,

$$\chi T(G \wedge C) = (\mathrm{id} \otimes T)\Delta(G \wedge C) \subseteq G \otimes T(G \wedge C) + (G \wedge C) \otimes T(C).$$

Положим $\pi : T(G \wedge C) \to T(G \wedge C)/T(C) = N$. Тогда $\pi\chi T(G \wedge C) \subseteq G \otimes N$. Так как $\pi\chi(T(C)) = 0$, видим, что $\pi\chi$ индуцирует структуру G-комодуля на N с помощью отображения $\omega : N \to G \otimes N$. Ясно, что структуры $T(G)$-модуля и G-комодуля на N совместимы, как в (2.5). Поэтому из леммы 2.1 следует, что $N \simeq T(G) \otimes_\Lambda P(N)$. Из перестановочности функторов $\Lambda \otimes -$ и χ следует, что $P(N) \simeq \Lambda \otimes P((G \wedge C)/C)$. Следовательно, N — свободный $T(G)$-модуль. □

Ассоциативная алгебра называется *заостренной алгеброй* (см. [9]), если любой из ее максимальных двусторонних идеалов конечной коразмерности имеет коразмерность 1. Коалгебра C является заостренной, если ее двойственная алгебра C^* заостренная. Алгебра Хопфа является заостренной, если она заострена как коалгебра.

Теорема 2.11. *Предположим, что имеется рассеченное расширение кокоммутативной заостренной алгебры Хопфа и $G \subseteq H$ — подалгебра Хопфа. Тогда $T(H)$ — свободный двусторонний $T(H)$-модуль.*

Доказательство. Ясно, что множества группово-подобных элементов H и G (и, следовательно, $\pi = \{h \in H \mid \Delta(h) = h \otimes h\}$, $\pi' = \{g \in G \mid \Delta(g) = g \otimes g\}$) являются группами. Пусть X — множество представителей π с помощью π'. Положим $C = G\pi$. Ясно, что C — коалгебра. При предположениях теоремы модуль H свободен как G-модуль (см. [14]). Мы используем следующие результаты из доказательства Редфорда: $C^\infty = H$, $C = \bigoplus\limits_{x \in X} Gx$ и вложение $Gx \wedge C^{(n-1)} \to C^{(n)}$ индуцирует G-изоморфизм

$$\bigoplus_{x \in X}((Gx \wedge C^{(n-1)})/C^{(n-1)}) \xrightarrow{f_n} C^{(n)}/C^{(n-1)}, \quad n \geqslant 0.$$

Тогда

$$\bigoplus_{x \in X}(T(Gx \wedge C^{(n-1)})/T(C^{(n-1)})) \xrightarrow{T(f_n)} T(C^{(n)})/T(C^{(n-1)}), \quad n \geqslant 0, \tag{2.12}$$

— $T(G)$-изоморфизм, так как $\Lambda\otimes -$ перестановочно с конструкцией фактормодуля и $T(f_n)$ — морфизм $T(G)$-модулей. Далее, $Cx = C$ и, следовательно, $Gx\wedge C^{(n-1)} = Gx\wedge C^{(n-1)}x = (G\wedge C^{(n-1)})x$, и умножение на x индуцирует изоморфизм $T(G)$-модулей

$$T(Gx\wedge C^{(n-1)})/T(C^{(n-1)}) \simeq T(G\wedge C^{(n-1)})/T(C^{(n-1)}). \tag{2.13}$$

Из предложения 2.10 следует, что правая часть (2.13) — свободный $T(G)$-модуль; следовательно, левая часть (2.12) — также свободный $T(G)$-модуль. Поэтому $T(C^{(n)})/T(C^{(n-1)})$, $n\geqslant 0$, — свободные $T(G)$-модули. Так как $C^\infty = H$, имеем $\cup_n T(C^{(n)} = T(H)$. Комбинируя последние утверждения, получим, что $T(H)$ — свободный $T(G)$-модуль. □

Отметим, что любая коммутативная алгебра A над алгебраически замкнутым полем заострена. Действительно, пусть I — максимальный идеал конечной коразмерности алгебры A, $a\in A\backslash I$. Так как $\dim A/I < \infty$, существует такое $f\in k[x]$, что $f(a) = 0$. Пусть $f = f_1 f_2$. Тогда $f(a) = f_1(a)f_2(a) = 0$ и $f_1(a)\in I$ или $f_2(a)\in I$, так как I максимален. Следовательно, мы можем предположить, что $\exists q$, $q(a)\in I$, где q неприводим. Так как K — алгебраически замкнутое поле, имеем $q = x-\lambda$ и, следовательно, $\dim A/I = 1$. Отсюда следует, что любая кокоммутативная алгебра над алгебраически замкнутым полем является заостренной.

Теорема 2.12. *Пусть H — алгебра Хопфа над полем k. Возьмем рассеченное расширение H. Тогда G_0 — функтор Фробениуса и $K_n(T(-))$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ — модули Фробениуса над $G_0(-)$ на категории $\underline{G}(H)$.*

Доказательство. Пусть $F\supseteq k$ — алгебраически замкнутое расширение поля k. Из дальнейшего следует, что $F\otimes_k H$ заострена. Так как $H'\subseteq H$ — алгебра Хопфа, получаем, что

$$F\otimes T(H)\simeq (F\otimes\Lambda)\#_{\otimes\sigma}(F\otimes H) = T(F\otimes H)$$

— свободный $F\otimes T(H') = T(F\otimes H')$-модуль согласно теореме 2.11. Но в этом случае $T(H)$ также будет свободным $T(H')$-модулем. Следовательно, все условия теоремы 2.8 выполняются, так как подалгебра Хопфа любой заостренной алгебры Хопфа также является заостренной алгеброй Хопфа (см. [12]). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А. И. Немытов* Функторы $K_n(R\pi)$ как фробениусовы модули над функтором $G_0^R(R\pi)$// Усп. мат. наук. — 1973. — *28.* — С. 187–188.
2. *Пачуашвили В. А.* Когомологии в моноидальных категориях// Изв. АН Груз. ССР. — 1982. — *106.* — С. 485–488.
3. *Раквиашвили Г. Г.* Обобщение теоремы Артина для полупростых алгебр и индуктивные теоремы для порядков и скрещенных групповых колец// Изв. АН Груз. ССР. — 1979. — *96.* — С. 25–28 (in Russian).
4. *Раквиашвили Г. Г.* Индуктивные теоремы и проективные модули над скрещенными групповыми кольцами// Тр. Мат. ин-та им. А. Размадзе. — 1982. — *3.* — С. 92–107.
5. *Раквиашвили Г. Г.* О скрещенной обертывающей алгебре p-алгебры Ли// Изв. АН ГрузССР. — 1979. — *96*, № 1. — С. 265–268.
6. *Раквиашвили Г. Г.* О K-теории скрещенного произведения коммутативной алгебры и алгебры Хопфа// Тр. Мат. ин-та им. А. Размадзе. — 1986. — *5.* — С. 79–95.
7. *Bartels A., Luck W.* Induction theorems and isomorphism conjectures for K- and L-theory// Forum Math. — 2007. — *19.* — P. 1–28.
8. *Gersten S. M.* On the functor K_2// J. Algebra. — 1971. — *17.* — P. 212–237.
9. *Heyneman R. G., Radford D. E.* Reflexivity and coalgebras of finite type// J. Algebra. — 1974. — *28.* — P. 215–246.
10. *Kawakubo K.* Induction theorems for equivariant K-theory and J-theory// J. Math. Soc. Jpn. — 1986. — *38.* — P. 173–198.
11. *Lam T. Y.* Induction theorems for Grothendieck groups and Whitehead groups of finite groups// Ann. Sci. Ec. Norm. Super. — 1968. — *1.* — P. 91–148.
12. *McConnel J. G., Sweedler M. E.* Simplicity of smash products// Proc. London Math. Soc. — 1971. — *23.* — P. 251–266.

13. *Quillen D.* Higher algebraic K-Theory, I// Lect. Notes Math. — 1972. — *341.* — P. 85–147.
14. *Radford D. E.* Pointed Hopf algebras are free over Hopf subalgebras// J. Algebra. — 1977. — *45.* — P. 266–273.
15. *Rakviashvili G.* On algebraic K-functors of crossed group rings and its applications// Tbilisi Math. J. — 2018. — *11.* — P. 1–15.
16. *Swan R. G.* Induced representations and projective modules// Ann. Math. — 1960. — *71.* — P. 552–578.
17. *Swan R. G.* Nonabelian homological algebra and K-theory// Proc. Symp. Pure Math. — 1970. — *17.* — P. 88–123.
18. *Sweedler M.* Cohomology of algebras over Hopf algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 1968. — *133.* — P. 205–239.
19. *Wilson S. M. J.* K-Theory for twisted group rings// Proc. London Math. Soc. — 1974. — *29.* — P. 257–271.

Ракviашвили Г.
Государственный университет Ильи (Чавчавадзе), Тбилиси, Грузия
E-mail: giorgi.rakviashvili@iliauni.edu.ge

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 121–131
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-121-131

УДК 512.542, 512.544

ПОДГРУППЫ ВИЛАНДТА НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

© 2020 г. Х. Б. ШЕЛАШ, А. Р. АШРАФИ

Аннотация. Подгруппа Виландта конечной группы G определяется как $w(G) = \bigcap_{H \lhd\lhd G} N_G(H)$. В статье эта подгруппа вычислена для некоторых конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, подгруппа Виландта, субнормальная подгруппа.

WIELANDT SUBGROUPS OF CERTAIN FINITE GROUPS

© 2020 H. B. SHELASH, A. R. ASHRAFI

Abstract. The Wielandt subgroup of a finite group G is defined as $w(G) = \bigcap_{H \lhd\lhd G} N_G(H)$. In this paper, this subgroup is computed for certain finite groups.

Keywords and phrases: finite group, Wielandt subgroup, subnormal subgroup.

AMS Subject Classification: 20E07, 20E34, 20F16

1. Основные определения и основания. На протяжении статьи все группы предполагаются конечными; определения следуют [7,8]. Вычисления производились с помощью GAP (см. [14]). В этом разделе приведены основные понятия и факты, используемые далее.

Группа диэдра D_{2n}, полудиэдральная группа SD_{2^n}, дициклическая группа T_{4n} и три других класса однопараметрических групп, называемых U_{6n}, V_{8n} и $H(n)$, определяются следующим образом:

(1) $D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = e,\ bab = a^{-1} \rangle$;
(2) $SD_{2^n} = \langle a, b \mid a^{2^{n-1}} = b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^{-1+2^{n-2}} \rangle$;
(3) $T_{4n} = \langle a, b \mid a^{2n} = e,\ a^n = b^2,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$;
(4) $U_{6n} = \langle a, b \mid a^{2n} = b^3 = e,\ bab = a \rangle$;
(5) $V_{8n} = \langle a, b \mid a^{2n} = b^4 = e,\ aba = b^{-1},\ ab^{-1}a = b \rangle$;
(6) $H(n) = \langle a, b, c \mid a^{2^{n-2}} = b^2 = c^2 = 1,\ [a,b] = [b,c] = 1,\ c^{-1}ac = ab \rangle$.

Отметим некоторые важные свойства этих классов групп, используемые в дальнейшем. Группа диэдра D_{2n} имеет порядок $2n$ и ее центр $Z(D_{2n})$ тривиален тогда и только тогда, когда n нечетно; если n четно, то $Z(D_{2n}) = \langle a^n \rangle$. Полудиэдральная группа SD_{2^n} — это 2-группа порядка 2^n. Если k четно, то $a^k b = ba^{-k}$, а для нечетных k имеем $a^k b = ba^{2^{n-2}-k}$. Это доказывает, что

$$ab = ba^{2^{n-2}-1}, \quad a^2 b = ba^{-2}, \quad a^3 b = ba^{2^{n-2}-3}, \quad \dots .$$

Кроме того, $Z(SD_{2^n}) = \langle a^{n-2} \rangle$. Дициклическая группа T_{4n} имеет порядок $4n$ и центр $Z(T_{4n}) = \langle a^n \rangle$. Кроме того, для положительного целого числа k имеем $a^k b = ba^{-k}$. Группа U_{6n} имеет порядок $6n$ и $Z(U_{6n}) = \langle a^2 \rangle$. Легко видеть, что $U_{6n}/Z(U_{6n}) \cong S_3$. Для положительного целого числа k имеем $a^k b^j = b^j a^k$, если k четно; если k нечетно, то $a^k b^j = b^{-j} a^k$. Группа V_{8n} имеет порядок $8n$, причем для четных положительных целых чисел k имеем $a^k b^j = b^j a^{-k}$. Если k

Исследование А. Р. Ашрафи выполнено при частичной поддержке университета Кашана (грант № 364988/09).

нечетно, то $a^kb^j = b^{-j}a^{-k}$. Как следствие, центр группы V_{8n} может порождаться b^2, если n нечетно. В случае, когда n четно, имеем $Z(V_{8n}) = \langle a^n, b^2\rangle$. Здесь стоит отметить, что группы U_{6n} и V_{8n} были впервые введены в знаменитой книге Джеймса и Либека [7], в которой эти группы изучались только в случае, когда n нечетно. Случай, когда n четно, рассмотрен в [6].

Группа $H(n)$ была введена в [1]. Для представления этой группы заметим, что $ab = ba$, $bc = cb$ и $a^lc = ca^l$ для всех четных l. Так как для нечетных i имеем $a^ic = ca^ib$, можем заключить, что $cb = bc$. С помощью этого рассуждения легко видеть, что центр этой группы равен $Z(H(n)) = \langle a^2, b\rangle \cong C_{2^{n-3}} \times C_2$.

Пусть U — конечная группа. Подгруппа H группы U называется *субнормальной* (обозначение $H \lhd\lhd U$), если H — такой член конечного ряда подгрупп группы U, что $H = H_d \trianglelefteq H_{d-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_0 = U$. Хорошо известно, что множество всех субнормальных подгрупп группы G образует подрешетку решетки всех подгрупп (см. [15]). Более того, каждая подгруппа нильпотентной группы субнормальна (см. [10]). Группа G называется T-группой, если каждая ее субнормальная подгруппа нормальна. Легко доказать, что G является T-группой тогда и только тогда, когда нормальность — транзитивное отношение для подгрупп группы G. Подгруппа Виландта группы G определяется следующим образом (см. [16]):

$$W(G) = \bigcap_{H\lhd\lhd G} N_G(H).$$

Таким образом, группа G является T-группой тогда и только тогда, когда $w(G) = G$.

Поскольку подгруппа Виландта конечной группы G является характеристической подгруппой группы G, можно построить нисходящий нормальный ряд группы G, полагая $w_0(G) = \{e\}$, $w_1(G) = w(G)$, и для любого целого числа $i \geqslant 2$, пусть $w_i(G)$ — такая подгруппа G, что

$$\frac{w_i(G)}{w_{i-1}(G)} = w\left(\frac{G}{w_{i-1}(G)}\right).$$

Так как G конечна, существует такое наименьшее целое число n, что $w_n(G) = G$, называемое длиной Виландта группы G.

Предложение 1. *Пусть G — конечная группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1. *G является разрешимой T-группа тогда и только тогда, когда $w(H) = H$ для любой подгруппы H группы G* (см. [10]).
2. *Для любого целого числа i, $i \geqslant 0$, имеем*

$$w_{i+1}(G) = \bigcap \Big\{ N_G(H) \mid w_i(G) \leqslant H \lhd\lhd G \Big\}$$

(см. [5]).

Подгруппа H группы G называется *слабо нормальной*, если из $H^g \leqslant N_G(H)$ следует, что $g \in N_G(H)$ (см. [9]). Если для всех $g \in G$, $N_G(H) \cap H^g \leqslant H$, то подгруппа H называется $\mathbb{H}$-подгруппой G (см. [3]).

Пусть G — конечная группа порядка $2^kp_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$, где $2 < p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ и $c_0 = 1 < c_1 < c_2 < \cdots < c_t$ — все нечетные делители числа $|G|$. Определим *таблицу порядков* группы G как матрицу $OT(G) = [a_{ij}]$, в которой столбцы помечены степенями 2, строки — нечетными делителями $|G|$, $a_{1j} = 2^{j-1}$ и $a_{ij} = 2^{j-1}c_{i-1}$, где $i \neq 1$. Легко видеть, что эта таблица имеет в точности $d\left(n/2^k\right)$ строк и $k+1$ столбцов и, следовательно, эта матрица содержит $(k+1)d\left(n/2^k\right)$ элементов (см. [11, 12]).

Из элементарной теории чисел известно, что, если $x = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s}$ — разложение на простые сомножители положительного целого числа x, то

$$\tau(x) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_s+1), \quad \sigma(x) = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_s^{a_s+1}-1}{p_s-1},$$

где $\tau(x)$ и $\sigma(x)$ — число и сумма всех делителей x соответственно.

Таблица 1. Порядки подгрупп в случае, когда $|G| = n = 2^r p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$.

	j	1	2	3	$\dots$	$r+1$
i		1	2	4	$\dots$	2^r
1	$c_0 = 1$	1	2	4	$\dots$	2^r
2	c_1	c_1	$2c_1$	$4c_1$	$\dots$	$2^r c_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$t+1$	c_t	c_t	$2c_t$	$4c_t$	$\dots$	$2^r c_t$

2. Основные результаты. В этом разделе будет вычислена подгруппа Виландта для групп D_{2n}, SD_{2^n}, T_{4n}, U_{6n}, V_{8n} и $H(n)$. Для краткости будем использовать обозначение $sn(G)$ для числа субнормальных подгрупп конечной группы G.

Согласно [4], все подгруппы группы диэдра D_{2n} имеют одну из следующих форм:

(i) подгруппа $\langle a^i \rangle \simeq C_{n/i}$, где $i \mid n$,

(ii) подгруппа $\langle a^i, a^j b \rangle \simeq D_{2n/i}$, где $i \mid n$ и $1 \leqslant j \leqslant i$.

Так как каждая нормальная подгруппа субнормальна, подгруппы первого типа субнормальны.

Лемма 2. *Пусть $n = 2^r m$ и $2 \nmid m$. Подгруппы $\langle a^i, a^j b \rangle$ группы D_{2n} субнормальны тогда и только тогда, когда $i = 2^k$, $1 \leqslant k \leqslant r$ и $1 \leqslant j \leqslant i$.*

Доказательство. Пусть $n = 2^k$ и $k > 0$. Тогда

$$\langle a^{2^k},\ a^j b \rangle \trianglelefteq \langle a^{2^{k-1}},\ a^j b \rangle \trianglelefteq \langle a^{2^{k-2}},\ a^j b \rangle \trianglelefteq \dots \trianglelefteq \langle a^2,\ a^j b \rangle \trianglelefteq D_{2n}$$

— субнормальный ряд группы D_{2n}. □

Лемма 3. *Пусть $n = 2^r m$, где m нечетно. Число субнормальных подгрупп группы D_{2n} равно $Sn(D_{2n}) = \tau(n) + 2^{r+1} - 1$.*

Доказательство. Если n нечетно, то, очевидно, субнормальные подгруппы — это все подгруппы циклической подгруппы порядка n и самой группы, а если n четно, то по лемме 2 субнормальны только подгруппы циклической группы порядка n и подгруппы вида $\langle a^{2^k},\ a^j b \rangle$, где $k > 0$ и $1 \leqslant j \leqslant 2^k$. □

В следующей лемме вычислен нормализатор каждой подгруппы H группы D_{2n}.

Лемма 4. *Пусть $H = \langle a^d,\ a^j b \rangle$, $1 \leqslant j \leqslant d$, — подгруппа группы D_{2n}. Справедливы следующие утверждения:*

(1) *$N_{D_{2n}}(H) = H$ тогда и только тогда, когда d нечетно;*

(2) *$N_{D_{2n}}(H) = \langle a^{d/2},\ a^j b \rangle$ тогда и только тогда, когда d четно.*

Доказательство. Если d нечетно, то $N_{D_{2n}}(H) = H$, и если d четно, то $N_{D_{2n}}(H) = \langle a^{d/2},\ a^j b \rangle$, так как

$$a^{d/2} \langle a^d, a^j b \rangle a^{-d/2} = \langle a^d,\ a^{j+d} b \rangle = \langle a^d, a^j b \rangle.$$ □

Теперь мы можем вычислить подгруппу Виландта группы диэдра.

Теорема 5. *Пусть $n = 2^r m$, где m нечетно. Тогда подгруппа Виландта группы D_{2n} вычисляется следующим образом:*

$$w(D_{2n}) = \begin{cases} \langle a^{2^{r-1}} \rangle, & 2 \mid n, \\ D_{2n}, & 2 \nmid n. \end{cases}$$

Доказательство. По лемме 2, если n — нечетное число, то все субнормальные подгруппы нормальны и, следовательно, $w(D_{2n}) = D_{2n}$. Пусть $n = 2^r m$. Тогда наименьший нормализатор подгруппы типа $\langle a^{2^k}, a^j b \rangle$ — это $\langle a^{2^{r-1}}, a^j b \rangle$. Поэтому $w(D_{2n}) = D_{2n} \cap \langle a^{2^{r-1}}, a^j b \rangle = \langle a^{2^{r-1}} \rangle$. □

Следствие 6. *Группа диэдра D_{2n} является T-группой тогда и только тогда, когда n — нечетное число.*

Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого $g \in G$ существует такое $k \in \langle H \cup H^g \rangle$, что $H^k = H^g$. Подгруппа H *псевдонормальна* в G, если $N_G(L) \leqslant N_G(H)$ для любой подгруппы L группы G, удовлетворяющей условию $L \leqslant H \leqslant N_G(L)$. Баллистер-Болинчес и Ромеро (см. [2, теорема A]) доказали, что если G — T-группа, то любая подгруппа $H \leqslant G$ пронормальна и псевдонормальна в G.

Следствие 7. *Пусть n — нечетное число. Тогда*

(1) *каждая подгруппа группы D_{2n} слабо нормальна*;

(2) *каждая подгруппа группы D_{2n} является $\mathbb{H}$-подгруппой.*

Доказательство. Согласно следствию 6 каждая подгруппа группы D_{2n} является T-группой. Если $H \trianglelefteq D_{2n}$, то H слабо нормальна и является $\mathbb{H}$-подгруппой. Выберем подгруппу $H = \langle a^d, a^j b\rangle$, не являющуюся нормальной и удовлетворяющую условиям $2 \nmid d$ и $1 \leqslant j \leqslant d$. Тогда по лемме 4 имеем $N_{D_{2n}}(H) = H$ и, следовательно, H слабо нормальна. Чтобы доказать (2), отметим, что $\langle a^d, a^k b\rangle^g \cap \langle a^d, a^k b\rangle = \langle a^d\rangle$ для всех $g \in D_{4n}$. Поэтому каждая подгруппа является $\mathbb{H}$-подгруппой. $\square$

Следствие 8. *$wl(D_{2n}) = r$, где $n = 2^r m$, $r \geqslant 0$ и m нечетно.*

Доказательство. Пусть $2 \mid n$. Тогда по теореме 5, $w_1(D_{2n}) = w(D_{2n}) = \langle a^{2^{r-1}}\rangle$. С помощью предложения 1 продолжим это рассуждение, чтобы доказать, что $w_{2(D_{2n})} = \langle a^{2^{r-2}}\rangle, \ldots,$ $w_{r-1}(D_{2n}) = \langle a^2\rangle$ и, наконец, $w_{r(D_{2n})} = D_{2n}$, что и требовалось. $\square$

Согласно [11, 12], дициклическая группа имеет подгруппы следующих двух типов:

(i) подгруппы $\langle a^d\rangle$, где $d \mid 2n$; эти подгруппы нормальны в дициклической группе;

(ii) подгруппы $\langle a^d, a^j b\rangle$, являющиеся субнормальными подгруппами при $d = 2^k$, $k \geqslant 0$.

Лемма 9. *Пусть H — подгруппа группы T_{4n}, d — делитель $2n$ и $n = 2^r m$, где m нечетно. Тогда*

(1) *все подгруппы $\langle a^d\rangle$ нормальны в T_{4n}*;

(2) *$N_{T_{4n}}(\langle a^{2^k}, a^j b\rangle) = \langle a^{2^{k-1}}, a^j b\rangle$, где d четно*;

(3) *$N_{T_{4n}}(\langle a^d, a^j b\rangle) = \langle a^d, a^j b\rangle$, где d нечетно.*

Доказательство. Очевидно, что все подгруппы первого типа нормальны в T_{4n} и, следовательно, (1) выполняется. Рассмотрим подгруппу $\langle a^d, a^k b\rangle$ с четным целым числом d. Если $a^m b \in T_{4n}$, то

$$a^m b \langle a^d, a^k b\rangle b^{-1} a^{-m} = \langle a^d, a^{k+2m} b\rangle = \langle a^d, a^k b\rangle$$

только в случае, когда $m = k$. С другой стороны,

$$a^m \langle a^d, a^k b\rangle a^{-m} = \langle a^d, a^{k+2m} b\rangle = \langle a^d, a^k b\rangle$$

в случае $m = d/2$. Следовательно, $a^{d/2} \in N_{T_{4n}}(\langle a^d, a^k b\rangle)$. Если d нечетно, то $a^{2m} \neq a^d$ и, следовательно, $N_{T_{4n}}(\langle a^d, a^k b\rangle) = \langle a^d, a^k b\rangle$. $\square$

Следствие 10. *Пусть $n = 2^r m$, где m нечетно. Число субнормальных подгрупп дициклической группы задается соотношением $Sn(T_{4n}) = \tau(2n) + 2^{r-1} - 1$.*

Доказательство. Очевидно,

$$\langle a^{2^r}, a^j b\rangle \trianglelefteq \langle a^{2^{r-1}}, a^j b\rangle \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \langle a^2, a^j b\rangle \trianglelefteq T_{4n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant d,$$

— субнормальный ряд группы T_{4n}, состоящий только из субнормальных подгрупп второго типа. Таким образом, $Sn(T_{4n}) = \tau(2n) + 2^{r-1} - 1$. $\square$

Теперь мы можем вычислить подгруппу Виландта группы T_{4n}.

Теорема 11. *Если n нечетно, то $w(T_{4n}) = T_{4n}$, и если n четно, то $w(T_{4n}) = \langle a^{2^{r-1}}\rangle$.*

Для доказательства достаточно применить лемму 9 и следствие 10.

Следствие 12. *Группа T_{4n} является T-группой тогда и только тогда, когда n — нечетное число.*

Доказательство. Если T_{4n} — T-группа, то из леммы 9 следует, что n нечетно. Если n нечетно, то все субнормальные подгруппы группы T_{4n} нормальны и, следовательно,

$$w(T_{4n}) = \bigcap_{H_i \trianglelefteq\trianglelefteq T_{4n}} N_{T_{4n}}(H_i) = T_{4n}. \qquad \square$$

Следствие 13. *Если $n = 2^r m$, m нечетно и $r \geqslant 1$, то $wl(T_{4n}) = r$.*

Доказательство. Пусть $n = 2^r m$ — четное целое число. Тогда $w_0(T_{4n}) = \{e\}$, $w_1(T_{4n}) = \langle a^{2^{r-1}} \rangle$ — подгруппа порядка $2^2 m$, и согласно предложению 1

$$w_2(T_{4n}) = \bigcap \{N_{T_{4n}}(H) \mid w_1(T_{4n}) \leqslant H \lhd\lhd T_{4n}\} = \langle a^{2^{r-2}} \rangle$$

— подгруппа порядка $2^3 m$. Рассуждение, аналогичное приведенному выше, показывает, что

$$w_r(T_{4n}) = \bigcap \{N_{T_{4n}}(H) \mid w_{(r-1)}(T_{4n}) = \langle a^2 \rangle \leqslant H \lhd\lhd T_{4n}\} = T_{4n},$$

что и требовалось. $\square$

Следствие 14. *Пусть n нечетно. Тогда*

(1) *каждая подгруппа группы T_{4n} слабо нормальна*;

(2) *каждая подгруппа группы T_{4n} является $\mathbb{H}$-подгруппой.*

Доказательство. Если $2 \nmid n$, то, согласно следствию 12), все подгруппы группы T_{4n} циклические или изоморфны группе $T_{4n/d}$, где $d \mid n$. Следовательно, каждая подгруппа группы T_{4n} является T-группой. Все нормальные подгруппы группы T_{4n}, очевидно, слабо нормальны и являются $\mathbb{H}$-подгруппами. Остальные подгруппы имеют вид $\langle a^d, a^k b \rangle$, где $2 \nmid d$ и $1 \leqslant k \leqslant d$. Эти подгруппы являются самонормализующими и, следовательно, $N_{T_{4n}}(\langle a^d, a^k b \rangle) = \langle a^d, a^k b \rangle$. Теперь легко видеть, что если $\langle a^d, a^k b \rangle^g \leqslant \langle a^d, a^k b \rangle$, то $g \in N_{T_{4n}}(\langle a^d, a^k b \rangle)$ и, следовательно, это $\mathbb{H}$-подгруппа, так как $\langle a^d, a^k b \rangle^g \cap \langle a^d, a^k b \rangle = \langle a^d \rangle$ для всех $g \in T_{4n}$. $\square$

Далее изучим группу U_{6n} порядка $6n$, где $n = 2^r 3^k p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$. Согласно [12, § 2.3], эта группа имеет четыре типа подгрупп следующего вида:

(a) $G_1 = \langle a^d \rangle$, где $d \mid 2n$;

(b) $G_2 = \langle a^d, b \rangle$, где $d \mid 2n$;

(c) $G_3 = \langle a^d b \rangle$, где $d \mid 2n$ и $2 \cdot 3^k \nmid d$;

(d) $G_4 = \langle a^d b^2 \rangle$, где $d \mid 2n$ и $2 \cdot 3^k \nmid d$.

Согласно [11], $\langle a^i, b \rangle = \langle a^i, b^2 \rangle$, и если $n = 2^r \cdot 3^k \cdot m$, $6 \nmid m$ и $2 \cdot 3^k \mid i$, то

$$(a^{2 \cdot 3^k})^{2^r m} = a^{2^{r+1} \cdot 3^k \cdot m} b^{2^r m} = a^{2n} b^{2^r \cdot m} = b^{2^r \cdot m} = b \text{ или } b^{-1}.$$

Следовательно, $\langle a^i b \rangle = \langle a^i, b \rangle = \langle a^i, b^2 \rangle = \langle a^i b^2 \rangle$. Это доказывает, что в этом частном случае подгруппы типов (b), (c), (d) одни и те же. В этом причина того, почему в случаях (c) и (d) мы усилили условие, что $2 \cdot 3^k \nmid i$. С другой стороны, первый тип подгрупп нормален, когда d четно. Второй тип подгрупп нормален для всех делителей d числа $2n$. В дальнейшем мы используем обозначение x^- вместо x^{-1}.

Лемма 15. *Если $2 \mid k \mid d$, то $\langle a^d b^\pm \rangle \trianglelefteq \langle a^k b^\mp \rangle$.*

Доказательство. Легко видеть, что если r четно, то $a^r b^\pm = b^\pm a^r$. Теперь доказательство следует из того факта, что $a^k b^\mp \langle a^d b^\pm \rangle (a^k b^\mp)^{-1} = \langle a^k b^\mp a^d b^\pm b^\pm a^{-k} \rangle = \langle a^d b^\pm \rangle$. $\square$

Если $2 \nmid d$, то подгруппа первого типа $\langle a^d \rangle$ не субнормальна, потому что

$$b^\pm \langle a^d \rangle b^\mp = \langle b^\pm a^d b^\mp \rangle = \langle a^d b^\pm \rangle \text{ или } \langle a^d b^\pm \rangle.$$

Таблица 2. Число субнормальных подгрупп в случае $|G| = 6n = 2^{r+1}3^{k+1} \prod\limits_{1\leqslant d\leqslant s} p_d^{a_d}$. Здесь $\delta \mid m$, $\xi \mid 3^j m, 1 \leqslant j \leqslant k$ и $\varrho \mid 3^{k+1}m$.

i	1	$\cdots$	2^r	2^{r+1}
δ	1	$\cdots$	1	0
ξ	4	$\cdots$	4	1
ϱ	1	$\cdots$	1	1

Для третьего и четвертого типов подгрупп существует нормальный ряд

$$\langle a^{2^l 3^j \delta} b^{\pm}\rangle \trianglelefteq \langle a^{2^{l-1} 3^j \delta} b^{\mp}\rangle \trianglelefteq \langle a^{2^{l-2} 3^j \delta} b^{\pm}\rangle \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \langle a^{2 3^{j+1} \delta}, b\rangle \trianglelefteq U_{6n},$$

где $r+1 \leqslant l \leqslant 1, 0 \leqslant j \leqslant k-1$ и $\delta \mid m$. Это показывает, что число субнормальных подгрупп этих типов равно $2\tau\,(n/3)$.

Лемма 16. *Число всех субнормальных подгрупп группы U_{6n} дается следующими формулами*:
1) $Sn(U_{6n}) = \tau(2n) + \tau(n) + 2\tau\,(n/3)$, *если* $3 \mid n$;
2) $Sn(U_{6n}) = \tau(2n) + \tau(n)$, *если* $3 \nmid n$.

Доказательство. Пусть $n = 2^r 3^k m$. Очевидно, что имеется $\tau(2n)$ подгрупп первого типа. Так как $\langle a^d\rangle$ не субнормальна, $2 \nmid d$, она имеет $\tau(n)$ нормальных подгрупп. Кроме того, имеется $\tau(2n)$ подгрупп второго типа и, наконец, имеется $2\tau(n/3)$ субнормальных подгрупп третьего и четвертого типов. Отметим, что, если $n = 2^r m$ и $3 \nmid m$, то, по определению, $\tau\,(n/3) = 0$. $\square$

Лемма 17. *Выполняются следующие утверждения*:
1) $N_{U_{6n}}(\langle a^i b^j\rangle) = \langle a^2, b\rangle$, *если i четно и $j = 1, 2$*;
2) $N_{U_{6n}}(\langle a^i b^j\rangle) = \langle ab^j\rangle$, *если i нечетно и $j = 1, 2, 3$*.

Доказательство. Сначала предположим, что $H = \langle a^i b^j\rangle$, где $j = 1, 2$ и i четно. Так как $Z(U_{6n}) = \langle a^2\rangle$ — подгруппа $N_{U_{6n}}(H)$, $bHb^{-1} = H$ и $a^f b^{\pm} H (a^f b^{\pm})^{-1} = H$, f четно, $N_{U_{6n}}(H) = \langle a^2, b\rangle$. Затем предположим, что $H = \langle a^i b^j\rangle$, где $j = 1, 2, 3$ и i нечетно. Легко видеть, что $N_{U_{6n}}(\langle a^i\rangle) = \langle a\rangle$. Так как для нечетного положительного целого числа f, $a^f b \langle a^i b\rangle (a^f b)^{-1} = \langle a^f b a^i b b^{-1} a^{-f}\rangle = \langle a^f b a^{i-f}\rangle = \langle a^i b\rangle$, $N_{U_{6n}}(\langle a^i b\rangle) = \langle ab\rangle$. Аналогично, $N_{U_{6n}}(\langle a^i b^2\rangle) = \langle ab^2\rangle$, что доказывает лемму. $\square$

Теорема 18. *Если $3 \nmid n$, то $w(U_{6n}) = U_{6n}$; в противном случае имеем $w(U_{6n}) = \langle a^2, b\rangle$.*

Доказательство. Пусть $3 \nmid n$. Тогда все подгруппы вида $\langle a^d\rangle$, $2 \mid d$ и $\langle a^d, b\rangle$, $d \mid 2n$ субнормальны в U_{6n} и, следовательно, $w(U_{6n}) = U_{6n}$. Затем предположим, что $n = 2^r 3^k m$. Тогда подгруппы $\langle a^d b^j\rangle, 2 \mid d, j = 1, 2$, являются субнормальными подгруппами, которые не являются нормальными в U_{6n}. С другой стороны, согласно лемме 17, $N_{U_{6n}}(\langle a^d b^j\rangle) = \langle a^2, b\rangle$, d четно, откуда следует, что $w(U_{6n}) = \langle a^2, b\rangle \cap \langle a^{2n}, b\rangle = \langle a^2, b\rangle$, что и доказывает требуемый результат. $\square$

Следствие 19. *Группа U_{6n} является T-группой тогда и только тогда, когда $3 \nmid n$.*

Доказательство. Если $3 \nmid n$, то по теореме 18 имеем $w(U_{6n}) = U_{6n}$ и, следовательно, группа U_{6n} является T-группой. Наоборот, если U_{6n} — T-группа, то $w(U_{6n}) = U_{6n}$, и по теореме 18, $3 \nmid n$. $\square$

Следствие 20. *Если $n = 2^r 3^k m$, $r, k > 0$, то $wl(U_{6n}) = 2$.*

Доказательство. По определению, $w_0(U_{6n}) = \{e\}$. Применим теорему 18 и лемму 17 чтобы вывести, что $w_1(U_{6n}) = U_{6n} \cap \langle a^2, b\rangle = \langle a^2, b\rangle$, где $n = 2^r 3^k m$ четно и $3 \mid n$. Так как $\langle a^2, b\rangle \trianglelefteq U_{6n}$, $w_2(U_{6n}) = \cap\{N_{U_{6n}}(H) \mid \langle a^2, b\rangle \leqslant H \trianglelefteq \trianglelefteq U_{6n}\} = U_{6n}$, что и требовалось. $\square$

Следствие 21. *Если $3 \nmid n$, то группа U_{6n} является разрешимой T-группой.*

Доказательство. Так как $3 \nmid n$, подгруппа типа $\langle a^d \rangle \sim C_{2n/d}$ является T-группой для каждого делителя d числа $2n$ и подгруппа $\langle a^d b^{\pm} \rangle \cong C_{2n/d}$ является T-группой для каждого делителя d числа $2n$, так как $2 \cdot 3^k \nmid d$. Если $2 \nmid d$, то $\langle a^d, b \rangle \cong U_{6n/d}$, так как $O(a^d)^{2n/d} = e$, $b^3 = e$ и $ba^d b = a^d$. Следовательно, согласно следствию 19, она является T-группой. И наконец, если $2 \mid d$, то $\langle a^d, b \rangle \cong \langle a^d b \rangle \cong C_{6n/d}$ является T-группой. □

Следствие 22. *Пусть U_{6n} — T-группа. Справедливы следующие утверждения*:
(1) *каждая подгруппа группы U_{6n} слабо нормальна*;
(2) *каждая подгруппа группы U_{6n} является $\mathbb{H}$-подгруппой.*

Чтобы изучить группы V_{8n}, сначала отметим, что они имеют порядок $2^{r+3}m$, где m нечетно. Авторы получили структуру всех подгрупп группы V_{8n} (см. [11]). Чтобы вычислить подгруппу Виландта этой группы, сначала дадим обзор субнормальных подгрупп группы V_{8n}.

1. Подгруппы вида $G_1 = \langle a^d \rangle$, где $d \mid 2n$. Отметим, что для каждого делителя δ числа m существует ряд
$$\langle a^{2^{r+1}\delta} \rangle \trianglelefteq \langle a^{2^r\delta} \rangle \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \langle a^{2\delta} \rangle \trianglelefteq \langle a^{\delta} \rangle \trianglelefteq \langle a^{\delta}, b^2 \rangle \trianglelefteq V_{8n}$$
и, следовательно, имеется $\tau(2n)$ подгрупп этого вида.
2. Подгруппы вида $G_2 = \langle a^d b^2 \rangle$, где $d \mid n$. Рассуждение, аналогичное 1, показывает, что имеется $\tau(n)$ подгрупп этого вида.
3. Подгруппы вида $G_3 = \langle a^d, b^2 \rangle$, где $d \mid 2n$. Снова рассуждение, аналогичное 1, показывает, что имеется $\tau(2n)$ подгрупп этого вида.
4. Подгруппы вида $G_4 = \langle a^d, a^j b \rangle$, для которых $d \mid 2^{r+1}$ и $2 \nmid j$. Легко видеть, что имеется $2^{r+1} - 1$ подгрупп этого вида.
5. Подгруппы вида $G_5 = \langle a^d, a^j b^3 \rangle$ для каждого делителя d числа 2^{r+1} при дополнительном условии, что $2 \nmid j$. Отметим, что подгруппы $\langle a^2, b^2, ab \rangle$ и $\langle a^2, b^2, ab \rangle$ нормальны и существует ряд подгрупп
$$\langle a^{2^r}, a^j b^{\pm} \rangle \trianglelefteq \langle a^{2^{r-1}}, a^j b^{\pm} \rangle \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \langle a^2, a^j b^{\pm} \rangle \trianglelefteq \langle a^2, b^2, a^j b \rangle.$$
Простое вычисление показывает, что имеется $2^{r+1} - 1$ подгрупп этого вида.
6. Подгруппы вида $G_6 = \langle a^d b^2, a^j b \rangle$, в которых $d \mid 2^r$. В этом случае $\langle a^2 b^2, a^j b \rangle \trianglelefteq \langle a^2, b^2, a^j b \rangle$ и существует ряд подгрупп
$$\langle a^{2^r} b^2, a^j b \rangle \trianglelefteq \langle a^{2^{r-1}} b^2, a^j b \rangle \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \langle a^2 b^2, a^j b \rangle \trianglelefteq \langle a^2, b^2, a^j b \rangle.$$
Легко видеть, что имеется $2^r - 2$ подгрупп этого вида.
7. Подгруппы вида $G_7 = \langle a^d, b^2, a^j b \rangle$, где $d \mid 2^{r+1}$. Снова отметим, что $\langle a^2, b^2, a^j b \rangle \trianglelefteq V_{8n}$ и существует ряд подгрупп
$$\langle a^{2^r}, b^2, a^j b \rangle \trianglelefteq \langle a^{2^{r-1}}, b^2, a^j b \rangle \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \langle a^2, b^2, a^j b \rangle \trianglelefteq V_{8n}.$$
Таким образом, имеется $2^{r+2} - 1$ подгрупп этого вида.

Теорема 23. *Предположим, что $n = 2^r m$, где $2 \nmid m$. Тогда число субнормальных подгрупп группы V_{8n} следующее*:
$$Sn(V_{8n}) = \begin{cases} 2\tau(2n) + \tau(n) + 4\sigma(2^r) + 2\sigma(2^{r-1}) + 1, & n \text{ четно}, \\ 2\tau(2n) + \tau(n) + 4\sigma(2^r) + 1, & n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Лемма 24. *Нормализатор подгруппы группы V_{8n} можно вычислить следующим образом*:
$$N_{V_{8n}}(H) = \begin{cases} V_{8n}, & H \trianglelefteq V_{8n}, \\ \langle a^{d/2}, b^2, a^j b \rangle, & H = \langle a^d, a^j b^{\pm} \rangle \in G_4, G_5, \\ \langle a^{d/2}, b^2, a^j b \rangle, & H = \langle a^d b^2, a^j b \rangle \in G_6, \\ \langle a^{d/2}, b^2, a^j b \rangle, & H = \langle a^d, b^2, a^j b \rangle \in G_7, G_8. \end{cases}$$

Таблица 3. Число субнормальных подгрупп группы V_{8n} в случае $|G| = 8n = 2^{r+3} \prod_{1 \leqslant d \leqslant s} p_d^{a_d}$. Здесь $\delta \mid m$ and $\delta \neq m$.

	1	2	4	8	$\cdots$	2^{r+1}	2^{r+2}	2^{r+3}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
δ	1	3	3	3	$\cdots$	3	1	-
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	1	$2^{r+1}+3$	$2^{r+2}+3$	$2^{r+1}+3$	$\cdots$	2^3+3	$2+1$	1

Доказательство. Пусть $H = \langle a^d, a^k b\rangle$. Легко видеть, что $H \ntrianglelefteq V_{8n}$ и $b^2Hb^2 = H$. С другой стороны, предположим, что

$$a^i \in V_{8n}, \quad a^i\langle a^d, a^k b\rangle a^{-i} = \langle a^d, a^i a^k b a^{-i}\rangle = \langle a^d, a^{2i+k} b\rangle.$$

Это выполняется, когда $i = d/2$. Наконец, $a^k b \in N_{V_{8n}}(\langle a^d, a^k b\rangle)$ и, следовательно,

$$\langle b^2, a^{d/2}, a^k b\rangle \subseteq N_{V_{8n}}(\langle a^d, a^k b\rangle).$$

Из представления группы V_{8n} и вида ее элементов заключаем, что

$$\langle b^2, a^{d/2}, a^k b\rangle \supseteq N_{V_{8n}}(\langle a^d, a^k b\rangle).$$

Доказательства остальных случаев аналогичны. □

Теорема 25. *Подгруппа Виландта группы V_{8n} имеет следующий вид*:

$$w(V_{8n}) = \begin{cases} \langle a^{2^r}, b^2\rangle, & 2 \mid n, \\ \langle a^2, b^2\rangle, & 2 \nmid n. \end{cases}$$

Доказательство. Предположим, что n нечетно. Если H — подгруппа типа G_1, G_2 или G_3, то H нормальна, и доказывать нечего. Так как

$$N_{V_{8n}}(\langle a^2, ab\rangle) = N_{V_{8n}}(\langle a^2, ab^3\rangle) = \langle a^2, b^2, ab\rangle,$$

пересечение всех субнормальных подгрупп типа $\langle a^2, b^2, a^j b\rangle$ — это $\langle a^2, b^2\rangle$ и

$$w(V_{8n}) = V_{8n} \cap \langle a^2, b^2\rangle = \langle a^2, b^2\rangle.$$

Затем предположим, что n четно. Так как

$$N_{V_{8n}}(\langle a^{2^{r+1}}, a^j b\rangle) = \langle a^{2^r}, b^2, a^j b\rangle, \quad N_{V_{8n}}(\langle a^{2^r} b^2, a^j b\rangle) = \langle a^{2^{r-1}}, b^2, a^j b\rangle$$

и $N_{V_{8n}}(\langle a^{2^{r+1}}, b^2, a^j b) = \langle a^{2^r}, b^2, a^j b\rangle$ согласно лемме 24, наименьший нормализатор субнормальной подгруппы одного из этих типов — это $\langle a^{2^r}, b^2, a^j b\rangle$. Следовательно,

$$w(V_{8n}) = V_{8n} \cap \langle a^{2^r}, b^2, a^j b\rangle = \langle a^{2^r}, b^2\rangle.$$

Это завершает доказательство. □

Следствие 26. *Группа V_{8n} не является T-группой.*

Для доказательства достаточно применить теорему 25.

Следствие 27. *Пусть $n = 2^r m$, где m нечетно. Длина Виландта группы V_{8n} равна*

$$wl(V_{8n}) = \begin{cases} 2, & 2 \nmid n, \\ r, & 2 \mid n. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $2 \nmid n$. По определению $w_0(V_{8n}) = \{e\}$, а по теореме 25

$$w_1(V_{8n}) = w(V_{8n}) = \langle a^2, b^2\rangle, \quad w(V_{8n}) \lhd\lhd \langle a^2, b^2, ab\rangle \lhd\lhd V_{8n}.$$

Следовательно, $w(w(V_{8n})) = w(\langle a^2, b^2, ab\rangle) = V_{8n}$. Затем предположим, что $2 \mid n$. Наименьший нормализатор среди всех субнормальных подгрупп — это $\langle a^{2^r}, b^2, a^j b\rangle$ и по определению длины Виландта имеем $wl_1(V_{8n}) = \langle a^{2^r}, b^2\rangle$. Так как

$$wl_1(V_{8n}) \leqslant \langle a^{2^r}, b^2, a^j b\rangle, \quad wl_2(V_{8n}) = \langle a^{2^{r-1}}, b^2\rangle,$$

имеем $N_{V_{8n}}(\langle a^{2^d}, b^2, a^k b\rangle) = \langle a^{2^{d-1}}, b^2, a^k b\rangle$ согласно теореме 25. Таким образом,

$$wl_r(V_{8n}) = N_{V_{8n}}(\langle a^2, b^2, a^k b\rangle) = V_{8n},$$

так как $\langle a^2, b^2, a^k b\rangle \trianglelefteq V_{8n}$. □

В [13] вычислено число подгрупп полудиэдральной группы SD_{2^n}, а в [11] найдена структура всех подгрупп этой группы. Отметим, что, поскольку полудиэдральная группа является 2-группой, все ее подгруппы субнормальны. Следовательно, число субнормальных подгрупп полудиэдральной группы SD_{2^n} равно числу ее подгрупп. Структура подгрупп SD_{2^n} имеет следующий вид:

(1) $\langle a^i\rangle$ изоморфна циклической группе $C_{2^n/i}$;
(2) $\langle a^d, a^j b\rangle$ изоморфна полудиэдральной группе $SD_{2^n/d}$, где j нечетно. Отметим, что $O(a^j b) = 4$, $a^j b a^i (a^j b)^{-1} = a^{-i}$, если i четно, и $a^j b a^i (a^j b)^{-1} = a^{2^{n-2}-i}$ в противном случае;
(3) $\langle a^d, a^j b\rangle$ изоморфна группе диэдра $D_{2^n/d}$, где $2 \mid j$. Поскольку $O(a^j b) = 2$ и $a^i b a^j b a^{-i} = a^{-j}$, $O(a^d) = \dfrac{2^{n-1}}{d}$.

Для второго и третьего типов подгрупп можно написать субнормальные ряды:

$$\langle a^{2^{n-1}}, a^j b\rangle \trianglelefteq \langle a^{2^{n-2}}, a^j b\rangle \trianglelefteq \cdots \langle a^2, a^j b\rangle \trianglelefteq SD_{2^n}, \quad j \text{ четно},$$
$$\langle a^{2^{n-2}}, a^j b\rangle \trianglelefteq \langle a^{2^{n-3}}, a^j b\rangle \trianglelefteq \cdots \langle a^2, a^j b\rangle \trianglelefteq SD_{2^n}, \quad j \text{ нечетно}.$$

Лемма 28. *Нормализатор подгруппы H полудиэдральной группы SD_{2^n} имеет следующий вид*:

$$N_{SD_{2^n}}(H) = \begin{cases} SD_{2^n}, & H \trianglelefteq G, \\ \langle a^{d/2}, a^j b\rangle, & H = \langle a^d, a^j b\rangle,\ 2 \nmid j, \\ H, & H = \langle a^d, a^j b\rangle,\ 2 \mid j. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $2 \nmid j$ и $H = \langle a^d, a^j b\rangle$. Тогда

$$N_{SD_{2^n}}(\langle a^d, a^j b\rangle) = \langle a^{d/2}, a^j b\rangle,$$

так как

$$a^{d/2}\langle a^d, a^j b\rangle a^{-d/2} = \langle a^d, a^{d/2} a^j b a^{-d/2}\rangle = \langle a^d, a^{j+d} b\rangle = \langle a^d, a^j b\rangle.$$

Таким образом, $N_{SD_{2^n}}(\langle a^d, a^j b\rangle) = \langle a^{d/2}, a^j b\rangle$. Случай $2 \mid j$ аналогичен этому и, следовательно, его доказательство опускаем. □

Теперь можно найти подгруппу Виланда группы $w(SD_{2^n})$.

Следствие 29. *Подгруппа Виландта полудиэдральной группы SD_{2^n} задается соотношением* $w(SD_{2^n}) = Z(SD_{2^n}) = \langle a^{2^{n-2}}\rangle$.

Доказательство. Пусть H — произвольная подгруппа группы SD_{2^n}. Применив лемму 28 покажем, что

$$N_{SD_{2^n}}(\langle a^{2^{n-1}}, a^j b\rangle) = \langle a^{2^{n-2}}, a^j b\rangle, \quad 2 \mid j,$$
$$N_{SD_{2^n}}(\langle a^{2^{n-2}}, a^j b\rangle) = \langle a^{2^{n-3}}, a^j b\rangle, \quad 2 \nmid j.$$

Следовательно,

$$w(SD_{2^n}) = \langle a^{2^{n-3}}, a^j b\rangle \cap \langle a^{2^{n-2}}, a^j b\rangle \cap SD_{2^n} = \langle a^{2^{n-2}}\rangle = Z(SD_{2^n}),$$

что доказывает требуемый результат. □

Следствие 30. *Длина Виландта полудиэдральной группы SD_{2^n} равна $n-1$.*

Доказательство. Согласно предложению 1 имеем $w_1(SD_{2^n}) = w(SD_{2^n}) = \langle 2^{n-2}\rangle$ и

$$w_2(SD_{2^n}) = N_{SD_{2n}}(\langle a^{2^{n-2}}, a^j b\rangle) \cap N_{SD_{2n}}(\langle a^{2^{n-2}}, a^j b\rangle) = \langle a^{2^{n-3}}\rangle.$$

Утверждается, что $w_i(SD_{2^n}) = \langle a^{2^{n-i}}\rangle$. Так как

$$\begin{aligned} &w_{n-2}(SD_{2^n}) = \langle a^2\rangle, \quad \langle a^2\rangle \leqslant \langle a^2, a^j b\rangle && \text{для четного } j,\\ &\langle a^2\rangle \leqslant \langle a^2, a^j b\rangle && \text{для нечетного } j, \end{aligned}$$

находим

$$w_{n-1}(SD_{2^n}) = \cap N_{SD_{2n}}(\langle a^2, a^j b\rangle) = SD_{2^n}.$$

□

В заключение найдем подгруппу Виландта группы $H(n)$. Поскольку эта группа нильпотентна, все ее подгруппы субнормальны. Поэтому число субнормальных подгрупп группы $H(n)$ равно числу всех ее подгрупп.

Лемма 31. *Нормализатор каждой подгруппы группы H_n имеет следующий вид*:

$$N_{H(n)}(H) = \begin{cases} H(n), & H \trianglelefteq H(n),\\ \langle a, b\rangle, & H \in \{\langle a\rangle, \langle ab\rangle, \langle a^i c\rangle, \langle a^i bc\rangle\},\\ \langle a^2, b, c\rangle, & H \in \{\langle a^i, c\rangle, \langle a^i, bc\rangle, \langle a^i c, a^i b\rangle, \langle a^i b, a^i bc\rangle\}. \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку $a^i b = b a^i$, для всех делителей i числа 2^{n-1} имеем $N_{H(n)}(\langle a\rangle) = \langle a, b\rangle$. Аналогичное рассуждение можно применить к группам $\langle ab\rangle$, $\langle a^i c\rangle$ и $\langle a^i bc\rangle$. Так как $a^i c = c a^i$ и $bc = cb$ для каждого четного положительного целого числа i, имеем $N_{H(n)}(\langle a^i, c\rangle) = \langle a^2, b, c\rangle$. Аналогичное рассуждение можно применить к $\langle a^i, bc\rangle$, $\langle a^i c, a^i c\rangle$ и $\langle a^i b, a^i bc\rangle$. □

Теорема 32. *Подгруппа Виландта группы $H(n)$ есть $w(H(n)) = \langle a^2, b\rangle$, и длина Виландта группы $H(n)$ равна 2 для любого положительного целого числа $n \geqslant 4$.*

Доказательство. Согласно лемме 31

$$w(H(n)) = H(n) \cap \langle a, b\rangle \cap \langle a^2, b, c\rangle = \langle a^2, b\rangle.$$

Согласно следствию 32, $w_1(H(n)) = \langle a^2, b\rangle$. Кроме того, $w_2(H(n)) = H(n)$, так как $\langle a^2, b\rangle$ — нормальная подгруппа группы $\langle a, b\rangle \trianglelefteq H(n)$ и $\langle a^2, b, c\rangle \trianglelefteq H(n)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abbaspour M. H., Behravesh H.* Quasi-permutation representations of 2−groups satisfying the Hasse principle// Ric. Math. — 2010. — *59*. — P. 49–57.
2. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R.* On finite T−groups// J. Austr. Math. Soc. — 2003. — *75*, № 2. — P. 181–191.
3. *Bianchi M., Gillio Berta Mauri A., Herzog M., Verardi L.* On finite solvable groups in which normality is a transitive relation// J. Group Theory. — 2000. — *3*, № 2. — P. 147–156.
4. *Cavior S. R.* The subgroups of the dihedral groups// Math. Mag. — 1975. — *48*. — P. 107.
5. *Chin A., Newell P.* A charecterization of higher order Wielandt subgroups and some application// Missouri J. Math. Sci. — 2009. — *21*, № 3. — P. 206–209.
6. *Darafsheh M. R., Poursalavati N. S.* On the existence of the orthogonal basis of the symmetry classes of tensors associated with certain groups// SUT J. Math. — 2001. — *37*, № 1. — P. 1–17.
7. *James G., Liebeck M.* Representations and characters of groups. — New York: Cambridge Univ. Press, 2001.

8. *Kurzweil H., Stellmacher B.* The theory of finite groups: An introduction. — New York: Springer-Verlag, 2004.
9. *Müller K. H.* Schwachnormale Untergruppen: Eine gemeinsame Verallgemeinerung der normalen und normalisatorgleichen Untergruppen// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova — 1966. — *36.* — P. 129–157.
10. *Robinson D. J. S.* A note on finite groups in which normality is transitive// Proc. Am. Math. Soc. — 1968. — *19.* — P. 933–937.
11. *Shelash H. B., Ashrafi A. R.* Computing the number of subgroups, normal subgroups and characteristic subgroups in certain finite groups, submitted//.
12. *Shelash H. B., Ashrafi A. R.* Computing maximal and minimal subgroups with respect to a given property in certain finite groups// Quasigroups Rel. Syst. — 2019. — *27*, № 1. — P. 133–146.
13. *Tărnăuceanu M.* Contributions to the study of subgroup lattices. — Bucharest: Matrix Rom, 2016.
14. The GAP Team// GAP – Groups, Algorithms, and Programming — 2014.
15. *Wielandt H.* Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen// Math. Z. — 1939. — *45.* — P. 209–244.
16. *Wielandt H.* Über den Normalisator der Subnormalen Untergruppen// Math. Z. — 1958. — *69.* — P. 463–465.

Shelash H. B.
Университет Кашана, Иран
E-mail: `ashrafi@kashanu.ac.ir`

Ashrafi A. R.
Университет Кашана, Иран
E-mail: `ashrafi@kashanu.ac.ir`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 132–136
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-132-136

УДК 519.175.3

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРИЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

© 2020 г. **В. А. ВОБЛЫЙ**

Аннотация. Последовательно-параллельный граф — это граф, не содержащий в качестве минора полный граф с четырьмя вершинами. Получена явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных трициклических графов с заданным числом вершин, а также найдена асимптотика для числа таких графов с большим количеством вершин. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что помеченный трициклический граф является последовательно-параллельным графом, асимптотически равна 13/15.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, последовательно-параллельный граф, асимптотика, вероятность.

ENUMERATION OF LABELED SERIES-PARALLEL TRICYCLIC GRAPHS

© 2020 **V. A. VOBLYI**

Abstract. A series-parallel graph is a graph that does not contain a complete graph with four vertices as a minor. An explicit formula for the number of labeled series-parallel tricyclic graphs with a given number of vertices is obtained, and the corresponding asymptotics for the number of such graphs with a large number of vertices is found. We prove that under a uniform probability distribution, the probability that the labeled tricyclic graph is a series-parallel graph is asymptotically equal to 13/15.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, series-parallel graph, asymptotics, probability.
AMS Subject Classification: 05C30

1. Введение.

Определение 1 (см. [10]). Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит подразбиения полного графа K_4.

Определение 2. *Цикломатическим числом* связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин, *k-циклический граф* — это граф с цикломатическим числом, равным k.

Последовательно-параллельные графы используются при построении надежных коммуникационных сетей (см. [12]).

В [10] была найдена асимптотика для чисел помеченных связных и 2-связных последовательно-параллельных графов с большим количеством вершин. В [4] перечислены помеченные последовательно-параллельные связные и 2-связные графы по числу вершин. Числа помеченных последовательно-параллельных трициклических и тетрациклических 2-связных графов с заданным числом вершин найдены в [2] и [3], соответственно.

В статье получена явная формула для числа помеченных связных последовательно-параллельных трициклических графов с заданным числом вершин, а также найдена асимптотика для числа таких графов с большим количеством вершин. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что помеченный трициклический граф является последовательно-параллельным графом, асимптотически равна 13/15.

2. Перечисление графов.

Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Теорема 1. *Для числа $SP(n,3)$ помеченных связных последовательно-параллельных трициклических графов с n вершинами при $n \geqslant 5$ верна формула*

$$SP(n,3) = \frac{(n-1)!}{24}\sum_{i=0}^{n-5}\Biggl(\binom{i+2}{2}\frac{n^{n-i-5}}{2(n-i-7)!} + \binom{i+4}{4}\left(\frac{12n^{n-i-5}}{(n-i-6)!} - \frac{13n^{n-i-6}}{(n-i-7)!} + \frac{4n^{n-i-7}}{(n-i-8)!}\right) + \binom{i+6}{6}\left(\frac{70n^{n-i-5}}{(n-i-5)!} - \frac{127n^{n-i-6}}{(n-i-6)!} + \frac{98n^{n-i-7}}{(n-i-7)!} - \frac{38n^{n-i-8}}{(n-i-8)!} + \frac{6n^{n-i-9}}{(n-i-9)!}\right)\Biggr). \quad (1)$$

Доказательство. Для числа помеченных связных k-циклических графов с n вершинами $S(n,k)$ в [1] получено выражение

$$S(n,k) = \frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}]e^{nz}Y_k\Bigl(n1!B_1'(z),\ n2!B_2'(z),\ \ldots,\ nk!B_k'(z)\Bigr)z^{-n}, \quad (2)$$

где $[z^{-1}]$ — оператор формального вычета (см. [6]), $B_k(z)$ — экспоненциальная производящая функция для числа помеченных k-циклических блоков, а $Y_k(x_1,\ldots,x_k)$ — многочлены разбиений (многочлены Белла). Для этих многочленов известно выражение (см. [7, с. 173])

$$Y_k(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{\pi(k)}\frac{k!}{m_1!\ldots m_k!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{m_1}\ldots\left(\frac{x_k}{k!}\right)^{m_k},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(k)$ числа k, т.е. по всем неотрицательным решениям $(m_1,m_2,\ldots,m_k)$ уравнения $m_1+2m_2+\cdots+km_k=k$, $m_i \geqslant 0$, $i=1,\ldots,k$.

Будем считать теперь, что числа $S(n,k)$ и функции $B_k(z)$ относятся к классу помеченных последовательно-параллельных графов. Формула (2) может быть неверна для подкласса связных графов (см. [4]).

Определение 3 (см. [11])**.** Класс графов называется *блочно устойчивым*, если граф принадлежит этому классу в том и только том случае, когда каждый блок графа принадлежит этому классу.

Для блочно устойчивого класса графов формула (2) верна (см. [4]). Известно, что класс последовательно-параллельных графов является блочно устойчивым классом графов (см. [11]).

Так как (см. [7, с. 246]) $Y_3(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + 3x_1x_2 + x_3$ и $x_i = ni!B_i'(z)$, имеем

$$SP(n,3) = \frac{(n-1)!}{6n}[z^{-1}]e^{nz}\Bigl(n^3(B_1'(z))^3 + 6n^2B_1'(z)B_2'(z) + 6nB_3'(z)\Bigr)z^{-n}.$$

Унициклический блок — это простой цикл (последовательно-параллельный граф), поэтому $B(n,1) = (n-1)/2$. Все бициклические блоки являются последовательно-параллельными графами, и в [14] и [2], соответственно, найдены формулы

$$B(n,2) = \frac{n!(n-3)(n+2)}{24}, \quad B(n,3) = \frac{n!(n-3)(n-4)}{5760}(3n^3+36n^2+71n+50).$$

Таким образом, имеем

$$B_1(z) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2}(n-1)!\frac{z^n}{n!}, \quad B_1'(z) = \frac{z^2}{2(1-z)},$$

$$B_2(z)=\frac{z^4(3-2z)}{12(1-z)^3},\quad B_2'(z)=\frac{12z^3-13z^4+4z^5}{12(1-z)^4},$$
$$B_3(z)=\frac{z^5(28-47z+28z^2-6z^3)}{48(1-z)^6},\quad B_3'(z)=\frac{70z^4-127z^5+98z^6-38z^7+6z^8}{24(1-z)^7}.$$

Суммирование рядов для $B_2(z)$, $B_3(z)$, а также дифференцирование было выполнено с помощью пакета программ Maple.

С помощью известного разложения (см. [7, с. 141]) получим

$$(1-z)^{-p-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+p}{p}z^i,$$

$$\begin{aligned}
SP(n,3)&=\frac{(n-1)!}{6}[z^{-1}]e^{nz}\times\\
&\times\left(\frac{n^2z^6}{8(1-z)^3}+\frac{nz^2(12z^3-13z^4+4z^5)}{4(1-z)^5}+\frac{70z^4-127z^5+98z^6-38z^7+6z^8}{4(1-z)^7}\right)z^{-n}\\
&=\frac{(n-1)!}{6}[z^{-1}]\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^pz^p}{p!}\times\\
&\times\left(\frac{n^2}{8}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+2}{2}z^{i+6-n}+\frac{12n}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+4}{4}z^{i+5-n}-\frac{13n}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+4}{4}z^{i+6-n}+\right.\\
&+\frac{4n}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+4}{4}z^{i+7-n}+\frac{70n}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+6}{6}z^{i+4-n}-\frac{127n}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+6}{6}z^{i+5-n}+\\
&\left.+\frac{98n}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+6}{6}z^{i+6-n}-\frac{38n}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+6}{6}z^{i+7-n}+\frac{6n}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+6}{6}z^{i+8-n}\right)=\\
&=\frac{(n-1)!}{6}\sum_{i=0}^{n-5}\left(\frac{n^{n-i-5}}{8(n-i-7)!}\binom{i+2}{2}+\frac{12n^{n-i-5}}{4(n-i-6)!}\binom{i+4}{4}-\frac{13n^{n-i-6}}{4(n-i-7)!}\binom{i+4}{4}+\right.\\
&+\frac{4n^{n-i-7}}{4(n-i-8)!}\binom{i+4}{4}+\frac{70n^{n-i-5}}{4(n-i-5)!}\binom{i+6}{6}-\frac{127n^{n-i-6}}{4(n-i-6)!}\binom{i+6}{6}+\\
&\left.+\frac{98n^{n-i-7}}{4(n-i-7)!}\binom{i+6}{6}-\frac{38n^{n-i-8}}{4(n-i-8)!}\binom{i+6}{6}+\frac{6n^{n-i-9}}{4(n-i-9)!}\binom{i+6}{6}\right).\qquad(3)
\end{aligned}$$

Верхний предел в сумме заменен на $n-5$, так как при $i>n-5$ соответствующие факториалы в знаменателе обнуляют слагаемые. Доказательство закончено. □

В следующей таблице представлены числа $SP(n,3)$, вычисленные с помощью теоремы 1 и пакета программ Maple:

n	5	6	7	8	9	10
$SP(n,3)$	70	4275	190995	7832440	317391480	13111660800

3. Асимптотика и вероятность.

Лемма. *Пусть $U(a,b,z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми. Тогда верно разложение*

$$\frac{e^{nz}}{(1-z)^m}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{p+m}}{p!}U(m,m+p+1,n)z^p.$$

Доказательство. Известно разложение

$$(1+z)^{\alpha}e^{-tz}=\sum_{p=0}^{\infty}L_p^{\alpha-p}(z)t^p$$

(см. [8, с. 706]), где L_p^k — многочлены Лагерра. В нашем случае $t=-z$, $\alpha=-m$, $z=n$ и

$$\frac{e^{nz}}{(1-z)^m}=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p L_p^{-m-p}(n)z^p.$$

Известна также связь многочленов Лагерра с вырожденной гипергеометрической функцией Трикоми (см. [9, с. 584]):

$$U(-n,b;z)=(-1)^n n!\,L_n^{b-1}(z) \quad \text{или} \quad L_n^a(z)=\frac{(-1)^n}{n!}U(-n,a+1;z).$$

Поэтому имеем

$$\frac{e^{nz}}{(1-z)^m}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}U(-p,-p-m+1;n)z^p.$$

Используя формулу преобразования $U(a,b;z)=z^{1-b}U(1+a-b,2-b;z)$ (см. [9, с. 584]), получим утверждение леммы. □

Теорема 2. *Для числа $SP(n,3)$ помеченных связных последовательно-параллельных трициклических графов с n вершинами при $n\to\infty$ верна асимптотика*

$$SP(n,3)\sim\frac{13}{384}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,n^{n+5/2}.$$

Доказательство. С помощью леммы из равенства (3) найдем

$$\begin{aligned}SP(n,3)=\frac{(n-1)!}{6}[z^{-1}]\frac{n^2z^6}{8}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{p+3}}{p!}U(3,p+4;n)z^{p-n}+\\
+\frac{nz^2}{4}(12z^3-13z^4+4z^5)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{p+5}}{p!}U(5,p+6;n)z^{p-n}+\\
+\frac{1}{4}(70z^4-127z^5+98z^6-38z^7+6z^8)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{p+7}}{p!}U(7,p+8;n)z^{p-n}=\\
=\frac{(n-1)!}{6}\Big(\frac{n^{n-2}}{8(n-7)!}U(3,n-3;n)+\frac{12n^n}{4(n-6)!}U(5,n;n)-\frac{13n^{n-1}}{4(n-7)!}U(5,n-1;n)+\\
+\frac{4n^{n-2}}{4(n-8)!}U(5,n-2;n)+\frac{70n^{n+2}}{4(n-5)!}U(7,n+3;n)-\frac{127n^{n+1}}{4(n-6)!}U(7,n+2;n)\\
+\frac{98n^n}{4(n-7)!}U(7,n+1;n)-\frac{38n^{n-1}}{4(n-5)!}U(7,n;n)+\frac{6n^{n-2}}{4(n-9)!}U(7,n-1;n).\end{aligned}$$

При фиксированных числах a и m и $n\to\infty$ известна асимптотика

$$U(a,n-m,n)\sim\frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{a/2}\Gamma\big(\frac{a+1}{2}\big)}$$

(см. [5]). Учитывая, что $(n+k)!/n!\sim n^k$ при фиксированном k и $n\to\infty$, получим

$$\begin{aligned}SP(n,3)\sim\frac{n^{n+4}\sqrt{\pi}}{48(2n)^{3/2}\Gamma(2)}+\frac{n^{n+5}\sqrt{\pi}}{2(2n)^{5/2}\Gamma(3)}-\frac{13n^{n+5}\sqrt{\pi}}{24(2n)^{5/2}\Gamma(3)}+\frac{n^{n+5}\sqrt{\pi}}{6(2n)^{5/2}\Gamma(3)}+\\
+\frac{70n^{n+6}\sqrt{\pi}}{24(2n)^{7/2}\Gamma(4)}-\frac{127n^{n+6}\sqrt{\pi}}{24(2n)^{7/2}\Gamma(4)}+\frac{98n^{n+6}\sqrt{\pi}}{24(2n)^{7/2}\Gamma(4)}-\frac{38n^{n+6}\sqrt{\pi}}{24(2n)^{7/2}\Gamma(4)}+\frac{n^{n+6}\sqrt{\pi}}{4(2n)^{7/2}\Gamma(4)}\sim\\
\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n+5/2}\left(\frac{1}{96}+\frac{1}{16}-\frac{13}{192}+\frac{1}{48}+\frac{35}{576}-\frac{127}{1152}+\frac{49}{576}-\frac{19}{576}+\frac{1}{192}\right)=\frac{13}{384}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,n^{n+5/2}.\end{aligned}$$

Доказательство закончено. □

Зададим на множестве помеченных связных трициклических графов с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие. *Вероятность P того, что помеченный трициклический граф является последовательно-параллельным графом, асимптотически равна* $13/15$.

Доказательство. Пусть $f(n, n+2)$ — число помеченных связных графов с n и $n+2$ ребрами (трициклических графов). Э. Райт нашел следующую асимптотику при $n \to \infty$ (см. [13]):

$$f(n, n+k) \sim \rho_k n^{n+(3k-1)/2}, \quad \rho_k = \frac{\sqrt{\pi}\sigma_k}{2^{(3k-1)/2}\Gamma(3k/2+1)}, \quad \sigma_2 = \frac{15}{16}.$$

Поэтому имеем

$$f(n, n+2) \sim \frac{\sqrt{\pi}\sigma_2}{2^{5/2}\Gamma(4)} n^{n+5/2} = \frac{15\sqrt{\pi}}{384\sqrt{2}} n^{n+5/2}$$

и, следовательно,

$$P = \frac{SP(n,3)}{f(n,n+2)} \sim \frac{13}{15}$$

при $n \to \infty$. Доказательство закончено. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воблый В. А.* О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и ребер// Дискр. анал. иссл. опер. — 2016. — *23*, № 2. — С. 5–20.
2. *Воблый В. А., Мелешко А. М.* О числе помеченных последовательно-параллельных трициклических блоков// XV Междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения» (Тула, 28-31 мая 2018 г.). — ТПГУ: Тула. — С. 168–170.
3. *Воблый В. А.* Число помеченных последовательно-параллельных тетрациклических блоков// Прикл. дискр. мат. — 2020. — № 47. — С. 57–61.
4. *Воблый В. А.* Второе соотношение Риддела и следствия из него// 2019. — *26*, № 1. — С. 20–32.
5. *Воблый В. А.* Число помеченных внешнепланарных k-циклических графов// Мат. заметки. — 2018. — *103*, № 5. — С. 657–666.
6. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.
7. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. — М.: Наука, 1982.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 2. — М.: Наука, 1983.
9. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 3. — М.: Наука, 1986.
10. *Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.* Enumeration and limit laws of series-parallel graphs// Eur. J. Combin. — 2007. — *28*, № 8. — P. 2091–2105.
11. *McDiarmid C., Scott A.* Random graphs from a block-stable class// Eur. J. Combin. — 2016. — *58*. — P. 96–106.
12. *Radhavan S.* Low-connectivity network design on series-parallel graphs// Networks. — 2004. — *43*, № 3. — P. 163–176.
13. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs// J. Graph Theory. — 1977. — *1*, № 4. — P. 317–330.
14. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs// J. Graph Theory. — 1978. — *2*, № 4. — P. 299–305.

Воблый Виталий Антониевич
Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва
E-mail: vitvobl@yandex.ru