

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 172



Москва 2019

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчѐв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

С. С. Акбаров (НИУ ВШЭ, ВИНТИ РАН)

Е. П. Кругова (ВИНТИ РАН)

А. В. Михалѐв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Н. Х. Розов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

С. Е. Степанов (Финуниверситет при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Редактор-составитель:

М. Ш. Бурлуцкая (Воронежский государственный университет)

Научный редактор:

Архипова Н. А. (ВИНТИ РАН)

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

**СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 172

**МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ ЗИМНЕЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ»**

28 ЯНВАРЯ — 2 ФЕВРАЛЯ 2019 г.

ЧАСТЬ 3



Москва 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Некоторые методы решения задач теплопроводности многослойной среды при наличии источников тепла (<i>Ю. В. Афанасенкова, Ю. А. Гладышев, В. В. Калманович</i>)	3
Многопараметрические задачи на собственные значения и их приложения в электродинамике (<i>Д. В. Валовик, В. Ю. Курсева</i>)	9
Об использовании матричного метода решения задач теплопроводности в многослойной среде при наличии фазовых переходов (<i>Ю. А. Гладышев, В. В. Калманович</i>)	30
Методы решения задачи зонального электрофореза с периодическими начальными данными (<i>Т. Ф. Долгих</i>)	38
О малых движениях гидросистем, содержащих вязкоупругую жидкость (<i>Н. Д. Копачевский, Е. В. Семкина</i>)	48
Построение аналитического решения задачи об образовании газового гидрата в пористом пласте (<i>Н. Г. Мусакаев, М. К. Хасанов, С. Л. Бородин</i>)	91
Стохастическое моделирование поверхностей модифицированными функциями Гаусса (<i>В. А. Родин, С. В. Синегубов</i>)	96
Сравнительный анализ матричного метода и метода конечных разностей для моделирования распределения неосновных носителей заряда в многослойной планарной полупроводниковой структуре (<i>Е. В. Серегина, В. В. Калманович, М. А. Степович</i>)	104
Анализ существования особых решений задачи капиллярности (<i>Л. В. Стенюхин</i>)	113
Классическое решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами (<i>В. В. Корнев, А. П. Хромов</i>)	119



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 3–8
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-3-8

УДК 517.958, 517.927.2, 51–73

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

© 2019 г. Ю. В. АФАНАСЕНКОВА, Ю. А. ГЛАДЫШЕВ, В. В. КАЛМАНОВИЧ

Аннотация. Решение задачи о фазовых переходах в многослойных средах при их нагревании представляет практический интерес ввиду все большего использования многослойных материалов в технике и строительстве при различных температурных условиях. В данной работе предполагается, что в среде присутствуют распределенные тепловые источники, вызванные физическими или химическими процессами, что может привести к фазовым переходам. В работе описаны метод обобщенных степеней Берса и матричный метод решения задачи теплопроводности в многослойной среде и поиска границ фазовых переходов.

Ключевые слова: обобщенные степени Берса, уравнение теплопроводности, задача Коши, матричный метод, многослойная среда, фазовые переходы.

METHODS FOR SOLVING PROBLEMS ON THERMAL CONDUCTIVITY OF MULTILAYER MEDIA IN THE PRESENCE OF HEAT SOURCES

© 2019 YU. V. AFANASENKOVA, YU. A. GLADYSHEV, V. V. KALMANOVICH

ABSTRACT. The solution of problems on phase transitions in multilayer media when they are heated is of practical interest owing to the increasing use of multilayer materials in engineering and construction under various temperature conditions. In this paper, we assume that the medium contains distributed heat sources caused by physical or chemical processes, which can lead to phase transitions. We describe the method of generalized Bers degrees and the matrix method for solving the heat conduction problem in multilayer media and for the search for boundaries of phase transitions.

Keywords and phrases: generalized Bers degrees, heat equation, Cauchy problem, matrix method, multilayer medium, phase transitions.

AMS Subject Classification: 34B05, 34B60, 80A20

1. Введение. В ряде технических устройств возникает необходимость поддерживать постоянную или переменную во времени температуру в некоторой области, окруженной твердыми стенками. С этой целью внутри стенки помещают источники или, наоборот, поглотители тепла. Системы теплоизоляции в настоящее время весьма усложнились; они могут содержать и элементы подогрева стенки. Поэтому представляет интерес изучить теплопроводность стенки при наличии тепловых источников.

Первоначально рассматривается однослойная оболочка, так как переход к многослойной системе может быть осуществлен стандартными матричными методами.

При наличии распределенных источников тепла температурное поле не является монотонной функцией на рассматриваемом промежутке, а имеет на нем максимальное значение внутри слоя;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–03–00271), а также совместного проекта Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Калужской области № 18–41–400001.

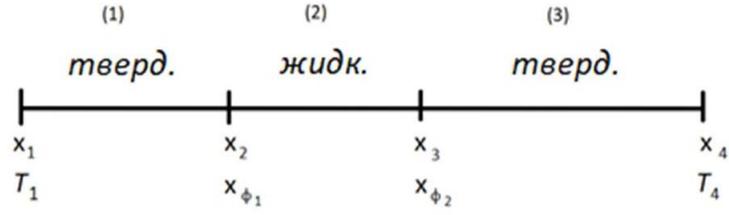


Рис. 1. Модель из трех слоев, описывающая фазовые переходы в оболочке

в результате в оболочке могут произойти фазовые переходы. В этом случае система моделируется тремя слоями (см. рис. 1).

Предположим, что температура фазового перехода T_ϕ вещества задана, причем коэффициент теплопроводности разных фаз резко различен. Координаты x_1, x_4 определяют внешние границы слоя, являются заданными величинами, координаты x_2, x_3 определяют границы фаз и являются неизвестными (искомыми) величинами. Положим, что на внешних границах слоя x_1, x_4 заданы соответственно внешние температуры T_1, T_4 , меньшие T_ϕ .

2. Постановка задачи и решение задачи теплопроводности в обобщенных степенях Берса. Основная система уравнений теплопроводности в многослойной среде имеет простую форму (см. [6]):

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda^{(i)} \frac{dT^{(i)}}{dx} \right) = -q, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $\lambda^{(i)}$ — коэффициент теплопроводности, $q = \text{const}$ — мощность источников тепла, верхний индекс в скобках (i) определяет номер слоя.

Основная трудность состоит в нахождении решения, удовлетворяющего условиям согласования на границах слоев

$$T^{(1)}(x) \Big|_{x=x_{\phi_1}} = T^{(2)}(x) \Big|_{x=x_{\phi_1}}, \quad T^{(2)}(x) \Big|_{x=x_{\phi_2}} = T^{(3)}(x) \Big|_{x=x_{\phi_2}}, \quad (2)$$

$$\lambda^{(1)} \frac{dT^{(1)}}{dx} \Big|_{x=x_{\phi_1}} = \lambda^{(2)} \frac{dT^{(2)}}{dx} \Big|_{x=x_{\phi_1}}, \quad \lambda^{(2)} \frac{dT^{(2)}}{dx} \Big|_{x=x_{\phi_2}} = \lambda^{(3)} \frac{dT^{(3)}}{dx} \Big|_{x=x_{\phi_2}} \quad (3)$$

и внешним граничным условиям

$$T^{(1)}(x) \Big|_{x=x_1} = T_1, \quad T^{(3)}(x) \Big|_{x=x_4} = T_4. \quad (4)$$

При традиционном методе решения системы (1)–(4) имеем шесть искомых параметров. Хотя есть полная уверенность в наличии единственного решения, однако их физическая интерпретация сильно затруднена большим числом параметров. Дальнейшее решение состоит в таком выборе значений x_{ϕ_1}, x_{ϕ_2} , чтобы удовлетворить условиям фазового перехода.

Представим искомое решение как сумму обобщенных степеней Берса (см. [2, 7]), что дает возможность значительно упростить краевую задачу, сведя решение к поиску только трех коэффициентов C_1, C_2, C_3 . Решение для модели трех слоев возьмем в виде

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= T_1 + C_1 X_1^{(1)}(x, x_1) - \frac{q}{2} X_1^{(2)}(x, x_1), \quad x_1 \leq x \leq x_2, \\ T^{(2)} &= T_\phi + C_2 X_2^{(1)}(x, x_2) - \frac{q}{2} X_2^{(2)}(x, x_2), \quad x_2 \leq x \leq x_3, \\ T^{(3)} &= T_4 + C_3 X_3^{(1)}(x, x_4) - \frac{q}{2} X_3^{(2)}(x, x_4), \quad x_3 \leq x \leq x_4, \end{aligned}$$

где T_ϕ — температура фазового перехода вещества слоя, T_1, T_4 — температуры на внешних границах, выражение вида $X^{(1)}(x, x_0)$ обозначает первую обобщенную степень Берса с нуль-точкой

x_0 , а выражение вида $X^{(2)}(x, x_0)$ — вторую обобщенную степень Берса. Номер слоя в обобщенных степенях записывается в нижнем индексе.

Приведем основные свойства обобщенных степеней Берса:

$$X^{(1)}(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{a_1(\xi)},$$

$$\tilde{X}^{(1)}(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{a_2(\xi)},$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$ — положительные функции, непрерывные на заданном промежутке, определенные физическими и геометрическими параметрами среды. Для процесса теплопроводности, заданного уравнением (1), функции $a_1^{(i)}(x)$ и $a_2^{(i)}(x)$ определяются соотношениями

$$a_1^{(i)} = \lambda^{(i)} x^s, \quad a_2^{(i)} = x^{-s},$$

где $\lambda^{(i)}$ — коэффициент теплопроводности i -го слоя. Значение показателя s определяется геометрией среды: значение $s = 0$ соответствует процессу теплопроводности в среде со сдвиговой симметрией (плоские слои) по оси x , $s = 1$ — с осевой симметрией (цилиндрические слои) и $s = 2$ — с центральной симметрией (сферические слои). Далее,

$$X^{(2)}(x, x_0) = 2 \int_{x_0}^x \frac{\tilde{X}^{(1)}(\xi, x_0) d\xi}{a_1(\xi)},$$

$$X^{(1)}(x_0, x_0) = 0, \quad \tilde{X}^{(1)}(x_0, x_0) = 0, \quad X^{(2)}(x_0, x_0) = 0,$$

$$D_1 = a_1 \frac{d}{dx}, \quad D_2 = a_2 \frac{d}{dx},$$

$$D_1 X^{(1)}(x, x_0) = 1, \quad D_2 \tilde{X}^{(1)}(x, x_0) = 1, \quad D_1 X^{(2)}(x, x_0) = 2\tilde{X}^{(1)}(x, x_0),$$

$$J = -D_1 T(x),$$

где J — плотность потока тепла.

За счет выбора нуль-точек в обобщенных степенях Берса удовлетворены внешние граничные условия

$$T^{(1)}(x_1) = T_1, \quad T^{(3)}(x_4) = T_4,$$

а также значение $T^{(2)}(x_2)$, равное T_ϕ , полученное как предел справа. Таким образом, имеем два условия для определения x_2 , x_3 :

$$C_1 X_1(x_2, x_1) - \frac{q}{2} X_1^{(2)}(x_2, x_1) = T_\phi - T_1,$$

$$C_3 X_3(x_3, x_4) - \frac{q}{2} X_3^{(2)}(x_3, x_4) = T_\phi - T_4.$$

Предложенный метод приводит к алгебраическим уравнениям в виде двух многочленов от x_2 , x_3 степени не выше трех. Очевидно, их можно решить графически, изобразив систему на плоскости x_2, x_3 . Такой способ решения напоминает обратное интерполирование (см. [1]).

Далее рассматриваем только плоскую оболочку. Задача значительно упрощается при симметрии граничных условий, т.е. $T_1 = T_4$. Решение, очевидно, имеет плоскость симметрии при $(x_1 + x_4)/2 = x_c$, а $x_3 = x_4 + x_1 - x_2$. При $x = x_c$ в силу симметрии поток J равен нулю.

Учитывая эти условия, имеем краевую задачу со смешанными граничными условиями:

$$T^{(1)}(x_1) = T_1 = T_4, \quad \left. \frac{dT^{(1)}}{dx} \right|_{x=x_c} = 0.$$

В силу симметрии граничных условий можем перейти к упрощенной модели оболочки из двух слоев (рис. 2).

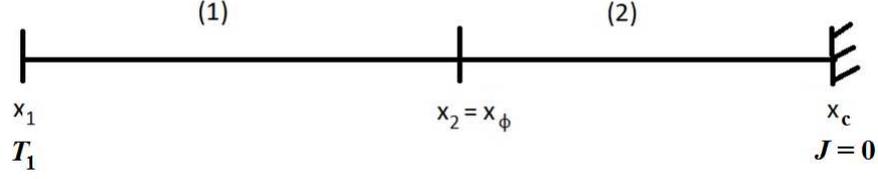


Рис. 2. Упрощенная модель из двух слоев с учетом симметрии граничных условий, описывающая фазовые переходы в плоской оболочке

Решение ищем в виде

$$T^{(1)}(x) = T_1 + C_1 X_1^{(1)}(x, x_1) - \frac{q}{2} X_1^{(2)}(x, x_1), \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad (5)$$

$$T^{(1)}(x) = T_\phi + C_2 X_2^{(1)}(x, x_2) - \frac{q}{2} X_2^{(2)}(x, x_2), \quad x_2 \leq x \leq x_c, \quad (6)$$

при граничных условиях

$$T^{(1)}(x_1) = T_1, \quad \left. \frac{dT^{(2)}(x)}{dx} \right|_{x=x_c} = 0$$

и условиях согласования в точке $x_2 = x_\phi$

$$T^{(1)}(x_2) = T^{(2)}(x_2) = T_\phi, \quad \left. D_1^{(1)} T^{(1)}(x) \right|_{x=x_2} = \left. D_1^{(2)} T^{(2)}(x) \right|_{x=x_2}.$$

Имеем пять условий на решение: два граничных условия, два условия согласования и одно условие определенного значения $T(x_2) = T_\phi$ в точке $x_2 = x_\phi$ границы фаз. Из граничного условия отсутствия потока в точке x_c и (6) имеем

$$C_2 = \tilde{X}_2^{(1)}(x_c, x_2),$$

а из условия согласования по потоку в точке x_2

$$C_1 - \tilde{X}_1^{(1)}(x_2, x_1) = C_2 - \tilde{X}_2^{(1)}(x_2, x_2),$$

откуда для C_1 получим

$$C_1 = \tilde{X}_1^{(1)}(x_2, x_1) + \tilde{X}_2^{(1)}(x_c, x_2).$$

Подставляя C_1 в (5) и учитывая соотношение $T^{(1)}(x_2) = T_\phi$, получим следующее выражение для определения координаты $x_2 = x_\phi$:

$$X_1^{(2)}(x_\phi, x_1) - 2X_1^{(1)}(x_\phi, x_1) \left(\tilde{X}_1^{(1)}(x_\phi, x_1) + \tilde{X}_2^{(1)}(x_c, x_\phi) \right) + \frac{2}{q}(T_\phi - T_1) = 0.$$

Подставив выражения обобщенных степеней для плоского слоя и положив $x_1 = 0$, получим квадратное уравнение

$$x_\phi^2 - 2x_c x_\phi + \frac{2\lambda_1}{q}(T_\phi - T_1) = 0.$$

Таким образом, координата точки фазового перехода

$$x_\phi = x_c \pm \sqrt{x_c^2 - \frac{2\lambda}{q}(T_\phi - T_1)}.$$

3. Матричный метод. Более удобно для решения поставленной задачи использовать матричный метод, описанный ранее в [3–5]. Чтобы охватить единым подходом случаи осесимметричной и центрально-симметричной системы слоев, используем аппарат обобщенных степеней Берса. Рассматриваемый матричный метод можно применять при любом конечном числе слоев.

Введем для k -го слоя $[x_k, x_{k+1}]$ вектор-столбцы V , W и матрицу K следующим образом:

$$V^{(1)}(x_1) = \begin{pmatrix} T^{(1)}(x_1) \\ J^{(1)}(x_1) \end{pmatrix}, \quad V^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} T^{(k)}(x) \\ J^{(k)}(x) \end{pmatrix}, \quad W^{(k)}(x, x_k) = \begin{pmatrix} w^{(k)}(x) - w^{(k)}(x_k) \\ -D^{(k)}w^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$K^{(k)}(x, x_k) = \begin{pmatrix} 1 & -X_k^{(1)}(x, x_k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $J^{(k)}$ — плотность потока в k -м слое:

$$J^{(k)}(x) = -\lambda^{(k)} D_1^{(k)} T^{(k)}(x),$$

а функции $w^{(k)}(x)$ — произвольные частные решения неоднородных уравнений (1).

Для $w^{(k)}(x)$ выберем

$$w^{(k)}(x) = -\frac{q}{2} X^{(2)}(x, x_k).$$

Решение задачи Коши при заданных $T^{(k)}(x_k)$, $J^{(k)}(x_k)$ имеет вид

$$V^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} T^{(k)}(x) \\ J^{(k)}(x) \end{pmatrix} = K^{(k)}(x, x_k) V^{(k)}(x_k) + W^{(k)}(x, x_k).$$

Решение для всех трех слоев, определяющих фазы в слое, запишем в виде

$$V^{(1)}(x) = K^{(1)}(x, x_1) V^{(1)}(1) + W^{(1)}(x, x_1), \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad (7)$$

$$V^{(2)}(x) = K^{(2)}(x, x_2) K^{(1)}(x_2, x_1) V^{(1)}(1) + K^{(2)}(x, x_2) W^{(1)}(x_2, x_1) + W^{(2)}(x, x_2), \quad x_2 \leq x \leq x_3, \quad (8)$$

$$V^{(3)}(x) = K^{(3)}(x, x_3) K^{(2)}(x_3, x_2) K^{(1)}(x_2, x_1) V^{(1)}(1) + K^{(3)}(x, x_3) K^{(2)}(x_3, x_2) W^{(1)}(x_2, x_1) + K^{(3)}(x, x_3) W^{(2)}(x_3, x_2) + W^{(3)}(x, x_3), \quad x_3 \leq x \leq x_4. \quad (9)$$

Подставляя $x = x_4$ и $T(x_4) = T_4$ в (9), находим значение $J^{(1)}(x_1)$, выраженное через искомые x_2 и x_3 .

Подставим $J^{(1)}(x_1)$ в (7) и в (8), после чего из системы

$$T(x_2) = T_\phi, \quad T(x_3) = T_\phi$$

найдем границы фаз x_2 и x_3 .

Описанный метод пригоден для систем слоев со сдвиговой, осевой или центральной симметрией. Применяя матричный метод к системе трех слоев при симметричных граничных условиях, получаем результат, который совпадает с полученным выше при помощи традиционного способа решения. Обладая большой общностью, матричный метод позволяет рассмотреть системы с любым конечным числом слоев, расположенных слева и справа от слоя с фазовым переходом. Решение задачи лежит в классе непрерывных функций, имеющих конечное число разрывов производной. Метод допускает различные обобщения по усложнению граничных условий и условий согласования.

4. Заключение. В работе предложен аналитический метод нахождения границ фазового перехода в многослойной среде с распределенными источниками тепла. Представленный подход с использованием аппарата обобщенных степеней Берса и матричного метода допускает обобщения для различной геометрии многослойной среды и усложнению граничных условий и условий согласования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вержбицкий В. М.* Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Высшая школа, 2001.
2. *Гладышев Ю. А.* Метод обобщенных степеней Берса и его приложение в математической физике. — Калуга: КГУ им. К. Э. Циолковского, 2011.
3. *Гладышев Ю. А., Дворянчикова Ю. В.* Процесс теплопроводности в неоднородной пластине при переменном коэффициенте внешнего теплообмена// в кн.: 5 Российская национальная конференция по теплообмену. — М.: МЭИ, 2010. — С. 76–79.
4. *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А.* О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерно-реакторные константы. — 2018. — № 3. — С. 158–167.
5. *Калманович В. В., Степович М. А.* О совместном применении матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники// в кн.: Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем. — М.: ИППМ РАН, 2018. — С. 194–201.
6. *Кудинов В. А., Карташов Э. М., Калашников В. В.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. — М.: Высшая школа, 2005.
7. *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1944. — 56. — P. 67–93.

Афанасенкова Юлия Вячеславовна

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru

Гладышев Юрий Александрович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: v572264@yandex.ru

Калманович Вероника Валерьевна

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: v572264@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 9–29
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-9-29

УДК 517.927.4, 517.988.57

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

© 2019 г. Д. В. ВАЛОВИК, В. Ю. КУРСЕЕВА

Аннотация. Рассмотрена нелинейная n -параметрическая задача на собственные значения, называемая задачей P . Помимо n спектральных параметров, задача P зависит от n^2 числовых параметров, при нулевых значениях которых она распадается на n линейных задач P_i^0 , $i = \overline{1, n}$. Задаче P можно поставить в соответствие n других нелинейных задач P_i , которые, в том числе, имеют решения, не связанные с решениями задач P_i^0 . В работе предложено рассматривать задачи P_i в качестве «невозмущенных». На основе свойств собственных значений задач P_i доказано существование собственных значений задачи P , часть из которых не связана с решениями задач P_i^0 .

Ключевые слова: нелинейная задача типа Штурма—Лиувилля, многопараметрическая задача на собственные значения, метод возмущений, метод интегральных дисперсионных уравнений.

MULTIPARAMETER EIGENVALUE PROBLEMS AND THEIR APPLICATIONS IN ELECTRODYNAMICS

© 2019 D. V. VALOVIK, V. YU. KURSEVA

ABSTRACT. A nonlinear n -parametric eigenvalue problem called the problem P is considered. In addition to n spectral parameters, the problem P depends on n^2 numerical parameters; for zero values of these parameters, the problem splits into n linear problems P_i^0 , $i = \overline{1, n}$. To the problem P , one can assign n nonlinear problems P_i , which, in particular, have solutions that are not related to the solutions of the problems P_i^0 . The problems P_i are treated in this work as “nonperturbed” problems. Using the properties of eigenvalues of the problems P_i , we prove the existence of eigenvalues of the problem P ; some of these eigenvalues are not related to solutions of the problems P_i^0 .

Keywords and phrases: nonlinear Sturm–Liouville-type problem, multiparameter eigenvalue problem, perturbation method, method of integral dispersion equations.

AMS Subject Classification: 47H14, 35P30, 35Q61

1. Постановка задачи и вводные замечания. Рассмотрим классический вариант метода возмущений (см. [9]). Пусть $R(\alpha)$ — нелинейная задача, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ — вектор числовых параметров. Ее можно записать в операторном виде: $\mathcal{R}(u; \lambda, \alpha) = 0$, где \mathcal{R} — некоторая нелинейная по u оператор-функция, λ — еще один вектор параметров (например, спектральных). Предположим, что существует решение $u \equiv u_0(x; \lambda)$ задачи $R(\mathbf{0})$, где $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Как правило, задача $R(\mathbf{0})$ линейная. При достаточно широких предположениях относительно \mathcal{R} можно доказать, что, как только величина $|\alpha|$ достаточно мала, задача $R(\alpha)$ имеет решение $u \equiv u_\alpha(x; \lambda)$ и $u_\alpha(x; \lambda) \rightarrow u_0(x; \lambda)$ при $|\alpha| \rightarrow \mathbf{0}$. Этот подход реализован, например, в [22, 25].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-71-10015).

Предположим, что задача $R(\boldsymbol{\alpha}')$, где $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1, \dots, \alpha_l, 0, \dots, 0)$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_l \neq 0$, остается нелинейной, но является в некотором смысле более простой, чем задача $R(\boldsymbol{\alpha})$. Допустим, что разрешимость задачи $R(\boldsymbol{\alpha}')$ может быть установлена, и пусть $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{\boldsymbol{\alpha}'}(x; \boldsymbol{\lambda})$ — ее решение. Тогда, при определенных условиях на \mathcal{R} , можно доказать, что если достаточно мала величина $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}'|$, то разрешима будет и задача $R(\boldsymbol{\alpha})$ и

$$\mathbf{u}_{\boldsymbol{\alpha}}(x; \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \mathbf{u}_{\boldsymbol{\alpha}'}(x; \boldsymbol{\lambda}) \quad \text{при } |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}'| \rightarrow 0.$$

Обсуждаемый подход может оказаться полезным при выполнении следующих условий:

- (i) найдется такой вектор $\boldsymbol{\alpha}'$, что $R(\boldsymbol{\alpha}')$, будучи более простой нелинейной задачей, может быть исследована каким-либо методом;
- (ii) решения задачи $R(\boldsymbol{\alpha}')$ существуют не только для «малых» $|\boldsymbol{\alpha}'|$;
- (iii) задача $R(\boldsymbol{\alpha}')$ имеет решения, не связанные с решениями задачи $R(\mathbf{0})$.

Очевидно, что в случаях (ii), (iii) рассмотрение задачи $R(\mathbf{0})$ в качестве «невозмущенной» даст скудную информацию о решениях задачи $R(\boldsymbol{\alpha})$. Более того, задача $R(\mathbf{0})$ может не иметь решений.

В электродинамике нелинейных волноведущих структур возникают задачи, для которых справедливы ситуации (i)–(iii). Например, задачи, зависящие от скалярного параметра α и удовлетворяющие условиям (ii), (iii), изучались в [16, 24, 29]. В [27] введен широкий класс задач, зависящих от (векторного) параметра $\boldsymbol{\alpha}$, к которым применим изложенный выше подход.

Всюду ниже индексы i, j принимают значения $1, 2, \dots, n$. Пусть $\varepsilon_{l,i}, \varepsilon_{s,i}, A_i - 3n$ положительных постоянных и $\varepsilon_{l,i} > \varepsilon_{s,i} > 0$, $\alpha_{ij} - n^2$ неотрицательных постоянных, $\lambda_i - n$ положительных параметров. Пусть $\bar{I} = (0, h)$, $\bar{I} = [0, h]$, где h — положительная постоянная.

Будем считать $\boldsymbol{\lambda}$ вектором, где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, а $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}'$ и $\mathbf{0}$ — квадратными $(n \times n)$ -матрицами; при этом $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\boldsymbol{\alpha}' = \{\alpha'_{ij}\}_{i,j=1}^n$, где $\alpha'_{ii} = \alpha_{ii} > 0$ и $\alpha'_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а $\mathbf{0}$ является нулевой $(n \times n)$ -матрицей.

Определим множества $\Lambda_i = (\varepsilon_{s,i}, +\infty)$, $\Lambda_i^* = (\varepsilon_{s,i}, \lambda_i^*)$, где λ_i^* — достаточно большие положительные постоянные. Выбор λ_i^* будет ясен из следствия 2.1 и теорем 2.4, 2.6. Считаем, что $\alpha_{ij} \in A_{ij}^*$, где $A_{ij}^* = (0, \alpha_{ij}^*)$. При этом α_{ii}^* — произвольные, но фиксированные положительные постоянные, а $\alpha_{ij}^*, i \neq j$, — положительные постоянные, которые зависят от α_{ii}^* и λ_i^* . Выбор α_{ij}^* при $i \neq j$ будет ясен из утверждения 2.4 и теорем 2.4, 2.6.

Обозначения $\prod_l C_l$ и $C_1 \times \dots \times C_k$ используются для определения (конечного) прямого произведения множеств C_l . Мы будем использовать произведения

$$\mathbf{\Lambda}^* = \prod_i \Lambda_i^*, \quad \mathbf{A}^* = \prod_{i,j} A_{ij}^*.$$

Запись $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{\Lambda}^*$ и $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A}^*$ означает, что $\lambda_i \in \Lambda_i^*$ и $\alpha_{ij} \in A_{ij}^*$ соответственно. Как обычно $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Рассмотрим систему n уравнений

$$\begin{cases} u_1'' = -(\varepsilon_{l,1} - \lambda_1)u_1 - (\alpha_{11}u_1^2 + \dots + \alpha_{1n}u_n^2)u_1, \\ \dots, \\ u_n'' = -(\varepsilon_{l,n} - \lambda_n)u_n - (\alpha_{n1}u_1^2 + \dots + \alpha_{nn}u_n^2)u_n, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $(\cdot)' \equiv d/dx$, $(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \in \bar{I} \times \mathbf{\Lambda}^* \times \mathbf{A}^*$. Решения системы (1.1) обозначим $u_i, u_i(x)$ или $u_i(x; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$.

Задача $P = P(\boldsymbol{\alpha})$ заключается в нахождении тех значений вектора $\boldsymbol{\lambda}$, для которых существует набор функций

$$u_1 \equiv u_1(x; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \dots, \quad u_n \equiv u_n(x; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (1.2)$$

удовлетворяющих системе (1.1) и краевым условиям

$$u_i(0) = A_i \neq 0, \quad \kappa_{s,i}u_i(0) - u_i'(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$u_i(h) = 0, \quad (1.4)$$

где $\kappa_{s,i} = \sqrt{\lambda_i - \varepsilon_{s,i}} > 0$, и таких, что

$$u_1, \dots, u_n \in C^2(\bar{I}). \quad (1.5)$$

Величины $\kappa_{s,i}$ положительны (см. раздел 4); отсюда следует, что $\lambda_i > \varepsilon_{s,i}$.

Определение 1.1. Вектор $\lambda \in \Lambda^*$, для которого существует набор функций (1.2), удовлетворяющих (1.1), (1.3)–(1.5), называется *векторным собственным значением*, а отвечающая ему функция $u = (u_1, \dots, u_n)$ — *собственной функцией* задачи $P(\alpha)$.

Задача $P(\alpha')$ распадается на n независимых нелинейных задач, обозначаемых P_i и удовлетворяющих условиям (ii), (iii).

Рассмотрим уравнение

$$v_i'' = -(\varepsilon_{l,i} - \lambda_i)v_i - \alpha_{ii}v_i^3, \quad (1.6)$$

где $(\cdot)' \equiv d/dx$, $(x, \lambda_i, \alpha_{ii}) \in \bar{I} \times \Lambda_i \times \mathbb{R}_+$. Решения уравнения (1.6) обозначим v_i , $v_i(x)$ или $v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$.

Задача P_i заключается в нахождении тех значений параметра λ_i , для которых существует функция

$$v_i \equiv v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii}), \quad (1.7)$$

удовлетворяющая уравнению (1.6) и краевым условиям

$$v_i(0) = A_i \neq 0, \quad \kappa_{s,i}v_i(0) - v_i'(0) = 0, \quad (1.8)$$

$$v_i(h) = 0 \quad (1.9)$$

и такая, что

$$v_i \in C^2(\bar{I}). \quad (1.10)$$

Определение 1.2. Число $\lambda_i \in \Lambda_i$, для которого существует функция (1.7), удовлетворяющая (1.6), (1.8)–(1.10), называется *собственным значением*, а отвечающее ему решение v_i — *собственной функцией* задачи P_i .

В связи с введенными определениями важным является следующее замечание.

Замечание 1.1. Определение 1.2 является неклассическим аналогом известного определения характеристического числа линейной оператор-функции, нелинейно зависящей от спектрального параметра [6]. Определение 1.1 является многомерным обобщением определения 1.2.

Подчеркнем, что всюду ниже, когда речь идет о (векторных) собственных значениях, имеются в виду (векторные) собственные значения, введенные в определениях 1.1 и 1.2. Другими словами, приводимые ниже утверждения и теоремы не относятся к понятию собственного значения в общеупотребительном смысле.

Задача $P(\mathbf{0})$, где $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, распадается на n (независимых) линейных задач, обозначаемых P_i^0 . Задача P_i^0 заключается в нахождении тех значений параметра λ_i , для которых существуют нетривиальное классическое решение $w_i \equiv w_i(x; \lambda_i)$ уравнения $w_i'' = -(\varepsilon_{l,i} - \lambda_i)w_i$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\kappa_{s,i}w_i(0; \lambda_i) - w_i'(0; \lambda_i) = 0, \quad w_i(h; \lambda_i) = 0.$$

Широко известные подходы нелинейного анализа, такие как вариационный метод [2, 15] и методы теории ветвления решений [3, 7], не применимы для исследования задач $P(\alpha)$ и P_i (см. также комментарии в работе [5]).

2. Результаты. Обозначим через $\bar{\lambda}_{k_1 \dots k_n} = (\bar{\lambda}_{1, k_1}, \dots, \bar{\lambda}_{n, k_n})$ векторные собственные значения задачи $P(\alpha)$ и через $\hat{\lambda}_{i, k'_i}$ и $\tilde{\lambda}_{i, k'_i}$ — собственные значения задач P_i и P_i^0 соответственно, где k_1, \dots, k_n, k'_i — неотрицательные целочисленные индексы; считаем, что $\bar{\lambda}_{i, k_i}$, $\hat{\lambda}_{i, k'_i}$ и $\tilde{\lambda}_{i, k'_i}$ расположены в порядке возрастания. В некоторых случаях приведенные выше обозначения будут использоваться без индексов.

2.1. Задача P_i^0 . Начнем со следующего простого факта.

Утверждение 2.1. *Существует такое число $h_{\min} > 0$, что для любого $h > h_{\min}$ задача P_i^0 имеет конечное число (не меньше одного) простых (кратности 1) собственных значений $\tilde{\lambda}_{i,0}, \dots, \tilde{\lambda}_{i,k-1}$ и $\tilde{\lambda}_{i,k} \in (\varepsilon_{s,i}, \varepsilon_{l,i})$. Если $\varepsilon_{l,i} \leq \varepsilon_{s,i}$, задача $P_{0,i}$ (положительных) решений не имеет.*

Утверждение 2.1 можно получить исследуя уравнение

$$\kappa_{s,i} \sin(\kappa_{l,i}h) + \kappa_{l,i} \cos(\kappa_{l,i}h) = 0, \quad (2.1)$$

где $\kappa_{l,i} = \sqrt{\varepsilon_{l,i} - \lambda_i} > 0$. Уравнение (2.1) получается подстановкой точного решения уравнения задачи P_i^0 в отвечающие этой задаче краевые условия. Точное значение h_{\min} также может быть найдено из (2.1).

Используя в качестве «невозмущенной» линейную задачу P_i^0 , можно доказать, что при достаточно малых α_{ii} в некоторой окрестности всякого собственного значения $\tilde{\lambda}_{i,k}$ задачи P_i^0 будет лежать собственное значение $\hat{\lambda}_{i,k}$ задачи P_i (см., например, [22]), а в окрестности набора $(\tilde{\lambda}_{1,k_1}, \dots, \tilde{\lambda}_{n,k_n})$ — собственное значение $\bar{\lambda}_{k_1, \dots, k_n}$ задачи $P(\alpha)$ (см. [25, 27]). Очевидно, что при $\varepsilon_{l,i} \leq \varepsilon_{s,i}$ такой подход неприменим для нахождения решений задач P_i и $P(\alpha)$, поскольку задача P_i^0 не имеет (положительных) решений.

2.2. Задача P_i . Учитывая условие (1.8), первый интеграл уравнения (1.6) имеет вид

$$v_i^2 = C_i - (\varepsilon_{l,i} - \lambda_i)v_i^2 - \frac{1}{2}\alpha_{ii}v_i^4, \quad (2.2)$$

где $C_i = A_i^2(\frac{1}{2}\alpha_{ii}A_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \varepsilon_{s,i}) > 0$.

Пусть $v_i \equiv v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$ — решение задачи Коши (1.6), (1.8), определенное глобально на \bar{I} . Это предположение, доказанное ниже, позволяет провести промежуточные выкладки, которые проливают свет на идею метода, разработанного в данной статье.

Рассмотрим функции

$$\theta_i = v_i^2, \quad \mu_i = v_i'/v_i, \quad (2.3)$$

где v_i — определенное выше решение задачи Коши. Функция $\theta_i \equiv \theta_i(x)$ определена и непрерывна при $x \in \bar{I}$; функция $\mu_i \equiv \mu_i(x)$ определена и непрерывна там, где v_i не обращается в нуль. Функции θ_i и μ_i зависят от λ_i, α_{ii} , но для сокращения обозначений мы часто не будем явно это указывать. Ясно, что функция v_i не может обращаться в какой-либо точке в нуль вместе со своей производной.

В силу (1.6) функции $\theta_i(x)$ и $\mu_i(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \theta_i' = 2\theta_i\mu_i, \\ \mu_i' = -(\mu_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \alpha_{ii}\theta_i). \end{cases} \quad (2.4)$$

Учитывая (1.8) и (2.2), первый интеграл системы (2.4) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\alpha_{ii}\theta_i^2 + (\mu_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i)\theta_i = C_i. \quad (2.5)$$

Приравнивая правую часть второго уравнения (2.4) к нулю и используя (2.5), находим $\alpha_{ii}\theta_i^2 = -2C_i$. Поскольку $\alpha_{ii}, C_i > 0$, то полученное равенство не может быть верным. Это противоречие доказывает, что $\mu_i' < 0$ для всех $\lambda_i \in \Lambda_i$.

Учитывая (2.5), перепишем второе уравнение системы (2.4) в виде

$$\mu_i' = -\chi_i(\mu_i; \lambda_i), \quad (2.6)$$

где $\chi_i(\mu_i; \lambda_i) = \mu_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \alpha_{ii}\theta_i > 0$, а $\theta_i \equiv \theta_i(\mu_i; \lambda_i)$ можно найти из (2.5). Выражая θ_i из (2.5), принимая во внимание тот факт, что $\theta_i = v_i^2 \geq 0$, и подставляя найденное выражение во второе уравнение (2.4), получаем

$$\chi_i(\mu_i; \lambda_i) = ((\mu_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i)^2 + 2\alpha_{ii}C_i)^{1/2} > 0,$$

где $\min \chi_i(\mu_i; \lambda_i) = \sqrt{2\alpha_{ii}C_i}$.

Пусть v_i имеет $m'_i \geq 0$ нулей $x'_{i,r} \in I$, где $r = \overline{0, m'_i}$. Если $m'_i = 0$, то v_i не обращается в нуль при $x \in I$. Ясно, что если $v_i \neq 0$, то $v'_i(x'_{i,k}) \neq 0$. Для сокращения обозначений мы используем индекс r , а не r'_i ; v_i и v_j при $i \neq j$ могут иметь разное число нулей.

Определим интервалы

$$I'_{i,0} = [0, x'_{i,1}), \quad I'_{i,r} = (x'_{i,r}, x'_{i,r+1}), \quad I'_{i,m'_i} = (x'_{i,m'_i}, h), \quad (2.7)$$

где $r = \overline{1, m'_i - 1}$; если $m'_i = 0$, то $I'_{i,0} = I$.

Из неравенства $\mu'_i < 0$ и условий (1.8)–(1.9) следуют формулы

$$\lim_{x \rightarrow +0} \theta_i(x) = A_i^2, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \mu_i(x) = \kappa_{s,i}, \quad (2.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow x'_{i,r}} \theta_i(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x'_{i,r} \pm 0} \mu_i(x) = \pm \infty, \quad r = \overline{1, m'_i}, \quad (2.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow h-0} \theta_i(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow h-0} \mu_i(x) = -\infty. \quad (2.10)$$

Интегрируя уравнение (2.6) на каждом из интервалов $I'_{i,r}$ и используя (2.8)–(2.9), получаем следующее утверждение.

Утверждение 2.2. *Задача Коши (1.6), (1.8) глобально однозначно разрешима при $x \in \bar{I}$, а ее (классическое) решение $v_i \equiv v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$ гладко зависит от точки $(x, \lambda_i, \alpha_{ii}) \in \bar{I} \times \Lambda_i \times \mathbb{R}_+$; при этом справедлива формула*

$$\int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} + (m'_i - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} + \int_{\mu_i(h)}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} = h, \quad (2.11)$$

где $\mu_i(h)$ не задано.

Формула (2.11) при условии (2.10) дает уравнение, для которого имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1 (об эквивалентности). *Число $\hat{\lambda}_i$ является решением задачи P_i , если и только если существует такое целое число $m'_i = \hat{m}_i \geq 0$, что $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$ при $m'_i = \hat{m}_i$ является решением уравнения*

$$\Phi_i(\lambda_i; m'_i) \equiv \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} + m'_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} = h \quad (2.12)$$

при $m'_i = \hat{m}_i$; соответствующая собственная функция $v_i \equiv v_i(x; \hat{\lambda}_i, \alpha_{ii})$ имеет \hat{m}_i (простых) нулей

$$x'_{i,r} = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} + (r - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} \quad \text{при } r = \overline{1, \hat{m}_i}.$$

Замечание 2.1. Учитывая вид уравнения (2.12) и принимая во внимание теорему 2.1, уравнение $\Phi_i(\lambda_i; m'_i) = h$ естественно назвать *интегральным характеристическим уравнением*, а функцию $\Phi_i(\lambda_i; m'_i) - h$ — *интегральной характеристической функцией* задачи P_i .

Теорема 2.1 позволяет ввести следующее понятие.

Определение 2.1. Если $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$ — решение уравнения (2.12) кратности p_i , то $\hat{\lambda}_i$ — собственное значение задачи P_i той же кратности.

Введем обозначение

$$T_i(\lambda_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \alpha_{ii}\theta_i(s)}, \quad (2.13)$$

где $\theta_i(s)$ определяется из (2.5) при $\mu_i = s$, $\chi_i(s; \lambda_i)$ определено в (2.6).

Для функции $\Phi_i(\lambda_i; m'_i)$ справедливы неравенства

$$m'_i T_i(\lambda_i) < \Phi_i(\lambda_i; m'_i) < (m'_i + 1)T_i(\lambda_i). \quad (2.14)$$

Неравенства (2.14) позволяют свести изучение разрешимости задачи P_i к изучению поведения $T_i(\lambda_i)$ при больших λ_i . В связи с неравенствами (2.14) полезным оказывается следующее утверждение.

Утверждение 2.3. *Функция $T_i(\lambda_i)$ является положительной и непрерывно зависит от $(\lambda_i, \alpha_{ii}) \in \Lambda_i \times \mathbb{R}_+$; при больших λ_i справедлива формула*

$$T_i(\lambda_i) = 2\lambda_i^{-1/2} \ln \lambda_i + O(\lambda_i^{1/2}). \quad (2.15)$$

Разрешимость задачи P_i устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.2. *Существует такое целое $m'_i \geq 0$, что для каждого целого $m \geq m'_i$ уравнение (2.12) имеет по крайней мере одно (положительное) решение $\widehat{\lambda}_i = \widehat{\lambda}_{i,m}$, где $\widehat{\lambda}_{i,m} \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$, и, следовательно, задача P_i имеет бесконечно много (положительных) собственных значений $\widehat{\lambda}_{i,m}$ с точкой накопления на бесконечности. Кроме того,*

- (1) *если задача P_i^0 имеет p (положительных) решений $(\varepsilon_{s,i} <) \widetilde{\lambda}_{i,0} < \widetilde{\lambda}_{i,1} < \dots < \widetilde{\lambda}_{i,p-1} (< \varepsilon_{l,i})$, то существует такая постоянная $\alpha''_{ii} > 0$, что для любого (положительного) $\alpha_{ii} = \alpha'_{ii} < \alpha''_{ii}$ справедливо*

$$\widehat{\lambda}_{i,m} \in (\varepsilon_{s,i}, \varepsilon_{l,i}) \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha'_{ii} \rightarrow +0} \widehat{\lambda}_{i,m} = \widetilde{\lambda}_{i,m} \quad \text{при} \quad m = \overline{0, p-1},$$

где $\widehat{\lambda}_{i,0}, \dots, \widehat{\lambda}_{i,p-1}$ — первые p решений задачи P_i при $\alpha_{ii} = \alpha'_{ii}$;

- (2) *если $m \geq p$, то $\lim_{\alpha_{ii} \rightarrow +0} \widehat{\lambda}_{i,m} = +\infty$;*
 (3) *для больших λ_i и произвольного фиксированного $\Delta_i > 0$ имеет место асимптотическое неравенство*

$$(1 - \Delta_i)\lambda_i(m) < \widehat{\lambda}_{i,m} < (1 + \Delta_i)\lambda_i(m + 1),$$

где $\lambda_i(m) = g^{-1}(h/2m)$, g^{-1} — функция, обратная к $g(t) = t^{-1/2} \ln t$;

- (4) $\max_{x \in (0, h)} |v_i(x; \widehat{\lambda}_{i,m}, \alpha_{ii})| = O(\widehat{\lambda}_{i,m}^{1/2})$ при $m \rightarrow \infty$.

Пункт (2) теоремы 2.2 показывает, что в задаче P_i существуют собственные значения, которые не связаны с решениями (линейной) задачи P_i^0 даже при $\alpha_{ii} \rightarrow +0$, и таких собственных значений бесконечное число.

Итак, каждая задача P_i имеет неограниченную последовательность $\{\widehat{\lambda}_{i,m}\}_{m=m'_i}^{\infty}$ собственных значений. Используя утверждение 2.3 и теорему 2.2, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Последовательность $\{\widehat{\lambda}_{i,m}\}_{m=m'_i}^{\infty}$ имеет подпоследовательность $\{\widehat{\lambda}_{i,m_r}\}_{r=r'_i}^{\infty}$, где $\lim_{m_r \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}_{i,m_r} = \infty$, обладающую следующими свойствами:*

- (1) *для любого m_r значение $\lambda_i = \widehat{\lambda}_{i,m_r}$ удовлетворяет (2.12) при $m'_i = m_r$;*
 (2) *для любого m_r существует интервал $U_{i,m_r} = (\widehat{\lambda}_{i,m_r} - \delta_{i,m_r}, \widehat{\lambda}_{i,m_r} + \delta_{i,m_r})$, где $\delta_{i,m_r} > 0$ — постоянная, не содержащий других элементов последовательности $\{\widehat{\lambda}_{i,m_r}\}_{r=r'_i}^{\infty}$ и такой, что функция $h - \Phi_i(\lambda_i; m_r)$ принимает значения разных знаков на разных концах интервала U_{i,m_r} .*

2.3. Задача P . Далее понадобится «интегральная» теорема непрерывности [11]. Следуя [11], рассмотрим нормальную систему уравнений

$$u'_i = f_i(x, u_1, \dots, u_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.16)$$

правые части которой зависят от параметров $\gamma_1, \dots, \gamma_l$. Система (2.16) может быть записана в векторной форме

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (2.17)$$

Будем предполагать, что правые части системы (2.16) определены и непрерывны вместе с их частными производными $\partial f_j(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma})/\partial u_i$ в некоторой области $\tilde{\Gamma}$ пространства \tilde{R} переменных $x, u_1, \dots, u_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l$.

Теорема 2.3 (Л. С. Понтрягин [11]). Пусть $(x_0, \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\gamma}_0)$ — некоторая точка области $\tilde{\Gamma}$ и $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ — решение уравнения (2.17), удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{\varphi}(x_0, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{u}_0$. Если решение $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}_0)$ определено при $x \in \bar{I}$, то существует такое число $\gamma_0 > 0$, что при $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0| < \gamma_0$ решение $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ определено на том же отрезке \bar{I} , а функция $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ непрерывна по совокупности переменных $x, \boldsymbol{\gamma}$ при $x \in \bar{I}$ и $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0| < \gamma_0$.

Кроме того, $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}) \rightarrow \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}^*)$ равномерно по $x \in \bar{I}$ при $\boldsymbol{\gamma} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}^*$, как только $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}^*| < \gamma_0$.

Замечание 2.2. Теорема 2.3 сформулирована в [11] без дополнительного утверждения о равномерности стремления $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ к $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}^*)$. Однако этот факт следует из доказательства, данного в [11].

Из утверждения 2.2 и теоремы 2.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.4. Существуют такие $\alpha_{ij}^* > 0$, что при $0 < \alpha_{ij} < \alpha_{ij}^*$ ($i \neq j$) задача Коши (1.1), (1.3) глобально однозначно разрешима при $x \in \bar{I}$, а ее (классическое) решение

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \quad (2.18)$$

где $u_i \equiv u_i(x; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$, гладко зависит от точки $(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \in \bar{I} \times \mathbf{A}^* \times \mathbf{A}^*$. Кроме того, $u_i \rightarrow v_i$ равномерно по $x \in \bar{I}$ при $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\alpha}'$, где $v_i \equiv v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$ — решение задачи Коши (1.6), (1.8).

Далее считаем, что $(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \in \bar{I} \times \mathbf{A}^* \times \mathbf{A}^*$, где $\lambda_i^*, \alpha_{ii}^* > 0$ — фиксированные значения, при этом α_{ii}^* не обязательно малы, а α_{ij}^* при $i \neq j$, выбраны по $\lambda_i^*, \alpha_{ii}^*$ в смысле теоремы 2.4.

Предположим, что функции u_i , определенные формулами (2.18), имеют по $m_i \geq 0$ нулей $x_{i,r} \in I$ соответственно, где $r = \overline{0, m_i}$. Если $m_i = 0$, то u_i не обращается в нуль при $x \in I$. Ясно, что если $u_i \neq 0$, то $u_i'(x_{i,k_i}) \neq 0$. Здесь так же, как и в случае с однопараметрических задач (задачи P_i , см. с. 13) для сокращения обозначений мы используем индекс r , а не r_i ; u_i и u_j при $i \neq j$ могут иметь разное число нулей (и, конечно, индекс r не совпадает с одноименным индексом, введенным для функций v_i).

Определим интервалы

$$I_{i,0} = [0, x_{i,1}), \quad I_{i,r} = (x_{i,r}, x_{i,r+1}), \quad I_{i,m_i} = (x_{i,m_i}, h), \quad (2.19)$$

где $r = \overline{1, m_i - 1}$; если $m_i = 0$, то $I_{i,0} = I$.

Построим функции

$$\tau_i = u_i^2, \quad \eta_i = u_i'/u_i, \quad (2.20)$$

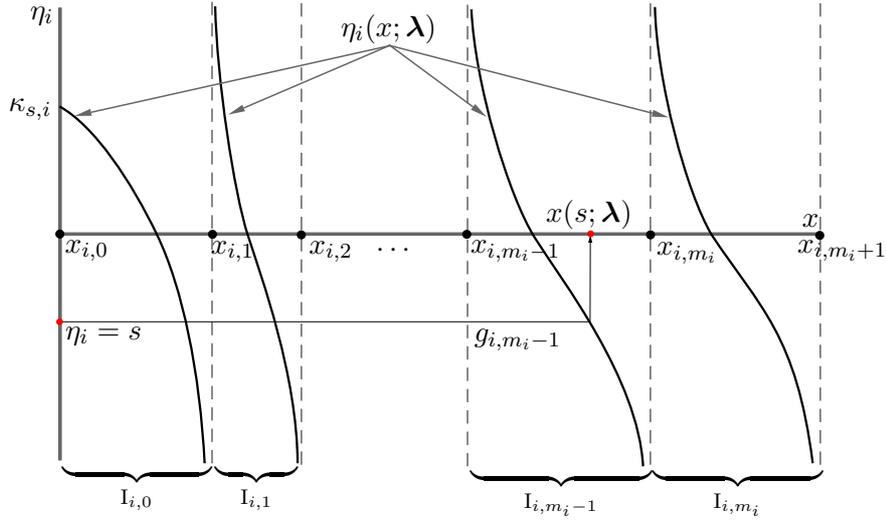
где u_i являются компонентами решения (2.18). Очевидно, функции $\tau_i \equiv \tau_i(x)$ определены и непрерывны при $x \in \bar{I}$; каждая из функций $\eta_i \equiv \eta_i(x)$ определена и непрерывна при $x \in I_{i,r}$, $r = \overline{0, m_i}$. Мы не указываем явно зависимость τ_i и η_i от $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}$ для сокращения обозначений.

В силу (1.1) функции $\tau_i(x)$ и $\eta_i(x)$ удовлетворяют системе из $2n$ уравнений

$$\begin{cases} \tau_i' = 2\tau_i\eta_i, \\ \eta_i' = - \left(\eta_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\tau_j \right), \end{cases} \quad (2.21)$$

где правые части определены там, где определены η_i .

Используя теорему 2.4, получаем следующий факт.

Рис. 1. Функция $\eta_i(x; \lambda)$ и отображение $g_{i,r}$.

Утверждение 2.4. Пусть функция $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, где $u_i \equiv u_i(x; \lambda, \alpha)$, определена формулой (2.18). Тогда существуют такие постоянные $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^0 > 0$ при $i \neq j$ и δ_i , что

$$\eta_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \tau_j \geq \sqrt{2\alpha_{ii} C_i} - \delta_i > 0 \quad (2.22)$$

для всех $(x, \lambda, \alpha) \in \mathbf{x}_i \times \Lambda^* \times \mathbf{A}^0$, соответственно, где левые части выражений (2.22) определены в (2.21), $\mathbf{x}_i = \bigcup_{r=0}^{m_i} I_{i,r}$, $\mathbf{A}^0 = \prod_{ij} A_{ij}^0$ при $A_{ii}^0 = A_{ii}^*$, $A_{ij}^0 = (0, \alpha_{ij}^0)$ при $i \neq j$, и значения δ_i могут быть выбраны так, что $|\delta_i|$ будут меньше чем любая (фиксированная) постоянная $\delta > 0$ как только величина $|\alpha - \alpha'|$ будет достаточно мала; C_i определены в (2.2).

Далее считаем, что параметры α_{ij}^* в A_{ij} при $i \neq j$ и δ_i выбраны так, что $0 < \alpha_{ij}^* \leq \alpha_{ij}^0$, а $|\delta_i| \leq \delta$, где $\delta > 0$ — фиксированное достаточно малое число.

Из утверждения 2.4 следует, что $\eta_i' < 0$ при всех $(x, \lambda, \alpha) \in \mathbf{x}_i \times \Lambda^* \times \mathbf{A}^*$. Это значит, что η_i монотонно убывает от $\kappa_{s,i}$ до $-\infty$ при $x \in I_{i,0}$, от $+\infty$ до $-\infty$ при $x \in I_{i,r}$, где $k = \overline{1, m_i}$. Другими словами, возникают естественные непрерывные биекции

$$\begin{aligned} g_{i,0} &: (-\infty, \kappa_{s,i}) \rightarrow I_{i,0} : \eta_i \mapsto x, \\ g_{i,r} &: (-\infty, +\infty) \rightarrow I_{i,r} : \eta_i \mapsto x, \quad \text{где } r = \overline{1, m_i}, \end{aligned}$$

при $i = \overline{1, n}$. Эти биекции позволяют определить (непрерывные) функции $\tau_i(x)$, где $x \equiv g_{i,r}(\eta_i)$, на каждом интервале вида $I_{i,r}$ (см. рис 1). Подчеркнем, что каждая из функций $\tau_i(g_{i,r}(\eta_i))$ определена для всех $r = \overline{0, m_i}$. Проведенные построения позволяют придать смысл выражениям

$$\mathbf{T}(\lambda; I_{i,0}) = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{s^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \tau_j(g_{i,0}(s))}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{T}(\lambda; I_{i,r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \tau_j(g_{i,r}(s))}, \quad r = \overline{1, m_i}. \quad (2.24)$$

Принимая во внимание проведенные рассуждения, можно видеть, что аналогичные непрерывные биекции $g'_{i,r}$ могут быть построены с помощью второго уравнения в (2.4) и функций μ_i .

Теорема 2.5 (об эквивалентности). Вектор $\bar{\lambda} \in \Lambda^*$ является векторным собственным значением задачи $P(\alpha)$, если и только если существуют такие целые числа $m_i = \bar{m}_i \geq 0$, что $\lambda = \bar{\lambda}$ при $m_i = \bar{m}_i$ является решением системы уравнений

$$\sum_{r=0}^{m_i} T(\lambda; I_{i,r}) = h; \quad (2.25)$$

при этом компонента $u_i \equiv u_i(x; \bar{\lambda}, \alpha)$ собственной функции $u = (u_1, \dots, u_n)$ имеет \bar{m}_i (простых) нулей $x_{i,r} = \sum_{k=0}^{r-1} T(\lambda; I_{i,k})$ на I , где $r = \overline{1, \bar{m}_i}$.

В связи с теоремой 2.5 можно ввести понятия (векторного) интегрального характеристического уравнения и (векторной) интегральной характеристической функции задачи $P(\alpha)$, аналогично тому как это сделано для задачи P_i , см. замечание 2.1 на стр. 13.

Теорема 2.5 позволяет ввести следующее определение.

Определение 2.2. Если вектор $\lambda = \bar{\lambda}$ является решением системы уравнений (2.25) кратности p , то $\bar{\lambda}$ — векторное собственное задачи $P(\alpha)$ той же кратности.

Используя теорему 2.4 и введенные выше биекции $g_{i,r}$, получаем следующий факт.

Следствие 2.2. Если $\lambda \in \Lambda^*$ и $\alpha \rightarrow \alpha'$, то

$$\sum_{r=0}^{m_i} T(\lambda; I_{i,r}) \rightarrow \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi(s; \lambda_i)} + m_i T_i(\lambda_i). \quad (2.26)$$

Вычитая из левой и правой частей уравнений (2.25) левую часть формулы (2.12) при $m'_i = m_i$, получаем систему уравнений

$$\sum_{r=0}^{m_i} T(\lambda; I_{i,r}) - \Phi_i(\lambda_i; m_i) = h - \Phi_i(\lambda_i; m_i). \quad (2.27)$$

Можно показать, что левые части (2.27) достаточно малы, как только величина $|\alpha - \alpha'|$ достаточно мала. Нули правых частей (2.27) — собственные значения задач P_i , удовлетворяющие следствию 2.1 (их имеется бесконечное число). Но тогда для каждого такого собственного значения найдется такой содержащий его интервал, что отвечающая этому собственному значению правая часть в (2.27) принимает значения разных знаков на противоположных концах этого интервала. Из этого рассуждения вытекает следующая основная теорема.

Теорема 2.6. Пусть каждая из задач P_i имеет m_i собственных значений $\hat{\lambda}_{i,1}, \dots, \hat{\lambda}_{i,m_i} \in \Lambda_i^* \subset \Lambda_i$, удовлетворяющих следствию 2.1. Тогда найдутся такие положительные постоянные α_{ij}^* при $i \neq j$, что для любых $0 < \alpha_{ij} < \alpha_{ij}^*$ ($i \neq j$) задача $P(\alpha)$ имеет по крайней мере $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ векторных собственных значений $\bar{\lambda}_{k_1, k_2, \dots, k_n} = (\bar{\lambda}_{1, k_1}, \bar{\lambda}_{2, k_2}, \dots, \bar{\lambda}_{n, k_n})$, где $k_i = \overline{1, m_i}$; при этом каждое $\bar{\lambda}_{k_1, k_2, \dots, k_n} \in U_{1, k_1} \times \dots \times U_{n, k_n}$, где $\hat{\lambda}_{i, k_i} \in U_{i, k_i}$.

Следствие 2.3. Если хотя бы одно из собственных значений $\hat{\lambda}_{1, k_1}, \dots, \hat{\lambda}_{n, k_n}$ обладает свойством (2) теоремы 2.2, $(\hat{\lambda}_{1, k_1}, \dots, \hat{\lambda}_{n, k_n}) \in \Lambda^*$ и все $\hat{\lambda}_{1, k_1}, \dots, \hat{\lambda}_{n, k_n}$ выбраны в соответствии со следствием 2.1, то при достаточно малой величине $|\alpha - \alpha'|$ в окрестности $(\hat{\lambda}_{1, k_1}, \dots, \hat{\lambda}_{n, k_n})$ найдется по крайней мере одно векторное собственное значение $\bar{\lambda}$ задачи $P(\alpha)$, и это векторное собственное значение не вырождается в набор собственных значений задач P_i^0 при $|\alpha - \alpha'| \rightarrow 0$.

Замечание 2.3. Числа λ_i^* выбираются достаточно большими, чтобы каждый интервал $(\varepsilon_{l,i}, \lambda_i^*)$ содержал собственное значение $\hat{\lambda}_{i,k}$ задачи P_i , удовлетворяющее следствию 2.1; числа $\alpha_{ii}^* > 0$ могут быть выбраны без каких-либо дополнительных условий. Интервал $(\varepsilon_{l,i}, \lambda_i^*)$ не содержит решений задач P_i^0 . После того как зафиксированы параметры λ_i^* и α_{ii}^* , в соответствии с теоремой 2.4 и утверждением 2.4 фиксируются (достаточно малые) параметры α_{ij}^* при $i \neq j$.

Поскольку числа λ_i^* в Λ_i заданы произвольно, а значит, могут быть выбраны достаточно большими, то теорема 2.2 утверждает существование векторных собственных значений $\bar{\lambda}_{k_1, \dots, k_n} = (\bar{\lambda}_{1, k_1}, \dots, \bar{\lambda}_{n, k_n})$ задачи $P(\alpha)$ в том числе в области, в которой отсутствуют собственные значения задач P_i^0 . Насколько известно, подобный результат в многопараметрических задачах рассмотренного в статье типа не был известен ранее. Теорема 2.6 также дает существование тех собственных значений $\bar{\lambda}_{k_1, \dots, k_n}$, которые являются возмущениями наборов решений $(\tilde{\lambda}_{1, k_1}, \dots, \tilde{\lambda}_{n, k_n})$ линейных задач P_i^0 . Аналогичный результат в некоторых нелинейных задачах ранее был получен с помощью интегральных уравнений (см. [25, 27, 30] и приведенную там библиографию).

Теорема 2.6 утверждает существование лишь конечного числа векторных собственных значений задачи $P(\alpha)$. Учитывая, что каждая из задач P_i имеет бесконечное число собственных значений, можно предположить, что задача $P(\alpha)$ также имеет бесконечное число решений. Доказательство этого результата хотя бы для малых α_{ij}^* явилось бы следующим существенным продвижением. Очевидное препятствие к получению такого результата — отсутствие глобальной однозначной разрешимости задачи Коши (1.1), (1.3) при $(x, \lambda, \alpha) \in \bar{I} \times \Lambda \times \mathbb{R}_+^{n^2}$ или $(x, \lambda, \alpha) \in \bar{I} \times \Lambda \times \mathbf{A}^*$. Еще одним препятствием является неограниченный рост \max собственных функций v_i при $\hat{\lambda}_i \rightarrow +\infty$ (см. п. (4) теоремы 2.2). Ограниченность v_i существенно используется при доказательстве следствия 2.2. Вероятно, что последнее затруднение можно преодолеть, используя подходящую «нормировку» собственных функций, как это сделано при доказательстве утверждения 2.1 в [29].

3. Доказательства.

Доказательство утверждения 2.2. Введем переменные $\bar{v}_i = v_i/\sqrt{\lambda_i}$; тогда из (2.2) следует, что \bar{v}_i^2 ограничены для всех $\lambda_i \in \Lambda_i$, $\bar{v}_i'^2$ ограничены для конечных λ_i и $\bar{v}_i'^2 = \lambda_i/2\alpha_{ii} + O(1)$ для больших λ_i . Из указанной ограниченности и проведенного ниже анализа следует результат о глобальной однозначной разрешимости.

Из формул (2.8)–(2.10) известно поведение μ_i в окрестностях концевых точек каждого из интервалов $I'_{i,r}$. Пусть

$$\begin{aligned} \mu_{i,0}^+ &= \mu_i(0+0) = \kappa_{s,i}, & \mu_{i,r}^- &= \mu_i(x'_{i,r} - 0) = -\infty, \\ \mu_{i,m'_i+1}^- &= \mu_i(h-0) = \mu_i(h), & \mu_{i,r}^+ &= \mu_i(x'_{i,r} + 0) = +\infty, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $r = \overline{1, m'_i}$, обозначают предельные значения функции μ_i в упомянутых концевых точках. Мы намеренно используем $\mu_i(h)$, а не $-\infty$, чтобы подчеркнуть, что значение $\mu_i(h)$ в этом доказательстве не задано.

Будем интегрировать уравнение (2.6) на каждом интервале $I'_{i,r}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mu_{i,0}^-}^{\mu_{i,1}^-} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} = x + c'_{i,0}, \quad x \in I'_{i,0}; \\ - \int_{\mu_{i,r}^+}^{\mu_i(x)} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} = x + c'_{i,r}, \quad x \in I'_{i,r}, \quad r = \overline{1, m'_i - 1}; \\ - \int_{\mu_{i,m'_i}^+}^{\mu_i(x)} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} = x + c'_{i,m'_i}, \quad x \in I'_{i,m'_i}. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Подставляя $x = 0 + 0$, $x = x'_{i,r+1} - 0$, $x = h - 0$ соответственно в первую, вторую и третью строки (3.2), получаем $c'_{i,0}$, $c'_{i,r}$ и c'_{i,m'_i} , где $r = \overline{1, m'_i - 1}$. Используя найденные $c'_{i,r}$ в (3.2), подставляя $x = x'_{i,1} - 0$, $x = x'_{i,k} + 0$, $x = x'_{i,m'_i} + 0$ соответственно в первую, вторую, третью строки

предыдущей системы, заменяя $\mu_{i,k}^{\pm}$ в (3.2) в соответствии с (3.1), получаем

$$\begin{cases} 0 < x'_{i,1} = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)}, \\ 0 < x'_{i,r+1} - x'_{i,r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)}, \quad r = \overline{1, m'_i - 1}; \\ 0 < h - x'_{i,m'_i} = \int_{\mu_i(h)}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Подробно эта процедура представлена в [26].

Поскольку левые части в (3.3) конечны, то таковы же и правые части. Отсюда следует сходимость всех несобственных интегралов в правых частях.

Суммируя все члены в (3.3), находим

$$\begin{aligned} x'_{i,1} + x'_{i,2} - x'_{i,1} + x'_{i,3} - x'_{i,2} + \dots + x'_{i,m'_i} - x'_{i,m'_i-1} + h - x'_{i,m'_i} = \\ = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} + (m'_i - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} + \int_{\mu_i(h)}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)}. \end{aligned}$$

Формула (2.11) следует из полученного соотношения.

Проведенные выкладки позволяют утверждать, что решение $v_i \equiv v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$ задачи Коши (1.6), (1.8) существует и определено глобально при $x \in \bar{I}$. Единственность этого решения и его гладкость по $(x, \lambda_i, \alpha_{ii}) \in \bar{I} \times \Lambda_i \times \mathbb{R}_+$ следует из гладкости правой части уравнения (1.6) по v_i, λ_i и α_{ii} (см. [11]). \square

Доказательство утверждения 2.1. Так как $v_i(h) = 0$, а функция μ_i убывает, то, как легко видеть, $\lim_{x \rightarrow h-0} \mu_i(x) = -\infty$. Теперь уравнение (2.12) получается из формулы (2.11) при условии (2.10).

Тот факт, что всякое решение (собственное значение) задачи P_i удовлетворяет уравнению (2.12) с некоторым $m'_i = \hat{m}_i$, следует из выкладок, проведенных при доказательстве утверждения 2.2. Докажем, что всякое (положительное) решение уравнения (2.12) является собственным значением задачи P_i . Пусть $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$ — решение (2.12) при $m'_i = \hat{m}_i$. Рассмотрим задачу Коши (1.6), (1.8) при $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$. Из утверждения 2.2 получаем, что решение $v_i \equiv v_i(x; \hat{\lambda}_i, \alpha_{ii})$ указанной задачи Коши существует, единственно и определено глобально при $x \in \bar{I}$.

Используя решение v_i , построим функции $\theta_i = v'_i/v_i$ и $\mu_i = v'_i/v_i$. Ясно, что $\theta_i(0) = A_i^2$ и $\mu_i(0) = \kappa_{s,i}$. На этом шаге мы не утверждаем, что условие $\lim_{x \rightarrow h-0} \mu_i(x; \hat{\lambda}_i) = -\infty$ выполняется. Положим для определенности $\mu_i(h) = v'_i(h)/v_i(h) = a > -\infty$. С помощью найденных θ_i и μ_i построим выражение, аналогичное (2.12); получаем

$$\int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} + (\hat{m}_i - 1) T_i(\hat{\lambda}_i) + \int_a^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} = h. \quad (3.4)$$

В силу единственности решения задачи Коши (1.6), (1.8) подынтегральное выражение в (3.4) совпадает с аналогичным в (2.12). В то же время $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$ удовлетворяет (2.12) при $m'_i = \hat{m}_i$. Вычитая (2.12) из (3.4), получаем

$$\int_a^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} = - \int_{-\infty}^a \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} = 0. \quad (3.5)$$

В силу очевидной оценки

$$\int_{-\infty}^a \frac{ds}{\chi_i(s; \widehat{\lambda}_i)} > 0$$

получаем, что (3.5) справедливо только если $a = -\infty$, но тогда $\widehat{\lambda}_i$ — собственное значение.

Формула для нулей $x'_{i,k}$ собственной функции v_i следует из формул (3.3). \square

Доказательство утверждения 2.3. Из (2.6) и (2.13) следует, что функция $T_i(\lambda_i)$ положительна и непрерывно зависит от $(\lambda_i, \alpha_{ii}) \in \Lambda_i \times \mathbb{R}_+$.

Неравенства

$$2\lambda_i^{1/2} \ln \lambda_i + O(\lambda_i^{1/2}) \leq T_i(\lambda_i) \leq 2\sqrt{2}\lambda_i^{1/2} \ln \lambda_i + O(\lambda_i^{1/2})$$

следуют из очевидных оценок

$$T_i^* \leq T_i(\lambda_i) \leq \sqrt{2}T_i^*, \quad (3.6)$$

где

$$T_i^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{|s^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i| + \sqrt{2\alpha_{ii}C_i}}$$

(см. [24]). \square

Доказательство теоремы 2.2. Ниже представлено сокращенное доказательство; полные выкладки проведены в [24].

Из (2.15) следует, что $\lim_{\lambda_i \rightarrow +\infty} T_i = 0$. Это означает, что существует такое целое число $m'_i \geq 0$, что для каждого целого $m \geq m'_i$ уравнение (2.12) имеет по крайней мере одно положительное решение $\lambda_i = \widehat{\lambda}_{i,m}$. Таким образом, существует бесконечное число положительных решений.

Пусть $\lambda_i \in [\varepsilon_{s,i} + \delta, \varepsilon_{l,i} - \delta]$, где $\delta > 0$ — достаточно малая величина. Переходя к пределу $\alpha_{ii} \rightarrow +0$ в (2.12), получаем уравнение

$$\widetilde{\Phi}_i(\lambda_i; m'_i) \equiv \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\widetilde{\chi}_i(s; \lambda_i)} + m'_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\widetilde{\chi}_i(s; \lambda_i)} = h,$$

где $\widetilde{\chi}_i(s; \lambda_i) = s^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i$. Вычислив интегралы и преобразуя, получаем уравнение (2.1), где можно взять $\lambda_i \in (\varepsilon_{s,i}, \varepsilon_{l,i})$. Указанный предельный переход дает связь между решениями задач P_i и P_i^0 .

Свойство (2) следует из (3.6).

Двустороннее асимптотическое неравенство вытекает из (2.12), (2.14) и (2.15).

Если собственная функция v_i имеет два или более нулей внутри \bar{I} , тогда она имеет (локальный) экстремум $v_{i,\text{ext}}$ внутри I . Пусть этот экстремум достигается при $x = x^*$, то есть $v'_i(x^*) = 0$. Используя (2.2) в указанной точке, можно получить биквадратное уравнение относительно $v_{i,\text{ext}}$. Решив это уравнение и положив λ_i достаточно большой величиной, получаем пункт (4) теоремы. \square

Доказательство теоремы 2.4. Утверждение теоремы 2.4 является прямым следствием применения теоремы 2.3 к задаче Коши (1.1), (1.3) при дополнительном предположении о глобальной однозначной разрешимости задач Коши (1.6), (1.8) при $(x, \lambda_i, \alpha_{ii}) \in \bar{I} \times \Lambda_i \times \mathbf{A}$. Справедливость этого дополнительного предположения гарантируется утверждением 2.2. Гладкость решения задачи Коши (1.1), (1.3) по $(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \in \bar{I} \times \boldsymbol{\Lambda}^* \times \mathbf{A}^*$ следует из гладкости правых частей системы (1.1) по u_i, λ_i и α_{ij} (см. [21]). \square

Доказательство утверждения 2.4. Из теоремы 2.4 следует, что если $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}^*$ и $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\alpha}'$, то

$$u_i(x; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \rightarrow v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii}), \quad u'_i(x; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \rightarrow v'_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii}) \quad (3.7)$$

равномерно по x при $x \in \bar{I}$, где $u_i(x; \lambda_i, \boldsymbol{\alpha})$ — решение задачи Коши (1.1), (1.3), а $v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$ — решение задачи Коши (1.6), (1.8).

Строго говоря, необходимо отдельно доказывать равномерное стремление u'_i к v'_i по x при $x \in \bar{I}$ и $\alpha \rightarrow \alpha'$. Но этот факт следует из глобальной однозначной разрешимости задачи Коши (1.1), (1.3) и гладкости правых частей уравнений (1.1) по u_i .

Из формул (3.7) следует если $\lambda \in \Lambda^*$ и $\alpha \rightarrow \alpha'$, то

$$\tau_i(x; \lambda, \alpha) \rightarrow \theta_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii}) \quad (3.8)$$

равномерно по x при $x \in \bar{I}$; здесь $\tau_i(x; \lambda, \alpha)$ и $\theta_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$ определены формулами (2.20) и (2.3) соответственно.

При x , лежащем достаточно близко к любому из концов интервала $I_{i,r}$, неравенства (2.22), очевидно, выполняются. Действительно, величина λ_i ограничена, а все остальные слагаемые в указанных формулах положительны, при этом величины $\eta_i^2(x)$ достаточно велики. Таким образом, остается доказать справедливость неравенств (2.22) только на некоторых замкнутых множествах $\bar{I}_{i,r}$, каждое из которых лежит строго внутри интервала $I_{i,r}$.

Итак, на каждом множестве $\bar{I}_{i,r}$ соответствующая функция $\eta_i(x)$ ограничена и непрерывна. Введем аналогичным образом замкнутые множества $\bar{I}'_{i,r}$, лежащие строго внутри $\bar{I}'_{i,r}$ (см. формулы (2.7)). На каждом множестве $\bar{I}'_{i,r}$ соответствующая функция $\mu_i(x)$ ограничена и непрерывна.

Пусть

$$\mathbf{x}'_i = \left(\bigcup_{r=0}^{m_i} \bar{I}_{i,r} \right) \cap \left(\bigcup_{r=0}^{m'_i} \bar{I}'_{i,r} \right).$$

Таким образом, функции $\eta_i(x)$ и $\mu_i(x)$ определены и ограничены на (замкнутом) множестве \mathbf{x}'_i . Но тогда в силу формул (3.7) получаем

$$\eta_i(x; \lambda, \alpha) \rightarrow \mu_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii}) \quad (3.9)$$

равномерно по x при $x \in \mathbf{x}'_i$, как только $\lambda \in \Lambda^*$ и $\alpha \rightarrow \alpha'$.

В силу формул (3.8) и (3.9) получаем, что

$$\eta_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \tau_j \rightarrow \mu_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \alpha_{ii} \theta_i$$

при $\alpha \rightarrow \alpha'$ равномерно по x при $(x, \lambda) \in \mathbf{x}'_i \times \Lambda^*$.

Из формул (2.4), (2.6) следует, что $\mu_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \alpha_{ii} \theta_i \geq \sqrt{2\alpha_{ii} C_i}$ при $x \in \mathbf{x}_i$. Тогда, в силу теоремы 2.4, можно выбрать такие положительные числа α_{ij}^0 , $i \neq j$, что неравенства (2.22) будут выполняться при $(x, \lambda, \alpha) \in \mathbf{x}'_i \times \Lambda^* \times \mathbf{A}^*$. При этом α_{ij} ($i \neq j$) выбраны так, что если $x \in \mathbf{x}_i \setminus \mathbf{x}'_i$, то неравенства (2.22) выполняются. Как и выше, считаем, что $\alpha_{ij}^* \leq \alpha_{ij}^0$ при $i \neq j$.

Из проведенных рассуждений следует, что δ_i можно выбрать так, что $|\delta_i|$ меньше любого фиксированного $\delta > 0$, при условии, что величина $|\alpha - \alpha'|$ достаточно мала.

Объединяя полученные результаты, заключаем, что неравенства (2.22) выполняются при $(x, \lambda, \alpha) \in \mathbf{x}_i \times \Lambda^* \times \mathbf{A}^*$. \square

Доказательство утверждения 2.5. Из теоремы 2.4 следует, что задача Коши (1.1), (1.3) глобально однозначно разрешима при $(x, \lambda, \alpha) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times \mathbf{A}^*$. Пусть ее решение определено формулами (2.18); при этом $A_i \neq 0$, и тогда все $u_i \neq 0$.

Из утверждения 2.4 следует, что функция $\eta_i(x) = u'_i(x)/u_i(x)$ монотонно убывает на каждом из интервалов $I_{i,r}$, $r = \overline{0, m_i}$ (см. формулу (2.19)). Отметим, что поскольку $u_i \neq 0$, то $u'_i(x_{i,r}) \neq 0$ для всех $r = \overline{0, m_i}$.

Тогда в окрестностях концевых точек каждого из интервалов $I_{i,r}$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \tau_i(x) &= A_i^2, & \eta_{i,0} &= \lim_{x \rightarrow +0} \eta_i(x) = \kappa_{s,i}, \\ \lim_{x \rightarrow x_{i,r}} \tau_i(x) &= 0, & \eta_{i,r}^{\pm} &= \lim_{x \rightarrow x_{i,r} \pm 0} \eta_i(x) = \pm \infty, \end{aligned}$$

где $r = \overline{1, m_i + 1}$.

В п. 2.3 были введены (непрерывные) взаимно однозначные отображения $g_{i,r}$, которые позволяют определять функции $\tau_i(x)$ при $x \equiv g_{i,r}(\eta_i)$ на каждом интервале $I_{i,r}$. Тогда можно определить функции

$$\varsigma_{i,r}(\eta_i; \boldsymbol{\lambda}) = \eta_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \tau_j(g_{i,r}(\eta_i)), \quad (3.10)$$

которые отвечают правым частям уравнений (2.21). Индекс r отвечает интервалу $I_{i,r}$, на котором рассматривается выражение $\varsigma_{i,r}(\eta_i; \boldsymbol{\lambda})$.

Интегрируя уравнение $\eta_i' = \varsigma_{i,r}(\eta_i; \boldsymbol{\lambda})$ на каждом интервале $I_{i,r}$, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\eta_i(x)}^{\eta_{i,1}^-} \frac{ds}{\varsigma_{i,0}(s; \boldsymbol{\lambda})} = x + c_{i,0}, \quad x \in I_{i,0}; \\ - \int_{\eta_{i,r}^+}^{\eta_i(x)} \frac{ds}{\varsigma_{i,r}(s; \boldsymbol{\lambda})} = x + c_{i,r}, \quad x \in I_{i,r}, \quad r = \overline{1, m_i - 1}; \\ - \int_{\eta_{i,m_i}^+}^{\eta_i(x)} \frac{ds}{\varsigma_{i,m_i}(s; \boldsymbol{\lambda})} = x + c_{i,m_i'}, \quad x \in I_{i,m_i}. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Подставляя $x = 0 + 0$, $x = x_{i,r+1} - 0$, $x = h - 0$ соответственно в первую, вторую и третью строки (3.11), определяем $c_{i,r}$. Подставляя найденные $c_{i,r}$ в (3.11), а затем подставляя $x = x_{i,1} - 0$, $x = x_{i,r} + 0$, $x = x_{i,m_i} + 0$ соответственно в первую, вторую, третью строки полученной системы и заменяя $\eta_{i,0}$, $\eta_{i,r}^\pm$ и η_{i,m_i+1} на $\kappa_{s,i}$, $\pm\infty$ и $-\infty$ соответственно, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x_{i,1} = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\varsigma_{i,0}(s; \boldsymbol{\lambda})}, \\ 0 < x_{i,r+1} - x_{i,r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,r}(s; \boldsymbol{\lambda})}, \quad r = \overline{1, m_i - 1}; \\ 0 < h - x_{i,m_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,m_i}(s; \boldsymbol{\lambda})}. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Формулы (3.12) дают расстояния между двумя соседними нулями u_i . Поскольку левые части в (3.12) конечны, то таковы же и правые части. Отсюда следует сходимость всех несобственных интегралов в правых частях.

Суммируя все члены в (3.12), находим

$$x_{i,1} + x_{i,2} - x_{i,1} + x_{i,3} - x_{i,2} + \dots + x_{i,m_i} - x_{i,m_i-1} + h - x_{i,m_i} = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\varsigma_{i,0}(s; \boldsymbol{\lambda})} + \sum_{r=1}^{m_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,r}(s; \boldsymbol{\lambda})}.$$

Из полученной формулы с учетом обозначений (2.23)–(2.24) следует (2.25).

Из проведенного рассуждения следует, что всякое решение (векторное собственное значение) задачи $P(\boldsymbol{\alpha})$ удовлетворяет системе уравнений (2.25) с некоторыми $m_i = \bar{m}_i$.

Докажем, что всякое решение (2.25) является векторным собственным значением задачи $P(\boldsymbol{\alpha})$. Пусть $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$ – решение (2.25) при $m_i = \bar{m}_i$. Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.3). Принимая во внимание теорему 2.4, получаем, что решение $u_i \equiv u_i(x; \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\alpha})$ указанной задачи Коши существует, единственно и определено глобально при $x \in \bar{I}$, где $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{\Lambda}^* \times \mathbf{A}^*$. Используя это решение, построим функции $\tau_i = u_i^2$ и $\eta_i = u_i'/u_i$. Ясно, что $\tau_i(0) = A_i^2$ и $\eta_i(0) = \kappa_{s,i}$. Пока

мы не утверждаем, что условие $\lim_{x \rightarrow h-0} \eta_i(x; \bar{\lambda}) = -\infty$ выполняется. Пусть для определенности $\tau_i(h) = u'_i(h)/u_i(h) = a > -\infty$. С помощью найденных τ_i и η_i построим выражение, аналогичное одному из выражений (2.25); получаем

$$\int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\varsigma_{i,0}(s; \bar{\lambda})} + \sum_{r=1}^{\bar{m}_i-1} \mathbf{T}(\bar{\lambda}; \mathbf{I}_{i,r}) + \int_a^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,\bar{m}_i}(s; \bar{\lambda})} = h. \quad (3.13)$$

В силу единственности решения задачи Коши (1.1), (1.3) подынтегральные выражения в (3.13) совпадают с соответственными выражениями в (2.25). В тоже время $\lambda = \bar{\lambda}$ удовлетворяет (2.25). Вычитая соответствующую строку (2.25) из (3.13), получаем

$$\int_a^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,\bar{m}_i}(s; \lambda)} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,\bar{m}_i}(s; \lambda)} = - \int_{-\infty}^a \frac{ds}{\varsigma_{i,\bar{m}_i}(s; \lambda)} = 0. \quad (3.14)$$

Это означает, что (3.14) выполняется тогда и только тогда, когда $a = -\infty$. Следовательно, $\bar{\lambda}$ — векторное собственное значение задачи $P(\alpha)$. \square

Доказательство следствия 2.2. Рассмотрим разность

$$d_i = \sum_{r=0}^{m_i} \mathbf{T}(\lambda; \mathbf{I}_{i,r}) - \Phi_i(\lambda_i; m_i) = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\varsigma_{i,0}(s; \lambda)} - \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} + \sum_{r=1}^{m_i} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,r}(s; \lambda)} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} \right), \quad (3.15)$$

где функции $\chi_i(s; \lambda_i)$ и $\varsigma_{i,r}(s; \lambda)$ определены в (2.6) и (3.10) соответственно.

Выпишем отдельно одно из слагаемых в правой части получившегося выражения (3.15); например, при $i = i'$ и $r = r'$ получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i',r'}(s; \lambda)} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_{i'}(s; \lambda_{i'})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{i'i'}(\theta_{i'}(x') - \tau_{i'}(x)) - \sum' \alpha_{i'j} \tau_j(x)}{\varsigma_{i',r'}(s; \lambda) \chi_{i'}(s; \lambda_{i'})} ds, \quad (3.16)$$

где $x \equiv g_{i',r'}(s)$, $x' \equiv g'_{i',r'}(s)$, $\sum' = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i'}}^n$; здесь $g'_{i',r'}(s)$ строятся с помощью функций μ_i так же, как и функции $g_{i,r}(s)$.

Так как $u_i \rightarrow v_i$ и $u'_i \rightarrow v'_i$ равномерно по x при $x \in \bar{\mathbf{I}}$ и $\lambda \in \Lambda^*$, $\alpha \rightarrow \alpha'$, то $g_{i,r}(s) \rightarrow g'_{i,r}(s)$ при $\alpha \rightarrow \alpha'$. Следовательно, разность $\theta_{i'}(x') - \tau_{i'}(x)$ стремится к нулю равномерно по x при $x \in \bar{\mathbf{I}}$ и $\lambda \in \Lambda^*$, $\alpha \rightarrow \alpha'$; функции $\tau_j(x)$ при $j \neq i'$ ограничены для всех $(x, \lambda, \alpha) \in \bar{\mathbf{I}} \times \Lambda^* \times \mathbf{A}^*$. Так как $\alpha \rightarrow \alpha'$, то $\alpha_{ij} \rightarrow 0$ при $i \neq j$. Это означает, что величины $\sum' \alpha_{i'j} \tau_j(x)$ могут быть сделаны сколь угодно малыми, как только величина $\alpha_{i'j}$ достаточна мала при $j \neq i'$. Тогда из (3.16) получаем

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{i'i'}(\theta_{i'}(x') - \tau_{i'}(x)) - \sum' \alpha_{i'j} \tau_j(x)}{\varsigma_{i',r'}(s; \lambda) \chi_{i'}(s; \lambda_{i'})} ds \right| \leq \frac{M}{\sqrt{2\alpha_{i'i'} C_{i'}} - \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_{i'}(s; \lambda_{i'})} = \frac{M}{\sqrt{2\alpha_{i'i'} C_{i'}} - \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2 + \varepsilon_{l,i'} - \lambda_{i'})^2 + 2\alpha_{i'i'} C_{i'}}}, \quad (3.17)$$

где M и δ — некоторые величины, зависящие от λ, α . Из проведенных рассуждений следует, что $M \rightarrow 0$, когда $\alpha \rightarrow \alpha'$; из утверждения 2.4 следует, что δ можно выбрать сколько угодно малой при $\alpha \rightarrow \alpha'$. Оставшийся в (3.17) интеграл сходится (см. доказательство теоремы 2.2). Таким образом, разность (3.16) стремится к нулю при $\alpha \rightarrow \alpha'$. Поскольку проведенные выкладки

справедливы для каждого из слагаемых в (3.15) и для всех значений i , то получаем, что $d_i \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \alpha'$.

Точно так же можно доказать, что разность

$$\int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{s_{i,0}(s; \lambda)} - \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)}$$

стремится к нулю при $\alpha \rightarrow \alpha'$ для всех i . \square

Доказательство теоремы 2.6. В силу следствия 2.2 получаем, что для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\epsilon' > 0$, что левые части формул (2.27) по абсолютному значению будут меньше ϵ , как только $|\alpha - \alpha'| < \epsilon'$.

Нули правых частей формул (2.27) являются собственными значениями задач P_i . Из теоремы 2.2 известно, что каждая из задач P_i имеет бесконечное число (положительных) собственных значений $\widehat{\lambda}_{i,m}$ с точкой накопления на бесконечности. Среди собственных значений $\widehat{\lambda}_{i,m}$ существует бесконечно много собственных значений $\widehat{\lambda}_{i,m,r}$, удовлетворяющих следствию 2.1.

Зафиксируем интервалы $\Lambda_i^* = (\epsilon_{s,i}, \lambda_i^*)$, где значения λ_i^* выбираются достаточно большими, чтобы интервал $(\epsilon_{l,i}, \lambda_i^*)$ заведомо содержал собственные значения $\widehat{\lambda}_{i,m,r}$, определенные в следствии 2.1. Отсюда следует, что для всякого простого собственного значения $\widehat{\lambda}_{i,m,r} \in \Lambda_i^*$ найдется такой содержащий его интервал $U_{i,m,r}$, что правая часть формулы в (2.27), отвечающей $\widehat{\lambda}_{i,m,r}$, принимает значения разных знаков на противоположных концах этого интервала. Поскольку левые части могут быть сделаны как угодно малыми, а правые части не зависят от α_{ij} при $i \neq j$, непрерывны по λ_i и меняют знак при переходе через $\widehat{\lambda}_{i,m,r}$, то при достаточно малых α_{ij} при $i \neq j$ в указанных интервалах найдутся числа $\widehat{\lambda}_{i,m,r}$, удовлетворяющие системе (2.25). \square

4. Приложения. Пусть $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ — слой, заполненный диэлектриком с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от внешнего электромагнитного поля и помещенный в декартову систему координат $Oxyz$. На границе $x = h$ расположен бесконечно тонкий абсолютно проводящий экран. Полупространство $x < 0$ заполнено немагнитной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_s \geq \epsilon_0 > 0$, где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума.

В соответствии с [27] введем многочастотное поле

$$\mathbf{E}_\omega = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}_j e^{-i\omega_j t}, \quad \mathbf{H}_\omega = \sum_{j=1}^n \mathbf{H}_j e^{-i\omega_j t}, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_j^+ + i\mathbf{E}_j^-$, $\mathbf{H}_j = \mathbf{H}_j^+ + i\mathbf{H}_j^-$ — комплексные амплитуды (см. [19]). Действительное поле $\tilde{\mathbf{E}}_\omega$, $\tilde{\mathbf{H}}_\omega$ имеет вид $\tilde{\mathbf{E}}_\omega(x, y, z, t) = \text{Re } \mathbf{E}_\omega$, $\tilde{\mathbf{H}}_\omega(x, y, z, t) = \text{Re } \mathbf{H}_\omega$, ω_j — частоты, характеризующие волну.

Предполагается, что диэлектрическая проницаемость слоя ϵ_l слоя Σ является диагональным тензором, зависящим от поля по закону Керра, т.е.

$$\epsilon_l(\tilde{\mathbf{E}}_\omega) \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_x + f_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y + f_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z + f_z \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ — такие вещественные положительные константы, что

$$\min\{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z\} > \epsilon_s > 0, \quad f_r \equiv \sum_{j=1}^n (\beta_{x,j,r} |(\mathbf{E}_j, \mathbf{e}_x)|^2 + \beta_{y,j,r} |(\mathbf{E}_j, \mathbf{e}_y)|^2 + \beta_{z,j,r} |(\mathbf{E}_j, \mathbf{e}_z)|^2);$$

здесь $\beta_{r,j,r'}$ — вещественные постоянные, (\cdot, \cdot) — евклидово скалярное произведение, \mathbf{e}_r — единичный вектор в направлении r , $r, r' \in \{x, y, z\}$. Диэлектрическая проницаемость вида (4.2) имеет важное значение с точки зрения приложений (см. [14, 16–20, 23, 24, 28, 31]).

Подставляя (4.1) в уравнения Максвелла и учитывая, что оператор rot является линейным, получаем, что $\mathbf{E}_k, \mathbf{H}_k$ удовлетворяют следующим (связанным) уравнениям:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n e^{-i\omega_j t} \text{rot } \mathbf{H}_j = -i\epsilon \sum_{j=1}^n \omega_j \mathbf{E}_j e^{-i\omega_j t}, \\ \sum_{j=1}^n e^{-i\omega_j t} \text{rot } \mathbf{E}_j = i\mu \sum_{j=1}^n \omega_j \mathbf{H}_j e^{-i\omega_j t}, \end{cases} \quad (4.3)$$

где i — мнимая единица. Поскольку полученная система должна быть выполнена для всех t , то отсюда следует система, состоящая из $2n$ (связанных) уравнений

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_j = -i\epsilon\omega_j \mathbf{E}_j, \\ \text{rot } \mathbf{E}_j = i\mu\omega_j \mathbf{H}_j, \end{cases} \quad (4.4)$$

где $j = \overline{1, n}$.

Таким образом, $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ удовлетворяют уравнениям (4.4) и затухают как $O(|x|^{-1})$ при $x \rightarrow -\infty$; касательные компоненты полей $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ непрерывны на границе $x = 0$, а касательные компоненты электрических полей \mathbf{E}_j обращаются в нуль на границе $x = h$; кроме того, поля $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ имеют заданные значения на границе $x = 0$.

Теперь рассмотрим конфигурацию поля (4.1), которая приводит к задаче, изученной в разделе 2. Считаем, что поля $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_j &= (0, e_y^{(j)}, 0)^\top e^{i\gamma_j z}, & \mathbf{H}_j &= (h_x^{(j)}, 0, h_z^{(j)})^\top e^{i\gamma_j z} & \text{для } 1 \leq j \leq j', \\ \mathbf{E}_j &= (0, 0, e_z^{(j)})^\top e^{i\gamma_j y}, & \mathbf{H}_j &= (h_x^{(j)}, h_y^{(j)}, 0)^\top e^{i\gamma_j y} & \text{для } j' \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где компоненты $e_y^{(j)}, e_z^{(j)}, h_x^{(j)}, h_y^{(j)}, h_z^{(j)}$ зависят только от пространственной переменной x (эти величины как решения уравнений Максвелла также зависят от других параметров задачи), а γ_j — неизвестные вещественные постоянные. Другими словами, мы рассматриваем сумму ТЕ-полей, распространяющихся в направлениях Oz и Oy соответственно.

Подставляя (4.5) в (4.4) и используя обозначение $u_j := e_y^{(j)}$ при $j = \overline{1, j'}$ и $u_j := e_z^{(j)}$ при $j = \overline{j'+1, n}$, после простых преобразований получаем систему

$$\begin{cases} u_1'' = -(\mu\omega_1^2\epsilon - \lambda_1)u_1, \\ \dots\dots\dots, \\ u_{j'}'' = -(\mu\omega_{j'}^2\epsilon - \lambda_{j'})u_{j'}, \\ u_{j'+1}'' = -(\mu\omega_{j'+1}^2\epsilon - \lambda_{j'+1})u_{j'+1}, \\ \dots\dots\dots, \\ u_n'' = -(\mu\omega_n^2\epsilon - \lambda_n)u_n, \end{cases} \quad (4.6)$$

где $\lambda_j = \mu\omega_j^2\gamma_j^2 > 0$ и

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_s, & x < 0, \\ \epsilon_l, & 0 \leq x \leq h. \end{cases} \quad (4.7)$$

В соответствии с условием затухания на бесконечности решения системы (4.6) в полупространстве $x < 0$ имеют вид

$$u_j(x) = A_j e^{\kappa_{s,j} x} \quad \text{при } x < 0, \quad (4.8)$$

где A_j — вещественная постоянная (без потери общности можем считать, что $A_j > 0$) и $\kappa_{s,j} = \sqrt{\lambda_j - \epsilon_{s,j}} > 0$, где $\epsilon_{s,j} = \mu\omega_j^2\epsilon_s$.

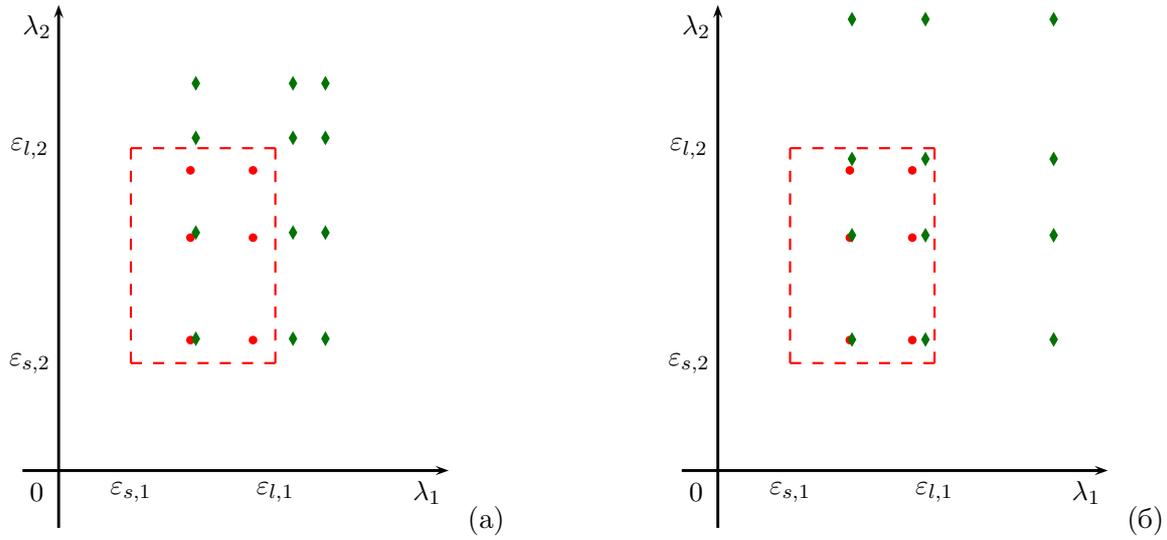


Рис. 2. (а) $\alpha_{11} = 0.06$, $\alpha_{22} = 0.04$ и $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$; здесь $\widehat{\lambda}_{1,0} \approx 1,898$, $\widehat{\lambda}_{1,1} \approx 3,243$, $\widehat{\lambda}_{1,2} \approx 3,692$ и $\widehat{\lambda}_{2,0} \approx 1,838$, $\widehat{\lambda}_{2,1} \approx 3,321$, $\widehat{\lambda}_{2,2} \approx 4,642$, $\widehat{\lambda}_{2,3} \approx 5,404$; (б) $\alpha_{11} = 0,03$, $\alpha_{22} = 0,02$ и $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$; здесь $\widehat{\lambda}_{1,0} \approx 1,856$, $\widehat{\lambda}_{1,1} \approx 2,874$, $\widehat{\lambda}_{1,2} \approx 4,648$ и $\widehat{\lambda}_{2,0} \approx 1,829$, $\widehat{\lambda}_{2,1} \approx 3,284$, $\widehat{\lambda}_{2,2} \approx 4,351$, $\widehat{\lambda}_{2,3} \approx 6,299$.

(см. [2, 15]) не подходят для исследования задачи P , поскольку для их применения естественное дополнительное условие является условием типа $\|u\| = \text{const}$.

5. Численные результаты. В этом разделе рассмотрим случай $n = 2$, который, с одной стороны, является простейшим нетривиальным многомерным случаем, а с другой стороны, его можно достаточно хорошо проиллюстрировать.

При расчетах использованы следующие значения параметров: $n = 2$, $\varepsilon_{l,1} = 3$, $\varepsilon_{l,2} = 4,5$, $\varepsilon_{s,1} = 1$, $\varepsilon_{s,2} = 1,5$, $A_1 = A_2 = 1$, $h = 5$.

Несмотря на то, что решения задач P_1^0 , P_2^0 и P_1 , P_2 являются скалярными собственными значениями, будем рассматривать их как пары $\widetilde{\lambda}_{k,k'} = (\widetilde{\lambda}_{i,k}, \widetilde{\lambda}_{j,k'})$ и $\widehat{\lambda}_{k,k'} = (\widehat{\lambda}_{i,k}, \widehat{\lambda}_{j,k'})$, где $i, j = \{1, 2\}$ и k, k' являются неотрицательными целочисленными индексами. Такие пары представлены как точки на плоскости $O\lambda_1\lambda_2$.

На каждом графике ниже пары $\widetilde{\lambda}_{k,k'} = (\widetilde{\lambda}_{i,k}, \widetilde{\lambda}_{j,k'})$, соответствующие решениям задач P_1^0 , P_2^0 , могут существовать только внутри прямоугольника с (красной) пунктирной границей (см. утверждение 2.1).

На рис. ?? пары собственных значений $\widetilde{\lambda}_{k,k'} = (\widetilde{\lambda}_{i,k}, \widetilde{\lambda}_{j,k'})$ задач P_1^0 , P_2^0 представлены (красными) кружками; пары собственных значений $\widehat{\lambda}_{k,k'} = (\widehat{\lambda}_{i,k}, \widehat{\lambda}_{j,k'})$ задач P_1 , P_2 представлены (зелеными) ромбами. На рис. 3 векторные собственные значения $\widetilde{\lambda}_{k,k'} = (\widetilde{\lambda}_{i,k}, \widetilde{\lambda}_{j,k'})$ задач $P(\alpha)$ представлены (синими) звездочками.

Для выбранных параметров в задачах P_1^0 и P_2^0 существуют 2 и 3 собственных значения соответственно. Это означает, что имеется 6 пар: $\widetilde{\lambda}_{k,k'} = (\widetilde{\lambda}_{i,k}, \widetilde{\lambda}_{j,k'})$, где $\widetilde{\lambda}_{1,0} \approx 1,827$, $\widetilde{\lambda}_{1,1} \approx 2,692$ и $\widetilde{\lambda}_{2,0} \approx 1,821$, $\widetilde{\lambda}_{2,1} \approx 3,251$, $\widetilde{\lambda}_{2,2} \approx 4,189$.

Для сравнения на рис. 2 собственные значения задач P_1 , P_2 изображены точками (парами) вместе с парами собственных значений задач P_1^0 , P_2^0 . Каждая из задач P_1 , P_2 имеет бесконечное число положительных собственных значений; здесь представлены только несколько первых собственных значений в каждом случае.

Можно видеть, что рис. 2(а) и 2(б) согласуются с п. (1) теоремы 2.2. Действительно, уменьшая α_{11} и α_{22} , можно видеть, что существует хотя бы одна пара $\widehat{\lambda}_{k,k'} = (\widehat{\lambda}_{i,k}, \widehat{\lambda}_{j,k'})$ в окрестности каждой пары $\widetilde{\lambda}_{k,k'} = (\widetilde{\lambda}_{i,k}, \widetilde{\lambda}_{j,k'})$ и, следовательно, существует хотя бы одно собственное значение $\widehat{\lambda}_{i,k}$ в окрестности каждого собственного значения $\widetilde{\lambda}_{i,k}$ при достаточно малых α_{ii} .

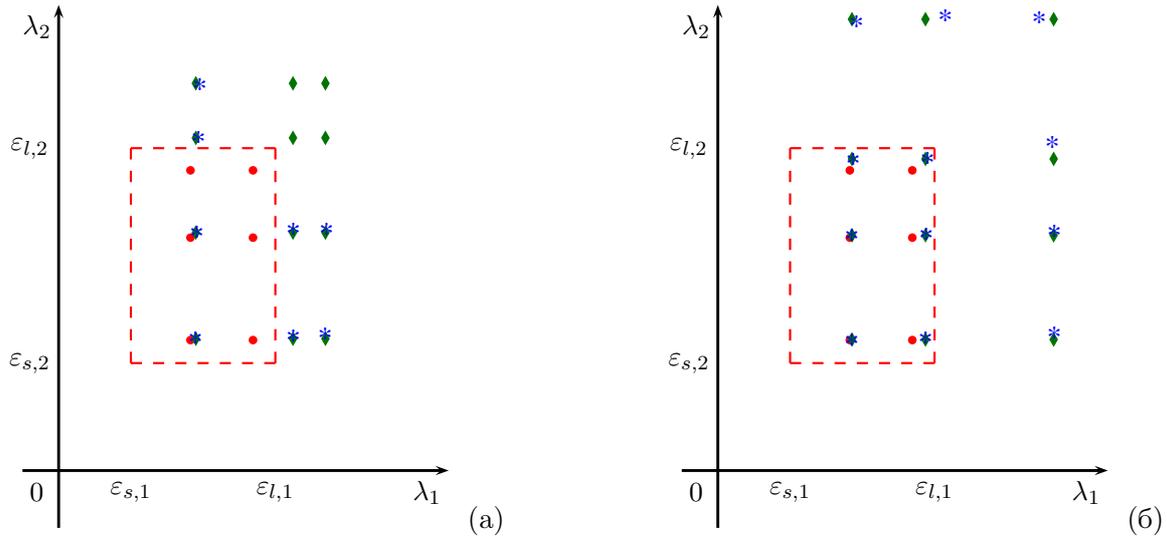


Рис. 3. (а) $\alpha_{11} = 0,06$, $\alpha_{22} = 0,04$, $\alpha_{12} = 0,005$, $\alpha_{21} = 0,006$; здесь $\bar{\lambda}_{00} \approx (1,895, 1,862)$, $\bar{\lambda}_{01} \approx (1,916, 3,338)$, $\bar{\lambda}_{02} \approx (1,938, 4,653)$, $\bar{\lambda}_{03} \approx (1,955, 5,397)$, $\bar{\lambda}_{10} \approx (3,253, 1,886)$, $\bar{\lambda}_{11} \approx (3,253, 3,368)$, $\bar{\lambda}_{20} \approx (3,688, 1,912)$, $\bar{\lambda}_{21} \approx (3,707, 3,368)$; (б) $\alpha_{11} = 0,03$, $\alpha_{22} = 0,02$, $\alpha_{12} = 0,002$, $\alpha_{21} = 0,003$; здесь $\bar{\lambda}_{00} \approx (1,856, 1,835)$, $\bar{\lambda}_{01} \approx (1,856, 3,293)$, $\bar{\lambda}_{02} \approx (1,876, 4,346)$, $\bar{\lambda}_{03} \approx (1,918, 6,277)$, $\bar{\lambda}_{10} \approx (2,878, 1,856)$, $\bar{\lambda}_{11} \approx (2,884, 3,308)$, $\bar{\lambda}_{12} \approx (2,902, 4,369)$, $\bar{\lambda}_{13} \approx (3,154, 6,348)$, $\bar{\lambda}_{20} \approx (4,658, 1,922)$, $\bar{\lambda}_{21} \approx (4,661, 3,349)$, $\bar{\lambda}_{22} \approx (4,631, 4,581)$, $\bar{\lambda}_{23} \approx (4,449, 6,325)$.

Рисунки 3(а) и 3(б) согласуются с теоремой 2.6. Действительно, можно видеть, что в окрестности каждой пары $\bar{\lambda}_{k,k'} = (\bar{\lambda}_{i,k}, \bar{\lambda}_{j,k'})$ при достаточно малых α_{12} и α_{21} существует хотя бы одна пара $\hat{\lambda}_{k,k'} = (\hat{\lambda}_{i,k}, \hat{\lambda}_{j,k'})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. — М.: Мир, 1984.
2. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. — М.: ГИТТЛ, 1956.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
4. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988.
5. Валовик Д. В. О нелинейной задаче на собственные значения, связанной с теорией распространения электромагнитных волн // Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 2. — С. 168–179.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
7. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1956.
8. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
9. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: ГИТТЛ, 1956.
10. Осмоловский В. Г. Нелинейная задача Штурма—Лиувилля. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003.
11. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ГИФМЛ, 1961.
12. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1962.
13. Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики. — М.: Наука, 1989.
14. Akhmediev N. N., Ankeevich A. Solitons, Nonlinear Pulses and Beams. — London: Chapman and Hall, 1997.
15. Ambrosetti A., Rabinowitz P. H. Dual variational methods in critical point theory and applications // J. Funct. Anal. — 1973. — 14, № 4. — P. 349–381.
16. Boardman A. D., Egan P., Lederer F., Langbein U., Mihalache D. Third-Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves. — Amsterdam–London–New York–Tokyo: Elsevier, 1991.

17. Boardman A. D., Twardowski T. Theory of nonlinear interaction between te and tm waves// J. Opt. Soc. Am. B. — 1988. — 5, № 2. — P. 523–528.
18. Boardman A. D., Twardowski T. Transverse-electric and transverse-magnetic waves in nonlinear isotropic waveguides// Phys. Rev. A. — 1989. — 39, № 5. — P. 2481–2492.
19. Eleonskii P. N., Ogan'es'yants L. G., Silin V. P. Cylindrical nonlinear waveguides// Sov. Phys. JETP. — 1972. — 35, № 1. — P. 44–47.
20. Eleonskii P. N., Ogan'es'yants L. G., Silin V. P. Structure of three-component vector fields in self-focusing waveguides// Sov. Phys. JETP. — 1973. — 36, № 2. — P. 282–285.
21. Pontryagin L. S. Ordinary Differential Equations. — Pergamon Press, 1962.
22. Schürmann H. W., Smirnov Yu. G., Shestopalov Yu. V. Propagation of te-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides// Phys. Rev. E. — 2005. — 71, № 1. — 016614.
23. Skryabin D. V., Biancalana F., Bird D. M., Benabid F. Effective kerr nonlinearity and two-color solitons in photonic band-gap fibers filled with a raman active gas// Phys. Rev. Lett. — 2004. — 93, № 14. — 143907.
24. Smirnov Yu. G., Valovik D. V. Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity// Phys. Rev. A. — 2015. — 91, № 1. — 013840.
25. Smirnov Yu. G., Valovik D. V. Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation// J. Math. Phys. — 2013. — 54, № 8. — 083502.
26. Valovik D. V. Integral dispersion equation method to solve a nonlinear boundary eigenvalue problem// Nonlin. Anal. Real World Appl. — 2014. — 20, № 12. — P. 52–58.
27. Valovik D. V. Nonlinear multi-frequency electromagnetic wave propagation phenomena// J. Optics. — 2017. — 19, № 11. — 115502.
28. Valovik D. V. Novel propagation regimes for te waves guided by a waveguide filled with Kerr medium// J. Nonlin. Opt. Phys. Mater. — 2016. — 25, № 4. — 1650051.
29. Valovik D. V. On the existence of infinitely many nonperturbative solutions in a transmission eigenvalue problem for nonlinear Helmholtz equation with polynomial nonlinearity// Appl. Math. Model. — 2018. — 53. — P. 296–309.
30. Valovik D. V. On the problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TM wave propagation// J. Math. Phys. — 2013. — 54, № 4. — 042902.
31. Xie P., Zhang Z. Q. Multifrequency gap solitons in nonlinear photonic crystals// Phys. Rev. Lett. — 2003. — 91, № 21. — 213904.

Валовик Дмитрий Викторович
Пензенский государственный университет
E-mail: dvalovik@mail.ru

Курсеева Валерия Юрьевна
Пензенский государственный университет
E-mail: lynxbax@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 30–37
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-30-37

УДК 517.927.2, 517.958

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТРИЧНОГО МЕТОДА
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ
ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

© 2019 г. Ю. А. ГЛАДЫШЕВ, В. В. КАЛМАНОВИЧ

Аннотация. Работа посвящена возможности применения матричного метода решения уравнения теплопроводности для многослойных сред в случае, когда в каком-либо слое возможен фазовый переход. Рассматриваются только стационарные процессы при отсутствии в среде внутренних источников тепла. Предложен общий метод решения для систем слоев, обладающих сдвиговой, осевой или центральной симметрией, основанный на аппарате обобщенных степеней Берса. По указанному методу проведены вычисления для одного вещества, когда в результате фазового перехода система становится двухслойной. Рассмотрена зависимость координаты точки фазового перехода от внешней температуры, проведено сравнение для сред с вышеперечисленными видами симметрии. Построено поле температур для многослойных сред с различными видами симметрии, когда в каком-либо слое произошел фазовый переход.

Ключевые слова: математическая модель, матричный метод, уравнение теплопроводности, многослойная среда, фазовый переход.

ON THE MATRIX METHOD
FOR SOLVING HEAT CONDUCTION PROBLEMS
IN A MULTILAYER MEDIUM
IN THE PRESENCE OF PHASE TRANSITIONS

© 2019 YU. A. GLADYSHEV, V. V. KALMANOVICH

ABSTRACT. The work is devoted to the applicability of the matrix method for solving the heat equation for multilayer media in the case where a phase transition is possible in some layer. We consider only stationary processes in the absence of internal heat sources. We propose a general method for layer systems with translation, axial, or central symmetry based on the technique of generalized Bers degrees. By the method indicated above, we perform calculations for one substance, when after a phase transition, the system becomes a two-layer system. We consider the dependence of the coordinate of the phase-transition point on the external temperature and compare results obtained for media with types of symmetry indicated above. A temperature field is constructed for multilayer media with various types of symmetry when a phase transition has occurred in a certain layer.

Keywords and phrases: mathematical model, matrix method, heat equation, multilayer medium, phase transition.

AMS Subject Classification: 34B05, 34B60, 80A20

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также совместного проекта Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Калужской области № 18-41-400001.

1. Введение. Нелинейные задачи теплопроводности в многослойной среде представляют большой интерес, поскольку в современной технике часто используют материалы, полученные путем соединения различных сред или покрытий, причем при широком диапазоне температур. В многослойной среде возможно наличие слоев, в которых при повышении температуры выше некоторого значения T_Φ происходит фазовый переход в состояние с другими параметрами. В слое этот процесс может развиваться постепенно в зависимости от повышения или понижения температуры, пока не установится некоторое конечное стационарное состояние. В данной работе будут рассмотрены только стационарные задачи. Постановка и решение краевых задач в многослойной среде, когда основные параметры не зависят от температуры, изучены в ряде работ (см., например, [5–8]). Авторами был предложен матричный метод построения решения задач тепло-массопереноса (см. [2–4]). В настоящей работе показано, что этот метод может быть использован для построения решения, когда в одном или нескольких слоях происходит фазовый переход.

2. Постановка задачи. Рассмотрим процесс теплопроводности в многослойной неоднородной (возможно, искривленной) оболочке, когда в одном из слоев возможен фазовый переход. Предполагая процесс одномерным и направленным по нормали к оболочке, направим ось x по этой нормали. Пусть x_1, \dots, x_{n+1} — координаты слоев, причем x_1 и x_{n+1} — координаты внешних поверхностей.

Основная система уравнений, определяющая температуру $T^{(i)}(x)$ в i -м слое (номер слоя указан в верхнем индексе в скобках и совпадает с номером его меньшей координаты), имеет вид

$$D_2^{(i)} D_1^{(i)} T^{(i)}(x) - m_i^2 T^{(i)}(x) = \mu^{(i)}(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где дифференциальные операторы $D_1^{(i)}$ и $D_2^{(i)}$ определяются выражениями

$$D_1^{(i)} = a_1^{(i)}(x) \frac{d}{dx}, \quad D_2^{(i)} = a_2^{(i)}(x) \frac{d}{dx}.$$

Для процесса теплопроводности, заданного уравнением (1), функции $a_1^{(i)}(x)$ и $a_2^{(i)}(x)$ положительны и определяются соотношениями

$$a_1^{(i)} = \lambda^{(i)} x^s, \quad a_2^{(i)} = x^{-s},$$

где $\lambda^{(i)}$ — коэффициент теплопроводности i -го слоя. Значение показателя s определяется геометрией среды: значение $s = 0$ соответствует процессу теплопроводности в среде со сдвиговой симметрией (плоские слои) по оси x , $s = 1$ — с осевой симметрией (цилиндрические слои) и $s = 2$ — с центральной симметрией (сферические слои).

Плотность теплового потока определяется выражением

$$J^{(i)}(x) = -D_1^{(i)} T^{(i)}(x).$$

Коэффициенты $m^{(i)}$ позволяют учитывать общий характер процессов (например, наличие внешнего теплообмена и др.). Функция $\mu^{(i)}(x)$ определяет объемную плотность мощности распределения источников.

Далее рассматривается простейший случай процесса теплопроводности, когда $m^{(i)} = 0$ и нет внутренних источников, т.е. уравнение (1) принимает вид

$$D_2^{(i)} D_1^{(i)} T^{(i)}(x) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

На внутренних границах слоев приняты условия согласования типа идеального контакта, состоящие в непрерывности температуры и теплового потока:

$$T^{(i)}(x_{i+1}) = T^{(i+1)}(x_{i+1}), \quad J^{(i)}(x_{i+1}) = J^{(i+1)}(x_{i+1}), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (3)$$

Далее предполагается, что для всех слоев коэффициенты теплопроводности $\lambda^{(i)}$ не зависят от температуры, за исключением некоторого k -го слоя, на котором $\lambda^{(k)}$ зависит от температуры и определяется следующим образом:

$$\lambda^{(k)}(T) = \begin{cases} \lambda_1^{(k)}, & T < T_\Phi, \\ \lambda_2^{(k)}, & T > T_\Phi; \end{cases}$$

здесь T_Φ — температура фазового перехода в k -м слое, $\lambda_1^{(k)}$ и $\lambda_2^{(k)}$ — теплопроводности фаз. В этом случае уравнение (3) нелинейное.

На границах x_1, x_2 системы слоев заданы температуры, т.е. поставлена первая краевая задача

$$T^{(1)}|_{x_1} = T_1, \quad T^{(n)}|_{x_{n+1}} = T_2. \quad (4)$$

3. Матричный метод построения решения. Решения системы (2)–(3) с краевыми условиями (4) в данной работе строятся матричным методом, который был описан нами ранее в ряде работ (см. [2–4]). Идея использования матричного метода применительно к задачам с периодическим режимом упоминается в [5], однако из-за громоздких преобразований, которые нужно было бы выполнять вручную и невозможности использования в то время символьных вычислений на ЭВМ матричный метод не получил распространения. В настоящее время, когда существуют различные эффективные системы компьютерной алгебры, матричный метод может быть весьма перспективным как аналитический метод решения задач переноса в многослойных средах. Чтобы охватить единым подходом случаи как плоских слоев, так и искривленных оболочек, совместно с матричным методом используется аппарат обобщенных степеней Берса (см. [1, 9]).

Рассмотрим кратко сущность этого подхода применительно к системе

$$D_2^{(i)} D_1^{(i)} T^{(i)}(x) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для определенности будем считать, что с возрастанием координаты температура растет. Основной вопрос: произойдет ли фазовый переход в некотором k -м слое. Предположим, что на k -м слое возможен фазовый переход. Положение возможной границы фаз обозначим x_Φ . Если фазовый переход на k -м слое произошел, то $x_k < x_\Phi < x_{k+1}$; заменим этот слой на два слоя с номерами k_1 и k_2 с соответствующими значениями коэффициента теплопроводности $\lambda_1^{(k)}$ и $\lambda_1^{(k)}$ на них. Таким образом, общее число слоев увеличилось на один.

На сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ поставим задачу Коши

$$T|_{x_i} = T^{(i)}(x_i), \quad J|_{x_i} = J^{(i)}(x_i).$$

Решение для задачи Коши на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ запишем в виде

$$T^{(i)}(x) = T^{(i)}(x_i) - X_i(x, x_i)J^{(i)}(x_i), \quad J^{(i)}(x) = J^{(i)}(x_i); \quad (5)$$

здесь выражение $X_i(x, x_i)$ обозначает первую обобщенную степень Берса с нуль-точкой x_i . Обобщенная степень определяется соотношением

$$X_i(x, x_i) = \int_{x_i}^x \frac{d\xi}{a_1^{(i)}(\xi)};$$

следовательно,

$$D_1^{(i)} X_i(x, x_i) = a_1^{(i)}(x) \frac{d}{dx} \int_{x_i}^x \frac{d\xi}{a_1^{(i)}(\xi)} = 1.$$

Решение задачи Коши (5) для i -го слоя можно записать в матричной форме:

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x, x_i)V^{(i)}(x_i),$$

где

$$V^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} T^{(i)}(x) \\ J^{(i)}(x) \end{pmatrix}, \quad K^{(i)}(x, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & -X_i^{(1)}(x, x_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^{(i)}(x_i) = \begin{pmatrix} T^{(i)}(x_i) \\ J^{(i)}(x_i) \end{pmatrix}.$$

Идеальный контакт слоев (3) в матричной форме принимает вид

$$V^{(i)}(x_{i+1}) = V^{(i+1)}(x_{i+1}). \quad (6)$$

Решение для всей системы слоев строится последовательно, начиная с первого слоя. Запишем решение для первого слоя:

$$V^{(1)}(x) = K^{(1)}(x, x_1)V^{(1)}(x_1), \quad x_1 \leq x \leq x_2;$$

тогда для второго слоя с учетом условий идеального контакта (6) решение примет вид

$$V^{(2)}(x) = K^{(2)}(x, x_2)V^{(2)}(x_2) = K^{(2)}(x, x_2) \left[K^{(1)}(x_2, x_1)V^{(1)}(x_1) \right], \quad x_2 \leq x \leq x_3.$$

Выполняя далее по слоям аналогичную последовательную подстановку, получим общий результат для i -го слоя:

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x, x_i)K^{(i-1)}(x_i, x_{i-1}) \dots K^{(1)}(x_2, x_1)V^{(1)}(x_1). \quad (7)$$

Произведение матриц K для слоев с j -го по i -й имеет вид

$$K^{(i, \dots, j)}(x, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & - \left(X_i(x, x_i) + \sum_{l=j}^{i-1} X_l(x_{l+1}, x_l) \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j < i. \quad (8)$$

Физический смысл суммы обобщенных степеней в матрице (8) — это сумма термических сопротивлений слоев при их последовательном соединении.

В конечной точке x_{n+1} системы слоев получим

$$V^{(n)}(x_{n+1}) = K^{(n,1)}(x_{n+1}, x_1)V^{(1)}(x_1). \quad (9)$$

Таким образом, формула (9) дает возможность получить решение краевых задач всех трех типов, в общем случае сводя решение к системе двух линейных уравнений при любом конечном числе слоев. Для системы уравнений (2) с краевыми условиями (4) система имеет вид

$$\begin{cases} T_2 = T_1 - J^{(1)}(x_1) \sum_{i=1}^n X_i(x_{i+1}, x_i), \\ J^{(n)}(x_{n+1}) = J^{(1)}(x_1). \end{cases}$$

Из системы (9) определим значение теплового потока, который в рассматриваемой задаче постоянен для всей многослойной среды; обозначим его J :

$$J = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^n X_i(x_{i+1}, x_i)}. \quad (10)$$

Подставляя значение потока J из (10) в (9), получим решение поставленной задачи (2), (3), (4).

Вернемся к вопросу фазового перехода на k -м слое. Запишем для этого слоя систему уравнений

$$\begin{cases} T_\Phi = T_1 - J \left(X_{k_1}(x_\Phi, x_k) + \sum_{i=1}^{k-1} X_i(x_{i+1}, x_i) \right), \\ T_2 = T_\Phi - J \left(X_{k_2}(x_{k+1}, x_\Phi) + \sum_{i=k+1}^n X_i(x_{i+1}, x_i) \right), \end{cases}$$

из которой найдем условие для определения координаты границы фаз x_Φ :

$$\frac{\sum_{i=1}^{k-1} X_i(x_{i+1}, x_i) + X_{k_1}(x_\Phi, x_k)}{T_1 - T_\Phi} = \frac{\sum_{i=k+1}^n X_i(x_{i+1}, x_i) + X_{k_2}(x_{k+1}, x_\Phi)}{T_\Phi - T_2}, \quad x_k < x_\Phi < x_{k+1}. \quad (11)$$

В наиболее простом случае, когда имеем систему из одного материала, очевидно, что фазовый переход возможен только при выполнении условия $T_1 < T_\Phi < T_2$ (напомним, что для определенности мы считаем, что температура растет с увеличением координаты). В этом случае получаем два слоя с коэффициентами теплопроводности фаз λ_1 и λ_2 соответственно. Запишем согласно (11) уравнение для нахождения координаты точки фазового перехода:

$$\frac{X_1(x_\Phi, x_1)}{T_1 - T_\Phi} = \frac{X_2(x_2, x_\Phi)}{T_\Phi - T_2}, \quad x_1 < x_\Phi < x_2,$$

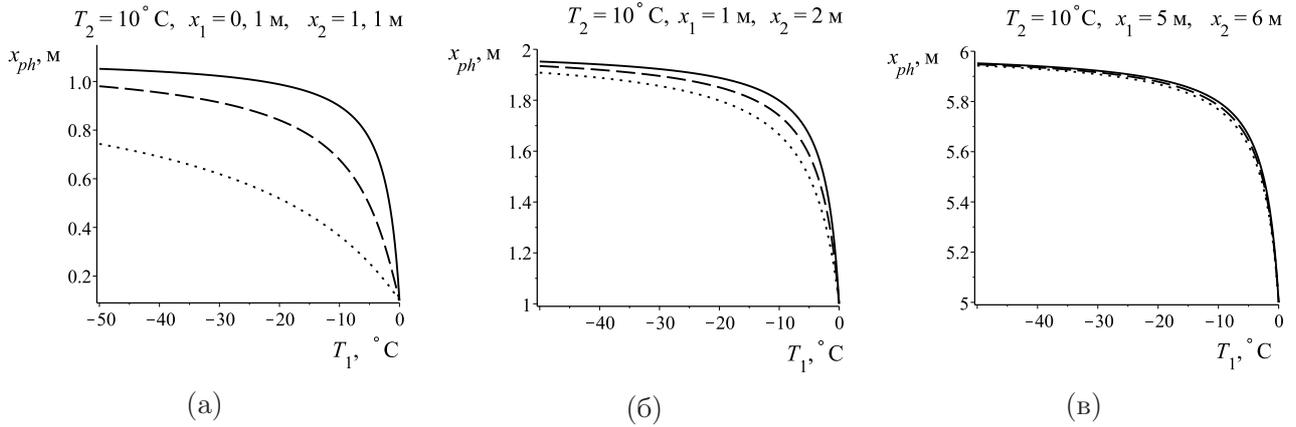


Рис. 1. Зависимость координаты точки фазового перехода $x_{\text{ф}}$ от внешней температуры T_1 в системе «лед—вода» для слоев со сдвиговой симметрией (сплошная линия), осевой симметрией (пунктирная линия) и центральной симметрией (точечная линия).

которое для плоских слоев принимает вид

$$\frac{x_{\text{ф}} - x_1}{\lambda_1(T_1 - T_{\text{ф}})} = \frac{x_2 - x_{\text{ф}}}{\lambda_2(T_{\text{ф}} - T_2)},$$

для слоев с осевой симметрией

$$\frac{\ln(x_{\text{ф}}/x_1)}{\lambda_1(T_1 - T_{\text{ф}})} = \frac{\ln(x_2/x_{\text{ф}})}{\lambda_2(T_{\text{ф}} - T_2)},$$

и для слоев с центральной симметрией

$$\frac{x_{\text{ф}} - x_1}{\lambda_1 x_1 (T_1 - T_{\text{ф}})} = \frac{x_2 - x_{\text{ф}}}{\lambda_2 x_2 (T_{\text{ф}} - T_2)}.$$

4. Результаты расчетов и их обсуждение. Во всех расчетах для удобства сравнения результатов принято, что температура растет с увеличением координаты, как и было оговорено ранее. Также все расчеты были проведены для случаев сдвиговой, осевой и центральной симметрии системы слоев, и результаты моделирования при одинаковых параметрах выведены на графиках в одной системе координат.

В качестве модельной задачи первоначально была рассмотрена система «лед—вода». Для расчетов теплопроводности льда и воды принимались соответственно равными $\lambda_1 = 2,3 \text{ Вт/(м·К)}$ и $\lambda_2 = 0,58 \text{ Вт/(м·К)}$. Во всех расчетах суммарная толщина системы «лед—вода» принималась равной 1 м.

На рис. 1 изображены графики зависимости координаты точки фазового перехода $x_{\text{ф}}$ от внешней температуры T_1 в системе «лед—вода» при одинаковой внешней температуре $T_2 = 10^\circ\text{C}$. Рисунок 1 показывает, что при близком к нулю значению внешней границы x_1 графики для различных видов симметрии среды сильно различаются: по сравнению с плоской системой для цилиндрических оболочек координата точки фазового перехода находится ближе к «холодной» границе x_1 , а для сферических — еще ближе, что объясняется заметной разницей между площадями внутренней и внешней граничных поверхностей искривленных оболочек. При удалении внутренней координаты от нуля и неизменной толщине среды наблюдается неизменность графика для плоских слоев и приближение к нему графиков для цилиндрических и сферических слоев, что по смыслу соответствует все меньшему различию между площадями внутренних и внешних поверхностей.

На рис. 2 показано влияние увеличения внешней температуры T_2 на зависимость координаты точки фазового перехода $x_{\text{ф}}$ от внешней температуры T_1 в системе «лед—вода», при этом координаты внешних границ среды во всех случаях ($T_2 = 10^\circ\text{C}$, $T_2 = 30^\circ\text{C}$, $T_2 = 80^\circ\text{C}$) рассматривались

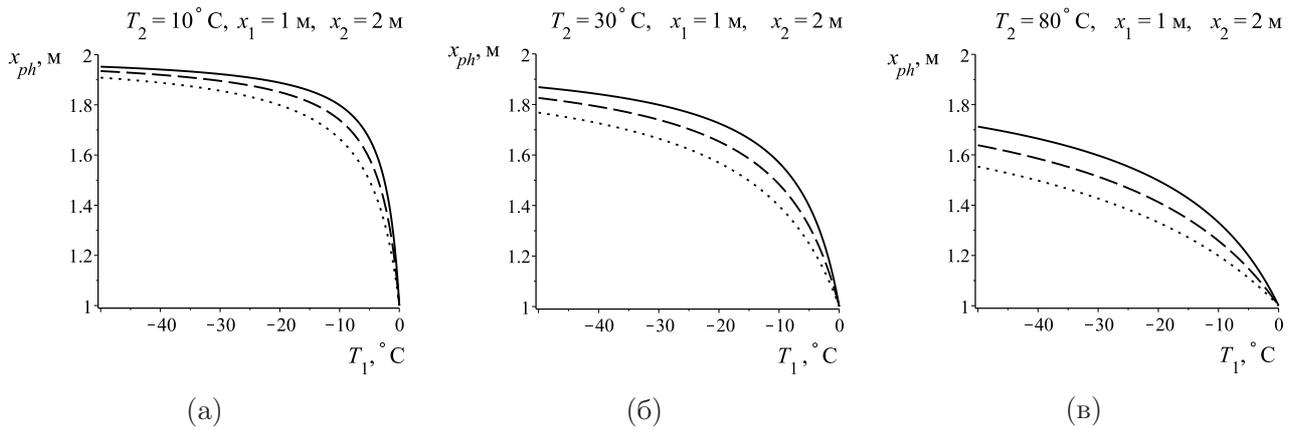


Рис. 2. Влияние внешней температуры T_2 на зависимость координаты точки фазового перехода $x_{\text{ф}}$ в системе «лед—вода» для слоев со сдвиговой симметрией (сплошная линия), осевой симметрией (пунктирная линия) и центральной симметрией (точечная линия).

одинаковыми ($x_1 = 1$ м, $x_2 = 2$ м). С увеличением T_2 точка фазового перехода не только сдвигается ближе к «холодной» границе x_1 , но и заметно меняется характер зависимости координаты $x_{\text{ф}}$ от T_1 : хорошо выраженный изгиб графиков (рис. 2 (а)) сглаживается, графики становятся более пологими (рис. 2(б) и 2(в)).

На рис. 3 показаны распределения температуры, полученные при решении матричным методом первой краевой задачи для системы «лед—вода» при внешних температурах $T_1 = -20^\circ\text{C}$ и $T_2 = 20^\circ\text{C}$. На рис. 3(а) внешние границы координат слоев $x_1 = 0,1$ м, $x_2 = 1,1$ м. Полученные значения координаты фазового перехода составляют для плоской системы $x_{\text{ф}} = 0,899$ м, для случая осевой симметрии среды — $x_{\text{ф}} = 0,679$ м и для центральной симметрии — $x_{\text{ф}} = 0,365$ м. Для системы плоских слоев распределение температуры на каждом слое линейное, а для искривленных оболочек хорошо заметна нелинейность распределений на каждом слое. Заметная разница в площадях внутренней и внешней поверхности для искривленной среды приводит к существенному сдвигу координаты фазового перехода к «холодной» границе x_1 . На рис. 3(б) внешние границы координат слоев $x_1 = 1$ м, $x_2 = 2$ м, а значения координаты фазового перехода для плоской системы $x_{\text{ф}} = 1,799$ м, для случая осевой симметрии среды — $x_{\text{ф}} = 1,739$ м и для центральной симметрии — $x_{\text{ф}} = 1,665$ м. Таким образом, при удалении границы x_1 от нуля распределение температуры в плоской системе не меняется, а для цилиндрических и сферических слоев в силу уменьшения разницы между площадями внутренней и внешней поверхности графики распределений температуры «выпрямляются», а координата фазового перехода приближается к значению для плоских слоев.

Далее была рассмотрена более сложная модельная задача: система из трех материалов «медь—олово—титан» (слои меняются соответственно увеличению координаты границ слоев). На рис. 4 показано распределение температуры в такой системе, полученное при решении первой краевой задачи матричным методом. Заданные внешние температуры — $T_1 = 100^\circ\text{C}$, $T_2 = 650^\circ\text{C}$, толщина каждого материала в системе принималась равной 1 м, координаты внешних границ $x_1 = 1$ м и $x_4 = 4$ м. Температуры плавления меди $1084,5^\circ\text{C}$, олова $231,97^\circ\text{C}$, титана 1660°C . Очевидно, что при заданных внешних температурах фазовый переход возможен только на слое с оловом. При расчетах брались следующие значения теплопроводности материалов: $\lambda_{\text{Cu}} = 392$ Вт/м·К, $\lambda_{\text{Sn}} = 59,3$ Вт/(м·К) для твердой фазы и $\lambda_{\text{Sn}} = 31$ Вт/(м·К) для жидкой фазы, $\lambda_{\text{Ti}} = 19,8$ Вт/(м·К). Матричным методом были определены значения координат точек фазового перехода: в системе плоских слоев $x_{\text{ф}} = 2,590$ м, в системе с осевой симметрией $x_{\text{ф}} = 2,340$ м и в системе с центральной симметрией $x_{\text{ф}} = 2,110$ м.

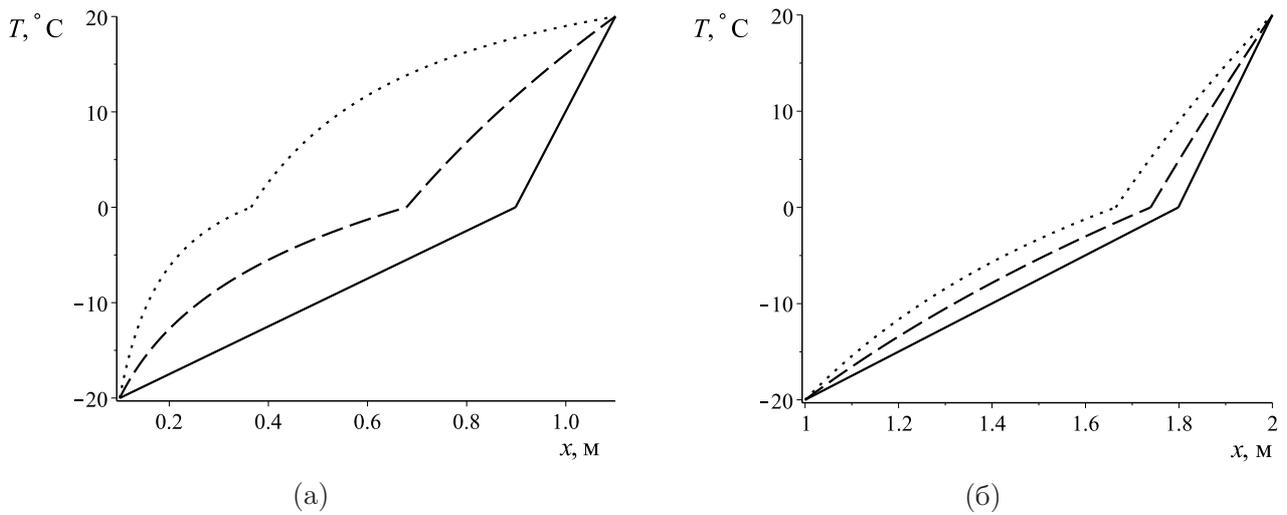


Рис. 3. Распределение температуры в системе «лед—вода» в плоском (сплошная линия), цилиндрическом (пунктирная линия) и сферическом слое (точечная линия).

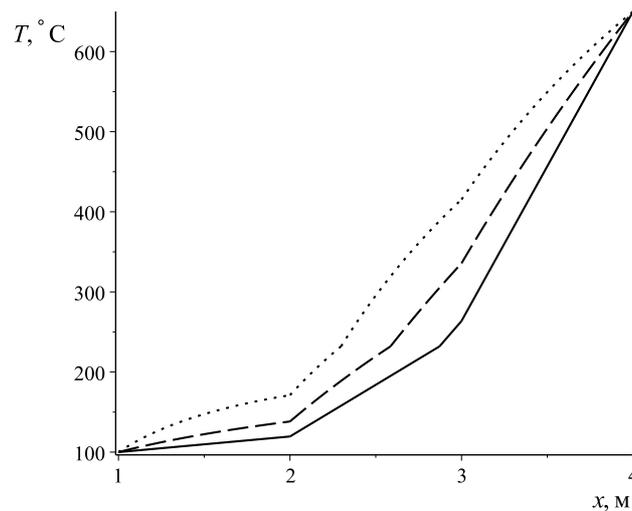


Рис. 4. Распределение температуры в трехслойной системе «медь—олово—титан» при наличии фазового перехода в слое с оловом в среде со сдвиговой симметрией (сплошная линия), с осевой симметрией (пунктирная линия) и с центральной симметрией (точечная линия).

5. Заключение. Рассмотренный в работе матричный метод позволяет сравнительно несложно аналитически получить решение задачи теплопроводности в многослойной среде при наличии фазовых переходов. В работе подробно рассмотрено решение первой краевой задачи однородного уравнения теплопроводности в среде с возможным фазовым переходом, приведены результаты расчетов по нахождению координаты точки фазового перехода и построению распределения температуры в среде с учетом наличия фазового перехода. Расчеты проведены для многослойной среды со сдвиговой, осевой и центральной симметрией. Показано, что возможно решение предлагаемым методом и краевых задач второго и третьего типа. Матричный метод позволяет также решать задачи и с более сложными условиями, например, наличие внутренних источников тепла или неоднородность слоев в зависимости от координаты. Таким образом, этот метод может

быть довольно эффективным для решения различных практических задач, например, когда важно определить условия нежелательного фазового перехода при проектировании и эксплуатации различных технических устройств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладышев Ю. А.* Метод обобщенных степеней Берса и его приложение в математической физике. — Калуга: КГУ им. К. Э. Циолковского, 2011.
2. *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А.* О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерно-реакторные константы. — 2018. — № 3. — С. 158–167.
3. *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А.* О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электронами в планарной многослойной среде// Поверхность. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2017. — № 10. — С. 105–110.
4. *Калманович В. В., Степович М. А.* О совместном применении матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники// в кн.: Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем. — М.: ИППМ РАН, 2018. — С. 194–201.
5. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964.
6. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — М.: Высшая школа, 2001.
7. *Кудинов В. А., Карташов Э. М., Калашников В. В.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. — М.: Высшая школа, 2005.
8. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967.
9. *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1944. — 56. — P. 67–93.

Гладышев Юрий Александрович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: v572264@yandex.ru

Калманович Вероника Валерьевна

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: v572264@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 38–47
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-38-47

УДК 517.956, 517.958:531.32, 519.63

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЗОНАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОФОРЕЗА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

© 2019 г. Т. Ф. ДОЛГИХ

Аннотация. Рассмотрена задача зонального электрофореза двухкомпонентной смеси с пространственно-периодическим начальным распределением компонент смеси. Предложены два способа решения: аналитический (метод годографа) и численный (метод конечных объемов). Проведен сравнительный анализ полученных результатов.

Ключевые слова: модель зонального электрофореза, метод годографа, метод конечных объемов, пространственно-периодические начальные данные.

METHODS FOR SOLVING THE PROBLEM OF ZONAL ELECTROPHORESIS WITH PERIODIC INITIAL DATA

© 2019 T. F. DOLGIKH

ABSTRACT. We consider the problem of zonal electrophoresis of a two-component mixture with spatially periodic initial distribution of the mixture components. Two methods of solution are proposed: analytical (hodograph method) and numerical (method of finite volumes). A comparative analysis of the results obtained is performed.

Keywords and phrases: model of zone electrophoresis, hodograph method, method of finite volumes, spatially periodic initial data.

AMS Subject Classification: 35Q35, 35L03, 35J62

1. Введение. Процесс переноса и разделения смеси веществ на отдельные составляющие под действием электрического поля в достаточно длинном капилляре с непроницаемыми боковыми стенками называется зональным электрофорезом. Этот метод разделения широко применяется в медицине, биологии, химии, например, для определения и выделения составляющих многокомпонентной смеси.

В работе рассматривается начальная стадия зонального электрофореза, когда электромиграционные эффекты играют более значимую роль в изменении профиля концентраций индивидуальных компонент смеси, чем диффузионные эффекты, что позволяет исследовать бездиффузионную модель в случае сильных электролитов, когда вещества полностью диссоциировали на ионы, и нейтральные элементы кроме растворителя (воды) в смеси отсутствуют.

В зависимости от параметров компонент (например, зарядности, подвижности) проводимость всей смеси при изменении количества ионов может как увеличиваться, так и уменьшаться. Объясняется такой эффект электронейтральностью раствора. Если в некоторую область раствора поместить ионы с большой подвижностью, то в силу электронейтральности всей смеси они будут вытеснены менее подвижными ионами, и в данной области общая проводимость раствора

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (базовая часть технического задания № 1.5169.2017/8.9).

понижутся. Напротив, если добавить в раствор компонент с малым значением подвижности, то он вытеснит более подвижные соседние ионы (см. [5]). При построении математической модели указанные эффекты приводят к тому, что система квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая процесс, может иметь как гиперболический тип, так и эллиптический, в зависимости от изменения концентраций отдельных компонент смеси.

В данной работе представлены исследования процесса переноса веществ в двухкомпонентной смеси (см. также [1–3, 7]). Рассматриваются случаи гиперболических и эллиптических уравнений. Для анализа изменений с течением времени концентраций компонент смеси использовались пространственно-периодические начальные распределения. Решение задачи проводилось с помощью метода годографа и метода конечных объемов.

2. Постановка задачи. Процесс зонального электрофореза для двухкомпонентной смеси описывается системой двух квазилинейных уравнений следующего вида (см. [2, 5]):

$$U_t + A(U)U_x = 0, \quad (1)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \frac{\mu^1 u^1}{1+s} \\ \frac{\mu^2 u^2}{1+s} \end{pmatrix}, \quad A_k^j(U) = \frac{\partial H^j(U)}{\partial u^k}, \quad j, k = 1, 2.$$

Здесь $\mu^k \equiv \text{const}$ и $u^k = u^k(x, t)$ ($-\infty < x < \infty$, $t > 0$) — подвижности и «эффективные» концентрации отдельных компонент смеси, а $(1+s) = 1 + u^1 + u^2$ — полная проводимость всей смеси в целом. Эффективные концентрации u^k определяются через концентрации компонент смеси и их зарядности. Поэтому они могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Однако проводимость всей смеси $(1+s)$ величина всегда положительная. В начальный момент процесса разделения смеси известны концентрации каждой компоненты

$$u^k(x, 0) = \tilde{u}^k(x), \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

Решение задачи (1)–(2) во многом зависит от типа уравнений системы (1), который может быть как гиперболическим, так и эллиптическим (см. [2, 3, 7]). Как правило, дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка вида (1) имеют гиперболический тип. Однако в тех случаях, когда концентрация компонент смеси велика и проводимость всей смеси в целом может уменьшаться при увеличении концентраций, тип квазилинейных уравнений изменяется на эллиптический.

Введем обозначение

$$B = \mu^1 + \mu^2 + \mu^2 u^1 + \mu^1 u^2. \quad (3)$$

Тип уравнений (1) определяется значением величины

$$D = B^2 - 4\mu^1 \mu^2 (1+s). \quad (4)$$

Из соотношения (4) видно, что на (u^1, u^2) -плоскости линия $D = 0$ является параболой (см. рис. 1). Известно, что в области $D > 0$, $1+s > 0$ тип уравнений гиперболический, в области $D < 0$ — эллиптический (см. [7]).

3. Методы решения. Рассмотрим два способа решения задачи (1)–(2). Первый из них — это метод годографа, основанный на законах сохранения (см. [11]). Известно, что система n квазилинейных гиперболических уравнений интегрируема, если выполняется условие полугамильтоновости

$$\partial_i \left(\frac{\partial_j \lambda^k}{\lambda^j - \lambda^k} \right) = \partial_j \left(\frac{\partial_i \lambda^k}{\lambda^i - \lambda^k} \right), \quad i \neq j \neq k, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial R^i},$$

где $R^k = R^k(x, t)$ — инварианты Римана, $\lambda^k = \lambda^k(R)$ — собственные значения матрицы системы $A_j^i(u)$, $i, j, k = 1, 2, \dots, n$.

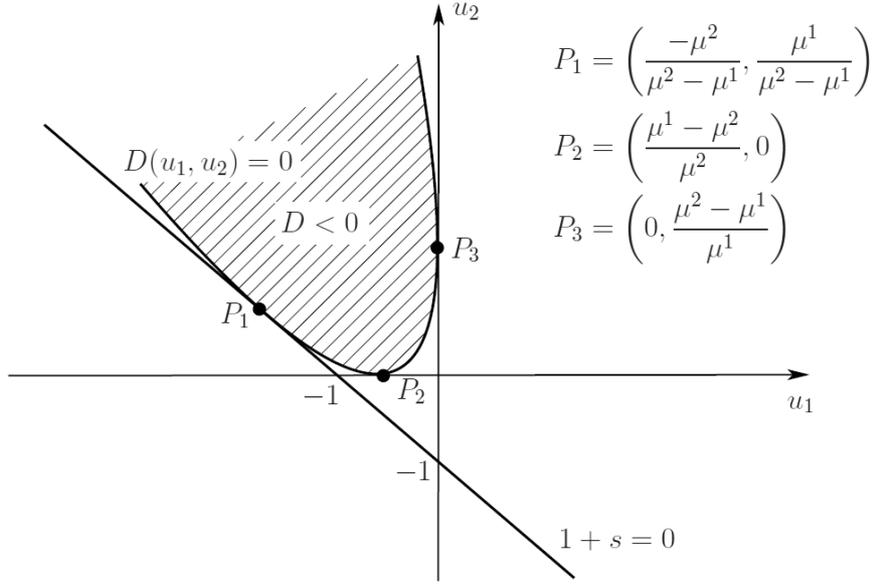


Рис. 1. Области гиперболичности и эллиптичности уравнения (1)

Так как система из двух уравнений гиперболического типа всегда приводится к инвариантам Римана R^1, R^2

$$\frac{\partial R^k}{\partial t} + \lambda^k(R) \frac{\partial R^k}{\partial x} = 0, \quad \lambda^k = R^k R^1 R^2, \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

и условие полугамильтоновости будет выполняться автоматически, то система (1) разрешима, причем она может быть преобразована в однородную систему двух линейных гиперболических уравнений с коэффициентами, зависящими от (u^1, u^2) , относительно функций $t(u^1, u^2), x(u^1, u^2)$ (см. [8]). Такой обмен ролями зависимых и независимых переменных и есть обычный метод годографа.

С математической точки зрения для формального применения обычного метода годографа гиперболичность системы квазилинейных уравнений не является строго необходимым условием. Система (1) интегрируема и в случае комплексных собственных значений матрицы \mathbf{A} , т.е. метод годографа применим и для решения эллиптических квазилинейных уравнений.

Второй метод — метод конечных объемов (МКО). Это численный метод интегрирования систем дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, основанный на законах сохранения в каждом конечном (контрольном) объеме рассматриваемого пространства.

4. Метод годографа. Инварианты Римана в системе (5) вычисляются по формулам (см. [5])

$$R^1 = \frac{B - \sqrt{D}}{2(1+s)}, \quad R^2 = \frac{B + \sqrt{D}}{2(1+s)}, \quad (6)$$

где B, D определены соотношениями (3) и (4) соответственно.

Отметим, что эллиптичность уравнений (1) соответствует комплексно сопряженным собственным значениям λ^i и инвариантам Римана R^i .

Связь между переменными уравнений (1) и (5) дается соотношениями

$$u^1 = \frac{\mu^2(R^1 - \mu^1)(R^2 - \mu^1)}{R^1 R^2 (\mu^1 - \mu^2)}, \quad u^2 = \frac{\mu^1(R^1 - \mu^2)(R^2 - \mu^2)}{R^1 R^2 (\mu^1 - \mu^2)}. \quad (7)$$

Удобно далее использовать замену переменных $R^i = 1/K^i$, $i = 1, 2$. Тогда в новых переменных, которые также являются инвариантами Римана, уравнения (5) примут вид

$$K_t^1 + \Lambda^1 K_x^1 = 0, \quad K_t^2 + \Lambda^2 K_x^2 = 0, \quad (8)$$

где

$$\Lambda^1 = \frac{1}{K^1 K^1 K^2}, \quad \Lambda^2 = \frac{1}{K^2 K^1 K^2}.$$

Для уравнений (8) на некотором контуре

$$\Gamma = \{(x, t) : x = x(\tau), t = t(\tau), a \leq \tau \leq b\}, \quad (9)$$

не являющемся характеристикой, определены начальные данные

$$K^1|_{\Gamma} = K_0^1(\tau), \quad K^2|_{\Gamma} = K_0^2(\tau). \quad (10)$$

Здесь $K_0^i(\tau)$ ($i = 1, 2$) — функции, определяемые начальными распределениями (2).

В [11] описан метод годографа, в котором замена $(K^1, K^2) \Leftrightarrow (x, t)$ позволяет получить неявные решения $t = t(K^1, K^2)$ и $x = x(K^1, K^2)$ уравнений (8), позволяющие восстановить явный вид неизвестных функций $u^1(x, t)$, $u^2(x, t)$ при помощи соотношений (7). Следуя алгоритму, описанному в [11], предположим, что для (8) имеется закон сохранения

$$\varphi_t + \psi_x = 0,$$

где $\varphi(K^1, K^2)$ — плотность, $\psi(K^1, K^2)$ — плотность потока, для которых выполнены уравнения

$$\psi_{K^1} = \Lambda^1 \varphi_{K^1}, \quad \psi_{K^2} = \Lambda^2 \varphi_{K^2}. \quad (11)$$

Условия разрешимости приводят к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\varphi_{K^1 K^2} - \frac{1}{K^2 - K^1} \varphi_{K^1} + \frac{1}{K^2 - K^1} \varphi_{K^2} = 0, \quad (12)$$

$$\psi_{K^1 K^2} + \frac{K^1}{K^2(K^1 - K^2)} \psi_{K^1} - \frac{K^2}{K^1(K^1 - K^2)} \psi_{K^2} = 0. \quad (13)$$

Для определения функций $\varphi(K^1, K^2)$, $\psi(K^1, K^2)$ эти уравнения дополняются условиями

$$(\psi - \Lambda^1 \varphi)|_{K^1=k^1} = 1, \quad (\psi - \Lambda^2 \varphi)|_{K^2=k^2} = -1; \quad (14)$$

$$(\psi - \Lambda^1 \varphi)|_{K^1=k^1} = \Lambda^1|_{K^1=k^1}, \quad (\psi - \Lambda^2 \varphi)|_{K^2=k^2} = -\Lambda^2|_{K^2=k^2}. \quad (15)$$

Решением $\varphi(K^1, K^2)$ задачи (12), (14) с точностью до множителей является функция Римана—Грина $\Phi(K^1, K^2 | k^1, k^2)$:

$$\varphi^t(K^1, K^2) = \frac{2}{\Lambda^2(k^1, k^2) - \Lambda^1(k^1, k^2)} \Phi(K^1, K^2 | k^1, k^2).$$

Тогда, согласно условиям (11), получаем

$$\psi^t(k^1, k^2) = \frac{\Lambda^1(k^1, k^2) + \Lambda^2(k^1, k^2)}{2} \varphi^t(k^1, k^2),$$

где $K^1 = k^1$, $K^2 = k^2$.

Для исследуемых уравнений функция Римана—Грина имеет вид (см. [9])

$$\Phi(K^1, K^2 | k^1, k^2) = \frac{(K^1 + K^2)(k^1 + k^2) - 2K^1 K^2 - 2k^1 k^2}{(k^1 - k^2)^2}.$$

Плотность потока $\psi(K^1, K^2)$ определяется из задачи (13), (15)

$$\psi^x(K^1, K^2) = \frac{2\Lambda^1(k^1, k^2)\Lambda^2(k^1, k^2)}{\Lambda^2(k^1, k^2) - \Lambda^1(k^1, k^2)} \Phi(K^1, K^2 | k^1, k^2).$$

Для определения функции φ^x интегрируется одно из уравнений в (11):

$$\varphi^x(k^1, K^2) = \frac{\psi^x(k^1, K^2)}{\Lambda^1(k^1, K^2)} - 1 \quad \text{или} \quad \varphi^x(K^1, k^2) = \frac{\psi^x(K^1, k^2)}{\Lambda^2(K^1, k^2)} + 1.$$

Рассмотрим случай, когда контур Γ , определенный (9), является отрезком оси $t = t_0$. Тогда начальные условия (10) запишутся в виде

$$K^1|_{t=t_0} = K_0^1(\tau), \quad K^2|_{t=t_0} = K_0^2(\tau), \quad a \leq \tau \leq b. \quad (16)$$

Отсюда следует, что

$$k^1 = K_0^1(b), \quad k^2 = K_0^2(a). \quad (17)$$

Неявное решение задачи Коши (8), (10) имеет вид

$$t = t_0 + \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^t d\tau, \quad x = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^x d\tau. \quad (18)$$

Таким образом, выбор естественного начального условия при $t = t_0$, а не на произвольном контуре Γ , упрощает формулы, в частности, отпадает необходимость в определении функции ψ^t .

Рассмотрим решение задачи Коши (8), (10) в случае гиперболичности уравнений (8). Тогда собственные значения λ^k и инварианты Римана R^k будут вещественными, а линии уровня $t(a, b)$, $x(a, b)$, рассчитанные по формулам (18), описываются соотношениями

$$t(a, b) = t_0 + \frac{(k^1 k^2)^2 (-2k^1 k^2 (b-a) + (k^1 + k^2)F - 2G)}{(k^1 - k^2)^3},$$

$$x(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{((k^1)^2 - 4k^1 k^2 + (k^2)^2)(k^1 + k^2)(b-a)}{2(k^1 - k^2)^3} + \frac{2k^1 k^2 F - (k^1 + k^2)G}{(k^1 - k^2)^3},$$

где $k^1 = K_0^1(b)$, $k^2 = K_0^2(a)$,

$$F = \int_a^b (K_0^1(\tau) + K_0^2(\tau)) d\tau, \quad G = \int_a^b K_0^1(\tau) K_0^2(\tau) d\tau.$$

Для восстановления явного решения выбираем произвольную точку (a_*, b_*) и для некоторого параметра ρ на изолинии $t_* = t(a_*, b_*)$ решаем задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [7, гл. 3])

$$\frac{da}{d\rho} = -t_b(a, b), \quad \frac{db}{d\rho} = t_a(a, b) \Big|_{\rho=0} = a_*, \quad b \Big|_{\rho=0} = b_*. \quad (19)$$

В случае, когда инварианты Римана K^1 , K^2 комплексно сопряжены, ключевым моментом в построении решения поставленной задачи (8), (10) будет требование комплексной сопряженности параметров a и b в (9).

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= u + iv, & \mathbf{b} &= u - iv, & \mathbf{a}^* &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{K} &= K^1 = P + iQ, & \mathbf{K}^* &= K^2 = P - iQ, \\ \mathbf{k} &= k^1 = p + iq, & \mathbf{k}^* &= k^2 = p - iq, \end{aligned} \quad (20)$$

где $P = P(u, v)$, $Q = Q(u, v)$, $p = p(u, v)$, $q = q(u, v)$ — вещественные функции от вещественных переменных u, v .

Таким образом, задачу (8), (10) можно переписать в комплексной форме:

$$\mathbf{K} |\mathbf{K}|^2 \mathbf{K}_t + \mathbf{K}_x = 0, \quad \mathbf{K} \Big|_{t=t_0} = \mathbf{K}_0(\tau). \quad (21)$$

Здесь $\mathbf{K}_0(\tau) = P_0(\tau) + iQ_0(\tau)$ — известная функция.

Соотношения (18) с учетом введенных замен и равенств (17) и (20) запишутся следующим образом:

$$t(u, v) = t_0 + \frac{(p^2 + q^2)^2 (4iv(p^2 + q^2) + 2pF - 2G)}{(2iq)^3},$$

$$x(u, v) = u + \frac{2(p^2 + q^2)F - 2pG - 2ipv(4p^2 - 6(p^2 + q^2))}{(2iq)^3},$$

где

$$F(u, v) = 2 \int_{u+iv}^{u-iv} P_0(\tau) d\tau, \quad G(u, v) = \int_{u+iv}^{u-iv} (P_0^2(\tau) + Q_0^2(\tau)) d\tau.$$

Легко показать, что функции $F(u, v)$ и $G(u, v)$ чисто мнимые. Положим

$$F^0(u, v) = \operatorname{Im} F(u, v), \quad G^0(u, v) = \operatorname{Im} G(u, v).$$

Очевидно, что функции F^0, G^0 — вещественные функции, зависящие от вещественных переменных u, v .

Используя (20), из начального условия получим соотношения для функций p и q :

$$p(u, v) = \operatorname{Re} \mathbf{K}_0(b), \quad q(u, v) = \operatorname{Im} \mathbf{K}_0(b).$$

Таким образом, получаем неявное решение задачи Коши (21):

$$t(u, v) = t_0 - \frac{(p^2 + q^2)^2 (pF_0 - G_0 + 2v(p^2 + q^2))}{4q^3}, \quad (22)$$

$$x(u, v) = u - \frac{pG^0 - (p^2 + q^2)F_0 - 2p(p^2 + 3q^2)}{4q^3}, \quad (23)$$

которое полностью определено начальными условиями.

Для восстановления явного решения задачи Коши на некоторых линиях уровня неявного решения, отвечающих фиксированным значениям $t_* = \operatorname{const}$, решаем задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\rho} &= -t_v(u, v)q^4(u, v), & \frac{dv}{d\rho} &= t_u(u, v)q^4(u, v), \\ u|_{\rho=0} &= u_*, & v|_{\rho=0} &= v_* \end{aligned} \quad (24)$$

(см. [7, гл. 7]), где ρ — некоторый параметр, а значения величин u_*, v_* идентифицируют изохрону $t_* = t(u_*, v_*)$.

Производные t_u, t_v вычисляются с помощью (22), а пространственная координата на изохроне $x = x(u(\rho), v(\rho))$ — с помощью (23).

Правая часть дифференциальных уравнений (24) определена с точностью до произвольного множителя. Используемый здесь множитель $q^4(u, v)$ позволяет избавиться от особенности правых частей в точке $q = 0$.

Определив значения $u(\rho), v(\rho)$ на изохроне $t = t_*(u_*, v_*)$, найдем функции $p(u, v), q(u, v)$. Далее вычислим концентрации компонент смеси, которые связаны с инвариантами Римана при помощи соотношений (7):

$$u^1 = \frac{\mu^2(1 - 2\mu^1 p + \mu^1 \mu^1 (p^2 + q^2))}{\mu^1 - \mu^2}, \quad u^2 = \frac{\mu^1(1 - 2\mu^2 p + \mu^2 \mu^2 (p^2 + q^2))}{\mu^2 - \mu^1}.$$

5. Метод конечных объемов. Пусть $D > 0, 1 + s > 0$. Найдем решение поставленной задачи с помощью метода конечных объемов (МКО; см. [6]).

В исходной постановке задача Коши (1)–(2) определена на бесконечной оси $-\infty < x < \infty$. Однако для численной реализации удобно выбрать такой конечный интервал $[a, b]$, на котором происходят основные изменения концентраций. Выбранный промежуток разбивается на ячейки

$$\Omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}],$$

которые имеют центры x_i . Используем обычную сетку с постоянным шагом $h = (b - a)/n$, т.е. $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, n$.

После интегрирования уравнения (1) по области каждой ячейки Ω_i имеем

$$h \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = \mathbf{H}_{i+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2},$$

где $\mathbf{U}_i = (u^1(x_i, t), u^2(x_i, t))^T$.

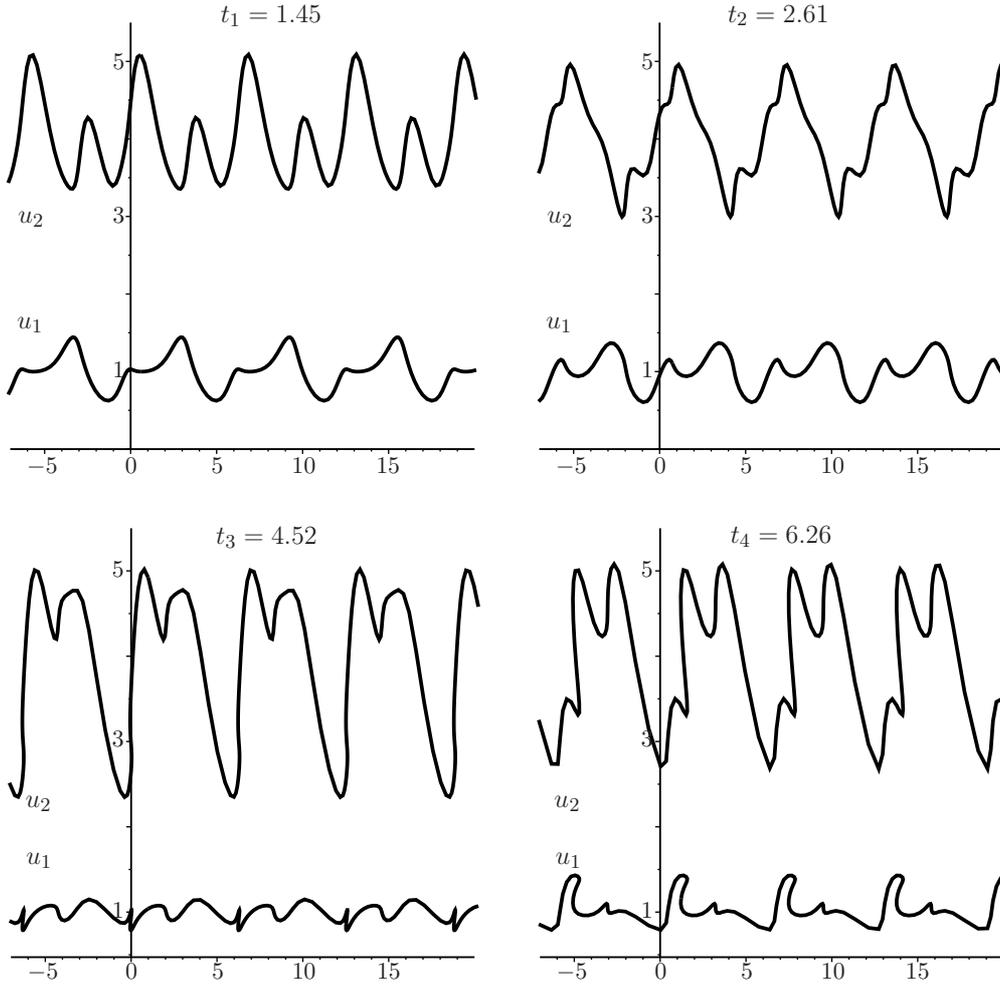


Рис. 2. Концентрации компонент смеси $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, вычисленные с помощью метода годографа для начальных условий (27), в моменты времени $t = 1,45, 2,61, 4,52, 6,26$ при $a_* = -0,29, -1,13, -2,35, -3,67$, $b_* = 0,40$ соответственно.

Если применить временную аппроксимацию, как в явном методе Эйлера, то получим вместо уравнений в частных производных (1) систему обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями (2):

$$\frac{U_i^{m+1} - U_i^m}{\tau} = \frac{H_{i+1/2}^m - H_{i-1/2}^m}{h}. \quad (25)$$

Здесь верхний индекс m означает величины U_i и H_i в момент времени t_m . Отметим, что $t_{m+1} = t_m + \tau$, где τ — шаг по времени.

Для аппроксимации значений вектора \mathbf{H} на границах отрезка Ω_i используем HLL-аппроксимацию (см. [10]).

Вычислим собственные значения матрицы $A(\mathbf{U})$:

$$\lambda_{1,2}(\mathbf{U}) = \frac{B \mp \sqrt{D}}{2(1+s)^2},$$

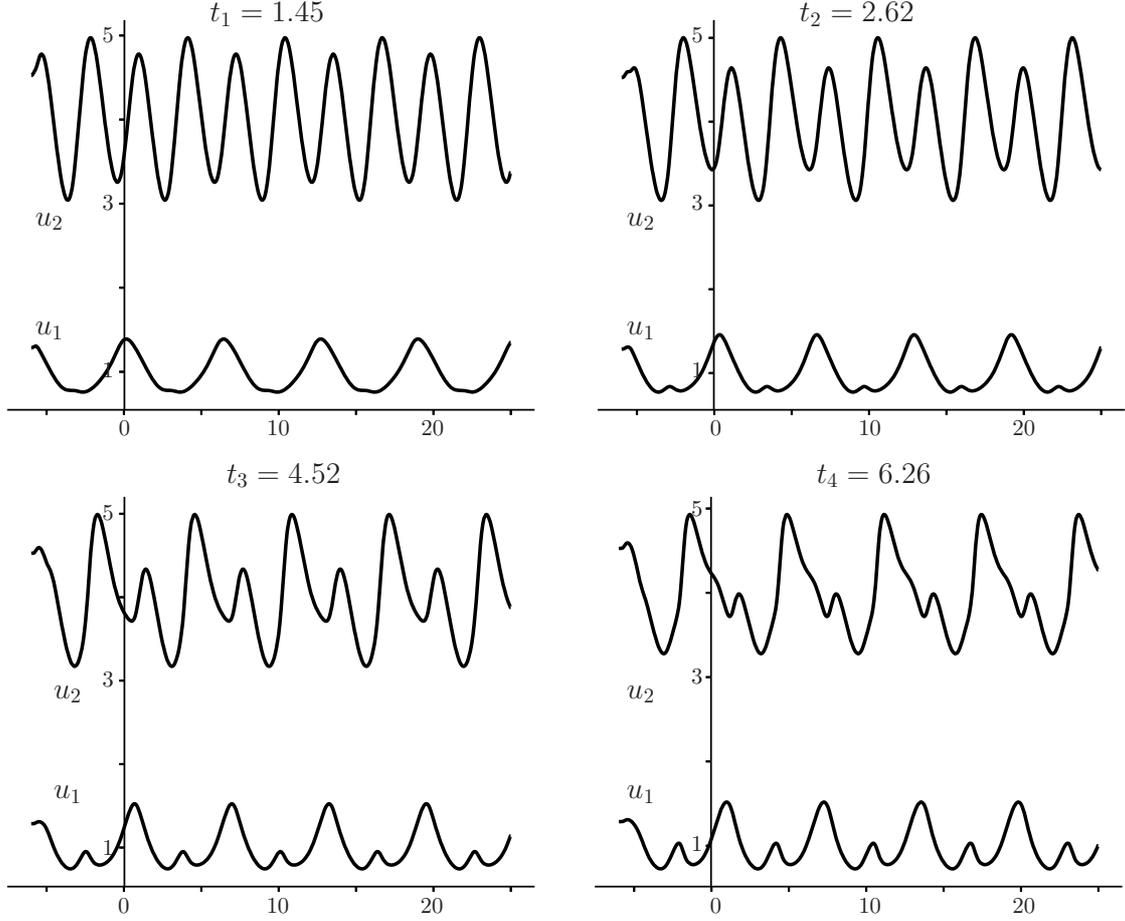


Рис. 3. Концентрации компонент смеси $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, вычисленные с помощью МКО для начальных условий (27), в моменты времени $t = 1,45, 2,61, 4,52, 6,26$.

где B и D определяются соотношениями (3) и (4) соответственно. Далее для границ ячейки Ω_i определим численные потоки

$$\mathcal{H}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{a}), & \lambda_L > 0, \\ \mathbf{H}(\mathbf{b}), & \lambda_R < 0, \\ \frac{\lambda_R \mathbf{H}(\mathbf{a}) - \lambda_L \mathbf{H}(\mathbf{b}) + \lambda_L \lambda_R (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{\lambda_R - \lambda_L}, & \lambda_L \leq 0 \leq \lambda_R, \end{cases}$$

$$\lambda_L = \min \{ \lambda_1(\mathbf{a}), \lambda_1(\mathbf{b}), \lambda_2(\mathbf{a}), \lambda_2(\mathbf{b}) \}, \quad \lambda_R = \max \{ \lambda_1(\mathbf{a}), \lambda_1(\mathbf{b}), \lambda_2(\mathbf{a}), \lambda_2(\mathbf{b}) \}.$$

Таким образом, разностная схема (25) окончательно примет вид

$$\mathbf{U}_i^{m+1} = \frac{\tau}{h} [\mathcal{H}(\mathbf{U}_{i-1}^m, \mathbf{U}_i^m) - \mathcal{H}(\mathbf{U}_i^m, \mathbf{U}_{i+1}^m)] + \mathbf{U}_i^m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где $\mathbf{U}_i^m = (u^1(x_i, t_m), u^2(x_i, t_m))^T$, $\mathbf{U}_i^0 = (\tilde{u}^1(x_i), \tilde{u}^2(x_i))^T$, $i = 0, 1, \dots, n$.

6. Примеры решений задач Коши. В случае квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка независимые переменные t и x в некотором смысле равноправны. Поэтому о задаче с данными на какой-либо линии (9) принято говорить как о задаче Коши (см. [8]). Для эллиптических уравнений вовсе не принято говорить о начальных данных, однако далее используем термин задача Коши, так как концентрации заданы на отрезке оси $t = t_0$.

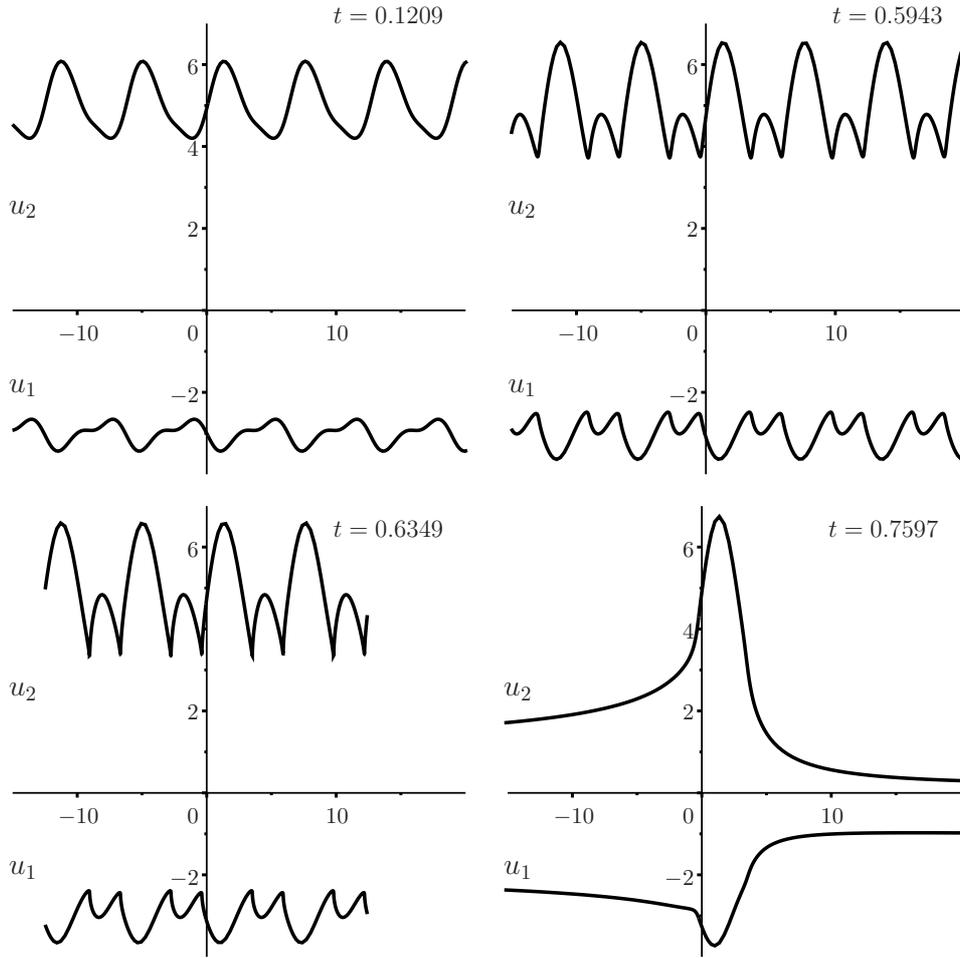


Рис. 4. Концентрации компонент смеси $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, вычисленные с помощью метода годографа для начальных условий (28), в моменты времени $t = 0,1209, 0,5943, 0,6348, 0,7597$.

Рассмотрим случай гиперболичности уравнений (1). Пусть начальные распределения компонент смеси (2) заданы периодическим по пространству условием

$$\tilde{u}^1(x) = \alpha^1 + \beta^1 \cos \omega^1 x, \quad \tilde{u}^2(x) = \alpha^2 + \beta^2 \sin \omega^2 x, \quad (27)$$

где $\alpha^k, \beta^k, \gamma^k, \omega^k$ ($k = 1, 2$) — некоторые константы. Положим

$$\mu^1 = 1, \quad \mu^2 = 3, \quad \alpha^1 = 1, \quad \alpha^2 = 4, \quad \beta^1 = 0,3, \quad \beta^2 = 0,9, \quad \omega^1 = 1, \quad \omega^2 = 2.$$

Для этих параметров решим задачу Коши (1)–(2) с начальными распределениями (27) методом годографа и методом конечных объемов. Графики изменения концентраций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ в одинаковые моменты времени показаны на рис. 2 и 3.

Известно, что сплошные среды, которые описываются уравнениями эллиптического типа, ведут себя как неустойчивые квазигазовые среды типа газа Чаплыгина. Для исследования таких сред часто используются пространственно-периодические начальные данные. Рассмотрим такие же начальные распределения концентраций и для анализа эволюции решений задачи зонального электрофореза (21) (см. также [2, 3, 7]). Пусть $K_0^1(\tau) = P_0 + iQ_0$, $K_0^2(\tau) = P_0 - iQ_0$, где

$$P_0(\tau) = -\varepsilon \sin \tau \cos \tau, \quad Q_0(\tau) = 1 + \varepsilon \sin \tau. \quad (28)$$

Здесь ε — амплитуда возмущения состояния равновесия $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$, которое может возникнуть, например, из-за неустойчивости внешнего электрического поля.

На рис. 4 представлены результаты расчетов при $\mu^1 = 1$, $\mu^2 = 3$, $\varepsilon = 0,1$.

7. Заключение. Решение задачи электрофореза для двухкомпонентной смеси методом годографа на основе закона сохранения можно использовать для любых, в том числе и не гладких, начальных данных. Фактически этот метод позволяет сводить решение задачи Коши для двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка к решению некоторой задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Более того, метод позволяет получить точное решение, хотя и в неявном виде, в аналитической форме, в частности, построить уравнения для линий уровня решения. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений требуется лишь для преобразования неявного решения в явное. В этом смысле метод является полуаналитическим, и его точность зависит лишь от точности интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Иными словами, не требуется никаких аппроксимаций уравнений в частных производных для построения вычислительных схем. Конечно, метод построения аналитического решения применим лишь тогда, когда для линейного уравнения в частных производных второго порядка (в статье это уравнение (12)) удастся указать функцию Римана—Грина. Однако набор уравнений, имеющих известные функции Римана—Грина, достаточно широк (см., например, [4, 7, 9, 11]).

Приведенные численные решения методом конечных объемов показывают, что в случае гиперболических уравнений результаты расчетов мало отличаются от решений, полученных методом годографа, хотя на больших временах совпадение результатов будет не таким хорошим. Для уравнений эллиптического типа метод конечных объемов в стандартном виде не пригоден. В частности, следует существенно изменять схему построения численных потоков, и возможность использования HLL-аппроксимации нуждается в детальном исследовании. Напротив, метод годографа и в случае уравнений эллиптического типа позволяет эффективно строить решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долгих Т. Ф. Метод конечных объемов для решения задачи зонального электрофореза// XIX Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018), 2018. — С. 94–98.
2. Долгих Т. Ф. Решение задачи о переносе массы под действием электрического поля в двухкомпонентной смеси// Изв. Сев-Кавказ. науч. центра высш. школы. Естеств. науки. — 2017. — № 3-1 (195-1). — С. 28–35.
3. Долгих Т. Ф., Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Решение эллиптических уравнений с периодическими данными для задачи зонального электрофореза// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2017. — № 2. — С. 85–96.
4. Жданов С. К., Трубников Б. А. Квазигазовые неустойчивые среды. — М.: Наука, 1971.
5. Жуков М. Ю. Массоперенос электрическим полем. — Ростов-на-Дону: РГУ, 2005.
6. Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Математическое моделирование процесса седиментации примеси в потоке жидкости. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2016.
7. Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Долгих Т. Ф. Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2015.
8. Рождественский Б. Л., Яценко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1978.
9. Copson E. T. On the Riemann–Green Function// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1958. — 1. — P. 324–348.
10. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws// J. Comput. Phys. — 1997. — 135. — P. 260–278.
11. Senashov S. I., Yakhno A. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity// SIGMA. — 2012. — 8. — 071.

Долгих Татьяна Федоровна
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: dolgikh@sfedu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 48–90
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-48-90

УДК 517.958

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГИДРОСИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКОУПРУГУЮ ЖИДКОСТЬ

© 2019 г. Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, Е. В. СЕМКИНА

Аннотация. Работа посвящена изучению двух задач, описывающих малые движения частично диссипативных гидросистем. Первая проблема касается малых движений гидросистемы, состоящей из вязкоупругой жидкости и баротропного газа, находящегося над жидкостью, вторая — малых движений гидросистемы «вязкоупругая жидкость—идеальная жидкость—идеальная жидкость», заполняющих неподвижный сосуд. При помощи операторного подхода, разработанного в предыдущих работах авторов, обе задачи приведены к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в некотором гильбертовом пространстве и доказана теорема о корректной разрешимости проблемы на произвольном конечном отрезке времени.

Ключевые слова: гидродинамическая система, идеальная жидкость, вязкоупругая жидкость, баротропный газ, ортопроектор, задача Коши.

ON SMALL MOTIONS OF HYDRAULIC SYSTEMS CONTAINING A VISCOELASTIC FLUID

© 2019 N. D. KOPACHEVSKY, E. V. SYOMKINA

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of two problems describing small motions of partially dissipative hydraulic systems. The first problem concerns small motions of a hydraulic system consisting of a viscoelastic fluid and a barotropic gas located above the fluid; the second concerns small motions of the hydraulic system “viscoelastic fluid–ideal fluid–ideal fluid” filling a static vessel. Using the operator approach developed in previous works of the authors, both problems are reduced to the Cauchy problem for a differential-operator equation in a Hilbert space and a theorem on the solvability of the problem on an arbitrary finite time interval is proved.

Keywords and phrases: hydrodynamic system, ideal fluid, viscoelastic fluid, barotropic gas, orthoprojector, Cauchy problem.

AMS Subject Classification: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

Введение. Одними из первых работ, связанных с применением методов функционального анализа к исследованию проблемы малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде, являются работы А. И. Милославского (см. [16–18, 25, 26]). В них для обобщенной модели Олдройта ($m \geq 1$) применен операторный подход, развивающий построения, проведенные ранее С. Г. Крейном и его учениками (см. [3, 13, 14]) применительно к задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. Исследования А. И. Милославского отражены, в частности, в монографии [23, гл. 8]. Случай полного заполнения сосуда вязкоупругой жидкостью рассмотрен в [2], а также в [23, п. 7.1]. Наконец, вариант, когда нижняя жидкость — обычная вязкая, а верхняя — идеальная сжимаемая жидкость, т.е. газ, изучен Б. М. Вронским и Н. Д. Копачевским (см. [4, 5, 24]).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10125).

Данная работа посвящена исследованию операторными методами начально-краевых задач о малых движениях составных гидросистем, содержащих вязкоупругую жидкость. Так, в разделе 1 предполагается, что жидкость занимает в состоянии покоя нижнюю часть сосуда, а газ находится над ней. В процессе малых колебаний такой гидросистемы учитывается действие гравитационного поля с постоянным ускорением, а также малого поля внешних сил, наложенных на это поле.

Изложим кратко содержание раздела 1. В п. 1.1 дается математическая постановка начально-краевой задачи о малых движениях гидросистемы. Затем выводится закон баланса полной энергии гидросистемы для классического решения задачи. Это дает возможность в п. 1.2 осуществить выбор функциональных гильбертовых пространств и их подпространств, в которых естественно проводить исследование задачи. Далее в п. 1.3 проводится применение метода ортогонального проектирования на выбранные подпространства и изучение на его основе свойств операторов вспомогательных краевых задач, действующих в выбранных подпространствах. Затем в п. 1.4 осуществляется преобразование операторными методами уравнений движения вязкоупругой жидкости, а также кинематического условия на границе раздела «жидкость—газ» и уравнения движения газа. В п. 1.5 исходная начально-краевая задача переформулируется в векторно-матричной форме в виде задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме пространств. При этом изучаются свойства возникших операторных матриц, являющихся операторными коэффициентами уравнения. Далее в п. 1.6 с использованием формы модели Олдройта вязкоупругой жидкости проводится дальнейшее видоизменение задачи и ее переформулировка в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения в расширенном гильбертовом пространстве. Выясняется, что основной оператор задачи (операторная матрица) является аккретивным и может быть расширен путем его замыкания до максимального аккретивного оператора. Это дает возможность в п. 1.7 использовать теорию сжимающих полугрупп операторов, действующих в гильбертовом пространстве, и на этой основе доказать теорему существования сильного (по времени) решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка, к исследованию которого была приведена исходная начально-краевая задача. В п. 1.8, являющимся последним в разделе, дана постановка задачи о нормальных (собственных) колебаниях гидросистемы и сформулирована соответствующая спектральная задача для оператор-функции (операторного пучка), обобщающей как известный пучок С. Г. Крейна (вязкая жидкость в частично заполненном сосуде), так и операторный пучок, отвечающий проблеме нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в полностью заполненном сосуде.

По этой же схеме проводится изложение в разделе 2, где изучается задача о малых движениях системы из трех тяжелых несмешивающихся однородных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя жидкость считается вязкоупругой, а остальные две идеальными. Отметим, что случай, когда сосуд полностью заполнен системой из двух жидкостей, одна из которых является вязкоупругой, а другая идеальной, рассмотрен в [11], а вариант, когда неподвижный сосуд заполнен системой из двух вязкоупругих жидкостей, изучен в [9].

1. О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГИДРОСИСТЕМЫ «ВЯЗКОУПРУГАЯ ЖИДКОСТЬ—БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ»

1.1. Математическая постановка задачи. Будем считать, что неподвижный сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ заполнен двумя средами: вязкоупругой жидкостью (обобщенная модель Олдройта, см. [16, 20]) и баротропным газом. В этой модели связь между тензором вязких напряжений и удвоенным тензором скоростей деформаций в вязкоупругой жидкости описывается не простейшим законом Гука, а линейным дифференциальным соотношением, где фигурируют производные порядка $m \geq 1$ по времени как тензора вязких напряжений, так и тензора скоростей деформаций. Эта гидросистема находится в поле сил тяжести, и в состоянии покоя граница Γ раздела жидкости и газа горизонтальна, т.е. расположена перпендикулярно действию гравитационного поля. При этом жидкость занимает область Ω_1 , ограниченную твердой стенкой S_1 и поверхностью Γ , а газ

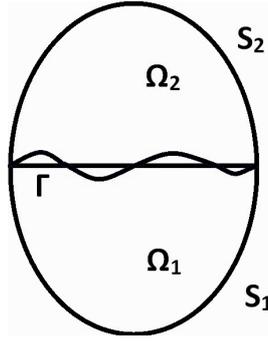


Рис. 1

находится выше жидкости и ограничен твердой стенкой S_2 и снизу равновесной поверхностью Γ (см. рис. 1).

Выберем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ее начало было на Γ , а ось Ox_3 была направлена вертикально вверх. Тогда ускорение силы тяжести есть $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$, $g > 0$.

В состоянии покоя давление в жидкости $P_{1,0}(x)$ изменяется по закону Архимеда:

$$P_{1,0} = P_{1,0}(0) - \rho_1 g x_3,$$

где $\rho_1 = \text{const} > 0$ — плотность жидкости, а $P_{1,0}(0)$ — давление на границе Γ . Далее, газ называют баротропным, если его давление $P_2(t, x)$ связано с полем плотности $\tilde{\rho}_2$ соотношением

$$P_2(t, x) = a^2 \tilde{\rho}_2(t, x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_2, \quad (1.1.1)$$

a^2 — квадрат скорости звука. В состоянии покоя имеем связь

$$P_{2,0}(x) = a^2 \rho_{2,0}(x), \quad \nabla P_{2,0} = -g \rho_{2,0}(x) \mathbf{e}_3, \quad (1.1.2)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \rho_{2,0} &= \rho_{2,0}(x_3) = \rho_{2,0}(0) \exp\left(-\frac{g x_3}{a^2}\right), \quad \rho_{2,0}(0) > 0, \\ P_{2,0} &= P_{2,0}(x_3) = P_{2,0}(0) + a^2 \rho_{2,0}(0) \exp\left(-\frac{g x_3}{a^2}\right), \quad P_{2,0} = P_{1,0}(0). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Рассмотрим малые движения гидросистемы, близкие к состоянию покоя. В качестве искомым функций, описывающих движение системы, будем рассматривать: для жидкости — малое поле скоростей $\mathbf{u}(t, x)$, $x \in \Omega_1$, и функцию вертикального отклонения границы раздела жидкости и газа $x_3 = \zeta(t, \hat{x})$, $\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$; для газа соответственно считаем искомыми отклонение $p_2(t, x)$ давления от равновесного (1.1.2), (1.1.3), поле скоростей в газе $\mathbf{u}_2(t, x)$, а также отклонение $\rho_2(t, x)$ поля плотности от равновесного поля (1.1.3).

Заметим еще, что жидкость считаем вязкоупругой, подчиненной обобщенной модели Олдройта, когда напряжения в ней определяется не полем $\mathbf{u}_1(t, x)$, а полем

$$\mathbf{v}_1(t, x) = \mathbf{u}_1(t, x) + \sum_{k=1}^m \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \mathbf{u}_1(s, x) ds =: I_{01}(t) \mathbf{u}_1, \quad (1.1.4)$$

где $\alpha_k \geq 0$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, m}$ (см. [16, 20]), — коэффициенты вязкоупругости. При $\alpha_k = 0$, $k = \overline{1, m}$, получаем, в частности, модель обычной вязкой несжимаемой жидкости, а при $k = 1$ — модель Олдройта.

Выпишем теперь полную постановку начально-краевой задачи о малых движениях рассматриваемой гидросистемы.

Линеаризованные уравнения Навье—Стокса имеют вид

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \mu_1 \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla p_1 = \rho_1 \mathbf{f}_1(t, x), \quad \text{div } \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (1.1.5)$$

где $\mu_1 > 0$ — коэффициент динамической вязкости, а $\mathbf{f}_1(t, x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$. Линеаризованные уравнения движения газа и уравнение неразрывности таковы:

$$\rho_{2,0} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \nabla p_2 + \rho_2 g \mathbf{e}_3 = \rho_{2,0} \mathbf{f}_2, \quad p_2 = a^2 \rho_2, \quad (1.1.6)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{2,0} \mathbf{u}_2) = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad (1.1.7)$$

где $\mathbf{f}_2(t, x)$ — заданное малое поле внешних сил в газе.

Выпишем теперь краевые условия в исследуемой проблеме. Для вязкой жидкости — это условия прилипания на твердой стенке:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \quad (1.1.8)$$

а для газа — условие непротекания:

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } S_2, \quad (1.1.9)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к S_2 . Далее, на границе раздела Γ должны выполняться кинематические условия

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad (1.1.10)$$

а также динамические условия

$$\mu_1 \tau_{j3}(\mathbf{v}_1) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \tau_{jk}(\mathbf{v}_1) := \frac{\partial v_{1,j}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{1,k}}{\partial x_j}, \quad (1.1.11)$$

$$[-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1)] - [-p_2] = -g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\zeta.$$

Кроме того, должно выполняться линеаризованное условие сохранения объема жидкости:

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0. \quad (1.1.12)$$

Наконец, в начальный момент времени $t = 0$ следует задать начальные условия для полей скоростей, а также для отклонения границы раздела и поля давлений в газе:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k(0, x) &= \mathbf{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \\ p_2(0, x) &= p_2^0(x), \quad x \in \Omega_2, \quad \zeta(0, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma. \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

Таким образом, начально-краевая задача о малых совместных движениях вязкоупругой жидкости и баротропного газа, заполняющих неподвижный сосуд Ω , состоит в нахождении искомых функций из уравнений движения (1.1.5)–(1.1.7), краевых условий (1.1.8), (1.1.9), кинематических условий (1.1.10), динамических условий (1.1.11), условий сохранения объема (1.1.12) и начальных условий (1.1.13).

Будем считать, что задача (1.1.5)–(1.1.13) имеет классическое решение, т.е. все слагаемые в уравнениях, краевых и начальных условиях являются непрерывными функциями своих переменных. Для вывода закона баланса полной энергии гидросистемы воспользуемся следующими тождествами.

Первое тождество следует из (1.1.1)–(1.1.3):

$$\nabla p_2 + \rho_2 g \mathbf{e}_3 = a^2 \rho_{2,0} \nabla(\rho_{2,0}^{-1} \rho_2) = \rho_{2,0} \nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2). \quad (1.1.14)$$

Второе тождество — это формула Грина для соленоидальных векторных полей, удовлетворяющих условию прилипания на твердой стенке:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot (-\mu_1 \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla p_1) d\Omega_1 &= \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - \int_{\Gamma} \left(\sum_{j,k=1}^3 u_{1j} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_k}) [\tau_{jk}(\mathbf{v}_1) - p_1 \delta_{jk}] \right) d\Gamma, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_1 &= \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1; \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

здесь

$$E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \sum_{j,k=1}^3 |\tau_{jk}(\mathbf{u}_1)|^2 d\Omega_1,$$

а $E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ — соответствующее полуторалинейное выражение. Величина $\mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ равна скорости диссипации энергии в вязкоупругой жидкости, занимающей область Ω_1 .

Из уравнения (1.1.5) получаем соотношение

$$\rho_1 \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot (-\mu_1 \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla p_1) d\Omega_1 = \rho_1 \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{f}_1 d\Omega_1. \quad (1.1.16)$$

Из (1.1.6) с учетом (1.1.14) имеем

$$\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \mathbf{u}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} \mathbf{u}_2 \cdot (\rho_{2,0} \nabla (\rho_{2,0}^{-1} p_2)) d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{f}_2 d\Omega_2. \quad (1.1.17)$$

Второе слагаемое слева в (1.1.16) с учетом (1.1.15) и граничных условий (1.1.10), (1.1.11), а также уравнения (1.1.7), преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot (-\mu_1 \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla p_1) d\Omega_1 &= \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - \int_{\Gamma} \left(\sum_{j,k=1}^3 u_{1j} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_k}) [\tau_{jk}(\mathbf{v}_1) - p_1 \delta_{jk}] \right) d\Gamma = \\ &= \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - \int_{\Gamma} u_{1,3} p_2 d\Gamma + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3) \zeta d\Gamma = \\ &= \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - \int_{\Gamma} u_{1,3} p_2 d\Gamma + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3) \zeta d\Gamma = \\ &= \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int_{\Gamma} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \zeta d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}) p_2 d\Gamma = \\ &= \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - \frac{1}{2} g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3) p_2 d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Второе слагаемое слева в (1.1.17) преобразуется с учетом (1.1.7), (1.1.10) и связи $p_2 = a^2 \rho_2$ так:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \mathbf{u}_2 \cdot (\rho_{2,0} \nabla (\rho_{2,0}^{-1} p_2)) d\Omega_2 &= \int_{\Omega_2} \operatorname{div}(p_2 \mathbf{u}_2) d\Omega_2 - \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1} p_2 \operatorname{div}(\rho_{2,0} \mathbf{u}_2) d\Omega_2 = \\ &= - \int_{\Gamma} p_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_3 d\Gamma + a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1} p_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} d\Omega_2 = - \int_{\Gamma} p_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_1 d\Gamma + a^{-2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1} |p_2|^2 d\Omega_2. \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Складывая левые и правые части (1.1.16) и (1.1.17) и учитывая (1.1.18), (1.1.19), приходим к тождеству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \rho_1 \int_{\Omega_1} |\mathbf{u}_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x) |\mathbf{u}_2|^2 d\Omega_2 \right\} + \\ + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1}(x) |p_2|^2 d\Omega_2 + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma \right\} = \\ = -\mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + \rho_1 \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{f}_1 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{f}_2 d\Omega_2, \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

которое является законом баланса полной энергии исследуемой гидросистемы, записанным в дифференциальной форме. Здесь слева в фигурных скобках стоит удвоенная кинетическая энергия (первое слагаемое), отвечающая полю скоростей в жидкости и газе, а второе слагаемое — это потенциальная энергия, отвечающая отклонению ζ границы раздела Γ и изменению плотности в баротропном газе ($p_2 = a^2 \rho_2$) в процессе малых колебаний. Справа в (1.1.20) стоит мощность сил, действующих на систему: это внутренние вязкоупругие силы (первое слагаемое) и внешние силы в областях Ω_1, Ω_2 (остальные слагаемые).

1.2. Выбор функциональных пространств. Из формулы (1.1.20) следует, что для описания движения гидросистемы следует привлечь к рассмотрению такие функциональные гильбертовы пространства, для которых поля скоростей и давлений должны приводить в любой момент времени к конечной кинетической и потенциальной энергиям системы, а также к конечной скорости диссипации энергии.

Перейдем к подробному рассмотрению этого вопроса и введем соответствующие пространства и их подпространства.

1.2.1. Прежде всего введем (комплексное) гильбертово пространство $L_2(\Omega_1)$ векторных полей $\{\mathbf{u}_1(x)\}$, $x \in \Omega_1$, с квадратом нормы

$$\|\mathbf{u}_1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 := \int_{\Omega_1} |\mathbf{u}_1(x)|^2 d\Omega_1$$

и соответствующим скалярным произведением. Как известно (см. [10, 22]), пространство $L_2(\Omega_1)$ имеет ортогональное разложение

$$L_2(\Omega_1) = \mathbf{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1), \quad (1.2.1)$$

$$\mathbf{J}_0(\Omega_1) := \left\{ \mathbf{w}_1 \in L_2(\Omega_1) : \operatorname{div} \mathbf{w}_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega_1 \right\}, \quad (1.2.2)$$

$$\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) := \left\{ \mathbf{v}_1 = \nabla \Phi_1 \in L_2(\Omega_1) : \Delta \Phi_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} = 0 \text{ на } S_1, \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0 \right\}, \quad (1.2.3)$$

$$\mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) := \left\{ \nabla \varphi_1 \in L_2(\Omega_1) : \varphi_1 = 0 \text{ на } \Gamma \right\}. \quad (1.2.4)$$

Здесь \mathbf{n}_1 — внешняя нормаль к $\partial\Omega_1$, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_3$ на Γ , а операции div и $\partial/\partial n_1$ понимают в смысле обобщенных функций (распределений).

Будем считать, что части S_1 и Γ границы $\partial\Omega_1$ области Ω_1 являются липшицевыми, причем контур $\partial S_1 = \partial\Gamma$ также липшицев (см. [1, 19]). Тогда для функций из

$$H_{\Gamma}^1(\Omega_1) := \left\{ \Phi(x) \in H^1(\Omega_1) : \int_{\Gamma} \Phi d\Gamma = 0 \right\}, \quad \|\Phi\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_1)}^2 := \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi|^2 d\Omega_1,$$

имеет место обобщенная формула Грина для оператора Лапласа (см. [8]):

$$(\Psi, \Phi)_{H_{\Gamma}^1(\Omega_1)} := \int_{\Omega_1} \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi d\Omega_1 = \langle \Psi, -\Delta \Phi \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \left\langle \gamma \Psi, \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \right\rangle_{L_2,\Gamma} \quad \forall \Psi, \Phi \in H_{\Gamma}^1(\Omega_1). \quad (1.2.5)$$

Здесь $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\}$ — подпространство пространства $L_2(\Gamma)$, ортогональное единичной функции $1_{\Gamma} := 1|_{\Gamma}$,

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi &\in (H_{\Gamma}^1(\Omega_1))^*, \quad H_{\Gamma}^1(\Omega_1) \hookrightarrow L_2(\Omega_1) \hookrightarrow (H_{\Gamma}^1(\Omega_1))^*, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} &\in (H_{\Gamma}^{1/2})^*, \quad H_{\Gamma}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} \hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow (H_{\Gamma}^{1/2})^*, \quad \mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

$\gamma : \mathcal{L}(H_{\Gamma}^1(\Omega_1); H_{\Gamma}^{1/2})$, $\gamma \Psi := \Psi|_{\Gamma}$ — оператор следа на Γ . Угловыми скобками в (1.2.5) обозначаются значения соответствующих функционалов, отвечающих оснащениям в (1.2.6).

Отметим, что в силу постановки задачи (см. (1.1.5), (1.1.8), (1.1.10)) поле скоростей $\mathbf{u}_1(t, x)$ должно принадлежать при любом $t \geq 0$ подпространству $\mathbf{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, а поле градиентов давлений — подпространству $\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)$.

1.2.2. Введем теперь пространство $\mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0})$ с квадратом нормы

$$\|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0})}^2 := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x) |\mathbf{u}_2|^2 d\Omega_2,$$

отвечающее полю скоростей в газе. Его ортогональное разложение, которое далее понадобится, таково:

$$\mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) = \mathbf{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad (1.2.7)$$

где

$$\mathbf{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}) := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \operatorname{div}(\rho_{2,0}\mathbf{v}) = 0 \text{ в } \Omega_2, \rho_{2,0}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \text{ на } \partial\Omega_2 \right\}, \quad (1.2.8)$$

$$\mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) := \left\{ \nabla\varphi_2 \in \mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}\varphi_2 d\Omega_2 = 0 \right\} = \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus \mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad (1.2.9)$$

$$\mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2; \rho_{2,0}) := \left\{ \nabla\psi_2 \in \mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \psi_2 = 0 \text{ на } \Gamma \right\}, \quad (1.2.10)$$

$$\mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2; \rho_{2,0}) := \left\{ \nabla\Phi_2 \in \mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \operatorname{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_2) = 0 \text{ в } \Omega_2, \rho_{2,0} \frac{\partial\Phi_2}{\partial n_2} = 0 \text{ на } S_2 \right\}. \quad (1.2.11)$$

Из (1.1.6), (1.1.7), (1.1.9) следует, что поле скоростей $\mathbf{u}_2(t, x)$, $x \in \Omega_2$, для газа следует считать (при любом $t \geq 0$) элементом подпространства $\mathbf{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus \mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2; \rho_{2,0})$.

1.2.3. Для поля давлений $p_2(t, x)$ в газе введем, опираясь на (1.1.20), гильбертово пространство

$$L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1}) := \left\{ p_2 : \|p_2\|_{L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1})}^2 := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1}(x) |p_2|^2 d\Omega_2 < \infty \right\}$$

с нормой, эквивалентной норме $L_2(\Omega_2)$.

1.2.4. Далее, для конечности потенциальной энергии системы, отвечающей отклонению ζ движущейся границы раздела между жидкостью и газом, введем уже встретившееся выше (см. (1.2.6)) подпространство

$$L_{2,\Gamma} := \left\{ \zeta \in L_2(\Gamma) : \|\zeta\|_{L_{2,\Gamma}}^2 := \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma < \infty, \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0 \right\}$$

пространства $L_2(\Gamma)$.

1.2.5. Наконец, для конечности скорости диссипации энергии в вязкоупругой жидкости (снова см. (1.1.20)) введем пространство вектор-функций $\mathbf{H}^1(\Omega_1)$ и его подпространство

$$\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) := \left\{ \mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}^1(\Omega_1) : E_1(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_1) < \infty, \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \text{ на } S_1, \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \text{ в } \Omega_1 \right\}.$$

Отметим, что норма в $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ эквивалентна стандартной норме пространства $\mathbf{H}^1(\Omega_1)$ при условии прилипания $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ на S_1 , так как в этом случае имеет место неравенство Корна (см. [13])

$$\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)}^2 := E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) \geq c \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_1)}^2 := c \sum_{k=1}^3 \|u_{1,k}\|_{H^1(\Omega_1)}^2, \quad c > 0. \quad (1.2.12)$$

Таким образом, далее в исследуемой проблеме искомые векторные и скалярные поля будем считать функциями переменной t со значениями в соответствующих введенных выше пространствах и подпространствах.

1.3. Применение метода ортогонального проектирования для уравнений движения газа. Введем согласно разложениям (1.2.7)–(1.2.9), ортопроекторы

$$P_{0,2} : L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) \rightarrow \mathbf{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad P_{G,2} : L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) \rightarrow \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$$

и перепишем уравнения движения газа (1.1.6), (1.1.7) с учетом (1.1.14) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2) = \mathbf{f}_2, \quad a^{-2} \frac{\partial p_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{2,0} \mathbf{u}_2) = 0. \quad (1.3.1)$$

Будем теперь считать, что поле скоростей в газе имеет вид

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 + \nabla \Phi_2, \quad \mathbf{w}_2 \in \mathbf{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad \nabla \Phi_2 \in \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$$

(см. п. 1.2.2). Применяя ортопроекторы $P_{0,2}$ и $P_{G,2}$ к левой и правой частям первого уравнения (1.3.1), получим два соотношения

$$\frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial t} = P_{0,2} \mathbf{f}_2, \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi_2 + \nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2) = P_{G,2} \mathbf{f}_2 =: \nabla F_2. \quad (1.3.2)$$

Далее, в силу (1.2.8) второе уравнение (1.3.1) приобретает вид

$$a^{-2} \frac{\partial p_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2) = 0. \quad (1.3.3)$$

Заметим теперь, что первое уравнение (1.3.2) тривиально разрешимо, если задано начальное условие $\mathbf{w}_2(0, x) = P_{0,2} \mathbf{u}_2^0(x)$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать связи для p_2 и Φ_2 , исходя из второго соотношения (1.3.2), уравнения (1.3.3) и с учетом краевых и начальных условий. В частности, из (1.1.9), определения (1.2.8) подпространства $\mathbf{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0})$ и из кинематического условия (1.1.10) имеем

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial e_3} = -\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{на } \Gamma, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_2.$$

Отсюда получаем краевую задачу, описывающую связь функций Φ_2 и p_2 :

$$\begin{aligned} -\Delta_0 \Phi_2 &:= -\rho_{2,0}^{-1} \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2) = a^{-2} \rho_{2,0}^{-1} \frac{\partial p_2}{\partial t} =: f \quad \text{в } \Omega_2, \\ \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } S_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = -\rho_{2,0}(0) \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3 =: \varphi \quad \text{на } \Gamma. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Будем исследовать задачу (1.3.4), используя теорию обобщенных и слабых решений краевых задач в негладких (липшицевых) областях. Заметим, что однородная задача (1.3.4), т.е. отвечающая случаю $f = 0$, $\varphi = 0$, имеет нетривиальное решение $\Phi_2 = c_2 = \text{const}$. Поэтому решение задачи (1.3.4) можно представить в виде

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} + c_2,$$

где Φ_{21} и Φ_{22} — решения задач при однородном краевом условии и однородном уравнении соответственно:

$$-\Delta_0 \Phi_{21} = f \quad \text{в } \Omega_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial \Omega_2, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{21} d\Omega_2 = 0, \quad (1.3.5)$$

$$-\Delta_0 \Phi_{22} = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = \varphi \quad \text{на } \Gamma, \quad \int_{\Gamma} \Phi_{22} d\Gamma = 0, \quad (1.3.6)$$

а $c_2 = \text{const}$.

При изучении этих задач понадобится обобщенная формула Грина, аналогичная формуле (1.2.5), применительно к оператору Δ_0 из (1.3.4). Отметим сначала, что необходимым условием разрешимости задачи (1.3.5) является условие

$$(f, 1_{\Omega_2})_{L_2(\Omega_2; \rho_{2,0})} := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} f d\Omega_2 = 0. \quad (1.3.7)$$

Обозначим соответствующее подпространство функций через $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$. Введем теперь пространство $H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ с квадратом нормы

$$\|\Phi\|_{H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})}^2 := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi|^2 d\Omega_2 + \left| \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi d\Omega_2 \right|^2,$$

эквивалентной норме $H^1(\Omega_2)$, и его подпространство $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, состоящее из элементов, которые удовлетворяют условию (1.3.7), т.е.

$$\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi d\Omega_2 = 0. \quad (1.3.8)$$

Нетрудно видеть, что $(H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}); L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}})$ — гильбертова пара пространств, причем пространство $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ компактно вложено в $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$. Для элементов Ψ_2, Φ_2 из $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ имеет место обобщенная формула Грина

$$\begin{aligned} (\Psi_2, \Phi_2)_{H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})} &= \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Psi_2 \cdot \nabla \Phi_2 d\Omega_2 = \\ &= \langle \Psi_2, -\Delta_0 \Phi_2 \rangle_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \left\langle \gamma_{S_2} \Psi_2, \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right\rangle_{L_2(S_2)} + \left\langle \gamma_{\Gamma} \Phi_2, \rho_{2,0} \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} \right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

где γ_{S_2} и γ_{Γ} — операторы следа на S_2 и Γ , а угловыми скобками обозначены значения соответствующих функционалов.

Уточним некоторые факты, связанные с формулой (1.3.9) (см. [8]). Она справедлива для тех элементов из $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, которые обладают следующими свойствами: для этих элементов производные по нормали на S_2 и Γ обладают тем свойством, что они продолжимы нулем с S_2 и Γ соответственно на оставшуюся часть границы $\partial\Omega_2$ в классе функций из $H^{-1/2}(\partial\Omega_2)$. Соответствующую совокупность элементов из $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ обозначим через $\check{H}_{\Omega_2}^1$, так что формула (1.3.9) справедлива для элементов из $\check{H}_{\Omega_2}^1$. При этом класс таких продолжимых нулем производных по нормали обозначается через $\check{H}^{-1/2}(S_2)$ и $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$ соответственно, причем эти подпространства являются сопряженными к $H^{1/2}(S_2)$ и $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. [8, 19, 27]).

Опираясь на формулу Грина (1.3.9), определим слабое решение задачи (1.3.5) как элемент Φ_{21} из $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, для которого выполнено тождество

$$(\Psi_2, \Phi_{21})_{H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})} = \langle \Psi_2, f \rangle_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} \quad \forall \Psi_2 \in H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}). \quad (1.3.10)$$

Из теории пар гильбертовых пространств следует, что задача (1.3.5) имеет слабое решение тогда и только тогда, когда

$$f \in (H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}))^* \supset L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}.$$

При $f \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ эта задача имеет обобщенное решение, определяемое тождеством

$$(\Psi_2, \Phi_{21})_{H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})} = (\Psi_2, f)_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} \quad \forall \Psi_2 \in H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}). \quad (1.3.11)$$

Оба решения задач (1.3.10), (1.3.11) выражаются одной формулой:

$$\Phi_{21} = A_2^{-1} f,$$

где A_2 — оператор гильбертовой пары $(H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}); L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}})$; при этом $\Phi_{21} \in \mathcal{D}(A_2^{1/2}) = H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ для слабого решения и $\Phi_{21} \in \mathcal{D}(A_2) \subset \mathcal{D}(A_2^{1/2})$ для обобщенного решения.

Таким образом, при $f \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ задача (1.3.5) равносильна соотношению

$$A_2 \Phi_{21} = f = a^{-2} \rho_{2,0}^{-1} \frac{\partial p_2}{\partial t}, \quad (1.3.12)$$

где

$$0 \ll A_2 = A_2^* : \mathcal{D}(A_2) \rightarrow L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}, \quad A_2^{-1} \in \mathfrak{S}_{\infty}(L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}).$$

Перейдем теперь к рассмотрению задачи (1.3.6). Опираясь на формулу Грина (1.3.9), заметим сначала, что необходимым условием разрешимости этой задачи является условие

$$\langle 1_\Gamma, \varphi \rangle_{L_2(\Gamma)} = 0. \quad (1.3.13)$$

Если $\varphi \in L_2(\Gamma)$, то получаем условие

$$\int_\Gamma \varphi \, d\Gamma = 0,$$

т.е. условие ортогональности в $L_2(\Gamma)$ заданной функции φ к единичной функции 1_Γ , определенной на Γ . В связи с этим введем в $H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ норму

$$\|\Phi\|_{H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})}^2 := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi|^2 \, d\Omega_2 + \left| \int_\Gamma \Phi \, d\Gamma \right|^2,$$

эквивалентную стандартной норме пространства $H^1(\Omega_2)$, и подпространство $H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ функций, для которых

$$\int_\Gamma \Phi \, d\Gamma = 0.$$

Снова опираясь на формулу Грина (1.3.9), определим слабое решение задачи (1.3.6) как элемент из Φ_{22} из $H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, для которого выполнено тождество

$$(\Psi_2, \Phi_{22})_{H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})} = \langle \gamma_2 \Psi_2, \varphi \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \Psi_2 \in H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad (1.3.14)$$

где $\gamma_2 \Psi_2 := \Psi|_\Gamma$. Из (1.3.6) следует, что для слабого решения функция φ должна быть продолжима нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_2)$, т.е. необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (1.3.6) является условие

$$\varphi \in \tilde{H}_\Gamma^{-1/2} = (H_\Gamma^{1/2})^*, \quad H_\Gamma^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}.$$

Тогда эта задача имеет единственное слабое решение

$$\Phi_{22} =: V\varphi = V(-\rho_{2,0}(0)\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3) = V\left(-\rho_{2,0}(0)\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right), \quad V \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_{\Gamma,h}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})), \quad (1.3.15)$$

где

$$H_{\Gamma,h}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}) = \left\{ \Phi_{22} \in H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}) : -\Delta_0 \Phi_{22} = 0 \text{ в } \Omega_2, \right. \\ \left. \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = 0 \text{ на } S_2, \int_\Gamma \rho_{2,0}(0) \Phi_{22} \, d\Gamma = 0 \right\} \subset H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}). \quad (1.3.16)$$

Заметим теперь, что для области Ω_2 с липшицевой границей $\partial\Omega_2$, разбитой на липшицевы куски S_2 и Γ , имеет место теорема Гальярдо (см. [21]), согласно которой оператор следа γ_2 обладает свойством

$$\gamma_2 \in \mathcal{L}(H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}); H_\Gamma^{1/2}). \quad (1.3.17)$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Операторы*

$$V : \tilde{H}_\Gamma^{-1/2} \rightarrow H_{\Gamma,h}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}) \subset H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad \gamma_2 : H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}) \rightarrow \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$$

являются взаимно сопряженными (ограниченными) операторами: $V = \gamma_2^*$.

Доказательство следует из тождества (1.3.14) и определения оператора V :

$$(\Psi_2, V\varphi)_{H^1_\Gamma(\Omega_2; \rho_{2,0})} = \langle \gamma_2 \Psi_2, \varphi \rangle_{L_2, \Gamma}. \quad \square$$

Итогом рассмотрения задачи (1.3.4) и вспомогательных задач (1.3.5), (1.3.6) является такой вывод: задача (1.3.4) имеет решение в пространстве $H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, которое выражается формулой

$$\Phi_2|_{\Omega_2} = \Phi_{21} + \Phi_{22} + c_2 = A_2^{-1} \left(a^{-2} \rho_{2,0}^{-1} \frac{\partial p_2}{\partial t} \right) + V \left(-\rho_{2,0}(0) \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) + c_2, \quad (1.3.18)$$

где c_2 — произвольная функция t .

1.4. Преобразования операторными методами уравнений движения жидкости. Преобразуем теперь уравнения движения жидкости (1.1.5) в области Ω_1 с учетом граничных условий (1.1.8), (1.1.11). Опираясь на ортогональные разложения (1.2.1)–(1.2.4), будем считать при каждом t поле $\mathbf{u}_1(t, x)$ элементом подпространства $\mathbf{J}_{0, S_1}^1(\Omega_1) \subset \mathbf{J}_{0, S_1}(\Omega_1)$, а ∇p_1 — элементом подпространства $\mathbf{G}(\Omega_1) = \mathbf{G}_{0, \Gamma}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h, S_1}(\Omega_1)$. Введем далее ортопроектор

$$P_{0, S_1} : \mathbf{L}_2(\Omega_1) \rightarrow \mathbf{J}_{0, S_1}(\Omega_1)$$

и подействуем им на обе части уравнения (1.1.5). Будем иметь соотношения

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \mu_1 P_{0, S_1} \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla \tilde{p}_1 = \rho_1 P_{0, S_1} \mathbf{f}_1, \quad \nabla \tilde{p}_1 := P_{0, S_1} \nabla p_1, \quad (1.4.1)$$

$$\Delta \tilde{p}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_1, \quad \int_{\Gamma} \tilde{p}_1 d\Gamma = 0, \quad (1.4.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \quad \mu_1 \tau_{j3}(\mathbf{v}_1) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \text{на } \Gamma, \\ [-\tilde{p}_1 \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1)] - [-p_2] = -g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\zeta \quad \text{на } \Gamma. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Здесь уже учтено, что в силу (1.2.4) имеем $p_1 = \tilde{p}_1$ на Γ .

Представим теперь поле $\nabla \tilde{p}_1$ в виде

$$\nabla \tilde{p}_1 = \nabla p_{11} + \nabla p_{12}, \quad \nabla p_{1l} \in \mathbf{G}_{h, S_1}(\Omega_1), \quad l = 1, 2,$$

и рассмотрим две вспомогательные краевые задачи, сумма решений которых дает решение задачи (1.4.1)–(1.4.3).

Первая вспомогательная задача (ее называют задачей С. Г. Крейна, см. [13, 14]):

$$\begin{aligned} -\mu_1 P_{0, S_1} \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla p_{11} = \mathbf{F}_1 := -\nabla p_{12} - \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0, S_1} \mathbf{f}_1, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

$$\mu_1 \tau_{j3}(\mathbf{v}_1) = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad j = 1, 2; \quad -p_{11} + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1) = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Вторая вспомогательная задача (задача Зарембы):

$$\Delta p_{12} = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \frac{\partial p_{12}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_1, \quad p_{12} = p_2 + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\zeta =: \eta \quad \text{на } \Gamma. \quad (1.4.5)$$

Обсудим сначала слабые решения задачи (1.4.5). Заметим предварительно, что в силу условий

$$\int_{\Gamma} p_{12} d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0$$

возникает требование нормировки для давления в газе:

$$\int_{\Gamma} p_2 d\Gamma = 0. \quad (1.4.6)$$

Тогда задача Зарембы (1.4.5) имеет при $\eta \in H_\Gamma^{1/2}$ единственное решение p_{12} , для которого

$$\nabla p_{12} =: Q\eta = Q \left(p_2|_{\Gamma} + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\zeta \right), \quad Q \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \mathbf{G}_{h, S_1}(\Omega_1)). \quad (1.4.7)$$

Чтобы получить окончательное выражение для ∇p_{12} , найдем значение $p_2|_{\Gamma}$ с учетом нормировки (1.4.6). С этой целью воспользуемся следствием из второй формулы (1.3.2), которое называют интегралом Коши—Лагранжа:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \rho_{2,0}^{-1} p_2 = F_2 + c(t) \quad \text{в } \Omega_2,$$

где $c(t)$ — произвольная функция t . Отсюда получаем, что

$$p_2|_{\Gamma} = \rho_{2,0}(0) \gamma_2 \left(-\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + F_2 \right) + \rho_{2,0}(0) c(t),$$

откуда с учетом (1.3.18) приходим к формуле

$$p_2|_{\Gamma} = \rho_{2,0}(0) \gamma_2 \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{21} - \rho_{2,0}(0) V \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \right\} + \rho_{2,0}(0) (\gamma_2 F_2 + c(t)).$$

Наконец, учитывая интегральное условие (1.4.6), окончательно имеем

$$p_2|_{\Gamma} = -\rho_{2,0}(0) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ P_{\Gamma} \gamma_2 \nabla^{-1} (\nabla \Phi_{21}) - \rho_{2,0}(0) \gamma_2 V \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \right\} + \rho_{2,0}(0) P_{\Gamma} \gamma_2 F_2, \quad (1.4.8)$$

где $P_{\Gamma} : L_2(\Gamma) \rightarrow L_{2,\Gamma}$ — ортопроектор.

Рассмотрим теперь первую вспомогательную задачу (1.4.4), считая \mathbf{F}_1 заданным элементом. Здесь понадобится обобщенная формула Грина для соленоидальных полей и векторного оператора Лапласа. Для гладких полей она имеет вид (1.1.15), а для полей из $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ эта формула приобретает вид (см. [8, 10])

$$\begin{aligned} \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) = & \left\langle \mathbf{u}_1, -\mu_1 P_{0,S_1} \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla p_1 \right\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \\ & + \sum_{j,k=1}^3 \left\langle u_{1j} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_3}), [\tau_{jk}(\mathbf{v}_1) - p_1 \delta_{jk}] \right\rangle_{L_2(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Используя формулу (1.4.9), определим слабое решение задачи (1.4.4) как элемент $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$, для которого выполнено тождество

$$\mu_1 E_1(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) = \langle \boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{F}_1 \rangle_{L_2(\Omega_1)} \quad \forall \boldsymbol{\eta}_1 \in \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1).$$

Заметим теперь, что в силу неравенства Корна (1.2.12) пространство $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ компактно вложено в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Поэтому эти пространства образуют гильбертову пару $(\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1); \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1))$, причем оператор этой гильбертовой пары

$$A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subset \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \rightarrow \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \quad (1.4.10)$$

неограничен, положительно определен и имеет компактный обратный оператор A_1^{-1} . При этом

$$E_1(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) = (\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1)_{\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)} = (A_1^{1/2} \boldsymbol{\eta}_1, A_1^{1/2} \mathbf{v}_1)_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} = \langle \boldsymbol{\eta}_1, A_1 \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)},$$

для всех $\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1 \in \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$.

Эти рассуждения показывают, что задача (1.4.4) имеет слабое решение $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\mathbf{F}_1 \in (\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1))^*, \quad (1.4.11)$$

и это решение выражается формулой

$$\mathbf{v}_1 = \mu_1^{-1} A_1^{-1} \mathbf{F}_1. \quad (1.4.12)$$

Если $\mathbf{F}_1 \in \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \subset (\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1))^*$, то формула (1.4.12) дает обобщенное решение задачи (1.4.4), и при этом $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(A_1^{1/2}) = \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$.

Формула (1.4.12) позволяет с учетом определения \mathbf{F}_1 (см. (1.4.4)) выписать дифференциально-операторную связь между искомыми функциями в исследуемой проблеме и данными задачи. Как уже упоминалось выше, все эти функции считаем функциями переменной t со значениями

в соответствующем гильбертовом пространстве; в соответствии с этим далее производные $\partial/\partial t$ заменим на d/dt .

Подставляя выражение для \mathbf{F}_1 в соотношение $\mu_1 A_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{F}_1$, вытекающее из (1.4.11), и используя формулы (1.4.7) и (1.4.8) для ∇p_{12} и $p_2|_\Gamma$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\rho_1 \mathbf{u}_1 + (\rho_{2,0}(0))^2 (Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}) \mathbf{u}_1 \right] - \rho_{2,0}(0) (QP_\Gamma \gamma_2 \nabla^{-1})(\nabla \Phi_{21}) \right\} + \\ + \mu_1 A_1 \mathbf{v}_1 + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) Q\zeta = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_{2,0}(0) QP_\Gamma \gamma_2 F_2, \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

где

$$\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 := (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n})_\Gamma, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1(t, x) + \sum_{k=1}^m \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \mathbf{u}_1(s, x) ds := I_{01}(t) \mathbf{u}_1.$$

Выпишем теперь дополнительно к (1.4.13) другие соотношения, связанные с изучаемой задачей. Перепишем кинематические условия (1.1.10) в эквивалентной форме:

$$g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \frac{d\zeta}{dt} - g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 = 0; \quad (1.4.14)$$

приведем также выведенные ранее соответствующие связи (1.3.3), (1.3.12) для газа и учтем формулу (1.3.15). Будем иметь соотношения

$$\frac{d}{dt} \left(\nabla \Phi_{21} - \rho_{2,0}(0) \nabla (V\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1) \right) + \nabla (\rho_{2,0}(0)^{-1} p_2) = P_{G,2} \mathbf{f}_2 =: \nabla F_2, \quad (1.4.15)$$

$$a^{-2} \frac{dp_2}{dt} + \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) = 0. \quad (1.4.16)$$

Итогом проведенных рассуждений является следующее утверждение. Исходная начально-краевая задача о малых движениях системы, состоящей из вязкоупругой жидкости и баротропного газа, заполняющих произвольный неподвижный сосуд, приводится, кроме тривиальной связи (1.3.2) (первое уравнение), к задаче Коши для системы дифференциально-операторных уравнений (1.4.13)–(1.4.16) с соответствующими начальными условиями. Искомыми функциями являются: поле скоростей $\mathbf{u}_1(t, x)$ со значениями в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, вертикальное отклонение $\zeta(t, x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Gamma$, границы раздела со значениями в $L_{2,\Gamma}$, потенциальная компонента $\nabla \Phi_{21}(t, x)$, описывающая одно из полей скоростей газа, со значениями в $\mathbf{G}(\Omega_1; \rho_{2,0})$, а также поле давлений в газе $p_2(t, x)$ со значениями в $L_2(\Omega_1; \rho_{2,0}^{-1})$.

1.5. Формулировка задачи в векторно-матричной форме. Свойства операторных коэффициентов задачи. Перепишем задачу (1.4.13)–(1.4.16) в векторно-матричном виде, введя в качестве искомого объекта вектор-столбец

$$z(t) := (\mathbf{u}_1; \zeta; \nabla \Phi_{21}; p_2)^\tau$$

со значениями в пространстве

$$\mathcal{H} := \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma} \oplus \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1}). \quad (1.5.1)$$

Введем операторные матрицы

$$C = \begin{pmatrix} \rho_1 I_1 + (\rho_{2,0})^2 (Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}) & 0 & -\rho_{2,0}(0) QP_\Gamma \gamma_2 \nabla^{-1} & 0 \\ 0 & g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) I_2 & 0 & 0 \\ -\rho_{2,0}(0) \nabla V\gamma_{n,1} & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2} I_4 \end{pmatrix}, \quad (1.5.2)$$

где I_k — единичные операторы в пространствах (1.5.1),

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 A_1 I_{01}(t) & g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) Q & 0 & 0 \\ -g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \gamma_{n,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{34} \\ 0 & 0 & B_{43} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{34} p_2 := \nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2), \quad B_{43}(\nabla \Phi_{21}) := \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}),$$

а также вектор-столбец заданных функций:

$$f := \left(\rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_{2,0}(0) Q P_\Gamma \gamma_2 F_2; 0; \nabla F_2; 0 \right)^\tau.$$

Тогда систему дифференциальных уравнений (1.4.13)–(1.4.16) вместе с начальными условиями можно коротко записать в виде задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в пространстве \mathcal{H} :

$$C \frac{dz}{dt} + Bz = f, \quad z(0) = z^0. \quad (1.5.3)$$

Цель дальнейших рассмотрений — изучить свойства коэффициентов операторных матриц C и B и преобразовать задачу (1.5.3) таким образом, чтобы можно было доказать теорему существования ее решения на произвольном отрезке времени и на этой основе доказать теорему существования решения исходной начально-краевой задачи (1.1.5)–(1.1.13).

Напомним сначала, что согласно лемме 2.3 операторы

$$V \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_{\Gamma,h}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})), \quad \text{и} \quad \gamma_2 \in \mathcal{L}(H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}); H_\Gamma^{1/2})$$

взаимно сопряжены. Докажем теперь аналогичное свойство для операторов Q и $\gamma_{n,1}$ (см. (1.4.7), (1.4.13), (1.4.14)).

Лемма 1.2. *Операторы*

$$Q \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)) \quad \text{и} \quad \gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1); \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}) \quad (1.5.4)$$

взаимно сопряжены.

Доказательство. Пусть η — произвольный элемент из $H_\Gamma^{1/2}$, а $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 + \nabla \Phi_1$ — гладкий элемент из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) = \mathbf{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$. Тогда, согласно (1.4.7), $Q\eta = \nabla p \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$. Опираясь на свойства элементов из $\mathbf{J}_0(\Omega_1)$, будем иметь

$$\begin{aligned} (Q\eta, \mathbf{u}_1)_{L_2(\Omega_1)} &= \int_{\Omega_1} \nabla p \cdot \overline{\mathbf{u}_1} t \, d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(p \overline{\mathbf{u}_1}) \, d\Omega_1 - \int_{\Omega_1} p \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \, d\Omega_1 = \\ &= \int_{\Gamma} p(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma = \langle \eta, \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \rangle_{L_{2,\Gamma}}. \end{aligned}$$

Замыкая это тождество с гладких \mathbf{u}_1 на произвольные элементы из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, приходим к выводу, что $\gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1); \tilde{H}_\Gamma^{-1/2})$ и $Q^* = \gamma_{n,1}$. \square

Из лемм 1.1 и 1.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.3. *Оператор $(Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1})$ является ограниченным неотрицательным оператором, действующим в пространстве $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \supset \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$.*

Доказательство. В самом деле, на подпространстве $\mathbf{J}_0(\Omega_1) = \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \ominus \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ этот оператор нулевой, а на $\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ он положителен. Кроме того, в силу свойств Q , γ_2 , V и $\gamma_{n,1}$ получаем, что

$$Q\gamma_2 V\gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1), \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)), \quad \mathcal{R}(Q\gamma_2 V\gamma_{n,1}) \subset \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \subset \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1). \quad \square$$

Лемма 1.4. *Операторы*

$$Q P_\Gamma \gamma_2 \nabla^{-1} : \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \rightarrow \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \quad \text{и} \quad \nabla V \gamma_{n,1} : \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \rightarrow \mathbf{G}_{h,\Gamma}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \subset \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$$

взаимно сопряжены и ограничены:

$$Q P_\Gamma \gamma_2 \nabla^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}); \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)), \quad \nabla V \gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1); \mathbf{G}_{h,\Gamma}(\Omega_2; \rho_{2,0})). \quad (1.5.5)$$

Доказательство. Проверим сначала, что эти операторы обладают свойствами (1.5.5). В самом деле, пусть $\nabla\Phi_{21}$ — элемент из $\mathbf{G}_0(\Omega_2; \rho_{2,0})$. Тогда $\Phi_{21}|_{\Omega_2} = \nabla^{-1}(\nabla\Phi_{21})$ — элемент из $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, $\gamma_2\nabla^{-1}(\Delta\Phi_{21}) \in H^{1/2}(\Gamma)$ (теорема Гальярдо), $P_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1}(\nabla\Phi_{21}) \in L_{2,\Gamma} \cap H^{1/2}(\Gamma) = H_\Gamma^{1/2}$, $QP_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1}(\nabla\Phi_{21}) \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ (см. (1.4.7)), причем каждый из операторов является непрерывным из одного пространства в другое.

Аналогично можно проверить второе свойство (1.5.5). Действительно, если \mathbf{u}_1 — произвольный элемент из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, то $\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1 \in \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$, $V\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1 \in H_{\Gamma,h}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ (см. (1.3.15), (1.3.16)), $\nabla(V\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1) \in \mathbf{G}_{\Omega_2}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ и является градиентом слабого решения задачи (1.3.5). Здесь снова все переходы осуществляются с помощью операторов, ограниченных из одного пространства в другое.

Докажем теперь взаимную сопряженность этих операторов. Пусть

$$\mathbf{u}_1 = \nabla\psi_1 \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \subset \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1), \quad \nabla\Phi_{21} \in \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}).$$

Тогда

$$\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla(V(-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1) \cdot \nabla\Phi_{21} d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Phi_{22} \cdot \overline{\nabla\Phi_{21}} d\Omega_2, \quad (1.5.6)$$

где $\Phi_{22} \in H_{\Gamma,h}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ — слабое решение задачи (1.3.6) при $\varphi = -\rho_{2,0}(0)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3)_\Gamma = -\rho_{2,0}(0)\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1$ (см. (1.3.15)).

Далее, для другого оператора из (1.5.5) имеем для гладкого $\mathbf{u}_1 = \nabla\psi_1 \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \left[(-\rho_{2,0}(0))QP_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1}(\nabla\Phi_{21}) \right] \cdot \overline{\nabla\psi_1} d\Omega_1 &= \int_{\Gamma} (P_\Gamma\gamma_2\Phi_{21})(-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\overline{\mathbf{u}_1} d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma} (\gamma_2\Phi_{21})(-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\overline{\mathbf{u}_1} d\Gamma = \left(\Phi_{21}, V(-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\overline{\mathbf{u}_1} \right)_{H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0})} = \\ &= \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Phi_{21} \cdot \overline{\nabla\Phi_{22}} d\Omega_2. \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Здесь при выводе были использованы следующие свойства: взаимная сопряженность Q и $\gamma_{n,1}$, свойства $P_\Gamma = P_\Gamma^*$ и $P_\Gamma\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1 = \gamma_{n,1}\mathbf{u}_1$, а также взаимная сопряженность γ_2 и V .

Переходя в (1.5.7) от гладких $\mathbf{u}_1 = \nabla\psi_1$ к произвольным элементам из $\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, убеждаемся, что тождество (1.5.7) справедливо и для произвольных $\nabla\psi_1$. Сравнивая тогда (1.5.6) и (1.5.7), получаем, что операторы (1.5.5) взаимно сопряжены. \square

Опираясь на доказанные свойства элементов операторной матрицы C из (1.5.2), установим теперь общие свойства этой матрицы как оператора, действующего в пространстве \mathcal{H} (см. (1.5.1)).

Лемма 1.5. *Операторная матрица $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ является ограниченным положительно определенным оператором, ее квадратичная форма равна удвоенной полной энергии исследуемой гидромеханической системы и отвечает потенциальным движениям баротропного газа и произвольным движениям вязкоупругой жидкости.*

Доказательство. Факт ограниченности операторной матрицы C следует из лемм 2.3, 1.2–1.4 и ее вида (1.5.2). Вычислим квадратичную форму матрицы C , учитывая свойства операторных коэффициентов, формулы (1.5.6), (1.5.7), а также связь (1.3.15), т.е.

$$\Phi_{22}|_{\Omega_2} = V(-\rho_{2,0}(0)\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1), \quad (1.5.8)$$

из которой следует соотношение

$$(\rho_{2,0}(0))^2 \int_{\Omega_1} (Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1) \cdot \overline{\mathbf{u}_1} d\Omega_1 = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2.$$

Отсюда получаем формулу

$$(Cz, z)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\mathbf{u}_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{21} + \nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2 + \\ + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma + a^{-2} \int_{\Omega_2} |p_2|^2 d\Omega_2, \quad (1.5.9)$$

в которой правая часть есть удвоенная полная энергия гидросистемы, отвечающая потенциальным движениям газа с полем скорости $\nabla\Phi_2 = \nabla\Phi_{21} + \nabla\Phi_{22}$ (см. (1.1.20)).

Из (1.5.9) следует, что C — самосопряженный неотрицательный оператор. Покажем, что он положительно определен. Из представления (1.5.8) и свойств операторов V и $\gamma_{n,1}$ (см. леммы 2.3 и 1.2) следует, что имеет место неравенство

$$\|\Phi_{22}\|_{H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})} = \left(\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2 \right)^{1/2} \leq c \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}, \quad c > 0.$$

Отсюда при $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$, получаем что

$$\rho_1 \int_{\Omega_1} |\mathbf{u}_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{21} + \nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2 \geq \rho_1 \alpha \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}^2 + \\ + \rho_1 \beta c^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} |\nabla\Phi_{21}|^2 d\Omega_2 - \\ - \varepsilon \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{21}|^2 d\Omega_2 - \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2 \geq \rho_1 \alpha \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}^2 + \\ + (\rho_1 \beta c^{-2} + 1 - \varepsilon^{-1}) \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2 + (1 - \varepsilon) \int_{\Omega_2} |\nabla\Phi_{21}|^2 d\Omega_2, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.5.10)$$

Выбирая ε так, чтобы было выполнено условие

$$(1 + \rho_1 \beta c^{-2})^{-1} \leq \varepsilon < 1,$$

приходим к выводу, что квадратичная форма в левой части (1.5.10) положительно определена в пространстве $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$. Отсюда и из (1.5.9) следует, что оператор C положительно определен в $\mathcal{H} = \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma} \oplus \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1})$. \square

1.6. Дальнейшие преобразования задачи. Изучив свойства оператора полной энергии C из (1.5.3), продолжим рассмотрение этой задачи и напомним, что оператор B из (1.5.3) содержит интегральный оператор Вольтерра $I_{01}(t)$ (см. (1.1.4)), отвечающий обобщенной модели Олдройта. Это позволяет перейти от (1.5.3) к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве, введя новые искомые функции в изучаемой задаче.

Прделаем соответствующие преобразования для простоты при $m = 2$ (для других $m \in \mathbb{N}$ преобразования аналогичные). Именно, введем функции

$$\mathbf{w}_k(t, x) := \mu_1^{1/2} \alpha_k A_1^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \mathbf{u}_1(s, x) ds, \quad \mathbf{w}_k(0, x) = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2. \quad (1.6.1)$$

Отсюда имеем

$$\frac{d\mathbf{w}_k}{dt} = \mu_1^{1/2} \alpha_k^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 - \beta_k \mathbf{w}_k, \quad k = 1, 2. \quad (1.6.2)$$

Введем также новый искомый вектор-столбец

$$\tilde{z}(t) := (z_1^T; z_2^T)^T, \quad z_1^T = (\mathbf{u}_1; \mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2; \zeta), \quad z_2^T = (\nabla\Phi_{21}; p_2). \quad (1.6.3)$$

Тогда задача (1.5.3) перейдет с учетом (1.6.2) в задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\tilde{C} \frac{d\tilde{z}}{dt} + \tilde{B}\tilde{z} = \tilde{f}, \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}^0, \quad (1.6.4)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C} &:= \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}, \\ \tilde{f} &= \left(\rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_{2,0}(0) Q P_\Gamma \gamma_2 F_2; \mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{0}; \nabla F_2; 0 \right)^\top, \\ \tilde{C}_{11} &:= \text{diag} \left(\rho_1 \tilde{I}_1 + (\rho_{2,0}(0))^2 (Q \gamma_2) (V \gamma_{n,1}); \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \tilde{I}_4 \right); \\ \tilde{C}_{22} &:= \text{diag} (\tilde{I}_5; a^{-2} \tilde{I}_6); \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

здесь \tilde{I}_k — единичные операторы в пространствах элементов из (1.6.3). Далее,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{12} &:= \begin{pmatrix} -\rho_{2,0}(0) Q P_\Gamma \gamma_2 \nabla^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{21} := \begin{pmatrix} -\rho_{2,0}(0) \nabla V \gamma_{n,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_{11} &:= \begin{pmatrix} \mu_1 A_1 & \mu_1^{1/2} \alpha_1^{1/2} A_1^{1/2} & \mu_1^{1/2} \alpha_2^{1/2} A_1^{1/2} & g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) Q \\ -\mu_1^{1/2} \alpha_1^{1/2} A_1^{1/2} & \beta_1 \tilde{I}_2 & 0 & 0 \\ -\mu_1^{1/2} \alpha_2^{1/2} A_1^{1/2} & 0 & \beta_2 \tilde{I}_3 & 0 \\ -g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \gamma_{n,1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_{22} &:= \begin{pmatrix} 0 & B_{34} \\ B_{43} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Заметим, что искомые элементы $\tilde{z}(t)$ теперь считаются функциями переменной t со значениями в пространстве

$$\tilde{\mathcal{H}} = (\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma}) \oplus \left(\mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1}) \right) =: \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_2$$

(см. (1.5.1)).

Дальнейший план исследований — изучить свойства операторных матриц \tilde{C} и \tilde{B} в (1.6.4) и доказать теорему существования сильного по переменной t решения этой задачи.

Отметим предварительно следующий факт.

Лемма 1.6. *Оператор $\tilde{C} : \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ является ограниченным положительно определенным оператором, действующим в $\tilde{\mathcal{H}}$.*

Доказательство. Лемма 1.6 непосредственно следует из леммы 1.5 с учетом вида операторной матрицы \tilde{C}_{11} , в частности, с учетом добавления единичных элементов \tilde{I}_2, \tilde{I}_3 на диагонали. \square

Изучим теперь свойства операторных блоков B_{11} и B_{22} в операторной матрице \tilde{B} (см. (1.6.6)).

Лемма 1.7. *Операторная матрица B_{11} заданная на области определения*

$$\mathcal{D}(B_{11}) = \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{D}(A_1) \oplus H_\Gamma^{1/2},$$

плотной в пространстве

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma},$$

допускает факторизацию с симметричными крайними множителями:

$$B_{11} = \text{diag} (\mu_1^{1/2} A_1^{1/2}; \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; \tilde{I}_4) \cdot E_0 \cdot \text{diag} (\mu_1^{1/2} A_1^{1/2}; \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; \tilde{I}_4), \quad (1.6.7)$$

где

$$E_0 := \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & \alpha_1^{1/2} \tilde{I}_2 & \alpha_2^{1/2} \tilde{I}_3 & g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))A_1^{-1/2}Q \\ -\alpha_1^{1/2} \tilde{I}_1 & \beta_1 \tilde{I}_2 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^{1/2} \tilde{I}_1 & 0 & \beta_2 \tilde{I}_3 & 0 \\ -g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}A_1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6.8)$$

Эта операторная матрица является аккретивным оператором:

$$\operatorname{Re}(B_{11}z_1, z_1)_{\tilde{\mathcal{H}}_1} \geq 0 \quad \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{11}). \quad (1.6.9)$$

При любом $b > 0$ операторная матрица

$$B_{11,b} := B_{11} + bP_4, \quad P_4 := \operatorname{diag}(0; 0; 0; \tilde{I}_4) \quad (1.6.10)$$

является равномерно аккретивным оператором:

$$\operatorname{Re}(B_{11,b}z_1, z_1)_{\tilde{\mathcal{H}}_1} \geq c\|z_1\|_{\tilde{\mathcal{H}}_1}^2, \quad c > 0, \quad \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{11,b}) = \mathcal{D}(B_{11}). \quad (1.6.11)$$

Доказательство. Факторизация (1.6.7) матрицы B_{11} проверяется непосредственно. Свойство аккретивности (1.6.9) следует из равенства

$$\operatorname{Re}(B_{11}z_1, z_1)_{\tilde{\mathcal{H}}_1} = \mu_1 \|A_1^{1/2} \mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}^2 + \sum_{k=1}^2 \beta_k \|\mathbf{w}_k\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}^2.$$

Отсюда получаем свойство равномерной аккретивности (1.6.11), если заметить, что

$$\|A_1^{1/2} \mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}^2 \geq \lambda_1(A_1) \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}^2$$

где $\lambda_1(A_1) > 0$ — первое собственное значение оператора A_1 . Тогда в (1.6.11) имеем

$$c = \max \{ \mu_1 \lambda_1(A_1); \beta_1, \beta_2; b \} > 0. \quad \square$$

Лемма 1.8. Оператор $\gamma_{n,1}A_1^{-1/2} : \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \rightarrow L_{2,\Gamma}$ компактен. Оператор $A_1^{-1/2}Q : \mathcal{D}(Q) \rightarrow \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ и его замыкание обладают свойствами

$$A_1^{-1/2}Q = (\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(Q)}, \quad \overline{A_1^{-1/2}Q} = (\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*. \quad (1.6.12)$$

Доказательство. Оператор $A_1^{-1/2}$ переводит $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ в $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) \subset \mathbf{H}^1(\Omega_1)$, а тогда (по теореме Гальярдо, см. [21]) $\gamma_{n,1}A_1^{-1/2}$ ограниченно действует из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ в $H_\Gamma^{1/2} = H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$. Так как $H_\Gamma^{1/2}$ компактно вложено в $L_{2,\Gamma}$, то $\gamma_{n,1}A_1^{-1/2}$ — компактный оператор.

Далее, пусть \mathbf{u}_1 — произвольный элемент из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ и $\zeta \in \mathcal{D}(Q) \subset L_{2,\Gamma}$. Тогда

$$(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2}\mathbf{u}_1, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} = (A_1^{-1/2}\mathbf{u}_1, Q\zeta)_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} = (\mathbf{u}_1, A_1^{-1/2}Q\zeta)_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}.$$

Отсюда следует, что $A_1^{-1/2}Q = \overline{(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(Q)}}$, и так как $\mathcal{D}(Q) \subset H_\Gamma^{1/2}$ плотно в $L_{2,\Gamma}$, то имеет место свойство (1.6.12), причем $\overline{A_1^{-1/2}Q}$ — компактный оператор. \square

Заметим теперь, что оператор $B_{11,b}$ из (1.6.10) также допускает факторизацию вида (1.6.7) с теми же крайними множителями и со средним множителем

$$E_b := \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & \alpha_1^{1/2} \tilde{I}_2 & \alpha_2^{1/2} \tilde{I}_3 & g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))A_1^{-1/2}Q \\ -\alpha_1^{1/2} \tilde{I}_1 & \beta_1 \tilde{I}_2 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^{1/2} \tilde{I}_1 & 0 & \beta_2 \tilde{I}_3 & 0 \\ -g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}A_1^{-1/2} & 0 & 0 & b\tilde{I}_4 \end{pmatrix}. \quad (1.6.13)$$

Из приведенных фактов вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.9. *Оператор $B_{11,b}$ из (1.6.10) допускает расширение путем замыкания среднего множителя (1.6.13) на основе (1.6.12). При этом замыкание $\overline{B_{11,b}}$ имеет факторизацию*

$$\overline{B_{11,b}} = \text{diag}(\mu_1^{1/2} A_1^{1/2}; \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; \tilde{I}_4) \cdot \overline{E_b} \cdot \text{diag}(\mu_1^{1/2} A_1^{1/2}; \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; \tilde{I}_4), \quad (1.6.14)$$

является максимальным равномерно аккретивным оператором в $\tilde{\mathcal{H}}_1$, заданным на области определения

$$\mathcal{D}(\overline{B_{11,b}}) = \left\{ z_1 = (\mathbf{u}_1; \mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2; \zeta)^\tau : \mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \sum_{k=1}^2 \alpha_k^{1/2} \mathbf{w}_k + g\mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} Q)^* \zeta \in \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \right\} \quad (1.6.15)$$

и действует по закону

$$\overline{B_{11,b}} z_1 = \begin{pmatrix} \mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \left(\mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \sum_{k=1}^2 \alpha_k^{1/2} \mathbf{w}_k + g\mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} A^{-1/2})^* \zeta \right) \\ -\mu_1^{1/2} \alpha_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_1 \mathbf{w}_1 \\ -\mu_1^{1/2} \alpha_2^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{w}_2 \\ -g\mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + b\zeta \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь свойство максимальности оператора $\overline{B_{11,b}}$. Однако этот факт следует из того, что в представлении (1.6.14) каждая операторная матрица ограничено обратима в $\tilde{\mathcal{H}}_1$, в частности, для $\overline{E_b}$ это следует из того факта, что неравенство (1.6.11) сохраняется и для $\overline{B_{11,b}}$, и потому область значений $\mathcal{R}(\overline{B_{11,b}})$ есть все пространство $\tilde{\mathcal{H}}_1$. \square

Из леммы 1.9 получаем следующий важный вывод.

Лемма 1.10. *Оператор $-\overline{B_{11,b}}$ является генератором сжимающей полугруппы $U_1(t)$, причем $\|U_1(t)\| \leq e^{-ct}$, $c > 0$ (см. (1.6.11), (\square)). При этом оператор $-\overline{B_{11}} := -(\overline{B_{11,b}} - bP_4)$ также является генератором сжимающей полугруппы операторов.*

Перейдем теперь к изучению свойств оператора B_{22} из (1.6.6), отвечающего движению газа в исследуемой системе. Этот оператор действует в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_2 = \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1})$ с элементами $z_2 = (\nabla\Phi_{21}; p_2)^\tau$. Очевидно, это оператор неограничен, и его область значений должна совпадать с $\tilde{\mathcal{H}}_2$. Поэтому далее будем считать, что

$$\mathcal{D}(B_{22}) = \left\{ \nabla\Phi_{21} \in \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \text{div}(\rho_{2,0} \nabla\Phi_{21}) \in L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1}), \rho_{2,0} \frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\Omega_2 \right\} \oplus \left\{ p_2 \in L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1}) : \nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2) \in \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \right\}. \quad (1.6.16)$$

Лемма 1.11. *Оператор $B_{22} : \mathcal{D}(B_{22}) \subset \tilde{\mathcal{H}}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_2$ является кососамосопряженным, т.е.*

$$B_{22}^* = -B_{22}. \quad (1.6.17)$$

Доказательство. Пусть $z_2 = (\nabla\Phi_{21}; p_2)^\tau \in \mathcal{D}(B_{22})$, $y_2 = (\nabla\Psi_{21}; q_2)^\tau \in \mathcal{D}(B_{22})$. Тогда, используя формулу вида $\text{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \text{div} \mathbf{A} + \nabla\varphi \cdot \mathbf{A}$, вычислим выражение

$$\begin{aligned} (B_{22} z_2, y_2)_{\tilde{\mathcal{H}}_2} &= \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Phi_{21} \cdot \overline{\nabla\Psi_{21}} d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1} \text{div}(\rho_{2,0} \nabla\Phi_{21}) \overline{q_2} d\Omega_2 = \\ &= \left\{ \int_{\Omega_2} \text{div}(\rho_{2,0}^{-1} p_2 \rho_{2,0} \overline{\nabla\Psi_{21}}) d\Omega_2 - \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1} p_2 \text{div}(\rho_{2,0} \overline{\nabla\Psi_{21}}) d\Omega_2 \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \int_{\Omega_2} \operatorname{div}(\rho_{2,0}^{-1} \overline{q_2} \rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) d\Omega_2 - \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Phi_{21} \cdot \nabla(\rho_{2,0}^{-1} \overline{q_2}) d\Omega_2 \right\} = \\
& = - \left[\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Phi_{21} \cdot \overline{\nabla(\rho_{2,0}^{-1} q_2)} d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1} p_2 \overline{\operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Psi_{21})} d\Omega_2 \right] = -(z_2, B_{22} y_2)_{\tilde{\mathcal{H}}_2}
\end{aligned}$$

для всех $z_2, y_2 \in \mathcal{D}(B_{22})$ (здесь при выводе использовано граничное условие на $\partial\Omega_2$, см. (1.6.16), и теорема Гаусса—Остроградского). Отсюда и следует свойство (1.6.17). \square

Рассмотрим подробнее другие свойства оператора B_{22} и его связь с оператором задачи Неймана (1.3.5).

Лемма 1.12. *Оператор $B_{22} : \mathcal{D}(B_{22}) \subset \tilde{\mathcal{H}}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_2$ обратим.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $B_{22} z_2 = y_2 \in \tilde{\mathcal{H}}_2$, $z_2 = (\nabla \Phi_{21}; p_2)^\tau$, причем y_2 представим в виде $y_2 = (\nabla(\rho_{2,0}^{-1} \psi_2); \rho_{2,0} q_2)^\tau$, с заданными произвольными функциями ψ_2 и q_2 . Тогда будем иметь соотношения

$$\nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2) = \nabla(\rho_{2,0}^{-1} \psi_2),$$

и задачу

$$\operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) = \rho_{2,0} q_2 \quad \text{в } \Omega_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_2. \quad (1.6.18)$$

Отсюда в силу нормировки

$$\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} (\rho_{2,0}^{-1} \psi_2) d\Omega_2 = 0$$

(см. (1.2.9)) для элементов из $\mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ получаем $p_2 = \psi_2$, а в задаче (1.6.18) возникает проблема

$$\begin{aligned}
-\Delta_0 \Phi_{21} &= -\rho_{2,0}^{-1} \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) = -q_2 \quad \text{в } \Omega_2, \\
\rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega_2, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{21} d\Omega_2 = 0
\end{aligned}$$

(см. (1.3.8)), равносильная уравнению

$$A_2 \Phi_{21} = -q_2 \in L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}} \quad (1.6.19)$$

(см. (1.3.7)), где A_2 — оператор гильбертовой пары $(H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}); L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}})$, изученный в п. 1.3. Отсюда следует, что задача (1.6.19) однозначно разрешима: $\Phi_{21} = -A_2^{-1} q_2 \in H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ и потому $\nabla \Phi_{21} \in \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ (между элементами из $\mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ и $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ имеется изоморфизм, осуществляемый операторами ∇ и ∇^{-1}). \square

Лемма 1.13. *Спектр оператора B_{22} дискретен и расположен на мнимой оси. Его собственные значения образуют множество $\{\lambda_k^\pm(B_{22})\}_{k=1}^\infty$ с двумя ветвями:*

$$\lambda_k^\pm(B_{22}) = \pm i \lambda_k^{1/2}(A_2), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\{\lambda_k(A_2)\}_{k=1}^\infty$ — собственные значения оператора A_2 (см. (1.6.19)):

$$\begin{aligned}
0 &< \lambda_1(A_2) \leq \lambda_2(A_2) \leq \dots \leq \lambda_k(A_2) \leq \dots, \\
\lambda_k(A_2) &= \left(\frac{|\Omega_2|}{6\pi^2} \right)^{-2/3} k^{2/3} [1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty.
\end{aligned} \quad (1.6.20)$$

Собственные элементы

$$\{z_k^\pm\}_{k=1}^\infty = \{(\nabla \Phi_{21,k}^\pm; p_{2,k}^\pm)^\tau\}_{k=1}^\infty,$$

отвечающие собственным значениям оператора B_{22} , образуют ортогональный базис в $\tilde{\mathcal{H}}_2$ и выражаются через ортонормированные собственные элементы оператора A_2 , т.е. решения спектральной задачи

$$-\Delta_0 \Phi_{21} = \lambda \Phi_{21} \quad \text{в } \Omega_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial \Omega_2, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{21} d\Omega_2 = 0, \quad (1.6.21)$$

по формулам

$$z_k^\pm = (\nabla \Phi_{21,k}; \lambda_k^\pm \rho_{2,0} \Phi_{21,k})^\tau, \quad k = 1, 2, \dots$$

При этом для ортонормированных в $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ собственных элементов задачи (1.6.21) выполнены следующие формулы ортогональности для ортонормированных элементов $\{z_k^\pm\}_{k=1}^\infty$:

$$(z_k^\pm, z_l^\pm)_{\tilde{\mathcal{H}}_2} = \left(\frac{1 + (\pm 1)(\pm 1)}{2} \right)^{1/2} \delta_{kl},$$

где учтены все четыре варианта знаков слева.

Доказательство проводится непосредственной проверкой всех связей возникающих задач для операторов B_{22} и A_2 . Асимптотическая формула (1.6.20) — это известная асимптотика Вейля в спектральной задаче Неймана для оператора Лапласа при $\rho_{2,0} = \text{const}$. \square

Подводя итоги исследования свойств оператора $\tilde{B} = \text{diag}(B_{11}, B_{22})$ в задаче Коши (1.6.4), отметим, что первый блок B_{11} характеризует диссипативную вязкоупругую часть исследуемой гидросистемы (жидкость), а второй блок B_{22} — консервативную часть (газ). В итоге приходим к следующему выводу.

Лемма 1.14. После замыкания (оператора B_{11}) оператор $\overline{\tilde{B}}$ является максимальным аккретивным оператором, действующим в $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_2$ и заданным на области определения

$$\mathcal{D}(\overline{\tilde{B}}) = \mathcal{D}(\overline{B_{11}}) \oplus \mathcal{D}(B_{22}), \quad \mathcal{D}(\overline{B_{11}}) = \mathcal{D}(\overline{B_{11,b}}), \quad \mathcal{R}(\overline{\tilde{B}}) = \tilde{\mathcal{H}}.$$

Доказательство. Так как B_{22} кососамосопряжен в $\tilde{\mathcal{H}}_2$, то он является генератором группы унитарных операторов, действующих в $\tilde{\mathcal{H}}_2$. Поэтому вместе с утверждениями лемм 1.9 и 1.10 получаем утверждение леммы 1.14. \square

1.7. О разрешимости исходной начально-краевой задачи. Опираясь на установленные факты, докажем утверждение о разрешимости задачи Коши (1.5.3), к которой была приведена исходная начально-краевая задача (1.1.5)–(1.1.13).

Определение 1.1. Будем говорить, что задача Коши (1.5.3) имеет сильное по переменной t решение $z(t) = (\mathbf{u}_1; \zeta; \nabla \Phi_{21}; p_2)^\tau$ на отрезке $[0, T]$, если все слагаемые в уравнении (1.5.3) являются непрерывными функциями t со значениями в пространстве

$$\mathcal{H} := \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma} \oplus \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1})$$

и выполнено начальное условие $z(0) = z^0$.

Согласно этому определению для сильного решения задачи все слагаемые в уравнении (1.4.13) должны быть элементами из $C([0, T]; \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1))$, в уравнении (1.4.14) — элементами из $C([0, T]; L_{2,\Gamma})$, в уравнении (1.4.15) — элементами из $C([0, T]; \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}))$, а в уравнении (1.4.16) — элементами из $C([0, T]; L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1}))$.

Теорема 1.1. Пусть в задаче (1.5.3) выполнены условия

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(A_1^{1/2}) = \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1), \quad \zeta^0 \in \mathcal{D}(Q) = H_\Gamma^{1/2}, \\ \Phi_{21}^0 \in \mathcal{D}(A_2) \subset \mathcal{D}(A_2^{1/2}) = H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad \nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2^0) \in \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}), \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

а также условия

$$\mathbf{f}_1(t, x) \in C^1([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega_1)), \quad \mathbf{f}_2(t, x) \in C^1([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega_2)). \quad (1.7.2)$$

Тогда задача (1.5.3) имеет сильное по переменной t решение $z(t)$ на отрезке $[0, T]$ (в смысле определения 1.1).

Доказательство состоит из нескольких этапов.

1. Рассмотрим задачу Коши вида (1.6.4), однако с оператором $\bar{B} = \text{diag}(\bar{B}_{11}; B_{22})$, который, согласно леммам 1.9–1.11, 1.14, является максимальным аккретивным:

$$\tilde{C} \frac{d\tilde{z}}{dt} + \bar{B}\tilde{z} = \tilde{f}(t), \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}^0. \quad (1.7.3)$$

При этом начальные данные выберем в виде (1.7.1), т.е. из области определения оператора B (см. (1.5.3)), и дополним их тривиальными начальными условиями

$$\mathbf{w}_k(0) = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2$$

(см. (1.6.1), (1.6.2)). Тогда эти условия порождают начальный элемент

$$\tilde{z}^0 = (\mathbf{u}_1^0; \mathbf{0}; \mathbf{0}; \zeta^0; \nabla\Phi_{21}^0; p_2^0)^\tau \in \mathcal{D}(\tilde{B}) \subset \mathcal{D}(\bar{B}). \quad (1.7.4)$$

Аналогично проверяем, что если выполнено условие (1.7.2), то заданная функция $\tilde{f}(t)$ обладает свойством

$$\tilde{f}(t) \in C^1([0, T]; \tilde{\mathcal{H}}) \quad (1.7.5)$$

(см. (1.6.5)). Воспользуемся теперь тем фактом, что оператор \tilde{C} в (1.7.3) положительно определен и ограничен в $\tilde{\mathcal{H}}$, и введем в $\tilde{\mathcal{H}}$ эквивалентную норму, порожденную скалярным произведением

$$(\tilde{z}, \tilde{y})_{\tilde{C}} := (\tilde{C}\tilde{z}, \tilde{y})_{\tilde{\mathcal{H}}}. \quad (1.7.6)$$

Перепишем затем задачу (1.7.3) в виде

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = -\tilde{C}^{-1}\bar{B}\tilde{z} + \tilde{C}^{-1}\tilde{f}(t), \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}^0, \quad (1.7.7)$$

и заметим, что оператор $-\tilde{C}^{-1}\bar{B}$ является максимальным диссипативным в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{C}}$ со скалярным произведением (1.7.6). Поэтому (см., например, [12, с. 166]) при условиях (1.7.4), (1.7.5) задача (1.7.7) имеет единственное сильное решение $\tilde{z}(t)$, т.е. такое, что все слагаемые в (1.7.7) являются элементами из $C([0, T]; \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{C}})$. Отсюда следует, что $\tilde{z}(t)$ является также сильным решением задачи Коши (1.7.3), где все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в $\tilde{\mathcal{H}}$.

2. Выпишем теперь эту систему уравнений построчно с учетом представления операторной матрицы \bar{B} в факторизованном виде (см. (1.6.7), (1.6.8), (1.6.13)–(1.6.15)). Имеем задачу

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\rho_1 \mathbf{u}_1 + (\rho_{2,0}(0))^2 (Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}) \mathbf{u}_1 \right] - \rho_{2,0}(0) (QP_\Gamma \gamma_2 \nabla^{-1})(\nabla\Phi_{21}) \right\} + \\ + \mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \left\{ \mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \sum_{k=1}^2 \alpha_k^{1/2} \mathbf{w}_k + g\mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \zeta \right\} = \\ = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_{2,0}(0) QP_\Gamma \gamma_2 F_2, \end{aligned} \quad (1.7.8a)$$

$$\nabla F_2 = P_{G,2} \mathbf{f}_2, \quad \mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_1^0, \quad (1.7.8b)$$

$$\frac{d\mathbf{w}_1}{dt} - \mu_1^{1/2} \alpha_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_1 \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}_1(0) = \mathbf{0}, \quad (1.7.8c)$$

$$\frac{d\mathbf{w}_2}{dt} - \mu_1^{1/2} \alpha_2^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_1 \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}_2(0) = \mathbf{0}, \quad (1.7.8d)$$

$$g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \frac{d\zeta}{dt} - g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 = 0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \quad (1.7.8e)$$

$$\frac{d}{dt} (\nabla\Phi_{21} - \rho_{2,0}(0) \nabla(V\gamma_{n,1}) \mathbf{u}_1) + \nabla(\rho_{2,0}(0)^{-1} p_2) = P_{G,2} \mathbf{f}_2 =: \nabla F_2, \quad \nabla\Phi_{21}(0) = \nabla\Phi_{21}^0, \quad (1.7.8f)$$

$$a^{-2} \frac{dp_2}{dt} + \text{div}(\rho_{2,0} \nabla\Phi_{21}) = 0, \quad p_2(0) = p_2. \quad (1.7.8g)$$

Заметим, что система уравнений, отвечающая задаче (1.6.4) с незамкнутым оператором \tilde{B} , отличается от (1.7.8) лишь тем, что в первом уравнении (1.7.8а) слева раскрыты вторые скобки, а также оператор $(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*$ заменен на $A_1^{-1}Q$ (см. лемму 1.8). Таким образом, теперь возникает проблема доказать, что при условиях данной теоремы (см. (1.7.1), (1.7.2)) можно раскрыть упомянутые скобки, и тогда все полученные слагаемые в первом уравнении (1.7.8а) будут элементами из $C([0, T]; \mathbf{J}_{0, S_1}(\Omega_1))$.

3. Переходя к доказательству этого факта, отметим, что для сильного решения задачи (1.7.3) функция переменной t в упомянутых скобках является элементом из $C([0, T]; \mathcal{D}(A_1^{1/2})) = C([0, T]; \mathbf{J}_{0, S_1}^1(\Omega_1))$. Но тогда

$$\mathbf{v}_1 := \left\{ \mathbf{u}_1 + \sum_{k=1}^2 \alpha_k^{1/2} \mu_1^{-1/2} A_1^{-1/2} \mathbf{w}_k + g\mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) A_1^{-1/2} (\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^* \zeta \right\} \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1)). \quad (1.7.9)$$

Однако из уравнений (1.7.8b), (1.7.8c), (1.7.8d) задачи (1.7.8) следует (см. (1.6.1), (1.6.2)), что

$$\mathbf{w}_k(t) = \mu_1^{1/2} \alpha_k^{1/2} A_1^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \mathbf{u}_1(s) ds, \quad k = 1, 2, \quad \zeta(t) = \int_0^t \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1(s) ds + \zeta^0. \quad (1.7.10)$$

Подставляя эти выражения в (1.7.9), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(t) + \sum_{k=1}^2 \alpha_k^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \mathbf{u}_1(s) ds + \\ + g\mu_1^{-1} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) A_1^{-1/2} (\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^* \left(\int_0^t \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1(s) ds + \zeta^0 \right) = \\ = \mathbf{v}_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1)). \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

Рассмотрим (1.7.11) как интегральное уравнение Вольтерра в пространстве $\mathcal{H}(A_1)$ с нормой графика оператора A_1 . Тогда в силу леммы 1.8 имеем для $\mathbf{u}_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{H}(A_1)) = C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$ соотношение

$$A_1^{-1/2} (\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^* (\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1) = A_1^{-1/2} (A_1^{-1/2} Q) (\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1) = A_1^{-1} (Q \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$$

(см. лемму 1.2 и свойство (1.5.4)). Отсюда следует, что в интегральном уравнении Вольтерра (1.7.11) ядро является непрерывной по t, s оператор функцией в треугольнике $\Delta_T := \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$, принимающей значения из $\mathcal{L}(\mathcal{H}(A_1))$. Поэтому уравнение (1.7.11) имеет единственное решение $\mathbf{u}_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$, причем все остальные слагаемые в (1.7.11) также принадлежат этому пространству.

4. Но тогда в уравнении (1.7.8а) можно раскрыть скобки во втором слагаемом слева, а затем из системы исключить функции $\mathbf{w}_k(t)$, $k = 1, 2$ (см. (1.7.10)). В итоге возникает система уравнений (1.4.13)–(1.4.16), где все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в соответствующих пространствах. Значит, задача (1.4.13)–(1.4.16), т.е. задача (1.5.3), имеет единственное сильное решение в смысле определения 1.1. \square

В качестве замечания к теореме 1.1 отметим, что для сильного решения задачи (1.5.3) при условиях (1.7.1), (1.7.2) имеют место следующие свойства:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &\in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1)) \cap C^1([0, T]; \mathbf{J}_{0, S_1}(\Omega_1)); \\ \nabla \Phi_{21} &\in C^1([0, T]; \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})); \quad \zeta \in C^1([0, T]; H_\Gamma^{1/2}); \\ p_2 &\in C^1([0, T]; L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}^{-1}}) \cap C([0, T]; H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})). \end{aligned}$$

Опираясь на теорему 1.1, можно получить утверждение об однозначной разрешимости исходной начально-краевой задачи (1.1.5)–(1.1.13) на произвольном отрезке времени $[0, T]$.

1.8. К проблеме нормальных колебаний системы «вязкоупругая жидкость—баротропный газ». Рассмотрим решения однородной задачи (1.7.3), зависящие от времени по закону

$$\tilde{z}(t) = \tilde{z}e^{-\lambda t}.$$

Функции такого вида называют нормальными движениями исследуемой системы, числа λ — комплексными декрементами затухания нормальных движений, а $\tilde{z} \neq 0$ — амплитудными элементами.

Для нахождения амплитудных элементов и чисел λ возникает из (1.7.3) спектральная задача

$$\overline{B}\tilde{z} = \lambda\tilde{C}\tilde{z}, \quad \tilde{z} \in \mathcal{D}(\overline{B}) \subset \tilde{\mathcal{H}},$$

которая, в частности, получается из системы уравнений (1.7.8) и выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \left\{ \mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \alpha_1^{1/2} \mathbf{w}_1 + \alpha_2^{1/2} \mathbf{w}_2 + g\mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \zeta \right\} = \\ = \lambda \left[\rho_1 \mathbf{u}_1 + (\rho_{2,0}(0))^2 (Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}) \mathbf{u}_1 \right] - \rho_{2,0}(0) QP_\Gamma \gamma_2 \Phi_{21}, \end{aligned} \quad (1.8.1a)$$

$$-\mu_1^{1/2} \alpha_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_1 \mathbf{w}_1 = \lambda \mathbf{w}_1, \quad (1.8.1b)$$

$$-\mu_1^{1/2} \alpha_2^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{w}_2 = \lambda \mathbf{w}_2, \quad (1.8.1c)$$

$$-g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 = \lambda g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \zeta, \quad (1.8.1d)$$

$$\nabla(\rho_{2,0}(0)^{-1} p_2) = \lambda \left(\nabla \Phi_{21} - \rho_{2,0}(0) \nabla(V\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1) \right), \quad (1.8.1e)$$

$$\operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) = \lambda a^{-2} p_2. \quad (1.8.1f)$$

Наша дальнейшая цель — исключить из системы уравнений (1.8.1) часть неизвестных, перейти к спектральной задаче для операторного пучка (оператор-функции от λ) с ограниченными операторными коэффициентами и исследовать ее методами спектральной теории (см., например, [15]).

Установим сначала следующий простой факт.

Лемма 1.15. Числа $\lambda = 0$, $\lambda = \beta_k$, $k = 1, 2$, не являются собственными значениями спектральной задачи (1.8.1).

Доказательство. 1. Положим $\lambda = 0$ в (1.8.1). Тогда из предпоследнего уравнения (1.8.1e) получаем, что $\nabla(\rho_{2,0}(0)^{-1} p_2) = \mathbf{0}$. Так как это элемент из $\mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ (см. (1.2.9)), то $p_2 = 0$. Далее, из последнего уравнения (1.8.1f) и граничных условий для Φ_{21} возникает задача

$$-\Delta_0 \Phi_{21} = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial \Omega_2, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{21} d\Omega_2 = 0,$$

которая имеет лишь тривиальное решение: $\Phi_{21} = 0$.

Из уравнений (1.8.1b)–(1.8.1d) имеем также связи

$$\beta_k \mathbf{w}_k = \mu_1^{1/2} \alpha_k \beta_k^{-1} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1, \quad k = 1, 2, \quad \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 = 0,$$

а тогда из первого уравнения (1.8.1a) получаем соотношение

$$\mu_1^{1/2} \left(1 + \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + g\mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \zeta = \mathbf{0}.$$

Отсюда следует, что

$$\left(1 + \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \left\| \mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_1)}^2 = 0,$$

так как

$$\left((\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \zeta, A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 \right)_{L_2(\Omega_1)} = (\zeta, (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2}) A_1^{1/2} \mathbf{u}_1)_{L_2, \Gamma} = (\zeta, \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1)_{L_2, \Gamma} = 0.$$

Значит, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$.

Наконец, из оставшейся связи $(\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \zeta = 0$ при любом $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{J}_{0, S_1}(\Omega_1)$ имеем

$$\left(\boldsymbol{\eta}, (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \zeta \right)_{\mathbf{J}_{0, S_1}(\Omega_1)} = (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2} \boldsymbol{\eta}, \zeta)_{L_2, \Gamma} = 0,$$

и так как совокупность элементов вида $\gamma_{n,1} A_1^{-1/2} \boldsymbol{\eta}$ при $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{J}_{0, S_1}(\Omega_1)$ образует множество $H_\Gamma^{1/2}$, плотное в L_2, Γ , то $\zeta = 0$. Это доказывает первое утверждение леммы.

2. Положим теперь $\lambda = \beta_1$ в (1.8.1). Тогда из второго уравнения (1.8.1b) получаем $A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ и потому $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. Поэтому из третьего уравнения (1.8.1c) следует ($\beta_1 \neq \beta_2$), что $\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$, а из четвертого (1.8.1d) имеем $\zeta = 0$. Далее, для функций Φ_{21} и p_2 возникает задача

$$\begin{aligned} \nabla(\rho_{2,0}(0)^{-1} p_2) &= \beta_1 \nabla \Phi_{21}, \quad \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) = \beta_1 a^{-2} p_2 \quad \text{в } \Omega_2, \\ \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \partial \Omega_2, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{21} d\Omega_2 \end{aligned}$$

которая приводится к задаче на собственные значения

$$A_2 \Phi_{21} = -\beta_1^2 \Phi_{21}, \quad \Phi_{21} \in H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$$

(см. (1.3.4), (1.3.5), (1.3.12)). Поскольку оператор A_2 имеет дискретный положительный спектр, то эта задача имеет лишь нулевое решение, и потому $\nabla \Phi_{21} = 0$, $p_2 = 0$. Теперь из первого уравнения (1.8.1a) получаем, что $\alpha_1^{1/2} \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$.

Случай $\lambda = \beta_2$ рассматривается аналогично, что и завершает доказательство. \square

Опираясь на лемму 1.15, исключим при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \beta_k$, $k = 1, 2$, в уравнениях (1.8.1) все искомые элементы, кроме \mathbf{u}_1 и $\nabla \Phi_{21}$. Из соотношений (1.8.1b)–(1.8.1d) имеем

$$\mathbf{w}_k = \frac{\mu_1^{1/2} \alpha_k^{1/2}}{\beta_k - \lambda} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1, \quad k = 1, 2, \quad \zeta = -\lambda^{-1} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1.$$

Подставляя их в первое уравнение (1.8.1a) и осуществляя замену

$$A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\eta}_1 \in \mathbf{J}_{0, S_1}(\Omega_1),$$

приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \mu_1 e_2(\lambda) \boldsymbol{\eta}_1 &= \lambda \left\{ A_1^{-1/2} \left(\rho_1 I_1 + (\rho_{2,0}(0))^2 (Q \gamma_2) (V \gamma_{n,1}) \right) A_1^{-1/2} \boldsymbol{\eta}_1 - \rho_{2,0}(0) A_1^{-1/2} Q P_\Gamma \gamma_2 \Phi_{21} \right\} + \\ &\quad + \lambda^{-1} g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2}) \boldsymbol{\eta}_1, \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

где

$$e_2(\lambda) := 1 + \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k}{\beta_k - \lambda}.$$

Уравнения (1.8.1e) и (1.8.1f) приводят к связи

$$A_2 \Phi_{21} = -\lambda^2 a^{-2} \left(\Phi_{21} - \rho_{2,0} V (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2}) \boldsymbol{\eta}_1 \right). \quad (1.8.3)$$

Осуществляя еще здесь замену

$$A_2^{1/2} \Phi_{21} = \varphi_2 \in L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}} \quad (1.8.4)$$

(см. (1.3.12), (1.3.13)), получим окончательно из (1.8.2)–(1.8.4) задачу на собственные значения

$$\mu_1 e_2(\lambda) \boldsymbol{\eta}_1 = \lambda (A_{11} \boldsymbol{\eta}_1 + A_{12} \varphi_2) + \lambda^{-1} B_1 \boldsymbol{\eta}_1, \quad \varphi_2 = -\lambda^2 a^{-2} (A_{21} \boldsymbol{\eta}_1 + A_{22} \varphi_2), \quad (1.8.5)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &:= A_1^{-1/2} \left(\rho_1 I_1 + (\rho_{2,0}(0))^2 (Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}) \right) A_1^{-1/2}, \quad A_{22} := A_2^{-1}, \\ A_{12} &:= -\rho_{2,0}(0) A_1^{-1/2} Q P_\Gamma \gamma_2 A_1^{-1/2}, \quad A_{21} := -\rho_{2,0}(0) (A_2^{-1/2} V) (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2}), \\ B_1 &:= g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2}). \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

Перепишем задачу (1.8.5)–(1.8.6) в векторно-матричном виде в двух формах. Первая форма такова:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 e_2(\lambda) I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & a^2 I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (1.8.7)$$

Вторая форма выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 e_2(\lambda) I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - \lambda^2 a^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.8.8)$$

где $(\boldsymbol{\eta}_1; \varphi_2)^\tau \in \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$.

Лемма 1.16. *Операторные коэффициенты A_{jk} , $j, k = 1, 2$, компактны, причем $A_{jk} = A_{kj}^*$, $A_{kk} \geq 0$. Кроме того, операторный коэффициент B_1 — компактный неотрицательный оператор, действующий в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$.*

Доказательство. Эти свойства следуют непосредственно из определений (1.8.6) операторов и лемм 2.3, 1.2–1.4, 1.8, 1.13, а также свойств, описанных в (1.3.13), (1.3.17), (1.4.10). \square

Опираясь на эти факты, укажем на некоторые простые свойства спектра исследуемой задачи (1.8.5):

- I. Спектр задачи (1.8.5) симметричен относительно вещественной оси.
- II. Спектр задачи (1.8.5) дискретен, т.е. состоит из счетного множества конечнократных собственных значений с возможными предельными точками $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = \beta_k$, $k = 1, 2$, а также точками $\lambda = \delta_k$, $e_2(\delta_k) = 0$, $k = 1, 2$, т.е. нулями функции $e_2(\lambda)$.
- III. Спектр задачи (1.8.5)–(1.8.6) расположен в правой комплексной полуплоскости.

Доказательство. I. Перепишем задачу (1.8.7) в кратком виде

$$L_1(\lambda)\xi = 0, \quad \xi := (\boldsymbol{\eta}_1; \varphi_2)^\tau, \quad (1.8.9)$$

и заметим, что операторный пучок $L_1(\lambda)$ самосопряжен (см. [15]), т.е. $(L_1(\lambda))^* = L_1(\lambda)$. Отсюда и следует данное утверждение.

II. Задачу (1.8.8) перепишем в виде

$$L_2(\lambda)\xi = 0, \quad \xi = (\boldsymbol{\eta}_1; \varphi_2)^\tau,$$

и заметим, что она приводится к спектральной проблеме

$$(I + \Phi(\lambda))\xi = 0,$$

где I — единичный оператор в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$, а $\Phi(\lambda)$ — аналитическая оператор-функция, принимающая компактные значения. Заметим теперь, что оператор $(I + \Phi(\lambda))|_{\lambda=-1}$ обратим, так как

$$L_1(-1) = \begin{pmatrix} \mu_1 e_2(-1) I_1 & 0 \\ 0 & a^{-2} I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + a^{-2} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— положительно определенный оператор, поскольку операторная матрица $(A_{jk})_{j,k=1}^2$ — компактный положительный оператор (факт положительности проверяется непосредственно), а $e_2(-1) > 0$. Поэтому по теореме Келдыша (см. [7]; иногда ее называют теоремой Гохберга, см. [6]) получаем доказываемое утверждение.

III. Доказательство основано на неравенстве

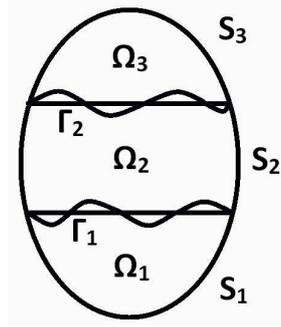


Рис. 2

$$\operatorname{Re} \lambda = \left\{ \mu_1 \left(1 + \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k \beta_k}{|\beta_k - \lambda|^2} \right) \|\boldsymbol{\eta}_1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \|\varphi\|_{L_2, \Omega_2, \rho_2, 0}^2 \right\} /$$

$$/ \left\{ \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k}{|\beta_k - \lambda|^2} \|\boldsymbol{\eta}_1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + (A\xi, \xi) + |\lambda|^{-2} (B_a \xi, \xi) \right\} > 0,$$

которое можно вывести из уравнения (1.8.7) либо (1.8.9), и том факте, что квадратичные формы операторных матриц A и B_a в правой части (1.8.7) являются соответственно положительной и неотрицательной. \square

Дальнейшее подробное исследование свойств решений задачи (1.8.5)–(1.8.6) будет проведено в другой работе. Будут получены свойства полноты и базисности системы корневых (собственных и присоединенных) элементов этой задачи, наличие шести ветвей собственных значений, их асимптотическое поведение и физический смысл. Будут рассмотрены также и другие близкие вопросы.

2. О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГИДРОСИСТЕМЫ ИЗ ТРЕХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ, ЗАПОЛНЯЮЩИХ НЕПОДВИЖНЫЙ СОСУД

2.1. Постановка задачи. Закон баланса полной энергии системы. Рассмотрим неподвижный сосуд Ω , полностью заполненный системой из трех несмешивающихся жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми, и в силу этого действие капиллярных сил в этой задаче не учитывается. Область Ω_1 , нижняя по отношению к действию силы тяжести, заполнена несжимаемой вязкоупругой жидкостью обобщенной модели Олдройта (см., например, [17, 18, 20, 23]). Далее, как и выше, ρ_1, μ_1 — соответственно плотность и динамический коэффициент вязкости вязкоупругой жидкости. Области Ω_2 и Ω_3 заполнены идеальными несжимаемыми жидкостями с плотностями ρ_2 и ρ_3 .

Обозначим через \mathbf{n}_k единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_k$ и направленный вне Ω_k , $k = \overline{1, 3}$. Через S_k обозначим часть стенки сосуда, граничащей с областью Ω_k , $k = \overline{1, 3}$. Горизонтальную границу раздела между вязкоупругой и идеальной жидкостями в состоянии равновесия обозначим через Γ_1 , а между идеальными жидкостями — через Γ_2 . Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с сосудом, таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена против действия силы тяжести. Тогда ускорение гравитационного поля $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$, $g > 0$, а в состоянии покоя поля давлений в жидкостях выражаются по законам

$$P_{0,k}(x_3) = c_k - \rho_k g x_3, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (2.1.1)$$

где константы c_k определяются из условия равенства давлений на границах раздела Γ_j , $j = 1, 2$, при $x_3 = 0$.

Теперь перейдем к уравнениям, описывающим движение гидросистемы. Обозначим через \mathbf{u}_k поля скоростей жидкостей в Ω_k , $k = \overline{1, 3}$, а через $p_k(t, x)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений (см. (2.1.1)). Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую

систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x)$, $x \in \Omega$.

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид (см., например, [22, 23]):

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \mu_1 \Delta \mathbf{v}_1 + \rho_1 \mathbf{f}_1(t, x), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (2.1.2)$$

$$\mathbf{v}_1(t, x) = \mathbf{u}_1(t, x) + \sum_{r=1}^m \alpha_r \int_0^t e^{-\beta_r(t-s)} \mathbf{u}_1(s, x) ds =: I_{0,1}(t) \mathbf{u}_1, \quad (2.1.3)$$

$$\rho_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} = -\nabla p_l + \rho_l \mathbf{f}_l(t, x), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_l = 0 \quad \text{в } \Omega_l, \quad l = 2, 3, \quad (2.1.4)$$

где $\alpha_r \geq 0$, $\beta_r > 0$, $r = \overline{1, m}$, — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкости обобщенной модели Олдройта, $\mathbf{f}_k(t, x) := \mathbf{f}(t, x)|_{x \in \Omega_k}$, $k = \overline{1, 3}$, а Δ — трехмерный оператор Лапласа.

Для вязкоупругой жидкости, как известно, на твердой стенке S_1 сосуда должно выполняться условие прилипания, т.е.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \quad (2.1.5)$$

а для идеальных на поверхностях S_l , $l = 2, 3$, — условия непротекания

$$\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n}_l = 0 \quad \text{на } S_l, \quad l = 2, 3. \quad (2.1.6)$$

Будем описывать малые перемещения границ раздела между жидкостями с помощью функций вертикального отклонения

$$x_3 - h_j =: \zeta_j(t, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \quad (2.1.7)$$

где h_j — уровень равновесной поверхности Γ_j , $j = 1, 2$. Тогда на Γ_j , $j = 1, 2$, должны выполняться кинематические условия

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial t} = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j =: \gamma_{n,j} \mathbf{u}_j = -\mathbf{u}_{j+1} \cdot \mathbf{n}_{j+1} =: -\gamma_{n,j+1} \mathbf{u}_{j+1}, \quad \mathbf{n}_j = \mathbf{e}_3 = -\mathbf{n}_{j+1}, \quad j = 1, 2, \quad (2.1.8)$$

а символом $\gamma_{n,j}$, $j = 1, 2$, обозначена операция взятия нормального следа на Γ_j , т.е. следа нормальной компоненты поля скорости. Заметим еще, что из условия сохранения объема каждой из жидкостей имеем интегральные связи

$$\int_{\Gamma_j} \zeta_j d\Gamma_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.1.9)$$

Сформулируем теперь динамические условия на Γ_j , $j = 1, 2$. Они состоят в том, что на движущейся границе раздела векторное поле напряжений при переходе от одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на Γ_j приводят к следующим соотношениям: на Γ_j касательные напряжения (т.е. вдоль Γ_j) изменяются непрерывно, а нормальные напряжения (т.е. вдоль оси Ox_3) компенсируются гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{aligned} \mu_1 \tau_{q3}(\mathbf{v}_1) &= 0, \quad q = 1, 2; \\ [-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1)] - [-p_2] &= -g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ p_2 - p_3 &= g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \quad \text{на } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Здесь

$$\tau_{qr}(\mathbf{u}) := \frac{\partial u_q}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_q}, \quad q, r = 1, 2, 3,$$

— удвоенный тензор скоростей деформаций.

Наконец, для искомым функций $\mathbf{u}_k(t, x)$, $k = \overline{1, 3}$, и $\zeta_j(t, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, необходимо еще задать начальные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k(0, x) &= \mathbf{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad \mathbf{u}_j^0 \cdot \mathbf{n}_j \equiv -\mathbf{u}_{j+1}^0 \cdot \mathbf{n}_{j+1}, \quad x \in \Gamma_j, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = 1, 2, \\ \zeta_j(0, x) &= \zeta_j^0(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Закон баланса полной энергии. Будем считать, что задача (2.1.2)–(2.1.11) имеет классическое решение, и выведем закон баланса полной энергии гидросистемы. Предварительно выпишем формулы Грина для векторных полей скоростей в областях Ω_k , $k = \overline{1, 3}$. Для дважды непрерывно дифференцируемых полей они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_1 E_1(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{u}_1) &:= \frac{1}{2} \mu_1 \int_{\Omega_1} \left(\sum_{q,r=1}^3 \tau_{qr}(\boldsymbol{\eta}_1) \overline{\tau_{qr}(\mathbf{u}_1)} \right) d\Omega_1 = \\ &= \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \overline{(-\mu_1 \Delta \mathbf{u}_1 + \nabla p_1)} d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \sum_{q=1}^3 \eta_{1,q} \overline{(\mu_1 \tau_{q,3}(\mathbf{u}_1) - p_1 \delta_{q3})} d\Gamma_1, \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_1 &= \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \sum_{q=1}^3 \eta_{1,q} \mathbf{e}_q, \\ \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\eta}_2 \cdot \overline{\nabla p_2} d\Omega_2 &= - \int_{\Gamma_1} \eta_{2,3} \overline{p_2} d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \eta_{2,3} \overline{p_2} d\Gamma_2, \quad \int_{\Omega_3} \boldsymbol{\eta}_3 \cdot \overline{\nabla p_3} d\Omega_3 = - \int_{\Gamma_2} \eta_{3,3} \overline{p_3} d\Gamma_2, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_l &= \operatorname{div} \mathbf{u}_l = 0 \quad \text{в } \Omega_l, \quad \boldsymbol{\eta}_l \cdot \boldsymbol{\eta}_l = \mathbf{u}_l \cdot \boldsymbol{\eta}_l \equiv \mathbf{0} \quad \text{на } S_l, \quad l = 2, 3. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

В этих формулах учтено, что направление внешних нормалей на Γ_j , $j = 1, 2$, для областей Ω_k , $k = \overline{1, 3}$, будет $\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_3 = -\mathbf{n}_{j+1}$, $j = 1, 2$.

Умножим обе части (2.1.2) и (2.1.4) слева на \mathbf{u}_k , $k = \overline{1, 3}$, проинтегрируем по Ω_k соответственно и сложим результаты; будем иметь (для вещественнозначных полей):

$$\sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} d\Omega_k = - \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \nabla p_k d\Omega_k + \mu_1 \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot (\Delta \mathbf{v}_1) d\Omega_1 + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{f}_k d\Omega_k.$$

Используя формулы Грина (2.1.12), (2.1.13), а также граничные условия задачи (2.1.2)–(2.1.11), отсюда получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} |\mathbf{u}_k|^2 d\Omega_k \right\} &= -\mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{f}_k d\Omega_k + \\ &+ \int_{\Gamma_1} \sum_{q=1}^3 u_{1,q} (\mu_1 \tau_{q3}(\mathbf{u}_1) - (p_1 - p_2) \delta_{q3}) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} u_{2,3} (p_3 - p_2) d\Gamma_2. \end{aligned}$$

Учитывая еще соотношения (2.1.9) и (2.1.10), окончательно приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} |\mathbf{u}_k|^2 d\Omega_k + g(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} |\zeta_1|^2 d\Gamma_1 + g(\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} |\zeta_2|^2 d\Gamma_2 \right\} &= \\ &= -\mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{f}_k d\Omega_k. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Это тождество есть закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Здесь в фигурных скобках стоит удвоенная полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия гидросистемы, а справа — мощность диссипативных вязкоупругих сил и мощность дополнительных внешних сил, действующих на систему. После интегрирования (2.1.14) по t в пределах от 0 до t получаем закон баланса полной энергии в интегральной форме, т.е. на произвольном отрезке времени $(0, t)$.

2.2. Метод ортогонального проектирования. Переход к системе операторных уравнений. Опираясь на (2.1.14), выберем функциональные пространства, адекватные задаче, и проведем ее исследование по схеме, уже использованной в разделе 1.

Проектирование уравнений Эйлера. Воспользуемся далее разложением пространства векторных полей $\mathbf{L}_2(\Omega_l)$ в ортогональную сумму (см. [10, с. 113]):

$$\mathbf{L}_2(\Omega_l) = \mathbf{J}_0(\Omega_l) \oplus \mathbf{G}_{h,S_l}(\Omega_l) \oplus \mathbf{G}_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3, \quad (2.2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_0(\Omega_l) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega_l) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega_l, u_n = 0 \text{ на } \partial\Omega_l \right\}, \\ \mathbf{G}_{h,S_l}(\Omega_l) &:= \left\{ \mathbf{v} = \nabla\varphi \in \mathbf{L}_2(\Omega_l) : \Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega_l, \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S_l \right\}, \\ \mathbf{G}_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l) &:= \left\{ \mathbf{w} = \nabla\psi \in \mathbf{L}_2(\Omega_l) : \Delta\psi = 0 \text{ в } \Omega_l, \psi = 0 \text{ на } \tilde{\Gamma}_l \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\Gamma}_2 := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\tilde{\Gamma}_3 := \Gamma_2$.

Введем ортопроекторы на соответствующие подпространства: $P_{0,l}, P_{h,S_l}, P_{0,\tilde{\Gamma}_l}, l = 2, 3$.

Основываясь на разложении (2.2.1), применим метод ортогонального проектирования к уравнениям движения начально-краевой задачи (2.1.2)–(2.1.11). В силу условия соленоидальности, условия непротекания на твердых стенках S_l и условия сохранения объема на свободных границах $\Gamma_j, j = 1, 2$ (так как жидкости несжимаемы), считаем, что

$$\mathbf{u}_l \in \mathbf{J}_0(\Omega_l) \oplus \mathbf{G}_{h,S_l}(\Omega_l) =: \mathbf{J}_{0,S_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3. \quad (2.2.2)$$

Поля $\nabla p_l, l = 2, 3$, потенциальны и поэтому

$$\nabla p_l \in \mathbf{G}(\Omega_l) = \mathbf{G}_{h,S_l}(\Omega_l) \oplus \mathbf{G}_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3.$$

Представим поля \mathbf{u}_l и $\nabla p_l, l = 2, 3$, в следующем виде:

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{w}_l + \nabla\Phi_l, \quad \mathbf{w}_l \in \mathbf{J}_0(\Omega_l), \quad \nabla\Phi_l \in \mathbf{G}_{h,S_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3; \quad (2.2.3)$$

$$\nabla p_l = \nabla\tilde{p}_l + \nabla\varphi_l, \quad \nabla\tilde{p}_l \in \mathbf{G}_{h,S_l}(\Omega_l), \quad \nabla\varphi_l \in \mathbf{G}_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3. \quad (2.2.4)$$

Подставив эти представления в уравнения (2.1.4) для идеальных жидкостей и применив к ним ортопроекторы, отвечающие разложению (2.2.1), получим

$$\frac{\partial \mathbf{w}_l}{\partial t} = P_{0,l} \mathbf{f}_l \quad \text{в } \Omega_l, \quad l = 2, 3, \quad (2.2.5)$$

$$\rho_l \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi_l = -\nabla\tilde{p}_l + \rho_l P_{h,S_l} \mathbf{f}_l \quad \text{в } \Omega_l, \quad l = 2, 3, \quad (2.2.6)$$

$$\nabla\varphi_l = \rho_l P_{0,\tilde{\Gamma}_l} \mathbf{f}_l \quad \text{в } \Omega_l, \quad l = 2, 3. \quad (2.2.7)$$

Из (2.2.5) с учетом начальных условий (2.1.11) сразу получаем

$$\mathbf{w}_l(t, x) = \int_0^t P_{0,l} \mathbf{f}_l(\tau, x) d\tau + P_{0,l} \mathbf{u}_l^0, \quad l = 2, 3.$$

Члены в уравнении (2.2.7) — это составляющие градиентов давлений в подпространстве $\mathbf{G}_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l), l = 2, 3$. Потенциал этого поля φ_l обращается в нуль на $\tilde{\Gamma}_l$ и поэтому в граничных условиях не участвует. Далее соотношения (2.2.7) не рассматриваем.

Условимся называть решения уравнений (2.2.5), а также составляющие градиентов давлений из (2.2.7) *тривиальными решениями*. Итак, основные уравнения, которые будем рассматривать для идеальных жидкостей, это уравнения (2.2.6).

Проектирование уравнения Навье—Стокса. Для области Ω_1 введем аналогичное разложение пространства векторных полей $\mathbf{L}_2(\Omega_1)$ в ортогональную сумму (см. [10], а также п. 1.4):

$$\mathbf{L}_2(\Omega_1) = \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \quad \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) = \mathbf{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1).$$

Введем ортопроекторы P_{0,S_1} и P_{0,Γ_1} на подпространства $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ и $\mathbf{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$ соответственно. В силу условия соленоидальности и условия прилипания на S_1 для \mathbf{u}_1 считаем, что поле \mathbf{u}_1 принадлежит пространству векторных полей с конечной скоростью диссипации энергии в жидкости:

$$\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) := \left\{ \mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}^1(\Omega_1) : \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \text{ на } S_1 \right\} \subset \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1).$$

Здесь скалярное произведение определяется по формуле

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)_{\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)} := E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \left(\sum_{q,r=1}^3 \tau_{qr}(\mathbf{u}_1) \overline{\tau_{qr}(\mathbf{v}_1)} \right) d\Omega_1$$

(см. (1.2.12), (2.1.12)). Отметим, что $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ плотно вложено в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Подействуем введенными операторами P_{0,S_1} и P_{0,Γ_1} на обе части уравнения для вязкоупругой жидкости (2.1.2); в результате получим:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} &= -\nabla \tilde{p}_1 + \mu_1 P_{0,S_1} \Delta \mathbf{v}_1 + \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 \quad \text{в } \Omega_1, \\ -\mu_1 P_{0,\Gamma_1} \Delta \mathbf{v}_1 + P_{0,\Gamma_1} \nabla p_1 &= \rho_1 P_{0,\Gamma_1} \mathbf{f}_1 \quad \text{в } \Omega_1. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Здесь через $\nabla \tilde{p}_1$ обозначено поле $P_{0,S_1} \nabla p_1 =: \nabla \tilde{p}_1 \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ в силу разложения пространства $\mathbf{L}_2(\Omega_1)$. Потенциал поля $P_{0,\Gamma_1} \nabla p_1$ в граничных условиях не участвует, так как обращается в нуль на Γ_1 . Поэтому для вязкоупругой жидкости рассматриваем только уравнение (2.2.8).

Формулировка задачи после отделения тривиальных решений. Заметим, что в силу представлений (2.2.3) полей \mathbf{u}_l , $l = 2, 3$, кинематические условия (2.1.8) можно записать в виде

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial t} = \gamma_{n,j} \mathbf{u}_j = \frac{\partial \Phi_{j+1}}{\partial n_j} \quad \text{на } \Gamma_j, \quad j = 1, 2.$$

В свою очередь динамические условия (2.1.10) в силу представлений (2.2.4) для ∇p_l , $l = 2, 3$, примут вид

$$\begin{aligned} \mu_1 \tau_{q3}(\mathbf{v}_1) &= 0, \quad q = 1, 2 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ [-\tilde{p}_1 + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1)] - [-\tilde{p}_2] &= -g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ [\tilde{p}_2 - \tilde{p}_3] &= g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \quad \text{на } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Введем еще ортопроекторы θ_j на $L_{2,\Gamma_j} := L_2(\Gamma_j) \ominus \{1_{\Gamma_j}\}$, $j = 1, 2$. Тогда итогом проведенных выше преобразований является следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть \mathbf{u}_k , ∇p_k , $k = \overline{1,3}$, ζ_j , $j = 1, 2$, — классическое решение начально-краевой задачи (2.1.2)–(2.1.11). Тогда функции \mathbf{u}_1 , $\nabla \tilde{p}_1$, $\nabla \Phi_l$, $\nabla \tilde{p}_l$, $l = 2, 3$, ζ_j , $j = 1, 2$, являются решением следующей начально-краевой задачи:

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla \tilde{p}_1 + \mu_1 P_{0,S_1} \Delta \mathbf{v}_1 + \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (2.2.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \quad (2.2.11)$$

$$\rho_l \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi_l + \nabla \tilde{p}_l = \rho_l P_{h,S_l} \mathbf{f}_l \quad \text{в } \Omega_l, \quad l = 2, 3, \quad (2.2.12)$$

$$\Delta \Phi_l = 0 \quad \text{в } \Omega_l, \quad \frac{\partial \Phi_l}{\partial n_l} = 0 \quad \text{на } S_l, \quad (2.2.13)$$

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial n_l} = -\frac{\partial \zeta_{l-1}}{\partial t} = -\gamma_{n,l-1} \mathbf{u}_{l-1} \quad \text{на } \Gamma_{l-1}, \quad l = 2, 3, \quad (2.2.14)$$

$$\begin{cases} \mu_1 \tau_{q3}(\mathbf{v}_1) = 0, & q = 1, 2, \quad \text{на } \Gamma_1, \\ [-\theta_1 \tilde{p}_1 + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1)] - [-\theta_1 \tilde{p}_2] = -g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 & \text{на } \Gamma_1, \\ [\theta_2 \tilde{p}_2 - \theta_2 \tilde{p}_3] = g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 & \text{на } \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.2.15)$$

$$\mathbf{u}_1(0, x) = P_{0,S_1} \mathbf{u}_1^0(x) = \mathbf{u}_1^0(x), \quad x \in \Omega_1, \quad \nabla \Phi_l(0, x) = P_{h,S_l} \mathbf{u}_l^0(x), \quad x \in \Omega_l, \quad l = 2, 3, \quad (2.2.16)$$

$$\zeta_j(0, x) = \zeta_j^0(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2.$$

Замечание 2.1. Отметим, что введение ортопроекторов θ_j , $j = 1, 2$, обусловлено стремлением избежать произвола в нормировке функций \tilde{p}_2 на границах Γ_1 и Γ_2 . Действительно, в динамических условиях (2.2.9) имеем $\zeta_j \in L_{2,\Gamma_j}$, $j = 1, 2$, $\tau_{33}(\mathbf{v}_1) \in L_{2,\Gamma_1}$ (см. [10, с. 114]), откуда следует, что

$$\int_{\Gamma_1} (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) d\Gamma_1 = 0, \quad \int_{\Gamma_2} (\tilde{p}_2 - \tilde{p}_3) d\Gamma_2 = 0.$$

Из определения ортопроекторов θ_j , $j = 1, 2$, следует, что $\tilde{p}_1 = \theta_1 \tilde{p}_1 + c_1$, $\tilde{p}_3 = \theta_2 \tilde{p}_3 + c_3$. Константы c_1 , c_3 позволяют ввести однозначную нормировку для \tilde{p}_2 на границах Γ_1 и Γ_2 :

$$c_1 = \frac{1}{|\Gamma_1|} \int_{\Gamma_1} \tilde{p}_2 d\Gamma_1, \quad c_3 = \frac{1}{|\Gamma_2|} \int_{\Gamma_2} \tilde{p}_2 d\Gamma_2.$$

Вспомогательные краевые задачи и их операторы. Как и в разделе 1, считаем, что области Ω_k имеют липшицевы границы $\partial\Omega_k$, $k = \overline{1,3}$, разбитые на липшицевы куски. Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

Вспомогательная задача I:

$$\begin{aligned} -P_{0,S_1} \Delta \mathbf{u} + \mu^{-1} \nabla p &= \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \\ \mu \tau_{q3}(\mathbf{u}) &= 0, \quad q = 1, 2, \quad -p + \mu \tau_{33}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{на } \Gamma_1. \end{aligned}$$

Это так называемая первая вспомогательная задача С. Г. Крейна (см. [10, с. 116], а также (1.4.4)). Она имеет единственное обобщенное решение $\mathbf{u} = A_1^{-1} \mathbf{f}$ для любого вектора \mathbf{f} из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Область определения $\mathcal{D}(A_1)$ оператора A_1 плотна в пространстве $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ и $\mathcal{D}(A_1^{1/2}) = \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$. Оператор A_1^{-1} является положительным и компактным в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$.

Вспомогательная задача II:

$$\Delta p = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \frac{\partial p}{\partial n_1} = 0 \quad \text{на } S_1, \quad p = \tau_1 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \int_{\Gamma_1} \tau_1 d\Gamma_1 = 0.$$

Это известная задача Зарембы для уравнения Лапласа; она имеет единственное решение (см. [10, с. 45]) $p = G_1 \tau_1 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$ при $\tau_1 \in H_{\Gamma_1}^{1/2}$,

$$H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) := \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_1) : \int_{\Gamma_1} \varphi d\Gamma_1 = 0 \right\}, \quad \|\varphi\|_{H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)}^2 := \int_{\Omega_1} |\nabla \varphi|^2 d\Omega_1.$$

(Определение пространств $H_{\partial\Omega}^{1/2}$, $H_{\partial\Omega}^{-1/2}$ для областей Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$, а также соответствующие теоремы вложения и продолжения с границы см. в [21], а также в п. 1.3.)

Вспомогательная задача III:

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{в } \Omega_3, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_3} = 0 \quad \text{на } S_3, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_3} = \psi_3 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \int_{\Gamma_2} \Phi d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} \psi_3 d\Gamma_2 = 0.$$

Это задача Неймана для уравнения Лапласа. Если $\psi_3 \in \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}$, то задача имеет единственное решение $\Phi = V_3\psi_3 \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega_3)$. Здесь символом $\tilde{}$ обозначен класс функций из $H_{\Gamma_2}^{-1/2}$, продолжимых нулем на всю границу $\partial\Omega_3$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_3)$ (см. [1, 8, 19]). Введем по решению задачи III оператор

$$\theta_2\Phi|_{\Gamma_2} = \theta_2\hat{C}_3\psi_3 =: C_3\psi_3, \quad \hat{C}_3 := \gamma_{\Gamma_2}V_3, \quad \gamma_{\Gamma_2}\psi_3 := \psi_3|_{\Gamma_2}. \quad (2.2.17)$$

Отметим, что C_3 — самосопряженный, положительный и компактный оператор в L_{2,Γ_2} .

Вспомогательная задача IV.1:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{21} = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad \frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n_2} = 0 \quad \text{на } S_2 \cup \Gamma_2, \quad \frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n_2} = \psi_1 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ \int_{\Gamma_1} \Phi_{21} d\Gamma_1 = \int_{\Gamma_1} \psi d\Gamma_1 = 0. \end{aligned}$$

Это снова задача Неймана для уравнения Лапласа. Если $\psi_1 \in \tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$, то задача имеет единственное решение $\Phi_{21} = V_{21}\psi_1 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_2)$.

Вспомогательная задача IV.2:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{22} = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n_2} = 0 \quad \text{на } S_2 \cup \Gamma_1, \quad \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n_2} = \psi_2 \quad \text{на } \Gamma_2, \\ \int_{\Gamma_2} \Phi_{22} d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} \psi d\Gamma_2 = 0. \end{aligned}$$

Это тоже задача Неймана для уравнения Лапласа. Если $\psi_2 \in \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}$, то задача имеет единственное решение $\Phi_{22} = V_{22}\psi_2 \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega_2)$.

Введем по решению задач IV.1 и IV.2 операторы

$$\begin{aligned} \theta_1\Phi_{21}|_{\Gamma_1} = \theta_1\hat{C}_{11}\psi_1 =: C_{11}\psi_1, \quad \hat{C}_{11} := \gamma_{\Gamma_1}V_{21}, \quad \gamma_{\Gamma_1}\psi_1 := \psi_1|_{\Gamma_1}; \\ \theta_1\Phi_{22}|_{\Gamma_1} = \theta_1\hat{C}_{12}\psi_2 =: C_{12}\psi_2, \quad \hat{C}_{12} := \gamma_{\Gamma_1}V_{22}, \quad \gamma_{\Gamma_1}\psi_2 := \psi_2|_{\Gamma_1}; \\ \theta_2\Phi_{21}|_{\Gamma_2} = \theta_2\hat{C}_{21}\psi_1 =: C_{21}\psi_1, \quad \hat{C}_{21} := \gamma_{\Gamma_2}V_{21}, \quad \gamma_{\Gamma_2}\psi_1 := \psi_1|_{\Gamma_2}; \\ \theta_2\Phi_{22}|_{\Gamma_2} = \theta_2\hat{C}_{22}\psi_2 =: C_{22}\psi_2, \quad \hat{C}_{22} := \gamma_{\Gamma_2}V_{22}, \quad \gamma_{\Gamma_2}\psi_2 := \psi_2|_{\Gamma_2}. \end{aligned}$$

Отметим, что компактные операторы C_{qr} , $q, r = 1, 2$, образуют самосопряженную, положительную матрицу $\{C_{qr}\}_{q,r=1}^2$ в $L_{2,\Gamma_1} \oplus L_{2,\Gamma_2}$ (см., например, [8]).

Вспомогательная задача V:

$$\Delta p = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad \frac{\partial p}{\partial n_2} = 0 \quad \text{на } S_2 \cap \Gamma_1, \quad p = \tau_2 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \int_{\Gamma_2} \tau_2 d\Gamma_2 = 0.$$

Это, как и II, задача Зарембы для уравнения Лапласа. Она имеет единственное решение (см. [10, с. 45]) $p = G_2\tau_2 \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega_2)$ при $\tau_2 \in H_{\Gamma_2}^{1/2}$.

Вывод системы операторных уравнений. Переходя к формулировке исходной задачи (2.1.2)–(2.1.11) в операторной форме, представим поле $\nabla\tilde{p}_1$ в виде $\nabla\tilde{p}_1 = \nabla\tilde{p}_{11} + \nabla\tilde{p}_{12}$ и подберем поле $\nabla\tilde{p}_{11}$ таким образом, чтобы поле \mathbf{v}_1 являлось решением следующей краевой задачи:

$$-P_{0,S_1}\Delta\mathbf{v}_1 + \mu_1^{-1}\nabla\tilde{p}_{11} = \mu_1^{-1} \left(-\rho_1 \frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1}\mathbf{f}_1 - \nabla\tilde{p}_{12} \right) \quad \text{в } \Omega_1, \quad (2.2.18)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \quad (2.2.19)$$

$$\mu_1\tau_{q3}(\mathbf{v}_1) = 0, \quad q = 1, 2, \quad -\theta_1\tilde{p}_{11} + \mu\tau_{33}(\mathbf{v}_1) = 0 \quad \text{на } \Gamma_1. \quad (2.2.20)$$

Используя вспомогательную задачу I, заключаем, что краевая задача (2.2.18)–(2.2.20) имеет единственное обобщенное решение

$$\mathbf{v}_1 = \mu_1^{-1} A_1^{-1} \left(-\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \nabla \tilde{p}_{12} \right)$$

для правой части из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Тогда можно записать

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1 \mathbf{v}_1 + \nabla \tilde{p}_{12} = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 \quad \text{в } \Omega_1. \quad (2.2.21)$$

Заметим, что при расщеплении условия для нормального напряжения на Γ_1 из (2.2.15) осталось условие

$$\theta_1 \tilde{p}_{12} = \theta_1 \tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 \quad \text{на } \Gamma_1.$$

Учитывая принадлежность $\nabla \tilde{p}_{12} \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, найдем, что потенциал $\theta_1 \tilde{p}_{12}$ удовлетворяет вспомогательной задаче II при $\tau_1 = \theta_1 \tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1$. Поэтому можно считать, что

$$\tilde{p}_{12} = G_1 \left(\theta_1 \tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 \right).$$

Оператор G_1 ограниченно действует из пространства $H_{\Gamma_1}^{1/2}$ в пространство $\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$.

Подставляя последнее представление для градиента давления в (2.2.21), получим

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1 \mathbf{v}_1 + G_1 \theta_1 \tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2) G_1 \zeta_1 = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 \quad \text{в } \Omega_1. \quad (2.2.22)$$

Далее, в силу принадлежности $\nabla \Phi_2$ пространству $\mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2)$ потенциал Φ_2 с помощью решений вспомогательных задач IV.1 и IV.2 можно представить в виде

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} \quad \text{при} \quad \psi_1 = -\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1, \quad \psi_2 = \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2.$$

Рассмотрим уравнения (2.2.12) для идеальных жидкостей. Из них следуют интегралы Коши—Лагранжа

$$\rho_l \frac{\partial \Phi_l}{\partial t} + \tilde{p}_l = F_l + c_l(t) \quad \text{в } \Omega_l, \quad l = 2, 3, \quad (2.2.23)$$

где через F_l обозначены потенциалы полей $\rho_l P_{h,S_l} \mathbf{f}_l$, а $c_l(t)$ — произвольные функции переменной t , $l = 2, 3$. Рассмотрим эти уравнения на Γ_2 и спроектируем на L_2, Γ_2 ; тогда динамическое условие (см. третье уравнение (2.2.15)) можно преобразовать к следующему виду:

$$\theta_2 \tilde{p}_2 = \theta_2 \tilde{p}_3 + g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 = \rho_3 \theta_2 F_3 + \rho_3 \theta_2 \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} + g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \quad \text{на } \Gamma_2. \quad (2.2.24)$$

Выразим теперь $\theta_2 \Phi_3|_{\Gamma_2}$ с помощью представления (2.2.17) и оператора C_3 :

$$\theta_2 \Phi_3|_{\Gamma_2} = -C_3 \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 \quad \text{на } \Gamma_2.$$

Тогда вместо (2.2.24) получим

$$\theta_2 \tilde{p}_2 = \rho_3 \theta_2 F_3 - \rho_3 \frac{\partial}{\partial t} C_3 \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 + g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \quad \text{на } \Gamma_2.$$

Значит, согласно вспомогательной задаче V,

$$\tilde{p}_2|_{\Omega_2} = G_2 \left(\rho_3 \theta_2 F_3 - \rho_3 \frac{\partial}{\partial t} C_3 \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 + g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \right).$$

Выразим при $l = 2$ функцию \tilde{p}_2 из (2.2.23); тогда уравнение (2.2.22) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1 \mathbf{v}_1 + G_1 \theta_1 \left(\rho_2 F_2 - \rho_2 \frac{\partial}{\partial t} (C_{11} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + C_{12} \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2) \right) + g(\rho_1 - \rho_2) G_1 \zeta_1 = \\ = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 \quad \text{в } \Omega_1. \end{aligned}$$

Далее для всех функций переменной t со значениями в гильбертовых пространствах их производные по t будем обозначать d/dt вместо $\partial/\partial t$.

Проведенные в этом пункте рассуждения можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 2.1. Пусть $\mathbf{u}_1, \nabla \tilde{p}_1, \nabla \Phi_l, \nabla \tilde{p}_l, l = 2, 3, \zeta_j, j = 1, 2$, — классическое решение начально-краевой задачи (2.2.10)–(2.2.16). Тогда функции $\mathbf{u}_k, k = 1, 2, \zeta_j, j = 1, 2$ являются решением следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho_1 \mathbf{u}_1 + \rho_2 (G_1 C_{11} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2) \right) + \mu_1 A_1 \mathbf{v}_1 + g(\rho_1 - \rho_2) G_1 \zeta_1 = \\ = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_2 G_1 \theta_1 F_2, \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho_2 (G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2) + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 \right) + g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 = \\ = \rho_2 G_2 \theta_2 F_2 - \rho_3 G_2 \theta_2 F_3, \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

$$\frac{d}{dt} \left(g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 \right) = g(\rho_1 - \rho_2) \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1, \quad \frac{d}{dt} \left(g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \right) = g(\rho_2 - \rho_3) \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2, \quad (2.2.27)$$

$$\mathbf{u}_k(0, x) = \mathbf{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \quad \zeta_j(0, x) = \zeta_j^0(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \quad (2.2.28)$$

Введем операторы $\hat{G}_1 := g(\rho_1 - \rho_2) G_1, \hat{G}_2 := g(\rho_2 - \rho_3) G_2$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \hat{G}_1^* &= g(\rho_1 - \rho_2) \gamma_{n,1}, \quad \gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1); \tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}), \\ \hat{G}_2^* &= g(\rho_2 - \rho_3) \gamma_{n,2}, \quad \gamma_{n,2} \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S_2}(\Omega_2); \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}). \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству лемм 1.1 и 1.2.

2.3. Преобразование задачи к стандартному виду.

Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В задаче (2.2.25)–(2.2.28) введем новые искомые функции по формулам

$$\mathbf{w}_r(t) := \alpha_r^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_r(t-s)} \mathbf{u}_1(s) ds \in \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1), \quad r = \overline{1, m}. \quad (2.3.1)$$

Тогда

$$\frac{d\mathbf{w}_r}{dt} = \alpha_r^{1/2} \mathbf{u}_1 - \beta_r \alpha_r^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_r(t-s)} \mathbf{u}_1(s) ds = \alpha_r^{1/2} \mathbf{u}_1 - \beta_r \mathbf{w}_r, \quad r = \overline{1, m}. \quad (2.3.2)$$

Теперь с учетом (2.3.1), (2.3.2) задача (2.2.25)–(2.2.28) переписывается в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left((\rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1}) \mathbf{u}_1 + \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 \right) + \mu_1 A_1 \left(\mathbf{u}_1 + \sum_{r=1}^m \alpha_r \mathbf{w}_r \right) + g(\rho_1 - \rho_2) G_1 \zeta_1 = \\ = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_2 G_1 F_2 \\ \frac{d\mathbf{w}_r}{dt} - \alpha_r^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_r \mathbf{w}_r = 0, \quad r = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + (\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \mathbf{u}_2 \right) + g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 = \rho_2 G_2 F_2 - \rho_3 G_2 F_3,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1) - \hat{G}_1^* \mathbf{u}_1 = 0, \quad \frac{d}{dt} (g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2) - \hat{G}_2^* \mathbf{u}_2 = 0, \\ \mathbf{u}_k(0, x) = \mathbf{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \quad \zeta_j(0, x) = \zeta_j^0(x) \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \\ \mathbf{w}_r(0, x) = \mathbf{0}, \quad r = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Коротко эта задача может быть записана в следующем виде:

$$\mathcal{T} \frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}z + g(t), \quad z(0) = z^0, \quad (2.3.4)$$

где $\mathcal{T} := \text{diag}\{\mathcal{C}, \mathcal{B}\}$,

$$\mathcal{C} := \begin{pmatrix} \rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1} & \hat{0}^\tau & \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \\ \hat{0} & \hat{I} & \hat{0} \\ \rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} & 0 & \rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2} \end{pmatrix}, \quad (2.3.5)$$

$$\mathcal{B} := \text{diag} \{g(\rho_2 - \rho_1)I, g(\rho_3 - \rho_2)I\} \quad (2.3.6)$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{G} \\ -\mathcal{G}^* & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A & \hat{\alpha}^\tau & 0 \\ -\hat{\alpha} & \hat{\beta} & \hat{0} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} g(\rho_2 - \rho_1)G_1 & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} \\ 0 & g(\rho_3 - \rho_2)G_2 \end{pmatrix}, \quad (2.3.7)$$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \hat{y} \\ \mathbf{u}_2 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_2 G_1 F_2 \\ 0 \\ \rho_2 G_2 F_2 - \rho_3 G_2 F_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &:= \mu_1 A_1, \quad \hat{\alpha} := (\alpha_1^{1/2}, \alpha_2^{1/2}, \dots, \alpha_m^{1/2})^\tau, \quad \hat{\beta} := \text{diag} \{ \beta_1 I, \beta_2 I, \dots, \beta_m I \}, \quad \mathbf{u}_2 = \nabla \Phi_{22}, \\ \hat{y} &:= (A^{1/2} \mathbf{w}_1, A^{1/2} \mathbf{w}_2, \dots, A^{1/2} \mathbf{w}_m)^\tau, \quad \hat{0} := (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m \text{ раз}})^\tau, \quad \hat{I}_m := \text{diag} \{ \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m \text{ раз}} \}. \end{aligned}$$

Операторная матрица \mathcal{A} задана на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A) \oplus \hat{\mathcal{D}}(A^{1/2}) \oplus W \oplus H_{\Gamma_1}^{1/2} \oplus H_{\Gamma_2}^{1/2}, \quad (2.3.9)$$

где

$$\hat{\mathcal{D}}(A^{1/2}) := \bigoplus_{r=1}^m \mathcal{D}(A^{1/2}),$$

$$\begin{aligned} W &:= \left\{ \nabla \Phi_{22} \in \mathbf{G}_{h,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2) : (\mathbf{u}_1, \nabla \Phi_{22}, \nabla \Phi_3)^\tau \in \mathbf{J}_{0,S}(\Omega), \mathbf{u}_1 \in \mathcal{D}(A), \right. \\ &\quad \left. \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = -\nabla \Phi_{22} \cdot \mathbf{n}_2 \in H_{\Gamma_1}^{1/2}, \nabla \Phi_{22} \cdot \mathbf{n}_2 = -\nabla \Phi_3 \cdot \mathbf{n}_3 \in H_{\Gamma_2}^{1/2} \right\}, \end{aligned}$$

и действует в пространстве

$$\mathcal{H} := \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \hat{\mathbf{J}}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2) \oplus L_{2,\Gamma_1} \oplus L_{2,\Gamma_2},$$

где

$$\hat{\mathbf{J}}_{0,S_1}(\Omega_1) := \bigoplus_{r=1}^m \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1), \quad \mathbf{G}_{h,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2) := \left\{ \mathbf{v} = \nabla \varphi \in \mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ в } \Gamma_1 \right\}.$$

Замечание 2.2. Необходимо отметить, что задача (2.3.4) получена после дополнительной симметризации путем замены

$$\mathbf{y}_r = A^{-1/2} \mathbf{y}_r, \quad \mathbf{y}_r \in \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1), \quad r = \overline{1, m}.$$

Тогда из (2.3.3) имеем соотношения

$$\frac{d}{dt} (A^{-1/2} \mathbf{y}_r) = \alpha_r^{1/2} \mathbf{u}_1 - \beta_r A^{-1/2} \mathbf{y}_r, \quad r = \overline{1, m}, \quad (2.3.10)$$

и если $\mathbf{u}_1(t)$ — непрерывная по t функция со значениями в $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$, а $\mathbf{y}_r(t)$, $r = \overline{1, m}$, — со значениями в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, то правая часть в (2.3.10) непрерывна по t со значениями в $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) = \mathcal{D}(A^{1/2})$. Поэтому к обеим частям в (2.3.10) можно применить оператор $A^{1/2}$.

Свойства операторных коэффициентов. Изучим свойства операторов задачи (2.3.4).

Лемма 2.3. *Оператор \mathcal{T} из (2.3.5)–(2.3.6) ограничен, самосопряжен и положительно определен.*

Доказательство. Свойство ограниченности следует из того, что все операторные коэффициенты матрицы \mathcal{T} ограничены. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, например, ограниченность оператора $G_1 C_{11} \gamma_{n,1}$. Он действует из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ в $\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$. Действительно, для $\xi \in \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ элемент $\gamma_{n,1} \xi \in \tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$. С помощью вспомогательной задачи IV.1 найдем функцию Φ_{21} при условии, что $\psi_1 = \gamma_{n,1} \xi$. Тогда в силу свойств ограниченности операторов C_{11} и G_1 оператор $G_1 C_{11} \gamma_{n,1}$ ограничен, а его действие следующее:

$$G_1 C_{11} \gamma_{n,1} \xi = G_1 \theta_1 \Phi_{21} \Big|_{\Gamma_1} \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \subset \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1).$$

Найдем квадратичную форму оператора \mathcal{T} в комплексном гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Для любого $z \in \mathcal{H}$ имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}z, z)_{\mathcal{H}} &= \rho_1 \int_{\Omega_1} |\mathbf{u}_1|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_1} G_1 C_{11} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\mathbf{u}_1} d\Omega_1 + \\ &+ \sum_{r=1}^m \int_{\Omega_1} |\mathbf{y}_r|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_1} G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\mathbf{u}_1} d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 + \\ &+ \rho_2 \int_{\Omega_2} G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 + \rho_3 \int_{\Omega_2} G_2 C_3 \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 + \\ &+ g(\rho_2 - \rho_1) \int_{\Gamma_1} |\xi_1|^2 d\Gamma_1 + g(\rho_3 - \rho_2) \int_{\Gamma_2} |\xi_2|^2 d\Gamma_2. \quad (2.3.11) \end{aligned}$$

Преобразуем второе и четвертое слагаемые в (2.3.11), используя свойства решения вспомогательных задач IV.1, IV.2, операторов C_{11} , C_{12} , взаимную сопряженность операторов G_1 и $\gamma_{n,1}$ и свойства потенциала Φ_{21} :

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_{\Omega_1} G_1 C_{11} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\mathbf{u}_1} d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_1} G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\mathbf{u}_1} d\Omega_1 &= \\ &= \rho_2 \int_{\Gamma_1} C_{11} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1} d\Gamma_1 + \rho_2 \int_{\Gamma_1} C_{12} \gamma_{n,1} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1} d\Gamma_1 = \\ &= \rho_2 \int_{\Gamma_1} \theta_1 \Phi_{21} \cdot \overline{(-\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1)} d\Gamma_1 + \rho_2 \int_{\Gamma_1} \theta_1 \Phi_{22} \cdot \overline{(-\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1)} d\Gamma_1 = \\ &= \rho_2 \int_{\Gamma_1} \Phi_{21} \cdot \overline{-\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_2}} d\Gamma_1 + \rho_2 \int_{\Gamma_1} \Phi_{22} \cdot \overline{-\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_2}} d\Gamma_1 = \rho_2 \int_{\Gamma_1} (\Phi_{21} + \Phi_{22}) \cdot \overline{-\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_2}} d\Gamma_1. \end{aligned}$$

Аналогично с учетом свойств операторов C_{21} и C_{22} , G_2 преобразуем пятое и шестое слагаемые; получим

$$\rho_2 \int_{\Omega_2} G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 + \rho_2 \int_{\Omega_2} G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 = \rho_2 \int_{\Gamma_2} (\Phi_{21} + \Phi_{22}) \cdot \overline{\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n_2}} d\Gamma_2.$$

Кроме того, используя вспомогательную задачу III, преобразуем седьмое слагаемое в (2.3.11):

$$\rho_3 \int_{\Omega_2} G_2 C_3 \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 = \rho_3 \int_{\Gamma_2} \Phi_3 \cdot \overline{\left(-\frac{\partial \Phi_3}{\partial n_2}\right)} d\Gamma_2.$$

Тогда взамен (2.3.11) получим

$$(\mathcal{T}z, z)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\mathbf{u}_1|^2 d\Omega_1 + \sum_{r=1}^m \int_{\Omega_1} |\mathbf{y}_r|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} |\nabla\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \rho_3 \int_{\Omega_3} |\nabla\Phi_3|^2 d\Omega_3 + \\ + g(\rho_2 - \rho_1) \int_{\Gamma_1} |\zeta_1|^2 d\Gamma_1 + g(\rho_3 - \rho_2) \int_{\Gamma_2} |\zeta_2|^2 d\Gamma_2 > 0. \quad (2.3.12)$$

С учетом ограниченности оператора \mathcal{T} из (2.3.12) можно установить, что он самосопряжен и положительно определен. \square

Изучим теперь общие свойства оператора \mathcal{A} из (2.3.7), (2.3.9).

Лемма 2.4. *Операторная матрица \mathcal{A} допускает факторизацию в виде произведения трех матриц с симметричным окаймлением средней матрицы:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & \hat{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I} & \tilde{\mathcal{G}}^+ \\ -\tilde{\mathcal{G}} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & \hat{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.3.13)$$

где

$$\tilde{\mathcal{G}}^+ := \begin{pmatrix} g(\rho_2 - \rho_1)A^{-1/2}G_1 & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} \\ 0 & g(\rho_3 - \rho_2)G_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{G}} := \begin{pmatrix} g(\rho_2 - \rho_1)G_1^*A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(\rho_3 - \rho_2)G_2^* \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} A^{1/2} & \hat{0}^\tau & 0 \\ \hat{0} & \hat{I}_m & \hat{0} \\ 0 & \hat{0}^\tau & I \end{pmatrix}, \quad \tilde{I} := \begin{pmatrix} I & \hat{\alpha}^\tau & 0 \\ -\hat{\alpha} & \hat{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_2 := \text{diag}\{I, I\}.$$

Лемма 2.5. *Имеет место соотношение*

$$A^{-1/2}G_1 = (G_1^*A^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(G_1)},$$

причем замыкание по непрерывности оператора $A^{-1/2}G_1$ совпадает с $(G_1^*A^{-1/2})^*$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.8.

Из леммы 2.5 непосредственно получаем следующий результат.

Лемма 2.6. *Справедливо соотношение $\overline{\tilde{\mathcal{G}}^+} = \tilde{\mathcal{G}}^*$, $\tilde{\mathcal{G}}^+ = \tilde{\mathcal{G}}^*|_{\mathcal{D}(G_1) \oplus \mathcal{D}(G_2)}$.*

Лемма 2.7. *Операторная матрица \mathcal{A} из (2.3.7)–(2.3.9) является аккретивной в пространстве \mathcal{H} , т.е.*

$$\text{Re}(\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}.$$

Доказательство. Действительно,

$$(\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}} = (A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)_{\mathcal{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + (\hat{\alpha}^\tau \hat{y}, \mathbf{u}_1)_{\mathcal{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + b_1(G_1\zeta_1, \mathbf{u}_1)_{\mathcal{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} - (\hat{\alpha}\mathbf{u}_1, \hat{y})_{\mathcal{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + \\ + (\hat{\beta}\hat{y}, \hat{y})_{\mathcal{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + b_2(G_2\zeta_2, \nabla\Phi_{22})_{\mathcal{G}_{n,S_2}(\Omega_2)} - b_1(\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1, \zeta_1)_{L_2,\Gamma_1} - b_2(\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22}, \zeta_2)_{L_2,\Gamma_2} = \\ = (A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)_{\mathcal{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + (\hat{\beta}\hat{y}, \hat{y})_{\mathcal{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + (\hat{\alpha}^\tau \hat{y}, \mathbf{u}_1)_{\mathcal{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} - \overline{(\hat{\alpha}^\tau \hat{y}, \mathbf{u}_1)}_{\mathcal{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + \\ + b_1(\zeta_1, \gamma_{n,1}\mathbf{u}_1)_{L_2,\Gamma_1} - b_1\overline{(\zeta_1, \gamma_{n,1}\mathbf{u}_1)}_{L_2,\Gamma_1} + b_2(\zeta_2, \gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22})_{L_2,\Gamma_2} - b_2\overline{(\zeta_2, \gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22})}_{L_2,\Gamma_2},$$

откуда следует, что

$$\text{Re}(\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}} = (A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)_{\mathcal{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + \sum_{r=1}^m \beta_r(y_r, y_r)_{\mathcal{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} \geq 0. \quad \square$$

Введем операторную матрицу

$$\mathcal{J}_a := \mathcal{J}_0 + a \text{diag}(0; \hat{0}^\tau; I; I; I), \quad a > 0, \quad \mathcal{J}_0 := \begin{pmatrix} \tilde{I} & \tilde{\mathcal{G}} \\ -\tilde{\mathcal{G}}^* & \mathcal{O} \end{pmatrix}. \quad (2.3.14)$$

Тогда для \mathcal{J}_a выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(\mathcal{J}_a z, z)_{\mathcal{H}} \geq c \|z\|_{\mathcal{H}}^2, \quad c > 0. \quad (2.3.15)$$

Из (2.3.14) следует, что операторная матрица \mathcal{A} из (2.3.13) принимает вид

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(\tilde{\mathcal{A}}; \hat{I}_2) \mathcal{J}_a \operatorname{diag}(\tilde{\mathcal{A}}; \hat{I}_2) - a \operatorname{diag}(0; \hat{0}^\tau; I; I; I) =: \mathcal{A}_a - a \operatorname{diag}(0; \hat{0}^\tau; I; I; I). \quad (2.3.16)$$

При этом оператор \mathcal{A}_a представлен в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых имеет ограниченный обратный. Поэтому \mathcal{A}_a допускает расширение путем замыкания среднего сомножителя, и в итоге возникает максимальный равномерно аккретивный оператор.

Лемма 2.8. *Замыкание $\bar{\mathcal{A}}_a$ оператора \mathcal{A}_a представляется в виде*

$$\bar{\mathcal{A}}_a = \operatorname{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I) \bar{\mathcal{J}}_a \operatorname{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I),$$

где

$$\bar{\mathcal{J}}_a = \begin{pmatrix} \tilde{I}_a & \tilde{\mathcal{G}}^* \\ -\tilde{\mathcal{G}} & a\hat{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{I}_a := \tilde{I} + a \operatorname{diag}\{0; \hat{0}; I\},$$

$\bar{\mathcal{J}}_a$ — равномерно аккретивный оператор, для которого выполнено свойство (2.3.15) (с заменой $\mathcal{J}_a \rightarrow \bar{\mathcal{J}}_a$). При этом

$$\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \left\{ y = (\mathbf{u}_1; \hat{y}; \nabla\Phi_{22}; \zeta_1; \zeta_2)^\tau : \mathbf{u}_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \right.$$

$$\left. A^{1/2}\mathbf{u}_1 + \sum_{r=1}^m \alpha_r^{1/2} \mathbf{y}_r + g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}, \quad \mathcal{R}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \mathcal{H},$$

и оператор $\bar{\mathcal{A}}_a$ действует на $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a)$ по закону

$$\bar{\mathcal{A}}_a z = \begin{pmatrix} A^{1/2}(A^{1/2}\mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1) \\ -\hat{\alpha} A^{1/2}\mathbf{u}_1 + \beta \hat{y} \\ a \nabla\Phi_{22} + g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 \\ -g(\rho_1 - \rho_2) G_1^* \mathbf{u}_1 + a \zeta_1 \\ -g(\rho_2 - \rho_3) G_2^* \nabla\Phi_{22} + a \zeta_2 \end{pmatrix}$$

2.4. О разрешимости начально-краевой задачи. Формулировка спектральной проблемы.

Теорема о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи. Вернемся к задаче (2.3.7)–(2.3.9) и перепишем ее с учетом (2.3.16) в виде

$$\mathcal{T} \frac{dz}{dt} = -(\mathcal{A}_a - a\mathcal{P})z + g(t), \quad z(0) = z^0 := (\mathbf{u}_1^0; \hat{0}; \mathbf{u}_2^0; \zeta_1^0; \zeta_2^0)^\tau,$$

$$z = (\mathbf{u}_1; \hat{y}; \nabla\Phi_{22}; \zeta_1; \zeta_2)^\tau, \quad \mathcal{P} := \operatorname{diag}(0; \hat{0}^\tau; I; I; I).$$

Рассмотрим также аналогичную задачу с замкнутым максимальным аккретивным оператором:

$$\mathcal{T} \frac{dz}{dt} = -(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})z + g(t), \quad z(0) = z^0. \quad (2.4.1)$$

Оператор \mathcal{T} самосопряженный, положительно определенный и ограниченный в \mathcal{H} ; значит, для него существует обратный оператор \mathcal{T}^{-1} , обладающий теми же свойствами. Тогда из (2.4.1) имеем:

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{T}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})z + \mathcal{T}^{-1}g(t), \quad z(0) = z^0. \quad (2.4.2)$$

Введем в \mathcal{H} эквивалентную норму по формуле

$$\langle z, z \rangle := (\mathcal{T}z, z)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{T}^{1/2}z, \mathcal{T}^{1/2}z)_{\mathcal{H}}.$$

Эквивалентность этой нормы стандартной норме следует из свойств оператора \mathcal{T} . Легко проверить, что оператор $\mathcal{T}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})$ будет максимальным аккретивным в новом скалярном произведении, и тогда $-\mathcal{T}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})$ является генератором сжимающей C_0 -полугруппы. Поэтому по

теореме Филлипса (см. [12, с.166]) задача Коши (2.4.2) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$, если выполнены следующие условия:

$$z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a), \quad g(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}). \quad (2.4.3)$$

Из условий (2.4.3) получим соответствующие условия на начальные данные исходной задачи (2.1.2)–(2.1.11).

Так, из принадлежности элемента z^0 области определения оператора \mathcal{A} следует, что

$$\mathbf{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \zeta_j^0 \in \mathcal{D}(G_j) = H_{\Gamma_j}^{1/2}, \quad j = 1, 2.$$

Аналогично получим условие для $\mathbf{f}_k(t)$:

$$\mathbf{f}_k(t) \in C^1([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega_k)), \quad k = \overline{1, 3}.$$

Определение 2.1. Будем говорить, что исходная начально-краевая задача (2.1.2)–(2.1.11) имеет сильное решение $\{\mathbf{u}_1(t); \mathbf{u}_2(t); \mathbf{u}_3(t); \zeta_1(t); \zeta_2(t)\}$ на отрезке $[0, T]$, если выполнены следующие условия:

- (1) $\mathbf{u}_k(t) \in C^1([0, T]; \mathbf{J}_{0,S}(\Omega_k))$, $k = \overline{1, 3}$;
- (2) $\mathbf{v}_1(t) = I_{0,1}(t)\mathbf{u}_1(t)$ (см. (2.1.3)) обладает свойством $\mathbf{v}_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A))$;
- (3) $\zeta_j(t) \in C^1([0, T]; H_{\Gamma_j}^{1/2})$, $j = 1, 2$;
- (4) для любого $t \in [0, T]$ выполнена система уравнений (2.2.25)–(2.2.27), где все слагаемые в первом уравнении — элементы из $C([0, T]; \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1))$, во втором — элементы из $C([0, T]; \mathbf{J}_{0,S_2}(\Omega_2))$, а в третьем и четвертом — из $C([0, T]; H_{\Gamma_1}^{1/2})$ и $C([0, T]; H_{\Gamma_2}^{1/2})$ соответственно;
- (5) выполнены начальные условия (2.2.28).

Сформулируем теперь теорему существования и единственности сильного решения задачи (2.1.2)–(2.1.11).

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия

$$\mathbf{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1), \quad \mathbf{u}_l \in \mathbf{H}^1(\Omega_l) \cap \mathbf{J}_{0,S_l}(\Omega_l), \quad \zeta_j^0 \in H_{\Gamma_j}^{1/2}, \quad j = 1, 2, \quad l = 2, 3;$$

$$\mathbf{f}_k(t) \in C^1([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega_k)), \quad k = \overline{1, 3}.$$

Тогда начально-краевая задача (2.1.2)–(2.1.11) имеет единственное сильное решение на $[0; T]$.

Доказательство, основанное на обратном переходе от задачи Коши (2.4.2) к начально-краевой задаче (2.1.2)–(2.1.11) с использованием результатов лемм 2.2, 2.3–2.8, проводится по схеме доказательства теорем 2, 3 и 5 работы [9].

К задаче о нормальных колебаниях гидросистемы. Рассмотрим теперь постановку задачи о малых нормальных движениях исследуемой гидросистемы, т.е. о таких решениях однородной задачи (2.4.1) с замкнутым основным оператором, которые зависят от t по закону

$$z(t) := \left(\mathbf{u}_1(t); \hat{y}(t); \nabla \Phi_{22}(t); \zeta_1(t); \zeta_2(t) \right)^\tau = \left(\mathbf{u}_1; \hat{y}; \nabla \Phi_{22}; \zeta_1; \zeta_2 \right)^\tau e^{-\lambda t},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексный декремент затухания, а $(\mathbf{u}_1; \hat{y}; \nabla \Phi_{22}; \zeta_1; \zeta_2)^\tau$ — амплитудный элемент. Тогда для отыскания амплитудных элементов возникает спектральная задача

$$A^{1/2} \left(A^{1/2} \mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1 \right) = \lambda \left((\rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1}) \mathbf{u}_1 + \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \right),$$

$$-\alpha_r^{1/2} A^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_r \mathbf{y}_r = \lambda \mathbf{y}_r, \quad r = \overline{1, m},$$

$$g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 = \lambda (\rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + (\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \nabla \Phi_{22}),$$

$$-G_1^* \mathbf{u}_1 = \lambda \zeta_1, \quad -G_2^* \nabla \Phi_{22} = \lambda \zeta_2. \quad (2.4.4)$$

В случае $\lambda = 0$ приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} A^{1/2} \left(A^{1/2} \mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2) (G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1 \right) &= \mathbf{0}, \\ \beta_r \mathbf{y}_r &= \alpha_r^{1/2} A^{1/2} \mathbf{u}_1, \quad r = \overline{1, m}, \quad G_2 \zeta_2 = 0, \quad G_1^* \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}, \quad G_2^* \nabla \Phi_{22} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Домножив скалярно третье соотношение на элемент $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{J}_{0, S_2}(\Omega_2)$, будем иметь

$$0 = (G_2 \zeta_2, \mathbf{u}_2)_{L_2(\Omega_2)} = \langle \zeta_2, \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 \rangle_{L_2, \Gamma_2},$$

откуда в силу произвольности \mathbf{u}_2 следует, что $\zeta_2 = 0$. Аналогично из последних двух связей получаем, что $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, $\nabla \Phi_{22} = \mathbf{0}$; тогда из второго соотношения следует, что $\mathbf{y}_r = \mathbf{0}$, $r = \overline{1, m}$, и, наконец, из первого —

$$A^{1/2} \left(g(\rho_1 - \rho_2) (G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1 \right) = \mathbf{0}.$$

Домножая это соотношение на $(g(\rho_1 - \rho_2))^{-1}$, а затем скалярно на элемент $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{J}_{0, S_1}(\Omega_1)$, получим

$$0 = (A^{1/2} (G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1, \mathbf{u}_1)_{L_2(\Omega_1)} = \langle \zeta_1, G_1^* A^{-1/2} A^{1/2} \mathbf{u}_1 \rangle_{L_2, \Gamma_1} = \langle \zeta_1, \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \rangle_{L_2, \Gamma_1}.$$

Отсюда можем заключить, что $\zeta_1 = 0$ в силу произвольности элемента \mathbf{u}_1 .

Таким образом, задача (2.4.5) имеет лишь тривиальное решение, т.е. $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (2.4.4).

Рассмотрим еще случай, когда $\lambda = \beta_s$, $s = \overline{1, m}$. Вместо (2.4.4) теперь будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned} A^{1/2} \left(A^{1/2} \mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2) (G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1 \right) &= \beta_s \left((\rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1}) \mathbf{u}_1 + \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \right), \\ -\alpha_r^{1/2} A^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_r \mathbf{y}_r &= \beta_s \mathbf{y}_r, \quad r = \overline{1, m}, \\ g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 &= \beta_s \left(\rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + (\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \nabla \Phi_{22} \right), \\ G_1^* \mathbf{u}_1 &= \beta_s \zeta_1, \quad G_2^* \nabla \Phi_{22} = \beta_s \zeta_2. \end{aligned}$$

Из второго соотношения при $r = s$ заключаем, что $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ в силу обратимости оператора $A^{1/2}$. Тогда из четвертого уравнения получим, что $\zeta_1 = 0$, а из второго при $r \neq s$ — свойство $\mathbf{y}_r = \mathbf{0}$. Выразим из последнего соотношения ζ_2 и подставим в третье. Получим

$$\left(g(\rho_2 - \rho_3) \beta_s^{-1} G_2 G_2^* - \beta_s (\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \right) \nabla \Phi_{22} = \mathbf{0}. \quad (2.4.6)$$

Домножив (2.4.6) скалярно на элемент $\nabla \Phi_{22} \in \mathbf{G}_{h, S_2, \Gamma_2}(\Omega_2)$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= g(\rho_2 - \rho_3) \beta_s^{-1} (G_2 G_2^* \nabla \Phi_{22}, \nabla \Phi_{22})_{L_2(\Omega_2)} - \\ &\quad - \beta_s \rho_2 (G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}, \nabla \Phi_{22})_{L_2(\Omega_2)} - \beta_s \rho_3 (G_2 C_3 \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}, \nabla \Phi_{22})_{L_2(\Omega_2)}. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Используя свойства операторов C_{22} , C_3 и G_2 для каждого из слагаемых, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} G_2 G_2^* \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 &= \int_{\Gamma_2} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}} d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} \left| \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} \right|^2 d\Gamma_2, \\ \int_{\Omega_2} G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 &= \int_{\Gamma_2} C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}} d\Gamma_2 = \\ &= - \int_{\Gamma_2} \theta_2 \Phi_{22} \cdot \overline{-\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n}} d\Gamma_2 = - \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2, \\ \int_{\Omega_2} G_2 C_3 \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 &= \int_{\Gamma_2} C_3 \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}} d\Gamma_2 = \end{aligned}$$

$$= - \int_{\Gamma_2} \theta_2 \Phi_3 \cdot \frac{\overline{\partial \Phi_{22}}}{\partial n_2} d\Gamma_2 = - \int_{\Gamma_2} \theta_2 \Phi_3 \cdot -\frac{\overline{\partial \Phi_3}}{\partial n_2} d\Gamma_2 = - \int_{\Omega_3} |\nabla \Phi_3|^2 d\Omega_3.$$

Подставляя эти результаты в (2.4.7), находим

$$0 = g(\rho_2 - \rho_3)\beta_s^{-1} \int_{\Gamma_2} \left| \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} \right|^2 d\Gamma_2 + \beta_s \rho_2 \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2 + \beta_s \rho_3 \int_{\Omega_3} |\nabla \Phi_3|^2 d\Omega_3,$$

откуда следует, что $\nabla \Phi_{22} = \mathbf{0}$, а значит, $\zeta_2 = 0$. С учетом этих равенств из первого уравнения приходим к выводу, что $\mathbf{y}_s = \mathbf{0}$, т.е. $\lambda = \beta_s$, $s = \overline{1, m}$, тоже не является собственным значением задачи (2.4.4).

Опираясь на эти факты, преобразуем при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \beta_s$, $s = \overline{1, m}$, задачу (2.4.4) к спектральной проблеме, исключив \mathbf{y}_r и ζ_j , $r = \overline{1, m}$, $j = 1, 2$. Имеем

$$\begin{aligned} \lambda \begin{pmatrix} \rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1} & \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \\ \rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} & \rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \nabla \Phi_{22} \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} g(\rho_1 - \rho_2) G_1 G_1^* & 0 \\ 0 & g(\rho_2 - \rho_3) G_2 G_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \nabla \Phi_{22} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} A_1 \left(I - \sum_{r=1}^m \frac{\alpha_r}{\lambda - \beta_r} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \nabla \Phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Осуществляя замену

$$A^{1/2} \mathbf{u}_1 =: \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{J}_{0, S_1}(\Omega_1),$$

приходим к спектральной проблеме для элемента $x := (\boldsymbol{\varphi}; \nabla \Phi_{22})^T$:

$$L(\lambda)x := \left(\text{diag}\{e_0(\lambda); 0\} - \lambda \text{diag}\{A^{1/2}; 0\} \tilde{C} \text{diag}\{A^{1/2}; 0\} - \lambda^{-1} \text{diag}\{b_1 Q Q^*; b_2 G_2 G_2^*\} \right) x = 0, \quad (2.4.8)$$

где

$$e_0(\lambda) := 1 + \sum_{r=1}^m \alpha_r (\beta_r - \lambda)^{-1}, \quad \tilde{C} := \begin{pmatrix} \rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1} & \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \\ \rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} & \rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2} \end{pmatrix},$$

в пространстве $\mathbf{J}_{0, S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_{0, S_2}(\Omega_2)$ для операторного пучка $L(\lambda)$.

Задачу (2.4.8) можно исследовать методами спектральной теории операторных пучков (см. [15]). В частности, можно установить, что спектр этой задачи дискретен, расположен в правой комплексной полуплоскости и состоит из шести ветвей собственных значений, которым отвечают пограничные волны на границе раздела Γ_1 , поверхностные волны на Γ_2 , внутренние диссипативные волны в области Ω_1 , а также диссипативные волны, обусловленные вязкоупругостью жидкости.

Подробно эти свойства решений спектральной задачи (2.4.8), а также свойства полноты и базисности ее корневых (собственных и присоединенных) элементов будут изучены в другой работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович М. С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 5 (347). — С. 3–78.
2. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д. Эволюционная и спектральная задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости // Тр. СПб. мат. о-ва. — 1998. — 6. — С. 5–33.
3. Аскеров Н. К., Крейн С. Г., Лантес Г. И. Задача о колебаниях вязкой жидкости связанные с ней операторные уравнения // Функци. анал. прилож. — 1968. — 2, № 2. — С. 21–32.
4. Вронский Б. М. Нормальные колебания частично диссипативной гидросистемы // Динам. сист. — 2012. — 2 (30), № 1–2. — С. 53–56.
5. Вронский Б. М. О малых движениях системы «жидкость-газ» в ограниченной области // Укр. мат. ж. — 2006. — 58, № 10. — С. 1326–1334.

6. *Гохберг Н. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
7. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов// Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 4 (100). — С. 15–41.
8. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: Форма, 2016.
9. *Копачевский Н. Д.* О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд// Динам. сист. — 2017. — 7 (35), № 1–2. — С. 109–145.
10. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
11. *Копачевский Н. Д., Семкина Е. В.* О малых движениях гидросистемы «вязкоупругая жидкость—идеальная жидкость», заполняющей неподвижный сосуд// Динам. сист. — 2017. — 7 (35), № 3. — С. 207–228.
12. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
13. *Крейн С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде// Докл. АН СССР. — 1964. — 159, № 2. — С. 262–265.
14. *Крейн С. Г., Лантев Г. И.* К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде// Функци. анал. прилож. — 1968. — 2, № 1. — С. 40–50.
15. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
16. *Милославский А. И.* Спектральный анализ малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом контейнере/ Деп. рукопись № 1221. — Киев: Ин-т мат. НАН Украины, 1989.
17. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде// Усп. мат. наук. — 1989. — 44, № 4.
18. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды// Докл. АН СССР. — 1989. — 309, № 3. — С. 532–536.
19. *Agranovich M.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary// Russ. J. Math. Phys. — 2008. — 15, № 2. — P. 146–155.
20. *Eirich F.* Rheology. Theory and Applications. — New York: Academic Press, 1956.
21. *Gagliardo E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1957. — 27. — P. 284–305.
22. *Kopachevsky N., Krein S.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1. Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2001.
23. *Kopachevsky N., Krein S.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2. Non-Self-Adjoint Problems for Viscous Fluids. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2003.
24. *Kopachevsky N., Padula M., Vronsky B. M.* Small motions and eigenoscillations of a system “fluid-gas” in a bounded region// Uchen. Zap. Tavrich. Nats. Univ. im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern. — 2007. — 20, № 1. — P. 3–55.
25. *Miloslavskii A.* Stability of a viscoelastic isotropic medium// Sov. Phys. Dokl. — 1985. — 33.
26. *Miloslavsky A.* Stability of certain classes of evolution equations// Sib. Math. J. — 1985. — 26, № 5. — P. 723–735.
27. *Rychkov V.* On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains// J. London Math. Soc. — 1999. — 60, № 1. — P. 237–257.

Копачевский Николай Дмитриевич

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

E-mail: kopachevsky@list.ru

Семкина Екатерина Владимировна

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

E-mail: kozirno@email.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 91–95
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-91-95

УДК 517.957

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОБРАЗОВАНИИ ГАЗОВОГО ГИДРАТА В ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

© 2019 г. Н. Г. МУСАКАЕВ, М. К. ХАСАНОВ, С. Л. БОРОДИН

Аннотация. Приведена математическая постановка задачи о закачке холодного газа в пористую среду, сопровождающейся образованием газогидрата, в форме начально-краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, выражающих законы сохранения массы и энергии, и дополненных условиями баланса массы и тепла на подвижной границе фазовых переходов. В прямолинейно-параллельном приближении построены приближенные аналитические решения со скачком температуры на границе образования газового гидрата, описывающие зависимость между координатой границы фазового перехода и параметрами закачиваемого газа и пористой среды.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, математическая модель, аналитические решения, фильтрация, газовый гидрат, фазовый переход.

CONSTRUCTION OF AN ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM ON THE FORMATION OF GAS HYDRATE IN A POROUS MINE

© 2019 N. G. MUSAKAEV, M. K. KHASANOV, S. L. BORODIN

АБСТРАКТ. In this paper, we propose the mathematical formulation of the problem on injection of a cold gas into a porous medium accompanied by the formation of gas hydrate. The mathematical formulation of the problem is an initial-boundary-value problem for a system of nonlinear partial differential equations expressing the laws of conservation of mass and energy supplemented by the conditions of mass and heat balance at the moving boundary of phase transitions. Within the framework of the rectilinear parallel approximation, we construct approximate analytical solutions with a temperature jump at the boundary where the gas hydrate appears. These solutions describe the relationship between the coordinate of the boundary of phase transition and the parameters of the injected gas and porous medium.

Keywords and phrases: differential equation, mathematical model, analytical solutions, filtration, gas hydrate, phase transition.

AMS Subject Classification: 35C06, 76S05, 76N15, 82B26

1. Введение. В настоящее время широко используемым и удобным источником энергии является природный газ (см. [9]). Во многом это связано с весьма высокой эффективностью выработки электроэнергии, большой теплотой сгорания и низким уровнем выбросов углерода (по сравнению с углем и нефтью). Поэтому с экологической точки зрения природный газ является одним из самых безопасных видов органического топлива (см. [12]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10023).

Ряд исследователей указывает на увеличение в течение ближайших двадцати лет доли природного газа в энергетике. В этой связи во всем мире возрастает потребность в разработке технологий для эффективного хранения углеводородного газа (см. [12]). Одним из способов хранения природного газа является его консервация в газогидратной форме в пористых пластах (см. [1,2,8,11]). Подземная консервация в истощенных коллекторах месторождений углеводородного сырья и/или водоносных горизонтах является достаточно распространенным методом хранения природного газа. Преимуществами газогидратной формы хранения углеводородного газа в пористых пластах являются: достаточно компактный характер хранения, так как в одном и том же объеме при одинаковых термодинамических условиях в газовом гидрате присутствует значительно больше газа, чем в свободном состоянии; относительно умеренные по давлению и температуре условия формирования и хранения; невзрывоопасный характер хранения (см. [1,8,12]).

Изучению процесса образования газовых гидратов в пористом пласте посвящены работы [4, 6, 7, 10]. Предлагаемое исследование отличается тем, что в настоящей работе построены аналитические решения задачи в прямолинейно-параллельном приближении и проведен анализ этих решений.

2. Решение с непрерывным распределением температуры. Рассмотрим следующую постановку задачи. Пусть имеется горизонтальный полубесконечный пористый пласт, насыщенный в начальном состоянии газом (метаном) и водой. Через левую границу пласта ($x = 0$) под постоянным давлением p_e нагнетается метан с известной и постоянной температурой T_e , причем значения p_e и T_e таковы, что в пористой среде может происходить формирование газогидрата. Рассмотрим случай, когда образование газового гидрата полностью происходит на фронтальной границе, т.е. в пласте возникают две области. В первой (ближней к границе нагнетания, $x = 0$) зоне вода полностью перешла в газогидратное состояние, поэтому в порах присутствуют только газ и гидрат CH_4 . Во второй области пористая среда насыщена газом и водой. На поверхности $x = x(s)$, разделяющей две выделенные зоны, гидратонасыщенность S_h меняется скачком от $S_h^- = S_{h(1)}$ до $S_h^+ = 0$.

Для такой постановки задачи в [5, 10] на основе методов и подходов механики многофазных сред (см. [3]) записана система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая течение газа в пористой среде с учетом образования газового гидрата. Для введенной автомодельной переменной $\xi = x/\sqrt{\chi^{(T)}t}$ ($\chi^{(T)}$ — коэффициент температуропроводности пласта, t — время) данная система на основе метода линеаризации Лейбензона представлена в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (уравнения температуро- и пьезопроводности):

$$-\frac{\xi}{2} \frac{dp_{(i)}^2}{d\xi} = \eta_{(i)} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dp_{(i)}^2}{d\xi} \right), \quad -\frac{\xi}{2} \frac{dT_{(i)}}{d\xi} = \frac{Pe_{(i)}}{2p_0^2} \frac{dp_{(i)}^2}{d\xi} \frac{dT_{(i)}}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dT_{(i)}}{d\xi} \right), \quad (1)$$

где

$$\eta_{(i)} = \frac{\chi_{(i)}^{(P)}}{\chi_{(i)}^{(T)}}, \quad \chi_{(i)}^{(P)} = \frac{k_{(i)} p_0}{m S_{g(i)} \mu_g}, \quad Pe_{(i)} = \frac{\rho_{g0} p_0 c_g k_{(i)}}{\lambda \mu_g}, \quad k_{(i)} = k_0 S_{g(i)}^3, \quad i = 1, 2,$$

$$\lambda = (1 - m) \lambda_{sk} + m \sum_{j=g,l,h} S_j \lambda_j, \quad \sum_{j=g,l,h} S_j = 1.$$

Здесь параметры первой и второй зон снабжены нижними индексами в скобках $i = 1, 2$; нижние индексы sk, h, l и g относятся к параметрам пористого скелета, гидрата, воды и газа соответственно; p_0 и T_0 — исходные давление и температура в пласте; ρ_j, c_j и λ_j ($j = sk, h, l$ и g) — истинная плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности j -й фазы; S_j ($j = g, l, h$) — насыщенность пор j -й фазой; m и k_0 — пористость и абсолютная проницаемость пласта; μ_g — динамическая вязкость газовой фазы.

Для распределения давления и температуры в каждой из выделенных областей могут быть записаны следующие соотношения:

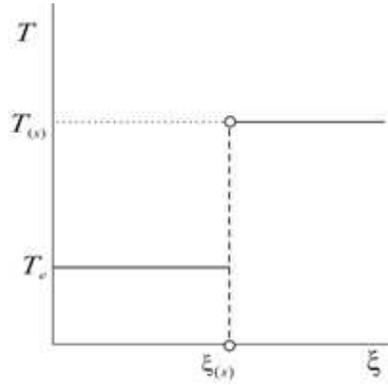


Рис. 1. Схематическое распределение температуры в пласте

$$p_{(1)}^2 = p_{(s)}^2 + \frac{(p_e^2 - p_{(s)}^2) \int_{\xi}^{\xi(s)} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(1)}}\right) d\xi}{\int_0^{\xi(s)} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(1)}}\right) d\xi}, \quad 0 < \xi < \xi(s), \quad (2)$$

$$T_{(1)} = T_{(s)} + \frac{(T_e - T_{(s)}) \int_{\xi}^{\xi(s)} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{Pe_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi}{\int_0^{\xi(s)} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{Pe_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi}, \quad 0 < \xi < \xi(s),$$

$$p_{(2)}^2 = p_0^2 + \frac{(p_{(s)}^2 - p_0^2) \int_{\xi}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(2)}}\right) d\xi}{\int_{\xi(s)}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(2)}}\right) d\xi}, \quad \xi(s) < \xi < \infty, \quad (3)$$

$$T_{(2)} = T_0 + \frac{(T_{(s)} - T_0) \int_{\xi}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{Pe_{(2)}}{2p_0^2} p_{(2)}^2\right) d\xi}{\int_{\xi(s)}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{Pe_{(2)}}{2p_0^2} p_{(2)}^2\right) d\xi}, \quad \xi(s) < \xi < \infty,$$

где нижний индекс s в скобках относится к параметрам на границе гидратообразования.

Построенные решения (2), (3) описывают распределения давления и температуры в отдельных областях пласта. При подстановке этих решений в соотношения на границах фазовых переходов возникает система трансцендентных уравнений, которая в общем случае может быть решена только с использованием численных методов. Однако принципиальный интерес представляет получение аналитического решения, устанавливающего определенный вид функциональной зависимости координаты границы фазового перехода от параметров закачиваемого газа и пористой среды. Данное решение является удобным инструментом для анализа математической модели образования газогидрата в пористой среде.

3. Решение со скачком температуры на границе фазовых переходов. При построении приближенного аналитического решения используем результаты расчетов, которые показывают, что распределение температуры в пласте близко к ступенчатому со скачком температуры на фронте образования газового гидрата (см. [5]). В этом случае поле температуры в окрестностях границы фазовых переходов определяется двумя значениями: температура нагнетания метана T_e и равновесная температура гидратообразования $T_{(s)}$ (рис. 1).

Согласно проведенным расчетам распределение температуры в пласте близко к ступенчатому при высоких значениях проницаемости пористой среды. В этом случае поглощение газа на границе гидратообразования оказывает малое влияние на изменение давления в пласте. Поэтому в уравнении баланса массы на границе гидратообразования можно пренебречь слагаемым, отвечающим за поглощение газа. Тогда с учетом ступенчатого распределения температуры в пласте

условия баланса массы и тепла на фронте гидратообразования могут быть представлены в следующем виде (см. [3, 10]):

$$mS_{g(2)}\rho_{g(s)}(v_{g(2)} - \dot{x}_{(s)}) = mS_{g(1)}\rho_{g(s)}(v_{g(1)} - \dot{x}_{(s)}), \quad (4)$$

$$mS_{g(1)}\rho_{g(1)}(v_{g(1)} - \dot{x}_{(s)})c_gT_e + mS_{h(1)}\rho_hL_h\dot{x}_{(s)} + \rho c(T_{(s)} - T_e)\dot{x}_{(s)} = mS_{g(2)}\rho_{g(2)}(v_{g(2)} - \dot{x}_{(s)})c_gT_{(s)}, \quad (5)$$

$$T_{(s)} = T_0 + T_* \ln \frac{p_{(s)}}{p_{s0}}, \quad \rho c = (1 - m)\rho_{sk}c_{sk} + m \sum_{j=g,l,h} S_j \rho_j c_j, \quad (6)$$

где v_g — скорость газовой фазы; $\dot{x}_{(s)}$ — скорость движения границы фазового перехода; L_h — удельная теплота гидратообразования; p_{s0} — равновесное давление, соответствующее исходной температуре T_0 ; T_* — эмпирический параметр, имеющий размерность температуры и зависящий от состава природного газа.

Уравнения (4) и (5) с учетом закона Дарси и уравнения состояния калорически совершенного газа примут вид:

$$\frac{k_{(2)}}{T_{(s)}} \frac{dp_{(2)}^2}{dx} - \frac{k_{(1)}}{T_e} \frac{dp_{(1)}^2}{dx} = 2m\mu_g \left(S_{g(1)} \frac{p_{(s)}}{T_e} - S_{g(2)} \frac{p_{(s)}}{T_{(s)}} \right) \dot{x}_{(s)}, \quad (7)$$

$$k_{(1)} \frac{dp_{(1)}^2}{dx} - k_{(2)} \frac{dp_{(2)}^2}{dx} = 2\mu_g \frac{R_g}{c_g} \left(\rho c(T_{(s)} - T_e) + mS_{h(1)}\rho_hL_h + mc_g \frac{p_{(s)}}{R_g} (S_{g(2)} - S_{g(1)}) \right) \dot{x}_{(s)}; \quad (8)$$

здесь R_g — газовая постоянная. Для автомодельной переменной ξ уравнения (7) и (8) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\frac{k_{(2)}}{T_{(s)}} \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} - \frac{k_{(1)}}{T_e} \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} = m\mu_g \chi^{(T)} \left(S_{g(1)} \frac{p_{(s)}}{T_e} - S_{g(2)} \frac{p_{(s)}}{T_{(s)}} \right) \xi_{(s)}, \quad (9)$$

$$k_{(1)} \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} - k_{(2)} \frac{dp_{(2)}^2}{d\xi} = \mu_g \frac{R_g}{c_g} \left(\rho c(T_{(s)} - T_e) + mS_{h(1)}\rho_hL_h + mc_g \frac{p_{(s)}}{R_g} (S_{g(2)} - S_{g(1)}) \right) \chi^{(T)} \xi_{(s)}. \quad (10)$$

Умножив соотношение (9) на $T_{(s)}$ и сложив с (10), получим

$$k_{(1)} \left(1 - \frac{T_{(s)}}{T_e} \right) \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} = \mu_g R_g \left(mS_{h(1)}\rho_h \frac{L_h}{c_g} - mS_{g(1)} \frac{p_{(s)}}{R_g} \left(1 - \frac{T_{(s)}}{T_e} \right) + \frac{\rho c}{c_g} (T_{(s)} - T_e) \right) \chi^{(T)} \xi_{(s)}.$$

Из этого уравнения для автомодельной координаты границы образования газогидрата $\xi_{(s)}$ можно записать

$$\xi_{(s)} = \frac{k_{(1)}}{\mu_g R_g \chi^{(T)}} \left(mS_{h(1)}\rho_h T_e \frac{L_h}{c_g (T_{(s)} - T_e)} - mS_{g(1)} \frac{p_{(s)}}{R_g} - \frac{\rho c T_e}{c_g} \right)^{-1} \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi}. \quad (11)$$

Будем пренебрегать разностью коэффициента проницаемости в двух зонах пласта и поглощением газа на границе фазовых переходов. Тогда из первого уравнения системы (1) можно получить приближенное решение для распределения давления в первой области:

$$p_{(1)}^2 = p_e^2 + \frac{p_0^2 - p_e^2}{\sqrt{\pi\eta_{(1)}}} \int_0^\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(1)}}\right) d\xi \quad \text{или} \quad \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} = \frac{p_0^2 - p_e^2}{\sqrt{\pi\eta_{(1)}}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(1)}}\right). \quad (12)$$

Поскольку для высокопроницаемых пористых сред $\eta_{(1)} \gg \xi^2$, то из (12) получим:

$$\frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} = \frac{p_0^2 - p_e^2}{\sqrt{\pi\eta_{(1)}}}, \quad p_{(s)} = p_e. \quad (13)$$

Подставляя (13) в соотношение (11), для автомодельной координаты границы образования газогидрата можно записать

$$\xi_{(s)} = \frac{k_{(1)}}{\mu_g R_g \chi^{(T)}} \left(m S_{h(1)} \rho_h T_e \frac{L_h}{c_g (T_{(s)} - T_e)} - m S_{g(1)} \frac{p_{(s)}}{R_g} - \frac{\rho c T_e}{c_g} \right)^{-1} \frac{p_0^2 - p_e^2}{\sqrt{\pi \eta_{(1)}}}$$

или с учетом (5) и (13)

$$\xi_{(s)} = \frac{k_{(1)} c_g (p_0^2 - p_e^2)}{\mu_g R_g \chi^{(T)} \sqrt{\pi \eta_{(1)}}} \left(\rho c T_e - m S_{h(1)} \rho_h T_e \frac{L_h}{T_e - T_0 - T_* \ln(p_e/p_{s0})} + m S_{g(1)} c_g \frac{p_e}{R_g} \right)^{-1}. \quad (14)$$

Таким образом, получено приближенное аналитическое решение в виде явной функциональной зависимости координаты границы гидратообразования от давления и температуры закачиваемого газа и параметров пористой среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондарев Э. А., Рожин И. И., Попов В. В., Аргунова К. К. Оценка возможности подземного хранения гидратов природного газа в зоне многолетней мерзлоты// Криосфера Земли. — 2015. — 19, № 4. — С. 64–74.
2. Кузнецов Ф. А., Истомин В. А., Родионова Т. В. Газовые гидраты: исторический экскурс, современное состояние, перспективы исследований// Рос. хим. ж. — 2003. — 47, № 3. — С. 5–18.
3. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987.
4. Нурисламов О. Р., Шагапов В. Ш. Нагнетание газа во влажную пористую среду с образованием газогидрата// Прикл. мат. мех. — 2009. — 73, № 5. — С. 809–823.
5. Шагапов В. Ш., Мусакаев Н. Г., Хасанов М. К. Нагнетание газа в пористый резервуар, насыщенный газом и водой// Теплофиз. аэромех. — 2005. — 12, № 4. — С. 645–656.
6. Шагапов В. Ш., Хасанов М. К., Гималтдинов И. К., Столбовский М. В. Численное моделирование образования газогидрата в пористом пласте конечной протяженности при продувке его газом// Прикл. мех. техн. физ. — 2011. — 52, № 4. — С. 116–126.
7. Шагапов В. Ш., Хасанов М. К., Мусакаев Н. Г. Образование газогидрата в пористом резервуаре, частично насыщенном водой, при инъекции холодного газа// Прикл. мех. техн. физ. — 2008. — 49, № 3. — С. 137–150.
8. Chatti I., Delahaye A., Fournaison L., Petitot J. P. Benefits and drawbacks of clathrate hydrates: a review of their areas of interest// Energy Conv. Manag. — 2005. — 46, № 9–10. — P. 1333–1343.
9. Demirbas A. Natural gas// in: Methane Gas Hydrate. — London: Springer, 2010. — P. 57–76.
10. Shagapov V. Sh., Musakaev N. G., Khasanov M. K. Formation of gas hydrates in a porous medium during an injection of cold gas// Int. J. Heat Mass Trans. — 2015. — 84. — P. 1030–1039.
11. Sloan E. D., Koh C. A. Natural gas hydrates: Recent advances and challenges in energy and environmental applications// AIChE J. — 2007. — 53, № 7. — P. 1636–1643.
12. Veluswamy H. P., Kumar A., Seo Y., Lee J. D., Linga P. A review of solidified natural gas (SNG) technology for gas storage via clathrate hydrates// Appl. Energy. — 2018. — 216. — P. 262–285.

Мусакаев Наиль Габсалямович

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики

им. С. А. Христиановича СО РАН;

Тюменский индустриальный университет

E-mail: musakaev@ikz.ru

Хасанов Марат Камилович

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

E-mail: hasanovmk@mail.ru

Бородин Станислав Леонидович

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики

им. С. А. Христиановича СО РАН

E-mail: borodin@ikz.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 96–103
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-96-103

УДК 519.25, 519.67

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ МОДИФИЦИРОВАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ГАУССА

© 2019 г. В. А. РОДИН, С. В. СИНЕГУБОВ

Аннотация. Построена математическая модель для оценки массы воды, затопляющей береговой рельеф. Модель рельефа дна водохранилища и рельефа возможной части затопления береговой линии построена с учетом стохастических исследований. Моделирование проведено на базе эмпирических данных промеров глубин водоема и исследования линий уровня карт прибрежной зоны. Для построения уравнений поверхности рельефа прибрежной зоны в качестве эмпирических данных использовались карты с линиями уровня.

Ключевые слова: стохастическое моделирование поверхностей, модифицированные функции Гаусса, численные методы, компьютерное моделирование, проверка статистических гипотез.

STOCHASTIC MODELING OF SURFACES WITH MODIFIED GAUSS FUNCTIONS

© 2019 V. A. RODIN, S. V. SINEGUBOV

АБСТРАКТ. In this paper, we construct a mathematical model for estimating the mass of water flooding the coastline of a reservoir. The models of the relief of the bottom of the reservoir and the relief of the flooding part of the coastline are constructed by stochastic methods. The simulation is based on empirical data of measurements of depths of the reservoir and the study of level lines on maps of the coastal zone. The equations of the surface relief of the coastal zone are constructed by using empirical data from maps with level lines.

Keywords and phrases: stochastic modeling of surfaces, modified Gauss functions, numerical methods, computer modeling, testing of statistical hypotheses.

AMS Subject Classification: 68U05, 90-08

1. Введение. Необходимость обеспечения эффективной работы всех спасательных подразделений обуславливает целесообразность разработки прогностических моделей, связанных с возможными катастрофами. Одним из основных стихийных явления приносящих существенные потери населению страны являются большие наводнения (см. [2, 3]). Наводнение может быть вызвано как метеоусловиями, так и разрушением технических сооружений на внутренних водоемах. Актуальным является моделирование рельефа дна бассейнов водохранилища, а также рельефа затопления береговой линии суши для определения массы воды и оценки возможных последствий наводнения.

Для математического обоснования выбора модельного уравнения сначала проверяется статистическая гипотеза о возможности применения модифицированных функций Гаусса для моделирования, как поверхностной части рельефа, так и подводной его части. При определении параметров модели обычно используют компьютерные алгоритмы (см. [1, 4, 7, 8, 11]). Применение

функций Гаусса для моделирования различных поверхностей известно в современной литературе (см. [1, 5–8, 10]).

В работе проведено построение двух моделей рельефа: модель рельефа подводной части и модель надводной (береговой) части рельефа. Моделирование рельефов производится на основе реализации следующей схемы. Сначала на основе нормального распределения строятся локализованные поверхности Гаусса. Параметры локализованной части поверхности вычисляются по эмпирическим данным промеров бассейна. Полная модель составляется из локализованных поверхностей Гаусса с учетом географических и ландшафтных особенностей района. Затем с помощью компьютерного имитационного моделирования уточняются параметры модели, которая представляет собой сумму модифицированных кривых Гаусса с предполагаемым уровнем затопления. Фактически моделирование выпуклых и вогнутых частей поверхности дна использует стохастическое моделирование. В работе бугры и впадины рельефа дна заменяются локализованными поверхностями Гаусса, наиболее близкими к реальной поверхности в стохастическом смысле, с сохранением локальности экстремумов. Поверхности склонов моделируются уравнениями плоскостей, построение которых использует координаты точек промеров. Новый подход значительно сокращает число параметров модели. Для построения модели надводной части рельефа используются горизонтали топографической карты.

2. Статистическая проверка статистической гипотезы. Заметим, что операции приведения к каноническому виду эллипса переводят двумерную плотность распределения к следующему виду:

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{X^2}{\sigma_x^2} + \frac{Y^2}{\sigma_y^2}\right]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{X^2}{2\sigma_x^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{Y^2}{2\sigma_y^2}\right). \quad (1)$$

Проверку статистической гипотезы о виде распределения можно проводить по сечениям. Результаты полученных измерений обрабатывались по стандартной программе в оболочке Mathcad для критерия согласия Пирсона. Для полноты изложения приводим полученные вычисления.

Данные по итогам вычислений. По первому сечению: число промеров $n = 100$, число интервалов, определенное по формуле Стерджеса, — 7, минимальная глубина промеров равна 130, максимальная — 167, среднее значение $\bar{x} = 150$, замеры глубины с использованием аналога правила 2σ проводились на интервале длины $4 \cdot \sigma_x = 4 \cdot 6,2 \approx 25$ м. По второму сечению: число промеров — $n = 50$, число интервалов — 6, минимальная глубина промеров равна 142, максимальная — 167, $\bar{y} = 150$, замеры глубины с использованием аналога правила 2σ проводились на интервале длины $4 \cdot \sigma_y = 4 \cdot 4,9 \approx 20$ м.

Измерения проводились на прямоугольном носителе размером $25 \times 20 = 500$ м². По первому сечению критическая точка $\chi_{кр}^2 = 12,28$. Наблюдаемое значение критерия $\chi_{набл}^2 = 2,07$. Для второго сечения: критическая точка $\chi_{кр}^2 = 11,37$, наблюдаемое значение критерия $\chi_{набл}^2 = 5,01$. В обоих случаях выполнено неравенство $\chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2$; следовательно, нет оснований отвергать гипотезу о нормальном распределении.

3. Локализация поверхности Гаусса. Рассмотрим двумерную поверхность Гаусса. Пусть x_c, y_c — координаты центра поверхности, σ_x, σ_y — среднеквадратичные отклонения, ρ — коэффициент корреляции. Тогда двумерная плотность распределения нормального закона имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-x_c)^2}{\sigma_x^2} - \rho\frac{2(x-x_c)^2(y-y_c)^2}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-y_c)^2}{\sigma_y^2}\right]\right). \quad (2)$$

Пересекая поверхность (2) плоскостью $z = z_0$, параллельной плоскости OXY , получим в сечении эллипс (см. рис. 1). Уравнение проекции на плоскость OXY имеет вид:

$$\frac{(x-x_c)^2}{\sigma_x^2} - \rho\frac{2(x-x_c)^2(y-y_c)^2}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-y_c)^2}{\sigma_y^2} = d^2,$$

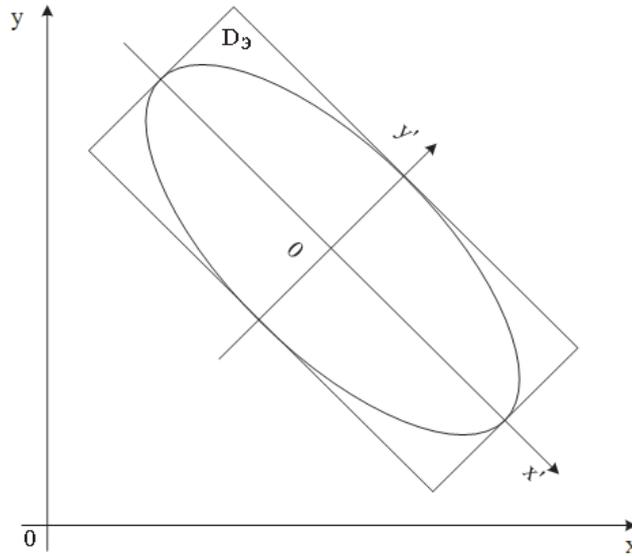


Рис. 1

где $d^2 = -2(1 - \rho^2) \ln [2\pi z_0 \sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}]$. Применяя правило 2σ , проведем сечение через точку $M(x_c + 2\sigma_x, y_c)$. Высота поверхности (2) в этой точке равна

$$\frac{\exp(-2)}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} = M(2).$$

Определение 1. Локализацией поверхности Гаусса будем называть часть поверхности (2), расположенную над эллипсом

$$\frac{(x - x_c)^2}{\sigma_x^2} - \rho \frac{2(x - x_c)^2(y - y_c)^2}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y - y_c)^2}{\sigma_y^2} = -2(1 - \rho^2) \ln [2\pi z_0 \sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}]. \quad (3)$$

Пренебрегая 5-7 % точности, мы локализуем значимую часть поверхности, заменив эллиптический носитель прямоугольным.

Прямоугольник D_E строится так, что эллипс (3) вписан в него (см. рис. 1). Практическое применение поверхности Гаусса удобно в связи с тем фактом, что она полностью определяется своими параметрами. Параметры σ_x, σ_y определяют полуоси эллипса (3), а параметр ρ , через уравнение

$$\rho = \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{2\sigma_x \sigma_y} \operatorname{tg} 2\alpha \quad (4)$$

определяет угол наклона α осей симметрии эллипса.

Координаты центра прямоугольника D_E обозначим x_c, y_c (это вершина поверхности). Так как мы выбирали носитель по правилу 2σ , то размеры прямоугольника $4\sigma_x \times 4\sigma_y$, а угол наклона новых осей по формуле (4) позволит определить параметр ρ . Этот прямоугольник и будет носителем модельной составляющей. Кроме того, высота поверхности обратно пропорциональна площади носителя:

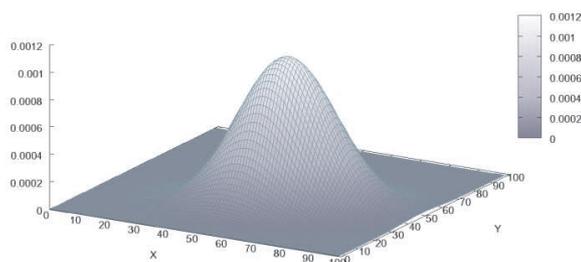
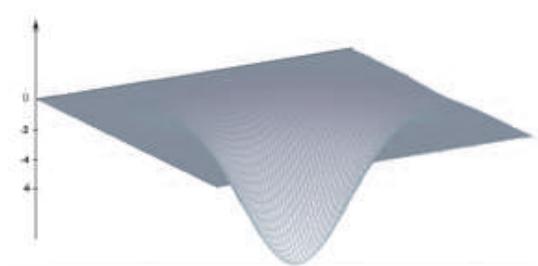
$$H_{D_E} = \frac{8}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{1}{S_{D_E}}.$$

Введем индикаторную функцию прямоугольника:

$$\chi_{D_E}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \in D_E; \\ 1, & \text{если } (x, y) \notin D_E. \end{cases}$$

Уравнение локализованной части поверхности имеет вид

$$F_{D_E}(x, y) = \mu f(x, y) \chi_{D_E}(x, y).$$

Рис. 2. $\mu > 0$ Рис. 3. $\mu < 0$

Части общей моделируемой поверхности выпуклой вверх отличается от нормального закона множителем $\mu > 0$ (см. рис. 2); уравнение части поверхности выпуклой вниз — на множитель $\mu < 0$ (см. рис. 3). Константы μ определяются по эмпирической выборке в точке с координатами (x_c, y_c) , и характеризуют высоту шапочки подводного рельефа выше определенного уровня глубины, и глубину шапочки подводного рельефа ниже определенного уровня глубины. Аналогично строится модель и надводной (прибрежной) части рельефа.

4. Определение параметров по эмпирическим данным. В [1] с помощью эмпирических данных о глубинах исследуемого водоема получены эмпирические линии уровня (см. рис. 4, слева).

В левой части рисунка сплошными линиями обозначены усредненные эмпирические линии уровня, определяющие выпуклые части рельефа дна, а пунктирными линиями — впадины между ними. Заметим, что в силу свойства нормального закона площадь прямоугольного носителя автоматически определяет высоту бугра или глубину впадины.

Принципиальное (устойчивое) решение задачи разбиения на прямоугольники исследуемую область заключено в следующем утверждении (см. [6]).

Теорема 1. *Каждое открытое непустое ограниченное множество на плоскости есть объединение не более чем счетного семейства замкнутых прямоугольников без попарно общих внутренних точек.*

Учитывая гидрологические особенности исследуемого водоема, приходим к выводу о нецелесообразности мелкого разбиения прямоугольными носителями. Если карта линии уровней глубин водоема отсутствует, то производятся промеры, по которым составляют эмпирические линии уровня и отмечают переходы между впадинами и буграми. Так же учитывают размеры прямоугольников с учетом перепада глубин. В этом случае имеем чисто компьютерную задачу определения координат вершин прямоугольника ассоциированного с эмпирической линией уровня перехода глубин (см. рис. 5).

5. Компьютерная задача. На рис. 5 приведена схема расположения точек промеров на эмпирической линии уровня. Даны координаты промеров на линии. Требуется определить форму и положение прямоугольника, связанного сданной линией уровня; точнее, нужно по данным точкам определить координаты вершин прямоугольника.

Мы допускаем следующие упрощения при построении модели, которые незначительно влияют на точность, солидность модели. Кроме того, мы можем изменять число носителей и заменять одну область на две соседние. Введем следующие допущения:

- (i) на данном носителе формула поверхности унимодальна;
- (ii) область, ограниченная горизонталью, выпукла, т.е. любой прямолинейный отрезок, проходящий через две точки, принадлежащие области, целиком лежит в этой области;
- (iii) промеры производились с определенным постоянным шагом, что позволяет заменить горизонталь на вписанный многоугольник.

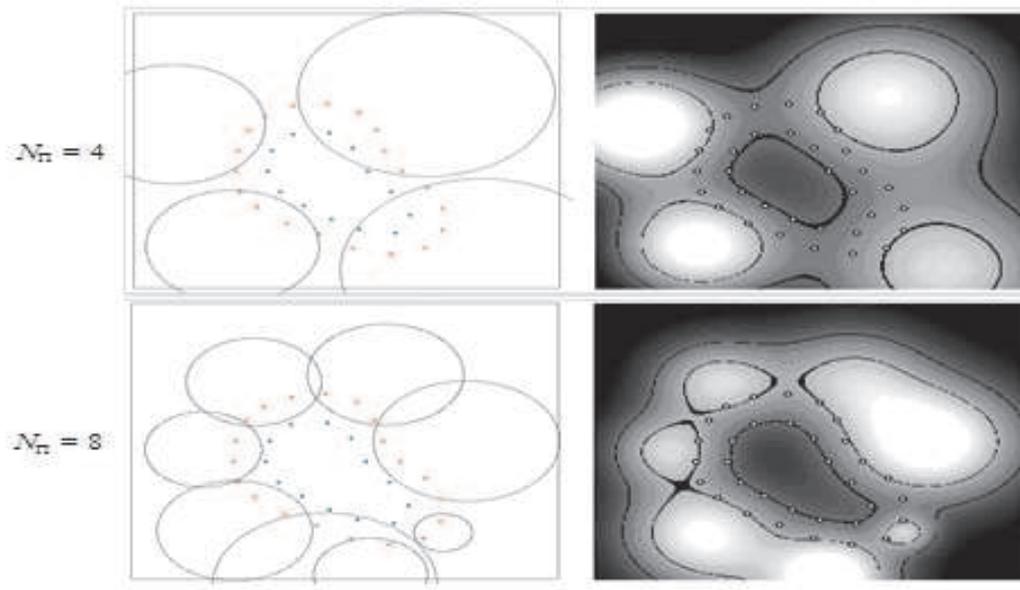


Рис. 4. Белым цветом отмечены возвышенности рельефа дна, черными точками отмечена впадина внутри рисунка.

Алгоритм определения координат вершин прямоугольника.

1. Заменяем выпуклую область многоугольником с вершинами в точках промеров (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, m$.
2. Сравниваем расстояние между всеми точками и находим две точки, расположенные на наибольшем расстоянии друг от друга. Пусть это точки с координатами $(x_i(\max), y_i(\max))$ и $(x_i(\min), y_i(\min))$. Составляем уравнение прямой L , проходящей через эти две точки, а затем уравнения двух прямых, перпендикулярных L и проходящих соответственно через точки $(x_i(\max), y_i(\max))$ и $(x_i(\min), y_i(\min))$.
3. Сравниваем положительное отклонение всех точек от прямой L и находим точки с наибольшим положительным и наибольшим отрицательным отклонениями; обозначим их $(x_i(\text{up}), y_i(\text{up}))$ и $(x_i(\text{down}), y_i(\text{down}))$ соответственно (см. рис. 5).
4. Через две полученные точки проводим две прямые, параллельные прямой L .
5. Описанные четыре прямые образуют прямоугольник с вершинами, которые обозначим $(x_1(p), y_1(p))$, $(x_2(p), y_2(p))$, $(x_3(p), y_3(p))$, $(x_4(p), y_4(p))$.

Зная вершины прямоугольного носителя, можно определить параметры поверхности Гаусса, для которой данный прямоугольник является носителем:

(а) координаты вершин

$$x_c = \frac{x_i(\max) + x_i(\min)}{2}, \quad y_c = \frac{y_i(\max) + y_i(\min)}{2};$$

(б) параметры полуосей эллипса:

$$\sigma_x = \frac{1}{4} \sqrt{[x_1(p) - x_3(p)]^2 + [y_1(p) - y_3(p)]^2}, \quad \sigma_y = \frac{1}{4} \sqrt{[x_2(p) - x_4(p)]^2 + [y_2(p) - y_4(p)]^2};$$

(с) параметр ρ определяем по формуле (4), а угол — из уравнения

$$\alpha = \arctg \left[\frac{y_i(\max) - y_i(\min)}{x_i(\max) - x_i(\min)} \right].$$

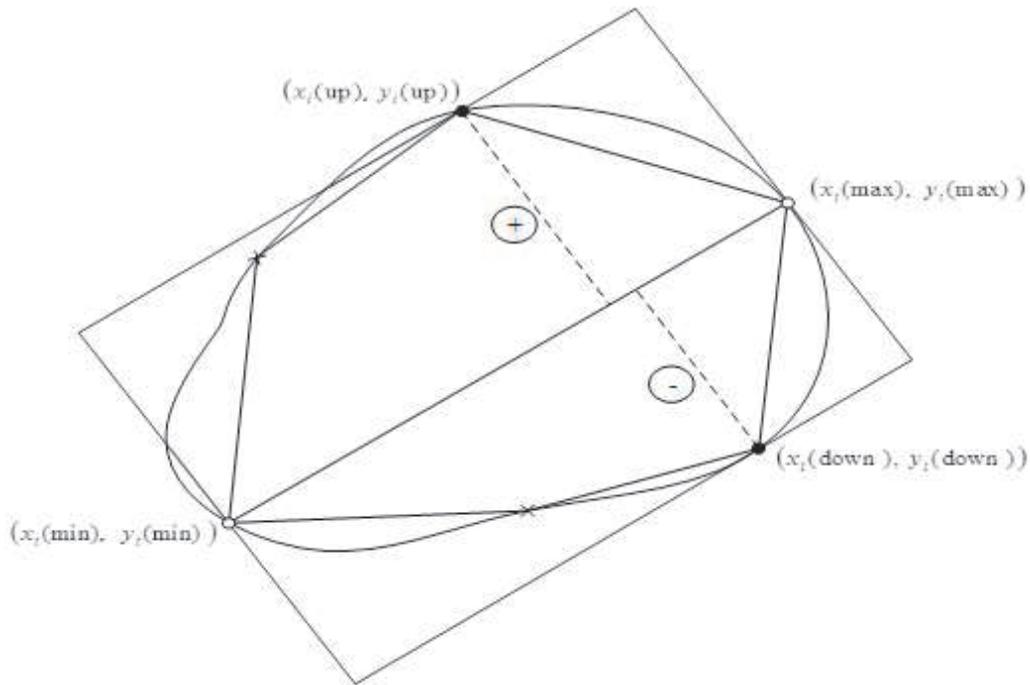


Рис. 5. Построение прямоугольного носителя

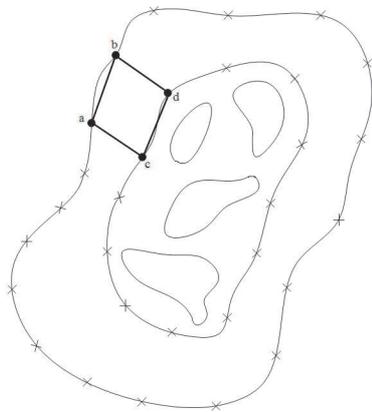


Рис. 6

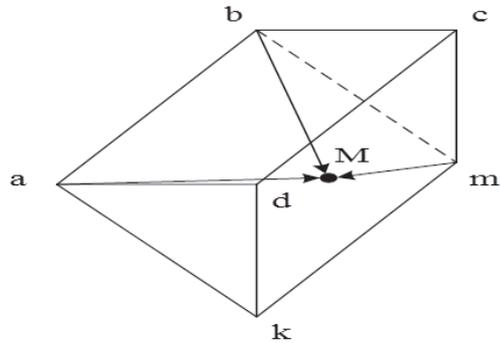


Рис. 7

6. Моделирование склонов рельефа дна, не являющихся частью бугров или впадин. К таким склонам относятся прибрежная зона, а также часть промежуточной зоны между впадинами и буграми (см. рис. 4, 7). Эти участки будем моделировать при помощи уравнения плоскости. Рассмотрим участок, ограниченный точками промеров глубины (см. рис. 6).

Пусть $M(x, y, z)$ — точка плоскости $(abkm)$ (см. рис. 7). Введем координаты соответствующих точек: $a(x_1, y_1, 0)$, $b(x_2, y_2, 0)$, $c(x_3, y_3, 0)$, $d(x_4, y_4, 0)$, $m(x_3, y_3, -h)$, $k(x_4, y_4, -h)$. Уравнение искомой плоскости получим из условия компланарности векторов \vec{aM} , \vec{bM} , \vec{mM} . Вычисляя определитель

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z \\ x - x_2 & y - y_2 & z \\ x - x_3 & y - y_3 & z + h \end{vmatrix} = 0,$$

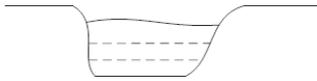


Рис. 8

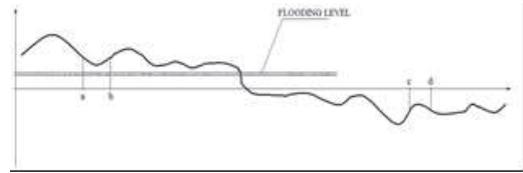


Рис. 9

получаем уравнение плоскости:

$$z = p(x, y) = x \frac{h(y_2 - y_1)}{d} + y \frac{h(x_1 - x_2)}{d} + \frac{h(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{d}. \quad (5)$$

Участок рельефа с носителем в виде четырехугольника $P = (abcd)$ моделируется уравнением (5), ограниченно действующим на носителе $p(x, y) \times \chi_{P_E}(x, y)$. Суммируя все подобные участки, получаем функциональное описание зоны рельефа, рассматриваемой в данном пункте:

$$\sum_j p_j(x, y) \chi_{P_{E_j}}(x, y).$$

Подобное моделирование захватывает и случаи с плоским дном или плоскогорье (см. рис. 8).

7. Модель полного рельефа. Основной задачей моделирования затопляемой поверхности является задача прогнозирования объема воды, вызванного природными или климатическими погодными условиями. При этом желательно иметь модель с небольшим набором параметров, которые характеризуют объем воды. Обозначим глубину на линии уровня, соответствующей прямоугольнику D_j (в точке $(x_i(\text{ур}), y_i(\text{ур}))$) через h_{D_j} . Обозначим через $f_j(x, y)$ функцию, определенную формулой (2) для данного носителя. Пусть центр носителя находится в точке (x_j, y_j) , а глубина промера в этой точке равна $h(x_j, y_j)$. Тогда для подводного бугра, сосредоточенного на этом прямоугольнике, уравнение имеет вид

$$F_{D_j}^+(x, y) = \nu_j^+ \mu f_j(x, y) \chi_{D_j}(x, y), \quad (6)$$

где $\mu = -1$, $\nu_j^+ = [h_{D_j} - h(x_j, y_j)]$, а для подводной впадины —

$$F_{D_j}^-(x, y) = \nu_j^- \mu f_j(x, y) \chi_{D_j}(x, y), \quad (7)$$

где $\mu = +1$, $\nu_j^- = [h(x_j, y_j) - h_{D_j}]$.

Полное уравнение части затопляемого рельефа складывается из всех локальных функций, вычисленных для впадин и бугров (6)–(7) с учетом рельефа, моделируемого при помощи плоскостей:

$$F = \sum_j F_{D_j}^+ + \sum_j F_{D_j}^- + \sum_j p_j(x, y) \chi_{P_j}(x, y). \quad (8)$$

По аналогичной схеме строится модель сухопутного рельефа прибрежной зоны. Для определения размеров и местоположения прямоугольных носителей модели надводной береговой части ландшафта используют карту линий уровня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ариффуллин Е. З. Оценка эффективности метода восстановления рельефа местности на основе картографических данных // Вестн. Воронеж. гос. техн. ун-та. — 2014. — 10, № 3. — С. 10–12.
2. Бызов Л. М., Саньков В. А. Математическое моделирование эволюции рельефа сбросового уступа на примере Святоносского поднятия (Байкальская впадина) // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Науки о Земле. — 2015. — 12. — С. 12–22.
3. Добрецов Н. Л., Кирдяшкин А. Г. Глубинная геодинамика. — Новосибирск: Гео, 2001.
4. Карев М. А. Моделирование стохастических объектов с переменным числом однородных структурных элементов / Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Ульяновск: Ульяновский гос. ун-т, 2016.

5. Коробейников С. Н., Ревердатто В. В., Полянский О. П., Свердлов В. Г., Бабичев А. В. Формирование рельефа дневной поверхности в районе коллизии плит: математическое моделирование// Прикл. мех. техн. физ. — 2012. — 53, № 4. — С. 124–137.
6. Кривцова И. Е., Лебедев И. С., Настека А. В. Основы дискретной математики. — СПб.: Ун-т ИТМО, 2016.
7. Наумов А. И., Кичигин Е. К., Мох Ахмед Медани Ахмед Эламин. Методики вычисления статистических характеристик оценки высоты рельефа по цифровой карте высот рельефа местности при случайном характере задания координат точки расчета// в кн.: Академические Жуковские Чтения. — Воронеж: Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, 2013.
8. Сыздыкова Г. Д. Функция распределения морфометрического признака с учетом геометрических параметров расчленения рельефа// Вестн. Казах. нац. техн. ун-та. — 2014. — 110, № 4. — С. 70–74.
9. Хромых В. В., Хромых О. В. Цифровые модели рельефа. — Томск: ТМЛ-Пресс, 2007.
10. Ямпольский С. М., Наумов А. И., Кичигин Е. К., Рубинов В. И., Мох Ахмед Медани Ахмед Эламин. Статистическая модель прогнозного профиля рельефа местности в задаче выполнения маловысотного полета воздушного судна по цифровой карте высот// Электр. ж. Тр. МАИ. — 2013. — № 76.
11. Branciamore S., Rodin A. S., Goroshin G., Riggs A. D. Epigenetics and evolution: Transposons and the stochastic epigenetic modification model// AIMS Genetics. — 2015. — 1, № 2. — P. 148–162.

Родин Владимир Александрович
Воронежский институт МВД России
E-mail: rodin_v@mail.ru

Синегубов Сергей Владимирович
Воронежский институт МВД России
E-mail: sinusdvm@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 104–112
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-104-112

УДК 517.927.2, 519.677

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАТРИЧНОГО МЕТОДА И МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОСНОВНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАНАРНОЙ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ СТРУКТУРЕ

© 2019 г. Е. В. СЕРЕГИНА, В. В. КАЛМАНОВИЧ, М. А. СТЕПОВИЧ

Аннотация. Стационарное дифференциальное уравнение тепломассопереноса с разрывными коэффициентами описывает различные физические процессы, не зависящие от времени, например, распределение неосновных носителей заряда от стационарного источника в неоднородной или многослойной структуре. В работе изложены результаты анализа возможностей применения матричного метода и метода конечных разностей для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных киловольтными электронами в многослойном полупроводниковом материале. Показана эффективность матричного метода для решения стационарных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальное уравнение, электронный пучок, полупроводник, многослойная планарная структура, матричный метод, метод конечных разностей.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE MATRIX METHOD AND THE FINITE-DIFFERENCE METHOD FOR MODELING THE DISTRIBUTION OF MINORITY CHARGE CARRIERS IN A MULTILAYER PLANAR SEMICONDUCTOR STRUCTURE

© 2019 E. V. SEREGINA, V. V. KALMANOVICH, M. A. STEPovich

ABSTRACT. The stationary differential heat and mass transfer equation with discontinuous coefficients describes various non-time-dependent physical processes, for example, the distribution of minority carriers from a stationary source in an inhomogeneous or multilayer structure. In this paper, we analyze the possibilities of applying the matrix method and the finite-difference method for modeling the distribution of minority charge carriers generated by kilovolt electrons in a multilayer semiconductor material. The efficiency of the matrix method for solving stationary differential equations with discontinuous coefficients is shown.

Keywords and phrases: mathematical model, differential equation, electron beam, semiconductor, multilayer planar structure, matrix method, finite-difference method.

AMS Subject Classification: 34B05, 34B60, 65Z05, 80A20, 78A55

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также совместного проекта Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Калужской области № 18-41-400001.

1. Введение. Для математического моделирования явлений тепломассопереноса в однородной или многослойной среде, обусловленных взаимодействием заряженных частиц или электромагнитного излучения с полупроводниковой мишенью, ранее было предложено использовать так называемую модель независимых источников, в которой искомое распределение диффундирующего вещества или тепла в объеме материала находится как суперпозиция от точечных источников, имеющихся в каждом микрообъеме конденсированного вещества. Математически это отвечает наличию в правой части дифференциального уравнения тепломассопереноса дельта-функции. Интегрирование полученных распределений от каждого из микрообъемов позволяет найти искомое распределение диффундирующего вещества или тепла в объеме материала. Расчеты проводились нами как для однородного материала (см. [4]), так и для двух- (см. [19, 23]) и трехслойных планарных полупроводниковых структур (см. [18, 21]). Однако в планарных полупроводниковых структурах микро- и наноэлектроники количество слоев существенно больше, к тому же их параметры могут иметь различные значения в различных точках материала (например, в варизонных структурах). С увеличением числа слоев значительно увеличивается трудоемкость задачи, так как приходится решать большое число алгебраических уравнений с большим числом параметров; отчасти поэтому нам не удалось найти алгоритм решения рассматриваемых задач тепломассопереноса при наличии четырех и большего количества планарных полупроводниковых слоев. Использование других методов (операционных, вариационных, совместного использования точных и приближенных аналитических методов) приводит к различным проблемам. В этом случае, как правило, приходится решать алгебраические уравнения высоких степеней и системы алгебраических уравнений, которые могут иметь плохую обусловленность матриц коэффициентов, а в случае, когда удается получить аналитическое решение в виде бесконечных рядов, наблюдается их плохая сходимости. Отметим, что для однородных материалов проведено моделирование явлений тепломассопереноса и для остро сфокусированного электронного зонда (см. [2, 3, 22]), в том числе и с использованием численных методов (см. [16, 17]). Для использования численного решения разработан алгоритм применения проекционного метода Галеркина и получена порядковая оценка погрешности невязки, соответствующей приближенному решению стационарного уравнения диффузии (см. [12]). Для однородного полупроводникового материала этот метод позволяет находить матрицу, определяющую приближенное решение рассматриваемой задачи, не прибегая к операциям дифференцирования и интегрирования, а используя только алгебраические операции, что существенно сокращает время вычислений. Приближенное решение содержит небольшое число (10–12) членов разложения по базису из модифицированных функций Лагерра. В то же время для многослойных структур этот метод не применялся, и можно предположить, что его реализация для таких объектов может быть весьма трудоемкой.

Ранее было показано, что для математического моделирования явлений тепломассопереноса в многослойной планарной среде с произвольным числом слоев может быть использован разработанный нами матричный метод (см. [8, 9]), основанный на аппарате обобщенных степеней Берса (см. [5, 20]). Анализ возможностей применения матричного метода и сравнение его возможностей с численным методом конечных разностей для моделирования распределения неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных широким электронным пучком в многослойной планарной полупроводниковой структуре, и посвящена настоящая работа.

2. Постановка задачи. Рассмотрим стационарное дифференциальное уравнение диффузии неравновесных ННЗ, генерированных широким пучком киловольтных электронов в конечный полупроводник:

$$\frac{d}{dz} \left(D(z) \frac{d\Delta p(z)}{dz} \right) - \frac{\Delta p(z)}{\tau(z)} = -\rho(z) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$D_1 \frac{d\Delta p(z)}{dz} \Big|_{z=0} = v_{s1} \Delta p(0), \quad D_n \frac{d\Delta p(z)}{dz} \Big|_{z=l} = v_{s2} \Delta p(l). \quad (2)$$

Для многослойной структуры обозначим через z_1, \dots, z_{n-1} координаты границ раздела слоев (z_1 — первого и второго, \dots , z_{n-1} — $(n-1)$ -го и n -го), D_1, \dots, D_n , L_1, \dots, L_n , τ_1, \dots, τ_n — электрофизические параметры слоев (коэффициенты диффузии, диффузионные длины и времена жизни ННЗ, соответственно), а S_1 и S_2 — приведенные скорости поверхностной рекомбинации на поверхностях первого (при $z = 0$) и n -го (при $z = l$) материалов. При этом $L_1 = \sqrt{D_1\tau_1}$, \dots , $L_n = \sqrt{D_n\tau_n}$, а $S_1 = L_1v_{s1}/D_1$, $S_2 = L_nv_{s2}/D_n$, где v_{s1} и v_{s2} — скорости поверхностной рекомбинации ННЗ на поверхности первого слоя (при $x = 0$) и на поверхности последнего слоя (при $x = l$). Функция $\Delta p(z)$ описывает распределение по глубине ННЗ, генерированных внешним энергетическим воздействием, после их диффузии в полупроводнике; z — координата, отсчитываемая от плоской поверхности в глубь полупроводника. Функция $\rho(z)$ — зависимость от координаты плотности ННЗ, генерированных электронным пучком в полупроводниковой мишени. Для широкого электронного пучка $\rho(z)$ может быть найдена по формуле (см. [13, 14]):

$$\rho(z) = \frac{1,085(1-\eta)E_0}{\sqrt{\pi}z_{ms}(1-\eta+\eta\frac{z_{ss}}{z_{ms}})} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{z-z_{ms}}{z_{ms}} \right)^2 \right] + \frac{\eta}{1-\eta} \exp \left[- \left(\frac{z-z_{ss}}{z_{ss}} \right)^2 \right] \right\}.$$

Здесь E_0 — энергия электронного пучка, рассеянная в мишени в единицу времени, z_{ms} — глубина максимальных потерь энергии первичными электронами, испытавшими малоугловое рассеяние; z_{ss} — глубина максимальных потерь энергии обратно рассеянными электронами; η — коэффициент обратного рассеяния электронов зонда.

В настоящей работе поставлена задача о поиске аналитического решения уравнения (1) с граничными условиями (2) матричным методом (см. [7]) и сравнить результаты с расчетом распределений ННЗ, генерированных электронным пучком в трехслойном и четырехслойном полупроводниковом материале, полученным с помощью метода конечных разностей (см. [15]).

3. Описание матричного метода. Ранее в [6, 7, 9–11] описывалось моделирование процессов тепломассопереноса матричным методом. Метод сводится к последовательному умножению функциональных матриц второго порядка, компоненты которых в каждой точке определяются физическими и геометрическими параметрами текущего слоя, является аналитическим и теоретически его применение возможно для произвольного конечного числа слоев. Опишем кратко суть матричного метода.

В общем виде одномерный стационарный процесс тепломассопереноса в многослойной среде может быть задан уравнением

$$D_2^{(i)} D_1^{(i)} \Phi^{(i)}(z) - m_i^2 \Phi^{(i)}(z) = \mu^{(i)}(z), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где потенциал $\Phi^{(i)}(z)$ — искомая функция, $D_1^{(i)}$, $D_2^{(i)}$ — дифференциальные операторы

$$D_1^{(i)} = a_1^{(i)}(z) \frac{d}{dz}, \quad D_2^{(i)} = a_2^{(i)}(z) \frac{d}{dz},$$

$a_1^{(i)}(z)$, $a_2^{(i)}(z)$ — положительные функции, определенные физическими и геометрическими параметрами слоев, $\mu^{(i)}(z)$ — величина, пропорциональная объемной плотности энергии распределения источников, i — номер слоя. Поток задается формулой

$$J^{(i)}(z) = -D_1^{(i)} \Phi^{(i)}(z).$$

В точке контакта слоев выполняются условия непрерывности потенциала и потока

$$\Phi^{(i)}(z_{i+1}, t) = \Phi^{(i+1)}(z_{i+1}, t), \quad J^{(i)}(z_{i+1}, t) = J^{(i+1)}(z_{i+1}, t), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Если значения потенциала $\Phi^{(1)}(z_1)$ и потока $J^{(1)}(z_1)$ заданы, то для уравнения (3) поставлена задача Коши.

Введем вектор-столбцы V , W и матрицу K

$$V^{(i)}(z) = \begin{pmatrix} \Phi^{(i)}(z) \\ J^{(i)}(z) \end{pmatrix}, \quad W^{(i)}(z) = \begin{pmatrix} w^{(i)}(z) \\ -D_1^{(i)} w^{(i)}(z) \end{pmatrix},$$

$$K^{(i)}(z, z_i) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} mX_i(z, z_i) & -\frac{1}{m} \operatorname{sh} mX_i(z, z_i) \\ -m \operatorname{sh} m\tilde{X}_i(z, z_i) & \operatorname{ch} m\tilde{X}_i(z, z_i) \end{pmatrix},$$

где $w^{(i)}(z)$ — некоторое частное решение уравнения (3) для i -го слоя, элементы матрицы K выражены через функции обобщенных степеней, для которых выполняются следующие дифференциальные свойства:

$$\begin{aligned} D_1 \operatorname{ch} mX(z, z_1) &= m \operatorname{sh} m\tilde{X}(z, z_1), & D_2 \operatorname{ch} m\tilde{X}(z, z_1) &= m \operatorname{sh} mX(z, z_1), \\ D_1 \operatorname{sh} mX(z, z_1) &= m \operatorname{ch} m\tilde{X}(z, z_1), & D_2 \operatorname{sh} m\tilde{X}(z, z_1) &= m \operatorname{ch} mX(z, z_1), \\ D_2 D_1 \operatorname{ch} mX(z, z_1) &= m^2 \operatorname{ch} mX(z, z_1), & D_2 D_1 \operatorname{sh} mX(z, z_1) &= m^2 \operatorname{sh} mX(z, z_1). \end{aligned}$$

Для точек i -го слоя справедливо соотношение

$$V^{(i)}(z) = L^{(i,1)}(z, z_1)V^{(1)}(z_1) + \sum_{j=1}^i L^{(i,j)}(z, z_j) \left(W^{(j-1)}(z_j) - W^{(j)}(z_j) \right) + W^{(i)}(z), \quad (4)$$

где

$$W^{(0)}(z_1) = 0, \quad L^{(i,j)}(z, z_j) = K^{(i)}(z, z_i)K^{(i-1)}(z_i, z_{i-1}) \dots K^{(j)}(z_{j+1}, z_j), \quad i \geq j.$$

Формула (4) дает аналитическое решение задачи Коши для уравнения (3) при произвольном конечном числе слоев.

Обозначив общую матрицу всей системы слоев через

$$K^{(u)}(z_{n+1}) = L^{(n,1)}(z_{n+1}, z_1)$$

и вектор дополнительных потоков через

$$W^{(u)}(z_{n+1}) = \sum_{j=1}^n L^{(n,j)}(z_{n+1}, z_j) \left(W^{(j-1)}(z_j) - W^{(j)}(z_j) \right) + W^{(n)}(z_{n+1}),$$

получим для конечной точки системы слоев

$$V(z_{n+1}) = K^{(u)}(z_{n+1})V^{(1)}(z_1) + W^{(u)}(z_{n+1}). \quad (5)$$

Формула (5) связывает значения потенциала и потока в первой и последней точке системы слоев; таким образом, решение краевой задачи любого типа при любом конечном числе слоев сводится в общем случае к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Применяя данный метод для решения дифференциального уравнения (1), описывающего диффузию неравновесных ННЗ, генерированных широким электронным пучком в многослойной полупроводниковой мишени, получим, что $a_1^{(i)}(z)$ равно коэффициенту диффузии $D^{(i)}$ в i -м слое, а $a_2^{(i)}(z)$ равно времени жизни $\tau^{(i)}$ ННЗ в i -м слое, $m = 1$, а $\mu^{(i)}(z) = -\tau^{(i)}\rho^{(i)}(z)$, где $\rho^{(i)}(z)$ — плотность ННЗ, генерированных в полупроводнике в i -м слое. При постоянных коэффициентах уравнения на i -м слое матрица K принимает вид

$$K^{(i)}(z, z_i) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{z - z_i}{\sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}} & -\sqrt{\frac{\tau^{(i)}}{D^{(i)}}} \operatorname{sh} \frac{z - z_i}{\sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}} \\ -\sqrt{\frac{D^{(i)}}{\tau^{(i)}}} \operatorname{sh} \frac{z - z_i}{\sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}} & \operatorname{ch} \frac{z - z_i}{\sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}} \end{pmatrix}.$$

В [7] показано построение частного решения для уравнения диффузии ННЗ (1). В настоящих расчетах:

$$w^{(i)}(z) = K_1^{(i)} \exp\left(\frac{(z_{ms}^{(i)})^2}{4(L^{(i)})^2}\right) \left[\exp\left(\frac{z - z_{ms}^{(i)}}{L^{(i)}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{z_{ms}^{(i)}} - 1 + \frac{z_{ms}^{(i)}}{2L^{(i)}}\right) - \exp\left(-\frac{z - z_{ms}^{(i)}}{L^{(i)}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{z_{ms}^{(i)}} - 1 - \frac{z_{ms}^{(i)}}{2L^{(i)}}\right) \right] +$$

$$+ K_2^{(i)} \exp\left(\frac{(z_{ss}^{(i)})^2}{4(L^{(i)})^2}\right) \left[\exp\left(\frac{z - z_{ss}^{(i)}}{L^{(i)}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{z_{ss}^{(i)}} - 1 + \frac{z_{ss}^{(i)}}{2L^{(i)}}\right) - \exp\left(-\frac{z - z_{ss}^{(i)}}{L^{(i)}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{z_{ss}^{(i)}} - 1 - \frac{z_{ss}^{(i)}}{2L^{(i)}}\right) \right],$$

где

$$K_1^{(i)} = -\frac{1,085(1 - \eta^{(i)})E_0L^{(i)}}{4D^{(i)}\left(1 - \eta^{(i)} + \eta^{(i)}\frac{z_{ss}^{(i)}}{z_{ms}^{(i)}}\right)}, \quad K_2^{(i)} = -\frac{1,085z_{ss}^{(i)}E_0L^{(i)}\eta^{(i)}}{4D^{(i)}z_{ms}^{(i)}\left(1 - \eta^{(i)} + \eta^{(i)}\frac{z_{ss}^{(i)}}{z_{ms}^{(i)}}\right)}.$$

4. Разностная схема второго порядка аппроксимации исходной модели. В уравнении (1) вместо кусочно постоянных коэффициентов (электрофизических параметров мишени) используются их аппроксимации, основанные на использовании тригонометрических выражений в виде рекурсивных функций (см. [1]). Для ступенчатой функции

$$f(z) = \begin{cases} H, & z \in (z_2, z_3), \\ 0, & z \notin (z_2, z_3), \end{cases}$$

в качестве начальной функции выбирается функция в виде

$$f_1(z) = \exp(1 - (az + b)^2) - 1.$$

Из условия $f_1(z_2) = f_1(z_3) = 0$ находим

$$a = \frac{2}{z_2 - z_3}, \quad b = \frac{z_2 + z_3}{z_3 - z_2}.$$

При этих значениях коэффициентов a и b последовательность

$$\left\{ f_n(z) \mid f_n(z) = \frac{H}{2}(1 + \sin(\phi_n(z))), \quad \phi_n(z) = \frac{\pi}{2} \sin(\phi_{n-1}(z)), \quad \phi_1(z) = \frac{\pi}{2} f_1(z), \quad n - 1 \in \mathbb{N} \right\}$$

сходится к ступенчатой функции $f(z)$. Тогда, например, для трехслойной структуры ступенчатые функции $L(z)$ и $D(z)$ со значениями L_1, D_1 на промежутке $[0, z_1]$, L_2, D_2 на промежутке $[z_1, z_2]$ и L_3, D_3 на промежутке $[z_2, l]$ можно аппроксимировать суммой аналогичных последовательностей:

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^3 \{f_n(z)\}_i, \quad D_n(z) = \sum_{i=1}^3 \{f_n(z)\}_i.$$

Аппроксимации являются непрерывными, и потому на границе слоев они в большей степени, чем ступенчатые функции, соответствуют зависимости значений реальных электрофизических параметров от координаты. Погрешность аппроксимации не накапливается, что является положительной стороной предложенного метода (см. [1]).

Найдено численное решение задачи (1), (2) с использованием аппроксимации ступенчатыми функциями

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^m \{f_n(z)\}_i, \quad D_n(z) = \sum_{i=1}^m \{f_n(z)\}_i,$$

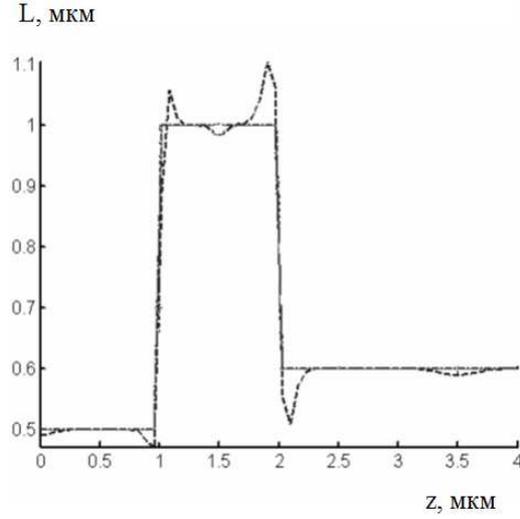


Рис. 1. Аппроксимация диффузионной длины ННЗ по глубине многослойной планарной полупроводниковой структуры, основанная на использовании тригонометрических выражений в виде четырех (штриховая линия) и десяти (штрих-пунктирная линия) рекурсивных функций

входящих в уравнение (1), и проведены практические расчеты распределений ННЗ, генерированных широким электронным пучком в трехслойном и четырехслойном полупроводниковом материале.

Для дифференциальной задачи (1), (2) с использованием аппроксимации ступенчатых функций построена разностная схема второго порядка аппроксимации на равномерной сетке $\bar{D}_h = \{z_i = ih, i = 0, \dots, N, h = l/N\}$:

$$\begin{aligned} \Delta p_{i-1} - \left(\frac{h^2}{L_{n_i}^2} + 1 + \frac{D_{n_{i+1}}}{D_{n_i}} \right) \Delta p_i + \frac{D_{n_{i+1}}}{D_{n_i}} \Delta p_{i+1} &= -\frac{h^2 \rho_i}{D_{n_i}}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ \left(1 + \frac{h^2}{2L_1^2} + \frac{S_1}{L_1} h \right) \Delta p_0 - \Delta p_1 &= \frac{\tau_1 h^2 \rho_0}{2L_1^2}, \quad \left(1 + \frac{h^2}{2L_n^2} + \frac{S_n}{L_n} h \right) \Delta p_N - \Delta p_{N-1} = \frac{\tau_n h^2 \rho_N}{2L_n^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь Δp_i — приближенное значение точного решения $\Delta p(z_i)$, $L_{n_i}^2 = L_n^2(z_i)$, $D_{n_i} = D_n(z_i)$, $\rho_i = \rho(z_i)$.

Решение системы (6) производилось методом прогонки.

5. Результаты расчетов. Расчеты проведены с помощью математических пакетов Matlab (MathWorks, Inc.) и Maple.

На рис. 1, 2(а) представлены результаты расчетов, проведенных для параметров, характерных для полупроводниковой структуры Si-Ge-Si. Используются следующие значения параметров: $L_1 = 0,5$ мкм, $\tau_1 = 5 \cdot 10^{-9}$ с, $S_1 = 50$ для первого материала; $L_2 = 1$ мкм, $\tau_2 = 10^{-8}$ с для второго материала; $L_3 = 0,6$ мкм, $\tau_3 = 3,6 \cdot 10^{-8}$ с, $S_3 = 50$ для третьего материала (подложки). Значение $z_1 = 1$ мкм, $z_2 = 2$ мкм. Энергия электронного пучка равна $E_0 = 20$ кэВ.

Оценка относительной погрешности по норме пространства C :

$$\Delta_1(\Delta p(z_i), \Delta p_i) = \frac{\|\Delta p(z_i) - \Delta p_i\|_C}{\|\Delta p(z_i)\|_C} \cdot 100\% \approx 2,32\%.$$

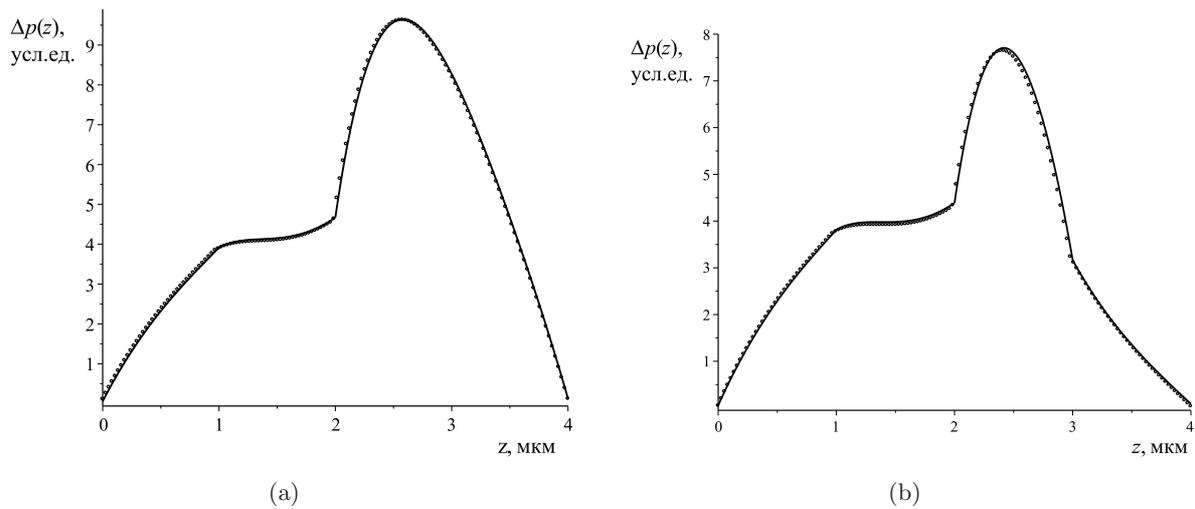


Рис. 2. Распределение ННЗ в полупроводниковой структуре Si-Ge-Si (рис. 2(a)) и Si-Ge-Si-Ge (рис. 2(b)). Сплошная линия — аналитическое решение уравнения (1), полученное матричным методом, кружки — численным методом

На рис. 2(b) представлены результаты расчетов, проведенных для параметров, характерных для полупроводниковой структуры Si-Ge-Si-Ge. Использованы следующие значения параметров: $L_1 = 0,5$ мкм, $\tau_1 = 5 \cdot 10^{-9}$ с, $S_1 = 50$ для первого материала; $L_2 = 1$ мкм, $\tau_2 = 10^{-8}$ с для второго материала; $L_3 = 0,6$ мкм, $\tau_3 = 3,6 \cdot 10^{-8}$ с для третьего материала; $L_4 = 0,8$ мкм, $\tau_4 = 2 \cdot 10^{-8}$ с, $S_4 = 50$ для четвертого материала (подложки). Значение $z_1 = 1$ мкм, $z_2 = 2$ мкм, $z_3 = 3$ мкм. Энергия электронного пучка равна $E_0 = 20$ кэВ.

Оценка относительной погрешности по норме пространства C :

$$\Delta_2(\Delta p(z_i), \Delta p_i) = \frac{\|\Delta p(z_i) - \Delta p_i\|_C}{\|\Delta p(z_i)\|_C} \cdot 100\% \approx 2,8\%.$$

Численное решение рассчитано на сетке из 150 ячеек с шагом $h = 0,0267$ мкм и с использованием десяти рекурсивных функций. Погрешность результатов является невысокой, что говорит о хорошей сходимости используемой аппроксимирующей процедуры.

Затраты машинного времени на расчет распределения ННЗ матричным методом составили около 2 с в программе Maple 18.00 (Windows 7, Service Pack 1, процессор Intel® Core™ i3-370M, 2,40 ГГц, оперативная память 4 Гб DDR3). Затраты на вычисление численным методом составили 8 с в системе MATLAB версии 7.5.0.342 на персональном компьютере со следующими характеристиками: процессор Intel Pentium E5400 (2 × 2,70 ГГц, 2 Мб cache), объем оперативной памяти 2 Гб, что говорит о вычислительной эффективности предложенного матричного метода для решения данного класса задач.

6. Заключение. В работе представлены некоторые возможности применения аналитического матричного метода для моделирования распределения ННЗ в трехслойном и четырехслойном полупроводниковом материале. Проведено сравнение результатов расчета матричным методом и методом конечных разностей. Показана эффективность матричного метода для решения стационарных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аллюков С. В. Аппроксимация ступенчатых функций в задачах математического моделирования // Мат. модел. — 2011. — 23, № 3. — С. 75–88.

2. *Амрастанов А. Н., Гинзгеймер С. А., Степович М. А., Филиппов М. Н.* Об одной возможности математического моделирования теплового воздействия остро сфокусированного электронного пучка на однородный полупроводник// Изв. РАН. Сер. физ. — 2016. — 80, № 10. — С. 1448–1452.
3. *Амрастанов А. Н., Кузин А. Ю., Митюхляев В. Б., Серегина Е. В., Степович М. А., Тодуа П. А., Филиппов М. Н.* Тепловое воздействие электронного зонда при рентгеноспектральном наноанализе// Измерит. техн. — 2017. — № 6. — С. 13–15.
4. *Белов А. А., Петров В. И., Степович М. А.* Использование модели независимых источников для расчета распределения неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале электронным пучком// Изв. РАН. Сер. физ. — 2002. — 66, № 9. — С. 1317–1322.
5. *Гладышев Ю. А.* Метод обобщенных степеней Берса и его приложение в математической физике. — Калуга: КГУ им. К. Э. Циолковского, 2011.
6. *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А.* О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерно-реакторные константы. — 2018. — № 3. — С. 158–167.
7. *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А.* Матричный метод моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале// Междунар. конф. «Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений». — Ростов-на-Дону, 2017. — С. 85–93.
8. *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А.* О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электромагнитным излучением, в планарной многослойной среде// XXIV Междунар. науч.-техн. конф. по фотоэлектронике и приборам ночного видения (Москва, НПО «Орион», 24–27 мая 2016). — М.: НПО «Орион», 2016. — С. 471–474.
9. *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А.* О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электронами в планарной многослойной среде// Поверхность. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2017. — № 10. — С. 105–110.
10. *Калманович В. В.* О построении решений задач теории переноса в многослойной среде при наличии распределенных источников// VIII Междунар. конф. «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (Воронеж, 2015). — Воронеж, 2015. — С. 166–169.
11. *Калманович В. В., Степович М. А.* О совместном применении матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники// в кн.: Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем./ под общ. ред. акад. РАН А. Л. Стемпковского. — М.: ИППМ РАН, 2018. — С. 194–201.
12. *Макаренков А. М., Серегина Е. В., Степович М. А.* Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — 57, № 5. — С. 801–813.
13. *Михеев Н. Н., Петров В. И., Степович М. А.* Количественный анализ материалов полупроводниковой оптоэлектроники методами растровой электронной микроскопии// Изв. РАН. Сер. физ. — 1991. — 55, № 8. — С. 1474–1482.
14. *Михеев Н. Н., Степович М. А.* Распределение энергетических потерь при взаимодействии электронного зонда с веществом// Завод. лаб. Диагн. мат. — 1996. — 62, № 4. — С. 20–25.
15. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
16. *Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М.* Анализ трехмерной модели диффузии неосновных носителей заряда, генерированных электронным зондом в однородном полупроводниковом материале, с использованием проекционных методов// Поверхность. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2018. — № 1. — С. 93–100.
17. *Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М., Филиппов М. Н.* О возможности использования проекционного метода Галеркина для моделирования пространственного распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным зондом в полупроводнике// Поверхность. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2017. — № 9. — С. 91–97.
18. *Снопова М. Г., Бурьлова И. В., Петров В. И., Степович М. А.* Анализ модели распределений неосновных носителей заряда, генерированных в трехслойной полупроводниковой структуре широким электронным пучком// Поверхность. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2007. — № 7. — С. 1–6.

19. *Степович М. А., Снопова М. Г., Хохлов А. Г.* Использование модели независимых источников для расчета распределения неосновных носителей заряда, генерированных в двухслойном полупроводнике электронным пучком// Прикл. физ. — 2004. — № 3. — С. 61–65.
20. *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1944. — 56. — P. 67–93.
21. *Burylova I. V., Petrov V. I., Snopova M. G., Stepovich M. A.* Mathematical simulation of distribution of minority charge carriers, generated in multy-layer semiconducting structure by a wide electron beam// Физ. техн. полупровод. — 2007. — 41, № 4. — P. 458–461.
22. *Stepovich M. A., Amrastanov A. N., Seregina E. V., Filippov M. N.* On one peculiarity of the model describing the interaction of the electron beam with the semiconductor surface// J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — 955. — 012040.
23. *Stepovich M. A., Khokhlov A. G., Snopova M. G.* Model of independent sources used for calculation of distribution of minority charge carriers generated in two-layer semiconductor by electron beam// Proc. SPIE. — 2004. — 5398. — P. 159–165.

Серегина Елена Владимировна

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), Калужский филиал

E-mail: evfs@yandex.ru

Калманович Вероника Валерьевна

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: v572264@yandex.ru

Степович Михаил Адольфович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: m.stepovich@rambler.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 113–118
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-113-118

УДК 517.95

АНАЛИЗ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОСОБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КАПИЛЛЯРНОСТИ

© 2019 г. Л. В. СТЕНЮХИН

Аннотация. Исследуется существование решений капиллярного уравнения при воздействии внешнего потенциала, приводящего к перестройкам поверхности.

Ключевые слова: задача капиллярности, число Бонда, бифуркация, особое решение.

ANALYSIS OF THE EXISTENCE OF SPECIAL SOLUTIONS TO THE CAPILLARITY PROBLEM

© 2019 L. V. STENYUKHIN

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of the existence of solutions of the capillary equation under the influence of an external potential leading to surface surgery.

Keywords and phrases: capillarity problem, Bond number, bifurcation, special solution.

AMS Subject Classification: 35R01

1. Постановка задачи и комментарии к предмету исследования. Равновесные устойчивые и неустойчивые формы капель и капиллярных трубок исследовались в [2, 6, 7, 9, 10]. Функции, задающие эти формы, являются решениями уравнения капиллярности и обычно ищутся итерационными методами в виде рядов. Однако если размеры форм достаточно большие либо фирмы подвергаются воздействию потенциала, то нарушается сходимост ь итераций или полученные решения начинают противоречить физическим экспериментам (см. [9]). Разрешимость уравнения капиллярности в классах обобщенных функций была доказана Н. Н. Уральцевой (см. [8]).

Капиллярное уравнение возникает из вариационного принципа минимизации энергетического функционала, состоящего из энергии поверхностного натяжения, потенциальной энергии силы тяжести и энергии объемных связей. Энергия поверхностного натяжения определяется функционалом площади, исследованию которого посвящены работы [1, 2, 7]. Экстремали функционала площади определяют минимизацию энергии поверхностного натяжения.

Настоящая работа посвящена исследованию существования решений капиллярного уравнения при воздействии внешнего потенциала, приводящего к перестройкам поверхности. Вариационный принцип в банаховых и гильбертовых пространствах и операторный подход (см. [3, 4]) позволяют находить такие решения, критические значения параметров и соответствующие формы капель и трубок.

Рассмотрим связную каплю жидкости заданного объема V , лежащую на горизонтальной плоскости Π в поле силы тяжести, направленном вертикально вниз. Предположим, что материал жидкости однороден, так что угол контакта жидкости с плоскостью γ постоянен, $0 \leq \gamma \leq \pi$. Как показано в [10], при этих условиях равновесная поверхность будет поверхностью вращения с осью перпендикулярной плоскости Π .

Задача о малой капле, лежащей на поверхности, является следствием минимизации следующих энергий:

- (1) энергии поверхностного натяжения;
- (2) потенциальной энергии силы тяжести;
- (3) энергии объемных связей (постоянства объема V).

Полная энергия определяется функционалом

$$E(u) = \int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx + \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} \Upsilon \rho u dx + \lambda \int_{\Omega} u dx,$$

где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, σ — поверхностное натяжение, Υ — потенциальная энергия на единицу массы, ρ — плотность, λ — множитель Лагранжа, отвечающий за объем.

В точках верхней части свободной поверхности P капли высота $u(x, y)$ поверхности P над Π удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} Tu = \chi u + \lambda, \quad (1)$$

где

$$Tu = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \nabla u, \quad \nabla u = (u_x, u_y),$$

$\chi = \rho g / \sigma$. Для нижней части свободной поверхности знак $\operatorname{div} Tu$ надо изменить на противоположный. Граничное условие задачи с постоянным углом контакта γ имеет вид

$$\mathbf{n} Tu = \cos \gamma, \quad (2)$$

\mathbf{n} — единичная нормаль.

Замена $u = -v - (1/\chi)\lambda$ переводит уравнение (1) в уравнение

$$\operatorname{div} Tv = \chi v, \quad (3)$$

которое является уравнением свободной поверхности в капиллярной трубке. Каждому уравнению (1) с высотой капли в центре u_0 соответствует решение уравнения (3) с высотой подъема жидкости в центре $v_0 = -(u_0 + \lambda/\chi)$. В [9] показано, что симметричные решения уравнения (3) однозначно определяются высотой подъема жидкости в центре. Поэтому каждой симметрично лежащей капле отвечает единственная капиллярная поверхность, которая (локально) геометрически конгруэнтна границе капли. Обратно, каждой симметричной капиллярной поверхности соответствует лежащая капля, определенная с точностью до аддитивной константы.

Множество всех симметричных капиллярных поверхностей является однопараметрическим семейством с параметром центральной высоты u_0 поверхности. Из принципа соответствия вытекает, что множество всех симметрично лежащих капель может быть описано с помощью однопараметрического семейства кривых.

С учетом вышеизложенного, уравнение (1) можно записать в безразмерной форме

$$\operatorname{div} Tu = Bu, \quad (4)$$

B — число Бонда, характеризующее размер конфигурации: $B = \rho g a^2 / \sigma$. Граничное условие (2) сохраняется.

2. Частные случаи существования особых решений. В [9] показано, что для симметрично лежащей капли, $0 < \gamma < \pi/2$ и малого числа Бонда B уравнение (4) можно записать в виде

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = Bu - 2 \sin \gamma_0. \quad (5)$$

Решение ищется на круге Ω , $u = 0$ на $\partial\Omega$, и капля постоянного объема V_0 . Если капля подвергается воздействию внешнего потенциала φ , то

$$V_0 = \frac{\pi(2 + \cos \gamma_0)(1 - \cos \gamma_0)^2}{3 \sin^3 \gamma_0}, \quad (6)$$

$$\cos \gamma_0 = \cos \gamma + \frac{\varphi}{\sigma}. \quad (7)$$

Потенциал φ может быть, например, температурой вещества капли или давлением, действующим изнутри капли, либо температурой и давлением одновременно. Действие потенциала приводит к изменению формы капли, в частности, к изменению угла контакта с плоскостью Π (см. (7)). При этом γ_0 является единственным решением уравнения (6). Дальнейшее воздействие потенциала φ приведет к изменению числа Бонда B и к перестройке (бифуркации) самой капли.

Для описания дальнейших состояний капли положим $B = 0$ в уравнении (5).

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях и $B = 0$ существует точное решение уравнения (5):*

$$u_0 = \frac{-\cos \gamma_0 + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma_0}}{\sin \gamma_0}. \quad (8)$$

Решение (8) проверяется непосредственной проверкой. Это решение послужит отправной точкой для отыскания дальнейших состояний капли, подверженной воздействию потенциала φ .

Для ненулевых чисел B положим, что решение уравнения (5) примет вид

$$u = \frac{-\cos \gamma_0 + \sqrt{1 - (r - r_0)^2 \sin^2 \gamma_0}}{\sin \gamma_0}, \quad (9)$$

r_0 — радиус кольца по центру, $|r - r_0| \leq 1$.

Непосредственным вычислением получим, что функция (9) является точным решением уравнения

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \frac{r_0 \sin \gamma_0}{r} - 2 \sin \gamma_0 \quad (10)$$

с нулевым граничным условием.

Найдем условия, при которых задача (10) эквивалентна задаче (5). Для этого положим

$$Bu = \frac{r_0 \sin \gamma_0}{r},$$

т.е.

$$\frac{-\cos \gamma_0 + \sqrt{1 - (r - r_0)^2 \sin^2 \gamma_0}}{\sin \gamma_0} = \frac{r_0 \sin \gamma_0}{Br}.$$

Последнее уравнение преобразуется к виду

$$\left(1 + \frac{\sin^2 \gamma_0}{B^2 r^2}\right) r_0^2 - 2 \left(r - \frac{\cos \gamma_0}{Br}\right) r_0 + r^2 - 1 = 0. \quad (11)$$

Разрешим уравнение (11) относительно r_0 , как гарант кольцеобразного состояния:

$$D_1 = \left(\frac{\cos \gamma_0}{B} - 1\right)^2 + \frac{1 - r^2}{B^2 r^2}. \quad (12)$$

В решении (8) безразмерного уравнения (5) полярная координата r меняется в пределах $0 \leq r \leq 1$; значит, с увеличением потенциала φ у деформированной капли значение $r = 1$ тоже существует. Равенство нулю выражения (12) для $r = 1$ порождает условие

$$B = \cos \gamma_0. \quad (13)$$

Таким образом, получается следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнено условие (13), то существует точное аналитическое решение задачи (5) типа (9) с граничным условием (2).*

3. Редукция задачи из функционала площади. Рассмотрим основной энергетический функционал задачи

$$E(u) = \int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx + \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} \Upsilon \rho u dx + \lambda \int_{\Omega} u dx. \quad (14)$$

Его первое слагаемое является функционалом площади. Пусть u_0 — экстремаль функционала (14). Близкие к u_0 поверхности будем задавать в системе координат нормального расслоения к u_0 . Это приведет к одному скалярному уравнению для близкой поверхности:

$$\left(\frac{\delta S}{\delta u}(u_0 + \eta \bar{n}), \bar{n} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\delta S}{\delta \eta}(\eta) = 0, \quad (15)$$

где $\delta S/\delta u$ — функциональная производная функционала площади, \bar{n} — нормаль к поверхности u_0 . Из уравнения (15) определяется нормальная координата $\eta = \eta(x, y)$.

Теорема 3. Функционал площади близких к u_0 поверхностей $S(\eta)$ и его оператор Эйлера $\delta S/\delta \eta(\eta)$ имеет следующую аналитическую структуру:

$$S(u) = \int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx dy,$$

$$\frac{\delta S}{\delta u}(\eta) = E^3(EG - F^2)^{-3/2} (A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G).$$

Здесь E, G, F — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности,

$$A = \sum_{p=1}^6 a_{ijk} \eta_x^i \eta_x^j \eta^k + 1, \quad B = \sum_{p=1}^6 b_{ijk} \eta_x^i \eta_y^j \eta^k, \quad C = \sum_{p=1}^6 c_{ijk} \eta_y^i \eta_y^j \eta^k + 1,$$

$$G = \sum_{p=2}^7 g_{ijk} \eta_x^i \eta_y^j \eta^k + g\eta,$$

где i, j, k — целые неотрицательные числа, $p = i + j + k$. Все коэффициенты $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, g_{ijk}, g$ являются аналитическими функциями и находятся по формулам, подобным следующей:

$$g = (\bar{n}, \bar{n}_{xx} + \bar{n}_{yy}) + \frac{4}{E} \left[(\bar{n}, u_{xx})^2 + (\bar{n}, u_{yy})^2 \right]. \quad (16)$$

Линейная часть оператора $A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G$ равна $\Delta\eta + g\eta$, где Δ — лапласиан. Первая вариация функционала энергии (14) равна

$$\frac{\delta E}{\delta \eta}(\eta) = \frac{\delta S}{\delta \eta}(\eta) + \left(\frac{\Upsilon \rho}{\sigma} + \lambda \right) \eta = E^3(EG - F^2)^{-3/2} (A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G) + \left(\frac{\Upsilon \rho}{\sigma} + \lambda \right) \eta.$$

Линейная часть первой вариации равна

$$L\eta = E^3(EG - F^2)^{-3/2} (\Delta\eta + g\eta) + \left(\frac{\Upsilon \rho}{\sigma} + \lambda \right) \eta,$$

где величина g определена равенством (16). Выражение $\Upsilon \rho/\sigma$ определяет число Бонда, $B = \Upsilon \rho/\sigma$. Поэтому линеаризованная задача имеет вид

$$\Delta\eta + \left(g + E^{-3}(EG - F^2)^{3/2}(B + \lambda) \right) \eta = 0, \quad \eta|_{\partial\Omega} = 0. \quad (17)$$

Линейный оператор (17) действует из $W_2^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и самосопряжен в $\dot{W}_2^2(\Omega)$ относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$.

Приведем пример из п. 2. Функция (8) является решением задачи (5)–(7) при нулевых чисел Бонда. Задача (17) в данном случае имеет вид

$$\Delta\eta = \left(\frac{\sqrt{(1 - (x^2 + y^2) \sin^2 \gamma_0)^3}}{(1 - y^2 \sin^2 \gamma_0)^3} B - g \right) \eta + \left(\frac{\sqrt{(1 - (x^2 + y^2) \sin^2 \gamma_0)^3}}{(1 - y^2 \sin^2 \gamma_0)^3} \right) \lambda \eta, \quad (18)$$

где

$$g = \frac{\sin^4 \gamma_0 \left(3x^2 + 3y^2 - 3x^2 y^2 \sin^2 \gamma_0 + 3x^3 y \sin^2 \gamma_0 + y(x + y)(1 - (x^2 + y^2) \sin^2 \gamma_0) \right)}{(1 - (x^2 + y^2) \sin^2 \gamma_0)^5} + \frac{4 \sin^2 \gamma_0 (1 + (1 - (x^2 + y^2) \sin^2 \gamma_0)^2)}{(1 - y^2 \sin^2 \gamma_0)(1 - (x^2 + y^2) \sin^2 \gamma_0)^2},$$

и $\eta|_{\partial\Omega} = 0$. Здесь Ω — единичный двумерный диск.

На малом диске $\Omega_\varepsilon = \{x^2 + y^2 \leq \varepsilon\}$ около центра области Ω имеем $g = 8 \sin^2 \gamma_0 + o(x, y)$, и задача (18) соответствует задаче

$$\Delta\eta = (B - 8 \sin^2 \gamma_0 + \lambda)\eta, \quad \eta|_{\partial\Omega_\varepsilon} = 0.$$

В результате получается следующая теорема.

Теорема 4. Если $B - 8 \sin^2 \gamma_0 = \mu_n$, μ_n — собственное значение лапласиана Δ на области Ω_ε , то капиллярная поверхность вблизи начала координат задается функцией

$$u_n = u_0 + \varepsilon \eta_n,$$

где u_0 — функция (8), η_n — собственная функция, отвечающая собственному значению μ_n .

4. Задача капиллярности в конформных координатах. Пусть поверхность капли $u(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y))$ задана в конформных координатах, $E = G$, $F = 0$. Тогда функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям $u_x^2 = u_y^2$, $u_x u_y = 0$. В этом случае функционал энергии имеет вид

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{E + G}{2} dx + \int_{\Omega} B u dx + \lambda \int_{\Omega} u dx.$$

Первая вариация функционала равна

$$\frac{\delta E}{\delta u}(\eta) = \Delta\eta + (B + \lambda)\eta.$$

Получаем задачу

$$\Delta\eta + (B + \lambda)\eta = 0, \quad \eta|_{\partial\Omega} = 0. \quad (19)$$

Теорема 5. Собственные значения оператора $\Delta + B + \lambda$ задачи (19) равны $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n + B + \lambda$, где λ_n — собственные значения оператора Δ с нулевым граничным условием.

Таким образом, переход к конформным координатам упрощает нахождение спектра и собственных функций оператора капиллярности. Поверхность (8) стереографически спроектируем на \mathbb{R}^2 . Пусть $\tilde{u}_0(r)$ — соответствующая функция после проектирования,

$$\tilde{u}_0(r) = \frac{u_0(0)r}{u_0(0) - u_0(r)}, \quad u_0(r) = \frac{-\cos \gamma_0 + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma_0}}{\sin \gamma_0},$$

$\tilde{\eta}_n$ — собственные функции для $\tilde{\lambda}_n$ оператора задачи (19). Тогда возмущения вида $\tilde{u}_n(r) = \tilde{u}_0(r) + \varepsilon \tilde{\eta}_n(r)$ порождают совокупность капиллярных поверхностей

$$u_n(r) = u_0(0) \frac{\tilde{u}_n(r) - r}{\tilde{u}_n(r)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисович А. Ю.* Оператор Плато и бифуркации двумерных минимальных поверхностей// в кн.: Глобальный анализ и математическая физика. — Воронеж, 1987. — С. 142–155.
2. *Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т.* Минимальные поверхности и проблема Плато. — М.: Наука, 1987.
3. *Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Царев С. Л.* Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Совр. мат. Фундам. направл. — 2004. — 12. — С. 3–140.
4. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1987.
5. *Стенюхин Л. В.* О минимальных поверхностях с ограничениями типа неравенств// Изв. вузов. Мат. — 2012. — 11. — С. 51–59.
6. *Стенюхин Л. В.* Об особых решениях задачи капиллярности с круговой симметрией// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2013. — 2. — С. 242–245.
7. *Стенюхин Л. В.* Бифуркационный анализ задачи капиллярности с круговой симметрией// Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. модел. програм. — 2014. — 7, № 2. — С. 77–83.
8. *Уральцева Н. Н.* Решение задачи капиллярности// Вестн. ЛГУ — 1973. — 19. — С. 54–64.
9. *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. — М.: Мир, 1989.
10. *Wente H. C.* The symmetry of sessile and pendent drops// Pac. J. Math. — 1980. — 88, № 2. — P. 387–397.

Стенюхин Леонид Витальевич
Воронежский государственный университет
E-mail: stenyuhin@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 119–133
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-119-133

УДК 517.95, 517.984

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

© 2019 г. В. В. КОРНЕВ, А. П. ХРОМОВ

Аннотация. При помощи метода Фурье найдены необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом и закрепленными концами и получено явное представление решения в виде быстро сходящегося ряда.

Ключевые слова: смешанная задача, волновое уравнение, суммируемый потенциал, метод Фурье.

CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR A HOMOGENEOUS WAVE EQUATION WITH FIXED ENDPOINTS

© 2019 V. V. KORNEV, A. P. KHROMOV

ABSTRACT. Using the Fourier method, we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of the mixed problem for a homogeneous wave equation with summable potential and fixed endpoints and also obtain an explicit representation of the solution in the form of a rapidly converging series.

Keywords and phrases: mixed task, wave equation, summable potential, Fourier method.

AMS Subject Classification: 34B45, 35L05

В статье будет рассмотрена следующая задача:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Считаем, что $q(x)$, $\varphi(x)$ — комплекснозначные функции, причем $q(x) \in L[0, 1]$. В [1] получены условия на $\varphi(x)$, достаточные для существования классического решения по методу Фурье задачи (1)–(3) (уравнение (1) удовлетворяется почти всюду). Эти условия таковы: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и

$$L\varphi = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) \in L_p[0, 1], \quad p > 1. \quad (4)$$

Эти условия, кроме условия (4), являются необходимыми для классического решения. В этой статье мы убираем условие (4). Тем самым получаем необходимые и достаточные условия для

существования классического решения задачи (1)–(3). Настоящая работа является развитием направления, содержащегося в [2–4].

1. Единственность классического решения. В этом разделе рассмотрим вопрос о единственности решения для более общего случая. Именно, займемся следующей задачей:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad (7)$$

где все функции, входящие в (5)–(7), комплекснозначные, причем $q(x) \in L[0, 1]$, $f(x, t) \in L(Q_T)$ при любых $T > 0$; здесь $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$.

Под классическим решением понимаем функцию $u(x, t)$, непрерывную вместе с $u'_x(x, t)$ и $u'_t(x, t)$, причем $u'_x(x, t)$ и $u'_t(x, t)$ абсолютно непрерывны по x (по t), удовлетворяющую условиям (6), (7) и почти всюду по x и t уравнению (5). Поэтому в случае классического решения необходимо считать, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ и $\psi(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $\varphi''(x) \in L[0, 1]$, $\psi'(x) \in L[0, 1]$.

Теорема 1. Если $u(x, t)$ классическое решение задачи (5)–(7), причем дополнительно $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2 \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, то оно единственно и находится по формуле

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left[(R_\lambda \varphi) \cos \rho t + (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} + \int_0^t R_\lambda(f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right] d\lambda, \quad (8)$$

в которой ряд справа при любом фиксированном $t \geq 0$ сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$.

Здесь $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора $L: Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y(0) = y(1) = 0$ (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор). $R_\lambda(f(\cdot, \tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x, \tau)$ по x , $\lambda = \rho^2$, $\Re \rho \geq 0$, γ_n — образ в λ -плоскости окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ достаточно мало, r достаточно велико и фиксировано, n_0 — такой номер, что при $n \geq n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L и все γ_n при $n \geq n_0$ находятся вне окружности $|\lambda| = r$.

Доказательство теоремы 1. При фиксированном t $u(x, t)$ как функция x принадлежит области определения оператора L . Поэтому по теореме о разложении по собственным и присоединенным функциям оператора L имеем

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) R_\lambda(u(\cdot, t)) d\lambda, \quad (9)$$

и ряд (9) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$. Положим $R_\lambda u(\cdot, t) = y(x, t, \lambda)$. Тогда

$$Ly = LR_\lambda u = (L - \lambda E + \lambda E)R_\lambda u = u(x, t) + \lambda R_\lambda u = u(x, t) + \lambda y(x, t, \lambda).$$

Привлекая функцию Грина (ядро интегрального оператора R_λ), находим

$$y(x, t, \lambda) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u(\xi, t) d\xi \implies y'_t(x, t, \lambda) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u'_t(\xi, t) d\xi. \quad (10)$$

Поскольку $u(x, t)$ есть классическое решение задачи (5)–(7), то

$$R_\lambda u''_{tt} = -R_\lambda(Lu) + R_\lambda f(\cdot, t). \quad (11)$$

Из (10) получаем

$$y'_t(x, t, \lambda) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u'_t(\xi, 0) d\xi + \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) d\xi \int_0^t u''_{tt}(\xi, \tau) d\tau.$$

Но $G(x, \xi, \lambda) u''_{tt}(\xi, \tau) \in L[Q_T]$ по переменным ξ и τ ; поэтому согласно теореме Фубини имеем

$$\int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u''_{tt}(\xi, \tau) d\xi \in L[0, T]$$

по τ . Значит,

$$y'_t(x, t, \lambda) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u'_t(\xi, 0) d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u''_{tt}(\xi, \tau) d\xi.$$

Отсюда следует, что $y'_t(x, t, \lambda)$ абсолютно непрерывна по t и

$$y''_{tt}(x, t, \lambda) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u''_{tt}(\xi, t) d\xi$$

почти при всех t . Из этой формулы в силу (11) имеем

$$y''_{tt}(x, t, \lambda) = R_\lambda u''_{tt} = R_\lambda(-Lu + f).$$

Но $R_\lambda(L - \lambda E + \lambda E)u = u(x, t) + \lambda R_\lambda u = u(x, t) + \lambda y(x, t, \lambda)$; следовательно,

$$y''_{tt}(x, t, \lambda) = -u(x, t) - \lambda y(x, t, \lambda) + R_\lambda f(\cdot, t),$$

или

$$y''_{tt}(x, t, \lambda) + \lambda y(x, t, \lambda) = -u(x, t) + R_\lambda f(\cdot, t). \quad (12)$$

Кроме того,

$$y(x, 0, \lambda) = R_\lambda \varphi, \quad y'_t(x, 0) = R_\lambda \psi. \quad (13)$$

Из общего решения уравнение (12) при начальных условиях из (13) получаем

$$y(x, t, \lambda) = (R_\lambda \varphi) \cos \rho t + (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} + \int_0^t \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} [-u(x, \tau) + R_\lambda f(\cdot, \tau)] d\tau.$$

Теперь, в силу того факта, что

$$\int_0^t \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} u(x, \tau) d\tau$$

является целой функцией по λ , из (9) получаем (8). \square

Формула (8) является формулой формального решения задачи (5)–(7) по методу Фурье (схожие с (8) формулы имеются в [5]– [6]).

2. Преобразование формального решения по методу Фурье. Рассмотрим сначала следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad (14)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (15)$$

$$u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0. \quad (16)$$

Теорема 2. Если $f(x, t) \in L[Q_T]$, то ряд (8) формального решения задачи (14)–(16) по методу Фурье сходится при всех x и t , и его сумма есть

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta, \quad (17)$$

где функция $\tilde{f}(\eta, \tau)$ нечетна и 2-периодична по η , причем $\tilde{f}(\eta, \tau) = f(\eta, \tau)$ при $\eta \in [0, 1]$.

Эта теорема доказана в [7] для $f(x, t) \in L_2[Q_T]$ и в [8] для $f(x, t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$.

Замечание 1. Правая часть (17) имеет смысл при всех $x, t \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty]$.

Пусть $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(3) с условием $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2 \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$. Тогда $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. По теореме 1 имеет место формула

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda, \quad (18)$$

и ряд (18) при каждом $t \geq 0$ сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$. Представим ряд (18) в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t), \quad (19)$$

где $u_0(x, t)$ — ряд (18), в котором R_λ заменено на R_λ° , $u_1(x, t)$ — ряд (18), в котором R_λ заменено на $R_\lambda - R_\lambda^\circ$, $R_\lambda^\circ = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ и L_0 равно L при $q(x) = 0$.

Лемма 1. Сумма ряда $u_0(x, t)$ равна $a_0(x, t)$, где $a_0(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)]$, где $\tilde{\varphi}(x)$ нечетна и 2-периодична по $x \in (-\infty, +\infty)$ и $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0, 1]$. Ряд $u_1(x, t)$ сходится при каждом t абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$.

Доказательство. По теореме вычетов ряд $u_0(x, t)$ есть

$$u_0(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \cos n\pi t,$$

где $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Отсюда следует, что

$$u_0(x, t) = \sum_+ + \sum_-, \quad \text{где} \quad \sum_{\pm} = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi(x \pm t).$$

Поскольку $u(x, t)$ — классическое решение, в силу необходимых условий на $\varphi(x)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x$$

сходится абсолютно и равномерно по x на всей оси, и его сумма есть $\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x)$. Значит,

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)].$$

Наконец, из теоремы 1 и полученной сходимости ряда $u_0(x, t)$ следует утверждение леммы для ряда $u_1(x, t)$. Лемма доказана. \square

Лемма 2. Функция $a_0(x, t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по $x, t \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty]$, функция $a'_{0x}(x, t)$ ($a'_{0t}(x, t)$) абсолютно непрерывна по x (соответственно, по t),

$$\frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial x^2} \quad (20)$$

почти всюду по x и по t и выполняются условия

$$a_0(0, t) = a_0(1, t) = 0, \quad (21)$$

$$a_0(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad a'_{0t}(x, 0) = 0. \quad (22)$$

Доказательство. Непрерывность $a_0(x, t)$ по x и t следует из доказательства леммы 1. Рассмотрим $\tilde{\varphi}'(x)$. Очевидно, что $\tilde{\varphi}'(x)$ непрерывна всюду, кроме, быть может, $x = n$ при целом n . Далее, из равенства $\tilde{\varphi}'(-x) = \tilde{\varphi}'(x)$ следует $\tilde{\varphi}'(-0) = \tilde{\varphi}'(+0)$, т.е. $\tilde{\varphi}'(x)$ непрерывна в нуле и, следовательно, во всех точках $x = n$ при четном n . Наконец, из равенств

$$\tilde{\varphi}'(-1+0) = \tilde{\varphi}'(-1-0) = \tilde{\varphi}'(1-0) = \tilde{\varphi}'(-1+0) = \tilde{\varphi}'(1+0)$$

следует, что $\tilde{\varphi}'(x)$ непрерывна в точке $x = 1$ и, следовательно, во всех точках $x = n$ при нечетном n . Значит, $\tilde{\varphi}'(x) \in C(-\infty, \infty)$; так как эта функция абсолютно непрерывна при $x \in [0, 1]$, то $\tilde{\varphi}'(x)$ абсолютно непрерывна при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Значит, почти при всех x и t выполняется (20). Проверим выполнение (21)–(22). Имеем

$$a_0(1, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(1+t) + \tilde{\varphi}(1-t)] = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(1+t) + \tilde{\varphi}(-1-t)] = 0,$$

т.е. верно (21). Проверим (22). Очевидно, имеем $a_0(x, 0) = \tilde{\varphi}(x)$. Из соотношения

$$a'_{0t}(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}'(x+t) - \tilde{\varphi}'(x-t)]$$

получаем $a'_{0t}(x, 0) = 0$. Лемма доказана. \square

Следствие. При $x \in [0, 1]$ функция $a_0(x, t)$ является классическим решением задачи (1)–(3) при $q(x) = 0$ с условием единственности

$$\frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial t^2} \in L[Q_T].$$

Приступаем к исследованию ряда $u_1(x, t)$. В силу леммы 2 его сумма (для которой сохраняем обозначение $u_1(x, t)$) является классическим решением задачи

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x, t) + f_0(x, t), \quad (23)$$

$$u_1(0, t) = u_1(1, t) = 0, \quad (24)$$

$$u_1(x, 0) = u'_{1t}(x, 0) = 0, \quad (25)$$

где $f_0(x, t) = -q(x)a_0(x, t)$, с условием единственности. Поэтому согласно теореме 1 функция $u_1(x, t)$ является суммой ряда своего формального решения, которое по формуле (8) есть

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \int_0^t R_\lambda(f_0(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau d\lambda. \quad (26)$$

По аналогии с (19) представим (26) в виде

$$u_1(x, t) = u_{10}(x, t) + u_2(x, t).$$

Здесь $u_{10}(x, t)$ — функция (26), где вместо R_λ берется R_λ° . Так как $u_{10}(x, t)$ — сумма формального решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{10}(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{10}(x, t)}{\partial x^2} + f_0(x, t)$$

с условиями (24)–(25), где вместо $u_1(x, t)$ берем $u_{10}(x, t)$, то по теореме 2

$$u_{10}(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_0(\eta, \tau) d\eta, \quad (27)$$

Обозначим через $\tilde{q}(x)$ четное 2-периодическое продолжение функции $q(x)$ с промежутка $x \in [0, 1]$ на всю ось. Тогда очевидно, что $\tilde{f}_0(\eta, \tau) = -\tilde{q}(\eta)a_0(\eta, \tau)$.

Обозначим через Π множество всех нечетных и 2-периодических по x функций $f(x, t)$ на всей оси (t — параметр). Таким образом, Π является образом линейной операции $\tilde{f}(x, t)$ продолжения $f(x, t)$ по x с отрезка $[0, 1]$ на всю ось. Легко видеть, что если $f(x, t) \in \Pi$, то и

$$\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\eta, \tau) d\eta \in \Pi.$$

Очевидно, также, что если $f(x, t) \in \Pi$, то и $\tilde{q}(x)f(x, t) \in \Pi$. В дальнейшем будем опускать знак \sim у $\tilde{q}(x)$, т.е. теперь $q(x)$ задана на оси, четна и 2-периодична. Таким образом, имеем $\tilde{f}_0(\eta, \tau) = -q(\eta)a_0(\eta, \tau)$.

Так как правая часть (27) определена при всех $x, t \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty]$, то ее будем обозначать теперь $a_1(x, t)$, т.е. $a_1(x, t)$ — нечетное 2-периодическое продолжение $u_{10}(x, t)$ по x на всю ось x .

Займемся теперь $a_1(x, t)$. Непрерывность $a_1(x, t)$ по x и t следует из (27) и того факта, что $\tilde{f}_0(x, t)$ суммируема по x и t в любой ограниченной области (в дальнейшем $\tilde{f}_0(x, t)$ будет обозначать через $f_0(x, t)$; это же будет относиться и к другим подобным функциям). Далее, из-за нечетности и 2-периодичности $f_0(x, t)$ по x имеем

$$\int_{-t+\tau}^{t-\tau} f_0(\eta, \tau) d\eta = \int_{1-t+\tau}^{1+(t-\tau)} f_0(\eta, \tau) d\eta = \int_{-(t-\tau)}^{t-\tau} f_0(1+\xi, \tau) d\xi = 0.$$

Поэтому $a_1(0, t) = a_1(1, t) = 0$. Очевидно еще, что $a_1(x, 0) = 0$.

Лемма 3. *Функция $a_1(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x и t , причем*

$$\frac{\partial a_1(x, t)}{\partial t} = J_{11}(x, t) + J_{21}(x, t), \quad (28)$$

$$\frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} = J_{11}(x, t) - J_{21}(x, t), \quad (29)$$

где

$$J_{11}(x, t) = \frac{1}{2} \int_x^{x+t} f_0(\xi, x+t-\xi) d\xi, \quad J_{21}(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^x f_0(\xi, \xi-x+t) d\xi$$

и $J_{11}(x, t), J_{21}(x, t)$ непрерывны по x и t .

Доказательство. Докажем, что $a_1(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t . Сначала предположим, что $q(\eta)$ непрерывна. Тогда очевидно, что $a_1(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t и

$$\frac{\partial a_1(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^t [f_0(x+t-\tau, \tau) + f_0(x-t+\tau, \tau)] d\tau = J_{11}(x, t) + J_{21}(x, t).$$

Пусть теперь $q(x) \in L[0, 1]$. Тогда очевидно, что $J_{11}(x, t)$ и $J_{21}(x, t)$ непрерывны по x и t . Используя теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t [J_{11}(x, \tau) + J_{21}(x, \tau)] d\tau &= \int_0^t d\tau \int_{\tau}^0 f_0(x+\tau-\eta, \eta) (-d\eta) + \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} f_0(\eta+x-\tau, \eta) d\eta = \\ &= \int_0^t d\eta \int_{\eta}^t f_0(x+\tau-\eta, \eta) d\tau + \int_0^t d\eta \int_{\eta}^t f_0(\eta+x-\tau, \eta) d\tau = \\ &= \int_0^t d\eta \int_x^{x+t-\eta} f_0(\xi, \eta) d\xi + \int_0^t d\eta \int_x^{x+\eta-t} f_0(\xi, \eta) (-d\xi) = \int_0^t d\eta \int_{x-t+\eta}^{x+t-\eta} f_0(\xi, \eta) d\xi = 2a_1(x, t). \end{aligned}$$

Значит, $a_1(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t и выполняется (28).

Если $f_0(x, t)$ непрерывна, то очевидно, что $a_1(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x и справедлива формула (29).

Пусть теперь $q(x) \in L[0, 1]$. Положим

$$Q(x, t) = J_{11}(x, t) - J_{21}(x, t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2 \int_0^x Q(\xi, t) d\xi &= \int_0^t d\tau \int_0^x [f_0(\xi + t - \tau, \tau) + f_0(\xi - t + \tau, \tau)] d\xi = \\ &= \int_0^t d\tau \left[\int_{t-\tau}^{x+t-\tau} f_0(\eta, \tau) - \int_{-t+\tau}^{x-t+\tau} f_0(\eta, \tau) \right] d\eta + \int_0^t d\tau \int_{-t+\tau}^{t-\tau} f_0(\eta, \tau) d\eta = \\ &= \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f_0(\eta, \tau) d\eta = 2a_1(x, t). \end{aligned}$$

Отсюда следует непрерывная дифференцируемость $a_1(x, t)$ по x и формула (29). \square

Лемма 4. Если функция $a(x)$ суммируема, а $b(x)$ непрерывна, то функция

$$\Phi(x) = \int_0^x a(\eta)b(\eta)d\eta$$

абсолютно непрерывна, $\Phi'(x)$ существует и конечна во всякой точке x , в которой существуют и конечны

$$\frac{d}{dx} \int_0^x a(\eta)d\eta, \quad \frac{d}{dx} \int_0^x |a(\eta)|d\eta.$$

Эта лемма очевидна.

Лемма 5. При фиксированном x функция $J_{11}(x, t)$ абсолютно непрерывна по t и

$$2 \frac{\partial J_{11}(x, t)}{\partial t} = - \left(q(x+t)a_0(x+t, 0) + \int_x^{x+t} q(\xi)a'_{0t}(\xi, x+t-\xi)d\xi \right) \quad (30)$$

почти при всех $t \in [0, \infty)$, причем правая часть (30) конечна, если конечны величины

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^\xi q(\tau) d\tau, \quad \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi |q(\tau)| d\tau \quad (31)$$

при $\xi = x + t$.

Доказательство. Сначала предположим, что функция $q(x)$ непрерывна на оси. Тогда функция $J_{11}(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t и при всех t верно соотношение (30).

Пусть теперь $q(x) \in L[0, 1]$. Тогда правая часть (30) имеет смысл, причем интеграл в (30) есть непрерывная функция по x и t . Обозначим правую часть (30) через $-G(t)$. Тогда $G(t)$ суммируема. Далее, имеем

$$\int_0^t G(\eta)d\eta = \int_0^t f_0(x+\eta, 0)d\eta + \int_0^t d\eta \int_x^{x+\eta} f'_{0t}(\xi, x+\eta-\xi)d\xi, \quad (32)$$

где f'_{0t} означает дифференцирование f_0 по второй переменной. Пользуясь теоремой Фубини, переставим порядки интегрирования в двойном интеграле J в (32). Обозначив через $\varepsilon(x, t)$ функцию Хевисайда ($\varepsilon(x, t) = 1$ при $x \geq t$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $x < t$), получим

$$\begin{aligned} J &= \int_0^t d\eta \int_x^{x+t} \varepsilon(x + \eta, \xi) f'_{0t}(\xi, x + \eta - \xi) d\xi = \int_x^{x+t} d\xi \int_0^t \varepsilon(x + \eta, \xi) f'_{0t}(\xi, x + \eta - \xi) d\eta = \\ &= \int_x^{x+t} d\xi \int_{\xi-x}^t f'_{0t}(\xi, x + \eta - \xi) d\eta = - \int_x^{x+t} q(\xi) d\xi \int_{\xi-x}^t a'_{0t}(\xi, x + t - \xi) d\eta = \\ &= - \int_x^{x+t} q(\xi) \left[a_0(\xi, x + t - \xi) - a_0(\xi, 0) \right] d\xi \end{aligned}$$

(a'_{0t} имеет тот же смысл, что и f'_{0t} выше). Поэтому

$$\int_0^t G(\eta) d\eta = \int_x^{x+t} f_0(\xi, x + t - \xi) d\xi = 2J_{11}(x, t).$$

Значит, $J_{11}(x, t)$ абсолютно непрерывна по t и имеет место (30), причем правая часть (30) конечна по лемме 4, если конечны величины (31) при $\xi = x + t$. Лемма доказана. \square

Лемма 6. При фиксированном t функция $J_{11}(x, t)$ абсолютно непрерывна по x и

$$2 \frac{\partial J_{11}(x, t)}{\partial x} = - \left[q(x+t) a_0(x+t, 0) - q(x) a_0(x, t) + \int_x^{x+t} q(\xi) a'_{0t}(\xi, x+t-\xi) d\xi \right] \quad (33)$$

почти всюду по x , где правая часть конечна, если конечны величины (31) при $\xi = x, x+t$.

Доказательство. Сначала предположим, что $q(x) \in C(-\infty, \infty)$. Тогда функция $J_{11}(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x и имеет место соотношение (33).

Пусть теперь $q(x) \in L[0, 1]$. Тогда правая часть (33) имеет смысл, причем интеграл в (33) есть непрерывная функция по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$. Обозначим правую часть (33) через $G(x)$; эта функция суммируема по x . Далее, имеем

$$\int_0^x G(\xi) d\xi = \int_0^x f_0(\xi + t, 0) d\xi - \int_0^x f_0(\xi, t) d\xi + \int_0^x d\xi \int_{\xi}^{\xi+t} f'_{0t}(\eta, \xi + t - \eta) d\eta. \quad (34)$$

Пользуясь теоремой Фубини, переставим порядки интегрирования в двойном интеграле J в (34):

$$J = \int_0^x d\xi \int_0^{x+t} \varepsilon(\xi + t, \eta) \varepsilon(\eta, \xi) f'_{0t}(\eta, \xi + t - \eta) d\eta = \int_0^{x+t} d\eta \int_0^x \varepsilon(\xi + t, \eta) \varepsilon(\eta, \xi) f'_{0t}(\eta, \xi + t - \eta) d\xi. \quad (35)$$

Во внутреннем интеграле J_1 в (35) сделаем замену $\xi + t - \eta = \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{t-\eta}^{x+t-\eta} \varepsilon(\eta + \tau, \eta) \varepsilon(\eta, \tau - t + \eta) f'_{0t}(\eta, \tau) d\tau = \\ &= \int_{\max\{0, t-\eta\}}^{\min\{t, x+t-\eta\}} f'_{0t}(\eta, \tau) d\tau = f_0(\eta, \min\{t, x+t-\eta\}) - f_0(\eta, \max\{0, t-\eta\}). \end{aligned}$$

Значит,

$$J = \int_0^{x+t} f_0(\eta, \min\{t, x+t-\eta\})d\eta - \int_0^{x+t} f_0(\eta, \max\{0, t-\eta\})d\eta. \quad (36)$$

Рассмотрим первый интеграл J_2 в (36). Пусть $t \leq x$. Тогда

$$J_2 = \int_0^t + \int_t^x + \int_x^{x+t}.$$

Имеем

$$\int_0^t = \int_0^t f_0(\eta, t)d\eta, \quad \int_t^x = \int_t^x f_0(\eta, t)d\eta, \quad \int_x^{x+t} = \int_x^{x+t} f_0(\eta, x+t-\eta)d\eta.$$

Значит, при $t \leq x$

$$J_2 = \int_0^x f_0(\eta, t)d\eta + \int_x^{x+t} f_0(\eta, x+t-\eta)d\eta.$$

Пусть теперь $t \geq x$. Тогда

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^x + \int_x^t + \int_t^{x+t} = \int_0^x f_0(\eta, t)d\eta + \int_x^t f_0(\eta, x+t-\eta)d\eta + \\ &+ \int_t^{x+t} f_0(\eta, x+t-\eta)d\eta = \int_0^x f_0(\eta, t)d\eta + \int_x^{x+t} f_0(\eta, x+t-\eta)d\eta. \end{aligned}$$

Таким образом, при $t \leq x$ и при $t \geq x$ имеет место одна и та же формула:

$$J_2 = \int_0^x f_0(\eta, t)d\eta + \int_x^{x+t} f_0(\eta, x+t-\eta)d\eta.$$

Рассмотрим теперь второй интеграл J_3 в (36). Пусть $t \leq x$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^t + \int_t^x + \int_x^{x+t} = \int_0^t f_0(\eta, t-\eta)d\eta + \int_t^x f_0(\eta, 0)d\eta + \\ &+ \int_x^{x+t} f_0(\eta, 0)d\eta = \int_0^t f_0(\eta, t-\eta)d\eta + \int_t^{x+t} f_0(\eta, 0)d\eta. \end{aligned}$$

Пусть теперь $t \geq x$. Тогда

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^x + \int_x^t + \int_t^{x+t} = \int_0^x f_0(\eta, t-\eta)d\eta + \int_x^t f_0(\eta, t-\eta)d\eta + \\ &+ \int_t^{x+t} f_0(\eta, 0)d\eta = \int_0^t f_0(\eta, t-\eta)d\eta + \int_t^{x+t} f_0(\eta, 0)d\eta. \end{aligned}$$

Значит, и для J_3 справедлива одна и та же формула как при $t \leq x$, так и при $t \geq x$.

Таким образом,

$$J = \int_0^x f_0(\eta, t)d\eta + \int_x^{x+t} f_0(\eta, t-\eta)d\eta - \int_0^t f_0(\eta, t-\eta)d\eta - \int_t^{x+t} f_0(\eta, 0)d\eta.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int_0^x G(\xi) d\xi &= \int_0^x f_0(\xi + t, 0) d\xi - \int_0^x f_0(\xi, t) d\xi + \int_0^x f_0(\xi, t) d\xi + \\ &+ \int_x^{x+t} f_0(\xi, x + t - \xi) d\xi - \int_0^t f_0(\xi, t - \xi) d\xi - \int_t^{x+t} f_0(\xi, 0) d\xi = \\ &= \int_x^{x+t} f_0(\xi, x + t - \xi) d\xi - \int_0^t f_0(\eta, t - \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$G(x) = f_0(x + t, 0) - f_0(x, t) + \int_x^{x+t} f'_{0t}(\xi, x + t - \xi) d\xi$$

почти всюду по x , т.е. $G(x)$ конечна, если конечны величины (31) при $\xi = x$ и $\xi = x + t$. Лемма доказана. \square

Аналогично леммам 5 и 6 получаются следующие леммы 7 и 8.

Лемма 7. При фиксированном x функция $J_{21}(x, t)$ абсолютно непрерывна по t и

$$\frac{\partial J_{21}(x, t)}{\partial t} = - \left[q(x - t) a_0(x - t, 0) + \int_{x-t}^x q(\xi) a'_{0t}(\xi, \xi - x + t) d\xi \right]$$

почти при всех t , причем правая часть конечна, если при $\xi = x + t$ конечны величины (31).

Лемма 8. При фиксированном t функция $J_{21}(x, t)$ абсолютно непрерывна по x и

$$\frac{\partial J_{21}(x, t)}{\partial x} = - \left[q(x) a_0(x, t) - q(x - t) a_0(x - t, 0) - \int_{x-t}^x q(\xi) a'_{0t}(\xi, \xi - x + t) d\xi \right]$$

почти при всех $x \in (-\infty, \infty)$, где правая часть конечна, если при $\xi = x, x - t$ конечны величины (31).

С помощью лемм 3–8 получаем следующий результат.

Теорема 3. Если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(3) с условием единственности, то $a_1(x, t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$, функция $a'_{1x}(x, t)$ ($a'_{1t}(x, t)$) абсолютно непрерывна по x (соответственно, по t), для $a_1(x, t)$ выполняются условия (24)–(25) и

$$\frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial x^2} - q(x) a_0(x, t) \quad (37)$$

почти всюду по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$, где $q(x)$ — четная 2-периодическая функция, $q(x) \in L[0, 1]$, причем равенство (37) имеет место при всех x и t , где величины (31) конечны при $\xi = x, x - t, x + t$. Здесь $\partial^2 a_1(x, t) / \partial t^2 \in L[Q_T]$.

Теперь будем исследовать $u_1(x, t)$ по той же схеме, что $u(x, t)$ выше, т.е., исходим из того, что $u_1(x, t)$ — классическое решение задачи (23)–(25) с условием $\partial^2 u_1(x, t) / \partial t^2 \in L[Q_T]$; в итоге получим

$$u_1(x, t) = a_2(x, t) + u_2(x, t),$$

где для $a_2(x, t)$ имеет место та же формула, что и выше для $a_1(x, t)$, где $\tilde{f}_0(\eta, \tau)$ заменяется на $f_1(\eta, \tau) = -q(\eta) a_1(\eta, \tau)$, а $u_2(x, t)$ — классическое решение задачи, полученной из (23)–(25)

заменой $u_1(x, t)$ на $u_2(x, t)$ и $f_0(x, t)$ на $f_1(x, t)$. Этот процесс может быть бесконечно продолжен, т.е. получаем

$$u_n(x, t) = a_n(x, t) + u_{n+1}(x, t),$$

где $a_n(x, t)$ — то же, что и $a_1(x, t)$, с заменой $f_0(\eta, \tau)$ на $f_{n-1}(\eta, \tau)$ ($f_k(\eta, \tau) = -q(\eta)a_k(\eta, \tau)$) и $u_{n+1}(x, t)$ — решение системы, получаемой из (23)–(25) заменой $u_1(x, t)$ на $u_{n+1}(x, t)$ и $f_0(x, t)$ на $f_n(x, t) = -q(x)a_n(x, t)$.

Для $a_n(x, t)$ по индукции получаем следующую теорему, аналогичную теореме 3.

Теорема 4. Если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(3) с условием единственности, то функция $a_n(x, t)$ при $n \geq 2$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$, функция $a'_{n,x}(x, t)$ ($a'_{n,t}(x, t)$) абсолютно непрерывна по x (соответственно, по t), для $a_n(x, t)$ выполняются условия (24)–(25) и

$$\frac{\partial^2 a_n(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_n(x, t)}{\partial x^2} - q(x)a_{n-1}(x, t) \quad (38)$$

почти всюду по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$, где функция $q(x)$ четна, 2-периодична и $q(x) \in L[0, 1]$, причем равенство (38) имеет место при всех x и t , где величины (31) конечны при $\xi = x, x - t, x + t$.

Лемма 9. Имеют место формулы

$$u(x, t) = A_n(x, t) + \Omega_n(x, t), \quad n = 2, \dots,$$

где

$$A_n(x, t) = \sum_{k=0}^n a_k(x, t),$$

$$\Omega_n(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left[\int_0^t (R_\lambda - R_\lambda^\circ)(f_{n-1}(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right] d\lambda.$$

Доказательство. Имеем

$$u(x, t) = A_{n-1}(x, t) + u_n(x, t).$$

Далее, $u_n(x, t)$ есть классическое решение задачи, полученной из (23)–(25) заменой $u_1(x, t)$ на $u_n(x, t)$ и $f_0(x, t)$ на $f_{n-1}(x, t)$ с условием единственности. Поэтому по теореме 1

$$u_n(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left[\int_0^t R_\lambda(f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right] d\lambda = a_{n+1}(x, t) + \Omega_n(x, t). \quad \square$$

Лемма 10. Пусть T — произвольное положительное число, m — наименьшее натуральное число, для которого $T \leq m$. Тогда

$$\|a_n(x, t)\|_{C[Q_T]} \leq M_1 \left(\frac{M_2}{2} \right)^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $M_1 = \|a_n(x, t)\|_{C[Q_T]}$, $M_2 = (2m+1)\|q\|_1$ (здесь $\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0, 1]$). Кроме того, $M_1 \leq C_T \|\varphi\|_1$ и постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$.

Доказательство. Очевидно $f_n(x, t) \in L[Q_T]$, $a_n(x, t) \in C[Q_T]$, $n = 1, 2, \dots$. При $n = 1$ оценка

$$|a_n(x, t)| \leq M_1 \left(\frac{M_2}{2} \right)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (39)$$

очевидно выполняется. Предположим, что она выполняется для некоторого n , и докажем, что она выполняется для $n + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} |f_n(\eta, \tau)| d\eta \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{-m}^{m+1} |f_n(\eta, \tau)| d\eta \leq \frac{2m+1}{2} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\eta)| |a_n(\eta, \tau)| d\eta \leq \\ &\leq \frac{2m+1}{2} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\eta)| M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} d\eta = M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^n \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Следовательно, (39) верно и для $n + 1$. Оценим M_1 . Имеем

$$\begin{aligned} |a_1(x, t)| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} |f_0(\eta, \tau)| d\eta \leq \frac{1}{2} \int_0^T d\tau \int_{-m}^{m+1} |f_0(\eta, \tau)| d\eta = \\ &= \frac{2m+1}{2} \int_0^T d\tau \int_0^1 |f_0(\eta, \tau)| d\eta \leq \frac{2m+1}{2} \int_0^T d\tau \int_0^1 |q(\eta)| (|\tilde{\varphi}(\eta + \tau)| + |\tilde{\varphi}(\eta - \tau)|) d\eta \leq \\ &\leq \frac{2m+1}{2} \int_0^1 |q(\eta)| d\eta 2m \int_0^1 |\varphi(\tau)| d\tau = C_T \|\varphi\|_1. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 5. Если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(3) с условием $\partial^2 u(x, t) \partial t^2 \in L[Q_T]$, то

$$u(x, t) = A(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t), \quad (40)$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно по $(x, t) \in Q_T$ при любом $T > 0$.

Доказательство. По лемме 10 ряд $A(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно по $(x, t) \in Q_T$ при любом $T > 0$. Далее, при $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеем оценки:

$$\left| (R_\lambda - R_\lambda^\circ)(f_n(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} \right| \leq \frac{C}{n^3} \int_0^1 |f_n(x, \tau)| d\tau,$$

где C не зависит от η, τ , и по лемме 10

$$\int_0^1 |f_n(x, \tau)| d\tau \leq M_1 \left(\frac{M_2 T}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \|q\|_1. \quad \square$$

Замечание 2. Ряд $A(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$.

Таким образом, ряд $A(x, t)$ является преобразованием ряда формального решения, полученное путем многократного использования рекомендаций А. Н. Крылова по ускорению сходимости рядов.

При $q(x) = 0$ формула (40) переходит в формулу Даламбера. Поэтому формула (40) представляет собой аналог формулы Даламбера и является формулой явного решения смешанной задачи.

Замечание 3. Формулы, схожие с (40) в случае $q(x) \in C^1[0, 1]$ и других граничных условий, были получены ранее Б. М. Левитаном без привлечения метода Фурье (см. [9]).

3. Классическое решение. Ряд $A(x, t)$ можно составить, взяв в качестве $\varphi(x)$ любую суммируемую функцию. В этом разделе считаем, что в этом ряде функция $\varphi(x)$ такова, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. При этих условиях на $\varphi(x)$ мы установим, что сумма ряда $A(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3).

Лемма 11. Сумма $A(x, t)$ ряда (40) непрерывна и непрерывно дифференцируема по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$, причем

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \int_x^{x+t} q(\xi) A(\xi, x+t-\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{x-t}^x q(\xi) A(\xi, \xi-x+t) d\xi, \quad (41)$$

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} \int_x^{x+t} q(\xi) A(\xi, x+t-\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{x-t}^x q(\xi) A(\xi, \xi-x+t) d\xi. \quad (42)$$

Доказательство. По лемме 10 ряд $A(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области переменных x и t . Значит, сумма ряда $A(x, t)$ непрерывна по x и t . Далее, формально дифференцируем ряд $A(x, t)$ почленно по t :

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial t} + \sum_1^{\infty} \frac{\partial a_n(x, t)}{\partial t}. \quad (43)$$

Из рассуждений п. 2 следует, что построение и исследование функции $a_n(x, t)$ не связано со смешанной задачей, а лишь с формулой (32), где $f_0(\eta, t)$ заменено на $-\frac{1}{2}q(\eta)a_{n-1}(\eta, \tau)$. Поэтому по индукции имеем

$$\frac{\partial a_n(x, t)}{\partial t} = J_{1n}(x, t) + J_{2n}(x, t),$$

где

$$J_{1n}(x, t) = -\frac{1}{2} \int_x^{x+t} q(\xi) a_{n-1}(\xi, x+t-\xi) d\xi,$$

$$J_{2n}(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{x-t}^x q(\xi) a_{n-1}(\xi, \xi-x+t) d\xi.$$

По лемме 10 в любой ограниченной области изменения x и t имеем оценки:

$$|J_{jn}(x, t)| \leq C \frac{C_1^{n-1}}{(n-1)!},$$

где C и C_1 зависят лишь от ограниченной области изменения x и t . Отсюда следует, что в этой области ряд $\sum_1^{\infty} \frac{\partial a_n(x, t)}{\partial t}$ сходится абсолютно и равномерно, и потому функция $A(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t и имеет место формула (43). Далее, по теореме Лебега о предельном переходе имеем

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \int_x^{x+t} q(\xi) a_{n-1}(\xi, x+t-\xi) d\xi &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^N \int_x^{x+t} q(\xi) a_{n-1}(\xi, x+t-\xi) d\xi = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_x^{x+t} q(\xi) \sum_1^N a_{n-1}(\xi, x+t-\xi) d\xi = \int_x^{x+t} q(\xi) A(\xi, x+t-\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\sum_1^{\infty} \int_{x-t}^x q(\xi) a_{n-1}(\xi, \xi - x + t) d\xi = \int_{x-t}^x q(\xi) A(\xi, \xi - x + t) d\xi,$$

и тем самым получаем (41). Аналогично получается (42). Лемма доказана. \square

Теорема 6. Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, то сумма ряда $A(x, t)$ является классическим решением задачи (1)–(3) с условием единственности.

Доказательство. Введем обозначения

$$B_1(x, t) = \int_x^{x+t} q(\xi) A(\xi, x + t - \xi) d\xi, \quad B_2(x, t) = \int_{x-t}^x q(\xi) A(\xi, \xi - x + t) d\xi.$$

По аналогии с леммой 5 согласно лемме 11 получаем, что функция $B_1(x, t)$ при фиксированном x абсолютно непрерывна по t ,

$$\frac{\partial B_1(x, t)}{\partial t} = q(x+t)A(x+t, 0) + \int_x^{x+t} q(\xi) A'_t(\xi, x+t-\xi) d\xi$$

почти всюду по t и правая часть конечна, если при $\xi = x+t$ конечны величины (31).

По аналогии с леммой 7 при фиксированном x функция $B_2(x, t)$ абсолютно непрерывна по t и

$$\frac{\partial B_2(x, t)}{\partial t} = q(x-t)A(x-t, 0) + \int_{x-t}^x q(\xi) A'_t(\xi, \xi-x+t) d\xi$$

при всех t , для которых при $\xi = x-t$ конечны величины (31).

По аналогии с леммой 6 функция $B_1(x, t)$ при фиксированном t абсолютно непрерывна по x и

$$\frac{\partial B_1(x, t)}{\partial x} = q(x+t)A(x+t, 0) - q(x)A(x, t) + \int_x^{x+t} q(\xi) A'_t(\xi, x+t-\xi) d\xi$$

если при $\xi = x$, $x+t$ конечны величины (31).

По аналогии с леммой 8 заключаем, что функция $B_2(x, t)$ при фиксированном t абсолютно непрерывна по x и

$$\frac{\partial B_2(x, t)}{\partial x} = q(x)A(x, t) - q(x-t)A(x-t, 0) - \int_{x-t}^x q(\xi) A'_t(\xi, \xi-x+t) d\xi$$

если при $\xi = x$, $x-t$ конечны величины (31).

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} B_1(x, t) - \frac{1}{2} B_2(x, t), \\ \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} B_1(x, t) + \frac{1}{2} B_2(x, t), \end{aligned}$$

то $\partial A(x, t)/\partial t$ при фиксированном x абсолютно непрерывна по t и

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_2(x, t)}{\partial t}, \quad (44)$$

почти всюду по t , причем (44) имеет место, если при $\xi = x+t$, $x-t$ конечны величины (31), $\tilde{\varphi}''(x+t)$ и $\tilde{\varphi}''(x-t)$.

Наконец, $\partial A(x, t)/\partial t$ при фиксированном t абсолютно непрерывна по x и

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_2(x, t)}{\partial x}.$$

Так как очевидно, что $\partial^2 a_0(x, t)/\partial t^2 \in L[0, 1]$, то получаем решение в классе единственности. Теорема доказана. \square

Замечание 4. Как и в доказательстве теоремы 3, получаем, что соотношения (1)–(3) выполняются при всех x и t , только $A(x, 0) = \varphi(x)$ заменяется на $A(x, 0) = \tilde{\varphi}(x)$ и в уравнении (1) функция $q(x)$ четна и 2-периодична на всей оси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хромов А. П. О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2016. — 56, № 10. — С. 1795–1809.
2. Корнев В. В., Хромов А. П. Об обобщенном формальном решении по методу Фурье смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения// 19 Междунар. Саратов. зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приближений», посв. 90-летию акад. П. Л. Ульянова (Саратов, 29 января — 2 февраля 2018). — Саратов: СГУ. — С. 156–159.
3. Корнев В. В., Хромов А. П. О решении неоднородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевыми начальными условиями// 19 Междунар. Саратов. зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приближений», посв. 90-летию акад. П. Л. Ульянова (Саратов, 29 января — 2 февраля 2018). — Саратов: СГУ. — С. 159–160.
4. Корнев В. В., Хромов А. П. О классическом и обобщенном решении смешанной задачи для волнового уравнения// в кн.: Современные методы теории краевых задач/ Междунар. конф. «Понтрягинские чтения—XXIX», посв. 90-летию акад. В. А. Ильина (Москва, 2–6 мая). — М., 2018. — С. 132–133.
5. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла. — М.: Наука, 1964.
6. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов: РГУ, 1994.
7. Корнев В. В., Хромов А. П. Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — 57, № 10. — С. 1692–1707.
8. Корнев В. В., Хромов А. П. Сходимость формального решения по методу Фурье в смешанной задаче для простейшего неоднородного волнового уравнения// в кн.: Математика. Механика (сб. науч. тр.). — Саратов: СГУ, 2017. — 19. — С. 41–44.
9. Левитан Б. М. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. — М.: Физмалит, 1965.

Корнев Владимир Викторович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: kornevVV@info.sgu.ru

Хромов Август Петрович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: khromovap@info.sgu.ru