

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 171



Москва 2019

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

С. С. Акбаров (НИУ ВШЭ, ВИНТИ РАН)

Е. П. Кругова (ВИНТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Н. Х. Розов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

С. Е. Степанов (Финуниверситет при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Редактор-составитель:

М. Ш. Бурлуцкая (Воронежский государственный университет)

Научный редактор:

Кругова Е. П. (ВИНТИ РАН)

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 171

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ ЗИМНЕЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ»

28 ЯНВАРЯ — 2 ФЕВРАЛЯ 2019 г.

ЧАСТЬ 2



Москва 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств возмущенных дифференциальных операторов первого порядка (А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова)	3
Система уравнений симметричного пограничного слоя модифицированной жидкости О. А. Ладыженской (Р. Р. Булатова)	19
Почти периодические на бесконечности решения разностных уравнений (И. А. Высоцкая)	38
О некоторых свойствах почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств (И. И. Струкова)	47
О спектральных свойствах одного класса возмущенных операторов (Г. В. Гаркавенко)	57
Дробные модифицированные операторы Харди и Харди—Литтлвуда в пространствах Морри—Герца и их коммутаторы в весовых пространствах (С. С. Волосивец, Б. И. Голубов)	70
Представление решений одного интегро-дифференциального уравнения и приложения (Д. А. Загора)	78
Об условиях обратимости разностных операторов (Л. Ю. Кабанцова)	94
Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями (Ф. А. Кутерин, А. А. Евтушенко)	102
Обобщение теоремы об эквивалентности координатного и алгебраического определений гладкого многообразия (М. Н. Крейн)	114
Теорема о носителе для K_γ -преобразования Радона—Киприянова (Л. Н. Ляхов, М. Г. Лапина, С. А. Рошупкин)	118
Компромиссное решение в модели экономики с заменой оборудования (О. А. Малафеев, А. П. Парфенов)	125
Критерий вольтерровости задачи Коши для уравнения пантографа (А. Ш. Шалданбаев, М. И. Акылбаев, М. Т. Шоманбаева, А. А. Шалданбаева)	140



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 3–18
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-3-18

УДК 517.9

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ИССЛЕДОВАНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2019 г. А. Г. БАСКАКОВ, И. А. КРИШТАЛ, Н. Б. УСКОВА

Аннотация. В работе рассмотрены дифференциальные операторы первого порядка с периодическими краевыми условиями, действующие в гильбертовом пространстве суммируемых с квадратом на отрезке $[0, \omega]$ функций, возмущенные интегральными операторами Гильберта—Шмидта. Произведено преобразование подобия исходного оператора к оператору блочно-диагональной структуры; это позволяет изучить спектральные свойства возмущенного оператора. Методом исследования служит метод подобных операторов, основные положения которого и его систематизация также приведены в работе.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр, интегро-дифференциальный оператор.

METHOD OF SIMILAR OPERATORS IN THE STUDY OF SPECTRAL PROPERTIES OF PERTURBED FIRST-ORDER DIFFERENTIAL OPERATORS

© 2019 A. G. BASKAKOV, I. A. KRISHTAL, N. B. USKOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider first-order differential operators with periodic boundary conditions acting in a Hilbert space of square summable functions on the segment $[0, \omega]$ perturbed by Hilbert–Schmidt integral operators. A similarity transformation of the original operator to the operator of the block-diagonal structure is performed; this allows one to study spectral properties of the perturbed operator. The research method is the method of similar operators, which is also presented in this work.

Keywords and phrases: method of similar operators, spectrum, integro-differential operator.

AMS Subject Classification: 35L75, 35Q53, 37K10, 37K35

1. Введение. В настоящее время дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией достаточно глубоко исследуются. Начало их систематическому изучению положили работы А. П. Хромова и М. Ш. Бурлуцкой (см. [14–20]), в которых *резольвентным методом* (с помощью контурного интегрирования) получены спектральные характеристики таких операторов с гладким потенциалом. В указанных работах рассматривались различные виды граничных условий и различные места нахождения инволюции: при производной или при потенциале. Полученные

Работа А. Г. Баскакова выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (госзадание, проект № 1.3464.2017/4.6). Работа И. А. Криштала выполнена при поддержке Национального научного фонда США (National Science Foundation, проект DMS-1322127). Работа Н. Б. Усковой выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732).

результаты легли в основу обоснования метода Фурье. Альтернативным методом исследования спектральных свойств различных возмущенных линейных замкнутых операторов, в том числе и операторов с инволюцией, является *метод подобных операторов* (см. [2, 4–7, 9, 10]), позволяющий более гибко учитывать спектральные свойства оператора дифференцирования и специфику потенциала. При помощи указанного метода операторы с инволюцией и негладким потенциалом, в том числе матричным, исследовались в [11–13, 24, 25, 27]. При этом необходимо было производить предварительное преобразование подобия метода подобных операторов (см. [11, 24, 25, 27]) из-за негладкости потенциала. После предварительного преобразования подобия исследование спектральных свойств исходного оператора сводится к исследованию спектральных свойств интегро-дифференциального оператора первого порядка (см. [11, 24, 25, 27]). Данная статья посвящена изучению интегро-дифференциальных операторов первого порядка с помощью метода подобных операторов.

Также отличительной особенностью данной работы является систематизация основных теорем метода подобных операторов в изложении абстрактной схемы метода во разделе 2 и альтернативный способ доказательства одной из основных теорем метода подобных операторов (теоремы 2.2).

2. Метод подобных операторов. В этом разделе мы изложим основные положения метода подобных операторов. В отличие от обычно используемой схемы (см. [7, 9–11, 24, 25, 27]) ниже будет приведен более широкий обзор уравнений метода подобных операторов и условий их разрешимости.

Сначала введем необходимые далее операторные пространства. Пусть $\mathcal{H}$ — абстрактное комплексное гильбертово пространство. Введем в рассмотрение линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, имеющий область определения $D(A)$, спектр $\sigma(A)$ и непустое резольвентное множество $\rho(A)$.

Определение 2.1 (см. [6]). Линейный оператор $B : D(B) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ называется *подчиненным* оператору $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, если $D(A) \subset D(B)$ и $\|Bx\| \leq \text{const}(\|x\| + \|Ax\|)$, $x \in D(A)$.

Обозначим пространство операторов, подчиненных оператору A , через $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Введем в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ норму, положив

$$\|B\|_A = \inf \left\{ C \geq 0 : \|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|) \text{ для любого } x \in D(A) \right\}.$$

Обычно без ограничения общности считается, что $D(B) = D(A)$.

Символом $\text{End } \mathcal{H}$ обозначим банахово пространство (C^* -алгебру) всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, со стандартной нормой

$$\|X\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Xx\|, \quad x \in \mathcal{H}, \quad X \in \text{End } \mathcal{H}.$$

Пространство $\text{End } \mathcal{H}$ вложено в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, если область определения $D(A)$ оператора A плотна в $\mathcal{H}$. Принадлежность оператора X пространству $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ означает, что $X(A - \lambda_0 I)^{-1} \in \text{End } \mathcal{H}$ для любого $\lambda_0 \in \rho(A)$. В пространстве $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ можно ввести эквивалентную норму, положив $\|X\|_A = \|X(A - \lambda_0 I)^{-1}\|$.

Начнем изложение метода подобных операторов с определения подобных операторов.

Определение 2.2 (см. [6]). Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует такой непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End } \mathcal{H}$, что $A_1 U x = U A_2 x$, $x \in D(A_2)$, $U D(A_2) = D(A_1)$. Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в оператор A_2 .

Подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств, которые удобно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 2.1 (см. [10]). Пусть $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, — два подобных оператора и $U \in \text{End } \mathcal{H}$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2 . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$ — спектры, $\sigma_d(A_i)$ — дискретные спектры, $\sigma_c(A_i)$ — непрерывные спектры, $\sigma_r(A_i)$ — остаточные спектры операторов A_i , $i = 1, 2$, соответственно;

- (2) если a — собственный вектор оператора A_2 , отвечающий собственному значению λ_0 , то $b = Ua$ — собственный вектор A_1 , отвечающий тому же собственному значению λ_0 ;
- (3) если P — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ оператора A_2 , то спектральный проектор $\tilde{P}$, построенный по этому же множеству σ для оператора A_1 , определяется формулой $\tilde{P} = UPU^{-1}$;
- (4) если оператор A_2 является генератором сильно непрерывной группы операторов $T_2 : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ (класса C_0), то оператор A_1 является генератором сильно непрерывной группы операторов

$$T_1(t) = UT_2(t)U^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad T_1 : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}.$$

Далее рассматривается оператор $A - B : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ и $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Оператор A будем называть *невозмущенным*, или *свободным* оператором. Спектральные свойства оператора A считаются хорошо изученными. Оператор $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ будем называть оператором-возмущением, а оператор $A - B$ — возмущенным оператором.

Основная идея метода подобных операторов состоит в следующем. Строится преобразование подобия возмущенного оператора $A - B$ в более просто устроенный оператор $A - \tilde{B}$. При этом спектральные свойства оператора $A - \tilde{B}$ должны быть близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора A . Например, подпространства, построенные по непересекающимся частям спектра невозмущенного оператора A , остаются инвариантными и для оператора $A - \tilde{B}$. Отметим, что прообразом метода подобных операторов является метод К. О. Фридрихса (см. [28]) для исследования возмущенных самосопряженных операторов с непрерывным спектром. Метод Фридрихса развивал Р. Тернер для нормальных компактных операторов (см. [29]), возмущенных ограниченными операторами, которые построены специальным образом по невозмущенному оператору. Метод подобных операторов также опирается на работы А. Пуанкаре, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и окончательно оформляется в работах А. Г. Баскакова (см. [2, 4–7, 9, 10]). Связь метода подобных операторов с методом усреднения (заменой Крылова—Боголюбова) см. в [1, 3, 8]; связь с методом Р. Тернера — в [23]. Отметим, что в настоящее время метод подобных операторов постоянно развивается и адаптируется к различным классам операторов. Поэтому изложения метода, например, в [6] и в [10] отличаются. Мы при изложении общих положений метода будем придерживаться работ [9, 10].

Следуя М. Г. Крейну, будем называть операторы, действующие в пространстве операторов, *трансформаторами*. Одним из трансформаторов, широко используемым в методе подобных операторов, является коммутатор

$$\text{ad}_A : D(\text{ad}_A) \subset \text{End } \mathcal{H} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}, \quad \text{ad}_A X = AX - XA, \quad X \in D(\text{ad}_A).$$

Область определения $D(\text{ad}_A)$ состоит из всех таких $X \in \text{End } \mathcal{H}$, что выполняются следующие два свойства:

- (1) $XD(A) \subseteq D(A)$;
- (2) оператор $\text{ad}_A X : D(A) \subset \mathcal{H}$ допускает единственное расширение до ограниченного оператора $Y \in \text{End } \mathcal{H}$; при этом полагается $\text{ad}_A X = Y$.

Основным определением метода подобных операторов является определение допустимой тройки для невозмущенного оператора A .

Определение 2.3 (см. [9, 10]). Пусть $\mathcal{M}$ — линейное подпространство из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и $J : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $\Gamma : \mathcal{M} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ — трансформаторы. Тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ назовем *допустимой тройкой* для оператора A , а $\mathcal{M}$ — пространством допустимых возмущений, если выполнены следующие условия:

- (1) $\mathcal{M}$ — банахово пространство со своей нормой $\|\cdot\|_*$, непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, т.е. существует такая постоянная $C > 0$, что $\|X\|_A \leq C\|X\|_*$ для любого $X \in \mathcal{M}$;
- (2) J и Γ — ограниченные линейные трансформаторы, причем J — идемпотент;
- (3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и имеют место равенства

$$(\text{ad}_A \Gamma X)x = A\Gamma Xx - \Gamma XAx = (X - JX)x, \quad x \in D(A), \quad X \in \mathcal{M},$$

где $\Gamma X \in \text{End } \mathcal{H}$ — единственное решение уравнения

$$\text{ad}_A Y = AY - YA = X - JX, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее условию $JY = 0$;

(4) $XGY, (GX)Y \in \mathcal{M}$ для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что

$$\|\Gamma\| \leq \gamma, \quad \max\{\|XGY\|_*, \|(GX)Y\|_*\} \leq \gamma\|X\|_*\|Y\|_*; \quad (2.2)$$

(5) $J((GX)JY) = 0$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}$;

(6) для любых $X \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что

$$\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Теперь зафиксируем некоторую допустимую для невозмущенного оператора A тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ и рассмотрим некоторое возмущение $B \in \mathcal{M}$.

Выпишем основные нелинейные уравнения, получаемые из условия подобия возмущенного оператора $A - B$ оператору $A - JX$, где X — некоторый оператор из $\mathcal{M}$, подлежащий определению (X — решение одного из приводимых далее нелинейных операторных уравнений). Отметим, что в общем случае условие $J^2 = J$ на выбор трансформатора J не обязательно, однако оно существенно облегчает изучение операторов $A - JX$ и в данной работе мы предполагаем его выполненным.

Тип уравнения для неизвестного оператора $X \in \mathcal{M}$ существенно зависит от способа построения оператора преобразования $U \in \text{End } \mathcal{H}$ оператора $A - B$ в оператор $A - JX$.

В методе подобных операторов обычно используют три варианта выбора оператора преобразования $U \in \text{End } \mathcal{H}$ (см. [6]).

Вариант 1. Пусть $U = I + GX$, $X \in \mathcal{M}$. Тогда подобие операторов $A - B$ и $A - JX$ запишется в виде

$$(A - B)(I + GX) = (I + GX)(A - JX), \quad (2.4)$$

откуда немедленно следует равенство

$$A - B + AGX - BGX = A + GX A - JX - (GX)(JX).$$

Учитывая свойство (3) определения 2.3, имеем

$$X - BGX - B = -(GX)JX,$$

откуда

$$X = BGX - (GX)JX + B. \quad (2.5)$$

Применим к обеим частям уравнения (2.5) оператор J ; учитывая свойство (5) определения 2.3, получим уравнение для нахождения неизвестного оператора $X \in \mathcal{M}$:

$$X = BGX - (GX)JX - (GX)J(BGX) + B. \quad (2.6)$$

Вариант 2. Пусть

$$U = \left(I + \frac{1}{2}GX\right) \left(I - \frac{1}{2}GX\right)^{-1}.$$

Для вывода соответствующего уравнения рассмотрим оператор

$$\left(I - \frac{1}{2}GX\right) (A - B) \left(I + \frac{1}{2}GX\right) - \left(I + \frac{1}{2}GX\right) (A - JX) \left(I - \frac{1}{2}GX\right)$$

и преобразуем его части:

$$\begin{aligned} \left(I + \frac{1}{2}GX\right) (A - JX) \left(I - \frac{1}{2}GX\right) &= A - JX - \frac{1}{2}(GX)A - \frac{1}{2}(GX)JX - \frac{1}{2}AGX + \\ &\quad + \frac{1}{2}(JX)GX + \frac{1}{4}(GX)JX(GX) - \frac{1}{4}(GX)A(GX), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{1}{2}GX\right) (A - B) \left(I + \frac{1}{2}GX\right) &= A - B - \frac{1}{2}GX - \frac{1}{2}JX + \frac{1}{2}(GX)B - \frac{1}{2}BGX - \\ &\quad - \frac{1}{4}(GX)A(GX) + \frac{1}{4}(GX)BGX. \end{aligned}$$

Опять же, используя свойство (3) определения 2.3, получаем, что имеет место равенство

$$\left(I - \frac{1}{2}\Gamma X\right)(A - B)\left(I + \frac{1}{2}\Gamma X\right) = \left(I + \frac{1}{2}\Gamma X\right)(A - JX)\left(I - \frac{1}{2}\Gamma X\right), \quad (2.7)$$

если оператор $X \in \mathcal{M}$ есть решение нелинейного операторного уравнения

$$X = \frac{1}{2} \left(\text{ad}_B \Gamma X - \text{ad}_{JX} \Gamma X - \frac{1}{2} \Gamma X (B - JX) \Gamma X \right) + B. \quad (2.8)$$

Определение 2.4. Линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ с $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ называется *самосопряженным*, если оператор $iA : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ является генератором сильно непрерывной изометрической группы операторов $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\|T(t)\| = 1$.

Отметим, что несмотря на еще бóльшую громоздкость уравнения (2.8) по сравнению с уравнениями (2.5) и (2.6), оно обладает одним важным преимуществом. Если изначально A и B — самосопряженные операторы, то при рассмотрении уравнений (2.5) и (2.6) их решения не будут в общем случае самосопряженными; решение же уравнения (2.8) наследует важное свойство самосопряженности операторов A и B .

Вариант 3. Пусть $U = \exp(\Gamma X)$. В этом случае подобие операторов $A - B$ и $A - JX$ запишется в виде

$$(A - B) \exp(\Gamma X) = (\exp(\Gamma X))(A - JX). \quad (2.9)$$

Опустим в этом случае вывод нелинейного операторного уравнения для неизвестного оператора $X \in \mathcal{M}$ ввиду его громоздкости. Ограничимся самим уравнением (см. [6, 7]):

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(-1)^n \text{ad}_{\Gamma X/2}^n B - \text{ad}_{\Gamma X/2}^n JX \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left[\text{ad}_{\Gamma X/2}^{2n} (X - JX) \right] + B. \quad (2.10)$$

Преимущество рассмотрения третьего варианта состоит в том, что оператор преобразования $U = \exp(\Gamma X)$ всегда обратим и $U^{-1} = \exp(-\Gamma X)$, в отличие от выражения обратного к $I + \Gamma X$, через ряд

$$(I + \Gamma X)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\Gamma X)^i.$$

Каждое из уравнений (2.6), (2.8), (2.10) можно записать в виде

$$X = \Phi_i(X), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.11)$$

где $\Phi_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $i = 1, 2, 3$, — нелинейные трансформаторы, определяемые правыми частями соответствующих нелинейных операторных уравнений. Так, например,

$$\Phi_1(X) = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B, \quad X \in \mathcal{M}.$$

Теорема 2.1 (см. [6, теорема 19.3]). Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка, $B \in \mathcal{M}$ и

$$\gamma \|B\|_* \|J\| < \frac{1}{9}. \quad (2.12)$$

Тогда любое из уравнений (2.6), (2.8), (2.10) разрешимо и имеет единственное решение $X_i \in \mathcal{M}$, $i = 1, 2, 3$. Кроме того, операторы $A - B$ и $A - JX_i$ подобны, и при подстановке $X = X_i$, $i = 1, 2, 3$, имеют место равенства (2.4), (2.7), (2.9), соответственно.

Отметим, что обычно не рассматривают сразу все три преобразования подобия и все три нелинейных операторных уравнения. Если же каждый вариант рассматривать отдельно, то для первого и второго случаев условие (2.12) можно ослабить. Приведем соответствующие теоремы. Кроме того, в стандартной схеме условие разрешимости нелинейных уравнений (2.11) устанавливалось с помощью метода мажорантных уравнений. В данной работе мы предложим другой способ доказательства известной базовой теоремы метода подобных операторов, отличный от изложенного в [6].

Теорема 2.2 (см. [6, теорема 19.2]). Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка и B — некоторый оператор из $\mathcal{M}$. Если

$$4\gamma\|B\|_*\|J\| < 1, \quad (2.13)$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathcal{M}$ является решением нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi_1(X).$$

Решение X_* может быть найдено методом простых итераций, если положить $X_0 = 0$ и $X_n = \Phi_1(X_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет обратимый оператор $I + \Gamma X_* \in \text{End } \mathcal{H}$. Отображение $\Phi_1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ является сжимающим в шаре $\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{M} : \|X - B\|_* \leq 3\|B\|_*\}$.

Доказательство (см. также [27]). Мы используем теорему Банаха о неподвижной точке, чтобы доказать существование решения $X_* \in \mathcal{M}$ нелинейного операторного уравнения (2.6). Отметим, что

$$\|X\|_* = \|X - B + B\|_* \leq \|X - B\|_* + \|B\|_* \leq 4\|B\|_*.$$

Покажем, что отображение Φ_1 переводит шар $\mathcal{B}$ в себя и

$$\|\Phi_1(X) - \Phi_1(Y)\|_* \leq q\|X - Y\|_*$$

для всех $X, Y \in \mathcal{B}$ и некоторого $q < 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(X) - B\|_* &\leq \|B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X)\|_* \leq \\ &\leq 4\gamma\|B\|_*^2 + 4\gamma\|J\|\|B\|_*^2 + 16\gamma^2\|J\|\|B\|_*^3 \leq (\|J\|^{-1} + 1 + \|J\|^{-1})\|B\|_* \leq 3\|B\|_*. \end{aligned}$$

Введем обозначение $q = 4\gamma\|J\|\|B\|_*$. Очевидно, в силу (2.13), выполняется неравенство $q < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(X) - \Phi_1(Y)\|_* &\leq \\ &\leq \|B\Gamma(X - Y)\|_* + \|\Gamma(X - Y)JB\|_* + \|(\Gamma X)J(B\Gamma X) - (\Gamma Y)J(B\Gamma Y) \pm (\Gamma X)J(B\Gamma Y)\|_* \leq \\ &\leq \gamma\|B\|_*\|X - Y\|_* + \gamma\|J\|\|B\|_*\|X - Y\|_* + \|(\Gamma X)J(B\Gamma(X - Y))\|_* + \|\Gamma(X - Y)J(B\Gamma Y)\|_* \leq \\ &\leq \gamma\|B\|_*\|X - Y\|_* + \gamma\|J\|\|B\|_*\|X - Y\|_* + \gamma^2\|B\|_*(\|X\|_* + \|Y\|_*)\|X - Y\|_* \leq \\ &\leq \left(\frac{q}{4}\|J\|^{-1} + \frac{q}{4} + \frac{q^2}{2}\|J\|^{-1}\right)\|X - Y\|_* \leq q\|X - Y\|_*. \end{aligned}$$

Таким образом, отображение Φ_1 переводит шар $\mathcal{B}$ в себя и является в этом шаре сжимающим отображением с константой сжатия $q < 1$. Поэтому отображение Φ_1 имеет в шаре $\mathcal{B}$ единственную неподвижную точку X_* , $\Phi_1(X_*) = X_*$ и эта точка X_* может быть найдена как предел последовательности X_n , $n \geq 0$, $X_0 = 0$, $X_1 = B$, $\dots$, $X_n = \Phi_1(X_{n-1})$, $\dots$.

Осталось показать, что оператор $I + \Gamma X_*$ непрерывно обратим и $(\Gamma X_*)D(A) = D(A)$. Пусть X_* — решение уравнения (2.6). Тогда

$$\|\Gamma X_*\| \leq \gamma\|X_*\|_* \leq 4\gamma\|B\|_* < 1 \quad (2.14)$$

и

$$(I + \Gamma X_*)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\Gamma X_*)^n.$$

Так как $(I + \Gamma X_*)D(A) \subset D(A)$ согласно свойству (3) определения 2.3, то осталось показать, что $(I + \Gamma X_*)^{-1}D(A) \subset D(A)$. Пусть $\lambda \in \rho(A)$. Тогда

$$\begin{aligned} (\Gamma X_*)(A - \lambda I)^{-1} &= (A - \lambda I)^{-1}((A - \lambda I)(\Gamma X_*)(A - \lambda I)^{-1}) = \\ &= (A - \lambda I)^{-1}(X_* - JX_* + (\Gamma X_*)A - \lambda \Gamma X_*)(A - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}((X_* - JX_*)(A - \lambda I)^{-1} + \Gamma X_*). \end{aligned}$$

Используя свойство (6) определения 2.3 и (2.14), выберем такое $\lambda \in \rho(A)$, что

$$\|(X_* - JX_*)(A - \lambda I)^{-1} + \Gamma X_*\| < 1.$$

Тогда

$$(I + \Gamma X_*)^{-1}(A - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1} \left(I + (X_* - JX_*)(A - \lambda I)^{-1} + \Gamma X_* \right)^{-1}.$$

Следовательно, $(I + \Gamma X_*)^{-1}D(A) \subseteq D(A)$. Доказательство теоремы 2.2 закончено. $\square$

Аналогично можно показать, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.3. Пусть A и B — самосопряженные операторы, $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка, причем

$$(JY)^* = J(Y^*), \quad Y \in \mathcal{M}.$$

Если выполнено условие

$$\gamma \|B\|_* \|J\| < 0,1568,$$

то уравнение (2.8) имеет единственное решение $X_* \in \mathcal{M}$, которое является самосопряженным оператором. Это решение может быть найдено методом простых итераций. Операторы $A - B$ и $A - JX_*$ подобны и имеет место равенство (2.7).

3. Предварительные сведения. Пусть $\mathcal{H} = L_2[0, \omega]$ — гильбертово пространство (классов эквивалентности) комплекснозначных функций, измеримых по Лебегу на отрезке $[0, \omega]$ и суммируемых с квадратом модуля. Скалярное произведение в $L_2[0, \omega]$ и порождаемая им норма задаются формулами

$$(x, y) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega x(s) \overline{y(s)} ds, \quad x, y \in \mathcal{H}, \quad \|x\|^2 = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |x(s)|^2 ds, \quad x \in \mathcal{H},$$

Через $W_2^1[0, \omega]$ обозначено пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из $\mathcal{H}$ с производными из $\mathcal{H}$ и скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = (x, y) + (x', y'), \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

В пространстве $\mathcal{H}$ рассматривается интегро-дифференциальный оператор первого порядка

$$(Ly)(s) = y'(s) - \int_0^s K(t, s)y(s) ds \quad (3.1)$$

с областью определения $D(L)$, порождаемой периодическими краевыми условиями $D(L) = \{y \in W_2^1[0, \omega] : y(0) = y(\omega)\}$. Предполагается также, что ядро интегрального оператора удовлетворяет условию

$$\int_0^\omega \int_0^\omega |K(t, s)|^2 ds dt < \infty. \quad (3.2)$$

Представим оператор L в виде $L = L_0 - B$, где

$$L_0 : D(L_0) = D(L) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad (L_0 y)(t) = y'(t), \quad (By)(t) = \int_0^\omega K(t, s)y(s) ds.$$

Невозмущенным, или свободным, считаем оператор L_0 , а возмущением — оператор B .

Определение 3.1. [22]. Оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ с плотной областью определения $\overline{D(A)}$ называется *нормальным*, если $D(A) = D(A^*)$ и $\|Ax\| = \|A^*x\|$ для всех $x \in D(A)$.

Отметим, что в [5, 6] использовалось другое, эквивалентное, определение нормального оператора.

Определение 3.2. Линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ с $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ называется *нормальным*, если он представим в виде $A = A_1 + iA_2$, где $A_i : D(A_i) = D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, — самосопряженные операторы.

Невозмущенный оператор L_0 является нормальным оператором с компактной резольвентой. Его простыми изолированными собственными значениями являются числа $\lambda_n = i2\pi n/\omega$, $n \in \mathbb{Z}$, а соответствующими собственными векторами — функции $e_n(t) = e^{\lambda_n t} = e^{i2\pi n t/\omega}$, $n \in \mathbb{Z}$. Спектральные проекторы $P_n = P(\{\lambda_n\}, L_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, задаются формулой

$$P_n x = (x, e_n) e_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Введем в рассмотрение двусторонний идеал операторов Гильберта—Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ из алгебры $\text{End } \mathcal{H}$. Через $\|X\|_2$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, обозначим норму Гильберта—Шмидта: $\|X\|_2^2 = \text{tr}(XX^*)$ — след оператора XX^* , принадлежащего двустороннему идеалу $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ ядерных операторов из $\text{End } \mathcal{H}$ (см. [21]) с нормой $\|X\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n$, где (s_n) — последовательность s -чисел оператора

$X \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. Пространство $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ является гильбертовым, и формула $(X, Y) = \text{tr}(XY^*)$ задает скалярное произведение в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Свойства операторных идеалов $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, в частности, используемые далее, можно найти в [21].

Каждому оператору $X \in \text{End } \mathcal{H}$ поставим в соответствие его операторную матрицу $X = (X_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, где $X_{ij} = P_i X P_j$ и проекторы P_i , $i \in \mathbb{Z}$, определены формулой (3.3).

Отметим, что система проекторов $(P_i, i \in \mathbb{Z})$ является дизъюнктивной системой ортопроекторов, и в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \|X_{ij}\|_2^2.$$

Заметим, что условие (3.2) на оператор-возмущение B означает, что $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и

$$\|B\|_2^2 = \int_0^\omega \int_0^\omega |K(t, s)|^2 ds dt.$$

Пусть ядро $K(t, s)$ имеет ряд Фурье вида

$$K(t, s) = \sum_{l, p \in \mathbb{Z}} \widehat{k}(l, p) e^{i \frac{2\pi l}{\omega} t} e^{i \frac{2\pi p}{\omega} s}.$$

Тогда из условия (3.2) следует, что

$$\sum_{l, p \in \mathbb{Z}} |\widehat{k}(l, p)|^2 < \infty.$$

Кроме того, в базисе из собственных векторов e_i , $i \in \mathbb{Z}$, невозмущенного оператора L_0 матрица оператора-возмущения B состоит из элементов

$$b_{lp} = \frac{1}{\omega} \widehat{k}(-l, p), \quad l, p \in \mathbb{Z}.$$

В следующем разделе мы перейдем к построению допустимых троек для невозмущенного оператора L_0 . Подчеркнем, что метод подобных операторов легок в применении, если собственные значения невозмущенного оператора разбегаются. В данном же случае этого не происходит, и $\text{dist}(\{\lambda_n\}, \sigma(L_0) \setminus \{\lambda_n\}) = 2\pi/\omega$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому приходится строить две допустимые тройки: первая с допустимым пространством возмущений $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, а вторая — с допустимым пространством возмущений $\mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, построенным по возмущению $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ с использованием последовательности $(\alpha_n, n \in \mathbb{Z})$, которая учитывает скорость убывания элементов $P_i B P_j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $|i|, |j| \rightarrow \infty$.

4. Построение семейства допустимых троек $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J_k, \Gamma_k)$. Пусть $\mathcal{M} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Отметим, что невозмущенный оператор L_0 необратим, но вместо L_0 можно рассматривать оператор $L_0 - \mu I$, $\mu \in \rho(L_0)$. Допустимые тройки для L_0 и $L_0 - \mu I$ будут одинаковыми.

Очевидно, что $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{L}_{L_0}(\mathcal{H})$, и свойство (1) определения 2.3 имеет место.

Перейдем к построению трансформаторов $J, \Gamma \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$. Для $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определим трансформаторы JX и ΓX матрицами

$$(JX)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (\Gamma X)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}/(\lambda_i - \lambda_j), & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases} \quad (4.1)$$

Очевидно, что $JX = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n X P_n$, и выписанный ряд безусловно сходится в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$,

$$\|JX\|_2^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|P_i X P_i\|_2^2 \leq \|X\|_2^2,$$

т.е. из $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует, что $JX \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Покажем, что $\Gamma X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ для $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Действительно,

$$\|\Gamma X\|_2^2 = \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{Z}, \\ i \neq j}} \frac{\|X_{ij}\|_2^2}{|\lambda_i - \lambda_j|^2} \leq \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{Z}, \\ i \neq j}} \|X_{ij}\|_2^2 \leq \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \|X\|_2^2. \quad (4.2)$$

Теорема 4.1. *Тройка $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J, \Gamma)$ является допустимой тройкой для оператора L_0 .*

Доказательство. Непрерывность трансформаторов $J, \Gamma \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$ следует из их построения. Норма $\|J\|$ трансформатора $J \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$ равна единице, так как, с одной стороны, $\|JX\|_2^2 \leq \|X\|_2^2$, а с другой стороны, если $X = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X P_i$, то $\|JX\|_2^2 = \|X\|_2^2$.

Покажем, что $J^2 = J$:

$$J(JX) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_j \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X P_i \right) P_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_j X P_j = JX.$$

Проверим свойства определения 2.3, относящиеся к трансформатору $\Gamma \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$. Для проверки свойства (3) вычислим матрицы операторов $L_0 \Gamma X$, $\Gamma X L_0$, $X - JX$. Очевидно, что

$$(L_0 \Gamma X)_{ij} = \frac{\lambda_i X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad (\Gamma X L_0)_{ij} = \frac{\lambda_j X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad (X - JX)_{ij} = X_{ij}, \quad i \neq j.$$

При $i = j$ все три элемента равны нулю. Тогда

$$\frac{\lambda_i X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} - \frac{\lambda_j X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} = X_{ij}, \quad i \neq j.$$

Таким образом, условие (2.1) выполнено.

Из формулы (4.2) следует, что $\|\Gamma\|$ оценивается величиной $\omega/(2\pi)$. Операторы $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y$ для $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ принадлежат $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\|X\Gamma Y\|_2 \leq (\omega/(2\pi))\|X\|_2\|Y\|_2$; $\|(\Gamma X)Y\|_2$ оценивается той же величиной. Свойство (4) выполняется.

Пусть $\lambda_0 \in \rho(L_0)$, $x \in D(L_0)$. Тогда $x = (L_0 - \lambda_0 I)^{-1}y$, $y \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \Gamma X(L_0 - \lambda_0 I)^{-1}y &= \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z}, \\ n \neq m}} \frac{X_{mn}}{(\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_0)} y = \\ &= \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z}, \\ n \neq m}} \frac{X_{mn}}{(\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_m - \lambda_0)} y + \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z}, \\ n \neq m}} \frac{X_{mn}}{(\lambda_m - \lambda_0)(\lambda_n - \lambda_0)} y = \\ &= (L_0 - \lambda_0 I)^{-1}(\Gamma X)y + (L_0 - \lambda_0 I)^{-1}(X - JX)x = (L_0 - \lambda_0 I)^{-1}(\Gamma Xy + (X - JX)x). \end{aligned}$$

Таким образом, $(\Gamma X)D(L_0) \subset D(L_0)$.

Переходим к свойству (5). Пусть $Z = (\Gamma X)(JY)$, $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда

$$Z_{ij} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\Gamma X)_{ip} (JX)_{pj} = \begin{cases} X_{ij} X_{jj}/(\lambda_i - \lambda_j), & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases}$$

поэтому $J(\Gamma X(JY)) = 0$.

Рассмотрим последнее, шестое свойство определения 2.3. Пусть $\lambda_\varepsilon \in \rho(L_0)$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Оператор $X(L_0 - \lambda_\varepsilon I) \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеет операторную матрицу, состоящую из элементов $X_{ij}/(\lambda_i - \lambda_\varepsilon)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$\|X(L_0 - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_2^2 \leq \frac{1}{\max_{j \in \mathbb{Z}} (\lambda_i - \lambda_j)} \|X\|_2^2.$$

Последнюю величину можно сделать сколь угодно малой за счет подходящего выбора числа $\lambda_\varepsilon \in \rho(L_0)$. Теорема 4.1 доказана. $\square$

Положим

$$P_{(k)} = \sum_{\substack{|i| \leq k, \\ i \in \mathbb{Z}}} P_i, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Наряду с трансформаторами $J, \Gamma \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$ введем в рассмотрение семейства операторов $J_k, \Gamma_k \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, определенных формулами

$$J_k X = P_{(k)} X P_{(k)} + \sum_{\substack{|i| > k, \\ i \in \mathbb{Z}}} P_i X P_i, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad (4.3)$$

$$\Gamma_k X = \Gamma X - P_{(k)} (\Gamma X) P_{(k)} = \Gamma(X - J_k X), \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad (4.4)$$

при этом $J_0 X = JX$, $\Gamma_0 X = \Gamma X$. Операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X$, $k \in \mathbb{Z}_+$, определены корректно, все указанные ряды сходятся в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Отметим, что операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X$ отличаются от операторов JX и ΓX на оператор конечного ранга $2k + 1$. Аналогично предыдущему, имеет место следующая теорема.

Теорема 4.2. *Тройка $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \Gamma_k X, J_k X)$ является допустимой для оператора L_0 тройкой при любом $k \in \mathbb{Z}_+$.*

5. Построение семейства допустимых троек $(\mathcal{M}_B, J_k, \Gamma_k)$. Ниже будем использовать пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}_B$, впервые введенные в [9]. Основные результаты в [11–13, 24, 25, 27] также получены с использованием этих пространств. Чтобы описать их, для любого ненулевого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ введем в рассмотрение двустороннюю последовательность вещественных чисел вида

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-1/2} \max \left\{ \left(\sum_{\substack{|k| \geq n, \\ k \in \mathbb{Z}}} \|P_k X\|_2^2 \right)^{1/4}, \left(\sum_{\substack{|k| \geq n, \\ k \in \mathbb{Z}}} \|X P_k\|_2^2 \right)^{1/4} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

Последовательность $(\alpha_n(X))$, $n \in \mathbb{Z}$, обладает следующими свойствами:

- (1) $\alpha_n(X) = \alpha_{-n}(X)$, $n \in \mathbb{Z}$;
- (2) $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \alpha_n(X) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$;
- (3) $\alpha_n(X) \leq 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}$;
- (4) $\alpha_n(X) \geq \alpha_{n+1}(X)$, $n \geq 0$;
- (5) $\alpha_n(X) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, если $P_{(m)} X P_{(m)} \neq X$ для всех $m \in \mathbb{Z}_+$;
- (6) конечна величина

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\|X P_n\|_2^2 + \|P_n X\|_2^2}{(\alpha_n(X))^2}.$$

Без ограничения общности можно в дальнейшем считать, что $P_{(n)} B P_{(n)} \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$; в противном случае оператор $L_0 - B$ есть ортогональная сумма оператора конечного ранга $(L_0 - B)|_{\mathcal{H}_{(n)}}$ для некоторого $n \geq 0$ и оператора $L_0|_{\mathcal{H}^{(n)}}$, где $\mathcal{H}_{(n)} = P_{(n)} \mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^{(n)} = (I - P_{(n)}) \mathcal{H}$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим самосопряженный компактный оператор F_X , определенный формулой

$$F_X = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n(X) P_n.$$

Отметим, что $F_X \in \text{End } \mathcal{H}$ есть функция от нормального оператора L_0 вида $F_X = f_X(L_0)$, где $f_X : \sigma(L_0) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f_X(\lambda_n) = \alpha_n(X)$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\|F_X\| = \max_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n(X)| = 1$.

Для упрощения дальнейшей записи оператор F_B обозначим через F .

Введем множество операторов $\mathcal{M}_B$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, допускающих представление вида

$$X = X_l F, \quad X = F X_r,$$

где $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Положим $\|X\|_{\mathcal{M}_B} = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$. Очевидно, что $\|X\|_2 \leq \|X\|_{\mathcal{M}_B}$, $X \in \mathcal{M}_B$.

Свойство $\text{Ker } F = 0$ (см. свойство (5) последовательности $\alpha_n(X)$) позволяет заключить, что введенное множество операторов $\mathcal{M}_B$ является банаховым пространством.

Очевидно, что для любого оператора X из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеет место представление

$$X = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n(X)} X P_n \right) F_X = F_X \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n(X)} P_n X \right).$$

Поэтому возмущение B принадлежит пространству $\mathcal{M}_B$.

Отметим, что последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ характеризует скорость убывания матричных элементов оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ по строкам и столбцам.

Поскольку $\mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то трансформаторы J_k и Γ_k , $k \geq 0$, задаваемые формулами (4.1), (4.3), (4.4), определены и для операторов из $\mathcal{M}_B$. Более того, подпространство $\mathcal{M}_B$ инвариантно относительно J_k и Γ_k , $k \geq 0$, и

$$\begin{aligned} J_k(X_l F) &= (J_k X_l) F, & J_k(F X_r) &= F(J_k X_r), \\ \Gamma_k(X_l F) &= (\Gamma_k X_l) F, & \Gamma_k(F X_r) &= F(\Gamma_k X_r), \end{aligned}$$

где $X_r, X_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Для оценки норм $\|\Gamma_k(XF)\|_2$ и $\|\Gamma_k(FX)\|_2$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, рассмотрим две последовательности (α'_n) , $n \in \mathbb{N}$, и $(\tilde{\alpha}'_n)$, $n \in \mathbb{N}$, определенные формулами

$$\alpha'_{n+1} = \max \{ \lambda_l d_{jl}^{-1}, l, j \in \mathbb{Z}, |l| \leq n, |j| > n \}, \quad (5.2)$$

$$\tilde{\alpha}'_n = \frac{\omega}{2\pi} \alpha_n + \alpha'_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

где $d_{ij} = \text{dist}(\sigma_i, \sigma_j)$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Последовательности (α'_n) и $(\tilde{\alpha}'_n)$ принадлежат пространству c_0 сходящихся к нулю последовательностей, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}'_n = 0. \quad (5.4)$$

Следующая лемма является аналогом леммы 3 из [9].

Лемма 5.1. Для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеют место оценки

$$\max \{ \|\Gamma_k(XF)\|_2, \|\Gamma_k(FX)\|_2 \} \leq \tilde{\alpha}_{k+1} \|X\|_2.$$

Доказательство. Пусть $P^{(k)} = I - P_{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, — дополнительный к $P_{(k)}$ проектор. Тогда

$$\|FP^{(k)}\| = \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n P_n P^{(k)} \right\| \leq \alpha_{k+1}.$$

Из определения трансформатора Γ_k следует

$$\Gamma_k(XF) = \Gamma_k(XFP^{(k)}) + \Gamma_k(P^{(k)}XFP_{(k)}).$$

Выпишем матрицы операторов $\Gamma_k(XFP^{(k)})$, $\Gamma_k(P^{(k)}XFP_{(k)})$:

$$\begin{aligned} (\Gamma_k(XFP^{(k)}))_{jl} &= \begin{cases} \alpha_l X_{jl} / (\lambda_j - \lambda_l), & |l| > k, l \neq j, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ (\Gamma_k(P^{(k)}XFP_{(k)}))_{jl} &= \begin{cases} \alpha_l X_{jl} / (\lambda_j - \lambda_l), & |l| \leq k, |j| > k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\Gamma_k(XFP^{(k)})\|_2 \leq \frac{\omega}{2\pi} \alpha_{k+1} \|X\|_2^2, \quad \|\Gamma_k(P^{(k)}XFP_{(k)})\|_2 \leq \alpha'_{k+1} \|X\|_2^2.$$

Таким образом, для $\|\Gamma_k XF\|_2$ оценка установлена. Аналогично и той же величиной оценивается $\|\Gamma_k(FX)\|_2$. Лемма 5.1 доказана. $\square$

Теорема 5.1. *Тройка $(\mathcal{M}_B, J_k, \Gamma_k)$ является допустимой тройкой для невозмущенного оператора L_0 для любого $k \in \mathbb{Z}_+$, а постоянная $\gamma = \gamma_k$ из определения 2.3 допускает оценку*

$$\gamma_k \leq \tilde{\alpha}'_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Ранее было установлено, что $\mathcal{M}_B$ является банаховым пространством. Из вложения $\mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует, что $\mathcal{M}_B \subset \mathfrak{L}_{L_0}(\mathcal{H})$.

Выполнение свойств (2), (3) и (5) следует из построения трансформаторов $J_k, \Gamma_k \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$, $k \geq 0$.

Перейдем к свойству (4). Пусть $X = X_l F \in \mathcal{M}_B$, $Y = Y_l F \in \mathcal{M}_B$, $X_l, Y_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда $X\Gamma_k Y = X_l F \Gamma_k Y_l F = Z_l F$, где $Z_l = X_l F \Gamma_k Y_l$. Из леммы 5.1 следует, что

$$\|Z_l\|_2 \leq \tilde{\alpha}'_{k+1} \|X_l\|_2 \|Y_l\|_2 \leq \tilde{\alpha}'_{k+1} \|X\|_{\mathcal{M}_B} \|Y\|_{\mathcal{M}_B}.$$

Аналогично устанавливаются остальные оценки в свойстве (4). Теорема 5.1 доказана. $\square$

6. Основные результаты. Отметим, что в данном случае операторы L_0 и B не являются самосопряженными, поэтому мы будем использовать оператор преобразования $U = I + \Gamma X$ и уравнение (2.6).

Из теорем 4.1 и 2.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Пусть для оператора B выполнено условие*

$$\|B\|_2 < \frac{\pi}{2\omega}. \quad (6.1)$$

Тогда оператор $L_0 - B$ подобен оператору $L_0 - J_k X_ = L_0 - V$, $X_*, V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, имеющему диагональную операторную матрицу. Имеет место равенство*

$$(L_0 - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(L_0 - V),$$

где оператор $X_ \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение нелинейного операторного уравнения (2.6).*

Отметим, что условие (6.1) довольно жесткое и не всегда выполняется. Поэтому обычно бывает удобно рассмотреть допустимую тройку $(\mathcal{M}_B, J_k, \Gamma_k)$ из раздела 5.

Теорема 6.2. *Пусть целое число $k \geq 0$ таково, что выполняется неравенство*

$$4\tilde{\alpha}'_{k+1} \|B\|_{\mathcal{M}_B} < 1.$$

Тогда оператор $L_0 - B$ подобен блочно-диагональному оператору

$$L_0 - J_k X_* = L_0 - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{\substack{|i| > k, \\ i \in \mathbb{Z}}} P_i X_* P_i = L_0 - V,$$

где $X_ \in \mathcal{M}_B$ — решение нелинейного уравнения (2.6). Оператор преобразования оператора $L_0 - B$ в оператор $L_0 - V$ есть оператор $I + \Gamma X_*$, $\Gamma X_* \in \mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

Далее через $l_p = l_p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p < \infty$, обозначим банахово пространство двусторонних числовых последовательностей $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, суммируемых со степенью p , с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^p \right)^{1/p}, \quad x \in l_p.$$

Из теорем 6.1, 6.2 и леммы 2.1 получаются следующие утверждения, касающиеся асимптотики спектра возмущенного оператора L .

Теорема 6.3. Пусть выполнено условие (6.1). Тогда спектр $\sigma(L)$ оператора L представим в виде объединения простых изолированных собственных значений $\tilde{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\sigma(L) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\tilde{\lambda}_n\},$$

где

$$\tilde{\lambda}_n = i \frac{2\pi n}{\omega} - (Be_n, e_n) + \beta_n, \quad (6.2)$$

и последовательность (β_n) принадлежит l_1 .

Доказательство. Первое утверждение теоремы 6.3 следует из теоремы 6.1 и леммы 2.1. Для доказательства формулы (6.2) применим к обеим частям уравнения (2.6) проекторы P_n слева и справа и, учитывая свойство (5) определения 2.3, получим

$$P_n X_* P_n = P_n (B \Gamma_m X_*) P_n + P_n B P_n. \quad (6.3)$$

При этом оператор $B \Gamma X_* \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ как произведение двух операторов Гильберта—Шмидта. Напомним также, что оператор $L_0 - J X_*$ диагональный и образ проектора P_n , $n \in \mathbb{Z}$, одномерный. Следовательно,

$$\sigma(L_0 - J X_*) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\lambda_n - x_{*nn}\},$$

где $x_{*nn} = (X_* e_n, e_n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Из (6.3) вытекает, что $x_{*nn} = (Be_n, e_n) + \beta_n$, $n \in \mathbb{Z}$, где последовательность β_n принадлежит l_1 . Теорема 6.3 доказана. $\square$

Теорема 6.4. В условиях теоремы 6.2 спектр $\sigma(L)$ оператора L представим в виде

$$\sigma(L) = \tilde{\sigma}_{(n)} \cup \{\tilde{\lambda}_k, |k| > n\},$$

где множество $\tilde{\sigma}_{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, содержит не более чем $2n + 1$ собственных значений, собственные значения $\tilde{\lambda}_k$, $|k| > n$, простые изолированные,

$$\tilde{\lambda}_k = i \frac{2\pi k}{\omega} - (Be_k, e_k) + \beta'_k,$$

и последовательность β'_k принадлежит l_1 .

Теорема 6.5. Собственные векторы $\tilde{e}_i$, $i \in \mathbb{Z}$, оператора L образуют в пространстве $\mathcal{H}$ базис Бари (в частности, базис Рисса) и p -базис для $p \geq 1$. Имеют место следующие формулы:

$$\tilde{e}_i = e_i + \Gamma_k X_* e_i, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

где X_* — решение нелинейного операторного уравнения (2.6),

$$\|\tilde{e}_i - e_i\| = \delta_i, \quad |i| > k,$$

$$\|\tilde{e}_i - e_i - \Gamma_k B e_i\| = \left\| \tilde{e}_i - e_i + \frac{i\omega}{2\pi} \sum_{j \neq i} \frac{B e_j}{j - i} e_j \right\| = \delta'_i, \quad |i| > k.$$

где последовательность δ_i , $|i| > k$, принадлежит l_2 , а последовательность δ'_i , $|i| > k$, принадлежит l_1 .

Утверждение теоремы 6.5 следует из леммы 2.1 и принадлежности оператора ΓX_* идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, а оператора $\Gamma(X_* - B)$ идеалу $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

Перейдем к оценке спектральных проекторов. Обозначим через Ω произвольное множество из $\mathbb{Z} \setminus \{-k, \dots, 0, 1, \dots, k\}$. Для множества $\Delta = \Delta(\Omega) = \{\lambda_n, n \in \Omega\}$ проектор $P_\Delta = P(\Delta, L_0)$ определим равенством

$$P_\Delta x = \sum_{n \in \Omega} P_n x, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Аналогично,

$$\tilde{P}_i = P(\{\tilde{\lambda}_i\}, L), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad \tilde{P}_{(k)} = P(\tilde{\sigma}_k, L), \quad \tilde{P}_\Delta x = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{P}_i x, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Лемма 6.1. Пусть имеют место условия теоремы 6.1. Тогда для спектральных проекторов $\tilde{P}_i$, $|i| > k$, $\tilde{P}_{(k)}$ и $\tilde{P}_\Delta$ справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_i &= P_i U^{-1} + \Gamma X_* P_i U^{-1}, & \tilde{P}_i - P_i &= (\Gamma_k X_* P_i - P_i \Gamma_k X_*) U^{-1}, \\ \tilde{P}_{(k)} &= P_{(k)} U^{-1} + \Gamma_k X_* P_{(k)} U^{-1}, & \tilde{P}_{(k)} - P_{(k)} &= (\Gamma_k X_* P_{(k)} - P_{(k)} \Gamma_k X_*) U^{-1}, \\ \tilde{P}_\Delta &= P_\Delta U^{-1} + \Gamma_k X_* P_\Delta U^{-1}, & \tilde{P}_\Delta - P_\Delta &= (\Gamma_k X_* P_\Delta - P_\Delta \Gamma_k X_*) U^{-1}.\end{aligned}$$

Все приведенные в лемме 6.1 формулы следуют из представления проекторов подобных операторов в виде $\tilde{P}_i = U P_i U^{-1}$, $|i| > k$; аналогично для проекторов $\tilde{P}_{(k)}$ и $\tilde{P}_\Delta$.

Непосредственно из леммы 6.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6.6. В условиях теорем 6.1 и 6.2 для спектральных проекторов $\tilde{P}_j$, $j > k$, и $\tilde{P}_\Delta$ имеют место оценки

$$\|\tilde{P}_j - P_j\|_2 \leq M \nu(j),$$

где $\nu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ — последовательность из l_2 и M — некоторая константа.

Доказательство. Так как

$$\|\tilde{P}_j - P_j\|_2 \leq \|U^{-1}\| (\|\Gamma_k X_* P_j\|_2 + \|P_j \Gamma_k X_*\|_2) \leq M \max \{\|X_* P_j\|_2, \|P_j X_*\|_2\},$$

то оценка установлена. При этом последовательности $\|X_* P_j\|_2$, $|j| > k$, а также $\|P_j X_*\|_2$, $|j| > k$, суммируемы с квадратом, так как $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. $\square$

В заключение этого раздела отметим, что аналогично [11, 25, 27] можно выписать группу операторов, генератором которой является исследуемый оператор L .

7. Пример. Пусть $\omega = 1$ и

$$(By)(t) = C \int_0^1 t(t+s)y(s) ds,$$

где $C > 0$ — некоторая константа. Непосредственный подсчет показывает, что $\|B\|_2 = C\sqrt{101/180}$ и возмущение B имеет числовую матрицу $B \sim (b_{nm})$, $n, m \in \mathbb{Z}$, состоящую из элементов

$$b_{nm} = \begin{cases} \frac{C}{4\pi^2 nm}, & n, m \neq 0, \\ \frac{7C}{12}, & n = m = 0, \\ -\frac{iC}{4\pi m}, & n = 0, m \neq 0, \\ \frac{3iC}{4\pi n} + \frac{C}{2\pi^2 n^2}, & n \neq 0, m = 0. \end{cases}$$

Возмущение B не является самосопряженным оператором, и сопряженный оператор B^* задается формулой

$$(B^*y)(t) = \int_0^1 s(t+s)y(s) ds.$$

Из теорем 6.1–6.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.1. Пусть число C таково, что выполняется условие

$$\frac{2C}{\pi} \sqrt{\frac{101}{180}} < 1. \quad (7.1)$$

Тогда оператор L подобен оператору $L_0 - V$, где $V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, оператор $V = JX_*$ имеет диагональную матрицу и X_* есть решение уравнения (2.6). Имеют место следующие оценки собственных значений оператора L :

$$\tilde{\lambda}_0 = -\frac{7C}{12} + \beta_0, \quad \tilde{\lambda}_n = i2\pi n - \frac{C}{4\pi^2 n^2} + \beta_n,$$

где последовательность $(\beta_n, n \in \mathbb{Z})$ принадлежит l_1 .

Если же число C не удовлетворяет условию (7.1), то оператор L подобен блочно-диагональному оператору $L_0 - \tilde{V}$, где $\tilde{V} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $\tilde{V} = J_k X_*$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}_+$ и оператор $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного уравнения (2.6) с операторами $J_k, \Gamma_k \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$. Имеют место оценки

$$\tilde{\lambda}_n = i2\pi n - \frac{C}{4\pi^2 n^2} + \beta_n, \quad |n| > k,$$

и последовательность $(\beta_n, |n| > k)$ принадлежит l_1 .

Отметим также, что в работах [11–13, 24, 25, 27], использующих последовательность α_n из раздела 5, обычно не приводится конкретный вид этой последовательности. Ниже мы выпишем для рассматриваемого примера последовательность $\alpha_n(B)$, $n \in \mathbb{Z}$. Сначала необходимо вычислить нормы операторов $\|BP_n\|_2$ и $\|P_n B\|_2$, $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что в силу одномерности образов проекторов P_n , $n \in \mathbb{Z}$, имеем $\|BP_n\|_2 = \|Be_n\|$ и $\|P_n B\|_2 = \|B^*e_n\|$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} (Be_n)(t) &= \frac{t}{i2\pi n}, & (Be_0)(t) &= \frac{1}{2}(2t^2 + t), \\ (B^*e_n)(t) &= \frac{t+1}{i2\pi n} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}, & (B^*e_0)(t) &= \frac{t}{2} + \frac{1}{3}, \\ \|Be_n\|^2 &= \frac{1}{12\pi^2 n^2}, & \|B^*e_n\| &= \frac{1}{4\pi^4 n^4} + \frac{7}{12\pi^2 n^2}, \\ \|Be_0\|^2 &= \frac{8}{15}, & \|B^*e_0\| &= \frac{13}{36}, \\ \sum_{|j|>n} \|BP_j\|^2 &= \sum_{|j|>n} \frac{1}{12\pi^2 j^2} \leq \frac{1}{36\pi^2(n-1)}, \quad n > 1, \\ \sum_{|j|>n} \|P_j B\|^2 &= \sum_{|j|>n} \left(\frac{1}{4\pi^4 j^4} + \frac{7}{12\pi^2 j^2} \right) \leq \frac{1}{20\pi^4(n-1)^5} + \frac{7}{36\pi^2(n-1)^3}. \end{aligned}$$

Тогда $\alpha_n(B)$ при $|n| > 1$ допускает оценку

$$\alpha_n(B) \leq \left(\frac{180}{101} \left(\frac{1}{20\pi^4(n-1)^5} + \frac{7}{36\pi^2(n-1)^3} \right) \right)^{1/4}.$$

Последовательность $\alpha_n(B)$ характеризует скорость убывания матричных элементов возмущения B . Так как решение нелинейного операторного уравнения (2.6) также принадлежит $\mathcal{M}_B$, то неизвестный оператор X_* наследует эту скорость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. Г. Замена Крылова—Боголюбова в теории возмущений линейных операторов/ Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. — М., 1980.
2. Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов// Сиб. мат. ж. — 1983. — 24, № 1. — С. 21–39.
3. Баскаков А. Г. Замена Крылова—Боголюбова в теории возмущений линейных операторов// Укр. мат. ж. — 1984. — 36. — С. 601–611.
4. Баскаков А. Г. Метод усреднения в теории возмущений линейных дифференциальных операторов// Диффер. уравн. — 1985. — 21, № 4. — С. 555–562.
5. Баскаков А. Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — 50, № 3. — С. 435–457.
6. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж: ВГУ, 1987.
7. Баскаков А. Г. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 1994. — 58, № 4. — С. 3–32.
8. Баскаков А. Г. Об абстрактном аналоге преобразования Крылова—Боголюбова в теории возмущений линейных операторов// Функц. анализ. прилож. — 1999. — 32, № 2. — С. 76–80.
9. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Дирака с негладким потенциалом// Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — 75, № 3. — С. 3–28.

10. Баскаков А. Г., Поляков Д. М. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом// Мат. сб. — 2017. — 208, № 1. — С. 3–47.
11. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка и группы операторов// Уфим. мат. ж. — 2018. — 10, № 3. — С. 11–34.
12. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Обобщенный метод Фурье для системы дифференциальных уравнений первого порядка и группы операторов// Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 2. — С. 276–280.
13. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Спектральный анализ дифференциальных операторов с инволюцией и группы операторов// Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 9. — С. 1287–1291.
14. Бурлуцкая М. Ш. О смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями// Ж. выч. мат. мат. физ. — 2014. — 54, № 1. — С. 3–12.
15. Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией// Докл. РАН. — 2007. — 414, № 3. — С. 443–446.
16. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией// Докл. РАН. — 2010. — 435, № 2. — С. 151–154.
17. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией// Ж. выч. мат. мат. физ. — 2011. — 51, № 12. — С. 2233–2245.
18. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка// Докл. РАН. — 2011. — 441, № 2. — С. 156–159.
19. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Теорема Штейнгауза о равносходимости для функционально-дифференциальных операторов// Мат. заметки. — 2011. — 90, № 1. — С. 22–33.
20. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями// Докл. РАН. — 2014. — 454, № 1. — С. 15–17.
21. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
22. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
23. Ускова Н. Б. К одному результату Р. Тернера// Мат. заметки. — 2004. — 76, № 6. — С. 905–917.
24. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Romanova E. Yu. Spectral analysis of a differential operator with an involution// J. Evolut. Eqs. — 2017. — 17. — P. 669–684.
25. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group// J. Oper. Matr. — 2018. — 12, № 3. — P. 723–756.
26. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. General Dirac operators as generators of operator groups/ arXiv: 1806.10831 [math.SP].
27. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices/ arXiv: 1812.10331 [math.SP].
28. Friedrichs K. O. Lectures on Advanced Ordinary Differential Equations. — New York: Gordon and Breach, 1965.
29. Turner R. F. L. Perturbation of compact spectral operators// Commun. Pure. Appl. Math. — 1965. — 18. — P. 519–541.

Баскаков Анатолий Григорьевич

Воронежский государственный университет;

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Криштал Илья Аркадьевич

Университет Северного Иллинойса, Де-Калб, Иллинойс, США

E-mail: ikrishtal@niu.edu

Ускова Наталья Борисовна

Воронежский государственный технический университет

E-mail: nat-uskova@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 19–37
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-19-37

УДК 517.956.45

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ О. А. ЛАДЫЖЕНСКОЙ

© 2019 г. Р. Р. БУЛАТОВА

Аннотация. В статье изложены результаты изучения системы уравнений пограничного слоя нелинейно вязкой электропроводящей жидкости с реологическим законом, предложенным О. А. Ладыженской для несжимаемых сред. Впервые уравнения пограничного слоя для модели Ладыженской были выведены на основании аксиом Прандтля; при помощи преобразования Мизеса система уравнений пограничного слоя может быть сведена к одному квазилинейному уравнению. Основой методов, применяемых в данной работе, является преобразование Крокко, которое переводит систему уравнений пограничного слоя в квазилинейное вырождающееся параболическое уравнение, но в отличие от переменных Мизеса замена переменных Крокко позволяет изучать как стационарные, так и нестационарные уравнения.

Ключевые слова: симметричный пограничный слой, уравнения О. А. Ладыженской, преобразование Крокко, электропроводящая жидкость.

O. A. LADYZHENSKAYA'S SYSTEM OF EQUATIONS OF SYMMETRIC BOUNDARY LAYER OF MODIFIED FLUID

© 2019 R. R. BULATOVA

ABSTRACT. In this paper, we study the system of equations of a boundary layer for a nonlinearly viscous, electrically conductive fluid described by a rheological law proposed by O. A. Ladyzhenskaya for incompressible media. The boundary-layer equations for the Ladyzhenskaya model were first obtained from Prandtl's axioms. By the Mises transform, the system of boundary-layer equations can be reduced to a single quasilinear equation. The main method used in this paper is the Crocco transform, which turns the system of boundary-layer equations into a quasilinear degenerate parabolic equation. In contrast to the Mises variables, the Crocco substitution allows one to study both stationary and nonstationary equations.

Keywords and phrases: symmetric boundary layer, O. A. Ladyzhenskaya's equations, Crocco transform, electrically conductive liquid.

AMS Subject Classification: 35K55

1. Введение. В ряде областей гидродинамики, механики и физики по сей день возникает необходимость изучения движений электропроводящих жидкостей. К таким областям относятся авиационная и судостроительная техника, разработка магнитогидродинамических генераторов электрической энергии, электромагнитных насосов, используемых для перекачки жидких металлов или плазменных ускорителей. Магнитная гидродинамика интересна нам тем, что она дополнена силами электромагнитной природы, которые, в свою очередь, позволяют управлять потоком. Например, в авиационной и судостроительной технике особенно важными являются течения при больших числах Рейнольдса, когда влияние вязкости играет значительную роль в слое, плотно

примыкающем к поверхности обтекаемого тела. А под действием достаточно сильного магнитного поля можно предотвратить возникновение турбулентности в пограничном слое и избежать выхода его во внешний поток.

В настоящей работе рассматривается система уравнений, которая описывает динамику маловязкой электропроводящей среды в окрестности критической точки обтекаемого тела в случае двумерного симметричного потока и называется системой уравнений пограничного слоя. Критической точкой в этой теории называется точка, в которой скорость внешнего потока равна нулю. В данной статье применяется преобразование Крокко, которое приводит систему уравнений Прандтля к уравнению в конечной области с нелинейными граничными условиями. Решения этих нелинейных граничных задач построены методом прямых с дискретизацией переменной.

2. Преобразование Крокко. В случае двумерного стационарного течения модифицированная система уравнений электропроводящей жидкости имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \nu \left(1 + 3d \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + B^2(U - u) = -U \frac{dU}{dx}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь ν , d — постоянные, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости ρ и проводимость среды σ предполагаются равными единице, $U(x)$ и $B(x)$ — заданные функции. Функция скорости внешнего потока $U(x)$ связана с давлением $p(x)$ и компонентой электрического поля $B(x)$ соотношением

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx} - E \frac{B}{\sigma} - B^2 U$$

Система уравнений (2.1) рассматривается в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad u(x, y) \rightarrow U(x) \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

где $U(0) = 0$, $U(x) > 0$ при $x > 0$. Пусть функция $U_x(x)$ измерима и ограничена, $U_x(0) > 0$, функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ предполагаются заданными. Условия $U(0) = 0$ и $u(0, y) = 0$ определяют точку $x = 0$ как точку, в которой происходит остановка внешнего потока жидкости и симметрический слой симметричен относительно этой точки. Далее будем предполагать, что $U(x) = xV(x)$, $V(x) > 0$, и функции V , V_x , v_0 ограничены при $0 \leq x \leq X$.

Определение 2.1. Классическим решением задачи (2.1), (2.2) называется пара функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, обладающих следующими свойствами: u непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, v непрерывна в D и по y в $\overline{D}$; u и v имеют в D непрерывные производные, входящие в уравнение (2.1); удовлетворяют поточечно уравнениям (2.1) и граничным условиям (2.2).

Задачу (2.1), (2.2) сведем к некоторой вспомогательной краевой задаче для одного квазилинейного уравнения.

Введем новые независимые переменные ξ , η и новую неизвестную функцию $w(\xi, \eta)$:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{u(x, y)}{U(x)}, \quad w(\xi, \eta) = \frac{u_y(x, y)}{U(x)}. \quad (2.3)$$

Исключим v из системы уравнений (2.1), продифференцировав эти уравнения по y :

$$\nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yyy} + \nu u_{yy} 6du_{yy}u_y - u_y u_x - u u_{xy} - v_y u_y - v u_{yy} - B^2 u_y = 0.$$

Из системы уравнений (2.1) находим

$$v = \frac{1}{u_y} \left(-u u_x + \nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yy} + B^2(U - u) + U U_x \right), \quad v_y = -u_x.$$

Из этих трех равенств выводим

$$\begin{aligned} & \nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yyy} - \nu(1 + 3d(u_y)^2)\frac{u_{yy}^2}{u_y} + \nu u_{yy}^2 6du_y - \left(uu_{xy} - \frac{u_{yy}}{u_y} uu_x \right) - \\ & - \frac{u_{yy}}{u_y} UU_x - \frac{u_{yy}}{u_y} B^2(U - u) - B^2 u_y = \nu(1 + 3d(u_y)^2) \frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y} - u \frac{u_{xy}u_y - u_{yy}u_x}{u_y} + \\ & + 6\nu du_y u_{yy}^2 - \frac{u_{yy}}{u_y} UU_x - \frac{u_{yy}}{u_y} B^2 U + \frac{u_{yy}}{u_y} B^2 u - B^2 u_y = 0. \end{aligned}$$

Вернемся к соотношениям (2.3), из которых получим

$$\begin{aligned} u &= \eta U, \quad u_y = wU, \quad x = \xi, \quad u_{yy} = w_\eta \eta_y U = w_\eta u_y, \quad \frac{u_{yy}}{u_y} = w_\eta, \\ u_{yyy} &= w_{\eta\eta} \eta_y u_y + w_\eta u_{yy} = w_{\eta\eta} \frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy}; \\ u_{yx} &= wU_\xi + Uw_\xi + w_\eta u_\xi - w_\eta u \frac{U_\xi}{U}, \quad u_y u_{yy}^2 = w_\eta^2 w^3 U^3, \\ \frac{u_{xy}u_y - u_x u_{yy}}{u_y} &= w_\xi U + wU_\xi - w_\eta u_\xi + w_\eta u_\xi - w_\eta \eta U_\xi, \\ \frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y} &= w_{\eta\eta} \frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy} - \frac{u_{yy}}{u_y} u_{yy} = w_{\eta\eta} \frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy} - w_\eta u_{yy} = w_{\eta\eta} \frac{u_y^2}{U^2} U = w_{\eta\eta} w^2 U, \\ -\frac{u}{U} \left(\frac{u_{xy}u_y - u_x u_{yy}}{u_y} + \frac{u_{yy}}{u_y} UU_x \right) &= -\frac{u}{U} (w_\xi U + wU_\xi - w_\eta \eta U_\xi) - w_\eta U_\xi = \\ &= -\eta w_\xi U - \eta w U_\xi + \eta^2 w_\eta U_\xi - w_\eta U_\xi = (\eta^2 - 1)w_\eta U_\xi - \eta w_\xi U - \eta w U_\xi, \\ \frac{u_{yy}}{u_y} B^2 u - \frac{u_{yy}}{u_y} B^2 U &= w_\eta B^2 u - w_\eta B^2 U = w_\eta B^2 \eta - w_\eta B^2 = (\eta - 1)B^2 w_\eta, \\ B^2 u_y &= B^2 \frac{u_y}{U} U = B^2 wU. \end{aligned}$$

Преобразуем граничные условия. Имеем

$$\begin{aligned} v u_y &= -u u_x + \nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yy} + UU_x + B^2 U - B^2 u, \\ v \frac{u_y}{U} &= -u \frac{u_x}{U} + \nu(1 + 3d(u_y)^2) \frac{u_{yy}}{U} + U_x + B^2 - B^2 \frac{u}{U}, \\ v \frac{u_y}{U} &= -u \frac{u_x}{U} + \nu \left(\frac{u_y}{U} + 3d \frac{u_y^3}{U^3} U^2 \right) \frac{u_{yy}}{u_y} + U_x + B^2 - B^2 \frac{u}{U}, \\ v w &= -u \frac{u_\xi}{U} + \nu(w + 3dU^2 w^3)w_\eta + U_\xi + B^2 - B^2 \eta. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $u(x, 0) = 0$ и, следовательно, из $y = 0$ вытекает $\eta = 0$.

Таким образом, из того факта, что $y = 0$, следует

$$\nu(1 + 3dU^2 w^2)w w_\eta - v w + U_\xi + B^2 = 0.$$

В итоге, учитывая (2.2), выводим квазилинейное уравнение

$$\nu(1 + 3dU^2 w^2)w^2 w_{\eta\eta} - \eta U w_\xi + (\eta^2 - 1)U_\xi w_\eta - \eta U_\xi w + 6\nu dU^2 w_\eta^2 w^3 + (\eta - 1)B^2 w_\eta - B^2 U w = 0 \quad (2.4)$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X, 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$w(\xi, 1) = 0, \quad \left(\nu w w_\eta (1 + 3dU^2 w^2) - v_0(\xi)w + U_\xi + B^2 \right) \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (2.5)$$

Определение 2.2. Функция $w(\xi, \eta)$ называется *решением* задачи (2.4), (2.5), если она непрерывна в $\overline{\Omega}$ и имеет непрерывные производные $w_\xi, w_\eta, w_{\eta\eta}$ в Ω ; w_η непрерывна по η при $\eta = 0$; w удовлетворяет уравнению (2.4) в Ω и граничным условиям (2.5).

3. Теорема о существовании решения задачи.

Теорема 3.1. Пусть U и v_0 удовлетворяют условиям, приведенным выше. Тогда задача (2.4), (2.5) в области Ω , где X зависит от U , v_0 , ν , имеет решение положительное при $\eta < 1$ обладающее следующими свойствами: $w(\xi, \eta)$ непрерывна $\overline{\Omega}$; ее обобщенные производные w_ξ , w_η , $w_{\eta\eta}$ существуют и удовлетворяют неравенствам

$$Ye^{-C_1\xi} \leq w \leq Ye^{C_2\xi}, \quad Y_\eta e^{C_4\xi} \leq w_\eta \leq Y_\eta e^{-C_5\xi}, \quad (3.1)$$

$$|w_\xi(\xi, \eta)| \leq C_3Y, \quad -C_6 \leq w^2 w_{\eta\eta} \leq -C_7. \quad (3.2)$$

В любой замкнутой области, лежащей внутри Ω , функция w и ее производные, входящие в уравнение (2.4), удовлетворяют условию Гельдера.

Доказательство существования решения задачи (2.4), (2.5) проведем на основе метода прямых, т.е. дискретизацией по ξ и заменой уравнения (2.4) системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для любой функции $f(\xi, \eta)$ введем обозначение

$$f^k = f^k(\eta) \equiv f(kh, \eta), \quad h = \text{const} > 0, \quad k = 0, 1, \dots, [X/h].$$

Уравнения (2.4) с условиями (2.5) заменим системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_k(w) := & \nu \left(1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2 \right) (w^k)^2 w_{\eta\eta}^k - \eta kh V^k \frac{w^k - w^{k-1}}{h} + \\ & + (\eta^2 - 1) (V^k + kh V_\xi^k) w_\eta^k - \eta (V^k + kh V_\xi^k) w^k + 6\nu d(kh)^2 (V^k)^2 (w_\eta^k)^2 (w^k)^3 + \\ & + (\eta - 1) B^2 w_\eta^k - B^2 kh V^k w^k = 0, \quad 0 < \eta < 1, \quad k = 0, 1, \dots, [X/h]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

с граничными условиями

$$w^k(1) = 0, \quad l_k(w) = \left(\nu w^k w_\eta^k (1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2) - v_0^k w^k + (V^k + kh V_\xi^k) + B^2 \right) \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (3.4)$$

Докажем существование решения задачи (3.3), (3.4). В дальнейшем через M_i и K_i будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от h .

Лемма 3.1. Задача (3.3), (3.4) имеет решение $w^k(\eta)$, $k = 0, 1, \dots, [X/h]$, которое непрерывно при $0 \leq \eta \leq 1$ и бесконечно дифференцируемо при $0 \leq \eta < 1$, если $V_x > 0$ при $0 \leq x \leq X$ и V , V_x , v_0 ограничены при $0 \leq x \leq X$. Для этого решения справедлива оценка

$$K_1(1 - \eta) \leq w^k(\eta) \leq K_2(1 - \eta) \sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)} \quad (3.5)$$

при $kh \leq X$, где $h \leq h_0$, $h_0 = \text{const} > 0$, $\mu = \text{const}$, $0 < \mu < 1$.

Доказательство. Решение системы (3.3) с условиями (3.4) получим как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений системы

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon,k}(w) := & \nu \left((1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2) (w^k)^2 + \varepsilon \right) w_{\eta\eta}^k - \\ & - \eta kh V^k \frac{w^k - w^{k-1}}{h} + (\eta^2 - 1) (V^k + kh V_\xi^k) w_\eta^k - \eta (V^k + kh V_\xi^k) w^k + \\ & + 6\nu d(kh)^2 (V^k)^2 (w_\eta^k)^2 (w^k)^3 + (\eta - 1) B^2 w_\eta^k - B^2 kh V^k w^k = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

при $0 < \eta < 1$, $\varepsilon > 0$ с условиями (3.4). Предположив, что задача (3.6), (3.4) имеет решение w^k , положительное при $\eta = 0$, получим для этого решения априорную оценку снизу. Пусть $V_1^k = K_1(1 - \eta)$. Тогда

$$L_{\varepsilon,k}(V_1) = K_1(1 - \eta) \left((V^k + kh V_\xi^k) + B^2 - B^2 kh V^k + 6\nu d(kh)^2 (V^k)^2 K_1^2 K_1^2 (1 - \eta)^2 \right) > 0$$

при $0 \leq \eta < 1$.

Положим

$$\lambda_{\varepsilon,k}(w) \equiv \left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2)w_\eta^k - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{w^k} + \frac{B^2}{w^k} \right) \Big|_{\eta=0}.$$

Тогда

$$\lambda_{\varepsilon,k}(V_1) = \left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(K_1)^2)(-K_1) - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{K_1} + \frac{B^2}{K_1} \right) \Big|_{\eta=0} > 0,$$

если K_1 достаточно мало.

Положим $y^k = V_1^k - w^k$ и покажем, что $y^k \leq 0$. Получим

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon,k}(V_1) - L_{\varepsilon,k}(w) &= \left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2)(w^k)^2 + \varepsilon \right) y_{\eta\eta}^k - \eta(kh)V^k \frac{y^k - y^{k-1}}{h} + \\ &+ (\eta^2 - 1)(V^k + khV_\xi^k)y_\eta^k - \eta(V^k + khV_\xi^k)y^k - B^2khV^ky^k + (\eta - 1)B^2y_\eta^k + \\ &+ 6\nu d(kh)^2(V^k)^2 \left((V_{1\eta}^k)^2((V_1^k)^2 + V_1^kw^k + (w^k)^2)y^k + (w^k)^3(V_{1\eta}^k + w_\eta^k)y_\eta^k \right) > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon,k}(V_1) - \lambda_{\varepsilon,k}(w) &= \nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k(0))^2 \right) y_\eta^k(0) - \frac{B^2}{V_1^k(0)w^k(0)} y^k(0) + \\ &+ 3\nu d(kh)^2(V^k)^2 \left((V_1^k(0))^2 + (w^k(0))^2 \right) V_{1\eta}^k(0)y^k(0) - \frac{V^k + khV_\xi^k}{V_1^k(0)w^k(0)} y^k(0) > 0. \end{aligned}$$

Из этих неравенств и условия $y^k(1) = 0$ следует, что $y^k \leq 0$. Действительно, рассмотрим $S^k = y^k e^{-\alpha kh}$. Получим

$$\begin{aligned} &\left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2)(w^k)^2 + \varepsilon \right) S_{\eta\eta}^k e^{\alpha kh} - \eta kh V^k e^{\alpha kh} \left(\frac{S^k - S^{k-1}}{h} e^{-\alpha h} - S^k \alpha e^{\alpha h'} \right) + \\ &+ (\eta^2 - 1)(V^k + khV_\xi^k) e^{\alpha kh} S_\eta^k - \eta(V^k + khV_\xi^k) S^k e^{\alpha kh} + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2(V_{1\eta}^k + w_\eta^k)(w^k)^3 S_\eta^k e^{\alpha kh} + \\ &+ (\eta - 1)B^2 S_\eta^k e^{\alpha kh} - B^2 kh V^k S^k e^{\alpha kh} > 0 \quad (3.7) \end{aligned}$$

при $\eta < 1$, $0 < h' < h$, и

$$\begin{aligned} &\left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2) S_\eta^k e^{\alpha kh} - \frac{V^k + khV_\xi^k}{w^k V_1^k} S^k e^{\alpha kh} - \frac{B^2}{w^k V_1^k} S^k e^{\alpha kh} + \right. \\ &\left. + \nu V_{1\eta}^k 3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k + w^k) S^k e^{\alpha kh} \right) \Big|_{\eta=0} > 0. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Если $\alpha > 0$ достаточно велико и h достаточно мало, то коэффициент

$$-B^2 kh V^k - \eta(V^k + khV_\xi^k) - \alpha e^{\alpha h'} \eta kh V^k < 0$$

при S^k в (3.7) неположителен.

Так как $U_\xi^k = (V^k + khV_\xi^k) > 0$ и w^k, V_1^k положительны при $\eta = 0$, то из (3.7), (3.8) в силу принципа максимума следует, что $S^k \leq 0$. Действительно, в противном случае функция $S^k(\eta)$ при некотором k имела бы положительный максимум при $0 \leq \eta < 1$. При $0 < \eta < 1$ функция $S^k(\eta)$ не может принимать положительный максимум, так как в точке максимума мы имели бы

$$S^k > 0, \quad S_\eta^k = 0, \quad S_{\eta\eta}^k \leq 0, \quad \frac{S^k - S^{k-1}}{h} \geq 0,$$

что противоречит (3.7). При $\eta = 0$ положительный максимум S^k также не может достигаться, так как в противном случае приходим к противоречию между неравенствами $S_\eta^k(0) \leq 0$ и (3.8). Значит, $S^k \leq 0$ и $y^k = V_1^k - w^k \leq 0$. Следовательно, $w^k(\eta) \geq K_1(1 - \eta)$ при $kh \leq X$.

Для доказательства существования решения задачи (3.6), (3.4) рассмотрим вместо условий (3.4) граничные условия вида

$$w^k(1) = 0, \quad \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2 \right) w_\eta^k - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(w^k)} + \frac{B^2}{\psi(w^k)} \right) \Big|_{\eta=0} = 0, \quad (3.9)$$

где $\psi(w)$ — такая бесконечно дифференцируемая функция при $w \in (-\infty; +\infty)$, что $\psi(w) = w$ при $w \geq K_3$, $\psi(w) = K_3/2$ при $w \leq K_3/4$ и $0 \leq \psi'(w) \leq 1$ при $K_3/4 \leq w \leq K_3$. Постоянная K_3 выбрана так, что

$$w^k(0) \geq K_3, \quad \max \frac{|v_0|}{U_\xi} < \frac{2}{K_3}, \quad K_3 \leq K_1.$$

Пусть $\tilde{w}^k$ — любое решение задачи (3.6), (3.9) при $0 < \varepsilon \leq 1$. Покажем, что справедливо неравенство $\tilde{w}^k \geq V_1^k$. Положим $\tilde{y}^k = V_1^k - \tilde{w}^k$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k)^2 \right) V_{1\eta}^k - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(V_1^k)} + \frac{B^2}{\psi(V_1^k)} \right) \Big|_{\eta=0} = \\ & = -\nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2 K_1^2 \right) K_1 - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{K_1} + \frac{B^2}{K_1} > 0 \end{aligned}$$

в силу выбора K_3 и

$$\begin{aligned} & \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2 \right) \tilde{y}_\eta^k + \nu V_{1\eta}^k 3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k + w^k) \tilde{y}^k - \right. \\ & \quad \left. - \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(V^k)\psi(w^k)} \tilde{y}^k - \frac{B^2 \tilde{y}^k}{\psi(V^k)\psi(w^k)} \right) \Big|_{\eta=0} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2 \right) + \varepsilon \right) (w^k)^2 \tilde{y}_{\eta\eta}^k - \eta kh V^k \frac{\tilde{y}^k - \tilde{y}^{k-1}}{h} + (\eta^2 - 1)(V^k + khV_\xi^k) \tilde{y}_\eta^k - \\ & - \eta(V^k + khV_\xi^k) \tilde{y}^{kk} + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3(\tilde{y}_\eta^k)^2 + (\eta - 1)B^2 \tilde{y}_\eta^k - B^2 kh V^k \tilde{y}^k > 0 \end{aligned}$$

при $\eta < 1$.

Далее, для $\tilde{S}^k = \tilde{y}^k e^{-\alpha kh}$, как и для S^k , получим, что $\tilde{S}^k \leq 0$ и $V_1^k \leq \tilde{w}^k$ при $0 \leq \eta \leq 1$, $kh \leq X$. Следовательно, $w^k(0) \geq V_1^k(0) \geq K_4$, и поэтому $\psi(\tilde{w}^k) = \tilde{w}^k$. Таким образом, решение $\tilde{w}^k(\eta)$ задачи (3.6), (3.9) является также решением задачи (3.6), (3.4), положительным при $\eta = 0$. Если $\alpha > 0$ достаточно велико и h достаточно мало, то коэффициент

$$D^k - \eta(V^k + khV_\xi^k) - \alpha e^{\alpha h'} \eta kh V^k < 0$$

при S^k в (3.7) неположителен.

Так как $U_\xi = (V^k + khV_\xi^k) > 0$ и w^k, V_1^k положительны при $\eta = 0$, то из (3.7), (3.8) в силу принципа максимума следует, что $S^k \leq 0$. Действительно, в противном случае функция $S^k(\eta)$ при некотором k имела бы положительный максимум при $0 \leq \eta < 1$. При $0 < \eta < 1$ функция $S^k(\eta)$ не может принимать положительный максимум, так как в точке максимума имели бы

$$S^k > 0, \quad S_\eta^k = 0, \quad S_{\eta\eta}^k \leq 0, \quad \frac{S^k - S^{k-1}}{h} \geq 0,$$

что противоречит (3.7). При $\eta = 0$ положительный максимум S^k также не может достигаться, так как в противном случае приходим к противоречию между неравенствами $S_\eta^k(0) \leq 0$ и (3.8). Значит, $S^k \leq 0$ и $y^k = V_1^k - w^k \leq 0$. Следовательно, $w^k(\eta) \geq K_1(1 - \eta)$ при $kh \leq X$.

Для доказательства существования решения задачи (3.6), (3.4) рассмотрим вместо условий (3.4) граничные условия вида

$$w^k(1) = 0, \quad \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2 \right) w_\eta^k - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(w^k)} + \frac{B^2}{\psi(w^k)} \right) \Big|_{\eta=0} = 0, \quad (3.10)$$

где $\psi(w)$ — такая бесконечно дифференцируемая функция при $w \in (-\infty; +\infty)$, что $\psi(w) = w$ при $w \geq K_3$, $\psi(w) = K_3/2$ при $w \leq K_3/4$ и $0 \leq \psi'(w) \leq 1$ при $K_3/4 \leq w \leq K_3$. Постоянная K_3 выбрана так, что

$$w^k(0) \geq K_3, \quad \max \frac{|v_0|}{U_\xi} < \frac{2}{K_3}, \quad K_3 \leq K_1.$$

Пусть $\tilde{w}^k$ — любое решение задачи (3.6), (3.9) при $0 < \varepsilon \leq 1$. Покажем, что справедливо неравенство $\tilde{w}^k \geq V_1^k$. Положим $\tilde{y}^k = V_1^k - \tilde{w}^k$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (V_1^k)^2 \right) V_{1\eta}^k - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(V_1^k)} + \frac{B^2}{\psi(V_1^k)} \right) \Big|_{\eta=0} = \\ & = -\nu \left(1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 K_1^2 \right) K_1 - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{K_1} + \frac{B^2}{K_1} > 0 \end{aligned}$$

в силу выбора K_3 и

$$\begin{aligned} & \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2 \right) \tilde{y}_\eta^k + \nu V_{1\eta}^k 3d(kh)^2 (V^k)^2 (V_1^k + w^k) \tilde{y}^k - \right. \\ & \quad \left. - \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(V^k)\psi(w^k)} \tilde{y}^k - \frac{B^2 \tilde{y}^k}{\psi(V^k)\psi(w^k)} \right) \Big|_{\eta=0} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2 \right) + \varepsilon \right) (w^k)^2 \tilde{y}_{\eta\eta}^k - \eta kh V^k \frac{\tilde{y}^k - \tilde{y}^{k-1}}{h} + (\eta^2 - 1) (V^k + khV_\xi^k) \tilde{y}_\eta^k - \\ & - \eta (V^k + khV_\xi^k) \tilde{y}^{kk} + 6\nu d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^3 (\tilde{y}_\eta^k)^2 + (\eta - 1) B^2 \tilde{y}_\eta^k - B^2 kh V^k \tilde{y}^k > 0 \end{aligned}$$

при $\eta < 1$.

Далее, для $\tilde{S}^k = \tilde{y}^k e^{-\alpha kh}$, как и для S^k , получим, что $\tilde{S}^k \leq 0$ и $V_1^k \leq \tilde{w}^k$ при $0 \leq \eta \leq 1$, $kh \leq X$. Следовательно, $w^k(0) \geq V_1^k(0) \geq K_4$, и поэтому $\psi(\tilde{w}^k) = \tilde{w}^k$. Таким образом, решение $\tilde{w}^k(\eta)$ задачи (3.6), (3.9) является также решением задачи (3.6), (3.4), положительным при $\eta = 0$.

Доказательство существования решения задачи (3.6), (3.9) при $\varepsilon > 0$ проводится на основе теоремы Лере—Шаудера.

Оценим теперь решение задачи (3.6), (3.4) сверху равномерно относительно ε и h . Пусть

$$V_2^k = K_2(1 - \eta)\sigma, \quad \sigma = \sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon,k}(V_2) &= -\varepsilon K_2 \left(-\frac{1}{2\sigma(1 - \eta)} - \frac{1}{4\sigma^3(1 - \eta)} \right) - (1 - \eta)(1 + \eta) K_2 (V^k + khV_\xi^k) \left(\frac{1}{2\sigma} - \sigma \right) + \\ &+ \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 K_2^2 (1 - \eta)^2 \sigma^2 \right) K_2^2 (1 - \eta)^2 \sigma^2 \right) \left(-\frac{K_2}{2\sigma(1 - \eta)} - \frac{K_2}{4\sigma^3(1 - \eta)} \right) - \\ &- \eta K_2 (1 - \eta) \sigma (V^k + khV_\xi^k) + 6\nu d(kh)^2 (V^k)^2 K_2^3 (1 - \eta)^3 \sigma^3 K_2^2 \left(\frac{1}{2\sigma} - \sigma \right)^2 - \\ &- (1 - \eta) B^2 K_2 \left(\frac{1}{2\sigma} - \sigma \right) - (1 - \eta) B^2 K_2 \sigma < 0 \quad (3.11) \end{aligned}$$

при $0 \leq \eta < 1$, если $K_2 > 0$ достаточно велико; K_2 не зависит от ε и h . Далее,

$$\lambda_k(V_2^k) = \left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2 K_2^2(1 - \eta)^2 \sigma^2) K_2 \left(\frac{1}{2\sigma} - \sigma \right) - \right. \\ \left. - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{K_2(1 - \eta)\sigma} + \frac{B^2}{K_2(1 - \eta)\sigma} \right) \Big|_{\eta=0} < 0, \quad (3.12)$$

если K_2 достаточно велико и $\sigma^2 > 1/2$ при $\eta = 0$, т.е. $\mu < e^{-1/2}$. Из неравенств (3.11), (3.12) и условия $(w^k - V_2^k)|_{\eta=1} = 0$ согласно принципу максимума получаем, что

$$w^k - V_2^k \leq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq x \leq X.$$

Из уравнений (3.6), граничного условия (3.4) при $\eta = 0$ и оценок снизу и сверху для w^k следуют равномерные по ε оценки $w_\eta^k, w_{\eta\eta}^k$ на любом отрезке $0 \leq \eta \leq 1 - \delta$, $\delta = \text{const} > 0$. Дифференцируя уравнение (3.6) по η , устанавливаем, что производные любого порядка от функций w^k ограничены на отрезке $0 \leq \eta \leq 1 - \delta$ равномерно по ε .

Следовательно, из совокупности решений w^k задачи (3.6), (3.4) при $0 < \varepsilon \leq 1$ можно выделить такую последовательность w^k , что функции w^k вместе с их производными любого порядка при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно сходятся на отрезке $0 \leq \eta \leq 1 - \delta$, причем предельная функция (в силу оценок $V \leq w^k \leq V_1$) непрерывна при $0 \leq \eta \leq 1$, обращается в нуль при $\eta = 1$ и удовлетворяет (3.3), (3.4) при $\eta < 1$. Очевидно, что оценки (3.5) верны для предельных функций w^k . $\square$

Рассмотрим вспомогательную граничную задачу при $k = 0$ для обыкновенного дифференциального уравнения, решение которой будем использовать для последующих оценок решений задачи (3.3), (3.4). Пусть $V(0) = a$, $v_0(0) = b$. Согласно сделанным ранее предположениям, $a > 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(Y) \equiv \nu Y^2 Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1)aY_\eta - \eta aY + (\eta - 1)B^2 Y_\eta = 0, \quad 0 < \eta < 1, \quad (3.13)$$

с граничными условиями

$$l(Y) \equiv \left(\nu Y Y_\eta - bY + B^2 + a \right) \Big|_{\eta=0} = 0, \quad Y(1) = 0 \quad (3.14)$$

Лемма 3.2. *Задача (3.13), (3.14) имеет решение, обладающее следующими свойствами:*

$$M_2(1 - \eta)\sigma \leq Y(\eta) \leq M_1(1 - \eta)\sigma \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (3.15)$$

$$M_1(1 - \eta)(\sigma - K_4) \leq Y(\eta) \quad \text{при} \quad 0 < \eta_0 \leq \eta < 1, \quad (3.16)$$

$$-M_4\sigma \leq Y_\eta(\eta) \leq -M_3\sigma, \quad (3.17)$$

$$|Y Y_{\eta\eta}| \leq M_5, \quad Y Y_{\eta\eta} \leq -M_6, \quad (3.18)$$

$$\sigma = \sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)}, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1,$$

$$\nu M_1^2 = 2a, \quad \sigma(0) \geq \frac{|b|}{a} + 2, \quad \frac{K_4}{\sigma} < 1 \quad \text{при} \quad \eta > \eta_0 = \text{const} \geq 0.$$

Лемма 3.2 доказывается аналогично тому, как доказана лемма [5, § 3.2.2], лишь с некоторыми техническими осложнениями. Мы опускаем доказательство этой леммы.

Лемма 3.3. *Предположим, что $V(x) = a + xa_1(x)$, $v_0(x) = b + xb_1(x)$ и функции $a_1(x)$, $a_{1x}(x)$, $b_1(x)$ ограничены при $0 \leq x \leq X$. Тогда при $0 \leq kh \leq X$, где X зависит от $V(x)$, $v_0(x)$, для решения $w^k(\eta)$ задачи (3.3), (3.4) имеют место неравенства*

$$Y e^{-C_1 kh} \leq w^k(\eta) \leq Y e^{C_2 kh}, \quad (3.19)$$

где $Y(\eta)$ — решение задачи (3.13), (3.14).

Доказательство. Для функций $W^k = Ye^{-C_1 kh}$ имеем

$$\begin{aligned} L_k(W) = e^{-C_1 kh} & \left[\nu Y^2 Y_{\eta\eta} (e^{-2C_1 kh} - 1) + \nu Y^2 Y_{\eta\eta} + 3\nu d(kh)^2 (V^k)^2 Y^4 Y_{\eta\eta} (e^{-4C_1 kh} - 1) + \right. \\ & + 3\nu d(kh)^2 ((V^k)^2 - a^2) Y^4 Y_{\eta\eta} + 6\nu d(kh)^2 (V^k)^2 Y^3 Y_{\eta}^2 (e^{-3C_1 kh} - 1) + \\ & + 6\nu d(kh)^2 ((V^k)^2 - a^2) Y^3 Y_{\eta}^2 + \eta kh V^k Y C_1 e^{C_1 h'} + (\eta^2 - 1) kh (a_1^k + V_x^k) Y_{\eta} - \\ & \left. - \eta kh (a_1^k + V^k) + (\eta - 1) B^2 Y_{\eta} - B^2 kh ((V^k)^2 - a^2) Y \right] = 0, \end{aligned}$$

где $0 < h' < h$. В силу предположений леммы имеем

$$\left| (V^k)^2 - a^2 \right| < M_8 \quad \text{при} \quad kh \leq X.$$

Кроме того, при $kh \leq X$ и достаточно малом X

$$e^{-2C_1 kh} - 1 \leq -khC_1, \quad e^{-3C_1 kh} - 1 \leq -\frac{3}{2}khC_1, \quad e^{-4C_1 kh} - 1 \leq -2khC_1,$$

а в силу леммы 3.2

$$|(\eta^2 - 1)kh(a_1^k + V_{\xi}^k)Y_{\eta}| \leq M_9 khY.$$

Поэтому, если C_1 достаточно велико, то имеем неравенство $L_k(W) > 0$ при $0 \leq \eta < 1$ и $0 \leq kh \leq X$.

Учитывая (3.14), находим, что

$$\begin{aligned} l_k(W) = & \left[\nu(1 + 3d(kh)^2((V^k)^2 - (a_1^k)^2)Y^2)Y_{\eta}(e^{-3C_1 kh} - 1) - \right. \\ & \left. - v_0^k Y(e^{-C_1 kh} - 1) - (v_0^k - b)Y + (a_1^k - khV_{\xi}^k) + B^2 \right] \Big|_{\eta=0}. \end{aligned}$$

По условию леммы

$$|v_0^k - b| \leq M_{10} kh, \quad |a_1^k - khV_{\xi}^k| \leq M_{11} kh \quad \text{при} \quad kh \leq X.$$

Поэтому при достаточно большой постоянной C_1 и X_0 , зависящем от V , v_0 , имеем $l_k(W) > 0$ при $0 \leq kh \leq X_0$.

При $0 \leq \eta < 1$ и $kh \leq X$ получаем неравенства

$$L_k(W) - L_k(w) > 0, \quad l_k(W) - l_k(w) > 0,$$

откуда следует

$$w^k \leq W = Ye^{-C_1 kh} \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq kh \leq X_0.$$

Аналогично получается оценка (3.19) сверху, так как если $W_* = Ye^{C_2 kh}$ и C_2 достаточно велико, то $L_k(W_*) < 0$ и $l_k(W_*) < 0$ при $0 \leq \eta < 1$, $0 \leq kh \leq X$. $\square$

Для обоснования предельного перехода в задаче (3.3), (3.4) при $h \rightarrow 0$ оценим величины

$$r^k = \frac{w^k - w^{k-1}}{h}, \quad z^k = w_{\eta}^k, \quad (w^k)^2 w_{\eta\eta}^k$$

равномерно по h .

Лемма 3.4. Пусть выполнены предположения леммы 3.3; кроме того, $a_{1xx}(x)$ и $b_{1x}(x)$ ограничены. Тогда при достаточно малом X и $0 \leq kh \leq X$ решения $w^k(\eta)$ задачи (3.3), (3.4) удовлетворяют неравенствам

$$\left| \frac{w^k - w^{k-1}}{h} \right| \leq C_3 Y(\eta), \quad k = 1, 2, \dots, \frac{X}{h}, \quad (3.20)$$

$$Y_{\eta} e^{C_4 kh} \leq w_{\eta}^k \leq Y_{\eta} e^{-C_5 kh}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{X}{h}, \quad (3.21)$$

$$|(w^k)^2 w_{\eta\eta}^k| < C_6, \quad (w^k)^2 w_{\eta\eta}^k < -C_7, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{X}{h}, \quad (3.22)$$

где $Y(\eta)$ — решение задачи (3.13), (3.14).

Доказательство. Неравенства (3.20)–(3.22) докажем по индукции. В лемме 3.2 мы доказали неравенства (3.21), (3.22) при $k = 0$. Покажем, что постоянные C_j можно подобрать независимо от h так, что из выполнения неравенств (3.20)–(3.22) при некотором $k - 1$ следует их справедливость при k , если $0 \leq kh \leq X$, где X зависит от V , v_0 , ν и не зависит от h .

Для удобства в уравнениях

$$L_k(w) \equiv \nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2 \right) (w^k)^2 w_{\eta\eta}^k - \eta kh V^k \frac{w^k - w^{k-1}}{h} + (\eta^2 - 1)(V^k + kh V_\xi^k) w_\eta^k - \\ - \eta(V^k + kh V_\xi^k) w^k + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w_\eta^k)^2(w^k)^3 + (\eta - 1)B^2 w_\eta^k - B^2 kh V^k w^k = 0$$

и

$$\lambda_k(w) = \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2 \right) w_\eta^k - v_0^k + \frac{V^k + kh V_\xi^k}{w^k} + \frac{B^2}{w^k} \right) \Big|_{\eta=0} = 0$$

введем обозначения:

$$E^k \equiv (\eta^2 - 1)(V^k + kh V_\xi^k), \quad F^k \equiv -\eta(V^k + kh V_\xi^k), \\ G^k \equiv 3\nu d(kh)^2(V^k)^2, \quad H^k \equiv 6\nu d(kh)^2(V^k)^2, \quad I^k \equiv V^k + kh V_\xi^k.$$

Составим уравнения, которым удовлетворяют r^k и z^k . Для начала возьмем

$$w_{\eta\eta}^k = \frac{\eta kh V^k r^k - E^k z^k - F^k w^k - H^k (z^k)^2 (w^k)^3 - (\eta - 1)B^2 z^k + B^2 kh V^k w^k}{(\nu + G^k (w^k)^2)(w^k)^2}.$$

Из уравнения (3.3) для w^k вычтем уравнение (3.3) для w^{k-1} и разделим полученное равенство на h . Имеем

$$R_k(r) \equiv \nu (w^k)^2 r_{\eta\eta}^k + G^k (w^k)^4 r_{\eta\eta}^k + E^k r_\eta^k + F^k r^k - \eta \frac{kh V^k - (k-1)h V^{k-1}}{h} r^k + \\ + \frac{(w^k + w^{k-1})((w^k)^2 + (w^{k-1})^2)}{(\nu + G^{k-1}(w^{k-1})^2)(w^{k-1})^2} (\nu + G^{k-1}) \times \\ \times \left[\eta(k-1)h V^{k-1} r^{k-1} - E^{k-1} z^{k-1} - F^{k-1} w^{k-1} - H^{k-1} (z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3 \right] r^k - \\ - \eta(k-1)h V^{k-1} \frac{r^k - r^{k-1}}{h} + H^{k-1} (w^{k-1})^3 r^k (z^k + z^{k-1}) + \frac{H^k - H^{k-1}}{h} (z^k)^2 (w^k)^3 + \\ + H^{k-1} (z^k)^2 r^k ((w^k)^2 + w^k w^{k-1} + (w^{k-1})^2) + B^2 \frac{kh V^k - (k-1)h V^{k-1}}{h} w^k = \\ = - \frac{3\nu d((kh)^2(V^k)^2 - ((k-1)h)^2(V^{k-1})^2)(w^k)^4}{h(\nu + G^{k-1}(w^{k-1})^2)(w^{k-1})^2} \times \\ \times \left[\eta(k-1)h V^{k-1} r^{k-1} - E^{k-1} z^{k-1} - F^{k-1} w^{k-1} - H^{k-1} (z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3 \right] - \\ - z^{k-1} \frac{E^k - E^{k-1}}{h} - w^{k-1} \frac{F^k - F^{k-1}}{h} - (\eta - 1)B^2 r_\eta^k + B^2 kh V^k r^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Аналогично из (3.4) получаем

$$\rho^k(r) \equiv \left(\nu r_\eta^k + G^{k-1} (w^{k-1})^2 r_\eta^k + G^{k-1} z^k r^k (w^k + w^{k-1}) + \frac{G^k - G^{k-1}}{h} (w^k)^2 z^k - \right. \\ \left. - \frac{(I^k + B^2) r^k}{w^k w^{k-1}} \right) \Big|_{\eta=0} = \frac{v_0^k - v_0^{k-1}}{h} - \frac{I^k - I^{k-1}}{h w^{k-1}(0)}, \quad r^k(1) = 0, \quad k \geq 1.$$

Дифференцируя уравнение (3.3) по η , для z^k получим уравнения

$$\begin{aligned} P_k(z) \equiv & \nu(w^k)^2 z_{\eta\eta}^k + 2\nu w^k z^k z_\eta^k + 4G^k(w^k)^3 z^k z_\eta^k + G^k(w^k)^4 z_{\eta\eta}^k - \\ & - \eta k h V^k \frac{z^k - z^{k-1}}{h} - k h V^k r^k + E^k z_\eta^k + E_\eta^k z^k + F^k z^k + F_\eta^k w^k + 3H^k(w^k)^2 (z^k)^3 + \\ & + 2H^k(w^k)^3 z^k z_\eta^k + (\eta - 1)B^2 z_\eta^k + B^2 z^k + B^2 k h V^k z^k = 0. \end{aligned}$$

Из граничного условия (3.4) при $\eta = 0$ следует условие

$$z^k(0) = \frac{v_0^k}{(\nu + G^k(w^k(0))^2)} - \frac{I^k}{(\nu + G^k(w^k(0))^2)w^k(0)}.$$

Рассмотрим функцию $\varphi^k = C_3 Y$ и оценим $R^k(\varphi)$ при условии, что неравенства (3.20), (3.21) выполнены при $k-1$. Сначала заметим, что в силу результатов, полученных в лемме 3.2, выполнено неравенство

$$\left| \nu C_3 Y^2 Y_{\eta\eta} + C_3 E^k Y_\eta + C_3 F^k Y \right| \leq C_3 M_{12} k h Y$$

при $0 \leq k h \leq X$. Так как $U_x > 0$ и $a_{1_{xx}}(0)$ ограничена по предположению леммы, то

$$\frac{k h V^k - (k-1) h V^{k-1}}{h} > 0$$

при $h \leq h_0$ и достаточно малом h_0 ; кроме того, отношения

$$\frac{(k h)^2 (V^k)^2 - ((k-1) h)^2 (V^{k-1})^2}{h}, \quad \frac{E^k - E^{k-1}}{h}, \quad \frac{F^k - F^{k-1}}{h}, \quad \frac{G^k - G^{k-1}}{h}, \quad \frac{H^k - H^{k-1}}{h}$$

ограничены.

Далее, учитывая предположения индукции, находим, что

$$\begin{aligned} & \eta(k-1) h V^{k-1} r^{k-1} - E^{k-1} z^{k-1} - F^{k-1} w^{k-1} - H^{k-1} (z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3 - (\eta-1) B^2 z^{k-1} \leq \\ & \leq \eta(k-1) h V^{k-1} C_3 Y - (E^{k-1} - a(\eta^2 - 1)) z^{k-1} - (\eta^2 - 1) a Y_\eta e^{-C_3 k h} - (F^{k-1} + \eta a) w^{k-1} - \\ & - \eta a Y e^{C_2 k h} - (B^2 - a(\eta-1)) z^{k-1} - (H^{k-1} - 6\nu d a^2) (z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3 - \\ & - 6\nu d a^2 Y^3 Y_\eta^2 e^{3C_2 k h} e^{-2C_5 k h} \leq \nu Y Y_{\eta\eta} + G^{k-1} Y^4 Y_{\eta\eta} + M_{13} k h Y \leq -M_{14} Y(\eta), \end{aligned}$$

если $k h \leq X$ и X достаточно мало и не зависит от h .

Учитывая эти замечания, получаем, что

$$\begin{aligned} R_k(\varphi) + & \left| - \frac{3\nu d((k h)^2 (V^k)^2 - ((k-1) h)^2 (V^{k-1})^2) (w^k)^4}{h(\nu + G^{k-1} (w^{k-1})^2) (w^{k-1})^2} \times \right. \\ & \times \left[\eta(k-1) h V^{k-1} r^{k-1} - E^{k-1} z^{k-1} - F^{k-1} w^{k-1} - H^{k-1} (z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3 \right] - \\ & \left. - z^{k-1} \frac{E^k - E^{k-1}}{h} - w^{k-1} \frac{F^k - F^{k-1}}{h} - B^2 (\eta-1) r_\eta^k + B^2 k h V^k r^{k-1} \right| < 0 \quad (3.23) \end{aligned}$$

при $0 \leq \eta < 1$, $0 \leq k h \leq X(C_3, C_4, C_5)$, где C_3 достаточно велико и не зависит от h ; здесь мы использовали неравенства

$$\begin{aligned} & -\eta \frac{k h V^k - (k-1) h V^{k-1}}{h} C_3 Y + \left| w^{k-1} \frac{F^k - F^{k-1}}{h} \right| < 0, \\ & (w^k + w^{k-1}) ((w^k)^2 + (w^{k-1})^2) C_3 Y > \left| \frac{(k h)^2 (V^k)^2 - ((k-1) h)^2 (V^{k-1})^2}{h} \right|, \end{aligned}$$

$$M_{12}kh \leq \frac{1}{4} \left| \frac{(w^k + w^{k-1})((w^k)^2 + (w^{k-1})^2)}{(\nu + G^{k-1}(w^{k-1})^2)(w^{k-1})^2} (\nu + G^{k-1}) \times \right. \\ \left. \times \left[\eta(k-1)hV^{k-1}r^{k-1} - E^{k-1}z^{k-1} - F^{k-1}w^{k-1} - H^k k - 1(z^{k-1})^2(w^{k-1})^3 - (\eta-1)B^2 \right] \right|.$$

Постоянная C_3 не зависит от C_4 и C_5 , так как если

$$M_{14} \geq \frac{M_{14}}{2} + \frac{M_{15}E^{k-1}z^{k-1}}{Y},$$

то

$$-\frac{C_3 M_{15}(w^k + w^{k-1})((w^k)^2 + (w^{k-1})^2)(\nu + G^{k-1})E^{k-1}z^{k-1}}{(\nu + G^{k-1}(w^{k-1})^2)(w^{k-1})^2} + \left| z^{k-1} \frac{E^k - E^{k-1}}{h} \right| < 0$$

при подходящем выборе C_3 и достаточно малом X .

Вычислим $\rho_k(\varphi)$. Имеем:

$$\rho^k(\varphi) = C_3 \left(\nu Y_\eta + G^{k-1}(w^{k-1})^2 Y_\eta + G^{k-1} z^k Y (w^k + w^{k-1}) + \right. \\ \left. + \frac{G^k - G^{k-1}}{h} (w^k)^2 z^k - \frac{(I^k + B^2)Y}{w^k w^{k-1}} \right) \Big|_{\eta=0} \leq -C_3 M_{16}$$

при $M_{16} > 0$, $kh \geq 0$, $kh \leq X$ и достаточно малом X . Поэтому

$$\rho_k(\varphi) + \left| \frac{v_0^k - v_0^{k-1}}{h} - \frac{I^k - I^{k-1}}{h w^{k-1}(0)} \right| < 0, \quad (3.24)$$

если C_3 достаточно велико, $kh \leq X$ и $h \leq h_0$; здесь воспользовались тем, что по условия при малых h ограничены отношения

$$\frac{v_0^k - v_0^{k-1}}{h}, \quad \frac{I^k - I^{k-1}}{h}.$$

Рассмотрим функции $S_\pm^k = \varphi^k \pm r^k$ при $0 \leq kh \leq X$. Из оценок (3.23), (3.24) получаем неравенства

$$R_k(S_\pm^k) < 0, \quad \rho_k(S_\pm^k) < 0.$$

Так как $S_\pm^k(1) = 0$, то из этих неравенств на основании принципа максимума находим, что $S_\pm^k(\eta) \geq 0$ при $0 \leq \eta \leq 1$ и, следовательно, $|r^k| \leq C_3 Y$.

Для оценки $Z^k = w_\eta^k$ рассмотрим функцию $J_1 = Y_\eta e^{-C_5 kh}$. Имеем

$$P_k(J_1) = e^{-C_5 kh} \left\{ \left(\nu Y^2 Y_{\eta\eta} + 2\nu Y Y_\eta Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1)a Y_\eta + \eta a Y_\eta - a Y \right) + B^2 Y_\eta + \right. \\ + (\eta - 1)B^2 Y_{\eta\eta} + \nu((w^k)^2 - Y^2) Y_{\eta\eta} + G^k((w^k)^4 - Y^4) Y_{\eta\eta} + (E^k - (\eta^2 - 1)a) Y_{\eta\eta} + \\ + (E_\eta^k - 2\eta a) Y_\eta + (F^k - \eta a) Y_\eta + (B^2 - (\eta - 1)a) Y_{\eta\eta} + 2H^k((w^k)^3 - Y^3) Y_\eta Y_{\eta\eta} \Big\} + \\ - kh V^k r^k + 2\nu Y_\eta Y_{\eta\eta} (w^k e^{-C_5 kh} - Y) e^{-C_5 kh} + 4G^k Y_\eta Y_{\eta\eta} ((w^k)^3 e^{-C_5 kh} - Y^3) e^{-C_5 kh} + \\ + 3H^k (Y_\eta)^3 ((w^k)^2 e^{-C_5 kh} - Y^2) e^{-C_5 kh} + (B^2 - 2\eta a) Y_\eta + (F_\eta^k w^k + a Y e^{-C_5 kh}) - \\ - B^2 kh V^k Y_\eta + \eta kh C_5 V^k e^{C_5 h'} e^{-C_5 kh} Y_\eta. \quad (3.25)$$

Дифференцируя уравнение (3.13) по η , получим

$$\nu Y^2 Y_{\eta\eta} + 2\nu Y Y_\eta Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1)a Y_\eta + \eta a Y_\eta - a Y + B^2 Y_\eta + (\eta - 1)B^2 Y_{\eta\eta} = 0. \quad (3.26)$$

Из (3.26) следует, что $|Y^2 Y_{\eta\eta}| \leq M_{17} |Y_\eta|$ и что в (3.25) первое слагаемое правой части равно нулю. Слагаемые $kh V^k r^k$, $F_\eta^k w^k + a Y e^{-C_5 kh}$ имеют порядок $kh Y$ и $C_5 kh Y$ соответственно; остальные слагаемые в (3.25) имеют порядок $kh Y_\eta$. Если выбрать C_5 достаточно большим, то последние два члена в (3.25) превосходят по модулю остальные, если $kh \leq X$ и X достаточно мало. Поэтому $P_k(J_1) < 0$ при $0 \leq \eta \leq 1$ и $0 \leq kh \leq X$.

Из неравенств (3.19) следует, что существуют такие две последовательности $\eta_m \rightarrow 1$ и $\bar{\eta}_m \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$, что

$$z^k \Big|_{\eta=\eta_m} \leq Y_\eta(\eta_m)e^{-C_1 kh}, \quad z^k \Big|_{\eta=\bar{\eta}_m} \geq Y_\eta(\bar{\eta}_m)e^{C_2 kh}. \quad (3.27)$$

Пусть $C_5 > C_1$. Рассмотрим разность $S^k = J_1 - Z^k$. Из (3.27) следует, что $S^k(\eta_m) \geq 0$. При $k \geq 1$, $kh \leq X$, достаточно малом X и достаточно большом C_5 имеем

$$S^k(0) = -\frac{v_0^k - b}{(\nu + G^k(w^k(0))^2)} + \frac{(I^k + B^2)}{(\nu + G^k(w^k(0))^2)w^k(0)} - \frac{a}{(\nu + G^k(Y(0))^2)Y(0)} + Y_\eta(0)(e^{-C_5 kh} - 1) > 0. \quad (3.28)$$

Из уравнения (3.3) при $k = 1$ получаем для $z^1 = w_\eta^1$ уравнение

$$P_1^0(z_1) \equiv \nu(w^1)^2 z_\eta^1 + G^1(w^1)^4 z_\eta^1 + E^1 z^1 + H^1(w^1)^3 z^1 + (\eta - 1)B^2 z^1 = -J^1 w^1 + \eta V^1 w^1 + B^2 V^2 w^1.$$

Полагая $J_2 = Y_\eta e^{-C_8 h}$, находим

$$\begin{aligned} P_1^0(z^1 - J_2) &= e^{-C_8 h} \left\{ \nu(Y^2 - (w^1)^2)Y_{\eta\eta} + G^k(Y^4 - (w^1)^4)Y_{\eta\eta} + \right. \\ &\quad \left. + ((\eta^2 - 1)a - E^1)Y_\eta + ((\eta - 1)a - B^2)Y_\eta + H^k(Y^3 - (w^1)^3)Y_\eta \right\} - \\ &\quad - \left(F^1 w^1 + \eta a Y e^{-C_8 h} \right) + \eta V^1 (w^1 - Y) + B^2 V^1 (w^1 - Y) > 0, \quad \eta_0 \leq \eta < 1, \end{aligned}$$

при достаточно большом C_8 и достаточно малом h . Кроме того, если выберем $C_8 \geq C_1$, то из (3.27) получим неравенство

$$(z^1 - J_2) \Big|_{\eta=\eta_m^1} \leq 0.$$

Как и при доказательстве леммы 3.2, находим, что $z^1 \leq J_2$ при $\eta_0 \leq \eta < 1$. Возьмем $C_5 \geq C_8$. Тогда при $\eta_0 \leq \eta < 1$ получим неравенство

$$z^1 \leq J_1^1. \quad (3.29)$$

Для разности $z^k - J_1 = S^k$ имеем

$$\begin{aligned} P_k(J_1) - P_k(z) &= \nu(w^k)^2 S_{\eta\eta}^k + G^k(w^k)^4 S_{\eta\eta}^k - \eta \frac{khV^k}{h} S^k + E^k S_\eta^k + F^k S_\eta^k + \\ &\quad + 3H^k(w^k)^2 (S_\eta^k)^3 + (\eta - 1)B^2 S_\eta^k + 2\nu w^k J_{1\eta}^k S^k + 2\nu w^k z^k S_\eta^k + 4G^k(w^k)^3 J_{1\eta}^k S^k + \\ &\quad + 4G^k(w^k)^3 z^k S_\eta^k + E_\eta^k S^k + 2H^k(w^k)^3 J_{1\eta}^k S^k + B^2 S^k + 2H^k(w^k)^3 z^k S_\eta^k < -\eta \frac{khV^k}{h} S^{k-1}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

В неравенстве (3.30) коэффициент при S^k равен

$$2\nu w^k J_{1\eta}^k + 4G^k(w^k)^3 J_{1\eta}^k + F^k + E_\eta^k + 2H^k(w^k)^3 J_{1\eta}^k - \eta k V^k - B^2 k V^k. \quad (3.31)$$

Если $0 \leq kh \leq X$ и X достаточно мало, то выражение (3.31) отрицательно при $k \geq 2$ для $0 \leq \eta \leq 1$ и при $k = 1$ для $0 \leq \eta \leq \eta_0$ в силу выбора η_0 . Так как $S^1(0) > 0$, $S^1(\eta_0) > 0$, как показано выше, и $S^0 = 0$ в силу леммы 3.2, то из (3.30) согласно принципу максимума получаем $S^1 > 0$ при $0 \leq \eta \leq \eta_0$. Вместе с (3.29) это приводит к неравенству $S^1 \leq 0$ при $0 \leq \eta \leq 1$.

Далее, в силу того, что сумма (3.31) при $k \leq 2$ отрицательна, $S^1 \leq 0$ при $0 \leq \eta < 1$, из (3.30), (3.27) и (3.28) по принципу максимума выводим неравенство $S^k \leq 0$ при $0 \leq \eta < 1$, $k \leq 2$. Поэтому

$$z^k \leq J_1 = Y_\eta e^{-C_5 kh}.$$

Для оценки функции z^k снизу рассмотрим функцию $J_3 = Y_\eta e^{C_4 kh}$ и вычислим $P_k(J_3)$. Так же, как при оценке z^k сверху, покажем, что $P_k(J_3) > 0$, если C_6 достаточно велико и X достаточно мало. Выбрав $C_4 > C_2$, получим

$$(J_3 - z^k) \Big|_{\eta=\bar{\eta}_m} \leq 0, \quad (J_3 - z^k) \Big|_{\eta=0} < 0$$

при достаточно большом C_4 и $0 \leq kh \leq x$. Рассуждая далее так же, как при доказательстве оценки z^k сверху, получим, что

$$z^k \geq Y_\eta e^{C_4 kh}.$$

Из полученных оценок функций w^k , r^k , z^k и уравнения (3.3) следует ограниченность произведений $(w^k)^2 w_{\eta\eta}^k$ и $(w^k)^4 w_{\eta\eta}^k$. Установим второе из неравенств (3.22). Из (3.3) находим

$$\begin{aligned} \nu w^k w_{\eta\eta}^k \left(1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^3 w_{\eta\eta}^k \right) &= \eta kh V^k \frac{r^k}{w^k} - (\eta^2 - 1) (V^k + kh V_\xi^k) \frac{w_\eta^k}{w^k} - \\ &- \eta (V^k + kh V_\xi^k) - (\eta - 1) B^2 \frac{w_\eta^k}{w^k} + B^2 kh V^k - H^k (w^k)^2 (w_\eta^k)^2 \leq \\ &\leq \eta kh V^k \frac{r^k}{w^k} - (\eta^2 - 1) \frac{a Y_\eta}{Y} + \eta a - (\eta - 1) B^2 \frac{Y_\eta}{Y} + \\ &+ (\eta^2 - 1) \left[\frac{a Y_\eta}{Y} - (V^k + kh V_\xi^k) \frac{w_\eta^k}{w^k} \right] - \left[\eta a - \eta (V^k + kh V_\xi^k) \right] - H^k (w^k)^2 (w_\eta^k)^2 < \\ &< -\nu M_6 M_{17} = -\nu C_7, \end{aligned}$$

если $0 \leq kh \leq X$ и X достаточно мало. Этим доказательство леммы 3.4 завершено. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. Продолжим решения $w^k(\eta)$ задачи (3.3), (3.4) линейно по ξ при $(k-1)h \leq \xi \leq kh$, $k = 1, 2, \dots, X/h$. В силу лемм 3.3, 3.4 полученное семейство функций $w_h(\xi, \eta)$ равномерно ограничено и равномерно непрерывно в Ω . По теореме Арцела получаем, что существует последовательность функций $w_{h_m}(\xi, \eta)$, равномерно сходящаяся в Ω к некоторой функции $w(\xi, \eta)$ при $h_m \rightarrow 0$. Точно так же, как в [5, § 3.1], доказывается, что w имеет обобщенные производные, входящие в уравнение (2.4), и удовлетворяет этому уравнению почти всюду, а также неравенствам (3.1), (3.2).

Чтобы доказать, что производные функции w , входящие в уравнение, удовлетворяют условию Гельдера в любой внутренней подобласти области Ω , рассмотрим в прямоугольнике $\Delta = \{\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2\}$ уравнение

$$\nu(1 + 3d\xi^2 V^2 w^2) w^2 S_{\eta\eta} - \eta \xi V_\xi^S + E S_\eta + F S + 6\nu d\xi^2 V^2 w^3 S_\eta^2 + (\eta - 1) B^2 S_\eta - B^2 \xi V S = 0 \quad (3.32)$$

с условиями

$$S|_{\xi=\xi_1} = w|_{\xi=\xi_1}, \quad S|_{\eta=\eta_1} = w|_{\eta=\eta_1}, \quad S|_{\eta=\eta_2} = w|_{\eta=\eta_2}, \quad (3.33)$$

где $0 < \xi_1 < \xi_2 < X$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$. Поскольку w удовлетворяет условию Липшица, то задача (3.32), (3.33) в области Δ имеет такое решение S , что S_η ограничено в Δ , S_η , S_ξ , $S_{\eta\eta}$ удовлетворяют условию Гельдера в любой внутренней подобласти Δ . Покажем, что $S = w$. Функция $W = S - w$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \nu(1 + 3d\xi^2 V^2 w^2) w^2 W_{\eta\eta} - \eta \xi V W_\xi + E W_\eta + F W + \\ + 6\nu d\xi^2 V^2 w^3 W_\eta^2 + (\eta - 1) B^2 W_\eta - B^2 \xi V W = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

и условиям

$$W|_{\xi=\xi_1} = W|_{\eta=\eta_1} = W|_{\eta=\eta_2} = 0. \quad (3.35)$$

Умножим уравнение (3.34) на $W e^{-\alpha \xi}$, $\alpha = \text{const} > 0$, и проинтегрируем по Δ . Преобразуя некоторые члены интегрированием по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \left[-\nu w^2 W_\eta^2 + \nu (w_\eta^2 + w w_{\eta\eta}) W^2 - G w^4 W_\eta^2 + 2G(3w^2 w_\eta^2 + w^3 w_{\eta\eta}) W^2 - \eta B^2 W^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} B^2 \xi V W + \frac{1}{2} B^2 (\xi V)_\xi W^2 + \eta (\xi V)_\xi \frac{1}{2} W^2 - \eta \xi V \frac{1}{2} W^2 \alpha - \frac{1}{2} E_\eta W^2 + F W^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} H w^3 W_{\eta\eta} W^2 - \frac{3}{2} H w^2 w_\eta W_\eta W^2 \right] e^{-\alpha \xi} d\xi d\eta - \int_{\xi=\xi_2} \eta \xi V \frac{1}{2} W^2 e^{-\alpha \xi} d\eta = 0, \end{aligned}$$

а из него неравенство

$$\int_{\Delta} \left[\nu(w_{\eta}^2 + ww_{\eta\eta}) + 2G(3w^2w_{\eta}^2 + w^3w_{\eta\eta}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\eta(\xi V)_{\xi} - \frac{1}{2}\eta\xi V\alpha - \frac{1}{2}E_{\eta} + F - \eta B^2 \right] W^2 e^{-\alpha\xi} d\xi d\eta \geq 0. \quad (3.36)$$

При достаточно большом α выражение в квадратных скобках может быть сделано отрицательным, и тогда из (3.36) следует, что $W \equiv 0$ и $S = w$. $\square$

Обращая преобразование переменных (2.3), что возможно в силу свойств решения задачи (2.4), (2.5), получаем основной результат о существовании и единственности классического решения задачи (2.1), (2.2) в смысле данного нами определения.

Теорема 3.2. *Предположим, что*

$$U(x) = x(a + xa_1(x)), \quad v_0(x) = b + xb_1(x),$$

где $a = \text{const} > 0$, $b = \text{const}$; $U(x) > 0$ при $x > 0$; $a_1(x)$, $a_{1x}(x)$, $a_{1xx}(x)$, $b_1(x)$, $b_{1x}(x)$ ограничены. Тогда задача (2.1), (2.2) в области D при X , зависящем от U и v_0 , имеет решение u , v , которое обладает следующими свойствами:

- (i) $u_y > 0$ при $y \geq 0$, $x > 0$; u/U , u_y/U ограничены и непрерывны в $\overline{D}$;
- (ii) $u > 0$ при $y > 0$, $x > 0$; $u(x, y) \rightarrow U(x)$ при $y \rightarrow \infty$, $u(x, 0) = u(0, y) = 0$;
- (iii) $u_y/U > 0$ при $y \geq 0$; $u_y/U \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$;
- (iv) u_x , u_y , u_{yy} ограничены и непрерывны в $\overline{D}$;
- (v) v непрерывна в $\overline{D}$ по y при $x > 0$; v непрерывна по x и y внутри D ;
- (vi) u_{yyy} ограничена в $\overline{D}$; u_{xy} ограничена в D при ограниченных y ; u_{xy} и u_{yyy} непрерывны в $\overline{D}$; u_{yy}/u_y непрерывна в $\overline{D}$ по y ;
- (vii) имеют место оценки

$$U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{-C_1x} \leq u_y \leq U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{C_2x}, \quad Y_{\eta}\left(\frac{u}{U}\right)e^{C_4x} \leq \frac{u_{yy}}{u_y} \leq Y_{\eta}\left(\frac{u}{U}\right)e^{-C_5x}, \\ \exp\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{2C_2x}\right] \leq 1 - \frac{u}{U} \leq \exp\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{-2C_1x}\right],$$

где $Y(\eta)$ — решение задачи (3.13), (3.14).

Доказательство теоремы 3.2. Доказательство проводится на основе теоремы 3.1. Для начала покажем, что если $w(\xi, \eta)$ обладает свойствами, указанными в теореме 3.1, то можно с помощью замены (2.3) перейти от решения задачи (2.4), (2.5) к решению задачи (2.1), (2.2), существование которого доказано в теореме 4.1. Согласно (2.3) имеем

$$w(\xi, \eta) = w\left(x, \frac{u}{U}\right) = \frac{u_y}{U}, \quad x = \xi, \quad y = \int_0^{u(x,y)/U(x)} \frac{ds}{w(x, s)}. \quad (3.37)$$

Отсюда в силу непрерывности функции $w(\xi, \eta)$ в $\overline{\Omega}$ и неравенства $w > 0$ при $0 \leq \eta < 1$ получаем, что $u(x, y)/U(x)$ непрерывна и ограничена в $\overline{D}$,

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, y) \rightarrow U(x) \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty,$$

u_y непрерывна и ограничена в $\overline{D}$, $u_y > 0$ при $y \geq 0$, $x \geq 0$. Из (3.37) находим

$$u_y = wU, \quad \frac{u_{yy}}{u_y} = w_{\eta}, \quad u_{yy} = Uw_{\eta}u_y = w_{\eta}u_y, \quad u_{yyy} = w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U} + w_{\eta}u_{yy}, \\ u_{xy} = wU_{\xi} + Uw_{\xi} + u_{\xi}w_{\eta} - uw_{\eta}\frac{U_{\xi}}{U}, \quad u_x = u\frac{U_x}{U} + wU \int_0^{u(x,y)/U(x)} \frac{w_{\xi}(x, s)}{w^2(x, s)} ds. \quad (3.38)$$

Из свойств функции w и ее производных ввиду равенств (3.38) следует, что обобщенные производные u_x , u_{yy} , u_{yyy} ограничены в D , u_{xy} ограничена при конечных y . Неравенства для u , утверждаемые теоремой 4.1, следуют из оценок функций w , w_ξ , w_η и $ww_{\eta\eta}$. Непрерывность u_x и u_{yy} по y следует из (3.38). Функцию $v(x, y)$ определим равенством

$$v = \frac{1}{u_y} \left(-uu_x + \nu u_{yy}(1 + 3du_y^2) + UU_x + B^2U - B^2u \right). \quad (3.39)$$

Покажем, что u и v , определенные формулами (3.37), (3.39), удовлетворяют системе (2.1) и условиям (2.2). Функция v имеет производную по y в D . Дифференцируя (3.39) по y , получим

$$v_y u_y + \nu u_{yy} + u_y u_x + uu_{xy} - \nu u_{yyy} - 6\nu du_y u_{yy}^2 - 3\nu du_y^2 u_{yyy} - B^2 u_y = 0$$

или

$$v_y u_y + \frac{u_{yy}}{u_y} \left(-uu_x + \nu u_{yy}(1 + 3du_y^2) + UU_x \right) + u_y u_x + uu_{xy} - \nu u_{yyy} - 6\nu du_y u_{yy}^2 - 3\nu du_y^2 u_{yyy} - B^2 u_y = 0. \quad (3.40)$$

Функция $w(\xi, \eta) = u_y/U$ удовлетворяет уравнению (2.4). Заменяя в уравнении (2.4) производные w через производные от u , находим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{U} \left\{ \nu(1 + 3du_y^2) \frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y} - \frac{(u_{xy}u_y - u_x u_{yy}^2)u}{u_y} - \frac{uU_x(u_{yy} - u_y^2)}{Uu_y} + \right. \\ \left. + \frac{(u^2 - U^2)U_x}{U} \frac{u_{yy}}{u_y} + uu_y - \frac{uu_y U_x}{U} + 6\nu du_y^2 u_y + (u - U) \frac{u_{yy}}{u_y} B^2 - B^2 u_y \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Умножив (3.41) на U и складывая равенства (3.40) и (3.41), получим

$$u_x + u_y = 0. \quad (3.42)$$

Уравнения (3.39), (3.42) представляют систему (2.1). Покажем, что $v(x, y)$ удовлетворяет условию $v(x, 0) = v_0(x)$. Из (2.5) следует, что

$$v_0 = \left[\frac{\nu w w_\eta (1 + 3dU^2 w^2) + U_x + B^2}{w} \right] \Big|_{\eta=0}.$$

Используя (3.39), получаем

$$v(x, 0) = \left[\frac{\nu u_{yy}(1 + 3du_y^2) + UU_x + B^2U + B^2u}{u_y} \right] \Big|_{y=0} = \left[\frac{\nu w w_\eta (1 + 3dU^2 w^2) + U_x + B^2}{w} \right] \Big|_{\eta=0} = v_0(x).$$

Здесь мы использовали непрерывность функций u , u_x , u_y , u_{yy} по y при $y = 0$, а также непрерывность w и ww_η по η . Как следует из (3.41), функция v , определенная равенством (3.39), непрерывна в $\bar{D}$ по y и ограничена при ограниченных y ; v_y ограничена в D , так как $v_y = -u_x$, а u/U и u ограничены.

Выведем асимптотическую формулу для отношения $u(x, y)/U(x)$ при $y \rightarrow \infty$. Используя оценки функций $w(\xi, \eta)$ из теоремы 3.1 и оценки $Y(\eta)$ из леммы 3.2, получаем при $\eta_0 \leq \eta \leq 1$ неравенства

$$M_1(1 - \eta)(\sigma - K_4)e^{-C_1 x} \leq w(\xi, \eta) \leq M_1(1 - \eta)\sigma e^{C_2 x}.$$

Это приводит к неравенствам

$$M_1 \left(1 - \frac{u}{U} \right) \left(\sigma \left(\frac{u}{U} \right) - K_4 \right) e^{-C_1 x} \leq \frac{u_y}{U} \leq M_1 \left(1 - \frac{u}{U} \right) \sigma \left(\frac{u}{U} \right) e^{C_2 x}.$$

Из того факта, что

$$\sigma_y = \frac{u_y/U}{2(1 - u/U)\sigma},$$

получаем

$$\frac{2\sigma_y}{M_1 e^{C_2 x}} \leq 1 \leq \frac{2\sigma\sigma_y}{M_1(\sigma - K_4)e^{-C_1 x}}.$$

Интегрируя последние неравенства по y от y_0 , соответствующего η_0 , до произвольного $y \in (y_0, \infty)$, получаем

$$\frac{2(\sigma - \sigma_0)}{M_1 e^{C_2 x}} \leq y - y_0 \leq \frac{2(\sigma - \sigma_0)}{M_1 e^{-C_1 x}} + \frac{2K_4}{M_1 e^{-C_1 x}} [\ln(\sigma - K_4) - \ln(\sigma_0 - K_4)],$$

где $\sigma = \sqrt{-\ln \mu(1 - u/U)}$, $\sigma_0 = \sigma|_{y=y_0}$.

Из этих неравенств находим

$$\frac{(y - y_0)M_1 e^{-C_1 x}}{2} + K_4 \ln \left(1 + \frac{(y - y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2(\sigma - K_4)} \right) + \sigma_0 \leq \sigma \leq \frac{(y - y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2} + \sigma_0$$

и, следовательно,

$$\exp \left[-\frac{U(0)}{2\nu} y^2 e^{2C_2 x} + O(y) \right] \leq 1 - \frac{u}{U} \leq \exp \left[-\frac{U(0)}{2\nu} y^2 e^{-2C_1 x} + O(y \ln y) \right] \quad \text{при } y \rightarrow \infty,$$

где $M_1^2 = 2a/\nu$, $a = U_x(0)$. Данные неравенства доказывают справедливость формулы

$$\exp \left[-\frac{M_1^2}{4} y^2 e^{2C_2 x} \right] \leq 1 - \frac{u}{U} \leq \exp \left[-\frac{M_1^2}{4} y^2 e^{-2C_1 x} \right]. \quad \square$$

4. Теорема о единственности решения задачи.

Теорема 4.1. *Задача (2.4), (2.5) в области Ω может иметь лишь одно неотрицательное решение w , обладающее следующими свойствами: w непрерывна в Ω ; w_η , $w_{\eta\eta}$, w_ξ непрерывны во внутренних точках Ω ; $w > 0$ при $\eta = 0$; w_η непрерывна по η при $\eta = 0$.*

Доказательство теоремы 3.2. Предположим, что задача имеет два таких решения w_1 и w_2 . Их разность $\bar{w} = w_1 - w_2$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \nu w_1^2 \bar{w}_{\eta\eta} + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta} \bar{w} + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^4 \bar{w}_{\eta\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1^3 + w_1 w_2^2 + w_1^2 w_2 + w_2^3) w_{2\eta\eta} \bar{w} - \\ & - \eta \xi V \bar{w}_\xi + (\eta^2 - 1)(V + \xi V_\xi) \bar{w}_\eta - \eta(V + \xi V_\xi) \bar{w} + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_{1\eta} + w_{2\eta}) w_2^3 \bar{w}_{2\eta} + \\ & + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) w_{1\eta}^2 \bar{w} + (\eta - 1) B^2 \bar{w}_\eta - B^2 \xi V \bar{w} = 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\bar{w} \Big|_{\eta=1} = 0, \quad \left(\nu \bar{w}_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 \bar{w}_{2\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1 + w_2) w_{2\eta} \bar{w} - \frac{(V + \xi V_\xi) \bar{w}}{w_1 w_2} - \frac{B^2 \bar{w}}{w^1 w^2} \right) \Big|_{\eta=0} = 0.$$

Для $W = \bar{w} e^{-\alpha \xi}$, $\alpha = \text{const} > 0$, имеем следующее уравнение в области Ω :

$$\begin{aligned} & \nu w_1^2 W_{\eta\eta} + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta} W + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^4 W_{\eta\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1^3 + w_1 w_2^2 + w_1^2 w_2 + w_2^3) w_{2\eta\eta} W - \\ & - \eta \xi V W_\xi - \alpha \eta \xi V W_\xi + (\eta^2 - 1)(V + \xi V_\xi) W_\eta - \eta(V + \xi V_\xi) W + \\ & + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) w_{1\eta}^2 W + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_{1\eta} + w_{2\eta}) w_2^3 W_\eta^2 + (\eta - 1) B^2 W_\eta = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

а также граничные условия

$$W \Big|_{\eta=1} = 0, \quad \left(\nu W_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 W_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1 + w_2) w_{2\eta} W - \frac{(V + \xi V_\xi + B^2) W}{w_1 w_2} \right) \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (4.2)$$

При достаточно большом α коэффициент при W в (4.1) отрицателен, $(V + \xi V_\xi) > 0$ по условию. По принципу максимума из (4.1), (4.2) следует, что W не может иметь ни положительного максимума, ни отрицательного минимума при $0 \leq \eta < 1$. Следовательно, $W \equiv 0$ и $\bar{w} \equiv 0$. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть u , v — решение задачи (2.1), (2.2), удовлетворяющее следующим условиям:*

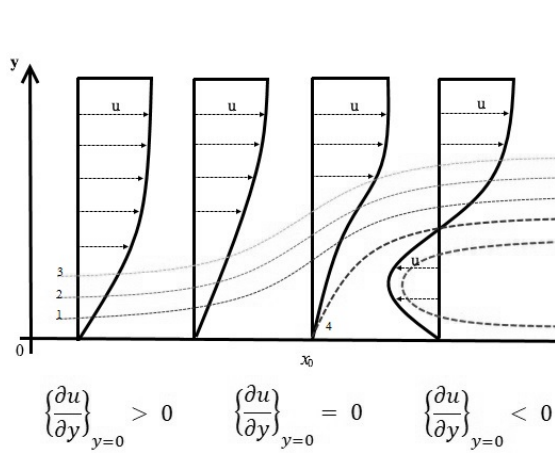


Рис. 1

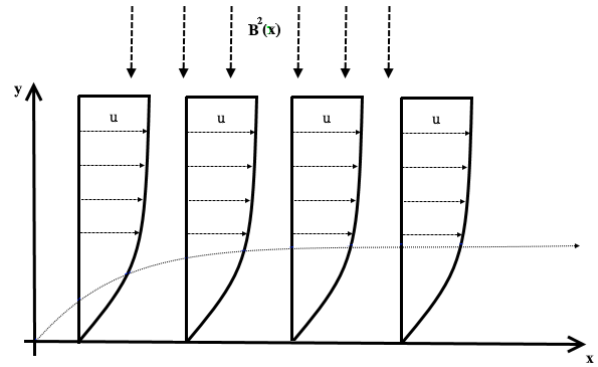


Рис. 2

- (1) производные $u_x, u_y, v_y, u_{yy}, u_{yyy}, u_{xy}$ непрерывны в D ;
- (2) функции u/U и u_y/U непрерывны в $\bar{D}$;
- (3) $u_y > 0$ при $y \geq 0, x > 0$; $u_y/U > 0$ при $y = 0$; $u_y/U \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$;
- (4) $u_{yy}/u_y, u_x$ непрерывны по y при $y = 0$;
- (5) $\frac{u_{yyy}u_y - u_y^2}{u_y^2} \leq 0$.

Тогда u, v — единственное решение задачи (2.1), (2.2) с указанными свойствами.

Доказательство теоремы 4.2. Если u, v — решение задачи (2.1), (2.2), обладающее этими свойствами, то с помощью замены независимых переменных (2.3) и введения новой неизвестной функции $w = u_y/U$ приходим к решению w задачи (2.4), (2.5), обладающему свойствами из теоремы 3.1, аналогично доказательству теоремы 4.1. Как показано выше, такое решение w единственно. $\square$

5. Влияние магнитного поля на отрыв пограничного слоя. Одним из способов активного воздействия на характеристики пограничного слоя является искусственное воздействие поперечным магнитным полем на жидкости. Поперечное магнитное поле используется для управления точкой отрыва пограничного слоя, так как преждевременный его отрыв уменьшает подъемную силу и увеличивает лобовое сопротивление обтекаемого тела, например, профиля крыла или иной несущей поверхности.

Определение 5.1. Точкой отрыва пограничного слоя называется такая точка x_0 , что $u_y(x_0, 0) = 0$ и $u_y(x, 0) > 0$ при $0 < x < x_0$. Тогда x_0 — верхняя грань таких $X > 0$, что в области D задача (2.1), (2.2) имеет такое решение $u(x, y), v(x, y)$, что $u_y(x, 0) > 0$.

В точке x_0 при $y = 0$ производная скорости по y равна нулю, откуда появляется перегиб, и устойчивость течения нарушается. С последующим поступательным движением пограничного слоя появляется область, где производная по y становится меньше нуля, т.е. возникает обратное течение жидкости и образуются вихри. При этом нарушается ламинарный характер течения и его стационарность. Этого можно избежать, подействовав магнитным полем, направленным перпендикулярно потоку жидкости. Под этим влиянием точка отрыва пограничного слоя от твердой обтекаемой поверхности сдвинется вправо, тем самым выравнивая течение жидкости (см. рис. 2). Таким образом, сделан вывод о том, что при достаточно сильном магнитном поле возможно безотрывное течение независимо от других параметров движения вязкой сплошной среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатова Р. Р., Самохин В. Н., Чечкин Г. А. Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя// Пробл. мат. анализ. — 2018. — 92. — С. 83–100.
2. Булатова Р. Р. Влияние магнитного поля на положение точки отрыва пограничного слоя электропроводной жидкости// Изв. вузов. Пробл. полиграфии и издат. дела. — 2018. — № 1. — С. 14–22.
3. Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А. Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье—Стокса// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2011. — 28. — С. 329–361.
4. Самохин В. Н., Чечкин Г. А. Уравнения пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды в окрестности критической точки// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2016. — 31. — С. 158–176.
5. Олейник О. А., Самохин В. Н. Математические методы в теории пограничного слоя. — М.: Наука, 1997.
6. Bulatova R. R., Chechkin G. A., Chechkina T. P., Samokhin V. N. On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non-Newtonian MHD medium// C. R. Méc. — 2018. — 346, № 9. — P. 807–814.

Булатова Регина Рашидовна

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: regina.bulatova@mech.math.msu.su



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 38–46
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-38-46

УДК 517.9

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2019 г. И. А. ВЫСОЦКАЯ

Аннотация. Рассмотрен новый класс почти периодических на бесконечности функций, определяемый с помощью подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций. Сформулированы четыре определения почти периодических на бесконечности функций и доказана их эквивалентность. Получены спектральные критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений систем линейных разностных уравнений и их асимптотическое представление.

Ключевые слова: почти периодическая на бесконечности функция, медленно меняющаяся на бесконечности функция, интегрально убывающая на бесконечности функция, разностное уравнение.

ALMOST PERIODIC AT INFINITY SOLUTIONS OF DIFFERENCE EQUATIONS

© 2019 I. A. VYSOTSKAYA

ABSTRACT. We consider a new class of functions almost periodic at infinity defined by using the subspace of functions that integrally decrease at infinity. We propose four definitions of functions almost periodic at infinity and prove their equivalence. Also, we obtain spectral criteria of almost periodicity at infinity of bounded solutions of systems of linear difference equations and their asymptotic representation.

Keywords and phrases: function almost periodic at infinity, function slowly changing at infinity, function integrally decreasing at infinity, difference equation.

AMS Subject Classification: 39A24

1. Введение. Проблема почти периодичности ограниченных функций на вещественной оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ и полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ как решений дифференциальных, разностных и функциональных уравнений изучалась многими авторами (см. [5, 9, 15, 16]). Одной из первых работ в этом направлении исследований была статья С. Бохнера и Дж. фон Неймана [17], в которой установлена почти периодичность ограниченных решений разностных уравнений. С. Л. Соболевым был получен критерий почти периодичности решений параболических уравнений с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве (см. [12]).

В этой статье вводится в рассмотрение семейство исчезающих (в том или ином смысле) на бесконечности подпространств из банахова пространства непрерывных ограниченных на промежутке $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$ функций. По соответствующему выбранному подпространству исчезающих на бесконечности функций даются четыре эквивалентных (см. теорему 2.1) определения почти периодических на бесконечности функций.

При исследовании почти периодических на бесконечности функций существенно используется спектральная теория изометрических представлений, излагаемая в [2, 5].

Основной результат статьи содержится в леммах 3.1, 3.2 и теореме 3.1. В этих утверждениях получены спектральные критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений систем линейных разностных уравнений и их асимптотическое представление.

2. Основные понятия из теории почти периодических функций. Введем в рассмотрение основные функциональные пространства и сформулируем основные понятия, связанные с определением почти периодических на бесконечности функций.

Пусть X — комплексное банахово пространство и $\mathbb{J}$ — одно из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$. Пусть $C_b(\mathbb{J}, X)$ — банахово пространство непрерывных ограниченных функций, определенных на $\mathbb{J}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве X . Пусть $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных ограниченных функций. Через $C_0(\mathbb{J}, X)$ обозначим (замкнутое) подпространство функций $x \in C_b$, исчезающих на бесконечности, т.е.

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0, \quad x \in C_b(\mathbb{J}, X).$$

В пространстве $C_b(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим операторы сдвига

$$S(t) : C_b(\mathbb{J}, X) \rightarrow C_b(\mathbb{J}, X), \quad (S(t)x)(\tau) = x(\tau + t), \quad \tau \in \mathbb{J}, \quad t \in \mathbb{J}, \quad x \in C_b(\mathbb{J}, X).$$

Определение 2.1. Функцию x из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ назовем *интегрально убывающей на бесконечности*, если

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{J}} \int_0^\alpha \|x(t+s)\| ds = 0.$$

Обозначим символом $C_{0,\text{int}} = C_{0,\text{int}}(\mathbb{J}, X)$ множество интегрально убывающих на бесконечности функций. В частности, к таким подпространствам относится семейство замкнутых в $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ подпространств

$$C_{0,p} = C_{0,p}(\mathbb{J}, X) = \left\{ x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{J}} \int_0^\alpha \|x(s+t)\|^p ds = 0 \right\},$$

где $p \in [1, \infty)$. Таким образом, $C_{0,1} = C_{0,\text{int}}$ — подпространство интегрально убывающих на бесконечности функций.

Определение 2.2. Обозначим символом $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ замкнутое (с нормой из $C_{b,u}$) подпространство функций из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, обладающих следующими свойствами:

- (1) $S(t)x \in \mathcal{C}_0$ для любого $t \in \mathbb{J}$ и любой функции $x \in \mathcal{C}_0$;
- (2) $\mathcal{C}_0 \subset C_0 \subset C_{0,\text{int}}$;
- (3) $e_\lambda x \in \mathcal{C}_0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, где $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Введенный класс является более широким по сравнению с классом почти периодических на бесконечности функций, введенным в работах А. Г. Баскакова (см. [2, 3]).

Определение 2.3. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *функцией, медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0$* , если для каждого $\alpha \in \mathbb{J}$ выполнено $S(\alpha)x - x \in \mathcal{C}_0$.

Следует заметить, что в теории дифференциальных уравнений (см. [7]) приводится определение стационарной на бесконечности функции, которое эквивалентно определению медленно меняющейся функции.

Отметим что в [3, 4] давалось определение медленно меняющейся функции с использованием подпространства $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Свойства медленно меняющихся функций относительно подпространства $\mathcal{C}_0$ также были отмечены в [3, 4, 10, 11, 14].

Множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ относительно подпространства $C_{0,\text{int}}$ будем обозначать через $C_{\text{sl},\text{int}}(\mathbb{J}, X)$ (см. [13]) и через $C_{\text{sl}}(\mathbb{J}, X)$ — относительно подпространства C_0 (см. [3]). Символом C_{sl,C_0} будем обозначать подпространство, обладающее свойством

$$C_{\text{sl}}(\mathbb{J}, X) \subset C_{\text{sl},C_0} \subset C_{\text{sl},\text{int}}(\mathbb{J}, X).$$

Непосредственно из определения следует, что $C_{\text{sl}}(\mathbb{J}, X)$ является замкнутым подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, инвариантным относительно сдвигов функций.

Приведем примеры медленно меняющихся на бесконечности функций из C_{sl,C_0} для $X = \mathbb{C}$:

- (1) $x_1(t) = \sin \ln(1 + |t|)$, $t \in \mathbb{J}$;
- (2) $x_2(t) = c + x_0(t)$, $t \in \mathbb{J}$, где $c \in \mathbb{C}$ и x_0 — любая функция из $C_0(\mathbb{J})$;
- (3) $x_3(t) = \arctg t$, $t \in \mathbb{J}$;
- (4) любая непрерывно дифференцируемая функция $x \in C_b(\mathbb{J})$, обладающая свойством

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0.$$

Определение 2.4. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется ε -периодом функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ на бесконечности относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если существует такая функция $x_0 \in C_0$, что

$$\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon.$$

Множество ε -периодов функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ обозначим через $\Omega_\infty(x; C_0; \varepsilon)$.

Если $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$, то определение ε -периода функции из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ относительно C_0 эквивалентно следующему определению.

Определение 2.5. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется ε -периодом функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ на бесконечности относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$, если существует такое число $\alpha(\varepsilon) \geq 0$, что

$$\sup_{|t| \geq \alpha(\varepsilon)} \|x(t + \omega) - x(t)\| < \varepsilon.$$

Определение 2.6. Подмножество Ω из $\mathbb{J}$ называется *относительно плотным на $\mathbb{J}$* , если существует такое $l > 0$, что $[t, t + l] \cap \Omega \neq \emptyset$ для любого $t \in \mathbb{J}$.

Определение 2.7 (аналог классического определения Бора). Функция x из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства C_0 исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; C_0; \varepsilon)$ относительно плотно на $\mathbb{J}$.

Из определений 2.5, 2.7 следует, что каждая непрерывная функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, почти периодическая по Бору (в обычном смысле; см. [8]), является почти периодической на бесконечности относительно любого подпространства C_0 исчезающих на бесконечности функций.

Множество классических почти периодических функций обозначим символом $AP(\mathbb{R}, X)$, а множество почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$ — символом $AP_\infty(\mathbb{J}, X; C_0)$.

Непосредственно из определения 2.3 медленно меняющейся на бесконечности функции следует, что если $\Omega_\infty(x; C_0; \varepsilon) = \mathbb{J}$ для любого $\varepsilon > 0$, то $x \in C_{\text{sl},C_0}(\mathbb{J}, X)$. Таким образом, имеет место включение

$$C_{\text{sl},C_0}(\mathbb{J}, X) \subset AP_\infty(\mathbb{J}, X, C_0).$$

Определение 2.8. Множество функций $\mathcal{M} \subset C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *предкомпактным на бесконечности* относительно подпространства $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число таких функций $b_1, \dots, b_N$ из $\mathcal{M}$ (ε -сеть на бесконечности), что для любой функции $x \in \mathcal{M}$ существуют функция b_k , $k \in \{1, \dots, N\}$, и функция $\alpha_\varepsilon \in C_0$, для которых имеет место оценка

$$\|x - b_k - \alpha_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Определение 2.9 (аналог определения Бохнера). Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если множество ее сдвигов $S(t)x$, $t \in \mathbb{J}$, является предкомпактным на бесконечности множеством относительно подпространства $\mathcal{C}_0$.

Определение 2.10 (аппроксимационное). Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число таких вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и функций $x_1, \dots, x_N$ из пространства $C_{sl, \mathcal{C}_0}$ медленно меняющихся на бесконечности функций, что

$$\sup_{t \in \mathbb{J}} \left\| x(t) - \sum_{k=1}^N x_k(t) e^{i\lambda_k t} \right\| < \varepsilon.$$

В работе будет использоваться понятие банахова модуля (банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля; см. [2, 3]) над алгеброй суммируемых на $\mathbb{R}$ классов комплексных функций с нормой

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}),$$

где в роли мультипликативной операции выступает классическая свертка функций

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Пусть $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ — сильно непрерывное изометрическое представление, где $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство. Далее $\mathcal{X}$ рассматривается как $L^1(\mathbb{R})$ -модуль. Будем говорить что модульная структура $\mathcal{X}$ *ассоциирована с представлением T* (см. [6]), если имеют место равенства

$$T(t)(fx) = (S(t)f)x = fT(t)x, \quad t \in \mathbb{R},$$

и

$$f(gx) = (f * g)x = (g * f)x$$

для любых f, g из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и любого вектора $x \in \mathcal{X}$. При этом

$$\|fx\| = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)T(-s)x ds \right\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)| \|T(-s)x\| ds \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)| ds \|x\| = \|f\|_1 \|x\|$$

для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathcal{X}$. Далее для банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $\mathcal{X}$ будет использоваться обозначение $(\mathcal{X}, T)$.

Если $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ — сильно непрерывная группа изометрий из алгебры $\text{End } \mathcal{X}$, то формула

$$fx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)T(-s)x ds, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad x \in \mathcal{X},$$

определяет структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля, ассоциированного с данным представлением T .

Обозначим через $\mathcal{X}_c$ множество всех T -непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $\mathcal{X}$.

Для каждой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ ее преобразование Фурье $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ определяется формулой

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Определение 2.11. *Спектром Берлинга* вектора $x \in \mathcal{X}$ называется множество вещественных чисел $\Lambda(x)$ вида

$$\Lambda(x) = \left\{ \lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}), \text{ для которой } \widehat{f}(\lambda_0) \neq 0 \right\}.$$

Из определения следует, что

$$\Lambda(x) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \mu_0 \in \mathbb{R} : \text{существует такая функция } f \in L^1(\mathbb{R}), \text{ что } \widehat{f}(\mu_0) \neq 0 \text{ и } fx = 0 \right\}.$$

Имеют место следующие свойства спектра Берлинга векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля.

Лемма 2.1. Пусть $x \in X$ и $f \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- (1) множество $\Lambda(x)$ замкнуто и $\Lambda(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- (2) $\Lambda(fx) \subseteq (\text{supp } \widehat{f}) \cup \Lambda(x)$;
- (3) $fx = 0$, если $(\text{supp } \widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\widehat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;
- (4) множество $\Lambda(x)$ одноточечно ($\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$), если и только если $x \neq 0$ и $T(t)x = e^{i\lambda_0 t}x$, $t \in \mathbb{R}$.

Далее символом $\mathcal{X}$ будем обозначим фактор-пространство $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$, являющееся банаховым пространством с нормой

$$\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in x + C_0} \|y\|,$$

где $\tilde{x} = x + C_0$, $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ — класс эквивалентности. В пространстве $\mathcal{X}$ определим сильно непрерывную группу изометрий $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ формулой

$$\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{x} \in \mathcal{X},$$

где $S(t)x$ — левый сдвиг функции x для $t \geq 0$. Для $t < 0$ символ $\widetilde{S(t)x}$ обозначает класс эквивалентности, содержащий функцию $x_t \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ вида

$$x_t(s) = \begin{cases} x(s+t), & s+t > 0, \\ -t^{-1}x(0)(s), & s+t \leq 0, \quad s \geq 0. \end{cases}$$

Лемма 2.2. Представление $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ сильно непрерывно и изометрично:

$$\|\tilde{S}(t)\tilde{x}\| = \|\tilde{x}\|, \quad x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Доказательство. Докажем равенство (1) при $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ (при $\mathbb{J} = \mathbb{R}$ утверждение очевидно). Так как

$$x_t(s) - x(s) = \begin{cases} x(s+t) - x(s) & \text{при } t \geq 0, \\ -\frac{sx(0)}{t} + \frac{(s-t)x(0)}{t} & \text{при } t \leq 0, \end{cases}$$

то функция $t \mapsto \widetilde{S(t)x} : \mathbb{R} \rightarrow X$ непрерывна. Представление $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ изометрично, так как

$$\|\tilde{S}(t)\tilde{x}\| = \inf_{v_0 \in C_0} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|y(s+t) - v_0(s)\| = \inf_{v_0 \in C_0} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|y(s) - v_0(s)\| = \|\tilde{x}\|. \quad \square$$

Теперь дадим последнее (четвертое) определение почти периодической на бесконечности функции.

Определение 2.12. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства C_0 исчезающих на бесконечности функций, если класс эквивалентности $\tilde{x} = x + C_0$ является почти периодическим вектором в пространстве $\mathcal{X}$ относительно изометрического представления $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$.

Теорема 2.1. Все определения почти периодической на бесконечности функции (определения 2.7, 2.9, 2.10, 2.12) эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$ и определенную выше группу изометрий $T = \tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$. Для этого представления определение 2.9 соответствует свойству (4) из определения почти периодического вектора (см. [1, определение 14]). Поскольку все свойства из указанного определения эквивалентны, достаточно показать, что первые три его свойства эквивалентны определениям 2.7, 2.9 и 2.10 соответственно.

Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, а $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ — класс эквивалентности, построенный по функции x . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon) \cup (-\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon))$ совпадает с множеством $\Omega(\tilde{x}, \varepsilon)$ ε -периодов класса $\tilde{x}$. Следовательно, соответствующие определения эквивалентны.

Эквивалентность определения 2.9 и свойства (2) определения 14 из [1] непосредственно следует из определения фактор-модуля $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$.

Докажем эквивалентность аппроксимационного определения 2.10 и свойства (3) из [1, определение 14]. Для доказательства достаточно установить, что спектр Берлинга $\Lambda(\tilde{y})$ класса эквивалентности $\tilde{y} \in \mathcal{X}$, $\tilde{y} = y + \mathcal{C}_0$, является одноточечным множеством ($\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$) тогда и только тогда, когда функцию $y \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ можно представить в виде $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{J}$, где $y_0 \in \mathcal{C}_{sl, \mathcal{C}_0}$.

Если $\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$ для любого $t \in \mathbb{J}$ (см. [1, лемма 3, свойство 4]). Следовательно, $\Lambda(\tilde{y}_0) = \{0\}$, где $y_0(s) = y(s)e^{-i\lambda_0 s}$, $s \in \mathbb{J}$, и поэтому $\tilde{S}(t)\tilde{y}_0 = \tilde{y}_0$ для любого $t \in \mathbb{J}$. Таким образом, $S(t)y_0 - y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$, $t \in \mathbb{J}$, т.е. $y_0 \in \mathcal{C}_{sl, \mathcal{C}_0}$.

Обратно, если $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{J}$, где $y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$, $t \in \mathbb{J}$, и поэтому в силу [1, лемма 3, свойство 4)] получим, что $\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$. Теорема доказана. $\square$

3. Почти периодические на бесконечности решения разностных уравнений. Рассмотрим разностное уравнение вида

$$x(t+1) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и $A \in \text{End } X$.

Лемма 3.1. Пусть спектральный радиус оператора A из уравнения (2) удовлетворяет условию $r(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| < 1$. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ уравнения (2) принадлежит пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, единственно и имеет вид

$$x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A^n S(-n-1)f, \quad f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X). \quad (3)$$

Доказательство. Разностное уравнение (2) представим в виде

$$x = AS(-1)x + S(-1)f, \quad (I - \tilde{A})x = S(-1)f,$$

где $\tilde{A} = AS(-1) \in \text{End } C_{b,u}$. Так как в пространстве $C_{b,u}$ обратимая изометрия $S(-1)$ перестановочна с оператором умножения на оператор A , то

$$r(\tilde{A}) = r(A) < 1.$$

Следовательно (см. [16]), $I - A \in \text{End } C_{b,u}$ непрерывно обратим, и обратный имеет вид

$$(I - \tilde{A})^{-1}y = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}^n y = \sum_{n=0}^{\infty} A^n S(-n)y, \quad y \in C_{b,u}.$$

В частности, уравнение (2) имеет единственное решение $x_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$, которое представимо в виде (3). Очевидно, что $x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. $\square$

Лемма 3.2. Пусть оператор A из уравнения (2) обратим и $r(A^{-1}) < 1$. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ уравнения (2) принадлежит пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, единственно и имеет вид

$$x_0 = - \sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1} S(n)f, \quad f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X). \quad (4)$$

Доказательство. Применим оператор A^{-1} к уравнению (2)

$$x = A^{-1}S(1)x - A^{-1}f, \quad (I - \tilde{A}x) = -A^{-1}f,$$

где $\tilde{A} = A^{-1}S(1)$. Следуя доказательству леммы 3.1, получим, что оператор $(I - \tilde{A})$ обратим, и обратный имеет вид

$$(I - \tilde{A})^{-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1}S(n).$$

Поэтому ограниченное решение уравнения (2) представимо в виде

$$x_0 = - \sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1}S(n)f,$$

где $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. □

Теорема 3.1. Пусть для $A \in \text{End } X$ выполнено условие $\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_0, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}$, где $\gamma_k = e^{i\lambda_k}$, $0 \leq k \leq N$, и $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Если существует равномерно непрерывное ограниченное решение $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ уравнения (2), то оно является почти периодической на бесконечности функцией $x \in AP_{\infty}(\mathbb{R}, X, \mathcal{C}_0)$ вида

$$x(t) = \sum_{k=0}^n x_k(t)e^{i\lambda_k t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

где $x_k \in C_{\text{sl}, \mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$, $0 \leq k \leq N$.

Доказательство. Спектр оператора $A \in \text{End } X$ представим в виде

$$\sigma(A) = \sigma_0 \cup \sigma_{\text{in}} \cup \sigma_{\text{out}},$$

где $\sigma_{\text{in}} = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| < 1\}$ — совокупность точек спектра оператора A , лежащих внутри окружности, $\sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| > 1\}$ — совокупность точек спектра оператора A , лежащих вне окружности. В соответствии с этим разбиением спектра рассмотрим проекторы $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_{\text{in}}, \mathcal{P}_{\text{out}}$, которые соответственно построены по спектральным множествам $\sigma_0, \sigma_{\text{in}}, \sigma_{\text{out}}$. Таким образом,

$$I = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{\text{in}} + \mathcal{P}_{\text{out}}.$$

Эти проекторы индуцируют разложение

$$X = X_0 \oplus X_{\text{in}} \oplus X_{\text{out}}$$

пространства X , где $X_0 = \text{Im } \mathcal{P}_0$, $X_{\text{in}} = \text{Im } \mathcal{P}_{\text{in}}$, $X_{\text{out}} = \text{Im } \mathcal{P}_{\text{out}}$. Эти подпространства являются инвариантными для оператора B . Введем обозначения $A_0 = A|_{X_0}$, $A_{\text{in}} = A|_{X_{\text{in}}}$, $A_{\text{out}} = A|_{X_{\text{out}}}$. Таким образом, $A = A_0 \oplus A_{\text{in}} \oplus A_{\text{out}}$ относительно построенного разложения пространства X .

Применяя проектор $\mathcal{P}_{\text{in}}$ к обеим частям уравнения (2), получим функцию $x_{\text{in}} = \mathcal{P}_{\text{in}}x$, удовлетворяющую равенству

$$S(1)x_{\text{in}}(t) = A_{\text{in}}x_{\text{in}}(t) + f_{\text{in}}(t), \quad f_{\text{in}} = \mathcal{P}_{\text{in}}f, \quad f \in \mathcal{C}_0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что

$$(I - A_{\text{in}}S(-1))x_{\text{in}} = S(-1)f_{\text{in}}. \quad (7)$$

Поскольку $\|S(-1)\| = 1$, $A_{\text{in}}S(-1)x_{\text{in}}(t) = S(-1)A_{\text{in}}x_{\text{in}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и спектральный радиус $r(A_{\text{in}})$ оператора A_{in} меньше единицы, то оператор $I - A_{\text{in}}S(-1)$ обратим, и из (7) следует, что

$$x_{\text{in}} = (I - A_{\text{in}}S(-1))^{-1}S(-1)f_{\text{in}} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{\text{in}}^k S(-k-1)f_{\text{in}}.$$

Ясно, что $x_{\text{in}} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Аналогичный результат получим при применении проектора $\mathcal{P}_{\text{out}}$ к уравнению (2):

$$(S(1)x_{\text{out}})(t) = A_{\text{out}}x_{\text{out}}(t) + y_{\text{out}}(t), \quad y_{\text{out}} = \mathcal{P}_{\text{out}}f \in \mathcal{C}_0. \quad (8)$$

Оператор A_{out} обратим и

$$\sigma(A_{\text{out}}^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma_{\text{out}} \right\},$$

т.е. его спектральный радиус меньше единицы. Используя перестановочность операторов S_N и A_{out} (см. (8)), получим равенства

$$S(1)A_{\text{out}}^{-1}x_{\text{out}}(t) = x_{\text{out}}(t) + A_{\text{out}}^{-1}f_{\text{out}}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

или

$$(I - S(1)A_{\text{out}}^{-1})x_{\text{out}}(t) = -A_{\text{out}}^{-1}f_{\text{out}}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом,

$$x_{\text{out}} = -(I - S(1)A_{\text{out}}^{-1})^{-1}A_{\text{out}}^{-1}f_{\text{out}} = -\sum_{k=0}^{\infty} (A_{\text{out}}^{-1}S(1))^k A_{\text{out}}^{-1}f_{\text{out}}, \quad f_{\text{out}} \in \mathcal{C}_0.$$

Следовательно $x_{\text{out}} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Проектор $\mathcal{P}_0$ можно представить в виде

$$\mathcal{P}_0 = P_0 + \dots + P_N,$$

где $P_k \in \text{End } X_0$ — проектор, и

$$AP_k = \gamma_k P_k,$$

где $|\gamma_k| = 1$, $0 \leq k \leq N$. Применяя проектор P_0 к разностному уравнению (2) и далее применяя проектор P_k , получим

$$P_k x_0(t+1) = P_k A_0 x_0(t) + P_k f_0(t), \quad 0 \leq k \leq N, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $x_0(t) = \mathcal{P}_0 x(t)$ и $f_0(t) = \mathcal{P}_0 f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда сделав замену $\widetilde{x}_k(t) = e^{-i\lambda_k t} x_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, получим

$$S(1)\widetilde{x}_k = \widetilde{x}_k + \widetilde{f}_k.$$

Так как $f_k(t) = \mathcal{P}_0 f_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, то $f_k \in \mathcal{C}_0$ и поэтому $\widetilde{f}_k = 0$. Так как

$$S(1)\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_k \in \mathcal{C}_0,$$

то $\widetilde{x}_k$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, а x_k отличается от $\widetilde{x}_k$ на множитель $e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, $x_0 \in AP_{\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. В итоге получаем, что функция x представима в виде $x = x_0 + x_{\text{in}} + x_{\text{out}}$. Следовательно, $x \in AP_{\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$, и решение имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^n x_k(t) e^{i\lambda_k t}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. Г., Стружкова И. И., Тришина И. А. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 2 (348). — С. 293–308.
2. Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Совр. мат. Фундам. направл. — 2004. — 9. — С. 3–151.
3. Баскаков А. Г., Калужина Н. С. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Мат. заметки. — 2012. — 92, № 5. — С. 643–661.
4. Баскаков А. Г., Калужина Н. С., Поляков Д. М. Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов // Изв. вузов. Мат. — 2014. — № 7. — С. 3–14.
5. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений // Мат. заметки. — 1978. — 24, № 2. — С. 195–206.
6. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. — М.: Физматгиз, 1967.
7. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
8. Левитан Б. М. Почти периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953.
9. фон Нейман Дж. Избранные труды по функциональному анализу. — М.: Наука, 1987.

10. Рыжкова А. А., Тришина И. А. О почти периодических на бесконечности решениях разностных уравнений// Изв. Саратов. ун-та. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2015. — 15, № 1. — С. 45–49.
11. Рыжкова А. А., Тришина И. А. О периодических на бесконечности функциях// Науч. вед. Белгород. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2014. — 36, № 19. — С. 71–75.
12. Соболев С. Л. О почти периодичности решений волнового уравнения// Докл. АН СССР. — 1945. — 49, № 1. — С. 12–15.
13. Тришина И. А. Почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций// Изв. Саратов. ун-та. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2017. — 17, № 4. — С. 402–418.
14. Тришина И. А. Медленно меняющиеся на бесконечности функции// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2017. — № 4. — С. 134–144.
15. Amerio L., Prouse G. Almost Periodic Functions and Functional Equations. — New York: Springer-Verlag, 1971.
16. Arendt W., Batty C. J. K. Asymptotic almost periodic solutions of inhomogeneous Cauchy problems on the half-line// Bull. London Math. Soc. — 1991. — 31, № 3. — P. 291–304.
17. Bochner S., von Neuman J. On compact solution of operational differential equations// Ann. Math. — 1935. — 36. — P. 435–447.

Высоцкая Ирина Алевтиновна
Воронежский государственный университет
E-mail: i.a.tishina@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 47–56
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-47-56

УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ ИЗ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

© 2019 г. И. И. СТРУКОВА

Аннотация. В статье рассмотрены однородные пространства функций, заданных на всей вещественной оси, со значениями в комплексном банаховом пространстве. Введен в рассмотрение и изучен новый класс почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства. Приведены четыре определения таких функций и доказана их эквивалентность. Построены ряды Фурье почти периодических на бесконечности функций и получены некоторые их свойства. В работе существенно использованы результаты теории изометрических представлений и теории банаховых модулей.

Ключевые слова: почти периодическая на бесконечности функция, медленно меняющаяся на бесконечности функция, однородное пространство, банахов модуль, почти периодический вектор, ряд Фурье.

ON SOME PROPERTIES OF ALMOST PERIODIC AT INFINITY OF FUNCTIONS FROM HOMOGENEOUS SPACES

© 2019 I. I. STRUKOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider homogeneous spaces of functions defined on the whole real axis with values in a complex Banach space. A new class of functions almost uniformly periodic at infinity from a homogeneous space is introduced and examined. Four definitions of such functions are proposed and their equivalence is proved. Fourier series of functions almost periodic at infinity are constructed and their properties are analyzed. In this paper, we essentially used results of the theory of isometric representations and the theory of Banach modules.

Keywords and phrases: function almost periodic at infinity, function slowly varying at infinity, homogeneous space, Banach module, almost periodic vector, Fourier series.

AMS Subject Classification: 33E30, 43A60

1. Однородные пространства функций. Пусть X — комплексное банахово пространство, $\text{End } X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Символом $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, X)$ обозначим пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на $\mathbb{R}$ (классов) функций со значениями в банаховом пространстве X . Через $S^p(\mathbb{R}, X)$, где $p \in [1, \infty)$, будем обозначать пространство Степанова (см. [13]), состоящее из функций $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, X)$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S^p} = \sup_{s \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \|x(s+t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00097).

принимается за норму. Пространства Степанова играют важную роль при изучении дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (см. [3, 4, 8–10]).

Определение 1. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ определенных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X называется *однородным*, если выполнены следующие условия:

- (a) пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ содержится в пространстве $S^1(\mathbb{R}, X)$, причем вложение $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \subset S^1(\mathbb{R}, X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);
- (b) в $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ определена и ограничена группа $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций

$$(S(t)x)(s) = x(s+t), \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X); \quad (1)$$

- (c) для любых функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ их свертка

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, причем выполнено неравенство

$$\|f * x\| \leq C\|f\|_1\|x\|,$$

где $C \geq 1$ — некоторая постоянная (как правило, $C = 1$);

- (d) $\varphi x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ с компактным носителем $\text{supp } \varphi$, причем

$$\|\varphi x\| \leq \|\varphi\|\|x\|$$

и отображение $t \mapsto \varphi S(t)x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ непрерывно.

Далее символом $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать однородное пространство; в случае $X = \mathbb{C}$ будем использовать более короткое обозначение $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Через $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ вида

$$\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X) = \left\{ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) : \text{функция } t \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \text{ непрерывна} \right\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X).$$

Через $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, содержащее все функции φx , $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, где $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$ бесконечно дифференцируема и $\text{supp } \varphi$ — компакт.

Приведем примеры однородных пространств:

- (1) пространства $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$ измеримых по Лебегу и суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ (классов) функций и пространство $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ существенно ограниченных (классов) функций;
- (2) пространства амальгам Винера $(L^p(\mathbb{R}, X), l^q(\mathbb{R}, X))$, $p \in [1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$;
- (3) пространства Степанова $S^p = S^p(\mathbb{R}, X)$ для всех $p \in [1, \infty)$;
- (4) пространство $C_b(\mathbb{R}, X)$ ограниченных непрерывных функций и его подпространства:
 - (a) подпространство $C_{b,u}(\mathbb{R}, X) \subset C_b(\mathbb{R}, X)$ равномерно непрерывных функций,
 - (b) подпространство $C_0(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ непрерывных исчезающих на бесконечности функций,
 - (c) подпространство $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ медленно меняющихся на бесконечности функций (см. [16, 18, 19, 22]),
 - (d) подпространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, состоящее из ω -периодических на бесконечности функций, $\omega \in \mathbb{R}_+$ (см. [16, 18, 19, 22]),
 - (e) подпространство $AP_\infty = AP_\infty(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ непрерывных почти периодических на бесконечности функций (см. [2, 3, 12]);
- (5) пространство $\mathbb{V}(\mathbb{R}, X) \subset L^\infty(\mathbb{R}, X)$ функций ограниченной вариации (см. [17]).

Непосредственно из определения 1 следует, что все перечисленные однородные пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ являются банаховыми $L^1(\mathbb{R})$ -модулями, в которых действует группа S сдвигов вида (1)

и модульная структура определяется сверткой функций (2). Таким образом, появляется возможность использования приведенных далее понятий и результатов из спектральной теории банаховых модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$. В частности, пространства $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ совпадают с пространствами S -непрерывных векторов (см. определение 2). В частности,

$$(L^p(\mathbb{R}, X))_c = L^p(\mathbb{R}, X), \quad (L^p(\mathbb{R}, X))_0 = L^p(\mathbb{R}, X), \quad (L^\infty(\mathbb{R}, X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R}, X), \\ (C_b(\mathbb{R}, X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R}, X), \quad (C_b(\mathbb{R}, X))_0 = C_0(\mathbb{R}, X).$$

2. Банаховы $L^1(\mathbb{R})$ -модули и спектр Берлинга. Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, а $L^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра определенных на $\mathbb{R}$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов) функций со сверткой функций в качестве умножения:

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Будем считать, что $\mathcal{X}$ является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем (см. [11, 14]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$, т.е. выполнены следующие условия:

- (2) из равенства $fx = 0$, справедливого для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, следует, что вектор $x \in \mathcal{X}$ — нулевой (свойство невырожденности банахова модуля $\mathcal{X}$);
- (2) для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{R}$, имеет место равенство

$$T(t)(fx) = (T(t)f)x = f(T(t)x)$$

(свойство ассоциированности модульной структуры на $\mathcal{X}$ с представлением $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$)

Если $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ — сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)xdt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad x \in \mathcal{X}, \quad (3)$$

определяет на $\mathcal{X}$ структуру невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля, ассоциированную с представлением T .

С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем $\mathcal{X}$ ассоциировано единственное представление $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ (см. [11]). Чтобы это подчеркнуть, иногда используется обозначение $(\mathcal{X}, T)$.

Теория банаховых $L^1(\mathbb{R})$ -модулей была построена в [7] и изложена в [1, 5, 6, 11, 14, 20, 21].

Определение 2. Вектор из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $\mathcal{X}$ назовем *непрерывным* (относительно представления T) или *T -непрерывным*, если функция

$$\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}, \quad \varphi_x(t) = T(t)x, \quad t \in \mathbb{R},$$

непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$).

Совокупность всех T -непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $\mathcal{X}$ обозначим через $\mathcal{X}_c$ или $(\mathcal{X}, T)_c$. Оно образует замкнутый *подмодуль* из $\mathcal{X}$, т.е. $\mathcal{X}_c$ — замкнутое линейное подпространство из $\mathcal{X}$, инвариантное относительно всех операторов $T(f)$, $T(t)$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$.

Любое однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем с модульной структурой, определяемой равенствами (2), и эта структура ассоциирована с представлением (группой сдвигов функций) $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим фактор-пространство $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) / \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, которое является банаховым пространством с нормой

$$\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in x + \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)} \|y\|,$$

где $\tilde{x} = x + \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ — класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом:

$$\tilde{x}\tilde{y} = \widetilde{xy}, \quad \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X).$$

В фактор-пространстве $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ структура банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля задается формулой (3), где в качестве представления T берется сильно непрерывная группа изометрических операторов $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$, задаваемая равенством $\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x}$ для любой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Далее через $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Определение 3. Спектром Берлинга вектора $x \in \mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$ вида

$$\Lambda(x) = \left\{ \lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}), \text{ где } \hat{f}(\lambda_0) \neq 0 \right\}.$$

Из определения следует, что

$$\Lambda(x) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \mu_0 \in \mathbb{R} : \text{существует такая функция } f \in L^1(\mathbb{R}), \text{ что } \hat{f}(\mu_0) \neq 0 \text{ и } fx = 0 \right\}.$$

Справедливы следующие свойства спектра Берлинга векторов из комплексного банахова пространства X (см. [5, 11]).

Лемма 1. Для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathcal{X}$ справедливы следующие утверждения:

- (1) из условия $fx = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$ (т.е. $L^1(\mathbb{R})$ -модуль $\mathcal{X}$ невырожден);
- (2) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, причем $\Lambda(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- (3) $\Lambda(fx) \subset (\text{supp } \hat{f}) \cap \Lambda(x)$;
- (4) $fx = 0$, если $(\text{supp } \hat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\hat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;
- (5) $\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$ — одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор $x \neq 0$ удовлетворяет равенствам $T(t)x = e^{i\lambda_0 t}x$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. x — собственный вектор банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $(\mathcal{X}, T)$.

Определение 4. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ отнесем к существенному спектру $\Lambda_{\text{ess}}(x)$ вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $(\mathcal{X}, T)$, если существует λ_0 -направленность (f_α) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, для которой выполнено условие

$$\overline{\lim}_{\alpha} \|f_\alpha x\| > 0.$$

Отметим, что $\Lambda_{\text{ess}}(x) \subseteq \Lambda(x)$, $x \in (\mathcal{X}, T)$.

Определение 5. Пусть x — ненулевой вектор из $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $(\mathcal{X}, T)$. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ из $\Lambda(x)$ назовем эргодической точкой вектора x , если для некоторой λ_0 -направленности из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ существует

$$\lim_{\alpha} f_\alpha x = x_0 \in \mathcal{X}.$$

Множество эргодических точек вектора будем обозначать символом $\Lambda_{\text{erg}}(x)$. Если $x_0 = 0$, то число λ_0 отнесем к непрерывному спектру $\Lambda_c(x)$ вектора x . Множество

$$\Lambda_B(x) = \left\{ \lambda_0 \in \Lambda_{\text{erg}}(x) : \lim_{\alpha} f_\alpha x \neq 0 \right\}$$

называется спектром Бора (дискретным спектром) вектора $x \in \mathcal{X}$.

Определение 6. Вектор x_0 из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $(\mathcal{X}, T)$ называется почти периодическим (относительно представления T), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- (1) для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\Omega_{\varepsilon, x_0} = \left\{ \omega \in \mathbb{R} : \|T(\omega)x_0 - x_0\| < \varepsilon \right\}$$

- ε -периодов вектора x_0 относительно плотно¹ на $\mathbb{R}$;
- (2) орбита $\{T(t)x_0, t \in \mathbb{R}\}$ вектора x_0 предкомпактна в $\mathcal{X}$;
- (3) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и собственные векторы $x_1, \dots, x_N$ представления T , соответствующие этим числам (т.е. $T(t)x_k = e^{i\lambda_k t}x_k, t \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq N$), что

$$\left\| x_0 - \sum_{k=1}^N x_k \right\| < \varepsilon;$$

- (4) функция $t \mapsto \varphi(t) = T(t)x_0, t \in \mathbb{R}$, — непрерывная почти периодическая функция, т.е. $\varphi \in AP(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ (см. [5, 13]).

Множество $AP(\mathcal{X}) = AP(\mathcal{X}, T)$ почти периодических векторов из $\mathcal{X}$ образует замкнутое подпространство в $\mathcal{X}$ и является замкнутым подмодулем из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $\mathcal{X}$. Кроме того, имеет место включение $AP(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}_c$.

Определение 7. Преобразованием Бора почти периодического вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ назовем функцию $\hat{x}_B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$, определенную равенствами

$$\hat{x}_B(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha T(\tau) x e^{-i\lambda\tau} d\tau = \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1}} T(\tau) x e^{-(\varepsilon+i\lambda)\tau} d\tau = \lim_j f_j x, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где (f_j) — любая λ -направленность из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

Отметим, что имеет место свойство единственности: если преобразование Бора $\hat{x}_B$ вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ равно нулю, то $x = 0$.

Преобразование Бора вектора является основой для определения коэффициентов Фурье почти периодических на бесконечности функций (см. [3]). Носитель $\text{supp } \hat{x}_B$, функции $\hat{x}_B$ совпадает со спектром Бора $\Lambda_B(x)$ вектора x и это множество не более чем счетно. Тогда справедливо представление

$$\text{supp } \hat{x}_B = \Lambda_B(x) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{J}_d\}, \quad (4)$$

где $\mathbb{J}_d \subset \mathbb{Z}$, причем имеют место равенства

$$T(t)x_n = e^{i\lambda_n t} x_n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{J}_d,$$

где векторы $x_n, n \in \mathbb{J}_d$, являются собственными векторами представления T (а также генератора iA группы операторов T , т.е. $Ax_n = i\lambda_n x_n, n \in \mathbb{J}_d$), причем $\Lambda(x_n) = \{\lambda_n\}, n \in \mathbb{J}_d$. Ряд

$$x \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} x_n, \quad (5)$$

где $x_n = \hat{x}_B(\lambda_n), n \in \mathbb{J}_d$, назовем *рядом Фурье* вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ (относительно представления (4)). Отметим, что если этот ряд абсолютно сходится, т.е. выполнено условие $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty$, то $x = \sum_{n \in \mathbb{J}_d} x_n$.

Лемма 2. Пусть вектор x из $AP(\mathcal{X})$ имеет ряд Фурье вида (5) (согласно представлению (4)). Тогда для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ вектор fx принадлежит $AP(\mathcal{X})$ и имеет ряд Фурье вида

$$fx \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} \hat{f}(\lambda_n) x_n$$

(относительно разложения (4)).

¹Множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ называется *относительно плотным* на $\mathbb{R}$, если существует такое число $l > 0$, что любой промежуток $[t, t+l], t \in \mathbb{R}$, содержит хотя бы одну точку множества Ω .

Доказательство. Свойство $fx \in AP(\mathcal{X})$ легко следует из любого из условий (1)–(4) определения 6. Непосредственно из определения преобразования Бора векторов из $AP(\mathcal{X})$ следует, что

$$(\widehat{fx})_B(\lambda_n) = \lim_{\alpha} f_{\alpha}(fx) = \lim_{\alpha} f(f_{\alpha}x) = f\widehat{x}_B(\lambda_n) = \widehat{f}(\lambda_n)\widehat{x}_B(\lambda_n) = \widehat{f}(\lambda_n)x_n, \quad n \in \mathbb{J}_d,$$

где (f_{α}) — некоторая λ_n -направленность из алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Тогда утверждение леммы 2 вытекает непосредственно из определения ряда Фурье почти периодического вектора. $\square$

Из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть вектор x из $AP(\mathcal{X})$ имеет ряд Фурье вида (5) (согласно представлению (4)), причем последовательность $(\lambda_n, n \in \mathbb{J}_d)$ обладает свойством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - f_n x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{|\lambda_k| < n} \widehat{f}_0\left(\frac{\lambda_k}{n}\right) x_k \right\|,$$

где векторы $x_k, k \in \mathbb{J}_d$, взяты из разложения вектора x в ряд Фурье (5).

Следствие 1. Для любого почти периодического вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ имеют место равенства

$$\Lambda(x) = \overline{\Lambda_B(x)}, \quad \Lambda_{\text{erg}}(x) = \mathbb{R}.$$

Лемма 4. Преобразование Бора $\widehat{x}_B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ любого вектора x из $AP(\mathcal{X})$ допускает оценку

$$\|\widehat{x}_B(\lambda)\| \leq \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. При определении вектора $\widehat{x}_B(\lambda) = \lim f_{\alpha}x, x \in AP(\mathcal{X})$, будем использовать λ -направленность (f_{α}) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, которая является инвариантным интегралом. Тогда $\|f_{\alpha}\| = \widehat{f_{\alpha}}(0) = 1$ для любого α и поэтому

$$\|\widehat{x}_B(\lambda)\| \leq \sup_{\alpha} \|f_{\alpha}\| \|x\| = \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Лемма 5. Для любого вектора x из $AP(\mathcal{X})$ с рядом Фурье (5) справедливо условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0.$$

Доказательство. С учетом представления (4) и равенства $x_n = \widehat{x}_B(\lambda_n), n \in \mathbb{J}_d$, достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{x}_B(\lambda_n)\| = 0.$$

Из условия (3) определения 6 следует, что существует последовательность $(a_n, n \in \mathbb{N})$ векторов из $AP(\mathcal{X})$, носители $\widehat{(a_n)_B}, n \geq 1$, преобразований Бора которых конечны. Из леммы 4 следует, что

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\widehat{x}_B(\lambda) - \widehat{(a_n)_B}(\lambda)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{x}_B(\lambda_n)\| = 0. \quad \square$$

3. Почти периодические на бесконечности функции.

3.1. *Четыре определения почти периодической на бесконечности функции.* Далее символом $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначается однородное пространство функций, удовлетворяющее всем условиям (a)–(d) определения 1. Сформулируем четыре определения почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Первое определение основано на понятии ε -периода на бесконечности.

Сначала введем определения ε -периода на бесконечности и почти периодической на бесконечности функции для непрерывных функций. Такие функции были введены в [2, 3].

Определение 8. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется ε -периодом на бесконечности функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$, если существует такое число $a(\varepsilon) > 0$, что

$$\sup_{|t| \geq a(\varepsilon)} \|x(t + \omega) - x(t)\| < \varepsilon.$$

Множество ε -периодов на бесконечности функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ обозначим $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Определение 9. Множество Ω из $\mathbb{R}$ называется *относительно плотным* на $\mathbb{R}$, если существует такое $l > 0$, что $[t, t + l] \cap \Omega \neq \emptyset$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 10. Функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ ее ε -периодов на бесконечности относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Определение 10 (данное в [2]) соответствует определению Бора (см. [13, 23]) почти периодической функции, заданной на $\mathbb{R}$. Из него следует, что каждая непрерывная почти периодическая (по Бору) функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ является почти периодической на бесконечности (в смысле определения 10).

Определение 11. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется ε -периодом на бесконечности функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, если существует такая функция $x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, что

$$\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon.$$

Множество ε -периодов на бесконечности функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Определение 12. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ ее ε -периодов на бесконечности относительно плотно на $\mathbb{R}$. Множество почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Определение 13. Множество функций $M \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ назовем *предкомпактным на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций $x_1, \dots, x_n$ из M , удовлетворяющих следующему условию: для любой функции $x \in M$ найдутся такие функция $x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ и функция x_k ($1 \leq k \leq n$), что

$$\|x - x_k - x_0\| < \varepsilon.$$

Определение 14. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если множество $M = \{S(k)x, k \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно на бесконечности.

Отметим, что функции вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t) e^{i\lambda_k t}, \quad x_1, \dots, x_N \in \mathcal{F}_{sl, \infty}(\mathbb{R}, X), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$$

(обобщенные тригонометрические полиномы) являются почти периодическими на бесконечности в смысле определения 14.

Для $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ определение 14 соответствует критерию С. Бохнера (см. [13]) почти периодичности функций. Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, то пространство $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначается символом $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Для формулировки третьего определения почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства нам потребуется ввести понятие медленно меняющейся на бесконечности функции из однородного пространства.

Определение 15. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если

$$(S(t)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X) \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}.$$

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\mathcal{F}_{sl,\infty} = \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Непосредственно из определения следует, что $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ образует линейное замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, инвариантное относительно (полу)группы сдвигов S .

Например, медленно меняющейся на бесконечности является функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ вида $x(t) = c + x_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где c — вектор из банахова пространства X и x_0 — любая функция из $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$.

Определение 16. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и медленно меняющиеся на бесконечности функции $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\| < \varepsilon,$$

где функции e_k , $1 \leq k \leq n$, имеют вид $e_k(t) = e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 17. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если класс эквивалентности $\tilde{x} = x + \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ является почти периодическим вектором из пространства $\mathcal{X} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, в котором действует изометрическое представление $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ (т.е. $\{S(t)x, t \in \mathbb{R}\}$ — предкомпактное множество в фактор-пространстве $\mathcal{X}$ или, что эквивалентно, функция $t \mapsto \tilde{S}(t)x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ является непрерывной и почти периодической).

Для $\mathcal{F}_c(\mathbb{J}, X) = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ определение 14 соответствует критерию С. Бохнера (см. [13]) почти периодичности функций, определения 16 и 17 почти периодических на бесконечности функций даны в [2, 3, 12]. При $\mathcal{F}_c(\mathbb{J}, X) = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ пространство $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ обозначается символом $AP_\infty(\mathbb{J}, X)$.

Теорема 1. Все четыре определения почти периодической на бесконечности функции (определения 12, 14, 16, 17) эквивалентны. Множество $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ образует банахово пространство.

Доказательство. Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ и определенную выше группу изометрий $T = \tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$. Для этого представления определение 16 соответствует свойству (3) из определения 6. Поскольку все свойства из определения 6 эквивалентны, достаточно показать, что первые три его свойства эквивалентны определениям 12, 14 и 16 соответственно.

Пусть $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и $\tilde{x}$ — класс эквивалентности в $\mathcal{X}$, построенный по функции x . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{F}_0; \varepsilon) \cup (-\Omega_\infty(x; \mathcal{F}_0; \varepsilon))$ совпадает с множеством $\Omega(\tilde{x}, \varepsilon)$, состоящим из ε -периодов класса $\tilde{x}$. Следовательно, соответствующие определения эквивалентны.

Эквивалентность определения 14 и свойства (2) определения 6 непосредственно следует из определения фактор-модуля $\mathcal{X} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Докажем эквивалентность аппроксимационного определения 16 и свойства (4) из определения 6. Для доказательства достаточно установить, что спектр Берлинга $\Lambda(\tilde{y})$ класса эквивалентности $\tilde{y} \in \mathcal{X}$, $\tilde{y} = y + \mathcal{F}_0$, является одноточечным множеством ($\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$) тогда и только тогда, когда функция $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ представима в виде $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in (\mathcal{F}_0)_{sl,\infty}$.

Если $\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$ для любого $t \in \mathbb{R}$ (см. свойство (5) из леммы 1). Следовательно, $\Lambda(\tilde{y}_0) = \{0\}$, где $y_0(s) = y(s)e^{-i\lambda_0 s}$, $s \in \mathbb{R}$, и поэтому $\tilde{S}(t)\tilde{y}_0 = \tilde{y}_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $S(t)y_0 - y_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. $y_0 \in (\mathcal{F}_0)_{sl,\infty}$.

Обратно, если $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$, $t \in \mathbb{R}$, и поэтому в силу свойства (5) из леммы 1 получим, что $\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$. $\square$

3.2. Ряды Фурье почти периодических на бесконечности функций. На основе построенных ранее рядов Фурье почти периодических векторов перейдем к построению рядов Фурье почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Пусть $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и ряд

$$\tilde{x} \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} \tilde{y}_n, \quad \Lambda_B(\tilde{x}) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{J}_d\}, \quad \Lambda(y_n) = \lambda_n,$$

где $\mathbb{J}_d \subset \mathbb{Z}$ (см. формулу (4)), является рядом Фурье класса эквивалентности $\tilde{x} \in AP(\mathcal{X})$, построенного по функции x .

Определение 18. Ряд

$$x(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} x_n(t)e^{i\lambda_n t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

где функции z_n , $n \in \mathbb{J}_d$, вида $z_n(t) = x_n(t)e^{i\lambda_n t}$, $t \in \mathbb{R}$, $x_n \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$, являются представителями соответствующих классов эквивалентности $\tilde{y}_n$, $n \in \mathbb{J}_d$, называется *рядом Фурье* функции x . Функции x_n , $n \in \mathbb{J}_d$, будем называть *коэффициентами Фурье* функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Следует отметить неединственность ряда Фурье функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

В [2, 3] было введено аналогичное понятие ряда Фурье для непрерывных почти периодических на бесконечности функций.

Теорема 2. Коэффициенты любого ряда Фурье функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ принадлежат пространству $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{\mathcal{F}} = 0. \quad (7)$$

Условие $x_n \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{J}_d$, следует из определения 16, а равенство (7) вытекает из леммы 5.

В следующей теореме, полученной в [15], содержатся свойства медленно меняющихся на бесконечности функций, используемые в дальнейшем.

Теорема 3. Если $x \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, то существует такая функция $x_0 \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, что $x - x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$. Кроме того, найдется ограниченная целая функция $y_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$, допускающая расширение на $\mathbb{C}$ до ограниченной целой функции сколь угодно малого экспоненциального типа и удовлетворяющая условию $x - y_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$.

Из теорем 2 и 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. По любой функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ можно построить такой ряд Фурье (6), что $x_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{J}_d$. Более того, функции x_n могут быть выбраны так, что они допускают расширение на $\mathbb{C}$ до ограниченных целых функций сколь угодно малого экспоненциального типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. Г. Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов. — Воронеж: ВГУ, 2016.
2. Баскаков А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Мат. заметки. — 2015. — 97, № 2. — С. 174–190.
3. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 1. — С. 77–128.
4. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — 73, № 2. — С. 3–68.

5. Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов// Совр. мат. Фундам. направл. — 2004. — 9. — С. 3–151.
6. Баскаков А. Г. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений// Мат. заметки. — 1978. — 24, № 2. — С. 195–206.
7. Баскаков А. Г. Некоторые вопросы теории векторных почти периодических функций/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Воронеж: ВГУ, 1973.
8. Баскаков А. Г., Диденко В. Б. О состояниях обратимости разностных и дифференциальных операторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 2018. — 82, № 1. — С. 3–16.
9. Баскаков А. Г., Дуплищева А. Ю. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка// Изв. РАН. Сер. мат. — 2015. — 79, № 2. — С. 3–20.
10. Баскаков А. Г., Калужина Н. С., Поляков Д. М. Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов// Изв. вузов. Мат. — 2014. — № 7. — С. 3–14.
11. Баскаков А. Г., Криштал И. А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства// Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — 69, № 3. — С. 3–54.
12. Баскаков А. Г., Струкова И. И., Тришина И. А. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами// Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 2. — С. 293–308.
13. Левитан Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: МГУ, 1978.
14. Росс К., Хьюитт Э. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. — М.: Мир, 1975.
15. Струков В. Е., Струкова И. И. О медленно меняющихся и периодических на бесконечности функциях из однородных пространств и гармоничных распределениях// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2018. — № 4. — С. 195–205.
16. Струкова И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций// Сиб. мат. ж. — 2016. — 57, № 1. — С. 186–198.
17. Струкова И. И. Периодические на бесконечности функции ограниченной вариации// Науч. вед. БелГУ. Сер. Мат. Физ. — 2016. — 44, № 20 (241). — С. 50–59.
18. Струкова И. И. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2015. — № 3. — С. 161–165.
19. Струкова И. И. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2014. — 14, № 1. — С. 28–38.
20. Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. — Basel: Birkhäuser, 2011.
21. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces// Mediter. J. Math. — 2016. — 13, № 5. — P. 2443–2462.
22. Baskakov A., Strukova I. Harmonic analysis of functions periodic at infinity// Eurasian Math. J. — 2016. — 7, № 4. — P. 9–29.
23. Bohr H. Almost periodic functions// Acta Math. — 1925. — 45. — P. 29–127.

Струкова Ирина Игоревна

Воронежский государственный университет

E-mail: irina.k.post@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 57–69
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-57-69

УДК 517.9

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ВОЗМУЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2019 г. Г. В. ГАРКАВЕНКО

Аннотация. При помощи метода подобных операторов исследованы спектральные свойства возмущенного оператора $A - B : D(A) \subset H \rightarrow H$, где A — самосопряженный оператор, имеющий компактную резольвенту, B — неограниченное возмущение. При некоторых условиях на спектр невозмущенного оператора A и возмущение B найдены оценки спектральных множеств возмущенного оператора. Полученные результаты применены к исследованию спектра дифференциальных операторов с периодическими краевыми условиями и негладким потенциалом.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр, дифференциальный оператор.

ON SPECTRAL PROPERTIES OF A CERTAIN CLASS OF PERTURBED OPERATORS

© 2019 G. V. GARKAVENKO

ABSTRACT. Using the method of similar operators, we examine spectral properties of the perturbed operator $A - B : D(A) \subset H \rightarrow H$, where A is a self-adjoint operator with a compact resolvent and B is an unbounded perturbation. Under certain conditions on the spectrum of the unperturbed operator A and the perturbation B , we obtain estimates of the spectral sets of the perturbed operator. The results obtained are applied to the study of the spectrum of differential operators with periodic boundary conditions and a nonsmooth potential.

Keywords and phrases: method of similar operators, spectrum, differential operator.

AMS Subject Classification: 47B06, 47B37

1. Введение. Статья посвящена исследованию спектральных свойств возмущенного самосопряженного оператора с дискретным спектром, удовлетворяющим некоторым условиям, и с неограниченным возмущением. Исследование проводится с помощью метода подобных операторов. Полученные результаты для абстрактного оператора применяются к исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов второго порядка, определяемых периодическими краевыми условиями на конечном промежутке с негладким потенциалом.

В основе проводимого исследования лежит метод подобных операторов, основные положения которого описаны в [1–3]; дальнейшее развитие метод получил в [4–8].

Для изучения спектральных свойств оператора существенно используется теорема 2.1 о подобии возмущенного оператора оператору более простой структуры. Основные результаты статьи изложены в теоремах 3.2 и 3.3, где найдена асимптотика спектра возмущенного оператора. Полученные результаты применены в разделе 4 для исследования спектральных свойств дифференциального оператора. Асимптотика спектра описана в теореме 4.1.

Итак, будем рассматривать возмущенный оператор $A - B$, где A — оператор с известным спектром, удовлетворяющим некоторому условию, а B — оператор возмущения.

Пусть самосопряженный оператор $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ имеет спектр $\sigma(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$, состоящий из множеств $\sigma_n = \{\lambda_n\}$, где λ_n — полупростые собственные значения. Первым предварительным условием на спектр оператора будет являться условие

$$\text{dist}(\lambda_n, \sigma_n(A) \setminus \lambda_n) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Оператор B принадлежит пространству допустимых возмущений для оператора A .

2. Основные положения метода подобных операторов. Приведем основные определения и теоремы, составляющие основу метода подобных операторов.

Пусть H — комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $\text{End } H$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H .

Определение 2.1. Линейные операторы $A_1 : D(A_1) \subset H \rightarrow H$ и $A_2 : D(A_2) \subset H \rightarrow H$ называются *подобными*, если существует такой непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End } H$, что

$$A_1 Ux = U A_2 x, \quad x \in D(A_2), \quad U(D(A_2)) = D(A_1).$$

Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в оператор A_2 .

В следующей лемме отражены спектральные свойства подобных операторов.

Лемма 2.1. Пусть оператор $A_2 : D(A_2) \subset H \rightarrow H$ подобен оператору $A_1 : D(A_1) \subset H \rightarrow H$ и $U \in \text{End } H$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2 . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$ — спектр, $\sigma_d(A_i)$ — дискретный спектр, $\sigma_c(A_i)$ — непрерывный спектр, $\sigma_r(A_i)$ — остаточный спектр оператора A_i , $i = 1, 2$;
- (2) если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A|_{H_k}$, $k = 1, 2$, — сужение A_2 на H_k относительно прямой суммы $H = H_1 \oplus H_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств H_1, H_2 , то подпространства $\tilde{H}_k = U(H_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1k} = A_1|_{\tilde{H}_k}$, $k = 1, 2$; при этом $H = \tilde{H}_1 \oplus \tilde{H}_2$. Кроме того, если P — проектор, осуществляющий разложение $H = H_1 \oplus H_2$ (т.е. $H_1 = \text{Im } P$ — образ проектора P , $H_2 = \text{Im}(I - P)$ — образ дополнительного проектора $I - P$), то проектор $\tilde{P} \in \text{End } H$, осуществляющий разложение $H = \tilde{H}_1 \oplus \tilde{H}_2$, определяется формулой $\tilde{P} = U P U^{-1}$.

Всюду в статье символом $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ обозначается самосопряженный замкнутый оператор, в дальнейшем играющий роль невозмущенного оператора.

Определение 2.2. Оператор $B : D(B) \subset H \rightarrow H$ называется *подчиненным оператору A* , если $D(B) \supseteq D(A)$ и существует такая постоянная $C > 0$, что $\|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|)$ для любого $x \in D(A)$, где $C = C(A)$ — некоторая постоянная.

Множество линейных операторов, подчиненных оператору A , будем обозначать $L_A(H)$. Положим $\|B\|_A = \inf C$, где $\inf$ берется по всем постоянным $C > 0$ из определения 2.2. Эта величина конечна и принимается за норму оператора B в $L_A(H)$.

В работе используется термин *трансформатор*, который согласно терминологии М. Г. Крейна обозначает линейный оператор в пространстве линейных операторов. Область определения трансформатора состоит из таких операторов $X \in \text{End } H$, для которых $XD(A) \subset D(A)$ и оператор $Y = AX - XA : D(A) \rightarrow H$ допускает ограниченное расширение $\tilde{Y}$ на H .

Основной составляющей метода подобных операторов является понятие допустимой тройки, которая должна для применимости метода удовлетворять ряду условий.

Определение 2.3. [3] Пусть $\mathfrak{A}$ — линейное многообразие операторов из $L_A(H)$ и $J : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, $\Gamma : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End } H$ — линейные трансформаторы. Тройку $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ назовем *допустимой тройкой* для оператора $A : D(A) \subset H \rightarrow H$, а $\mathfrak{A}$ — *пространством допустимых возмущений*, если выполнены следующие условия:

- (1) $\mathfrak{A}$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_*$, непрерывно вложенное в $L_A(H)$ (т.е. существует такая постоянная $C > 0$, что $\|X\|_A \leq C\|X\|_*$, для любого $X \in L_A(X)$);
- (2) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;
- (3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и, более того, имеют место равенства

$$A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX, \quad X \in \mathfrak{A},$$

справедливые для векторов из $D(A)$, причем ΓX — единственное решение уравнения $AY - YA = X - JX$, удовлетворяющее условию $JY = 0$;

- (4) $X\Gamma Y, (\Gamma X)Y \in \mathfrak{A}$ для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| \leq \gamma$ и
$$\max \{ \|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_* \} \leq \gamma \|X\|_* \|Y\|_* \quad \forall X, Y \in \mathfrak{A};$$
- (5) $J((\Gamma X)JY) = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{A}$;
- (6) для любых $X \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$, где I — тождественный оператор.

Теорема 2.1. Пусть $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ — допустимая тройка для невозмущенного оператора

$$A : D(A) \subset H \rightarrow H$$

и $B \in \mathfrak{A}$. Если выполняется неравенство

$$\|J\| \|B\|_* \|\Gamma\| < \frac{1}{4}, \quad (2)$$

то оператор вида $A - B$ подобен оператору вида $A - J\tilde{X}$, где $\tilde{X} \in \mathfrak{A}$ является решением нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)J(B\Gamma X) - (\Gamma X)JB + B = \Phi(X), \quad (3)$$

которое можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = 0$, $X_1 = B$, $X_2 = \Phi(X_1)$, ..., $X_{n+1} = \Phi(X_n)$, $n \geq 2$. Отображение $\Phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ является сжимающим в шаре $\{X \in \mathfrak{A} : \|X - B\|_* \leq 3\|B\|_*\}$. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - J\tilde{X}$ осуществляет обратимый оператор $I + \Gamma\tilde{X}$, т.е. имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma\tilde{X}) = (I + \Gamma\tilde{X})(A - J\tilde{X}).$$

Далее в статье производится построение допустимой тройки метода подобных операторов и исследуются спектральные свойства возмущенного оператора.

3. Построение допустимой тройки метода подобных операторов для одного класса неограниченных возмущений. Для самосопряженного оператора $A : D(A) \subset H \rightarrow H$, имеющего спектр, состоящий из множеств $\sigma_n = \{\lambda_n\}$, где λ_n — полупростые собственные значения удовлетворяющие условию (1), построим допустимую тройку $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$.

Построение допустимой тройки осуществляется с привлечением ортогональных проекторов Рисса P_k , $k \geq 1$, построенных по спектральным множествам $\sigma_n = \{\lambda_n\}$, т.е. $AP_k = \lambda_k P_k$, $k \geq 1$. Проекторы Рисса P_k , $k \geq 1$, построенные по изолированным спектральным множествам σ_n , приводят оператор A и разлагают пространство H в ортогональную прямую сумму подпространств H_k , $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots$, где $H_k = \text{Im } P_k$.

В случае $\dim \text{Im } P_k = \dim H_k = 2$ будем получать проекторы вида

$$P_k x = (x, e_k)e_k + (x, e_{-k})e_{-k}, \quad k \geq 1, \quad e_k \perp e_{-k}, \quad \|e_k\| = \|e_{-k}\| = 1, \quad (4)$$

где $Ae_k = \lambda_k e_k$, $Ae_{-k} = \lambda_k e_{-k}$, $k \geq 1$. Через $A_k = \lambda_k I_k$ будем обозначать сужение оператора A на подпространство H_k .

Матрица оператора A в базисе из собственных векторов в общем случае имеет блочно-диагональный вид.

Введем в рассмотрение такой проектор P'_m , что $P'_m = P_1 + P_2 + \dots + P_m$ и $H'_m = \text{Im } P'_m$, $\dim H'_m = \sum_{i=1}^m \dim H_i$, т.е. P'_m — проектор Рисса, построенный по множеству $\sigma'_m = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$.

Значение m выбирается с тем расчетом, чтобы $d_m = \text{dist}(\sigma'_m, \sigma(A) \setminus \sigma'_m)$ было достаточно велико. Тогда спектр оператора A представим в виде

$$\sigma(A) = \sigma'_m \cup \left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} \sigma_n \right).$$

Через $A_n = \lambda_n I_n$ будем обозначать сужение оператора A на подпространство H_n , $n \geq m+1$, а через AP'_m — сужение на подпространство $H'_m = \text{Im } P'_m$.

Построение рассматриваемого пространства допустимых возмущение $\mathfrak{A}$ осуществляется следующим образом. Оператор X из $L_A(H)$ отнесем к $\mathfrak{A}$, если выполняются следующие условия:

- (1) $\sup_{m-k=n} \|P_m X P_k\| = M(n) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, $m, k \geq 1$;
- (2) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} M^2(n) < \infty$.

В качестве нормы в $\mathfrak{A}$ берется величина

$$\|X\|_* = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} M^2(n)}.$$

Из условия (1) следует сильная сходимость ряда

$$\sum_{m-k=n} P_m X P_k, \quad m, k \geq 1, \quad (5)$$

к некоторому оператору $X(n)$ из $\text{End } H$. Этот оператор назовем n -й диагональю оператора X . Действительно, для любого $X \in \mathfrak{A}$ и $x \in H$ верны следующие неравенства, полученные при помощи равенства Парсеваля (для определенности будем считать, что $n \geq 0$):

$$\begin{aligned} \|X(n)x\|^2 &= \sum_{m-k=n} \|P_m X P_k x\|^2 = \sum_{m=n+k} \|P_m X P_{m-n} x\|^2 \leq \\ &\leq \sup_{m \geq n+k} \|P_m X P_{m-n} x\|^2 \|x\|^2 \leq M^2(n) \|x\|^2, \quad m, k \geq 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует сходимость ряда (5) и неравенство $\|X(n)\| \leq M(n)$. Таким образом, каждый оператор $X \in \mathfrak{A}$ допускает представление вида

$$X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n), \quad (6)$$

и его блоки $X_{mk} = P_m X P_k$, стоящие на n -й диагонали ($m - k = n$) равномерно ограничены. Сходимость ряда (6) понимается на векторах из $D(A)$, причем

$$Xx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n X(k)x, \quad x \in D(A).$$

Факт $X \in \mathfrak{A}$ обоснован в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пространство $\mathfrak{A}$ является банаховым и оно непрерывно вложено в $L_A(H)$.*

Доказательство. Выполнение аксиом нормы для пространства $\mathfrak{A}$ проверить несложно; покажем, что оно полно относительно введенной нормы. Если (X_l) — фундаментальная последовательность в $\mathfrak{A}$, то она ограничена в $\mathfrak{A}$ и поэтому величина

$$\sup_{m-k=n} \|P_m X_l P_k\| = \|X_l(n)\| = M_l(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m, k \geq 1,$$

будет обладать свойством

$$\|X_l\|_*^2 = \sup_{l \geq 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_l^2(n) < \infty.$$

Из этой оценки следует, что последовательность операторов $(X_l(n))$ будет фундаментальной в $\text{End } H$ для каждого фиксированного $n \in \mathbb{Z}$. Обозначим предел этой последовательности через $X_0(n)$; тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|X_0(n)\|^2 \leq \sup_{l \geq 1} \|X_l\|_*^2 < \infty.$$

На векторах $x \in D(A)$ определим оператор $X_0 : D(A) \rightarrow H$ формулой

$$X_0 x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_0(n)x.$$

Докажем, что $X_0 \in L_A(H)$. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$. Тогда верны равенства

$$X_0(n)x = X_0(n)(A - \lambda_0 I)^{-1}(A - \lambda_0 I)x = \left(\sum_{\substack{m-k=n, \\ m, k \geq 1}} \frac{P_m X_0 P_k}{\lambda_k - \lambda_0} \right) y,$$

где $y = (A - \lambda_0 I)x$. Так как последовательность $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет соотношению (1), то последовательность (α_k) , где $\alpha_k = 1/|\lambda_k - \lambda_0|$, $k > 0$, принадлежит l_2 .

Определим оператор Y_0 формулой

$$Y_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_0(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m-k=n} \frac{P_m X_0 P_k}{\lambda_k - \lambda_0}, \quad m, k \geq 1,$$

где $X_0 \in \mathfrak{A}$. Факт $Y_0 \in \text{End } H$ следует из соотношения

$$Y_0(n) = \sum_{m-k=n} \frac{P_m X_0 P_k}{\lambda_k - \lambda_0}, \quad m, k \geq 1,$$

из которого получаем:

$$\|Y_0(n)\| = \sup_{m-k=n} \|P_m Y_0 P_k\| \leq \sup_{m-k=n} \|P_m X_0 P_k\| \|(\alpha_k)\|_{l_2} = \tilde{M}(n) < \infty, \quad m, k \geq 1.$$

Следовательно,

$$\|Y_0\|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|Y_0(n)\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{M}^2(n) < \infty.$$

Поскольку $X_0 = Y_0(A - \lambda_0 I)$, т.е. $\|X_0 x\| \leq C(\|Ax\| + \|x\|)$, $x \in D(A)$, то $X_0 \in L_A(H)$. Получаем из доказанного, что $\mathfrak{A}$ непрерывно вложено в $L_A(H)$ и справедлива оценка

$$\|X_0\|_* \leq C \|X_0(A - \lambda_0 I)^{-1}\|_{\text{End } H}, \quad X_0 \in \mathfrak{A}. \quad \square$$

Построение трансформатора $J : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ также будет зависеть от выбранного m , поэтому обозначим его J_m и на операторах из допустимого пространства возмущений определим формулой

$$J_m X = P'_m X P'_m + \sum_{i=m+1}^{\infty} P_i X P_i, \quad X \in \mathfrak{A};$$

J является проектором. Соответственно трансформатор $\Gamma = \Gamma_m : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End } H$ в этом случае определяется формулой

$$\Gamma_m X = \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Найдем представление для $\Gamma_m X(n)$ при $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}\Gamma_m X(n) &= \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{P_i \left(\sum_{l-k=n} P_l X P_k \right) P_j}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{P_i \left(\sum_{l-k=n} P_l X P_k \right) P_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \\ &= \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1, \\ i-j=n}}^{i-1} \frac{P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{\substack{i=1, \\ i-j=n}}^{j-1} \frac{P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j}.\end{aligned}$$

Оценим норму трансформатора $\Gamma = \Gamma_m : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End } H$ при каждом $m \in \mathbb{N}$. Из представления оператора $\Gamma_m X(n)$ с учетом того факта, что это n -диагональный ограниченный оператор, получаем оценку вида

$$\|\Gamma_m X(n)\| = \alpha_m(n) \sup_{i-j=n} \|P_i X P_j\| \leq \alpha_m(n) \|X(n)\|,$$

где двусторонняя последовательность $\alpha_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ определяется равенством

$$\alpha_m(n) = \max \left(\max_{\substack{i > m, \\ 1 \leq j \leq i-1}} (|\lambda_i - \lambda_j|^{-1}); \max_{\substack{j > m, \\ 1 \leq i \leq j-1}} (|\lambda_i - \lambda_j|^{-1}) \right), \quad i - j = n, \quad n \neq 0.$$

В дальнейшем всюду считаются выполненными следующие условия:

- (1) двусторонняя последовательность α_m принадлежит $l_2(\mathbb{Z})$;
- (2) $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\alpha_m\|_{l_2} = 0$.

Из этих условий следует, что спектр рассматриваемого оператора удовлетворяет условию (1).

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}\|\Gamma_m X\| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\Gamma_m X(n)\| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_m(n) \|X(n)\| \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_m^2(n)} \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|X(n)\|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_m^2(n)} \|X\|_* = \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})} \|X\|_*.\end{aligned}$$

Следовательно, трансформатор Γ_m допускает оценку

$$\|\Gamma_m\| \leq \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_m^2(n)} = \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})}.$$

Из этой оценки следует, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Gamma_m\| = 0$. Тогда, выбирая достаточно большое m , можно не требовать малости $\|B\|_*$.

Лемма 3.1. *Тройка $(\mathfrak{A}, J_m, \Gamma_m)$ является допустимой для оператора $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ и*

$$\begin{aligned}\|\Gamma_m\| &\leq \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})}, \\ \max \{ \|X \Gamma_m Y\|_*, \|(\Gamma_m X) Y\|_* \} &\leq \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})} \|X\|_* \|Y\|_*, \quad X, Y \in \mathfrak{A}.\end{aligned}$$

Доказательство. Первое свойство допустимой тройки, т.е. факт, что банахово пространство $\mathfrak{A}$ непрерывно вложено в $L_A(H)$, доказано в теореме 3.1. Из построения J_m и Γ_m видно, что трансформаторы непрерывны (ограничены), причем J_m — проектор и $\|\Gamma_m\| \leq \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})}$. Докажем, что $(\Gamma_m X)D(A) \subset D(A)$ и $A\Gamma_m X - \Gamma_m XA = X - J_m X$ для всех $X \in \mathfrak{A}$. В соответствии с построением пространства возмущений $\mathfrak{A}$, если $X \in \mathfrak{A}$, то диагонали $X(n)$, $n \geq 1$, этого оператора равномерно ограничены, откуда следует ограниченность $\Gamma_m X(n)$. Следовательно, $(\Gamma_m X(n))D(A) \subset D(A)$ (см. [1], где доказано это свойство для ограниченных операторов).

Рассмотрим последовательность операторов $\tilde{X}_n = \sum_{k=-n}^n X(k)$, $n \geq 0$; имеем

$$Xx = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{X}_n, \quad x \in D(A),$$

где $X \in \mathfrak{A}$.

Пусть $x \in D(A)$; как в теореме 3.1, рассмотрим $\lambda_0 \in \rho(A)$. Тогда

$$\Gamma_m \tilde{X}_n x = \Gamma_m \tilde{X}_n (A - \lambda_0 I)^{-1} (A - \lambda_0 I) x = \Gamma_m \tilde{X}_n (A - \lambda_0 I)^{-1} y,$$

где $y \in H$.

Рассмотрим последовательность векторов вида $z_n = \Gamma_m \tilde{X}_n (A - \lambda_0 I)^{-1} y$, $z_n \in D(A)$. Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{X}_n (A - \lambda_0 I)^{-1} y = X (A - \lambda_0 I)^{-1} y,$$

то $z_n \rightarrow z = \Gamma_m X (A - \lambda_0 I)^{-1} y$. Таким образом, последовательность векторов $g_n = A z_n$, $n \geq 1$, такова, что $g_n \rightarrow g_0 = A z_0$. Так как A — замкнутый оператор, то из условий $z_n \rightarrow z_0$ и $A z_n \rightarrow g_0$ следует, что $z_0 \in D(A)$. Итак, получили включение $\Gamma_m D(A) \subset D(A)$.

Докажем равенство

$$A \Gamma_m X - \Gamma_m X A = X - J_m X, \quad X \in \mathfrak{A}. \quad (7)$$

Введем обозначения $y = (A(\Gamma_m X) - (\Gamma_m X)A)x$ и $z = (X - J_m X)x$, $x \in D(A)$. Для доказательства (7) достаточно установить, что $P'_m y = P'_m z$. Используя перестановочность оператора A и проекторов P_n , $n \geq 1$, имеем

$$\begin{aligned} P'_m y &= P'_m (A(\Gamma_m X) - (\Gamma_m X)A)x = P'_m \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{A P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{A P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right) x - \\ &\quad - \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{P'_m P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{P'_m P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right) A x = \\ &= \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} x - \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_j P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} x = \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^m P_i X P_j x. \end{aligned}$$

Применяя проектор P'_m к вектору z , получаем

$$\begin{aligned} P'_m z &= P'_m (X - J_m X)x = P'_m X x - P'_m \left(P'_m X P'_m + \sum_{i=m+1}^{\infty} P_i X P_i \right) x = \\ &= \sum_{i=1}^m P_i X \sum_{j=1}^{\infty} P_j x - \sum_{i,j=1}^m P_i X P_j x = \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^m P_i X P_j x. \end{aligned}$$

Пусть теперь $n > m$, тогда

$$\begin{aligned} P_n y &= P_n (A(\Gamma_m X) - (\Gamma_m X)A)x = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_n P_n X P_j}{\lambda_n - \lambda_j} x + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{\lambda_n P_n X P_j}{\lambda_n - \lambda_j} x \right) - \\ &\quad - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_j P_n X P_j}{\lambda_n - \lambda_j} x + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{\lambda_j P_n X P_j}{\lambda_n - \lambda_j} x \right) = \sum_{j=1}^{n-1} P_n X P_j x + \sum_{j=m+1}^{\infty} P_n X P_j x = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} P_n X P_j x - P_n X P_n x. \end{aligned}$$

Применим проектор P_n , $n > m$ к вектору z :

$$\begin{aligned} P_n z &= P_n (X - J_m X)x = P_n X x - P_n \left(P'_m X P'_m + \sum_{i=m+1}^{\infty} P_i X P_i \right) x = \\ &= P_n \sum_{i,j=1}^{\infty} P_i X P_j x - P_n X P_n x = \sum_{j=1}^{\infty} P_n X P_j x - P_n X P_n x. \end{aligned}$$

Получили $P_n y = P_n z$, $n \geq 1$; значит, равенство (7) выполнено.

Выполнение четвертого свойства допустимой тройки можно доказать, рассматривая оператор $Z = (\Gamma_m X)Y$, $X, Y \in \mathfrak{A}$, допускающий представление

$$Z = \sum_{n=-\infty}^{infy} Z(n), \quad \text{где} \quad Z(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\Gamma_m X)(k) Y(n-k).$$

Приходим к оценкам

$$\begin{aligned} \|Z(n)\| &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|(\Gamma_m X)(k)\| \|Y(n-k)\| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_m(k) \|X(k)\| \|Y(n-k)\|, \\ \|(\Gamma_m X)Y\|_* &\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_m^2(k) \right)^{1/2} \|X\|_* \|Y\|_*, \end{aligned}$$

из которых следует, что $Z = (\Gamma_m X)Y \in \mathfrak{A}$; аналогично для $X\Gamma_m Y$. Константа γ выбирается равной $\|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})}$. Итак,

$$\begin{aligned} \|\Gamma_m\| &\leq \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})}, \\ \max \{ \|X\Gamma_m Y\|_*, \|(\Gamma_m X)Y\|_* \} &\leq \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})} \|X\|_* \|Y\|_*, \quad X, Y \in \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Итак, тройка $(\mathfrak{A}, \Gamma_m, J_m)$ является допустимой для оператора A . □

Из леммы 3.1 и теоремы 2.1 метода подобных операторов вытекает следующая теорема.

Теорема 3.2. Пусть $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор со спектром, удовлетворяющим условию (1), оператор $B : D(B) \subset H \rightarrow H$ принадлежит построенному пространству допустимых возмущений $\mathfrak{A}$ и существует такое натуральное число m_0 , что

$$\|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})} \|B\|_* \leq \frac{1}{4}. \quad (8)$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_{m_0} X_0$ и имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma_{m_0} X_0) = (I + \Gamma_{m_0} X_0)(A - J_{m_0} X_0) = (I + \Gamma_{m_0} X_0)(A - P'_{m_0} X P'_{m_0} - \sum_{i \geq m_0+1}^{\infty} P_i X_0 P_i), \quad (9)$$

где X_0 — решение нелинейного уравнения вида (3), которое можно найти методом простых итераций.

В следующей теореме описан спектр возмущенного оператора $A - B$.

Теорема 3.3. Пусть $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор со спектром $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, удовлетворяющим условию (1), и число m_0 таково, что выполнено условие (8). Спектр оператора A представим в виде

$$\sigma(A) = \sigma'_{m_0} \cup \left(\bigcup_{n=m_0+1}^{\infty} \sigma_n \right),$$

где $\sigma'_{m_0} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_0}\}$, $\sigma_n = \lambda_n$, $n \geq m_0 + 1$ (λ_n — полупростые собственные значения оператора A). Тогда спектр оператора $A - B$ представим в виде объединения

$$\sigma(A - B) = \tilde{\sigma}'_{m_0} \cup \left(\bigcup_{n=m_0+1}^{\infty} \tilde{\sigma}_n \right) \quad (10)$$

взаимно не пересекающихся множеств $\tilde{\sigma}'_{m_0}$, $\tilde{\sigma}'_n$, $n \geq m_0 + 1$, обладающих свойством

$$\text{dist}(\tilde{\sigma}'_{m_0}, \sigma'_{m_0}) \leq 4\|B\|_*, \quad (11)$$

$$\text{dist}(\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}_n^0) \leq 2\|P_n B\|_* \|B\|_* \|\alpha_{n-1}\|_{l_2(\mathbb{Z})}, \quad n \geq m_0 + 1, \quad (12)$$

где $\tilde{\sigma}_n^0 = \sigma((\lambda_n P_n - P_n B)|_{H_n})$.

Доказательство. Поскольку

$$H = H'_{m_0} \oplus \left(\bigoplus_{n=m_0+1}^{\infty} H_n \right),$$

спектр $\sigma(A - J_{m_0}X_0)$ оператора $A - J_{m_0}X_0$ содержит спектр оператора $(AP'_{m_0} - P'_{m_0}X_0)|_{H'_{m_0}}$ и каждого из операторов $(A_n - P_nX_0)|_{H_n}$, действующих в H_n , $n \geq m_0 + 1$. Поскольку выполнены условия теоремы 3.2, то оператор $A - B$ подобен оператору вида $A - J_{m_0}X_0$, где X_0 — решение нелинейного уравнения (3). Воспользовавшись равенством (9), где

$$A - J_{m_0}X_0 = A - P'_{m_0}X_0P'_{m_0} - \sum_{i=m_0+1}^{\infty} P_iX_iP_i,$$

получаем

$$\begin{aligned} \sigma(A - B) &= \sigma(A - J_{m_0}X_0) = \\ &= \sigma\left((AP'_{m_0} - P'_{m_0}X_0)|_{H'_{m_0}}\right) \cup \left(\bigcup_{n \geq m_0+1} \sigma\left((\lambda_n I_n - P_nX_0)|_{H_n}\right)\right) = \tilde{\sigma}'_{m_0} \cup \left(\bigcup_{n=m_0+1}^{\infty} \tilde{\sigma}_n\right) \end{aligned} \quad (13)$$

для всех m_0 , удовлетворяющих оценке (8), где

$$\tilde{\sigma}'_{m_0} = \sigma\left((AP'_{m_0} - P'_{m_0}X_0)|_{H'_{m_0}}\right), \quad \tilde{\sigma}_n = \sigma\left((\lambda_n I_n - P_nX_0)|_{H_n}\right).$$

Эти множества взаимно не пересекаются.

Теперь получим оценку (11). Учитывая оценки в теореме 2.1, заключаем, что имеет место оценка

$$\text{dist}(\tilde{\sigma}'_{m_0}, \sigma'_{m_0}) \leq \|P'_{m_0}X_0P'_{m_0}\| \leq \|X_0\| \leq 4\|B\|_*.$$

Для получения оценок множеств $\tilde{\sigma}_n$, $n \geq m_0 + 1$, для каждого $n > m_0$ будем рассматривать свою допустимую тройку $(\mathfrak{A}, J_n, \Gamma_n)$; поскольку $n \geq m_0 + 1$, то имеет место утверждение теоремы 3.2 с последующими равенствами (13), где вместо m_0 берется n . Операторы $\lambda_n P_n - P_nX_0P_n$, $n \geq m_0 + 1$, представим в виде

$$\lambda_n P_n - P_nX_0P_n = \lambda_n P_n - P_n B P_n - P_n(X_0 - B)P_n, \quad n > m_0. \quad (14)$$

Такое представление позволяет получить оценки

$$\text{dist}(\tilde{\sigma}_n, \sigma((\lambda_n I_n - P_nX_0)|_{H_n})) \leq \|P_n(X_0 - B)P_n\|, \quad n \geq m_0 + 1.$$

Далее, имеют место равенства, вытекающие после применения слева и справа в (3) операторов P_n , $n \geq m_0 + 1$:

$$P_n(X_0 - B)P_n = P_n B \Gamma_{n-1}(X_0 P_n), \quad n \geq m_0 + 1.$$

При этом учитывались равенства $P_n(\Gamma_{n-1}X_0)(J_{n-1}X_0)P_n = 0$, $n \geq m_0 + 1$. Итак, получаем следующую оценку:

$$\|P_n(X_0 - B)P_n\| \leq \|P_n B \Gamma_{n-1}(X_0 P_n)\| \leq \|P_n B\| \|\Gamma_{n-1}(X_0 P_n)\|, \quad n \geq m_0 + 1.$$

Представим операторы $\Gamma_{n-1}(X_0 P_n)$, $n \geq m_0 + 1$ в виде

$$\Gamma_{n-1}(X_0 P_n) = \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{P_i X_0 P_n}{\lambda_i - \lambda_n}.$$

Тогда получаем оценки

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{n-1}(X_0 P_n)\| &\leq \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{\|P_i X_0 P_n\|}{|\lambda_i - \lambda_n|} \leq \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{\|X_0(i-n)\|}{|\lambda_i - \lambda_n|} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \|X_0(k)\|^2} \sqrt{\sum_{\substack{i=1, \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_n|^2}} \leq \frac{1}{2} \|X_0\|_* \|\alpha_{n-1}\|_{l_2(\mathbb{Z})}, \quad n \geq m_0 + 1. \end{aligned}$$

Вводя обозначение $\tilde{\sigma}_n^0 = \sigma((\lambda_n P_n - P_n B)|_{H_n})$ из равенства (11) получаем оценку

$$\text{dist}(\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}_n^0) \leq \|P_n B \Gamma_{n-1}(X_0 P_n)\| \leq \|P_n B\|_* \|\Gamma_{n-1}(X_0 P_n)\| \leq \frac{1}{2} \|P_n B\|_* \|X_0\|_* \|\alpha_{n-1}\|_{l_2(\mathbb{Z})}.$$

Учитывая полученные соотношения, а также (8), получаем оценки

$$\text{dist}(\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}_n^0) \leq 2 \|P_n B\|_* \|B\|_* \|\alpha_{n-1}\|_{l_2(\mathbb{Z})}, \quad n \geq m_0 + 1. \quad \square$$

4. Применение к дифференциальным операторам с периодическими краевыми условиями. Будем рассматривать в гильбертовом пространстве $L_2(0, 2\pi)$ суммируемых с квадратом функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_0^{2\pi} x(t) \bar{y}(t) dt$$

дифференциальный оператор

$$A - B : D(A) \subset L_2(0, 2\pi) \rightarrow L_2(0, 2\pi), \quad A - B = -\frac{d^2}{dt^2} - q$$

в случае периодических краевых условий

$$x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi). \quad (15)$$

Для изучения оператора будем использовать полученные в предыдущем разделе результаты, взяв в качестве невозмущенного самосопряженный оператор

$$A : D(A) \subset L_2(0, 2\pi) \rightarrow L_2(0, 2\pi), \quad A = -\frac{d^2}{dt^2}.$$

Область определения $D(A)$ оператора A совпадает с пространством Соболева $W_2^2[0, 2\pi]$ непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, производная которых x' абсолютно непрерывна и $x'' \in L_2(0, 2\pi)$. Таким образом,

$$D(A) = \left\{ x : x \in W_2^2[0, 2\pi], x(0) = x(2\pi), x'(0) = x'(2\pi) \right\}.$$

Оператор $B : D(A) \subset L_2(0, 2\pi) \rightarrow L_2(0, 2\pi)$ является оператором умножения на функцию q , принадлежащую пространству $L_2(0, 2\pi) \setminus L_\infty(0, 2\pi)$, т.е. B не допускает ограниченное расширение на $L_2(0, 2\pi)$. Итак, B — неограниченный оператор. Известно, что спектр оператора A имеет вид

$$\sigma(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma_n,$$

где $\sigma_n = \{n^2\}$, $n \geq 0$. При этом собственное значение $\lambda_0 = 0$ является однократным собственным значением, а $\lambda_n = n^2$, $n \geq 1$, — собственными значениями кратности 2.

Ортонормированные собственные функции $e_n(t) = (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, 2\pi]$, образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2(0, 2\pi)$, причем $Ae_0 = 0$, $Ae_n = n^2 e_n$, $|n| \geq 1$. Проекторы Рисса P_n , $n \geq 0$, построенные по этому базису, определяются равенствами

$$P_0 x = (x, e_0) e_0, \quad P_n x = (x, e_n) e_n + (x, e_{-n}) e_{-n}, \quad n \geq 1, \quad x \in L_2(0, 2\pi).$$

Оператор B будет принадлежать построенному в разделе 3 пространству возмущений $\mathfrak{A}$, если будут выполнены соотношения

$$\sup_{\substack{m-k=n, \\ m, k \geq 1}} \|P_m B P_k\| = M(n) < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} M^2(n) < \infty.$$

Проверим выполнение этих свойств. Операторы $P_m B P_k$, $m, k \geq 1$, имеют вид

$$\begin{aligned} P_m B P_k x &= (B P_k x, e_m) e_m + (B P_k x, e_{-m}) e_{-m} = \\ &= \left((x, e_k) (B e_k, e_m) + (x, e_{-k}) (B e_{-k}, e_m) \right) e_m + \left((x, e_k) (B e_k, e_{-m}) + (x, e_{-k}) (B e_{-k}, e_{-m}) \right) e_{-m}, \end{aligned}$$

где

$$(B e_k, e_m) = (q e_k, e_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t) e^{-i(m-k)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (q, e_{m-k}), \quad (q, e_{m-k}) = \hat{q}(m-k)$$

— коэффициенты Фурье функции q по ортонормированному базису (e_n) . Таким образом, операторы $P_m B P_k$, $m, n \geq 1$, допускают представление вида

$$\begin{aligned} P_m B P_k x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((x, e_k) \hat{q}(m-k) + (x, e_{-k}) \hat{q}(m+k) \right) e_m + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((x, e_k) \hat{q}(-(m+k)) + (x, e_{-k}) \hat{q}(-(m-k)) \right) e_{-m}. \end{aligned}$$

Представления для блоков вида $P_0 B P_0$, $P_0 B P_m$, $P_m B P_0$ имеют вид

$$\begin{aligned} P_0 B P_0 x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x, e_0) \hat{q}(0) e_0, \\ P_0 B P_m x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((x, e_m) \hat{q}(-m) + (x, e_{-m}) \hat{q}(m) \right) e_0, \\ P_m B P_0 x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x, e_0) \left(\hat{q}(m) e_m + \hat{q}(-m) e_{-m} \right). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает оценка

$$\|P_m B P_k x\|^2 = \frac{1}{2\pi} \left(|\hat{q}(m-k)|^2 + |\hat{q}(m+k)|^2 + |\hat{q}(-(m+k))|^2 + |\hat{q}(-(m-k))|^2 \right) \|x\|^2.$$

Следовательно, имеют место оценки

$$\|P_m B P_k\| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(|\hat{q}(m-k)|^2 + |\hat{q}(m+k)|^2 + |\hat{q}(-(m+k))|^2 + |\hat{q}(-(m-k))|^2 \right)^{1/2}.$$

Так как $q \in L_2(0, 2\pi)$, то

$$\|q\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{q}(n)|^2 \right)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|B\|_* &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|B(n)\|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{\substack{m-k=n, \\ m, k \geq 1}} \left(|\hat{q}(m-k)|^2 + |\hat{q}(m+k)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + |\hat{q}(-(m+k))|^2 + |\hat{q}(-(m-k))|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \|q\|. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует, что оператор B принадлежит допустимому пространству возмущений $\mathfrak{A}$, которое строится по системе ортопроекторов (P_n) .

Для собственных значений рассматриваемого оператора A имеем $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. выполнено соотношение (3), а значит, и условия (1) и (2) на последовательность $\alpha_m(n)$. Кроме того, последовательность $\alpha_m(n)$ имеет вид $\alpha_m(n) = (m^2 - n^2)^{-1}$. Тогда

$$\|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})}^2 = \sum_{n \neq m} (m^2 - n^2)^{-1} = \frac{\pi^2}{4m^2} - \frac{3}{8m^4}$$

и, следовательно, $\|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})} \leq \pi/(2m)$. Поэтому выполняются условия теоремы 3.2, а следовательно, и теоремы 3.3. Спектр оператора $A - B = -d^2/dt^2 - q$ может быть представлен в виде

$$\sigma\left(-\frac{d^2}{dt^2} - q\right) = \{\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{2m_0}\} \cup \{\tilde{\lambda}_{\pm n}, n \geq m_0 + 1\}.$$

Найдем асимптотику этого спектра. Для получения оценок собственных значений оператора $A - B$ представим подобный ему оператор $A - J_{m_0}X_0$ в виде (14); при этом

$$P_n B P_n x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((x, e_n) \hat{q}(0) + (x, e_{-n}) \hat{q}(2n) \right) e_n + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((x, e_n) \hat{q}(-2n) + (x, e_{-n}) \hat{q}(0) \right) e_{-n},$$

где

$$\hat{q}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} q(t) dt.$$

Таким образом, оператору $(n^2 P_n - P_n B)|_{H_n}$ отвечает в базисе $e_n e_{-n}$ пространства H_n матрица вида

$$\begin{pmatrix} n^2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(0) & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(-2n) \\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(2n) & n^2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(0) \end{pmatrix}, \quad n > m_0.$$

Ее спектр $\tilde{\sigma}_n^0 = \sigma((n^2 P_n - P_n B)|_{H_n})$ имеет вид

$$n^2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(0) \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(2n) \hat{q}(-2n)}.$$

Имеют место следующие оценки:

$$\left| \tilde{\lambda}_{\pm n} - n^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(0) \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(2n) \hat{q}(-2n)} \right| \leq 2 \|P_n B\|_* \|B\|_* \|\alpha_n\|_{l_2(\mathbb{Z})}.$$

Теорема 4.1. *Существует такое число m_0 , что при $n > m_0$ собственные значения дифференциального оператора $-d^2/dt^2 - q$, определяемого краевыми условиями (15), допускают следующие оценки:*

$$\left| \tilde{\lambda}_{\pm n} - n^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(0) \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(2n) \hat{q}(-2n)} \right| \leq \frac{8}{n} \|q\|^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж: ВГУ, 1987.
2. Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // Сиб. мат. ж. — 1987. — 24, № 1. — С. 21–39.
3. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — 75, № 3. — С. 3–28.
4. Гаркавенко Г. В. О диагонализации некоторых классов линейных операторов // Изв. вузов. Мат. — 1994. — № 11. — С. 14–19.
5. Гаркавенко Г. В. Спектральный анализ возмущенных самосопряженных операторов с дискретным спектром // в кн.: Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — Воронеж, 2017. — С. 101–104.

6. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностного оператора с растущим потенциалом// Сиб. электр. мат. изв. — 2017. — 14. — С. 673–689.
7. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом// Изв. Саратов. ун-та. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — 16, № 4. — С. 395–402.
8. *Garkavenko G. V., Zgolich A. R., Uskova N. B.* Spectral analysis of a difference operator with a growing potential// J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — 973, № 1. — 012053.

Гаркавенко Галина Валериевна

Воронежский государственный педагогический университет

E-mail: g.garkavenko@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 70–77
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-70-77

УДК 517.518.13

ДРОБНЫЕ МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ОПЕРАТОРЫ
ХАРДИ И ХАРДИ—ЛИТТЛВУДА
В ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ—ГЕРЦА
И ИХ КОММУТАТОРЫ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2019 г. С. С. ВОЛОСИВЕЦ, Б. И. ГОЛУБОВ

Аннотация. В работе получены достаточные условия ограниченности модифицированных дробных операторов Харди—Литтлвуда и Харди из одного модифицированного пространства Морри—Герца в другое. Изучается также ограниченность коммутаторов этих операторов из одного весового пространства со степенным весом в другое.

Ключевые слова: дробный оператор Харди—Литтлвуда, дробный оператор Харди, модифицированное пространство Морри—Герца, весовое пространство L^q , коммутатор.

MODIFIED HARDY AND HARDY—LITTLEWOOD
FRACTIONAL OPERATORS IN MORREY—HERZ SPACES
AND THEIR COMMUTATORS IN WEIGHTED SPACES

© 2019 S. S. VOLOSIVETS, B. I. GOLUBOV

ABSTRACT. In this paper, we obtain sufficient conditions of the boundedness of modified fractional Hardy—Littlewood and Hardy operators from one modified Morrey—Herz space to another. We also study the boundedness of commutators of these operators from one weighted space with a power weight to another.

Keywords and phrases: Hardy—Littlewood fractional operator, Hardy fractional operator, modified Morrey—Herz space, weighted space L^q , commutator.

AMS Subject Classification: 44A15, 42B35

1. Введение. Пусть $P = \{p_n\}_{n=1}^\infty$ — такая последовательность натуральных чисел, что $2 \leq p_n \leq N$, $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $p_{-n} = p_n$, $m_{-n} = m_n^{-1}$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in \mathbb{R}_+$ записывается в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_i), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

Здесь первая сумма конечна и для $x = l/m_k$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$, мы выбираем разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Для $x \in [m_{n-1}, m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, положим $|x|_P = m_n$ и $|0|_P = 0$; тогда для всех $x \in \mathbb{R}_+$ имеем $N^{-1}|x|_P \leq x \leq |x|_P$. Для x, y , записанных в виде (1), по определению

$$x \oplus y = z := \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{m_n},$$

где $x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $z_n = x_n + y_n \pmod{p_n}$. В случае, когда $z_n = p_n - 1$ при $n \geq n_0$ (это возможно для счетного числа y при фиксированном x), считаем, что $x \oplus y$ не определено. Для функций из используемых ниже классов это не существенно. Аналогично определяется $x \ominus y$ (подробнее см. [2, § 1.5]). Легко видеть, что для $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=n}^{\infty} m_k^{-\alpha} \leq C m_n^{-\alpha}, \quad \sum_{k=-\infty}^n m_k^{\alpha} \leq C m_n^{\alpha}. \quad (2)$$

Классические операторы Харди и Харди—Литтлвуда для функций f , определенных на $\mathbb{R}_+$, задаются формулами

$$\mathcal{H}(f)(x) = \int_x^{\infty} t^{-1} f(t) dt, \quad \mathcal{B}(f)(x) = x^{-1} \int_0^x f(t) dt$$

соответственно. Известно, что первый оператор ограничен в $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, а второй — в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $1 < p \leq \infty$ (см. [5, теоремы 327 и 328]). В ряде работ изучались дробные операторы Харди и Харди—Литтлвуда (см., например, [7]).

Можно рассмотреть оператор

$$\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)(x) = |x|_{\mathbf{P}}^{-1} \int_{|t|_{\mathbf{P}} \leq |x|_{\mathbf{P}}} f(t) dt$$

и сопряженный к нему

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)(x) = \int_{|t|_{\mathbf{P}} \geq |x|_{\mathbf{P}}} |t|_{\mathbf{P}}^{-1} f(t) dt,$$

называемые модифицированными операторами Харди—Литтлвуда и Харди соответственно. В случае $p_i \equiv 2$ такие операторы ввел Б. И. Голубов (см. [3, 4]), который также доказал тождества типа Титчмарша для этих операторов и $\mathbf{P}$ -ичного преобразования Фурье, а также ограниченность $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ в двоичных пространствах BMO и VMO на полупрямой и ограниченность $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ в двоичном пространстве Харди на $\mathbb{R}_+$. На случай произвольной ограниченной последовательности $\mathbf{P}$ эти результаты перенес С. С. Волосивец (см. [12]). Ряд свойств модифицированных операторов Харди—Литтлвуда и Харди в пространствах Гельдера—Бесова, локальных пространствах bmo , vmo и пространствах Харди был установлен в [1]; там же было установлено, что удобно изучать действие указанных модифицированных операторов в $\mathbf{P}$ -ичных пространствах Герца; в частности, оператор $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ ограничен в $K_r^{\alpha, q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ при $\alpha < 1 - 1/r$ и это свойство нарушается при $\alpha = 1 - 1/r$; аналогичное свойство верно для $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда по определению

$$|\mathbf{x}|_{\mathbf{P}} := \max(|x_1|_{\mathbf{P}}, \dots, |x_n|_{\mathbf{P}}),$$

$$B_k(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}|_{\mathbf{P}} \leq m_k\}, \quad S_k(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}|_{\mathbf{P}} = m_k\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Через B_k и S_k обозначаем $B_k(\mathbf{0})$ и $S_k(\mathbf{0})$, где $\mathbf{0}$ — нуль $\mathbb{R}^n$. Ясно, что

$$|B_k(\mathbf{a})| = m_k^n, \quad |S_k(\mathbf{a})| = m_k^n - m_{k-1}^n,$$

где $|\cdot|$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Будем рассматривать дробные операторы типа Харди—Литтлвуда и Харди

$$B_{\beta}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} \int_{|t|_{\mathbf{P}} \leq |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}} f(t) dt, \quad H_{\beta}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = \int_{|t|_{\mathbf{P}} \geq |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}} |t|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} f(t) dt$$

при $0 \leq \beta \leq n$ и, для $b \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^N)$, их коммутаторы

$$B_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}) B_{\beta}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) - B_{\beta}(\mathbf{P}, bf)(\mathbf{x}),$$

$$H_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}) H_{\beta}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) - H_{\beta}(\mathbf{P}, bf)(\mathbf{x}).$$

Далее, пусть X_E обозначает индикатор множества E , а также $\alpha \in \mathbb{R}$, $q, r \in (0, \infty)$. Будем говорить, что функция $f \in L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$ принадлежит *пространству Герца* $K_r^{\alpha, q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$, если

$$\|f\|_{K_r^{\alpha, q}} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{\alpha q} \|f X_{S_k}\|_r^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Здесь, как обычно,

$$\|f\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(\mathbf{t})|^r d\mathbf{t} \right)^{1/r}, \quad 0 < r < \infty,$$

— норма или квазинорма в пространстве $L^r(\mathbb{R}^n_+) = K_r^{0, r}(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$. Пространство Герца было введено К. Герцем (см. [10]), а его модификация для групп Виленкина, соответствующая нашему определению при $n = 1$ — К. Онневиром (см. [11]). Обобщением пространств Герца являются пространства Морри—Герца (см., например, [6]). Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < q, r < \infty$ и $\lambda > 0$. Тогда пространство Морри—Герца $MK_{q, r}^{\alpha, \lambda}(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$ состоит из функций $f \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0})$, для которых

$$\|f\|_{MK_{q, r}^{\alpha, \lambda}} = \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\alpha q} \|f X_{S_k}\|_r^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Пусть $\alpha > 0$. Будем писать $f \in \Lambda_\alpha(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$, если

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq C |\mathbf{x} \ominus \mathbf{y}|_{\mathbf{P}}^\alpha, \quad \text{где} \quad |\mathbf{x} \ominus \mathbf{y}|_{\mathbf{P}} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i \ominus y_i|_{\mathbf{P}}$$

и последняя величина существует при заданном $\mathbf{x}$ для всех $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+$, кроме счетного множества. Через $\|f\|_{\Lambda_\alpha}$ мы обозначим $\inf C$, где C удовлетворяет неравенству выше.

Рассмотрим весовую функцию $w(x)$, измеримую и почти всюду положительную на $\mathbb{R}^n_+$. Тогда пространство $L_w^q(\mathbb{R}^n_+)$, $1 \leq q < \infty$, состоит из функций с конечной нормой

$$\|f\|_{q, w} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(\mathbf{t})|^q w(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right)^{1/q};$$

аналогично определяется пространство $L_w^q(\mathbb{R}^n)$. Введем обозначение $w_\delta(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^\delta$.

Ясно, что

$$MK_{q, r}^{\alpha, 0}(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+) = K_r^{\alpha, q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+), \quad MK_{q, q}^{\alpha/q, 0}(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+) = L_{w_\alpha}^q(\mathbb{R}^n_+).$$

Будем писать $A(t) \asymp B(t)$, если существуют такие постоянные $C_1, C_2 > 0$, что неравенства $C_1 A(t) \leq B(t) \leq C_2 A(t)$ выполняются при всех допустимых значений t .

Целью нашей работы является получение достаточных условий ограниченности операторов $B_\beta(\mathbf{P}, f)$ и $H_\beta(\mathbf{P}, f)$, действующих из одного модифицированного пространства Морри—Герца в другое. Изучается также ограниченность коммутаторов этих операторов, действующих из одного весового пространства со степенным весом в другое. В p -адическом случае некоторые близкие к данной работе результаты можно найти в статье Г. Гао и Й. Чжуна (см. [9]).

2. Вспомогательные утверждения. Пусть

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|_{\mathbb{R}^n} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $B(|\mathbf{x}|) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}|\}$, $u(x)$, $v(x)$ — неотрицательные локально интегрируемые функции на $\mathbb{R}^n$. Следующие две леммы установлены в [8].

Лемма 2.1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$. Неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|\mathbf{x}|)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)^q v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/p} \quad (3)$$

справедливо для любой измеримой неотрицательной функции $f(\mathbf{x})$ при некоторой постоянной $C > 0$ тогда и только тогда, когда

$$A := \sup_{t>0} \left(\int_{|\mathbf{x}| \geq t} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/q} \left(\int_{|\mathbf{x}| \leq t} u^{1-p'}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/p'} < \infty. \quad (4)$$

Лемма 2.2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$. Неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|\mathbf{x}|)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right]^q v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/p} \quad (5)$$

справедливо для любой измеримой неотрицательной функции $f(\mathbf{x})$ при некоторой постоянной $C > 0$ тогда и только тогда, когда

$$B := \sup_{t>0} \left(\int_{|\mathbf{x}| \leq t} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/q} \left(\int_{|\mathbf{x}| \geq t} u^{1-p'}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/p'} < \infty. \quad (6)$$

Следствие 2.1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $u(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\gamma =: w_\gamma(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x}) = w_\delta(\mathbf{x})$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Тогда неравенство (3) для неотрицательных функций $f \in L_u^p(\mathbb{R}_+^n)$ выполняется при

$$\frac{\gamma}{p} = \frac{\delta}{q} + n \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \quad (7)$$

и $\delta > -n$, а неравенство (5) имеет место при условии (7) и $\delta < -n$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\int_{B(|\mathbf{x}|)} |\mathbf{t}|^\gamma d\mathbf{t} \asymp |\mathbf{x}|^{\gamma+n}, \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|\mathbf{x}|)} |\mathbf{t}|^\gamma d\mathbf{t} \asymp |\mathbf{x}|^{\gamma+n},$$

причем первый интеграл сходится при $\gamma + n > 0$, а второй — при $\gamma + n < 0$. Поэтому выражение под знаком $\sup$ в (4) слабо эквивалентно

$$t^{(\delta+n)/q} t^{((1-p')\gamma+n)/p'} = t^{\delta/q - \gamma/p + n(1/p' + 1/q)}$$

и $A < \infty$ только в случае $\gamma/p = \delta/q + n(1 - 1/p + 1/q)$. При этом $\delta + n > 0$ и $(1 - p')\gamma + n < 0$, т.е. $\gamma > n(p - 1)$, но эти неравенства эквивалентны при выполнении (7). Аналогично разбирается случай неравенства (5). Следствие доказано. $\square$

Следствие 2.2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$. Для $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, рассмотрим операторы

$$B(f)(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-n} \int_{|\mathbf{t}| \leq |\mathbf{x}|} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad H(f)(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{x}| \leq |\mathbf{t}|} |\mathbf{t}|^{-n} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Тогда неравенства

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{x}|^\delta (B(f)(\mathbf{x}))^q d\mathbf{x} \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{x}|^\gamma f^p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/p},$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{x}|^\delta (H(f)(\mathbf{x}))^q d\mathbf{x} \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{x}|^\gamma f^p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/p}$$

с некоторой константой $C > 0$ выполнены соответственно для неотрицательной измеримой функции $f(\mathbf{x})$ при $\delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$, $\delta > n(q-1)$, и при $\delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$, $\gamma < -n$.

Доказательство. В первом случае надо заменить в (7) δ на $\delta - nq$, что дает нам $\gamma/p = \delta/q - n(1/p - 1/q)$ и $\delta - nq + n > 0$, т.е. $\delta > n(q-1)$. Во втором случае в (7) надо заменить γ на $\gamma + np$, откуда также находим, что $\gamma/p = \delta/q - n(1/p - 1/q)$ и $\gamma + np < n(p-1)$, т.е. $\gamma < -n$. Следствие доказано. $\square$

Замечание 2.1. Пусть функция $f(x)$ задана на $\mathbb{R}_+^n$ и

$$B^+(|\mathbf{x}|) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^n : |\mathbf{t}| \geq |\mathbf{x}|\}.$$

Рассмотрим операторы

$$\mathfrak{B}(f)(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-n} \int_{B^+(|\mathbf{x}|)} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad \mathfrak{H}(f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus B^+(|\mathbf{x}|)} |\mathbf{t}|^{-n} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Применяя следствие 2.2 к функциям, значения которых совпадают в точках вида $(\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_n)$ при любой комбинации знаков $+$ и $-$, получаем, что оператор $\mathfrak{B} : L_{w_\gamma}^p(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow L_{w_\delta}^q(\mathbb{R}_+^n)$ ограничен при $1 < p \leq q < \infty$, $\delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$ и $\delta > n(q-1)$, оператор $\mathfrak{H} : L_{w_\gamma}^p(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow L_{w_\delta}^q(\mathbb{R}_+^n)$ ограничен при $1 < p \leq q < \infty$, $\delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$ и $\gamma < -n$.

3. Основные результаты. Всюду ниже константы $C, C_1, C_2, \dots$ положительны и не зависят от измеримой функции f , заданной на $\mathbb{R}_+^n$.

Теорема 3.1. Пусть $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$, $1 < r_1 < r_2 < \infty$, $0 \leq \beta < n$, $1/r_1 - 1/r_2 = \beta/n$ и $\lambda \geq 0$.

(1) Если $\alpha < n/r_1' + \lambda$, то $\|B_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{MK_{q_2, r_2}^{\alpha, \lambda}} \leq C \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}}$.

(2) Если $\alpha > -n/r_2 + \lambda$, то $\|H_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{MK_{q_2, r_2}^{\alpha, \lambda}} \leq C \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}}$.

Доказательство. (1) Согласно определению оператора $B_\beta(\mathbf{P}, f)$ имеем

$$\|B_\beta(\mathbf{P}, f)X_{S_k}\|_{r_2}^{r_2} \leq \int_{S_k} m_k^{r_2(\beta-n)} \left(\sum_{j=-\infty}^k \int_{\tilde{S}_j} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \right)^{r_2} d\mathbf{x} \leq m_k^{r_2(\beta-n)+n} \left(\sum_{j=-\infty}^k \int_{\tilde{S}_j} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \right)^{r_2}.$$

В силу неравенства Гельдера ($1/r_i + 1/r_i' = 1$, $i = 1, 2$) получаем

$$\int_{\tilde{S}_j} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \leq \|f_j\|_{r_1} (m_j^n - m_{j-1}^n)^{1/r_1'} \leq m_j^{n/r_1'} \|f_j\|_{r_1},$$

где $f_j = fX_{S_j}$. Но $\beta - n + n/r_2 = n(\beta/n - 1/r_1 + 1/r_2 - 1/r_1') = -n/r_1'$ по условию, поэтому

$$\|B_\beta(\mathbf{P}, f)X_{S_k}\|_{r_2} \leq m_k^{-n/r_1'} \sum_{j=-\infty}^k m_j^{n/r_1'} \|f_j\|_{r_1}.$$

В силу последней оценки, неравенства $0 < q_1 \leq q_2$ и неравенства Йенсена находим, что

$$\begin{aligned} \|B_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{MK_{q_2, r_2}^{\alpha, \lambda}} &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\alpha q_2} \left(\sum_{j=-\infty}^k \left(\frac{m_j}{m_k} \right)^{n/r_1'} \|f_j\|_{r_1} \right)^{q_2} \right)^{1/q_2} \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\alpha q_1} \left(\sum_{j=-\infty}^k \left(\frac{m_j}{m_k} \right)^{n/r_1'} \|f_j\|_{r_1} \right)^{q_1} \right)^{1/q_1}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\|f_j\|_{r_1} = m_j^{-\alpha} (m_j^{\alpha q_1} \|f_j\|_{r_1}^{q_1})^{1/q_1} \leq m_j^{\lambda-\alpha} m_j^{-\lambda} \left(\sum_{i=-\infty}^j m_i^{\alpha q_1} \|f_i\|_{r_1}^{q_1} \right)^{1/q_1} \leq m_j^{\lambda-\alpha} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} \quad (8)$$

и $\alpha < n/r'_1 + \lambda$, то

$$\begin{aligned} \|B_\beta(\mathbf{P}, f) X_{S_k}\|_{r_2}^{r_2} &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\lambda q_1} m_k^{(\alpha-\lambda)q_1} \left(\sum_{j=-\infty}^k \left(\frac{m_j}{m_k} \right)^{n/r'_1} m_j^{\lambda-\alpha} \right)^{q_1} \right)^{1/q_1} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} = \\ &= \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\lambda q_1} \left(\sum_{j=-\infty}^k \left(\frac{m_j}{m_k} \right)^{\lambda+n/r'_1-\alpha} \right)^{q_1} \right)^{1/q_1} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} \leq \\ &\leq C_1 \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\lambda q_1} \right)^{1/q_1} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} \leq C_2 \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}}. \end{aligned}$$

Тем самым, утверждение (1) доказано с постоянной $C = C_2$.

(2) Используя определение оператора $H_\beta(\mathbf{P}, f)$, применяя неравенство Гельдера и равенство $\beta - n + n/r'_1 = -n/r_2$, получим

$$\begin{aligned} \|H_\beta(\mathbf{P}, f) X_{S_k}\|_{r_2}^{r_2} &= \int_{S_k} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \int_{S_j} |t|^{\beta-n} f(t) dt \right)^{r_2} dx \leq \\ &\leq m_k^n \left(\sum_{j=k}^{\infty} m_j^{\beta-n} \|f_j\|_{r_1} m_j^{n/r'_1} \right)^{r_2} = \left(\sum_{j=k}^{\infty} m_k^{n/r_2} \|f_j\|_{r_1} m_j^{-n/r_2} \right)^{r_2}. \end{aligned}$$

Применяя определение нормы в пространстве $MK_{q, r}^{\alpha, \lambda}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$, неравенство Иенсена и неравенство (8), находим

$$\begin{aligned} \|H_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{MK_{q_2, r_2}^{\alpha, \lambda}} &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\alpha q_2} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{m_k}{m_j} \right)^{n/r_2} \|f_j\|_{r_1} \right)^{q_2} \right)^{1/q_2} \leq \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\alpha q_1} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{m_k}{m_j} \right)^{n/r_2} \|f_j\|_{r_1} \right)^{q_1} \right)^{1/q_1} \leq \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\lambda q_1} m_k^{(\alpha-\lambda)q_1} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{m_k}{m_j} \right)^{n/r_2} m_j^{(\lambda-\alpha)} \right)^{q_1} \right)^{1/q_1} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} \leq \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\lambda q_1} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{m_k}{m_j} \right)^{n/r_2+\alpha-\lambda} \right)^{q_1} \right)^{1/q_1} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} \leq \\ &\leq C_3 \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} (m_s^{\lambda q_1})^{1/q_1} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} \leq C_4 \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}}. \end{aligned}$$

Здесь использованы неравенства (2) и условие $\alpha > -n/r_2 + \lambda$. Тем самым, утверждение (2) доказано с постоянной $C = C_4$. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 3.1 при $\lambda = 0$ вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1. Пусть $\beta \geq 0$, $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$, $1/r_1 - 1/r_2 = \beta/n$, $1 < r_1 < \infty$, $1/r_i + 1/r'_i = 1$, $i = 1, 2$. Тогда справедливы следующие неравенства:

- (1) $\|B_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}} \leq C \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha, q_1}}$, $\alpha < n/r'_1$;
- (2) $\|H_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}} \leq C \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha, q_1}}$, $\alpha > -n/r'_2$.

Теорема 3.2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $0 \leq \beta < n$, $\alpha > 0$, $b \in \Lambda_\alpha(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$, β и $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$ связаны равенством $\alpha + \beta + \delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$.

- (1) Если $q(\alpha + \beta) + \delta > n(q - 1)$, то $\|B_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)\|_{q, w_\delta} \leq C \|f\|_{p, w_\gamma}$.
- (2) Если $\gamma < (\alpha + \beta)p - n$, то $\|H_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)\|_{q, w_\delta} \leq C \|f\|_{p, w_\gamma}$.

Доказательство. (1) Пусть $\mathbf{x} \in S_k$. Тогда

$$|B_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x})| = \left| |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} \int_{B_k} f(\mathbf{t})(b(\mathbf{x}) - b(\mathbf{t})) d\mathbf{t} \right| \leq m_k^{\beta-n} \sum_{j=-\infty}^k \int_{S_j} |f(\mathbf{t})| \cdot |b(\mathbf{x}) - b(\mathbf{t})| d\mathbf{t}.$$

При $\mathbf{t} \in S_k$ имеем $|\mathbf{x} \ominus \mathbf{t}|_{\mathbf{P}} < m_k$ п.в. на S_k , а при $\mathbf{t} \in S_j$, где $j < k$, верно равенство $|\mathbf{x} \ominus \mathbf{t}|_{\mathbf{P}} = m_k$. Поэтому

$$|B_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x})| \leq m_k^{\beta-n} \sum_{j=-\infty}^k m_k^\alpha \|b\|_{\Lambda_\alpha} \int_{S_j} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \leq m_k^{\alpha+\beta-n} \int_{B_k} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \|b\|_{\Lambda_\alpha}.$$

Далее видим, что

$$\|B_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)\|_{q, w_\delta}^q \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\|b\|_{\Lambda_\alpha} m_k^{\alpha+\beta-n} \int_{B_k} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \right)^q m_k^\delta d\mathbf{x} = \|b\|_{\Lambda_\alpha}^q \int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^{q(\alpha+\beta)+\delta} (B_0(\mathbf{P}, |f|))^q d\mathbf{x}.$$

В силу ограниченности $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^\infty$ константой N получаем

$$C_1 |\mathbf{x}|_{\mathbb{R}^n} \leq |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}} \leq C_2 |\mathbf{x}|_{\mathbb{R}^n}, \quad B_0(\mathbf{P}, |f|)(\mathbf{x}) \leq C_3 \mathfrak{B}(|f|)(N\mathbf{x}),$$

где $\mathfrak{B}(|f|)$ определен на $\mathbb{R}_+^n$ в замечании 2.1. Если $\mathbf{y} = N\mathbf{x}$, то для $g \in L_{w_\delta}^q(\mathbb{R}_+^n)$ имеем

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{y}|^\delta |g(\mathbf{y})|^q d\mathbf{y} \right)^{1/q} = N^{(\delta+n)/q} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|^\delta |g(N\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right)^{1/q}.$$

Поэтому согласно следствию 2.2 и замечанию 2.1 находим

$$\|B_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)\|_{q, w_\delta}^q \leq C_4 \|b\|_{\Lambda_\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|^{q(\alpha+\beta)+\delta} (\mathfrak{B}|f|(\mathbf{x}))^q d\mathbf{x} \right)^{1/q} \leq C_5 \|b\|_{\Lambda_\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^\gamma |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}$$

при условии $\alpha + \beta + \delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$ и $q(\alpha + \beta) + \delta > n(q - 1)$. Тем самым, утверждение (1) доказано с константой $C = C_5$.

(2) При $\mathbf{x} \in S_k$ имеем

$$|H_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x})| = \left| \sum_{j=k}^\infty \int_{S_j} |\mathbf{t}|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} f(\mathbf{t})(b(\mathbf{x}) - b(\mathbf{t})) d\mathbf{t} \right| \leq \|b\|_{\Lambda_\alpha} \left| \sum_{j=k}^\infty m_j^{\beta-n} \int_{S_j} |\mathbf{x} \ominus \mathbf{t}|_{\mathbf{P}}^\alpha |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \right|.$$

Так как $j \geq k$, то $|\mathbf{x} \ominus \mathbf{t}|_{\mathbf{P}} \leq |\mathbf{t}|_{\mathbf{P}} \leq m_j$; поэтому

$$|H_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x})| \leq \|b\|_{\Lambda_\alpha} |H_0(\mathbf{P}, |f|_{w_{\alpha+\beta}})(\mathbf{x})|,$$

$$\|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{q,w_\delta}^q \leq \|b\|_{\Lambda_\alpha}^q \int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|_P^\delta \left(H_0(\mathbf{P}, |f|w_{\alpha+\beta})(\mathbf{x}) \right)^q d\mathbf{x}.$$

Аналогично доказательству (1) имеем

$$H_0(\mathbf{P}, |f|w_{\alpha+\beta})(\mathbf{x}) \leq C_6 \mathfrak{H}(|f| \cdot |\cdot|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha+\beta})(\mathbf{x}/N), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n,$$

где $\mathfrak{H}$ определен в замечании 2.1. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{q,w_\delta} &\leq C_7 \|b\|_{\Lambda_\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|_{\mathbb{R}^n}^\delta (\mathfrak{H}(|f| \cdot |\cdot|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha+\beta}))^q d\mathbf{x} \right)^{1/q} \\ &\leq C_8 \|b\|_{\Lambda_\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|_{\mathbb{R}^n}^{\gamma_1} |f(\mathbf{x})|^p |\mathbf{x}|_{\mathbb{R}^n}^{(\alpha+\beta)p} d\mathbf{x} \right)^{1/p} \leq C_9 \|f\|_{p,w_\gamma}, \end{aligned}$$

где $\gamma = \gamma_1 + (\alpha + \beta)p$ и γ_1 удовлетворяет условию $\gamma_1/p = \delta/q - n(1/p - 1/q)$, откуда $\gamma/p + n(1/p - 1/q) = \alpha + \beta + \delta/q$ при условии $\gamma_1 < -n$, т.е. при $\gamma < (\alpha + \beta)p - n$. Тем самым, утверждение (2) доказано с константой $C = C_9$. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волосивец С. С. Модифицированные операторы Харди и Харди—Литтлвуда и их поведение в различных пространствах // Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — 75, № 1. — С. 29–52.
2. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. — М.: Наука, 1987.
3. Голубов Б. И. О двоичных аналогах операторов Харди и Харди—Литтлвуда // Сиб. мат. ж. — 1999. — 40, № 6. — С. 1244–1252.
4. Голубов Б. И. Об ограниченности двоичных операторов Харди и Харди—Литтлвуда в двоичных пространствах H и BMO // Anal. Math. — 2000. — 26, № 4. — С. 287–298.
5. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.
6. Adams D. R. Morrey Spaces. — Basel: Birkhäuser, 2015.
7. Andersen K. F., Muckenhoupt B. Weighted weak type Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maximal functions // Stud. Math. — 1982. — 72, № 1. — P. 9–26.
8. Drabek P., Heinig H., Kufner A. Higher-dimensional Hardy inequality // in: General Inequalities (Bandle C., Everitt W. N., et al., eds.). — Basel: Springer, 1997. — P. 3–16.
9. Gao G., Zhong Y. Some estimates of Hardy operators and their commutators on Morrey–Herz spaces // J. Math. Ineq. — 2017. — 11, № 1. — P. 49–58.
10. Herz C. Lipschitz spaces and Bernstein’s theorem on absolutely convergent Fourier transforms // J. Math. Mech. — 1968. — 18, № 4. — P. 283–324.
11. Onneweer C. W. Generalized Lipschitz spaces and Herz spaces on certain totally disconnected groups // in: Martingale Theory in Harmonic Analysis and Banach Spaces/ Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1981. — 939. — P. 106–121.
12. Volosivets S. S. On P -adic analogs of Hardy and Hardy–Littlewood operators // East J. Approx. — 2005. — 11, № 1. — P. 57–72.

Волосивец Сергей Сергеевич
Саратовский государственный университет
E-mail: volosivetssss@mail.ru

Голубов Борис Иванович
Московский физико-технический институт (государственный университет)
E-mail: golubov@mail.mipt.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 78–93
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-78-93

УДК 517.929, 517.984.52

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2019 г. Д. А. ЗАКОРА

Аннотация. В работе рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, представляющее собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное интегральным слагаемым с ядром разностного типа специального вида. Это уравнение возникает при описании различных вязкоупругих систем. По системе корневых элементов операторного пучка, ассоциированного с рассматриваемым уравнением, построен p -базис в ортогональной сумме гильбертовых пространств. С использованием этого базиса найдено представление решения исследуемого уравнения. Приведены приложения к задачам из теории вязкоупругости.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, спектральный анализ, операторный пучок, p -базис.

REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF A CERTAIN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION AND APPLICATIONS

© 2019 D. A. ZAKORA

ABSTRACT. In this paper, we consider a second-order integro-differential equation with unbounded operator coefficients in a Hilbert space, which is an abstract hyperbolic equation perturbed by an integral term with a difference-type kernel of a special form. This equation arises in the description of various viscoelastic systems. Using the system of generalized eigenvectors of the operator pencil associated with the equation considered, we construct a p -basis in the orthogonal sum of Hilbert spaces. Using this basis, we find a representation of the solution of the equation. We also discuss possible applications to problems of viscoelasticity.

Keywords and phrases: integro-differential equation, spectral analysis, operator bundle, p -base.

AMS Subject Classification: 45J05, 45C05

1. Постановка задачи. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и имеющий обратный компактный ($A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$). Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = -\alpha_0 A u(t) + \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \alpha_{-l} A u(s) ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 14.Z50.31.0037).

где $0 =: b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_m$, $\alpha_{-l} > 0$ ($l = \overline{0, m}$); при этом

$$\alpha_0 - \sum_{l=1}^m \alpha_{-l} b_l^{-1} > 0.$$

Уравнение из (1) описывает различные системы из теории вязкоупругости, например, колебания вязкоупругого тела, занимающего ограниченную область, продольные колебания однородного вязкоупругого стержня, поперечные колебания неоднородной по толщине вязкоупругой балки или пластины, поперечные колебания ортотропной пластинки из гомогенного полимера, армированного упругими нитями или пленками и т. д. (см. [3, гл. 6, § 23]). Уравнение Гуртина—Пипкина (см. [11]), описывающее процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью и с ядром специального вида, может быть также записано в виде уравнения из (1).

В [8] впервые было установлено убывание к нулю решений однородного уравнения типа (1) с ростом времени, однако без оценки скорости. В дальнейшем были найдены различные условия на ядра, обеспечивающие экспоненциальную или полиномиальную устойчивость нулевого решения однородного уравнения типа (1). Приведенные выше условия на числовые коэффициенты обеспечивают (см., например, [7]) экспоненциальную устойчивость уравнения из (1).

В [2, 10] проводится спектральный анализ уравнения из (1) в случае бесконечного количества экспоненциальных слагаемых, получены утверждения о локализации и асимптотике спектра. В [14] (см. также [1, гл. 3, § 3.2, п. 3.2.2]) получено представление решения рассматриваемого уравнения в виде суммы слагаемых, отвечающих точкам спектра символа интегро-дифференциального уравнения (операторного пучка, ассоциированного с уравнением). При этом предполагается, что спектр оператора A простой. Доказательство основано на исследовании спектра символа интегро-дифференциального уравнения и использовании теоремы Пэли—Винера.

В настоящей работе спектр оператора A не предполагается простым, однако ядро в уравнении из (1) содержит лишь конечное количество слагаемых. Доказательство основано на сведении (1) к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств $\mathcal{H} = \bigoplus_{l=1}^{m+2} H$, последующем исследовании и использовании системы корневых элементов главного оператора.

2. Вывод основного операторного уравнения.

Определение 1. *Сильным решением* задачи Коши (1) назовем такую функцию $u(t)$, что $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $u'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ при $t \in \mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, $Au(t)$, $A^{1/2}u'(t) \in C(\mathbb{R}_+; H)$, $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$, выполнены начальные условия и уравнение из (1) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Утверждение о разрешимости задачи Коши (1) может быть получено с использованием утверждений из [9, 12] или [13, гл. 11, § 6, п. 4].

Теорема 1. *Пусть $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$. Тогда задача Коши (1) имеет единственное сильное решение.*

Предположим, что задача (1) имеет единственное сильное решение $u(t)$ и $u^0 \in \mathcal{D}(A)$. Сведем (1) к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка. Из того факта, что $A^{1/2}u'(t)$, $A^{1/2}u(t) \in C(\mathbb{R}_+; H)$, следует (см. [4, гл. 3, § 1, п. 1]), что $(A^{1/2}u(t))' = A^{1/2}u'(t)$, и мы можем при каждом $l = \overline{1, m}$ провести интегрирование по частям:

$$\int_0^t e^{-b_l(t-s)} b_l A^{1/2} u(s) ds = A^{1/2} u(t) - e^{-b_l t} A^{1/2} u^0 - \int_0^t e^{-b_l(t-s)} A^{1/2} u'(s) ds.$$

С помощью этого соотношения преобразуем уравнение из (1):

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = -A^{1/2} \left[\beta_0 A^{1/2} u(t) + \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \beta_l A^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds \right] + f_0(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1,$$

$$f_0(t) := f(t) - \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{-l}}{b_l} e^{-b_l t} A u^0, \quad \beta_0 := \alpha_0 - \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{-l}}{b_l} > 0, \quad \beta_l := \frac{\alpha_{-l}}{b_l} > 0 \quad (l = \overline{1, m}). \quad (2)$$

Введем для функции $u(t)$ объекты

$$v(t) := u'(t), \quad v_0(t) := \beta_0^{1/2} A^{1/2} u(t), \quad v_l(t) := \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \beta_l^{1/2} A^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds, \quad l = \overline{1, m}, \quad (3)$$

и перепишем уравнение из (2), а также продифференцированные соотношения из (3) в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} = -A^{1/2} \left[\beta_0^{1/2} v_0(t) + \sum_{l=1}^m \beta_l^{1/2} v_l(t) \right] + f_0(t), \\ \frac{dv_0(t)}{dt} = - \left[-\beta_0^{1/2} A^{1/2} v(t) \right], \\ \frac{dv_l(t)}{dt} = - \left[-\beta_l^{1/2} A^{1/2} v(t) + b_l v_l(t) \right], \quad l = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Эту систему (с начальными условиями) будем трактовать как задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \bigoplus_{l=1}^{m+2} H$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad (4)$$

где

$$\xi(t) := (v(t); w(t))^\tau = (v(t); v_0(t); v_1(t); \dots; v_m(t))^\tau, \\ \xi^0 := (u^1; \beta_0^{1/2} A^{1/2} u^0; 0; \dots; 0)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (f_0(t); 0; \dots; 0)^\tau.$$

Для оператора $\mathcal{A}$ имеют место следующие формулы:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} A^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} := (\beta_0^{1/2}, \beta_1^{1/2}, \dots, \beta_m^{1/2})^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1, \dots, b_m),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (v; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid v \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \mathcal{Q}^* w = \sum_{l=0}^m \beta_l^{1/2} v_l \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}, \quad (5)$$

где символ τ означает операцию транспонирования.

Замечание 1. Можно показать, что оператор $-\mathcal{A}$ является генератором C_0 -полугруппы; таким образом, если выполнены условия теоремы 1, то задача (4) имеет единственное решение $\xi(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$. Используя (3), из $\xi(t)$ можно восстановить решение $u(t)$ задачи Коши (1).

3. О пересчете корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ и ассоциированного с ним пучка. Рассмотрим задачу о спектре оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \quad (6)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, ξ — амплитудный элемент.

При $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$ свяжем с (6) спектральную задачу

$$L(\lambda)u := \left[-\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1} \mathcal{Q} \right] u = \left[-\lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda} \beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} \beta_l \right] u = 0, \quad u \in H. \quad (7)$$

Замечание 2. Непосредственно проверяется, что $\{0, b_1, \dots, b_m\} \notin \sigma(\mathcal{A})$ и

$$\mathcal{A} - \lambda = \text{diag} (A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1} \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -(\mathcal{G} - \lambda)^{-1} \mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \text{diag} (A^{1/2}, \mathcal{I}),$$

при $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m\}$, где $\mathcal{I}$ — единичный оператор. Отсюда следует, что $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(L(\lambda))$.

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся вспомогательные леммы о связи цепочки из собственного и присоединенного к нему элементов пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ с некоторой функцией из $\mathcal{H}$ и о связи цепочек элементов некоторых специальных оператор-функций.

Определение 2 (см. [6, гл. 2, § 11, с. 61]). Пусть λ_0 — собственное значение, а η_0 — отвечающий ему собственный элемент оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, т.е. $\mathcal{A}(\lambda_0)\eta_0 = 0$. Элементы $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ называют *присоединенными к собственному элементу η_0* , если

$$\sum_{k=0}^j (k!)^{-1} \mathcal{A}^{(k)}(\lambda_0) \eta_{j-k} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Число n называют *длиной цепочки $\{\eta_k\}_{k=0}^{n-1}$* из собственного и присоединенных элементов.

Лемма 1 (см. [6, гл. 2, § 11, лемма 11.3]). Элементы $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ образуют цепочку из собственного и присоединенных элементов $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающую числу λ_0 , тогда и только тогда, когда существует функция $\eta(\lambda)$, голоморфная в некоторой окрестности точки λ_0 , такая, что $\eta(\lambda_0) \neq 0$, $\eta^{(k)}(\lambda_0) = k! \eta_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) и функция $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности, большей или равной n .

Определение 3 (см. [6, гл. 2, § 11, с. 62]). Пусть $\eta(\lambda)$ — функция из $\mathcal{H}$, причем $\eta(\lambda_0) \neq 0$ и $\mathcal{A}(\lambda_0)\eta(\lambda_0) = 0$. Если порядок нуля функции $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ в точке λ_0 равен n , то $\eta(\lambda)$ называется *производящей функцией* для цепочки из собственного и присоединенных элементов $\{(k!)^{-1} \eta^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$. Число n будем называть *рангом* производящей функции $\eta(\lambda)$.

Рассмотрим операторный пучок $\mathcal{A}(\lambda)$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = H \oplus \mathcal{H}_0$, и соответствующую спектральную задачу:

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(\lambda) & \mathcal{A}_{12}(\lambda) \\ \mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (v; w)^\tau \in \mathcal{H} = H \oplus \mathcal{H}_0. \quad (8)$$

С задачей (8), при $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$, свяжем спектральную задачу

$$L(\lambda)v = [\mathcal{A}_{11}(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)]v = 0, \quad v \in H. \quad (9)$$

Замечание 3. В области $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ спектральную задачу (8) можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta = \begin{pmatrix} I & \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда после замены $(v; \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)v + w)^\tau =: (v; w_v)^\tau$ найдем, что в области $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ спектральные задачи (8) и (9) эквивалентны.

Лемма 2. Пусть $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$. Функция $\eta(\lambda) := (v(\lambda); w(\lambda))^\tau$ из $\mathcal{H}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ тогда и только тогда, когда $v(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 и

$$w(\lambda) = -\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)v(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^n \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda), \quad (10)$$

где $p(\lambda)$ — функция, голоморфная в некоторой окрестности точки λ_0 .

Доказательство. Доказательство этой леммы следует рассуждениям [6, гл. 2, § 12, лемма 12.3]. Начнем с достаточности. Пусть $v(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ и выполнено соотношение (10). Поскольку $L(\lambda)v(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности $\geq n$, то из вида $L(\lambda)$ получим:

$$L(\lambda)v(\lambda) = [\mathcal{A}_{11}(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)]v(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n q(\lambda), \quad (11)$$

где $q(\lambda)$ — некоторая функция, голоморфная в окрестности точки λ_0 . Подставим (10) в (11) и запишем полученное соотношение вместе с (10) в виде одного векторно-матричного выражения в $\mathcal{H}$; после простых преобразований получим

$$\mathcal{A}(\lambda)(v(\lambda); w(\lambda))^\tau = (\lambda - \lambda_0)^n (q(\lambda) + \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda); p(\lambda))^\tau.$$

Отсюда следует, что $\eta(\lambda) = (v(\lambda); w(\lambda))^\tau$ есть производящая функция ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0 . Достаточность доказана.

Пусть теперь функция $\eta(\lambda) = (v(\lambda); w(\lambda))^\tau$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0 . По условию теоремы $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности $\geq n$; следовательно,

$$\mathcal{A}_{11}(\lambda)v(\lambda) + \mathcal{A}_{12}(\lambda)w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n r(\lambda), \quad (12)$$

$$\mathcal{A}_{21}(\lambda)v(\lambda) + \mathcal{A}_{22}(\lambda)w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n p(\lambda), \quad (13)$$

где $r(\lambda)$, $p(\lambda)$ — некоторые функции, голоморфные в окрестности точки λ_0 . Из (13) следует (10). Подставив (10) в (12) получим, что

$$L(\lambda)v(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n (r(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda)).$$

Отсюда следует, что $L(\lambda)v(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже n . Лемма доказана. $\square$

В качестве следствия из леммы 2 получим следующую лемму о пересчете корневых элементов спектральных задач (8) и (9).

Лемма 3. Пусть набор элементов $\{\eta_k = (v_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов задачи (8), отвечающей собственному значению λ_0 ($\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$); тогда $\{v_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов задачи (9), отвечающая собственному значению λ_0 .

Обратно, пусть набор элементов $\{v_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи (9), отвечающая собственному значению λ_0 ; тогда $\{\eta_k = (v_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, где

$$w_k = - \sum_{l=0}^k \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} v_l, \quad k = \overline{0, n-1},$$

— цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи (8).

Доказательство. По лемме 2, если функция $\eta(\lambda) = (v(\lambda); w(\lambda))^\tau$ из $\mathcal{H}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$, то функция $v(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 . Отсюда и из леммы 1 следует прямое утверждение.

Обратно, пусть функция $v(\lambda)$ является производящей функцией из H ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 . Определим функцию $w(\lambda)$ по формуле (10). Тогда по лемме 2 функция $\eta(\lambda) = (v(\lambda); w(\lambda))^\tau$

из $\mathcal{H}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0 . При этом (см. определение 3)

$$\begin{aligned} w_k &= -\frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left[\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \mathcal{A}_{21}(\lambda) v(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^n \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) p(\lambda) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \\ &= -\frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \mathcal{A}_{21}(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \frac{d^l v(\lambda)}{d\lambda^l} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \\ &= -\sum_{l=0}^k \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \mathcal{A}_{21}(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} v_l, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad \square \end{aligned}$$

В качестве следствия из леммы 3 получим следующую теорему о связи собственных и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$ (см. спектральные задачи (6) и (7) соответственно).

Теорема 2. Пусть набор элементов $\{\xi_k = (u_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов задачи (6), отвечающей собственному значению λ_0 ($\lambda_0 \neq 0, b_1, \dots, b_m$); тогда набор элементов $\{v_k\}_{k=0}^{n-1} := \{A^{1/2} u_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов задачи (7), отвечающая собственному значению λ_0 .

Обратно, пусть набор элементов $\{v_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи (7), отвечающая собственному значению λ_0 ; тогда набор элементов $\{\xi_k = (A^{-1/2} v_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, где $w_k = \sum_{l=0}^k (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-(k-l+1)} \mathcal{Q} v_l$, — цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи (6).

Доказательство. Пусть λ_0 ($\lambda_0 \neq 0, b_1, \dots, b_m$) — собственное значение задачи (6) и $\xi(\lambda)$ — производящая функция для цепочки $\{\xi_k := (k!)^{-1} \xi^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ из собственного и присоединенных элементов (см. определение 3). Запишем задачу (6) в виде

$$(\mathcal{A} - \lambda) \xi = \mathcal{B} \mathcal{A}(\lambda) \mathcal{B} \xi = 0, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

(см. (5)), где $\mathcal{B} := \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I})$, а оператор-функция $\mathcal{A}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеет вид

$$\mathcal{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(\lambda) & \mathcal{A}_{12}(\lambda) \\ \mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Отсюда следует, что $\mathcal{B} \xi(\lambda) = (A^{1/2} u(\lambda); w(\lambda))^\tau$ — производящая функция для оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$. Согласно лемме 2, $v(\lambda) := A^{1/2} u(\lambda)$ — производящая функция для оператор-функции $L(\lambda)$, и первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь λ_0 — собственное значение спектральной задачи (7) и $v(\lambda)$ — производящая функция для цепочки из собственного и присоединенных элементов $\{v_k := (k!)^{-1} v^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ (см. определение 3) оператор-функции $L(\lambda)$. Тогда в соответствии с леммой 3 получим, что

$$(v_k; w_k)^\tau := \left(v_k; -\sum_{l=0}^k \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \mathcal{A}_{21}(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} v_l \right)^\tau, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad (15)$$

— цепочка из собственного и присоединенных элементов оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 . Для вторых компонент из (15) имеем, с учетом вида $\mathcal{A}_{22}(\lambda)$ и $\mathcal{A}_{21}(\lambda)$ (см. (14) и определение 3)

$$w_k = \sum_{l=0}^k \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} (\mathcal{G} - \lambda)^{-1} \mathcal{Q} \Big|_{\lambda=\lambda_0} v_l = \sum_{l=0}^k (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-(k-l+1)} \mathcal{Q} v_l.$$

Таким образом, набор элементов $\{\eta_k = (v_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающей собственному значению λ_0 . Отсюда следует, что набор элементов $\{\xi_k = (A^{-1/2} v_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов задачи (6). Теорема доказана. $\square$

4. Теорема о спектре оператора $\mathcal{A}$. Пусть $\lambda_k = \lambda_k(A^{-1})$, $u_k = u_k(A^{-1})$ ($k \in \mathbb{N}$) — k -е собственное значение и соответствующий ему нормированный к единице собственный элемент оператора A^{-1} (напомним, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$). Тогда u_k — собственный элемент операторного пучка $L(\lambda)$, и спектр задачи (7), а значит, и спектр оператора $\mathcal{A}$ (см. (5)–(6)) могут быть полностью найдены из следующей последовательности характеристических уравнений:

$$\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} = \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Здесь и далее $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^*$ и $\mathcal{G}$ будем также понимать как вектор-столбец, вектор-строку и матрицу соответственно, действующие в $\mathbb{C}^{m+1}$.

Определим характеристические функции

$$\begin{aligned} g_k(\lambda) &:= \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} - \lambda\lambda_k \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} - \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ g_\infty(\lambda) &:= \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} \equiv -\frac{1}{\lambda} \left[\sum_{l=0}^m \beta_l - \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l b_l}{b_l - \lambda} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначим через γ_p ($p = \overline{1, m}$) корни уравнения $g_\infty(\lambda) = 0$. Простые геометрические рассуждения показывают, что $\gamma_p \in (b_{p-1}, b_p)$ ($p = \overline{1, m}$, $b_0 := 0$), $g'_\infty(\gamma_p) > 0$ ($p = \overline{1, m}$).

Обозначим через $\lambda_k^{(p)}$ ($p = \overline{1, m+2}$) корни уравнения $g_k(\lambda) = 0$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Можно проверить, что это уравнение всегда имеет m действительных корней $\lambda_k^{(p)} \in (\gamma_p, b_p)$ ($p = \overline{1, m}$) и еще два корня. Если $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m}$), то $g'_k(\lambda_k^{(p)}) > 0$. Оставшиеся два корня $\lambda_k^{(m+1)}$ и $\lambda_k^{(m+2)}$ являются комплексно сопряженными начиная с некоторого номера k_0 . В силу конечной кратности собственных значений оператора A^{-1} легко видеть также, что может быть только конечное количество номеров $k \in \mathbb{N}$ при которых характеристическое уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратные (действительные) корни.

Применение асимптотических методов к уравнениям (16) приводит к следующей теореме.

Теорема 3. Спектр оператора $\mathcal{A}$ (или пучка $L(\lambda)$) расположен в правой открытой полуплоскости и в $\mathbb{C} \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ состоит из изолированных конечнократных собственных значений, которые расположены симметрично относительно действительной полуоси. Все собственные значения можно разбить на $(m+2)$ серии $\{\lambda_k^{(p)}\}_{k=1}^\infty$ ($p = \overline{1, m}$), $\{\lambda_k^{(m+1)}\}_{k=1}^\infty := \{\lambda_k^{(+i\infty)}\}_{k=1}^\infty$, $\{\lambda_k^{(m+2)}\}_{k=1}^\infty := \{\lambda_k^{(-i\infty)}\}_{k=1}^\infty$ со следующим асимптотическим поведением:

$$\begin{aligned} \lambda_k^{(p)} &= \gamma_p + \frac{\gamma_p}{g'_\infty(\gamma_p)} \lambda_k(A^{-1}) + O(\lambda_k^2(A^{-1})), \quad k \rightarrow +\infty, \quad p = 1, 2, \dots, m, \\ \lambda_k^{(\pm i\infty)} &= \pm i\alpha^{1/2} \lambda_k^{-1/2}(A^{-1}) + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l b_l}{2\alpha} + O(\lambda_k^{1/2}(A^{-1})), \quad k \rightarrow +\infty, \quad \alpha := \sum_{l=0}^m \beta_l. \end{aligned}$$

5. Некоторые леммы о системах векторов в $\mathbb{C}^{m+2}$. В соответствии с теоремой 2 собственные элементы оператора $\mathcal{A}$, после группировки по сериям (см. теорему 3), могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_k^{(p)} &= (A^{-1/2}u_k; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}u_k)^\tau = (\lambda_k^{1/2}(A^{-1}); (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q})^\tau u_k \equiv \\ &\equiv \left(\lambda_k^{1/2}(A^{-1}); \frac{-\beta_0^{1/2}}{\lambda_k^{(p)}}; \frac{\beta_1^{1/2}}{b_1 - \lambda_k^{(p)}}; \dots; \frac{\beta_m^{1/2}}{b_m - \lambda_k^{(p)}} \right)^\tau u_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

В связи с этой формулой докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 4. Пусть $J := \text{diag}(1, -I)$ — матрица в $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{m+1}$,

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(p)} &:= R_{k,p}(\lambda_k^{1/2}(A^{-1}); (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q})^\tau, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ R_{k,p} &:= \begin{cases} [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2}, & p = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ [2\lambda_k(A^{-1})]^{-1/2}, & p = m+1, m+2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

При всех $p, q = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$ имеют место следующие формулы:

$$(J\varphi_k^{(p)}, \varphi_k^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0, \quad \lambda_k^{(p)} \neq \overline{\lambda_k^{(q)}}; \quad (J\varphi_k^{(p)}, \overline{\varphi_k^{(p)}})_{\mathbb{C}^{m+2}} = -g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2. \quad (19)$$

Доказательство. При $\lambda_k^{(p)} \neq \overline{\lambda_k^{(q)}}$ из (16), (17), равенства $g_k(\lambda_k^{(p)}) = 0$ и тождества Гильберта находим

$$\begin{aligned} (J\varphi_k^{(p)}, \varphi_k^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= R_{k,p}R_{k,q} \left[\lambda_k - ((\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}, (\mathcal{G} - \lambda_k^{(q)})^{-1}\mathcal{Q})_{\mathbb{C}^{m+1}} \right] = \\ &= R_{k,p}R_{k,q} \left[\lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1}(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q} \right] = \\ &= R_{k,p}R_{k,q} \left[\lambda_k - \frac{1}{\overline{\lambda_k^{(q)}} - \lambda_k^{(p)}} \left[\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q} \right] \right] = \\ &= R_{k,p}R_{k,q} \left[\lambda_k - \frac{1}{\overline{\lambda_k^{(q)}} - \lambda_k^{(p)}} \left[\overline{\lambda_k^{(q)}}\lambda_k - \lambda_k^{(p)}\lambda_k \right] \right] = 0. \end{aligned}$$

Далее, из (16) имеем

$$(J\varphi_k^{(p)}, \overline{\varphi_k^{(p)}})_{\mathbb{C}^{m+2}} = R_{k,p}^2 \left[\lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-2}\mathcal{Q} \right] = -g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 5. Пусть $M_k := M_k(\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}, \dots, \varphi_k^{(m+2)})$ ($k \in \mathbb{N}$) — матрица, столбцами которой являются векторы $\varphi_k^{(p)}$ ($p = \overline{1, m+2}$). Имеют место следующие утверждения.

1. Существует такое $C_1 > 0$, что $\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq C_1$ при всех $k \in \mathbb{N}$.
2. Если $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$), то $\det M_k \neq 0$.
3. В условиях п. 2 существует такое $C_2 > 0$, что $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq C_2$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из теоремы 3 несложно вывести, что нормы $\|\varphi_k^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}$ равномерно ограничены по $p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда и из оценки

$$\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq \left[\sum_{p=1}^{m+2} \|\varphi_k^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}^2 \right]^{1/2}$$

следует первое утверждение леммы.

Далее, с помощью формул (18), (19) из леммы 4 найдем, что

$$M_k^\tau J M_k = -\text{diag} \left(g'_k(\lambda_k^{(1)})R_{k,1}^2, g'_k(\lambda_k^{(2)})R_{k,2}^2, \dots, g'_k(\lambda_k^{(m+2)})R_{k,m+2}^2 \right).$$

Отсюда следует, что

$$(-1)^{m+1} (\det M_k)^2 = \det M_k^\tau J M_k = (-1)^{m+2} \prod_{p=1}^{m+2} g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2;$$

учитывая (18) и соотношения $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$), находим

$$(\det M_k)^2 = -1 \cdot \frac{-g'_k(\lambda_k^{(m+1)})}{2\lambda_k} \cdot \frac{-g'_k(\lambda_k^{(m+2)})}{2\lambda_k} \cdot \prod_{p=1}^m \frac{g'_k(\lambda_k^{(p)})}{g'_\infty(\gamma_p)} \neq 0.$$

Далее, с использованием (16), (17), теоремы 3 и (16) получаем

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\det M_k)^2 = - \prod_{p=1}^m \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{g'_k(\lambda_k^{(p)})}{g'_\infty(\gamma_p)} \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-g'_k(\lambda_k^{(m+1)})}{2\lambda_k} \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-g'_k(\lambda_k^{(m+2)})}{2\lambda_k} = -1.$$

Отсюда, из п. 1 и оценки

$$\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq |\det M_k|^{-1} \|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{m+1}$$

(см. [5, гл. 1, § 4, п. 2, формула (4.12)]) следует третье утверждение в лемме. Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. Система векторов

$$\begin{aligned} \varphi_\infty^{(p)} &:= [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2} (0; (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \mathcal{Q})^\tau, & p = \overline{1, m}, \\ \varphi_\infty^{(m+1)} &\equiv \varphi_\infty^{(+i\infty)} := 2^{-1/2} (1; +i\alpha^{-1/2} \mathcal{Q})^\tau, \\ \varphi_\infty^{(m+2)} &\equiv \varphi_\infty^{(-i\infty)} := 2^{-1/2} (1; -i\alpha^{-1/2} \mathcal{Q})^\tau, & \alpha = \sum_{l=0}^m \beta_l. \end{aligned} \quad (20)$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{m+1}$.

Доказательство проводится, как и в лемме 4, прямой проверкой с учетом (16), (17), $g_\infty(\gamma_p) = 0$ и тождества Гильберта. $\square$

Лемма 7. Пусть $M_\infty := M_\infty(\varphi_\infty^{(1)}, \varphi_\infty^{(2)}, \dots, \varphi_\infty^{(m+2)})$ — матрица, столбцами которой являются векторы $\varphi_\infty^{(p)}$ ($p = \overline{1, m+2}$). Тогда $M_\infty^* = M_\infty^{-1}$.

Доказательство проводится прямой проверкой с использованием леммы 6. $\square$

Замечание 4. Система (20) является предельной для системы (18) при $k \rightarrow +\infty$. Далее из системы (20) и собственных элементов оператора A будет сконструирован ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$. Дальнейшая идея состоит в том, чтобы оценить уклонение системы собственных (а в вырожденном случае — системы корневых) элементов оператора $\mathcal{A}$ от построенного ортонормированного базиса пространства $\mathcal{H}$.

В связи с замечанием 4 докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 8. Существует такое $C > 0$, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\|M_k - M_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq C [\lambda_k(A^{-1})]^{1/2}.$$

Доказательство. Как и в лемме 5 воспользуемся следующей формулой:

$$\|M_k - M_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq \left[\sum_{p=1}^{m+2} \|\varphi_k^{(p)} - \varphi_\infty^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}^2 \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Из (18), (20), теоремы 3 при $p = \overline{1, m}$ и тождества Гильберта имеем

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(p)} - \varphi_\infty^{(p)} &= [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2} \left(\lambda_k^{1/2}; \left[(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} - (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \right] \mathcal{Q} \right)^\tau = \\ &= [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2} \left(\lambda_k^{1/2}; [\lambda_k^{(p)} - \gamma_p] (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \mathcal{Q} \right)^\tau = \\ &= \lambda_k^{1/2} \cdot [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2} \left(1; \lambda_k^{1/2} \left[\frac{\gamma_p}{g'_\infty(\gamma_p)} + O(\lambda_k) \right] (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \mathcal{Q} \right)^\tau \end{aligned}$$

при $k \rightarrow +\infty$. Отсюда следует, что существует такое $C_p > 0$, что

$$\|\varphi_k^{(p)} - \varphi_\infty^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}} \leq C_p [\lambda_k(A^{-1})]^{1/2}, \quad p = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Из (18), (20), теоремы 3 при $p = m + 1$ и тождества Гильберта имеем

$$\begin{aligned}\varphi_k^{(m+1)} - \varphi_\infty^{(m+1)} &= \frac{1}{2^{1/2}} \left(0; \left[\frac{1}{\lambda_k^{1/2}} (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+1)})^{-1} - i\alpha^{-1/2} I \right] \mathcal{Q} \right)^\tau = \\ &= \frac{1}{2^{1/2}} \left(0; \left[I - i\alpha^{-1/2} \lambda_k^{1/2} (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+1)}) \right] (\lambda_k^{1/2} \mathcal{G} - \lambda_k^{1/2} \lambda_k^{(m+1)})^{-1} \mathcal{Q} \right)^\tau = \\ &= \lambda_k^{1/2} \cdot \frac{1}{2^{1/2}} \left(0; \left[\frac{i\alpha^{-3/2}}{2} \sum_{l=1}^m \beta_l b_l I - i\alpha^{-1/2} \mathcal{G} + O(\lambda_k^{1/2}) \right] (\lambda_k^{1/2} \mathcal{G} - \lambda_k^{1/2} \lambda_k^{(m+1)})^{-1} \mathcal{Q} \right)^\tau\end{aligned}$$

при $k \rightarrow +\infty$. Аналогичные вычисления справедливы и при $p = m + 2$. Таким образом, имеют место неравенства (22) при $p = m + 1$ и $p = m + 2$. Теперь из (21) и (22) следует утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

6. О p -базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$. Следствием лемм 6 и 7 является следующее утверждение.

Лемма 9. Система элементов $\{\xi_{k,\infty}^{(p)} := \varphi_\infty^{(p)} u_k\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$ является ортонормированным базисом пространства $\mathcal{H}$.

Доказательство. Ортонормированность введенной системы следует из леммы 6 и ортонормированности системы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$. Покажем, что введенная система полна в $\mathcal{H}$. Пусть существует такой $\xi = (v; v_0; v_1; \dots; v_m)^\tau \in \mathcal{H}$, что $(\xi_{k,\infty}^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0$ при всех $p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что

$$M_\infty^\tau ((u_k, v)_H, (u_k, v_0)_H, (u_k, v_1)_H, \dots, (u_k, v_m)_H)^\tau = 0$$

при $k \in \mathbb{N}$. Отсюда, из леммы 7 и из полноты системы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ в пространстве H тогда получим, что $v = v_0 = v_1 = \dots = v_m = 0$, т.е. $\xi = 0$. Лемма доказана. $\square$

С помощью набора матриц S_k ($k \in \mathbb{N}$), действующих в $\mathbb{C}^{m+2}$, определим оператор $\mathcal{S}$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, по следующей формуле:

$$\mathcal{S}\xi := \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\xi_{k,\infty}^{(1)}, \dots, \xi_{k,\infty}^{(m+2)} \right) S_k \begin{pmatrix} (\xi, \xi_{k,\infty}^{(1)})_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ (\xi, \xi_{k,\infty}^{(m+2)})_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} := \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\sum_{p=1}^{m+2} \xi_{k,\infty}^{(p)} \sum_{q=1}^{m+2} S_k^{pq} (\xi, \xi_{k,\infty}^{(q)})_{\mathcal{H}} \right]$$

и будем писать при этом $\mathcal{S} \leftrightarrow S_k$.

Лемма 10. Имеют место следующие утверждения.

1. $\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|S_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}$.
2. Пусть $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Если $\mathcal{S} \leftrightarrow S_k$, то $\mathcal{S}^* \leftrightarrow S_k^*$.
3. Пусть $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, тогда $\mathcal{ST} \leftrightarrow S_k T_k$. В частности, $\mathcal{S}^{-1} \leftrightarrow S_k^{-1}$.

Доказательство. Лемма доказывается непосредственной проверкой с использованием ортонормированности системы $\{\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$. $\square$

Основываясь на доказанных фактах, установим две теоремы: о p -базисности специальным образом нормированной системы собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ в невырожденном случае и о p -базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ в вырожденном случае.

Теорема 4. Пусть $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$). Тогда система собственных элементов $\{\xi_k^{(p)} := \varphi_k^{(p)} u_k\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$ оператора $\mathcal{A}$ образует базис Рисса в $\mathcal{H}$. Если $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$ при некотором $q > 0$, то система собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ образует p -базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ при $p \geq 2q$.

Доказательство. Положим $\mathcal{S} \leftrightarrow S_k := M_\infty^* M_k$ и покажем, что $\mathcal{S}\xi_{l,\infty}^{(q)} = \xi_l^{(q)}$ при $q = \overline{1, m+2}$, $l \in \mathbb{N}$. Учитывая, что $S_k^{pq} = (\overline{\varphi_\infty^{(p)}, \varphi_k^{(q)}})_{\mathbb{C}^{m+2}}$ и $(\xi_l^{(q)}, \xi_{k,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}} = 0$ при $l \neq k$, вычислим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\xi_{l,\infty}^{(q)} &= (\xi_{l,\infty}^{(1)}, \dots, \xi_{l,\infty}^{(m+2)}) M_\infty^* M_l (0, \dots, 0, 1_q, 0, \dots, 0)^\tau = \\ &= (\xi_{l,\infty}^{(1)}, \dots, \xi_{l,\infty}^{(m+2)}) \left((\overline{\varphi_\infty^{(1)}, \varphi_l^{(q)}})_{\mathbb{C}^{m+2}}, \dots, (\overline{\varphi_\infty^{(m+2)}, \varphi_l^{(q)}})_{\mathbb{C}^{m+2}} \right)^\tau = \\ &= \sum_{p=1}^{m+2} (\overline{\varphi_\infty^{(p)}, \varphi_l^{(q)}})_{\mathbb{C}^{m+2}} \xi_{l,\infty}^{(p)} = \sum_{p=1}^{m+2} (\varphi_l^{(q)}, \varphi_\infty^{(p)})_{\mathbb{C}^{m+2}} \xi_{l,\infty}^{(p)} = \\ &= \sum_{p=1}^{m+2} (\xi_l^{(q)}, \xi_{l,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}} \xi_{l,\infty}^{(p)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} (\xi_l^{(q)}, \xi_{k,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}} \xi_{k,\infty}^{(p)} = \xi_l^{(q)}. \end{aligned}$$

Из леммы 10, условия $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$), лемм 5 и 7 следует, что оператор $\mathcal{S}$ непрерывно обратим: $\mathcal{S}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Отсюда и из леммы 9 тогда следует, что система элементов $\{\xi_k^{(p)}\}_{p=\overline{1, m+2}, k \in \mathbb{N}}$ — базис Рисса пространства $\mathcal{H}$. Для доказательства теоремы остается показать, что $\mathcal{S} = \mathcal{I} + \mathcal{T}$, где $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ при $p \geq 2q$.

Положим $T_k := M_k - M_\infty$; тогда с учетом лемм 7 и 10 получим

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\leftrightarrow M_\infty^* M_k = M_\infty^* (M_\infty + T_k) = I + M_\infty^* T_k \leftrightarrow \mathcal{I} + \mathcal{T}, \\ \mathcal{T}^* \mathcal{T} &\leftrightarrow (T_k^* M_\infty)(M_\infty^* T_k) = T_k^* T_k. \end{aligned}$$

Обозначим через $\lambda_k((\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{1/2})$ и $\lambda_k((T_k^* T_k)^{1/2})$ собственные значения оператора $(\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{1/2}$ и матрицы $(T_k^* T_k)^{1/2}$ соответственно, занумерованные в порядке убывания и с учетом кратности. Тогда из последних соотношений и леммы 9 получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{+\infty} \lambda_r^p((\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{1/2}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{m+2} \lambda_l^p((T_k^* T_k)^{1/2}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{m+2} [\lambda_l(T_k^* T_k)]^{p/2} \leq \\ &\leq (m+2) \sum_{k=1}^{+\infty} [\lambda_{\max}(T_k^* T_k)]^{p/2} = (m+2) \sum_{k=1}^{+\infty} \|T_k^* T_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{p/2} \leq \\ &\leq (m+2) \sum_{k=1}^{+\infty} \|T_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^p \leq (m+2) C^p \sum_{k=1}^{+\infty} [\lambda_k(A^{-1})]^{p/2} < +\infty \end{aligned}$$

при $p/2 \geq q$, так как $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$. Следовательно, $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ при $p \geq 2q$. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда при некотором $k \in \mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратный корень. В этом случае может быть один или два двукратных корня либо один трехкратный корень.

Разберем случай двукратного корня. В этом случае при некоторых $k \in \mathbb{N}$ (таких номеров конечное количество) будет либо $\lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$, либо $\lambda_k^{(p_1)} = \lambda_k^{(m+1)}$, $\lambda_k^{(p_2)} = \lambda_k^{(m+2)}$ при некоторых $p_1, p_2 \in \{1, \dots, m\}$. Не ограничивая общности, предположим первую ситуацию. Пусть u — это первый присоединенный элемент к собственному элементу u_k пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(m+2)}$ (см. определение 2). Тогда $L'(\lambda_k^{(m+2)})u_k = g'_k(\lambda_k^{(m+2)})u_k = 0$ и

$$L'(\lambda_k^{(m+2)})u_k + L(\lambda_k^{(m+2)})u = g'_k(\lambda_k^{(m+2)})u_k + L(\lambda_k^{(m+2)})u = L(\lambda_k^{(m+2)})u = 0.$$

Таким образом, в качестве первого присоединенного к u_k элемента можно взять элемент u_k .

Пусть $\xi_{k0}^{(m+2)} = (\lambda_k^{1/2} u_k; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1} \mathcal{Q} u_k)^\tau$ — собственный элемент оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению $\lambda_k^{(m+2)}$ (см. теорему 2). Вычислим в соответствии с теоремой 2 присоединенный элемент η_1 оператора $\mathcal{A}$. Поскольку присоединенный элемент определяется с точностью

до собственного элемента, то можно считать, что

$$\xi_{k1}^{(m+2)} = \eta_1 - \xi_{k0}^{(m+2)} = (0, (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2} \mathcal{Q} u_k)^\tau.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет следующую цепочку из собственного и присоединенного к нему элемента:

$$\begin{aligned} \xi_{k0}^{(m+2)} &= (\lambda_k^{1/2}, (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1} \mathcal{Q})^\tau u_k =: \varphi_{k0}^{(m+2)} u_k, \\ \xi_{k1}^{(m+2)} &= (0, (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2} \mathcal{Q})^\tau u_k =: \varphi_{k1}^{(m+2)} u_k. \end{aligned} \quad (23)$$

Разберем теперь ситуацию, когда при некотором $k \in \mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет трехкратный корень. В этом случае при некотором $p \in \{1, \dots, m\}$ будет $\lambda_k^{(p)} = \lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$. Пусть u — это второй присоединенный элемент к собственному элементу u_k пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(p)}$. Тогда

$$\begin{aligned} L''(\lambda_k^{(p)}) u_k &= g_k''(\lambda_k^{(p)}) u_k = g_\infty''(\lambda_k^{(p)}) u_k = 0, \quad L'(\lambda_k^{(p)}) u_k = g_k'(\lambda_k^{(p)}) u_k = 0, \\ \frac{1}{2} L''(\lambda_k^{(p)}) u_k + L'(\lambda_k^{(p)}) u_k + L(\lambda_k^{(p)}) u &= \frac{1}{2} g_\infty''(\lambda_k^{(p)}) u_k + g_k'(\lambda_k^{(p)}) u_k + L(\lambda_k^{(p)}) u = L(\lambda_k^{(p)}) u = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в качестве второго присоединенного к u_k элемента можно взять элемент u_k .

Вычислим, в соответствии с теоремой 2, первый η_1 и второй η_2 присоединенные элементы оператора $\mathcal{A}$. Легко проверить, что цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов будет также $\xi_{k0}^{(p)}, \xi_{k1}^{(p)} := \eta_1 - \xi_{k0}^{(p)}, \xi_{k2}^{(p)} := \eta_2 - \eta_1$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \xi_{k0}^{(p)} &= (\lambda_k^{1/2}, (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q})^\tau u_k =: \varphi_{k0}^{(p)} u_k, \\ \xi_{k1}^{(p)} &= (0, (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-2} \mathcal{Q})^\tau u_k =: \varphi_{k1}^{(p)} u_k, \\ \xi_{k2}^{(p)} &= (0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-3} \mathcal{Q})^\tau u_k =: \varphi_{k2}^{(p)} u_k. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее будем считать, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ нормируется следующим образом: если собственный элемент не имеет присоединенного, то он выбирается по формуле из теоремы 2; если собственный элемент имеет один или два присоединенных элемента, то соответствующая цепочка выбирается по формуле (23) или (24) соответственно.

Отметим, что собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, имеющих один или два присоединенных элемента может быть лишь конечное количество.

Теорема 5. Система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$, нормированных специальным образом, образует базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}$. Если $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$ при некотором $q > 0$, то система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ образует p -базис в пространстве $\mathcal{H}$ при $p \geq 2q$.

Доказательство. Покажем сначала, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ полна в $\mathcal{H}$. Рассмотрим для простоты ситуацию, когда у оператора $\mathcal{A}$ есть одно собственное значение $\lambda_s^{(p)}$, которому отвечает цепочка из собственного и одного или двух присоединенных элементов. Проведем доказательство в несколько этапов.

1. Пусть собственному значению $\lambda_s^{(m+2)}$ оператора $\mathcal{A}$ отвечает цепочка из собственного и присоединенного к нему элемента, определяемых по формулам (23). Предположим, что рассматриваемая система не полна в $\mathcal{H}$ и существует такой $\xi = (v, v_0, v_1, \dots, v_m)^\tau \in \mathcal{H}$, что

$$\begin{aligned} (\xi_k^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} &= 0, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, \\ (\xi_s^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} &= 0, \quad p = \overline{1, m}, \quad (\xi_{s0}^{(m+2)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0, \quad (\xi_{s1}^{(m+2)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Первая строчка в (25) означает, что

$$M_k^\tau((u_k, v)_H, (u_k, v_0)_H, (u_k, v_1)_H, \dots, (u_k, v_m)_H)^\tau = 0$$

при $k = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots$ (см. лемму 5). Отсюда следует, что

$$(u_k, v)_H = (u_k, v_0)_H = \dots = (u_k, v_m)_H = 0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{s\}. \quad (26)$$

Вторая строчка в (25) означает, что

$$M_{s,1}^\tau ((u_s, v)_H, (u_s, v_0)_H, (u_s, v_1)_H, \dots, (u_s, v_m)_H)^\tau = 0,$$

где $M_{s,1} = M_{s,1}(\varphi_s^{(1)}, \varphi_s^{(2)}, \dots, \varphi_s^{(m)}, \varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})$ — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что $\det M_{s,1} \neq 0$; тогда из последней системы, соотношений (26) и полноты в H системы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ получим, что $v = v_0 = v_1 = \dots = v_m = 0$, т.е. $\xi = 0$.

Пусть, как и в лемме 4 $J = \text{diag}(1, -I)$. Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} (J\varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s0}^{(m+2)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= 0, \quad (J\varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{2} g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) \neq 0, \\ (J\varphi_{s1}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -\frac{1}{3!} g_s'''(\lambda_s^{(m+2)}). \end{aligned} \quad (27)$$

Для дальнейших вычислений понадобится формула, которая может быть получена последовательным дифференцированием тождества Гильберта:

$$(\mathcal{G} - \lambda)^{-n} (\mathcal{G} - \mu)^{-1} = \frac{1}{(\mu - \lambda)^n} (\mathcal{G} - \mu)^{-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\mu - \lambda)^{k+1}} (\mathcal{G} - \lambda)^{-(n-k)}, \quad \mu, \lambda \in \rho(\mathcal{G}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Используя соотношения $g_s(\lambda_s^{(p)}) = 0$ ($p = \overline{1, m}$) (см. (17)), $g_s(\lambda_s^{(m+2)}) = g_s'(\lambda_s^{(m+2)}) = 0$, формулы (28) при $n = 2$, можно найти, что при всех $p = \overline{1, m}$

$$\begin{aligned} (J\varphi_s^{(p)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -R_{s,p}((\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1} \mathcal{Q} (\mathcal{G} - \lambda_s^{(m+2)})^{-2} \mathcal{Q})_{\mathbb{C}^{m+1}} = \\ &= -R_{s,p} \mathcal{Q}^* (\mathcal{G} - \lambda_s^{(m+2)})^{-2} (\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1} \mathcal{Q} = \\ &= -R_{s,p} \mathcal{Q}^* \left[\frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^2} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m+2)})^{-2}}{\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)}} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m+2)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^2} \right] \mathcal{Q} = \\ &= -R_{s,p} \left[\frac{\lambda_s^{(p)} \lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^2} - \frac{\lambda_k}{\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)}} - \frac{\lambda_s^{(m+2)} \lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (27) и (29) найдем, что

$$\begin{aligned} M_{s,1}^\tau J M_{s,1} &= \begin{pmatrix} -g_s'(\lambda_s^{(1)}) R_{s,1}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -g_s'(\lambda_s^{(2)}) R_{s,2}^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2!} g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2!} g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) & -\frac{1}{3!} g_s'''(\lambda_s^{(m+2)}) \end{pmatrix}, \\ (-1)^{m+1} (\det M_{s,1})^2 &= \det M_{s,1}^\tau J M_{s,1} = (-1)^{m+1} \left[\frac{1}{2!} g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) \right]^2 \prod_{p=1}^m g_s'(\lambda_s^{(p)}) R_{s,p}^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\det M_{s,1} \neq 0$.

2. Пусть теперь собственному значению $\lambda_s^{(p)}$ оператора $\mathcal{A}$ отвечает цепочка из собственного и двух присоединенных элементов, определяемых по формулам (24). Не ограничивая общности можно считать, что $p = m$. Предположим, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ не полна в $\mathcal{H}$ и существует такой $\xi = (v, v_0, v_1, \dots, v_m)^\tau \in \mathcal{H}$, что

$$\begin{aligned} (\xi_k^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} &= 0, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, \\ (\xi_s^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} &= 0, \quad p = \overline{1, m-1}, \quad (\xi_{s0}^{(m)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0, \quad (\xi_{s1}^{(m)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0, \quad (\xi_{s2}^{(m)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Первая строка в (30), как и выше, влечет (26); вторая строка означает, что

$$M_{s,2}^\tau ((u_s, v)_H, (u_s, v_0)_H, (u_s, v_1)_H, \dots, (u_s, v_m)_H)^\tau = 0,$$

где $M_{s,2} = M_{s,2}(\varphi_s^{(1)}, \dots, \varphi_s^{(m-1)}, \varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s1}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)})$ — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что $\det M_{s,2} \neq 0$; тогда из последней системы, соотношений (26) и полноты в H системы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ получим, как и выше, что $v = v_0 = v_1 = \dots = v_m = 0$ и, значит, $\xi = 0$.

Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} (J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s0}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= 0, \quad (J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s1}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0, \\ (J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= (J\varphi_{s1}^{(m)}, \varphi_{s1}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{3!} g_s'''(\lambda_s^{(m)}) \neq 0, \\ (J\varphi_{s1}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -\frac{1}{4!} g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}), \quad (J\varphi_{s2}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{5!} g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)}), \\ (J\varphi_s^{(p)}, \varphi_{s1}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= 0, \quad p = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь последнее соотношение выводится также как в (29). Далее, с использованием соотношений

$$g_s(\lambda_s^{(p)}) = 0, \quad (p = \overline{1, m-1}), \quad g_s'(\lambda_s^{(m)}) = g_s''(\lambda_s^{(m)}) = 0$$

(см. (17)), формулы (28) при $n = 3$ можно найти, что при всех $p = \overline{1, m-1}$

$$\begin{aligned} (J\varphi_s^{(p)}, \varphi_{s2}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= \\ &= -R_{s,p}((\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}, (\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}\mathcal{Q})_{\mathbb{C}^{m+1}} = -R_{s,p}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q} = \\ &= -R_{s,p}\mathcal{Q}^* \left[\frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}}{\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)}} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-2}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^2} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} \right] \mathcal{Q} = \\ &= -R_{s,p} \left[\frac{\lambda_s^{(p)} \lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} - \frac{\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^2} - \frac{\lambda_s^{(m)} \lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^3} \right] = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Из (31) и (32) найдем, что

$$\begin{aligned} M_{s,2}^\tau J M_{s,2} &= \begin{pmatrix} -g_s'(\lambda_s^{(1)})R_{s,1}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_s'(\lambda_s^{(2)})R_{s,2}^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{3!} g_s'''(\lambda_s^{(m)}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{3!} g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!} g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}) \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{3!} g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!} g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{5!} g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)}) \end{pmatrix}, \\ (-1)^{m+1} (\det M_{s,2})^2 &= \det M_{s,2}^\tau J M_{s,2} = (-1)^{m-1} \left[\frac{1}{3!} g_s'''(\lambda_s^{(m)}) \right]^{3m-1} \prod_{p=1}^{m-1} g_s'(\lambda_s^{(p)}) R_{s,p}^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\det M_{s,2} \neq 0$, и система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ полна в $\mathcal{H}$.

3. Построим теперь, как и в теореме 4, оператор $\mathcal{S} \leftrightarrow S_k := M_\infty^* M_k$ с заменой вырожденных матриц M_s на какие либо невырожденные. При этом оператор $\mathcal{S}$ будет непрерывно обратим и по-прежнему представим в виде $\mathcal{S} = \mathcal{I} + \mathcal{T}$, где $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ ($p \geq 2q$), так как вырожденных матриц M_s может быть лишь конечное количество. Таким образом, система $\{\mathcal{S}\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$ есть p -базис ($p \geq 2q$) пространства $\mathcal{H}$, который отличается от системы специальным образом нормированных корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ лишь на конечное количество элементов. Отсюда следует, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$, учитывая ее полноту, есть также p -базис ($p \geq 2q$) пространства $\mathcal{H}$. Теорема доказана. $\square$

В качестве следствия из леммы 4 и теоремы 4 (невырожденный случай) сформулируем следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$ ($q > 0$) и $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$). Тогда система

$$\xi_k^{(p)} := R_{k,p}(\lambda_k^{1/2}(A^{-1}), (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q})^\tau u_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$R_{k,p} := \begin{cases} [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2}, & p = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ [2\lambda_k(A^{-1})]^{-1/2}, & p = m+1, m+2, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ образует p -базис пространства $\mathcal{H}$ при $p \geq 2q$, согласно теореме 4, и имеет следующую биортогональную систему:

$$\zeta_k^{(p)} := -[g'_k(\overline{\lambda_k^{(p)}})R_{k,p}]^{-1}(\lambda_k^{1/2}(A^{-1}), -(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(p)}})^{-1}\mathcal{Q})^\tau u_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Теорема доказывается непосредственной проверкой. $\square$

7. Представление решения интегро-дифференциального уравнения. Предположим, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$ ($q > 0$) и собственные элементы оператора $\mathcal{A}$ не имеют присоединенных. Пусть $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, а функция $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда по теореме 1 задача Коши (1) имеет единственное сильное решение $u(t)$, а построенная по функции $u(t)$ функция $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (4) (см. замечание 1). С использованием теоремы 6 это решение $\xi(t)$ представимо в следующем виде:

$$\xi(t) = \mathcal{U}(t)\xi^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}(s)ds, \quad \mathcal{U}(t)\xi^0 := \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} e^{-\lambda_k^{(p)}t} (\xi^0, \zeta_k^{(p)})_{\mathcal{H}} \xi_k^{(p)}. \quad (33)$$

Далее, проведя ряд громоздких, но несложных вычислений с использованием в (33) формул из теоремы 6, формул для ξ^0 , $\mathcal{F}(t)$, $\xi(t)$ и связи $u(t) = \beta_0^{-1/2}A^{-1/2}v_0(t)$ (см. (3)), получим формулу для решения задачи Коши (1):

$$u(t) = \mathcal{C}(t)u^0 + \mathcal{S}(t)u^1 + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)f(s)ds, \quad (34)$$

где

$$\mathcal{C}(t)u^0 := \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} \frac{\lambda_k(A^{-1})e^{-\lambda_k^{(p)}t}}{\lambda_k^{(p)}g'_k(\lambda_k^{(p)})} \left[-\lambda_k^{(p)}\lambda_k(A^{-1}) + \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{-l}e^{-(b_l-\lambda_k^{(p)})t}}{b_l(b_l-\lambda_k^{(p)})} \right] (Au^0, u_k)_H u_k,$$

$$\mathcal{S}(t)u^1 := \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} \frac{\lambda_k(A^{-1})e^{-\lambda_k^{(p)}t}}{\lambda_k^{(p)}g'_k(\lambda_k^{(p)})} \lambda_k^{1/2}(A^{-1})(A^{1/2}u^1, u_k)_H u_k.$$

8. Приложения. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2 , $\rho(x)$ — непрерывная положительная и отделенная от нуля функция в $\overline{\Omega}$, μ, η — некоторые положительные константы. Пусть $H := L_2(\Omega, \rho)$ — векторное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ с весом $\rho(x)$. Определим в H оператор

$$Au := -\frac{1}{\rho(x)} \left(\mu \Delta u + \left(\eta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla \operatorname{div} u \right), \quad \mathcal{D}(A) := \left\{ u \in L_2(\Omega, \rho) \mid u \in W_2^2(\Omega), u = 0 \text{ на } \partial\Omega \right\};$$

тогда, как известно, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(H)$ при $p > 3/2$. В этом случае задача Коши (1) — это задача о малых движениях неоднородного изотропного вязкоупругого тела, занимающего область Ω и закрепленного на границе $\partial\Omega$, под действием малого поля внешних сил. При этом $u = u(t, x)$ — поле смещений в вязкоупругом теле, $\rho(x)$ — плотность тела, μ, η — коэффициенты Ламе, α_{-l} — структурные постоянные, b_l^{-1} — времена релаксации в системе. Система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ из (4), согласно теореме 5, образует p -базис в $\mathcal{H} = \bigoplus_{l=1}^{m+2} L_2(\Omega, \rho)$ при $p > 3$. В невырожденном случае, т.е. когда собственные элементы оператора $\mathcal{A}$ не имеют присоединенных, решение рассматриваемой задачи может быть представлено в виде (34).

Если самосопряженный положительно определенный оператор A реализован как $Au = -au^{(2)}$ ($a > 0$) с условиями Дирихле на интервале $(0, L)$, то задача Коши (1) — это задача о колебаниях вязкоупругой струны. Если оператор A реализован как $Au = au^{(4)}$ ($a > 0$) с подходящими условиями на интервале $(0, L)$, то задача Коши (1) — это задача о поперечных колебаниях вязкоупругой балки. Если оператор A реализован как $Au = a\Delta^2 u$ ($a > 0$) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с условиями жесткого защемления на достаточно гладкой границе $\partial\Omega$, то задача Коши (1) — это задача о поперечных колебаниях вязкоупругой пластины, жестко закрепленной на границе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В. В., Раутиан Н. А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС пресс, 2016.
2. Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С. Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Совр. мат. Фундам. направл. — 2011. — 39. — С. 36–65.
3. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970.
4. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
6. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кипенев: Штиинца, 1986.
7. Alabau-Boussouria F., Cannarsa P. A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. — 2009. — 347, № 15–16. — P. 867–872.
8. Dafermos C. M. Asymptotic stability in viscoelasticity// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1970. — 37. — P. 297–308.
9. Desch W., Grimmer R., Schappacher W. Some considerations for linear integrodifferential equations// J. Math. Anal. Appl. — 1984. — 104, № 1. — P. 219–234.
10. Eremenko A., Ivanov S. Spectra of the Gurtin–Pipkin-type equations// SIAM J. Math. Anal. — 2011. — 43, № 5. — P. 2296–2306.
11. Gurtin M. E., Pipkin A. C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1968. — 31, № 2. — P. 113–126.
12. Heard M. L. An abstract semilinear hyperbolic Volterra integrodifferential equation// J. Math. Anal. Appl. — 1981. — 80, № 1. — P. 175–202.
13. Kopachevsky N. D., Krein S. G. Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2. Non-Self-Adjoint Problems for Viscous Fluids. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2003.
14. Vlasov V. V., Rautian N. A. On the asymptotic behavior of solutions of integrodifferential equations in a Hilbert space// Differ. Equations. — 2013. — 49, № 6. — P. 718–730.

Закора Дмитрий Александрович

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

E-mail: dmitry.zkr@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 94–101
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-94-101

УДК 517.9

ОБ УСЛОВИЯХ ОБРАТИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2019 г. Л. Ю. КАБАНЦОВА

Аннотация. Доказана обратимость разностных операторов второго порядка с постоянными операторными коэффициентами, действующих в банаховом пространстве двусторонних векторных последовательностей при условии их равномерной инъективности (в частности, левой обратимости) либо сюръективности (в частности, правой обратимости) либо фредгольмовости.

Ключевые слова: разностный оператор второго порядка, равномерная инъективность, сюръективность, фредгольмовость, спектр, обратимость.

ON THE INVERTIBILITY CONDITIONS OF FINITE-DIFFERENCE OPERATORS

© 2019 L. YU. KABANTSOVA

ABSTRACT. The invertibility of second-order finite-difference operators with constant operator coefficients acting in the Banach space of two-sided vector sequences is proved under the condition of their uniform injectivity (in particular, left invertibility) or surjectivity (in particular, right invertibility) or Fredholm property.

Keywords and phrases: second-order finite-difference operator, uniform injectivity, surjectivity, Fredholm property, spectrum, invertibility.

AMS Subject Classification: 39A70, 47B39

1. Введение. Выяснение условий обратимости операторов на основе их более простых свойств, таких как равномерная инъективности или сюръективности, представляет теоретический и в ряде задач практический интерес. На первый взгляд кажется, что класс сюръективных операторов либо класс равномерно инъективных операторов шире класса обратимых операторов, однако это не всегда так. Исследованию данной проблемы и посвящена настоящая статья.

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство.

Определение 1.1. Замкнутый оператор $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ назовем *равномерно инъективным* (см. [2]), если существует такая постоянная $c > 0$, что $\|\mathcal{A}x\| \geq c\|x\|$ для любого вектора $x \in D(\mathcal{A})$.

Ясно, что каждый равномерно инъективный оператор инъективен. Если оператор $\mathcal{A}$ имеет левый обратный $\mathcal{B}_l$, принадлежащий банаховой алгебре $\text{End } \mathcal{X}$ линейных ограниченных операторов, т.е. $\mathcal{B}_l \mathcal{A}x = x$, $x \in D(\mathcal{A})$, то он является равномерно инъективным. Существование правого обратного $\mathcal{B}_r \in \text{End } \mathcal{X}$ (т.е. $\text{Im } \mathcal{B}_r \subset D(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}\mathcal{B}_r x = x$, $x \in \mathcal{X}$) влечет сюръективность оператора $\mathcal{A}$.

Определение 1.2. Замкнутый оператор $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ назовем *фредгольмовым*, если его образ $\text{Im } \mathcal{A}$ замкнут (т.е. $\overline{\text{Im } \mathcal{A}} = \text{Im } \mathcal{A}$), ядро $\text{Ker } \mathcal{A}$ конечномерно и коядро $\text{Coker } \mathcal{A} = Y / \text{Im } \mathcal{A}$ также конечномерно.

В случае, если оператор $\mathcal{A}$ имеет компактную резольвенту либо допускает представление $\mathcal{A} = I + \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ — компактный оператор, то инъективность оператора $\mathcal{A}$ либо его сюръективность влекут его обратимость (см. [4]). Однако, это утверждение неверно для общих операторов.

В настоящей статье исследуется проблема обратимости разностного оператора второго порядка с постоянными операторными коэффициентами, действующих в банаховом пространстве двусторонних векторных последовательностей, в условиях его равномерной инъективности, либо сюръективности, либо фредгольмовости. Основные результаты работы содержатся в трех теоремах 2.1, 2.2 и 2.3.

2. Основные результаты. Рассмотрим разностный оператор второго порядка $\mathfrak{D}_2 \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ вида

$$(\mathfrak{D}_2 x)(n) = x(n+2) + B_1 x(n+1) + B_2 x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p, \quad (1)$$

действующий в банаховом пространстве $l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty]$, двусторонних последовательностей векторов из комплексного пространства $\mathcal{X}$, суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ либо ограниченных в случае $p = \infty$. Будем считать, что $B_1, B_2 \in \text{End } \mathcal{X}$.

Разностному оператору $\mathfrak{D}_2$ соответствует характеристический многочлен (пучок операторов)

$$H : \mathbb{C} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}, \quad H(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B_1 + B_2, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Всюду предполагается, что для спектра $\sigma(H)$ пучка H выполнено условие

$$\sigma(H) \cap \mathbb{T} \neq \mathbb{T}, \quad (2)$$

где $\mathbb{T}$ — окружность $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Таким образом, условие (2) означает, что на $\mathbb{T}$ имеются точки из резольвентного множества $\rho(H)$ пучка H .

Основными результатами статьи являются следующие три теоремы.

Теорема 2.1. *Если разностный оператор $\mathfrak{D}_2 : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty]$, равномерно инъективен, то он обратим.*

Следствие 2.1. *Если оператор $\mathfrak{D}_2 : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty]$, обратим слева, то он обратим.*

Теорема 2.2. *Если разностный оператор $\mathfrak{D}_2 : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty]$, сюръективен, то он обратим.*

Следствие 2.2. *Обратимый справа оператор $\mathfrak{D}_2 : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty]$, обратим.*

Теорема 2.3. *Если разностный оператор $\mathfrak{D}_2 : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty]$, фредгольмов, то он обратим.*

Замечание 2.1. Если не выполнено условие (2) на спектр $\sigma(H)$ пучка H , то можно привести пример обратимого слева, но не обратимого разностного оператора.

3. Обратимость равномерно инъективных, сюръективных и фредгольмовых разностных операторов первого порядка. Изучению вопроса обратимости разностного оператора второго порядка при условии его равномерной инъективности либо сюръективности либо фредгольмовости предположим исследование данного вопроса для разностного оператора первого порядка.

Рассмотрим разностный оператор $\mathfrak{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ вида

$$(\mathfrak{D}x)(n) = x(n+1) - Bx(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p,$$

действующий в банаховом пространстве $l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty]$, двусторонних последовательностей векторов комплексного пространства $\mathcal{X}$, суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ либо ограниченных в случае $p = \infty$. Для любой последовательности $x \in l^p$ положим

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|x(k)\|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty), \quad \|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|x(k)\|, \quad p = \infty.$$

Всюду предполагается, что оператор B принадлежит банаховой алгебре $\text{End } \mathcal{X}$ и для спектра $\sigma(B)$ оператора B выполнено условие

$$\sigma(B) \cap \mathbb{T} \neq \mathbb{T}, \quad \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}. \quad (3)$$

Таким образом, условие (3) означает, что на $\mathbb{T}$ имеются точки из резольвентного множества $\rho(B)$ оператора B .

При доказательстве основных утверждений (теорем) используется следующее утверждение (см. [7, теорема 4.5.7], а также [1]).

Теорема 3.1. *Оператор $\mathfrak{D} : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty]$, обратим в точности тогда, когда выполнено условие*

$$\sigma(B) \cap \mathbb{T} = \emptyset,$$

т.е. спектр оператора B не пересекается с единичной окружностью.

Теорема 3.2. *Если разностный оператор $\mathfrak{D} : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty]$, равномерно инъективный, то он обратим.*

Доказательство теоремы 3.2. Пусть разностный оператор $\mathfrak{D} \in \text{End } l^p$ равномерно инъективен. Известно (см. [6]), что из равномерной инъективности оператора $\mathfrak{D}$ в банаховом пространстве l^p при некотором $p \in [1, \infty]$ следует его равномерная инъективность в банаховом пространстве l^q при любом $q \in [1, \infty]$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $p = \infty$.

Таким образом, существует такая постоянная $c > 0$, что для любого $x \in l^\infty$ выполнено неравенство

$$\|\mathfrak{D}x\|_\infty \geq c\|x\|_\infty. \quad (4)$$

Рассмотрим последовательность $x(n) = x_0\gamma^n$, где $x_0 \in \mathcal{X}$, $|\gamma| = 1$, т.е. $\gamma \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{Z}$. Применим оператор $\mathfrak{D}$ к данной последовательности:

$$(\mathfrak{D}x)(n) = x_0\gamma^{n+1} - Bx_0\gamma^n = \gamma^n(x_0\gamma I - Bx_0), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Согласно неравенству (4) имеет место оценка

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|\gamma^n(B - \gamma I)x_0\| \geq c\|x_0\|, \quad \gamma \in \mathbb{T},$$

т.е.

$$\|(B - \gamma I)x_0\| \geq c\|x_0\|, \quad \gamma \in \mathbb{T}.$$

Таким образом, операторы вида $B - \gamma I$, $\gamma \in \mathbb{T}$, равномерно инъективны с той же постоянной c .

Покажем, что на единичной окружности нет точек спектра оператора B . Предположим противное, т.е. что существует граничная точка γ_0 множества $\sigma(B) \cap \mathbb{T}$. В силу условия (3) в ее окрестности существует такая последовательность γ_n чисел из $\rho(B)$, что $\gamma_n \in \mathbb{T}$ и при этом $\gamma_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$.

Так как $\gamma_n \in \rho(B)$, то справедливо неравенство

$$\|(B - \gamma_n I)x_0\| \geq c\|x_0\| \quad \text{для любого вектора } x_0 \in \mathcal{X}.$$

Выберем $x_0 = (B - \gamma_n I)^{-1}y_0$. Тогда для произвольного $y_0 \in \mathcal{X}$ имеем

$$\|(B - \gamma_n I)^{-1}y_0\| \leq \frac{1}{c}\|y_0\|. \quad (5)$$

Представим оператор $B - \gamma_0 I$ в виде

$$B - \gamma_0 I = (B - \gamma_n I)[I - (\gamma_0 - \gamma_n)(B - \gamma_n I)^{-1}], \quad n \geq 1. \quad (6)$$

Введем обозначение

$$B_n = (\gamma_0 - \gamma_n)(B - \gamma_n I)^{-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Согласно (5)

$$\|B_n\| = |\gamma_0 - \gamma_n| \|(B - \gamma_n I)^{-1}\| \leq |\gamma_0 - \gamma_n| \frac{1}{c} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для $n \geq n_0$ справедлива оценка $\|B_n\| < 1$. Это означает, что оператор $I - B_n$ обратим. Поскольку оба сомножителя в формуле (6) обратимы, то

обратим и оператор $B - \gamma_0 I$. Это противоречит предположению, что $\gamma_0 \in \sigma(B)$ и, следовательно, $\sigma(B) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Отсюда в силу теоремы 3.1 получаем, что оператор $\mathfrak{D}$ обратим. Теорема 3.2 доказана. $\square$

Следствие 3.1. Если оператор $\mathfrak{D} : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty]$, обратим слева, то он обратим.

Замечание 3.1. Если не выполнено условие (3) на спектр оператора B , то приводится пример обратимого слева, но не обратимого разностного оператора.

Пример 3.1. Пусть X — гильбертово пространство, $U \in \text{End } X$ — любая необратимая изометрия. Оператор B определим следующим образом: $B = \beta U$, $\beta > 2$. Поскольку оператор U является изометрией, он равномерно инъективен. Оператор U обратим слева, но при этом не является обратимым. Значит, оператор B также имеет левый обратный $(B^{-1})_l$, но обратимым не является.

Рассмотрим разностный оператор $\mathfrak{D} \in \text{End } l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ вида

$$(\mathfrak{D}x)(n) = x(n+1) - Bx(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^\infty.$$

Покажем, что оператор $\mathfrak{D}$ равномерно инъективен. Рассмотрим последовательность $x_0 \in l^\infty$, являющуюся решением разностного уравнения $\mathfrak{D}x_0 = f$, где $f \in \text{Im } \mathfrak{D}$. Пусть $n_0 \in \mathbb{Z}$ — такое число, что $\|x_0(n_0)\| \geq \frac{1}{2}\|x_0\|_\infty$.

Запишем разностное соотношение для $n_0 \in \mathbb{Z}$:

$$(\mathfrak{D}x_0)(n_0) = x_0(n_0+1) - Bx_0(n_0) = f(n_0).$$

Отсюда $Bx_0(n_0) = x_0(n_0+1) - f(n_0)$; учитывая, что $\beta > 2$, получаем оценки

$$\frac{\beta}{2}\|x_0\|_\infty \leq \beta\|x_0(n_0)\| = \|Bx_0(n_0)\| \leq \|x_0\|_\infty + \|f\|_\infty.$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\|f\|_\infty = \|\mathfrak{D}x_0\|_\infty \geq (\beta/2 - 1)\|x_0\|.$$

Так как $\beta > 2$, оператор $\mathfrak{D}$ равномерно инъективен.

Однако спектр оператора B не удовлетворяет условию (3), поскольку $\sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \beta\}$ и, следовательно, $\rho(B) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Тогда в силу теоремы 3.1 приходим к выводу о необратимости разностного оператора $\mathfrak{D}$.

Покажем, что разностный оператор $\mathfrak{D} \in \text{End } l^\infty$ является обратимым слева в банаховой алгебре $\text{End } l^\infty$ и один из его левых обратных операторов имеет вид

$$((\mathfrak{D}^{-1})_l y)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_0(n-m)y(m-1), \quad y \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X}), \quad (7)$$

где функция $G_0 : \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ определяется формулой

$$G_0(k) = \begin{cases} 0, & k \geq 0, \\ -(B^{-1})_l^{-k} I, & k \leq -1. \end{cases}$$

Для нашего примера проекторнозначные функции $P, Q : \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ определяются следующим образом: $P = P(\sigma_{\text{int}}, B) = 0$, $Q = I - P = I$, так как $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| < 1\} = \emptyset$.

Проверим, что оператор $(\mathfrak{D}^{-1})_l$, задаваемый формулой (7), является левым обратным для разностного оператора $\mathfrak{D} \in \text{End } l^\infty$:

$$\begin{aligned} ((\mathfrak{D}^{-1})_l \mathfrak{D}x)(n) &= - \sum_{m=n+1}^{\infty} (B^{-1})_l^{-n+m} x(m) + \sum_{m=n+1}^{\infty} (B^{-1})_l^{-n+m} Bx(m-1) = \\ &= - \sum_{m=n+1}^{\infty} (B^{-1})_l^{-n+m} x(m) + \sum_{m=n+1}^{\infty} (B^{-1})_l^{-n+m-1} x(m-1) = x(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Теорема 3.3. Если разностный оператор $\mathfrak{D} : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty]$, сюръективен, то он обратим.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 3.3, приведем ряд понятий, используемых при доказательстве.

Пусть X, Y — банаховы пространства и $A : X \rightarrow Y$ — линейный ограниченный оператор. Положим

$$|A|_+ = \inf \{ \|Ax\| : \|x\| = 1 \}, \quad |A|_- = \sup \{ l \geq 0 : lB_Y \subseteq AB_X \},$$

где $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ и $B_Y = \{y \in Y : \|y\| \leq 1\}$ — замкнутые единичные шары в X и Y соответственно. Очевидно, что $|A|_+$ — наилучшая константа в неравенстве

$$\|Ax\| \geq |A|_+ \|x\|, \quad x \in X.$$

Таким образом,

$$|A|_+ = \sup \{ l \geq 0 : \|Ax\| \geq l\|x\| \quad \forall x \in X \}.$$

В [7] эти константы $|A|_+$ и $|A|_-$ названы наименьшими нормами; в литературе их называют *минимальным модулем* и *сюрьективным модулем* соответственно. Для наименьших норм справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.4 (см. [7, теорема 1.3.2]). Пусть $A : X \rightarrow Y$ — линейный ограниченный оператор.

1. $|A|_+ > 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Ker } A = \{0\}$ и $\text{Im } A$ замкнут (т.е. оператор A равномерно инъективен).
2. $|A|_- > 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Im } A = Y$ (т.е. оператор A сюрьективен).
3. Оператор A обратим тогда и только тогда, когда

$$|A|_+ = |A|_- = \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Доказательство теоремы 3.3. Напомним, что оператор A и его сопряженный A^* обратимы одновременно (см. [7, теорема 1.2.11]); при этом наименьшие нормы оператора $A \in \text{End } X$ и сопряженного к нему оператора $A^* \in \text{End } X^*$ удовлетворяют соотношениям

$$|A^*|_- = |A|_+, \quad |A^*|_+ = |A|_-$$

(см. [7, утверждение 1.3.4]). Эти равенства и теорема 3.4 позволяют утверждать, что если оператор сюрьективен, то сопряженный к нему равномерно инъективен.

Пусть $p \neq \infty$. Тогда сопряженным к пространству $l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ является пространство $l^{p^*} = l^{p^*}(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^*)$, где p^* — сопряженный индекс, удовлетворяющий условию $1/p + 1/p^* = 1$ (см. например, [7, теорема 1.8.11], [5, гл. 4, § 2]). Покажем, что сопряженный к разностному оператору $\mathfrak{D} : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty)$, также является разностным оператором. Запишем заданный разностный оператор в виде

$$(\mathfrak{D}x)(n) = (S - B)x(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где S — оператор сдвига последовательностей из l^p , $S \in \text{End } l^p$, действующий по правилу $(Sx)(n) = x(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Имеют место равенства

$$\mathfrak{D}^* = (S - B)^* = S^* - B^*, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оператор сдвига $S : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty)$, действующий в пространстве двусторонних векторных последовательностей, является унитарным при условии $p = 2$, а X — гильбертово пространство и, следовательно, $S^* = S^{-1}$, где оператор $S^{-1} \in \text{End } l^{p^*}$ действует по правилу $(S^{-1}x)(n) = x(n-1)$. При всех остальных $p \leq \infty$ сопряженный к оператору сдвига задается также формулой $(S^*x)(n) = x(n-1)$. Таким образом,

$$(\mathfrak{D}^*x)(n) = x(n-1) - B^*x(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Последнее соотношение позволяет утверждать, что $\mathfrak{D}^*$ — разностный оператор. Поскольку по условию теоремы 2.2 оператор $\mathfrak{D}$ сюрьективен, то сопряженный к нему разностный оператор $\mathfrak{D}^*$ равномерно инъективен и по теореме 2.1 он обратим. Следовательно, обратим и исходный разностный оператор $\mathfrak{D} : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty)$.

Пусть $p = \infty$. В этом случае, как легко проверить, пространство $l^1 = l^1(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^*)$ является подпространством сопряженного $[l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})]^*$ к $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, причем это подпространство инвариантно

относительно сопряженного оператора $\mathfrak{D}^* : [l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})]^* \rightarrow [l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})]^*$. Поскольку, как отмечалось выше, оператор $\mathfrak{D}^*$ равномерно инъективен, его сужение на $l^1 = l^1(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^*)$ также равномерно инъективно. Но тогда по теореме 2.1 это сужение обратимо. Сопряженный к этому сужению оператор действует в $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^{**})$ и является расширением первоначального оператора $\mathfrak{D} : l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X}) \rightarrow l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$. Значит, разностный оператор $\mathfrak{D}$ равномерно инъективен и, следовательно, обратим. Теорема 3.3 доказана. $\square$

Следствие 3.2. *Обратимый справа оператор $\mathfrak{D} : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty]$, обратим.*

Теорема 3.5. *Если разностный оператор $\mathfrak{D} : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty]$, фредгольмов, то он обратим.*

Доказательство теоремы 3.5. Рассмотрим сначала случай $p \neq \infty$. Покажем, что ядро $\text{Ker } \mathfrak{D}$ фредгольмова разностного оператора $\mathfrak{D} : l^p \rightarrow l^p$, $p \in [1, \infty)$, состоит только из нуля. Предположим противное и рассмотрим последовательность $x_0 \in l^p$, $p \in [1, \infty)$, $x_0 \neq 0$, принадлежащую $\text{Ker } \mathfrak{D}$. Рассмотрим сдвиги последовательности x_0 на очень большие расстояния $(S(k_i)x_0)(n) = x_0(n + k_i)$, $1 \leq i \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, где k_i — достаточно большие числа. Заметим, что носители сдвигов $\text{supp } S(k_i)x_0$, $1 \leq i \leq m$, почти не пересекаются (т.е. имеют конечное (возможно, нулевое) число общих элементов).

Покажем, что сдвиги $(S(k_i)x_0)(n)$ последовательности x_0 являются линейно независимыми функциями. Поскольку $p < \infty$, последовательность $x_0(n)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, в ней есть максимальный по модулю элемент. Без ограничения общности можно считать, что максимальным является элемент $x_0(0)$. Положим $x_i(n) = (S(-k_i)x_0)(n) = x_0(n - k_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Предположим противное, т.е. что последовательности $x_1, \dots, x_m$ линейно зависимы. Это значит, что для некоторых коэффициентов a_i , $1 \leq i \leq m$, удовлетворяющих условию $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_m| \neq 0$, справедливо соотношение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = 0.$$

Выпишем эти равенства для координат k_i :

$$\begin{aligned} a_1x_1(k_1) + a_2x_2(k_1) + \dots + a_mx_m(k_1) &= 0, \\ a_1x_1(k_2) + a_2x_2(k_2) + \dots + a_mx_m(k_2) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ a_1x_1(k_m) + a_2x_2(k_m) + \dots + a_mx_m(k_m) &= 0. \end{aligned}$$

Перепишем полученные равенства с учетом введенного обозначения $x_i(n) = x_0(n - k_i)$:

$$\begin{aligned} a_1x_0(k_1 - k_1) + a_2x_0(k_1 - k_2) \dots + a_mx_0(k_1 - k_m) &= 0, \\ a_1x_0(k_2 - k_1) + a_2x_0(k_2 - k_2) \dots + a_mx_0(k_2 - k_m) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ a_1x_0(k_m - k_1) + a_2x_0(k_m - k_2) \dots + a_mx_0(k_m - k_m) &= 0. \end{aligned}$$

Окончательно получаем соотношения вида

$$\begin{aligned} a_1x_0(0) + a_2x_0(k_1 - k_2) \dots + a_mx_0(k_1 - k_m) &= 0, \\ a_1x_0(k_2 - k_1) + a_2x_0(0) \dots + a_mx_0(k_2 - k_m) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ a_1x_0(k_m - k_1) + a_2x_0(k_m - k_2) \dots + a_mx_0(0) &= 0. \end{aligned}$$

Будем смотреть на эти равенства как на систему относительно a_i , $i = 1, 2, \dots, m$. В ней диагональные коэффициенты $x_0(0)$ большие, а остальные коэффициенты $x_0(k_i - k_j)$ можно сделать как угодно маленькими, подобрав числа k_i таким образом, что $k_i - k_j \rightarrow \infty$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, m$. Значит, можно добиться того, чтобы определитель этой системы был отличен от нуля. Но тогда все a_i равны нулю, что противоречит сделанному предположению. А значит сдвиги последовательности x_0 на очень большие расстояния $(S(k_i)x_0)(n) = x_0(n + k_i)$, $1 \leq i \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, являются линейно независимыми.

Поскольку последовательность x_0 принадлежит $\text{Ker } \mathfrak{D}$, то справедливо

$$\mathfrak{D}x_0 = 0.$$

Применяя к этому равенству слева операторы сдвигов на большие расстояния, получаем

$$S(k_i)\mathfrak{D}x_0 = 0, \quad 1 \leq i \leq m, m \in \mathbb{N}.$$

Поскольку разностной оператор с постоянными коэффициентами перестановочен с операторами сдвигов, имеем

$$\mathfrak{D}(S(k_i)x_0) = 0, \quad 1 \leq i \leq m, m \in \mathbb{N}.$$

Последнее соотношение означает, что все сдвиги $S(k_i)x_0, 1 \leq i \leq m$, исходной последовательности x_0 на очень большие расстояния попали в ядро разностного оператора $\mathfrak{D}$. Так как m произвольно и с учетом линейной независимости сдвигов $S(k_i)x_0, 1 \leq i \leq m$, получаем, что ядро разностного оператора $\mathfrak{D} : l^p \rightarrow l^p, p \in [1, \infty)$, не является конечномерным, что противоречит условию теоремы. А значит, $\text{Ker } \mathfrak{D} = \{0\}$, т.е. оператор $\mathfrak{D}$ инъективен.

По условию теоремы оператор $\mathfrak{D}$ фредгольмов, а значит образ оператора $\mathfrak{D}$ замкнут. В силу теоремы 3.4 [7, теорема 1.3.2] из замкнутости образа $\text{Im } \mathfrak{D}$ разностного оператора и инъективности оператора $\mathfrak{D}$ следует, что $|\mathfrak{D}|_+ > 0$. Таким образом, существует константа $l = |\mathfrak{D}|_+ > 0$ такая, что

$$\|\mathfrak{D}x\| \geq l\|x\| \quad x \in \mathcal{X},$$

и, следовательно, разностный оператор $\mathfrak{D} : l^p \rightarrow l^p, p \in [1, \infty)$, равномерно инъективен. Отсюда, в силу теоремы 3.2, оператор $\mathfrak{D}$ обратим.

Пусть $p = \infty$. В этом случае пространство $l^1 = l^1(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^*)$ является подпространством сопряженного $[l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})]^*$ к $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, причем это подпространство инвариантно относительно сопряженного оператора $\mathfrak{D}^* : [l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})]^* \rightarrow [l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})]^*$. Поскольку оператор $\mathfrak{D}$ фредгольмов, $|\mathfrak{D}|_- > 0$. Поэтому $|\mathfrak{D}^*|_+ > 0$ [7, предположение 1.3.4], т.е. $\mathfrak{D}^*$ равномерно инъективен. Поскольку оператор $\mathfrak{D}^*$ равномерно инъективен, то его сужение на $l^1 = l^1(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^*)$ также равномерно инъективно. Но тогда по теореме 3.2 это сужение обратимо. Сопряженный к этому сужению действует в $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^{**})$ и является расширением первоначального оператора $\mathfrak{D} : l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X}) \rightarrow l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$. Значит, разностный оператор $\mathfrak{D}$ равномерно инъективен и, следовательно, обратим. Теорема 3.5 доказана. $\square$

4. Доказательство теорем 2.1–2.3. Наряду с разностным оператором второго порядка (1) вида $\mathfrak{D}_2 : l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ будем рассматривать разностный оператор первого порядка $\mathfrak{D}_1 : l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2)$, действующий по правилу

$$\mathfrak{D}_1 : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} S & -I \\ B_2 & S + B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (y_1, y_2) \in l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2).$$

Здесь через S обозначен оператор сдвига последовательностей из l^p : $S \in \text{End } l^p, (Sx)(n) = x(n+1), n \in \mathbb{Z}, x \in l^p$.

В [3] были получены результаты о совпадении ряда свойств введенных в рассмотрение операторов $\mathfrak{D}_2 : l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ и разностного оператора $\mathfrak{D}_1 : l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2)$. В частности, было установлено, что эти операторы одновременно обратимы, одновременно равномерно инъективны, одновременно сюръективны, одновременно фредгольмовы и т. д.

Теорема 2.1 непосредственно следует из теоремы 3.2 и теорем из [3] об одновременной равномерной инъективности и одновременной обратимости разностного оператора второго порядка $\mathfrak{D}_2 : l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ и разностного оператора первого порядка $\mathfrak{D}_1 : l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2)$.

Теорема 2.2 непосредственно следует из теоремы 3.3 и теорем из [3] об одновременной сюръективности и одновременной обратимости разностного оператора второго порядка $\mathfrak{D}_2 : l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ и разностного оператора первого порядка $\mathfrak{D}_1 : l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2)$.

Теорема 2.3 непосредственно следует из теоремы 3.5 и теорем из [3] об одновременной фредгольмовости и одновременной обратимости разностного оператора второго порядка $\mathfrak{D}_2 : l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ и разностного оператора первого порядка $\mathfrak{D}_1 : l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. Г. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами// Сиб. мат. ж. — 2001. — 42, № 6. — С. 1231–1243.
2. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений// Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — 7, № 2. — С. 3–68.
3. Баскаков А. Г. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка// Изв. РАН. Сер. мат. — 2015. — 79, № 2. — С. 3–20.
4. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
5. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2004.
6. Aldloubi A., Baskakov A., Krishtal I. Slanted matrices, Banach frames and sampling// J. Funct. Anal. — 2008. — 255. — P. 1667–1691.
7. Kurbatov V. G. Functional-Differential Operators and Equations. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1999.

Кабанцова Лариса Юрьевна
Воронежский государственный университет
E-mail: dlju@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 102–113
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-102-113

УДК 517.91, 517.977

УСТОЙЧИВЫЙ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2019 г. Ф. А. КУТЕРИН, А. А. ЕВТУШЕНКО

Аннотация. Работа посвящена выводу условий оптимальности в задаче оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства, понимаемыми как ограничения в гильбертовом пространстве. Основными результатами работы в рассматриваемой задаче оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями являются регуляризованные, устойчивые к ошибкам исходных данных, принцип Лагранжа и поточечный принцип максимума Понтрягина в итерационной форме, представляющие, в свою очередь, конструктивный способ построения минимизирующего приближенного решения в поставленной задаче.

Ключевые слова: оптимальное управление, некорректная задача, двойственная регуляризация, итеративная двойственная регуляризация.

STABLE SEQUENTIAL PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH PHASE RESTRICTIONS

© 2019 F. A. KUTERIN, A. A. EVTUSHENKO

ABSTRACT. In this paper, we obtain optimality conditions in an optimal control problem with pointwise phase constraints of the equality and inequality types treated as constraints in a Hilbert space. The main results of this work are the regularized, stable under errors of source data, Lagrange principle and the pointwise Pontryagin maximum principle in the iterative form, which, in turn, yield a functional way of constructing a minimizing approximate solution to the problem considered.

Keywords and phrases: optimal control, ill-posed problem, dual regularization, iterative dual regularization.

AMS Subject Classification: 47A52, 93C15

Статья посвящена выводу условий оптимальности в задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечным фазовым ограничением типа равенства и неравенства. Задачи, совпадающие по форме своих постановок с изучаемой в данной работе, рассматривались во многих публикациях. Весьма полную библиографию, посвященную публикациям по теории принципа максимума в задачах оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечными фазовыми ограничениями-неравенствами, а также с поточечными регулярными смешанными ограничениями типа равенства и неравенства, можно найти в [1, 2]. Как правило, в этих публикациях предполагается точное задание исходных данных в рассматриваемых задачах. Тем временем, задачам условной оптимизации

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-05-01182, № 19-07-00782).

в целом и, в частности, задачам оптимального управления свойственны различные проявления неустойчивости (см. [3]).

В данной работе предлагается преодолевать неустойчивость или, более общо, некорректность указанных классических условий оптимальности на основе метода двойственной регуляризации (см. [4–8]. Основными результатами работы являются регуляризованные, устойчивые к ошибкам исходных данных, принцип Лагранжа и поточечный принцип максимума Понтрягина в итерационной форме для рассматриваемой задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями. Утверждения, сходные по форме с рассмотренными в данной работе, обсуждались ранее в [9, 10]. Отличие настоящей работы состоит в применении метода итеративной двойственной регуляризации (см. [4, 5]) при построении минимизирующего приближенного решения в поставленной задаче. Как и в [9, 10], задача оптимального управления рассматривается как задача выпуклого программирования с сильно выпуклым функционалом качества, для которой формулируется принцип Лагранжа в итерационной форме. Таким образом формулируются утверждения, которые могут быть названы принципами Лагранжа в задаче оптимального управления. Далее они расшифровываются в терминах задачи оптимального управления, в результате чего получаются устойчивые к ошибкам в исходных данных секвенциальные принципы максимума Понтрягина в итерационной форме.

1. Постановка задачи. Рассматривается выпуклая задача оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства, понимаемыми как ограничения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \equiv L_2(X)$:

$$f^\delta(u) \equiv \int_0^T \left(\langle F^\delta(t)x^\delta[u](t), x^\delta[u](t) \rangle + \langle G^\delta(t)u(t), u(t) \rangle \right) dt \rightarrow \min, \quad (P^\delta)$$

$$g_1^\delta(u)(t) = h^\delta(t), \quad g_2^\delta(u)(t) \leq 0 \quad \text{при п.в. } t \in X, u \in \mathcal{D} \subset L_2(0, T).$$

Здесь $f^\delta : L_2(0, T) \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывный сильно выпуклый функционал с постоянной сильной выпуклости κ , зависящий от δ , $F^\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $G^\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ — измеримые по Лебегу ограниченные неотрицательно и равномерно по t положительно определенные матрицы, $g_1^\delta(u)(t) \equiv \langle \varphi_1^\delta(t), x^\delta[u](t) \rangle$, $g_2^\delta(u)(t) \equiv \varphi_2^\delta(t, x^\delta[u](t))$, $\varphi_1^\delta, h^\delta \in L_2(X)$ — заданные функции, $\varphi_2^\delta : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — такая непрерывная выпуклая по x при всех $t \in X$ функция, что

$$|\varphi_2^\delta(t, x) - \varphi_2^\delta(t, y)| \leq L_M |x - y| \quad \forall x, y \in S_M^n, \quad (1)$$

где постоянная L_M не зависит от $t \in X$, $\mathcal{D} \subset L_2(0, T)$ — выпуклое замкнутое, возможно неограниченное множество, $X \subset [0, T]$, $X = \text{cl } \overset{\circ}{X}$, $x^\delta[u](t)$, $t \in [0, T]$, — решение задачи Коши

$$\dot{x} = a^\delta(t)x + b^\delta(t)u(t), \quad x(0) = x_0^\delta \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

с измеримыми по Лебегу ограниченными матрицами $a^\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $b^\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$. Верхний индекс δ в исходных данных задачи (P^δ) означает, что эти данные соответствуют либо ситуации их точного задания ($\delta = 0$), либо являются возмущенными ($\delta > 0$), т.е. задаются с ошибкой, $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число.

Будем считать, что выполняются следующие оценки для отклонений возмущенных исходных данных задачи

$$\begin{aligned} \|F^\delta - F^0\|_{2,(0,T)} &\leq C\delta, \quad \|G^\delta - G^0\|_{2,(0,T)} \leq C\delta, \quad \|h^\delta - h^0\|_{2,X} \leq C\delta, \\ \|\varphi_1^\delta - \varphi_1^0\|_{2,X} &\leq C\delta, \quad |\varphi_2^\delta(t, x) - \varphi_2^0(t, x)| \leq C_M\delta \quad \forall (t, x) \in X \times S_M^n, \\ \|a^\delta - a^0\|_{\infty,(0,T)} &\leq C\delta, \quad \|b^\delta - b^0\|_{\infty,(0,T)} \leq C\delta, \quad |x_0^\delta - x_0^0| \leq C\delta, \end{aligned} \quad (3)$$

где $C, C_M > 0$ не зависят от δ .

При условиях (3) можно показать, что для траекторий системы (2) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|x^\delta[u]\|_{2,(0,T)} &\leq C_1(1 + \|u\|_{2,(0,T)}), \\ \|x^\delta[u] - x^0[u]\|_{2,(0,T)} &\leq C_1\delta(1 + \|u\|_{2,(0,T)}), \end{aligned} \quad (4)$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от $\delta \in (0, \delta_0]$, $u \in L_2(0, T)$.

Тогда на основании оценок (3) отклонения возмущенных исходных данных от точных, глобальной разрешимости задачи Коши (2) и равномерной по $\delta \in [0, \delta_0]$, $u \in \mathcal{D}$ ограниченности ее решений можно утверждать, что выполняются оценки

$$\begin{aligned} |f^\delta(u) - f^0(u)| &\leq C_2 \delta \quad \forall u \in L_2(0, T), \\ \|g_1^\delta(u) - g_1^0(u)\|_{2,X} &\leq C_2 \delta (1 + \|u\|_{2,(0,T)}) \quad \forall u \in L_2(0, T), \\ \|g_2^\delta(u) - g_2^0(u)\|_{2,X} &\leq C_2 \delta \quad \forall u \in L_2(0, T), \end{aligned} \quad (5)$$

где постоянная $C_2 > 0$ не зависит от $\delta \in (0, \delta_0]$, $u \in L_2(0, T)$.

При определенных условиях на исходные данные задачи (P^δ) ее ограничения можно, естественно, трактовать и как ограничения в $L_\infty(X)$ ($\varphi_1, h \in L_\infty(X)$) и $C(X)$ ($\varphi_1, h \in C(X)$). При этом понятия оптимальности управления в указанных частных случаях эквивалентны понятию оптимальности для случая «тех же» ограничений в $L_2(X)$.

Важнейшим понятием в статье применительно к задаче (P^0) является понятие минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги.

Определение 1.1. Минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0) будем называть последовательность u^i , $i = 1, 2, \dots$, для которой справедливы соотношения $f^0(u^i) \leq \beta^0 + \delta^i$, $u^i \in \mathcal{D}^{0\epsilon^i}$, для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i , ϵ^i , $i = 1, 2, \dots$, где β^0 — обобщенная нижняя грань, определяемая следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta^0 &\equiv \beta_{+0}^0 \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon^0, \quad \beta_\epsilon^0 \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^{0\epsilon}} f^0(u), \quad \beta_\epsilon^0 \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}^{0\epsilon} = \emptyset, \\ \mathcal{D}^{0\epsilon} &\equiv \left\{ u \in \mathcal{D} : \|g_1^0(u) - h^0\|_{2,X} \leq \epsilon, \min_{z \in \mathcal{H}_-} \|g_2^0(u) - z\|_{2,X} \leq \epsilon \right\}, \quad \epsilon \geq 0, \\ \mathcal{H}_- &\equiv \{z \in \mathcal{H} : z(t) \leq 0 \text{ при п.в. } t \in X\}, \quad \mathcal{D}^{00} \equiv \mathcal{D}^0. \end{aligned}$$

В общей ситуации из включения $\mathcal{D}^{00} \subset \mathcal{D}^{0\epsilon}$ следует неравенство $\beta^0 \leq \beta_\epsilon^0$, где β_ϵ^0 — классическое значение задачи. Но в случае поставленной выше задачи (P^0) имеет место равенство $\beta^0 = \beta_\epsilon^0$.

Единственное в силу сильной выпуклости функционала f^0 решение задачи (P^0) будем обозначать $u^0 \equiv \min_{u \in \mathcal{D}^0} f^0(u)$. Очевидно, задача (P^0) заведомо разрешима, если $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$.

Введем регулярный функционал Лагранжа

$$L^\delta(u, \lambda, \mu) \equiv f^\delta(u) + \langle \lambda, g_1^\delta(u) - h^\delta \rangle + \langle \mu, g_2^\delta(u) \rangle,$$

вогнутый двойственный функционал

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu), \quad \lambda \in \mathcal{H}, \quad \mu \in \mathcal{H},$$

и соответствующую двойственную задачу

$$V^\delta(\lambda, \mu) \rightarrow \sup, \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+. \quad (6)$$

В силу сильной выпуклости f^δ двойственный функционал V^δ определен и конечен для любого элемента $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$; при этом его значение $V^\delta(\lambda, \mu)$ достигается на единственном элементе $u^\delta[\lambda, \mu] \equiv \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu)$ при $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, где $\mathcal{H}_+ \equiv \{z \in L_2(X) : z(t) \geq 0 \text{ при п.в. } t \in X\}$.

Используя априорные оценки (3), а также вытекающие из них оценки (4) и (5), можно показать, что для любых двух пар $(\lambda^1, \mu^1), (\lambda^2, \mu^2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ справедливо неравенство

$$\|u^\delta[\lambda^1, \mu^1] - u^\delta[\lambda^2, \mu^2]\| \leq \frac{K}{\kappa} \|(\lambda^1, \mu^1) - (\lambda^2, \mu^2)\|, \quad (7)$$

где $\kappa, K > 0$ — некоторые положительные числа, не зависящие от δ .

Приведем также формулу для супердифференциала (в смысле выпуклого анализа) вогнутого функционала значений V^δ . Доказательство леммы, полностью аналогичной приводимой ниже лемме, может быть найдено в [5, лемма 2]. Для удобства введем обозначение

$$\mathfrak{F}^\delta(\lambda, \mu) \equiv \left(g_1^\delta(u^\delta[\lambda, \mu]) - h^\delta, g_2^\delta(u^\delta[\lambda, \mu]) \right).$$

Лемма 1.1. Для супердифференциала $\partial V^\delta(\lambda, \mu)$ функционала V^δ в каждой точке $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ справедливо включение

$$\mathfrak{F}^\delta(\lambda, \mu) \in \partial V^\delta(\lambda, \mu), \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+.$$

В каждой внутренней точке $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ супердифференциал функционала V^δ непрерывен и совпадает с его производной Фреше при $\delta \geq 0$

$$\partial V^\delta(\lambda, \mu) = \mathfrak{F}^\delta(\lambda, \mu).$$

На основании оценок (3), (4) и (5) могут быть доказаны неравенства

$$\|u^\delta[\lambda, \mu] - u^0[\lambda, \mu]\| \leq C\sqrt{\delta}(1 + \|(\lambda, \mu)\|), \quad (8)$$

$$\|\mathfrak{F}^\delta(\lambda, \mu) - \mathfrak{F}^0(\lambda, \mu)\| \leq C_1\sqrt{\delta}(1 + \|(\lambda, \mu)\|) \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+ \quad (9)$$

с не зависящими от δ , $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ постоянными $C, C_1 > 0$.

2. Метод двойственной регуляризации. Обозначим через $(\lambda^{\delta, \alpha}, \mu^{\delta, \alpha})$ единственное решение задачи максимизации

$$R^{\delta, \alpha}(\lambda, \mu) \equiv V^\delta(\lambda, \mu) - \alpha (\|\lambda\|^2 + \|\mu\|^2) \rightarrow \max, \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+. \quad (10)$$

Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

В этом случае можно утверждать, что в случае разрешимости при $\delta = 0$ двойственной задачи (6) имеет место сходимость $(\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}) \rightarrow (\lambda^0, \mu^0)$, $\delta \rightarrow 0$, где через (λ^0, μ^0) обозначено ее минимальное по норме решение.

Именно из элементов $u^\delta[\lambda, \mu]$ при $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ ниже конструируются устойчивым образом минимизирующие приближенные решения в исходной задаче (P^0), ограничения которой понимаются в $\mathcal{H}$. Одновременно в терминах минимизирующих приближенных решений формулируются и различные версии устойчивых секвенциальных принципа Лагранжа в недифференциальной форме и принципа максимума Понтрягина, представляющие собою утверждения об устойчивой аппроксимации решений задачи точками минимума ее регулярного функционала Лагранжа или, что в данном случае одно и то же, управлениями, удовлетворяющими принципу максимума Понтрягина.

В [10] доказано (для более общего случая) следующее утверждение.

Теорема 2.1. Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, существует такой элемент $u^\delta[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}]$, что при $\delta \rightarrow 0$ выполняются предельные соотношения

$$\begin{aligned} \alpha(\delta) \|(\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)})\| &\rightarrow 0, \quad f^0(u^\delta[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}]) \rightarrow f^0(u^0), \\ g_1^0(u^\delta[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}]) - h^0 &\rightarrow 0, \quad g_2^0(u^\delta[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}]) \leq \phi(\delta), \quad \phi(\delta) \geq 0, \quad \|\phi(\delta)\| \rightarrow 0, \\ \langle (\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}), \mathfrak{F}^\delta(\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}) \rangle &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Приведем также «след» этой теоремы, получаемый при формальном занулении величины ошибки в исходных данных. При этом будем использовать обозначение $(\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}) = (\lambda^\alpha, \mu^\alpha)$.

Теорема 2.2. Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, существует такой элемент $u^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha]$, что

$$\begin{aligned} f^0(u^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha]) &\rightarrow f^0(u^0), \quad \alpha \rightarrow 0, \\ g_1^0(u^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha]) - h^0 &\rightarrow 0, \quad g_2^0(u^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha]) \leq \phi(\alpha), \quad \phi(\alpha) \geq 0, \quad \|\phi(\alpha)\| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \\ \langle (\lambda^\alpha, \mu^\alpha), \mathfrak{F}^0(\lambda^\alpha, \mu^\alpha) \rangle &\rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В силу сильной выпуклости функционала f^0 справедливо также предельное соотношение

$$\|u^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha] - u^0\| \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

3. Устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа в недифференциальной форме.

Как следствие теоремы 2.1, приведем сформулированные в [10] необходимые и достаточные условия существования минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0) , названные в [10] устойчивым секвенциальным принципом Лагранжа в недифференциальной форме в этой задаче и одновременно, так как мы имеем дело лишь с регулярной функцией Лагранжа, устойчивой секвенциальной теоремой Куна—Таккера в недифференциальной форме.

Теорема 3.1. *Для существования в задаче (P^0) минимизирующего приближенного решения, в независимости от фактов существования или несуществования решения двойственной к ней задачи, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность двойственных переменных $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$, что $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и выполнялись предельные соотношения*

$$u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}, \quad \epsilon^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (12)$$

$$\langle (\lambda^k, \mu^k), \mathfrak{F}^{\delta^k}(\lambda^k, \mu^k) \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (13)$$

для некоторых элементов $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$. При этом последовательность $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомым минимизирующим приближенным решением, и каждая его слабая предельная точка есть решение задачи (P^0) . В качестве последовательности (λ^k, μ^k) , $k = 1, 2, \dots$ может быть взята последовательность $(\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}, \mu^{\delta^k, \alpha(\delta^k)})$, генерируемая методом двойственной регуляризации теоремы 2.1. В случае разрешимости двойственной к (P^0) задачи последовательность $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$, следует считать ограниченной. Как следствие предельных соотношений (12), (13), выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\lambda^k, \mu^k) \rightarrow \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} V^0(\lambda, \mu). \quad (14)$$

Одновременно каждая слабая предельная точка последовательности $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$ (если таковая существует), является решением двойственной задачи $V^0(\lambda, \mu) \rightarrow \max, (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$.

Замечание 3.1. Так как f^0 по условию является сильно выпуклым, то из слабой сходимости единственных в этом случае элементов $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$ к единственному же элементу u^0 при $k \rightarrow \infty$ и числовой сходимости $f^0(u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) \rightarrow f^0(u^0)$, $k \rightarrow \infty$, так как квадратичный функционал является субдифференцируемым, вытекает и сильная сходимость $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$ к u^0 при $k \rightarrow \infty$. Случай задачи (P^0) с сильно выпуклым f^0 , но с точными исходными данными рассматривался в [9].

4. Метод итеративной двойственной регуляризации. Пусть последовательность $(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$, $k = 1, 2, \dots$, конструируется по правилу

$$(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) = \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} \left((\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\beta^k \alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right), \quad (15)$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad (\bar{\lambda}^1, \bar{\mu}^1) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+,$$

где числовые последовательности δ^k , α^k , β^k , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \delta^k \geq 0, \quad \alpha^k > 0, \quad \beta^k > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\delta^k + \alpha^k + \beta^k) = 0, \quad \frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} \leq C_0, \\ \frac{|\alpha^{k+1} - \alpha^k|}{(\alpha^k)^3 \beta^k} \leq C, \quad \frac{\beta^k}{(\alpha^k)^3} \leq C, \quad \frac{\delta^k}{(\alpha^k)^6} \leq C, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \beta^k = +\infty. \end{aligned} \quad (16)$$

Замечание 4.1. Если для какого-то элемента $G^\delta(\lambda, \mu)$

$$\|G^\delta(\lambda, \mu) - \mathfrak{F}^0(\lambda, \mu)\| \leq \sqrt{\delta}(1 + \|(\lambda, \mu)\|), \quad (17)$$

то $G^\delta(\lambda, \mu)$ можно использовать в итерационной формуле (15) вместо $\mathfrak{F}^\delta(\lambda, \mu)$. Это можно использовать при практическом решении задач, когда точное вычисление $\mathfrak{F}^\delta(\lambda, \mu)$ проблематично,

например, по причине использования конечно-разностной аппроксимации для решения задачи минимизации функции Лагранжа.

Введем обозначение: $(\lambda^{\alpha^k}, \mu^{\alpha^k}) \equiv (\lambda^k, \mu^k)$.

Лемма 4.1. Пусть последовательность α^k удовлетворяет условиям согласования (16). Тогда для элементов последовательности (λ^k, μ^k) решений задач

$$R^{0, \alpha^k}(\lambda, \mu) \equiv V^0(\lambda, \mu) - \alpha \|(\lambda, \mu)\|^2 \rightarrow \max, \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$$

справедливо предельное соотношение

$$\|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Доказательство. Так как (λ^k, μ^k) — точка максимума задачи (10) при $\delta = 0$, $\alpha = \alpha^k$, справедливо вариационное неравенство

$$\left\langle \mathfrak{F}^0(\lambda^k, \mu^k) - 2\alpha^k(\lambda^k, \mu^k), (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle \leq 0,$$

из которого следует следующая цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \alpha^k \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\|^2 &\leq \\ &\leq \left\langle -\mathfrak{F}^0(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) + \mathfrak{F}^0(\lambda^k, \mu^k) + 2\alpha^k [(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)], (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle \leq \\ &\leq \left\langle -\mathfrak{F}^0(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) + 2\alpha^k(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}), (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle \leq \\ &\leq \left\langle -\mathfrak{F}^0(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) + \mathfrak{F}^0(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) + 2\alpha^k(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha^{k+1}(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}), (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle = \\ &= 2(\alpha^k - \alpha^{k+1}) \left\langle (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}), (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle \leq \\ &\leq 2|\alpha^k - \alpha^{k+1}| \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\| \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\| = \\ &= 2 \frac{|\alpha^k - \alpha^{k+1}|}{\alpha^k} \frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} \alpha^{k+1} \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\| \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\|. \end{aligned}$$

После деления на $\alpha^k \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\|$ получаем

$$\|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\| \leq 2 \frac{|\alpha^k - \alpha^{k+1}|}{(\alpha^k)^2} \frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} \alpha^{k+1} \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\|, \quad (19)$$

откуда с учетом предельных соотношений (11) и условий (16) выводим требуемое предельное соотношение (18). $\square$

Лемма 4.2. Пусть выполняется условия согласования (16). Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, справедливо предельное соотношение

$$\|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Доказательство. Предположим сначала, что функционал V^0 не достигает на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ максимума. В этом случае, очевидно, имеем $\|(\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. Введем обозначение $b_k \equiv \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k)\|$. Можем записать

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= \|(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) - (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\| \leq \\ &\leq \|(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\| + \|(\lambda^k, \mu^k) - (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\|. \end{aligned} \quad (21)$$

Оценим слагаемое $\|(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\|$. Из равенства (15), свойства нерастяжения расстояния при операции проектирования и очевидного равенства $(\lambda^k, \mu^k) = \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$ следует

$$\begin{aligned} & \|(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\|^2 = \\ & = \left\| \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} \left((\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\beta^k \alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right) - \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+}(\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 \leq \\ & \leq \left\| \left[(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\beta^k \alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right] - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 = \\ & = \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 + 2\beta^k \left\langle \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k), (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle + \\ & \quad + (\beta^k)^2 \left\| \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right\|^2. \quad (22) \end{aligned}$$

Так как $\langle \mathfrak{F}^0(\lambda^k, \mu^k) - 2\alpha^k(\lambda^k, \mu^k), (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \rangle \leq 0$, то в силу оценки (9) с учетом критерия сильной вогнутости

$$-\alpha_k \|v - u\|^2 \geq \langle \mathfrak{F}^0(u) - 2\alpha_k u - \mathfrak{F}^0(v) + 2\alpha_k v, u - v \rangle$$

имеем

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k), (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle = \\ & = \left\langle \mathfrak{F}^0(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k), (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle - \\ & - \left\langle \mathfrak{F}^0(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k), (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle \leq \\ & \leq \left\langle \mathfrak{F}^0(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - \mathfrak{F}^0(\lambda^k, \mu^k) + 2\alpha^k(\lambda^k, \mu^k), (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle + \\ & \quad + \sqrt{\delta^k} \left(1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \right) \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\| \leq \\ & \leq -\alpha^k \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 + \sqrt{\delta^k} \left(1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \right) \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|. \quad (23) \end{aligned}$$

Кроме того, имеем в силу оценки (9) и леммы 1.1

$$\begin{aligned} & \left\| \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right\|^2 \leq \\ & \leq \left[\left\| \mathfrak{F}^0(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right\| + \sqrt{\delta^k} \left(1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \right) \right]^2 \leq \\ & \leq C \left(1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \right)^2. \quad (24) \end{aligned}$$

Подставляя оценки (23), (24) в (22), имеем

$$\begin{aligned} & \left\| (\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 \leq \\ & \leq \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 - 2\beta^k \alpha^k \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 + \\ & + \beta^k \sqrt{\delta^k} \left(1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \right) \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\| + C(\beta^k)^2 \left(1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \right)^2. \quad (25) \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} & 1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \leq 1 + \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\| + \left\| (\lambda^k, \mu^k) \right\|, \\ & \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\| \leq \frac{1}{2} \left(1 + \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 \right), \end{aligned}$$

то оценка (25) может быть переписана в виде ($C > 0$ — постоянная)

$$\begin{aligned} \left\| (\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 &\leq \\ &\leq \left(1 - 2\beta^k \alpha^k + C \left(\beta^k \sqrt{\delta^k} + (\beta^k)^2 \right) \left(1 + \|(\lambda^k, \mu^k)\| \right) \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 \right) + \\ &\quad + C(\beta^k \sqrt{\delta^k} + (\beta^k)^2) + C(\beta^k \sqrt{\delta^k} + (\beta^k)^2) \|(\lambda^k, \mu^k)\|^2 = \\ &= \left(1 - 2\beta^k \alpha^k + \alpha^k \beta^k \gamma^k \right) \times \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 + \alpha^k \beta^k \tilde{\gamma}^k, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma^k &\equiv \frac{C}{\alpha^k} \left(\sqrt{\delta^k} + \beta^k + (\sqrt{\delta^k} + \beta^k) \|(\lambda^k, \mu^k)\| \right), \\ \tilde{\gamma}^k &\equiv \frac{C}{\alpha^k} \left(\sqrt{\delta^k} + \beta^k + (\sqrt{\delta^k} + \beta^k) \|(\lambda^k, \mu^k)\|^2 \right), \end{aligned}$$

причем, в силу предельных соотношений (16),

$$\gamma^k, \tilde{\gamma}^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Подставляя оценки (19), (25) в (21), получаем

$$\begin{aligned} b_{k+1} &\leq \left((1 - 2\beta^k \alpha^k + \alpha^k \beta^k \gamma^k) \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 + \alpha^k \beta^k \tilde{\gamma}^k \right)^{1/2} + \\ &\quad + C \frac{|\alpha^k - \alpha^{k+1}|}{(\alpha^k)^2} \alpha^{k+1} \left\| (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) \right\|. \end{aligned}$$

Возводя последнее неравенство в квадрат и пользуясь неравенством

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + a^2 \alpha^k \beta^k + b^2 (\alpha^k \beta^k)^{-1} = (1 + \alpha^k \beta^k) (a^2 + b^2 (\alpha^k \beta^k)^{-1}),$$

имеем

$$\begin{aligned} b_{k+1}^2 &\leq (1 + \alpha^k \beta^k) (1 - 2\beta^k \alpha^k + \alpha^k \beta^k \gamma^k) b_k^2 + \\ &= (1 + \alpha^k \beta^k) \left\{ \alpha^k \beta^k \tilde{\gamma}^k + \left(C \frac{|\alpha^k - \alpha^{k+1}|}{(\alpha^k)^2} \alpha^{k+1} \left\| (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) \right\| \right)^2 (\alpha^k \beta^k)^{-1} \right\} \leq \\ &\leq b_k^2 \left(1 - \alpha^k \beta^k - 2(\alpha^k \beta^k)^2 + \alpha^k \beta^k \gamma^k (1 + \alpha^k \beta^k) \right) + \\ &\quad + (1 + \alpha^k \beta^k) \left[\alpha^k \beta^k \tilde{\gamma}^k + \alpha^k \beta^k \left(C \frac{|\alpha^k - \alpha^{k+1}|}{(\alpha^k)^3 \beta^k} \alpha^{k+1} \left\| (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) \right\| \right)^2 \right], \end{aligned}$$

откуда получаем неравенство

$$b_{k+1}^2 \leq b_k^2 (1 - \alpha^k \beta^k + \alpha^k \beta^k \mu_k) + \alpha^k \beta^k \mu_k, \quad (28)$$

где

$$\mu_k \equiv \max \left\{ 2\alpha^k \beta^k + \gamma^k (1 + \alpha^k \beta^k), (1 + \alpha^k \beta^k) \left(\tilde{\gamma}^k + \left(C \frac{|\alpha^k - \alpha^{k+1}|}{(\alpha^k)^3 \beta^k} \alpha^{k+1} \left\| (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) \right\| \right)^2 \right) \right\}.$$

В силу условий (16) и предельных соотношений (27) величины $s_k \equiv \alpha_k \beta_k (1 - \mu_k)$, $d_k \equiv \alpha_k \beta_k \mu_k$ удовлетворяют условиям леммы 1.5.40 в [7]. Поэтому из (28) и упомянутой леммы следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\| = 0. \quad (29)$$

В случае же разрешимости двойственной к (P^0) задачи, т.е. когда функционал V^0 достигает максимума на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, величины $\|(\lambda^k, \mu^k)\|$ равномерно по k ограничены и доказательство настоящей леммы может быть проведено также, как и доказательство теоремы 1 в [3, т. 2, гл. 9, § 8]. $\square$

Следствием леммы 4.2 является следующее утверждение.

Лемма 4.3. Пусть выполняется условия согласования (16). Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, справедливы предельные соотношения

$$\left\| u^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k] - u^0[\lambda^k, \mu^k] \right\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Следствием лемм 4.2 и 4.3 является теорема сходимости метода итеративной двойственной регуляризации.

Теорема 4.1. Пусть задача (P^0) разрешима и выполняются условия согласования (16). Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \alpha^k \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\|, \quad k \rightarrow \infty, \\ f^0(u^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]) \rightarrow f^0(u^0), \quad \delta^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \\ g_1^0(u^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]) - h^0 \rightarrow 0, \quad \delta^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \\ g_2^0(u^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]) \leq \phi(\delta^k), \quad \phi(\delta^k) \rightarrow 0, \quad \delta^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

а также предельное соотношение

$$\left\| u^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k] - u^0[\lambda^k, \mu^k] \right\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

При решении практических задач в случае, когда исходные данные известны с конечной ошибкой $\delta > 0$, может быть применен следующий алгоритм решения. Пусть последовательности чисел $\delta^k, \alpha^k, \beta^k, k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям (16). Зафиксируем следующее правило останова итерационного процесса при фиксированном конечном уровне погрешности $\delta > 0$. Пусть последовательность $(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k), k = 1, 2, \dots$, конструируется по правилу

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) = \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} \left((\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \mathfrak{F}^\delta(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\beta^k \alpha^k (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right), \\ k = 0, 1, 2, \dots, \quad (\bar{\lambda}^0, \bar{\mu}^0) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+. \end{aligned} \quad (31)$$

При каждом $\delta > 0, \delta \leq \delta^1$, итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенства $\delta^k \geq \delta, k = 1, 2, \dots, k(\delta)$.

Сформулируем теорему, применимую при решении практических задач, в которых уровень погрешности известен и фиксирован.

Теорема 4.2. Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача (существует вектор Куна—Таккера в ней или нет), справедливы предельные соотношения

$$\begin{aligned} f^0(u^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}]) \rightarrow f^0(u^0), \\ g_1^0(u^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}]) - h^0 \rightarrow 0, \\ g_2^0(u^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}]) \leq \phi(\delta), \quad \phi(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

а также предельное соотношение

$$\left\| u^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}] - u^0 \right\| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

где $(\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)})$ — результат $k(\delta)$ итераций итерационного процесса (31). Другими словами, указанное правило останова порождает устойчивый по отношению к ошибкам исходных данных алгоритм построения минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0) .

5. Устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа в итерационной форме. Как следствие теоремы 4.1, сформулируем в данном разделе необходимые и достаточные условия существования минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0) , которые можно также назвать устойчивым секвенциальным принципом Лагранжа в итерационной форме.

По форме это утверждение сходно с теоремой 3.1, отличие же состоит в способе конструирования минимизирующего приближенного решения.

Теорема 5.1. Для существования в задаче (P^0) минимизирующего приближенного решения, в независимости от фактов существования или несуществования решения двойственной к ней задачи, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность двойственных переменных $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$, что $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и выполнялись предельные соотношения

$$u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}, \quad \epsilon^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (32)$$

$$\langle (\lambda^k, \mu^k), \mathfrak{F}^{\delta^k}(\lambda^k, \mu^k) \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (33)$$

для некоторых элементов $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$. При этом последовательность $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомым минимизирующим приближенным решением и каждая его слабая предельная точка есть решение задачи (P^0) . В качестве последовательности (λ^k, μ^k) , $k = 1, 2, \dots$, может быть взята последовательность $(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$ (см. (15)), генерируемая методом итеративной двойственной регуляризации теоремы 4.1. В случае разрешимости двойственной к (P^0) задачи последовательность $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$, будет ограниченной. Как следствие предельных соотношений (32), (33), выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\lambda^k, \mu^k) \rightarrow \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} V^0(\lambda, \mu). \quad (34)$$

Одновременно каждая слабая предельная точка последовательности $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$ (если таковая существует) является решением двойственной задачи $V^0(\lambda, \mu) \rightarrow \max$, $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$.

Замечание 5.1. В силу сильной выпуклости функционала f^0 , из слабой сходимости единственных в этом случае элементов $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$ к единственному же элементу u^0 при $k \rightarrow \infty$ и числовой сходимости $f^0(u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) \rightarrow f^0(u^0)$, $k \rightarrow \infty$, так как квадратичный функционал является субдифференцируемым, вытекает и сильная сходимость $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \rightarrow u^0$ при $k \rightarrow \infty$.

6. Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в итерационной форме. В данном разделе приведем устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина для задачи (P^0) , являющийся необходимым и достаточным условием на элементы минимизирующих приближенных решений. Его формулировка является одновременно и конструктивным способом построения такового минимизирующего приближенного решения. Аналогичное утверждение приведено в [10]. Отличие состоит в способе построения последовательности двойственных переменных и соответствующего ей минимизирующего приближенного решения.

В настоящем разделе наложим на функцию $\varphi_2^\delta : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ дополнительное условие. Будем считать, что функция $\varphi_2^\delta : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная выпуклая по x при всех $t \in X$ функция с непрерывным на $X \times \mathbb{R}^n$ градиентом $\nabla_x \varphi_2^\delta$. Также будем считать, что множество $\mathcal{D}$ может быть представлено в виде $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0, T) : u(t) \in U \text{ при п.в. } t \in (0, T)\}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт.

Рассмотрим при каждом $\lambda \in \mathcal{H}$, $\mu \in \mathcal{H}_+$ задачу минимизации функционала Лагранжа

$$L^\delta(u, \lambda, \mu) \rightarrow \min, \quad u \in \mathcal{D}. \quad (35)$$

Очевидно, необходимым и достаточным условием того, что некоторое управление $u \in \mathcal{D}$ доставляет минимум в задаче (35), является выполнимость на этом управлении принципа максимума Понтрягина.

Для записи принципа максимума Понтрягина в задаче (35) введем стандартное обозначение:

$$\begin{aligned} H^\delta(t, x, u, \psi, \lambda(t), \mu(t)) &\equiv \\ &\equiv \langle \psi, a^\delta(t)x + b^\delta(t)u \rangle - \left(\langle F^\delta(t)x, x \rangle + \langle G^\delta(t)u, u \rangle \right) - \lambda(t) \left(\langle \varphi_1^\delta(t), x \rangle - h^\delta(t) \right) - \mu(t) (\varphi_2^\delta(t, x)) \end{aligned}$$

при $\lambda, \mu \in \mathcal{H}$. Здесь и ниже в случае, если функции $\lambda, \mu \in \mathcal{H} \equiv L_2(X)$ рассматриваются на всем временном интервале $[0, T]$, то полагается, что $\lambda(t) = \mu(t) = 0$ при $t \in [0, T] \setminus X$ и одновременно для этих функций, рассматриваемых на более широком интервале, сохраняется прежнее обозначение.

Лемма 6.1. Как элемент, минимизирующий непрерывный выпуклый регулярный функционал Лагранжа на множестве $\mathcal{D}$, управление $u^\delta[\lambda, \mu]$ при $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина в задаче (35), т.е. удовлетворяет при $u = u^\delta[\lambda, \mu]$ соотношению максимума при почти всех $t \in [0, T]$

$$H^\delta(t, x^\delta[u](t), u(t), \psi(t), \lambda(t), \mu(t)) = \max_{v \in U} H^\delta(t, x^\delta[u](t), v, \psi(t), \lambda(t), \mu(t)), \quad (36)$$

где $\psi(t)$, $t \in [0, T]$ — решение сопряженной задачи

$$\dot{\psi} = -\nabla_x H^\delta(t, x^\delta[u](t), u(t), \psi, \lambda(t), \mu(t)), \quad \psi(T) = 0 \quad (37)$$

при $u = u^\delta[\lambda, \mu]$. Обратно, очевидно, в силу выпуклости задачи (P^0) , любой элемент $u \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий вместе с некоторыми $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ соотношениям (36), (37), является оптимальным в задаче (35) при фиксированных $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$.

Вследствие сильной выпуклости f^δ существует единственное управление из $\mathcal{D}$, удовлетворяющее принципу максимума Понтрягина в задаче (35) при сформулированном выше дополнительном условии непрерывной дифференцируемости функций $\varphi_{2,i}^\delta$, $i = 1, \dots, m$. Обозначим его через $u_{\max}^\delta[\lambda, \mu]$. При этом справедливо равенство $u_{\max}^\delta[\lambda, \mu] = u^\delta[\lambda, \mu]$. Будем использовать обозначение

$$\mathfrak{F}_{\max}^\delta(\lambda, \mu) \equiv \left(g_1^\delta(u_{\max}^\delta[\lambda, \mu]) - h^\delta, g_2^\delta(u_{\max}^\delta[\lambda, \mu]) \right).$$

Непосредственным следствием теоремы 5.1 и леммы 6.1 является регуляризованный принцип максимума Понтрягина в итерационной форме для задачи (P^δ) , сформулированный в следующей теореме.

Теорема 6.1. Пусть δ^k , $k = 1, 2, \dots$, — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Для того чтобы в задаче (P^0) существовало минимизирующее приближенное решение (u , следовательно, сильно сходилась к u^0), необходимо, чтобы для последовательности двойственных переменных $(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$, порождаемой итерационным процессом

$$(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) = \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} \left((\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \mathfrak{F}_{\max}^\delta(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + 2\beta^k \alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (38)$$

с условиями согласования (16) выполнялись предельные соотношения

$$\begin{aligned} u_{\max}^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] &\in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}, \quad \epsilon^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \\ \langle (\lambda^k, \mu^k), \mathfrak{F}_{\max}^\delta(\lambda^k, \mu^k) \rangle &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (39)$$

для последовательности элементов $u_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих принципу максимума леммы 6.1. В этом случае последовательность $u_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]$, $k = 1, 2, \dots$, представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче (P^0) , а также имеет место сходимость $u_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k] \rightarrow u^0$, $k \rightarrow \infty$. Одновременно выполняется и предельное соотношение (34).

Обратно, для того чтобы в задаче (P^0) существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно, чтобы для последовательности двойственных переменных $(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$, порождаемой итерационным процессом (38) с условиями согласования (16), выполнялись предельные соотношения (39). В этом случае последовательность $u_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0) и имеет место сходимость $u_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k] \rightarrow u^0$, $k \rightarrow \infty$. Одновременно является справедливым и предельное соотношение (34).

Существенной особенностью регуляризованного итерационного принципа максимума Понтрягина теоремы 6.1, является то, что он предполагает, что величина δ^k , характеризующая ошибку исходных данных, стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Для практического применения при решении неустойчивых задач на основе устойчивого итерационного принципа максимума Понтрягина

теоремы 6.1, когда это условие $\delta^k \rightarrow 0$ не может быть обеспечено, теорема 6.1 снабжается регуляризующим правилом останова итерационного процесса. Указанное правило также является устойчивым алгоритмом построения минимизирующих приближенных решений в задаче (P^0) .

Пусть последовательности чисел δ^k , α^k , β^k , $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям (16). Зафиксируем следующее правило останова процесса

$$(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) = \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} \left((\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \mathfrak{F}_{\max}^\delta(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + 2\beta^k \alpha^k (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (40)$$

где $\bar{\lambda}^0 \in H$, при фиксированном конечном уровне погрешности $\delta > 0$, $\delta \leq \delta^1$. При каждом $\delta > 0$ итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенства $\delta^k \geq \delta$, $k = 1, 2, \dots, k(\delta)$.

В этом случае следствием теоремы 4.2 является следующее утверждение (правило останова итерационного процесса регуляризованного принципа максимума Понтрягина в итерационной форме).

Теорема 6.2. *В случае задания исходных данных с ошибкой фиксированного конечного уровня $\delta > 0$ в качестве приближенного решения задачи (P^0) может быть взят элемент $u_{\max}^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}]$, где $(\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)})$ — результат $k(\delta)$ итераций итерационного процесса (40). В этом случае имеют место предельные соотношения*

$$u_{\max}^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}] \rightarrow u^0, \quad V^0(\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}) \rightarrow \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} V^0(\lambda, \mu), \quad \delta \rightarrow 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А. В. Условия экстремума. Нормальные и вырожденные задачи. — М.: Факториал Пресс, 1997.
2. Милотин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении. — М., 2004.
3. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. — М.: МЦНМО, 2011.
4. Сумин М. И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2004. — 44, № 11. — С. 2001–2019.
5. Сумин М. И. Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2007. — 47, № 4. — С. 602–625.
6. Сумин М. И. Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — 54, № 1. — С. 25–49.
7. Сумин М. И. Некорректные задачи и методы их решения. — Н. Новгород: НГУ, 2009.
8. Сумин М. И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — 51, № 9. — С. 1594–1615.
9. Сумин М. И. Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2009. — 49, № 12. — С. 2083–2102.
10. Сумин М. И. Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // XII Всеросс. совещ. по проблемам управления (ВСПУ-2014, 16–19 июня 2014 г.). — М.: Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014.

Кутерин Федор Алексеевич

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

E-mail: kuterin.f@yandex.ru

Евтушенко Андрей Александрович

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 114–117
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-114-117

УДК 512.552, 515.126

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КООРДИНАТНОГО И АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЙ ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2019 г. М. Н. КРЕЙН

Аннотация. В работе обобщена теорема об эквивалентности координатного и алгебраического определения гладкого многообразия. При алгебраическом определении точкой называют гомоморфизм из алгебры гладких действительных функций, заданных на многообразии, в поле действительных чисел. Рассматривается обобщение для случая, когда поле действительных чисел заменяется на произвольную ассоциативную нормированную алгебру, в общем случае некоммутативную.

Ключевые слова: ассоциативная алгебра, многообразие, гомоморфизм алгебр, центральная алгебра.

GENERALIZATION OF A THEOREM ON THE EQUIVALENCE OF THE COORDINATE AND ALGEBRAIC DEFINITIONS OF A SMOOTH MANIFOLD

© 2019 M. N. KREIN

ABSTRACT. In this paper, we generalize the theorem on the equivalence of the coordinate and algebraic definitions of a smooth manifold. Within the framework of the algebraic approach, a point is considered as a homomorphism from the algebra of smooth real functions defined on a manifold into the field of real numbers. We consider a generalization for the case where the field of real numbers is replaced by an arbitrary associative normalized algebra, generally speaking, noncommutative.

Keywords and phrases: associative algebra, manifold, homomorphism of algebras, central algebra.

AMS Subject Classification: 47A99

Пусть K — нормированная алгебра, в общем случае некоммутативная, над полем k , содержащем поле действительных чисел $\mathbb{R}$, с открытым множеством обратимых элементов (например, операторная алгебра), M — действительное конечномерное многообразие, $\mathcal{F} = C_K(M)$ — алгебра непрерывных функций из M в K с поточечно определенными операциями, которая также некоммутативна, если некоммутативна K , $|\mathcal{F}|$ — множество k -гомоморфизмов из $\mathcal{F}$ в K с базой топологии $\{f^{-1}(V) \mid V \subset K \text{ открыто}, f \in |\mathcal{F}|\}$, $\theta : M \rightarrow |\mathcal{F}|$ — отображение, задаваемое формулой $[\theta(p)](f) = f(p)$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение θ инъективно.*
2. *Всякий гомоморфизм из $|\mathcal{F}|$, переводящий действительные функции в действительные элементы из K , представляется в виде суммы $\theta(p)$ для некоторого $p \in M$ и отображения β , все значения которого необратимы в K .*

3. Точка $p \in M$ определена однозначно.

Под действительными функциями здесь понимаются функции, принимающие значения в поле $\mathbb{R}$, вложенном в K .

Если в этих обозначениях вместо K и k берется поле действительных чисел, θ оказывается взаимно однозначным отображением, даже гомеоморфизмом. Это является одним из основополагающих фактов diffiety-теории (см. [?, теорема 7.2]).

Доказательство теоремы 1.

1. Инъективность отображения θ следует из того факта, что, поскольку M хаусдорфово, для различных точек $p, q \in M$ найдется функция $f \in \mathcal{F}$ с различными значениями $f(p)$ и $f(q)$, откуда $[\theta(p)](f) \neq [\theta(q)](f)$.

2. Выберем в $\mathcal{F}$ такую действительную функцию φ , что прообраз каждого ее значения компактен в M . (Условия, наложенные на алгебру K , обеспечивают включение множества действительных гладких функций в $\mathcal{F}$.) В [?, предложение п. 5.17] доказано, что такая действительная функция существует. Пусть $\alpha \in |\mathcal{F}|$, $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow K$ — некоторый гомоморфизм, $\alpha(\varphi) = \lambda \in \varphi(M) \subset \mathbb{R}$ и $L = \varphi^{-1}(\lambda)$. Предположим, что для любого $x \in L$ найдется такое $f_x \in \mathcal{F}$, что $[\alpha(f_x) - f_x(x)]$ обратимо. Тогда найдется такой элемент $c_x \in K$, что $c_x[\alpha(f_x) - f_x(x)] = 1$. Так как множество обратимых элементов открыто, то для некоторого $\varepsilon > 0$ в K существует ε -окрестность единицы, состоящая из обратимых элементов. (Тогда εn -окрестность для $n \in \mathbb{R}$ состоит из обратимых элементов.) В силу непрерывности функции f_x , а значит, и функции $c_x[\alpha(f_x) - f_x]$, в M найдется открытая окрестность U_x точки x , в которой значения последней функции лежат в указанной ε -окрестности единицы. Окрестности $\{U_x\}_{x \in L}$ образуют открытое покрытие множества L , и, в силу компактности L , из него можно выбрать конечное подпокрытие $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$. Определим функцию

$$g(x) = (\varphi(x) - \lambda)^2 + \sum_{i=1}^n \left[c_{x_i}(\alpha(f_{x_i}) - f_{x_i}(x)) \right]$$

Первое слагаемое здесь действительно, т.е. лежит в $\mathbb{R} \subset K$, и неотрицательно. Для любой точки $x \in M$ имеем

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \left\| [(\varphi(x) - \lambda)^2 + n] + \left\{ \sum_{i=1}^n [c_{x_i}(\alpha(f_{x_i}) - f_{x_i}(x))] - n \right\} \right\| \leq \\ &\leq [(\varphi(x) - \lambda)^2 + n] + \sum_{i=1}^n \left\| [c_{x_i}(\alpha(f_{x_i}) - f_{x_i}(x)) - 1] \right\|. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^n \left\| c_{x_i}(\alpha(f_{x_i}) - f_{x_i}(x)) - 1 \right\| \leq \varepsilon n \leq \varepsilon n_x,$$

где $n_x = (\varphi(x) - \lambda)^2 + n$, заключаем, что $g(x)$ лежит в (εn_x) -окрестности действительной положительной точки n_x , поэтому $g(x)$ обратимо при любом $x \in M$. Следовательно, на M определена функция $\frac{1}{g}$:

$$\left(\frac{1}{g} \right) (x) = [g(x)]^{-1}.$$

Для любой точки $x \in M$ имеем

$$\left(g \cdot \frac{1}{g} \right) (x) = g(x) \cdot [g(x)]^{-1} = 1,$$

т.е. $g \cdot \frac{1}{g}$ — единица алгебры $\mathcal{F}$, и

$$\alpha(g) \cdot \alpha\left(\frac{1}{g}\right) = \alpha\left(g \cdot \frac{1}{g}\right) = \alpha(1) = 1.$$

Значит, $\alpha(g)$ — обратимый элемент, потому не равен нулю. В то же время

$$\alpha(g) = \alpha \left[(\varphi - \lambda)^2 + \sum_{i=1}^n [c_{x_i}(\alpha(f_{x_i}) - f_{x_i})] \right] = [\alpha(\varphi) - \lambda]^2 + \sum_{i=1}^n \left\{ c_{x_i} [\alpha(f_{x_i}) - \alpha(f_{x_i})] \right\} = 0;$$

противоречие. Следовательно, предположение неверно, и существует такая точка $x_\alpha \in L$, что для всех $f \in \mathcal{F}$ отображение $\alpha(f) - f(x_\alpha) = \alpha(f) - [\theta(x_\alpha)](f)$ необратимо; здесь $\beta = \alpha - \theta(x_\alpha)$.

3. Пусть отображение $\alpha \in |\mathcal{F}|$ переводит действительные функции в действительные элементы алгебры $\mathcal{F}$, $\alpha = \theta(p) + \beta$, т.е. $\beta = \alpha - \theta(p)$. Так как все значения β необратимы, а среди действительных элементов необратим только нуль, то для всякой действительной функции $f \in \mathcal{F}$ имеем $\beta(f) = 0$, поэтому $\alpha(f) = \theta(p)(f) = f(p)$. Далее повторяем рассуждения доказательства п. 1, а именно: для различных точек $p, q \in M$ найдется действительная функция $f \in \mathcal{F}$ с различными значениями $f(p)$ и $f(q)$, откуда вытекает, что $[\theta(p)](f) \neq [\theta(q)](f)$.

Теорема доказана. $\square$

В п. 2 формулировки теоремы 1 на рассматриваемые гомоморфизмы накладывается условие, используемое в доказательстве и состоящее в том, что они переводят действительные функции в действительные элементы из K . Действительные функции, очевидно, принадлежат центру алгебры $\mathcal{F}$, поэтому их образ при любом гомоморфизме должен лежать также в центре алгебры K .

Алгебра линейных операторов конечномерного пространства над k является центральной. Это означает, что ее центр совпадает с полем k , т.е. с множеством операторов вида λI , где $\lambda \in k$, а I — тождественный оператор. Действительно, элементы центра по определению перестановочны со всеми элементами алгебры, значит, и с автоморфизмами, поэтому $AX = XA$ или $X = A^{-1}XA$ для всякого X , принадлежащего центру, и всякого автоморфизма A . Следовательно, матрица оператора не меняется при любом изменении базиса, что верно только для операторов вида λI .

Оказывается, аналогичное свойство верно и в гильбертовом пространстве.

Теорема 2. *Алгебра линейных ограниченных операторов гильбертова пространства является центральной.*

Доказательство. Пусть $K = B(H)$ — алгебра линейных ограниченных операторов гильбертова пространства H , X — оператор, принадлежащий ее центру.

1. Покажем, что любой вектор из H является собственным для X . Пусть $e_1 \in H$. Предположим, что $e_2 = X(e_1) \neq \lambda e_1$ для любого $\lambda \in k$; тогда e_1 и e_2 линейно независимы. Построим такой автоморфизм A , что $X(e_1) \neq (A^{-1}XA)(e_1)$. Положим $A(e_1) = e_1$, выберем $e_3 \neq \mu e_2$ и $e_3 \neq \lambda e_1$ ни для каких λ и μ из k и положим $A(e_3) = e_2$, $A(e_2) = e_3$. Векторы e_1, e_2, e_3 линейно независимы, $L = L(e_1, e_2, e_3)$ — конечномерное подпространство, имеющее в гильбертовом пространстве H имеет прямое дополнение H_1 (например, ортогональное дополнение). Пусть A_1 — какой-либо автоморфизм на H_1 . Тогда $A = A|_L \oplus A_1$. Отображение $A|_L$ задано выше на базисных элементах L , A — автоморфизм на H , L и A_1 — инвариантные подпространства для A . При этом

$$(A^{-1}XA)(e_1) = A^{-1}(X(A(e_1))) = A^{-1}(X(e_2)) = A^{-1}(e_3) = e_2 \neq e_1,$$

следовательно, $A^{-1}XA \neq X$. Значит, предположение неверно, и для любого $e_1 \in H$ найдется такое $\lambda \in k$, что $X(e_1) = \lambda e_1$.

2. Покажем, что это собственное значение единственно. Предположим, что $X(e_1) = \lambda_1 e_1$, $X(e_2) = \lambda_2 e_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда e_1 и e_2 линейно независимы, и в качестве автоморфизма A можно взять автоморфизм, переставляющий местами e_1 и e_2 и тождественный на дополнении к $L(e_1, e_2)$. Очевидно, $A^{-1} = A$. Получим

$$(A^{-1}XA)(e_1) = A^{-1}(X(A(e_1))) = A^{-1}(X(e_2)) = A^{-1}(\lambda_2 e_2) = \lambda_2 A^{-1}(e_2) = \lambda_2 e_1 \neq \lambda_1 e_1 = X(e_1),$$

т.е. $A^{-1}XA \neq X$. Следовательно предположение неверно, и $\lambda_1 = \lambda_2$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3 (следствие теорем 1 и 2). *Пусть K — алгебра линейных операторов конечномерного пространства над k или алгебра линейных ограниченных операторов гильбертова пространства, M — конечномерное многообразие. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение θ инъективно.*

2. *Всякий гомоморфизм из $|\mathcal{F}|$ представляется в виде суммы $\theta(p)$ для некоторого $p \in M$ и гомоморфизма β , все значения которого необратимы в K .*
3. *Точка $p \in M$ определена однозначно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неструев Дж.* Гладкие многообразия и наблюдаемые. — М.: МЦНМО, 2000.

Крейн Мария Нехемьевна

Липецкий государственный педагогический университет

E-mail: kreyn_mara@mail.ru



ТЕОРЕМА О НОСИТЕЛЕ ДЛЯ K_γ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА—КИПРИЯНОВА

© 2019 г. Л. Н. ЛЯХОВ, М. Г. ЛАПШИНА, С. А. РОЩУПКИН

Аннотация. Теорема о носителе для преобразования Радона получена Л. Хелгасоном. Преобразование Радона функций от групп переменных, связанных сферической симметрией, оказывается частным случаем более общего преобразования — преобразованием Радона—Киприянова K_γ . Это преобразование отвечает весовому мультииндексу $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ и совпадает с преобразованием Радона функций от многоосевой симметрии, когда все составляющие мультииндекса γ суть натуральные целые числа. В общем случае K_γ -преобразование может трактоваться как преобразование функций дробномерного аргумента. В данной работе доказана общая теорема о носителе. В частном случае, когда $\gamma = 0$, эта теорема совпадает с теоремой Хелгасона.

Ключевые слова: преобразование Радона, теорема о носителе, преобразование Радона—Киприянова.

SUPPORT THEOREM FOR THE RADON—KIPRIYANOV K_γ -TRANSFORM

© 2019 L. N. LYAKHOV, M. G. LAPSHINA, S. A. ROSHCHUPKIN

ABSTRACT. The support theorem for the Radon transform was obtained by L. Helgason. The Radon transform of functions of groups of variables related by spherical symmetry is a special case of a more general transformation, namely, the Radon—Kipriyanov transform K_γ . This transformation corresponds to a weight multi-index $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ and coincides with Radon transform if all components of the multi-index γ are natural numbers. In general, the K_γ -transformation can be interpreted as a transformation of functions of a fraction-dimensional argument. In this paper, we prove a general support theorem. In a special case where $\gamma = 0$, this theorem coincides with the Helgason theorem.

Keywords and phrases: Radon transform, support theorem, Radon—Kipriyanov transform.

AMS Subject Classification: 39A06

1. О размерности аргумента, порождаемого функцией от сферической симметрии и преобразование Радона радиальных функций. Дробный интеграл Римана—Лиувилля $(I_b^\alpha f)(x)$, $\alpha > 0$, $x < b$, при $x = 0$, $\alpha = n$ сводится к интегралу по n -мерному евклидову пространству $\mathbb{R}_n$. Если вместо площади сферы в $\mathbb{R}_n$ воспользоваться «площадью взвешенной сферы»

$$|S_1(n)|_\gamma = \int_{S_1(n)} (x^2)^{\gamma/2} dS = \frac{2 \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)},$$

то указанный интеграл Римана—Лиувилля сведется к интегралу с весом $\prod_{i=1}^n x_i^{\{\gamma_i\}}$, где мы положили $\alpha = |\gamma| = [\gamma] + \{\alpha\}$, $[\gamma] = n$ и $\{\alpha\} = \sum_{i=1}^n \{\gamma_i\} < 1$. Предел этого выражения при $\{\alpha\} \rightarrow 0$ и $\{\alpha\} \rightarrow 1$ есть интеграл от радиальной функции по евклидову пространству размерности n или $n + 1$ соответственно. Таким образом, определенный интеграл Римана—Лиувилля может трактоваться как интеграл от радиальной функции в $\mathbb{R}_{n+\{\alpha\}}$ дробной размерности $n + \{\alpha\}$.

Преобразование Радона радиальной функции. Пусть $\delta(P)$ — δ -функция, сосредоточенная на $(n - 1)$ -мерной поверхности $P(x) = 0$ в $\mathbb{R}_n$. Преобразование Радона зададим в форме

$$R[f](\xi, p) = \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \delta(p - \langle x, \xi \rangle) dx,$$

где $\langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^N x_i \xi_i$ — скалярное произведение N -мерных векторов в евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}_N$. Если предположить, что функция f сферически симметрична, т.е. $f = f(|x|)$, то ее преобразование Радона сферическим преобразованием координат приводится к виду

$$R[f](\xi, p) = |S_1(n)| \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty f(x) \int_0^\pi \delta(p - r \cos \varphi) \sin^{n-2} \varphi d\varphi \rho^{n-1} d\rho,$$

где $|S_1(n)|$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}_n$. Воспользовавшись определением оператора Пуассона

$$P_\rho^{n-1} g(r) = \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{k-1}{2})} \int_0^\pi g(r \cos \varphi) \sin^{k-2} \varphi d\varphi,$$

получим

$$R[f](\xi, p) = |S_1(n)| \int_0^\infty f(x) P_r^{n-1} \delta(p - r) \rho^{n-1} d\rho.$$

Здесь δ -функционал действует в смысле И. А. Киприянова для работы в весовых функциональных классах: $(\delta, x^\gamma f) = f(0)$ (см., например, [2, с. 18, с. 116]). Полученное интегральное выражение представляет частный случай преобразования

$$R[f](\xi, p) = |S_1(n)| \int_0^\infty f(x) P_\xi^\gamma \delta(p - x\xi) x^\gamma dx,$$

которое является одномерным преобразованием Радона—Киприянова (в общем случае это преобразование введено в [3], основные свойства доказаны в [6]). Если $\gamma = [\gamma] + \{\gamma\}$, то при $[\gamma] = n - 1$ и $\{\gamma\} \rightarrow 0$ оно стремится к преобразованию Радона радиальной функции в $\mathbb{R}_n$. Если $\{\gamma\} \rightarrow 1$, то оно стремится к преобразованию Радона радиальной функции в $\mathbb{R}_{n+1}$. Это позволяет трактовать K_γ -преобразование как преобразование радиальной функции в $\mathbb{R}_{n+\gamma}$. Но, разумеется, эта дробная размерность порождена самим преобразованием K_γ .

2. Преобразование Радона—Киприянова. Пусть N и n ($1 \leq n \leq N$) — фиксированные натуральные числа, $\mathbb{R}_N$ — евклидово пространство точек $x = (x', x'')$, где $x' \in \mathbb{R}_n$, $x'' \in \mathbb{R}_{N-n}$. В $\mathbb{R}_N$ выделим область $\mathbb{R}_N^+ = \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}$, где $\mathbb{R}_n^+ = \{x' \in \mathbb{R}_n : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ — евклидово n -полупространство. Следуя [2, с. 21], функции $f = f(x)$, заданные в $\mathbb{R}_N^+$ и допускающие по каждой переменной x_i , $i = 1, \dots, n$, четное продолжение в $\mathbb{R}_N$ с сохранением своего функционального класса, будем называть x' -четными по Киприянову (далее просто x' -четными).

Через $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ обозначим мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел. Пространство $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$ состоит из x' -четных основных функций пространства основных функций Л. Шварца $S = S(\mathbb{R}_N)$. Далее рассматриваются только функции, принадлежащие S_{ev} .

Преобразование Радона—Киприянова (K_γ -преобразование) x' -четной функции f определено в [3, 6] выражением

$$K_\gamma[f](\xi; p) = \int_{\mathbb{R}_N^+} f(x) P_{x'}^\gamma \delta(p - \langle x, \xi \rangle) (x')^\gamma dx, \quad (x')^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i},$$

где $P_{x'}^\gamma$ — многомерный оператор Пуассона, действующий по весовым переменным $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $n \leq N$, по формуле

$$P_{x'}^\gamma g(x', x'') = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi g(x_1 \cos \alpha_1, \dots, x_n \cos \alpha_n, x'') \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i d\alpha_1 \dots d\alpha_n.$$

Теорема Хелгасона о носителе (см. [11, с. 117]) гласит, что если функция f достаточно быстро убывает и $R[f](\xi, p) = 0$ для всех $p > p_0$, то $f(x) = 0$ для всех $|x| > p_0$. Для преобразования Радона—Киприянова аналогичный результат был получен в диссертации [1], но только для случая одной весовой переменной $n = 1$. Для произвольного случая в доказательстве возникли трудности принципиального характера, обойти которые удалось применением результатов работ [7–9]. При этом в случае, когда все $\gamma_i = 0$, полученное в этой работе утверждение совпадает с классической теоремой Хелгасона о носителе.

Введем формулировки вспомогательных результатов.

Теорема о K_γ -преобразовании x' -радиальной функции. Весовые переменные в определении преобразования Радона—Киприянова обозначены символом x' , т.е. $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $n \leq N$. x' -Радиальной называем функцию, определенную в $\mathbb{R}_N$ с гиперосевой сферической симметрией: $f = f(|x'|, x'')$. Пусть $\gamma = m + \{|\gamma|\}$, где $m = \lfloor |\gamma| \rfloor$ — целая часть числа $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$. Основную роль в наших рассуждениях играет следующее утверждение о возможности замены K_γ -преобразования x' -радиальной функции, определенной в $\mathbb{R}_N$, преобразованием $K_{N+m+\{\gamma\}}$, определенном в $\mathbb{R}_{N+m+1}$ содной весовой переменной, нагруженной весом $x_1^{\{|\gamma|\}}$ (см. [7]).

Теорема 1. K_γ -Преобразование с мультииндексом $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $1 \leq n \leq N$, радиальной функции $f = f(|x'|, x'') \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_N^+)$, $|x'| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $1 \leq n \leq N$, не зависит от вектора ξ' и выражается через $(N+1)$ -мерное преобразование Радона—Киприянова с индексом размерности $\mu = |\gamma| + N - 1$ функции одной весовой переменной $\tilde{f} = f(r, x'')$ по формуле

$$K_\gamma[f](\xi; p) = K_\gamma[\tilde{f}](p, \eta) = |S_1(n)|_\gamma K_{|\gamma|+N-1}[\tilde{f}](p, \eta), \quad \eta = (\eta_1, \xi'') \in \mathbb{R}_{N-n+1},$$

где коэффициент $|S_1^+(n)|_\gamma$ — весовая площадь части сферы $S_1^+(N) = \{x \in \mathbb{R}_N^+, |x'| = 1\}$, равный

$$|S_1^+(n)|_\gamma = \int_{S_1^+(n)} \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dS = \frac{\pi^{(N-n)/2} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad \gamma_i > 0.$$

Теорема о сферическом преобразовании обобщенного сдвига Пуассона (см. [3, 6]). Рассмотрим мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\gamma_i > 0$ и $m \geq 0$. Пусть $x \in R_{m+n}^+ = \{x \in R_{m+n} : x_1 > 0, \dots, x_m > 0\}$. Выделяя одну из переменных, будем писать $x = (x_i, x^i)$, полагая $x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+n})$. Смешанный обобщенный сдвиг, отвечающий этому мультииндексу γ , имеет вид

$$f \rightarrow ({}^\gamma T^y f)(x) = \prod_{i=1}^n \gamma_i T_{x_i}^{y_i} f(x', x'' - y''),$$

где каждый из одномерных обобщенных сдвигов $\gamma_i T_{x_i}^{y_i}$, $i = 1, \dots, n$, определен по формуле

$$\gamma_i T_{x_i}^{y_i} : f \rightarrow (T_{x_i}^{y_i} f)(x_i, x^i) = \frac{\Gamma(\gamma_i+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\gamma_i+\frac{1}{2})} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha}, x^i\right) \sin^{\gamma_i-1} \alpha d\alpha.$$

Теорема 2. Пусть ${}^\gamma T^y$ — смешанный обобщенный сдвиг, отвечающий мультииндексу размерности γ . Для произвольных абсолютно суммируемых с весом $\prod_{j=1}^m x_j^{\gamma_j}$ радиальных функций $f = f(|x|)$ и $g = g(|x|)$ имеет место равенство

$$(f * g)_\gamma = \int_{R_{n+m}^+} f(|y|) {}^\gamma T^y g(x) \prod_{j=1}^m x_j^{\gamma_j} dy = |S_1^+(m)|_\gamma \int_0^\infty f(r) {}^\mu T^r g(r) r^\mu dr, \quad \mu = m + n + |\gamma| - 1,$$

где $S_1^+(m)$ — поверхность части единичной сферы $|x'| = 1$, определенной неравенствами $x_i > 0$, $\dots$, $x_m >$, и

$$|S_1(m)|_\gamma = \int_{S_1^+(m)} \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dS = \frac{\pi^{n/2} \prod_{i=1}^m \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m+n+|\gamma|+1}{2}\right)}.$$

Из этой теоремы следует, что K_γ -преобразование Радона—Киприянова радиальной функции есть снова преобразование Радона—Киприянова, размерность которого увеличилась на размерность сферически симметричной части евклидова пространства, отвечающей данной радиальной функции.

Лемма 1. Пусть интегрируемая x' -четная функция f такова, что функция $|x|^k f(x)$ ограничена для всех натуральных k . Предположим, что при этом для всех $R > r_0$, $x \geq 0$, выполняется равенство

$$M[f](x', x'') = \int_{S_1^+(0)} T_x^{R\Theta} f(x', x'') (y')^{\gamma-1} dS(\Theta) = 0, \quad (1)$$

где $S_1^+(0)$ — единичная полуокружность в $\mathbb{R}_n$ с центром в начале координат. Тогда $f(x) = 0$ для всех $|x| > r_0$.

Доказательство. Упрощенный вариант этой леммы содержится в [10]. Переменные x'' можем считать фиксированными, поэтому далее эти переменные не записываем.

Через $\{|x| < R\}_n^+$ и $\{|x| > R\}_n^+$ обозначим указанные в скобках множества, принадлежащие n -полупространству. Очевидно, что

$$\int_{\{|x| < R\}_n^+} (T^x f)(y) y^\gamma dy = \left(\int_{\mathbb{R}_n^+} - \int_{\{|x| > R\}_n^+} \right) (T^x f)(y) y^\gamma dy.$$

Известно, что при интегрировании по $\mathbb{R}_n^+$ обобщенный сдвиг Пуассона является самосопряженным (см. [4]). Поэтому

$$\int_{\{|x| < R\}_n^+} (T^x f)(y) y^\gamma dy = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(y) y^\gamma dy - \int_{\{|x| > R\}_n^+} (T^x f)(y) y^\gamma dy.$$

Здесь последний интеграл запишем в сферических переменных $x = r\theta$. Это приведет к представлению через сферический интеграл:

$$\int_{\{|x| > R\}_n^+} (T^x f)(y) y^\gamma dy = C(\gamma) \int_R^\infty r^{n+|\gamma|-1} \int_{S_1^+(n)} T^{r\Theta} f(x) \prod_{i=1}^n \Theta_i^{\gamma_i} dS(\Theta).$$

Если $|y| = R > 1$, то по условию леммы сферический интеграл равен нулю, и мы получим

$$\int_{\{|x| < R\}_n^+} (T^x f)(y) y^\gamma dy = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(y) y^\gamma dy.$$

Рассмотрим левую часть этого равенства. Учитывая действия сдвига Пуассона, по каждой паре переменных (x_i, α_i) введем антиполярные координаты

$$\begin{cases} z_{2i-1} = y_i \cos \alpha_i, \\ z_{2i} = y_i \sin \alpha_i \end{cases} \quad 0 < \alpha_i < \pi, \quad \begin{cases} z_1 \in (-R, R), \\ z_2 \in (0, R). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\{|x| < R\}^+} (T^x f)(y) y^\gamma dy = \\ = C(\gamma) \int_{\{|x| > R\}_{2n}^+} f \left(\sqrt{(z_1 - x_1)^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{(z_{2n-1} - x_n)^2 + z_{2n}^2} \right) \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i - 1} dz. \end{aligned}$$

Для сокращения записи положим

$$f \left(\sqrt{(z_1 - x_1)^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{(z_{2n-1} - x_n)^2 + z_{2n}^2} \right) = \tilde{f}(z_1, z_2).$$

Следовательно,

$$C(\gamma) \int_{B_R} \tilde{f}(z_1 - x, z_2) z_2^{\gamma-1} dz = \int_0^\infty f(y) y^\gamma dy.$$

Здесь правая часть не зависит от x . Дифференцируя по одной из переменных x_i , получим

$$\int_{\{|x| < R\}_n^+} \tilde{f}'_{x_i}(z_1 - x, z_2) z_2^{\gamma-1} dz = 0$$

или

$$\int_{B_R} \tilde{f}'_{z_{2i-1}}(z_1 - x, z_2) z_2^{\gamma-1} dz = 0.$$

Применим формулу Грина интегрирования по частям в $\mathbb{R}_{2n}$. В результате

$$\int_{\{|x| < R\}_n^+} \tilde{f}'_{z_1}(z_1 + x, z_2) z_2^{\gamma-1} dz = \int_{S_R(0)} \tilde{f}_{z_1}(z_1 - x, z_2) z_2^{\gamma-1} \cos(\bar{\nu}, z_{2i-1}) d\Gamma.$$

Здесь вектор внешней нормали $\bar{\nu}$ к окружности с центром в начале координат совпадает с радиус-вектором точки z . Поэтому $\cos(\bar{\nu}, z_{2i-1}) = (z_{2i-1})/R$. Следовательно,

$$\int_{B_R} \tilde{f}(z_1 + x, z_2) z_2^\gamma dz = \int_{S_R(0)} \tilde{f}(z_1 - x, z_2) z_2^{\gamma-1} \frac{z_{2i-1}}{R} d\Gamma,$$

и мы имеем равенство

$$\int_{S_R(0)} \tilde{f}(z_1 - x, z_2) z_2^{\gamma-1} z_{2i-1} d\Gamma = 0.$$

При этом

$$\int_{S_R(0)} \tilde{f}(z_1 - x, z_2) (z_{2i-1} - x) z_2^{\gamma-1} d\Gamma = 0.$$

Начало координат удобно перенести в точку $z_1 = x, z_2 = 0$; тогда получим равенство

$$\int_{S_R(x,0)} \tilde{f}(z_1, z_2) z_{2i-1} z_2^{\gamma-1} d\Gamma = 0.$$

Отсюда следует, что равенство (1) выполняется для функции

$$\tilde{f}_1(z_1, z_2) = z_1 f_1 \left(\sqrt{(z_1 - x)^2 + z_2^2} \right).$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$\int_{S_R(x,0)} \tilde{f}(z_1, z_2) z_1^2 z_2^{\gamma-1} d\Gamma = 0.$$

Следовательно, для произвольного многочлена $P_m(z_1)$ порядка m имеем равенство

$$\int_{S_R(x,0)} \tilde{f}(z_1, z_2) P_m(z_1) z_2^{\gamma-1} d\Gamma = 0.$$

Переменную z_1 примем за параметр кривой S_R : $z_2 = \sqrt{R^2 - z_1^2}$. Тогда получим

$$\int_{-R < |z_1| < R} \tilde{f} \left(z_1, \sqrt{R^2 - z_1^2} \right) P(z_1) R (R^2 - z_1^2)^{(\gamma-2)/2} dz_1 = 0.$$

Для произвольного многочлена $p_m(z_1)$ такое равенство возможно лишь при условии, что

$$\tilde{f} \left(z_1, \sqrt{R^2 - z_1^2} \right) = 0.$$

Поскольку точка $(z_1, \sqrt{R^2 - z_1^2})$ принадлежит окружности $z_1^2 + z_2^2 = R^2$ при $R > 1$, а

$$\tilde{f} \left(z_1, \sqrt{R^2 - z_1^2} \right) = f \left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2} \right) = f(y),$$

получаем утверждение леммы: $f(y) = 0$ для всех $|y| > 1$. Доказательство закончено. $\square$

3. Теорема о носителе для K_γ -преобразования.

Теорема 3. Пусть число $\gamma > 0$ функция $f \in C_{ev}(E_N^+)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (1) для любого целого $k > 0$ функция $|x|^k f(x)$ ограничена;
- (2) существует такая постоянная $A > 0$, что

$$K_\gamma[f](\xi; p) = 0, \quad p > A.$$

Тогда

$$f(x) = 0, \quad |x| > A.$$

Доказательство. Исходим из того, что это утверждение справедливо для случая, когда весовая переменная единственна, т.е. когда $n = 1$. Вначале рассмотрим x' -радиальную функцию $f = f(|x'|, x'')$, и $x' \in \mathbb{R}_n^+$, $n > 1$. При этом, согласно теореме 1, имеет место равенство

$$\begin{aligned} K_\gamma[f_\Theta(|x'|, x'')](\xi, p) &= |S_1(n)| K_{\gamma+N-1}[f_\Theta(r, x'')](\eta'', p) = \\ &= |S_1(n)| \int_{\mathbb{R}_\mu^+} f_\Theta(r, y) P_{y_1}^{\gamma+n-1} \delta(p - \langle y, \eta \rangle) y_1^{|\gamma|+n-1} dr dx'', \end{aligned} \quad (2)$$

где введены следующие обозначения:

$$y = (r, x''), \quad \eta = (\eta_1, \xi'') \in \mathbb{R}_{N-n+1}, \quad |\eta| = 1,$$

а оператор Пуассона нового порядка $\mu = n + |\gamma| - 1$ действует только по переменной r . Отметим, что для функции f выполняется первое условие теоремы 3: $|y|^k f_{\Theta(y)}$ — ограниченная функция в $\mathbb{R}_{N-n+1}^+$. Из равенства (2) следует, что если $K_\gamma[f](\xi, p) = 0$ для всех $p > A$, то и

$$K_{\gamma+n-1}[f_\Theta](\eta, p) = 0 \quad \text{для всех } p > A.$$

Для функции f справедлива теорема о носителе (теорема 3 при $n = 1$). Это значит, что $f(y) = f(r, x'') = 0$ для всех $\{y : |y| > A\}$.

Рассмотрим общий случай $f = f(x)$, $x = (x', x'') \in \mathbb{R}_N^+$. По части переменных x' введем весовое сферическое среднее, порожденное сдвигом Пуассона:

$$M[f](r, x'') = \int_{S_1^+(n)} (T_{y'}^x f)(y', y'') (y')^\gamma dS(y).$$

К функции $M[f](r, x'')$ применима теорема, поскольку она является x' -радиальной (зависит от $(|x'|, x'')$, $r = |x'|$). Таким образом, если $K_{M+|\gamma|-1}M[f](p; \xi) = 0$ при $\sqrt{r^2 + |x''|^2} > A$, то и $M[f](r, x'') = 0$. Теперь справедливость теоремы 3 с очевидностью вытекает из леммы 1. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гоц Е. Г. Формулы обращения преобразования Киприянова—Радона и аналоги теоремы типа Планшереля и теоремы о носителе/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Воронеж: ВГУ, 2006.
2. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
3. Киприянов И. А., Ляхов Л. Н. О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона// Докл. РАН. — 1998. — 360, № 2. — С. 157–160.
4. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье// Усп. мат. наук. — 1951. — 6, № 2 (42). — С. 102–143.
5. Ляхов Л. Н. Обращение преобразования Киприянова—Радона// Докл. РАН. — 2004. — 399, № 5. — С. 597–600.
6. Ляхов Л. Н. Преобразование Киприянова—Радона// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2005. — 248. — С. 153–163.
7. Ляхов Л. Н. Преобразование Радона—Киприянова обобщенного сферического среднего значения функции// Мат. заметки. — 2016. — 100, № 1. — С. 118–132.
8. Ляхов Л. Н., Лапшина М. Г. Обращение интегральных операций с весовой плоской волной// Пробл. мат. анализ. — 2016. — 84. — С. 113–122.
9. Ляхов Л. Н., Рошупкин С. А., Санина Е. Л. Сферическое преобразование обобщенного сдвига Пуассона и некоторые свойства весовых лебеговых классов функций// Пробл. мат. анализ. — 2017. — № 88. — С. 87–95.
10. Санина Е. Л., Рошупкин С. А. О носителе функции с нулевым весовым интегралом по окружности от обобщенного сдвига Пуассона// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — № 4. — С. 181–185.
11. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. — М.: Мир, 1987.

Ляхов Лев Николаевич

Воронежский государственный университет

E-mail: levnlya@mail.ru

Лапшина Марина Геннадьевна

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского

E-mail: marina.lapsh@yandex.ru

Рошупкин Сергей Александрович

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

E-mail: roshupkinsa@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 125–139
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-125-139

УДК 517.977.54, 519.862.8

КОМПРОМИССНОЕ РЕШЕНИЕ В МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ С ЗАМЕНОЙ ОБОРУДОВАНИЯ

© 2019 г. О. А. МАЛАФЕЕВ, А. П. ПАРФЕНОВ

Аннотация. Формализована задача оптимальной стратегии замены оборудования в отрасли экономики при наличии ценовых ожиданий и ожиданий технического прогресса, нейтрального по Харроду. Нужно определить стратегию покупки и списания оборудования в каждый момент времени, минимизирующую интегральные затраты с учетом дисконта. В частном случае, когда оборудование не подвержено старению, она формализована как задача оптимального управления с дополнительным условием возрастания функции. Получено аналитическое решение этой задачи методом дискретизации по времени и последующим решением методом динамического программирования. В общем случае динамическое программирование неприменимо, и дискретизация по времени позволяет получить лишь приближенное численное решение. Далее предполагается, что разные подотрасли имеют разные функции дисконта, описывающие зависимость полезности от динамики затрат с течением времени. В качестве принципа оптимальности используется компромиссное решение. В этом случае дискретизация по времени также позволяет получить приближенное численное решение.

Ключевые слова: макроэкономическая модель, оптимальное управление, замена оборудования, динамическая оптимизация, динамическое программирование, компромиссное решение.

COMPROMISE SOLUTION IN AN ECONOMY MODEL WITH REPLACEMENT OF EQUIPMENT

© 2019 О. А. MALAFEEV, A. P. PARFENOV

ABSTRACT. In this paper, we formalize the problem on the optimal strategy for replacing equipment in a branch of economy in the presence of price expectations and expectations of Harrod-neutral technological progress. The problem is to determine a strategy for the purchase and write-off of equipment at each moment of time minimizing the integral costs taking into account the discount. In the particular case where the equipment is not subject to aging, the problem is formalized as an optimal control problem with an additional condition of increasing the function. An analytical solution of this problem is obtained by the time discretization method and subsequent solving by the dynamic programming method. In the general case, dynamic programming is not applicable, and time discretization provides only an approximate numerical solution. Further, we assume that various branches have different discount functions describing the dependence of utility on cost dynamics over time. As an optimality principle, we use a compromise solution. In this case, time discretization also allows one to obtain an approximate numerical solution.

Keywords and phrases: macroeconomic model, optimal control, replacement of equipment, dynamic optimization, dynamic programming, compromise solution.

AMS Subject Classification: 49L20, 91B38

Введение. Динамические модели макроэкономики нередко формализуются как задачи оптимального управления. В более простых случаях предполагается, что все функции от времени задаются в определенной форме, а оптимизации подлежат лишь параметры модели. Так, в [3] формализована задача оптимальной стратегии замены оборудования в отрасли экономики при наличии ценовых ожиданий и ожиданий технического прогресса, нейтрального по Харроду. При этом предполагается, что выполнены следующие условия:

- (1) отрасль производит однородные продукты, имеющие одинаковую ценность;
- (2) оборудование, используемое в производстве, однородно, т.е., «машины» могут отличаться только сроком службы. Машина рассматривается как единое целое, т.е. она может быть отремонтирована или заменена только целиком, без учета деталей;
- (3) отказ оборудования не влечет дополнительных потерь. Это значит, что профилактический ремонт не целесообразен: оборудование ремонтируется только в случае поломки;
- (4) замена оборудования требует только затрат на покупку нового оборудования, которую можно производить, не останавливая производство;
- (5) ценовые ожидания и ожидания технического прогресса описываются экспоненциальными функциями;
- (6) количество продукции, выпускаемой в отрасли, задано (например, определяется спросом).

Полезность определяется динамикой прибыли, т.е. динамикой затрат при заданном количестве выпускаемой продукции. Определена интегральная полезность с дисконтом, причем функции дисконта для разных фирм в отрасли различны.

В [3] предполагается, что оборудование один раз куплено, а потом только обслуживается, и задача оптимизации сводится к определению количества купленного оборудования. В данной же работе рассмотрена динамика покупки и списания оборудования, а значит, и распределение оборудования по возрастам в каждый момент времени.

В разделе 1 формализована задача определения стратегии покупки и списания оборудования, минимизирующая интегральные затраты с учетом дисконта.

В разделе 2 рассмотрен частный случай, когда оборудование не подвержено старению. В этом случае получается задача оптимального управления с интегрально-терминальной целевой функцией (задача Больца) с дополнительным условием возрастания функции. Получено решение этой задачи методом дискретизации по времени и последующим решением методом динамического программирования. В этом случае получено аналитическое решение.

В разделе 3 рассмотрен общий случай. Показано, что динамическое программирование неприменимо, и дискретизация по времени позволяет получить лишь приближенное численное решение. Далее предполагается, что разные подотрасли имеют разные функции дисконта, описывающие зависимость полезности от динамики затрат с течением времени. В качестве принципа оптимальности используется компромиссное решение, согласующее интересы разных фирм. В этом случае дискретизация по времени также позволяет получить приближенное численное решение.

1. Описание общей модели. Пусть в отрасли производится один продукт в количестве

$$X(t) = X_0 e^{xt}$$

в единицу времени, цена которого

$$P(t) = P_0 e^{pt}.$$

Пусть $K(t, s)$ — это капитал, т.е. количество оборудования, купленного в момент времени s и используемого в момент t , а $L(t, s)$ — это труд, т.е. количество рабочих, работающих в момент t на оборудовании, купленном в момент s . Таким образом, функции K , L неотрицательны и определены только при $t \geq s$. Пусть начальное распределение капитала по возрасту описывается функцией $K_0(s)$, где $s \leq 0$.

Пусть фиксированная доля d оборудования в единицу времени выходит из строя, так что к моменту t остается

$$K(t, s) = e^{-d(t-s)}(K_0(s) + B(s)) - U(t, s), \quad (1)$$

где $B(s)$ — количество оборудования, купленного в момент s , $U(t, s)$ — количество оборудования, купленного в момент s и списанного к моменту t . Таким образом, функции $B(s)$ и $U(t, s)$ неотрицательны и определены при $s \geq 0$, $t \geq 0$. Функция $U(t, s)$ определена только при $t \geq s$, возрастает по t и удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq U(t, s) \leq e^{-d(t-s)} B(s).$$

Тогда общее количество оборудования равно

$$K(t) = \int_0^t K(t, s) ds = K_0 e^{-dt} + \int_0^t (e^{-d(t-s)} B(s) - U(t, s)) ds,$$

где

$$K_0 = \int_0^t e^{ds} K_0(s) ds.$$

Общее количество рабочей силы равно

$$L(t) = \int_0^t L(t, s) ds.$$

Пусть производственная функция — это функция Кобба—Дугласа с учетом научно-технического прогресса (для нового оборудования), нейтрального по Харроду:

$$X(K(t), L(t), t) = AK(t)^a (L(t)e^{gt})^{1-a}, \quad (2)$$

т.е. прогресс связан с повышением эффективности рабочей силы.

Однако по мере старения оборудования нужно тратить все больше работы, чтобы получить тот же результат. Поэтому для более старого оборудования требуется больше рабочей силы. Пусть удельная норма труда на единицу капитала равна $L(t)/K(t) = l(t)$. Тогда без учета старения оборудования производственная функция (2) выглядела бы так:

$$X(K(t), L(t), t) = AK(t)^a (l(t)K(t)e^{gt})^{1-a} = AK(t)l(t)^{1-a} e^{(1-a)gt}.$$

С учетом старения оборудования норма труда на единицу капитала для оборудования, купленного в момент s , умножается на $e^{m(t-s)}$. Следовательно, распределение рабочей силы определяется формулой

$$L(t, s) = l(t)e^{m(t-s)} K(t, s).$$

Производственная функция с учетом старения оборудования имеет вид

$$\begin{aligned} X(t) &= X(K(t, s), L(t, s), t) = AK(t)l(t)^{1-a} e^{(1-a)gt} = \\ &= Al(t)^{1-a} e^{(1-a)gt} \left(K_0 e^{-dt} + \int_0^t (e^{-d(t-s)} B(s) - U(t, s)) ds \right). \end{aligned}$$

Стоимость оборудования и зарплата меняются по экспоненциальному закону:

$$Q(t) = Q_0 e^{qt}, \quad W(t) = W_0 e^{wt},$$

а процентная ставка на рынке равна r , т.е. стоимость денег меняется со временем как e^{-rt} .

Затраты на производство в единицу времени $C(t)$ зависят от функций B , U , l , а также от экзогенных параметров:

$$\begin{aligned}
C(t) &= Q(t)B(t) + L(t)W(t) = Q_0 e^{qt} B(t) + W_0 e^{wt} \int_0^t l(t) e^{m(t-s)} K(t, s) ds = \\
&= Q_0 e^{qt} B(t) + W_0 e^{(w+m)t} l(t) \int_0^t e^{-ms} (e^{-dt+ds} (K_0(s) + B(s)) - U(t, s)) ds = \\
&= Q_0 e^{qt} B(t) + W_0 e^{(w+m)t} l(t) \left(K_0^* e^{-dt} + e^{-dt} \int_0^t e^{(d-m)s} B(s) ds - \int_0^t e^{-ms} U(t, s) ds \right),
\end{aligned}$$

где

$$K_0^* = \int_0^t e^{(d-m)s} K_0(s) ds.$$

2. Модель без старения оборудования.

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим сперва частный случай, когда обслуживание оборудования не требует роста численности рабочей силы со временем, т.е. $m = 0$. В этом случае не имеет смысла рассматривать распределение капитала и рабочей силы по возрастам $K(t, s)$ и $L(t, s)$ и начальное распределение капитала $K_0(s)$: нам нужны только функции $K(t)$, $L(t)$ и константа $K_0 = K_0^*$. Производственная функция тогда описывается формулой (2).

Тогда для любого заданного $B(t)$ выгодно иметь $K(t)$ как можно больше, чтобы $L(t)$ было как можно меньше. Следовательно, в оптимальном случае оборудование не списывается: $U(t, s) = 0$. В этом случае количество продукции описывается формулой

$$\begin{aligned}
X(t) &= Al(t)^{1-a} e^{(1-a)gt} \left(K_0 e^{-dt} + \int_0^t e^{-d(t-s)} B(s) ds \right) = \\
&= Al(t)^{1-a} e^{((1-a)g-d)t} \left(K_0 + \int_0^t e^{ds} B(s) ds \right),
\end{aligned}$$

откуда можно выразить $l(t)$:

$$l(t) = \frac{(X(t)/A)^{1/(1-a)} e^{(-g+d/(1-a))t}}{\left(K_0 + \int_0^t e^{ds} B(s) ds \right)^{1/(1-a)}} = \frac{X_0^{1/(1-a)} A^{-1/(1-a)} e^{(-g+(d+x)/(1-a))t}}{\left(K_0 + \int_0^t e^{ds} B(s) ds \right)^{1/(1-a)}}.$$

Тогда затраты в момент t равны

$$\begin{aligned}
C(t) &= Q_0 e^{qt} B(t) + W_0 e^{wt} l(t) \int_0^t e^{-dt+ds} B(s) ds = \\
&= Q_0 e^{qt} B(t) + W_0 e^{(w-d)t} l(t) \int_0^t e^{ds} B(s) ds = \\
&= Q_0 e^{qt} B(t) + W_0^* e^{(w+(da+x)/(1-a)-g)t} \left(K_0 + \int_0^t e^{ds} B(s) ds \right)^{-a/(1-a)} = \\
&= Q_0 e^{qt} B(t) + \frac{W_0^* e^{(w+(da+x)/(1-a)-g)t}}{\left(K_0 + \int_0^t e^{ds} B(s) ds \right)^{a/(1-a)}},
\end{aligned}$$

где

$$W_0^* = W_0 X_0^{1/(1-a)} A^{-1/(1-a)}. \quad (3)$$

Осталось в каждый момент времени t выбрать количество покупаемого оборудования $B(t)$, минимизирующее общие затраты с учетом процентной ставки:

$$\int_0^T C(t) e^{-rt} dt.$$

Введем обозначение

$$F(t) = \int_0^t e^{ds} B(s) ds. \quad (4)$$

Поскольку $B(s)$ — произвольная неотрицательная функция, $F(t)$ — произвольная неотрицательная возрастающая функция с условием $F(0) = 0$. Тогда $B(t) = e^{-dt} F'(t)$, и общие затраты равны

$$\begin{aligned} C &= \int_0^T \left(Q_0 e^{(q-d-r)t} F'(t) + \frac{W_0^* e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t}}{(K_0 + F(t))^{a/(1-a)}} \right) dt = \\ &= Q_0 \int_0^T e^{(q-d-r)t} F'(t) dt + W_0^* \int_0^T \frac{e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t}}{(K_0 + F(t))^{a/(1-a)}} dt. \end{aligned}$$

Далее нам понадобится упрощение выражений вида $\int_0^t e^{cs} B(s) ds$. Упрощаем их интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{cs} B(s) ds &= \int_0^t e^{(c-d)s} F'(s) ds = (e^{(c-d)t} F(t) - e^0 F(0)) - \int_0^t (c-d) e^{(c-d)s} F(s) ds = \\ &= e^{(c-d)t} F(t) - (c-d) \int_0^t e^{(c-d)s} F(s) ds. \quad (5) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что первое слагаемое равно

$$Q_0 \int_0^T e^{(q-r)t} B(t) dt = Q_0 e^{(q-d-r)T} F(T) - Q_0 (q-d-r) \int_0^T e^{(q-d-r)t} F(t) dt.$$

Разделив целевую функцию на константу Q_0 , получаем задачу Больца:

$$\min_F \left(e^{(q-d-r)T} F(T) + \int_0^T \left((r+d-q) e^{(q-d-r)t} F(t) + \frac{W_0^* e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t}}{(K_0 + F(t))^{a/(1-a)}} \right) dt \right) \quad (6)$$

для возрастающей функции F с начальным условием $F(0) = 0$.

Если $r+d-q > 0$, то в каждый момент времени t подынтегральная функция

$$f(F(t), t) = (r+d-q) e^{(q-d-r)t} F(t) + \frac{W_0^* e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t}}{(K_0 + F(t))^{a/(1-a)}} \quad (7)$$

достигает минимума по $F(t)$ при

$$F(t) = \left(\frac{a W_0^*}{(1-a) Q_0 (r+d-q)} \right)^{1-a} e^{((w-q-g)(1-a)+d+x)t} - K_0. \quad (8)$$

Эта функция была бы решением задачи, если бы не условие возрастания $F(t)$ и не слагаемое $e^{(q-d-r)T}F(T)$, которое также нужно минимизировать. Поэтому в общем случае решение задачи нетривиально, и его вид существенно зависит от параметров q, d, r, w, a, g, x .

Если же $r + d - q < 0$, то подынтегральная функция убывает, а значит, ее минимум достигается при $F(t) = 0$. Этот случай рассмотрен в следующем разделе.

2.2. Случаи, когда решением является константа. Рассмотрим два случая, когда решением задачи (6) является постоянная функция $F(t) = \text{const}$: оборудование вообще невыгодно покупать либо выгодно купить все сразу, а потом не покупать.

1. Пусть для всех $t \leq T$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{a/(1-a)W_0^*}{Q_0(r+d-q)} \right)^{1-a} e^{((w-q-g)(1-a)+d+x)t} \leq K_0,$$

т.е. в каждый момент времени t выгодно иметь меньше оборудования, чем реально имеется. Тогда решением задачи является постоянная функция $F(t) = 0$, т.е. невыгодно закупать дополнительное оборудование.

2. Пусть $r + d - q \leq 0$, т.е. реальные цены на оборудование растут быстрее, чем оно выходит из строя. Тогда подынтегральная функция (7) для всех t убывает по $F(t)$. При этом $F(t)$ ограничена сверху только при условиях возрастания функции F . Следовательно, минимум достигается при $F(t) = \text{const} = F(T)$.

Иначе говоря, выгодно закупить все оборудование сразу, в момент времени 0. Математически это означает, что закупки $B(t)$ — импульсная функция в точке 0, а во всех остальных точках она равна 0.

3. Пусть $d = 0$, $(w - q - g)(1 - a) + x = 0$, т.е. в каждый момент времени выгодно иметь одно и то же количество оборудования, и

$$\left(\frac{a/(1-a)W_0^*}{Q_0(r-q)} \right)^{1-a} > K_0$$

т.е. это количество больше, чем имелось в начале. Тогда при отсутствии постоянного слагаемого $e^{(q-d-r)T}F(T)$ минимум достигается при постоянной функции

$$F(t) = \left(\frac{a/(1-a)W_0^*}{Q_0(r-q)} \right)^{1-a} - K_0 = F_0,$$

поскольку это значение минимизирует подынтегральную функцию при любом t .

Добавление слагаемого $e^{(q-d-r)T}F(T)$, вообще говоря, уменьшает все значения $F(t)$, причем они уменьшаются все одновременно, поскольку при уменьшении $F(T)$ до значения, меньшего, чем F_0 , имеет смысл все остальные $F(t)$ оставить как можно ближе к этому значению, минимизирующему значение подынтегральной функции при любом t , а значит, все они в оптимальном случае все равно равны $F(T)$.

Как выглядит решение задачи (6) при $F(t) = F(T) = F$? Значение константы F должно минимизировать функцию

$$\begin{aligned} f(F) &= e^{(q-d-r)T}F + \int_0^T \left((r+d-q)e^{(q-d-r)t}F + \frac{W_0^*}{Q_0} \frac{e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t}}{(K_0+F)^{a/(1-a)}} \right) dt = \\ &= \left(e^{(q-d-r)T} - (q-d-r) \int_0^T e^{(q-d-r)t} dt \right) F + \frac{W_0^*}{Q_0(K_0+F)^{a/(1-a)}} \int_0^T e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t} dt = \\ &= F + \frac{e^{mT} - 1}{m} \frac{W_0^*}{Q_0(K_0+F)^{a/(1-a)}}, \end{aligned}$$

где $m = w + (da + x)/(1 - a) - g - r$. Если $m = 0$, то вместо $(e^{mT} - 1)/m$ нужно подставить T . Но при любом m выполняется неравенство $(e^{mT} - 1)/m > 0$.

Функция $f(F)$ выпукла и ее минимум достигается при таком F^* , что $f'(F^*) = 0$, т.е.

$$1 - \frac{e^{mT} - 1}{m} \frac{a(1-a)W_0^*}{Q_0(K_0 + F^*)^{1/(1-a)}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F^* = \left(\frac{e^{mT} - 1}{m} \frac{a(1-a)W_0^*}{Q_0} \right)^{1-a} - K_0.$$

Возможны два варианта:

- (1) $F^* \leq 0$; тогда закупка оборудования нецелесообразна, а значит, $B(s) = 0$;
- (2) $F^* > 0$; тогда закупка оборудования выполняется только в начальный момент времени, $B(s) = F^* \delta(s)$.

2.3. Дискретизация задачи по времени. Далее предполагаем, что $r + d - q > 0$, поскольку, как мы уже выяснили, в противном случае решением является закупка всего оборудования в начальный момент времени. Если же $r + d - q > 0$, то решение задачи не обязательно постоянно.

Пример. Пусть значения функции (8) возрастают по t ; это условие выполняется, например, при

$$\left(\frac{a/(1-a)W_0^*}{Q_0(r+d-q)} \right)^{1-a} \geq K_0$$

и $(w - q - g)(1 - a) + x \geq 0$. Тогда при отсутствии слагаемого $e^{(q-d-r)T} F(T)$ оптимальным значением $F(t)$ в каждой точке при переходе к пределу будет возрастающая функция (8); в данном случае, добавление условий возрастания $F(t)$ не мешает ему доставлять минимум подинтегральной функции при любом t . Добавление слагаемого $e^{(q-d-r)T} F(T)$ приводит к тому, что оптимальная функция оказывается меньше.

Далее нам понадобится ограничение на $F(t)$ сверху. Поскольку F возрастает, достаточно получить ограничение сверху для $F(T)$. Для этого можно взять его максимально возможное оптимальное значение, которое, согласно формуле (8), равно

$$M = \left(\frac{a/(1-a)W_0^*}{Q_0(r+d-q)} \right)^{1-a} \max \left\{ e^{((w-q-g)(1-a)+x)T}, 1 \right\} - K_0. \quad (9)$$

Дополнительные условия возрастания $F(t)$ и дополнительное слагаемое $F(T)$ могут лишь уменьшить оптимальные значения $F(t)$, но никак не увеличить.

Также нам понадобятся ограничения сверху на производную подинтегральной функции f по первому и второму аргументу:

$$\begin{aligned} L_1 &\leq \max_{t \in [0; T]} \left| (r + d - q)e^{(q-d-r)t} - \frac{aW_0^*}{(1-a)Q_0} \frac{e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t}}{(K_0 + F(t))^{1/(1-a)}} \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in [0; T]} \left((r + d - q)e^{(q-d-r)t} + \frac{aW_0^*}{(1-a)Q_0} \frac{e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t}}{(K_0 + F(t))^{1/(1-a)}} \right) \leq \\ &\leq (r + d - q) + \frac{aW_0^*}{(1-a)Q_0} \frac{\max \left\{ e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)T}, 1 \right\}}{K_0^{1/(1-a)}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} L_2 &\leq \max_{t \in [0; T]} \left| (r + d - q)^2 e^{(q-d-r)t} F(t) - \frac{W_0^*}{Q_0} \frac{\left(w + \frac{da+x}{1-a} - g - r \right) e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t}}{(K_0 + F(t))^{a/(1-a)}} \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in [0; T]} \left((r + d - q)^2 e^{(q-d-r)t} F(t) + \frac{W_0^*}{Q_0} \frac{\left(w + \frac{da+x}{1-a} - g - r \right) e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t}}{(K_0 + F(t))^{a/(1-a)}} \right) \leq \\ &\leq (r + d - q)^2 F(T) + \frac{W_0^* \left(w + \frac{da+x}{1-a} - g - r \right) \max \left\{ e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)T}, 1 \right\}}{Q_0 K_0^{a/(1-a)}}. \end{aligned}$$

Здесь при ограничении сверху мы заменили $F(t)$ на большее значение $F(T)$ в числителе и на меньшее значение 0 в знаменателе. Далее, подставив вместо $F(T)$ его верхнюю границу M , получим

$$\begin{aligned} L_1 &\leq (r + d - q) + \frac{aW_0^*}{(1-a)Q_0} \frac{\max \left\{ e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)T}, 1 \right\}}{K_0^{1/(1-a)}}, \\ L_2 &\leq (r + d - q)^2 \left(\left(\frac{a/(1-a)W_0^*}{Q_0(r+d-q)} \right)^{1-a} \max \left\{ e^{((w-q-g)(1-a)+d+x)T}, 1 \right\} - K_0 \right) + \\ &\quad + \frac{W_0^* \left(w + \frac{da+x}{1-a} - g - r \right) \max \left\{ e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)T}, 1 \right\}}{Q_0 K_0^{a/(1-a)}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть время дискретно, т.е. все изменения могут происходить только в моменты времени, кратные $\delta = T/n$, т.е. в моменты $0, \delta, \dots, \delta k, \dots, \delta n = T$. Тогда исходную задачу минимизации можно приблизить задачей с дискретным временем

$$\min_{x_1, \dots, x_n} \left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i + \frac{b_i}{(x_i + K_0)^{a/(1-a)}} \right)$$

при условиях $x_{i+1} \geq x_i$ и заданном $x_0 = 0$, где

$$a_k = \frac{(r + d - q)e^{(q-d-r)\delta k}}{e^{(q-d-r)T}}, \quad b_k = \frac{W_0^* e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)\delta k}}{Q_0 e^{(q-d-r)T}}.$$

Замена непрерывной функции $F(t)$ кусочно-постоянной функцией $x(t)$ приводит к погрешности в определении целевой функции. Эта погрешность определяется только погрешностью приближения интеграла суммой (поскольку равенство $x_n = F(T)$ выполняется точно). Подынтегральная функция $f(F(t), t)$, заданная формулой (7), при $t \in [0; T]$ удовлетворяет условию Липшица с константами L_1, L_2 , в следующем смысле:

$$|f(x + h_1, t + h_2) - f(x, t)| \leq L_1 |h_1| + L_2 |h_2|,$$

где в качестве L_1, L_2 можно взять максимум по $[0; T]$ модулей ее частных производных по $F(t)$ и по t , определяемые по формулам (10). Тогда погрешность замены интеграла суммой не превосходит величины

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T f(F(t), t) dt - \delta \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, \delta k) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\delta k}^{\delta(k+1)} |f(F(t), t) - f(x_k, \delta k)| dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\delta k}^{\delta(k+1)} (L_1 |F(t) - x_k| + L_2 |t - \delta k|) dt \leq \\ &\leq L_1 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\delta k}^{\delta(k+1)} (x_{k+1} - x_k) dt + L_2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\delta k}^{\delta(k+1)} (t - \delta k) dt = \\ &= L_1 \delta F(T) + \frac{1}{2} L_2 \delta T \leq \delta \left(L_1 M + \frac{1}{2} L_2 T \right) = \frac{T}{n} \left(L_1 M + \frac{1}{2} L_2 T \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Заметим, что погрешность в определении целевой функции стремится к 0, даже несмотря на то, что $F(t)$ может возрастать скачкообразно, т.е. возможны импульсные управления.

2.4. *Решение методом динамического программирования.* Задачу с дискретным временем можно приближенно решить методом динамического программирования (см. [1]). Обозначим через $d_n(c)$ решение исходной задачи минимизации с n слагаемыми при $x_0 = c$, а через $d_k(c)$ — решение той же задачи, в которой взяты последние k слагаемых, при $x_{n-k} = c$. Очевидно, функция d_k удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$d_k(c) = \min_{x \geq c} \left(a_{n-k+1}x + \frac{b_{n-k+1}}{(x + K_0)^{a/(1-a)}} + d_{k-1}(x) \right) \quad (11)$$

с начальным условием

$$d_1(c) = \min_{x \geq c} \frac{x}{\delta} = \frac{c}{\delta}.$$

Предположив дифференцируемость F и переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, из условий (11) можно получить уравнение Беллмана (см. [1]). Однако решать уравнение в частных производных достаточно сложно, тем более, что функция F может быть разрывной. Поэтому найдем решение уравнения с дискретным временем, после чего перейдем к пределу.

Найдем значение функции $d_2(c)$:

$$d_2(c) = \min_{x \geq c} \left(a_{n-1}x + \frac{b_{n-1}}{(x + K_0)^{a/(1-a)}} + \frac{x}{\delta} \right) = \min_{x \geq c} \left(\left(a_{n-1} + \frac{1}{\delta} \right) x + \frac{b_{n-1}}{(x + K_0)^{a/(1-a)}} \right).$$

Очевидно, оно зависит от того, больше или меньше c точки локального минимума

$$c_1^* = \left(\frac{a/(1-a)b_{n-1}}{a_{n-1} + 1/\delta} \right)^{1-a} - K_0.$$

Следовательно, значение функции $d_2(c)$ равно

$$d_2(c) = \begin{cases} \frac{b_{n-1}^{1-a}(a_{n-1} + 1/\delta)^a}{a^a(1-a)^{1-a}} - \left(a_{n-1} + \frac{1}{\delta} \right) K_0, & c < c_1^*, \\ \left(a_{n-1} + \frac{1}{\delta} \right) c + \frac{b_{n-1}}{(c + K_0)^{a/(1-a)}}, & c \geq c_1^*. \end{cases}$$

Это возрастающая выпуклая функция, которая до точки «склеивания» c_1^* равна константе.

При достаточно малом δ значения a_{n-2} и a_{n-1} , b_{n-2} и b_{n-1} различаются незначительно, а значит,

$$\left(\frac{ab_{n-2}}{(1-a)a_{n-2}} \right)^{1-a} - K_0 > \left(\frac{ab_{n-1}}{(1-a)(a_{n-1} + 1/\delta)} \right)^{1-a} - K_0,$$

т.е. минимум функции

$$a_{n-2}x + \frac{b_{n-2}}{(x + K_0)^{a/(1-a)}}$$

достигается при большем значении x , чем точка «склеивания» функции $d_2(c)$. Следовательно, минимум функции $d_3(c)$ достигается на участке между этими двумя точками, где целевая функция имеет вид

$$\left(a_{n-2} + a_{n-1} + \frac{1}{\delta} \right) x + \frac{b_{n-1} + b_{n-2}}{(x + K_0)^{a/(1-a)}},$$

и равен он

$$c_2^* = \left(\frac{a/(1-a)(b_{n-2} + b_{n-1})}{a_{n-2} + a_{n-1} + \frac{1}{\delta}} \right)^{1-a} - K_0.$$

Утверждение 1. Функция $d_k(c)$ обладает следующими свойствами:

- (1) $d_k(c)$ возрастает;
- (2) $d_k(c)$ выпукла;

- (3) существуют такие константа C^* , перестановка $(i_1, \dots, i_{k-1})$ и последовательность точек $c_{i_1}^* \leq \dots \leq c_{i_{k-1}}^*$, что функция $d_k(c)$ имеет вид

$$d_k(c) = \begin{cases} C^*, & c < c_{i_1}^*, \\ \left(\sum_{j:c > c_{i_j}} a_{n-i_j} + \frac{1}{\delta} \right) c + \frac{1}{(c + K_0)^{a/(1-a)}} \sum_{j:c > c_{i_j}} b_{n-i_j}, & c \geq c_{i_1}^*. \end{cases} \quad (12)$$

Доказательство. (1) Функция $d_k(c)$ возрастает, поскольку это минимум по множеству $x \geq c$, которое уменьшается при росте c .

(2) Применим индукцию по k . База индукции: функция $d_1(c)$ линейна, а значит, выпукла. Предположим, что функция d_{k-1} выпукла. Тогда функция d_k выпукла как минимум выпуклой функции

$$a_{n-k+1}x + \frac{b_{n-k+1}}{(x + c_{n-k+1})^{a/(1-a)}} + d_{k-1}(x)$$

по многогранному множеству, заданному линейным неравенством $x \geq c$.

(3) Также применим индукцию. База индукции: для функции $d_2(c)$, как мы выяснили, существуют такие константа

$$C^* = \frac{b_{n-1}^{1-a}(a_{n-1} + 1/\delta)^a}{a^a(1-a)^{1-a}} - \left(a_{n-1} + \frac{1}{\delta} \right) K_0$$

и точка c_1^* , что функция $d_2(c)$ имеет вид (12). Предположим, что такие константа и последовательность точек существуют для функции $d_{k-1}(c)$, и докажем, что они существуют для функции $d_k(c)$.

Функция $d_k(c)$ задается рекуррентным соотношением (11). Найдем ее минимум для $c = 0$. Поскольку минимум ищется по выпуклой функции, он достигается в единственной точке локального минимума, совпадающей с точкой глобального минимума. Чтобы его найти, достаточно перебрать все отрезки $[c_{i_j}^*; c_{i_{j+1}}^*]$, полагая $c_{i_0}^* = 0$. За достаточный же для всех k правый край (т.е. максимально возможное значение $F(t)$ для всех возможных t) можно взять максимально возможное значение M оптимального $F(T)$, которое, определяется по формуле (9). На каждом отрезке найдем минимум выражения (11) и сравним эти минимумы. Получившийся глобальный минимум достигается в точке c_{k-1}^* , которая может совпадать с одной из точек $c_{i_j}^*$, а может не совпадать ни с одной из них. После этого всем точкам $c_{i_j}^*$, которые меньше c_{k-1}^* , присваиваем новое значение c_{k-1}^* , а значения остальных точек $c_{i_j}^*$ оставляем неизменными.

Теперь, очевидно, для всех $c \leq c_{k-1}^*$ функция $d_k(c)$ равна константе, а именно, минимальному значению (11). Если же $c > c_{k-1}^*$, то минимизируемая функция после точки глобального минимума возрастает, а значит, ее минимум по $x \geq c$ достигается в левом крае, т.е. в точке c . Это значит, что $d_k(c)$ на каждом отрезке $[c_{i_j}^*; c_{i_{j+1}}^*]$ равно сумме $d_{k-1}(c)$ и выражения

$$a_{n-k+1}x + \frac{b_{n-k+1}}{(x + K_0)^{a/(1-a)}},$$

откуда и получаем формулу (12). □

Доказательство п. (3) утверждения дает алгоритм нахождения функций $d_k(c)$ и, в конечном счете, функции $d_n(c)$, дающей приближенное решение исходной задачи. Для этого нужно на k -м шаге решить $O(k)$ задач нахождения минимума, легко решаемых аналитически. Значит, общее число шагов алгоритма имеет порядок $O(n^2)$.

При этом из выражения для функции d_3 мы видим, что выражения для нескольких последующих функций будут аналогичными, и определенное количество начальных шагов, пока выполняется неравенство

$$\frac{b_{n-k}}{a_{n-k}} > \frac{b_{n-k+1} + \dots + b_{n-1}}{a_{n-k+1} + \dots + a_{n-1} + 1/\delta}, \quad (13)$$

значение точки минимума c_{k-1}^* будет возрастать по k , а все предыдущие точки c_j^* будут «склеиваться» с этой точкой минимума, так что функция $d_k(c)$ каждый раз состоит всего из двух кусков. При этом, если последовательность b_k в числителе убывает не медленнее, чем последовательность a_k в знаменателе, т.е. если $w + (d+x)/(1-a) \leq q+g$, то последовательность сумм b_k с убывающими номерами растет не медленнее, чем последовательность сумм a_k с убывающими номерами, а значит, неравенство (13) будет выполняться вплоть до последней итерации. В этом случае все значения c_k^* равны друг другу, а значит, переходя к пределу, получаем, что $F(t)$ равно константе.

Но если последовательность b_k растет достаточно быстро, то начиная с определенного k , значения c_{k-1}^* начнут убывать согласно формуле

$$c_k^* = \left(\frac{ab_{n-k}}{(1-a)a_{n-k}} \right)^{1-a} - K_0.$$

В этом случае $F(t)$ уже не равно константе, т.е. до определенного момента времени оказывается выгодна закупка нового оборудования. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $F(t)$ до определенного момента t^* определяется по формуле (8), и только при $t > t^*$ равна константе. Момент t^* можно приближенно определить численно по указанному выше алгоритму, но его можно найти и аналитически. Действительно, перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим, что для t^* должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} \frac{W_0^* e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t^*}}{Q_0(r+d-q)e^{(q-d-r)t^*}} &> \frac{\int_{t^*}^T W_0^* e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t} dt}{Q_0(e^{(q-d-r)T} + \int_{t^*}^T (r+d-q)e^{(q-d-r)t} dt)} \iff \\ \iff \frac{e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t^*}}{(r+d-q)} &> \frac{e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)T} - e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t^*}}{\left(w + \frac{da+x}{1-a} - g - r\right)(e^{(q-d-r)T} - e^{(q-d-r)t^*} + e^{(q-d-r)t^*})} \iff \\ \iff \frac{e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t^*}}{(r+d-q)} &> \frac{e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)T} - e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t^*}}{\left(w + \frac{da+x}{1-a} - g - r\right)}. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$r+d-q = u > 0, \quad w + \frac{da+x}{1-a} - g - r = z, \quad e^{(w+(da+x)/(1-a)-g-r)t^*} = e^{zt^*} = z^*$$

и домножив обе части неравенства на положительное число u , получим неравенство

$$y^* > \frac{u}{z} (e^{zT} - y^*) \iff y^* \left(1 + \frac{u}{z}\right) > \frac{u}{z} e^{zT}.$$

Возможны 3 варианта:

Вариант 1: $z > 0$, следовательно, $1 + u/z > 0$; поделив обе части неравенства на $1 + u/z = (z+u)/z$, получаем

$$y^* > \frac{u}{z+u} e^{zT} \iff zt^* > zT - \ln \frac{z+u}{u} \iff t^* > T - \frac{1}{z} \ln \frac{z+u}{u}.$$

Если $\frac{1}{z} \ln \frac{z+u}{u} < T$, то до момента $T - \frac{1}{z} \ln \frac{z+u}{u}$ функция $F(t)$ растет согласно формуле (8), а после него равна константе.

Вариант 2: $z < 0$, но $1 + u/z > 0$; тогда $z+u < 0$, и неравенство

$$y^* > \frac{u}{z+u} e^{zT}$$

выполняется при любом $y^* > 0$, поскольку в правой части неравенства стоит отрицательное число. Следовательно, при всех t функция $F(t)$ постоянна.

Вариант 3: $z < 0$ и $1 + u/z < 0$; тогда $z + u > 0$ и

$$y^* < \frac{u}{z+u} e^{zT} \iff zt^* < zT + \ln \frac{u}{z+u} \iff t^* > T - \frac{1}{-z} \ln \frac{u}{z+u}.$$

Если $\frac{1}{-z} \ln \frac{u}{z+u} < T$, то до момента $T - \frac{1}{-z} \ln \frac{u}{z+u}$ функция $F(t)$ растет согласно формуле (8), а после него равна константе.

3. Модель со старением, но без утилизации.

3.1. Модель с износом оборудования. Рассмотрим теперь общую модель, в которой $m > 0$: со временем оборудование изнашивается, а значит, оборудование разного возраста различается. В этом случае нужно найти функции $B(s)$ и $U(s, t)$, минимизирующие интегральные затраты

$$C = \int_0^T C(t) e^{-rt} dt = Q_0 \int_0^T e^{(q-r)t} B(t) dt + \\ + W_0 \int_0^T e^{(w+m-r)t} l(t) \left(K_0^* e^{-dt} + e^{-dt} \int_0^t e^{(d-m)s} B(s) ds - \int_0^t e^{-ms} U(t, s) ds \right) dt$$

при условии

$$X_0 e^{xt} = Al(t)^{1-a} e^{(1-a)gt} \left(K_0 e^{-dt} + \int_0^t (e^{-d(t-s)} B(s) - U(t, s)) ds \right) = \\ = Al(t)^{1-a} e^{(1-a)gt} \left(K_0 e^{-dt} + e^{-dt} \int_0^t e^{ds} B(s) ds - \int_0^t U(t, s) ds \right).$$

Отсюда можем выразить $l(t)$:

$$l(t) = \left(\frac{1}{A} \frac{X_0 e^{(x-(1-a)g)t}}{K_0 e^{-dt} + e^{-dt} \int_0^t e^{ds} B(s) ds - \int_0^t U(t, s) ds} \right)^{1/(1-a)} = \\ = A^{-1/(1-a)} X_0^{1/(1-a)} e^{(x/(1-a)-g)t} \left(K_0 e^{-dt} + e^{-dt} \int_0^t e^{ds} B(s) ds - \int_0^t U(t, s) ds \right)^{-1/(1-a)}.$$

Подставляем $l(t)$ в выражение для общих затрат C и получаем

$$C = Q_0 \int_0^T e^{(q-r)t} B(t) dt + \\ + W_0^* \int_0^T e^{(w+m-r+x/(1-a)-g)t} \frac{K_0^* e^{-dt} + e^{-dt} \int_0^t e^{(d-m)s} B(s) ds - \int_0^t e^{-ms} U(t, s) ds}{\left(K_0 e^{-dt} + e^{-dt} \int_0^t e^{ds} B(s) ds - \int_0^t U(t, s) ds \right)^{1/(1-a)}} dt. \quad (14)$$

Далее рассмотрим упрощенную модель, в которой оборудование нельзя утилизировать, т.е. $U(t, s) = 0$. В этом случае выражение для затрат (14) упрощается:

$$\begin{aligned}
 C &= Q_0 \int_0^T e^{(q-r)t} B(t) dt + W_0^* \int_0^T e^{(w+m-r+x/(1-a)-g)t} \frac{K_0^* e^{-dt} + e^{-dt} \int_0^t e^{(d-m)s} B(s) ds}{\left(K_0 e^{-dt} + e^{-dt} \int_0^t e^{ds} B(s) ds \right)^{1/(1-a)}} dt = \\
 &= Q_0 \int_0^T e^{(q-r)t} B(t) dt + W_0^* \int_0^T e^{(w+m-r+(x+da)/(1-a)-g)t} \frac{K_0^* + \int_0^t e^{(d-m)s} B(s) ds}{\left(K_0 + \int_0^t e^{ds} B(s) ds \right)^{1/(1-a)}} dt.
 \end{aligned}$$

Аналогично модели без старения оборудования, введем функцию $F(t)$ по формуле (4) и упростим соответствующие интегралы согласно формуле (5). Получим следующее выражение для затрат:

$$\begin{aligned}
 C &= Q_0 e^{(q-d-r)T} F(T) - Q_0 (q-d-r) \int_0^T e^{(q-d-r)t} F(t) dt + \\
 &+ W_0^* \int_0^T e^{(w+m-r+(x+da)/(1-a)-g)t} \frac{K_0^* + e^{-mt} F(t) + m \int_0^t e^{-ms} F(s) ds}{(K_0 + F(t))^{1/(1-a)}} dt.
 \end{aligned}$$

Разделив целевую функцию на Q_0 , получим задачу, аналогичную задаче Больца, но с дополнительным слагаемым, содержащим вложенный интеграл:

$$\begin{aligned}
 C &= e^{(q-d-r)T} F(T) + \int_0^T ((r+d-q)e^{(q-d-r)t} F(t) + \\
 &+ \frac{W_0^*}{Q_0} e^{(w+m-r+(x+da)/(1-a)-g)t} \frac{K_0^* + e^{-mt} F(t)}{(K_0 + F(t))^{1/(1-a)}}) dt + \\
 &+ \frac{W_0^* m}{Q_0} \int_0^T \frac{e^{(w+m-r+(x+da)/(1-a)-g)t} \int_0^t e^{-ms} F(s) ds}{(K_0 + F(t))^{1/(1-a)}} dt. \quad (15)
 \end{aligned}$$

3.2. Решение задачи методом дискретизации. Задачу (15) также можно решить методом дискретизации по времени. Разбив отрезок $[0; T]$ на n отрезков величины δ , получим дискретную задачу минимизации по $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned}
 \min_{0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n} &\left\{ e^{(q-d-r)T} x_n + \delta \sum_{k=1}^n \left((r+d-q)e^{(q-d-r)\delta k} x_k + \right. \right. \\
 &+ \frac{W_0^*}{Q_0} e^{(w+m-r+(x+da)/(1-a)-g)\delta k} \frac{K_0^* + e^{-m\delta k} x_k}{(K_0 + x_k)^{1/(1-a)}} + \\
 &\left. \left. + \frac{W_0^* m}{Q_0} \delta^2 \sum_{k=1}^n \frac{e^{(w+m-r+(x+da)/(1-a)-g)\delta k} \sum_{j=1}^k e^{-m\delta j} x_j}{(K_0 + x_k)^{1/(1-a)}} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

В данном случае каждое слагаемое, зависящее от x_k , зависит еще и от всех x_i при $i < k$, а значит, задачу нельзя решить методом динамического программирования.

Это n -мерная задача минимизации выпуклой функции при линейных ограничениях. Ее можно решить методом условного градиента. Начальное решение: не покупать новое оборудование. Затем на каждом шаге нужно решить n -мерную задачу линейного программирования, определяя направление движения, и в данном направлении приближенно решить задачу минимизации одномерной выпуклой функции методом деления пополам.

3.3. *Разная интегральная полезность в разных подотраслях.* Пусть отрасль делится на s подотраслей или фирм. В каждой из них выпуск $X_1(t), \dots, X_s(t)$ и затраты $C_1(t), \dots, C_s(t)$ пропорциональны общим затратам с постоянным коэффициентом пропорциональности:

$$C_k(t) = c_k C(t), \quad X_k(t) = x_k X(t).$$

Следовательно прибыль k -й подотрасли однозначно определяется ее затратами. При этом полезность от прибыли, равно как и полезность с отрицательным знаком от затрат, у k -й подотрасли является функционалом от функции дисконта, определенной от 0 до момента T :

$$C_k = \int_0^T C_k(t) f_k(t) dt = c_k \int_0^T C(t) f_k(t) dt$$

где f_k — функция дисконта.

Таким образом, у каждой подотрасли имеется своя функция полезности, зависящая от вида функции дисконта, которая отражает предпочтения по получению прибыли с течением времени. В некоторых подотраслях важнее получить большую прибыль сейчас, а некоторым, наоборот, важнее большая прибыль в будущем, чем маленькая сейчас.

Функция дисконта всегда убывает, поскольку получение денег в более ранний момент времени всегда ценнее, чем в более поздний. Обозначим коэффициент скорости убывания через

$$r_k(t) = -(\ln f_k(t))' = -\frac{f_k'(t)}{f_k(t)}$$

и банковский процент через r .

На интервале, где $r_k(t) \leq r$, для фирмы в k -й подотрасли целесообразно только копить деньги и класть их на депозит, поскольку это со временем неограниченно увеличивает ее полезность. Если $r_k(t) \geq r$, может быть целесообразно вложение в производство. Наконец, на период, где $r_k(t) = 0$, никакие планы не целесообразны, поскольку функцию полезности они не меняют.

Далее полагаем, что $r_k = \text{const}$, т.е. $f_k(t) = e^{r_k t}$ до момента времени T_k . При $t > T_k$ будем полагать $r_k(t) = 0$.

3.4. *Нахождение компромиссного решения.* Рассмотрим нестратегическую задачу оптимизации поведения фирм: задается стратегия поведения отрасли в целом, согласующая интересы подотраслей.

Напомним определение компромиссного решения (см. [2]). Оно минимизирует потери наименее удачливого участника, где под потерями понимается отклонение реального выигрыша затрат от максимально возможного. В данном случае компромиссное решение минимизирует превышение затрат над минимально возможными, т.е. компромиссное решение B_{comp} определяется по формуле

$$B_{\text{comp}} = \arg \min_B \max_k \left(C_k(B) - \min_{\tilde{B}} C_k(\tilde{B}) \right).$$

. Компромиссное решение можно найти следующим образом. Сначала для каждого k найдем B , минимизирующее $C_k(B)$ (обозначим его B_k^*) и вычислим для него минимальные затраты $C_k^* = C_k(B_k^*)$. Алгоритм их нахождения такой же, как в обычной задаче минимизации затрат, только вместо r нужно подставить r_k .

Далее нужно найти минимум по B выражения $\max(C_1(B) - C_1^*, \dots, C_s(B) - C_s^*)$. Произведя дискретизацию по времени, получим, что нужно найти n -мерный вектор $(x_1, \dots, x_n)$, минимизирующий выпуклую функцию (максимум из s выпуклых функций $C_k(x_1, \dots, x_n) - C_k^*$) при наличии линейных ограничений. Этот минимум также можно найти методом условного градиента.

4. Заключение. В данной работе формализована задача оптимальной стратегии покупки оборудования в отрасли. Она решена для важного частного случая, когда не учитывается старение оборудования. Оказывается, что решение при этом может иметь одну из трех форм:

(1) новое оборудование не покупается, используется только уже имеющееся;

- (2) новое оборудование покупается только в начальный момент времени, а далее используется уже имеющееся;
- (3) количество покупаемого оборудования постепенно падает в геометрической прогрессии, пока, еще до достижения горизонта планирования, не становится равным нулю.

Для более общей задачи имеет смысл исследовать случаи, когда решением является постоянная функция (покупка оборудования только в начальный момент времени), а также определить скорость сходимости метода условного градиента и решить методом дискретизации времени общую задачу с функцией $U(t, s)$. Это предмет будущих исследований.

Укажем возможности развития модели.

1. Вместо экспоненциальных функций $X(t)$, $Q(t)$, $W(t)$, $f_k(t)$ можно взять произвольные функции. Аналогично, старение оборудования и его выход из строя могут происходить не с постоянной скоростью. Соответствующая задача оптимизации при $m = 0$, скорее всего, будет обладать свойствами, сходными со свойствами задачи с экспоненциальными функциями. Возможно, что в широком классе случаев можно будет найти минимум методом дискретизации времени и динамического программирования так, что функция $F(t)$ будет кусочно выпуклой. В этом случае аналитическое решение уже невозможно, но возможно численное.
2. Можно рассмотреть функцию Кобба—Дугласа с эффектом масштаба, в которой вместо параметра $1 - a$ участвует параметр b .
3. Можно рассмотреть стратегическую модель: игру с запрещенными ситуациями, в которой разные подотрасли имеют общие ограничения на суммарное количество капитала K и рабочей силы L ; при этом каждая подотрасль выбирает свою стратегию замены оборудования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960.
2. Малафеев О. А., Муравьев А. И. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. — СПб: СПбГУЭФ, 2000.
3. Ando A. K., Modigliani F., Rashe R., Turnovsky S. J. On the role of expectations of price changes and technological change in an investment function// Int. Econ. Rev. — 1974. — 15, № 2. — P. 384–414.

Малафеев Олег Алексеевич

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: malafeyevoa@mail.ru

Парфенов Андрей Павлович

Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ);

Институт проблем региональной экономики РАН, Санкт-Петербург

E-mail: keldoor@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 140–145
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-140-145

УДК 517.929

КРИТЕРИЙ ВОЛЬТЕРРОВОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАНТОГРАФА

© 2019 г. А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, М. И. АКЫЛБАЕВ,
М. Т. ШОМАНБАЕВА, А. А. ШАЛДАНБАЕВА

Аннотация. В работе исследованы спектральные свойства задачи Коши уравнения пантографа и установлена граница изменения параметра, на которой задача остается вольтерровой.

Ключевые слова: уравнение пантографа, спектр, вполне непрерывность, ядерность, оператор Гильберта—Шмидта, формула следа оператора, формула Гаала.

CRITERION FOR THE VOLTERRA PROPERTY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE PANTOGRAPH EQUATION

© 2019 A. SH. SHALDANBAYEV, M. I. AKYLBAYEV,
M. T. SHOMANBAYEVA, A. A. SHALDANBAYEVA

ABSTRACT. In this paper, spectral properties of the Cauchy problem of the pantograph equation are examined and the boundary of the parameter range is established at which the problem remains a Volterra problem.

Keywords and phrases: pantograph equation, spectrum, complete continuity, nuclearity, Hilbert–Schmidt operator, operator trace formula, Gaal formula.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K08

1. Введение. Уравнения типа пантографа с начала 1970 гг. изучались в работах Т. Като [7], А. Изерлеса [6] и других авторов. Такие уравнения возникают в самых разных областях: астрофизике (В. А. Амбарцумян, поглощение света межзвездной материей), технике (Дж. Окендон, А. Б. Тайлер, математическая модель контактного провода электроснабжения подвижного состава), биологии (А. Дж. Холл, Г. С. Уэйк, моделирование процесса роста и деление клеток). Рассматривались вопросы разрешимости начальной задачи и различных ее обобщений, асимптотического поведения решений на бесконечности, существования периодических и почти периодических решений, в основном для уравнения первого порядка (уравнение пантографа $y' = ay(\lambda t) + by(t)$).

Рассмотрим в пространстве $L^2(0, 1)$ задачу Коши

$$y'(x) = \lambda y(\alpha x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0. \quad (1)$$

Если $\lambda = 0$, то $y'(x) = 0$, $y(x) = \text{const} = y(0) = 0$, так что $y(x) \equiv 0$, поэтому существует обратный оператор. Проинтегрировав обе части уравнения (1), имеем

$$y(x) = \lambda \int_0^x y(\alpha t) dt, \quad \int_0^x y(\alpha t) dt = \frac{y(x)}{\lambda};$$

следовательно, обратный оператор имеет вид

$$Ay(x) = \int_0^x y(\alpha t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2)$$

Выясним, при каких значениях α оператор A вольтерров, т.е. не имеет собственных значений, отличных от нуля.

2. Метод исследования. Будем опираться на спектральную теорию операторов Гильберта—Шмидта. Напомним, что вполне непрерывный оператор T , действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, называется оператором типа Гильберта—Шмидта, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T\varphi_n, T\varphi_n) < \infty, \quad (3)$$

где φ_n , $n = 1, 2, \dots$, — некоторый ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$. Круглыми скобками здесь и в дальнейшем обозначается скалярное произведение.

В случае интегрального оператора

$$Kf = \int_a^b k(x, t) f(t) dt,$$

действующего в $L^2(a, b)$, условие (3) может быть записано в виде

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt < \infty.$$

В данной работе мы исследуем условия, при которых оператор A оказывается вольтерровым.

Будем говорить, что вполне непрерывный оператор P имеет след, если в любом ортонормированном базисе φ_i , $i = 1, 2, \dots$, абсолютно сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (P\varphi_i, \varphi_i). \quad (4)$$

Заметим, что если ряд (4) сходится абсолютно в любом ортонормированном базисе, то сумма получается при этом всегда одна и та же; этот факт хорошо известен в случае самосопряженных операторов (см. [1]). Отметим, что абсолютную сходимость достаточно проверить в базисе, состоящем из собственных векторов.

В общем случае указанное утверждение может быть легко доказано разложением оператора в сумму вещественной и мнимой компоненты: $P = P_R + iP_I$, где P_R и P_I — самосопряженные операторы:

$$P_R = \frac{1}{2}(P + P^*), \quad P_I = \frac{1}{2i}(P - P^*). \quad (5)$$

Действительно, вместе с рядом (4) абсолютно сходятся ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty} (P_R\varphi_i, \varphi_i), \quad \sum_{i=1}^{\infty} (P_I\varphi_i, \varphi_i),$$

ибо $(P_R\varphi_i, \varphi_i) = \operatorname{Re}(P\varphi_i, \varphi_i)$ и $(P_I\varphi_i, \varphi_i) = \operatorname{Im}(P\varphi_i, \varphi_i)$. Так как суммы последних двух рядов не зависят от выбора базиса, то этим свойством обладает, очевидно, и сумма (4). След оператора P будем обозначать $\operatorname{sp} P$.

Очевидно, если P — самосопряженный оператор, имеющий след, то

$$\operatorname{sp} P = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i, \quad (6)$$

где μ_i — собственные значения оператора P .

Лемма 1. Если T_1 и T_2 — операторы типа Гильберта—Шмидта, то оператор $T_1 T_2$ имеет след.

Доказательство. Действительно,

$$|(T_1 T_2 \varphi_i, \varphi_i)| \leq \|T_2 \varphi_i\| \cdot \|T_1^* \varphi_i\| \leq \frac{1}{2} (\|T_2 \varphi_i\|^2 + \|T_1^* \varphi_i\|^2).$$

Сходимость ряда, составленного из правых частей последнего неравенства, в любом ортонормированном базисе доказывает лемму. $\square$

Следствие 1. Если T — оператор типа Гильберта—Шмидта, то при $n \geq 2$ оператор T^n имеет след.

Остановимся несколько подробнее на интегральных операторах, действующих в $L^2(0, 1)$. Рассмотрим интегральный оператор K типа Гильберта—Шмидта

$$Kf = \int_0^1 K(x, t)f(t)dt. \quad (7)$$

Как уже указывалось, все степени оператора K , начиная со второй, имеют след.

Лемма 2. Следы интегральных операторов K^n , $n = 2, 3, \dots$, могут быть вычислены по формуле

$$\text{sp } K^n = \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(x_1, x_2)K(x_2, x_3) \dots K(x_n, x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (8)$$

Указанный факт хорошо известен в случае эрмитовых ядер. Его доказательство в общем случае мы сведем к следующему предложению: пусть K_1 и K_2 — самосопряженные интегральные операторы типа Гильберта—Шмидта. Обозначим через $K_1(x_1, x_2)$, $K_2(x_1, x_2)$ их ядра. Тогда справедливо равенство

$$\text{sp } K_1 K_2 = \int_0^1 \int_0^1 K_1(x_1, x_2)K_2(x_2, x_1)dx_1 dx_2. \quad (9)$$

Доказательство. Обозначим правую часть предполагаемого равенства через I и представим ее в виде

$$I = \frac{1}{4} \left(\int_0^1 \int_0^1 |K_1 + K_2|^2 dx_1 dx_2 - \int_0^1 \int_0^1 |K_1 - K_2|^2 dx_1 dx_2 \right). \quad (10)$$

Равенство (10) легко проверяется. Следует лишь учесть, что ядра $K_1(x_1, x_2)$ и $K_2(x_1, x_2)$ эрмитовы: $K(x_1, x_2) = \overline{K(x_2, x_1)}$.

Заметим теперь (см. [4]), что первый из интегралов справа в формуле (10) равен сумме квадратов собственных значений интегрального оператора $K_1 + K_2$; последняя в силу (6) совпадает со следом оператора $(K_1 + K_2)^2$. Итак,

$$\int_0^1 \int_0^1 |K_1 + K_2|^2 dx_1 dx_2 = \text{sp}(K_1 + K_2)^2.$$

Аналогично находим

$$\int_0^1 \int_0^1 |K_1 - K_2|^2 dx_1 dx_2 = \text{sp}(K_1 - K_2)^2.$$

В результате приходим к равенству

$$I = \frac{1}{4} (\text{sp}(K_1 + K_2)^2 - \text{sp}(K_1 - K_2)^2).$$

Раскрывая скобки и учитывая формулу $\text{sp } K_1 K_2 = \text{sp } K_2 K_1$, приходим к формуле (9).

Для доказательства леммы запишем оператор K^n в виде

$$K^n = K \cdot K^{n-1} \quad (11)$$

и каждый из операторов K и K^{n-1} разложим в сумму вещественной и мнимой компоненты:

$$K = K_R + iK_I, \quad K^{n-1} = (K^{n-1})_R + i(K^{n-1})_I.$$

Внеся эти разложения в правую часть (11) и раскрыв скобки, получим линейную комбинацию операторов вида $K_1 \cdot K_2$. Прделав аналогичные преобразования с ядром K^n и воспользовавшись затем равенством (9), приходим к заключению леммы. $\square$

Сделаем в заключение одно замечание в связи с формулой (8). Обозначим через $K^n(x, t)$ ядро оператора K^n , определяемое формулой

$$K^n(x, t) = \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n-1} K(x_1, x_2) K(x_2, x_3) \cdots K(x_n, x_t) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Пользуясь теоремой Фубини, равенство (8) можно, очевидно, записать в виде

$$\text{sp } K^n = \int_0^1 K^{(n)}(t, t) dt. \quad (12)$$

Следствие 2. При $n = 2$ формула (12) принимает вид

$$\text{sp } K^2 = \int_0^1 K^{(2)}(t, t) dt, \quad \text{где} \quad K^{(2)}(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K(s, t) ds. \quad (13)$$

Эти формулы составляют основу нашего метода. Заметим, что многомерный вариант формулы (13) называется формулой Гаала (см. [5]).

3. Результаты исследований.

Теорема 1.

- (a) Если $0 < \alpha \leq 1$, то $\text{sp } A^2 = 0$.
 (b) Если $\alpha > 1$, то

$$\text{sp } A^2 = \frac{1}{\alpha^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Доказательство. Оператор A имеет вид

$$Ay(x) = \int_0^x y(\alpha t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Полагая $\xi = \alpha t$, сделаем замену переменной в этом интеграле:

$$\int_0^x y(\alpha t) dt = \left\{ \begin{array}{l} \alpha t = \xi, \\ t = \xi/\alpha, \\ dt = d\xi/\alpha \end{array} \right\} = \int_0^{\alpha x} \frac{y(\xi) d\xi}{\alpha} = \int_0^1 \frac{\theta(\alpha x - \xi)}{\alpha} y(\xi) d\xi = \int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

где

$$K(x, \xi) = \frac{\theta(\alpha x - \xi)}{\alpha}, \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Ядро $K(x, \xi)$ ограничено, поэтому K является оператором типа Гильберта—Шмидта, а его квадрат K^2 — ядерным оператором. Вычислим ядро оператора K^2 :

$$K^2(x, \xi) = \int_0^1 K(x, \eta) K(\eta, \xi) d\eta = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^1 \theta(\alpha x - \eta) \theta(\alpha \eta - \xi) d\eta.$$

Следовательно,

$$K^2(x, x) = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^1 \theta(\alpha x - \eta) \theta(\alpha \eta - x) d\eta.$$

По формуле Гаала имеем

$$\text{sp } A^2 = \int_0^1 K^2(x, x) dx = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^1 \int_0^1 \theta(\alpha x - \eta) \theta(\alpha \eta - x) d\eta dx.$$

Полагая

$$\Phi(x, \eta) = \frac{\theta(\alpha x - \eta) \theta(\alpha \eta - x)}{\alpha^2},$$

имеем

$$\Phi(\eta, x) = \frac{\theta(\alpha \eta - x) \theta(\alpha x - \eta)}{\alpha^2} = \Phi(x, \eta),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \text{sp } A^2 &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\theta(\alpha x - \eta) \theta(\alpha \eta - x) d\eta}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^2} \int_0^1 dx \int_{x/\alpha}^x d\eta = \frac{2}{\alpha^2} \int_0^1 \left(x - \frac{x}{\alpha}\right) dx = \\ &= \frac{2}{\alpha^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_0^1 x dx = \frac{1}{\alpha^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Если $0 < \alpha \leq 1$, то $\alpha x \leq x$, откуда последовательно заключаем, что $0 < \eta \leq \alpha x \leq x$, $\alpha \eta \leq \eta \leq x$, $\theta(\alpha \eta - x) = 0$ и $\text{sp } A^2 = 0$. $\square$

Теорема 2. Оператор A вольтерров тогда и только тогда, когда $0 < \alpha \leq 1$.

Доказательство. Необходимость. Если оператор A вольтерров, то оператор A^2 также вольтерров. Тогда по теореме Лидского (см. [2]) имеем $\text{sp } A^2 = 0$. Если $\alpha > 1$, то $\text{sp } A^2 > 0$, поэтому $0 < \alpha \leq 1$.

Достаточность следует из теоремы Нерсесяна (см. [3]). $\square$

4. Обсуждение. В случае $0 < \alpha < 1$ аргумент уравнения $y'(x) = \lambda y(\alpha x)$ является запаздывающим, а в случае $\alpha > 1$ — опережающим. По-видимому, в случае запаздывания аргумента задача Коши всегда вольтеррова, а в случае опережающего аргумента появляется спектр, иначе говоря, задача разрешима не для всех значений параметра λ . В точках спектра нарушается единственность, т.е. задача некорректна.

Замечание. При решении краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка обычно подразумевается, что аргумент искомой функции лежит в заданном сегменте, но, как известно, области определения найденных собственных функций шире, чем первоначальная область краевой задачи. Мы полагаем, что в нашей задаче также имеет место подобный случай.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гохберг Н. Ц., Крейн М. Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов// Усп. мат. наук. — 1957. — 12, № 2 (74).
2. Лидский В. Б. Несамосопряженные операторы, имеющие след// Докл. АН СССР. — 1959. — 125, № 3. — С. 485–488.
3. Нерсисян А. Б. К теории интегральных уравнений типа Вольтерра// Докл. АН СССР. — 1964. — 155, № 5. — С. 1006–1009.
4. Русс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: ИЛ, 1954.
5. Brislawn C. Kernels of trace class operators// Proc. Am. Math. Soc. — 1988. — 104, № 4. — P. 1181–1190.
6. Iserless A. On the generalized functional-differential equation// Eur. J. Appl. Math. — 1993. — 4. — P. 1–38.
7. Kato T., Mcleod J. B. Functional-differential equation $y' = ay(\lambda t) + by(t)$ // Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — 77, № 6. — P. 891–937.

Шалданбаев Амир Шалданбаевич

Международный университет SILKWAY, Шымкент, Казахстан

E-mail: shaldanbaev51@mail.ru

Акылбаев Мусабек Исламович

Региональный социально-инновационный университет, Шымкент, Казахстан

E-mail: musabek_kz@mail.ru

Шоманбаева Манат Торгаевна

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан

E-mail: mtshomanbaeva@mail.ru

Шалданбаева Айгерим Амировна

Региональный социально-инновационный университет, Шымкент, Казахстан

E-mail: Altima_a@mail.ru