

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 170



Москва 2019

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

С. С. Акбаров (НИУ ВШЭ, ВИНТИ РАН)

Е. П. Кругова (ВИНТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Н. Х. Розов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

С. Е. Степанов (Финуниверситет при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Редактор-составитель:

М. Ш. Бурлуцкая (Воронежский государственный университет)

Научный редактор:

Жлябинкова И. А. (ВИНТИ РАН)

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

**СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 170

**МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ ЗИМНЕЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ»**

28 ЯНВАРЯ — 2 ФЕВРАЛЯ 2019 г.

ЧАСТЬ 1



Москва 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Нелинейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала в непериодическом случае (<i>С. Н. Асхабов</i>)	3
Описание класса эволюционных уравнений ферродинамики (<i>Ю. П. Вирченко, А. В. Субботин</i>)	15
О свойствах римановых метрик, связанных с B -эллиптическими операторами (<i>М. В. Половинкина, И. П. Половинкин</i>)	31
Обобщенная задача Римана о распаде разрыва с дополнительными условиями на границе и ее применение для построения вычислительных алгоритмов (<i>Ю. И. Скалько, С. Ю. Гриднев</i>)	38
О распределениях, почти периодических на бесконечности (<i>В. Е. Струков</i>)	51
Орторекурсивные разложения и их свойства (<i>В. В. Галатенко, Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий</i>)	62
Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля (<i>И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, Д. Г. Цветкович</i>)	71
Конечные фреймы Парсевала в анализе Уолша (<i>Ю. А. Фарков</i>)	118
К вопросу об оптимальном оценивании случайных величин (<i>В. Л. Хацкевич</i>)	129



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 170 (2019). С. 3–14
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-170-3-14

УДК 517.968.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В НЕПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

© 2019 г. С. Н. АСХАБОВ

Аннотация. Найдены условия при которых обобщенный оператор типа потенциала действует непрерывно из пространства Лебега с весом общего вида в сопряженное с ним пространство и обладает свойством положительности. Используя эти условия, методом монотонных (по Браудеру–Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании и единственности решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений типа свертки в вещественных весовых пространствах Лебега. Получены оценки норм решений, из которых следует, что соответствующие однородные уравнения имеют лишь тривиальное решение.

Ключевые слова: положительный оператор, обобщенный оператор типа потенциала, монотонный оператор, нелинейное интегральное уравнение.

NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS WITH POTENTIAL-TYPE KERNELS IN THE NONPERIODIC CASE

© 2019 S. N. ASKHABOV

ABSTRACT. We find conditions under which a generalized potential-type operator acts continuously from a Lebesgue space with a general weight to its dual space and possesses the positivity property. Using these conditions, the global existence and uniqueness theorems for various classes of nonlinear integral equations of convolution type in real weighted Lebesgue spaces are proved by the method of monotonic (in the Browder–Minty sense) operators. Also we obtain estimates of the norms of solutions which imply that the corresponding homogeneous equations have only a trivial solution.

Keywords and phrases: positive operator, generalized potential-type operator, monotonic operator, nonlinear integral equation.

AMS Subject Classification: 45G10, 47J05

1. Введение. В настоящее время теория линейных уравнений типа свертки достаточно хорошо разработана (см., например, [8]). В монографии [1] изучены различные классы нелинейных интегральных уравнений типа свертки как на конечном (в периодическом случае), так и на бесконечном промежутке интегрирования. Существенную роль при этом играет свойство положительности (по Бохнеру) интегрального оператора типа свертки, которое обеспечивается условием неотрицательности дискретного (в случае отрезка $[-\pi, \pi]$) или интегрального (в случае оси \mathbb{R}) косинус-преобразования Фурье его ядра. В случае отрезка $[-\pi, \pi]$ примерами таких ядер могут служить некоторые выпуклые вниз функции. В рассматриваемом здесь случае отрезка $[0, 1]$ при исследовании нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала возникают дополнительные трудности, связанные по сути дела с тем, что для положительности оператора типа

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-200001).

свертки выпуклости вниз его ядра уже не достаточно. При дополнительных ограничениях на ядра рассматриваемых уравнений, в данной работе методом монотонных (по Браудеру—Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала в вещественных пространствах Лебега $L_{01}^p(\rho)$ с произвольным (не обязательно степенным) весом $\rho(x)$ при любых $p \in (1, \infty)$. Ранее подобные теоремы были доказаны, в зависимости от рассматриваемого класса нелинейных уравнений, либо только при $p \in (1, 2]$, либо только при $p \in [2, \infty)$ (см. [1, гл. III]). В отличие от [6, 7, 12, 13] и других работ, наше исследование нелинейных уравнений проводится без предположения о том, что линейный интегральный оператор (в данном случае обобщенный оператор типа потенциала) заведомо является положительным, а также либо не использует, как в [12, 13], условие коэрцитивности оператора Немыцкого F (теорема 3.3), либо основано на обращении этого оператора и установлении коэрцитивности обратного к нему оператора F^{-1} (теорема 3.4).

Метод монотонных (по Браудеру—Минти) операторов (см., например, монографии [6, 7] и приведенную в них библиографию) хорошо известен применительно к нелинейным интегральным уравнениям Гаммерштейна (именно к ним он впервые был применен). Поскольку интегральные уравнения Гаммерштейна имеют ядро общего вида (функция двух переменных), то они изучались в предположении, что линейный интегральный оператор с этим ядром априори является положительным. В случае нелинейных интегральных уравнений типа свертки естественно возникает задача нахождения условий на ядро (функция одной переменной), при которых линейные интегральные операторы свертки являются положительными. Решение этой задачи представляет интерес и для современного гармонического анализа, в котором основополагающую роль играет понятие положительно определенной (по Бохнеру) функции (см. [11]), тесно связанное с понятием положительного оператора. В этой связи в данной работе доказаны теоремы о положительности обобщенного оператора типа потенциала, охватывающие, в частности, потенциал Рисса и логарифмический потенциал. Эти теоремы дополняют результаты, полученные в [4, 9]. Следует отметить, что теория нелинейных интегральных уравнений с разностными ядрами достаточно хорошо разработана в вольтерровском случае (см. [14, 15]). Что касается рассматриваемых нами уравнений, то они сравнительно мало изучены и их исследование имеет не только теоретическое, но и прикладное значение в связи с приложениями в теории следящих систем и электрических сетей, в эпидемической и генетической моделях и др. (см., например, монографию [1] и приведенную в ней библиографию).

Всюду в работе будем придерживаться принятых в монографии [7] обозначений и определений, касающихся теории монотонных операторов. Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство, X^* — сопряженное с ним пространство и оператор A действует из X в X^* . Обозначим через $\langle y, x \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. В частности, если X — это гильбертово пространство H , то $\langle y, x \rangle$ совпадает со скалярным произведением (y, x) , где $x, y \in H$. Оператор A называется монотонным, если для любых $u, v \in X$ выполняется неравенство $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$. Если A — линейный оператор, то определение монотонного оператора совпадает с определением положительного оператора.

Как обычно, через \mathbb{R} и \mathbb{N} обозначаются, соответственно, множества всех действительных и натуральных чисел, а через $p' = p/(p-1)$ — сопряженное с p число ($1/p + 1/p' = 1$).

2. Положительность обобщенного оператора типа потенциала. Пусть $\rho(x)$ — неотрицательная почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля измеримая по Лебегу на отрезке $[0, 1]$ функция. Обозначим через $L_{01}^p(\rho)$, $1 \leq p < \infty$, множество всех измеримых по Лебегу на отрезке $[0, 1]$ функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{p,1} = \left(\int_0^1 \rho(x) \cdot |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Известно (см., например, [1]), что $L_{01}^p(\rho)$ при $1 < p < \infty$ является рефлексивным банаховым пространством, а сопряженным с ним является пространство $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$, где $p' = p/(p-1)$. Пространство $L_{01}^p(\rho)$ называют *весовым пространством Лебега* с весом $\rho(x)$. Если $\rho(x) = 1$,

то будем писать L_{01}^p и $\|\cdot\|_p$, соответственно. Норму в пространстве $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ будем обозначать через $\|\cdot\|_{p',1-p'}$.

Следующие три теоремы будут играть важную роль при исследовании далее трех различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала.

Теорема 2.1. Пусть $1 < p < \infty$ и вес $\rho(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\|\rho^{-1}\|_{\infty}^{1/p} = \left[\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq x \leq 1} \rho^{1-p'}(x) \right]^{1/p'} < \infty, \quad \text{если } 1 < p \leq 2, \quad (2.1)$$

$$\|\rho^{-1}\|_{2/(p-2)}^{1/p} = \left(\int_0^1 [\rho(x)]^{2/(2-p)} dx \right)^{(p-2)/(2p)} < \infty, \quad \text{если } 2 < p < \infty. \quad (2.2)$$

Если $\varphi(x) \in L_{01}^{p'/2}$ при $1 < p \leq 2$ или $\varphi(x) \in L_{01}^1$ при $2 < p < \infty$, то обобщенный оператор типа потенциала

$$(P_{01}^{\varphi} u)(x) = \int_0^1 \varphi(|x-t|) \cdot u(t) dt$$

действует непрерывно из $L_{01}^p(\rho)$ в $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$, причем для любого $u(x) \in L_{01}^p(\rho)$ выполняется неравенство

$$\|P_{01}^{\varphi} u\|_{p',1-p'} \leq C \cdot \|u\|_{p,1}, \quad (2.3)$$

где

$$C = \begin{cases} 2^{2/p'} \|\rho^{-1}\|_{\infty}^{2/p} \|\varphi\|_{p'/2}, & \text{если } 1 < p \leq 2, \\ 2 \|\rho^{-1}\|_{2/(p-2)}^{2/p} \|\varphi\|_1, & \text{если } 2 < p < \infty. \end{cases} \quad (2.4)$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая.

1. Пусть $1 < p \leq 2$. Тогда

$$A = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq 1} \left(\int_0^1 \rho^{1-p'}(x) \cdot |\varphi(|x-t|)|^{p'/2} dx \right)^{1/p'} < \infty.$$

В самом деле, так как для любого $t \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\varphi(|x-t|)|^{p'/2} dx &= \int_0^t |\varphi(t-x)|^{p'/2} dx + \int_t^1 |\varphi(x-t)|^{p'/2} dx = \\ &= \int_0^t |\varphi(s)|^{p'/2} ds + \int_0^{1-t} |\varphi(s)|^{p'/2} ds \leq 2 \int_0^1 |\varphi(s)|^{p'/2} ds = 2 \|\varphi\|_{p'/2}^{p'/2}, \end{aligned}$$

то, в силу условия (2.1),

$$A \leq 2^{1/p'} \|\rho^{-1}\|_{\infty}^{1/p} \|\varphi\|_{p'/2}^{1/2}. \quad (2.5)$$

Докажем оценку (2.3). Применяя неравенство Гельдера и учитывая, что $-p'/p = 1 - p'$, имеем

$$\begin{aligned} |(P_{01}^\varphi u)(x)| &\leq \int_0^1 \rho^{-1/p}(t) |\varphi(|x-t|)|^{1/2} \rho^{1/p}(t) |\varphi(|x-t|)|^{1/2} |u(t)| dt \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 \rho^{-p'/p}(t) |\varphi(|x-t|)|^{p'/2} dt \right)^{1/p'} \left(\int_0^1 \rho(t) |\varphi(|x-t|)|^{p/2} |u(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \\ &\leq A \cdot \left(\int_0^1 \rho(t) |\varphi(|x-t|)|^{p/2} |u(t)|^p dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|P_{01}^\varphi u\|_{p', 1-p'} &= \left(\int_0^1 \rho^{1-p'}(x) |(P_{01}^\varphi u)(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \leq \\ &\leq A \left(\int_0^1 \rho^{1-p'}(x) \left(\int_0^1 \rho(t) |\varphi(|x-t|)|^{p/2} |u(t)|^p dt \right)^{p'/p} dx \right)^{1/p'} = \\ &= A \left[\left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \rho^{(1-p')p/p'}(x) \rho(t) |\varphi(|x-t|)|^{p/2} |u(t)|^p dt \right)^{p'/p} dx \right)^{p/p'} \right]^{1/p} \leq 1 \\ &\leq A \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 (\rho^{-1}(x) \rho(t) |\varphi(|x-t|)|^{p/2} |u(t)|^p)^{p'/p} dx \right)^{p/p'} dt \right]^{1/p} = \\ &= A \left[\int_0^1 \rho(t) |u(t)|^p \left(\int_0^1 \rho^{1-p'}(x) |\varphi(|x-t|)|^{p'/2} dx \right)^{p/p'} dt \right]^{1/p} \leq A^2 \|u\|_{p,1}. \end{aligned}$$

Поскольку, в силу (2.5),

$$A^2 \leq 2^{2/p'} \|\rho^{-1}\|_\infty^{2/p} \|\varphi\|_{p'/2},$$

то из предыдущего неравенства получаем доказываемую оценку (2.3).

2. Пусть, наконец, $2 < p < \infty$. В этом случае, в силу условия (2.2), имеют место непрерывные вложения

$$L_{01}^p(\rho) \subset L_{01}^2 \subset L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'}), \quad (2.6)$$

причем выполняются неравенства

$$\|u\|_{p', 1-p'} \leq \|\rho^{-1}\|_{2/(p-2)}^{1/p} \|u\|_2 \quad \text{для любого } u(x) \in L_{01}^2, \quad (2.7)$$

$$\|u\|_2 \leq \|\rho^{-1}\|_{2/(p-2)}^{1/p} \|u\|_{p,1} \quad \text{для любого } u(x) \in L_{01}^p(\rho). \quad (2.8)$$

Неравенство (2.7) доказывается применением неравенства Гельдера с показателями $2/(2-p')$ и $2/p'$, а неравенство (2.8) — применением неравенства Гельдера с показателями $p/(p-2)$ и $p/2$. Вложения (2.6) являются прямыми следствиями неравенств (2.7) и (2.8). Покажем предварительно,

¹Здесь мы применили обобщенное неравенство Минковского с учетом того, что $p/p' \geq 1$.

что оператор P_{01}^φ действует непрерывно из L_{01}^2 в L_{01}^2 . Поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\varphi(|x-t|)| dt &= \int_0^x |\varphi(x-t)| dt + \int_x^1 |\varphi(t-x)| dt = \\ &= \int_0^x |\varphi(s)| ds + \int_0^{1-x} |\varphi(s)| ds \leq 2 \|\varphi\|_1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

то, применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} |(P_{01}^\varphi u)(x)| &\leq \int_0^1 |\varphi(|x-t|)|^{1/2} |\varphi(|x-t|)|^{1/2} |u(t)| dt \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 |\varphi(|x-t|)| dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |\varphi(|x-t|) \cdot |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sqrt{2} \|\varphi\|_1^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 |\varphi(|x-t|) \cdot |u(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Используя сначала оценку (2.10), затем меняя порядок интегрирования (по теореме Фубини) и учитывая неравенство (2.9), получаем

$$\begin{aligned} \|P_{01}^\varphi u\|_2 &\leq \sqrt{2} \|\varphi\|_1^{1/2} \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 |\varphi(|x-t|)| \cdot |u(t)|^2 dt \right) dx \right]^{1/2} = \\ &= \sqrt{2} \|\varphi\|_1^{1/2} \left[\int_0^1 |u(t)|^2 \left(\int_0^1 |\varphi(|x-t|)| dx \right) dt \right]^{1/2} \leq 2 \|\varphi\|_1 \|u\|_2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

т.е. оператор P_{01}^φ действует непрерывно из L_{01}^2 в L_{01}^2 .

Докажем, наконец, что оператор P_{01}^φ действует непрерывно из $L_{01}^p(\rho)$ в $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ и выполняется неравенство (2.3). Пусть $u(x) \in L_{01}^p(\rho)$ — произвольная функция. На основании первого вложения из \mathring{E} (2.6) имеем, что $u(x) \in L_{01}^2$ и, значит, в силу (2.11), $(P_{01}^\varphi u)(x) \in L_{01}^2$. Но тогда, на основании второго вложения из (2.6) $(P_{01}^\varphi u)(x) \in L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ и, в силу оценок (2.7), (2.8) и (2.11), справедливы неравенства

$$\|P_{01}^\varphi u\|_{p', 1-p'} \leq \|\rho^{-1}\|_{2/(p-2)}^{1/p} \|P_{01}^\varphi u\|_2 \leq 2 \|\varphi\|_1 \|\rho^{-1}\|_{2/(p-2)}^{1/p} \|u\|_2 \leq 2 \|\rho^{-1}\|_{2/(p-2)}^{2/p} \|\varphi\|_1 \|u\|_{p,1}.$$

Таким образом, неравенство (2.3) выполняется и в случае $2 < p < \infty$. \square

Замечание 2.1. Так как $(1-p')/p' = -1/p$ при $p > 1$ и $2/(p-2) < 1$ при $p > 4$, то левые части равенств (2.1) и (2.2) следует понимать лишь как удобные обозначения правых частей этих равенств.

Далее нам понадобится следующая лемма, доказанная в [2] (ср. [10, с. 46]).

Лемма 2.1 (см. [2]). *Если $f(x) \in C[0,1]$ — невозрастающая выпуклая вниз функция, то для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(\pi n x) dx \geq 0, \quad (2.12)$$

причем $a_n > 0$, если $f(x)$ — строго выпуклая вниз убывающая функция.

Следует отметить, что при более жестких ограничениях (неотрицательность и непрерывная дифференцируемость функции $f(x)$) лемма 2.1, в связи с приложениями в дробном (интегральном и дифференциальном) исчислении, была доказана другим путем в [9], где также доказано, что оператор P_{01}^φ с ядром $\varphi(x)$, удовлетворяющим условию *монотонности* **M**, т.е.

$$\varphi(x) \in C^1(0, 1], \quad \varphi(x) \geq 0, \quad \int_0^1 \varphi(x) dx < \infty, \quad \varphi(x_1) \geq \varphi(x_2), \quad \varphi'(x_1) < \varphi'(x_2) \quad \forall x_1 < x_2,$$

является строго положительным в пространстве $L_2(0, 1)$. Ниже доказывается положительность оператора P_{01}^φ с ядром $\varphi(x)$, удовлетворяющим менее жестким условиям леммы 2.1 (т.е. без предположения о неотрицательности и непрерывной дифференцируемости функции $\varphi(x)$) в более широких пространствах Лебега $L_{01}^p(\rho)$ с произвольным (не обязательно степенным) весом $\rho(x)$.

Определение 2.1. Скажем, что $\varphi(x) \in \Omega_{01}^1$, если $\varphi(x)$ — такая непрерывная невозрастающая выпуклая вниз в промежутке $(0, 1]$ функция, что

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \geq 0.$$

Теорема 2.2. Пусть $1 < p < \infty$ и вес $\rho(x)$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Если

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in L_{01}^{p'/2} \cap \Omega_{01}^1 && \text{при } 1 < p \leq 2, \\ \varphi(x) &\in L_{01}^1 \cap \Omega_{01}^1 && \text{при } 2 < p < \infty, \end{aligned} \quad (2.13)$$

то оператор P_{01}^φ действует непрерывно из пространства $L_{01}^p(\rho)$ в сопряженное с ним пространство $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$, $p' = p/(p-1)$, и положителен, причем для любого $u(x) \in L_{01}^p(\rho)$ справедливо неравенство

$$\langle P_{01}^\varphi u, u \rangle = \frac{a_0}{2} \left(\int_0^1 u(x) dx \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left| \int_0^1 u(x) e^{i\pi n x} dx \right|^2 \geq 0, \quad (2.14)$$

где

$$a_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos(\pi n x) dx \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. Тот факт, что оператор P_{01}^φ действует непрерывно из $L_{01}^p(\rho)$ в $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ вытекает из теоремы 2.1. Докажем его положительность (ср. [9]). Положим

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x + \varepsilon) & \text{при } 0 \leq x \leq 1 - \varepsilon, \\ \varphi(1) & \text{при } 1 - \varepsilon < x \leq 1, \end{cases} \quad (2.15)$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$ — достаточно малое число. Очевидно, что функция $f_\varepsilon(x)$ удовлетворяет всем требованиям леммы 2.1 и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \varphi(x)$. Продолжим функцию $f_\varepsilon(x)$ на отрезок $[-1, 0]$ четным образом. По теореме Дирихле имеем

$$f_\varepsilon(x) = \frac{a_0^\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\varepsilon \cos(\pi n x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.16)$$

где

$$a_n^\varepsilon = 2 \int_0^1 f_\varepsilon(x) \cos(\pi n x) dx.$$

Так как $\varphi(x) \in \Omega_{01}^1$, то

$$a_0^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_0^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \int_0^1 f_\varepsilon(x) dx = 2 \int_0^1 \varphi(x) dx \geq 0$$

и, в силу неравенства (2.12), $a_n^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_n^\varepsilon \geq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому для любой функции $u(x) \in L_{01}^p(\rho)$ с учетом равенства (2.16) имеем

$$\begin{aligned} \langle P_{01}^\varphi u, u \rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \varphi(|x-t|) u(t) dt \right) u(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \left(\int_0^1 f_\varepsilon(|x-t|) u(t) dt \right) u(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \left(\frac{a_0^\varepsilon}{2} \int_0^1 u(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\varepsilon \int_0^1 \cos(\pi n|x-t|) u(t) dt \right) u(x) dx = \\ &= \frac{a_0^0}{2} \left(\int_0^1 u(x) dx \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \left[\left(\int_0^1 u(x) \cos(\pi n x) dx \right)^2 + \left(\int_0^1 u(x) \sin(\pi n x) dx \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\langle P_{01}^\varphi u, u \rangle = \frac{a_0^0}{2} \left(\int_0^1 u(x) dx \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \left| \int_0^1 u(x) e^{i\pi n x} dx \right|^2 \geq 0,$$

т.е. оператор P_{01}^φ является положительным и выполнено неравенство (2.14). \square

Аналогично доказывается следующая теорема, двойственная теореме 2.2.

Теорема 2.3. Пусть $1 < p < \infty$, вес $\rho(x)$ и ядро $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям

$$\|\rho\|_{2/(2-p)}^{1/p} = \left(\int_0^1 [\rho(x)]^{2/(2-p)} dx \right)^{(2-p)/(2p)} < \infty, \quad \text{если } 1 < p < 2, \quad (2.17)$$

$$\|\rho\|_\infty^{1/p} = \left[\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq x \leq 1} \rho(x) \right]^{1/p} < \infty, \quad \text{если } 2 \leq p < \infty, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in L_{01}^1 \cap \Omega_{01}^1, & \text{если } 1 < p < 2, \\ \varphi(x) &\in L_{01}^{p/2} \cap \Omega_{01}^1, & \text{если } 2 \leq p < \infty. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Тогда оператор P_{01}^φ действует непрерывно из $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ в $L_{01}^p(\rho)$ и положителен, причем для любого $u(x) \in L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ справедливо неравенство

$$\|P_{01}^\varphi u\|_{p,1} \leq C^* \cdot \|u\|_{p',1-p'},$$

где

$$C^* = \begin{cases} 2 \|\rho\|_{2/(2-p)}^{2/p} \|\varphi\|_1, & \text{если } 1 < p < 2, \\ 2^{2/p} \|\rho\|_\infty^{2/p} \|\varphi\|_{p/2}, & \text{если } 2 \leq p < \infty. \end{cases}$$

Замечание 2.2. Поскольку функции $\varphi(x) = x^{\alpha-1}$ при $0 < \alpha < 1$ и $\varphi(x) = -\ln x$ принадлежат классу Ω_{01}^1 , то теоремы 2.2 и 2.3 охватывают потенциал Рисса I^α и логарифмический потенциал (см. [1]). Поэтому P_{01}^φ мы называем обобщенным оператором типа потенциала.

3. Теоремы существования и единственности. Оценки решений. Используя теоремы 2.1–2.3, можно доказать теоремы существования и единственности решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений, содержащих оператор P_{01}^φ .

Введем в рассмотрение нелинейный оператор суперпозиции (так называемый оператор Немыцкого). Пусть вещественнозначная функция $F(x, u)$ определена при $x \in [0, 1]$, $u \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}$ и непрерывна по u почти для всех $x \in [0, 1]$. Обозначим через F оператор суперпозиции, порожденный функцией $F(x, u)$, а через $L_{01}^{p,+}(\rho)$ — множество всех неотрицательных функций из $L_{01}^p(\rho)$.

Рассмотрим сначала нелинейное уравнение, наиболее простое для исследования методом монотонных операторов.

Теорема 3.1. Пусть $1 < p < \infty$, $f(x) \in L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$, вес $\rho(x)$ и ядро $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям (2.1), (2.2) и (2.13). Предположим, что для почти всех $x \in [0, 1]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются следующие условия:

(3.1) $|F(x, u)| \leq a(x) + d_1 \cdot \rho(x) \cdot |u|^{p-1}$, где $a(x) \in L_{01}^{p',+}(\rho^{1-p'})$, $d_1 > 0$;

(3.2) $F(x, u)$ не убывает по u ;

(3.3) $F(x, u) \cdot u \geq d_2 \cdot \rho(x) \cdot |u|^p - D(x)$, где $D(x) \in L_{01}^{1,+}$, $d_2 > 0$.

Тогда при любых значениях параметра $\lambda > 0$ уравнение

$$\lambda \cdot F(x, u(x)) + \int_0^1 \varphi(|x-t|) \cdot u(t) dt = f(x) \quad (3.1)$$

имеет решение $u^*(x) \in L_{01}^p(\rho)$. Это решение единственно, если в условии (3.2) функция $F(x, u)$ строго возрастает по u . Кроме того, если в условии (3.3) $D(x) = 0$, то справедлива оценка:

$$\|u^*\|_{p,1} \leq \left(\lambda^{-1} d_2^{-1} \|f\|_{p',1-p'} \right)^{1/(p-1)}.$$

Доказательство. Запишем уравнение (3.1) в операторном виде:

$$Au = f, \quad \text{где } Au = \lambda \cdot Fu + P_{01}^\varphi u. \quad (3.2)$$

Из условий (3.1)–(3.3) вытекает, соответственно, что оператор Немыцкого F , порожденный функцией $F(x, u)$, действует непрерывно из $L_{01}^p(\rho)$ в $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$, монотонен и коэрцитивен, причем для всех $u(x) \in L_{01}^p(\rho)$ выполняются неравенства

$$\|Fu\|_{p',1-p'} \leq \|a\|_{p',1-p'} + d_1 \cdot \|u\|_{p,1}^{p-1}, \quad \langle Fu, u \rangle \geq d_2 \cdot \|u\|_{p,1}^p - \|D\|_1.$$

Из первого неравенства также вытекает, что нелинейный оператор F является ограниченным.

Рассмотрим теперь оператор P_{01}^φ . По теореме 2.2 оператор P_{01}^φ действует непрерывно из $L_{01}^p(\rho)$ в $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ и является положительным оператором. Таким образом, для оператора $A = P_{01}^\varphi + \lambda \cdot F$ выполняются все требования теоремы Браудера–Минти (см. [7]). Следовательно, уравнение (3.2), а значит и уравнение (3.1), имеет решение $u^*(x) \in L_{01}^p(\rho)$. Это решение единственно, если $F(x, u)$ в условии (3.2) строго возрастает по u , поскольку в этом случае оператор $A = P_{01}^\varphi + \lambda \cdot F$ будет строго монотонным.

Наконец, используя условие (3.3) при $D(x) = 0$, положительность оператора P_{01}^φ и равенство $Au^* = f$, имеем

$$\lambda d_2 \|u^*\|_{p,1}^p \leq \lambda \langle Fu^*, u^* \rangle \leq \lambda \langle Fu^*, u^* \rangle + \langle P_{01}^\varphi u^*, u^* \rangle = \langle Au^*, u^* \rangle = \langle f, u^* \rangle \leq \|f\|_{p',1-p'} \|u^*\|_{p,1},$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка. \square

Прежде чем рассмотреть другой класс нелинейных уравнений с ядром типа потенциала, приведем один результат с поправками (см. ниже), установленный в [12], придерживаясь обозначений этой работы. Пусть Ω — пространство с σ -конечной мерой, K — монотонный оператор и $(Fu)(x) = f(x, u(x))$ — оператор Немыцкого. Рассмотрим уравнение типа Гаммерштейна

$$u + KF u = g. \quad (3.3)$$

Справедлива следующая теорема Брезиса–Браудера (ср. [12, теорема 3]).

Теорема 3.2 (см. [12]). Пусть $p > 1$ и K — монотонный, хеминепрерывный и ограниченный оператор из $L_{p'}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$. Предположим, что функция $f(x, r) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и не убывает по r для почти всех $x \in \Omega$, является измеримой по x для всех $r \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условию

$$|f(x, r)| \leq c(x) + c_0 \cdot |r|^{p-1} \quad \text{для почти всех } x \in \Omega \text{ и всех } r \in \mathbb{R},$$

где $c \in L_{p'}(\Omega)$, $c_0 > 0$. Тогда уравнение (3.3) имеет единственное решение $u \in L_p(\Omega)$ при любом $g \in L_p(\Omega)$.

Следует отметить, что в формулировке теоремы 3.2, приведенной в [12, с. 570], допущены неточности, а именно, функция $f(x, r)$ предполагается *невозрастающей* по r (что не согласуется с условием (3) из [12, с. 567]) и измеримой по x для всех $x \in \mathbb{R}$ (должно быть для всех $r \in \mathbb{R}$, что очевидно). Кроме того, пропущены требования, что $p > 1$ и $c_0 > 0$. Покажем на простом примере, что если функция $f(x, r)$ является невозрастающей по r , то утверждение [12, теорема 3] о единственности решения неверно. Рассмотрим в пространстве $L_{4/3}(\Omega)$ уравнение

$$u(x) - b(x) \int_{\Omega} b(s) \cdot u^{1/3}(s) ds = 0, \quad (3.4)$$

где заданная функция $b(x) \neq 0$ почти всюду на Ω и $b(x) \in L_{4/3}(\Omega)$. В данном случае, в соответствии с [12, теорема 3], $p = 4/3$, $f(x, r) = -r^{1/3}$ является невозрастающей по r функцией и оператор K имеет вид

$$(Ku)(x) = b(x) \int_{\Omega} b(s) u(s) ds.$$

Так как для любого $u(x) \in L_4(\Omega)$ имеем

$$\|Ku\|_{4/3} = \left| \int_{\Omega} b(s) u(s) ds \right| \cdot \left(\int_{\Omega} |b(x)|^{4/3} dx \right)^{3/4} \leq \|b\|_{4/3}^2 \cdot \|u\|_4,$$

то оператор K действует из пространства $L_4(\Omega)$ в сопряженное с ним пространство $L_{4/3}(\Omega)$ и ограничен. Поскольку K является линейным оператором, то он является также непрерывным и тем более хеминепрерывным оператором. Далее, для любого $u(x) \in L_4(\Omega)$ имеем

$$\langle Ku, u \rangle = \int_{\Omega} \left(b(x) \int_{\Omega} b(s) u(s) ds \right) u(x) dx = \left(\int_{\Omega} b(s) u(s) ds \right)^2 \geq 0,$$

т.е. K — положительный, а значит, в силу своей линейности, и монотонный оператор. Таким образом, оператор K и функция $f(x, r) = -r^{1/3}$ удовлетворяют всем требованиям [12, теорема 3], при $g = 0$, $c(x) = 0$, $c_0 = 1$ и $p = 4/3$.

Покажем, наконец, что уравнение (3.4) имеет два различных решения в пространстве $L_{4/3}(\Omega)$. Пусть $u(x) \in L_{4/3}(\Omega)$ есть любое нетривиальное, т.е. отличное от $u(x) = 0$, решение уравнения (3.4). Положим

$$\int_{\Omega} b(s) u^{1/3}(s) ds = C.$$

Тогда из (3.4) получаем:

$$u(x) = C \cdot b(x) \quad \text{или} \quad b(x) \cdot u^{1/3}(x) = C^{1/3} b^{4/3}(x). \quad (3.5)$$

Интегрируя последнее равенство, имеем

$$C = C^{1/3} \int_{\Omega} b^{4/3}(x) dx \quad \text{или} \quad C = \left(\int_{\Omega} b^{4/3}(x) dx \right)^{3/2}.$$

Подставляя найденное значение C в первое равенство из (3.5), окончательно получаем

$$u(x) = \left(\int_{\Omega} b^{4/3}(s) ds \right)^{3/2} b(x). \quad (3.6)$$

Таким образом, уравнение (3.4) помимо тривиального решения $u(x) = 0$ имеет еще и нетривиальное решение (3.6) в пространстве $L_{4/3}(\Omega)$, что противоречит утверждению о единственности решения в формулировке [12, теорема 3].

Замечание 3.1. В [13, с. 126] доказан более общий, чем в теореме 3.2, результат, из которого, в частности, следует, что в формулировке [12, теорема 3] функция $f(x, r)$ должна не убывать по r и при этом она справедлива и для весовых пространств $L_{01}^p(\rho)$.

В отличие от теоремы 3.1, в следующей теореме существование и единственность решения доказывается без условия корцитивности (3.3) нелинейности $F(x, u)$, причем на вес $\rho(x)$ и ядро $\varphi(x)$ накладываются другие условия.

Теорема 3.3. Пусть $1 < p < \infty$, $f(x) \in L_{01}^p(\rho)$, вес $\rho(x)$ и ядро $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям (2.17), (2.18) и (2.19). Если нелинейность $F(x, u)$ удовлетворяет условиям (3.1) и (3.2), то при любых $\lambda \geq 0$ уравнение

$$u(x) + \lambda \cdot \int_0^1 \varphi(|x-t|) \cdot F(t, u(t)) dt = f(x) \quad (3.7)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{01}^p(\rho)$. Кроме того, если выполнены условия (3.1) и (3.3) при $c(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка

$$\|u^*\|_{p,1} \leq d_1 d_2^{-1} \|f\|_{p,1}.$$

Доказательство. При $\lambda = 0$ утверждения теоремы очевидны, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. Запишем уравнение (3.7) в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot P_{01}^\varphi F u = f.$$

Из условий (3.1) и (3.2) вытекает, что оператор F действует непрерывно из $L_{01}^p(\rho)$ в $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ и является монотонным, а из условия (2.19), в силу теоремы 2.3, вытекает, что оператор P_{01}^φ действует непрерывно из $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ обратно в $L_{01}^p(\rho)$ и положителен. Но тогда, в силу теоремы 3.2 и замечания 3.1, данное уравнение имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{01}^p(\rho)$.

Осталось доказать оценку нормы решения $u^*(x)$. Используя условия (3.1) и (3.3) при $c(x) = D(x) = 0$, положительность оператора P_{01}^φ и равенство $u^* + \lambda \cdot P_{01}^\varphi F u^* = f$, имеем

$$d_2 \|u^*\|_{p,1}^p \leq \langle u^*, F u^* \rangle + \lambda \langle P_{01}^\varphi F u^*, F u^* \rangle = \langle f, F u^* \rangle \leq \|f\|_{p,1} \|F u^*\|_{p',1-p'} \leq d_1 \|f\|_{p,1} \|u^*\|_{p,1}^{p-1},$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка. \square

Следующая теорема отличается от теорем 3.1 и 3.3 как по характеру ограничений на нелинейность $F(x, u)$ и правую часть $f(x)$, так и по структуре доказательства, основанном на обращении нелинейного оператора суперпозиции и установлении коэрцитивности обратного оператора.

Теорема 3.4. Пусть $1 < p < \infty$, $f(x) \in L_{01}^p(\rho)$, вес $\rho(x)$ и ядро $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям (2.1), (2.2) и (2.13). Предположим, что для почти всех $x \in [0, 1]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются следующие условия:

$$(3.4) \quad |F(x, u)| \leq g(x) + d_3 \cdot ([\rho(x)]^{-1} |u|)^{1/(p-1)}, \text{ где } g(x) \in L_{01}^{p,+}(\rho), d_3 > 0;$$

$$(3.5) \quad F(x, u) \text{ строго возрастает по } u;$$

$$(3.6) \quad F(x, u) \cdot u \geq d_4 \cdot ([\rho(x)]^{-1} |u|)^{1/(p-1)} |u| - D(x), \text{ где } D(x) \in L_{01}^{1,+}, d_4 > 0.$$

Тогда о при любых значениях параметра $\lambda \geq 0$ уравнение

$$u(x) + \lambda \cdot F \left(x, \int_0^1 \varphi(|x-t|) \cdot u(t) dt \right) = f(x) \quad (3.8)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{01}^p(\rho)$. Кроме того, если условия (3.4) и (3.6) выполнены при $g(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка

$$\|u^* - f\|_{p,1} \leq \lambda (d_3^p d_4^{-1} C \|f\|_{p,1})^{1/(p-1)},$$

где константа C определено в (2.4).

Доказательство. При $\lambda = 0$ утверждение данной теоремы очевидно, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. Запишем уравнение (3.8) в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot FP_{01}^\varphi u = f, \quad (3.9)$$

и покажем, что оно имеет решение $u^*(x) \in L_{01}^p(\rho)$. Для этого введем новую неизвестную функцию $v(x)$, положив $f(x) - u(x) = \lambda \cdot v(x)$. Ясно, что $v(x) \in L_{01}^p(\rho)$. Подставив $u = f - \lambda \cdot v$ в уравнение (3.9), получим:

$$FP_{01}(f - \lambda \cdot v) = v. \quad (3.10)$$

Из условий (3.4)–(3.6) вытекает, что оператор Немыцкого F действует непрерывно из сопряженного пространства $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ в исходное пространство $L_{01}^p(\rho)$, строго монотонен и коэрцитивен, причем для любого $w(x) \in L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ выполняются неравенства

$$\|Fw\|_{p,1} \leq \|g\|_{p,1} + d_3 \|w\|_{p',1-p'}^{1/(p-1)}, \quad \langle Fw, w \rangle \geq d_4 \|w\|_{p',1-p'}^{p/(p-1)} - \|D\|_1. \quad (3.11)$$

Значит, согласно [7, теорема 2.2] существует обратный оператор F^{-1} , действующий из $L_{01}^p(\rho)$ в $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ и являющийся строго монотонным, ограниченным и радиально непрерывным (заметим, что для монотонных операторов понятия радиально непрерывный и деминепрерывный совпадают в силу [7, лемма 1.3]).

Покажем, что обратный оператор F^{-1} является коэрцитивным, т.е. удовлетворяет условию

$$\lim_{\|v\|_{p,1} \rightarrow \infty} \frac{\langle F^{-1}v, v \rangle}{\|v\|_{p,1}} = \infty. \quad (3.12)$$

Пусть $v(x) \in L_{01}^p(\rho)$ и $F^{-1}v = w$. Тогда в силу первого неравенства из (3.11) имеем

$$\|v\|_{p,1} = \|Fw\|_{p,1} \leq \|g\|_{p,1} + d_3 \|w\|_{p',1-p'}^{1/(p-1)}. \quad (3.13)$$

Следовательно, $\|w\|_{p',1-p'} \rightarrow \infty$, если $\|v\|_{p,1} \rightarrow \infty$. Поэтому, используя неравенство (3.13) и второе неравенство из (3.11), получаем

$$\frac{\langle F^{-1}v, v \rangle}{\|v\|_{p,1}} = \frac{\langle w, Fw \rangle}{\|v\|_{p,1}} \geq \frac{d_4 \|w\|_{p',1-p'}^{p/(p-1)} - \|D\|_1}{\|g\|_{p,1} + d_3 \|w\|_{p',1-p'}^{1/(p-1)}} \rightarrow \infty \quad \text{при } \|v\|_{p,1} \rightarrow \infty, \quad (3.14)$$

т.е. справедливо равенство (3.12), и поэтому оператор F^{-1} является коэрцитивным.

Применив теперь оператор F^{-1} к обеим частям уравнения (3.10), имеем $P_{01}^\varphi f - \lambda \cdot P_{01}^\varphi v = F^{-1}v$ или

$$F^{-1}v + \lambda \cdot P_{01}^\varphi v = P_{01}^\varphi f, \quad (3.15)$$

т.е. приходим к уравнению вида (3.2).

Поскольку оператор $A = F^{-1} + \lambda \cdot P_{01}^\varphi$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Браудера–Минти, то уравнение (3.15) имеет решение $v^* \in L_{01}^p(\rho)$. Единственность этого решения вытекает из строгой монотонности оператора F^{-1} . Но тогда, в силу связи $u = f - \lambda \cdot v$, уравнение (3.9), а значит и данное уравнение (3.8), имеет единственное решение $u^* \in L_{01}^p(\rho)$.

Осталось доказать оценку нормы решения. Положим $\psi = F^{-1}v^*$. Тогда $F\psi = v^*$. Так как $F^{-1}v^* + \lambda \cdot P_{01}^\varphi v^* = P_{01}^\varphi f$, то с учетом теоремы 2.2 и равенств $g(x) = D(x) = 0$ имеем

$$\begin{aligned} d_4 \|\psi\|_{p', 1-p'}^{p'} &\leq \langle F\psi, \psi \rangle = \langle v^*, F^{-1}v^* \rangle \leq \langle v^*, F^{-1}v^* \rangle + \lambda \langle v^*, P_{01}^\varphi v^* \rangle = \langle F\psi, P_{01}^\varphi f \rangle \leq \\ &\leq \|F\psi\|_{p,1} \|P_{01}^\varphi f\|_{p', 1-p'} \leq C \|F\psi\|_{p,1} \|f\|_{p,1} \leq C d_3 \|\psi\|_{p', 1-p'}^{p'-1} \|f\|_{p,1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\psi\|_{p', 1-p'} \leq d_3 d_4^{-1} C \|f\|_{p,1}. \quad (3.16)$$

Так как

$$\|v^*\|_{p,1} = \|F\psi\|_{p,1} \leq d_3 \|\psi\|_{p', 1-p'}^{p'-1}, \quad v^* = \lambda^{-1}(f - u^*),$$

то

$$\|f - u^*\|_{p,1} \leq \lambda d_3 \|\psi\|_{p', 1-p'}^{1/(p-1)},$$

откуда с учетом неравенства (3.16) получаем доказываемую оценку нормы решения. \square

Замечание 3.2. Из оценок для норм решений, полученных в теоремах 3.1, 3.3 и 3.4, непосредственно вытекает, что уравнения (3.1), (3.7) и (3.8) при $f(x) = 0$ имеют лишь тривиальное решение $u(x) = 0$.

В заключение отметим, что при $\rho(x) = 1$ аналоги теорем 3.1, 3.2 и 3.4 были доказаны в [3]. Вопрос о приближенном решении уравнений (3.1), (3.7) и (3.8) в гильбертовом пространстве L_{01}^2 был рассмотрен в [5], где комбинированием метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений показано, что решения этих уравнений могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки. — М.: Физматлит, 2009.
2. Асхабов С. Н. Уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью на отрезке // Диффер. уравн. — 2015. — 51, № 9. — С. 1182–1188.
3. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега // Мат. заметки. — 2015. — 97, № 5. — С. 643–654.
4. Асхабов С. Н. Условия положительности операторов с разностными ядрами в рефлексивных пространствах // Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — 149. — С. 3–13.
5. Асхабов С. Н., Джабраилов А. Л. Приближенное решение нелинейных уравнений типа свертки на отрезке // Уфим. мат. ж. — 2013. — 5, № 2. — С. 3–11.
6. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1972.
7. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
8. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. — М.: Наука, 1978.
9. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
10. Харди Г. Х., Рогозинский В. В. Ряды Фурье. — М.: Физматгиз, 1959.
11. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. — М.: Мир, 1985.
12. Brezis H., Browder F. E. Some new results about Hammerstein equations // Bull. Am. Math. Soc. — 1974. — 80. — P. 567–572.
13. Brezis H., Browder F. E. Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type // Adv. Math. — 1975. — 18. — P. 115–147.
14. Brunner H. Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017.
15. Gripenberg G., Londen S. O., Staffans O. Volterra Integral and Functional Equations. — Cambridge–New York: Cambridge Univ. Press, 1990.

Асхабов Султан Нажмудинович

Чеченский государственный педагогический университет, Грозный;

Чеченский государственный университет, Грозный

E-mail: askhabov@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 170 (2019). С. 15–30
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-170-15-30

УДК 517.957.6

ОПИСАНИЕ КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ФЕРРОДИНАМИКИ

© 2019 г. Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. В. СУББОТИН

Посвящается академику НАНУ С. В. Пелетминскому

Аннотация. Формулируется постановка задачи, которая возникает в связи проблемой конструирования эволюционных уравнений для описания динамики конденсированных сред, обладающих внутренней структурой. В рамках этой постановки дается описание класса всех эволюционных уравнений для векторного и псевдовекторного полей на \mathbb{R}^3 с инфинитизимальным сдвигом, определяемым дифференциальным оператором второго порядка дивергентного типа, инвариантным относительно трансляций \mathbb{R}^3 , трансляций времени и преобразующихся ковариантным образом при вращениях \mathbb{R}^3 . Отдельно исследован случай уравнений этого класса, сохраняющих соленоидальность и унимодальность поля. Установлена общая формула для всех операторов, соответствующих этим уравнениям.

Ключевые слова: дивергентный дифференциальный оператор, псевдовекторное поле, плотность потока поля, унимодальность, соленоидальность, уравнение ферродинамики.

DESCRIPTION OF A CLASS OF EVOLUTIONARY EQUATIONS IN FERRODYNAMICS

© 2019 YU. P. VIRCHENKO, A. V. SUBBOTIN

ABSTRACT. In this paper, we state the problem of constructing evolution equations describing the dynamics of condensed matter with an internal structure. Within the framework of this statement, we describe the class of evolution equations for vector and pseudovector fields on \mathbb{R}^3 with an infinitesimal shift defined by a second-order, divergent-type differential operator, which is invariant under translations of \mathbb{R}^3 and time translations and is transformed covariantly under rotations of \mathbb{R}^3 . The case of equations of this class with preserved solenoidality and unimodality of the field is studied separately. A general formula for all operators corresponding to these equations is established.

Keywords and phrases: divergent differential operator, pseudovector field, flux density, unimodality, solenoidality, ferrodynamical equation.

AMS Subject Classification: 35Q60, 35K10

1. Введение. При теоретических исследованиях физических задач, для решения которых привлекаются дифференциальные уравнения в частных производных, ключевым вопросом является следующий: на основе каких физически оправданных положений могут быть сконструированы используемые уравнения, подходящие для достижения целей исследования? Обычно рассуждения, применяемые при построении дифференциальных уравнений, адекватных описываемой физической реальности, не являются объектом исследования собственно теории дифференциальных уравнений; такая ситуация сложилась исторически и связана с тем, что наиболее известные и используемые уравнения математической физики — такие как, например, уравнение теплопроводности, система уравнений гидродинамики ньютоновских жидкостей, система уравнений Максвелла

и т. д. — являются в настоящее время в достаточной степени обоснованными с физической точки зрения, и те математические проблемы, которые приходилось решать их первооткрывателям, не очень важны с математической точки зрения.

Положение совершенно меняется, когда физикам-теоретикам приходится решать задачи о «выводе» адекватных дифференциальных уравнений при исследовании физических ситуаций, принципиально отличных от уже хорошо изученных. При этом часто хорошо отработанные стереотипы рассуждений, такие, как, например, лагранжев (гамильтонов) формализм (см., например, [1, 5, 7, 8]), не приводят к однозначному результату. Эта ситуация возникает, например, при описании динамики конденсированных сред, обладающих сложной внутренней структурой, мгновенное физическое состояние которых в каждой пространственной точке с радиус-вектором $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ характеризуется набором значений термодинамических параметров X_a , $a = 1, \dots, N$.

Пусть возможные значения параметров X_a , $a = 1, \dots, N$, принадлежат некоторой области линейного пространства \mathcal{L} размерности N . Тогда состояние среды в каждый момент времени описывается набором зависящих от времени $t \in \mathbb{R}_+$ полей $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \langle X_a(\mathbf{x}, t), a = 1, \dots, N \rangle$, на \mathbb{R}^3 . Изменение же состояния среды с течением времени описывается системой эволюционных уравнений

$$\dot{X}_a(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{L}_a[\mathbf{X}])(\mathbf{x}, t), \quad a = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

которому этот набор полей подчинен. Здесь точка обозначает дифференцирование по t и \mathbf{L}_a — дифференциальный оператор порядка s , в общем случае нелинейный. Он осуществляет отображение $\mathbf{L}_a : [C_{s,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N \rightarrow [C_{s,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N$ и представляется набором вектор-функций

$$(\mathbf{L}_a[\mathbf{X}])(\mathbf{x}, t) = L_a\left(\mathbf{X}, \nabla \otimes \mathbf{X}, \dots, \underbrace{\nabla \otimes \dots \otimes \nabla}_s \otimes \mathbf{X}; \mathbf{x}, t\right), \quad a = 1, \dots, N,$$

принадлежащих $[C_{s,\text{loc}}(\mathcal{L} \times (\mathbb{R}^3 \times \mathcal{L}) \times \dots \times (\mathbb{R}^{3^s} \times \mathcal{L}) \times \mathbb{R}^3)]^N$, от компонент набора $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ полей и их векторных производных $(\otimes^n \nabla) \otimes \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, $n = 1, \dots, s$. Функции $X_a(\mathbf{x}, t)$, $a = 1, \dots, N$, подразумеваются s раз непрерывно дифференцируемыми по компонентам вектора \mathbf{x} , чтобы применение оператора \mathbf{L}_a имело смысл. Здесь и далее ∇ — операция градиента в \mathbb{R}^3 . Обозначим линейное многообразие всех таких операторов посредством $\mathcal{K}_s(\mathcal{L})$.

Проблема, которая должна быть решена физиком, состоит в адекватном конструировании оператора \mathbf{L}_a . При ее решении допустимо руководствоваться только наиболее общими физическими принципами. Кроме того, возникает необходимость построить дифференциальный оператор \mathbf{L}_a так, чтобы решения системы (1.1) наверняка подчинялись определенным условиям, которые выделяют в пространстве $[C_{s,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N$ некоторое дифференцируемое многообразие $\mathcal{M} \subset [C_{s,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N$. В таком случае возникает достаточно содержательная математическая задача. Она состоит в описании всего класса дифференциальных операторов, удовлетворяющих указанным общим принципам и дополнительным ограничениям. Решение этой задачи дает возможность выбора на практике подходящего дифференциального оператора из указанного класса.

В настоящей работе мы не будем интересоваться корректностью постановки каких-либо начально-краевых задач для уравнений (1.1), определяемых операторами класса $\mathcal{K}_s(\mathcal{L})$. Нас будет интересовать только лишь вопрос, удовлетворяют ли дифференциальные операторы \mathbf{L}_a этого класса определенным требованиям общего характера, которые диктуются физической природой задачи.

По самому смыслу физической ситуации, для описания которой предназначаются уравнения (1.1), потребуем, чтобы оператор \mathbf{L}_a был инвариантен по отношению группы преобразований $\mathbf{T} \otimes \mathbf{R}^3$, где \mathbf{T} — группа трансляций по переменной t , \mathbf{R}^3 — группа трансляций пространства \mathbb{R}^3 , а также требованию ковариантности по отношению к группе \mathbf{O}_3 вращений пространства \mathbb{R}^3 . Естественно, при этом предполагается, что линейное пространство \mathcal{L} преобразуется по представлению группы \mathbf{O}_3 .

Так как в дальнейшем нас будут интересовать не сами представления группы \mathbf{O}_3 , а пространства, где они действуют, то мы будем называть пространство \mathcal{L} линейным представлением, что

не будет вызывать недоразумений. В общем случае, важном с точки зрения физических приложений, это представление разлагается на произведение неприводимых спин-тензорных представлений (см. [11]) и набор скаляров (псевдоскаляров), неизменных при вращениях \mathbb{R}^3 .

Что касается условия инвариантности относительно групп \mathbf{T} и \mathbf{R}^3 , то оно удовлетворяется в том и только в том случае, когда вектор-функции L_a , $a = 1, \dots, N$, не зависят явно ни от t , ни от \mathbf{x} . Требование же ковариантности накладывает уже довольно значительные ограничения на общий вид этих вектор-функций. Его описание приводит к довольно обширному линейному многообразию $\mathcal{K}_s(\mathcal{L})$. Существенное сужение этого многообразия происходит при введении упомянутых выше дополнительных ограничений, т.е. при сужении действия оператора на подходящее многообразие \mathcal{M} . Это оказывается важным с точки зрения востребованности решения сформулированной задачи в физических приложениях. Дополнительно, существенное упрощение происходит в том случае, если физическая среда не является анизотропной. Тогда представление \mathbf{X} не содержит постоянного тензора второго ранга, описывающего анизотропию. В таком случае мы будем называть ее *сферически симметричной*.

В настоящей работе мы ограничимся решением задачи об описании многообразия $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3)$, $N = 3$, в том случае, когда L_a является дифференциальным оператором второго порядка дивергентного типа. При этом мы рассмотрим случаи, когда поле \mathbf{X} является как векторным, так и псевдовекторным (см., например, [13]). Более того, исследуем случай, когда поле \mathbf{X} подчинено дополнительным ограничениям: условиям унимодальности $\mathbf{X}^2(\mathbf{x}, t) = \text{const}$ и соленоидальности $(\nabla, \mathbf{X}) = 0$. Эти условия выделяют многообразие \mathcal{M}_0 , на котором эволюционное уравнение (1.1) заведомо обладает такими инвариантами движения. Решение этой задачи является востребованным с точки зрения приложений к описанию динамики твердотельной среды с собственным электрическим моментом (векторный случай) и среды, упорядоченной ферромагнитным образом (псевдовекторный случай).

2. Задача описания многообразия операторов L_a дивергентного типа. Согласно общему определению дивергентных дифференциальных операторов (см., например, [6]), в рассматриваемом случае, когда дифференциальный оператор L_a определяется вектор-функцией L_a , $a = 1, \dots, N$, инвариантной относительно преобразований из $\mathbf{T} \otimes \mathbf{R}^3$ и ковариантной относительно преобразований группы \mathbf{O}_3 , будем называть уравнение (1.1) *уравнением дивергентного типа*, если вектор-функция L_a имеет вид

$$L_a\left(\mathbf{X}, \nabla \otimes \mathbf{X}, \dots, \underbrace{\nabla \otimes \dots \otimes \nabla \otimes \mathbf{X}}_s\right) = \nabla_k S_{a;k}, \quad a = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

где

$$S_{a;k} \equiv S_{a;k}\left(\mathbf{X}, \nabla \otimes \mathbf{X}, \dots, \underbrace{\nabla \otimes \dots \otimes \nabla \otimes \mathbf{X}}_s\right) \in \left[C_{1,\text{loc}}\left(\mathcal{L} \times \dots \times (\mathbb{R}^{3s} \times \mathcal{L})\right)\right]^{3N}$$

— вектор-функция со значениями в $\mathcal{L} \times \mathbb{R}^3$, компоненты которой перечисляются индексами $a = 1, \dots, N$ и $k = 1, 2, 3$. Здесь и далее принимается соглашение о суммировании в формулах по всем допустимым значениям двукратно повторяющихся индексов.

Важность отдельного изучения случая эволюционных уравнений дивергентного типа связана с тем, что, с физической точки зрения, они обуславливают наличие так называемых *локальных законов сохранения* для изменяющихся со временем полей $X_a(\mathbf{x}, t)$, $a = 1, \dots, N$. При этом вектор-функции $\langle S_{a;k}, a = 1, \dots, N, k = 1, 2, 3 \rangle$ играют роль плотностей потоков соответствующих полей.

Таким образом, описание всех дифференциальных операторов дивергентного типа из многообразия $\mathcal{K}_s(\mathcal{L})$ состоит в описании линейного многообразия всех дифференциальных операторов вида (2.1), обладающей указанными свойствами ковариантности вектор-функции $S_{a;k}$. Это многообразие операторов мы будем обозначать тем же символом $\mathcal{K}_s(\mathcal{L})$ в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений. Справедливо следующее очевидное утверждение.

Теорема 2.1 (см., например, [15]). *Для функций*

$$S_{a;k} \in \left[C_{1,\text{loc}}\left(\mathcal{L} \times (\mathbb{R}^3 \times \mathcal{L}) \times \dots \times (\mathbb{R}^{3(s-1)} \times \mathcal{L})\right)\right]^{3N}$$

со значениями в \mathcal{L}^3 , которые удовлетворяют условию

$$\nabla_k S_{a;k} = 0,$$

имеет место представление

$$S_{a;k} = \varepsilon_{klm} \nabla_l Z_{a;m}$$

с некоторой вектор-функцией

$$Z_{a;m}(\mathbf{X}, \nabla \otimes \mathbf{X}, \dots, \underbrace{\nabla \otimes \dots \otimes \nabla}_s \otimes \mathbf{X}) \in \left[C_{1,\text{loc}}(\mathcal{L} \times \dots \times (\mathbb{R}^{3(s-2)} \times \mathcal{L})) \right]^{3N},$$

где ε_{klm} — псевдотензор Леви-Чивита в \mathbb{R}^3 .

Следовательно, для решения задачи об описании многообразия $\mathcal{K}_s(\mathcal{L})$ необходимо и достаточно описание всех вектор-функций $S_{a;k}$, удовлетворяющих условию ковариантности при вращении пространства, которые представляют действия дифференциальных операторов $(s-1)$ -го порядка, определенных с точностью до произвольной функции $\varepsilon_{klm} \nabla_l Z_{a;m}$, указанной в лемме.

Далее будем интересоваться многообразием $\mathcal{K}_2(\mathcal{L})$ уравнений (1.1) с дифференциальным оператором второго порядка $\mathbf{L}_a : [C_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N \rightarrow [C_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N$. В этом случае функции $S_{a;k}$ представляются действием квазилинейных дифференциальных операторов первого порядка на поле \mathbf{X} ,

$$S_{a;k}(\mathbf{X}, \nabla \otimes \mathbf{X}) = T_{a;b;k,m}(\mathbf{X}) \nabla_m X_b + U_{a;k}(\mathbf{X}). \quad (2.2)$$

Здесь по индексу b производится суммирование в пределах $b = 1, \dots, N$. Ввиду требования ковариантности набора функций $S_{a;k}(\mathbf{X}, \nabla \otimes \mathbf{X})$, коэффициенты $T_{a;b;k,m}(\mathbf{X})$ и функции $U_{a;k}(\mathbf{X})$ являются, соответственно, тензор- и вектор-функциями только от значений полей $X_a(\mathbf{x}, t)$. (Далее в процессе вычислений в рамках тензорной алгебры мы не делаем различия между ковариантными и контравариантными индексами, что допустимо ввиду евклидовости пространства \mathbb{R}^3 (см. [13]).)

Следствием формулы (2.2) является то, что для решения задачи о перечислении операторов из $\mathcal{K}_2(\mathcal{L})$ необходимо и достаточно описать линейное многообразие всех вектор-функций вида (2.2) с точностью до $\varepsilon_{klm} \nabla_l Z_{a;m}(\mathbf{X})$ с произвольной дважды непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $Z_{a;m}(\mathbf{X})$.

Так как функции $T_{a;b;k,m}(\mathbf{X})$ и $U_{a;k}(\mathbf{X})$ не зависят явно от $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, то для описания этого линейного многообразия достаточно описать линейные многообразия всех тензор-функций $T_{a;b;k,m}(\mathbf{X})$ и всех вектор-функций $U_{a;k}(\mathbf{X})$ как функций от вектора $\mathbf{X} \in \mathcal{L}$ в пространствах $[C_{1,\text{loc}}(\mathcal{L})]^{(3N)^2}$ и $[C_{1,\text{loc}}(\mathcal{L})]^{3N}$, соответственно.

Заметим, что функции $T_{a;b;k,m}(\mathbf{X})$ и $U_{a;k}(\mathbf{X})$ образуют представления группы \mathbf{O}_3 соответственно в пространствах представления $(\mathcal{L} \times \mathbb{R}^3)^2$ и $\mathcal{L} \times \mathbb{R}^3$. Пусть

$$\{T_{a;b;k,m}^{(\alpha)}; \alpha \in \mathcal{T}\}, \quad \{U_{a;k}(\mathbf{X}); \beta \in \mathcal{U}\}$$

— конечные наборы функций, составляющих базисы этих представлений. Функции из этих базисов представляют собой линейно независимые мономы относительно тензорного произведения в алгебре с фиксированным набором образующих. Этот набор состоит из неприводимых представлений, составляющих представление \mathbf{X} , и универсальных для \mathbb{R}^3 тензора второго ранга δ (символ Кронекера) и псевдотензора третьего ранга ε (символ Леви-Чивита).

Используя разложения произвольного представления группы по базису, описание интересующего нас многообразия можем сформулировать следующим образом.

Теорема 2.2. *Любые непрерывно дифференцируемые тензор-функция $T_{a;b;k,m}(\mathbf{X}) : \mathcal{L} \rightarrow (\mathcal{L} \times \mathbb{R}^3)^2$ и вектор-функция $U_{a;k}(\mathbf{X}) : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \times \mathbb{R}^3$ определяются формулами*

$$T_{a;b;k,m}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} f^{(\alpha)}(\mathbf{X}) T_{a;b;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{X}), \quad U_{a;k}(\mathbf{X}) = \sum_{\beta \in \mathcal{U}} g^{(\beta)}(\mathbf{X}) U_{a;k}^{(\beta)}(\mathbf{X}),$$

где коэффициенты разложений $f^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathcal{T}$, и $g^{(\beta)}$, $\beta \in \mathcal{U}$, являются непрерывно дифференцируемыми (скалярными) функциями от совокупности переменных, которая состоит из инвариантов представления \mathcal{L} относительно действия группы \mathbf{O}_3 .

На основе линейных многообразий функций $T_{a,b;k,m}(\mathbf{X})$, $\alpha \in \mathcal{T}$, и $U_{a;k}(\mathbf{X})$, $\beta \in \mathcal{U}$, следующее утверждение описывает многообразие $\mathcal{K}_s(\mathcal{L})$.

Теорема 2.3. *Набор вектор-функций $T_{a,b;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{X})\nabla_m X_b$, $\alpha \in \mathcal{T}$, линейно независим при $\mathbf{X} \in [C_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N$.*

Доказательство. Допустим, что совокупность вектор-функций $T_{a,b;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{X})\nabla_m X_b$, $\alpha \in \mathcal{T}$, линейно зависима, т.е. найдутся такие коэффициенты $c^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathcal{T}$, что тождественно выполняется равенство

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{T}} c^{(\alpha)} T_{a,b;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{X})\nabla_m X_b = 0.$$

Ввиду произвольности поля \mathbf{X} , линеаризуем это уравнение около функции $\mathbf{X} = \text{const}$:

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{T}} c^{(\alpha)} T_{a,b;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{X})\nabla_m \delta X_b = 0.$$

Положим в этом равенстве $\delta X_b = A_b \exp(\mathbf{k}, \mathbf{x})$ с произвольными постоянными набором A_b , $b = 1, \dots, N$, и вектором $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$; здесь и далее (\cdot, \cdot) обозначает скалярное произведение векторов из \mathbb{R}^3 . В результате получим равенство

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{T}} c^{(\alpha)} T_{a,b;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{X}) A_b k_m = 0.$$

Ввиду произвольности векторов $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ и $\mathbf{A} = \langle A_b, b = 1, \dots, N \rangle \in \mathcal{L}$, продифференцируем его по компонентам этих векторов. В результате находим, что имеет место тождество

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{T}} c^{(\alpha)} T_{a,b;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{X}) = 0.$$

Это указывает на линейную зависимость базисных функций линейного представления, представленного тензор-функциями $T_{a,b;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{X})$. \square

Следствие 2.1. *Все вектор-функции $S_{a;k}(\mathbf{X}, \nabla \otimes \mathbf{X})$, определяющие элементы линейного многообразия $\mathcal{K}_s(\mathcal{L})$, представляются формулой*

$$S_{a;k}(\mathbf{X}, \nabla \otimes \mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} f^{(\alpha)}(\mathbf{X}) T_{a,b;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{X})\nabla_m X_b + \sum_{\beta \in \mathcal{U}} g^{(\beta)}(\mathbf{X}) U_{a;k}^{(\beta)}(\mathbf{X}), \quad (2.3)$$

с точностью до функции $\varepsilon_{klm} \nabla_l Z_{a;m}$, $k = 1, 2, 3$, с произвольной дважды непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $Z_{a;m}(\mathbf{X})$, $a = 1, \dots, N$, $m = 1, 2, 3$.

Так как при всех наборах произвольно выбранных коэффициентных функций $f^{(\alpha)}(\mathbf{X})$, $\alpha \in \mathcal{T}$, и $g^{(\beta)}(\mathbf{X})$, $\beta \in \mathcal{U}$, выражение для функции $S_{a;k}(\mathbf{X}, \nabla \otimes \mathbf{X})$, $k = 1, 2, 3$, даваемое формулой (2.3), не может стать равным $\varepsilon_{klm} \nabla_l Z_{a;m}$ с некоторой вектор-функцией $Z_{a;m}(\mathbf{X})$, $m = 1, 2, 3$, $a = 1, \dots, N$, то справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.2. *Полное описание линейного многообразия $\mathcal{K}_s(\mathcal{L})$ дифференциальных операторов $\mathbf{L}_a[\mathbf{X}]$ дается формулой (2.1), где вектор-функции $S_{a;k}(\mathbf{X}, \nabla \otimes \mathbf{X})$ определяются формулой (2.3).*

Таким образом, задача описания многообразия $\mathcal{K}_s(\mathcal{L})$ сводится к задаче об описании набора базисных функций $T_{a,b;k,m}^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathcal{T}$, и $U_{a;k}^{(\beta)}$, $\beta \in \mathcal{U}$, соответствующих представлений группы \mathbf{O}_3 , набор аргументов которых состоит из набора \mathbf{X} полей из пространства представления \mathcal{L} и которые ковариантны в соответствии с преобразованиями группы \mathbf{O}_3 .

3. Описание многообразия $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3)$ для векторного поля. На основании общей формулировки задачи, данной в предыдущем разделе, сформулируем теперь конкретную задачу об описании многообразия $\mathcal{K}_2(\mathcal{L})$ всех эволюционных уравнений для векторного поля. В этом случае набор \mathbf{X} состоит из компонент вектора $\mathbf{P} = \langle P_j; j = 1, 2, 3 \rangle$, т.е. $\mathcal{L} = \mathbb{R}^3$.

Вводя соответствующие переобозначения для компонент плотности потока $S_{j;k}(\mathbf{P}, \nabla \otimes \mathbf{P})$ и коэффициентов $U_{j;k}^{(\beta)}(\mathbf{P})$, $T_{j;l;k,m}(\mathbf{P})$ разложения (2.2), запишем его в виде

$$S_{j;k}(\mathbf{P}, \nabla \otimes \mathbf{P}) = T_{j;l;k,m}(\mathbf{P}) \nabla_m P_l + U_{j;k}(\mathbf{P}).$$

Применение элементов группы \mathbf{O}_3 к левой части равенства преобразует ее как тензор второго ранга. По этой причине коэффициенты $T_{j;l;k,m}(\mathbf{P})$ и $U_{j;k}(\mathbf{P})$ являются соответственно тензорами четвертого и второго ранга. Таким образом, решение задачи о перечислении всех дифференциальных операторов из $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3)$, согласно следствию 2.2, состоит в определении наборов \mathcal{T} и \mathcal{U} , соответственно, всех базисных функций для представлений группы \mathbf{O}_3 в виде тензоров четвертого и второго ранга. Искомые базисные функции будем искать в виде мономов относительно тензорного произведения. Набор образующих тензорной алгебры в сферически симметричном случае состоит из фундаментальных тензора второго ранга δ и псевдотензора третьего ранга ε , а также вектора \mathbf{P} .

Технически решение соответствующей алгебраической задачи не вызывает затруднений. Полученный результат сформулируем в следующем виде.

Теорема 3.1 (см. [14]). *Набор \mathcal{U} состоит из двух тензоров δ и $\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}$, а набор \mathcal{T} состоит из 10 элементов следующих типов:*

- (1) 3 тензора вида $\delta \otimes \delta$;
- (2) 6 тензоров $\mathbf{P} \otimes \mathbf{P} \otimes \delta$;
- (3) тензор $\mathbf{P} \otimes \mathbf{P} \otimes \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}$.

Доказательство. Доказательство проводится перебором всех имеющихся возможностей конструирования мономов из образующих так, чтобы получаемые мономы приводили к тензорному представлению требуемого типа.

Проверка линейной независимости всех получившихся мономов $T_{j;l;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{P})$ сводится к проверке линейной независимости мономов отдельно в каждой из групп, указанных в формулировке теоремы, так как элементы разных групп имеют различные степени вхождения в их состав произвольного вектора \mathbf{P} : в элементы первой группы он не входит, в элементы второй группы он входит квадратично, а в единственный элемент третьей группы он входит в четвертой степени. Тогда элемент $\mathbf{P} \otimes \mathbf{P} \otimes \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}$ линейно независим от остальных. Проверка линейной независимости элементов в первой и второй группах представляет анализ уравнений для коэффициентов $c^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \dots, 9$:

$$c^{(1)} T_{j;l;k,m}^{(1)}(\mathbf{P}) + c^{(2)} T_{j;l;k,m}^{(2)}(\mathbf{P}) + c^{(3)} T_{j;l;k,m}^{(3)}(\mathbf{P}) = 0$$

для первой группы,

$$\sum_{\alpha=4}^9 c^{(\alpha)} T_{j;l;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{P}) = 0$$

для второй группы. В свою очередь, доказательство равенств $c^{(\alpha)} = 0$, $\alpha = 1, \dots, 9$, сводится к проверке на невырожденность двух простых систем однородных линейных уравнений для коэффициентов для коэффициентов $c^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$, и $c^{(\alpha)}$, $\alpha = 4, \dots, 9$, соответственно. \square

Так как в сферически симметричном случае имеется только один инвариант \mathbf{P}^2 группы вращений, то, используя общую формулу (2.2) для случая векторного поля, получаем решение задачи об описании всех плотностей потоков поля, определяющих все многообразие $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3)$ дифференциальных операторов дивергентного типа, действующих в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых векторных полей \mathbf{P} на \mathbb{R}^3 ,

$$S_{j;k}(\mathbf{P}, \nabla \otimes \mathbf{P}) = g^{(1)}(\mathbf{P}^2) \delta_{jk} + g^{(2)}(\mathbf{P}^2) P_j P_k + \sum_{\alpha=1}^{10} f^{(\alpha)}(\mathbf{P}^2) T_{j;l;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{P}) \nabla_m P_l, \quad (3.1)$$

где произведено переобозначение произвольных коэффициентных функций

$$f^{(\alpha)}(\mathbf{P}) \Rightarrow f^{(\alpha)}(\mathbf{P}^2), \quad \alpha = 1, \dots, 10, \quad g^{(\beta)}(\mathbf{P}) \Rightarrow g^{(\beta)}(\mathbf{P}^2), \quad \beta = 1, 2,$$

на непрерывно дифференцируемые функции на $(0, \infty)$, зависящие от \mathbf{P}^2 . Суммируемые с произвольными коэффициентами $f^{(\alpha)}(\mathbf{P}^2)$ свертки $T_{j,l;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{P})\nabla_m P_l$ в представленной формуле (3.1) даются в обозначениях алгебры векторов в \mathbb{R}^3 следующим списком, составленным согласно порядку, который указан в формулировке теоремы:

$$\delta_{jk}(\nabla, \mathbf{P}), \quad \nabla_j P_k \pm \nabla_k P_j; \tag{3.2}$$

$$\delta_{jk}(\mathbf{P}, \nabla)\mathbf{P}^2, \quad P_k \nabla_j \mathbf{P}^2 \pm P_j \nabla_k \mathbf{P}^2, \quad P_j(\mathbf{P}, \nabla)P_k \pm P_k(\mathbf{P}, \nabla)P_j, \quad P_j P_k(\nabla, \mathbf{P}); \tag{3.3}$$

$$P_j P_k(\mathbf{P}, \nabla)\mathbf{P}^2. \tag{3.4}$$

Здесь мы представили плотности потоков, образовав из них симметричные и антисимметричные комбинации, имея в виду их неприводимость.

Таким образом, результатом рассмотрений этого раздела является следующая теорема.

Теорема 3.2 (см. [14]). *Все дифференциальные операторы $\mathbb{L}_j[\mathbf{P}]$ из $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3)$ дивергентного типа*

$$\mathbb{L}_j[\mathbf{P}] = \nabla_k S_{j;k}(\mathbf{P}, \nabla \otimes \mathbf{P})$$

на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых векторных полей \mathbf{P} на \mathbb{R}^3 определяются формулой (3.1), в которой $g^{(1)}$, $g^{(2)}$, $f^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \dots, 10$, — произвольные непрерывно дифференцируемые функции от \mathbf{P}^2 и тензоры $T_{j,l;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{P})$ определяются формулами (3.2)–(3.4).

4. Описание многообразия $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3)$ для псевдовекторного поля. Рассмотрим теперь многообразие $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3)$ всех дифференциальных операторов второго порядка дивергентного типа для псевдовекторного поля. В этом случае набор \mathbf{X} состоит из компонент псевдовектора $\mathbf{M} = \langle M_j; j = 1, 2, 3 \rangle$ в пространстве $\mathcal{L} = \mathbb{R}^3$. Вводя переобозначения для компонент плотности потока $S_{j;k}(\mathbf{M}, \nabla \otimes \mathbf{M})$, аналогичные тем, которые были использованы в разделе 3, и для функций $U_{j;k}^{(\beta)}(\mathbf{M})$, $T_{j,l;k,m}(\mathbf{M})$ в формуле (2.2) запишем ее в виде

$$S_{j;k}(\mathbf{M}, \nabla \otimes \mathbf{M}) = T_{j,l;k,m}(\mathbf{M})\nabla_m X_l + U_{j;k}(\mathbf{M}).$$

Так как применение элементов группы \mathbf{O}_3 к левой части равенства преобразует ее как тензор второго ранга в случае непрерывных поворотов пространства и изменяет знак на обратный при отражении \mathbb{R}^3 , то $S_{j;k}(\mathbf{M}, \nabla \otimes \mathbf{M})$ представляет собой псевдотензор второго ранга. По этой причине коэффициенты $T_{j,l;k,m}(\mathbf{M})$ и $U_{j;k}(\mathbf{M})$ являются, соответственно, тензором четвертого ранга и псевдотензором второго ранга.

Таким образом, решение задачи о перечислении операторов из $\mathcal{K}_2(\mathcal{L})$ состоит в определении наборов \mathcal{T} и \mathcal{U} всех линейно независимых мономов относительно тензорного произведения, представляющих, соответственно, тензоры четвертого ранга и псевдотензоры второго ранга. Как и в предыдущем разделе, исследуем сферически симметричный случай, когда образующими тензорной алгебры являются тензор δ и псевдотензор ε , а также псевдовектор \mathbf{M} . В результате несложного алгебраического анализа приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.1 (см. [4]). *Набор \mathcal{U} не содержит ни одного элемента, а набор \mathcal{T} состоит из 26 элементов, представленных следующим списком:*

- (1) 3 тензора вида $\delta \otimes \delta$;
- (2) 6 тензоров $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M} \otimes \delta$;
- (3) 6 тензоров $\delta \otimes (\mathbf{M} \hat{\wedge} \varepsilon)$;
- (4) 4 тензора $\mathbf{M} \otimes \varepsilon$;
- (5) 6 тензоров $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M} \otimes (\mathbf{M} \hat{\wedge} \varepsilon)$;
- (6) тензор $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}$.

Здесь знак $\widehat{}$ — символ операции свертки.

Доказательство. Доказательство основано на том, что при конструировании мономов в виде тензоров четвертого ранга псевдовектор \mathbf{M} и псевдотензор ε должны входить в состав тензорного произведения суммарно четное число раз. При этом символ Леви-Чивита может появляться не более одного раза ввиду тензорного тождества

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix},$$

(см., например, [12]), которое выражает тензорное произведение символов через линейную комбинацию мономов, в которые символ Леви-Чивита не входит.

Проверка линейной независимости всех получившихся мономов $T_{j,l;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{M})$ сводится к проверке их линейной независимости отдельно в каждой из следующих групп из числа указанных в формулировке теоремы. Эти группы объединяют все те мономы, которые имеют одинаковые степени вхождения в их состав псевдовектора \mathbf{M} , а именно, в элементы первой группы он не входит, в элементы третьей и четвертой группы он входит линейно, в элементы второй группы он входит квадратично, степень его вхождения в элементы пятой группы равна 3 и, наконец, эта степень равна 4 для единственного элемента шестой группы. Элемент $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}$ линейно независим от остальных. Проверка линейной независимости элементов во всех остальных группах представляет собой анализ уравнений для коэффициентов $c^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \dots, 25$, которые перечислены согласно указанному порядку:

$$\begin{aligned} c^{(1)}T_{j,l;k,m}^{(1)}(\mathbf{M}) + c^{(2)}T_{j,l;k,m}^{(2)}(\mathbf{M}) + c^{(3)}T_{j,l;k,m}^{(3)}(\mathbf{M}) &= 0, \\ \sum_{\alpha=10}^{19} c^{(\alpha)}T_{j,l;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{M}) = 0, \quad \sum_{\alpha=4}^9 c^{(\alpha)}T_{j,l;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{M}) = 0, \quad \sum_{\alpha=20}^{25} c^{(\alpha)}T_{j,l;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{M}) &= 0. \end{aligned}$$

Анализ этих уравнений сводится к проверке на невырожденность не связанных друг с другом систем однородных линейных уравнений для коэффициентов для коэффициентов $c^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \dots, 25$, имеющих в указанных уравнениях, из которых первые две системы состоят соответственно из 3 и 10 уравнений, а вторые две содержат по 6 уравнений каждая. \square

Так как в рассматриваемом сферически симметричном случае имеется только один инвариант \mathbf{M}^2 группы вращений, то, используя общее представление (2.2) для случая псевдовекторного поля, получаем решение задачи об описании всех плотностей потоков псевдовекторного поля, определяющих все многообразие $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3)$ дифференциальных операторов дивергентного типа в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых псевдовекторных полей \mathbf{M} на \mathbb{R}^3 ,

$$S_{j;k}(\mathbf{M}, \nabla \otimes \mathbf{M}) = \sum_{\alpha=1}^{26} f^{(\alpha)}(\mathbf{M}^2) T_{j,l;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{M}) \nabla_m M_l, \quad (4.1)$$

где произведено переобозначение произвольных коэффициентных функций $f^{(\alpha)}(\mathbf{M}) \Rightarrow f^{(\alpha)}(\mathbf{M}^2)$, $\alpha = 1, \dots, 26$, на непрерывно дифференцируемые функции на $(0, \infty)$, зависящие от единственного инварианта \mathbf{M}^2 .

Свертки $T_{j,l;k,m}^{(\alpha)}(\mathbf{M}) \nabla_m M_l$ в формуле (4.1) представляют собой квазилинейные дифференциальные операторы первого порядка. Они даются в обозначениях алгебры векторов в \mathbb{R}^3 следующим списком, составленным согласно порядку, который указан в формулировке теоремы:

$$\delta_{jk}(\nabla, \mathbf{M}), \quad \nabla_j M_k \pm \nabla_k M_j; \quad (4.2)$$

$$\delta_{jk}(\mathbf{M}, \nabla) \mathbf{M}^2, \quad M_k \nabla_j \mathbf{M}^2 \pm M_j \nabla_k \mathbf{M}^2, \quad M_j(\mathbf{M}, \nabla) M_k \pm M_k(\mathbf{M}, \nabla) M_j, \quad M_j M_k(\nabla, \mathbf{M}); \quad (4.3)$$

$$\delta_{jk}(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]), \quad [\mathbf{M}, \nabla]_j M_k \pm [\mathbf{M}, \nabla]_k M_j, \quad \varepsilon_{jln} M_n \nabla_k M_l \pm \varepsilon_{kln} M_n \nabla_j M_l, \quad \varepsilon_{jkm} M_m(\nabla, \mathbf{M}); \quad (4.4)$$

$$M_j[\nabla, \mathbf{M}]_k \pm M_k[\nabla, \mathbf{M}]_j, \quad \varepsilon_{jkl}(\mathbf{M}, \nabla) M_l, \quad \varepsilon_{jkl} \nabla_l \mathbf{M}^2; \quad (4.5)$$

$$M_j M_k(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]), \quad \varepsilon_{jkm} M_m(\mathbf{M}, \nabla) \mathbf{M}^2, \quad (4.6)$$

$$M_j[M, (M, \nabla)M]_k \pm M_k[M, (M, \nabla)M]_j, \quad M_j[M, \nabla]_k M^2 \pm M_k[M, \nabla]_j M^2; \quad (4.7)$$

$$M_j M_k (M, \nabla) M^2. \quad (4.8)$$

Как и при изучении случая векторного поля, мы представили мономы, образовав из них симметричные и антисимметричные комбинации, ввиду их линейной независимости.

На основе суммы (4.1) всех указанных линейных дифференциальных операторов с произвольными коэффициентами $f^{(\alpha)}(M^2)$ получаем в результате наших рассуждений в этом разделе следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Все операторы $L_j[M] \in \mathcal{K}_2(\mathcal{L})$ в случае псевдовекторного поля M представляются следующей формулой:*

$$L_j[M] = \nabla_k S_{j;k} (M, \nabla \otimes M) = \sum_{\alpha=1}^{26} \nabla_k f^{(\alpha)}(M^2) T_{j;l;k,m}^{(\alpha)}(M) \nabla_m M_l,$$

где операторы первого порядка $T_{j;l;k,m}^{(\alpha)}(M) \nabla_m M_l$, $\alpha = 1, \dots, 26$, представлены списком (4.2)–(4.8).

5. Класс $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^3)$ для векторного поля. В этом и следующем разделах представлены основные и довольно неочевидные результаты работы. Мы дадим описание многообразий, которые состоят из всех тех операторов L_j из $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3)$, которые принадлежат классу операторов $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^3)$, сохраняющих свойства унимодальности и соленоидальности в процессе эволюции поля M . Требование сохранения указанных свойств поля представляет собой как раз те специальные ограничения при конструировании подходящего оператора, адекватного физическим условиям задачи. В этом разделе мы покажем, что класс $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^3)$ тривиален, т.е. состоит только из нулевого оператора.

Пусть поле $P(x, t)$ обладает свойством унимодальности, $P^2(x, t) = P^2 = \text{const}$. Тогда все функции $f^{(\alpha)}(P^2)$, $\alpha = 1, \dots, 10$, и $g^{(\beta)}(P^2)$, $\beta = 1, 2$, являются постоянными. Более того, при этом условии плотности потоков $S_{j;k}$, даваемые выражениями (3.3) и (3.4), у которых имеются производные $\nabla_j P^2$, обращаются в нуль. Кроме того, если поле $P(x, t)$ соленоидально, $(\nabla, P) = 0$, то обращаются в нуль плотности потоков в выражениях (3.2), (3.3), в которых присутствует его дивергенция. В результате при выполнении условий унимодальности и соленоидальности поля P , общее уравнение $\dot{P}_j = L_j[P]$, описывающее его динамику, с дифференциальным оператором, который описывается теоремой 3.2 и формулой (3.1), принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{P}_j = & g^{(2)}(P, \nabla) P_j + (f^{(2)} - f^{(3)}) \Delta P_j + \\ & + f^{(7)} \nabla_k (P_j (P, \nabla) P_k + P_k (P, \nabla) P_j) + f^{(8)} \nabla_k (P_j (P, \nabla) P_k - P_k (P, \nabla) P_j). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь использована нумерация постоянных $f^{(\alpha)}$ согласно порядку соответствующих им плотностей потоков, описанных формулами (3.2)–(3.4).

Для того чтобы оператор $L_j[P]$ сохранял свойства унимодальности и соленоидальности поля $P(x, t)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого дважды непрерывно дифференцируемого поля на \mathbb{R}^3 тождественно выполнялись равенства

$$\nabla_j L_j[P] = 0, \quad P_j L_j[P] = 0. \quad (5.2)$$

Теорема 5.1. $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^3) = \{0\}$.

Доказательство. Покажем, что если поле P обладает свойствами $P^2 = P^2$, $(\nabla, P) = 0$, то равенства (5.2) могут быть удовлетворены только в случае, когда $f^{(3)} = f^{(2)}$, $f^{(7)} = f^{(8)} = 0$.

Умножим скалярно правую часть уравнения (5.2) на P . Так как $(P, (P, \nabla)P) = (\nabla, P)P^2 = 0$, то, в предположении о выполнимости соотношения $(P, L[(P)]) = 0$, получаем равенство

$$\begin{aligned} (f^{(2)} - f^{(3)}) P_j \Delta P_j + \\ + f^{(7)} P_j \nabla_k (P_j (P, \nabla) P_k + P_k (P, \nabla) P_j) + f^{(8)} P_j \nabla_k (P_j (P, \nabla) P_k - P_k (P, \nabla) P_j) = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Так как, по предположению, $\mathbf{P}^2 = \text{const}$, то $P_j \nabla_k P_j = 0$ и $\nabla_k P_k = 0$; поэтому

$$P_j \nabla_k P_j (\mathbf{P}, \nabla) P_k = P^2 \nabla_k P_l \nabla_l P_k + (P_j \nabla_k P_j) \cdot (\mathbf{P}, \nabla) P_k = P^2 \text{Sp} \mathbf{A}^2, \quad (5.4)$$

где введена матрица $A_{kl} = (\mathbf{A})_{kl} \equiv \nabla_k P_l$. Точно так же получаем, что

$$P_j \nabla_k P_k (\mathbf{P}, \nabla) P_j = \nabla_k P_k P_j (\mathbf{P}, \nabla) P_j - ((\mathbf{P}, \nabla) P_j) \cdot ((\mathbf{P}, \nabla) P_j) = -(P_l A_{lj})^2. \quad (5.5)$$

Наконец,

$$P_j \Delta P_j = P_j \nabla_k \nabla_k P_j = \nabla_k (P_j \nabla_k P_j) - (\nabla_k P_j) \cdot (\nabla_k P_j) = -\text{Sp} \mathbf{A} \mathbf{A}^T. \quad (5.6)$$

Таким образом, подставляя полученные результирующие выражения (5.4)–(5.6) в (5.3), получаем

$$c^{(1)} \text{Sp}(\mathbf{A} \mathbf{A}^T) + c^{(2)} \text{Sp} \mathbf{A}^2 + c^{(3)} (P_l A_{lj})^2 = 0, \quad (5.7)$$

где

$$c^{(1)} = f^{(3)} - f^{(2)}, \quad c^{(2)} = (f^{(7)} + f^{(8)}) P^2, \quad c^{(3)} = f^{(8)} - f^{(7)}.$$

Подставим в (5.7) разложение $P_j = P_j^{(0)} + A_{jk}^{(0)} x_k + \dots$, где $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{P}(0)$ — постоянный вектор и $A_{jk}^{(0)}$ — матричные элементы в пространственной точке $\mathbf{x} = 0$. Рассмотрим член нулевой степени по \mathbf{x} равенства (5.7), получившегося в результате разложения левой части. При этом на матричные элементы $A_{jk}^{(0)}$ наложены два условия: $A_{jj}^{(0)} = 0$, в силу $(\nabla, \mathbf{P})_0 = 0$, и вектор $P_j^{(0)}$ является ее левым собственным вектором с нулевым собственным значением. В остальном эта матрица произвольна. Подставляя последовательно в равенство (5.7) матрицы \mathbf{A}

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

с вектором $P_l^{(0)} = \langle 0, 0, 1 \rangle$, находим в соответствии с порядком подстановки, что $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, т.е. $f^{(2)} = f^{(3)}$, $f^{(7)} = f^{(8)} = 0$.

После подстановки этих равенств в (5.1), нужно проверить, может ли уравнение

$$\dot{P}_j = g^{(2)}(\mathbf{P}, \nabla) P_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

обладать инвариантом $(\nabla, \mathbf{P}) = 0$ с непрерывно дифференцируемым полем \mathbf{P} на \mathbb{R}^3 при условии, что $\mathbf{P}^2 = \text{const}$. Допустив такую возможность и применив операцию дивергенции к обеим частям уравнения, находим

$$0 = \nabla_j (\mathbf{P}, \nabla) P_j = (\mathbf{P}, \nabla) \mathbf{P} + (\nabla_j P_l) \cdot (\nabla_l P_j) = \text{Sp} \mathbf{A}^2,$$

что в общем случае невозможно для матриц \mathbf{A} с указанными выше свойствами. Достаточно положить ее симметричной. \square

6. Описание класса $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^3)$ для псевдовекторного поля. Пусть псевдовекторное поле $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ обладает свойством унимодальности, $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}^2 = \text{const}$. Все функции $f^{(\alpha)}(\mathbf{M}^2)$, $\alpha = 1, \dots, 26$, превращаются в постоянные. При этом условия плотности потоков $S_{j;k}$, даваемые выражениями (4.3) и (4.5)–(4.8), у которых имеются производные $\nabla_j \mathbf{M}^2$, обращаются в нуль. Таковыми являются плотности с номерами 4–6, 19, 21, 24–26, где их нумерация соответствует порядку, представленному в приведенном списке. Если, дополнительно, поле $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ соленоидально, $(\nabla, \mathbf{M}) = 0$, то обращаются в нуль плотности потоков с номерами 1, 9, 15, в которых присутствует дивергенция (∇, \mathbf{M}) .

В результате при выполнении условий унимодальности и соленоидальности поля \mathbf{M} общее уравнение $\dot{M}_j = \mathbf{L}_j[\mathbf{M}]$, описывающее его динамику, с дифференциальным оператором, который дается утверждением теоремы 4.2 и формулой (4.1), принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{M}_j = & (f^{(2)} - f^{(3)}) \Delta M_j + (f^{(7)} + f^{(8)}) \nabla_k (M_j (\mathbf{M}, \nabla) M_k) + (f^{(7)} - f^{(8)}) \nabla_k (M_k (\mathbf{M}, \nabla) M_j) + \\ & + f^{(10)} \nabla_j (\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) + (f^{(11)} + f^{(12)}) \nabla_k ([\mathbf{M}, \nabla]_j M_k) + (f^{(11)} - f^{(12)}) \nabla_k ([\mathbf{M}, \nabla]_k M_j) + \\ & + \varepsilon_{jln} (f^{(13)} + f^{(14)}) \nabla_k (M_n \nabla_k M_l) + \varepsilon_{kln} (f^{(13)} - f^{(14)}) \nabla_k (M_n \nabla_j M_l) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (f^{(16)} + f^{(17)})\nabla_k(M_j[\nabla, \mathbf{M}]_k) + (f^{(16)} - f^{(17)})\nabla_k(M_k[\nabla, \mathbf{M}]_j) + \\
 & \quad + \varepsilon_{jkl}f^{(18)}\nabla_k(\mathbf{M}, \nabla)M_l + f^{(20)}\nabla_kM_jM_k(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) + \\
 & + (f^{(22)} + f^{(23)})\nabla_k\left(M_j[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_k\right) + (f^{(22)} - f^{(23)})\nabla_k\left(M_k[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_j\right). \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

Как и в предыдущем разделе, здесь использована нумерация постоянных $f^{(\alpha)}$ согласно порядку соответствующих им плотностей в формулах (4.2)–(4.7).

Для того чтобы оператор $\mathbf{L}_j[\mathbf{M}]$ сохранял свойства унимодальности и соленоидальности поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого дважды непрерывно дифференцируемого псевдовекторного поля \mathbf{M} на \mathbb{R}^3 тождественно выполнялись равенства

$$\nabla_j\mathbf{L}_j[\mathbf{M}] = 0, \quad M_j\mathbf{L}_j[\mathbf{M}] = 0. \quad (6.2)$$

Проведем анализ возможностей выполнения этих равенств для произвольных полей \mathbf{M} из класса $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^3)$. Анализ уравнений (6.2) состоит из следующих пунктов I–VII.

I. Первое из равенств (6.2) приводит к следующему уравнению относительно коэффициентов $f^{(\alpha)}$:

$$\begin{aligned}
 & f^{(7)}\nabla_j\nabla_k\left(M_j(\mathbf{M}, \nabla)M_k + M_k(\mathbf{M}, \nabla)M_j\right) + f^{(10)}\Delta\left(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]\right) + \\
 & \quad + f^{(11)}\nabla_j\nabla_k\left([\mathbf{M}, \nabla]_jM_k + [\mathbf{M}, \nabla]_kM_j\right) + f^{(13)}\nabla_j\nabla_k\left(\varepsilon_{jln}M_n\nabla_kM_l + \varepsilon_{kln}M_n\nabla_jM_l\right) + \\
 & \quad + f^{(16)}\nabla_j\nabla_k\left(M_j[\nabla, \mathbf{M}]_k + M_k[\nabla, \mathbf{M}]_j\right) + f^{(20)}\nabla_j\nabla_kM_jM_k(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) + \\
 & \quad + f^{(22)}\nabla_j\nabla_k\left(M_j[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_k + M_k[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_j\right) = 0, \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

а второе — к уравнению:

$$\begin{aligned}
 & (f^{(2)} - f^{(3)})M_j\Delta M_j + f^{(10)}M_j\nabla_j(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) + \varepsilon_{kln}(f^{(13)} - f^{(14)})M_j\nabla_k(M_n\nabla_jM_l) + \\
 & \quad + (f^{(7)} + f^{(8)})M_j\nabla_k(M_j(\mathbf{M}, \nabla)M_k) + (f^{(7)} - f^{(8)})M_j\nabla_k(M_k(\mathbf{M}, \nabla)M_j) + \\
 & \quad + (f^{(11)} + f^{(12)})M_j\nabla_k([\mathbf{M}, \nabla]_jM_k) + (f^{(16)} - f^{(17)})M_j\nabla_k(M_k[\nabla, \mathbf{M}]_j) + \\
 & \quad + \varepsilon_{jkl}f^{(18)}M_j\nabla_k(\mathbf{M}, \nabla)M_l + f^{(20)}M_j\nabla_kM_jM_k(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) + \\
 & + (f^{(22)} + f^{(23)})M_j\nabla_k\left(M_j[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_k\right) + (f^{(22)} - f^{(23)})M_j\nabla_k\left(M_k[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_j\right), \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

где в (6.4) учтены тождества

$$M_j\nabla_k[\mathbf{M}, \nabla]_kM_j = M_j\nabla_kM_j[\nabla, \mathbf{M}]_k = \varepsilon_{jln}M_j\nabla_k(M_n\nabla_lM_l) = 0.$$

Потребуем, чтобы коэффициенты $f^{(\alpha)}$ в этих уравнениях были универсальны, т.е. не зависели от длины вектора \mathbf{M} . Тогда приведенные два уравнения распадаются на серии уравнений согласно степени поля \mathbf{M} во входящих в них слагаемых, а именно, уравнение (6.3) приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned}
 & f^{(10)}\Delta(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) + 2f^{(11)}\nabla_j\nabla_k[\mathbf{M}, \nabla]_jM_k + 2\varepsilon_{jln}f^{(13)}\nabla_j\nabla_kM_n\nabla_lM_l + \\
 & \quad + 2f^{(16)}\nabla_j\nabla_kM_j[\nabla, \mathbf{M}]_k = 0 \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

со слагаемыми степени 2, к уравнению

$$f^{(7)}\nabla_j\nabla_kM_j(\mathbf{M}, \nabla)M_k = 0 \quad (6.6)$$

со слагаемым степени 3,

$$f^{(20)}\nabla_j\nabla_kM_jM_k(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) + 2f^{(22)}\nabla_j\nabla_kM_j[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_k = 0, \quad (6.7)$$

со слагаемым степени 4. Уравнение (6.4) приводит, соответственно, к уравнениям

$$(f^{(2)} - f^{(3)})M_j\Delta M_j = 0; \quad (6.8)$$

$$f^{(10)} M_j \nabla_j (\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) + \varepsilon_{jkl} f^{(18)} M_j \nabla_k ((\mathbf{M}, \nabla) M_l) + \varepsilon_{klm} (f^{(13)} - f^{(14)}) M_j \nabla_k (M_n \nabla_j M_l) + \\ + (f^{(11)} + f^{(12)}) M_j \nabla_k ([\mathbf{M}, \nabla]_j M_k) + (f^{(16)} - f^{(17)}) M_j \nabla_k (M_k [\nabla, \mathbf{M}]_j) = 0; \quad (6.9)$$

$$(f^{(7)} + f^{(8)}) M_j \nabla_k (M_j (\mathbf{M}, \nabla) M_k) + (f^{(7)} - f^{(8)}) M_j \nabla_k (M_k (\mathbf{M}, \nabla) M_j) = 0; \quad (6.10)$$

$$f^{(20)} M_j \nabla_k M_j M_k (\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) + (f^{(22)} + f^{(23)}) M_j \nabla_k \left(M_j [\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla) \mathbf{M}]_k \right) + \\ + (f^{(22)} - f^{(23)}) M_j \nabla_k \left(M_k [\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla) \mathbf{M}]_j \right) = 0. \quad (6.11)$$

II. Равенство (6.8) для унимодального поля \mathbf{M} возможно только при выполнении условия $(\nabla_k M_l)(\nabla_k M_l) = 0$; это приводит к заключению, что $\mathbf{M} = \text{const}$. Тогда $f^{(2)} = f^{(3)}$. В общем случае унимодального соленоидального поля

$$\nabla_j \nabla_k M_j (\mathbf{M}, \nabla) M_k \neq 0.$$

Тогда из равенства (6.6) следует, что $f^{(7)} = 0$. В этом случае, ввиду соотношения

$$M_j (\nabla_k M_j) \cdot (\mathbf{M}, \nabla) M_k = 0,$$

из (6.10) следует, что

$$f^{(8)} M_j M_k \nabla_k (\mathbf{M}, \nabla) M_j = 0.$$

Так как в общем положении поля \mathbf{M} выражение при коэффициенте $f^{(8)}$ не равно нулю, то $f^{(8)} = 0$.

III. Выявим все остальные равные нулю коэффициенты $f^{(\alpha)}$ при условии, что выполняются равенства (6.5), (6.7), (6.9) и (6.11). Найдем связи между оставшимися неустановленными коэффициентами путем линеаризации этих равенств около постоянного поля $\mathbf{M}^{(0)}$. Положим в уравнениях $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(0)} + \mathbf{m}$, где, ввиду соленоидальности и унимодальности поля \mathbf{M} , поле \mathbf{m} также является соленоидальным и лежит в плоскости, ортогональной $\mathbf{M}^{(0)}$, а в остальном произвольно. Линеаризация указанных уравнений по полю \mathbf{m} приводит к следующим равенствам, которые должны тождественно выполняться при его произвольном выборе с учетом ограничений $(\mathbf{M}^{(0)}, \mathbf{m}) = 0$ и $(\nabla, \mathbf{m}) = 0$:

$$(f^{(10)} + 2f^{(13)}) (\mathbf{M}^{(0)}, [\nabla, \Delta \mathbf{m}]) = 0, \quad (6.12)$$

$$(f^{(20)} - 2f^{(22)}) (\mathbf{M}^{(0)}, \nabla)^2 (\mathbf{M}^{(0)}, [\nabla, \mathbf{m}]) = 0, \quad (6.13)$$

$$(f^{(10)} + f^{(13)} - f^{(14)} + f^{(16)} - f^{(17)} + f^{(18)}) (\mathbf{M}^{(0)}, \nabla) (\mathbf{M}^{(0)}, [\nabla, \mathbf{m}]) = 0, \quad (6.14)$$

$$(f^{(20)} - f^{(22)} - f^{(23)}) M^2 (\mathbf{M}^{(0)}, \nabla) (\mathbf{M}^{(0)}, [\nabla, \mathbf{m}]) = 0. \quad (6.15)$$

После подстановки $\mathbf{m} = \mathbf{A} \exp(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ в равенства (6.12)–(6.15), где векторы \mathbf{k} и \mathbf{A} таковы, что $(\mathbf{A}, \mathbf{M}^{(0)}) = 0$, $(\mathbf{A}, \mathbf{k}) = 0$, соответственно, получаем в каждом равенстве не равные нулю множители, зависящие от поля \mathbf{m} . Тогда

$$f^{(10)} + 2f^{(13)} = 0, \quad f^{(20)} = 2f^{(22)}, \quad f^{(22)} = f^{(23)}, \quad (6.16)$$

$$f^{(18)} = f^{(13)} + f^{(14)} + f^{(17)} - f^{(16)}. \quad (6.17)$$

При учете равенств (6.16) уравнение (6.7) принимает вид

$$f^{(20)} \left(\nabla_j \nabla_k M_j M_k (\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) + \nabla_j \nabla_k M_j [\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla) \mathbf{M}]_k \right) = 0, \quad (6.18)$$

IV. После установления связей (6.16), (6.17) произведем дальнейшие упрощения анализируемых уравнений (6.5), (6.7), (6.9), (6.11). Подставим в равенство (6.18) поле

$$M_j = A_j \cos(\mathbf{x}, \mathbf{k}) + B_j \sin(\mathbf{x}, \mathbf{k}), \quad \text{где } k_j A_j = k_j B_j = A_j B_j = 0,$$

которое принадлежит многообразию $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$(\mathbf{M}, \nabla) \mathbf{M} = 0, \quad (\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) = \varepsilon_{jkl} k_k A_j B_l.$$

Поэтому (6.18) сводится к равенству

$$f^{(20)}(\nabla_k M_j)(\nabla_j M_k) = 0 = f^{(20)}(\text{Sp } \mathbf{A}^2),$$

где бесследовая матрица $(\mathbf{A})_{jk} \equiv A_{jk} = \nabla_j M_k$ может быть выбрана диагональной в фиксированной точке $\mathbf{x} = 0$ и потому $\text{Sp } \mathbf{A}^2 \neq 0$. Следовательно, $f^{(20)} = 0$, так что $f^{(22)} = f^{(23)} = 0$.

Уравнение (6.5), с учетом (6.16), принимает вид

$$f^{(13)} \left(\varepsilon_{jln} \nabla_j M_n \Delta M_l - \Delta(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) \right) + \nabla_j \nabla_k \left(f^{(11)} [\mathbf{M}, \nabla]_j M_k + f^{(16)} M_j [\nabla, \mathbf{M}]_k \right) = 0. \quad (6.19)$$

Используя условия унимодальности и соленоидальности поля \mathbf{M} , преобразуем слагаемые, входящие в (6.19):

$$\begin{aligned} \nabla_j \nabla_k [\mathbf{M}, \nabla]_j M_k &= \varepsilon_{jln} B_{ljk} A_{nk}, & \nabla_j \nabla_k M_j [\nabla, \mathbf{M}]_k &= \varepsilon_{jln} A_{nk} B_{ljk}, \\ \varepsilon_{jln} \nabla_j (M_n \Delta M_l) - \Delta(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]) &= -2\varepsilon_{jln} [A_{jl} B_{nkk} + A_{kn} B_{ljk}], \end{aligned}$$

где $B_{ljk} \equiv \nabla_j \nabla_k M_l$ — симметричный по паре последних индексов тензор третьего ранга. Подстановка этих выражений в уравнение (6.19) приводит его к виду

$$\varepsilon_{jln} \left[(f^{(11)} + f^{(16)}) A_{nk} B_{ljk} - 2f^{(13)} (A_{kn} B_{ljk} + A_{jl} B_{nkk}) \right] = 0. \quad (6.20)$$

V. Проанализируем, теперь, возможность выполнимости равенства (6.20) локально в окрестности произвольной фиксированной точки \mathbf{x}_0 при ненулевых значениях коэффициентов. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mathbf{x}_0 = 0$. Воспользуемся степенным разложением поля \mathbf{M} в этой точке:

$$M_j = M_j^{(0)} + A_{jk} x_k + \frac{1}{2} B_{jkl} x_k x_l + o(|\mathbf{x}|^2). \quad (6.21)$$

Коэффициенты разложения обязаны удовлетворять условиям

$$\mathbf{M}^2 = M_j^{(0)} M_j^{(0)} + 2M_j^{(0)} A_{jk} x_k + (A_{jk} A_{jl} + M_j^{(0)} B_{jkl}) x_k x_l + o(|\mathbf{x}|^2) = M^2$$

и, следовательно,

$$2M_j^{(0)} A_{jk} x_k + A_{jk} A_{jl} x_k x_l + M_j^{(0)} B_{jkl} x_k x_l + o(|\mathbf{x}|^2) = 0.$$

Кроме того, должно выполняться соотношение

$$\nabla_j M_j = A_{jj} + B_{jjk} x_k + o(|\mathbf{x}|) = 0.$$

Тогда для возможности существования разложения (6.21) необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты A_{jk} и B_{jkl} удовлетворяли следующим условиям:

$$B_{jkl} = B_{jlk}, \quad A_{jj} = 0, \quad M_j^{(0)} A_{jk} = 0, \quad B_{jjk} = 0, \quad A_{jk} A_{jl} + M_j^{(0)} B_{jkl} = 0, \quad (6.22)$$

а в остальном они могут быть выбраны произвольно.

VI. Докажем, что $f^{(13)} = 0$. Не ограничивая общности, считаем, что $M_3^{(0)} = M$. Тогда из (6.22) следует, что

$$A_{j3} = 0, \quad A_{mk}A_{ml} + MB_{3kl} = 0, \quad k, l = 1, 2, 3.$$

Положим $A_{kl} = \delta_{k3}(1 - \delta_{l3})$. Тогда

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})_{kl} = (1 - \delta_{k3})(1 - \delta_{l3})$$

и, ввиду (6.22), $B_{3kl} = 0$, если хотя бы один из индексов равен 3, и $B_{3kl} = -M^{-1}$ при $k, l \neq 3$.

Элементы B_{jkl} , где $j = 1, 2$, могут быть выбраны произвольно, но с учетом соотношений

$$B_{jjk} = 0, \quad B_{jkl} = B_{jlk}.$$

Положим

$$B_{jkl} = b^{(j)} B_{kl}, \quad j = 1, \quad k, l = 1, 2, 3,$$

где матрица B_{kl} симметрична. Рассмотрим условие $B_{jjk} = 0$. Так как $B_{33k} = 0$, то при $k = 3$ получаем

$$B_{113} + B_{223} = b^{(1)} B_{13} + b^{(2)} B_{23} \equiv b^{(1)} b_1 + b^{(2)} b_2 = 0.$$

Удовлетворить этому равенству для любых наперед заданных чисел $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$ всегда можно, подбирая подходящим образом числа b_1 и b_2 .

При $k = 1, 2$ условие $B_{jjk} = 0$ превращается в

$$b^{(1)} B_{1k} + b^{(2)} B_{2k} = 0,$$

т.е. $B_{2k} = \lambda B_{1k}$, где $\lambda = -b^{(1)}/b^{(2)} \in \mathbb{R}$ — произвольное число. Наконец, из условия симметрии матрицы B_{kl} следует, что

$$B_{kl} = b \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad b = B_{11}.$$

Используя определенные выше тензоры A_{jk} и B_{jkl} , находим, что при $b^{(1)} = b^{(2)}$ имеют место равенства

$$\varepsilon_{jln} A_{nk} B_{ljk} = bb^{(2)}(1 - \lambda^2), \quad \varepsilon_{jln} A_{jl} B_{nkk} = 0, \quad \varepsilon_{jln} A_{kn} B_{ljk} = 0,$$

где для значений еще не определенных коэффициентов B_{k33} , $k = 1, 2$, мы положили $B_{133} = B_{233}$. Подставляя вычисленные значения в (6.20), находим $2bb^{(2)}(1 - \lambda^2)f^{(13)} = 0$, откуда следует $f^{(13)} = 0$.

VII. Так как $f^{(13)} = 0$, то из (6.20) следует $f^{(11)} = -f^{(16)}$ ввиду того, что $\varepsilon_{jln} A_{nk} B_{ljk}$ не равно нулю в общем случае. Учитывая это равенство вместе с $f^{(13)} = 0$, а также равенства (6.16) и (6.17), запишем уравнение (6.9) в следующей форме:

$$\begin{aligned} & f^{(12)} M_j \nabla_k [\mathbf{M}, \nabla]_j M_k - f^{(14)} M_j \nabla_k \left(\varepsilon_{kln} M_n \nabla_j M_l - \varepsilon_{jkl} (\mathbf{M}, \nabla) M_l \right) + \\ & + f^{(16)} M_j \nabla_k \left(M_k [\nabla, \mathbf{M}]_j - [\mathbf{M}, \nabla]_j M_k - \varepsilon_{jkl} (\mathbf{M}, \nabla) M_l \right) - \\ & - f^{(17)} M_j \nabla_k \left(M_k [\nabla, \mathbf{M}]_j - \varepsilon_{jkl} (\mathbf{M}, \nabla) M_l \right) = 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись соленоидальностью и унимодальностью поля \mathbf{M} и вводя обозначения $A_{jk} = \nabla_j M_k$, $B_{jkl} = \nabla_k \nabla_l M_j$, посредством простых преобразований в рамках тензорной алгебры приведем это уравнение к виду

$$(f^{(12)} - f^{(14)} - f^{(17)}) \varepsilon_{klm} M_l A_{kj} A_{jm} - f^{(14)} \varepsilon_{jkm} M_l A_{kj} A_{lm} - 2f^{(16)} \varepsilon_{jlm} M_j M_k B_{mkl} = 0,$$

в котором в левой части представлено разложение по линейно независимым инвариантам, составленным из тензоров A_{jk} , B_{jkl} и псевдовектора M_j . Из полученного уравнения, которое должно выполняться для любого соленоидального унимодального дважды непрерывно дифференцируемого поля \mathbf{M} на \mathbb{R}^3 , с необходимостью следует, что

$$f^{(16)} = 0, \quad f^{(14)} = 0, \quad f^{(12)} = f^{(17)}.$$

Введя обозначение $f^{(12)} = \gamma$ и учтя все полученные в процессе проведения анализа ограничения на выбор коэффициентов $f^{(\alpha)}$, приходим на основании (6.1) к следующему общему виду дифференциальных операторов класса $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^3)$:

$$\mathbb{L}_j[\mathbf{M}] = \gamma \nabla_k \left([\mathbf{M}, \nabla]_j M_k - [\mathbf{M}, \nabla]_k M_j + M_j [\nabla, \mathbf{M}]_k - M_k [\nabla, \mathbf{M}]_j + \varepsilon_{jkl} (\mathbf{M}, \nabla) M_l \right). \quad (6.23)$$

Таким образом, доказана следующая основная теорема, дающая описание класса $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^3)$ для псевдовекторного поля.

Теорема 6.1. *Линейное многообразие $\mathcal{K}_2(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^3)$ всех дифференциальных уравнений*

$$\dot{M}_j = \mathbb{L}_j[\mathbf{M}]$$

дивергентного типа для псевдовекторных соленоидальных унимодальных полей \mathbf{M} на \mathbb{R}^3 из пространства $[C_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)]^3$ с дифференциальными операторами $\mathbb{L}_j[\mathbf{M}]$ второго порядка, действующими в этом пространстве, ковариантных относительно действия преобразований группы \mathbf{O}_3 , которые оставляют инвариантным любое многообразие

$$\left\{ \mathbf{M} : (\nabla, \mathbf{M}) = 0; \mathbf{M}^2 = M^2, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \right\} \subset [C_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)]^3$$

в этом пространстве с произвольным значением $M^2 \in (0, \infty)$, одномерно. Это линейное многообразие описывается формулой (6.23) с произвольной постоянной $\gamma \in \mathbb{R}$.

7. Заключение. Идея, на которой основано проведенное исследование, связана с проблемой описания на макроскопическом уровне динамики сложным образом устроенных конденсированных сред. Полученный в работе конкретный результат связан с известной в физике магнетизма проблемой построения адекватного эволюционного уравнения для поля \mathbf{M} плотности намагниченности, обладающего необратимой динамикой (см. [1–3, 5]). Известно эволюционное уравнение Ландау—Лифшица (см., например, [9, 10]), которое в изученном в работе сферически симметричном случае имеет вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \gamma [\mathbf{M}, \Delta \mathbf{M}].$$

Оно имеет дивергентный тип, так как

$$[\mathbf{M}, \Delta \mathbf{M}]_j = \nabla_k \varepsilon_{jln} M_l \nabla_k M_n,$$

очевидным образом сохраняет унимодальность поля, но не сохраняет соленоидальность и, что более существенно, не обладает «диссипацией». Это связано с тем, что собственные числа (3×3) -матрицы, представляющей символ линеаризации оператора $\mathbb{L}_j[\mathbf{M}]$, не имеют вещественной части. Попытки устранения указанного недостатка эволюционного уравнения ферродинамики, основанные на обобщении уравнения Ландау—Лифшица, не является, на наш взгляд, удачными (см., например, [2, 3]). Так как оператор $\mathbb{L}_j[\mathbf{M}] = \gamma [\mathbf{M}, \Delta \mathbf{M}]$ не содержится среди слагаемых в правой части эволюционного уравнения

$$\dot{M}_j = \gamma \nabla_k \left([\mathbf{M}, \nabla]_j M_k - [\mathbf{M}, \nabla]_k M_j + M_j [\nabla, \mathbf{M}]_k - M_k [\nabla, \mathbf{M}]_j + \varepsilon_{jkl} (\mathbf{M}, \nabla) M_l \right)$$

с оператором $\mathbb{L}_j[\cdot]$, определяемым формулой (6.23), то теорема 6.1 показывает, с чем связано такое положение.

Заметим, что символ линеаризации оператора, представленного формулой (6.23), ввиду наличия двух инвариантов движения, необходимо имеет два нулевых собственных числа. Поэтому его третье собственное число обязательно вещественно. Выбором же подходящего знака постоянной γ можно добиться того, что этот оператор будет иметь параболический тип.

В работе рассмотрены только лишь простейшие постановки задач из числа тех, связанные с неприводимыми векторными представлениями и которые могли бы представлять интерес для физических приложений. Очевидное обобщение изученных задач состоит в отказе от сферической симметрии, т.е. в использовании при построении всех возможных тензорных коэффициентов как в векторном, так и в псевдовекторном случае тензорной алгебры с расширением множества образующих за счет тензора второго ранга, характеризующего асимметрию среды. При такой постановке задачи возникает существенно более богатое множество тензорных коэффициентов,

определяющих плотности $S_{j;k}$, $j = 1, 2, 3$, что приводит к более трудоемкому анализу всех представляющихся возможностей.

Другой путь обобщений состоит в отказе от выполнения сразу двух условий: унимодальности и соленоидальности. В этом случае классы допустимых уравнений становятся намного более широкими. В частности, в первом случае для псевдовекторного поля такой класс содержит уже упомянутое уравнение Ландау—Лифшица, а во втором — известное уравнение Навье—Стокса для несжимаемой жидкости.

Наконец, самые широкие обобщения постановки задачи, которая решена в работе, усматриваются из ее общей постановки, изложенной в разделе 2. Более того, с точки зрения приложений имеет смысл изучение эволюционных уравнений с дифференциальными операторами, которые не являются дивергентными, но которые представимы в виде

$$\dot{X}_a = (\nabla_k S_{a;k})(X) + H_a(X), \quad a = 1, \dots, N,$$

где $H_a(X)$ — функция на пространстве значений полного набора локальных термодинамических параметров, ковариантно преобразующаяся при действии преобразований группы \mathbf{O}_3 и служащая с физической точки зрения «самосогласованным источником» поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. Ф., Марченко В. И. Макроскопическая теория спиновых волн // ЖЭТФ. — 1976. — 70, № 4. — С. 1522–1532.
2. Барьяхтар В. Г. Жизнь в науке. — Киев: Наукова думка, 2010.
3. Барьяхтар В. Г., Бельх В. Г., Соболева Т. К. Макроскопическая теория релаксации коллективных возбуждений в неупорядоченных и неколлинеарных магнетиках // Теор. мат. физ. — 1988. — 77, № 2. — С. 311–318.
4. Вирченко Ю. П., Пономарева А. Э. Построение общего эволюционного уравнения для псевдовекторного соленоидального поля с локальным законом сохранения // Науч. вед. Белгород. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2018. — 50, № 2. — С. 224–232.
5. Волков Д. В. Феноменологические лагранжианы // Физ. элем. част. атом. яд. — 1973. — 4, № 1. — С. 3–41.
6. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
7. Исаев А. А., Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В. Гамильтонов подход в теории конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией // Физ. элем. част. атом. яд. — 1996. — 27, № 2. — С. 431–492.
8. Кац Е. И., Лебедев В. В. Динамика жидких кристаллов. — М.: Наука, 1988.
9. Косевич А. М., Иванов Б. А., Ковалев А. С. Нелинейные волны намагниченности. — Киев: Наукова думка, 1988.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // в кн.: Ландау Л. Д. Собрание трудов. — М.: Наука, 1969. — Т. 1. — С. 128.
11. Любарский Г. Я. Теория групп и ее приложения в физике. — М.: ГИФМЛ, 1958.
12. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. — М.: ГИФМЛ, 1963.
13. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.
14. Субботин А. В. Описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля // Науч. вед. Белгород. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2018. — 50, № 4. — С. 492–497.
15. Briceyda B. D., Porter R. M. General Solution of the Inhomogeneous Div-Curl System and Consequences. — Adv. Appl. Clifford Alg., 2017.

Вирченко Юрий Петрович
Белгородский государственный университет
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Субботин Андрей Валерьевич
Белгородский государственный университет
E-mail: Subbotin@bsu.edu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 170 (2019). С. 31–37
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-170-31-37

УДК 517.956.226

О СВОЙСТВАХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК, СВЯЗАННЫХ С B -ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

© 2019 г. М. В. ПОЛОВИНКИНА, И. П. ПОЛОВИНКИН

Аннотация. Рассмотрена риманова метрика, в которой оператор Лапласа–Бельтрами с точностью до множителя совпадает с B -эллиптическим оператором.

Ключевые слова: B -эллиптический оператор, риманова метрика, оператор Лапласа–Бельтрами, группа изометрий, условия Киллинга, геометрия Лобачевского.

ON PROPERTIES OF RIEMANNIAN METRICS ASSOCIATED WITH B -ELLIPTIC OPERATORS

© 2019 M. V. POLOVINKINA, I. P. POLOVINKIN

ABSTRACT. In this paper, we consider a Riemannian metric in which the Laplace–Beltrami operator coincides with a B -elliptic operator up to a factor.

Keywords and phrases: B -elliptic operator, Riemannian metric, Laplace–Beltrami operator, isometry group, Killing conditions, Lobachevsky geometry.

AMS Subject Classification: 35J15

1. K -Однородная метрика. Пусть

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n),$$

где γ_i , $i = 1 \dots, n$, — фиксированные числа, одновременно не равные нулю, т.е. такие, что

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 > 0.$$

Обозначим символом \mathbb{R}_+^n множество таких $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, что $x_i \in \mathbb{R}$, если $\gamma_i = 0$, $x_i \in (0, +\infty)$, если $\gamma_i \neq 0$. Переменную x_i с номером i , для которого $\gamma_i \neq 0$, принято называть *особой*. Как обычно, будем пользоваться обозначением

$$(x)^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Пусть функция $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в \mathbb{R}_+^n .

Определим оператор Δ_{B_γ} формулой

$$\Delta_{B_\gamma} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (1)$$

Операторы вида (1) изучались И. А. Кирияновым и его учениками (см. [4–6]).

Поставим задачу найти такую положительно определенную на \mathbb{R}_+^n симметричную квадратичную форму (метрику)

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j,$$

чтобы соответствующий этой метрике оператор Лапласа—Бельтрами (см. [8])

$$\Delta_\omega = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n g^{ik} \sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (2)$$

с точностью до множителя совпадал с оператором Δ_{B_γ} . Здесь функции g^{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, — элементы матрицы $\|g^{ij}\|$, обратной к матрице $\|g_{ij}\|$ (ковариантный метрический тензор),

$$g = \det \|g_{ij}\|.$$

Изучение свойств эллиптических дифференциальных операторов с помощью римановой метрики имеет давние корни (см., например, [2, 7]).

Теорема 1. При $n \geq 3$ элементы искомой матрицы $\|g_{ij}\|$ задаются с помощью формул

$$g_{ij} = \delta_{ij} \prod_{i=1}^n x_i^{K_i} = \delta_{ij} x^K, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad K = (K_1, \dots, K_n), \quad (3)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера,

$$K_i = \frac{2}{n-2} \gamma_i. \quad (4)$$

Доказательство. Действительно, поскольку $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$, подставляя (3) в (2), получим:

$$\Delta_\omega u = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(g^{kk} \sqrt{|g|} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right), \quad (5)$$

где

$$|g| = g = x^{nK} = \prod_{i=1}^n \prod_{i=1}^n n x_i^{K_i} = \prod_{i=1}^n x_i^{2n\gamma_i/(n-2)}, \quad (6)$$

$$g^{kk} = x^{-K} = \prod_{i=1}^n x_i^{-2\gamma_i/(n-2)}. \quad (7)$$

Учитывая (6) и (7), можно переписать (5) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta_\omega u &= \frac{1}{x^{nK/2}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x^{-K} x^{Kn/2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \\ &= x^{-K} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + x^{-Kn/2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\prod_{l=1}^n x_l^{K_l(n-2)/2} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} = \\ &= x^{-K} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + x^{-Kn/2} \sum_{j=1}^n \prod_{l=1}^n x_l^{K_l(n-2)/2} \frac{K_j(n-2)}{2} x_j^{-1} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \\ &= x^{-K} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + x^{-K} \sum_{j=1}^n \frac{K_j(n-2)}{2x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} = x^{-K} \Delta_{B_\gamma} u, \end{aligned}$$

то есть

$$\Delta_\omega u = x^{-K} \Delta_{B_\gamma} u, \quad (8)$$

что и требовалось доказать. \square

Множество \mathbb{R}_+^n , снабженное римановой метрикой

$$ds^2 = x^K \sum_{i=1}^n dx_i^2, \quad K \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

будем рассматривать как риманово пространство; обозначим его через KI_n , а метрику (9) будем называть K -однородной метрикой.

Теорема 2. *При $n = 2$ задача о нахождении метрики, удовлетворяющей равенству (8), не имеет решения.*

Доказательство. Введем обозначения $E = g_{11}$, $F = g_{12} = g_{21}$, $G = g_{22}$. Тогда

$$g = \det \|g_{ij}\| = EG - F^2, \quad g^{ij} = (-1)^{i+j} \frac{g_{ij}}{EG - F^2}.$$

Отсюда

$$\Delta_\omega u = \frac{G}{|g|} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{E}{|g|} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 2 \frac{F}{|g|} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \quad (10)$$

где через Φ обозначено слагаемое, зависящее только от производных первого порядка функции u . Для того, чтобы выражение (10) совпадало с точностью до множителя с (1), необходимо выполнение условия $F \equiv 0$, что повлечет за собой равенства

$$g = EG, \quad g^{11} = \frac{1}{E}, \quad g^{22} = \frac{1}{G}, \quad g_{12} = g_{21} = g^{12} = g^{21} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta_\omega u &= \frac{1}{\sqrt{|EG|}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial u}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых должны иметь одинаковые коэффициенты, откуда $E = G$. Но тогда два последних слагаемых равны нулю, что и означает невозможность подобрать искомую метрику при $n = 2$. \square

2. Исследование изометрических преобразований для K -однородной метрики. Необходимым и достаточным условием того, чтобы однопараметрическая группа G с инфинитезимальным оператором

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

была группой изометрий, является выполнение условий Киллинга

$$\sum_{s=1}^n \left(\xi_s \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_s} + g_{is} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} + g_{js} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_i} \right) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_s} = \delta_{ij} \frac{K_s x^K}{x_s}.$$

Поэтому уравнения Киллинга примут вид

$$\sum_{s=1}^n \left(\delta_{ij} \xi_s K_s x^{K-1} + x^K \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) \right) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Произведя суммирование и сократив на x^K , мы получим

$$\delta_{ij} \sum_{s=1}^N \frac{\xi_s K_s}{x_s} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

При $i \neq j$ уравнение (11) можно записать в виде

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (12)$$

При $i = j$ уравнение (11) можно записать в виде

$$2 \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} + \sum_{s=1}^n \frac{K_s \xi_s}{x_s} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Вектор

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \xi_j = C x^p x_j, \quad (14)$$

где

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad p_1 = p_2 = \dots = p_n = \beta = - \sum_{l=1}^n \frac{K_l}{2} - 1, \quad (15)$$

является решением системы (13), в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Подставив представление (14) с учетом (15) в уравнения (12), мы получим

$$0 \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \beta x^p \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \right), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Отсюда получаем

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \beta = - \sum_{l=1}^n \frac{K_l}{2} - 1 = 0, \quad (16)$$

или, что то же самое,

$$\sum_{l=1}^n K_l = -2, \quad (17)$$

а учитывая (4),

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = 2 - N. \quad (18)$$

3. Характеристики K -однородной метрики в случае одной особой переменной. Один из случаев выполнения условия (16), или, что то же, (18), хорошо известен. Пространство KI_n представляет собой модель Пуанкаре n -мерной геометрии Лобачевского. Далее мы рассмотрим случай $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{n-1} = 0$, $\gamma_n \neq 0$. Метрика (3) теперь будет иметь вид

$$g_{ij} = \delta_{ij} x_n^K, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (19)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера и

$$K = \frac{2}{n-2} \gamma. \quad (20)$$

Непосредственным вычислением устанавливаются следующие факты.

Теорема 3. Символы Кристоффеля первого рода, соответствующие метрике (9), имеют вид

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} K x_n^{K-1} (\delta_{ik} \delta_{jn} + \delta_{jk} \delta_{in} - \delta_{ij} \delta_{kn}).$$

Доказательство. Из определения символов Кристоффеля первого рода, учитывая (19)–(20), получим:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jn} K x_n^{K-1} + \delta_{jk} \delta_{in} K x_n^{K-1} - \delta_{ij} \delta_{kn} K x_n^{K-1}). \quad \square$$

Теорема 4. Символы Кристоффеля второго рода, соответствующие метрике (9), имеют вид

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{K}{2x_n} (\delta_{ik} \delta_{jn} + \delta_{jk} \delta_{in} - \delta_{ij} \delta_{kn}).$$

Доказательство. Из определения символов Кристоффеля второго рода и предыдущей теоремы получаем:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= \sum_{h=1}^n g^{kh} \Gamma_{ij,h} = \frac{K}{2} \sum_{h=1}^n \delta_{kh} x_n^{-K} x_n^{K-1} (\delta_{ih} \delta_{jn} + \delta_{jh} \delta_{in} - \delta_{ij} \delta_{hn}) = \\ &= \frac{K}{2x_n} \sum_{h=1}^n (\delta_{ki} \delta_{jn} + \delta_{kj} \delta_{in} - \delta_{ij} \delta_{kn}). \quad \square\end{aligned}$$

Теорема 5. Компоненты тензора Римана, соответствующего метрике (9), имеют вид

$$R_{ijk}^l = \left(\frac{K^2}{4x_n^2} - \frac{K}{2x_n^2} \right) (\delta_{li} \delta_{in} \delta_{kn} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ln} - \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ln} - \delta_{lk} \delta_{in} \delta_{jn}) + \frac{K^2}{4x_n^2} (\delta_{ij} \delta_{lk} - \delta_{ik} \delta_{lj}). \quad \square$$

Доказательство. По определению компоненты тензора Римана вычисляются по формулам

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x_k} + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l).$$

Вычислим входящие в эти формулы частные производные. Имеем

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x_s} = -\frac{K}{2x_n^2} \delta_{sn} (\delta_{ki} \delta_{jn} + \delta_{kj} \delta_{in} - \delta_{ij} \delta_{kn}),$$

откуда

$$\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} = -\frac{K}{2x_n^2} \delta_{jn} (\delta_{li} \delta_{kn} + \delta_{lk} \delta_{in} - \delta_{ik} \delta_{ln}), \quad \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x_k} = -\frac{K}{2x_n^2} \delta_{kn} (\delta_{li} \delta_{jn} + \delta_{lj} \delta_{in} - \delta_{ij} \delta_{ln}).$$

Поэтому

$$\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x_k} = -\frac{K}{2x_n^2} (\delta_{jn} \delta_{lk} \delta_{in} - \delta_{jn} \delta_{ik} \delta_{ln} - \delta_{kn} \delta_{lj} \delta_{in} + \delta_{kn} \delta_{ij} \delta_{ln}).$$

Вычислим теперь последнее слагаемое в определении. Учитывая теорему 4, находим

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^n (\Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l) &= \\ &= \frac{K^2}{4x_n^2} \sum_{m=1}^n (\delta_{mi} \delta_{kn} \delta_{lm} \delta_{jn} + \delta_{mi} \delta_{kn} \delta_{lj} \delta_{mn} - \delta_{mi} \delta_{kn} \delta_{mj} \delta_{ln} + \delta_{mk} \delta_{in} \delta_{lm} \delta_{jn} + \\ &+ \delta_{mk} \delta_{in} \delta_{lj} \delta_{mn} - \delta_{mk} \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{ln} - \delta_{ik} \delta_{mn} \delta_{lm} \delta_{jn} - \delta_{ik} \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{mn} \delta_{mj} \delta_{ln} - \\ &- \delta_{mi} \delta_{jn} \delta_{lm} \delta_{kn} - \delta_{mi} \delta_{jn} \delta_{lk} \delta_{mn} + \delta_{mi} \delta_{jn} \delta_{mk} \delta_{ln} - \delta_{mj} \delta_{in} \delta_{lm} \delta_{kn} - \delta_{mj} \delta_{in} \delta_{lk} \delta_{mn} + \\ &+ \delta_{mj} \delta_{in} \delta_{mk} \delta_{ln} + \delta_{ij} \delta_{mn} \delta_{lm} \delta_{kn} + \delta_{ij} \delta_{mn} \delta_{lk} \delta_{mn} - \delta_{ij} \delta_{mn} \delta_{mk} \delta_{ln}).\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая свойства символа Кронекера, в частности, формулы $\delta_{il} = \delta_{li}$, $\sum_{m=1}^n \delta_{mi} \delta_{lm} = \delta_{il}$, после тождественных преобразований получаем утверждение теоремы. \square

Теорема 6. Компоненты тензора Риччи, соответствующего метрике (9), имеют вид

$$R_{ij} = \frac{K}{4x_n^2} ((K-2)(2-n)\delta_{in}\delta_{jn} + (K(n-2)+2)\delta_{ij}).$$

Доказательство. Непосредственно из определения компонентов тензора Риччи

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^n R_{ijk}^k$$

после тождественных преобразований приходим к справедливости теоремы. \square

Теорема 7. Кривизна пространства KI_n вычисляется по формуле

$$R = \frac{Kn(n-2)}{x_n^{K+2}} = \frac{2\gamma n}{x_n^{(2\gamma+2n-4)/(n-2)}}.$$

Доказательство. Из определения кривизны

$$R = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g^{ij} R_{ij},$$

приходим к утверждению теоремы, производя суммирование и тождественные преобразования. \square

Замечание 1. Никакая дважды непрерывно дифференцируемая замена переменных не приведет уравнение вида

$$\Delta_{B_\gamma} u \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma}{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} = f, \quad \gamma \neq 0,$$

к уравнению вида

$$\Delta u \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f.$$

Действительно, если бы такая замена существовала, то это означало бы, что существует координатное преобразование, переводящее метрику с ненулевой кривизной в метрику с нулевой кривизной, что невозможно.

4. Исследование геодезических линий для K -однородной метрики.

Теорема 8. Система уравнений геодезических пространства KI_n сводится к системе первого порядка

$$\frac{dx_k}{ds} = \frac{C_k}{x_n^K}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad \left(\frac{dx_n}{ds} \right)^2 = \frac{C_n}{x_n^K} - \frac{B^2}{x_n^{2K}}, \quad (21)$$

$$\text{где } B = \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} C_k^2}.$$

Доказательство. Система уравнений, которым удовлетворяют геодезические линии в заданной метрике $\|g_{ij}\|$, имеют вид

$$\frac{d^2 x_k}{ds^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где s — натуральный параметр (длина дуги). В нашем случае, пользуясь вычисленными символами Кристоффеля, мы можем записать эту систему в виде

$$\frac{d^2 x_k}{ds^2} + \frac{K}{x_n} \frac{dx_n}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 x_n}{ds^2} - \frac{K}{2x_n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^2 + \frac{K}{2x_n} \left(\frac{dx_n}{ds} \right)^2 = 0. \quad (23)$$

Уравнения (22) могут быть записаны в виде

$$x_n^{-K} \frac{d}{ds} \left(x_n^K \frac{dx_k}{ds} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (24)$$

Умножая (24) на x_n^K , интегрируя и деля на x_n^K , получим

$$\frac{dx_k}{ds} = \frac{C_k}{x_n^K}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (23), имеем

$$\frac{d^2 x_n}{ds^2} - \frac{KB^2}{2x_n^{2K+1}} + \frac{K}{2x_n} \left(\frac{dx_n}{ds} \right)^2 = 0, \quad (26)$$

где B определено выше. Уравнение (26) стандартным образом допускает понижение порядка. Положим $p = p(x_n) = dx_n/ds$, $v = p^2$; тогда $d^2 x_n/ds^2 = p'p = v'/2$. После этого уравнение (26) сведется к виду

$$v' + \frac{K}{x_n} v = \frac{B^2 K}{x_n^{2K+1}} \iff \frac{d}{dx_n} (x_n^K v) = \frac{B^2 K}{x_n^{K+1}}.$$

Интегрируя и деля на x_n^K , получим

$$v = p^2 = \left(\frac{dx_n}{ds} \right)^2 = \frac{C_n}{x_n^K} - \frac{B^2}{x_n^{2K}}. \quad \square$$

Известно (см. [10]), что геодезические линии обладают свойством

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = \text{const}.$$

В рассматриваемом случае это приведет к равенству

$$\sum_{i=1}^n x_n^K \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^2 = \text{const}. \quad (27)$$

Из (21) легко выводится, что постоянная в равенстве (27) совпадает с C_n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983.
2. *Ильин В. А.* О рядах Фурье по фундаментальным системам функций оператора Бельтрами // Дифф. уравн. — 1969. — 5, № 11. — С. 1940–1978.
3. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426.
4. *Киприянов И. А.* Преобразование Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1967. — 89. — С. 130–213.
5. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
6. *Ляхов Л. Н.* Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом. — Воронеж: ВГТА, 1997.
7. *Феллер В.* О решениях линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа // Усп. мат. наук. — 1941. — № 8. — С. 232–248.
8. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.
9. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. — М.: Мир, 1987.
10. *Эйзенхарт Л. Т.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.

Половинкина Марина Васильевна
Воронежский государственный университет инженерных технологий
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Половинкин Игорь Петрович
Воронежский государственный университет
E-mail: polovinkin@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 170 (2019). С. 38–50
DOI: 10.36535/0233-6723/2019/170/38-50

УДК 517.95

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА О РАСПАДЕ РАЗРЫВА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ГРАНИЦЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

© 2019 г. Ю. И. СКАЛЬКО, С. Ю. ГРИДНЕВ

Аннотация. Построено приближение фундаментального решения оператора задачи для гиперболической системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Предложен алгоритм приближенного решения обобщенной задачи Римана о распаде разрыва при наличии дополнительных условий на границах, позволяющий свести задачу нахождения значений переменных по обе стороны поверхности разрыва начальных данных к решению системы алгебраических уравнений. Построен вычислительный алгоритм приближенного решения начально-краевой задачи для гиперболической системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Алгоритм реализован для системы уравнений упругой динамики и использован для решения некоторых прикладных задач, связанных с нефтедобычей.

Ключевые слова: распад разрыва, условие сопряжения, гиперболическая система, обобщенная функция, задача Коши, матрица-функция Грина, характеристика, инвариант Римана, уравнение упругой динамики.

GENERALIZED RIEMANN PROBLEM ON THE BREAKUP OF A DISCONTINUITY WITH ADDITIONAL CONDITIONS AT THE BOUNDARY AND ITS APPLICATION FOR CONSTRUCTING COMPUTATIONAL ALGORITHMS

© 2019 YU. I. SKALKO, S. YU. GRIDNEV

ABSTRACT. We construct an approximation of the fundamental solution of a problem for a hyperbolic system of first-order linear differential equations with constant coefficients. We propose an algorithm for an approximate solution of the generalized Riemann problem on the breakup of a discontinuity under additional conditions at the boundaries, which allows one to reduce the problem of finding the values of variables on both sides of the discontinuity surface of the initial data to the solution of a system of algebraic equations. We construct a computational algorithm for an approximate solution of the initial-boundary-value problem for a hyperbolic system of first-order linear differential equations. The algorithm is implemented for a system of equations of elastic dynamics; it is used for solving some applied problems associated with oil production.

Keywords and phrases: breakup of a discontinuity, conjugation condition, hyperbolic system, generalized function, Cauchy problem, Green matrix-function, characteristic, Riemann invariant, equation of elastic dynamics.

AMS Subject Classification: 35L40, 35L67, 35L45, 35L50

1. Постановка задачи. Обобщенная задача Римана о распаде разрыва с дополнительными условиями на границе, которой посвящена данная работа, возникла из попыток решения конкретной прикладной задачи, которая и обусловила особенности постановки математической задачи. Поэтому сначала несколько слов о прикладной задаче.

В многочисленных промышленных экспериментах на нефтеносных месторождениях убедительно показано, что установка на поверхности виброисточника и продолжительная его работа в течение нескольких месяцев ведет к существенному повышению нефтеотдачи нефтяного пласта; в ряде случаев эффект достигает 40%. Механизмы и процессы, ведущие к такому повышению нефтеотдачи, остаются и на сегодня неясными. В частности, не понятно, каким образом энергия упругих волн, сгенерированных виброисточником, достигает значительных глубин (1 км и более), избегая существенного рассеяния. Виброисточник с характерной мощностью 30 кВт и пятном контакта с породой порядка 1 кв.м. генерирует упругую волну. Если порода однородная, то энергия виброисточника рассеивается по полусфере и на глубинах порядка 1 км плотность энергии упругих волн убывает в 10^6 раз даже при отсутствии поглощения в породе. Ожидать, что упругая волна такой малой плотности энергии вызовет какие-то значимые процессы в нефтеносном пласте, не приходится. Поскольку эффект увеличения нефтеотдачи в результате продолжительной работы поверхностного виброисточника многократно зафиксирован, то следует предположить, что при определенных условиях упругие волны распространяются в геологической породе, избегая существенного рассеяния. Мы попытались методами математического моделирования исследовать вопрос, может ли наличие трещин в геологической породе, в которых соприкасающиеся части могут смещаться друг относительно друга, приводить к тому, что упругая волна, сгенерированная виброисточником, не рассеивается по полусфере, а распространяется достаточно узким пучком так, что и на существенных глубинах ее плотность энергии остается значимой, чтобы вызвать те или иные физико-химические процессы.

Состояние геологической породы, в которой распространяется упругая волна, описывается векторным полем скорости смещений и тензором напряжений. Поскольку на трещине может происходить смещение частей породы друг относительно друга, при переходе через границу компоненты вектора скорости смещений и тензора напряжений могут претерпевать разрывы. Конечно, эти разрывы не могут быть произвольными, а обязаны удовлетворять определенным условиям, отражающим физические условия на границе соприкасающихся сред. Поскольку части геологической породы могут смещаться друг относительно друга только вдоль трещины, то компоненты вектора скорости смещений, направленные вдоль нормали к границе, должны быть непрерывными при переходе через границу. Также, в силу третьего закона Ньютона, сила, действующая со стороны одной части породы на другую, равна и противоположно направлена силе, действующей со стороны второй части породы на первую; таким образом, нормальные к границе компоненты тензора напряжений по обе стороны границы должны быть равны. Если проскальзывание происходит без трения, то тангенциальные компоненты тензора напряжений по обе стороны границы должны быть равны нулю.

С другой стороны, всюду, кроме трещины, разделяющей части породы, геологическая порода является сплошной. Следовательно, вектор смещений должен быть всюду (кроме трещины) непрерывным. Также требование выполнения третьего закона Ньютона в любом сечении ведет к непрерывности тензора напряжений. Итак, всюду, кроме трещины, и вектор смещений, и тензор напряжений непрерывны.

Исходя из сказанного задачу Римана о распаде разрыва будем рассматривать в следующей постановке. Необходимо найти решение задачи Коши для следующей системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

с начальными данными

$$\mathbf{u}(t = 0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (2)$$

которые всюду непрерывны, кроме гиперплоскости $\Gamma : x_1 = 0$. Решение должно быть всюду непрерывным, кроме гиперплоскости Γ . Также должны выполняться заданные соотношения (условия сопряжения), связывающие значения переменных по обе стороны гиперплоскости Γ :

$$\mathbf{L}u(t, x_1 = -0, x_2, \dots, x_N) + \mathbf{P}u(t, x_1 = +0, x_2, \dots, x_N) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Сформулированную постановку будем, следуя [5], называть обобщенной задачей Римана о распаде разрыва с условиями сопряжения на границах. Обобщенная задача Римана отличается от классической задачи Римана тем, что в классической задаче начальные данные предполагаются константами по обе стороны от гиперплоскости, а в обобщенной задаче Римана начальные данные по обе стороны от гиперплоскости Γ могут быть произвольными гладкими функциями, а также на всех поверхностях разрыва должны соблюдаться заданные условия сопряжения.

В случае одной пространственной переменной различными авторами предложен ряд методов решения задачи Римана (см. [5–8]). По сути, все эти методы связаны с наличием у гиперболических систем характеристик. В случае многих пространственных переменных методы, основанные на наличии характеристик, уже не работают, и задача Римана, чаще всего, решается в предположении, что вблизи разрыва решение представляет собой плоскую волну, движущуюся вдоль нормали к поверхности разрыва (см. [5, 8, 9]). Понятно, что такой подход далеко не во всех случаях является обоснованным.

В работе сформулирована постановка обобщенной задачи Римана о распаде разрыва с условиями сопряжения на границах для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с произвольным количеством пространственных переменных и приведен алгоритм построения ее решения. Этот алгоритм основан на нахождении фундаментального решения оператора задачи. Поэтому в следующих разделах будут приведены основные понятия теории обобщенных вектор-функций и построено приближение фундаментального решения оператора задачи. Построенное решение обобщенной задачи Римана ляжет в основу вычислительного алгоритма нахождения приближенного решения начально-краевой задачи для описанного класса систем дифференциальных уравнений.

2. Обобщенные вектор-функции. В дальнейшем изложении будут использоваться понятия и утверждения теории обобщенных функций, изложение которой можно найти, например в [1–4].

Определим пространство основных вектор-функций $\mathbf{S}(\mathbb{R}^N)$. Элементами этого пространства будут M -мерные вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_M)$, компоненты которых $\varphi_1(\mathbf{y}), \dots, \varphi_M(\mathbf{y})$ принадлежат пространству $S(\mathbb{R}^N)$, которое состоит из функций класса $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, убывающих при $|\mathbf{y}| \rightarrow \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|\mathbf{y}|^{-1}$.

Определение 2.1. Обобщенными вектор-функциями $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_M) \in \mathbf{S}'(\mathbb{R}^N)$ будем называть линейные непрерывные функционалы на основном векторном пространстве $\mathbf{S}(\mathbb{R}^N)$. При этом функционал \mathbf{f} действует на основную вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_M)$ по формуле

$$(\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}) = (f_1, \varphi_1) + \dots + (f_M, \varphi_M).$$

Определение 2.2. Обобщенным решением системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (4)$$

будем называть обобщенную функцию $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{S}'(\mathbb{R}^{N+1})$, удовлетворяющую этому уравнению в обобщенном смысле, т.е. для произвольной основной функции $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^{N+1})$ выполняется равенство

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \right) + \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \boldsymbol{\varphi} \right) = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}),$$

\mathbf{A}_i — матрицы коэффициентов системы уравнений (4), имеющие размер $(M \times M)$.

В дальнейшем будем полагать, что каждая из матриц \mathbf{A}_i имеет полный набор левых собственных векторов и, следовательно, представима в виде

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{\Omega}_i \quad (5)$$

$\mathbf{\Lambda}_i$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы \mathbf{A}_i , упорядоченных по неубыванию, $\mathbf{\Omega}_i$ — матрица, строки которой являются левыми собственными векторами матрицы \mathbf{A}_i , соответствующие собственным числам $\mathbf{\Lambda}_i$, $\mathbf{R}_i = \mathbf{\Omega}_i^{-1}$ — матрица, столбцы которой являются правыми собственными векторами матрицы \mathbf{A}_i .

Определение 2.3. Фундаментальным решением оператора задачи (4) или матрицей-функцией Грина называется обобщенная матрица-функция, $\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{S}'(\mathbb{R}^{N+1})$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i} = \mathbf{I} \delta(t, \mathbf{x}), \quad (6)$$

где \mathbf{I} — единичная диагональная $(M \times M)$ -матрица.

Определение 2.4. Сверткой $\mathbf{G} * \mathbf{f}$ обобщенной матрицы-функции $\mathbf{G} = G_{ij} \in \mathbf{S}'$ и обобщенной вектор-функции $\mathbf{f} = f_j \in \mathbf{S}'$ будем называть такую обобщенную вектор-функцию $\mathbf{u} = u_i \in \mathbf{S}'$, что

$$u_i = \sum_{j=1}^M G_{i,j} * f_j,$$

где $G_{i,j} * f_j$ — свертка $G_{i,j}$ и f_j как обобщенных функций из \mathbf{S}' .

Лемма 2.1. Пусть $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{S}'$ такова, что свертка $\mathbf{G} * \mathbf{f}$ существует в \mathbf{S}' . Тогда решение уравнения (4) существует в \mathbf{S}' и дается формулой

$$\mathbf{u} = \mathbf{G} * \mathbf{f}. \quad (7)$$

Это решение единственно в классе тех функций из \mathbf{S}' , для которых существует свертка с \mathbf{G} .

Доказательство. Пользуясь формулой дифференцирования свертки, получим

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial (\mathbf{G} * \mathbf{f})}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial (\mathbf{G} * \mathbf{f})}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i} \right) * \mathbf{f} = \delta(t, \mathbf{x}) * \mathbf{f} = \mathbf{f}.$$

Поэтому формула (7) действительно дает решение уравнения (4). Докажем единственность решения уравнения (4) в классе тех обобщенных функций из \mathbf{S}' , для которых свертка с \mathbf{G} существует в \mathbf{S}' . Для этого достаточно установить, что соответствующее однородное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{0}$$

имеет только нулевое решение в этом классе. Но это действительно так в силу

$$\mathbf{u} = \delta(t, \mathbf{x}) \mathbf{I} * \mathbf{u} = \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i} \right) * \mathbf{u} = \mathbf{G} * \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) = \mathbf{0}. \quad \square$$

Докажем две леммы, которые будут существенны в дальнейшем.

Лемма 2.2. Пусть $u(\mathbf{x})$ — локально интегрируемая функция в \mathbb{R}^N . Тогда

$$\theta(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * u(\mathbf{x}) \delta(t) = \theta(t) u(\mathbf{x} - \mathbf{a}t).$$

Доказательство. Согласно определению свертки обобщенных функций (см. [1]) для произвольной основной функции $\varphi(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+1})$ и произвольной последовательности функций $\eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N+2})$, сходящейся к 1 в \mathbb{R}^{2N+2} , справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} & \left(\theta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * u(\mathbf{x})\delta(t), \varphi(\mathbf{x}, t) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\theta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)u(\mathbf{y})\delta(\tau), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau) \right) = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\theta(t)u(\mathbf{y})\delta(\tau), \eta_k(\mathbf{a}t, \mathbf{y}, t, \tau) \varphi(\mathbf{a}t + \mathbf{y}, t + \tau) \right) = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma: \tau=0} \theta(t)u(\mathbf{y})\eta_k(\mathbf{a}t, \mathbf{y}, t, 0) \varphi(\mathbf{a}t + \mathbf{y}, t) d\Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)u(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{a}t + \mathbf{y}, t) d\mathbf{y} dt = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)u(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) \varphi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt = \left(\theta(t)u(\mathbf{x} - \mathbf{a}t), \varphi(\mathbf{x}, t) \right). \quad \square \end{aligned}$$

Замечание 2.1. Как следует из доказанной леммы, значение свертки $\theta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * u(\mathbf{x})\delta(t)$ в точке (\mathbf{x}, t) равно значению функции $u(\mathbf{x})$ в точке пересечения прямой $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{a}$, проведенной через точку (\mathbf{x}, t) , с гиперплоскостью $t = 0$.

Лемма 2.3. Пусть $v(t, \mathbf{x})$ — локально интегрируемая функция в \mathbb{R}^{N+1} и $v(t, \mathbf{x}) = 0$ при $t \leq 0$. Если $a_1 \neq 0$, то

$$\theta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x})\delta(x_1) = \frac{1}{|a_1|} \theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right) v\left(t - \frac{x_1}{a_1}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{a_1}\mathbf{a}\right);$$

если же $a_1 = 0$, то

$$\theta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x})\delta(x_1) = 0.$$

Доказательство. Если $a_1 \neq 0$, для произвольной основной функции $\varphi(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+1})$ и произвольной последовательности функций $\eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N+2})$, сходящейся к 1 в \mathbb{R}^{2N+2} , справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} & \left(\theta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x})\delta(x_1), \varphi(\mathbf{x}, t) \right) \dots \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\theta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)v(\tau, \mathbf{y})\delta(y_1), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau) \right) = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\theta(t)v(\tau, \mathbf{y})\delta(y_1), \eta_k(\mathbf{a}t, \mathbf{y}, t, \tau)\varphi(\mathbf{a}t + \mathbf{y}, t + \tau) \right) = \\ & = \int_{\Gamma: y_1=0} \theta(t')v(\tau', \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{a}t' + \mathbf{y}, t' + \tau') dy_2 \dots dy_N dt' d\tau' = \\ & = \frac{1}{|a_1|} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right) v\left(t - \frac{x_1}{a_1}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{a_1}\mathbf{a}\right) \varphi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt = \\ & = \frac{1}{|a_1|} \theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right) v\left(t - \frac{x_1}{a_1}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{a_1}\mathbf{a}\right), \varphi(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Тем самым утверждение леммы для $a_1 \neq 0$ доказано.

Пусть $v(t, \mathbf{x}) = 0$ при $t \leq 0$.

Если $t > 0$, $x_1 < 0$ и $a_1 > 0$, то $\theta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x})\delta(x_1) = 0$.

Если $t > 0$, $x_1 < 0$ и $x_1/t \leq a_1 < 0$, то $\theta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x})\delta(x_1) = 0$.

В силу непрерывности свертки для $t > 0$, $x_1 < 0$ имеем

$$\theta(t)\delta(x_1)\delta(x_2 - a_2t) \dots \delta(x_N - a_Nt) * v(t, \mathbf{x})\delta(x_1) = \lim_{a_1 \rightarrow 0} \left(\theta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x})\delta(x_1) \right) = 0.$$

Точно так же для $t > 0$, $x_1 > 0$ имеем

$$\theta(t)\delta(x_1)\delta(x_2 - a_2t) \dots \delta(x_N - a_Nt) * v(t, \mathbf{x})\delta(x_1) = \lim_{a_1 \rightarrow 0} \left(\theta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x})\delta(x_1) \right) = 0.$$

Отсюда следует справедливость утверждения леммы для произвольных \mathbf{a} . \square

Замечание 2.2. Проведем через точку (t, \mathbf{x}) , $t > 0$, прямую линию $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{a}$. Эта прямая пересекает гиперплоскость $x_1 = 0$ в момент времени $t^* = t - x_1/a_1$. Если этот момент времени лежит вне интервала $0 \leq t^* \leq t$, то в точке (t, \mathbf{x})

$$\theta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * \theta(t)v(t, \mathbf{x})\delta(x_1) = 0.$$

3. Фундаментальное решение. Построим фундаментальное решение оператора задачи (4). Обозначим через $\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\xi}) = F_{\mathbf{x}}[\mathbf{G}]$ — преобразование Фурье $\mathbf{G}(t, \mathbf{x})$ по пространственным переменным. Выполним преобразование Фурье уравнений (6) по пространственным переменным. Учитывая, что $F_{\mathbf{x}}[\mathbf{G}] = -i\xi_j F_{\mathbf{x}}[\mathbf{G}]$, для обобщенной функции $\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\xi})$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - i \sum_{j=1}^N \xi_j \mathbf{A}_j \mathbf{V} = \mathbf{I} \delta(t). \quad (8)$$

Решение уравнения (8) имеет вид

$$\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\xi}) = \theta(t) \exp \left(i \sum_{j=1}^N \xi_j \mathbf{A}_j t \right),$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Следуя определению матричной экспоненты,

$$\exp \left(i \sum_{j=1}^N \xi_j \mathbf{A}_j t \right) = \prod_{j=1}^N \exp(i\xi_j \mathbf{A}_j t) + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geq 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{j=1}^N (-i\xi_j)^{\alpha_j}.$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ — целочисленный вектор с неотрицательными составляющими α_j (мультииндекс), $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$, $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$ — матрицы размера $M \times M$, являющиеся полиномами матриц \mathbf{A}_j степени $|\boldsymbol{\alpha}|$.

Учтем (5); тогда

$$\exp(i\xi_j \mathbf{A}_j t) = \mathbf{R}_j \exp(i\xi_j \boldsymbol{\Lambda}_j t) \boldsymbol{\Omega}_j.$$

Следовательно,

$$\exp \left(i \sum_{j=1}^N \xi_j \mathbf{A}_j t \right) = \prod_{j=1}^N \mathbf{R}_j \exp(i\xi_j \boldsymbol{\Lambda}_j t) \boldsymbol{\Omega}_j + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geq 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{j=1}^N (-i\xi_j)^{\alpha_j}.$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получим матрицу-функцию Грина

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \theta(t) \left(\prod_{j=1}^N \mathbf{R}_j \delta(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t) \boldsymbol{\Omega}_j + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geq 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} D^{\boldsymbol{\alpha}} \delta(\mathbf{x}) \right);$$

здесь $\delta(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)$ — диагональные матрицы, в k -й строке которых стоит обобщенная функция $\delta(x_j - \lambda_j^k t)$, λ_j^k — k -е собственное число матрицы \mathbf{A}_j , $D^{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$ — оператор дифференцирования по пространственным переменным.

Рассмотрим сомножитель $\mathbf{R}_j \delta(\mathbf{I}x_j - \mathbf{\Lambda}_j t) \mathbf{\Omega}_j$. Обозначим через \mathbf{D}^k квадратную матрицу размера $M \times M$, все элементы которой равны 0, кроме k -го элемента главной диагонали, равного 1. Тогда

$$\mathbf{R}_j \delta(\mathbf{I}x_j - \mathbf{\Lambda}_j t) \mathbf{\Omega}_j = \sum_{k=1}^M \mathbf{R}_j \mathbf{D}^k \mathbf{\Omega}_j \delta(x_j - \lambda_j^k t) = \sum_{k=1}^M \mathbf{C}_j^k \delta(x_j - \lambda_j^k t).$$

Следовательно,

$$\prod_{j=1}^N \mathbf{R}_j \delta(\mathbf{I}x_j - \mathbf{\Lambda}_j t) \mathbf{\Omega}_j = \sum_{k_1=1}^M \sum_{k_2=1}^M \dots \sum_{k_N=1}^M \mathbf{C}_1^{k_1} \mathbf{C}_2^{k_2} \dots \mathbf{C}_N^{k_N} \delta(x_1 - \lambda_1^{k_1} t) \delta(x_2 - \lambda_2^{k_2} t) \dots \delta(x_N - \lambda_N^{k_N} t).$$

Введем мультииндекс $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ с целочисленными составляющими $k_j = 1, \dots, M$, многоиндексный массив матриц $\mathbf{C}^{\mathbf{k}} = \mathbf{C}_1^{k_1} \mathbf{C}_2^{k_2} \dots \mathbf{C}_N^{k_N}$, многоиндексный массив векторов $\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} = (\lambda_1^{k_1}, \lambda_2^{k_2}, \dots, \lambda_N^{k_N})$, то

$$\prod_{j=1}^N \mathbf{R}_j \delta(\mathbf{I}x_j - \mathbf{\Lambda}_j t) \mathbf{\Omega}_j = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} t);$$

тогда

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \theta(t) \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} t) + O(t^2).$$

В случае двух пространственных переменных

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \theta(t) \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}_1^{k_1} \mathbf{C}_2^{k_2} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} t) + \frac{\theta(t)}{2} t^2 (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2) \frac{\partial^2 \delta(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} + O(t^3). \quad (9)$$

Если поменять нумерацию пространственных переменных, то можем записать

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \theta(t) \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}_2^{k_2} \mathbf{C}_1^{k_1} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} t) - \frac{\theta(t)}{2} t^2 (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2) \frac{\partial^2 \delta(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} + O(t^3). \quad (10)$$

Сопоставляя (9) и (10), получаем

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \theta(t) \sum_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{C}}^{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} t) + O(t^3).$$

Здесь использовано обозначение

$$\bar{\mathbf{C}}^{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_1^{k_1} \mathbf{C}_2^{k_2} + \mathbf{C}_2^{k_2} \mathbf{C}_1^{k_1}).$$

Обратим внимание на следующий факт, который будет использован в дальнейшем. Поскольку $\mathbf{C}^{k_j} = \mathbf{R}_j \mathbf{D}^{k_j} \mathbf{\Omega}_j$, то

$$\sum_{k_j=1}^M \mathbf{C}^{k_j} = \mathbf{R}_j \left(\sum_{k_j=1}^M \mathbf{D}^{k_j} \right) \mathbf{\Omega}_j = \mathbf{R}_j \mathbf{I} \mathbf{\Omega}_j = \mathbf{I}. \quad (11)$$

4. Задача Римана. Пусть $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ — решение задачи Римана (1)–(3). Введем обозначение

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \theta(t) \left(\mathbf{u}(t, x_1 = +0, x_2, \dots, x_N) - \mathbf{u}(t, x_1 = -0, x_2, \dots, x_N) \right).$$

Покажем, что функция $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, рассматриваемая как обобщенная функция из \mathbf{S}' , удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{u}_0 \delta(t) + \mathbf{A}_1 \mathbf{v} \delta(x_1). \quad (12)$$

Действительно, при всех $\varphi(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}$ имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \varphi \right) &= - \int \left(\frac{\partial \varphi^T}{\partial t} \mathbf{u} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi^T}{\partial x_i} \mathbf{A}_i \mathbf{u} \right) dt d\mathbf{x} = \dots = \\ &= \int \left(\varphi^T \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) \right) dt d\mathbf{x} + \int (\varphi^T(0, \mathbf{x}) \mathbf{u}(0, \mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} (\varphi^T \mathbf{A}_1 \mathbf{v}) dt d\Gamma, \end{aligned}$$

откуда и вытекает равенство (12).

Решение уравнения (12) представимо в виде свертки

$$\mathbf{u} = \mathbf{G} * \mathbf{u}_0 \delta(t) + \mathbf{G} * \mathbf{A}_1 \mathbf{v} \delta(x_1).$$

На основании лемм 2.2 и 2.3 для точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, лежащих в левой полуплоскости ($x_1 \leq 0$), с точностью до $O(t^2)$ можем записать

$$\mathbf{u}(t, x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} t) - \sum_{\mathbf{k}: x_1 > \lambda_{-1}^{\mathbf{k}} t} \frac{\mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1}{\lambda^{\mathbf{k}_1}} \mathbf{v} \left(t - \frac{x_1}{\lambda^{\mathbf{k}_1}}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{\lambda^{\mathbf{k}_1}} \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} \right). \quad (13)$$

Переходя в (13) к пределу при $x_1 \rightarrow -0$, получаем

$$\mathbf{u}(t, x_1 = -0, x_2, \dots, x_N) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0 \left(-\lambda^{\mathbf{k}_1} t, x_2 - \lambda^{\mathbf{k}_2} t, \dots, x_N - \lambda^{\mathbf{k}_N} t \right) - \sum_{\mathbf{k}: \lambda^{\mathbf{k}_1} < 0} \frac{\mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1}{\lambda^{\mathbf{k}_1}} \mathbf{v}. \quad (14)$$

Учитывая (11), имеем

$$\sum_{\mathbf{k}: \lambda^{\mathbf{k}_1} < 0} \frac{1}{\lambda^{\mathbf{k}_1}} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1 = \sum_{\mathbf{k}_1: \lambda^{\mathbf{k}_1} < 0} \frac{1}{\lambda^{\mathbf{k}_1}} \mathbf{C}^{\mathbf{k}_1} \mathbf{A}_1.$$

Поскольку $\mathbf{A}_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{\Omega}_1$ и $\mathbf{C}^{\mathbf{k}_1} = \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{\mathbf{k}_1} \mathbf{\Omega}_1$, то $(1/\lambda^{\mathbf{k}_1}) \mathbf{C}^{\mathbf{k}_1} \mathbf{A}_1 = \mathbf{C}^{\mathbf{k}_1}$. Равенство (14) принимает вид

$$\mathbf{u}(t, x_1 = -0, x_2, \dots, x_N) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0 \left(-\lambda^{\mathbf{k}_1} t, x_2 - \lambda^{\mathbf{k}_2} t, \dots, x_N - \lambda^{\mathbf{k}_N} t \right) - \sum_{\mathbf{k}_1: \lambda^{\mathbf{k}_1} < 0} \mathbf{C}^{\mathbf{k}_1} \mathbf{v}. \quad (15)$$

Аналогично, для точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, лежащих в правой полуплоскости ($x_1 \geq 0$), с точностью до $O(t^2)$ можем записать

$$\mathbf{u}(t, x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} t) + \sum_{\mathbf{k}: x_1 < \lambda_{-1}^{\mathbf{k}} t} \frac{\mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1}{\lambda^{\mathbf{k}_1}} \mathbf{v} \left(t - \frac{x_1}{\lambda^{\mathbf{k}_1}}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{\lambda^{\mathbf{k}_1}} \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} \right). \quad (16)$$

Переходя в (16) к пределу при $x_1 \rightarrow +0$, аналогично (15) получаем

$$\mathbf{u}(t, x_1 = +0, x_2, \dots, x_N) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0 \left(-\lambda^{\mathbf{k}_1} t, x_2 - \lambda^{\mathbf{k}_2} t, \dots, x_N - \lambda^{\mathbf{k}_N} t \right) + \sum_{\mathbf{k}_1: \lambda^{\mathbf{k}_1} > 0} \mathbf{C}^{\mathbf{k}_1} \mathbf{v}. \quad (17)$$

Подставим выражения (15) и (17) в условия сопряжения (3). Получим систему уравнений, которым должен удовлетворять скачок переменных $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ при переходе через гиперплоскость Γ , заданную уравнением $x_1 = 0$:

$$\sum_{\mathbf{k}_1: \lambda^{\mathbf{k}_1} > 0} \mathbf{P} \mathbf{C}^{\mathbf{k}_1} \mathbf{v} - \sum_{\mathbf{k}_1: \lambda^{\mathbf{k}_1} < 0} \mathbf{L} \mathbf{C}^{\mathbf{k}_1} \mathbf{v} = \mathbf{b}^{\mathbf{k}}. \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^{\mathbf{k}} &= - \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{P} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0 \left(+0 - \lambda^{\mathbf{k}_1} t, x_2 - \lambda^{\mathbf{k}_2} t, \dots, x_N - \lambda^{\mathbf{k}_N} t \right) - \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{L} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0 \left(-0 - \lambda^{\mathbf{k}_1} t, x_2 - \lambda^{\mathbf{k}_2} t, \dots, x_N - \lambda^{\mathbf{k}_N} t \right). \end{aligned}$$

Вычтя из уравнения (17) уравнение (15), получим систему уравнений, которым также должен удовлетворять скачок значений переменных $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$:

$$\sum_{k_1: \lambda^{k_1}=0} \mathbf{C}^{k_1} \mathbf{v} = \sum_{\mathbf{k}: \lambda^{k_1}=0} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{d}^{\mathbf{k}}. \quad (19)$$

Здесь

$$\mathbf{d}^{\mathbf{k}} = \mathbf{u}_0 \left(+0, x_2 - \lambda^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda^{k_N} t \right) - \mathbf{u}_0 \left(-0, x_2 - \lambda^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda^{k_N} t \right).$$

Количество линейно независимых уравнений системы (19) равно кратности нулевого собственного числа матрицы \mathbf{A}_1 . Умножим равенство (19) на левые собственные векторы-строки матрицы \mathbf{A}_1 , соответствующие нулевому собственному числу:

$$\mathbf{l}^{k_1} \mathbf{v} = \sum_{\mathbf{k}: \lambda^{k_1}=0} \mathbf{l}^{k_1} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{d}^{\mathbf{k}}, \quad k_1: \lambda^{k_1} = 0. \quad (20)$$

Объединив равенства (18) и (20), получим систему линейных алгебраических уравнений, которым должен удовлетворять скачок переменных $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ при переходе через гиперплоскость $\Gamma: x_1 = 0$:

$$\begin{cases} \sum_{k_1: \lambda^{k_1}>0} \mathbf{P} \mathbf{C}^{k_1} \mathbf{v} - \sum_{k_1: \lambda^{k_1}<0} \mathbf{L} \mathbf{C}^{k_1} \mathbf{v} = \mathbf{b}^{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{l}^{k_1} \mathbf{v} = \sum_{\mathbf{k}: \lambda^{k_1}=0} \mathbf{l}^{k_1} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{d}^{\mathbf{k}}, \quad k_1: \lambda^{k_1} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Для однозначного решения обобщенной задачи Римана о распаде разрыва с условиями сопряжения на границе необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (21) имела единственное решение. Решая систему уравнений (21), определим значение $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$.

Формулы (13) и (16) с полученными зависимостями $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ дают полное решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для случая многих пространственных переменных.

Построенное приближение решения обобщенной задачи Римана с дополнительными условиями сопряжения на разрыве является точным в случае одной пространственной переменной. Также это решение будет точным и в случае многих пространственных переменных, если начальные данные заданы линейными функциями по обе стороны гиперплоскости $\Gamma: x_1 = 0$.

5. Граничные условия. Рассмотрим еще одну задачу, которая далее будет использована при построении вычислительного алгоритма. Необходимо найти в полупространстве $x_1 \leq 0$ решение начально-краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами (1) с начальными данными (2). Решение должно быть непрерывным в полупространстве $x_1 \leq 0$ и удовлетворять заданным граничным условиям на гиперплоскости $\Gamma: x_1 = 0$:

$$\mathbf{L} \mathbf{u} \left(t, x_1 = -0, x_2, \dots, x_N \right) = \mathbf{0}. \quad (22)$$

Полагаем, что начальные данные удовлетворяют граничным условиям. Эту задачу будем называть обобщенной задачей Римана с граничными условиями.

Пусть $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ — решение этой задачи. Доопределим $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ нулем для $t < 0$ и $t \geq 0, x_1 > 0$. Также доопределим нулем $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ для $x_1 > 0$. Введем обозначение $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = -\theta(t) \mathbf{u}(t, x_1 = -0, x_2, \dots, x_N)$.

Как было показано выше, функция $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, рассматриваемая как обобщенная функция из \mathbf{S}' , удовлетворяет уравнению (12). Решение этого уравнения задается формулой (13). Вектор $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ с точностью $O(t^2)$ удовлетворяет равенствам (15), которые можно переписать в виде

$$- \sum_{k_1: \lambda^{k_1} \geq 0} \mathbf{C}^{k_1} \mathbf{v} = \sum_{\mathbf{k}: \lambda^{k_1} \geq 0} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0 \left(-\lambda^{k_1} t, x_2 - \lambda^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda^{k_N} t \right). \quad (23)$$

Количество линейно независимых уравнений системы (23) равно количеству линейно независимых собственных векторов матрицы \mathbf{A}_1 , соответствующих неотрицательным собственным числам. Умножим равенство (23) на левые собственные вектора-строки матрицы \mathbf{A}_1 , соответствующие неотрицательным собственным числам

$$-l^{k_1} \mathbf{v} = \sum_{\mathbf{k}: \lambda^{k_1} \geq 0} l^{k_1} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0 \left(-\lambda^{k_1} t, x_2 - \lambda^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda^{k_N} t \right), \quad k_1 : \lambda^{k_1} \geq 0. \quad (24)$$

Объединим равенства (24) и (22), получим систему линейных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять значения решения задачи на границе Γ :

$$\begin{cases} -l^{k_1} \mathbf{v} = \sum_{\mathbf{k}: \lambda^{k_1} \geq 0} l^{k_1} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0 \left(-\lambda^{k_1} t, x_2 - \lambda^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda^{k_N} t \right), & k_1 : \lambda^{k_1} \geq 0, \\ L\mathbf{v} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (25)$$

Решим систему уравнений (25) и определим значение $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ при $t > 0$ на гиперплоскости $x_1 = 0$. Формулы (13) с полученными зависимостями $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ дают полное решение обобщенной задачи Римана с граничными условиями для случая многих пространственных переменных с точностью до $O(t^2)$. Опять же, если начальные данные $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ являются линейными функциями, то полученное решение является точным решением этой задачи.

В частности, если граничные условия имеют вид

$$\sum_{\mathbf{k}: \lambda_{k_1}^- < 0} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

что означает, что любые волны проходят через границу, не отражаясь, то такие условия называются «прозрачными». В этом случае, если умножить уравнения граничных условий слева на левые собственные вектора-строки матрицы \mathbf{A}_1 , то система уравнений (25) принимает вид

$$\begin{cases} -l^{k_1} \mathbf{v} = \sum_{\mathbf{k}: \lambda^{k_1} \geq 0} l^{k_1} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0 \left(-\lambda^{k_1} t, x_2 - \lambda^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda^{k_N} t \right), & k_1 : \lambda^{k_1} \geq 0, \\ l^{k_1} \mathbf{v} = \mathbf{0}, & k_1 : \lambda^{k_1} < 0. \end{cases} \quad (26)$$

Поскольку система уравнений (1) гиперболична и матрица \mathbf{A}_1 имеет полный набор линейно независимых левых собственных векторов, система уравнений (26) совместна и обобщенная задача Римана с прозрачными граничными условиями имеет единственное решение.

6. Распространения упругих волн в блочно-трещиноватой среде. Построение вычислительного алгоритма, основанного на приведенных выше результатах, продемонстрируем на задаче распространения упругих волн в неоднородной блочно-трещиноватой среде.

6.1. Математическая модель. Систему уравнений, описывающую распространение упругих волн, для случая двух пространственных переменных, следуя [8], можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{11} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 - \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{22} - \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{12} - \mu \frac{\partial}{\partial x_1} v_2 - \mu \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 &= 0, \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{11} - \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{12} &= 0, \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} v_2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{12} - \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где λ и μ — коэффициенты Ламе, ρ — массовая плотность среды, σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} — компоненты тензора напряжений, v_1 , v_2 — компоненты вектора скорости смещений. Введя вектор переменных $\mathbf{u} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, v_1, v_2)^T$ и матрицы

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \\ -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 \\ 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

эту систему уравнений можно записать в виде (1).

Система уравнений (27) является гиперболической, матрицы \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 имеют полный набор линейно независимых собственных векторов и предствимы в виде (5).

Далее все размерные величины заданы в системе единиц СИ. Поставим для этой системы уравнений следующую задачу. В области

$$\Omega = [-30 < x_1 < 30, -600 < x_2 < 0]$$

необходимо найти решение начально-краевой задачи для системы уравнений (27). Уравнения (27) должны выполняться всюду в Ω , кроме внутренних границ Γ_γ , $\gamma = 1, 2$, задаваемых условием $\Gamma_1 : x_1 = -15$ и $\Gamma_2 : x_1 = 15$. На этих границах должны выполняться «условия проскальзывания без трения», состоящие в том, что при переходе через эти границы непрерывны нормальные к границам компоненты вектора смещений, нормальные к границе компоненты силы с разных сторон границы равны по величине и противоположно направлены, тангенциальные компоненты сил, действующих по обе стороны границы, равны 0:

$$\begin{aligned} v_1(t, \mathbf{x} \in \Gamma_\gamma^-) - v_1(t, \mathbf{x} \in \Gamma_\gamma^+) &= 0, \\ \sigma_{11}(t, \mathbf{x} \in \Gamma_\gamma^-) - \sigma_{11}(t, \mathbf{x} \in \Gamma_\gamma^+) &= 0, \\ \sigma_{12}(t, \mathbf{x} \in \Gamma_\gamma^-) &= 0, \\ \sigma_{12}(t, \mathbf{x} \in \Gamma_\gamma^+) &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

На внешних границах $x_1 = -30$, $x_2 = -600$, $x_1 = 30$, должны выполняться прозрачные граничные условия.

На границе $x_2 = 0$ работает источник вибровоздействия, который действует на геологическую среду с усилием $F_j \sin \omega t$, $j = 1, 2$. Это усилие распределено по границе с плотностью $P_j(x_1) \sin \omega t$, так что

$$\int P_j dx_1 = F_j.$$

В соответствии с третьим законом Ньютона во всех точках этой границы должны выполняться условия

$$\sigma_{12} = -P_1 \sin \omega t, \quad \sigma_{22} = -P_2 \sin \omega t. \tag{29}$$

6.2. Численный алгоритм. Внутренними границами область Ω разбивается на подобласти

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= [-30 < x_1 < -15, -600 < x_2 < 0], \\ \Omega_2 &= [-15 < x_1 < 15, -600 < x_2 < 0], \\ \Omega_3 &= [15 < x_1 < 30, -600 < x_2 < 0]. \end{aligned}$$

Построим в каждой из подобластей прямоугольную сетку со сторонами параллельными осям координат, так, чтобы узлы, лежащие на внутренних границах совпадали для обеих прилегающих подобластей. Сетку строим равномерной по каждой из координат и h_j , $j = 1, 2$, шаг сетки по соответствующим направлениям. Пусть индекс p_1 нумерует узлы сетки в первой подобласти Ω_1 , индекс p_2 нумерует узлы во второй подобласти Ω_2 и индекс p_3 нумерует узлы сетки в третьей подобласти Ω_3 . Далее для нумерации узлов сетки в подобласти будем использовать, там где это

не вызовет недоразумения, индекс p , каждый раз подразумевая, что в каждой подобласти этот индекс пробегает свой набор значений.

Будем полагать, что усилие, создаваемое виброисточником, направлено по вертикали, т.е. $P_1(x_1) = 0$, а распределение $P_2(x_1)$ является кусочно линейной функцией, равной нулю во всех узлах границы $x_2 = 0$, кроме узла с координатами $x_1 = 0, x_2 = 0$. В этом узле P_1 принимает значение F_2/h_1 .

Определим равномерную сетку по времени $t_m = m\tau, m = 0 : 1 : M$. Шаг сетки τ должен удовлетворять условию

$$\tau \leq \min \left(\min_k \frac{h_1}{\lambda_1^k}, \min_k \frac{h_2}{\lambda_2^k} \right). \quad (30)$$

В каждой подобласти построим систему базисных полиномов $H_p(\mathbf{x})$, каждый из которых равен 1 в узле, соответствующем индексу p , равен 0 во всех остальных узлах сетки и в каждой ячейке сетки является билинейной (линейной по каждой переменной) функцией.

Решение в каждой подобласти будем аппроксимировать линейной комбинацией

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sum_p H_p(\mathbf{x}) \mathbf{u}^p(t).$$

Тогда задача построения приближенного решения начально-краевой задачи для системы уравнений (27) с условиями (28) на внутренних границах на каждом временном слое сводится к нахождению значений в узлах $\mathbf{u}^p(t_{m+1})$ при известных значениях на предыдущем временном слое $\mathbf{u}^p(t_m)$.

Для внутренних узлов каждой из подобластей значения на следующем временном слое находим в соответствии с формулами

$$\mathbf{u}(t_{m+1}, \mathbf{x}) = \sum_k \mathbf{C}_k \mathbf{u}(t_m, \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_k \tau). \quad (31)$$

В правой части формулы (31) отсутствуют слагаемые, связанные с условиями на внутренних и внешних границах. Эти слагаемые равны 0 в соответствии с замечанием 2.2. Действительно, в силу условия (30) выбора шага по времени прямая линия $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \boldsymbol{\lambda}$, проведенная через точку $(t_{m+1} > 0, \mathbf{x})$, пересекает и внутренние и внешние границы в момент времени $t^* < t_m$.

Для узлов, лежащих на внешних границах, на которых поставлены «прозрачные» граничные условия, значения на следующем временном слое вычисляем как решение задачи Римана с «прозрачными» граничными условиями (26).

Для узлов на внешних границах, на которых поставлены «свободные» граничные условия, значения на следующем временном слое вычисляем как решение задачи Римана с граничными условиями (25). В качестве условий на границе следует брать равенства (29).

На основании изложенного выше был построен вычислительный алгоритм и реализован в системе MATLAB. Проведенные расчеты показали высокую эффективность этого алгоритма. Сравнительные тесты с другими вычислительными алгоритмами решения рассматриваемого класса задач, в частности, с вероятно наиболее эффективным и популярным из них — разрывным методом Галеркина — показали, что при заданной необходимой точности время расчета и необходимые требования по памяти существенно меньше. Поскольку решение на следующем временном слое в каждом узле сетки вычисляется независимо, построенный алгоритм обладает большим потенциалом к распараллеливанию.

Выполненные расчеты позволили подтвердить гипотезу, что наличие трещин в геологической породе, в которых соприкасающиеся части могут смещаться друг относительно друга, может приводить к тому, что упругая волна, сгенерированная виброисточником, не рассеивается по полусфере, а распространяется достаточно узким пучком так, что и на существенных глубинах ее плотность энергии остается значимой, чтобы вызвать те или иные физико-химические процессы. Внутренние границы (трещины) ведут себя как стенки волновода. Упругая волна практически не проходит сквозь них, и возмущение источника достигает значительной глубины без

рассеяния. Эти и другие результаты вычислительных экспериментов будут подробно изложены в последующих публикациях.

7. Заключение. В работе для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, с произвольным количеством пространственных переменных построено приближенное решение обобщенной задачи Римана с условиями сопряжения на разрыве. Также приведено приближенное решение обобщенной задачи Римана с граничными условиями. Для этого построено фундаментальное решение оператора задачи. Это, в свою очередь, позволило свести задачу Римана к решению системы алгебраических уравнений с правой частью, зависящей от значений переменных в начальный момент времени в конечном числе точек.

На основе этих решений задачи Римана построен и реализован вычислительный алгоритм нахождения решения начально-краевой задачи для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. При этом постановка задачи допускает существование внутренних границ, на которых решение может иметь разрывы значений переменных модели и должны выполняться заданные условия, связывающие значения переменных по обе стороны этих границ.

Построенный вычислительный алгоритм был применен для исследования характера распространения упругих волн, сгенерированных периодически действующим виброисточником, в блочно-трещиноватой геологической среде. Существование трещин отражено в модели наличием внутренних границ, на которых выполняются «условия проскальзывания без трения». Проведенные численные эксперименты показали высокую эффективность этого вычислительного алгоритма и его потенциал, как инструмента для исследования практических прикладных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: ГИФМЛ, 1958.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — Мю: ГИФМЛ, 1959.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — М.: ГИФМЛ, 1958.
5. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
6. *Скалько Ю. И.* Задача Римана о распаде разрыва в случае многих пространственных переменных // Тр. МФТИ. — 2016. — 8, № 4. — С. 169–182.
7. *Скалько Ю. И.* Корректные условия на границе, разделяющей подобласти // Комп. исслед. модел. — 2014. — 6, № 3. — С. 347–356.
8. *LeVeque R. L.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
9. *Kaser M., Dumbser M.* An arbitrary high order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes. I. The two-dimensional isotropic case with external source terms // Geophys. J. Int. — 2006. — 166. — P. 855–877.

Скалько Юрий Иванович
Московский физико-технический институт
E-mail: skalko@mail.mipt.ru

Гриднев Сергей Юрьевич
Воронежский государственный технический университет
E-mail: gridnev_s_y@rambler.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 170 (2019). С. 51–61
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-170-51-61

УДК 517.9

О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ, ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

© 2019 г. В. Е. СТРУКОВ

Аннотация. Статья посвящена изучению медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности распределений из гармоничных пространств. Рассмотрен целый ряд однородных пространств функций. Введено понятие гармоничного пространства распределений, которое строится по одному из однородных пространств функций. Изучены свойства гармоничных пространств распределений, наделенных структурой банаховых модулей. Доказано, что каждое такое пространство изометрически изоморфно соответствующему однородному пространству функций. На основе определений медленно меняющейся и почти периодической на бесконечности функций из однородного пространства введены понятия медленно меняющегося и почти периодического на бесконечности распределений из гармоничного пространства. С помощью методов абстрактного гармонического анализа построены ряды Фурье почти периодических на бесконечности распределений и получены некоторые их свойства. В работе существенно использованы результаты теории изометрических представлений и теории банаховых модулей.

Ключевые слова: распределение медленного роста, почти периодическое на бесконечности распределение, медленно меняющееся на бесконечности распределение, однородное пространство, банахов модуль, почти периодический вектор, ряд Фурье.

ON DISTRIBUTIONS ALMOST PERIODIC AT INFINITY

© 2019 V. E. STRUKOV

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of slowly varying and almost periodic at infinity distributions from harmonic spaces; a number of spaces of homogeneous function are considered. The notion of a harmonic space of distributions is introduced; this space is constructed by a homogeneous functional spaces. Properties of harmonic spaces of distributions endowed with the structure of Banach modules are studied. Each such a space is proved to be isometrically isomorphic to the corresponding homogeneous functional space. Based on the definitions of slowly varying and almost periodic at infinity functions from a homogeneous space, we introduce the notions of slowly varying and almost periodic at infinity distributions from a harmonic space. Using methods of abstract harmonic analysis, we construct Fourier series of almost periodic distributions at infinity and obtain their properties. In this paper, we essentially used results of the theory of isometric representations and the theory of Banach modules.

Keywords and phrases: distribution of slow growth, distribution almost periodic at infinity, distribution slowly varying at infinity, homogeneous space, Banach module, almost periodic vector, Fourier series.

AMS Subject Classification: 33E30, 43A60

1. Однородные пространства функций. Пусть X — комплексное банахово пространство, $\text{End } X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X . Символом $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать линейное пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на \mathbb{R} (классов эквивалентности) функций со значениями в X , а символом $S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, — пространства Степанова, состоящие из функций $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, X)$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S^p} = \sup_{s \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \|x(s+t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$

принимаемая за норму (см. [3, 7]).

Определение 1. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ определенных на \mathbb{R} функций со значениями в X называется *однородным*, если выполнены следующие условия:

- (a) пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ содержится в пространстве Степанова $S^1(\mathbb{R}, X)$, причем вложение $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \subset S^1(\mathbb{R}, X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);
- (b) в $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ определена и ограничена группа $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций

$$(S(t)x)(s) = x(s+t), \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X); \quad (1)$$

- (c) для любых функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ их свертка

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, причем выполнено неравенство

$$\|f * x\| \leq C \|f\|_1 \|x\|,$$

где $C \geq 1$ — некоторая постоянная (как правило, $C = 1$);

- (d) $\varphi x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ для любой $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ с компактным носителем $\text{supp } \varphi$, причем

$$\|\varphi x\| \leq \|\varphi\| \|x\|$$

и отображение $t \mapsto \varphi S(t)x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ непрерывно.

Это определение однородного пространства функций было введено в [13, 14].

Примерами однородных пространств являются пространства $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, измеримых по Лебегу и суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ (классов) функций, пространство $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ существенно ограниченных (классов) функций, пространства Степанова $S^p = S^p(\mathbb{R}, X)$ для всех $p \in [1, \infty)$, пространство $C_b(\mathbb{R}, X)$ ограниченных непрерывных функций и многие другие (более подробно см. [13, 14]).

В дальнейшем символом $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать однородное пространство. Символом $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ вида

$$\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X) = \left\{ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) : \text{функция } t \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \text{ непрерывна} \right\}.$$

Через $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, содержащее все функции φx , $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$, где функция φ бесконечно дифференцируема и $\text{supp } \varphi$ — компакт.

Непосредственно из определения 1 следует, что все перечисленные однородные пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ являются банаховыми $L^1(\mathbb{R})$ -модулями, в которых действует группа S сдвигов вида (1) и модульная структура задается сверткой функций (2). Таким образом, появляется возможность использования основных понятий и результатов из спектральной теории банаховых

модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$ (см. [1, 4, 5, 7, 8, 11]). В частности, пространства $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ совпадают с пространствами S -непрерывных векторов (см. [13]). Следует отметить, что

$$(L^p(\mathbb{R}, X))_c = L^p(\mathbb{R}, X), \quad (L^\infty(\mathbb{R}, X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R}, X), \\ (C_b(\mathbb{R}, X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R}, X), \quad (C_b(\mathbb{R}, X))_0 = C_0(\mathbb{R}, X).$$

2. Почти периодические векторы из банаховых $L^1(\mathbb{R})$ -модулей. Пусть \mathcal{X} — комплексное банахово пространство, а $L^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра определенных на \mathbb{R} измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов) функций со сверткой функций в качестве умножения:

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Будем считать, что \mathcal{X} является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем (см. [7, 11]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$. Если $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ — сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)xdt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad x \in \mathcal{X},$$

определяет на \mathcal{X} структуру невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля, ассоциированную с представлением T . С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем \mathcal{X} ассоциировано единственное представление $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ (см. [7]). Чтобы это подчеркнуть, иногда используется обозначение (\mathcal{X}, T) .

Теория банаховых $L^1(\mathbb{R})$ -модулей была построена в [6] и изложена в [1, 4, 5, 7, 11, 17, 18].

Определение 2. *Спектром Бёрлинга* вектора $x \in \mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из \mathbb{R} вида

$$\Lambda(x) = \left\{ \lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}), \text{ где } \widehat{f}(\lambda_0) \neq 0 \right\}.$$

Определение 3. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ отнесем к *существенному спектру* $\Lambda_{\text{ess}}(x)$ вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля (\mathcal{X}, T) , если существует λ_0 -направленность (f_α) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, для которой выполнено условие

$$\overline{\lim}_{\alpha} \|f_\alpha x\| > 0.$$

Отметим, что $\Lambda_{\text{ess}}(x) \subseteq \Lambda(x)$, $x \in (\mathcal{X}, T)$.

Определение 4. Пусть x — ненулевой вектор из $L^1(\mathbb{R})$ -модуля (\mathcal{X}, T) . Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ из $\Lambda(x)$ назовем *эргодической точкой* вектора x , если для некоторой λ_0 -направленности из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ существует

$$\lim_{\alpha} f_\alpha x = x_0 \in \mathcal{X}.$$

Множество эргодических точек вектора будем обозначать символом $\Lambda_{\text{erg}}(x)$. Если $x_0 = 0$, то число λ_0 отнесем к *непрерывному спектру* $\Lambda_c(x)$ вектора x . Множество

$$\Lambda_B(x) = \left\{ \lambda_0 \in \Lambda_{\text{erg}}(x) : \lim_{\alpha} f_\alpha x \neq 0 \right\}$$

называется *спектром Бора (дискретным спектром)* вектора $x \in \mathcal{X}$.

Определение 5. Вектор x_0 из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля (\mathcal{X}, T) называется *почти периодическим* (относительно представления T), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(1) для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\Omega_{\varepsilon, x_0} = \left\{ \omega \in \mathbb{R} : \|T(\omega)x_0 - x_0\| < \varepsilon \right\}$$

ε -периодов вектора x_0 относительно плотно¹ на \mathbb{R} ;

¹Множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ называется *относительно плотным на \mathbb{R}* , если существует такое число $l > 0$, что любой промежуток $[t, t+l]$, $t \in \mathbb{R}$, содержит хотя бы одну точку множества Ω .

- (2) орбита $\{T(t)x_0, t \in \mathbb{R}\}$ вектора x_0 предкомпактна в \mathcal{X} ;
 (3) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и собственные векторы x_1, \dots, x_N представления T , соответствующие этим числам (т.е. $T(t)x_k = e^{i\lambda_k t}x_k, t \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq N$), что

$$\left\| x_0 - \sum_{k=1}^N x_k \right\| < \varepsilon;$$

- (4) функция $t \mapsto \varphi(t) = T(t)x_0, t \in \mathbb{R}$, — непрерывная почти периодическая функция, т.е. $\varphi \in AP(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ (см. [4, 10]).

Множество $AP(\mathcal{X}) = AP(\mathcal{X}, T)$ почти периодических векторов из \mathcal{X} образует замкнутое подпространство в \mathcal{X} и является замкнутым подмодулем из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля \mathcal{X} . Кроме того, имеет место включение $AP(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}_c$.

Определение 6. Преобразование Бора почти периодического вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ назовем функцию $\hat{x}_B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$, определенную равенствами

$$\hat{x}_B(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha T(\tau)x e^{-i\lambda\tau} d\tau = \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_0^{\varepsilon^{-1}} T(\tau)x e^{-(\varepsilon+i\lambda)\tau} d\tau = \lim_j f_j x, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где (f_j) — любая λ -направленность из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

Отметим, что имеет место свойство единственности: если преобразование Бора \hat{x}_B вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ равно нулю, то $x = 0$.

Преобразование Бора вектора является основой для определения коэффициентов Фурье почти периодических на бесконечности функций (см. [3]). Носитель $\text{supp } \hat{x}_B$ функции \hat{x}_B совпадает со спектром Бора $\Lambda_B(x)$ вектора x , и это множество не более чем счетно. Тогда справедливо представление

$$\text{supp } \hat{x}_B = \Lambda_B(x) = \{ \lambda_n, n \in \mathbb{J}_d \}, \quad (3)$$

где $\mathbb{J}_d \subset \mathbb{Z}$, причем имеют место равенства

$$T(t)x_n = e^{i\lambda_n t} x_n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{J}_d,$$

где векторы $x_n, n \in \mathbb{J}_d$, являются собственными векторами представления T (а также генератора iA группы операторов T , т.е. $Ax_n = i\lambda_n x_n, n \in \mathbb{J}_d$), причем $\Lambda(x_n) = \{ \lambda_n \}, n \in \mathbb{J}_d$. Ряд

$$x \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} x_n, \quad (4)$$

где $x_n = \hat{x}_B(\lambda_n), n \in \mathbb{J}_d$, назовем *рядом Фурье* вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ (относительно представления (3)). Отметим, что если этот ряд абсолютно сходится, т.е. выполнено условие $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty$, то $x = \sum_{n \in \mathbb{J}_d} x_n$.

Лемма 1. Преобразование Бора $\hat{x}_B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ любого вектора x из $AP(\mathcal{X})$ допускает оценку

$$\|\hat{x}_B(\lambda)\| \leq \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. При определении вектора $\hat{x}_B(\lambda) = \lim f_\alpha x, x \in AP(\mathcal{X})$, будем использовать λ -направленность (f_α) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, которая является инвариантным интегралом. Тогда $\|f_\alpha\| = \widehat{f_\alpha}(0) = 1$ для любого α и поэтому

$$\|\hat{x}_B(\lambda)\| \leq \sup_\alpha \|f_\alpha\| \|x\| = \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Теорема 1. Для любого вектора x из $AP(\mathcal{X})$ с рядом Фурье (4) справедливо условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0.$$

Доказательство. С учетом представления (3) и равенства $x_n = \widehat{x}_B(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{J}_d$, достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{x}_B(\lambda_n)\| = 0.$$

Из условия (3) определения 5 следует, что существует последовательность $(a_n, n \in \mathbb{N})$ векторов из $AP(\mathcal{X})$, носители $\text{supp}(\widehat{a_n})_B$, $n \geq 1$, преобразований Бора которых конечны. Из леммы 1 следует, что

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\widehat{x}_B(\lambda) - \widehat{a_n}_B(\lambda)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{x}_B(\lambda_n)\| = 0. \quad \square$$

3. Медленно меняющиеся на бесконечности функции. Введем понятие медленно меняющейся на бесконечности функции из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Определение 7. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если

$$(S(t)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X) \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}.$$

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\mathcal{F}_{sl,\infty} = \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Непосредственно из определения следует, что $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ образует линейное замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, инвариантное относительно (полу)группы сдвигов S .

Для случая $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_b(\mathbb{R}, X)$ медленно меняющиеся на бесконечности функции рассматривались в [15, 16, 19].

Например, медленно меняющейся на бесконечности является функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ вида $x(t) = c + x_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где c — вектор из банахова пространства X и x_0 — любая функция из $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$. При $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_b(\mathbb{R}, X)$ примерами медленно меняющихся на бесконечности функций являются:

- (1) $x_1(t) = \sin \ln(1 + t^2)$, $t \in \mathbb{R}$;
- (2) $x_2(t) = \sin \sqrt{1 + |t|}$, $t \in \mathbb{R}$;
- (3) любая непрерывно дифференцируемая функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ со свойством $x' \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

В [14] были получены следующие свойства медленно меняющихся на бесконечности функций.

Теорема 2. Пространство $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обладает следующими свойствами:

- (1) для того чтобы функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежала пространству $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 0$;
- (2) для того чтобы функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежала пространству $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x - x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 1$;
- (3) если $x \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, то $\Lambda(x) \setminus \{0\} \subset \Lambda_c(x)$ и $\Lambda_{\text{ess}}(x) \subset \{0\}$.

Здесь символом $\Lambda_{\text{ess}}(x)$ обозначен существенный спектр функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ (см. [14]).

4. Почти периодические на бесконечности функции.

4.1. Определения почти периодической на бесконечности функции. Далее символом $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначается однородное пространство функций, удовлетворяющее всем условиям (a)–(d) определения 1. В [13] были введены четыре определения почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и доказана их эквивалентность. Мы приведем только два из них.

Первое определение (аппроксимационное) почти периодической на бесконечности функции строится на основе медленно меняющихся на бесконечности функций.

Определение 8. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и медленно меняющиеся на бесконечности функции $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{F}_{sl, \infty}(\mathbb{R}, X)$, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\| < \varepsilon,$$

где функции e_k , $1 \leq k \leq n$, имеют вид $e_k(t) = e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$. Множество почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать символом $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Второе определение основано на понятии ε -периода на бесконечности и соответствует классическому определению Бора почти периодической функции (см. [10]).

Примером функции из $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является любая функция вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t) e^{i\lambda_k t}, \quad x_1, \dots, x_N \in \mathcal{F}_{sl, \infty}(\mathbb{R}, X), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$$

(обобщенные тригонометрические полиномы; см. [13]).

Определение 9. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется ε -периодом на бесконечности функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, если существует такая функция $x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, что

$$\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon.$$

Множество ε -периодов на бесконечности функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Определение 10. Множество Ω из \mathbb{R} называется *относительно плотным* на \mathbb{R} , если существует такое $l > 0$, что $[t, t+l] \cap \Omega \neq \emptyset$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 11. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ ее ε -периодов на бесконечности относительно плотно на \mathbb{R} .

4.2. Ряд Фурье почти периодической на бесконечности функции. На основе построенных ранее рядов Фурье почти периодических векторов перейдем к построению рядов Фурье почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Пусть $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и ряд

$$\tilde{x} \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} \tilde{y}_n, \quad \Lambda_B(\tilde{x}) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{J}_d\}, \quad \Lambda(y_n) = \lambda_n,$$

где $\mathbb{J}_d \subset \mathbb{Z}$ (см. формулу (3)), является рядом Фурье класса эквивалентности $\tilde{x} \in AP(\mathcal{X})$, построенного по функции x , где $\mathcal{X} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$.

Определение 12. Ряд

$$x(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} x_n(t) e^{i\lambda_n t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где функции z_n , $n \in \mathbb{J}_d$, вида $z_n(t) = x_n(t) e^{i\lambda_n t}$, $t \in \mathbb{R}$, $x_n \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$, являются представителями соответствующих классов эквивалентности \tilde{y}_n , $n \in \mathbb{J}_d$, называется *рядом Фурье* функции x . Функции x_n , $n \in \mathbb{J}_d$, будем называть *коэффициентами Фурье* функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Следует отметить неединственность ряда Фурье функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

В [2,3] было введено аналогичное понятие ряда Фурье для непрерывных почти периодических на бесконечности функций.

Теорема 3. Коэффициенты любого ряда Фурье функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ принадлежат пространству $\mathcal{F}_{sl, \infty}(\mathbb{R}, X)$ и удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{\mathcal{F}} = 0. \quad (5)$$

Условие $x_n \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{J}_d$, следует из определения 8, а равенство (5) вытекает из теоремы 1.

5. Почти периодические на бесконечности распределения.

5.1. *Гармоничные пространства распределений.* Пусть X — комплексное банахово пространство. Символом $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ обозначим пространство Шварца, т.е. линейное полинормированное пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$, удовлетворяющих следующему условию: для всех $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует такое $C > 0$, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|t^m \varphi^{(n)}(t)\|_X < C.$$

Такие функции называют *пробными*.

Будем говорить, что последовательность $(\varphi_k, k \in \mathbb{N})$, $\varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$, *сходится* к функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$, если при всех $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ последовательность $t \mapsto t^m \varphi_k^{(n)}(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, равномерно сходится к функции $t \mapsto t^m \varphi^{(n)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}, X) \rightarrow X$ — линейный оператор. Будем обозначать значение оператора Φ на $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ символом $\Phi(\varphi)$. Линейный оператор $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}, X) \rightarrow X$ называют *непрерывным*, если $\Phi(\varphi_k)$ сходится к $\Phi(\varphi)$, как только $\{\varphi_k\}$ сходится к φ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$. Всякий непрерывный линейный оператор $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}, X) \rightarrow X$ называют *распределением* (или *обобщенной функцией*) *медленного роста* на \mathbb{R} со значениями в X . Обозначим символом $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ линейное пространство всех распределений медленного роста с естественными операциями сложения и умножения на число (более подробно для скалярных распределений из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ см. [9]).

Производной распределения $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ будем называть распределение $D\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$, определенное формулой

$$(D\Phi)(\varphi) = -\Phi(\dot{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X).$$

Отметим, что оператор дифференцирования $D : \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ является линейным и непрерывным. Из определения пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ следует, что любое распределение $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ дифференцируемо бесконечное число раз.

Пусть $x \in S^1(\mathbb{R}, X)$ (в частности, x может быть непрерывной функцией). Ясно, что оператор Φ_x , действующий по правилу

$$\Phi_x(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\varphi(t)dt, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X),$$

принадлежит пространству $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$. Распределение Φ_x , порожденное функцией $x \in S^1(\mathbb{R}, X)$, называют *регулярным*.

В пространстве распределений $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ действует группа $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ операторов сдвига

$$(S(t)F)(\varphi) = F(S(-t)\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Свертка распределения $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ с функцией $f \in L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$(f * F)(\varphi) = F(\tilde{f} * \varphi), \quad F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X), \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad (7)$$

где функция \tilde{f} имеет вид $\tilde{f}(\tau) = f(-\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Далее будут введены гармоничные пространства распределений и изучены их свойства.

Рассмотрим последовательность $(f_n, n \in \mathbb{N})$ функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ вида

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{t^n}{n!} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Отметим, что преобразование Фурье $\hat{f}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ функции f_n , $n \in \mathbb{N}$, имеет вид

$$\hat{f}_n(\lambda) = \frac{1}{(i\lambda + 1)^n}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Каждому однородному пространству функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ можно поставить в соответствие счетное множество пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{N}$, которые определяются как линейные пространства функций вида

$$\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) = \{f_n * x \mid x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

с нормой

$$\|f_n * x\|_{\mathcal{F}^{(n)}} = \|f_n * x\|_{\mathcal{F}} + \|x\|_{\mathcal{F}},$$

где функции f_n , $n \in \mathbb{N}$, задаются формулой (8). Отметим, что все пространства $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{N}$, также являются однородными.

Определение 13. Линейное подпространство $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ называется *гармоничным пространством распределений*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для любого распределения Φ из $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ найдется такая функция φ из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, что $\Phi = (D + I)^n \varphi$ и $\|\Phi\| = \|\varphi\|$. При этом для пространства $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ будем использовать обозначение $\mathcal{F}^{(-n)}(\mathbb{R}, X)$ и говорить, что пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ *соответствует однородному пространству функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$* .

Такое определение гармоничного пространства распределений было введено в работе [12], посвященной медленно меняющимся и периодическим на бесконечности распределениям.

Заметим, что в определении 13 функция φ представима в виде $\varphi = f_n * \Phi$, где функция f_n из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой (8).

Под пространством $\mathcal{F}^{(0)}(\mathbb{R}, X)$ будем понимать само однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$. Тогда каждому однородному пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ можно поставить в соответствие счетное множество пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Из определения 13 вытекает, что любое из этих пространств можно рассматривать как гармоничное пространство распределений.

В каждом из пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассмотрим операторы

$$\mathbb{D}_n^m : D(\mathbb{D}_n^m) \subset \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}^{(n-m)}(\mathbb{R}, X), \quad \mathbb{D}_n^m = (D + I)^m, \quad (9)$$

$$\mathbb{D}_n^{-m} : D(\mathbb{D}_n^{-m}) \subset \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}^{(n+m)}(\mathbb{R}, X), \quad \mathbb{D}_n^{-m} \Phi = f_m * \Phi, \quad \Phi \in \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X), \quad (10)$$

где $m \in \mathbb{N}$ и функция f_m из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой (8).

Когда ясно, о каком именно пространстве идет речь, вместо обозначения \mathbb{D}_n^m будем использовать более короткое обозначение \mathbb{D}^m , $m \in \mathbb{Z}$. При этом под оператором \mathbb{D}_n^0 будем понимать тождественный оператор I , действующий в соответствующем пространстве $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Следует отметить, что операторы \mathbb{D}^m , $m \in \mathbb{Z}$, обладают свойством $\mathbb{D}^m \mathbb{D}^{-m} = I$.

Кроме того, в каждом из пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассмотрим оператор

$$\mathbb{S}_n(f) : \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$$

свертки распределения Φ из $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$ с функцией f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, задаваемый формулой

$$\mathbb{S}_n(f)\Phi = f * \Phi.$$

При $n = 0$ вместо $\mathbb{S}_0(f)$ будем писать просто $\mathbb{S}(f)$.

Далее символом $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать одно из пространств функций или распределений $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассматриваемое как гармоничное пространство распределений.

Теорема 4. Любое гармоничное пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ изометрически изоморфно соответствующему однородному пространству функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Утверждение теоремы 4 следует непосредственно из определения 13. При этом изометрию осуществляет оператор \mathbb{D}^n для соответствующего $n \in \mathbb{Z}$, определяемый одной из формул (9) или (10).

Из теоремы 4 следует, что каждое гармоничное пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ образует банахов $L^1(\mathbb{R})$ -модуль, в котором действует группа S сдвигов вида (6) и модульная структура задается формулой (7), в которой распределение F принадлежит соответствующему гармоничному пространству распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$.

Гармоничным пространством распределений является, например, банахово пространство $M(\mathbb{R}, X)$ векторных (со значениями в X) борелевских мер ограниченной вариации на \mathbb{R} со сверткой мер в качестве умножения.

5.2. *Определения медленно меняющегося и почти периодического на бесконечности распределений.* Теперь введем понятия медленно меняющегося и почти периодического на бесконечности распределений из гармоничного пространства распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$. В соответствии с определением 13 можно положить $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) = \mathcal{F}^{(-n)}(\mathbb{R}, X)$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

Для пространства $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ подпространства $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ и $\mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X) &= \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) : \Phi = \mathbb{D}^n y, y \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)\}, \\ \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X) &= \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) : \Phi = \mathbb{D}^n y, y \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)\}.\end{aligned}$$

Определение 14. Распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющимся на бесконечности*, если

$$S(\alpha)\Phi - \Phi \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X) \quad \text{для всех } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Множество медленно меняющихся на бесконечности распределений обозначим $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

На основании определения 8 с использованием теоремы 4 дадим определение почти периодического на бесконечности гармоничного распределения.

Определение 15. Распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодическим на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ и медленно меняющиеся на бесконечности распределения $\Phi_1, \dots, \Phi_m \in \mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, что

$$\left\| \Phi - \sum_{k=1}^m \Phi_k e_k \right\| < \varepsilon,$$

где функции e_k , $1 \leq k \leq m$, имеют вид $e_k(t) = e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$. Множество почти периодических на бесконечности распределений обозначим символом $AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$.

Непосредственно из определений 14 и 15 следует, что $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и $AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ образуют линейные замкнутые подпространства из $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$, инвариантные относительно группы сдвигов S .

Из теоремы 4 вытекают следующие две леммы.

Лемма 2. *Пространства $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ изоморфны, то есть распределение $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ является медленно меняющимся на бесконечности тогда и только тогда, когда функция $y = \mathbb{D}^{-n}\Phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является медленно меняющейся на бесконечности.*

Лемма 3. *Пространства $AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ и $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ изоморфны, то есть распределение $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ является почти периодическим на бесконечности тогда и только тогда, когда функция $y = \mathbb{D}^{-n}\Phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является почти периодической на бесконечности.*

Тогда пространствам $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и $AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ можно дать следующие эквивалентные определения:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) &= \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) : \Phi = \mathbb{D}^n y, y \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)\}, \\ AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) &= \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) : \Phi = \mathbb{D}^n y, y \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)\}.\end{aligned}$$

Таким образом, все результаты, справедливые для медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств, справедливы также и для медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности гармоничных распределений соответственно.

В [12] изучались свойства медленно меняющихся и периодических на бесконечности распределений. В ней получена следующая теорема.

Теорема 5 (см. [12]). *Пространство $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обладает следующими свойствами:*

- (3) для того, чтобы распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежало пространству $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * \Phi \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 0$;
- (3) для того, чтобы распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежало пространству $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * \Phi - \Phi \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 1$;
- (3) если распределение Φ принадлежит пространству $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, то $\Lambda(\Phi) \setminus \{0\} \subset \Lambda_c(\Phi)$ и $\Lambda_{ess}(\Phi) \subset \{0\}$.

Вернемся теперь к рассмотрению почти периодических на бесконечности распределений. Другие определения таких распределений строятся аналогично соответствующим определениям для функций из однородных пространств. В частности, приведем определение, основанное на понятии ε -периода на бесконечности. Это определение соответствует второму определению почти периодической на бесконечности функции, приведенному в данной статье (см. определение 11).

Определение 16. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется ε -периодом на бесконечности распределения $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$, если существует такое распределение $\Phi_0 \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$, что

$$\|S(\omega)\Phi - \Phi - \Phi_0\| < \varepsilon.$$

Множество ε -периодов на бесконечности распределения $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим $\Omega_\infty(\varepsilon, \Phi)$.

Определение 17. Распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодическим на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(\varepsilon, \Phi)$ ее ε -периодов на бесконечности относительно плотно на \mathbb{R} .

Из леммы 3 следует, что так же, как и для функций из однородных пространств, приведенные определения почти периодических на бесконечности гармоничных распределений эквивалентны.

Таким образом, для медленно меняющихся и периодических на бесконечности распределений из гармоничных пространств справедливы результаты, аналогичные полученным для медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций из однородных пространств. В частности, это позволяет строить ряды Фурье почти периодических на бесконечности распределений из гармоничных пространств и изучать их свойства.

5.3. Ряд Фурье почти периодического на бесконечности распределения. Рассмотрим функции e_k , $k \in \mathbb{J}_d$, где $\mathbb{J}_d \subset \mathbb{Z}$ (см. формулу (3)), вида $e_k(t) = e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 18. *Рядом Фурье* распределения $\Phi \in AP_\infty\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{k \in \mathbb{J}_d} \Phi_k e_k,$$

где Φ_k , $k \in \mathbb{J}_d$, — такие распределения из $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$, что функции $y_k = \mathbb{D}^{-n}\Phi_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ являются коэффициентами Фурье функции $y = \mathbb{D}^{-n}\Phi \in AP_\infty\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ (см. определение 12). Такие распределения Φ_k , $k \in \mathbb{Z}$, будем называть *коэффициентами Фурье* распределения Φ .

Так же, как и для функций из $AP_\infty\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, отметим неединственность ряда Фурье распределения $\Phi \in AP_\infty\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$.

Из теорем 3 и 4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. *Коэффициенты любого ряда Фурье распределения $\Phi \in AP_\infty\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ принадлежат пространству $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и удовлетворяют условию*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi_k\|_{\mathbb{F}} = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов. — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2016.
2. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве// *Мат. заметки.* — 2015. — 97, № 2. — С. 174–190.
3. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений// *Усп. мат. наук.* — 2013. — 68, № 1. — С. 77–128.
4. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов// *Совр. мат. Фундам. направл.* — 2004. — 9. — С. 3–151.
5. *Баскаков А. Г.* Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений// *Мат. заметки.* — 1978. — 24, № 2. — С. 195–206.
6. *Баскаков А. Г.* Некоторые вопросы теории векторных почти периодических функций/ *Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук* — Воронеж: ВГУ, 1973.
7. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства// *Изв. РАН. Сер. мат.* — 2005. — 69, № 3. — С. 3–54.
8. *Баскаков А. Г., Струкова И. И., Тришина И. А.* Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами// *Сиб. мат. ж.* — 2018. — 59, № 2. — С. 293–308.
9. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
10. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: МГУ, 1978.
11. *Росс К., Хьюитт Э.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. — М.: Мир, 1975.
12. *Струков В. Е., Струкова И. И.* О медленно меняющихся и периодических на бесконечности функциях из однородных пространств и гармоничных распределениях// *Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат.* — 2018. — № 4. — С. 195–205.
13. *Струков В. Е., Струкова И. И.* О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства// *Науч. вед. БелГУ. Сер. Мат. Физ.* — 2018. — 50, № 3. — С. 254–264.
14. *Струкова И. И.* Гармонический анализ периодических на бесконечности функций в однородных пространствах// *Вестн. ВолГУ. Сер. 1. Мат. Физ.* — 2017. — № 2 (39). — С. 29–38.
15. *Струкова И. И.* О теореме Винера для периодических на бесконечности функций// *Сиб. мат. ж.* — 2016. — 57, № 1. — С. 186–198.
16. *Струкова И. И.* Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы// *Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат.* — 2015. — № 3. — С. 161–165.
17. *Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. — Basel: Birkhäuser, 2011.
18. *Baskakov A. G., Krishtal I. A.* Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces// *Mediterr. J. Math.* — 2016. — 13, № 5. — P. 2443–2462.
19. *Baskakov A., Strukova I.* Harmonic analysis of functions periodic at infinity// *Eurasian Math. J.* — 2016. — 7, № 4. — P. 9–29.

Струков Виктор Евгеньевич
Воронежский государственный университет
E-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com



ОРТОРЕКУРСИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

© 2019 г. В. В. ГАЛАТЕНКО, Т. П. ЛУКАШЕНКО, В. А. САДОВНИЧИЙ

Аннотация. Статья посвящена введенным в 1999 г. орторекурсивным разложениям — обобщениям ортогональных разложений. В ней изложены полученные за 20 лет основные результаты о свойствах орторекурсивных разложений и указаны некоторые направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: орторекурсивное разложение, ортогональная система, фрейм, разложение, сходимость.

ORTHORECURSIVE DECOMPOSITIONS AND THEIR PROPERTIES

© 2019 V. V. GALATENKO, T. P. LUKASHENKO, V. A. SADOVNICHII

ABSTRACT. This paper is devoted to orthorecursive decompositions introduced in 1999, which generalize the notion of orthogonal decompositions. We present main results obtained over the last 20 years about properties of orthorecursive decompositions and indicate some areas for further research.

Keywords and phrases: orthorecursive decomposition, orthogonal system, frame, decomposition, convergence.

AMS Subject Classification: 06D22, 43Axx

Понятие орторекурсивного разложения было введено Т. П. Лукашенко в 1999 г. на симпозиуме по рядам Фурье (см. [22]) и на конференции по теории функций (см. [23]); подробная публикация [24] вышла в 2001 г. Приведем определение.

Пусть H — гильбертово пространство над полем \mathbb{R} или \mathbb{C} , а $\{e_k\}$ — конечная или счетная система ненулевых элементов H , последовательно занумерованная натуральными числами $1, \dots, K$ или всеми натуральными числами.

Определение 1. Орторекурсивное разложение (ОРР) элемента $f \in H$ по последовательности элементов $\{e_k\}$ осуществляется следующим образом:

- (1) положим $r_0 = f$;
- (2) если задан остаток приближения $r_{n-1} \in H$, $n \in \mathbb{N}$, и элемент e_n , то полагаем

$$\hat{f}_n = (r_{n-1}, e_n) \|e_{n+1}\|^{-2}, \quad r_n = r_{n-1} - \hat{f}_n e_n. \quad (1)$$

Назовем \hat{f}_k рекурсивными коэффициентами Фурье элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}$, а ряд $\sum_k \hat{f}_k e_k$ — рекурсивным рядом Фурье элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}$.

Легко видеть, что

$$r_n(f) = f - \sum_{k \leq n} \hat{f}_k e_k$$

и для ортогональной системы функций $\{e_k\}$ рекурсивные коэффициенты Фурье являются обычными коэффициентами Фурье, а рекурсивный ряд Фурье — обычным рядом Фурье. Из (1) следует

равенство Пифагора

$$\|r_{n-1}\|^2 = \|r_n\|^2 + |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2. \quad (2)$$

Вариантом равенства (2) является следующее равенство. Если остатки приближения $r_n(f)$ и $r_n(g)$ элементов f и g соответственно получаются на n -м шагу из остатков приближения $r_{n-1}(f)$ и $r_{n-1}(g)$ с использованием одного и того же элемента e_n , то

$$(r_{n-1}(f), r_{n-1}(f)) = (r_n(f), r_n(g)) + \hat{f}_n \overline{\hat{g}_n} \|e_n\|^2, \quad (3)$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Суммируя по n равенство (2), получим аналог тождества Бесселя

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^N |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2 + \|r_N(f)\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{n=1}^N |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2, \quad (4)$$

а суммируя по n равенство (3), получим его вариант

$$(f, g) = \sum_{n=1}^N \hat{f}_n \overline{\hat{g}_n} \|e_n\|^2 + (r_N(f), r_N(g)). \quad (5)$$

Из (4) следует аналог неравенства Бесселя

$$\|f\|^2 \geq \sum_n |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2$$

и утверждение, что равенство

$$f = \sum_n \hat{f}_n e_n$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполняется аналог равенства Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_n |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2.$$

Из (5) следует верность следующего аналога равенства Парсеваля: если

$$f = \sum_n \hat{f}_n e_n \quad \text{или} \quad g = \sum_n \hat{g}_n e_n,$$

то

$$(f, g) = \sum_n \hat{f}_n \overline{\hat{g}_n} \|e_n\|^2.$$

Отметим, что возможны две существенно различающиеся схемы орторекурсивных разложений.

1. Можно после получения остатка r_{n-1} выбирать следующий элемент e_n в зависимости от достигнутого результата (т.е. в зависимости от предыдущих шагов и остатка r_{m-1}). Этот подход реализован в появившихся раньше так называемых жадных алгоритмах (greedy algorithms; см., например, [?]).
2. Можно фиксировать систему элементов $\{e_n\}$ и их порядок для всего процесса разложения.

В первой схеме имеется возможность оптимизации (в различных смыслах) процесса разложения, но отсутствует линейность разложения. Вторая схема привлекательна линейностью разложения и отсутствием усложняющего разложение алгоритма оптимизации (выбора следующего элемента). Далее в статье рассматриваются относящиеся только к этой схеме результаты.

В конце XX в. большой интерес вызвали всплески (вейвлеты) — системы функций, порождаемые сжатиями и сдвигами одной функции. Такие системы являются удобным аппаратом как в теоретических, так и особенно в прикладных исследованиях при цифровой обработке сигналов (см. [1, 10, 39, 41, 52, 54, 59]).

Пусть φ — действительно- или комплекснозначная функций на вещественной прямой из пространства Лебега $L^2(\mathbb{R})$. Функции

$$\varphi_{k,l}(x) = 2^{k/2} \varphi(2^k x - l), \quad k, l \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R},$$

— система всплесков, порожденная функцией φ .

Обычно стараются добиться, чтобы это была ортогональная система (или фрейм), при этом порождающая функция часто задается сложным выражением (например, всплески Добеши, Мейера и др.). При орторекурсивном разложении такого требования нет, и порождающая функция может быть выбрана достаточно произвольно. А. Ю. Кудрявцев исследовал условия, при которых орторекурсивное разложение сходится к разлагаемой функции (см. [12–21]). Приведем два его результата.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$(0) \int_0^1 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\varphi(x+m)| \right)^2 dx < \infty;$$

$$(1) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \neq 0;$$

(2) существует такая невозрастающая на промежутке $[0, +\infty)$ функция $F(w)$, что

$$|\varphi(w)| \leq F(|w|) \quad \forall w \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{\infty} F^2(w) \ln(1+w) dw < \infty.$$

Тогда найдется такая последовательность целых неотрицательных чисел $L = \{L_k\}_{k=0}^{+\infty}$, что система $\Phi_+(L) = \{\varphi_{k,l} : k \geq 0, |l| \leq L_k\}$, а также любая ее подсистема, содержащая бесконечное число пачек (по k), является безусловной относительно перестановок пачек орторекурсивной системой разложения в $L^2(\mathbb{R})$.

Им также указано, какими в зависимости от модуля непрерывности, можно брать числа L_k . Следующая теорема показывает, что без ограничений на функцию φ орторекурсивное разложение может расходиться.

Теорема 2. Существует такая функция $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ с ортогональными целочисленными сдвигами, преобразование Фурье которой удовлетворяет условию $\inf_{|w| < 1/2} |\hat{\varphi}(w)| > 0$, что орторекурсивное разложение некоторой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ по системе $\Phi_+ = \{\varphi_{k,l} : k \geq 0, l \in \mathbb{Z}\}$ расходится в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

А. Ю. Кудрявцев также показал, что для любой функции φ можно выбрать подпоследовательность пачек так, что орторекурсивное разложение любой функции из $L^2(\mathbb{R})$ будет сходиться к ней. Он же получил оценки скорости сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам.

А. В. Политов в других терминах изучал сходимость по системе всплесков, порожденных функцией φ (см. [42–50]).

Теорема 3. Пусть

$$\varphi \in L^2[0, 1), \quad \int_0^1 \varphi(x) dx \neq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} w_2^2(\varphi, 2^{-k}) < \infty,$$

где $w_2(\varphi, \delta)$ — интегральный модуль непрерывности в $L^2[0, 1)$. Тогда для любого элемента из $L^2[0, 1)$ орторекурсивное разложение этого элемента по системе двоичных сжатий и сдвигов функции φ сходится к нему.

Для действительного гильбертова пространства А. В. Политов установил критерий сходимости орторекурсивных разложений в терминах матрицы Грама. Пусть $\mathcal{E} = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — счетная нормированная система элементов гильбертова пространства H . Обозначим через G матрицу Грама системы \mathcal{E} , т.е. матрицу, состоящую из скалярных произведений $g_{i,j} = (e_i, e_j)$, а через Q — треугольную матрицу, у которой элементы, лежащие не выше главной диагонали, совпадают с элементами G , а остальные равны нулю. Для произвольного $e_n \in \mathcal{E}$ рассмотрим его орторекурсивный

ряд по системе \mathcal{E} , который имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} e_k$, где $c_{n,k} = (\widehat{e_n})_k$. Матрицу, состоящую из чисел $c_{n,k}$, обозначим C .

Теорема 4. Пусть замыкание линейной оболочки системы \mathcal{E} совпадает с H . Следующие утверждения эквивалентны.

- (1) Орторекурсивное разложение любого элемента $f \in H$ по системе \mathcal{E} сходится к f ;
- (2) выполнена система условий:
 - (a) $G(Q^{-1}G) = G$,
 - (b) $(CH)C^T = C(HC^T)$, где C^T — транспонированная матрица C .

Другой класс систем, по которым изучались орторекурсивные разложения, — характеристические функции некоторых множеств. Так, в [23, 24] рассматривалась система $\Xi = \{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ конечных невырожденных промежутков, принадлежащих промежутку $I \subset \mathbb{R}$, χ_k — характеристическая функция Δ_k , $k \in \mathbb{N}$. Доказана следующая теорема.

Теорема 5. Пусть промежутки системы $\Xi = \{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ покрывают I в смысле Витали (т.е. для любых $x \in I$ и $\varepsilon > 0$ найдется такой промежуток $\Delta_k \ni x$, что его длина $|\Delta_k| < \varepsilon$) и если $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$ и $i < j$, то $\Delta_i \supset \Delta_j$. Тогда для любой функции f , интегрируемой в смысле Лебега (или даже Данжуа—Перрона (Курцвейля—Хенстока), см. [38, 40, 51]) на всех промежутках Δ_k системы Ξ , частичная сумма орторекурсивного ряда Фурье $\sum_k \hat{f}_k \chi_k$ по системе $\{\chi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (коэффициенты \hat{f}_k по системе функций $\{\chi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ вычисляются так же, как в определении 1) имеет вид

$$S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если не существует } \Delta_i \ni x, i \leq n, \\ \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} f dx, & \text{где } \Delta \text{ — последний из } \Delta_i \ni x, i \leq n, \end{cases}$$

и выполняется оценка $\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)| \leq f^m(x)$, где $f^m(x)$ — точная верхняя грань $\left| \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} f dx \right|$ по всем отрезкам Δ ($x \in \Delta \subset I$), слабая максимальная функция Харди—Литтлвуда. При этом реккурсивный ряд Фурье f сходится к f во всех точках, где производная неопределенного интеграла равна f , т.е. почти всюду.

Кроме того, справедливы следующие утверждения.

- (1) Для любой функции $f \in L^p(I)$, $1 < p < \infty$, реккурсивный ряд Фурье f по системе $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f по метрике пространства Лебега $L^p(I)$.
- (2) Если система $\Xi = \{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ покрывает промежуток I в смысле Витали так, что для любых $x \in I$ и $\varepsilon > 0$ найдется один или два промежутка длины $< \varepsilon$, покрывающие точку x вместе с некоторой ее окрестностью в I , то для любой непрерывной на I функции f ее реккурсивный ряд Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно на любом компакте из I .
- (3) Пусть $\Xi_n = \{\Delta_k \in \Xi : k \leq n, \Delta_k \setminus \bigcup_{i=k+1}^n \Delta_i \neq \emptyset\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Если найдется такое $M > 0$, что для любой точки $x \in I$ и любого натурального n число всех промежутков $\Delta_k \in \Xi_n$, содержащих точку x , не более, чем M , то для любой функции $f \in L(I)$ реккурсивный ряд Фурье f по системе $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f по метрике пространства Лебега $L(I)$.

Часть приведенных утверждений обобщена на функции многих переменных в [35, 53].

Удобства использования орторекурсивных разложений можно показать в сравнении разложений по классической системе Хаара, являющейся простейшим примером ортогональных всплесков, и орторекурсивных разложений по системе характеристических функций двоичных отрезков.

Система Хаара обычно определяется на отрезке $[0, 1]$ и состоит из следующих функций (см. [11]).

Определение 2. Система Хаара — это система функций $X = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, в которой $\chi_1(x) = \chi_0^0(x) \equiv 1$, а функция $\chi_n(x)$ при $n = 2^k + i$, $1 \leq i \leq 2^k$, $k = 0, 1, \dots$, определяется

следующим образом:

$$\chi_n(x) = \chi_k^i(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin [(i-1)2^{-k}, i2^{-k}], \\ 2^{k/2} & \text{при } x \in ((i-1)2^{-k}, (2i-1)2^{-k-1}), \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in ((2i-1)2^{-k-1}, i2^{-k}). \end{cases}$$

В концах отрезка $[0, 1]$ функции Хаара непрерывны, а в точках разрыва регулярны, т.е. равны среднему арифметическому пределов слева и справа.

Система Хаара — полная ортонормированная система (см. [11]). Все функции Хаара $\chi_n(x)$, $n > 2$, получаются двоичными сжатиями и сдвигами функции $\chi_2(x)$.

Теперь определим на отрезке $[0, 1]$ другую неортонормальную систему нормированных функций.

Определение 3. Система функций $\Lambda = \{\lambda_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, состоит из функции $\lambda_1(x) = \chi_1(x) \equiv 1$, а функции $\lambda_{2n-2}(x)$ и $\lambda_{2n-1}(x)$ при $n = 2^k + i$, $1 \leq i \leq 2^k$, $k = 0, 1, \dots$, определяются следующим образом:

$$\lambda_{2n-2}(x) = \sqrt{2}\chi_n^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin [(i-1)2^{-k}, (2i-1)2^{-k-1}], \\ 2^{(k+1)/2} & \text{при } x \in ((i-1)2^{-k}, (2i-1)2^{-k-1}), \end{cases}$$

$$\lambda_{2n-1}(x) = \sqrt{2}\chi_n^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin [(2i-1)2^{-k-1}, i2^{-k}], \\ 2^{(k+1)/2} & \text{при } x \in ((2i-1)2^{-k-1}, i2^{-k}). \end{cases}$$

Пусть в концах отрезка $[0, 1]$ функции $\lambda_{2n-2}(x)$ и $\lambda_{2n-1}(x)$ непрерывны, а в точках разрыва регулярны, т.е. равны среднему арифметическому пределов слева и справа. Они являются с коэффициентом $\sqrt{2}$ положительной и отрицательной частью функции Хаара $\chi_n(x)$ (кроме точки $(2i-1)2^{-k-1}$), $\chi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_{2n-2}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_{2n-1}(x)$, $n > 1$, $x \in [0, 1]$.

Из вида частичных сумм $S_N^X(f, x)$ и $S_N^\Lambda(f, x)$ рядов Фурье по системе X Хаара (см. [11]) и вида частичных сумм орторекурсивного ряда Фурье по системе Λ (см. теорему 5), следует, что

$$S_N^X(f, x) \equiv S_{2N-1}^\Lambda(f, x)$$

для любого $N \in \mathbb{N}$. Легко также проверить (например, используя указанное равенство частичных сумм), что коэффициенты Фурье орторекурсивного разложения \hat{f}_n^Λ связаны с коэффициентами Фурье—Хаара \hat{f}_n^X и между собой следующим образом:

$$\hat{f}_1^\Lambda = \hat{f}_1^X, \quad \hat{f}_{2n-2}^\Lambda = -\hat{f}_{2n-1}^\Lambda = \sqrt{2}\hat{f}_n^X, \quad n > 1; \quad \hat{f}_n^\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{f}_{2n-1}^\Lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{f}_{2n}^\Lambda, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Верен и более общий факт, при заменах каких-либо функций Хаара парой соответствующих функций системы Λ получится система функций, частичные суммы орторекурсивного разложения, в которые функции этих пар одновременно входят или не входят, имеют тот же вид, что и частичные суммы ряда Фурье по системе Хаара (см. [4, 37]), где этот факт установлен для систем функций, среди которых имеется и система Хаара.

Особенностью орторекурсивных разложений по переполненным системам является возможность коррекции погрешностей, возникающих при вычислении коэффициентов разложения. Такая возможность отсутствует при разложении в ряды Фурье по ортогональным системам. Так при удалении из системы Λ любого конечного числа функций частичные суммы по уменьшенной системе по теореме 5 начиная с некоторого номера будут иметь тот же вид, что и по самой системе Λ . Тот же факт будет верен и при совершении любого конечного числа ошибок в вычислении коэффициентов орторекурсивных разложений. Случай с бесконечным числом ошибок был изучен В. В. Галатенко (см. [2, 55]).

Оказывается, что для нормированных систем, орторекурсивные разложения по которым абсолютно устойчивы к любому конечному числу ошибок, в случае таких относительных ошибок $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $|\varepsilon_n| \leq q < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$, орторекурсивное разложение с ошибками всегда сходится к разлагаемому элементу.

Изучалась сходимость почти всюду орторекурсивных разложений в терминах множителей Вейля (см. [5, 6, 56]) Напомним определение.

Определение 4. Неубывающая числовая последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [1, \infty)$ называется *множителем Вейля* сходимости почти всюду орторекурсивного разложения по последовательности $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$, если из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\hat{f}_n|^2$ следует сходимость почти всюду орторекурсивного разложения функции $f: \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n(x)$.

Условием на числовую последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, необходимым и достаточным для того, чтобы эта последовательность была множителем Вейля сходимости почти всюду орторекурсивного разложения по каждой нормированной системе, является сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}.$$

Это условие может быть существенно ослаблено, если ограничиться рассмотрением орторекурсивных разложений, сходящихся по норме к разлагаемой функции (что имеет место, в частности, для полных ортонормированных систем). Более конкретно, верна следующая теорема.

Теорема 6. Если орторекурсивное разложение функции $f(x) \in L^2(\Omega)$ по последовательности нормированных функций $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ в $L^2(\Omega)$ и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} |\hat{f}_n|^2,$$

то орторекурсивное разложение $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на Ω .

Таким образом, для орторекурсивных разложений, сходящихся по норме к разлагаемой функции, множителем Вейля является последовательность $\lambda_n = \sqrt{n}$.

Заметим, что для ортогональных разложений этот результат был получен А. Вейлем в 1909 г. Он неоднократно улучшался. Наилучший для всех ортонормированных систем результат о том, что последовательность $\lambda_n = \ln^2(1+n)$ является множителем Вейля, был получен Д. Е. Миньшовым и Г. Радемахером в 1922–1923 гг. (см. [11, гл. 9, § 1]).

Ранее уже отмечалось, что для нормированных систем, орторекурсивные разложения по которым абсолютно устойчивы к любому конечному числу ошибок, в случае таких относительных ошибок $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $|\varepsilon_n| \leq q < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$, орторекурсивное разложение с ошибками всегда сходится по норме к разлагаемому элементу. Для таких орторекурсивных разложений с ошибками верна также следующая теорема (см. [7]).

Теорема 7. Пусть система нормированных функций $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что орторекурсивное разложение по ним абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок. Пусть орторекурсивное разложение функции $f(x) \in L^2(\Omega)$ совершено с такими относительными ошибками $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $|\varepsilon_n| \leq q < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} |\hat{f}_n^{\text{err}}|^2,$$

то такое орторекурсивное разложение $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n^{\text{err}} e_n(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на Ω .

В [8, 9, 57] изложены результаты о сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по системам специального вида.

Изучались орторекурсивные разложения Фурье—Стилтьеса (см. [30, 33, 34]), рекурсивные разложения мер (см. [25–29, 31, 32]). Обобщения орторекурсивных разложений в терминах операторов и систем элементов рассматривались А. Ю. Кудрявцевым, А. В. Политовым, В. В. Галатенко, Т. П. Лукашенко и В. А. Садовничим (см. [4, 19, 20, 36, 37, 46, 49]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. — М.: Техносфера, 2004–2008.
2. *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов// Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — 69, № 1. — С. 3–16.
3. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Критерий совпадения орторекурсивных разложений по последовательностям подпространств// Воронеж. зимняя мат. школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2013). — Воронеж: ВГУ, 2013. — С. 47–50.
4. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Орторекурсивные разложения// в кн.: Современные проблемы математики и механики/ К 80-летию мех.-мат. ф-та МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: Изд-во МГУ, 2014. — С. 13–25.
5. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О сходимости орторекурсивных разложений почти всюду// 18 Междунар. Саратов. зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 27 января — 3 февраля 2016). — Саратов: Научная книга, 2016. — С. 105–110.
6. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О множителях Вейля сходимости почти всюду орторекурсивных разложений// IX Междунар. симп. «Ряды Фурье и их приложения» (Ростов-на-Дону, 27 мая — 3 июня 2014). — Ростов-на-Дону, 2016. — С. 4–8.
7. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О множителях Вейля орторекурсивных разложений с ошибками в вычислении коэффициентов// Воронежская зимняя мат. школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 26 января — 1 февраля 2017). — Воронеж: ВГУ, 2017. — С. 77–79.
8. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по системам сжатий и сдвигов// 13 Междунар. Казанск. летняя школа-конф. «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 21–27 августа 2017). — Казань: Мат. центр им. Н. И. Лобачевского, 2017. — 54. — С. 99–101.
9. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Сходимость почти всюду орторекурсивных разложений по функциональным системам специального вида// 19 Междунар. Саратов. зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», посв. 90-летию со дня рождения акад. П. Л. Ульянова (Саратов, 29 января — 2 февраля 2018). — Саратов: Научная книга, 2018. — С. 101–104.
10. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. — М.—Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
11. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. — М.: АФЦ, 1999.
12. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов// Междунар. школа-семинар по геом. и анализу, посв. 90-летию Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 2000). — Ростов-на-Дону, 2000. — С. 127–129.
13. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции// Воронеж. зимняя мат. школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (27 января — 4 февраля 2001). — Воронеж: ВГУ, 2001. — С. 161–162.
14. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции// Междунар. школа-семинар по геом. и анализу, посв. памяти Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 2002). — Ростов-на-Дону, 2002. — С. 133–135.
15. *Кудрявцев А. Ю., Лукашенко Т. П.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов// II Междунар. конф. «Оптимизация конечно-элементных приближений, сплайны и всплески» (СПб., 25–29 июня 2001). — СПб.: НИИХ СПбГУ, 2001. — С. 141–143.
16. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов// 11 Саратов. зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», посв. памяти Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова (Саратов, 28 января — 4 февраля 2002). — Саратов: СГУ, 2002. — С. 106–108.
17. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам неортогональных всплесков// Воронеж. зимняя мат. школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 26 января — 2 февраля 2003). — Воронеж: ВГУ, 2003. — С. 137–138.
18. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по неортогональным всплескам// Воронеж. зимняя мат. школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2011). — Воронеж: ВГУ, 2011. — С. 189–191.
19. *Кудрявцев А. Ю.* О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам// Мат. заметки. — 2012. — 92, № 5. — С. 707–720.
20. *Кудрявцев А. Ю.* О скорости сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам// Изв. РАН. Сер. мат. — 2012. — 76, № 4. — С. 49–64.

21. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по неортогональным всплескам/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, 2013.
22. *Лукашенко Т. П.* Рекурсивные разложения, подобные ортогональным// VII Междунар. конф. «Ряды Фурье и их приложения» (Ростов-на-Дону, 26 мая — 1 июня 1999). — Ростов-на-Дону: РГЭА, 1999. — С. 331.
23. *Лукашенко Т. П.* Об орторекурсивных разложениях по характеристическим функциям промежуточных// Школа-конф. «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», посв. 130-летию со дня рожд. Д. Ф. Егорова. — Казань: Казанск. мат. об-во, 1999. — С. 142–143.
24. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 6–10.
25. *Лукашенко Т. П.* О рекурсивных разложениях функций и мер// 15 Саратов. зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», посв. 125-летию со дня рождения В. В. Голубева и 100-летию СГУ (Саратов, 27 января — 3 февраля 2010). — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. — С. 102–105.
26. *Лукашенко Т. П.* О рекурсивных разложениях мер// Междунар. науч. конф. «Современные проблемы анализа и преподавания математики», посв. 105-летию акад. С. М. Никольского (Москва, 17–19 мая 2010). — М., 2010. — С. 27.
27. *Лукашенко Т. П.* Рекурсивные разложения мер// VI Междунар. симп. «Ряды Фурье и их приложения» (Ростов-на-Дону, 28 мая — 1 июня 2010). — Ростов-на-Дону, 2010. — С. 19.
28. *Лукашенко Т. П.* Рекурсивные разложения мер// Междунар. конф. «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников», посв. 100-летию со дня рожд. Н. В. Ефимова (Москва, 18–21 августа 2010). — М.: Макс Пресс, 2010. — С. 89.
29. *Лукашенко Т. П.* О сходимости рекурсивных разложений мер// Воронеж. зимняя мат. школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2011). — Воронеж: ВГУ, 2011. — С. 203–204.
30. *Лукашенко Т. П.* Рекурсивные разложения Фурье—Стилтьеса// 10 Междунар. Казанск. летняя науч. школа-конф. «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 1–7 июля 2011), 2011. — 43. — С. 233–238.
31. *Лукашенко Т. П.* О свойствах рекурсивных разложений мер// в кн.: Современные проблемы математики и механики/ К 100-летию со дня рожд. Н. В. Ефимова. — М.: Изд-во МГУ, 2011. — С. 90–96.
32. *Лукашенко Т. П.* О рекурсивных разложениях мер// Мат. заметки. — 2012. — 91, № 5. — С. 720–729.
33. *Лукашенко Т. П.* Рекурсивные ряды Фурье—Стилтьеса// 16 Саратов. зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 27 января — 3 февраля 2012). — Саратов: Научная книга, 2012. — С. 108–109.
34. *Лукашенко Т. П.* Орторекурсивные разложения Фурье—Стилтьеса// Тр. Мат. ин-та РАН им. В. А. Стеклова. — 2013. — 280. — С. 1–7.
35. *Лукашенко Т. П., Белоусов К. В.* О некоторых свойствах орторекурсивных разложений функций многих переменных по системе характеристических функций брусков// в кн.: Современные проблемы математики и механики/ К 105-летию С. М. Никольского. — М.: Изд-во МГУ, 2011. — С. 52–60.
36. *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О рекурсивных разложениях по цепочке систем// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 6. — С. 741–746.
37. *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Орторекурсивные разложения по подпространствам// Докл. РАН. — 2012. — 445, № 2. — С. 135–138.
38. *Лукашенко Т. П., Скворцов В. А., Солодов А. П.* Обобщенные интегралы. — М.: Либроком, 2009.
39. *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов. — М.: Мир, 2005.
40. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — СПб.: Лань, 1999.
41. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2005.
42. *Политов А. В.* Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах// 14 Саратов. зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», посв. памяти акад. П. Л. Ульянова (Саратов, 28 января — 4 февраля 2008). — Саратов: СГУ, 2008. — С. 146–147.
43. *Политов А. В.* Орторекурсивные разложения по системе сжатий и сдвигов нескольких функций// Воронеж. зимняя мат. школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2009). — Воронеж: ВГУ, 2009. — С. 144–145.
44. *Политов А. В.* Орторекурсивные разложения по системе сжатий и сдвигов нескольких функций// Междунар. конф. «Современные проблемы математики, механики и их приложения», посв. 70-летию

- ректора МГУ акад. В. А. Садовниченко. — М.: Университетская книга, 2009. — С. 89–90.
45. *Политов А. В.* Критерий сходимости орторекурсивных разложений в гильбертовых пространствах// 15 Саратов. зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», посв. 125-летию со дня рожд. В. В. Голубева и 100-летию СГУ (Саратов, 27 января — 3 февраля 2010). — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. — С. 141–142.
 46. *Политов А. В.* Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., Мех. — 2010. — № 3. — С. 3–7.
 47. *Политов А. В.* Критерий сходимости орторекурсивных разложений в гильбертовых пространствах// Воронеж. зимняя мат. школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2011). — Воронеж: ВГУ, 2011. — С. 268–269.
 48. *Политов А. В.* Достаточные условия сходимости орторекурсивных разложений на квадрате// 16 Саратов. зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 27 января — 3 февраля 2012). — Саратов: Научная книга, 2012. — С. 135.
 49. *Политов А. В.* Критерий сходимости орторекурсивных разложений в евклидовых пространствах// Мат. заметки. — 2013. — 93, № 4. — С. 637–640.
 50. *Политов А. В.* Условия сходимости орторекурсивных разложений в гильбертовых пространствах/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2013.
 51. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949.
 52. *Фрейзер М.* Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры. — М.: БИНОМ—Лаборатория знаний, 2008.
 53. *Фуфаев Д. В.* Промежуточный случай регулярности в задаче дифференцирования кратных интегралов// Изв. Саратов. ун-та. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2014. — 14, № 4. — С. 401–407.
 54. *Чуи К.* Введение в вейвлеты. — М.: Мир, 2001.
 55. *Galatenko V. V., Lukashenko T. P., Sadovnichiy V. A.* The absolute stability of orthorecursive expansions in redundant systems of subspaces// in: Continuous and Distributed Systems. II. Theory and Applications/ Studies in Systems, Decision and Control. — Springer, 2015. — 30. — P. 3–10.
 56. *Galatenko V. V., Lukashenko T. P., Sadovnichiy V. A.* Convergence almost everywhere of orthorecursive expansions in functional systems// in: Advances in Dynamical Systems and Control/ Studies in Systems, Decision and Control. — Springer, 2016. — 69. — P. 3–11.
 57. *Galatenko V. V., Lukashenko T. P., Sadovnichiy V. A.* Convergence almost everywhere of orthorecursive expansions in systems of translates and dilates// in: Fundamentals of Modern Mathematics and Mechanics. — Springer, 2018. — P. 3–11.
 58. *De Vore R. A., Temlyakov V. N.* Some remarks on greedy algorithms// Adv. Comput. Math. — 1996. — 5. — P. 173–187.
 59. *Meyer Y.* Ondelettes et opérateurs. — Paris: Hermann, 1990–1991.

Галатенко Владимир Владимирович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vgalat@imscs.msu.ru

Лукашенко Тарас Павлович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: lukashenko@mail.ru

Садовничий Виктор Антонович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: info@rector.msu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 170 (2019). С. 71–117
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-170-71-117

УДК 517.518.82

ОБОБЩЕННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОПОВИЧУ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ОТ РАЦИОНАЛЬНОГО МОДУЛЯ

© 2019 г. И. В. ТИХОНОВ, В. Б. ШЕРСТЮКОВ, Д. Г. ЦВЕТКОВИЧ

Аннотация. В работе изучаются полиномы Бернштейна для простых негладких функций типа рационального модуля. Показано, что эти полиномы могут быть представлены в виде особых сумм регулярной структуры. По причинам исторического характера найденные выражения естественно называть «обобщенными разложениями Поповичу». Для записи обобщенных разложений разработан специальный формализм, связанный с комбинаторными вычислениями. На основе установленных формул дано полное описание характера сходимости изучаемых полиномов Бернштейна в комплексной плоскости. Обсуждается связь разложений Поповичу с вопросом распределения нулей полиномов Бернштейна. В заключительной части работы представлен ряд дополнительных новых соотношений для полиномов Бернштейна от рационального модуля.

Ключевые слова: полином Бернштейна, кусочно линейная функция, рациональный модуль, обобщенное разложение Поповичу, область сходимости, лемниската Канторовича, распределение нулей полинома.

GENERALIZED POPOVICIU EXPANSIONS FOR BERNSTEIN POLYNOMIALS OF A RATIONAL MODULE

© 2019 I. V. TIKHONOV, V. B. SHERSTYUKOV, D. G. TSVETKOVICH

ABSTRACT. We study Bernstein polynomials for simple nonsmooth rational module functions. We show that these polynomials can be represented as special sums of regular structure. For historical reasons, the representations found are naturally called “generalized Popoviciu expansions.” To write generalized expansions, we develop a special formalism based on combinatorial calculations. Based on the formulas obtained, we propose a complete description of the character of convergence of the Bernstein polynomials studied in the complex plane. We also discuss the relationship of generalized Popoviciu expansions with the distribution of zeros of Bernstein polynomials. In the final part of the paper, we present additional new relations for Bernstein polynomials of the rational module function.

Keywords and phrases: Bernstein polynomial, piecewise linear function, rational module, generalized Popoviciu expansion, domain of convergence, Kantorovich lemniscate, distribution of zeros of a polynomial.

AMS Subject Classification: 41A10, 41A25, 30C15, 30E10

1. Введение. В 1935 г. молодой и впоследствии известный румынский математик Тиберию Поповичу отметил среди прочего в работе [53], что полиномы Бернштейна от функции $|x|$ на симметричном отрезке $[-1, 1]$ допускают разложение в специальную сумму, рекуррентно изменяющуюся при увеличении номера полинома Бернштейна. Соответствующий результат был упомянут без доказательства в подстрочной сноске в конце работы (см. [53, с. 53–54]). Приведем перевод формулировки этого результата:

«Полином P_{2n} для функции $|x|$ в интервале $(-1, 1)$ равен

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{1/2}{i} (1-x^2)^i,$$

т.е. в точности совпадает с n -й частичной суммой разложения Лебега

$$|x| = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{1/2}{i} (1-x^2)^i.$$

Заметим еще, что в этом случае

$$\frac{d^2 P_{2n}}{dx^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n-1} (n-1)!} (2n-1) (1-x^2)^{n-1},$$

что показывает наличие тесной связи между методами аппроксимации Бернштейна, Ландау, и классическим методом Лебега».

Это неожиданное наблюдение долгое время оставалось незамеченным. На современном языке речь идет о полиномах Бернштейна

$$P_{2m}(f, x) = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{2m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_{2m}^k (1+x)^k (1-x)^{2m-k}, \quad m \in \mathbb{N},$$

для стандартного модуля $f(x) = |x|$ на симметричном отрезке $[-1, 1]$.

Утверждается, что при таком выборе $f(x)$ справедливо представление

$$P_{2m}(f, x) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k (1-x^2)^k, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Данные полиномы совпадают с частичными суммами в известном разложении модуля, восходящем к Лебегу:

$$\begin{aligned} |x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1 - (1-x^2)} &= 1 - \frac{1}{2}(1-x^2) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{2^k k!} (1-x^2)^k = \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} (1-x^2)^k. \end{aligned}$$

При этом также

$$P_{2m}''(f, x) = 2m \cdot 2^{-2m} C_{2m}^m (1-x^2)^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Можно показать, что полиномы $P_{2m}''(f, x)$ образуют на $[-1, 1]$ простую δ -образную последовательность, использованную Ландау в его доказательстве теоремы Вейерштрасса (по поводу различных доказательств теоремы Вейерштрасса см. [4, 8, 60]).

Отметим также, что оригинальная формула второй производной в работе Поповичу дана с опечаткой. Правильный результат в его обозначениях должен выглядеть так:

$$\frac{d^2 P_{2n}}{dx^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n-1} (n-1)!} (1-x^2)^{n-1}.$$

Подробный вывод и обсуждение перечисленных формул в их современной трактовке см. в [24].

Использование симметричного отрезка не принципиально. В [19] упомянутые результаты Поповичу перенесены на случай функции $f(x) = |2x-1|$, взятой на стандартном отрезке $[0, 1]$

(см. также [22]). Установленные соотношения открывают новые возможности при оценке скорости сходимости полиномов Бернштейна к порождающей функции типа модуля (см. [21]) и при исследовании распределения нулей полиномов Бернштейна на плоскости \mathbb{C} (см. [25, 26]).

Для дальнейшего развития теории желательно иметь аналоги разложения Поповичу для полиномов Бернштейна

$$B_n(f, z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$, взятых от произвольного рационального модуля

$$f(x) = |qx - p|, \quad x \in [0, 1]. \quad (1.2)$$

В настоящей работе мы даем полное решение поставленной задачи вместе с разбором некоторых частных случаев. Окончательные результаты весьма неожиданны и связаны с целым рядом нетривиальных аналитических и комбинаторных соображений.

2. Общие установки, соглашения, обозначения. Всюду далее работаем на стандартном отрезке $[0, 1]$. Рассматриваем классические полиномы Бернштейна (1.1) с порождающими функциями вида (1.2) при соглашениях

$$p, q \in \mathbb{N}, \quad q > p \geq 1, \quad \text{НОД}(p, q) = 1. \quad (2.1)$$

Главной характеристикой функции (1.2) является ее *точка излома*

$$x = \frac{p}{q} \in (0, 1), \quad (2.2)$$

или, чуть более длинно, *абсцисса точки излома графика функции* $f(x) = |qx - p|$. Как станет ясно в дальнейшем, надо особо учитывать сочетание точки (2.2) с точками из равномерных сеток

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{k}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1, \quad (2.3)$$

используемых в определении полиномов Бернштейна (1.1).

Переменную $z \in \mathbb{C}$ в полиномах (1.1) сразу считаем комплексной, поскольку ряд естественных задач, связанных с полиномами Бернштейна, целесообразно изучать, выходя в комплексную плоскость (см. [7, 25]). Основные сведения по теории полиномов Бернштейна изложены в монографиях [3, 36, 49]. В качестве дополнительных источников отметим [4, 8, 11, 37, 38, 52]. Предварительная публикация части из наших результатов дана в [30, 31].

Для биномиальных коэффициентов используем стандартный «русский» символ

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Через $[h]$, $\lceil h \rceil$ обозначаем *пол* и *потолок* числа $h \in \mathbb{R}$ (см. [5]), а через

$$\{h\} = h - [h], \quad \langle h \rangle = \lceil h \rceil - h \quad (2.4)$$

— *дробную* и *антидробную части* числа $h \in \mathbb{R}$ соответственно. Понятие антидробной части не является общепринятым, но мы вводим значок $\langle h \rangle$, поскольку он сильно упрощает запись многих последующих формул. Справедливы очевидные тождества

$$[h] - \lceil h \rceil = 1, \quad \{h\} + \langle h \rangle = 1, \quad h \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

при том, что $[h] - \lceil h \rceil = 0$ и $\{h\} = \langle h \rangle = 0$, если $h \in \mathbb{Z}$.

3. Главный результат с краткими комментариями. Основная цель нашей работы состоит в доказательстве следующего утверждения.

Теорема 3.1. При всех значениях $m \in \mathbb{N}$ и $r = 0, \dots, q-1$ для полиномов Бернштейна (1.1) от функции (1.2) при соглашениях (2.1) справедливо представление

$$B_{qm+r}(f, z) = p + (q-2p)z - \sum_{\nu=1}^{q-1} 2z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lfloor p\nu/q \rfloor} \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(\nu, r)} \frac{a_{p,q}(\nu)}{qk + \nu} C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)} (z^p(1-z)^{q-p})^k, \quad (3.1)$$

где

$$\varepsilon_m(\nu, r) = \begin{cases} m, & \nu \leq r-1, \\ m-1, & \nu \geq r, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$a_{p,q}(\nu) = \begin{cases} q \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle, & \nu \in \Delta_{p,q}^{(1)}, \\ q \left\{ \frac{p\nu}{q} \right\}, & \nu \in \Delta_{p,q}^{(2)}, \end{cases} \quad j_{p,q}(\nu) = \begin{cases} \left\lceil \frac{p\nu}{q} \right\rceil, & \nu \in \Delta_{p,q}^{(1)}, \\ \left\lfloor \frac{p\nu}{q} \right\rfloor, & \nu \in \Delta_{p,q}^{(2)}, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\Delta_{p,q}^{(1)} = \left\{ \nu \in \mathbb{N} : \nu \leq q-1, \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle \leq \frac{p}{q} \right\}, \quad \Delta_{p,q}^{(2)} = \left\{ \nu \in \mathbb{N} : \nu \leq q-1, \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle > \frac{p}{q} \right\}, \quad (3.4)$$

причем величины (3.3) принимают лишь целые значения из промежутков

$$1 \leq a_{p,q}(\nu) \leq \max\{p, q-p-1\}, \quad 0 \leq j_{p,q}(\nu) \leq \min\{p, \nu\}, \quad \nu = 1, \dots, q-1. \quad (3.5)$$

Запись формулы (3.1) с обозначениями (3.2)–(3.4) допускает «косметические» изменения, связанные с различными техническими преобразованиями. Мы даем тот вариант, который, на наш взгляд, наиболее удобен на практике.

Видимая сложность и специфика обозначений связана с необходимостью учета всех возможных сочетаний параметров (2.1), определяющих расположение точки излома (2.2) среди точек равномерных сеток (2.3) при различных номерах $n \in \mathbb{N}$. Если значения p, q взяты конкретно, то после проведения необходимых расчетов формула (3.1) упрощается, предоставляя достаточно наглядный результат — *обобщенное разложение Поповичу* для полиномов Бернштейна от функции (1.2).

Фиксированное значение $q \geq 2$ (знаменатель дроби p/q) задает постоянное число слагаемых во внешней сумме разложения (3.1) или, другими словами, задает постоянное количество внутренних сумм. Как видим, число этих сумм всегда будет $(q-1)$. Номер ν внутренней суммы в сочетании с выбранными p, q определяет затем все числовые параметры.

Иначе говоря, формула (3.1) показывает, что всякий полином Бернштейна $B_{qm+r}(f, z)$ для функции (1.2) собирается «как конструктор» из следующих *структурированных сумм*:

$$\mathfrak{S}_{p,q}^d(z; \nu) = 2z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lfloor p\nu/q \rfloor} \sum_{k=0}^d \frac{a_{p,q}(\nu)}{qk + \nu} C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)} (z^p(1-z)^{q-p})^k. \quad (3.6)$$

Здесь $\nu = 1, \dots, q-1$ (*порядковый номер суммы*) и $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (*верхний индекс суммы*). При практическом использовании в конкретных примерах множители, стоящие перед знаком суммирования в формуле (3.6), бывает удобно вносить внутрь суммы.

Вся информация о выбираемом номере $n = qt + r$ полинома Бернштейна закладывается в способ индексации (3.2). Через каждые q номеров ситуация циклически переходит на новый уровень. Внутри цикла все зависит от остатка r , определяющего число слагаемых в той или иной внутренней сумме (3.6) из общей формулы (3.1). При этом способ (3.2) учитывает важную особенность, а именно

$$\varepsilon_m(\nu, 1) = \varepsilon_m(\nu, 0) = m-1, \quad \nu = 1, \dots, q-1. \quad (3.7)$$

Это согласуется со стандартным *правилом склеивания*

$$B_{qm+1}(f, z) = B_{qm}(f, z), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.8)$$

действующим для полиномов Бернштейна при выборе порождающей функции (1.2). Подробнее про правило склеивания см. обзор [22] и следующий раздел 4.

Используя суммы (3.6), можно переписать формулу (3.1) в зависимости от значения остатка r следующим эквивалентным образом. При $r = 0, 1$ получаем

$$B_{qm+1}(f, z) = B_{qm}(f, z) = p + (q - 2p)z - \sum_{\nu=1}^{q-1} \mathfrak{S}_{p,q}^{m-1}(z; \nu), \quad (3.9)$$

а при $r \geq 2$ (если такие остатки возможны) имеем

$$B_{qm+r}(f, z) = p + (q - 2p)z - \left(\sum_{\nu=1}^{r-1} \mathfrak{S}_{p,q}^m(z; \nu) + \sum_{\nu=r}^{q-1} \mathfrak{S}_{p,q}^{m-1}(z; \nu) \right). \quad (3.10)$$

Отметим, что в простейшем случае — при $p = 1$ и $q = 2$ — формула (3.9) будет содержать лишь одну сумму $\mathfrak{S}_{1,2}^{m-1}(z; 1)$, а вторая формула (3.10) просто не нужна.

Пример 3.1. Пусть $f(x) = |2x - 1|$, $x \in [0, 1]$. Прямой подсчет по формулам (3.1)–(3.4) для $p = 1$ и $q = 2$ дает результат

$$B_{2m+1}(f, z) = B_{2m}(f, z) = 1 - 2z(1 - z) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2k+1} C_{2k+1}^{k+1} (z(1 - z))^k, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

Отсюда, с учетом тождества $2C_{2k+1}^{k+1} = C_{2k+2}^{k+1}$, получаем более удобную запись

$$B_{2m+1}(f, z) = B_{2m}(f, z) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} C_{2k}^k (z(1 - z))^k, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.12)$$

Независимое доказательство (3.12) дано в [19] (см. также [22]). Сделаем еще один переход:

$$B_{2m+1}(f, z) = B_{2m}(f, z) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k (4z(1 - z))^k, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$

Это прямой аналог исходного разложения Поповичу (см. [53]) применительно к выбранному сейчас отрезку $[0, 1]$. Форма (3.13) специально приспособлена для исследования сходимости данных полиномов Бернштейна: условие $4|z(1 - z)| \leq 1$ дает точное описание комплексной области сходимости для $B_n(f, z)$ при выборе $f(x) = |2x - 1|$ (подробнее см. раздел 8).

Пример 3.2. Пусть $f(x) = |3x - 1|$, $x \in [0, 1]$. Здесь $p = 1$, $q = 3$. Расчет по формулам (3.1)–(3.4) после соответствующих преобразований дает представление

$$\begin{aligned} B_{3m+1}(f, z) = B_{3m}(f, z) = & 1 + z - 2z(1 - z) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{3k+1} C_{3k+1}^k (z(1 - z)^2)^k - \\ & - 2z(1 - z)^2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{3k+2} C_{3k+2}^k (z(1 - z)^2)^k, \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

и затем

$$\begin{aligned} B_{3m+2}(f, z) = & 1 + z - 2z(1 - z) \sum_{k=0}^m \frac{1}{3k+1} C_{3k+1}^k (z(1 - z)^2)^k - \\ & - 2z(1 - z)^2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{3k+2} C_{3k+2}^k (z(1 - z)^2)^k, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Внешне результаты похожи: единственное отличие (3.15) от (3.14) состоит в добавлении очередного m -го слагаемого в первую сумму.

Подробные расчеты для представлений (3.11)–(3.15) и дальнейшие иллюстрации к общим формулам (3.1)–(3.4) будут даны в отдельном разделе 7 ниже.

Доказательство теоремы 3.1 проведем в три этапа. Сначала мы напомним специальную формулу Темпла, связывающую два последовательных полинома Бернштейна. Затем установим особую подготовительную формулу, представляющую полином $B_{q_m+r}(f, z)$ через сумму попарных разностей предыдущих полиномов и, наконец, применим формулу Темпла к вычислению слагаемых в подготовительной формуле. Каждый этап составляет отдельный раздел нашей работы, причем заключительный, третий этап, является основным и самым трудным.

4. Формула Темпла. При сравнении двух последовательных полиномов Бернштейна $B_{n+1}(f, z)$ и $B_n(f, z)$, взятых от произвольной функции $f \in C[0, 1]$, полезна формула

$$B_{n+1}(f, z) - B_n(f, z) = \sum_{j=1}^n Q_{n,j}(f) z^j (1-z)^{n+1-j}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

с коэффициентами

$$Q_{n,j}(f) = C_{n+1}^j f\left(\frac{j}{n+1}\right) - C_n^j f\left(\frac{j}{n}\right) - C_n^{j-1} f\left(\frac{j-1}{n}\right). \quad (4.2)$$

Для коэффициентов $Q_{n,j}(f)$ возможны другие, эквивалентные записи. Например, используя стандартные обозначения для *разделенных разностей* первого и второго порядков

$$[f; x_1, x_0] \equiv \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad [f; x_2, x_1, x_0] \equiv \frac{[f; x_2, x_1] - [f; x_1, x_0]}{x_2 - x_0},$$

выражение (4.2) можно преобразовать к виду

$$Q_{n,j}(f) = -\frac{1}{n+1} C_{n-1}^{j-1} \left(\left[f; \frac{j}{n}, \frac{j}{n+1} \right] - \left[f; \frac{j}{n+1}, \frac{j-1}{n} \right] \right), \quad (4.3)$$

а затем к виду

$$Q_{n,j}(f) = -\frac{1}{n(n+1)} C_{n-1}^{j-1} \left[f; \frac{j}{n}, \frac{j}{n+1}, \frac{j-1}{n} \right]. \quad (4.4)$$

Записи (4.3) и (4.4) согласованы с последовательным расположением точек

$$0 \leq \frac{j-1}{n} < \frac{j}{n+1} < \frac{j}{n} \leq 1, \quad (4.5)$$

действующим при всех $j = 1, 2, \dots, n$.

Соотношение (4.1) с коэффициентами $Q_{n,j}(f)$, выраженными любым из перечисленных способов, будем называть *формулой Темпла*, поскольку впервые подобная формула была установлена в [59]. Независимо от [59] и чуть позже аналогичный результат отмечался в [34, 57]. Простое доказательство формулы Темпла см. в [37, с. 115] или [38, с. 309–310] (в [38] использовано название «формула Авербах», ибо в одном из первоисточников [57] появление подобной формулы связывалось с именем американской студентки Бонни Авербах). Некоторые дополнительные подробности про формулу Темпла см. в [22, с. 141–143].

Изучаемые функции (1.2) при соглашениях (2.1) являются выпуклыми вниз на $[0, 1]$. Соответственно, все вторые разности в формуле (4.4) будут заведомо неотрицательными, и коэффициенты $Q_{n,j}(f)$ оказываются неположительными. Формула (4.1) показывает, что тогда

$$B_{n+1}(f, x) \leq B_n(f, x), \quad x \in [0, 1], \quad (4.6)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Другими словами, в нашей ситуации полиномы Бернштейна сходятся к своей порождающей функции $f(x) = |qx - p|$ монотонно сверху на $[0, 1]$. Это проявление общей теоремы Темпла–Арамэ–Авербах о монотонной сходимости полиномов Бернштейна к выпуклым порождающим функциям (см. [34, 57, 59]; см. также [37, с. 115] и [38, с. 309–310]).

При некоторых специальных номерах $n \in \mathbb{N}$ все точки (4.5) попадают на линейные участки рационального модуля (1.2) с точкой излома $p/q \in (0, 1)$. При таких n все вторые разности в (4.4) будут равны нулю, коэффициенты $Q_{n,j}(f)$ обратятся в нуль, и соотношение (4.6) перейдет в равенство. Точный результат выглядит следующим образом.

Лемма 4.1. Для полиномов Бернштейна (1.1), взятых от функции $f(x) = |qx - p|$ при соглашениях (2.1), действует правило склеивания $B_{qm+1}(f, z) = B_{qm}(f, z)$ при всех $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. При номерах $n = qt$ в коэффициентах (4.4) фигурируют упорядоченные тройки точек

$$\frac{j-1}{qt}, \quad \frac{j}{qm+1}, \quad \frac{j}{qm}, \quad j = 1, 2, \dots, qt. \quad (4.7)$$

Заметим, что

$$0 \leq \frac{j-1}{qt} < \frac{j}{qm+1} < \frac{j}{qm} \leq \frac{p}{q}, \quad j \leq pt,$$

$$\frac{p}{q} \leq \frac{j-1}{qt} < \frac{j}{qm+1} < \frac{j}{qm} \leq 1, \quad j \geq pt+1.$$

Таким образом, любая тройка точек (4.7) укладывается на соответствующий линейный участок функции $f(x) = |qx - p|$, слева или справа от точки излома $x = p/q$. Согласно (4.4) в формуле Темпла для разности $B_{qm+1}(f, z) - B_{qm}(f, z)$ все коэффициенты $Q_{qm,j}(f)$ будут равны нулю. Следовательно, выполняется заявленное правило склеивания. \square

В связи с правилом склеивания отметим работы [47, 50, 51] и обзор [22], где обсуждается более общий случай кусочно линейных порождающих функций с несколькими рациональными точками излома. В [23] показано, что для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке $[-1, 1]$ формулировка правила склеивания требует определенной коррекции. Эти результаты, впрочем, сейчас не понадобятся.

По-прежнему работаем с функцией $f(x) = |qx - p|$, заданной на $[0, 1]$ при соглашениях (2.1). Покажем, как можно выразить полином $B_{qm+r}(f, z)$ через последовательные разности предыдущих полиномов Бернштейна при учете правила склеивания из леммы 4.1.

5. Подготовительная формула для записи полиномов Бернштейна. Удобно сразу установить следующий общий принцип.

Лемма 5.1. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность однотипных элементов (чисел или функций), в которой выполняется правило склеивания

$$A_{qm+1} = A_{qm}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.1)$$

с некоторым $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Тогда справедливо представление

$$A_{qm+r} = A_1 + \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(\nu,r)} (A_{qk+\nu+1} - A_{qk+\nu}), \quad m \in \mathbb{N}, \quad r = 0, 1, \dots, q-1, \quad (5.2)$$

где верхний индекс суммирования $\varepsilon_m(\nu, r)$ определяется формулой (3.2).

Доказательство. Используем элементарный прием. Запишем

$$A_n = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \dots + (A_{n-1} - A_{n-2}) + (A_n - A_{n-1}). \quad (5.3)$$

Рассмотрим сначала номера $n = qt$ и $n = qt + 1$ с некоторым $t \in \mathbb{N}$, когда по условию (5.1) элементы A_{qm} и A_{qm+1} совпадают. Но при $n = qt + 1$ в записи (5.3) оказывается ровно qt скобок. Группируя их по q скобок подряд, получаем выражение

$$A_{qm} = A_{qm+1} = A_1 + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\nu=1}^q (A_{qk+\nu+1} - A_{qk+\nu}), \quad m \in \mathbb{N}.$$

На основании все того же правила (5.1) при $\nu = q$ имеем

$$(A_{qk+\nu+1} - A_{qk+\nu}) \Big|_{\nu=q} = A_{q(k+1)+1} - A_{q(k+1)} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Соответственно,

$$A_{qm} = A_{qm+1} = A_1 + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\nu=1}^{q-1} (A_{qk+\nu+1} - A_{qk+\nu}) = A_1 + \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{k=0}^{m-1} (A_{qk+\nu+1} - A_{qk+\nu}) \quad (5.4)$$

при всех $m \in \mathbb{N}$.

Для элемента A_{qm+r} при $r \in \{2, \dots, q-1\}$ (если такие остатки r возможны) к формуле (5.4) добавляется $(r-1)$ слагаемых в том смысле, что

$$A_{qm+r} = A_{qm+1} + (A_{qm+2} - A_{qm+1}) + \dots + (A_{qm+r} - A_{qm+r-1}).$$

Отсюда с учетом (5.4) получаем

$$A_{qm+r} = A_1 + \sum_{\nu=1}^{r-1} \sum_{k=0}^m (A_{qk+\nu+1} - A_{qk+\nu}) + \sum_{\nu=r}^{q-1} \sum_{k=0}^{m-1} (A_{qk+\nu+1} - A_{qk+\nu}) \quad (5.5)$$

при всех $m \in \mathbb{N}$ и $r = 2, \dots, q-1$.

Введем символ $\varepsilon_m(\nu, r)$ по следующему правилу:

(a) если $r = 0, 1$, то

$$\varepsilon_m(\nu, r) = m - 1, \quad \nu = 1, \dots, q-1; \quad (5.6)$$

(b) если $r \geq 2$, то

$$\varepsilon_m(\nu, r) = \begin{cases} m, & \nu = 1, \dots, r-1, \\ m-1, & \nu = r, \dots, q-1. \end{cases} \quad (5.7)$$

Тогда формулы (5.4), (5.5) получают общую компактную запись (5.2), пригодную при всех значениях $m \in \mathbb{N}$ и $r = 0, 1, \dots, q-1$. Осталось заметить, что правила (5.6), (5.7), определяющие символ $\varepsilon_m(\nu, r)$, коротко выражаются в виде (3.2). Лемма доказана. \square

Выберем теперь в качестве элементов A_n полиномы Бернштейна $B_n(f, z)$ от функции (1.2) при соглашениях (2.1). Для указанных полиномов по лемме 4.1 выполняется правило склеивания (3.8); следовательно, все условия леммы 5.1 выполнены. На основании формулы (5.2) получаем представление

$$B_{qm+r}(f, z) = B_1(f, z) + \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(\nu, r)} (B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z)) \quad (5.8)$$

при всех $m \in \mathbb{N}$ и $r = 0, 1, \dots, q-1$ с символом $\varepsilon_m(\nu, r)$, заданным по правилу (3.2).

Назовем (5.8) *подготовительной формулой* для полинома $B_{qm+r}(f, z)$. Используя эту формулу, установим основное разложение (3.1) с величинами (3.2)–(3.4). Для этого надо вычислить все разности, входящие в сумму (5.8).

6. Вычисление разностей и доказательство главного результата. Для порождающей функции $f(x) = |qx - p|$, заданной на $[0, 1]$ при соглашениях (2.1), рассмотрим конкретный полином Бернштейна $B_{qm+r}(f, z)$ в записи (5.8). Покажем, что разности

$$B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z), \quad (6.1)$$

образующие сумму (5.8), допускают конструктивное вычисление.

Лемма 6.1. *При всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\nu = 1, \dots, q-1$ справедлива формула*

$$B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z) = -\frac{2a_{p,q}(\nu)}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)} z^{pk+[p\nu/q]} (1-z)^{(q-p)k+\nu-[p\nu/q]}, \quad (6.2)$$

где величины $a_{p,q}(\nu)$, $j_{p,q}(\nu)$ определены формулами (3.3) и принимают лишь целые значения из промежутков (3.5).

Доказательство. По формуле Темпла (4.1) разности (6.1) представимы в виде

$$B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z) = \sum_{j=1}^{qk+\nu} Q_{qk+\nu,j}(f) z^j (1-z)^{qk+\nu+1-j}, \quad (6.3)$$

где, согласно (4.4), имеем

$$Q_{qk+\nu,j}(f) = -\frac{1}{(qk+\nu)(qk+\nu+1)} C_{qk+\nu-1}^{j-1} \left[f; \frac{j}{qk+\nu}, \frac{j}{qk+\nu+1}, \frac{j-1}{qk+\nu} \right]. \quad (6.4)$$

Напомним (см. (4.5)), что запись (6.4) учитывает последовательное расположение на $[0, 1]$ точек

$$\frac{j-1}{qk+\nu} < \frac{j}{qk+\nu+1} < \frac{j}{qk+\nu}, \quad j = 1, \dots, qk+\nu. \quad (6.5)$$

Если какая-либо тройка точек из (6.5) попадает на линейный участок функции $f(x) = |qx - p|$, слева или справа от точки излома $p/q \in (0, 1)$, то вторая разность в (6.4) будет равна нулю и коэффициент $Q_{qk+\nu,j}(f)$ обратится в нуль. Для того чтобы коэффициент $Q_{qk+\nu,j}(f)$ был отличен от нуля при некотором $j \in \{1, \dots, qk+\nu\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{j-1}{qk+\nu} < \frac{p}{q} < \frac{j}{qk+\nu}, \quad (6.6)$$

т.е. точка излома $x = p/q$ должна оказаться между крайними точками разделенной разности в (6.4). Разрешая элементарное неравенство (6.6), получаем, что

$$pk + \frac{p\nu}{q} < j < pk + \frac{p\nu}{q} + 1. \quad (6.7)$$

Учитывая несократимость дроби p/q и тот факт, что $\nu \in \{1, \dots, q-1\}$, замечаем, что число $p\nu/q$ будет заведомо нецелым, и, значит, оценке (6.7) удовлетворяет единственное целое значение

$$j_0 \equiv pk + \left\lceil \frac{p\nu}{q} \right\rceil. \quad (6.8)$$

Ясно, что $1 \leq j_0 \leq qk+\nu$, т.е. j_0 попадает в нужный диапазон значений, указанный в (6.5).

Итак, при условиях $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\nu \in \{1, \dots, q-1\}$ в формуле (6.3) имеется ровно одно слагаемое, отличное от тождественного нуля — то, которое отвечает номеру $j = j_0$ вида (6.8). Взяв такой номер, вычислим соответствующий коэффициент (6.4).

Основную часть составляет вычисление разделенной разности

$$\left[f; \frac{j_0}{qk+\nu}, \frac{j_0}{qk+\nu+1}, \frac{j_0-1}{qk+\nu} \right], \quad j_0 \equiv pk + \left\lceil \frac{p\nu}{q} \right\rceil, \quad (6.9)$$

точки которой коротко обозначим

$$x_0 \equiv \frac{j_0-1}{qk+\nu}, \quad x_1 \equiv \frac{j_0}{qk+\nu+1}, \quad x_2 \equiv \frac{j_0}{qk+\nu}. \quad (6.10)$$

Выбор номера j_0 в соответствии с (6.6) дает соотношение $x_0 < p/q < x_2$. Дальнейшие рассуждения зависят от расположения точки x_1 — находится ли она слева или справа от p/q . Чётко разделим эти два случая.

Случай 1. Пусть $x_1 \leq p/q$ (допуская здесь нестрогое неравенство). В подробной записи

$$\frac{j_0}{qk+\nu+1} \leq \frac{p}{q}. \quad (6.11)$$

Подставляя в (6.11) значение j_0 из формулы (6.8), получаем, что

$$\left\lceil \frac{p\nu}{q} \right\rceil \leq \frac{p\nu}{q} + \frac{p}{q} \quad \sim \quad \left\lceil \frac{p\nu}{q} \right\rceil - \frac{p\nu}{q} \leq \frac{p}{q}.$$

Выразим результат через *антидробную часть* из формулы (2.4) в виде

$$\left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle \leq \frac{p}{q}. \quad (6.12)$$

Соотношение (6.12) рассмотрим как условие на ν , определяющее множество

$$\Delta_{p,q}^{(1)} = \left\{ \nu \in \mathbb{N} : \nu \leq q - 1, \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle \leq \frac{p}{q} \right\}. \quad (6.13)$$

Это первое из множеств (3.4). Итак, при всех ν из (6.13) получаем конфигурацию точек

$$x_0 < x_1 \leq \frac{p}{q} < x_2 \quad (6.14)$$

со значениями x_0, x_1, x_2 из формулы (6.10).

Приступим к вычислению разделенной разности (6.9). По определению

$$[f; x_2, x_1, x_0] \equiv \frac{1}{x_2 - x_0} ([f; x_2, x_1] - [f; x_1, x_0]). \quad (6.15)$$

Учитывая конфигурацию (6.14) и структуру функции $f(x) = |qx - p|$, находим значения

$$[f; x_2, x_1] \equiv \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{q(x_1 + x_2) - 2p}{x_2 - x_1}, \quad [f; x_1, x_0] \equiv \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = -q. \quad (6.16)$$

Подстановка (6.16) в (6.15) дает результат

$$[f; x_2, x_1, x_0] = \frac{2(qx_2 - p)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \quad (6.17)$$

Воспользуемся явными выражениями (6.10), откуда

$$qx_2 - p = \frac{qj_0 - pqk - p\nu}{qk + \nu}, \quad x_2 - x_0 = \frac{1}{qk + \nu}, \quad x_2 - x_1 = \frac{j_0}{(qk + \nu)(qk + \nu + 1)}. \quad (6.18)$$

Заключительная подстановка (6.18) в (6.17) приводит к формуле

$$[f; x_2, x_1, x_0] = \frac{2}{j_0} (qk + \nu)(qk + \nu + 1)(qj_0 - pqk - p\nu).$$

Последняя скобка с учетом явного выражения (6.8) равна

$$qj_0 - pqk - p\nu = q \left[\frac{p\nu}{q} \right] - p\nu = q \left(\left[\frac{p\nu}{q} \right] - \frac{p\nu}{q} \right) = q \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle.$$

Здесь вновь использована антидробная часть из формулы (2.4).

Подведем итог. Для точек (6.10), находящихся в конфигурации (6.14), соответствующая вторая разность (6.9) может быть записана в виде

$$\left[f; \frac{j_0}{qk + \nu}, \frac{j_0}{qk + \nu + 1}, \frac{j_0 - 1}{qk + \nu} \right] = \frac{2}{j_0} (qk + \nu)(qk + \nu + 1) \cdot q \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle. \quad (6.19)$$

Поскольку значение j_0 из формулы (6.8) отвечает единственному ненулевому коэффициенту (6.4), то при вычислении такого коэффициента с учетом (6.19) получим

$$Q_{qk+\nu, j_0}(f) = -\frac{2}{j_0} C_{qk+\nu-1}^{j_0-1} \cdot q \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle. \quad (6.20)$$

Используем в (6.20) элементарное тождество

$$\frac{1}{m} C_{n-1}^{m-1} = \frac{1}{n} C_n^m, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad n \geq m.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Q_{qk+\nu, j_0}(f) &= -\frac{2}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^{j_0} \cdot q \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle = -\frac{2q}{qk+\nu} \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle C_{qk+\nu}^{pk+[p\nu/q]} = \\ &= -\frac{2a_{p,q}(\nu)}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Здесь величины $a_{p,q}(\nu)$, $j_{p,q}(\nu)$, принимающие лишь натуральные значения, определены правилом

$$a_{p,q}(\nu) = q \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle, \quad j_{p,q}(\nu) = \left[\frac{p\nu}{q} \right], \quad \nu \in \Delta_{p,q}^{(1)}. \quad (6.22)$$

Формулы (6.22) суть первая составная часть общих выражений (3.3).

Подставим теперь единственный ненулевой коэффициент (6.21) в формулу Темпла (6.3). Учитывая вид (6.8) для $j = j_0$, получим в итоге

$$\begin{aligned} B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z) &= -\frac{2a_{p,q}(\nu)}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)} z^{j_0} (1-z)^{qk+\nu+1-j_0} = \\ &= -\frac{2a_{p,q}(\nu)}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)} z^{pk+[p\nu/q]} (1-z)^{(q-p)k+\nu-(\lceil p\nu/q \rceil - 1)} = \\ &= -\frac{2a_{p,q}(\nu)}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)} z^{pk+[p\nu/q]} (1-z)^{(q-p)k+\nu-\lfloor p\nu/q \rfloor}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

В последнем переходе использовали элементарное тождество $\lceil p\nu/q \rceil - 1 = \lfloor p\nu/q \rfloor$, заведомо верное, ибо $p\nu/q \notin \mathbb{Z}$. В итоге получили нужное выражение (6.2). Но оно доказано пока лишь для значений ν из множества (6.13), когда точки (6.10) находятся в конфигурации (6.14).

Разберем теперь вторую возможность.

Случай 2. Пусть точки (6.10) находятся в конфигурации

$$x_0 < \frac{p}{q} < x_1 < x_2 \quad (6.24)$$

со строгим неравенством $x_1 > p/q$. По аналогии с (6.11) подробная запись

$$x_1 \equiv \frac{j_0}{qk+\nu+1} > \frac{p}{q}$$

при подстановке значения j_0 из формулы (6.8) дает соотношение

$$\left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle > \frac{p}{q},$$

двойственное к прежнему (6.12).

Соответственно рассмотрим множество

$$\Delta_{p,q}^{(2)} = \left\{ \nu \in \mathbb{N} : \nu \leq q-1, \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle > \frac{p}{q} \right\}, \quad (6.25)$$

дополнительное к множеству $\Delta_{p,q}^{(1)}$ из формулы (6.13). При всех ν из (6.25) имеем конфигурацию точек (6.24) со значениями x_0 , x_1 , x_2 из формулы (6.10).

Приступим к вычислению разделенной разности (6.9). Вновь пользуемся формулой (6.15), для которой, учитывая конфигурацию (6.24) и структуру функции $f(x) = |qx - p|$, находим значения

$$[f; x_2, x_1] \equiv \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = q, \quad [f; x_1, x_0] \equiv \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{q(x_0 + x_1) - 2p}{x_1 - x_0}. \quad (6.26)$$

Подстановка (6.26) в (6.15) дает результат

$$[f; x_2, x_1, x_0] = \frac{2(p - qx_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}. \quad (6.27)$$

Учитывая явные выражения (6.10), получаем

$$p - qx_0 = \frac{pqk + p\nu - qj_0 + q}{qk + \nu}, \quad x_2 - x_0 = \frac{1}{qk + \nu}, \quad x_1 - x_0 = \frac{qk + \nu - j_0 + 1}{(qk + \nu)(qk + \nu + 1)}. \quad (6.28)$$

Заключительная подстановка (6.28) в (6.27) приводит к формуле

$$[f; x_2, x_1, x_0] = \frac{2}{qk + \nu - j_0 + 1} (qk + \nu)(qk + \nu + 1)(pqk + p\nu - qj_0 + q).$$

Последняя скобка с учетом явного выражения (6.8) равна

$$pqk + p\nu - qj_0 + q = p\nu - q \left\lfloor \frac{p\nu}{q} \right\rfloor + q = q \left(\frac{p\nu}{q} - \left\lfloor \frac{p\nu}{q} \right\rfloor + 1 \right) = q \left(\frac{p\nu}{q} - \left\lfloor \frac{p\nu}{q} \right\rfloor \right) = q \left\{ \frac{p\nu}{q} \right\}.$$

Здесь применялось первое из тождеств (2.5) с учетом того, что $p\nu/q \notin \mathbb{Z}$.

Итак, для точек (6.10), находящихся в конфигурации (6.24), соответствующая вторая разность (6.9) представима в виде

$$\left[f; \frac{j_0}{qk + \nu}, \frac{j_0}{qk + \nu + 1}, \frac{j_0 - 1}{qk + \nu} \right] = \frac{2}{qk + \nu - j_0 + 1} (qk + \nu)(qk + \nu + 1) \cdot q \left\{ \frac{p\nu}{q} \right\}. \quad (6.29)$$

Поскольку значение j_0 из формулы (6.8) отвечает единственному ненулевому коэффициенту (6.4), то при вычислении такого коэффициента с учетом (6.29) получим

$$Q_{qk+\nu, j_0}(f) = -\frac{2}{qk + \nu - j_0 + 1} C_{qk+\nu-1}^{j_0-1} \cdot q \left\{ \frac{p\nu}{q} \right\}. \quad (6.30)$$

Применим в (6.30) элементарное тождество

$$\frac{1}{n - m + 1} C_{n-1}^{m-1} = \frac{1}{n} C_n^{m-1}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad n \geq m.$$

В результате

$$\begin{aligned} Q_{qk+\nu, j_0}(f) &= -\frac{2}{qk + \nu} C_{qk+\nu}^{j_0-1} \cdot q \left\{ \frac{p\nu}{q} \right\} = -\frac{2q}{qk + \nu} \left\{ \frac{p\nu}{q} \right\} C_{qk+\nu}^{pk + [p\nu/q] - 1} = \\ &= -\frac{2q}{qk + \nu} \left\{ \frac{p\nu}{q} \right\} C_{qk+\nu}^{pk + [p\nu/q]} = -\frac{2a_{p,q}(\nu)}{qk + \nu} C_{qk+\nu}^{pk + j_{p,q}(\nu)}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Здесь величины $a_{p,q}(\nu)$, $j_{p,q}(\nu)$ определены по правилу

$$a_{p,q}(\nu) = q \left\{ \frac{p\nu}{q} \right\}, \quad j_{p,q}(\nu) = \left\lfloor \frac{p\nu}{q} \right\rfloor, \quad \nu \in \Delta_{p,q}^{(2)}. \quad (6.32)$$

Формулы (6.32) являются второй составной частью общих выражений (3.3).

С учетом введенных обозначений (6.32) подставим единственный ненулевой коэффициент (6.31) в формулу Темпла (6.3). Поскольку формальная окончательная запись (6.31) совпадает с прежним видом (6.21), то соответствующая выкладка в точности повторяет цепочку (6.23). В итоге нужное соотношение (6.2) доказано при всех значениях

$$\nu \in \{1, \dots, q - 1\} = \Delta_{p,q}^{(1)} \cup \Delta_{p,q}^{(2)}, \quad \Delta_{p,q}^{(1)} \cap \Delta_{p,q}^{(2)} = \emptyset,$$

и, разумеется, при всех значениях $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Осталось обсудить величины $a_{p,q}(\nu)$, $j_{p,q}(\nu)$. То, что их значения всегда будут целыми и попадут в промежутки (3.5), видно из выражений (3.3). В проверке нуждается лишь верхняя граница для $a_{p,q}(\nu)$. Действительно, пусть $\nu \in \Delta_{p,q}^{(1)}$. Тогда $\langle p\nu/q \rangle \leq p/q$, и из (3.3) следует, что

$$a_{p,q}(\nu) = q \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle \leq q \cdot \frac{p}{q} = p.$$

Если же $\nu \in \Delta_{p,q}^{(2)}$, то $\langle p\nu/q \rangle > p/q$, и из (3.3) следует, что

$$a_{p,q}(\nu) = q \left\{ \frac{p\nu}{q} \right\} = q \left(1 - \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle \right) < q \left(1 - \frac{p}{q} \right) = q - p.$$

Тем самым, заведомо $a_{p,q}(\nu) \leq \max\{p, q - p - 1\}$, что и утверждалось в (3.5). Лемма доказана. \square

Для доказательства главного результата — теоремы 3.1 — все готово. Воспользуемся подготовительной формулой (5.8). Подставив туда найденные выражения (6.2) для разностей (6.1), получим

$$\begin{aligned} B_{qm+r}(f, z) &= B_1(f, z) + \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(\nu,r)} \left(B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z) \right) = \\ &= B_1(f, z) + \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(\nu,r)} \left(-\frac{2a_{p,q}(\nu)}{qk + \nu} C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)} z^{pk+\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{(q-p)k+\nu-\lfloor p\nu/q \rfloor} \right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

при всех $m \in \mathbb{N}$ и $r = 0, 1, \dots, q-1$ с символом $\varepsilon_m(\nu, r)$, заданным по правилу (3.2). Здесь величины $a_{p,q}(\nu)$, $j_{p,q}(\nu)$ определены формулой (3.3) и принимают лишь целые значения из промежутков (3.5). Для функции $f(x) = |qx - p|$, взятой на $[0, 1]$, первый полином Бернштейна (1.1) имеет вид $B_1(f, z) = p + (q-2p)z$. Учитывая это и проводя простейшие преобразования в (6.33), получаем окончательную запись (3.1). Теорема 3.1 полностью доказана.

7. Примеры нахождения конкретных разложений. Покажем на примерах, как работает формула (3.1). Последовательность наших действий достаточно проста. При заданной функции (1.2), т.е. при заданных значениях p, q , соответствующих ограничениям (2.1), вводим множество

$$\Delta \equiv \{\nu \in \mathbb{N} : \nu \leq q-1\} = \{1, \dots, q-1\} \quad (7.1)$$

и производим отбор номеров

$$\nu \in \Delta : \left\langle \frac{p\nu}{q} \right\rangle \leq \frac{p}{q}. \quad (7.2)$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ — знак антидробной части из формулы (2.4). Согласно (3.4) условие (7.2) определяет множество $\Delta_{p,q}^{(1)}$. Соответственно $\Delta_{p,q}^{(2)} = \Delta \setminus \Delta_{p,q}^{(1)}$. Затем, в зависимости от попадания номера ν в множество $\Delta_{p,q}^{(1)}$ или множество $\Delta_{p,q}^{(2)}$, происходит вычисление величин $a_{p,q}(\nu)$, $j_{p,q}(\nu)$ по правилу (3.3). Найденные значения подставляются в формулу (3.1) и выполняются простейшие преобразования по окончательной «доводке» ответа.

Для представления полученного результата удобно использовать также структурированные суммы (3.6) с записями (3.9), (3.10), эквивалентными общей формуле (3.1). Кроме того, основная формула (6.2) позволяет указать рекуррентные соотношения, действующие для полиномов

$$B_{qm}(f, z) = B_{qm+1}(f, z), \quad B_{qm+2}(f, z), \quad \dots, \quad B_{qm+q-1}(f, z), \quad B_{q(m+1)}(f, z). \quad (7.3)$$

Серия (7.3) образует один полный цикл.

Пример 7.1. Пусть $f(x) = |2x - 1|$ на $[0, 1]$, как в примере 3.1. Здесь $p = 1$, $q = 2$ с множеством (7.1), состоящим из одного номера $\nu = 1$. Условие (7.2) дает выражение $\langle \nu/2 \rangle \leq 1/2$, очевидно выполненное при $\nu = 1$; соответственно $\Delta_{1,2}^{(1)} = \{1\}$ и $\Delta_{1,2}^{(2)} = \emptyset$. Проводя подсчет величин (3.3), получаем

$$\nu = 1 \in \Delta_{1,2}^{(1)} \implies a_{1,2}(1) = 2 \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle = 1, \quad j_{1,2}(1) = \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1.$$

Последующая подстановка в формулу (3.6) дает единственную структурированную сумму

$$\mathfrak{S}_{1,2}^d(z; 1) = 2z^{\lceil 1/2 \rceil} (1-z)^{1-\lfloor 1/2 \rfloor} \sum_{k=0}^d \frac{1}{2k+1} C_{2k+1}^{k+1} (z(1-z))^k, \quad d \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Отсюда, с учетом формулы (3.9), требующей сейчас лишь одной суммы $\mathfrak{S}_{1,2}^{m-1}(z; 1)$, получаем нужное выражение (3.11), а затем и окончательные выражения (3.12), (3.13).

Пример 7.2. Пусть $f(x) = |3x - 1|$ на $[0, 1]$, как в примере 3.2. Здесь $p = 1$, $q = 3$. Множество (7.1) состоит из двух номеров $\nu = 1$ и $\nu = 2$. Условие (7.2) дает выражение $\langle \nu/3 \rangle \leq 1/3$, выполненное при $\nu = 2$; соответственно $\Delta_{1,3}^{(1)} = \{2\}$ и $\Delta_{1,3}^{(2)} = \{1\}$. Подсчет величин (3.3) приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \nu = 1 \in \Delta_{1,3}^{(2)} &\implies a_{1,3}(1) = 3 \left\langle \frac{1}{3} \right\rangle = 1, & j_{1,3}(1) &= \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = 0; \\ \nu = 2 \in \Delta_{1,3}^{(1)} &\implies a_{1,3}(2) = 3 \left\langle \frac{2}{3} \right\rangle = 1, & j_{1,3}(2) &= \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor = 1. \end{aligned}$$

При подстановке в формулу (3.6) возникают две структурированные суммы

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{1,3}^d(z; 1) &= 2z^{\lceil 1/3 \rceil} (1-z)^{1-\lceil 1/3 \rceil} \sum_{k=0}^d \frac{1}{3k+1} C_{3k+1}^k (z(1-z)^2)^k, & d \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \mathfrak{S}_{1,3}^d(z; 2) &= 2z^{\lceil 2/3 \rceil} (1-z)^{2-\lceil 2/3 \rceil} \sum_{k=0}^d \frac{1}{3k+2} C_{3k+2}^{k+1} (z(1-z)^2)^k, & d \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

В последней (второй) сумме используем элементарное тождество $C_{3k+2}^{k+1} = 2C_{3k+2}^k$. Тогда обнаружится возможность общей записи

$$\mathfrak{S}_{1,3}^d(z; \nu) = 2z(1-z)^\nu \sum_{k=0}^d \frac{\nu}{3k+\nu} C_{3k+\nu}^k (z(1-z)^2)^k, \quad \nu = 1, 2, \quad d \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Применив теперь правило (3.9), устанавливаем указанное прежде представление (3.14) для полиномов, образующих цепочку склеивания $B_{3m+1}(f, z) = B_{3m}(f, z)$. Затем правило (3.10) при $r = 2$ дает представление (3.15) для полиномов $B_{3m+2}(f, z)$.

Итак, проверка конкретных представлений, анонсированных в разделе 3, завершена. Покажем теперь, что идея, использованная в примере 7.2, допускает развитие, и полиномы Бернштейна для модулей вида $f(x) = |qx - 1|$ при всех значениях $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$, приводятся к особой унифицированной форме. Надо только сделать одно дополнительное преобразование в последней из структурированных сумм, отвечающей номеру $\nu = q - 1$. Полностью разберем этот специальный случай.

Пример 7.3. Пусть $f(x) = |qx - 1|$ на $[0, 1]$. Здесь $p = 1$, а $q \in \mathbb{N}$ и $q \geq 3$. Множество (7.1) содержит номера ν от 1 до $q - 1$. Условие (7.2) дает выражение $\langle \nu/q \rangle \leq 1/q$, выполненное, очевидно, лишь при $\nu = q - 1$; соответственно, $\Delta_{1,q}^{(1)} = \{q - 1\}$ и $\Delta_{1,q}^{(2)} = \{1, \dots, q - 2\}$. Подсчет величин (3.3) с учетом того, что $0 < \nu/q < 1$, дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} \nu = 1, \dots, q - 2 \in \Delta_{1,q}^{(2)} &\implies a_{1,q}(\nu) = q \left\langle \frac{\nu}{q} \right\rangle = \nu, & j_{1,q}(\nu) &= \left\lfloor \frac{\nu}{q} \right\rfloor = 0; \\ \nu = q - 1 \in \Delta_{1,q}^{(1)} &\implies a_{1,q}(q - 1) = q \left\langle \frac{q - 1}{q} \right\rangle = 1, & j_{1,q}(q - 1) &= \left\lfloor \frac{q - 1}{q} \right\rfloor = 1. \end{aligned}$$

В результате подстановки в (3.6) образуется $(q - 1)$ структурированная сумма, из которых $(q - 2)$ суммы имеют вид

$$\mathfrak{S}_{1,q}^d(z; \nu) = 2z^{\lceil \nu/q \rceil} (1-z)^{\nu-\lceil \nu/q \rceil} \sum_{k=0}^d \frac{\nu}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^k (z(1-z)^{q-1})^k, \quad \nu = 1, \dots, q - 2, \quad d \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

и одна отдельная сумма вида

$$\mathfrak{S}_{1,q}^d(z; \nu) = 2z^{\lceil \nu/q \rceil} (1-z)^{\nu-\lceil \nu/q \rceil} \sum_{k=0}^d \frac{1}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^{k+1} (z(1-z)^{q-1})^k, \quad \nu = q - 1, \quad d \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Переписав последнюю сумму с учетом элементарного тождества $C_{qk+q-1}^{k+1} = (q-1)C_{qk+q-1}^k$, означающего, что $C_{qk+\nu}^{k+1} = \nu C_{qk+\nu}^k$ при $\nu = q-1$, получаем общую запись структурированных сумм

$$\mathfrak{S}_{1,q}^d(z; \nu) = 2z(1-z)^\nu \sum_{k=0}^d \frac{\nu}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^k (z(1-z)^{q-1})^k, \quad d \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (7.4)$$

справедливую при всех $\nu \in \{1, \dots, q-1\}$, т.е. при всех ν из множества (7.1).

Применив теперь правило (3.9), получим

$$B_{qm+1}(f, z) = B_{qm}(f, z) = 1 + (q-2)z - \sum_{\nu=1}^{q-1} 2z(1-z)^\nu \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\nu}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^k (z(1-z)^{q-1})^k,$$

для полиномов, образующих цепочку склеиваний. Для прочих остатков $r = 2, \dots, q-1$ по формуле (3.10) имеем

$$B_{qm+r}(f, z) = 1 + (q-2)z - \sum_{\nu=1}^{r-1} 2z(1-z)^\nu \sum_{k=0}^m \frac{\nu}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^k (z(1-z)^{q-1})^k - \\ - \sum_{\nu=r}^{q-1} 2z(1-z)^\nu \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\nu}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^k (z(1-z)^{q-1})^k.$$

Вводя символ $\varepsilon_m(\nu, r)$ по правилу (3.2), устанавливаем компактную запись разложения

$$B_{qm+r}(f, z) = 1 + (q-2)z - \sum_{\nu=1}^{q-1} 2z(1-z)^\nu \sum_{k=0}^m \frac{\varepsilon_m(\nu, r)}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^k (z(1-z)^{q-1})^k, \quad (7.5)$$

действующую при всех $m \in \mathbb{N}$ и $r = 0, 1, \dots, q-1$. Наличие унифицированной формулы (7.5) существенно облегчает изучение полиномов Бернштейна для функции $f(x) = |qx-1|$ с точкой излома $x = 1/q$.

Разумеется, аналогичные эффекты должны действовать для зеркально симметричного модуля с точкой излома $x = (q-1)/q$. Для полноты изложения выведем соответствующее разложение Поповичу из базовой формулы (3.1), хотя, конечно, можно было бы просто воспользоваться формулой (7.5) и сделать там замену z на $1-z$.

Пример 7.4. Пусть $f(x) = |qx - q + 1|$ на $[0, 1]$. Здесь $p = q-1$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$. Множество (7.1) содержит номера ν от 1 до $q-1$. Условие (7.2) принимает вид

$$\left\langle \frac{(q-1)\nu}{q} \right\rangle \leq \frac{q-1}{q}. \quad (7.6)$$

Так как $\nu \in \mathbb{N}$ и $0 < \nu/q < 1$, то по определению антидробной части из (2.4) имеем

$$\left\langle \frac{(q-1)\nu}{q} \right\rangle = \left\langle \nu - \frac{\nu}{q} \right\rangle = \frac{\nu}{q},$$

т.е. (7.6) переходит в неравенство $\nu \leq q-1$, выполненное при всех $\nu \in \{1, \dots, q-1\}$; соответственно, $\Delta_{q-1,q}^{(1)} = \{1, \dots, q-1\}$ и $\Delta_{q-1,q}^{(2)} = \emptyset$. Подсчет величин (3.3) дает следующий результат:

$$\nu = 1, \dots, q-1 \in \Delta_{q-1,q}^{(1)} \implies a_{q-1,q}(\nu) = q \left\langle \frac{(q-1)\nu}{q} \right\rangle = \nu, \quad j_{q-1,q}(\nu) = \left\lceil \frac{(q-1)\nu}{q} \right\rceil = \nu.$$

При подстановке данных в (3.1) учтем также, что

$$z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lceil p\nu/q \rceil} \Big|_{p=q-1} = z^{\lceil (q-1)\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lceil (q-1)\nu/q \rceil} = z^\nu (1-z).$$

Тем самым, для случая $f(x) = |qx - q + 1|$ формула (3.1) приводит к представлению

$$B_{qm+r}(f, z) = q - 1 - (q - 2)z - \sum_{\nu=1}^{q-1} 2z^\nu(1 - z) \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(\nu, r)} \frac{\nu}{qk + \nu} C_{qk+\nu}^{(q-1)k+\nu} (z^{q-1}(1 - z))^k,$$

верному при всех $m \in \mathbb{N}$ и $r = 0, 1, \dots, q-1$. Остается заметить, что $C_{qk+\nu}^{(q-1)k+\nu} = C_{qk+\nu}^k$, и записать окончательный итог в виде

$$B_{qm+r}(f, z) = q - 1 - (q - 2)z - \sum_{\nu=1}^{q-1} 2z^\nu(1 - z) \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(\nu, r)} \frac{\nu}{qk + \nu} C_{qk+\nu}^k (z^{q-1}(1 - z))^k \quad (7.7)$$

при всех $m \in \mathbb{N}$ и $r = 0, 1, \dots, q-1$. Как и ожидалось, полиномы (7.5) и (7.7) оказались «зеркально симметричными», переходя друг в друга при замене z на $1 - z$.

Рассмотренные примеры 7.1–7.4 дают регулярные выражения для разложений Поповичу, где все параметры изменяются неким «правильным» образом. Во многих других случаях так просто не получается из-за нетривиального разброса индекса ν по множествам $\Delta_{p,q}^{(1)}$, $\Delta_{p,q}^{(2)}$ и общей непредсказуемости при вычислении величин (3.3). Подробно разберем один типичный пример.

Пример 7.5. Пусть $f(x) = |5x - 2|$ на $[0, 1]$. Здесь $p = 2$, $q = 5$ с множеством $\Delta = \{1, 2, 3, 4\}$. Условие (7.2) дает выражение $\langle 2\nu/5 \rangle \leq 2/5$, выполненное при $\nu = 2, 4$. Отсюда $\Delta_{2,5}^{(1)} = \{2, 4\}$ и $\Delta_{2,5}^{(2)} = \{1, 3\}$. Подсчет величин $a_{2,5}(\nu)$, $j_{2,5}(\nu)$ по формулам (3.3) приводит к следующим значениям:

$$\begin{aligned} \nu = 1 \in \Delta_{2,5}^{(2)} &\implies a_{2,5}(1) = 5 \left\langle \frac{2}{5} \right\rangle = 2, & j_{2,5}(1) &= \left\lfloor \frac{2}{5} \right\rfloor = 0; \\ \nu = 2 \in \Delta_{2,5}^{(1)} &\implies a_{2,5}(2) = 5 \left\langle \frac{4}{5} \right\rangle = 1, & j_{2,5}(2) &= \left\lfloor \frac{4}{5} \right\rfloor = 1; \\ \nu = 3 \in \Delta_{2,5}^{(2)} &\implies a_{2,5}(3) = 5 \left\langle \frac{6}{5} \right\rangle = 1, & j_{2,5}(3) &= \left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor = 1; \\ \nu = 4 \in \Delta_{2,5}^{(1)} &\implies a_{2,5}(4) = 5 \left\langle \frac{8}{5} \right\rangle = 2, & j_{2,5}(4) &= \left\lfloor \frac{8}{5} \right\rfloor = 2. \end{aligned}$$

При подстановке в (3.6) возникают четыре структурированные суммы

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{2,5}^d(z; 1) &= 2z^{\lceil 2/5 \rceil} (1 - z)^{1 - \lceil 2/5 \rceil} \sum_{k=0}^d \frac{2}{5k + 1} C_{5k+1}^{2k} (z^2(1 - z)^3)^k, \\ \mathfrak{S}_{2,5}^d(z; 2) &= 2z^{\lceil 4/5 \rceil} (1 - z)^{2 - \lceil 4/5 \rceil} \sum_{k=0}^d \frac{1}{5k + 2} C_{5k+2}^{2k+1} (z^2(1 - z)^3)^k, \\ \mathfrak{S}_{2,5}^d(z; 3) &= 2z^{\lceil 6/5 \rceil} (1 - z)^{3 - \lceil 6/5 \rceil} \sum_{k=0}^d \frac{1}{5k + 3} C_{5k+3}^{2k+1} (z^2(1 - z)^3)^k, \\ \mathfrak{S}_{2,5}^d(z; 4) &= 2z^{\lceil 8/5 \rceil} (1 - z)^{4 - \lceil 8/5 \rceil} \sum_{k=0}^d \frac{2}{5k + 4} C_{5k+4}^{2k+2} (z^2(1 - z)^3)^k. \end{aligned}$$

Обрабатывая найденные выражения и подставляя их в формулу (3.1) (или в эквивалентные формулы (3.9), (3.10)), получаем нужное разложение

$$\begin{aligned}
 B_{5m+r}(f, z) = & 2 + z - 2z(1 - z) \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(1,r)} \frac{2}{5k+1} C_{5k+1}^{2k} (z^2(1-z)^3)^k - \\
 & - 2z(1-z)^2 \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(2,r)} \frac{1}{5k+2} C_{5k+2}^{2k+1} (z^2(1-z)^3)^k - 2z^2(1-z)^2 \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(3,r)} \frac{1}{5k+3} C_{5k+3}^{2k+1} (z^2(1-z)^3)^k - \\
 & - 2z^2(1-z)^3 \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(4,r)} \frac{2}{5k+4} C_{5k+4}^{2k+2} (z^2(1-z)^3)^k \quad (7.8)
 \end{aligned}$$

при всех $m \in \mathbb{N}$ и $r = 0, 1, 2, 3, 4$. Здесь значения $\varepsilon_m(\nu, r)$ при $\nu = 1, 2, 3, 4$ вычисляются по правилу (3.2). Другими словами,

$$\begin{aligned}
 r = 0, 1 & \implies \varepsilon_m(\nu, r) = m - 1 \text{ при всех } \nu = 1, 2, 3, 4; \\
 r = 2, 3, 4 & \implies \varepsilon_m(\nu, r) = m \text{ при } \nu = 1, \dots, r - 1 \text{ и } \varepsilon_m(\nu, r) = m - 1 \text{ при } \nu = r, \dots, 4.
 \end{aligned}$$

Например, для полиномов из цепочки склеиваний имеем выражение

$$\begin{aligned}
 B_{5m+1}(f, z) = B_{5m}(f, z) = & 2 + z - 2z(1 - z) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{5k+1} C_{5k+1}^{2k} (z^2(1-z)^3)^k - \\
 & - 2z(1-z)^2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{5k+2} C_{5k+2}^{2k+1} (z^2(1-z)^3)^k - 2z^2(1-z)^2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{5k+3} C_{5k+3}^{2k+1} (z^2(1-z)^3)^k - \\
 & - 2z^2(1-z)^3 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{5k+4} C_{5k+4}^{2k+2} (z^2(1-z)^3)^k \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

при всех $m \in \mathbb{N}$.

Вообще же, переход от полинома $B_n(f, z)$ к следующему полиному $B_{n+1}(f, z)$ в данном примере регулируется правилами

$$\begin{aligned}
 B_{5m+2}(f, z) &= B_{5m+1}(f, z) - 2z(1-z) \frac{2}{5m+1} C_{5m+1}^{2m} (z^2(1-z)^3)^m, \\
 B_{5m+3}(f, z) &= B_{5m+2}(f, z) - 2z(1-z)^2 \frac{1}{5m+2} C_{5m+2}^{2m+1} (z^2(1-z)^3)^m, \\
 B_{5m+4}(f, z) &= B_{5m+3}(f, z) - 2z^2(1-z)^2 \frac{1}{5m+3} C_{5m+3}^{2m+1} (z^2(1-z)^3)^m, \\
 B_{5m+5}(f, z) &= B_{5m+4}(f, z) - 2z^2(1-z)^3 \frac{2}{5m+4} C_{5m+4}^{2m+2} (z^2(1-z)^3)^m, \\
 B_{5m+6}(f, z) &= B_{5m+5}(f, z).
 \end{aligned}$$

Согласно общей формуле (6.2) эти рекуррентные соотношения действуют при всех $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В их записи участвуют найденные значения $a_{2,5}(\nu)$, $j_{2,5}(\nu)$.

Нет сомнений, что в рамках подобной схемы можно разложить полиномы Бернштейна для любого рационального модуля вида (1.2), и дальнейшие примеры, должно быть, излишни.

Подведем итог. Несмотря на необходимость некоторых подготовительных расчетов и формальную громоздкость возникающих выражений, рассмотренные примеры наглядно показывают главное преимущество разложений Поповичу по сравнению с исходным определением полиномов Бернштейна (1.1). Как видно из формул (3.11)–(3.15), (7.5), (7.7)–(7.9), коэффициенты разложений не зависят от номера полинома Бернштейна, и при увеличении номера происходит лишь поочередное добавление слагаемых, каждое из которых имеет вполне конкретную структуру и органично вписывается в ту или иную структурированную сумму. Фактически полиномы Бернштейна для функции $f(x) = |qx - p|$ превращаются в набор из $(q - 1)$ частичной сумм для $(q - 1)$

функционального ряда. Это сближает теорию полиномов Бернштейна с теорией степенных рядов, позволяя точно находить комплексную область сходимости полиномов Бернштейна для любого рационального модуля вида (1.2) и оценивать скорость стремления полиномов к соответствующей предельной функции. Элементарные приемы обеспечивают вполне законченные результаты. Продемонстрируем открывающиеся возможности.

8. Сходимость полиномов и компакты Канторовича. Уже на ранних этапах развития теории полиномов Бернштейна в работах Канторовича [7] и Райта [61] было замечено, что при определенных требованиях аналитичности порождающей функции $f \in C[0, 1]$ сходимость полиномов Бернштейна распространяется в некоторую область комплексной плоскости, связанную с имеющимися особенностями функции f . Слово «область» понимается здесь весьма расширительно, означая всё множество сходимости или какую-то его значимую часть. Высоко оценив идеи Л. В. Канторовича, исследования в данном направлении продолжил и развил уже сам С. Н. Бернштейн в двух ёмких, технически трудных работах [1, 2]. Адаптированное изложение результатов Бернштейна (и, отчасти, Канторовича) дано в четвертой главе книги [49]. Ряд дополнительных сведений и ссылок по теме можно найти в недавней монографии [42].

Отвлекаясь от многих деталей и сложностей, выделим два базовых принципа, восходящих к работе Канторовича [7].

Принцип 1. Пусть функция $f \in C[0, 1]$ является сужением на $[0, 1]$ целой функции $f(z)$. Тогда последовательность полиномов Бернштейна (1.1) при $n \rightarrow \infty$ сходится к $f(z)$ равномерно на любом компакте в плоскости \mathbb{C} (см. [7, теорема 1], а также [11, с. 254–256]).

Принцип 2. Пусть $f \in C[0, 1]$, причем $f(x) \equiv \varphi_1(x)$ на отрезке $[0, c] \subset [0, 1]$ и $f(x) \equiv \varphi_2(x)$ на отрезке $[c, 1] \subset [0, 1]$, где $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ — целые функции в плоскости \mathbb{C} . Тогда последовательность полиномов Бернштейна (1.1) при $n \rightarrow \infty$ сходится в области, ограниченной кривой

$$\Lambda_c : \left| \frac{z}{c} \right|^c \left| \frac{1-z}{1-c} \right|^{1-c} = 1, \quad (8.1)$$

в левой петле — к функции $\varphi_1(z)$, а в правой петле — к функции $\varphi_2(z)$.

Лемнискатоподобные кривые вида (8.1), где значение $c \in (0, 1)$ выступает в роли параметра, играют ключевую роль при описании области сходимости полиномов Бернштейна для всякой порождающей функции $f \in C[0, 1]$, «составленной» из нескольких аналитических кусков. Собственно, именно этот факт и был открыт в [7, теорема 3]. Поэтому всякую кривую (8.1) с фиксированным значением $c \in (0, 1)$ будем называть *лемнискатой Канторовича*, а компакт, ограниченный такой кривой, т.е. множество

$$K_c \equiv \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z}{c} \right|^c \left| \frac{1-z}{1-c} \right|^{1-c} \leq 1 \right\}, \quad (8.2)$$

называем *компактом Канторовича*.

Сформулированный выше принцип 2 несколько отличается от оригинальной версии [7]. Доказательство результата в нужной нам форме получается сочетанием принципа 1 и теоремы 4.1.3 из монографии [49].

Отметим, кстати, что ввиду сложности темы формулировки в классических работах упомянутого цикла не всегда обладают должной отчётливостью. Среди прочего часто остается неясным, сохранится ли сходимость полиномов Бернштейна на границе обсуждаемой области и будет ли наблюдаться расхождение во всех точках вне области. Также почти не изучался вопрос о скорости сходимости полиномов Бернштейна $B_n(f, z)$ для комплексных значений z вне основного отрезка $[0, 1]$.

Теперь же, используя разработанный аппарат обобщенных разложений Поповичу, можно получить полную картину сходимости полиномов Бернштейна в плоскости \mathbb{C} для любого рационального модуля (1.2) при ограничениях (2.1).

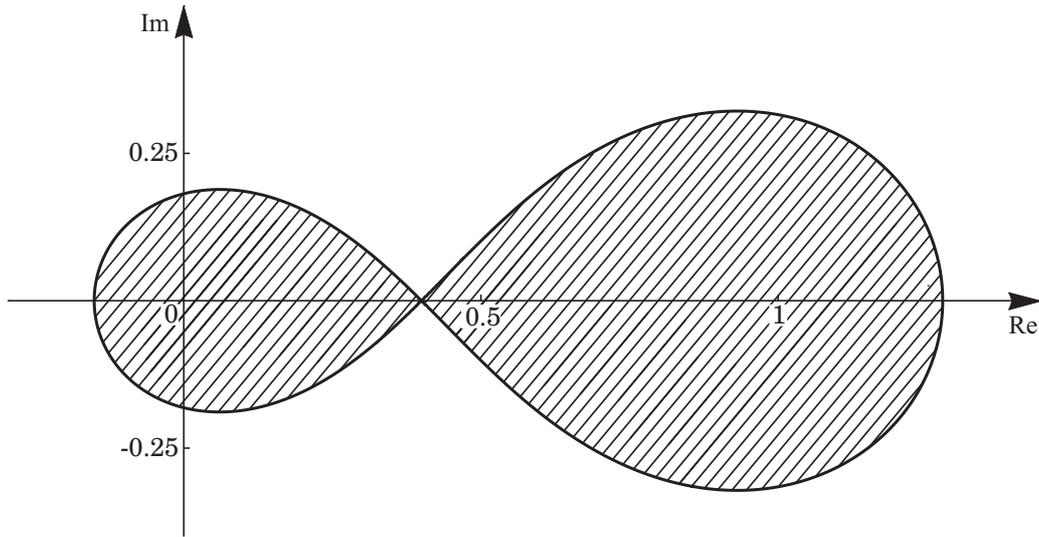


Рис. 1. Лемниската Канторовича и соответствующий компакт, построенные по формулам (8.3) и (8.4) при $p = 2$, $q = 5$, т.е. для функции $f(x) = |5x - 2|$.

В этом случае $f(x) = p - qx$ при $x \in [0, p/q]$ и $f(x) = qx - p$ при $x \in [p/q, 1]$ с разделительной точкой излома $c = p/q$. Ситуация полностью подпадает под сформулированный выше принцип 2. Уравнение (8.1) для лемнискаты Канторовича приводится к виду

$$\Lambda_{p/q} \equiv \Lambda_{p,q} : \frac{q^q}{p^p (q-p)^{q-p}} |z^p(1-z)^{q-p}| = 1. \quad (8.3)$$

Лемниската (8.3) ограничивает компакт Канторовича

$$K_{p/q} \equiv K_{p,q} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{q^q}{p^p (q-p)^{q-p}} |z^p(1-z)^{q-p}| \leq 1 \right\}. \quad (8.4)$$

Между прочим, уравнение кривой (8.3) полностью соответствует стандартному определению лемнискаты как линии уровня алгебраического полинома переменной $z \in \mathbb{C}$ (см. [9, с. 313–316]). Компакт $K_{p,q}$ состоит из левой петли $K_{p,q}^{(1)}$ и правой петли $K_{p,q}^{(2)}$, определяемых по правилам

$$K_{p,q}^{(1)} \equiv K_{p,q} \cap \{\operatorname{Re} z \leq p/q\}, \quad K_{p,q}^{(2)} \equiv K_{p,q} \cap \{\operatorname{Re} z \geq p/q\}. \quad (8.5)$$

Ясно, что $K_{p,q}^{(1)} \cup K_{p,q}^{(2)} = K_{p,q}$ и $K_{p,q}^{(1)} \cap K_{p,q}^{(2)} = \{p/q\}$. Все точки основного отрезка $[0, 1]$ попадают строго внутрь $K_{p,q}$, за исключением одной лишь точки $c = p/q$ — точки самопересечения лемнискаты (8.3).

Наглядное представление о происходящем на примере рационального модуля $f(x) = |5x - 2|$, т.е. при $p = 2$ и $q = 5$, дает рис. 1.

Точное описание множества сходимости полиномов Бернштейна для всякого рационального модуля вида (1.2) выглядит следующим образом.

Теорема 8.1. Пусть $B_n(f, z)$ — полиномы Бернштейна (1.1) от функции (1.2) при соглашениях (2.1). Тогда $B_n(f, z) \rightarrow \varphi(z)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на компакте $K_{p,q}$ из формулы (8.4). Здесь

$$\varphi(z) \equiv \begin{cases} p - qz, & z \in K_{p,q}^{(1)}, \\ qz - p, & z \in K_{p,q}^{(2)}, \end{cases} \quad \varphi(x) = f(x) \text{ при } x \in [0, 1]. \quad (8.6)$$

Для любой внешней точки $z \in \mathbb{C} \setminus K_{p,q}$ последовательность $B_n(f, z)$ расходится, т.е. не имеет конечного предела в \mathbb{C} .

Ключевую роль в доказательстве теоремы 8.1 играет один результат об оценках последовательных разностей полиномов Бернштейна. Для его формулировки введем обозначения

$$M_{p,q}(\nu) \equiv \frac{(q + \nu - 1)^\nu}{(\min\{p, q - p\})^{\nu+1}} \sqrt{\frac{2p(q-p)}{q\pi}} \max_{z \in \Lambda_{p,q}} \left| z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lceil p\nu/q \rceil} \right| > 0, \quad (8.7)$$

$$L_{p,q}(\nu) \equiv \frac{7}{8} \frac{q^{\nu-1}}{(\max\{p + \nu, q - p + \nu\})^\nu} \sqrt{\frac{2q}{p(q-p)\pi}} \min_{z \in \Lambda_{p,q}} \left| z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lceil p\nu/q \rceil} \right| > 0, \quad (8.8)$$

где $\nu = 1, \dots, q-1$, а $\Lambda_{p,q}$ — лемниската Канторовича (8.3). Введем также важную величину, точнее, полином

$$T_{p,q}(z) \equiv \frac{q^q}{p^p(q-p)^{q-p}} z^p (1-z)^{q-p}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (8.9)$$

определяющий лемнискату (8.3) уравнением $|T_{p,q}(z)| = 1$. Будем называть $T_{p,q}(z)$ *первичным полиномом Канторовича*. Зафиксируем для ссылок связь

$$\begin{cases} |T_{p,q}(z)| < 1, & z \in \text{int } K_{p,q}, \\ |T_{p,q}(z)| = 1, & z \in \partial K_{p,q} = \Lambda_{p,q}, \\ |T_{p,q}(z)| > 1, & z \in \mathbb{C} \setminus K_{p,q}, \end{cases} \quad (8.10)$$

между полиномом (8.9) и порожденными им лемниской (8.3) и компактом (8.4).

Основываясь на представлении (6.2) из леммы 6.1, можно установить следующий результат.

Лемма 8.1. *Для полиномов Бернштейна (1.1) от функции (1.2) при соглашениях (2.1) верны оценки*

$$\left| B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z) \right| \leq M_{p,q}(\nu) \frac{1}{k^{3/2}} |T_{p,q}(z)|^k, \quad z \in K_{p,q}, \quad (8.11)$$

$$\left| B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z) \right| \geq L_{p,q}(\nu) \frac{1}{k^{3/2}} |T_{p,q}(z)|^k, \quad z \in \mathbb{C} \setminus K_{p,q}, \quad (8.12)$$

с компактом $K_{p,q}$ из (8.4) и полиномом $T_{p,q}(z)$ из (8.9). Здесь $k \in \mathbb{N}$, $\nu = 1, \dots, q-1$, а коэффициенты $M_{p,q}(\nu)$ и $L_{p,q}(\nu)$ определены формулами (8.7) и (8.8) соответственно.

Отсюда, ввиду связи (8.10), ясно, что разность между двумя последовательными полиномами $B_{qk+\nu+1}(f, z)$ и $B_{qk+\nu}(f, z)$ внутри компакта $K_{p,q}$ при больших значениях $n = qk + \nu$ становится экспоненциально малой, а вне компакта — экспоненциально большой. Лемма 8.1 позволяет также оценить скорость сходимости изучаемых полиномов Бернштейна на компакте $K_{p,q}$ к соответствующей предельной функции (8.6). Для формулировки результата введем обозначение

$$M_{p,q} \equiv \sum_{\nu=1}^{q-1} M_{p,q}(\nu) > 0 \quad (8.13)$$

со значениями $M_{p,q}(\nu)$ из формулы (8.7).

Теорема 8.2. *Пусть $B_n(f, z)$ — полиномы Бернштейна (1.1) от функции (1.2) при соглашениях (2.1). Пусть уклонения полиномов от предельной функции (8.6) заданы формулой*

$$R_n(f, z) \equiv B_n(f, z) - \varphi(z), \quad z \in K_{p,q}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.14)$$

Тогда при всех $z \in \text{int } K_{p,q}$, т.е. внутри компакта Канторовича (8.4), имеем оценку

$$\left| R_{qm+r}(f, z) \right| \leq \frac{M_{p,q}}{1 - |T_{p,q}(z)|} \frac{|T_{p,q}(z)|^m}{m^{3/2}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad r = 0, 1, \dots, q-1, \quad (8.15)$$

с величинами $T_{p,q}(z)$, $M_{p,q}$ из формул (8.9) и (8.13) соответственно. Если же $z \in \partial K_{p,q} = \Lambda_{p,q}$, то

$$\left| R_{qm+r}(f, z) \right| \leq \frac{2M_{p,q}}{\sqrt{m}} \left(1 + \frac{1}{2m} \right), \quad m \in \mathbb{N}, \quad r = 0, 1, \dots, q-1, \quad (8.16)$$

с величиной $M_{p,q}$ из формулы (8.13).

Для того чтобы избежать чрезмерной детализации, мы даем оценки (8.15) и (8.16) в несколько огрубленной форме — без учета влияния остатка r в номере $n = qt + r$ полинома Бернштейна. Тем не менее, теорема 8.2 показывает главное. Как видно из оценки (8.15), внутри компакта $K_{p,q}$ скорость сходимости полиномов Бернштейна к своей предельной функции является экспоненциальной (ибо $|T_{p,q}(z)| < 1$ при $z \in \text{int } K_{p,q}$). На границе же действует другая, более слабая степенная оценка (8.16). Эти качественные различия весьма точно отражают суть дела и соответствуют нашим прежним прогнозам в [25].

План доказательства перечисленных результатов будет следующий. Сначала, в разделе 9, мы получим нужные оценки биномиальных коэффициентов, фигурирующих в формуле (6.2). Затем, в следующем разделе 10, докажем лемму 8.1 об оценках разностей полиномов Бернштейна и выведем из нее основные теоремы 8.1 и 8.2.

9. Оценки биномиальных коэффициентов. Задачи об оценках факториальных величин, в том числе биномиальных коэффициентов, давно интересуют математиков. Исходным результатом была знаменитая формула Валлиса (1656 г.), точный исторический вид которой (см. [33, с. 152–155] или [41, с. 12]) означал равенство

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdots \frac{2k-1}{2k-2} \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdots$$

Более удобно группировать попарно

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdots \frac{(2k-1) \cdot (2k-1)}{(2k-2) \cdot (2k)} \cdots \tag{9.1}$$

Обрабатывая бесконечное произведение (9.1), получаем запись

$$\frac{1}{\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left[2^{-2k} C_{2k}^k \right]^2 \tag{9.2}$$

и равносильную ей асимптотику

$$2^{-2k} C_{2k}^k \sim \frac{1}{\sqrt{k\pi}}, \quad k \rightarrow \infty. \tag{9.3}$$

Последнюю естественно называть *асимптотикой Валлиса*. Поскольку все сомножители в (9.1) больше единицы, то сходимость к пределу (9.2) происходит монотонно снизу. Соответственно,

$$2^{-2k} C_{2k}^k < \frac{1}{\sqrt{k\pi}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{9.4}$$

«Неасимптотическое» неравенство (9.4) подкрепляет асимптотику Валлиса (9.3). Дополнительную информацию по оценкам центрального биномиального коэффициента см. в [16, с. 59–61] или [46].

Общую основу подобных результатов дает формула Стирлинга, простейший асимптотический вид которой общеизвестен:

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty. \tag{9.5}$$

Традиционно считается, что для доказательства формулы Стирлинга нужна какая-либо версия формулы Валлиса (см., например, [29, п. 406]). Однако возможны и другие, независимые обоснования для (9.5) (см. [6, 15]), позволяющие корректно применять саму формулу Стирлинга к выводу изначальной асимптотики (9.3).

Факториальные величины отличаются, как правило, регулярным поведением, и для них найдено много оценок, до сих пор активно уточняемых. Одно из недавних достижений [58] удачно укладывается в контекст нашего исследования.

Напомним, что нам нужны оценки биномиального коэффициента $C_{qk+\nu}^{pk+jp,q(\nu)}$, возникшего при выводе формулы (6.2). Начнем с базового случая — «невозмущённого» коэффициента C_{qk}^{pk} . Всюду в данном разделе считаем, что p, q — фиксированные натуральные значения, удовлетворяющие ограничениям (2.1). В роли переменной выступает $k \in \mathbb{N}$.

Из формулы Стирлинга (9.5) следует асимптотика (ср. [14, с. 105])

$$C_{qk}^{pk} \sim \sqrt{\frac{q}{2p(q-p)k\pi}} \left(\frac{q^q}{p^p(q-p)^{q-p}} \right)^k, \quad k \rightarrow \infty. \quad (9.6)$$

Недавно в [58] на основе идей из [55, 56] установлены двусторонние оценки для C_{qk}^{pk} , согласованные с асимптотикой (9.6). Показано (см. следствие 2.3 к теореме 2.2 в [58]), что

$$\exp\left(-\frac{q^2 - pq + p^2}{12pq(q-p)k}\right) \sqrt{\frac{q}{2p(q-p)k\pi}} < \left(\frac{q^q}{p^p(q-p)^{q-p}} \right)^{-k} C_{qk}^{pk} < \sqrt{\frac{q}{2p(q-p)k\pi}} \quad (9.7)$$

при всех $k \in \mathbb{N}$. Когда $p = 1$, $q = 2$, формула (9.7) содержит в себе прежнюю оценку сверху (9.4). Чуть загрубим нижнюю границу в (9.7) с учетом того, что $e^{-u} > 1 - u$ при $u > 0$. Имеем

$$\left(1 - \frac{q^2 - pq + p^2}{12pq(q-p)k}\right) \sqrt{\frac{q}{2p(q-p)k\pi}} < \left(\frac{q^q}{p^p(q-p)^{q-p}} \right)^{-k} C_{qk}^{pk} < \sqrt{\frac{q}{2p(q-p)k\pi}} \quad (9.8)$$

снова при всех $k \in \mathbb{N}$.

Принимая во внимание ограничения (2.1), заметим, что

$$\frac{q^2 - pq + p^2}{pq(q-p)} = \frac{1}{p} + \frac{p}{q(q-p)} \leq \frac{1}{p} + \frac{p}{(p+1) \cdot 1} = \frac{p^2 + p + 1}{p(p+1)} = 1 + \frac{1}{p(p+1)} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2}.$$

Поэтому из (9.8) следует, что

$$\left(1 - \frac{1}{8k}\right) \sqrt{\frac{q}{2p(q-p)k\pi}} < \left(\frac{q^q}{p^p(q-p)^{q-p}} \right)^{-k} C_{qk}^{pk} < \sqrt{\frac{q}{2p(q-p)k\pi}}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (9.9)$$

Поскольку поддержание асимптотики (9.6) сейчас не принципиально, еще ослабим нижнюю границу в (9.9), заменив там левую скобку на $7/8$. Затем, разделив на k , окончательно получаем

$$\frac{7}{8} \sqrt{\frac{q}{2p(q-p)\pi}} \frac{1}{k^{3/2}} < \left(\frac{q^q}{p^p(q-p)^{q-p}} \right)^{-k} \frac{C_{qk}^{pk}}{k} < \sqrt{\frac{q}{2p(q-p)\pi}} \frac{1}{k^{3/2}}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (9.10)$$

Этого результата для нас достаточно.

Установим теперь одно общее утверждение, позволяющее сравнивать «возмущённые» коэффициенты $C_{qk+\nu}^{pk+jp,q(\nu)}$ со стандартными C_{qk}^{pk} .

Лемма 9.1. Пусть j — целое число, причем $0 \leq j \leq \nu$, где $\nu \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left(\frac{q}{\max\{p+\nu, q-p+\nu\}} \right)^\nu \leq \frac{qk}{qk+\nu} \frac{C_{qk+\nu}^{pk+j}}{C_{qk}^{pk}} \leq \left(\frac{q+\nu-1}{\min\{p, q-p\}} \right)^\nu, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (9.11)$$

Доказательство. Разберем возможный случай $0 < j < \nu$. Запишем представление

$$\frac{qk}{qk+\nu} \frac{C_{qk+\nu}^{pk+j}}{C_{qk}^{pk}} = \frac{qk(qk+1) \dots (qk+\nu-1)}{(pk+1) \dots (pk+j) \cdot ((q-p)k+1) \dots ((q-p)k+\nu-j)}. \quad (9.12)$$

Оценим эту величину сверху:

$$\frac{qk}{qk+\nu} \frac{C_{qk+\nu}^{pk+j}}{C_{qk}^{pk}} \leq \frac{(qk+\nu-1)^\nu}{(pk)^j ((q-p)k)^{\nu-j}} = \frac{\left(q + \frac{\nu-1}{k}\right)^\nu}{p^j (q-p)^{\nu-j}} \leq \frac{(q+\nu-1)^\nu}{p^j (q-p)^{\nu-j}} \leq \frac{(q+\nu-1)^\nu}{(\min\{p, q-p\})^\nu}.$$

Но это и есть верхняя оценка в (9.11).

Вновь пользуясь (9.12), дадим оценку снизу:

$$\begin{aligned} \frac{qk}{qk + \nu} \frac{C_{qk+\nu}^{pk+j}}{C_{qk}^{pk}} &\geq \frac{(qk)^\nu}{(pk+j)^j ((q-p)k + \nu - j)^{\nu-j}} = \frac{q^\nu}{\left(p + \frac{j}{k}\right)^j \left(q - p + \frac{\nu-j}{k}\right)^{\nu-j}} \geq \\ &\geq \frac{q^\nu}{(p+j)^j (q-p+\nu-j)^{\nu-j}} \geq \frac{q^\nu}{(p+\nu)^j (q-p+\nu)^{\nu-j}} = \left(\frac{q}{\max\{p+\nu, q-p+\nu\}}\right)^\nu. \end{aligned}$$

Тем самым, получена нижняя оценка в (9.11). Случай $0 < j < \nu$ рассмотрен. Если в исходном условии $0 \leq j \leq \nu$ присутствует равенство, то некоторые сомножители в (9.12) будут не нужны, выкладки упростятся, а результат останется прежним. Лемма доказана. \square

Лемма 9.1 применима к коэффициентам $C_{qk+\nu}^{pk+j}$ со значениями $j = j_{p,q}(\nu)$ из формулы (3.3), так как заведомо $0 \leq j_{p,q}(\nu) \leq \nu$ (см. (3.5)). Теперь всё готово для доказательства результатов, сформулированных в разделе 8.

10. Доказательства результатов о сходимости. Рассматриваем полиномы Бернштейна (1.1) от рационального модуля (1.2) при соглашениях (2.1).

Доказательство леммы 8.1. Оценим нужным образом разности $B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z)$ при $k \in \mathbb{N}$ и $\nu = 1, \dots, q-1$. Случай $k=0$ обсудим потом отдельно.

Взяв за основу представление (6.2), выделим там агрегат

$$\mathfrak{A}_{p,q}(z; k, \nu) \equiv \frac{a_{p,q}(\nu)}{qk + \nu} C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)} z^{pk} (1-z)^{(q-p)k} \quad (10.1)$$

со значениями $a_{p,q}(\nu)$, $j_{p,q}(\nu)$, заданными правилами (3.3). Немного огрубив неравенства (3.5), имеем соотношения

$$1 \leq a_{p,q}(\nu) \leq \max\{p, q-p\} = \frac{p(q-p)}{\min\{p, q-p\}}, \quad 0 \leq j_{p,q}(\nu) \leq \nu, \quad \nu = 1, \dots, q-1. \quad (10.2)$$

Заметим также, что

$$z^{pk} (1-z)^{(q-p)k} = (z^p (1-z)^{q-p})^k = \left(\frac{q^q}{p^p (q-p)^{q-p}}\right)^{-k} (T_{p,q}(z))^k$$

с первичным полиномом $T_{p,q}(z)$ из формулы (8.9). Теперь запишем

$$|\mathfrak{A}_{p,q}(z; k, \nu)| = \frac{a_{p,q}(\nu)}{q} \cdot \frac{qk}{qk + \nu} \frac{C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)}}{C_{qk}^{pk}} \cdot \left(\frac{q^q}{p^p (q-p)^{q-p}}\right)^{-k} \frac{C_{qk}^{pk}}{k} \cdot |T_{p,q}(z)|^k. \quad (10.3)$$

Принимая во внимание ограничения (10.2), а также учитывая оценки (9.10) и (9.11), получаем, что

$$\begin{cases} |\mathfrak{A}_{p,q}(z; k, \nu)| \leq \frac{(q+\nu-1)^\nu}{(\min\{p, q-p\})^{\nu+1}} \sqrt{\frac{p(q-p)}{2q\pi}} \frac{1}{k^{3/2}} |T_{p,q}(z)|^k, \\ |\mathfrak{A}_{p,q}(z; k, \nu)| \geq \frac{7}{8} \frac{q^{\nu-1}}{(\max\{p+\nu, q-p+\nu\})^\nu} \sqrt{\frac{q}{2p(q-p)\pi}} \frac{1}{k^{3/2}} |T_{p,q}(z)|^k \end{cases} \quad (10.4)$$

при $z \in \mathbb{C}$ с полиномом $T_{p,q}(z)$ из формулы (8.9). Поясним на всякий случай, что при оценивании величины (10.3) мы приняли

$$\frac{1}{q} \leq \frac{a_{p,q}(\nu)}{q} \leq \frac{p(q-p)}{q \min\{p, q-p\}}, \quad (10.5)$$

что допустимо в силу первого соотношения (10.2). Особо подчеркнем, что результат (10.4) получен при $k \in \mathbb{N}$ и $\nu = 1, \dots, q-1$. Случай $k=0$ по-прежнему пока не рассматриваем.

При помощи введенного обозначения (10.1) ключевую формулу (6.2) можно записать в виде

$$B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z) = -2z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lfloor p\nu/q \rfloor} \mathfrak{A}_{p,q}(z; k, \nu). \quad (10.6)$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $\nu = 1, \dots, q-1$. Оценим (10.6) по модулю отдельно для $z \in K_{p,q}$ и для $z \in \mathbb{C} \setminus K_{p,q}$ с компактом $K_{p,q}$ вида (8.4). Согласно классическим принципам максимума и минимума модуля (см. [9, с. 309]) замечаем, что

$$\begin{cases} \max_{z \in K_{p,q}} \left| z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lfloor p\nu/q \rfloor} \right| = \max_{z \in \Lambda_{p,q}} \left| z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lfloor p\nu/q \rfloor} \right|, \\ \inf_{z \notin K_{p,q}} \left| z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lfloor p\nu/q \rfloor} \right| = \min_{z \in \Lambda_{p,q}} \left| z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lfloor p\nu/q \rfloor} \right|, \end{cases} \quad (10.7)$$

где $\Lambda_{p,q}$ — граница компакта $K_{p,q}$, т.е. лемниската Канторовича (8.3). Воспользуемся соотношениями (10.4) и (10.7) при оценке представления (10.6). Очевидными комбинациями указанных формул получаем два вывода:

- (1) при $z \in K_{p,q}$ справедлива оценка сверху (8.11) с величиной $M_{p,q}(\nu)$ из формулы (8.7);
- (2) при $z \in \mathbb{C} \setminus K_{p,q}$ справедлива оценка снизу (8.12) с величиной $L_{p,q}(\nu)$ из формулы (8.8).

Лемма 8.1 доказана. \square

Лемма 8.1 создает твердую основу для дальнейшего. Но прежде чем перейти к доказательству основных результатов «о сходимости» из теорем 8.1 и 8.2, полезно дополнить технический аппарат, связанный с разложениями Поповичу.

Напомним, что согласно установленной основной теореме 3.1 интересующие нас полиномы Бернштейна $B_n(f, z)$ от функции (1.2) можем выражать формулами (3.9), (3.10) через структурированные суммы (3.6).

Каждую такую сумму $\mathfrak{S}_{p,q}^d(z; \nu)$ при фиксированном номере $\nu \in \{1, \dots, q-1\}$ будем рассматривать как d -ю частичную сумму функционального ряда

$$\mathfrak{S}_{p,q}(z; \nu) = 2z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lfloor p\nu/q \rfloor} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{p,q}(\nu)}{qk + \nu} C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)} (z^p(1-z)^{q-p})^k. \quad (10.8)$$

Используя представление (6.2) из леммы 6.1, получаем эквивалентную запись

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{p,q}(z; \nu) &= - \sum_{k=0}^{\infty} (B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z)) = \\ &= -(B_{\nu+1}(f, z) - B_{\nu}(f, z)) - \sum_{k=1}^{\infty} (B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z)). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Лемма 8.1 устанавливает связь подобных рядов с понятиями «круга Канторовича». Имеются в виду лемниската $\Lambda_{p,q}$, компакт $K_{p,q}$ и первичный полином $T_{p,q}(z)$ из формул (8.3), (8.4) и (8.9) соответственно.

Действительно, пусть $z \in K_{p,q}$. Так как $|T_{p,q}(z)| \leq 1$ на компакте $K_{p,q}$ (см. (8.10)), то по лемме 8.1 мажорируем (10.9) следующим образом:

$$|\mathfrak{S}_{p,q}(z; \nu)| \leq M_{p,q}^{(0)}(\nu) + M_{p,q}(\nu) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} |T_{p,q}(z)|^k \leq M_{p,q}^{(0)}(\nu) + M_{p,q}(\nu) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} < +\infty.$$

Здесь $M_{p,q}(\nu)$, $M_{p,q}^{(0)}(\nu)$ суть конечные величины, первая — из формулы (8.7), а вторая — вида

$$M_{p,q}^{(0)}(\nu) \equiv \max_{z \in K_{p,q}} |B_{\nu+1}(f, z) - B_{\nu}(f, z)| > 0. \quad (10.10)$$

По признаку Вейерштрасса функциональный ряд (10.8) сходится абсолютно и равномерно на компакте $K_{p,q}$, где определена непрерывная сумма $\mathfrak{S}_{p,q}(z; \nu)$. К ней сходятся частичные суммы $\mathfrak{S}_{p,q}^d(z; \nu)$ при $d \rightarrow \infty$.

Внутренность компакта $K_{p,q}$ состоит из двух областей, ограниченных петлями лемнискаты $\Lambda_{p,q}$. Слагаемые ряда (10.8) — обычные полиномы, аналитические всюду в \mathbb{C} . По теореме Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических функций (см. [9, с. 265]) сумма $\mathfrak{S}_{p,q}(z; \nu)$ будет раздельно аналитической внутри каждой открытой компоненты компакта $K_{p,q}$, т.е. внутри левой

петли лемнискаты получится одна аналитическая предельная функция, а внутри правой петли — другая, возможно, отличная от первой.

При $z \in \mathbb{C} \setminus K_{p,q}$ ряд (10.8) расходится. Для того чтобы это заметить, достаточно сравнить запись (10.9) с оценкой (8.12) из леммы 8.1. Поскольку $|T_{p,q}(z)| > 1$ вне компакта $K_{p,q}$ (см. (8.10)), то из (8.12) следует, что во всякой точке $z \in \mathbb{C} \setminus K_{p,q}$ величина $|B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z)|$ экспоненциально растет при $k \rightarrow \infty$ и уж никак не стремится к нулю. Тем самым, для (10.9) нарушено необходимое условие сходимости, что и влечет расходимость ряда (10.8). Для четкости изложения сформулируем установленный результат.

Теорема 10.1. Пусть p, q — фиксированные числа из (2.1). Тогда при любом заданном значении $\nu \in \{1, \dots, q-1\}$ функциональный ряд (10.8) с величинами $a_{p,q}(\nu)$, $j_{p,q}(\nu)$, определенными правилами (3.3), сходится абсолютно и равномерно на компакте $K_{p,q}$ из формулы (8.4) и сходится в любой точке $z \in \mathbb{C} \setminus K_{p,q}$. Сумма ряда $\mathfrak{S}_{p,q}(z; \nu)$ непрерывна на $K_{p,q}$ и отдельно аналитична внутри левой и правой петель этого компакта.

Теорема 10.1 полностью доказана. Устраним лишь один технический пробел, связанный с оценками агрегата $\mathfrak{A}_{p,q}(z; k, \nu)$ при $k = 0$. По очевидной причине (из-за деления на k) этот специфический случай выпал из общего результата (10.4).

Согласно определению (10.1) имеем выражение

$$\mathfrak{A}_{p,q}(z; 0, \nu) = \frac{a_{p,q}(\nu)}{\nu} C_{\nu}^{j_{p,q}(\nu)} \equiv \mathfrak{A}_{p,q}^{(0)}(\nu), \quad \nu = 1, \dots, q-1, \quad (10.11)$$

по факту не зависящее от z . Для биномиальных коэффициентов возьмем «грубую» оценку

$$1 \leq C_{\nu}^j \leq 2^{\nu} \sqrt{\frac{2}{\nu\pi}}, \quad j = 0, \dots, \nu. \quad (10.12)$$

Первая (нижняя) часть в (10.12) очевидна. Для доказательства оценки сверху рассмотрим отдельно четные $\nu = 2\mu$ и нечетные $\nu = 2\mu - 1$. Используем неравенство Валлиса (9.4). При $\nu = 2\mu$ имеем

$$\max_{0 \leq j \leq \nu} C_{\nu}^j = \max_{0 \leq j \leq 2\mu} C_{2\mu}^j = C_{2\mu}^{\mu} < \frac{2^{2\mu}}{\sqrt{\mu\pi}} = 2^{\nu} \sqrt{\frac{2}{\nu\pi}}.$$

При $\nu = 2\mu - 1$ имеем

$$\max_{0 \leq j \leq \nu} C_{\nu}^j = \max_{0 \leq j \leq 2\mu-1} C_{2\mu-1}^j = C_{2\mu-1}^{\mu-1} = C_{2\mu-1}^{\mu} = \frac{1}{2} C_{2\mu}^{\mu} < \frac{2^{2\mu-1}}{\sqrt{\mu\pi}} < 2^{2\mu-1} \sqrt{\frac{2}{(2\mu-1)\pi}} = 2^{\nu} \sqrt{\frac{2}{\nu\pi}}.$$

Оценка (10.12) доказана.

Принимая во внимание оценку (10.12) и ограничения (10.2), получаем для агрегата (10.11), что

$$\frac{1}{\nu} \leq \mathfrak{A}_{p,q}^{(0)}(\nu) \equiv \frac{a_{p,q}(\nu)}{\nu} C_{\nu}^{j_{p,q}(\nu)} \leq \max\{p, q-p\} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^{\nu}}{\nu^{3/2}}, \quad \nu = 1, \dots, q-1. \quad (10.13)$$

Соответственно, для величины $M_{p,q}^{(0)}(\nu)$ из формулы (10.10), используя представление (6.2), взятое при $k = 0$, устанавливаем оценку сверху

$$\begin{aligned} M_{p,q}^{(0)}(\nu) &\equiv \max_{z \in K_{p,q}} |B_{\nu+1}(f, z) - B_{\nu}(f, z)| = 2 \mathfrak{A}_{p,q}^{(0)}(\nu) \max_{z \in K_{p,q}} |z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lceil p\nu/q \rceil}| \leq \\ &\leq \max\{p, q-p\} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^{\nu+1}}{\nu^{3/2}} \max_{z \in \Lambda_{p,q}} |z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lceil p\nu/q \rceil}|, \quad \nu = 1, \dots, q-1. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Двойное неравенство (10.13) можно рассматривать как дополнение к прежней формуле (10.4); цепочка же (10.14) дает некий аналог оценки (8.11) в пропущенном ранее случае $k = 0$. Эти результаты полезно иметь для полноты изложения.

Доказательство теоремы 8.1. Напомним, что надо установить два факта: во-первых, сходимость полиномов Бернштейна от рационального модуля (1.2) к соответствующей предельной функции (8.6) всюду на компакте $K_{p,q}$; а, во-вторых, расходимость тех же полиномов всюду вне

компакта $K_{p,q}$. По-прежнему считаем, что компакт Канторевича $K_{p,q}$ определен формулой (8.4) для фиксированной порождающей функции $f(x) = |qx - p|$, взятой при соглашениях (2.1).

Начнем со сходимости. Она теперь доказывается несложно. По теореме 3.1 изучаемые полиномы $B_n(f, z)$ при $n \geq q$ представимы формулами (3.9) и (3.10), составленными из $q - 1$ структурированных сумм вида (3.6). Каждая такая сумма при фиксированном $\nu \in \{1, \dots, q - 1\}$ есть частичная сумма соответствующего функционального ряда (10.8). По теореме 10.1 все эти ряды (в конечном числе $q - 1$) равномерно сходятся на одном и том же компакте Канторевича $K_{p,q}$. Представления (3.9) и (3.10) показывают, что на том же компакте при любом фиксированном значении $r \in \{0, \dots, q - 1\}$ будет сходиться подпоследовательность полиномов

$$B_{qm+r}(f, z), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (10.15)$$

имея в качестве предельной функции комбинацию

$$p + (q - 2p)z - \sum_{\nu=1}^{q-1} \mathfrak{S}_{p,q}(z; \nu), \quad z \in K_{p,q}, \quad (10.16)$$

составленную из сумм функциональных рядов (10.8).

Очевидно, результат (10.16) не зависит от выбора значения $r \in \{0, \dots, q - 1\}$, т.е. не зависит от взятой подпоследовательности (10.15). Совокупность таких подпоследовательностей образует в итоге всю последовательность $B_n(f, z)$, начиная с номера $n = q$. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ полиномы $B_n(f, z)$ также равномерно сходятся на компакте Канторевича $K_{p,q}$ и имеют в качестве предела функцию (10.16).

В силу теоремы 10.1 эта предельная функция (10.16) должна быть раздельно аналитической внутри левой и правой петель компакта $K_{p,q}$. Но в левой петле на отрезке $[0, p/q] \subset \mathbb{R}$, согласно изначальной теореме Бернштейна, последовательность $B_n(f, x)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к значениям $f(x) = p - qx$, а в правой петле на отрезке $[p/q, 1] \subset \mathbb{R}$ последовательность $B_n(f, x)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к значениям $f(x) = qx - p$. Для данных значений единственным кусочно аналитическим продолжением в две замкнутые области (8.5) компакта $K_{p,q}$ служит функция $\varphi(z)$ из формулы (8.6). Тем самым, приходим к равенству

$$p + (q - 2p)z - \sum_{\nu=1}^{q-1} \mathfrak{S}_{p,q}(z; \nu) = \varphi(z) \quad \left(\equiv \begin{cases} p - qz, & z \in K_{p,q}^{(1)} \\ qz - p, & z \in K_{p,q}^{(2)} \end{cases} \right), \quad (10.17)$$

дающему окончательное описание предельной функции полиномов Бернштейна $B_n(f, z)$. Это и утверждалось в теореме 8.1.

Осталось показать расходимость полиномов $B_n(f, z)$ всюду вне компакта $K_{p,q}$. При этом мы не можем использовать расходимость на $\mathbb{C} \setminus K_{p,q}$ структурированных сумм (3.6), вытекающую из теоремы 10.1, поскольку из расходимости таких слагаемых еще не следует расходимость общих выражений (3.9) и (3.10). (Как известно, при сложении нескольких расходящихся рядов может образоваться сходящийся ряд, частичные суммы которого имеют конечный предел.)

Поступим проще. Допустим, что имеется точка $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K_{p,q}$, в которой существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f, z_0) = A \in \mathbb{C}. \quad (10.18)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B_{n+1}(f, z_0) - B_n(f, z_0)) = A - A = 0.$$

Последнее означает, что $|B_{n+1}(f, z_0) - B_n(f, z_0)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но это невозможно в силу оценки (8.12) из леммы 8.1, где $|T_{p,q}(z)| > 1$ при любом $z \in \mathbb{C} \setminus K_{p,q}$ (см. (8.10)). Итак, предположение о существовании конечного предела (10.18) в некоторой внешней точке $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K_{p,q}$ приводит к противоречию с доказанной оценкой (8.12). Следовательно, во всех точках $z \in \mathbb{C} \setminus K_{p,q}$ последовательность $B_n(f, z)$ расходится. Теорема 8.1 полностью доказана. \square

Доказательство теоремы 8.2. Пусть снова $B_n(f, z)$ — полиномы Бернштейна (1.1) от функции (1.2) при соглашениях (2.1). Как прежде, через $K_{p,q}$ обозначаем компакт Канторевича (8.4). Согласно (8.14) определим уклонения $R_n(f, z)$ полиномов $B_n(f, z)$ от предельной функции $\varphi(z)$

вида (8.6). Но функция $\varphi(z)$ по формуле (10.17) выражается через функциональные ряды (10.8). Иначе говоря, справедливо представление

$$\varphi(z) = p + (q - 2p)z - \sum_{\nu=1}^{q-1} 2z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lfloor p\nu/q \rfloor} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{p,q}(\nu)}{qk + \nu} C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)} (z^p(1-z)^{q-p})^k \quad (10.19)$$

при $z \in K_{p,q}$ с величинами $a_{p,q}(\nu)$, $j_{p,q}(\nu)$ из формулы (3.3). Ориентируясь на конструкцию (3.1), рассмотрим уклонения

$$R_{qm+r}(f, z) = B_{qm+r}(f, z) - \varphi(z), \quad z \in K_{p,q},$$

при $m \in \mathbb{N}$, $r = 0, 1, \dots, q-1$. Взяв разность представлений (3.1) и (10.19), получим выражение

$$R_{qm+r}(f, z) = \sum_{\nu=1}^{q-1} 2z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lfloor p\nu/q \rfloor} \sum_{k=\varepsilon_m(\nu,r)+1}^{\infty} \frac{a_{p,q}(\nu)}{qk + \nu} C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)} (z^p(1-z)^{q-p})^k, \quad z \in K_{p,q},$$

где символ $\varepsilon_m(\nu, r)$ вводится по правилу (3.2).

Вспоминая про связь (6.2), запишем через разности

$$R_{qm+r}(f, z) = - \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{k=\varepsilon_m(\nu,r)+1}^{\infty} (B_{qk+\nu+1}(f, z) - B_{qk+\nu}(f, z)), \quad z \in K_{p,q}, \quad (10.20)$$

при $m \in \mathbb{N}$, $r = 0, 1, \dots, q-1$. Соотношение (10.20) и будем оценивать.

Посредством базовой формулы (8.11) из леммы 8.1 получаем

$$|R_{qm+r}(f, z)| \leq \sum_{\nu=1}^{q-1} M_{p,q}(\nu) \sum_{k=\varepsilon_m(\nu,r)+1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} |T_{p,q}(z)|^k, \quad z \in K_{p,q},$$

с коэффициентами $M_{p,q}(\nu)$ вида (8.7) и величиной $|T_{p,q}(z)| \leq 1$, записанной через первичный полином Канторовича (8.9) (см. также (8.10)). Поскольку $m \leq \varepsilon_m(\nu, r) + 1 \leq m+1$ (см. (3.2)), то

$$|R_{qm+r}(f, z)| \leq \sum_{\nu=1}^{q-1} M_{p,q}(\nu) \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} |T_{p,q}(z)|^k, \quad z \in K_{p,q}.$$

Короче,

$$|R_{qm+r}(f, z)| \leq M_{p,q} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} |T_{p,q}(z)|^k, \quad z \in K_{p,q}, \quad (10.21)$$

при $m \in \mathbb{N}$, $r = 0, 1, \dots, q-1$, с суммарной величиной $M_{p,q}$ вида (8.13).

Оценка (10.21) является ключевой. Она вполне достаточна для получения нужных результатов. Дальнейшие рассуждения зависят от того, попадает точка z внутрь компакта $K_{p,q}$ или находится на его границе.

Пусть $z \in \text{int } K_{p,q}$. Тогда $|T_{p,q}(z)| < 1$ (см. (8.10)), и формула (10.21) дает оценку

$$|R_{qm+r}(f, z)| \leq M_{p,q} \frac{1}{m^{3/2}} \sum_{k=m}^{\infty} |T_{p,q}(z)|^k = \frac{M_{p,q}}{1 - |T_{p,q}(z)|} \frac{|T_{p,q}(z)|^m}{m^{3/2}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad r = 0, 1, \dots, q-1,$$

что совпадает с заявленным соотношением (8.15).

Пусть $z \in \partial K_{p,q} = \Lambda_{p,q}$. Тогда $|T_{p,q}(z)| = 1$ (см. снова (8.10)), и формула (10.21) дает оценку

$$|R_{qm+r}(f, z)| \leq M_{p,q} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad r = 0, 1, \dots, q-1.$$

Но

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} = \frac{1}{m^{3/2}} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leq \frac{1}{m^{3/2}} + \int_m^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{1}{m\sqrt{m}} + \frac{2}{\sqrt{m}} = \frac{2}{\sqrt{m}} \left(1 + \frac{1}{2m}\right) \quad (10.22)$$

при любом $m \in \mathbb{N}$. В итоге получаем нужное соотношение (8.16). Теорема 8.2 доказана. \square

Как видим, заключительный этап доказательства идейно прост: после того, как всю конструкцию удалось собрать в краткую формулу (10.21), использовались лишь самые элементарные приемы, связанные с геометрической прогрессией и оценкой (10.22) типа «Коши—Маклорена».

При этом установленные результаты качественно вполне точны. Из теоремы 8.2 видно главное: внутри компакта $K_{p,q}$ изучаемые полиномы $B_n(f, z)$ сходятся к предельной функции с экспоненциальной скоростью, а на границе компакта действует другой, более медленный степенной закон. Как показывает наработанный нами опыт (см., например, [21] или [22, разд. 12, 13]), оценки (8.15) и (8.16) правильно отражают суть дела. Их некоторый недостаток связан со взаимной несогласованностью в том смысле, что «граничную» оценку (8.16) нельзя вывести из «внутренней» оценки (8.15) из-за «разрушения» (8.15) при подстановке туда предельного значения $|T_{p,q}(z)| = 1$.

Покажем, что при помощи более тонких методов можно избежать подобной проблемы и дать *совмещенную оценку уклонения* $R_n(f, z)$, пригодную как внутри компакта $K_{p,q}$, так и на его границе. При этом внутри $K_{p,q}$ новая оценка будет даже чуть лучше, чем прежняя оценка (8.15).

11. Совмещенная оценка уклонения. Некоторые оценки такого рода были анонсированы в обзоре [22] для полиномов Бернштейна от симметричного модуля $f(x) = |2x-1|$. Эти результаты касались сходимости полиномов лишь на $[0, 1]$, но охватывали как саму точку излома $x = 1/2$ (где уклонение стремится к нулю степенным образом), так и все прочие точки $x \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$ (где действует экспоненциальный закон стремления к нулю). Использованный метод был связан с каноническим разложением Поповичу (3.13).

Через некоторое время А. Ю. Попов заметил (см. [17]), что рассуждения существенно упрощаются, а результат становится точнее, если предварительно установить специальную оценку остатков степенного ряда с положительными логарифмически выпуклыми коэффициентами. Идея Попова оказалась весьма удачной. Сформулируем его результат.

Рассмотрим последовательность числовых коэффициентов $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, обладающую следующими свойствами:

$$a_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty. \quad (11.1)$$

Составим степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k s^k < +\infty \quad (11.2)$$

вещественной переменной $s \in [0, 1]$ и возьмем остатки

$$h_m \equiv \sum_{k=m}^{\infty} a_k, \quad H_m(s) \equiv \sum_{k=m}^{\infty} a_k s^k, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (11.3)$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ верны соотношения:

- (а) $H_m(s)$ строго возрастает на $[0, 1]$;
- (б) $0 = H_m(0) < H_m(s) < H_m(1) = h_m < +\infty$ при $s \in (0, 1)$;
- (в) $H_m(s) \sim a_m s^m$ при $s \rightarrow 0+$.

Ставится вопрос о получении возможно более точных оценок сверху для $H_m(s)$ посредством простых, эталонных величин $F_m(s)$, удовлетворяющих тем же соотношениям (а)–(в) при замене в них $H_m(s)$ на $F_m(s)$.

Оказывается, эта задача допускает явное решение при дополнительном условии *логарифмической выпуклости* коэффициентов:

$$a_{k+1}^2 \leq a_k a_{k+2}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11.4)$$

Справедлив следующий результат (А. Ю. Попов).

Лемма 11.1. Пусть коэффициенты степенного ряда (11.2) удовлетворяют условиям (11.1) и (11.4). Пусть остатки h_m и $H_m(s)$ определены формулой (11.3). Тогда

$$H_m(s) \leq F_m(s) \equiv \frac{h_m}{h_m - h_{m+1}s} a_m s^m, \quad s \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}. \quad (11.5)$$

Функция $F_m(s)$ из формулы (11.5) удовлетворяет указанным выше условиям (а)–(с) при замене в них $H_m(s)$ на $F_m(s)$.

Доказательство. Данное утверждение фактически установлено в [17, теорема 1]. Следует лишь иметь в виду, что оценка, эквивалентная (11.5), получена в [17] в других обозначениях для нормированных остатков

$$H_m^{(0)}(s) \equiv \sum_{k=m}^{\infty} a_k s^{k-m}, \quad H_m(s) = s^m H_m^{(0)}(s), \quad s \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}.$$

Сведение результата [17] к виду (11.5) элементарно. То, что все функции $F_m(s)$ из формулы (11.5) удовлетворяют указанным выше условиям (а)–(с), проверяется непосредственно. \square

Сохранение условий (а)–(с) для элементарных функций $F_m(s)$ указывает на высокую точность оценки (11.5). Однако на практике применение (11.5) затрудняется тем, что числовые остатки h_m не всегда вычисляются явно. Вместо их точных значений, чаще удается установить неравенства

$$h_m \equiv \sum_{k=m}^{\infty} a_k \leq (1 + \gamma_m) a_m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (11.6)$$

с конструктивно вычисляемыми поправками $\gamma_m > 0$. В таком случае справедлив следующий «огрубленный» вариант леммы 11.1.

Лемма 11.2. Пусть коэффициенты степенного ряда (11.2) удовлетворяют условиям (11.1) и (11.4). Пусть остатки h_m и $H_m(s)$ определены формулой (11.3), причем для h_m справедливы оценки (11.6) со значениями $\gamma_m > 0$. Тогда

$$H_m(s) \leq \Phi_m(s) \equiv \frac{1 + \gamma_m}{1 + \gamma_m - \gamma_m s} a_m s^m, \quad s \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}. \quad (11.7)$$

Доказательство. Из (11.6) следует, что

$$\frac{h_{m+1}}{h_m} = \frac{h_m - a_m}{h_m} = 1 - \frac{a_m}{h_m} \leq 1 - \frac{1}{1 + \gamma_m} = \frac{\gamma_m}{1 + \gamma_m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Соответственно,

$$\frac{h_m - h_{m+1}s}{h_m} = 1 - \frac{h_{m+1}}{h_m} s \geq 1 - \frac{\gamma_m}{1 + \gamma_m} s = \frac{1 + \gamma_m - \gamma_m s}{1 + \gamma_m}, \quad s \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тем самым, мажоранты в оценке (11.5) сами мажорируются так:

$$F_m(s) \equiv \frac{h_m}{h_m - h_{m+1}s} a_m s^m \leq \frac{1 + \gamma_m}{1 + \gamma_m - \gamma_m s} a_m s^m \equiv \Phi_m(s), \quad s \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}. \quad (11.8)$$

Используя это соображение в (11.5), получаем нужный результат (11.7). Лемма доказана. \square

Как видно из формулы (11.8), обе мажоранты — и более точная $F_m(s)$, и более «грубая» $\Phi_m(s)$ — имеют одинаковую структуру. Фактически, всё их различие заключено в краевых условиях

$$F_m(1) = h_m \leq \Phi_m(1) = (1 + \gamma_m) a_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

причем условие для $\Phi_m(s)$ «завышено» ровно настолько, насколько неточны были первоначальные оценки (11.6). Так как $h_m = a_m + h_{m+1}$, то для получения «хороших» результатов в (11.6) достаточно при любом $m \in \mathbb{N}$ правильно оценить остаток h_{m+1} через предыдущий коэффициент a_m . На практике это часто удается сделать.

Разберем модельный пример. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k^\alpha}, \quad s \in [0, 1], \quad (11.9)$$

с параметром $\alpha > 1$. Коэффициенты $a_k = 1/k^\alpha$ удовлетворяют условиям (11.1) и (11.4). При этом

$$h_{m+1} \equiv \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_m^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}} = \frac{m}{\alpha-1} a_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тем самым, для оценок (11.6) найдены значения $\gamma_m = m/(\alpha-1)$. Применяя лемму 11.2, устанавливаем следующий результат.

Лемма 11.3. *При любом фиксированном $\alpha > 1$ справедливы оценки*

$$H_m(s; \alpha) \equiv \sum_{k=m}^{\infty} \frac{s^k}{k^\alpha} \leq \frac{m + \alpha - 1}{m + \alpha - 1 - ms} \cdot \frac{s^m}{m^\alpha}, \quad s \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}. \quad (11.10)$$

Доказательство. Указанные оценки (11.10) получаются простой подстановкой в (11.7) коэффициентов $a_m = 1/m^\alpha$ и найденных выше значений $\gamma_m = m/(\alpha-1)$. Лемма доказана. \square

С прицелом на базовое соотношение (10.21), оценивающее уклонения полиномов Бернштейна, возьмем значение $\alpha = 3/2$. Формула (11.10) показывает, что тогда

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{s^k}{k^{3/2}} \leq \frac{2m+1}{2m+1-2ms} \cdot \frac{s^m}{m^{3/2}} = \frac{2m+1}{2m(1-s)+1} \cdot \frac{s^m}{m^{3/2}}, \quad s \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}. \quad (11.11)$$

Теперь всё готово для доказательства следующего основного результата.

Теорема 11.1. *Пусть $B_n(f, z)$ — полиномы Бернштейна (1.1) от функции (1.2) при соглашениях (2.1). Пусть $R_n(f, z)$ — уклонения этих полиномов от предельной функции (8.6), заданные по формуле (8.14). Тогда при $z \in K_{p,q}$, т.е. всюду на компакте Канторовича (8.4), имеем оценку*

$$|R_{qm+r}(f, z)| \leq \frac{(2m+1)M_{p,q}}{2m(1-|T_{p,q}(z)|)+1} \frac{|T_{p,q}(z)|^m}{m^{3/2}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad r = 0, 1, \dots, q-1, \quad (11.12)$$

с величинами $T_{p,q}(z)$, $M_{p,q}$ из формул (8.9) и (8.13) соответственно. При $z \in \partial K_{p,q} = \Lambda_{p,q}$ новая оценка (11.12) совпадает с прежней оценкой (8.16), а при $z \in \text{int } K_{p,q}$ оценка (11.12) является более точной, чем прежняя оценка (8.15).

Доказательство. Как установлено в разделе 10 при доказательстве теоремы 8.2, для изучаемых уклонений $R_{qm+r}(f, z)$ справедлива оценка (10.21), содержащая в своем составе m -й остаток ряда вида (11.9) с параметром $\alpha = 3/2$ и переменной $s = |T_{p,q}(z)| \in [0, 1]$ (см. также (8.10)). Оценим этот остаток по правилу (11.11) и получим из (10.21) нужное соотношение (11.12). Для того чтобы сравнить новый результат с прежними оценками, рассмотрим отдельно правую часть в (11.12).

Заметим, что

$$\frac{(2m+1)M_{p,q}}{2m(1-|T_{p,q}(z)|)+1} \frac{|T_{p,q}(z)|^m}{m^{3/2}} = \frac{2M_{p,q}}{2m(1-|T_{p,q}(z)|)+1} \left(1 + \frac{1}{2m}\right) \frac{|T_{p,q}(z)|^m}{\sqrt{m}}.$$

Отсюда при $z \in \partial K_{p,q} = \Lambda_{p,q}$, т.е. когда $|T_{p,q}(z)| = 1$, имеем прежнюю оценку (8.16). С другой стороны, при $z \in \text{int } K_{p,q}$, т.е. когда $|T_{p,q}(z)| < 1$, получаем

$$\frac{(2m+1)M_{p,q}}{2m(1-|T_{p,q}(z)|)+1} \frac{|T_{p,q}(z)|^m}{m^{3/2}} = \frac{M_{p,q}}{1 - \frac{2m}{2m+1}|T_{p,q}(z)|} \frac{|T_{p,q}(z)|^m}{m^{3/2}} < \frac{M_{p,q}}{1 - |T_{p,q}(z)|} \frac{|T_{p,q}(z)|^m}{m^{3/2}}.$$

Тем самым, оценка (11.12) точнее прежнего результата (8.15). Теорема доказана. \square

Используя более изощрённые методы, можно, что называется, слегка «подтянуть» результат, заложенный в формуле (11.11). Это даст дополнительное улучшение оценки (11.12). Однако тогда при небольшом увеличении точности мы сильно ухудшим запись и получим более громоздкое выражение, не слишком информативное и трудное для восприятия. Ситуация хорошо выражается известной поговоркой «игра не стоит свеч». Неформально говоря, основное математическое содержание из базового соотношения (10.21) уже «выжато». Представляется, что дальнейшие

уточнения оценок уклонения полиномов Бернштейна от рационального модуля лучше проводить в двух других направлениях.

Во-первых, путем специальной работы с величинами $|R_{qm+r}(f, z)|$ можно учесть влияние на результат не только основного переменного параметра $m \in \mathbb{N}$, но и остатка $r \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. Этот технический анализ был бы полезен для завершения картины.

Во-вторых, и это, по-видимому, более интересно, следует уточнить значение коэффициента $M_{p,q}$ в оценке (11.12). При нашем подходе величина $M_{p,q}$ находится по формуле (8.13) — как сумма технических констант $M_{p,q}(\nu)$, вычисляемых по правилу (8.7). Было бы любопытно проанализировать все сделанные нами закругления и поставить вопрос об экстремально точном значении коэффициента $M_{p,q}$, при котором результат вида (11.12) останется справедливым.

Ряд возможных улучшений нетрудно увидеть. Так, при оценке разностей (10.6) можно не проводить закруглений, связанных с переходами (10.5) и (10.7), а сохранить в мажорирующем коэффициенте значение $a_{p,q}(\nu)$, заданное по правилу (3.3), и допустить переменную $z \in K_{p,q}$.

Точнее, вместо величины (8.7) введем модифицированное выражение

$$M_{p,q}^*(z; \nu) \equiv a_{p,q}(\nu) \left(\frac{q + \nu - 1}{\min\{p, q - p\}} \right)^\nu \sqrt{\frac{2}{pq(q-p)\pi}} \left| z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1-z)^{\nu - \lceil p\nu/q \rceil} \right|, \quad (11.13)$$

где $\nu = 1, \dots, q-1$. Затем заменим суммарную величину $M_{p,q}$ из формулы (8.13) ее прямым аналогом

$$M_{p,q}^*(z) \equiv \sum_{\nu=1}^{q-1} M_{p,q}^*(z; \nu), \quad z \in K_{p,q}. \quad (11.14)$$

Несложный анализ наших рассуждений показывает, что основная оценка (10.21) останется верной со значением (11.14) вместо прежнего $M_{p,q}$. Соответственно, в оценке уклонения (11.12) можно заменить коэффициент $M_{p,q}$ значением $M_{p,q}^*(z)$, вычисленным по правилам (11.13) и (11.14). Результат теоремы 11.1 станет точнее, ибо $M_{p,q}^*(z) < M_{p,q}$ при $z \in \text{int } K_{p,q}$.

Рассмотрим пример, когда величина $M_{p,q}^*(z)$ вычисляется сразу, и оценка (11.12) допускает наглядную запись без каких-либо скрытых деталей.

Пусть $f(x) = |2x - 1|$ на $[0, 1]$. Здесь $p = 1, q = 2$. По формуле (8.9) первичный полином Канторовича принимает вид $T_{1,2}(z) = 4z(1-z)$, порождая соответствующие компакт и лемнискату

$$K_{1,2} : 4|z(1-z)| \leq 1, \quad \Lambda_{1,2} : 4|z(1-z)| = 1.$$

Ограничение на параметр $\nu \in \{1, \dots, q-1\}$ дает единственное значение $\nu = 1$. Применяя формулы (11.14) и (11.13) с учетом равенства $a_{1,2}(1) = 1$ (см. пример 7.1), находим, что

$$M_{1,2}^*(z) = M_{1,2}^*(z; 1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} |z(1-z)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot 4|z(1-z)|. \quad (11.15)$$

Воспользуемся оценкой (11.12), заменив в ней коэффициент $M_{1,2}$ ($= M_{p,q}$) на величину $M_{1,2}^*(z)$ из формулы (11.15). При $4|z(1-z)| \leq 1$ получим

$$|R_{2m}(f, z)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{2m+1}{2m(1-4|z(1-z)|) + 1} \frac{(4|z(1-z)|)^{m+1}}{m^{3/2}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (11.16)$$

Величины $|R_{2m+1}(f, z)|$ сейчас не рассматриваем, так как они совпадают с $|R_{2m}(f, z)|$ из-за правила склеивания $B_{2m+1}(f, z) = B_{2m}(f, z)$ (см. лемму 4.1).

При $z = x \in [0, 1]$ полиномы Бернштейна сходятся к функции $f(x) = |2x - 1|$ монотонно сверху (см. (4.6)), и все уклонения $R_{2m}(f, x)$ будут неотрицательны. Кроме того, возможен переход

$$1 - 4|x(1-x)| = 1 - 4x(1-x) = (2x-1)^2, \quad x \in [0, 1].$$

Проведя элементарные преобразования в (11.16), получим оценку

$$0 \leq R_{2m}(f, x) \leq \frac{1}{\sqrt{m\pi}} \left(1 + \frac{1}{2m} \right) \frac{(4x(1-x))^{m+1}}{2m(2x-1)^2 + 1}, \quad x \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}. \quad (11.17)$$

Последняя согласована с асимптотикой

$$R_{2m}(f, x) \sim \frac{1}{\sqrt{m\pi}} \frac{(4x(1-x))^{m+1}}{2m(2x-1)^2+1}, \quad m \rightarrow \infty,$$

верной при любом фиксированном $x \in (0, 1)$ (см. обзор [22, формулы (52), (53), (65)]).

Оценка (11.17), извлеченная сейчас из наших общих результатов, лишь немногим хуже прежней, наиболее точной оценки

$$0 \leq R_{2m}(f, x) \leq 2^{-2m} C_{2m}^m \frac{(4x(1-x))^{m+1}}{(2m+1)(2x-1)^2+1}, \quad x \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}, \quad (11.18)$$

полученной А. Ю. Поповым в [17] на основе его «незагрубленного» результата типа леммы 11.1.

Вообще, вопрос о сходимости полиномов Бернштейна от симметричного модуля может быть изучен с исчерпывающей полнотой. По этой тематике запланирован отдельный обзор [21]. Там, в частности, будет показано, что точная оценка (11.18) допускает простое доказательство, причем самым элементарным методом.

12. Проблема нулей. Итак, обобщенные разложения Поповичу связывают теорию полиномов Бернштейна от рациональных модулей вида (1.2) с классической теорией степенных рядов. Аналогия со степенными рядами полезна и при изучении вопроса о распределении нулей полиномов Бернштейна.

Напомним, что согласно классической теореме Р. Иентча (см. [45, с. 227]) для степенного ряда

$$S(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k \quad (12.1)$$

переменной $\zeta \in \mathbb{C}$ с коэффициентами $\alpha_k \in \mathbb{C}$ и конечным радиусом сходимости $R > 0$ граница круга сходимости $|\zeta| = R$ состоит из предельных точек множества нулей, взятых от частичных сумм этого ряда (см. также [10, с. 165–166], [18, с. 246–249]). Попросту говоря, значительная часть нулей от частичных сумм

$$S_n(\zeta) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \zeta^k, \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad (12.2)$$

при $n \rightarrow \infty$ стягивается к окружности $|\zeta| = R$, заполняя в пределе всю окружность. Более того, при некоторых условиях регулярности, наложенных на коэффициенты α_k , можно утверждать, что в определенном смысле «почти все» нули частичных сумм (12.2) при $n \rightarrow \infty$ устремляются к окружности $|\zeta| = R$ (см. [44]). Дополнительную информацию, связанную с теоремой Иентча, см. в [48, с. 90–95, 145–148] и [54, с. 390–392, 396–399] (см. также [40, 43]).

Некоторое время назад И. Я. Новиков на одном частном примере показал (см. [12]), что похожий принцип «концентрации нулей» характерен и для теории полиномов Бернштейна. В последующем цикле работ (см. [25–28, 32]) авторы настоящего обзора провели систематическое компьютерное исследование проблемы нулей и выдвинули концепцию *аттракторов нулей* для классических полиномов Бернштейна.

Поясним, что *аттрактором нулей* мы называем предельное множество, к которому стягиваются все (или почти все) нули полиномов Бернштейна при выборе той или иной порождающей функции $f \in C[0, 1]$. В [26, 27] представлен полный список правил для построения аттракторов нулей в случае произвольных кусочно линейных порождающих функций с рациональными абсциссами точек излома. Многочисленные примеры и иллюстрации по теме см. в [32].

Обычно значимую часть аттрактора составляет граница комплексной области сходимости полиномов Бернштейна. При наличии у порождающей функции нескольких точек излома в аттрактор включаются дополнительные артефакты — дуги специальных «серединных» окружностей. Впрочем, при выборе интересующего нас сейчас модельного примера рационального модуля (1.2) структура аттрактора может быть описана очень просто. Компьютерные эксперименты показывают, что справедливо следующее качественное утверждение.

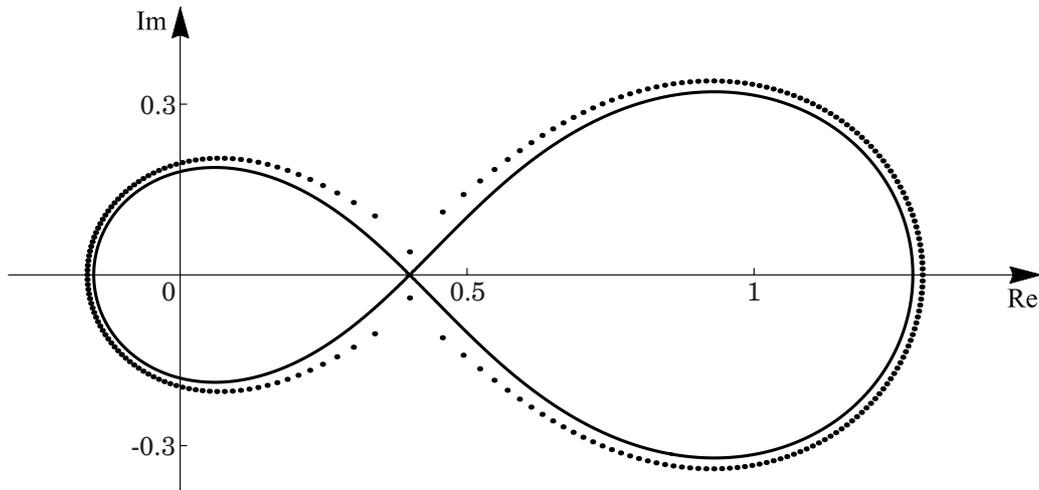


Рис. 2. Множество нулей полинома $B_{250}(f, z)$ для функции $f(x) = |5x - 2|$ вместе с соответствующим аттрактором нулей — лемнискатой Канторовича $\Lambda_{2,5}$, построенной по формуле (8.3) при $p = 2, q = 5$. Полином взят из цепочки склеиваний. Девиантные нули отсутствуют.

Принцип концентрации нулей. Пусть $B_n(f, z)$ — полиномы Бернштейна (1.1) от функции (1.2) при соглашениях (2.1). Тогда при $n \rightarrow \infty$ все нули полиномов $B_n(f, z)$ (за исключением отдельных «девиантных» нулей) стягиваются снаружи к границе области сходимости полиномов Бернштейна — лемнискате Канторовича $\Lambda_{p,q}$ из формулы (8.3). В пределе нули заполняют всю лемнискату, т.е. при ее покрытии конечной системой открытых кругов фиксированного малого радиуса $\varepsilon > 0$ и при выборе полинома $B_n(f, z)$ с достаточно большим номером n получим, что все нули полинома будут находиться внутри покрытия, и в каждый элемент покрытия попадет хотя бы один нуль.

Важное дополнение. Используя этот принцип, надо различать две ситуации.

- (a) Выбираются полиномы $B_n(f, z)$ с номерами $n = qt$ или $n = qt + 1$ при $t \in \mathbb{N}$, т.е. полиномы из цепочки склеиваний (3.8). Тогда все нули подобных полиномов при возрастании номера n стягиваются к лемнискате $\Lambda_{p,q}$.
- (b) Выбираются полиномы $B_n(f, z)$ с номерами, отличными от указанных в п. (a), т.е. полиномы, не попадающие в цепочку склеиваний (3.8). Тогда при достаточно больших значениях n , зависящих от выбора функции (1.2), возможно появление единичных девиантных нулей, имеющих свои предельные точки вне лемнискаты Канторовича $\Lambda_{p,q}$.

Типичные иллюстрации для примера $f(x) = |5x - 2|$ представлены на рис. 2–5.

Дадим неформальный комментарий к сформулированному выше принципу концентрации нулей. При достаточно большом номере $n \in \mathbb{N}$ полином $B_n(f, z)$ имеет высокую степень и скорее всего имеет достаточно много различных нулей. Где расположены эти нули? На основном отрезке $[0, 1]$ их быть не может, поскольку полиномы Бернштейна сходятся к своей предельной функции $f(x) = |qx - p|$ монотонно сверху (см. (4.6)). На компакте Канторовича $K_{p,q}$ при больших номерах n нулей также заведомо нет, так как равномерный предел полиномов — функция $\varphi(z)$ из формулы (8.6) — имеет единственный нуль в рассмотренной уже точке $z = p/q \in [0, 1]$.

Разложение Поповичу (3.1) показывает, что полином $B_n(f, z)$ при любом номере $n \geq q$ составлен из структурированных сумм вида (3.6). Вне компакта $K_{p,q}$ слагаемые в таких суммах экспоненциально стремятся к бесконечности (что видно, например, из сравнения формул (5.8) и (8.12)). Соответственно, вдали от $K_{p,q}$ значения полинома $B_n(f, z)$ должны быстро расти, и нули просто вынуждены подтягиваться к границе — лемнискате Канторовича $\Lambda_{p,q}$.

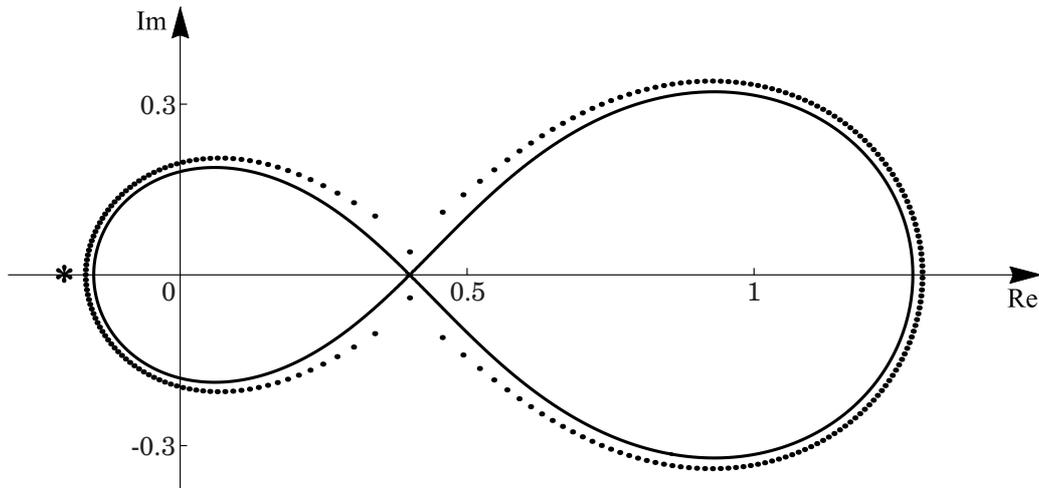


Рис. 3. Множество нулей полинома $B_{252}(f, z)$ для функции $f(x) = |5x - 2|$ вместе с соответствующим аттрактором $\Lambda_{2,5}$. Звездочкой отмечен девиантный нуль $z^* \approx -0,216$, возникший из-за того, что полином с номером $n = 252$ не попадает в цепочку склеиваний. Компьютерные расчеты показывают, что подобные нули, близкие к $-0,2$, появляются, начиная с номера $n = 87$, и далее — на всех номерах $n = 5m + 2$ при $m \geq 18$.

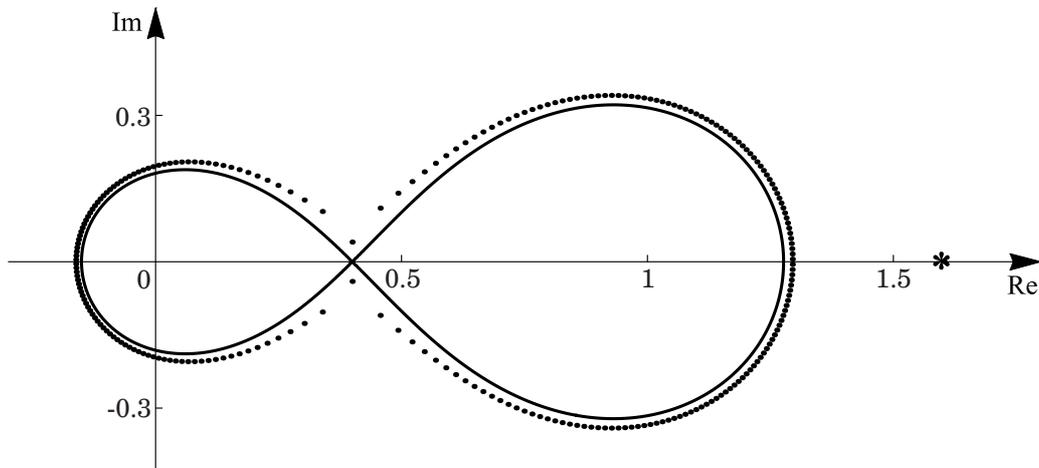


Рис. 4. Множество нулей полинома $B_{253}(f, z)$ для функции $f(x) = |5x - 2|$ вместе с соответствующим аттрактором $\Lambda_{2,5}$. Звездочкой отмечен девиантный нуль $z^* \approx 1,6032$, возникший из-за того, что полином с номером $n = 253$ не попадает в цепочку склеиваний. Компьютерные расчеты показывают, что подобные нули, близкие к $1,6$, появляются на номерах $n = 5m + 3$ при $m \geq 3$, т.е. начиная с $n = 18$.

В случае, когда полином $B_n(f, z)$ попадает в цепочку склеиваний (3.8), структурированные суммы имеют одинаковое число слагаемых, конструкция (3.9) оказывается полностью «сбалансированной», и описанный выше механизм действует безотказно.

Для полиномов, не входящих в цепочку склеиваний, баланс в разложении Поповичу слегка нарушается, и возникающая комбинация (3.10) допускает отдельные девиантные нули на строгом удалении от лемнискаты $\Lambda_{p,q}$.

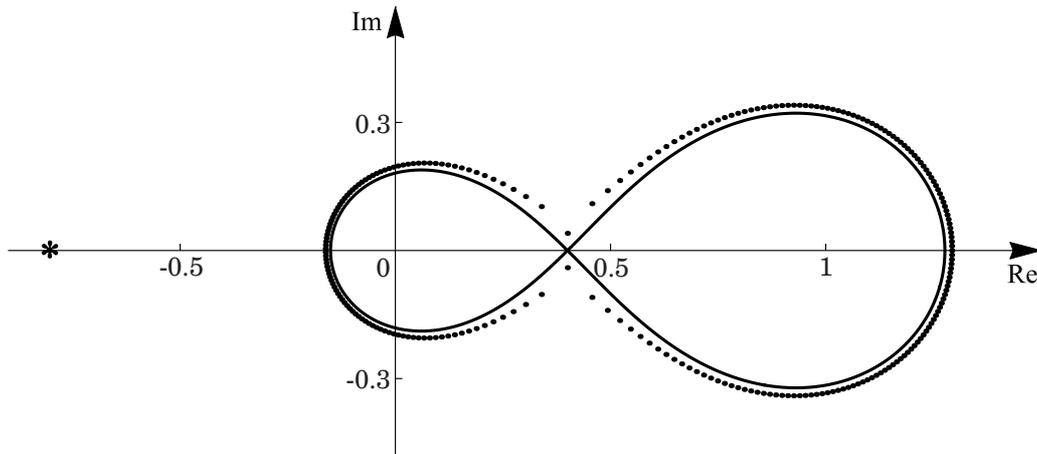


Рис. 5. Множество нулей полинома $B_{254}(f, z)$ для функции $f(x) = |5x - 2|$ вместе с соответствующим аттрактором $\Lambda_{2,5}$. Звездочкой отмечен девиантный нуль $z^* \approx -0,8048$, возникший из-за того, что полином с номером $n = 254$ не попадает в цепочку склеиваний. Компьютерные расчеты показывают, что подобные нули, близкие к $-0,8$, появляются на номерах $n = 5m + 4$ при $m \geq 1$, т.е. начиная с $n = 9$.

Разумеется, данный неформальный комментарий нельзя считать законченным математическим обоснованием. Это лишь контуры возможной программы будущих исследований. Для удобства дальнейшей работы полезно четко обозначить некоторые цели и выделить ряд конкретных задач, представляющих, на наш взгляд, вполне самостоятельный интерес.

Снова считаем, что $f(x)$ есть фиксированный рациональный модуль вида (1.2), взятый при соглашениях (2.1). Лемниската $\Lambda_{p,q}$ и компакт $K_{p,q}$ определены формулами (8.3), (8.4) соответственно. Сформулируем вопросы, требующие аналитического изучения.

- В1.** Показать, что при любом фиксированном номере $n \in \mathbb{N}$ все нули полинома $B_n(f, z)$ находятся строго вне компакта Канторовича $K_{p,q}$.
- В2.** Возможны ли кратные нули у полиномов $B_n(f, z)$ при каких-либо номерах n ? Как мы увидим ниже (см. п. 14.4), у полиномов, попадающих в цепочку склеиваний (3.8), все нули являются простыми.
- В3.** При каких номерах $n \in \mathbb{N}$ у полиномов $B_n(f, z)$ возможны вещественные нули? Желательно указать как сами номера, так и соответствующие количества вещественных нулей.
- В4.** Показать, что при $n \rightarrow \infty$ все нули полиномов $B_n(f, z)$, попадающих в цепочку склеиваний (3.8), равномерно стягиваются к лемнискату $\Lambda_{p,q}$, заполняя в пределе всю лемнискату.
- В5.** По-прежнему находясь на цепочке склеиваний, оценить скорость сближения отдельных «экстремальных» нулей с аттрактором — лемнискатой Канторовича $\Lambda_{p,q}$.
- В6.** Желательно распространить результаты двух предыдущих пунктов на полиномы, не входящие в цепочку склеиваний. При этом придется учитывать возможность появления отдельных девиантных нулей, удаленных от лемнискаты $\Lambda_{p,q}$.
- В7.** Указать законы образования девиантных нулей у полиномов, не входящих в цепочку склеиваний (3.8). Компьютерные расчеты показывают, что каждая серия полиномов $B_{qm+r}(f, z)$ при фиксированном значении $r \in \{2, \dots, q - 1\}$, начиная с некоторого номера $n_0 = qm_0 + r$, дает собственную последовательность девиантных нулей со своим особым поведением. Типичный пример см. на рис. 6.

Покажем на простом примере, что обобщенные разложения Поповичу (3.1) можно эффективно применять к решению поставленных задач.

Теорема 12.1. Пусть $B_n(f, z)$ — полиномы Бернштейна (1.1), взятые от симметричного модуля $f(x) = |2x - 1|$. Тогда все нули полиномов $B_n(f, z)$ при любом номере $n \in \mathbb{N}$ расположены строго вне компакта Канторовича $K_{1,2} = \{z \in \mathbb{C} : 4|z(1 - z)| \leq 1\}$.

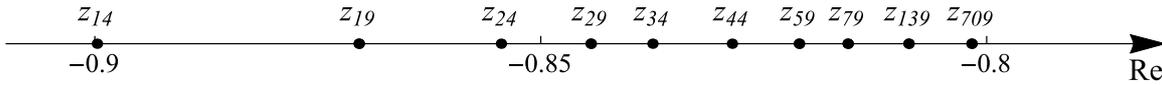


Рис. 6. Компьютерный расчет подпоследовательности девиантных нулей полиномов Бернштейна $B_n(f, z)$ для функции $f(x) = |5x - 2|$. Выбраны номера $n = 5m + 4$ из множества $n = 5m + 4 \in \{14, 19, 24, 29, 34, 44, 59, 79, 139, 709\}$. Нули, скорее всего, сходятся к предельному значению $-0,8 = -4/5$, находящемуся на некотором удалении от лемнискаты $\Lambda_{2,5}$ (ср. с рис. 5 выше).

Доказательство. В данном случае полином $B_1(f, z) \equiv 1$ вообще не имеет нулей. Для прочих полиномов действует классическое разложение (3.13). В силу правила склеивания рассматриваем только полиномы $B_{2m}(f, z)$ и, согласно (3.13), имеем

$$B_{2m}(f, z) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k (4z(1-z))^k, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Используя формулу

$$\frac{1}{2k-1} C_{2k}^k = 4C_{2k-2}^{k-1} - C_{2k}^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

при $z = 1/2$ получаем значение

$$\begin{aligned} B_{2m}(f, 1/2) &= 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k = 1 - \sum_{k=1}^m 2^{-2(k-1)} C_{2k-2}^{k-1} + \sum_{k=1}^m 2^{-2k} C_{2k}^k = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k} C_{2k}^k + \sum_{k=1}^m 2^{-2k} C_{2k}^k = 2^{-2m} C_{2m}^m, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Подробнее про этот известный результат см. [22, с. 153–157].

Пусть теперь $4|z(1-z)| \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} |B_{2m}(f, z)| &\geq 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k (4|z(1-z)|)^k \geq 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k = \\ &= B_{2m}(f, 1/2) = 2^{-2m} C_{2m}^m > 0, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Тем самым, при всех $m \in \mathbb{N}$ полиномы $B_{2m}(f, z)$ ($= B_{2m+1}(f, z)$) не имеют нулей на компакте Канторовича $K_{1,2}$. Теорема доказана. \square

Наглядную иллюстрацию к теореме 12.1 дает рис. 7.

Попытка перенести рассуждение теоремы 12.1 на общий случай рационального модуля (1.2) потребует, конечно, отдельных усилий. Не исключено также, что часть ответов на поставленные вопросы **В1–В7** проще получать, не прибегая к обобщенным разложениям Поповичу (3.1).

13. Особая роль цепочки склеиваний. По-прежнему рассматриваем полиномы Бернштейна (1.1) от рационального модуля (1.2) при соглашениях (2.1). Сохраним специальные обозначения $a_{p,q}(\nu)$, $j_{p,q}(\nu)$, $\varepsilon_m(\nu, r)$, введенные при формулировке основной теоремы 3.1 в разделе 3 настоящей работы.

Отмеченные выше примеры с нулями, как и многие другие соображения, показывают, что полиномы, взятые из цепочки склеиваний (3.8), по своим свойствам явно выделяются из общей последовательности полиномов $B_n(f, z)$. При номерах $n = qm$, ввиду удачного сочетания абсциссы точки излома $x = p/q$ с точками равномерной сетки (2.3), различные формулы, связанные с полиномами Бернштейна, как правило, существенно упрощаются.

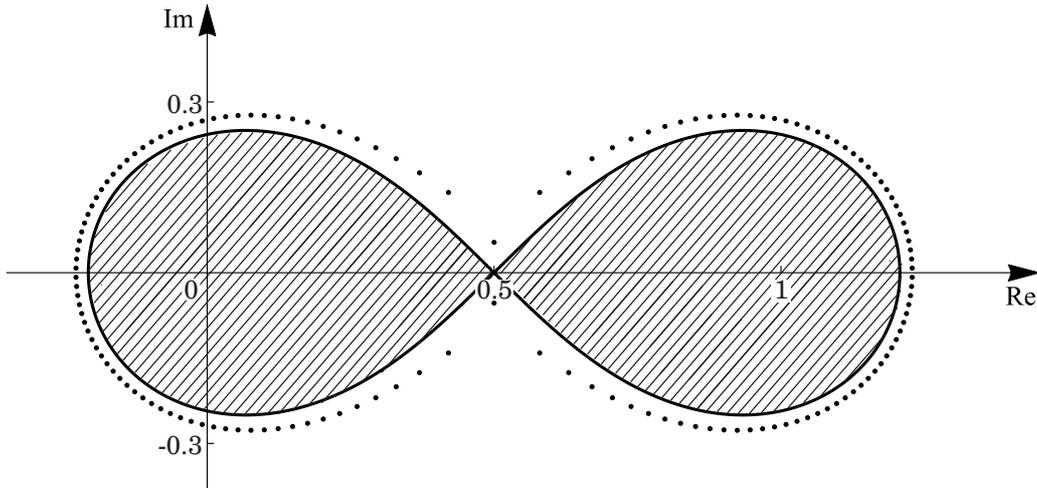


Рис. 7. Множество нулей полинома $B_{150}(f, z)$ для функции $f(x) = |2x - 1|$ вместе с компактом Канторовича $K_{1,2}$. Компакт отмечен штриховкой. Все нули располагаются вне компакта.

В частности, изучаемые нами обобщенные разложения Поповичу (3.1) для полиномов $B_{qm}(f, z)$ при всех $m \in \mathbb{N}$ приобретают полностью сбалансированный вид:

$$B_{qm}(f, z) = p + (q - 2p)z - \sum_{\nu=1}^{q-1} 2z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1 - z)^{\nu - \lfloor p\nu/q \rfloor} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_{p,q}(\nu)}{qk + \nu} C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)} (z^p (1 - z)^{q-p})^k \quad (13.1)$$

с одинаковым числом слагаемых во всех структурированных суммах (3.6) (ср. также с прежней формулой (3.9)). По причинам комбинаторного характера полином $B_{qm+1}(f, z)$ совпадает с полиномом $B_{qm}(f, z)$ и может фактически не рассматриваться.

Если функция $f(x) = |qx - p|$ отлична от симметричного модуля $|2x - 1|$, то $q \geq 3$, и возникают дополнительные полиномы

$$B_{qm+r}(f, z), \quad m \in \mathbb{N}, \quad r = 2, \dots, q - 1,$$

которые можно получать из полиномов (13.1), применяя рекуррентное правило (6.2). Запишем в явном виде

$$\begin{aligned} B_{qm+r}(f, z) &= B_{qm}(f, z) - \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{2a_{p,q}(\nu)}{qm + \nu} C_{qm+\nu}^{pm+j_{p,q}(\nu)} z^{pm+\lceil p\nu/q \rceil} (1 - z)^{(q-p)m+\nu-\lfloor p\nu/q \rfloor} = \\ &= B_{qm}(f, z) - \left(\sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{2a_{p,q}(\nu)}{qm + \nu} C_{qm+\nu}^{pm+j_{p,q}(\nu)} z^{\lceil p\nu/q \rceil} (1 - z)^{\nu-\lfloor p\nu/q \rfloor} \right) (z^p (1 - z)^{q-p})^m \quad (13.2) \end{aligned}$$

при $m \in \mathbb{N}$ и $r = 2, \dots, q - 1$. Тем самым, если имеются какие-либо алгебраические или комбинаторные соотношения для полиномов $B_{qm}(f, z)$, то они переносятся на полиномы $B_{qm+r}(f, z)$ с учетом конечного числа поправок из (13.2). При этом вид формул может, конечно, заметно «испортиться».

Работая над статьей, авторы обнаружили много соотношений для полиномов $B_{qm}(f, z)$. Часть материала напрямую связана с затронутыми темами, часть — представляет самостоятельный интерес и может указать направление новых исследований. Краткая сводка подобных результатов представлена в следующем разделе.

14. Различные соотношения на цепочке склеиваний. Итак, рассматриваем полиномы Бернштейна (1.1), взятые от рационального модуля (1.2) при соглашениях (2.1). Пусть $n = qm$,

где $m \in \mathbb{N}$. В таком случае по определению (1.1) имеем

$$B_{qm}(f, z) = \sum_{k=0}^{qm} \left| \frac{k}{m} - p \right| C_{qm}^k z^k (1-z)^{qm-k}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.1)$$

Все последующие результаты в данном разделе относятся именно к этим полиномам.

14.1. Специальные представления изучаемых полиномов. Раскроем модуль в (14.1), разбив общую сумму на две части. Проводя элементарные преобразования и учитывая, что полиномы Бернштейна от линейной функции совпадают с ней самой, получим представление

$$B_{qm}(f, z) = p - qz + 2 \sum_{k=pm+1}^{qm} \left(\frac{k}{m} - p \right) C_{qm}^k z^k (1-z)^{qm-k}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.2)$$

Для симметричного модуля $f(x) = |2x - 1|$ подобная формула отмечалась в [22, с. 148].

Помимо (14.2) возможно альтернативное представление

$$B_{qm}(f, z) = qz - p + 2 \sum_{k=0}^{pm-1} \left(p - \frac{k}{m} \right) C_{qm}^k z^k (1-z)^{qm-k}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.3)$$

Формулы (14.2) и (14.3) дают явную связь полиномов (14.1) с линейными частями предельной функции $\varphi(z)$, определенной по правилу (8.6).

14.2. Представление первой производной. Известно (см. [36, с. 87] или [49, с. 12]), что первая производная полиномов Бернштейна (1.1) для любой функции $f \in C[0, 1]$ допускает запись

$$B'_n(f, z) = n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f \left(\frac{k+1}{n} \right) - f \left(\frac{k}{n} \right) \right] C_{n-1}^k z^k (1-z)^{n-1-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Применяя подобное правило к рациональному модулю (1.2), получим для полиномов (14.1) следующее выражение производной:

$$B'_{qm}(f, z) = -q \sum_{k=0}^{pm-1} C_{qm-1}^k z^k (1-z)^{qm-1-k} + q \sum_{k=pm}^{qm-1} C_{qm-1}^k z^k (1-z)^{qm-1-k}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Последнее легко сводится к виду

$$B'_{qm}(f, z) = q - 2q \sum_{k=0}^{pm-1} C_{qm-1}^k z^k (1-z)^{qm-1-k}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.4)$$

Из (14.4) следуют граничные соотношения

$$B'_{qm}(f, 0) = -q, \quad B'_{qm}(f, 1) = q, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.5)$$

Другими словами, при каждом $m \in \mathbb{N}$ производная $B'_{qm}(f, z)$ на концах отрезка $[0, 1]$ совпадает с производной $f'(x)$ порождающей функции $f(x) = |qx - p|$.

14.3. Связь полинома с его первой производной. Учитывая явное сходство, рассмотрим специальную комбинацию представлений (14.3) и (14.4). Имеем

$$qB_{qm}(f, z) + (p - qz) B'_{qm}(f, z) = 2q \mathfrak{W}_{p,q}^m(z),$$

где

$$\mathfrak{W}_{p,q}^m(z) \equiv \sum_{k=0}^{pm-1} \left(p - \frac{k}{m} \right) C_{qm}^k z^k (1-z)^{qm-k} + (qz - p) \sum_{k=0}^{pm-1} C_{qm-1}^k z^k (1-z)^{qm-1-k}.$$

Используем элементарные соотношения

$$\left(p - \frac{k}{m} \right) C_{qm}^k = p C_{qm-1}^k - (q - p) C_{qm-1}^{k-1}, \quad k = 1, \dots, qm - 1, \quad C_{qm}^0 = C_{qm-1}^0,$$

и получим, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_{p,q}^m(z) = p \sum_{k=0}^{pm-1} C_{qm-1}^k z^k (1-z)^{qm-k} - (q-p) \sum_{k=1}^{pm-1} C_{qm-1}^{k-1} z^k (1-z)^{qm-k} + \\ + q \sum_{k=0}^{pm-1} C_{qm-1}^k z^{k+1} (1-z)^{qm-1-k} - p \sum_{k=0}^{pm-1} C_{qm-1}^k z^k (1-z)^{qm-1-k}. \end{aligned}$$

Комбинируя первое слагаемое с четвертым, а затем — с третьим и изменяя порядок суммирования во втором, приходим к выражению

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_{p,q}^m(z) = (q-p) \left(\sum_{k=0}^{pm-1} C_{qm-1}^k z^{k+1} (1-z)^{qm-1-k} - \sum_{k=0}^{pm-2} C_{qm-1}^k z^{k+1} (1-z)^{qm-1-k} \right) = \\ = (q-p) C_{qm-1}^{pm-1} z^{pm} (1-z)^{(q-p)m}. \end{aligned}$$

Остается подставить результат в исходную формулу и заметить, что $qC_{qm-1}^{pm-1} = pC_{qm}^{pm}$. В итоге приходим к важному тождеству

$$qB_{qm}(f, z) + (p - qz) B'_{qm}(f, z) = 2p(q-p)C_{qm}^{pm}(z^p(1-z)^{q-p})^m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (14.6)$$

справедливому для полиномов (14.1). Наличие нетривиальной связи (14.6) существенно упрощает многие последующие выводы.

14.4. Простота нулей. Соотношение (14.6) показывает, в частности, что при любом $m \in \mathbb{N}$ все нули полинома $B_{qm}(f, z)$ заведомо являются простыми. Действительно, допустим, что некий полином $B_{qm}(f, z)$ имеет кратный нуль $z_0 \in \mathbb{C}$, очевидно отличный от $z = 0$ и $z = 1$. Тогда

$$B_{qm}(f, z_0) = B'_{qm}(f, z_0) = 0.$$

Подставив точку z_0 в формулу (14.6), получим противоречие. Результат данного пункта содержит частичный ответ на вопрос **B2**, поставленный в разделе 12 выше.

14.5. Значение полинома в точке излома. При $z = p/q$ тождество (14.6) сводится к виду

$$B_{qm}\left(f, \frac{p}{q}\right) = \frac{2p(q-p)}{q} \left(\frac{p^p(q-p)^{q-p}}{q^q} \right)^m C_{qm}^{pm}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.7)$$

Итак, при всех $m \in \mathbb{N}$ значения $B_{qm}(f, p/q)$ вычисляются в форме (14.7) для любого рационального модуля $f(x) = |qx - p|$, взятого при соглашениях (2.1). Любопытно, что множитель $2p(q-p)/q$ совпадает со значением полинома $B_1(f, z) = p + (q-2p)z$ в той же точке излома $z = p/q$.

14.6. Комбинаторные тождества. Пользуясь формулой (14.7), можно установить много различных комбинаторных соотношений. Например, подставим в разложение Поповичу (13.1) значение $z = p/q$ и сравним результат с выражением (14.7). После простых преобразований возникнет неочевидное тождество

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{q-1} \frac{p^{\lceil p\nu/q \rceil - 1} (q-p)^{\nu - \lfloor p\nu/q \rfloor - 1}}{q^\nu} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_{p,q}(\nu)}{qk + \nu} \left(\frac{p^p(q-p)^{q-p}}{q^q} \right)^k C_{qk+\nu}^{pk+j_{p,q}(\nu)} = \\ = 1 - \left(\frac{p^p(q-p)^{q-p}}{q^q} \right)^m C_{qm}^{pm}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (14.8) \end{aligned}$$

с величинами $a_{p,q}(\nu)$, $j_{p,q}(\nu)$, вычисляемыми по правилу (3.3). Тождество (14.8) верно при любых значениях p и q , удовлетворяющих условиям (2.1). В частности, при $p = 1$ с учетом «заготовок», сделанных в примере 7.3, можно свести (14.8) к виду

$$\sum_{\nu=1}^{q-1} \frac{(q-1)^{\nu-1}}{q^\nu} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\nu}{qk + \nu} \left(\frac{(q-1)^{q-1}}{q^q} \right)^k C_{qk+\nu}^k = 1 - \left(\frac{(q-1)^{q-1}}{q^q} \right)^m C_{qm}^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.9)$$

Взяв для конкретики значение $q = 3$, получим из (14.9) следующее тождество:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{3}{3k+1} \left(\frac{4}{27}\right)^k C_{3k+1}^k + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{4}{3k+2} \left(\frac{4}{27}\right)^k C_{3k+2}^k = 9 \left(1 - \left(\frac{4}{27}\right)^m C_{3m}^m\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Если же $q = 2$, как для симметричного модуля $f(x) = |2x - 1|$, то формула (14.9) путем элементарных преобразований (с учетом равенства $2C_{2k-1}^{k-1} = C_{2k}^k$) дает соотношение

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k = 1 - 2^{-2m} C_{2m}^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

По поводу последнего см. также доказательство теоремы 12.1 выше.

Приведем результат иного характера. Вычислим значение $B_{qm}(f, p/q)$ по определению (14.1) и приравняем полученное к правой части в (14.7). Окончательный ответ запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{qm} \left| \frac{k}{m} - p \right| C_{qm}^k p^k (q-p)^{qm-k} = \frac{2p(q-p)}{q} (p^p (q-p)^{q-p})^m C_{qm}^{pm}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.10)$$

Тождество (14.10) имеет прямое отношение к известным биномиальным суммам Муавра–Пуанкаре (см. специальную статью [39], а также [22, с. 166]).

14.7. Оценка и асимптотика в точке излома. Вновь рассматриваем значения $B_{qm}(f, p/q)$, выраженные явной формулой (14.7). Учитывая стандартную асимптотику (9.6) и двустороннюю оценку (9.8), имеем соотношения

$$B_{qm} \left(f, \frac{p}{q} \right) \sim \sqrt{\frac{2p(q-p)}{qm\pi}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (14.11)$$

$$\left(1 - \frac{q^2 - pq + p^2}{12pq(q-p)m}\right) \sqrt{\frac{2p(q-p)}{qm\pi}} < B_{qm} \left(f, \frac{p}{q} \right) < \sqrt{\frac{2p(q-p)}{qm\pi}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.12)$$

Из (14.12) следует, что

$$B_{qm} \left(f, \frac{p}{q} \right) = \sqrt{\frac{2p(q-p)}{qm\pi}} - \theta_m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (14.13)$$

где бесконечно малая величина $\theta_m = \theta_m(p, q) > 0$ имеет порядок $O(m^{-3/2})$ при $m \rightarrow \infty$. Формулы (14.11)–(14.13) тесно связаны с результатами Боянич и Чэна [35], полученными сложным аналитическим методом без знания истинного значения (14.7).

Заметим также, что

$$R_{qm} \left(f, \frac{p}{q} \right) = B_{qm} \left(f, \frac{p}{q} \right) = \frac{2p(q-p)}{q} \left(\frac{p^p (q-p)^{q-p}}{q^q} \right)^m C_{qm}^{pm}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (14.14)$$

для уклонения $R_n(f, z)$, определенного формулой (8.14). Тем самым, соотношения (14.11)–(14.13) дают возможность уточнить прежнюю оценку (8.16) применительно к точке излома $z = p/q$. Покажем, что величины (14.14) в определенном смысле являются «максимальными» и мажорируют все остальные значения $R_{qm}(f, z)$ на компакте Канторовича $K_{p,q}$.

14.8. Уточненная оценка уклонения. Итак, определим компакт $K_{p,q}$ по формуле (8.4) и рассмотрим уклонения

$$R_{qm}(f, z) \equiv B_{qm}(f, z) - \varphi(z), \quad z \in K_{p,q}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (14.15)$$

полиномов (14.1) от предельной функции (8.6). Используя специальные представления (14.2), (14.3), запишем отдельно на левой и правой петлях компакта

$$R_{qm}(f, z) = 2 \sum_{k=pm+1}^{qm} \left(\frac{k}{m} - p \right) C_{qm}^k z^k (1-z)^{qm-k}, \quad z \in K_{p,q}^{(1)}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$R_{qm}(f, z) = 2 \sum_{k=0}^{pm-1} \left(p - \frac{k}{m} \right) C_{qm}^k z^k (1-z)^{qm-k}, \quad z \in K_{p,q}^{(2)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Преобразуем эти выражения к виду

$$R_{qm}(f, z) = 2 (z^p (1-z)^{q-p})^m \sum_{k=pm+1}^{qm} \left(\frac{k}{m} - p \right) C_{qm}^k \left(\frac{z}{1-z} \right)^{k-pm}, \quad z \in K_{p,q}^{(1)}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$R_{qm}(f, z) = 2 (z^p (1-z)^{q-p})^m \sum_{k=0}^{pm-1} \left(p - \frac{k}{m} \right) C_{qm}^k \left(\frac{1-z}{z} \right)^{pm-k}, \quad z \in K_{p,q}^{(2)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Временно обозначим $c = p/q$. Учитывая формулу (8.4) компакта $K_{p,q}$ и вид его петель $K_{p,q}^{(1)}$, $K_{p,q}^{(2)}$ (см. определение (8.5)), несложно показать, что

$$\max_{z \in K_{p,q}^{(1)}} |z^p (1-z)^{q-p}| = c^p (1-c)^{q-p}, \quad \max_{z \in K_{p,q}^{(1)}} \left| \frac{z}{1-z} \right| = \frac{c}{1-c}, \quad \max_{z \in K_{p,q}^{(2)}} \left| \frac{1-z}{z} \right| = \frac{1-c}{c}.$$

Но тогда

$$|R_{qm}(f, z)| \leq R_{qm}(f, c) = R_{qm} \left(f, \frac{p}{q} \right), \quad z \in K_{p,q}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Значения же $R_{qm}(f, p/q)$ вычисляются по формуле (14.14), и для них справедливы весьма точные оценки (14.11)–(14.13). В итоге всюду на компакте $K_{p,q}$ отклонения (14.15) мажорируются следующим образом:

$$|R_{qm}(f, z)| \leq R_{qm} \left(f, \frac{p}{q} \right) = \frac{2p(q-p)}{q} \left(\frac{p^p(q-p)^{q-p}}{q^q} \right)^m C_{qm}^{pm} < \sqrt{\frac{2p(q-p)}{qm\pi}}. \quad (14.16)$$

Универсальная оценка (14.16) действует при всех $z \in K_{p,q}$ и всех $m \in \mathbb{N}$. Она дополняет общие результаты теоремы 8.2, делая завершенной картину сходимости для полиномов $B_{qm}(f, z)$ из цепочки склеиваний (3.8).

14.9. Представление второй производной. Продифференцировав тождество (14.6), придем к компактной записи второй производной

$$B_{qm}''(f, z) = 2p(q-p) m C_{qm}^{pm} z^{pm-1} (1-z)^{(q-p)m-1}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.17)$$

Напомним, что подобное соотношение для порождающей функции $f(x) = |x|$ на $[-1, 1]$ было впервые отмечено в работе Поповичу [53] (см. раздел 1 нашей статьи). Аналоги (14.17) для произвольного рационального модуля на симметричном отрезке $[-1, 1]$ см. в [13]. Формула (14.17) дает универсальное представление $B_{qm}''(f, z)$, верное для любого рационального модуля $f(x) = |qx - p|$ на стандартном отрезке $[0, 1]$.

Другой возможный способ доказательства (14.17) основан на общей формуле

$$B_n''(f, z) = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \left[f \left(\frac{k+2}{n} \right) - 2f \left(\frac{k+1}{n} \right) + f \left(\frac{k}{n} \right) \right] C_{n-2}^k z^k (1-z)^{n-2-k},$$

действующей при $n \geq 2$ для произвольной функции $f \in C[0, 1]$ (см. [49, с. 12]). При вычислении разностей второго порядка для нашего рационального модуля (1.2) на номерах $n = qm$ в формуле второй производной останется лишь одно ненулевое слагаемое — отвечающее значению $k = pm - 1$ и равное в точности $2q$. Преобразовав результат, получим прежнее выражение (14.17).

14.10. *Сходимость производных.* Для того же рационального модуля $f(x) = |qx - p|$ снова введем компакт Канторовича $K_{p,q}$ и полином Канторовича $T_{p,q}(z)$ по формулам (8.4) и (8.9) соответственно. Согласно теореме 8.1 множество сходимости полиномов $B_{qm}(f, z)$ при $m \rightarrow \infty$ совпадает с компактом $K_{p,q}$. Для второй производной перепишем представление (14.17) в виде

$$B''_{qm}(f, z) = 2q^q \left(\frac{z}{p}\right)^{p-1} \left(\frac{1-z}{q-p}\right)^{q-p-1} m \left(\frac{q^q}{p^p (q-p)^{q-p}}\right)^{-m} C_{qm}^{pm} (T_{p,q}(z))^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда, принимая во внимание связь (8.10) и асимптотику (9.6), получим, что полиномы $B''_{qm}(f, z)$ при $m \rightarrow \infty$ сходятся к тождественному нулю равномерно на любом компакте в $\text{int } K_{p,q}$ и расходятся на множестве $\mathbb{C} \setminus \text{int } K_{p,q}$, в том числе — на границе $\partial K_{p,q} = \Lambda_{p,q}$.

Вопрос о точном описании множества сходимости полиномов $B'_{qm}(f, z)$ является более тонким. Тождество (14.6), записанное в эквивалентной форме

$$qB_{qm}(f, z) + (p - qz) B'_{qm}(f, z) = 2p(q - p) \left(\frac{q^q}{p^p (q-p)^{q-p}}\right)^{-m} C_{qm}^{pm} (T_{p,q}(z))^m, \quad m \in \mathbb{N},$$

позволяет утверждать, что при $m \rightarrow \infty$ последовательность производных $B'_{qm}(f, z)$ сходится во всех точках $z \in K_{p,q} \setminus \{p/q\}$ (равномерно на компактах из этого множества). При этом, учитывая теорему 8.1, получаем, что

$$B'_{qm}(f, z) \rightarrow \psi(z) \equiv \begin{cases} -q, & z \in K_{p,q}^{(1)} \setminus \{p/q\}, \\ q, & z \in K_{p,q}^{(2)} \setminus \{p/q\}, \end{cases} \quad m \rightarrow \infty,$$

с множествами $K_{p,q}^{(1)}$ и $K_{p,q}^{(2)}$, заданными в (8.5). Скорее всего, производные $B'_{qm}(f, z)$ сходятся к нулю в точке $z = p/q$ и расходятся во всех точках $z \in \mathbb{C} \setminus K_{p,q}$, но это, конечно, нуждается в отдельном обосновании.

14.11. *Степени полиномов и количества нулей.* Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Из (14.17) следует, что

$$\deg B''_{qm}(f, z) = qm - 2, \quad \deg B'_{qm}(f, z) = qm - 1, \quad \deg B_{qm}(f, z) = qm. \quad (14.18)$$

При этом полином $B''_{qm}(f, z)$ имеет в плоскости \mathbb{C} лишь два различных нуля¹, а именно, нуль $z = 0$ кратности $qm - 1$ и нуль $z = 1$ кратности $(q - p)m - 1$. Очевидно, нули полинома $B'_{qm}(f, z)$ отличны от $z = 0$ и $z = 1$ (см. (14.5)), и потому все они являются простыми для $B'_{qm}(f, z)$. Простота нулей полинома $B_{qm}(f, z)$ показана выше в п. 14.4. Но тогда из (14.18) заключаем, что полином $B'_{qm}(f, z)$ имеет в точности $qm - 1$ простых нулей, а полином $B_{qm}(f, z)$ имеет qm простых нулей. Эта тематика тесно связана с вопросами, поставленными в разделе 12.

Отметим еще, что у полинома $B'_{qm}(f, z)$ при любом $m \in \mathbb{N}$ ровно один нуль попадает на интервал $(0, 1)$ (ср. формулы (14.5) и (14.17)). Полином же $B_{qm}(f, z)$ на $[0, 1]$ нулей вовсе не имеет, так как $B_{qm}(f, x) > 0$ при $x \in [0, 1]$ в силу сходимости к предельной функции $f(x) = |qx - p|$ монотонно сверху (см. формулу (4.6)).

14.12. *Вторая производная в точке излома.* Подставив в (14.17) значение $z = p/q$, получим, что

$$B''_{qm} \left(f, \frac{p}{q} \right) = 2q^2 m \left(\frac{p^p (q-p)^{q-p}}{q^q} \right)^m C_{qm}^{pm}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.19)$$

Очевидная связь между (14.7) и (14.19) приводит к равенству

$$B''_{qm} \left(f, \frac{p}{q} \right) = \frac{q^3}{p(q-p)} m B_{qm} \left(f, \frac{p}{q} \right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Возникает естественный вопрос: можно ли в компактной форме, наподобие (14.7) и (14.19), записать значение первой производной $B'_{qm}(f, z)$ в той же точке излома $z = p/q$? Для симметричного модуля $f(x) = |2x - 1|$ ответ получается тривиально (ибо $B'_{2m}(f, 1/2) = 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$), но в общем случае, для $f(x) = |qx - p|$, задача может оказаться неразрешимой.

¹Точнее, не более двух нулей, поскольку при $m = 1$ ситуация может вырождаться.

14.13. *Вторая производная как δ -образный объект.* Примечательно, что полиномы (14.17) на базовом отрезке $[0, 1]$ обладают характерными свойствами δ -образной последовательности, сосредоточенной вблизи точки $x = p/q$. Точнее говоря, верны соотношения

$$B''_{qm} \left(f, \frac{p}{q} \right) \sim q^2 \sqrt{\frac{2qm}{p(q-p)\pi}} \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty, \quad (14.20)$$

$$B''_{qm}(f, 0) = B''_{qm}(f, 1) = 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2, \quad (14.21)$$

$$B''_{qm}(f, x) \sim \sqrt{\frac{2pq(q-p)m}{\pi}} \frac{(T_{p,q}(x))^m}{x(1-x)} \rightarrow 0, \quad x \in (0, 1) \setminus \{p/q\}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (14.22)$$

$$\int_0^1 B''_{qm}(f, x) dx = 2q, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.23)$$

Свойство (14.20) выводим из явного выражения (14.19), используя асимптотику (9.6). Краевые значения (14.21) находим из (14.17). Асимптотическая формула (14.22) также извлекается из (14.17) с учетом поведения на $(0, 1)$ первичного полинома Канторовича $T_{p,q}(x)$ (см. (8.10)). Величину (14.23) вычисляем через соотношения (14.5) (или стандартным применением эйлеровых интегралов).

14.14. *Явная алгебраическая запись.* Раскрывая бином в (14.17), приходим к развернутой алгебраической записи второй производной $B''_{qm}(f, z)$ по степеням независимой переменной:

$$B''_{qm}(f, z) = 2p(q-p)m C_{qm}^{pm} \sum_{k=0}^{(q-p)m-1} (-1)^k C_{(q-p)m-1}^k z^{pm+k-1}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.24)$$

Интегрируя (14.24) и учитывая условие $B'_{qm}(f, 0) = -q$ из (14.5), получаем, что

$$B'_{qm}(f, z) = -q + 2p(q-p)m C_{qm}^{pm} \sum_{k=0}^{(q-p)m-1} \frac{(-1)^k}{pm+k} C_{(q-p)m-1}^k z^{pm+k}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.25)$$

Наконец, интегрирование (14.25) с учетом условия $B_{qm}(f, 0) = p$ дает при всех $m \in \mathbb{N}$ разложение по степеням z для самих полиномов Бернштейна

$$B_{qm}(f, z) = p - qz + 2p(q-p)m C_{qm}^{pm} \sum_{k=0}^{(q-p)m-1} \frac{(-1)^k}{(pm+k)(pm+k+1)} C_{(q-p)m-1}^k z^{pm+k+1}. \quad (14.26)$$

Подобная формула для симметричного модуля $f(x) = |2x - 1|$ подробно изучена в [19].

В общем же случае особый интерес представляет задача о скорости роста коэффициентов в полиномах Бернштейна при явной алгебраической записи (14.26). Требуется выяснить, например, зависимость скорости роста максимального коэффициента от выбора значений p, q . Как следует из результатов [20], наибольший асимптотический рост максимального коэффициента будет наблюдаться в полиномах Бернштейна для функции $f(x) = |3x - 1|$, т.е. при $p = 1$ и $q = 3$.

14.15. *Пределы структурированных сумм.* Используем пример $f(x) = |3x - 1|$ для постановки еще одной интересной проблемы. В этом случае, как показывает формула (3.14), при $x \in [0, 1]$ для полиномов $B_{3m}(f, x)$ из цепочки склеиваний справедливо представление

$$B_{3m}(f, x) = 1 + x - 2x(1-x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{3k+1} C_{3k+1}^k (x(1-x)^2)^k - \\ - 2x(1-x)^2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{3k+2} C_{3k+2}^k (x(1-x)^2)^k, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14.27)$$

Сходимость полиномов понятна: если $m \rightarrow \infty$, то

$$B_{3m}(f, x) \rightrightarrows f(x) \equiv |3x - 1| \quad \text{на множестве } x \in [0, 1]. \quad (14.28)$$

Напрашивается логичный вопрос: к чему по отдельности сходятся структурированные суммы в формуле (14.27)? Ответ оказывается весьма неожиданным: можно показать, что

$$2x(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3k+1} C_{3k+1}^k (x(1-x)^2)^k = 4 \sqrt{\frac{x}{3}} \sin \left(\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3}{2} (1-x) \sqrt{3x} \right) \right),$$

$$2x(1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3k+2} C_{3k+2}^k (x(1-x)^2)^k = \frac{8}{3} \sin^2 \left(\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3}{2} (1-x) \sqrt{3x} \right) \right)$$

при $x \in [0, 1]$. Совершая теперь предельный переход (14.28), получим неочевидное тождество

$$|3x - 1| = 1 + x - 4 \sqrt{\frac{x}{3}} \sin \left(\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3}{2} (1-x) \sqrt{3x} \right) \right) - \frac{8}{3} \sin^2 \left(\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3}{2} (1-x) \sqrt{3x} \right) \right),$$

заведомо верное при $x \in [0, 1]$. Любопытно, что

$$4 \sqrt{\frac{x}{3}} \sin \left(\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3}{2} (1-x) \sqrt{3x} \right) \right) = \frac{8}{3} \sin^2 \left(\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3}{2} (1-x) \sqrt{3x} \right) \right) = 2x \quad (14.29)$$

при $x \in [0, 1/3]$, но эти же тригонометрические выражения становятся нелинейными на промежутке $x \in [1/3, 1]$. Вывод (14.29) основан на равенстве

$$\sin \left(\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3}{2} (1-x) \sqrt{3x} \right) \right) = \frac{\sqrt{3x}}{2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3}.$$

Последнее легко проверить при помощи формулы синуса тройного угла.

Желательно распространить подобные результаты на случай произвольного рационального модуля (1.2). Авторы располагают полным решением проблемы для $f(x) = |qx - 1|$, когда согласно примеру 7.3 полиномы $B_{qm}(f, x)$ структурируются на основе «регулярной» формулы

$$B_{qm}(f, x) = 1 + (q-2)x - \sum_{\nu=1}^{q-1} 2x(1-x)^\nu \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\nu}{qk+\nu} C_{qk+\nu}^k (x(1-x)^{q-1})^k, \quad (14.30)$$

более удобной, чем в общем случае $f(x) = |qx - p|$.

Задаче о нахождении отдельных пределов при $m \rightarrow \infty$ для структурированных сумм в разложении (14.30) планируется посвятить специальную работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн С. Н. Sur la convergence de certaines suites de polynomes// в кн.: Собрание сочинений. — Изд-во АН СССР, 1954. — Т. 2. Конструктивная теория функций [1931–1953]. — С. 187–197; см. также: Bernstein S. Sur la convergence de certaines suites de polynomes// J. Math. — 1936. — 15. — P. 345–358.
2. Бернштейн С. Н. О сходимости многочленов $\sum_0^n C_n^m f(m/n) x^m (1-x)^{n-m}$ в комплексной области// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1943. — 7, № 2. — С. 49–88.
3. Виденский В. С. Многочлены Бернштейна. — Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990.
4. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. — М.: ГИТТЛ, 1954.
5. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир, 1998.
6. Ильин В. А. О ещё одном выводе формулы Стирлинга// Мат. высш. образ. — 2007. — № 5. — С. 9–14.
7. Канторович Л. В. О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала// Изв. АН СССР. VII сер. — 1931. — № 8. — С. 1103–1115.
8. Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближений. — М.: Физматгиз, 1959.

9. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1. Начала теории. — М.: Наука, 1967.
10. Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций. — М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.
11. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
12. Новиков И. Я. Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Мат. заметки. — 2002. — 71, № 2. — С. 239–253.
13. Петросова М. А. О некоторых соотношениях, связанных с полиномами Бернштейна для рационального модуля на симметричном отрезке // в кн.: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования / Науч. конф. «Герценовские чтения» (9–13 апреля 2018). — СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. — С. 153–157.
14. Поллиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций. — М.: Наука, 1978.
15. Полищук В. И. О формуле Стирлинга / (частное сообщение).
16. Попов А. Ю. Двусторонние оценки сумм значений функции в целых точках и их приложения. — Переславль-Залесский, 2016.
17. Попов А. Ю. Оценка сверху остатка степенного ряда с положительными коэффициентами специального вида // Челябинск. физ.-мат. ж. — 2017. — 2, № 2. — С. 193–198.
18. Титчмарш Е. Теория функций. — М.: Наука, 1980.
19. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челябинск. гос. ун-та. Мат. Мех. Информ. — 2012. — 15, № 26. — С. 6–40.
20. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке // в кн.: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования / Науч. конф. «Герценовские чтения» (13–17 апреля 2015). — СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. — С. 115–121.
21. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Полный анализ сходимости полиномов Бернштейна от симметричного модуля // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2020 (в печати).
22. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // в кн.: Математический форум / Исследования по математическому анализу. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. — 8. — С. 126–175.
23. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2015. — 15, № 3. — С. 288–300.
24. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — 16, № 4. — С. 425–435.
25. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Специальные задачи для полиномов Бернштейна в комплексной области // в кн.: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования / Науч. конф. «Герценовские чтения–2016» (11–15 апреля 2016). — СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. — С. 139–145.
26. Тихонов И. В., Цветкович Д. Г., Шерстюков В. Б. Компьютерное исследование аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Фундам. прикл. мат. — 2016. — 21, № 4. — С. 151–173.
27. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Что такое аттракторы нулей для классических полиномов Бернштейна // в кн.: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования / Науч. конф. «Герценовские чтения–2017» (10–14 апреля 2017). — СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. — С. 150–160.
28. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Об одном методе для нахождения области сходимости полиномов Бернштейна в комплексной плоскости // в кн.: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования / Науч. конф. «Герценовские чтения–2018» (9–13 апреля 2018). — СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. — С. 145–153.
29. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Т. 2. — М.: Наука, 1968.
30. Цветкович Д. Г., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Специальные представления для полиномов Бернштейна от рационального модуля на стандартном отрезке // в кн.: Современные проблемы теории функций и их приложения. — Саратов: Научная книга, 2018. — С. 339–342.
31. Цветкович Д. Г. Особые структурированные представления для полиномов Бернштейна от рационального модуля // в кн.: Системы компьютерной математики и их приложения / XIX Междунар. науч. конф., посв. 100-летию физ.-мат. ф-та СмолГУ. — Смоленск: СмолГУ, 2018. — С. 347–353.

32. *Цветкович Д. Г.* Подробный атлас аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна// Челябинск. физ.-мат. ж. — 2018. — 3, № 1. — С. 58–89.
33. *Юшкевич А. П. (ред.).* История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. 2. Математика XVII столетия. — М.: Наука, 1970.
34. *Aramă O.* Proprietăți privind monotonia șirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein și aplicarea lor la studiul aproximării funcțiilor// Stud. Cercet. Mat. (Cluj). — 1957. — 8, № 3–4. — P. 195–210.
35. *Bojanich R., Cheng F.* Rate of convergence of Bernstein polynomials for functions with derivatives of bounded variation// J. Math. Anal. Appl. — 1989. — 141, № 1. — P. 136–151.
36. *Bustamante J.* Bernstein Operators and Their Properties. — Birkhäuser, 2017.
37. *Davis P. J.* Interpolation and Approximation. — N.Y.: Dover, 1975.
38. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1993.
39. *Diaconis P., Zabell S.* Closed form summation for classical distributions: variations on a theme of de Moivre// Stat. Sci. — 1991. — 6, № 3. — P. 284–302.
40. *Dvoretzky A.* On the theorem of Jentzsch// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1949. — 35. — P. 246–252.
41. *Fowler D.* The binomial coefficient function// Am. Math. Month. — 1996. — 103, № 1. — P. 1–17.
42. *Gal S. G.* Approximation by complex Bernstein and convolution type operators. — London–Singapore: World Scientific, 2009.
43. *Gehlen W., Luh W.* On the sharpness of Jentzsch–Szegő-type theorems// Arch. Math. — 1994. — 63. — P. 33–38.
44. *Izumi S.* On the distribution of the zero points of sections of a power series// Jpn. J. Math. — 1927. — 4. — P. 29–32.
45. *Jentzsch R.* Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen// Acta Math. — 1918. — 41. — P. 219–251.
46. *Knuth D. E., Vardi I.* The asymptotic expansion of the middle binomial coefficient// Am. Math. Month. — 1996. — 97, № 7. — P. 629–630.
47. *Kocić Lj. M., Della Vecchia B.* Degeneracy of positive linear operators// Facta Univ. Ser. Math. Inform. — 1998. — 13. — P. 59–72.
48. *Landau E., Gaier D.* Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1986.
49. *Lorentz G. G.* Bernstein polynomials. — Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953.
50. *Passow E.* Some unusual Bernstein polynomials// in: Approximation Theory IV (*Chui C. K., Schumaker L. L., Ward J. D.*, eds.)/ Int. Symp. on Approximation Theory (Texas, January 10–14, 1983). — New York–London: Academic Press, 1983. — P. 649–652.
51. *Passow E.* Deficient Bernstein polynomials// J. Approx. Th. — 1989. — 59, № 3. — P. 282–285.
52. *Phillips G. M.* Interpolation and approximation by polynomials. — New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2003.
53. *Popoviciu T.* Sur l’approximation des fonctions convexes d’ordre supérieur// Mathematica. — 1935. — 10. — P. 49–54.
54. *Rahman Q. I., Schmeisser G.* Analytic Theory of Polynomials. — Oxford: Clarendon Press, 2002.
55. *Rodney E.* Problem 10310// Am. Math. Month. — 1993. — 100, № 5. — P. 499; см. также: *Rodney E.* Solution problem 10310// Am. Math. Month. — 1996. — 103, № 5. — P. 431–432.
56. *Sasvári Z.* Inequalities for binomial coefficients// J. Math. Anal. Appl. — 1999. — 236, № 1. — P. 223–226.
57. *Schoenberg I. J.* On variation diminishing approximation methods// in: On Numerical Approximation (*Langer R. E.*, ed.)/ Symp. conducted by the Mathematics Research Center US Army (University of Wisconsin, Madison, April 21–23, 1958). — Madison: Univ. of Wisconsin Press, 1959. — P. 249–274.
58. *Stănică P.* Good lower and upper bounds on binomial coefficients// J. Inequal. Pure Appl. Math. — 2001. — 2, № 3. — P. 1–5.
59. *Temple W. B.* Stieltjes integral representation of convex functions// Duke Math. J. — 1954. — 21, № 3. — P. 527–531.
60. *Vallée Poussin Charles de la* On the approximation of functions of a real variable and on quasi-analytic functions// Rice Inst. Pamphlet. — 1925. — 12, № 2. — P. 105–172.

61. *Wright E. M.* The Bernstein approximation polynomials in the complex plane// J. London Math. Soc. — 1930. — 5, № 4. — P. 265–269.

Тихонов Иван Владимирович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: ivtikh@mail.ru

Шерстюков Владимир Борисович

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

E-mail: shervb73@gmail.com

Цветкович Диана Горановна

Московский педагогический государственный университет

E-mail: dianacve@inbox.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 170 (2019). С. 118–128
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-170-118-128

УДК 517.518, 519.614

КОНЕЧНЫЕ ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ В АНАЛИЗЕ УОЛША

© 2019 г. Ю. А. ФАРКОВ

Аннотация. Изложены методы построения конечных фреймов Парсеваля с помощью матриц Уолша и дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона.

Ключевые слова: функция Уолша, фрейм, ортогональный всплеск, дискретное преобразование, проблема Кадисона—Зингера.

FINITE PARSEVAL FRAMES IN WALSH ANALYSIS

© 2019 YU. A. FARKOV

ABSTRACT. Methods for constructing finite Parseval frames by using Walsh matrices and the discrete Vilenkin–Chrestenson transform are described.

Keywords and phrases: Walsh function, frame, orthogonal wavelet, discrete transformation, Kadison–Singer problem.

AMS Subject Classification: 42C15, 42C40

1. Введение. Теория конечных фреймов активно развивалась последние пятнадцать лет (см. библиографию в [34]) прежде всего в связи с приложениями в таких областях, как обработка сигналов, квантовая теория информации, многомерные ортогональные полиномы и сплайны, а также в теории сжатых измерений (compressed sensing). основополагающие факты теории фреймов и её приложений содержатся в монографиях [5, 7, 9, 20], а некоторые недавние результаты о многомерных всплесковых фреймах изложены в [28]. Фреймы активно применяются для анализа полноты, устойчивости и избыточности дискретных представлений сигналов. Понятие фрейма Парсеваля обобщает понятие ортонормированного базиса на системы, не обладающие свойством минимальности (см., например, [9, § 1.8]). В настоящей статье излагаются методы построения конечных фреймов Парсеваля с помощью функций Уолша и дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона.

Хорошо известно, что функции Уолша можно интерпретировать как характеры двоичной группы Кантора, а обобщениями функций Уолша являются характеры групп Виленкина (см., например, [1, 4, 30, 32, 32]). Локально компактная канторова группа C может быть определена как аддитивная группа диадического поля \mathbb{F} . Первые примеры ортогональных всплесков на группе C были найдены в [29], а полученные к настоящему времени результаты о всплесках на группах Кантора и Виленкина изложены в книге [25] и обзорных статьях [14, 22]. В [21] фреймы на группе C были определены с помощью допустимого условия Добеши и обобщенных ядер Дирихле. Кратномасштабный анализ для построения фреймов Парсеваля на группах Виленкина применялся в [15, 22–24]. В разделе 2 настоящей статьи приведены используемые в дальнейшем обозначения и краткие сведения о дискретных функциях Уолша. В разделе 3 показано, как для построения фреймов Парсеваля применяются матрицы Уолша. В связи с проблемой Кадисона—Зингера приведен недавний результат [16] о расщеплении конечных фреймов Парсеваля. В заключительном

разделе 4 доказано обобщение теоремы о фреймах в пространствах периодических последовательностей, сформулированной в [10], и приведен алгоритм построения фреймов Парсеваля с помощью дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона.

2. Дискретные функции Уолша. Как обычно, через \mathbb{Z}_+ и \mathbb{N} обозначаются множества целых неотрицательных и натуральных чисел соответственно. Система Уолша $\{w_l : l \in \mathbb{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в $L^2[0, 1]$ и определяется следующим образом (см. [4, 30]). Пусть функция $r_0(x)$ имеет период 1 и задана на интервале $[0, 1)$ по формуле

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2), \\ -1, & x \in [1/2, 1). \end{cases}$$

Тогда

$$w_0(x) \equiv 1, \quad w_l(x) = \prod_{j=1}^k (r_0(2^{j-1}x))^{\nu_j}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, 1],$$

где ν_j — цифры двоичного разложения числа l :

$$l = \sum_{j=1}^k \nu_j 2^{j-1}, \quad \nu_j \in \{0, 1\}, \quad \nu_k = 1, \quad k = k(l).$$

При $0 \leq l \leq 2^n - 1$ функции Уолша $w_l(x)$ постоянны на двоичных интервалах $[k/2^n, (k+1)/2^n)$, а значения $w_{lk} = w_l(k/2^n)$ задают матрицу Уолша $W_n = [w_{lk}]_{l,k=0}^{2^n-1}$. В частности, имеем

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

При любом натуральном n матрица W_n симметрична и удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} w_{lj} w_{kj} = \sum_{i=0}^{2^n-1} w_{il} w_{ik} = 2^n \delta_{lk}, \quad l, k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}, \quad (1)$$

где δ_{lk} — символ Кронекера. Строки матриц W_n называют *дискретными функциями Уолша*, упорядоченными по Пэли (см., например, [8, гл. 2]).

На практике часто используют функции Уолша, упорядоченные по Адамару (см., например, [6, 8]). По определению $H_1 := W_1$, а матрица $H_n = [h_{lk}]_{l,k=0}^{2^n-1}$ совпадает с n -й кронекеровой степенью матрицы H_1 . Например, для $n = 2$ имеем

$$H_2 = H_1 \otimes H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используемый в MATLAB рекурсивный метод Сильвестра генерирования матриц H_n основан на тождестве $H_{n+1} = H_1 \otimes H_n$. Матрицы H_n симметричны, обладают свойством ортогональности вида (1) и служат основным примером матриц Адамара, имеющих многочисленные применения в обработке сигналов (см. [8, гл. 2], [2, 26, 31]). Более 100 лет остается не доказанной гипотеза о существовании для любого натурального m матрицы Адамара порядка $4m$ (см., например, недавнюю статью [17]). Отметим также, что если известны цифры двоичных разложений

$$l = \sum_{j=1}^n l_j 2^{j-1}, \quad k = \sum_{j=1}^n k_j 2^{j-1}, \quad l_j, k_j \in \{0, 1\},$$

то элементы матриц W_n и H_n вычисляются по формулам

$$w_{lk} = (-1)^{w(l,k)}, \quad h_{lk} = (-1)^{h(l,k)}, \quad (2)$$

где

$$w(l, k) = \sum_{j=1}^n l_j k_{n-j+1}, \quad h(l, k) = \sum_{j=1}^n l_j k_j, \quad l, k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}.$$

Используемые в разделе 4 обобщения функций Уолша называют *функциями Крестенсона* или *функциями Виленкина—Крестенсона* (см. исторические сведения и библиографию в [2, 4, 6]).

3. Фреймы Парсеваля, определяемые по матрицам Уолша. В [3] найдены ортонормированные базисы в собственных подпространствах дискретного преобразования Уолша и построены соответствующие этим базисам фреймы Парсеваля. В дополнение к этому результату обсудим взаимосвязи между конечными фреймами Парсеваля и матрицами Уолша. Хорошо известна следующая характеристика фреймов Парсеваля для пространства \mathbb{C}^d произвольной размерности d .

Предложение 3.1. Пусть Λ — матрица размера $d \times s$, столбцами которой являются векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$ пространства \mathbb{C}^d . Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\Lambda \Lambda^* = I_d$, где I_d — единичная матрица порядка d ;
- (ii) строки матрицы Λ образуют ортонормированную систему в \mathbb{C}^s ;
- (iii) векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$ образуют фрейм Парсеваля для \mathbb{C}^d .

Пусть $N = 2^n$, где n — натуральное число. Напомним, что векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$ образуют фрейм Парсеваля для \mathbb{C}^N , если для каждого $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^s |\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle|^2$$

или, эквивалентно,

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^s \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \mathbf{v}_k.$$

Здесь $s \geq N$, причем в случае $s = N$ фрейм $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s\}$ является ортонормированным базисом в \mathbb{C}^N . Для произвольной ортогональной матрицы G размера $N \times N$ выберем $m < N$, запишем

$$G = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m \mid \mathbf{g}_{m+1}, \dots, \mathbf{g}_N]$$

и определим матрицу $G_1 \in \mathbb{R}^{N \times m}$ равенством $G_1 = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]$. Обозначим через $V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N]$ матрицу, сопряжённую к G_1 . Согласно предложению 3.1 векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ образуют фрейм Парсеваля для \mathbb{C}^m . В [16] эта конструкция применяется к нормализованной матрице Уолша H_n/\sqrt{N} , а фрейм Парсеваля, определённый столбцами полученной таким способом матрицы

$$V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N] \in \mathbb{R}^{m \times N}, \quad (3)$$

называется *фреймом Уолша*. Легко видеть, что $\|\mathbf{v}_j\| = \sqrt{m/N}$ для всех $j \in \{1, \dots, N\}$.

Что произойдет, если попытаться расщепить фрейм Уолша на два равных фрейма? Этот вопрос имеет отношение к известной проблеме Кадисона—Зингера. В 1959 г. эта проблема была сформулирована следующим образом (см. [27]): «Does every pure state on the (abelian) von Neumann algebra D of bounded diagonal operators on the Hilbert space ℓ^2 have a unique extension to a state on $B(\ell^2)$, the von Neumann algebra of all bounded linear operators on ℓ^2 ?» Проблема Кадисона—Зингера решена в 2013 г. и эквивалентна ряду других известных задач: о базисах гильбертова пространства, о замощении бесконечных матриц, о разбиениях фреймов, об обратимости конечных матриц с доминирующей диагональю, о тригонометрических суммах на канторовых множествах, о комбинаторных свойствах систем векторов в \mathbb{R}^d (см., например, [19, 33]). Основные результаты о конечномерных интерпретациях проблемы Кадисона—Зингера анализируются в [18] (см. также [12]). Следующее предложение было сформулировано в [35]; оно иногда называется «утверждением WDS» (weaver discrepancy statement).

Предложение 3.2. Пусть векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$ образуют фрейм Парсеваля для \mathbb{C}^d . Предположим, что $\|\mathbf{v}_j\|^2 \leq \alpha$ для всех $j \in \{1, \dots, s\}$. Тогда существует такое разбиение множества

индексов $J = \{1, \dots, s\}$ на два непересекающихся подмножества J_1 и J_2 , что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^d$, $\|\mathbf{x}\| = 1$ выполняются неравенства

$$\left| \sum_{j \in J_k} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_j \rangle|^2 - \frac{1}{2} \right| \leq 5\sqrt{\alpha}, \quad k = 1, 2.$$

Из равенства

$$H_n = \begin{bmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{bmatrix}$$

видно, что при $m \leq N/2$ фрейм Парсеваля $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ для \mathbb{C}^m , заданный матрицей (3), разбивается на два одинаковых жёстких фрейма для \mathbb{C}^m , соответствующим матрицам

$$V_1 = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{N/2}], \quad V_2 = [\mathbf{v}_{N/2+1}, \dots, \mathbf{v}_N],$$

причем $V_1 V_1^* = V_2 V_2^* = I_{m/2}$.

Пример 3.1. Пусть $m = 3$ и $N = 8$. Тогда изложенная выше конструкция приводит к матрице

$$V = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] = [V_a \mid V_b],$$

для которой $VV^* = I_3$. Определяемый этой матрицей фрейм Парсеваля расщепляется на два одинаковых фрейма, причем $V_a V_a^* = V_b V_b^* = I_3/2$. На следующем шаге после изменения нормировки получается матрица

$$V = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] = [V_a \mid V_b],$$

для которой $VV^* = I_3$. Однако теперь $V_a \neq V_b$ и расщепление на одинаковые фреймы невозможно. При этом

$$\|V_a V_a^* - I_3/2\|_2 = \|V_b V_b^* - I_3/2\|_2 = 1/2,$$

где $\|\cdot\|_2$ — спектральная матричная норма.

Основной результат статьи [16] относится к случаю $m > N/2$ и формулируется следующим образом.

Теорема 3.1. Пусть $N/2 < m < N$, $s = m - N/2$, где $m \in \mathbb{N}$. Предположим, что матрица $Y \in \mathbb{R}^{N \times m}$ получена удалением из правой части матрицы H_n произвольно выбранных $N/2 - s$ столбцов, так что

$$Y = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{y}_{N/2} & \mathbf{y}_{k(1)} & \dots & \mathbf{y}_{k(s)} \\ \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{y}_{N/2} & -\mathbf{y}_{k(1)} & \dots & -\mathbf{y}_{k(s)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} Y_a \\ Y_b \end{array} \right],$$

где $1 \leq k(1) < \dots < k(s) \leq N/2$. Положим

$$V = \frac{Y^*}{\sqrt{N}}, \quad V_a = \frac{Y_a^*}{\sqrt{N}}, \quad V_b = \frac{Y_b^*}{\sqrt{N}}.$$

Тогда $VV^* = I_N$, $V = [V_a \mid V_b]$ и верны равенства

$$V_a V_a^* - I_{N/2}/2 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \Delta/2 \\ \hline \Delta^*/2 & 0 \end{array} \right], \quad V_b V_b^* - I_{N/2}/2 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\Delta/2 \\ \hline -\Delta^*/2 & 0 \end{array} \right],$$

где $\Delta^* \Delta = I_s$, $\Delta \in \mathbb{R}^{(N/2) \times s}$. Более того,

$$\|V_a V_a^*\|_2 = \|V_b V_b^*\|_2 = 1$$

и для погрешностей верны равенства

$$\|V_a V_a^* - I_{N/2}/2\|_2 = \|V_b V_b^* - I_{N/2}/2\|_2 = 1/2, \\ \|V_a V_a^* - I_{N/2}/2\|_F = \|V_b V_b^* - I_{N/2}/2\|_F = \sqrt{(m - N/2)/2},$$

где $\|\cdot\|_F$ — норма Фробениуса.

Пример 3.2. Пусть $N = 8$ и $m = 6$ (тогда, очевидно, $s = 2$). Если выбрать $k(1) = 1$ и $k(2) = 3$, то матрица Y примет вид

$$Y = \left[\begin{array}{cccc|cc} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_3 \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & -\mathbf{y}_1 & -\mathbf{y}_3 \end{array} \right].$$

В этом случае

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta\Delta^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \|V_a V_a^* - I_4/2\|_F = \|V_b V_b^* - I_4/2\|_F = 1,$$

что согласуется с теоремой 3.1.

В [16] приведены примеры, проясняющие в терминах квадратичных форм связь теоремы 3.1 с проблемой Кадисона—Зингера.

Покажем, что любой конечный фрейм Парсевалья, составленный из векторов одинаковой длины, в некотором смысле эквивалентен фрейму Уолша. Хорошо известно, что если $F = [\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N] \in \mathbb{C}^{m \times N}$, $m \leq N$, определяет фрейм Парсевалья для \mathbb{C}^m , причем $FF^* = I_m$ и $\|\mathbf{f}_j\|^2 = \alpha$ для каждого $j \in \{1, \dots, m\}$, то $\alpha = m/N$. Предположим, что матрица $F = [\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N] \in \mathbb{C}^{m \times N}$ определяет такой фрейм Парсевалья для \mathbb{C}^m , что $\|\mathbf{f}_j\| = \sqrt{m/N}$, $j = 1, \dots, m$. Положим $G_1 = F^*$, $G_1 = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m] \in \mathbb{C}^{N \times m}$, и дополним матрицу G_1 до ортогональной матрицы

$$G = [G_1 \mid G_2] = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m \mid \mathbf{g}_{m+1}, \dots, \mathbf{g}_N] \in \mathbb{C}^{N \times N},$$

где $G_2 = [\mathbf{g}_{m+1}, \dots, \mathbf{g}_N] \in \mathbb{C}^{N \times (N-m)}$. Для матрицы $W = G^*$ имеем

$$W = \begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_N \\ \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \dots & \mathbf{r}_N \end{bmatrix},$$

где $R = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N] \in \mathbb{C}^{(N-m) \times N}$. Далее, полагая

$$\mathbf{w}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{r}_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

будем иметь $W = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N]$. Согласно предложению 3.1 система $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N\}$ является фреймом Парсевалья для m -мерного подпространства $S_m \subset \mathbb{C}^N$, состоящего из векторов вида

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^m.$$

Фрейм $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N\}$ можно рассматривать как вложение исходного фрейма $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N\}$ в пространство \mathbb{C}^N . Пусть теперь $V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N]$ — матрица, совпадающая с нормализованной матрицей Уолша H_n/\sqrt{N} . Из определения видно, что матрица V симметрична и ортогональна. Положим $P = VG$. Тогда $PW = V$ и, следовательно, $P\mathbf{w}_j = \mathbf{v}_j$, $j = 1, \dots, N$. Таким образом, каждому фрейму Парсевалья $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N\}$ для \mathbb{C}^m , определенному по векторам равной длины, поставлен в соответствие путем вложения в \mathbb{C}^N фрейм Парсевалья $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N\}$, который ортогональным преобразованием переводится во фрейм Уолша. Изложенная в следующем разделе конструкция в случае $p = 2$ представляет собой еще один метод построения фреймов Парсевалья с помощью матриц Уолша.

4. Фреймы Парсевалья и преобразование Виленкина—Крестенсона. Пусть $N = p^n$, где p и n — натуральные числа, $p \geq 2$. Множество $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ является абелевой группой с операцией

$$a \oplus b := a \oplus_p b, \quad a, b \in \mathbb{Z}_N,$$

где \oplus_p — операция сложения по модулю p , определяемая по разложениям

$$a = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu p^\nu, \quad b = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu p^\nu, \quad a_\nu, b_\nu \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

(см. [4, § 1.5]). Пространство $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ состоит из последовательностей вида

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots), \quad x(j) \in \mathbb{C}, \quad x(j+N) = x(j), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Последовательность x из $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ часто отождествляется с вектором $(x(0), x(1), \dots, x(N-1))$. Линейные операции в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ определяются покомпонентно. Скалярное произведение последовательностей $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ определяется по формуле

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}.$$

Пусть $\varepsilon_p = \exp(2\pi i/p)$. Функции Крестенсона $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}$ для пространства $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ могут быть заданы равенствами

$$w_k^{(N)}(l) = \varepsilon_p^{\sigma(k,l)}, \quad w_k^{(N)}(j) = w_k^{(N)}(j+N), \quad j \in \mathbb{Z},$$

где

$$\sigma(k, l) = \sum_{\nu=0}^{n-1} k_\nu l_{n-\nu-1}, \quad k = \sum_{\nu=0}^{n-1} k_\nu p^\nu, \quad l = \sum_{\nu=0}^{n-1} l_\nu p^\nu, \quad k_\nu, l_\nu \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Из определений видно, что функции Крестенсона при $p = 2$ совпадают с функциями Уолша. О свойствах дискретных функций Крестенсона и их применениях для обработки сигналов см. [2, 4, 6].

Положим $N_1 = p^{n-1}$. При $p = 2$ для получения матрицы $(w_k^{(N)}(l))$ следует каждую строку матрицы $(w_k^{(N_1)}(l))$ написать дважды в виде двух новых строк и дополнить полученные строки, приписывая к первой строке справа еще один экземпляр этой же строки, а ко второй строке добавляя справа все элементы той же строки с противоположным знаком (см. раздел 2 и [4, § 1.3]). Аналогично, при $p > 2$ для получения матрицы $(w_k^{(N)}(l))$ каждая строка матрицы $(w_k^{(N_1)}(l))$ записывается p раз в один столбец и умножается последовательно на $1, \varepsilon_p, \varepsilon_p^2, \dots, \varepsilon_p^{p-1}$ (полученные после умножения строки приписываются справа к имеющимся строкам). При $p = 3$ из матрицы

$$(w_k^{(3)}(l)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad k, l \in \{0, 1, 2\},$$

этим методом получается следующая матрица (для краткости полагаем $\varepsilon = \varepsilon_3$):

$$(w_k^{(9)}(l)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ 1 & 1 & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}, \quad k, l \in \{0, 1, \dots, 7\}.$$

Хорошо известно также, что

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_k^{(N)}(j) = \begin{cases} N, & \text{если } j \text{ делится на } N, \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } N. \end{cases} \quad (4)$$

Матрица $W^{(N)} := (w_l^{(N)}(j))_{l,j=0}^{N-1}$ симметрична и удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_l^{(N)}(j)\overline{w_k^{(N)}(j)} = \sum_{i=0}^{N-1} w_i^{(N)}(l)\overline{w_i^{(N)}(k)} = N\delta_{l,k}, \quad l, k \in \mathbb{Z}_N,$$

где $\delta_{l,k}$ — символ Кронекера. Следовательно, система $\{w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}\}$ является ортогональным базисом пространства $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$.

Дискретное преобразование Виленкина—Крестенсона ставит в соответствие вектору x из $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ последовательность \widehat{x} коэффициентов Фурье вектора x по системе $\{w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}\}$:

$$\widehat{x}(k) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{w_k^{(N)}(j)}, \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Разложение вектора x по базису $\{w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}\}$ записывается в виде

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}(k) w_k^{(N)}(j), \quad j \in \mathbb{Z}_N.$$

Быстрые алгоритмы реализации прямого и обратного дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона содержатся в [2, 4, 8].

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_N$ оператор p -ичного сдвига $T_k : \ell^2(\mathbb{Z}^N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ определяется по формуле

$$(T_k x)(j) := x(j \ominus k), \quad x = x(j) \in \ell^2(\mathbb{Z}^N).$$

Для любых $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$, $k, l \in \mathbb{Z}_N$ имеем

$$\widehat{(T_k x)}(l) = \overline{w_k^{(N)}(l)} \widehat{x}(l), \quad \langle x, y \rangle = N \langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle. \quad (5)$$

С помощью предложения 3.1 для любого $m \in \{N+1, \dots, pN\}$ после выбора m столбцов матрицы $(pN)^{-1/2} W^{(pN)}$ получаются фреймы Парсеваля из m векторов для пространства $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$. Следующая теорема в случае $p=2$ без доказательства приводилась в [10], а в ортогональном случае для любого $p \geq 2$ доказана в [13].

Теорема 4.1. Пусть векторы $u_0, u_1, \dots, u_r \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ таковы, что для матрицы

$$M(l) := \frac{N}{\sqrt{p}} \begin{bmatrix} \widehat{u}_0(l) & \dots & \widehat{u}_r(l) \\ \widehat{u}_0(l + N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l + N_1) \\ \widehat{u}_0(l + 2N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l + 2N_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \widehat{u}_0(l + (p-1)N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l + (p-1)N_1) \end{bmatrix}$$

при каждом $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ выполнено равенство

$$M(l)M^*(l) = I_p,$$

где I_p — единичная матрица порядка p . Тогда система

$$B(u_0, u_1, \dots, u_r) := \{T_{pk}u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{pk}u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \dots \cup \{T_{pk}u_r\}_{k=0}^{N_1-1}$$

является фреймом Парсеваля для $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$.

Доказательство. По условию имеем

$$\sum_{s=0}^r \widehat{u}_s(l + \mu N_1) \overline{\widehat{u}_s(l + \nu N_1)} = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad (6)$$

$$\sum_{s=0}^r |\widehat{u}_s(l + \mu N_1)|^2 = \frac{p}{N^2}, \quad \mu, \nu \in \{0, 1, \dots, p-1\}. \quad (7)$$

Ввиду (5) достаточно убедиться, что для любого $x \in \mathbb{C}_N$ справедлива формула

$$\|\widehat{x}\|^2 = N \sum_{s=0}^r \sum_{k=0}^{N_1-1} |\langle \widehat{x}, \widehat{T_{pk}u_s} \rangle|^2. \quad (8)$$

Для каждого $x \in \mathbb{C}_N$ согласно (5) в силу равенства $w_{pk}^{(N)} = w_k^{(N_1)}$ имеем

$$|\langle \widehat{x}, \widehat{T_{pk} u_s} \rangle|^2 = |\langle \widehat{x}, w_{pk}^{(N)} \widehat{u}_s \rangle|^2 = \left| \sum_{l=0}^{N-1} \widehat{x}(l) w_k^{(N_1)}(l) \overline{\widehat{u}_s(l)} \right|^2. \quad (9)$$

Полагая $a_k = \widehat{x}(l) w_k^{(N_1)}(l) \overline{\widehat{u}_s(l)}$ и применяя тождество

$$\left| \sum_{l=0}^{N-1} a_k \right|^2 = \sum_{l=0}^{N-1} |a_k|^2 + 2\Re \left(a_0 \sum_{l'=1}^{N-1} \overline{a_{l'}} + a_1 \sum_{l'=2}^{N-1} \overline{a_{l'}} + \dots + a_{N-2} \overline{a_{N-1}} \right),$$

из (9) получим

$$|\langle \widehat{x}, \widehat{T_{pk} u_s} \rangle|^2 = \sum_{l=0}^{N-1} |\widehat{x}(l)|^2 |\widehat{u}_s(l)|^2 + 2\Re(A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u}_s)), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u}_s) := & \widehat{x}(0) \overline{\widehat{u}_s(0)} \sum_{l'=1}^{N-1} \overline{w_k^{(N_1)}(l')} \widehat{x}(l') \widehat{u}_s(l') + \\ & + \widehat{x}(1) \overline{\widehat{u}_s(1)} \sum_{l'=2}^{N-1} \overline{w_k^{(N_1)}(l' \oplus 1)} \widehat{x}(l') \widehat{u}_s(l') + \\ & + \widehat{x}(2) \overline{\widehat{u}_s(2)} \sum_{l'=3}^{N-1} \overline{w_k^{(N_1)}(l' \oplus 2)} \widehat{x}(l') \widehat{u}_s(l') + \dots + \\ & + \widehat{x}(N-3) \overline{\widehat{u}_s(N-3)} \overline{w_k^{(N_1)}(1)} \widehat{x}(N-2) \widehat{u}_s(N-2) + \overline{w_k^{(N_1)}(2)} \widehat{x}(N-1) \widehat{u}_s(N-1) + \\ & + \widehat{x}(N-2) \overline{\widehat{u}_s(N-2)} \overline{w_k^{(N_1)}(1)} \widehat{x}(N-1) \widehat{u}_s(N-1). \end{aligned}$$

Применяя (7), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^r \sum_{l=0}^{N-1} |\widehat{x}(l)|^2 |\widehat{u}_s(l)|^2 &= \sum_{l=0}^{N-1} |\widehat{x}(l)|^2 \sum_{s=0}^r |\widehat{u}_s(l)|^2 = \\ &= \sum_{l=0}^{N_1-1} \left[\sum_{\mu=0}^{p-1} |\widehat{x}(l + \mu N_1)|^2 \sum_{s=0}^r |\widehat{u}_s(l + \mu N_1)|^2 \right] = \\ &= \frac{p}{N^2} \sum_{l=0}^{N_1-1} \sum_{\mu=0}^{p-1} |\widehat{x}(l + \mu N_1)|^2 = \frac{p}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} |\widehat{x}(l)|^2. \end{aligned}$$

Отсюда и из (10) получаем

$$\sum_{s=0}^r \sum_{k=0}^{N_1-1} |\langle \widehat{x}, \widehat{T_{pk} u_s} \rangle|^2 = \frac{p N_1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} |\widehat{x}(l)|^2 + 2\Re \left(\sum_{s=0}^r \sum_{k=0}^{N_1-1} A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u}_s) \right). \quad (11)$$

Используя формулу (4) (с заменой N_1 на N), видим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u}_s) &= \widehat{x}(0) \overline{\widehat{u}_s(0)} \widehat{x}(N_1) \widehat{u}_s(N_1) + \\ &+ \widehat{x}(1) \overline{\widehat{u}_s(1)} \widehat{x}(N_1+1) \widehat{u}_s(N_1+1) + \dots + \widehat{x}(N_1-1) \overline{\widehat{u}_s(N_1-1)} \widehat{x}(N-1) \widehat{u}_s(N-1) \end{aligned}$$

и, согласно (6),

$$\sum_{s=0}^r \sum_{k=0}^{N_1-1} A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u}_s) = 0. \quad (12)$$

Замечая, что

$$pN_1 = N, \quad \sum_{l=0}^{N-1} |\hat{x}(l)|^2 = \|\hat{x}\|^2,$$

из (11) и (12) получаем (8). Теорема 4.1 доказана. \square

Матрицу $M(l)$ из теоремы 4.1 для каждого $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ можно дополнить до унитарной матрицы. Поэтому для элементов матрицы $M(l)$ верны неравенства

$$|\hat{u}_s(l)|^2 + |\hat{u}_s(l + N_1)|^2 + \dots + |\hat{u}_s(l + (p-1)N_1)|^2 \leq \frac{p}{N^2}, \quad (13)$$

где $s = 0, 1, \dots, r$, $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$. Для случая, когда все неравенства в (13) обращаются в равенства, теорема 4.1 при $r = p - 1$ соответствует ортонормированному базису $B(u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ в $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$, построенному в [13].

В случае $r = N - 1$ матрицу $M(l)$, удовлетворяющую условию $M(l)M^*(l) = I_p$, можно построить с помощью определенной выше матрицы $W^{(N)}$. Отметим, что при $p = 2$ матрица $W^{(N)}$ совпадает с матрицей Уолша W_n (см. раздел 2). Для иллюстрации случая $p = 3$ приведем следующий пример.

Пример 4.1. Пусть $p = 3$, $n = 2$, $r = 8$. Тогда

$$M(l) = \frac{9}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \hat{u}_0(l) & \hat{u}_0(l) & \dots & \hat{u}_r(l) \\ \hat{u}_0(l+3) & \hat{u}_0(l+3) & \dots & \hat{u}_r(l+3) \\ \hat{u}_0(l+6) & \hat{u}_0(l+6) & \dots & \hat{u}_r(l+6) \end{bmatrix}, \quad l = 0, 1, 2,$$

и для выполнения условия $M(l)M^*(l) = I_3$ матрицы $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$ можно выбрать так, чтобы составленная из них матрица $(\hat{u}_k(j))_{k,j=0}^8$ была пропорциональна матрице $(w_k^{(9)}(j))_{k,j=0}^8$. Таким образом, в рассматриваемом случае матрица $M(l)$ формируется по строкам матрицы $W^{(9)}$.

Предположим, что N -мерный комплексный ненулевой вектор $(b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ удовлетворяет условию

$$|b_l|^2 + |b_{l+N_1}|^2 + \dots + |b_{l+(p-1)N_1}|^2 \leq \frac{p}{N^2}, \quad l = 0, 1, \dots, N_1 - 1. \quad (14)$$

Тогда по теореме 4.1 следующий алгоритм приводит к фрейму Парсеваля $B(u_0, u_1, \dots, u_r)$ для $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$.

Алгоритм А.

Шаг 1. Найти такой вектор $u_0 \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$, что

$$\hat{u}_0(l) = b_l, \quad \hat{u}_0(l + N_1) = b_{l+N_1}, \quad \dots, \quad \hat{u}_0(l + (p-1)N_1) = b_{l+(p-1)N_1}, \quad l = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

где числа b_0, b_1, \dots, b_{N-1} берутся из (14).

Шаг 2. Для полученного на шаге 1 вектора u_0 найти такие векторы $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}_N$, что для матрицы

$$M(l) = \frac{N}{\sqrt{p}} \begin{bmatrix} \hat{u}_0(l) & \dots & \hat{u}_r(l) \\ \hat{u}_0(l + N_1) & \dots & \hat{u}_r(l + N_1) \\ \hat{u}_0(l + 2N_1) & \dots & \hat{u}_r(l + 2N_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{u}_0(l + (p-1)N_1) & \dots & \hat{u}_r(l + (p-1)N_1) \end{bmatrix}$$

при каждом $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ выполнено равенство $M(l)M^*(l) = I_p$.

Шаг 3. Определить систему $B(u_0, u_1, \dots, u_r)$ по формуле

$$B(u_0, u_1, \dots, u_r) = \{T_{pk}u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{pk}u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \dots \cup \{T_{pk}u_r\}_{k=0}^{N_1-1}.$$

Шаг 1 этого алгоритма реализуется с помощью обратного дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона:

$$u_0(j) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k w_k^{(N)}(j), \quad j \in \mathbb{Z}_N,$$

а для реализации шага 2 можно использовать те же методы, что и при построении фреймов на группах Виленкина (см. алгоритмы в [22, 23]).

При обработке сигналов вектор $(b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ в алгоритме А может быть выбран по энтропийному, среднеквадратическому или иному критерию (ср. [11, 15]).

В заключение отметим, что в дополнение к фрейму $B(u_0, u_1, \dots, u_r)$ из теоремы 4.1 для каждого натурального m , $m \leq n$, аналогично ортогональному случаю (см. [13]) можно определить последовательность диадических фреймов Парсеваля m -го этапа для $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. — Баку: Элм, 1981.
2. Беспалов М. С. Дискретное преобразование Крестенсона // Пробл. передачи информ. — 2010. — 46, № 4. — С. 91–115.
3. Беспалов М. С. Собственные подпространства дискретного преобразования Уолша // Пробл. передачи информ. — 2010. — 46, № 3. — С. 60–79.
4. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
6. Зальманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. — М.: Наука, 1989.
7. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. — М.: Мир, 2005.
8. Малоземов В. Н. Машарский С. М. Основы дискретного гармонического анализа. — СПб.: Лань, 2012.
9. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2006.
10. Робакидзе М. Г., Фарков Ю. А. Применение функций Уолша к построению фреймов Парсеваля в пространствах периодических последовательностей // в кн.: Современные проблемы теории функций и их приложения / Мат. 19 Междунар. Саратов. зимней школы, посв. 90-летию акад. П. Л. Ульянова. — Саратов: Научная книга, 2018. — С. 265–267.
11. Родионов Е. А. О применении вейвлетов к цифровой обработке сигналов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — 16, № 2. — С. 217–225.
12. Рябцов И. С. Необходимые и достаточные условия простоты фреймов Парсеваля // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — № 6 (97). — С. 42–48.
13. Фарков Ю. А. Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина–Крестенсона // Мат. заметки. — 2011. — 89, № 6. — С. 914–928.
14. Фарков Ю. А. Ортогональные всплески в анализе Уолша // в кн.: Современные проблемы математики и механики (Лукашенко Т. П., Солодова А. П., ред.) / К 80-летию В. А. Скворцова. Обобщенные интегралы и гармонический анализ. — М.: Изд-во Московского университета, 2016. — Т. 11. — С. 62–75.
15. Фарков Ю. А. Параметрические множества для фреймов в анализе Уолша // Вестн. Евраз. нац. ун-та им. Л. Н. Гумилева. Сер. Мат. Информ. Мех. — 2018. — 124, № 3. — С. 89–94.
16. Albrecht A., Howlett P., Verma G. Optimal splitting of Parseval frames using Walsh matrices // Poincaré J. Anal. Appl. — 2018. — № 2. — P. 39–58.
17. Balonin N. A., Doković D. Ž., Karbovskiy D. A. Construction of symmetric Hadamard matrices of order 4ν for $\nu = 47, 73, 113$ // Spec. Matrices. — 2018. — 6. — P. 11–22.
18. Bownik M. The Kadison–Singer problem // in: Frames and Harmonic Analysis. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2018. — P. 63–92.
19. Casazza P. G., Tremain J. C. The Kadison–Singer problem in mathematics and engineering // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 2006. — 103, № 7. — P. 2032–2039.
20. Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. — Boston: Birkhäuser, 2016.
21. Farkov Yu. A. Examples of frames on the Cantor dyadic group // J. Math. Sci. — 2012. — 187, № 1. — P. 22–34.
22. Farkov Yu. A. Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis // Poincaré J. Anal. Appl. — 2015. — № 2. — P. 13–36.
23. Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Int. J. Wavelets Multires. Inf. Process — 2015. — 13, № 5. — 1550036.

24. *Farkov Yu. A.* Wavelet frames related to Walsh functions// *Eur. J. Math.* — 2019. — 5. — P. 250–267.
25. *Farkov Yu. A., Manchanda P., Siddiqi A. H.* Construction of Wavelets through Walsh Functions. — Singapore: Springer, 2019.
26. *Hedayat A., Wallis W. D.* Hadamard matrices and their applications// *Ann. Stat.* — 1978. — 6, № 6. — P. 1184–1238.
27. *Kadison R. V., Singer I. M.* Extensions of pure states// *Am. J. Math.* — 1959. — 81. — P. 383–400.
28. *Krivoshein A., Protasov V., Skopina M.* Multivariate Wavelet Frames. — Singapore: Springer, 2016.
29. *Lang W. C.* Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group// *SIAM J. Math. Anal.* — 1996. — 27, № 1. — P. 305–312.
30. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. — New York: Adam Hilger, 1990.
31. *Seberry J., Wysocki B. J., Wysocki T. A.* On some applications of Hadamard matrices// *Metrika.* — 2005. — 62, № 2. — P. 221–239.
32. Dyadic Walsh analysis from 1924 onwards Walsh–Gibbs–Butzer dyadic differentiation in science. — Amsterdam: Atlantis Press, 2015.
33. *Stevens M.* The Kadison–Singer Property. — Berlin: Springer, 2016.
34. *Waldron S.* An Introduction to Finite Tight Frames. — New York: Birkhäuser, 2018.
35. *Weaver N.* The Kadison–Singer problem in discrepancy theory// *Discrete Math.* — 2004. — 278, № 1–3. — P. 227–239.

Фарков Юрий Анатольевич

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

E-mail: farkov@list.ru, farkov-ya@ranepa.ru



К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

© 2019 г. В. Л. ХАЦКЕВИЧ

Аннотация. Указан класс квазилинейных оптимальных в среднем квадратичном оценок случайных величин. Установлены оптимальные корреляционные свойства полученных оценок.

Ключевые слова: оптимальная оценка случайной величины, квазилинейный предиктор, корреляционный анализ.

ON OPTIMAL ESTIMATES OF RANDOM VARIABLES

© 2019 V. L. KHATSKEVICH

ABSTRACT. A class of quasilinear, mean-square optimal estimates of random variables is indicated. Optimal correlation properties of the obtained estimates are established.

Keywords and phrases: optimal estimate of a random variable, quasilinear predictor, correlation analysis.

AMS Subject Classification: 60K10

1. Введение. Известная задача теории оценивания состоит в том, чтобы по значениям наблюдаемой случайной величины ξ оценить ненаблюдаемую случайную величину η . Можно показать (см., например, [7, гл. II, § 8]), что лучшей оценкой η по ξ является функция регрессии $\phi^*(\xi) = E(\eta|\xi)$, равная условному математическому ожиданию η по ξ . Она минимизирует величину среднеквадратической ошибки $E(\eta - \phi(\xi))^2$. А именно,

$$E(\eta - \phi^*(\xi))^2 = \inf E(\eta - \phi(\xi))^2.$$

Здесь E — математическое ожидание, а \inf берется по классу всех борелевских функций ϕ . При этом оценка ϕ^* обладает максимальной корреляцией с η по сравнению с другими борелевскими функциями $\phi(\xi)$.

Рассмотрим ситуацию, когда имеется n наблюдаемых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, характеризующих значения ненаблюдаемой величины η . Как известно (см., например, [7, гл. II, § 11]), наилучшая оценка в этом случае будет $E(\eta|\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Однако практически эта формула неудобна, поэтому используют другие. В частности, рассматривают линейные приближения вида $\sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$, где α_i — некоторые числа. При этом для оптимального подбора чисел α_i , как правило, используется метод наименьших квадратов (см., например, [5]). Различные классы нелинейных регрессий также активно исследуются и применяются на практике. Из последних работ в этом направлении укажем [2].

В настоящей работе в качестве аппроксимации для η рассматривается квазилинейное выражение вида $\gamma_0 + \sum_{i=1}^n \gamma_i E(\eta|\xi_i)$ и подбираются оптимальные коэффициенты γ_i . Подчеркнем, что предлагаемые оценки являются несмещенными.

Кроме того, обсуждаются оптимальные корреляционные свойства установленных оценок. По ходу работы приводится сравнение с известными результатами и указываются преимущества перед линейными аппроксимациями.

Ниже всюду предполагается, что случайные величины η и ξ_i , $i = 1, 2, \dots$, имеют конечные вторые моменты и случайные величины ξ_i попарно независимы.

2. Построение оптимальных квазилинейных предикторов. Как известно (см., например, [1, § 5.6]), *предиктором* называется функция от предсказующих величин $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, которую используют в качестве оценки для прогнозируемой величины (η).

Поставим задачу отыскания оптимальной (в смысле среднеквадратического отклонения от η) оценки в классе всех квазилинейных комбинаций $\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i E(\eta|\xi_i)$.

Введем необходимые обозначения. Положим $X_i = E(\eta|\xi_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $\bar{\eta} = E\eta$. Заметим, что по формуле полного математического ожидания $EX_i = E(E(\eta|\xi_i)) = E\eta = \bar{\eta}$. Обозначим через $\delta_i^2 = DX_i$ дисперсию случайной величины X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, а через $\sigma^2 = D\eta$ — дисперсию случайной величины η . Отметим что, в силу взаимной независимости случайных величин ξ_i , случайные величины X_i также взаимно независимы.

Остановимся вначале на следующем подходе. Пусть $\Delta_i = E(\eta|\xi_i) - \bar{\eta}$. Введем в рассмотрение случайную величину $\eta^* = \eta - \bar{\eta}$. По определению $E\eta^* = 0$. Аппроксимируем η^* линейными комбинациями вида $W_n = \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i$, где β_i — некоторые вещественные коэффициенты.

Рассмотрим задачу о минимизации

$$\varepsilon(\beta) := E \left(\eta^* - \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i \right)^2 \rightarrow \min, \quad \beta_i \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

По определению

$$\varepsilon(\beta) = D\eta - 2 \sum_{i=1}^n \beta_i E(\eta^* \Delta_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j E(\Delta_i \Delta_j).$$

Заметим, что по известному свойству математических ожиданий (см., например, [1, § 5.6]) справедливо равенство

$$E(\eta^* \Delta_i) = E[(\eta - \bar{\eta})(X_i - \bar{\eta})] = \text{cov}[\eta, X_i] = \text{cov}[X_i, X_i] = DX_i = \delta_i^2.$$

Используя это, а также ортогональность системы $\{\Delta_i\}$, для $\varepsilon(\beta)$ получим равенство

$$\varepsilon(\beta) = D\eta - 2 \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_i^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \delta_i^2. \quad (2)$$

Обозначим функцию, стоящую справа в (2), через $F(\beta) := F(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Применяя необходимое условие экстремума, найдем

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_j} = -2\delta_j^2 + 2\beta_j \delta_j^2 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда $\beta_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. При этом соответствующий гессиан положительно определен. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Оценка $W_n^* = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ обеспечивает решение задачи (1). Минимум формы (2) по всем действительным β равен $\sigma^2 - \sum_{i=1}^n \delta_i^2$.

Положим

$$\eta_{\text{опт}} = \bar{\eta} + \sum_{i=1}^n \Delta_i. \quad (3)$$

Отметим, что оценка (3) является несмещенной, так как $E\eta_{\text{опт}} = \bar{\eta}$. Поскольку

$$\eta - \eta_{\text{опт}} = \eta^* - \sum_{i=1}^n \Delta_i,$$

справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Оценка $\eta_{\text{опт}}$, определяемая формулой (3), обеспечивает минимум выражения $E \left(\eta - \left(\bar{\eta} + \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i \right) \right)^2$ по всем действительным β . Этот минимум равен $\sigma^2 - \sum_{i=1}^n \delta_i^2$.

Замечание 1. В соответствии с теоремой 1 оценка (3) является оптимальным предиктором для η в классе всех действительных β_1, \dots, β_n . Ее можно представить в виде

$$\eta_{\text{опт}} = \sum_{i=1}^n X_i - (n-1)\bar{\eta}.$$

Продемонстрируем другой подход. Рассмотрим задачу о минимизации выражения

$$El \left(\eta - \sum_{i=1}^n \gamma_i X_i \right)^2 \rightarrow \min \quad (4)$$

по всем действительным $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющим условию

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1. \quad (5)$$

Отметим, что условие (5) обеспечивает несмещенность соответствующей оценки, так как $EX_i = \bar{\eta}, i = 1, \dots, n$.

Теорема 2. Решение задачи (4), (5) дают коэффициенты γ_j^* , определяемые формулами

$$\gamma_j^* = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\delta_k^2} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\delta_k^2} + \frac{1-n}{\delta_j^2} \right), \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Оптимальный предиктор для η в классе действительных $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, удовлетворяющих условию (5), имеет вид $\sum_{i=1}^n \gamma_i^* X_i$.

Доказательство. Действительно, согласно (5)

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i X_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i (\bar{\eta} + \Delta_i) = \bar{\eta} + \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta_i.$$

Поэтому

$$\eta - \sum_{i=1}^n \gamma_i X_i = \eta^* - \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta_i.$$

Тогда задача(4), (5) сводится к следующей:

$$E \left(\eta^* - \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta_i \right)^2 \rightarrow \min, \quad \gamma_i \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

при условии (5). Соотношение (7) приводит к задаче

$$D\eta - 2 \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_i^2 + \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \delta_i^2 \rightarrow \min, \quad \gamma_i \in \mathbb{R},$$

при условии (5).

Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(\gamma, \lambda) = D\eta - 2 \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_i^2 + \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \delta_i^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i - 1 \right).$$

Согласно необходимому условию экстремума имеем систему

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_j} = -2\delta_j^2 + 2\gamma_j \delta_j^2 + \lambda = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \gamma_i - 1 = 0.$$

Из первого равенства этой системы следует, что

$$\gamma_j = 1 - \frac{\lambda}{2\delta_j^2}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Суммируя левую и правую части (8) по $j = 1, 2, \dots, n$, получим

$$1 = n - \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\delta_j^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\lambda}{2} = (n-1) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\delta_k^2} \right)^{-1}.$$

Следовательно, (8) влечет

$$\gamma_j = 1 + \frac{1-n}{\delta_j^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\delta_k^2} \right)^{-1}, \quad j = 1, \dots, n,$$

что приводит к формуле (6). □

Отметим, что в силу (6) условие неотрицательности γ_j^* эквивалентно следующему:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\delta_k^2} \geq \frac{n-1}{\delta_j^2}. \quad (9)$$

В частности, условие (9) выполняется для любого $j = 1, 2, \dots, n$, когда все δ_k равны между собой (либо достаточно близки). Если при этом $\delta_k = \delta$, $k = 1, 2, \dots, n$, то $\gamma_j^* = 1/n$, $j = 1, \dots, n$. Тогда оптимальная оценка есть среднее арифметическое

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

3. Сравнительный корреляционный анализ. Как известно, коэффициент корреляции между случайными величинами W с η определяется формулой

$$\rho(W, \eta) = \frac{\text{cov}[W, \eta]}{\sqrt{D\eta} \sqrt{DW}},$$

где в числителе стоит ковариация, а в знаменателе корни из соответствующих дисперсий.

Лемма 2. Коэффициент корреляции предиктора $W_n^* = \sum_{i=1}^n \Delta_i$, определяемого в лемме 1, с η имеет вид

$$\rho(W_n^*, \eta) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}, \quad (10)$$

где σ^2 и δ_i^2 — дисперсии случайных величин η и Δ_i соответственно.

Доказательство. Действительно, используя известное равенство $\text{cov}[E(\eta|\xi_i), \eta] = \delta_i^2$ (см., например, [1, § 5.6]), получим

$$\text{cov}[W_n^*, \eta] = (W_n^*, \eta^*) = \sum_{i=1}^n (\Delta_i, \eta^*) = \sum_{i=1}^n \text{cov}[X_i, \eta] = \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

Поэтому

$$\rho(W_n^*, \eta) = \frac{\text{cov}[W_n^*, \eta]}{\sigma \sqrt{DW_n^*}} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}.$$

Выше при подсчете DW_n^* мы использовали взаимную независимость случайных величин Δ_i . \square

Отметим, что в силу леммы 1 имеем $0 \leq \rho(W_n^*, \eta) \leq 1$.

Замечание 2. В соответствии с формулой (3) коэффициент корреляции $\rho(\eta_{\text{опт}}, \eta)$ предиктора $\eta_{\text{опт}}$ с η совпадает с (10).

Далее мы будем сравнивать коэффициенты корреляции различных оценок случайной величины с η . При этом (в соответствии с [1, § 5.6]) будем писать, что одна оценка обладает большей корреляцией по сравнению с другой, если коэффициент корреляции этой оценки не меньше, чем модуль коэффициента корреляции другой.

Лемма 3. Оценка $W_n^* = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ обладает наибольшей корреляцией с η^* среди всех оценок вида $W_n = \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i$ с произвольными вещественными β_i .

Доказательство. Действительно, по определению

$$\text{cov}[W_n, \eta^*] = \sum_{i=1}^n \beta_i E(\Delta_i \eta) = \sum_{i=1}^n \beta_i \text{cov}[X_i, \eta^*] = \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_i^2.$$

Тогда для коэффициента корреляции $\rho(W_n, \eta^*)$ получим соотношение

$$\sigma^2 \rho^2(W_n, \eta^*) = \frac{\text{cov}^2(W_n, \eta^*)}{DW_n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \delta_i^2\right)^2}{\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \delta_i^2}.$$

Заметим, что по неравенству Коши—Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \delta_i^2\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n (\beta_i \delta_i)(\delta_i)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \delta_i^2 \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

Отсюда

$$\sigma^2 \rho^2(W_n, \eta^*) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \delta_i^2 \sum_{i=1}^n \delta_i^2}{\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \delta_i^2} = \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

При этом, согласно (10)

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sigma^2 \rho^2(W_n^*, \eta^*),$$

что и влечет неравенство $|\rho(W_n, \eta^*)| \leq \rho(W_n^*, \eta^*)$. \square

Согласно лемме 3 и определению оптимального предиктора (3) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Оптимальный предиктор η_{opt} , определяемый формулой (3), обладает наибольшей корреляцией с η среди всех оценок вида*

$$V_n = \bar{\eta} + \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i$$

с произвольными вещественными β_i , а именно,

$$|\rho(V_n, \eta)| \leq \rho(\eta_{opt}, \eta).$$

Обсудим вопрос о максимальной корреляции оптимальных предикторов с другой точки зрения. Оказывается, оценка W_n^* обладает наибольшей корреляцией с η по сравнению с другими оценками вида $\tilde{W}_n = \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i$. Уточним это утверждение.

Лемма 4. *Оценка $W_n^* = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ обладает наибольшим коэффициентом корреляции с η среди всех оценок вида*

$$\tilde{W}_n = \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i, \quad \tilde{\Delta}_i = \phi_i(\xi_i) - E\phi_i(\xi_i), \quad (11)$$

где ϕ_i — произвольные борелевские функции. Этот наибольший коэффициент корреляции дается формулой (10).

Доказательство. Действительно, согласно определению (11) имеем

$$\text{cov}[\tilde{W}_n, \eta] = \sum_{i=1}^n (\tilde{\Delta}_i, \eta^*) = \sum_{i=1}^n \text{cov}[\phi_i(\xi_i), \eta].$$

Отсюда, полагая, $\tilde{\delta}_i^2 = E\tilde{\Delta}_i^2$ и вводя коэффициент корреляции

$$\tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}_i[\phi_i(\xi_i), \eta] = \frac{\text{cov}[\phi_i(\xi_i), \eta]}{\tilde{\delta}_i \sigma},$$

получим

$$|\text{cov}[\tilde{W}_n, \eta]| = \sigma \left| \sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i \tilde{\rho}_i \right| \leq \sigma \sum_{i=1}^n |\tilde{\delta}_i| |\tilde{\rho}_i|. \quad (12)$$

Как известно (см., например, [1, § 5.6]), $|\tilde{\rho}_i| \leq |\rho_i|$, где ρ_i — коэффициент корреляции функции $X_i = E(\eta|\xi_i)$ с η , равный

$$\rho_i = \rho_i[X_i, \eta] = \frac{\text{cov}[X_i, \eta]}{\delta_i \sigma} = \frac{\delta_i}{\sigma}.$$

Тогда из (12) согласно неравенству Коши—Буняковского получим

$$|\text{cov}[\tilde{W}_n, \eta]| \leq \sum_{i=1}^n |\tilde{\delta}_i| |\delta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^2 \right)^{1/2}.$$

С учетом леммы 2 отсюда следует, что

$$|\text{cov}[\tilde{W}_n, \eta]| \leq \sigma \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^2 \right)^{1/2} \rho[W_n^*, \eta].$$

Поэтому

$$|\rho[\tilde{W}_n, \eta]| = \frac{|\text{cov}[\tilde{W}_n, \eta]|}{\sigma \sqrt{D\tilde{W}_n}} = \frac{|\text{cov}[\tilde{W}_n, \eta]|}{\sigma \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^2 \right)^{1/2}} \leq \rho[W_n^*, \eta],$$

что и требовалось доказать. \square

Замечание 3. В частности, W_n^* обладает большим коэффициентом корреляции с η , чем \tilde{W}_n , где в качестве $\tilde{\Delta}_i$ берется $\tilde{\Delta}_i = \xi_i - M\xi_i$.

Из рассуждений леммы 4 и определения $\eta_{\text{опт}}$ (см. (3)) вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Оптимальный предиктор $\eta_{\text{опт}}$, определяемый формулой (3), обладает наибольшим коэффициентом корреляции с η среди всех оценок вида $\bar{\eta} + \tilde{W}_n$, где \tilde{W}_n задается формулой (11).*

Отметим корреляционные свойства оценок, связанных с задачей (4), (5).

Лемма 5. *Коэффициент корреляции $\rho(Z_n, \eta)$ среднего*

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

с η выражается формулой (10), где δ_i^2 — дисперсии случайных величин X_i .

Доказательство. Действительно, аналогично лемме 2

$$\text{cov}[Z_n, \eta] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{cov}[X_i, \eta] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

При этом для дисперсии DZ_n имеем

$$DZ_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

Тогда по формуле коэффициента корреляции получим высказанный результат. □

Аналогом леммы 3 является следующая теорема.

Теорема 5. *Среднее $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ обладает наибольшей корреляцией с η среди всех оценок вида $W_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i X_i$ с произвольными вещественными γ_i .*

Доказательство. Действительно, по определению

$$\text{cov}[W_n, \eta] = \sum_{i=1}^n \gamma_i \text{cov}[X_i, \eta] = \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_i^2.$$

Тогда для коэффициента корреляции $\rho(W_n, \eta)$ получим

$$\sigma^2 \rho^2(W_n, \eta) = \frac{\text{cov}^2[W_n, \eta]}{DW_n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_i^2 \right)^2}{\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \delta_i^2}.$$

При этом согласно неравенству Коши—Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_i^2 \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n (\gamma_i \delta_i) (\delta_i) \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \delta_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^2 \right).$$

Тогда с учетом леммы 5

$$\sigma^2 \rho^2(W_n, \eta) \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \delta_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^2 \right)}{\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \delta_i^2} = \sigma^2 \rho^2(Z_n, \eta). \quad \square$$

Аналогом леммы 4 является следующая теорема.

Теорема 6. Среднее Z_n обладает наибольшим коэффициентом корреляции с η среди всех оценок вида $\widehat{W}_n = \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi_i)$, где ϕ_i — произвольные борелевские функции от ξ_i .

Доказательство. Доказательство следует из рассуждений леммы 4. Действительно, по определению

$$\text{cov}[\widehat{W}, \eta] = \sum_{i=1}^n \text{cov}[\phi_i(\xi_i), \eta].$$

При этом в обозначениях леммы 4 $D\phi_i(\xi_i) = \tilde{\delta}_i^2$. Поэтому, как и в лемме 4, справедливо неравенство

$$|\text{cov}[\widehat{W}, \eta]| \leq \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^2 \right)^{1/2},$$

где $\delta_i^2 = DX_i$. Отсюда согласно лемме 5

$$|\text{cov}[\widehat{W}, \eta]| \leq \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^2 \right)^{1/2} \rho(Z_n, \eta).$$

С учетом определения $\rho(\widehat{W}_n, \eta)$ и равенства

$$D\widehat{W}_n = \sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^2$$

отсюда следует утверждение теоремы 6. \square

Таким образом, среднее, не являясь, вообще говоря, оптимальным предиктором (при различных дисперсиях X_i), обладает максимальными корреляционными свойствами в соответствующих классах оценок.

Обратимся к рассмотрению корреляционных отношений, соответствующих квазилинейному случаю. Пусть $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$. Обозначим через

$$\sigma_{\eta^*, \Delta}^2 = E \left(\eta^* - \sum_{i=1}^n \Delta_i \right)^2$$

среднюю квадратическую ошибку предиктора $W_n^* = \sum_{i=1}^n \Delta_i$; пусть $\mu_{\eta^*, \Delta}^2$ — корреляционное отношение, определяемое как квадрат максимального значения коэффициента корреляции между η^* и $W_n = \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i$. В соответствии с леммой 4 величина $\mu_{\eta^*, \Delta}^2$ равна квадрату правой части формулы (10). Имеет место следующее утверждение.

Лемма 6. Справедливо равенство

$$\mu_{\eta^*, \Delta}^2 = 1 - \frac{\sigma_{\eta^*, \Delta}^2}{\sigma^2}.$$

Доказательство. Действительно, в силу леммы 3

$$\sigma_{\eta^*, \Delta}^2 = \sigma^2 - \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

Отсюда с учетом (10) следует высказанное утверждение. \square

Пусть $\eta_{\text{опт}}$ определяется формулой (3), $\sigma_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2 = E(\eta - \eta_{\text{опт}})^2$ — среднеквадратическая ошибка предиктора $\eta_{\text{опт}}$ и $\mu_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2$ — соответствующее корреляционное отношение. По определению предиктора $\eta_{\text{опт}}$ (см. (3)) имеем

$$\sigma(\eta, \eta_{\text{опт}}) = \sigma(\eta^*, \Delta),$$

а в соответствии с замечанием 2

$$\mu_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2 = \mu_{\eta^*, \Delta}^2.$$

Поэтому из леммы 6 вытекает следующая теорема.

Теорема 7. *Между среднеквадратической ошибкой и корреляционным отношением имеет место равенство*

$$\mu_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2 = 1 - \frac{\sigma_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2}{\sigma^2}.$$

Это равенство, в частности, показывает, что корреляционное отношение $\mu_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2$ стремится к 1, если оптимальная ошибка прогноза $\sigma_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2$ стремится к нулю.

Утверждение теоремы 7 означает, что в нашей ситуации выполняется стандартное соотношение теории статистической регрессии (см., например, [1, § 5.6] для линейных оптимальных предикторов).

Результаты раздела 2 показывают, что квазилинейные оценки, установленные в данной статье, в определенном смысле лучше соответствующих линейных оценок.

В теории обработки независимых измерений применяется подход, состоящий в оценивании измеряемой случайной величины η средними $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ результатов измерений ξ_i . При этом предполагается, что $E\xi_i = E\eta$, $i = 1, \dots, n$ (см., например, [4, гл. 1, § 6]). Для случайных величин $X_i = E(\eta|\xi_i)$ как раз и выполняется условие $EX_i = E\eta$.

Отметим, что выражение вида $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E\eta|\xi_i)$ применялось ранее для аппроксимации математического ожидания $E\eta$ (см. например, [3, гл. 7]). В работе автора [6] обсуждался вопрос об оптимальности такой оценки для приближения случайной величины η .

Подчеркнем, что несмотря на наличие подробных изложений теории нелинейной регрессии (см., например, [8, 9]) результаты, полученные в настоящей работе, по-видимому, ранее не освещались.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Математическая статистика. — М.: Либроком, 2018.
2. *Линке Ю. Ю., Борисов И. С.* О построении явных оценок в задачах нелинейной регрессии// Теор. вероятн. примен. — 2018. — 63, № 1. — С. 29–56.
3. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. — М.: Изд. КДУ, 2009.
4. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — М.: Наука, 1989.
5. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир, 1980.
6. *Хацкевич В. Л.* О некоторых экстремальных свойствах средних значений и математических ожиданий случайных величин// Вестн. Воронеж. гос. техн. ун-та. — 2013. — 9, № 3.1. — С. 39–44.
7. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — М.: МЦНМО, 2007.
8. *Klemela J.* Multivariate nonparametric regression and visualization: with R and applications to finance. — New Jersey: Wiley, 2014.
9. *Seber G. A. F., Wild C. J.* Nonlinear regression. — New York: Wiley, 2003.

Хацкевич Владимир Львович

Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж
E-mail: vlkhats@mail.ru