

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 168



Москва 2019

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

С. С. Акбаров (НИУ ВШЭ, ВИНТИ РАН)

Е. П. Кругова (ВИНТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Н. Х. Розов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

С. Е. Степанов (Финуниверситет при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Редактор-составитель:

Е. Ю. Лискина (Рязанский государственный университет
им. С. А. Есенина)

Научный редактор:

Н. И. Гусева (Московский педагогический государственный университет,
ВИНТИ РАН)

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 168

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ»,
ПОСВЯЩЕННОЙ 70-ЛЕТИЮ С. Л. АТАНАСЯНА,
70-ЛЕТИЮ И. С. КРАСИЛЬЩИКА, 70-ЛЕТИЮ А. В. САМОХИНА,
80-ЛЕТИЮ В. Т. ФОМЕНКО
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. С. А. ЕСЕНИНА
РЯЗАНЬ, 25–28 СЕНТЯБРЯ 2018 г.

ЧАСТЬ 1



Москва 2019

СОДЕРЖАНИЕ

О ветвлении большого периодического решения системы дифференциальных уравнений с параметром (<i>В. В. Абрамов</i>)	3
Устойчивость по параметру при постоянно действующих возмущениях (<i>В. В. Абрамов, С. А. Бельман, Е. Ю. Лискина</i>)	9
Об одном подходе к генерированию экстремально мультистабильных хаотических систем (<i>И. М. Буркин, О. И. Кузнецова</i>)	15
О некоторых операторных семействах (<i>В. Б. Васильев</i>)	26
Бифуркации решений в одном уравнении с отклоняющимся пространственным аргументом (<i>А. М. Ковалева</i>)	33
Бифуркации инвариантных торов у квазилинейных эволюционных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве и сценарий перехода к турбулентности (<i>А. Н. Куликов</i>)	45
Динамика связанных осцилляторов Ван дер Поля (<i>Д. А. Куликов</i>)	53
Об устойчивости интегрального многообразия системы обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае (<i>М. И. Купцов, В. А. Минаев, А. О. Фаддеев, С. Л. Яблочников</i>)	61
Скрытая синхронизация в системах фазовой автоподстройки частоты (<i>С. С. Мамонов, И. В. Ионов, А. О. Харламова</i>)	71
Состояния равновесия второго рода уравнения Курамото—Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана (<i>А. В. Секацкая</i>)	80
Устойчивость и асимптотически периодические решения гибридных систем с последствием (<i>П. М. Симонов</i>)	91
Движение тела, подвешенного на нити, с изменяющей длиной подвеса (<i>В. М. Ульянов, А. Ю. Кирьянов, В. А. Хрипин</i>)	99
Управление дискретной динамической системой с помехой (<i>В. И. Ухоботов, С. А. Никитина</i>)	105
Кусочно-линейная функция цены дифференциальной игры с простой динамикой и интегрально-терминальным функционалом платы (<i>Л. Г. Шагалова</i>)	114



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 3–8
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-3-8

УДК 517.925.52

О ВЕТВЛЕНИИ БОЛЬШОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

© 2019 г. В. В. АБРАМОВ

Аннотация. Исследована нормальная периодическая система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, являющаяся квазилинейной в окрестности бесконечности. Предполагается, что правая часть системы имеет критическое линейное приближение. В терминах свойств первого однородного нелинейного приближения оператора монодромии получены условия существования периодического решения, у которого начальное значение является бесконечно большим при бесконечно малом значении параметра.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическое решение, малый параметр, оператор монодромии.

ON THE BRANCHING OF A LARGE PERIODIC SOLUTION OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A PARAMETER

© 2019 V. V. ABRAMOV

ABSTRACT. We study a normal periodic system of ordinary differential equations with a small parameter, which is quasilinear in a neighborhood of infinity, under the assumption that the right-hand side of the system has a critical linear approximation. In terms of the properties of the first homogeneous nonlinear approximation of the monodromy operator, we obtain conditions for the existence of a periodic solution whose initial value is infinitely large for an infinitesimal value of the parameter.

Keywords and phrases: differential equation, periodic solution, small parameter, monodromy operator.

AMS Subject Classification: 34C25

1. Введение. В монографии М. А. Красносельского [3] на основе свойств мажорирующей системы установлен признак существования периодического решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с некритической линейной частью, выделенной в окрестности бесконечности. В данной работе рассмотрим критический случай существования периодического решения системы указанного типа, предполагая, что правая часть системы зависит от малого параметра.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \mu), \quad (1)$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ — малый параметр, правая часть является ω -периодической интегрируемой по t при всех x и μ , функция $f(t, x, \mu)$ гладко зависит от фазовой переменной в окрестности бесконечности и от малого параметра, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{-1} \|f(t, \alpha x, \mu/\alpha)\| \equiv 0$.

Обозначим через $x(t, a, \mu)$ решение с начальным значением $x(0, a, \mu) = a$.

Определение 1. Решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (1) называется большим, если существует параметризация $a^* = a(\alpha)$, $\mu^* = \mu(\alpha)$, $\Delta < \alpha$, при которой

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} a^* = \infty, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mu^* = 0_m.$$

Пара $(a'(+\infty), \mu'(+\infty))$ задает направление ветвления решения от бесконечности.

Найдем условия существования большого ω -периодического решения системы (1). С этой целью будем использовать схему рассуждений, предложенную в [1, 2].

2. Основные результаты. Так как при $x \rightarrow \infty$ и $\mu \rightarrow 0_m$ правая часть системы (1) близка к линейной, то при достаточно малых значениях параметра решения с большими по норме начальными значениями определены при $t \in [0, \omega]$. Поэтому с помощью оператора монодромии $a \rightarrow x(\omega, a, \mu)$ можно определить сдвиг начальной точки на период. Установим структуру оператора монодромии системы (1) в окрестности бесконечности фазового пространства.

Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица линейной системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$. Решение системы (1) представимо в виде $x(t, a, \mu) = X(t)a + y(t, a, \mu)$, где решение линейной системы $\dot{x} = A(t)x + f(t, x(t, a, \mu), \mu)$ имеет вид

$$y(t, a, \mu) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu) d\tau.$$

По свойству системы (1) имеем $f'_x(t, \infty, 0_m) = 0_{nn}$. Из [3, теорема 2.2] следует, что $X(t) = x'_a(t, \infty, 0_m)$. Поэтому

$$y'_a(t, \infty, 0_m) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f'_x(\tau, \infty, 0_m) x'_a(\tau, \infty, 0_m) d\tau = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) \cdot 0_{nn} \cdot X(\tau) d\tau = 0_{nn},$$

т.е. $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{-1} \|y(t, \alpha a, \mu/\alpha)\| \equiv 0$.

Без ограничения общности рассуждений далее будем предполагать, что имеет место равенство $y(\omega, \alpha, \mu) = p(a, \mu) + \varphi(a, \mu)$, в котором $p(a, \mu)$ — главная нелинейная однородная часть оператора монодромии, $p(\alpha a, \mu/\alpha) = S(\alpha)p(a, \mu)$, $S(\alpha) = \text{diag}(\alpha^{k_1}, \dots, \alpha^{k_n})$, $0 < k_i < 1$, $i = \overline{1, n}$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|S^{-1}(\alpha)\varphi(\alpha a, \mu/\alpha)\| \equiv 0$. Тогда оператор монодромии системы (1) в окрестности бесконечности фазового пространства имеет вид

$$x(\omega, a, \mu) = Xa + p(a, \mu) + \varphi(a, \mu), \quad (2)$$

где $X = X(\omega)$ — матрица монодромии.

Допустим, что имеет место не критический случай $\det(X - E) \neq 0$. Произвольно выберем для пары (a, μ) совместную параметризацию $a^* = \alpha(a_0 + \bar{a}(\alpha))$, $\mu^* = \alpha^{-1}(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha))$, в которой $\alpha > 0$, $a_0 \neq 0_n$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{a}(\alpha) = 0_n$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{\mu}(\alpha) = 0_m$. Тогда справедливо неравенство $[X - E]a_0 \neq 0_n$ и для достаточно малых значений a имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|x(\omega, a^*, \mu^*) - a^*\| &\geq \\ &\geq \alpha \left\| [X - E](a_0 + \bar{a}(\alpha)) - \left\| \alpha^{-1} S(\alpha) \left(p(a_0 + \bar{a}(\alpha), \mu_0 - \mu(\alpha)) + S^{-1}(\alpha) \varphi(a^*, \mu^*) \right) \right\| \right\| > \\ &> \frac{\alpha}{2} \| [X - E]a_0 \| > 0. \end{aligned}$$

При этом $x(\omega, a^*, \mu^*) \neq a^*$, т.е. у системы (1)–(2) не происходит ветвления периодических решений от бесконечности.

Итак, при решении задачи о ветвлении периодического решения от бесконечности необходимо рассматривать критический случай по линейному приближению $\det(X - E) = 0$. При этом система

$$[X - E]a_0 = 0_n \quad (3)$$

имеет общее решение вида $a_0 = Kz \in \ker[X - E]$, где K — фундаментальная $(n \times r)$ -матрица решений системы (3), $z \in \mathbb{R}^r$ — произвольный вектор. Допустим, при некотором значении $a_0 = Kz_0$ выполняется равенство

$$p(a_0, \mu_0) = 0_n. \quad (4)$$

Заметим, что равенство (4) необходимо для ветвления большого периодического решения с направлением (a_0, μ_0) . Действительно, при условии $p(a_0, \mu_0) \neq 0_n$ выберем совместную параметризацию

$$a^* = \alpha(a_0 + \bar{a}(\alpha)), \quad \mu^* = \alpha^{-1}(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha)),$$

в которой $\alpha > 0$, $\bar{a}(\alpha)$ и $\bar{\mu}(\alpha)$ — произвольные функции,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{a}(\alpha) = 0_n, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{\mu}(\alpha) = 0_m.$$

Тогда в силу равенства (3) для достаточно малых значений α имеет место оценка

$$\|x(\omega, a^*, \mu^*) - a^*\| \geq \|S(\alpha)p(a_0 + \bar{a}(\alpha), \mu_0 + \bar{\mu}(\alpha))\| - \|\varphi(a^*, \mu^*)\| > \frac{1}{2}\|S(\alpha)p(a_0, \mu_0)\| > 0.$$

При этом решение $x(\omega, a^*, \mu^*)$ не является периодическим.

Предположим также, что выполняется условие

$$\text{rang } J(a_0, \mu_0) = n \leq r + m, \quad (5)$$

в котором $J(a_0, \mu_0) = [p'_a(a_0, \mu_0)K \ p'_\mu(a_0, \mu_0)]$.

Теорема 1. При условиях (3), (4), (5) система (1)–(2) имеет большое ω -периодическое решение вида $x(t, a^*, \mu^*)$, $a^* = \alpha(a_0 + Kz(\alpha))$, $\mu^* = \alpha^{-1}(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha))$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} z(\alpha) = 0_n, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{\mu}(\alpha) = 0_m.$$

Доказательство. Пара (a, μ) определяет периодическое решение системы типа (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет равенству $x(\omega, a, \mu) - a = 0_n$ (см. [3]). Подставим в это равенство $a = a^* = \alpha(a_0 + Kz)$, $\mu = \mu^* = \alpha^{-1}(\mu_0 + \lambda)$, $\alpha > 0$. В силу условий (3), (4), (5) получим уравнение

$$x(a^*, \mu^*) - a^* = S(\alpha) \left(J(a_0, \mu_0) \cdot (z, \lambda) + \tilde{p}(z, \lambda) + S^{-1}(\alpha)\varphi(a^*, \mu^*) \right) = 0_n, \quad (6)$$

где $\tilde{p}(z, \lambda) = p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda) - J(a_0, \mu_0) \cdot (z, \lambda)$. По условию (5) выберем разложение $J(a_0, \mu_0) \cdot (z, \lambda) = B\nu + B_1\nu_1$, в котором $n \times n$ -матрица B составлена из линейно независимых столбцов, а $(n \times (n - m - r))$ -матрица B_1 составлена из остальных столбцов. Допустим, $\nu_1 = 0_{n-m-r}$. Определим функцию

$$\psi(\alpha, \nu) = S^{-1}(\alpha)\varphi(a^*, \mu^*) + \tilde{p}(z, \lambda).$$

Без ограничения общности рассуждений будем предполагать, что функция $\psi(\alpha, \nu)$ при $\alpha \rightarrow +\infty$ и $\nu \rightarrow 0_n$ доопределена условиями $\psi(+\infty, 0_n) = 0_n$, $\psi'_\nu(+\infty, 0_n) = 0_{nn}$. Тогда уравнение (6) примет вид

$$g(a, \nu) = B\nu + \psi(\alpha, \nu) = 0_n. \quad (7)$$

Так как $g(+\infty, 0_n) = 0_n$, $g'_\nu(+\infty, 0_n) = B$ и $\det B \neq 0$, то по теореме о неявной функции уравнение (7) определяет функцию $\nu = \nu(\alpha)$, $\Delta < \alpha$, $\nu(+\infty) = 0_n$, для которой $g(\alpha, \nu(\alpha)) \equiv 0_n$. Зная $\nu = \nu(\alpha)$ и учитывая, что $\nu_1 = 0_{n-m-r}$, получим функции $z = z(\alpha)$, $\lambda = \lambda(\alpha)$ и пару (α^*, μ^*) , в которой

$$a^* = \alpha(a_0 + Kz), \quad \mu^* = \alpha^{-1}(\mu_0 + \lambda(\alpha)).$$

Так как найденная пара удовлетворяет уравнению (6) и $(\alpha^*, \mu^*) \rightarrow (\infty, 0_m)$ при $\alpha \rightarrow +\infty$, то решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (1)–(2) — большое ω -периодическое решение по определению. Теорема 1 доказана. $\square$

Лемма 1. Если выполняются условия теоремы 1 и при всех больших $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$\|X + \alpha^{-1}S(\alpha)p'_a(a_0, \mu_0)\| \leq 1 - bh(\alpha),$$

где $b > 0$ — некоторое число, $h(\alpha) > 0$, $h(+\infty) = 0$, то большое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (1)–(2) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Для решения $x(t, a^*, \mu^*)$ составим систему в вариациях. Матрица монодромии этой системы по условию (2) имеет вид

$$x'_a(\omega, a^*, \mu^*) = X + p'_a(a^*, \mu^*) + \varphi'_a(a^*, \mu^*) = X + \alpha^{-1}S(\alpha)p'_a(a_0, \mu_0) + W(\alpha),$$

где матрица

$$W(\alpha) = p'_a(a^*, \mu^*) + \varphi'_a(a^*, \mu^*) - \alpha^{-1}S(\alpha)p'_a(a_0, \mu_0)$$

обладает свойством

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha S^{-1}(\alpha)W(\alpha) = 0_{nn}.$$

По условию при всех достаточно больших $\alpha > 0$ имеем

$$\|x'_a(\omega, a^*, \mu^*)\| \leq \|X + \alpha^{-1}S(\alpha)p'_a(a_0, \mu_0)\| + \|W(\alpha)\| \leq 1 - \frac{bh(\alpha)}{2}.$$

При этом спектральный радиус матрицы монодромии $x'_a(\omega, a^*, \mu^*)$ удовлетворяет оценке

$$\rho(x'_a(\omega, a^*, \mu^*)) \leq \|x'_a(\omega, a^*, \mu^*)\| < 1.$$

Значит, решение $x(\omega, a^*, \mu^*)$ асимптотически устойчиво по линейному приближению. Лемма доказана. $\square$

Проверка необходимых условий наличия большого периодического решения путем поиска направления ветвления предполагает проверку равенств (3), (4). С вычислительной точки зрения это может представлять затруднения. Теорему 1 целесообразно дополнить признаком, опирающимся на проверку условий типа неравенств. С этой целью вместо необходимых условий типа равенства для направлений ветвления выберем априорную оценку начального значения решения.

Допустим, в окрестности бесконечности левый оператор монодромии имеет вид

$$x(-\omega, a, \mu) = \overline{X}a + \bar{p}(a, \mu) + \bar{\varphi}(a, \mu), \quad (8)$$

где $\overline{X} = X(-\omega)$, $\bar{p}(\alpha a, \mu/\alpha) = S(\alpha)\bar{p}(a, \mu)$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha S^{-1}(\alpha)\bar{\varphi}(\alpha a, \mu/\alpha) \equiv 0_n$.

Применив формулу Эйлера для однородной функции, получим соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{P}(a)a &= \bar{p}(a, 0_m), \quad \overline{P}(a) = \text{diag}\left(\frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_n}\right) \bar{p}'_a(a, 0_m), \\ P(a, \mu)a &= p(a, \mu), \quad P(a, \mu) = \text{diag}\left(\frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_n}\right) p'_a(a, \mu). \end{aligned}$$

Будем предполагать, что неравенства для векторов и матриц имеют покомпонентный смысл. Определим подмножества конуса неотрицательных векторов

$$K(\sigma) = \{a \in R^m : \|a\| > \sigma, a \geq 0_m\}, \quad \overline{K}(\sigma) = \{a \in R^m : \|a\| = \sigma, a \geq 0_m\}.$$

Допустим, что при всех $\lambda \in K(1)$ выполняются условия

$$X \geq 0_{nn}, \quad \overline{X} \geq 0_{nn} \quad (9)$$

и при всех больших $\alpha > 0$ для некоторого значения $\mu = \mu_0$ справедливы оценки

$$\overline{P}(\lambda) \geq B \geq 0_{nn}, \quad \overline{X} + B > 0_{nn}, \quad (10)$$

$$\|X + \alpha^{-1}S(\alpha)\overline{P}(\lambda)\| \leq 1 - \frac{b}{\alpha^{1+k}}, \quad b > 0, \quad k > 0, \quad (11)$$

$$P(\lambda, \mu_0) \geq D \geq 0_{nn}, \quad X + D > 0_{nn}, \quad (12)$$

$$\|X + \alpha^{-1}S(\alpha)P(\lambda, \mu_0)\| \leq 1 - d/\alpha^{1+k}, \quad d > 0, \quad k > 0. \quad (13)$$

Теорема 2. Если выполняются условия (8)–(13), то система (1)–(2) имеет большое ω -периодическое решение.

Доказательство. В силу неравенств (9), (12), (13) по групповому свойству решений существует такое число $\sigma > 0$, что $x(\omega, a, \mu) \in K(\sigma)$ при условиях $a \in K(\sigma)$ и $\mu = \mu_0/\alpha$, $\alpha > \sigma$, т.е. множество $K(\sigma)$ инвариантно для правого оператора монодромии.

Так как $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha S^{-1}(\alpha) \bar{\varphi}(\alpha a, \mu/\alpha) \equiv 0_n$, то существует такое $\delta_1 \geq \sigma$, что $\|\bar{\varphi}(\alpha \lambda, 0_m)\| \leq b/(2\alpha^k)$ для любого $a = \alpha \lambda \in K(\delta_1)$. При этом из условия (11) следует оценка

$$\|x(-\omega, a, 0)\| < \left(1 - \frac{b}{2\|a\|^k}\right) \|a\| < \|a\|.$$

Поэтому найдется такое $q > 2$, что при достаточно большом $\delta_2 \geq \delta_1$ для любого $\alpha > \delta_2$ справедлива оценка

$$\left\|x\left(-\omega, a\lambda, \frac{\mu_0}{\alpha}\right)\right\| < \left(1 - \frac{b}{q\alpha^k}\right) \alpha < \alpha.$$

Тогда по групповому свойству решений получим, что $\|x(\omega, \alpha \lambda, \mu_0/\alpha)\| > \alpha$.

Рассуждая аналогично предыдущему, можно установить, что условию (13) при достаточно большом $\delta_3 \geq \sigma$ для любого $\alpha > \delta_3$ справедлива оценка

$$\left\|x\left(\omega, \alpha \lambda, \frac{\mu_0}{\alpha}\right)\right\| < \left(1 - \frac{d}{2\alpha^k}\right) \alpha < \alpha.$$

Итак, при любом $\alpha > \max\{\delta_2, \delta_3\}$ существует конусный отрезок

$$K_\alpha = \left\{a = \alpha \lambda \in \mathbb{R}^n : 0 < \Delta(\alpha) \leq \alpha \leq \delta(\alpha), \lambda \geq 0_n, \|\lambda\| = 1\right\},$$

для которого $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Delta(\alpha) = +\infty$ и

$$x(\omega, \alpha \lambda, \mu_0/\alpha) : K_\alpha \rightarrow \text{int } K_\alpha \quad \text{или} \quad x(-\omega, \alpha \lambda, \mu_0/\alpha) : K_\alpha \rightarrow \text{int } K_\alpha.$$

Так компактное множество K_α гомеоморфно выпуклому, например, множеству

$$\left\{a \in \mathbb{R}^n : \Delta(\alpha) \leq \|a\|_1 \leq \delta(\alpha), a \geq 0_n, \|a\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|\right\},$$

то по теореме Брауэра о неподвижной точке существует значение $a^* = a(\alpha) \in \text{int } K_\alpha$, причем $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^* = +\infty$. Итак, $x(t, \alpha^*, \mu^*)$ — большое ω -периодическое решение для системы (1)–(2) по определению, где $\mu^* = \mu_0/\alpha$. Теорема 2 доказана. $\square$

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \frac{3 \cos t}{2 + \sin t} x + g(t, x, \mu), \quad g(t, x, \mu) = c_1 \mu x^{4/3} + \frac{1}{8} (2 + \sin)^3 c_2 x^{1/3}. \quad (14)$$

Так как $g(t, \alpha x, \mu/\alpha) = \alpha^{1/3} g(t, x, \mu)$, то уравнение (14) можно рассматривать в качестве системы вида (1) порядка $n = 1$ с периодом 2π по t . При этом вычислим $X(t) = (2 + \sin t)^3/8$, $X = 1$,

$$p(a, \mu) = X \int_0^{2\pi} X^{-1}(t) g(t, X(t)a, \mu) dt = 2\pi (c_1 \mu a^{4/3} + c_2 a^{1/3}).$$

Условие (3) выполняется при любом a_0 . Для определенности выберем $a_0 = 1$. Тогда условие (4) выполняется при $\mu_0 = -c_2/c_1$. При этом получим, что $p'_a(a_0, \mu_0) = -2\pi c_2$, $p'_\mu(a_0, \mu_0) = -2\pi c_1$, $\text{rang } J(a_0, \mu_0) = 1$, т.е. справедливо условие (5). Итак, по теореме 1 уравнение (14) имеет большое 2π -периодическое решение с направлением ветвления $(1, -c_2/c_1)$. При $c_2 > 0$ для всех достаточно больших значений $\alpha > 0$ справедливо неравенство $X + \alpha^{-1} S(\alpha) p'_a(a_0, \mu_0) = 1 - 2\pi c_2 \alpha^{-2/3} < 1$. Тогда по лемме большое 2π -периодическое решение асимптотически устойчиво. Полученные выводы согласуются с фактом существования решения $x(t, a^*, \mu^*) = (2 + \sin t)^3 a^*/8$, $a^* = \alpha$ уравнения (14) при $\mu = \mu^* = -c_2 \alpha / c_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов В. В.* Устойчивость малого периодического решения// Вестн. РАЕН. — 2013. — 13, № 4. — С. 3–5.
2. *Абрамов В. В.* Ветвление периодического решения с положительным начальным значением// Вестн. РАЕН. — 2017. — 17, № 4. — С. 4–7.
3. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.

Абрамов Владимир Викторович

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

E-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 9–14
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-9-14

УДК 517.925.51

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

© 2019 г. В. В. АБРАМОВ, С. А. БЕЛЬМАН, Е. Ю. ЛИСКИНА

Аннотация. Для нормальной периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром определено и исследовано свойство устойчивости начала координат. Предполагается, что правая часть системы имеет критическое линейное приближение. Условия устойчивости сформулированы в терминах оценок для оператора монодромии.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, малый параметр, устойчивость, постоянно действующее возмущение, оператор монодромии, периодическое решение.

PARAMETER STABILITY UNDER CONSTANT PERTURBATIONS

© 2019 V. V. ABRAMOV, S. A. BELMAN, E. YU. LISKINA

ABSTRACT. For a normal periodic system of ordinary differential equations with a small parameter, we examine the stability property of the origin under the assumption that the right-hand side of the system has a critical linear approximation. The stability conditions are formulated in terms of estimates of the monodromy operator.

Keywords and phrases: differential equation, small parameter, stability, permanent perturbation, monodromy operator, periodic solution.

AMS Subject Classification: 34D20, 34C25

1. Введение. Свойство устойчивости начала координат при постоянно действующих возмущениях (ПДВ-устойчивость) имеет существенное приложение в теории управления. Классические достаточные признаки, заложившие традиции исследований по ПДВ-устойчивости, установлены прямым методом Ляпунова (см. [8, 9]).

При определении ПДВ-устойчивости в правую часть системы вводится аддитивная добавка, из-за которой система может утратить нулевое решение. В определении используется оценка малости для добавки. Однако при этом не учитываются практически важные случаи согласованности возмущающей добавки с правой частью исследуемой системы. Такое согласование может реализоваться через зависимость исходной правой части и возмущающего воздействия от малого параметра. Поэтому свойство ПДВ-устойчивости целесообразно сформулировать и исследовать на основе понятия устойчивости по параметру (см. [11]). Для нормальной периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений ПДВ-устойчивость начала координат можно обнаружить на основе оценок степеней оператора монодромии (см. [5]). С этой целью используем подходы, примененные в [1–4, 6, 7]. В частности, для исследования можно применить следующую схему. Если при отклонении параметра от нулевого значения происходит ветвление малого периодического решения и это решение устойчиво по параметру, то при достаточно малом значении параметра и начальном значении любое решение остается в окрестности периодического решения, которое содержится в сколь угодно малой окрестности начала координат.

Рассмотрим нормальную систему вида

$$\dot{x} = g(t, x, \alpha), \quad (1)$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$, $x \in I$, I — неограниченный сверху промежуток, $\alpha \geq 0$ — малый вещественный параметр (случай, когда параметр числовой неотрицательный, возникает при наличии векторного параметра при выборе направления стремления параметра к критическому значению). Предположим, что система (1) удовлетворяет условиям существования и единственности решений $x(t, t_0, a, \alpha)$, $x(t_0, t_0, a, \alpha) = a$ в окрестности точки $(a, \alpha) = (0_n, 0)$. Условие типа $g(t, 0_n, \alpha) \equiv 0_n$, при котором система (1) имеет нулевое решение, здесь не принципиально. Поэтому относительно точки $x = 0_n$ в рассматриваемой системе при $\alpha > 0$ можно предполагать наличие постоянно действующих возмущений.

Определение 1. Точка $x = 0_n$ для системы (1) называется *равномерно α -устойчивой при постоянно действующих возмущениях (ПДВ-устойчива по параметру)*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, для которых при всех $a \in \mathbb{R}^n$, $a \geq 0$, $t_0 \in I$ из неравенств $\|a\| \leq \delta_1$, $\alpha \leq \delta_2$ следует, что при любом $t \geq t_0$ справедлива оценка

$$\|x(t, t_0, a, \alpha)\| < \varepsilon.$$

2. Вспомогательные результаты. Исследуем устойчивость по определению 1 для периодической по t системы вида (1), когда $g(t \pm \omega, x, \alpha) = g(t, x, \alpha)$ при всех (t, x, α) . При этом свойство устойчивости решения, сформулированное в терминах оценки нормы возмущения (устойчивость ляпуновского типа), имеет равномерный характер относительно начального момента t_0 (см. [9]). Поэтому без ограничения общности далее полагаем, что $t_0 = 0$. Будем также предполагать, что функция $g(t, x, \alpha)$ достаточно гладко зависит от фазовой переменной и параметра в окрестности точки $(x, \alpha) = (0_n, 0)$, а решения $x(t, a, \alpha)$, $x(0, a, \alpha) = a$ системы локально продолжаемы на промежуток $t \in [0, \omega]$.

Лемма 1. Точка $x = 0_n$ для ω -периодической по t системы (1) ПДВ-устойчива по параметру тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, для которых из неравенств $\|a\| < \delta_1$, $0 \leq \alpha < \delta_2$ следует, что при всех $s \in \mathbb{N}$ определено значение $x(s\omega, a, \alpha)$ и справедлива оценка $\|x(s\omega, a, \alpha)\| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость данного утверждения очевидна, если в определении 1 взять $t = s\omega$. Достаточность установим по схеме доказательства [5, лемма 9.1]. В силу локальной продолжаемости решений числа δ и δ_2 можно считать такими, что любое решение $x(t, x(s\omega, a, \alpha), \alpha)$ для всех $s \in \mathbb{N}$ определено при $t \in [0, \omega]$, если $\|a\| < \delta$, $\alpha < \delta_2$, т.е. продолжаемо вправо от $s\omega$. При этом любое решение $x(t, a, \alpha)$ нелокально продолжаемо по t . Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta_1 \leq \min\{\delta, \varepsilon\}$. В силу непрерывной зависимости решений системы (1) от начальных значений и параметра можно считать, что при любых $\tau \in [0, \omega)$ из условий $\|a\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ следует оценка $\|x(\tau, a, \alpha)\| < \varepsilon$. Тогда по групповому свойству периодической динамической системы для произвольного $t = s\omega + \tau$, $s = [t/\omega]$, при всех a , удовлетворяющих условию $\|a\| < \delta_1$, и α , удовлетворяющих условию $0 \leq \alpha < \delta_2$, получим оценку

$$\|x(t, a, \alpha)\| = \|x(\tau, \|x(s\omega, a, \alpha)\|, \alpha)\| < \varepsilon.$$

Итак, точка $x = 0_n$ устойчива по определению 1. Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. Если для любого $\delta_1 > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$, что при $\|a\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ справедлива оценка $\|x(\omega, a, \alpha)\| \leq \delta_1$, то точка $x = 0_n$ для ω -периодической по t системы (1) ПДВ-устойчива по параметру.

Доказательство. Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta_1 = \varepsilon$. По условию существует такое $\delta_2 > 0$, что при $\|a\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ справедлива оценка $\|x(\omega, a, \alpha)\| \leq \delta_1$. Допустим, для некоторого $s \in \mathbb{N}$ при $\|a\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ имеет место неравенство $\|x(s\omega, a, \alpha)\| \leq \varepsilon$. Тогда

$$\|x((s+1)\omega, a, \alpha)\| = \|x(\omega, x(s\omega, a, \alpha), \alpha)\| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, по индукции $\|x(s\omega, a, \alpha)\| \leq \varepsilon$ при всех $s \in \mathbb{N}$, если $\|a\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$. Итак, в силу леммы 1 точка $x = 0_n$ устойчива по определению 1. Лемма 2 доказана. $\square$

Допустим, периодическая по t система (1) имеет малое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \alpha)$, $a^* = a(\alpha) \neq 0_n$, $0 < \alpha < \Delta$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} a^* = 0_n$.

Определение 2. [1]. Малое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \alpha)$ является α -устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, для которых из неравенств $\|u\| < \delta_1$, $0 \leq \alpha < \delta_2$ следует, что при всех $s \in \mathbb{N}$ определено значение $x(s\omega, a^* + u, \alpha)$ и справедлива оценка $\|x(s\omega, a^* + u, \alpha) - a^*\| < \varepsilon$.

Лемма 3. Если периодическая по t система (1) имеет малое α -устойчивое периодическое решение, то точка $x = 0_n$ ПДВ-устойчива для системы (1).

Доказательство. Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$. Начальное значение произвольного решения $x(t, a, \alpha)$ системы (1) представим в виде $a = a^* + u$. Так как начальное значение малого периодического решения удовлетворяет условию $\lim_{\alpha \rightarrow 0} a^* = 0_n$, то существует такое $\gamma > 0$, что $\|a^*\| < \varepsilon/2$ при $\alpha < \gamma$. По условию устойчивости периодического решения существуют $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, для которых в силу неравенств $\|u\| < \gamma_1$, $0 \leq \alpha < \gamma_2$ при всех $s \in \mathbb{N}$ определено значение $x(s\omega, a^* + u, \alpha)$ и справедлива оценка $\|x(s\omega, a^* + u, \alpha) - a^*\| < \varepsilon/2$. Итак, при $\|a\| \leq \|a^*\| + \|u\| < \varepsilon/2 + \gamma_1 = \delta_1$ и $\alpha < \delta_2 = \min\{\gamma, \gamma_1\}$ имеет место неравенство

$$\|x(s\omega, a, \alpha)\| \leq \|x(s\omega, a^* + (a - a^*), \alpha) - a^*\| + \|a^*\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. точка $x = 0_n$ ПДВ-устойчива для системы (1) по лемме 1. Лемма 3 доказана. $\square$

3. Основные результаты. Найдем достаточные условия устойчивости по определению 1. С этой целью рассмотрим систему вида (1)

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \alpha), \quad (2)$$

в которой матрица $A(t)$ и вектор-функция $f(t, x, \alpha)$ являются ω -периодическими по t , $f(t, x, \alpha)$ — локально достаточно гладкая относительно x и α в окрестности точки $(x, \alpha) = (0_n, 0)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|f(t, \alpha x, \alpha)\|/\alpha \equiv 0$.

Заметим, что к системе вида (2) сводится система $\dot{y} = A(t)y + \alpha h(t) + \tilde{f}(t, x, \alpha)$ с периодической по t правой частью, в которой $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\tilde{f}(t, \alpha x, \alpha)\|/\alpha \equiv 0$, если система $\dot{z} = A(t)z + h(t)$ имеет периодическое решение $z(t)$. Для сведения достаточно сделать подстановку $y = x + \alpha z(t)$.

В силу леммы 2 при исследовании свойства устойчивости по определению 1 для системы (2) требуется локальная оценка оператора монодромии. Установим структуру этого оператора.

Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$, $X = X(\omega)$ — матрица монодромии. В силу локальной гладкости правой части системы (2) устанавливается равенство

$$X \int_0^\omega X^{-1}(\tau) f(\tau, X(\tau)a, \alpha) d\tau = p(a, \alpha) + \psi(a, \alpha),$$

в котором $p(a, \alpha)$ — вектор-форма, $p(\alpha a, \alpha) = \alpha^k p(a, 1)$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. При этом функция

$$\psi(a, \alpha) = X \int_0^\omega X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau, a, \alpha), \alpha) d\tau - p(a, \alpha)$$

удовлетворяет условию $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\psi(\alpha a, \alpha)\|/\alpha^k \equiv 0$. Итак, для системы (2) оператор монодромии локально допускает выделение главной однородной части порядка k относительно начального значения и параметра

$$x(\omega, a, \alpha) = Xa + p(a, \alpha) + \psi(a, \alpha). \quad (3)$$

В частности, это возможно, если в правой части системы (2) функция $f(t, x, \alpha)$ локально допускает выделение главной вектор-формы $f(t, x, \alpha) = f_k(t, x, \alpha) + \tilde{f}(t, x, \alpha)$, $f_k(t, \alpha x, \alpha) = \alpha^k f_k(t, x, 1)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\tilde{f}(t, \alpha x, \alpha)\|/\alpha^k \equiv 0$, которая не аннулируется при усреднении по решениям системы $\dot{x} = A(t)x$, т.е.

$$p(a, \alpha) = X \int_0^\omega X^{-1}(\tau) f_k(\tau, X(\tau)a, \alpha) d\tau.$$

Условия устойчивости по определению 1 для системы (2)–(3) сформулируем в терминах свойств функции $p(a, \alpha)$. При этом будем предполагать, что имеет место критический случай по линейному приближению: $\det(X - E) = 0$, $\rho(X) = 1$ ($\rho(*)$ — операция вычисления спектрального радиуса матрицы).

Допустим, выделена матрица $P_0(a)$, удовлетворяющая условию $P_0(a)a = p(a, 0)$, причем существуют такие числа $c > 0$ и $b > 0$, что при всех λ , удовлетворяющих условию $\|\lambda\| = c$, и при всех малых $\gamma > 0$ справедлива оценка

$$\|X + \gamma P_0(\lambda)\| \leq 1 - \gamma b. \quad (4)$$

Рассмотрим систему (2)–(3) при $\alpha = 0$. Согласно [5, лемма 9.2] задача об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2)–(3) сводится к задаче об асимптотической устойчивости нулевого решения системы в конечных разностях

$$a_{j+1} = [X + P_0(a_j) + \Psi(a_j)]a_j, \quad (5)$$

где $\Psi(a)$ — какая-либо матрица, удовлетворяющая условию $\Psi(a)a = \psi(a, 0)$. Так как $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{1-k} \|\Psi(\beta a)\| = 0$, то существует такое $\delta_1 > 0$, что $\|\Psi(a)\| < b\|a\|^{k-1}/2$ при всех таких a , что $\|a\| < \delta_1$. Тогда по условию (4) получим оценку

$$\|a_{j+1}\| < \left(1 - \frac{1}{2}b\|a_j\|^{k-1}\right) \|a_j\| < \|a_j\|. \quad (6)$$

Выберем тождественную последовательность функций $V_j(u) \equiv \|u\|$. Для любого члена этой последовательности и для любых аргументов по свойствам нормы выполняются условия

$$a(\|u\|) = \frac{\|u\|}{2} \leq V_j(u) \leq b(\|u\|) = 2\|u\|, \quad |V_j(u) - V_j(\tilde{u})| \leq \|u - \tilde{u}\|.$$

Кроме того, при всех малых u справедливо неравенство

$$\|u_{j+1}\| - \|u_j\| < -\frac{1}{2}b\|u_j\|^k < -c(\|u_{j+1}\|) = -\frac{1}{2}b\|u_{j+1}\|^k.$$

Так как $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ — функции класса Хана, то в силу [10, предложение 2] нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво.

Оценку (6) при $a = \beta\lambda$, $\beta > 0$, $\|\lambda\| = c$, $\|a\| < \delta_1$ представим в виде

$$\|x(\omega, a, 0)\| \leq \left(1 - \frac{\beta^{k-1}b}{2}\right) \|a\| < \delta_1.$$

При этом существует такое малое $\delta_2 > 0$, что при $\alpha < \delta_2$ справедлива оценка $\|x(\omega, a, \alpha)\| \leq \delta_1$. Тогда по лемме 2 точка $x = 0_n$ устойчива по определению 1.

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполняется условие (4), то точка $x = 0_n$ для системы (2)–(3) ПДВ-устойчива по параметру.*

Заметим, что в силу асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2)–(3) при нулевом значении параметра теорема 1 относится к некритическому случаю ПДВ-устойчивости.

Далее исследуем критические случаи устойчивости.

Допустим, функция $p(a, \alpha)$ в равенстве (3) удовлетворяет условию

$$p(0_n, \alpha) \equiv 0_n. \quad (7)$$

Кроме того, возможно разложение $p(a, \alpha) = P(a, \alpha)a$, при котором существует такое число $b > 0$, что при всех λ : $\|\lambda\| = 1$ и при всех малых $\gamma > 0$ справедлива оценка

$$\|X + \gamma P(\lambda, 1)\| \leq 1 - \gamma b. \quad (8)$$

Теорема 2. Если выполняются условия (7) и (8), то точка $x = 0_n$ для системы (2)–(3) ПДВ-устойчива по параметру.

Доказательство. В равенстве (3) выберем $a = \alpha\lambda$, $\|\lambda\| = 1$. Выполним разложение

$$p(a, \alpha) = \alpha^{k-1} P(\lambda, 1)a.$$

Так как $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\psi(\alpha\lambda)\|/\alpha^k = 0$, то при некотором $\delta > 0$ и при любом $\alpha < \delta$ имеет место неравенство $\|\psi(\alpha\lambda)\| \leq b\alpha^k/2$. Тогда в силу условий (7) и (8) справедлива оценка

$$\|x(\omega, a, \alpha)\| \leq \|X + \alpha^{k-1} P(\lambda, 1)\| \alpha + \|\psi(a, \alpha)\| \leq (1 - b\alpha^{k-1})\alpha + \frac{b\alpha^k}{2} = \left(1 - \frac{b\alpha^{k-1}}{2}\right) \alpha < \alpha.$$

Итак, для любого $\delta_1 \leq \delta$ возьмем $\delta_2 = \delta_1$ и получим, что при $\|a\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ справедлива оценка $\|x(\omega, a, \alpha)\| \leq \delta_1$, т.е. точка $x = 0_n$ ПДВ-устойчива по параметру по определению 1 в силу леммы 2. Теорема 2 доказана. $\square$

Допустим, что существует число $b > 0$, для которого при всех λ , удовлетворяющих условию $\|\lambda\| = 1$, и малых $\gamma > 0$ справедлива оценка

$$\|\lambda + \gamma p(\lambda, 1)\| \leq 1 - \gamma b. \quad (9)$$

Теорема 3. Если выполняется условие (9), то точка $x = 0_n$ для системы (1) ПДВ-устойчива по параметру.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 4. Пусть выполняются следующие условия:

- (1) существует $a_0 \in \ker[X - E] \setminus \{0_n\}$, при котором $p(a_0, 1) = 0_n$, $\text{rang}[p'_a(a_0, 1)K \ p'_\mu(a_0, 1)] = n$, K — фундаментальная матрица решений системы $[X - E]a = 0_n$;
- (2) существуют числа $c > 0$ и $b > 0$, для которых при всех λ , удовлетворяющих условию $\|\lambda\| = 1$, и малых $\alpha > 0$ справедлива оценка $\|X + \alpha P(\lambda)\| \leq 1 - ab$, в которой $P(\lambda)$ — матрица, удовлетворяющая условию $P(\lambda)\lambda = p(a_0 + \lambda, 1)$.

Тогда точка $x = 0_n$ для системы (1) ПДВ-устойчива по параметру.

По теореме 4 в системе (2)–(3) имеет место ветвление малого устойчивого по параметру периодического решения с направлением ветвления $a'(0) = a_0$, которое устойчиво по определению 2 (см. [2]). Поэтому справедливость теоремы 4 следует из леммы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов В. В. Двусторонняя устойчивость малого периодического решения // Вестн. РАЕН. — 2014. — 14, № 5. — С. 6–9.
2. Абрамов В. В. Ветвление периодического решения неавтономной системы с малым параметром // Вестн. РАЕН. — 2015. — 15, № 3. — С. 3–7.
3. Бельман С. А. Об условиях существования ненулевого периодического решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с параметром // Изв. РАЕН. Диффер. уравн. — 2008. — № 13. — С. 5–16.
4. Бельман С. А. Периодические решения систем дифференциальных уравнений с параметром // Тр. Средневолж. мат. об-ва. — 2008. — 10, № 1. — С. 113–119.
5. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
6. Лискина Е. Ю. О периодических решениях системы дифференциальных уравнений // Изв. РАЕН. Диффер. уравн. — 2000. — № 3. — С. 60–65.
7. Лискина Е. Ю. Достаточные условия существования семейства периодических решений системы дифференциальных уравнений // Изв. РАЕН. Диффер. уравн. — 2001. — № 5. — С. 75–85.
8. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.

9. *Руи Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. — М.: Мир, 1980.
10. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971.
11. *Хапаев М. М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. — М.: Высшая школа, 1988.

Абрамов Владимир Викторович

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

E-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru

Бельман Светлана Александровна

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

E-mail: s.belman@365.rsu.edu.ru

Лискина Екатерина Юрьевна

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

E-mail: e.liskina@365.rsu.edu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 15–25
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-15-25

УДК 517.925

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ГЕНЕРИРОВАНИЮ ЭКСТРЕМАЛЬНО МУЛЬТИСТАБИЛЬНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2019 г. И. М. БУРКИН, О. И. КУЗНЕЦОВА

Аннотация. В работе предлагаются новые подходы к построению экстремально мультистабильных систем, содержащих одномерные, двумерные и трехмерные решетки идентичных скрытых хаотических аттракторов, имеющих одинаковые показатели Ляпунова. В частности, показано, что для многомерных моделей систем автоматического управления в форме Лурье всегда возможен переход от системы в интерактивном режиме к системе каскадного типа, что существенно облегчает процедуру построения многомерных решеток идентичных хаотических аттракторов.

Ключевые слова: динамическая система, хаос, экстремальная мультистабильность, смещение фазового потока, показатели Ляпунова, размерность Каплана—Йорке.

AN APPROACH TO GENERATING EXTREMELY MULTISTABLE CHAOTIC SYSTEMS

© 2019 I. M. BURKIN, O. I. KUZNETSOVA

ABSTRACT. In this paper, we propose new approaches to the construction of extremely multistable systems containing one-, two-, and three-dimensional lattices of identical hidden chaotic attractors possessing the same Lyapunov exponents. In particular, we prove that for multidimensional models of automatic control systems in the Lurie form, it is always possible to pass from interactive system to a cascade system; this substantially simplifies the procedure for constructing multidimensional lattices of identical chaotic attractors.

Keywords and phrases: dynamical system, chaos, extreme multistability, displacement of phase flow, Lyapunov exponent, Kaplan–Yorke dimension.

AMS Subject Classification: 34C28, 34D08, 37N35

1. Введение. В реальном физическом мире мультистабильность является достаточно распространенным явлением. Ее можно наблюдать, например, в динамических моделях газового лазера (см. [3]), биологических систем (см. [13]), волоконных лазеров (см. [9]), нейронных сетей (см. [27]), полупроводниковых суперрешеток (см. [26]). Мультистабильность динамической системы может создать угрозу в практических инженерных приложениях, поскольку поведение системы не может быть однозначно гарантировано. Такая система может демонстрировать решения с принципиально различным поведением в зависимости от выбора их начальных условий. С другой стороны, мультистабильность системы может являться ее неоспоримым преимуществом в том случае, когда она используется, например, для скрытия информации в системах коммуникаций (см. [7]) и аудиосхемах шифрования для повышения производительности защищенной связи (см. [22]), поскольку в данном случае специальный выбор начальных условий может играть роль

«секретного ключа». По этой причине в последнее время изучению мультистабильных систем посвящено большое число работ (см. [1, 4, 11, 12, 16, 17, 23, 25]).

Недавно в серии работ [18–20] был рассмотрен класс динамических систем, названных *системами, допускающими смещение сдвигом по переменным* (*offset boostable dynamical systems*). К таким системам относятся, в частности, системы *гипертолчка* (*hyperjerk systems*). Система гипертолчка n -го порядка может быть записана в виде эквивалентной системы каскадного типа в $\mathbb{R}^n$. В системе каскадного типа легко осуществить такое преобразование сдвига ее координат (смещение), которое меняет положение аттракторов системы в ее фазовом пространстве, не меняя в то же время динамику некоторых переменных. Последнее обстоятельство, в свою очередь, доставляет возможность трансформации системы каскадного типа в динамическую систему, обладающую бесконечной решеткой сосуществующих идентичных аттракторов, путем введения в нее периодических функций. Такие системы называют *экстремально мультистабильными* или *бесконечно мультистабильными* (см. [18]). В [18, 20] построены бесконечно мультистабильные трехмерные системы, обладающие двумерной решеткой самовозбуждающихся аттракторов. В [19] на базе четырехмерной системы, допускающей смещение сдвигом, также построена система с трехмерной решеткой самовозбуждающихся гиперхаотических аттракторов, а также система без состояний равновесия, обладающая четырехмерной решеткой скрытых аттракторов. Напомним, что аттрактор системы называют *самовозбуждающимся* (*self-excited attractor*), если любая окрестность некоторого состояния равновесия системы пересекается с областью притяжения аттрактора; в противном случае аттрактор называется *скрытым* (*hidden attractor*) (см. [15]).

Для систем в $\mathbb{R}^n$, не являющимися системами каскадного типа, упомянутая процедура генерирования аттракторов-клонов также может быть реализована. Однако в этом случае, как отмечено в [19], процедура введения периодических функций намного сложнее, поскольку она может существенно повлиять на динамику системы и привести к разрушению ее аттракторов. В настоящее время известно огромное количество работ, в которых исследуются системы, обладающие самовозбуждающимися или скрытыми аттракторами (см., например, обзоры [8, 10]). Поэтому естественным образом возникает вопрос: *в каком случае система, обладающая хаотическим самовозбуждающимся или скрытым аттрактором, может быть приведена при помощи неособого линейного преобразования к системе каскадного типа, на базе которой путем введения периодических функций может быть построена экстремально мультистабильная система?*

В разделе 2 настоящей работы классическая система Чуа, содержащая скрытый хаотический аттрактор, использована для генерирования системы, содержащей одномерную решетку идентичных скрытых аттракторов. В разделах 2.1 и 2.2 рассмотрена система гипертолчка четвертого порядка, содержащая самовозбуждающийся хаотический аттрактор. Путем введения в эту систему тригонометрических функций строятся системы, содержащие двумерные и трехмерные решетки идентичных скрытых аттракторов. В разделе 3 показано, что для систем автоматического регулирования в форме Лурье с одной нелинейностью всегда существует такое неособое линейное преобразование координат, которое приводит эту систему к системе каскадного типа. Учитывая эту особенность систем в форме Лурье, удается, в частности, построить систему с двумерной решеткой идентичных скрытых хаотических аттракторов, используя классическую систему Чуа. Для всех построенных в работе экстремально мультистабильных систем вычисляются показатели Ляпунова и размерность Каплана–Йорке содержащихся в них аттракторов-клонов.

2. Приемы генерирования экстремально мультистабильных систем. Следуя работе [20] будем говорить, что динамическая система $\dot{X} = F(X)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ является *системой, допускающей сдвиг по переменной x_i* (*variable-boostable system*), если замена переменной x_i на $x_i + c$ при подходящем выборе значения постоянной c не меняет динамику остальных переменных в исходном фазовом пространстве. Хорошо известным примером систем, допускающих сдвиг по переменной, являются так называемые фазовые системы автоматического управления вида,

$$\dot{X} = AX + b\varphi(\sigma), \quad \sigma = c^T X, \quad (1)$$

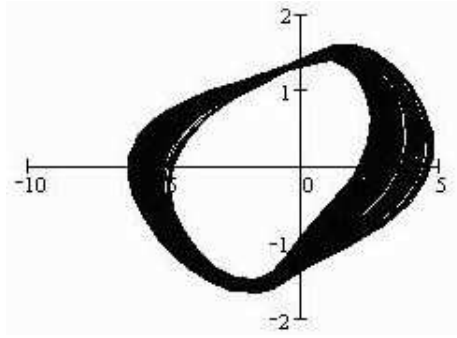


Рис. 1. Скрытый аттрактор классической системы Чуа

где A — $(n \times n)$ -матрица, имеющая нулевое собственное значение, b и c — n -векторы, $\varphi(\sigma)$ — Δ -периодическая функция. Как показано в [14], система (1) всегда может быть записана в виде

$$\dot{Y} = BY + q\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = r^T Y + \rho\varphi(\sigma), \quad (2)$$

где B — $(n-1) \times (n-1)$ -матрица, q и r — $(n-1)$ -векторы, ρ — число. Поскольку в цилиндрическом фазовом пространстве $\{(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \sigma \bmod \Delta)\}$ динамический поток системы (2) не меняется при замене σ на $\sigma + k\Delta$, $k \in \mathbb{Z}$, то в накрывающем пространстве $\{(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \sigma)\}$ такая замена влечет за собой сдвиг фазового потока на $k\Delta$ в направлении оси σ , не меняя при этом динамику остальных переменных. Если фазовая система имеет аттрактор, целиком расположенный в «полосе» $\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \sigma : y_i \in (-\infty; \infty), \sigma \in (\sigma_0; \sigma_0 + \Delta)\}$, то она имеет бесконечную одномерную решетку идентичных аттракторов-клонов.

Приведенные соображения подсказывают естественный путь генерирования экстремально мультистабильных систем, обладающих одномерной решеткой идентичных аттракторов. Предположим, что известна система вида (1) с особой матрицей A , имеющая самовозбуждающийся или скрытый аттрактор, целиком расположенный в полосе $\{X : \Delta_0 \leq c^T X \leq \Delta_0 + \Delta\}$. Заменяя в (1) функцию $\varphi(\sigma)$ на Δ -периодическую функцию $\psi(\sigma)$, совпадающую с $\varphi(\sigma)$ на $[0; \Delta]$, получим систему с одномерной решеткой идентичных аттракторов.

Приведем реализацию описанного алгоритма построения бесконечно мультистабильной системы на примере клонирования скрытого аттрактора классической системы Чуа. В безразмерных координатах такая система может быть записана в виде

$$\dot{x} = \alpha(y - x) - \alpha g(x), \quad \dot{y} = x - y + z, \quad \dot{z} = -\beta y - \gamma z, \quad (3)$$

(см. [6]), где функция $g(x)$ характеризует нелинейный элемент («диод Чуа»). Классической системой Чуа называют систему (3) с нелинейностью вида

$$g(x) = m_1 x + 0,5(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|). \quad (4)$$

В соотношениях (3)–(4) $\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1$ — параметры классической системы Чуа.

Следуя работе [6], выберем параметры системы следующим образом: $\alpha = 8,4562$, $\beta = 12,0732$, $\gamma = 0,0052$, $m_0 = -0,1768$, $m_1 = -1,1468$. Запишем систему (3)–(4) в виде (1) с

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha(m_1 + 1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\sigma) = g(\sigma) - m_1 \sigma. \quad (5)$$

Такая система была подробно исследована в [5], где было показано, что она обладает скрытым хаотическим аттрактором, который может быть обнаружен путем численного интегрирования с начальным условием $X_0 = (3,414309, 1,41477, -3,666077)$. Этот аттрактор представлен на рис. 1. При этом $|c^T X| \leq 6,35$.

Заменяя в системе (1)–(5) функцию $\varphi(\sigma)$ на периодическую функцию $\psi(\sigma)$ с периодом $\Delta = 13,1766$, совпадающую с $\varphi(\sigma)$ на периоде Δ . Новая система, как и ожидалось, обладает бесконечным числом скрытых аттракторов, представленных на рис. 2.

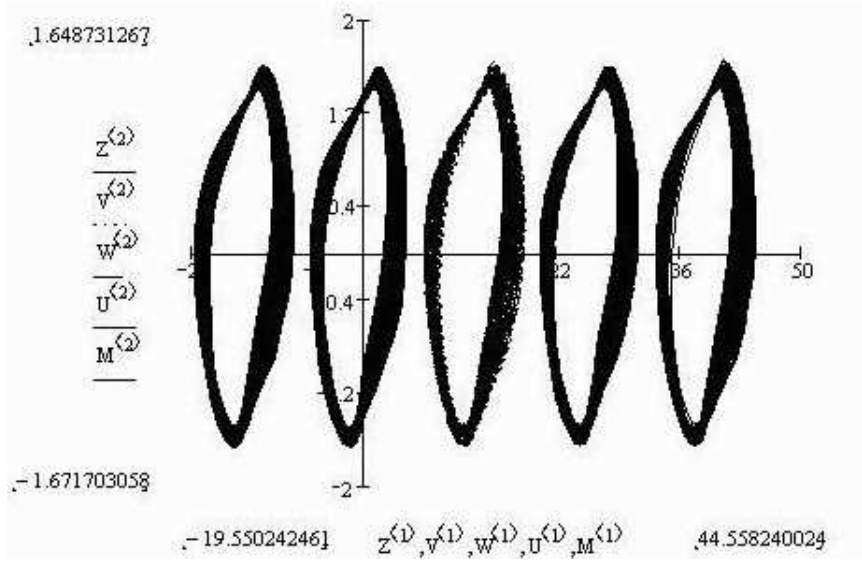


Рис. 2. Одномерная решетка скрытых аттракторов системы Чуа с периодической нелинейностью

Точки, принадлежащие скрытым аттракторам одномерной решетки, представленной на рис. 2, отыскивались следующим образом. Сначала было найдено такое значение k , что матрица $\tilde{A} = A + kbc^T$ имеет нулевое собственное значение. Пусть s — соответствующий этому собственному значению собственный вектор матрицы $\tilde{A}$. Положим $d = \Delta s(c^T s)^{-1}$. Тогда точки $X_j = X_0 + jd$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, принадлежат аттракторам одномерной решетки.

Ясно, что продемонстрированный поход не может быть использован для генерирования на основе системы (3) экстремально мультистабильной системы, обладающей решеткой скрытых аттракторов размерности > 1 . В [19, 20] рассмотрен другой класс систем, позволяющих производить смещение фазового потока путем сдвига по переменным (*offset boostable systems*). Речь идет о системах каскадного типа, полученных из систем толчка и гипертолчка. Система гипертолчка описывается уравнением

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dx}{dt}, x\right), \quad n \geq 4. \quad (6)$$

При $n = 3$ это система толчка. В случае $n = 4$ система (6) может быть трансформирована в систему каскадного типа, допускающую, например, трехмерный сдвиг по переменным, путем введения трех новых переменных y, z, u следующим образом:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = u, \quad \dot{u} = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x). \quad (7)$$

Сдвиг по переменным y, z, u в системе (7) может быть осуществлен путем введения дополнительных констант в ее первые три уравнения. В самом деле, производя замену переменных $x \rightarrow \tilde{x}$, $y \rightarrow \tilde{y} + m$, $z \rightarrow \tilde{z} + n$, $u \rightarrow \tilde{u} + p$, приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{y} + m, \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{z} + n, \\ \dot{\tilde{z}} &= \tilde{u} + p, \\ \dot{\tilde{u}} &= f(\dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}, \dot{\tilde{z}}, \tilde{x}). \end{aligned} \quad (8)$$

Легко видеть, что выполненное преобразование системы осуществляет смещение фазового потока системы (7) по переменным y, z, u , оставляя неизменной динамику переменной $x = \tilde{x}$, поскольку динамика этой переменной подчиняется тому же самому уравнению (6). Очевидно, сдвиг можно осуществить отдельно по любой из указанных переменных или по любой паре из них. Если в системе (7) переменные y, z, u заменить на периодические функции $G(y)$, $R(z)$, $F(u)$ и при

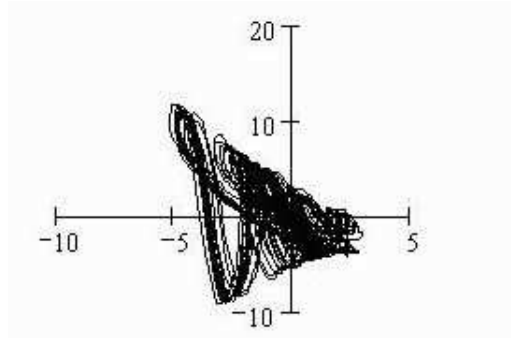


Рис. 3. Самовозбуждающийся аттрактор системы (9)

этом полученная система имеет аттрактор, то, как нетрудно убедиться (см. [19]), что она имеет бесконечную трехмерную решетку идентичных аттракторов. В [18, 20] для каскадных трехмерных систем вида (7) путем замены переменных y и z на тригонометрические функции построены бесконечно мультистабильные трехмерные системы, обладающие двумерной решеткой самовозбуждающихся аттракторов.

В качестве примера мы рассмотрим систему гипертолчка четвертого порядка:

$$\ddot{x} = -\ddot{x} - 3\dot{x} - x - e^{\ddot{x}} - 2\ddot{x}e^{-\ddot{x}^2} + 1,$$

для которой соответствующая система каскадного типа (7) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= u, \\ \dot{u} &= -x - 3y - u - e^z - 2ze^{-z^2} + 1.\end{aligned}\tag{9}$$

Эта система имеет единственное неустойчивое состояние равновесия $(0, 0, 0, 0)$ типа седло-фокус с собственными значениями матрицы линеаризации $(-0,515 \pm 2,365i, 0,015 \pm 0,413i)$ и самовозбуждающийся из окрестности состояния равновесия аттрактор, представленный на рисю 3. Ниже будет продемонстрировано, каким образом путем введения в систему (9) периодических функций могут быть построены динамические системы, обладающие двумерной или трехмерной решеткой скрытых хаотических аттракторов-клонов.

2.1. Построение двумерной решетки скрытых аттракторов. Заменяем в системе (9) переменные y, u на периодические функции $F(y) = a \sin(by)$, $G(u) = c \sin(mu)$ и подберем значения параметров a, b, c, m так, чтобы новая система имела устойчивое в малом состояние равновесия $(0, 0, 0, 0)$ и хаотический аттрактор, который, очевидно, будет скрытым. Характеристический полином матрицы Якоби новой системы в точке $(0, 0, 0, 0)$ имеет вид $r(p) = p^4 + ctp^3 + 3ctp^2 + 3abctmp + abctm$. Полином $r(p)$ будет полиномом Гурвица, например, при $a = 2,1, b = 1/2, c = 5, m = 1/3$. При этом система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2,1 \sin \frac{y}{2}, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= 5 \sin \frac{u}{3}, \\ \dot{u} &= -x - 6,3 \sin \frac{y}{2} - 5 \sin \frac{u}{3} - e^z - 2ze^{-z^2} + 1\end{aligned}\tag{10}$$

имеет скрытый хаотический аттрактор с ляпуновскими показателями $\Lambda_1 = 0,018, \Lambda_2 = 0,000, \Lambda_3 = -0,055, \Lambda_4 = -1,354$ и размерностью Каплана–Йорке $D_{KY} = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2)|\Lambda_3|^{-1} = 2,296$. Проекция этого аттрактора на плоскость (y, u) представлена на рис. 4.

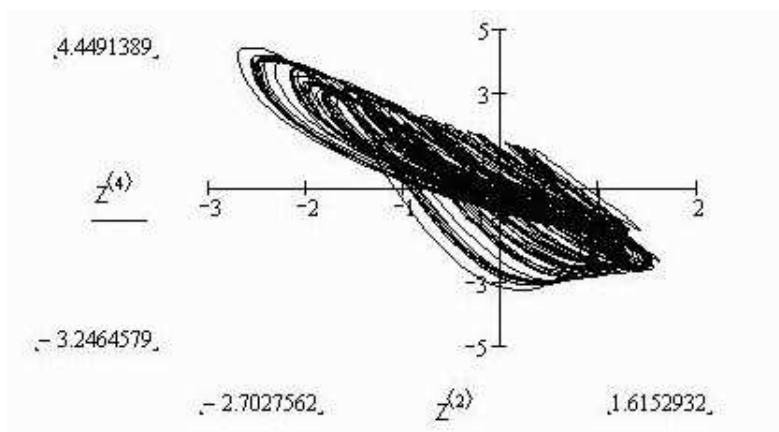
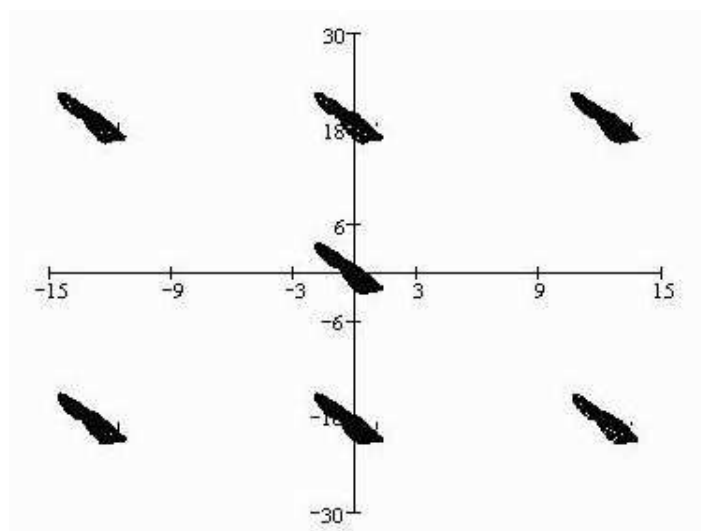
Рис. 4. Проекция скрытого аттрактора системы (10) на плоскость (y, u) 

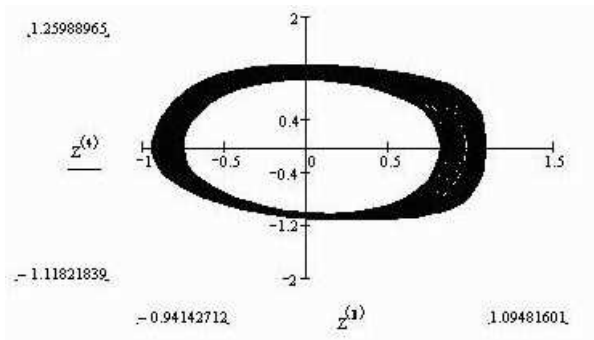
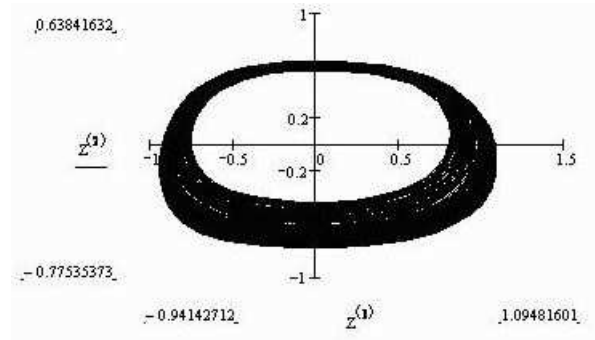
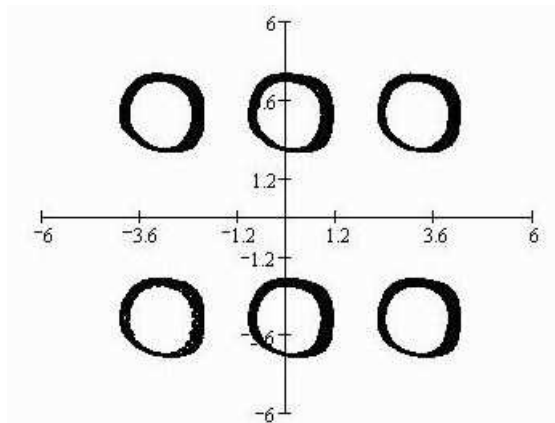
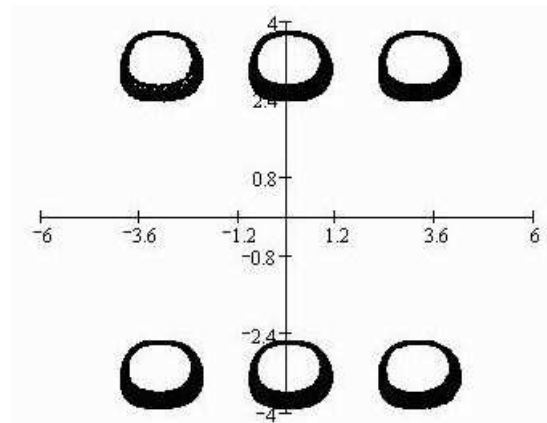
Рис. 5. Двумерная решетка скрытых аттракторов системы (10)

Замена в системе (9) переменных y, u на периодические функции обеспечивает существование в фазовом пространстве системы (10) бесконечной двумерной решетки скрытых хаотических аттракторов-клонов с идентичными характеристиками — ляпуновскими показателями и размерностью Каплана—Йорке. Шесть аттракторов-клонов, полученные сдвигом аттрактора, представленного на рис. 4 на периоды $\pm 4\pi$ и $\pm 6\pi$ по осям Oy и Ou соответственно, представлены на рис. 5.

2.2. Построение трехмерной решетки скрытых аттракторов. Так как система (9) допускает смещение фазового потока по переменным y, z и u , то можно попытаться заменить эти переменные на функции, периодические по переменным y, z и u так, чтобы новая система имела бесконечную трехмерную решетку идентичных скрытых аттракторов.

Путем целенаправленного компьютерного поиска реализовать описанный сценарий удалось в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \operatorname{tg} y, \\ \dot{y} &= \operatorname{tg} z, \\ \dot{z} &= 1,1 \operatorname{tg} u, \\ \dot{u} &= -x - 3 \operatorname{tg} y - 1,15 \operatorname{tg} u - e^{\operatorname{tg} z} - 2 \operatorname{tg} z e^{-\operatorname{tg}^2 z} + 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Рис. 6. Проекция аттрактора на плоскость (z, u) Рис. 7. Проекция аттрактора на плоскость (y, z) Рис. 8. Проекция аттракторов-клонов на плоскость (z, u) Рис. 9. Проекция аттракторов-клонов на плоскость (y, z)

Матрица линеаризации системы (11) в состоянии равновесия $(0, 0, 0, 0)$ имеет собственные значения $(-0,011 \pm 1,746i, -0,564 \pm 0,242i)$, поэтому все ее состояния равновесия асимптотически устойчивы в малом. Решение с начальным условием $(-0,1, 0,6, 0, -0,1)$ находится в области притяжения скрытого хаотического аттрактора с ляпуновскими показателями $\Lambda_1 = 0,164$, $\Lambda_2 = -0,139$, $\Lambda_3 = -0,229$, $\Lambda_4 = -2,944$ и размерностью Каплана—Йорке $D_{KY} = 2,107$. Проекция этого аттрактора на плоскости (z, u) и (y, z) представлены на рис. 6 и 7.

На рис. 8 и 9 представлены аттракторы-клоны, полученные сдвигом указанного аттрактора на периоды $\pm\pi$ по осям Oz , Ou и Oy , Oz .

3. Генерирование экстремально мультистабильных систем с использованием систем регулирования в форме Лурье. В предыдущем разделе экстремально мультистабильные системы, содержащие многомерные решетки скрытых хаотических аттракторов, были построены с использованием смещаемых по переменным систем каскадного типа, которые, в свою очередь, были получены из систем гипертолчка (6). Для систем, не являющихся системами каскадного типа (систем в интерактивном режиме [20]), процедура введения периодических функций, позволяющая построить систему, содержащую многомерную решетку аттракторов, оказывается много сложнее. Такая процедура может существенно менять динамику системы и приводить к разрушению ее аттракторов. Необходимое преобразование системы удастся осуществить, как правило, только с использованием целенаправленного компьютерного поиска (см. [19, 20]).

В настоящем разделе мы покажем, что многомерная модель системы автоматического регулирования (1) в форме Лурье всегда может быть приведена при помощи неособого линейного

преобразования к системе каскадного типа. Последнее обстоятельство позволяет, в частности, использовать многие известные результаты, связанные с существованием самовозбуждающихся или скрытых аттракторов у систем вида (1) (см. [8, 10]), для генерирования экстремально мультистабильных систем.

Пусть I — единичная $(n \times n)$ -матрица. Для системы (1) определим дробно-рациональную функцию комплексного аргумента p следующим образом: $\chi(p) = c^T(A - pI)^{-1}b$. Пусть $\chi(p) = m(p)[n(p)]^{-1}$, причем многочлен в знаменателе дроби $\chi(p)$ имеет степень n и несократим с ее числителем. В этом случае говорят, что передаточная функция $\chi(p)$ невырождена (см. [2]). Хорошо известно следующее утверждение (см. [2]): *две системы вида (1) с одной и той же передаточной функцией эквивалентны с точностью до неособого линейного преобразования их координат*. Если

$$\chi(p) = \frac{c_0 + c_1p + \dots + c_{n-1}p^{n-1}}{a_0 + a_1p + \dots + a_{n-1}p^{n-1} + p^n},$$

то, как показано в [2], система (1) неособым преобразованием $X = MY$ может быть приведена к виду

$$\dot{Y} = A_1Y + b_1\varphi(\sigma), \quad \sigma = c_1^T Y. \quad (12)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} -c_0 \\ -c_1 \\ -c_2 \\ \vdots \\ -c_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

При этом матрица преобразования M может быть найдена из системы уравнений

$$AM = A_1M, \quad b = Mb_1, \quad c_1 = M^T c. \quad (14)$$

Система (12)–(13) является системой каскадного типа. Если система (1) имела аттрактор, то и система (12)–(13), очевидно, также имеет аттрактор, который можно попытаться «клонировать», вводя в систему периодические функции. Тем самым можно попытаться построить экстремально мультистабильную систему, содержащую $(n - 1)$ -мерную решетку идентичных аттракторов.

Проиллюстрируем реализацию описанной идеи на примере рассмотренной в разделе 2 классической системы Чуа (3)–(5). При выбранных значениях параметров системы ее передаточная функция имеет вид

$$\chi(p) = \frac{102,13736608 + 8,50017224p + 8,4562p^2}{-15,037737580544 + 2,374374715168p - 0,23617016p^2 + p^3}. \quad (15)$$

По передаточной функции (15) выпишем систему (12)–(13):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= 15,037737580544x - 2,374374715186y + 0,23617016z + \\ &\quad + \varphi(-102,13736608x - 8,50017224y - 8,4562z). \end{aligned} \quad (16)$$

Найдем матрицу M линейной замены, решив систему (14):

$$M = \begin{pmatrix} -102,13736608 & -8,50017224 & -8,4562 \\ -0,04397224 & -8,4562 & 0 \\ 102,09339384 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Численно проинтегрировав систему каскадного типа (16) с начальным условием $Y_0 = M^{-1}X_0 = (-0,035909052, -0,167118918, 0,197947848)$, находим ее скрытый аттрактор, представленный на рис. 10.

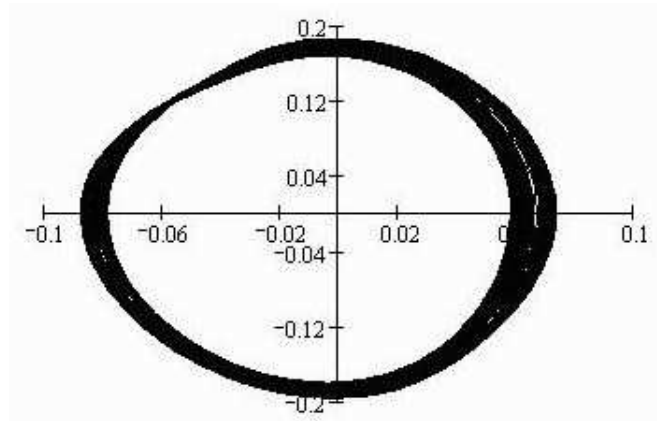


Рис. 10. Скрытый аттрактор системы (16)

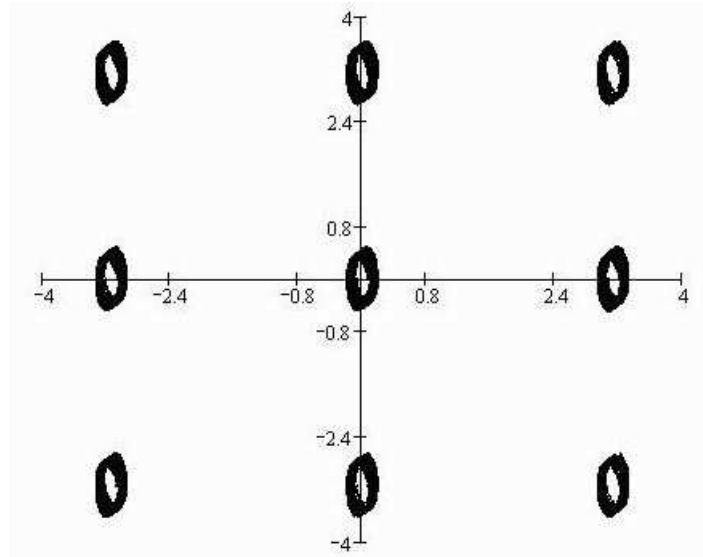


Рис. 11. Двумерная решетка скрытых аттракторов системы (17)

Теперь заменим в системе (16) переменные y и z на π -периодические функции: $y \rightarrow 0,5 \sin 2y$, $z \rightarrow 0,5 \sin 2z$. Полученная после такой замены система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0,5 \sin 2y, \\ \dot{y} &= 0,5 \sin 2z, \\ \dot{z} &= 15,037737580544x - 1,1871873575840 \sin 2y + 0,11808508 \sin 2z + \\ &\quad + \varphi(-102,13736608x - 4,25008612 \sin 2y - 4,2281 \sin 2z) \end{aligned} \quad (17)$$

содержит двумерную решетку идентичных скрытых аттракторов (см. рис. 11), имеющих одинаковый набор ляпуновских показателей $\Lambda_1 = 0,360$, $\Lambda_2 = -0,103$, $\Lambda_3 = -2,581$ и размерность Каплана—Йорке $D_{KY} = 2,099$.

4. Заключение. Метод построения бесконечных решеток странных аттракторов может быть применен в таких инженерных приложениях, как безопасная связь и обнаружение слабых сигналов, когда начальные условия принципиально важны для определения динамики системы. В коммуникациях, базирующихся на использовании хаоса, непредсказуемость начальных условий может дополнительно повысить безопасность связи (см. [21]). Поскольку хаотические системы чувствительны к определенным сигналам и в то же время невосприимчивы к шуму, мультистабильность с бесконечным числом аттракторов обеспечивает возможность перемежающихся переходов между порядком и хаосом, которые полезны для обнаружения слабого сигнала (см. [24]).

В настоящей работе обсуждаются различные подходы к генерированию экстремально мультистабильных систем, содержащих бесконечные решетки скрытых хаотических аттракторов. В частности, показано, что для этой цели может быть использована смещаемая по переменным система каскадного типа, содержащая самовозбуждающийся аттрактор. Особое внимание уделено многомерным моделям систем управления в форме Лурье. Обсуждаются методы преобразования таких систем, позволяющие путем выбора специального базиса приводить их к смещаемым по переменным системам каскадного типа. Таким образом, открывается возможность, генерировать системы с бесконечной решеткой скрытых аттракторов, используя многочисленные примеры существования скрытых аттракторов у систем типа Лурье, не прибегая при этом к исчерпывающему компьютерному поиску.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буркин И. М. Скрытые аттракторы некоторых мультистабильных систем с бесконечным числом состояний равновесия // Чебышев. сб. — 2017. — 18, № 4. — С. 127–138.
2. Леонов Г. А. Теория управления. — Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006.
3. Arecchi F. T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J. Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser // Phys. Rev. Lett. — 1982. — 49, № 17. — P. 12–17.
4. Bao B., Li Q., Wang N., Xu Q. Multistability in Chua's circuit with two stable node-foci // Chaos. — 2016. — 26(4). — 043111.
5. Burkin I. M., Nguen N. K Analytical-numerical methods of finding hidden oscillations in multidimensional dynamical systems // Diff. Equations. — 2014. — № 50. — P. 1695–1717.
6. Bragin V. O., Vagitsev V. I., Kuznetsov N. V., Leonov G. A. Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. The Aizerman and Kalman conjectures and Chua's circuits // J. Comput. Syst. Sci. Int. — 2011. — 50, № 4. — P. 511–543.
7. Cicek S., Ferikoglu A., Pehlivan I. A new 3D chaotic system: dynamical analysis, electronic circuit design, active control synchronization and chaotic masking communication application // Optik. — 2016. — № 127. — P. 4024–4030.
8. Dudkowskia D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N. V., Leonov G. A. Hidden attractors in dynamical systems // Phys. Rep. — 2016. — № 637. — P. 1–50.
9. Komarov A., Leblond H., Sanchez F. Multistability and hysteresis phenomena in passively mode-locked fiber lasers // Phys. Rev. — 2005. — 71 (5). — 053809.
10. Kuznetsov N. V. Hidden attractors in fundamental problems and engineering models. A short survey // Lect. Notes Electr. Eng. — 2016. — № 371. — P. 13–25.
11. Lai Q., Chen S. Research on a new 3-D autonomous chaotic system with coexisting attractors // Optik. — 2016. — № 127. — P. 3000–3004.
12. Lai Q., Chen S. Generating multiple chaotic attractors from Sprott B system // Int. J. Bifurc. Chaos. — 2016. — 26. — 21650177.
13. Laurent M., Kellershohn N. Multistability: a major means of differentiation and evolution in biological systems // Trends Biochem. Sci. — 1999. — 24 (11). — P. 418–422.
14. Leonov G. A., Burkin I. M., Shepeljavyi A. I. Frequency Methods in Oscillation Theory. — Amsterdam: Kluwer, 1996.
15. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Vagitsev V. I. Localization of hidden Chua's attractors // Phys. Lett. — 2011. — № 375. — P. 2230–2233.
16. Li C., Hu W., Sprott J. C., Wang X. Multistability in symmetric chaotic systems // Eur. Phys. J. Spec. Top. — 2015. — № 224. — P. 1493–1506.

17. *Li C., Sprott J. C.* Multistability in the Lorenz system: a broken butterfly// *Int. J. Bifurc. Chaos.* — 2014. — 24 (10). — 1450131.
18. *Li C., Sprott J. C., Hu W., Xu Y.* Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system// *Int. J. Bifurc. Chaos.* — 2017. — 27 (10). — 1750160.
19. *Li C., Sprott J. C., Kapitaniak T., Lu T.* Infinite lattice of hyperchaotic strange attractors// *Chaos Solitons Fract.* — 2018. — № 109. — P. 76–82.
20. *Li C., Sprott J. C., Mei Y.* An invite 2-D lattice of strange attractors// *Nonlin. Dynam.* — 2017. — 89, № 4. — P. 2629–2639.
21. *Li Z., Xu D.* A secure communication scheme using projective chaos synchronization// *Chaos Solitons Fract.* — 2004. — № 22. — P. 477–481.
22. *Liu H., Kadi A., Li Y.* Audio encryption scheme by confusion and diffusion based on multi-scroll chaotic system and one-time keys// *Optik.* — 2016. — № 127. — P. 7431–7438.
23. *Ujjwal S. R., Punetha N., Ramaswamy R., Agrawal M., Prasad A.* Driving-induced multistability in coupled chaotic oscillators: symmetries and riddled basins// *Chaos.* — 2016. — 26. — 063111.
24. *Wang G., Chen D., Lin J., Chen X.* The application of chaotic oscillators to weak signal detection// *IEEE Trans. Ind. Electron.* — 1999. — № 46. — P. 440–444.
25. *Xu Q., Lin Y., Bao B., Chen M.* Multiple attractors in a non-ideal active voltage-controlled memristor based Chua's circuit// *Chaos Solitons Fract.* — 2016. — № 83. — P. 186–200.
26. *Ying L., Huang D., Lai Y. C.* Multistability, chaos, and random signal generation in semiconductor superlattices// *Phys. Rev. E.* — 2016. — 93 (6). — 062204.
27. *Zeng Z., Huang T., Zheng W.* Multistability of recurrent neural networks with time-varying delays and the piecewise linear activation function// *IEEE Trans. Neural Networks.* — 2010. — № 21 (8). — P. 1371–1377.

Буркин Игорь Михайлович
Тульский государственный университет
E-mail: i-burkin@yandex.ru

Кузнецова Оксана Игоревна
Тульский государственный университет



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 26–32
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-26-32

УДК 517.983

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРНЫХ СЕМЕЙСТВАХ

© 2019 г. В. Б. ВАСИЛЬЕВ

Аннотация. Предлагается абстрактная схема исследования специальных операторов, которая применяется далее для изучения эллиптических псевдодифференциальных операторов и связанных с ними краевых задач на многообразиях с негладким краем. В частности, граница может содержать конические точки, ребра различных размерностей, и в некоторых случаях точки пика. С помощью таких конструкций описываются корректные постановки краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений на указанных многообразиях в пространствах Соболева—Слободецкого.

Ключевые слова: оператор локального типа, операторный символ, эллиптичность, фредгольмовость, индекс, псевдодифференциальный оператор.

ON CERTAIN OPERATOR FAMILIES

© 2019 V. B. VASILYEV

ABSTRACT. In this paper, we propose an abstract scheme for the study of special operators and apply this scheme to examining elliptic pseudodifferential operators and related boundary-value problems on manifolds with nonsmooth boundaries. In particular, we consider cases where boundaries may contain conical points, edges of various dimensions, and even peak points. Using the constructions proposed, we present well-posed formulations of boundary-value problems for elliptic pseudo-differential equations on manifolds discussed in Sobolev–Slobodecky spaces.

Keywords and phrases: local-type operator, operator symbol, ellipticity, Fredholm property, index, pseudodifferential operator.

AMS Subject Classification: 35S05, 47B37

1. Введение. В теории псевдодифференциальных операторов и связанных с ними уравнений и краевых задач ключевую роль играет понятие символа псевдодифференциального оператора. В терминах символа определяется сам псевдодифференциальный оператор, условия эллиптичности и фредгольмовости. Принято считать символ некоей функцией, определенной на какой-либо геометрической структуре (в случае псевдодифференциальных операторов на гладких многообразиях — это кокасательное расслоение). Все арифметические операции, производимые в алгебре операторов (факторизованной по идеалу компактных операторов), наследуются алгеброй символов, после чего все внимание уделяется исследованию алгебры символов. Последняя может оказаться коммутативной (скалярный случай), а может быть и некоммутативной (матричный случай). Подход, связанный с операторными алгебрами, наверное, наиболее популярен в последние два-три десятилетия (см. [5, 10, 13, 14]), однако имеются и аналитические рассуждения (см. [4, 6, 9, 11, 12]). Основная проблема, которой посвящены эти работы — описание условий фредгольмовости рассматриваемых операторов и вычисление их индекса.

Работа выполнена при поддержке Министерством образования и науки Российской Федерации (проект № 1.7311.2017/8.9).

В настоящей работе предлагается операторный подход к этой проблеме, основанный на рассмотрении (см. [7]) для специальных операторов локального типа (см. ниже), к которому можно отнести широкие классы псевдодифференциальных операторов. Некоторые предварительные работы, связанные с этим исследованием, содержатся в работах автора (см. [1–3, 15]).

2. Операторы локального типа и огибающие. Приведем некоторые общие положения, связанные со специальными классами операторов, основанные на понятиях и конструкциях И. Б. Симоненко (см. [7]).

2.1. Основные понятия. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы (банаховы) пространства функций, определенных на компактном многообразии (возможно, с краем) M , $A : H_1 \rightarrow H_2$ — линейный ограниченный оператор. Следуя [7] введем следующее определение.

Определение 1. Оператор A называется *оператором локального типа*, если оператор $P_U A P_V$ является компактным для любых двух компактных непересекающихся множеств $K_1, K_2 \subset M$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$; P_K обозначает проектор на множество K ; точнее, для всех $f(x) \in H_1(H_2)$

$$(P_K f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K; \\ 0, & x \in M \setminus K. \end{cases}$$

Всюду ниже будем рассматривать только операторы локального типа.

Обозначим символом $|||A|||$ существенную норму оператора A ,

$$|||A||| \equiv \inf \|A + T\|,$$

где точная нижняя грань берется по всем компактным операторам $T : H_1 \rightarrow H_2$.

Определение 2. Оператор $A_x : H_1 \rightarrow H_2$ называется *локальным представителем* оператора A в точке $x \in M$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки x на многообразии M , $x \in U \subset M$, что выполняется неравенство

$$|||P_U(A - A_x)||| < \varepsilon.$$

Обозначение $A \overset{x}{\sim} A_x$.

Определение 3. Символом оператора A называется оператор-функция $A(x) : M \rightarrow \{A_x\}_{x \in M}$, определяемая его локальными представителями.

Нетрудно убедиться (см. [7]), что такое определение символа сохраняет все свойства символического исчисления. Именно, с точностью до компактного слагаемого

- произведению и сумме двух операторов соответствует произведение и сумма их локальных представителей;
- сопряженному оператору соответствует сопряженный его локального представителя;
- фредгольмову оператору соответствует фредгольмов локальный представитель.

Под оператором Фредгольма (фредгольмовым оператором) мы будем понимать линейный ограниченный оператор с конечным индексом. В [7] приведен следующий критерий фредгольмовости: *оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда символ $A(x)$ состоит из фредгольмовых операторов.*

Пусть задано семейство операторов $\{A_x\}_{x \in M}$.

Определение 4. Семейство $\{A_x\}_{x \in M}$ называется *локально непрерывным*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in M$ найдется такая окрестность $U \subset M$ точки x_0 , что для каждой точки $x \in U$ выполняется неравенство

$$|||P_U(A_x - A_{x_0})||| < \varepsilon.$$

Определение 5. Оператор A называется *огибающим оператором семейства* $\{A_x\}_{x \in M}$, если

$$A \overset{x}{\sim} A_x \quad \forall x \in M.$$

В [7] доказано также существование единственного (с точностью до компактного) огибающего оператора для любого *локально непрерывного* семейства $\{A_x\}_{x \in M}$.

2.2. Пересаживание. Пусть H'_1, H'_2 — гильбертовы пространства, состоящие из определенных на $\mathbb{R}^m$ функций, $\tilde{A} : H'_1 \rightarrow H'_2$ — линейный ограниченный оператор. Поскольку M — компактное многообразие, у каждой точки $x \in M$ имеется окрестность $U \ni x$ и диффеоморфизм $\omega : U \rightarrow D_x \subset \mathbb{R}^m$, $\omega(x) \equiv y$. Обозначим через S_ω следующий (локальный) оператор, действующий из H_k в H'_k , $k = 1, 2$. Для каждой функции $u \in H_k$, обнуляющейся вне U , имеем

$$(S_\omega u)(y) = \begin{cases} u(\omega^{-1}(y)), & y \in D_x, \\ 0, & y \notin D_x. \end{cases}$$

Следующее определение соответствует понятию квазиэквивалентности (см. [7]).

Определение 6. *Локальным представителем* оператора $A : H_1 \rightarrow H_2$ в точке $x \in M$ называется такой оператор $\tilde{A} : H'_1 \rightarrow H'_2$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_j точки $x \in U_j \subset M$, для которой выполняется следующее неравенство:

$$|||g_j A f_j - S_{\omega_j}^{-1} \hat{g}_j \tilde{A} \hat{f}_j S_{\omega_j}||| < \varepsilon$$

для любой пары гладких функций f_j, g_j с носителями в $\bar{U}_j$, $\hat{f}_j, \hat{g}_j$ — их запись в локальных координатах.

3. Эллиптичность и фредгольмовость. Отправляясь от вышеприведенных фактов и учитывая дальнейшие применения к псевдодифференциальным операторам, мы дадим следующее определение.

Определение 7. Оператор A называется *эллиптическим*, если его символ состоит из обратимых операторов.

Мы рассмотрим здесь случай, когда семейство $\{A_x\}_{x \in M}$ не является локально непрерывным в целом, однако сохраняет это свойство на отдельных (особых) подмногообразиях $M_k \subseteq M$ размерности $k = 0, 1, \dots, m$. Так, подмногообразие M_0 представляет собой конечное объединение различных точек границы ∂M многообразия M , $M_n \equiv M$ — это исходное многообразие, $M_{n-1} \equiv \partial M$, $M_k \subset M_{n-1}$, $k = 0, 1, \dots, n-2$. Пусть на M задано семейство $\{A_x\}_{x \in M}$. Мы будем предполагать, что это семейство локально непрерывно на $M \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} M_k$, причем существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_k \in M_k} A_x$, вообще говоря, не совпадающие с A_{x_k} , и локально непрерывно на каждом $M_k \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} M_j$ и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_j \in M_j} A_x$, вообще говоря, не совпадающие с A_{x_j} .

Пусть теперь A — оператор, символом которого является описанное семейство $\{A_x\}_{x \in M}$.

Теорема 1. *Эллиптический оператор всегда фредгольмов.*

С помощью разбиения единицы на многообразии M по эллиптическому символу $A(x)$ можно построить n операторов A_j согласно числу особых подмногообразий M_k , включая всю границу ∂M и само многообразие M .

Теорема 2. *Индекс фредгольмова оператора A представим формулой*

$$\text{Ind } A = \sum_{j=1}^n \text{Ind } A_j.$$

4. Псевдодифференциальные операторы на конических расслоениях. Опишем некоторые применения вышеописанной абстрактной схемы к исследованию псевдодифференциальных операторов и уравнений на многообразиях с негладким краем. Это удобнее сделать в контексте векторных расслоений (см. [6, 8]), поскольку возникают трудности с определением кокасательного расслоения в точках негладкости края.

4.1. Коническое расслоение. Под *коническим расслоением* E над M будем понимать расслоение в обычном смысле (см. [6, 8]) с базой M (многообразие), слоями $\mathbb{R}^m$ и локальной тривиализацией вида $U \times \mathbb{R}^m$, где окрестность U диффеоморфна некоторому конусу в m -мерном пространстве. Эти конусы будут разными в зависимости от расположения точки базы. В частности, это будут конусы вида $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}$, $W^k = \mathbb{R}^k \times C^{m-k}$ ($W^0 \equiv C^m$), где C^{m-k} — острый выпуклый конус в $\mathbb{R}^{m-k}$, не содержащий целой прямой.

4.2. Псевдодифференциальный оператор на коническом расслоении. Здесь мы приведем конструкцию псевдодифференциального оператора A на m -мерном компактном многообразии M с краем, которая определяется заданной функцией $A(x, \xi)$, $(x, \xi) \in E$.

Будем предполагать, что $A(x, \xi)$ непрерывно дифференцируема по $(x, \xi) \in E$ и удовлетворяет условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |a(x, \xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha, \quad (1)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *порядком оператора*. Под $a(x, \xi)$, $(x, \xi) \in U \times \mathbb{R}^m$, здесь понимается символ $A(x, \xi)$, $(x, \xi) \in E$, записанный в локальных координатах. Порождающую функцию $A(x, \xi)$, определенную на коническом расслоении E , будем называть *классическим символом* оператора, и говорить, что классический символ *эллиптический*, если $A(x, \xi) \neq 0$ для всех $(x, \xi) \in E$.

На крае ∂M многообразия M выделены гладкие подмногообразия M_k (особенности) размерности $0 \leq k \leq m - 1$. Локальный представитель оператора A в точке $x_0 \in M$ на карте $U \ni x_0$ определяется формулой

$$(A_{x_0}u)(x) = \int_{D_{x_0}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\xi \cdot (x-y)} a(x_0, \xi) u(y) d\xi dy, \quad x \in D_{x_0}, \quad (2)$$

и структура канонической области D_{x_0} имеет различный вид в зависимости от расположения точки x_0 на многообразии M . Варианты канонических областей D_{x_0} : $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}$, $W^k = \mathbb{R}^k \times C^{m-k}$, где C^{m-k} — острый выпуклый конус в $\mathbb{R}^{m-k}$.

Определение 8. Семейство $\{A_x\}$ операторов (2) называется *символом* псевдодифференциального оператора A .

По заданному символу конструируется сам псевдодифференциальный оператор.

Если M — компактное многообразие, то на нем существует специальное *разбиение единицы* (см. [1, 6]). Это означает, что для любого конечного открытого покрытия $\{U_j\}_{j=1}^k$ многообразия M найдется такая система функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^k$, $\varphi_j(x) \in C^\infty(M)$, что

- (i) $0 \leq \varphi_j(x) \leq 1$,
- (ii) $\text{supp } \varphi_j \subset U_j$,
- (iii) $\sum_{j=1}^k \varphi_j(x) = 1$.

Таким образом, имеем

$$f(x) = \sum_{j=1}^k \varphi_j(x) f(x)$$

для любой функции f , определенной на M .

На многообразии M зафиксируем два конечных покрытия и два разбиения единицы, соответствующие этим покрытиям, $\{U_j, f_j\}_{j=1}^n$ и $\{V_j, g_j\}_{j=1}^n$, так что $\bar{U}_j \subset V_j$.

Определение 9. Псевдодифференциальным оператором A на многообразии M называется оператор, представимый в виде

$$A = \sum_{j=1}^n S_{\omega_j^{-1}} \hat{f}_j \cdot \tilde{A}_{x_j} \cdot \hat{g}_j S_{\omega_j} + T,$$

где $T : H_1 \rightarrow H_2$ — компактный оператор, $x_j \in U_j$, $\tilde{A}_{x_j}$ — символ из семейства (2) в точке x_j .

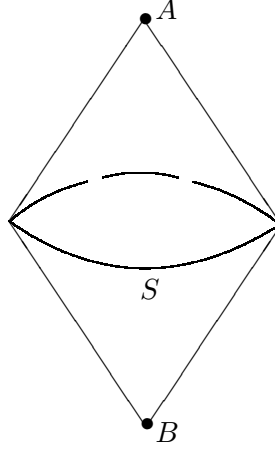


Рис. 1. Иллюстрация к теореме 2

Замечание 1. Определение 9 не зависит от выбора атласа, разбиения единицы и локальной системы координат в том смысле, что при такой замене к локальному представителю может лишь добавиться компактный оператор; это многократно встречалось ранее (см. [6, 7, 9]).

Оператор A с символом, удовлетворяющим условию (1), удобно рассматривать в пространствах Соболева—Слободецкого $H^s(M)$ (см. [9]), где в качестве их локальных вариантов будут фигурировать пространства $H^s(D_{x_0})$. Это пространство $H^s(M)$ строится с помощью разбиения единицы (см. [9]), и $A : H^s(M) \rightarrow H^{s-\alpha}(M)$ оказывается линейным ограниченным оператором локального типа.

Пример 1. В качестве иллюстрации к теореме 2 и определению 7 опишем структуру псевдодифференциального оператора на простом многообразии с негладкой границей, изображенном на рис. 1.

Оператор, определенный на таком многообразии локальными формулами (2), «склеивается» в пять различных операторов: одна огибающая A_1 по внутренним точкам «волчка», вторая огибающая A_2 — по точкам гладкости границы, третья огибающая A_3 — по кромке ребра, четвертая и пятая A_4, A_5 — отдельные операторы, соответствующие коническим точкам. Чтобы описать условия фредгольмовости, приходится предварительно выяснять условия фредгольмовости (в двух последних случаях — обратимости) всех пяти операторов.

5. Локальные индексы и фредгольмовость. Для того, чтобы сформулировать результат о фредгольмовости эллиптического (в смысле определения 7) псевдодифференциального оператора, необходимо ввести некоторые дополнительные характеристики классического символа эллиптического псевдодифференциального оператора (см. [1, 2]).

Обозначим символом $\overset{*}{C}^{m-k}$ сопряженный конус для C^{m-k} :

$$\overset{*}{C}^{m-k} = \{x \in \mathbb{R}^m : x \cdot y > 0 \ \forall y \in C^{m-k}\},$$

$T(\pm \overset{*}{C}^{m-k})$ обозначает радиальную трубчатую область над конусом $\pm \overset{*}{C}^{m-k}$, т.е. область многомерного комплексного пространства $\mathbb{C}^m$ вида $\mathbb{R}^m \pm \overset{*}{C}^{m-k}$.

Пусть функция $a(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяет условию (1). Введем обозначения $\xi = (\xi'', \xi')$, $\xi'' = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_m)$.

Определение 10. k -Волновой факторизацией функции $a(\xi)$ относительно конуса C^{m-k} называется его представление в виде

$$a(\xi) = a_{\neq}(\xi)a_{=}(\xi),$$

где сомножители $a_{\neq}(\xi)$, $a_{=}(\xi)$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $a_{\neq}(\xi)$, $a_{=}(\xi)$ определены для всех значений $\xi \in \mathbb{R}^m$, кроме, возможно, точек вида $\mathbb{R}^k \times \partial(\overset{*}{C}^{m-k} \cup (-\overset{*}{C}^{m-k}))$;
- 2) $a_{\neq}(\xi)$, $a_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(\overset{*}{C}^{m-k})$, $T(-\overset{*}{C}^{m-k})$ при почти всех $\xi'' \in \mathbb{R}^k$ соответственно, для которых справедливы оценки

$$|a_{\neq}^{\pm 1}(\xi'', \xi' + i\tau)| \leq c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm \varkappa_k},$$

$$|a_{=}^{\pm 1}(\xi'', \xi' - i\tau)| \leq c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha - \varkappa_k)}$$

для всех $\tau \in \overset{*}{C}^{m-k}$.

Число $\varkappa_k \in \mathbb{R}$ называется *индексом k -волновой факторизации*.

6. Эллиптичность, фредгольмовость и краевые задачи. Предположим, что символ оператора A представляет собой локально непрерывное на M_k , $k = 0, 1, \dots, m$, согласованное семейство операторов. В частности, это всегда справедливо, если функция $A(x, \xi)$, определенная на коническом расслоении, является непрерывно дифференцируемой вплоть до границы. Тогда (теорема об огибающей; см. [7]) по операторному символу (2) можно построить n операторов A_k , и в случае фредгольмовости каждого из них, исходный оператор также будет фредгольмов с индексом, предписанным теоремой 2.

Обозначим через $\varkappa_{n-1}(x)$ индекс факторизации функции $A(x, \xi)$ в точке $x \in \partial M \setminus \bigcup_{k=0}^{m-2} M_k$ (см. [9]), $\varkappa_k(x)$ — индексы k -волновой факторизации относительно конуса C_x^{m-k} в точках $x \in M_k$, $k = 0, 1, \dots, n-2$, и предположим, что функции $\varkappa_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, продолжаются по непрерывности на $\overline{M}_k$. Последнее требование связано с тем, что возможны ситуации, когда $M_k \cap M_{k-1} \neq \emptyset$.

Замечание 2. Аналогично [9] в силу единственности волновой факторизации (см. [2]) можно убедиться, что функции $\varkappa_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, не зависят от выбора локальной системы координат.

Теорема 3. Предположим, что классический эллиптический символ $A(x, \xi)$ допускает k -волновую факторизацию относительно конусов C^{m-k} с индексами $\varkappa_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-2$, удовлетворяющими условию

$$|\varkappa_k(x) - s| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in M_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (3)$$

Тогда оператор $A : H^s(M) \rightarrow H^{s-\alpha}(M)$ фредгольмов.

Замечание 3. Если эллиптичность нарушается на подмногообразиях M_k , рассматриваются модификации оператора A с привлечением граничных или кограничных операторов (см. [2, 3]). В частности, это происходит, когда нарушается одно из условий (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В. Б. Регуляризация многомерных сингулярных интегральных уравнений в негладких областях // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1998. — 59. — С. 73–105.
2. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — М.: УРСС, 2010.
3. Васильев В. Б. Модельные эллиптические краевые задачи для псевдодифференциальных уравнений в канонических негладких областях // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2016. — 31. — С. 3–16.
4. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. — М.: Наука, 1991.
5. Пламеневский Б. А. Разрешимость алгебры псевдодифференциальных операторов с кусочно гладкими коэффициентами на гладком многообразии // Алгебра и анализ. — 2009. — 21, № 2. — С. 214–263.
6. Сили Р. Т. Интегродифференциальные операторы на векторных расслоениях // Математика. — 1968. — 11, № 2. — С. 57–97.

7. *Симоненко И. Б.* Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих. — Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2007.
8. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. — М.: Мир, 1970.
9. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
10. *Dynin A. S.* Inversion problem for singular integral operators: C^* -approach// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1978. — 75. — P. 4668–4670.
11. *Kottke C., Melrose R. B.* Generalized blow-up of corners and fiber products// Trans. Am. Math. Soc. — 2015. — 367, № 1. — P. 651–705.
12. *Nazaikinskii V., Schulze B. W., Sternin B.* The localization problem in index theory of elliptic operators. Pseudo-Differential Operators. Theory and Applications. — Basel: Birkhäuser, 2014.
13. *Nistor V.* Analysis on singular spaces: Lie manifolds and operator algebras// J. Geom. Phys. — 2016. — 105. — P. 75–101.
14. *Schulze B. W., Sternin B., Shatalov V.* Differential Equations on Singular Manifolds: Semiclassical Theory and Operator Algebras. — Berlin: Wiley, 1998.
15. *Vasilyev V. B.* Asymptotical analysis of singularities for pseudo differential equations in canonical non-smooth domains// in: Integral Methods in Science and Engineering. Computational and Analytic Aspects (*Constanda C., Harris P. J.*, eds.). — Boston: Birkhäuser, 2011. — P. 379–390.

Васильев Владимир Борисович

Белгородский национальный исследовательский университет

E-mail: vbv57@inbox.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 33–44
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-33-44

УДК 517.9

БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ АРГУМЕНТОМ

© 2019 г. А. М. КОВАЛЕВА

Аннотация. Рассмотрена периодическая краевая задача для одного уравнения с отклоняющимся пространственным аргументом. Данное уравнение описывает фазу световой волны в световых резонаторах с распределенной обратной связью. Оптические системы такого типа используются в компьютерных технологиях и в исследовании лазерных пучков. Поставленная краевая задача рассматривалась при двух значениях пространственного отклонения. В работе рассмотрен ряд бифуркационных задач коразмерностей 1 и 2. Для их решения использовались такие методы исследования динамических систем, как метод нормальных форм Пуанкаре—Дюлака, метод интегральных многообразий и асимптотические формулы. Изучен вопрос об устойчивости ряда однородных состояний равновесий. Получены асимптотические формулы пространственно неоднородных решений и условия их устойчивости.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, периодическая краевая задача, устойчивость, бифуркация, асимптотика, световой резонатор.

BIFURCATIONS OF SOLUTIONS TO EQUATIONS WITH DEVIATING SPATIAL ARGUMENTS

© 2019 А. М. KOVALEVA

ABSTRACT. A periodic boundary-value problem for an equation with deviating spatial argument is considered. This equation describes the phase of a light wave in light resonators with distributed feedback. Optical systems of this type are used in computer technologies and in the study of laser beams. The boundary-value problem was considered for two values of spatial deviations. In the work, bifurcation problems of codimensions 1 and 2 were analyzed by various methods of studying dynamical systems, for example, the method of normal Poincaré–Dulac forms, the method of integral manifolds, and asymptotic formulas. The problem on the stability of certain homogeneous equilibrium states is examined. Asymptotic formulas for spatially inhomogeneous solutions and conditions for their stability are obtained.

Keywords and phrases: functional-differential equation, periodic boundary-value problem, stability, bifurcation, asymptotics, light resonator.

AMS Subject Classification: 34K18, 34K21, 39A28

1. Введение. В работе рассматривается одномерная по пространству модель, описывающая фазу световой волны в световых резонаторах с распределенной обратной связью. Такие оптические системы используются в компьютерных технологиях и в исследовании лазерных пучков:

$$u_t + u = du_{xx} + K(1 + \gamma \cos u_h). \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00672).

В данной модели $u(t, x)$ — фаза световой волны, h — угол поворота поля на контуре обратной связи, причем $u_h = u(t, x + h)$, $K > 0$ — коэффициент нелинейности, зависящий от интенсивности входного поля, $d > 0$ — коэффициент диффузии, $\gamma \in (0, 1)$ — видность интенсивности картины.

Дополним задачу периодическим краевым условием

$$u(t, x) = u(t, x + 2\pi) \quad (2)$$

и начальным условием

$$u(0, x) = f(x). \quad (3)$$

Пусть $f(x) \in Q_2(\delta)$, где $Q_2(\delta)$ — достаточно малый шар гильбертова пространства $\mathbb{H}_2^2$ (пространства Соболева 2π -периодических функций, имеющих интегрируемые с квадратом обобщенные производные до второго порядка включительно). Такое условие позволяет утверждать, что поставленная смешанная задача (1)–(3) локально корректно разрешима (см. [7, 13]).

Краевая задача (1), (2) изучалась в [2, 3, 10–12], но при иных предположениях и в иной постановке. Так, например, в [2, 3, 10] рассматривался случай, когда коэффициент диффузии мал, что приводит к сингулярно возмущенному уравнению параболического типа. Для изучения такого варианта был использован метод квазинормальных форм. В [11, 12] изучался регулярный случай (d — величина порядка 1), но в них авторы ограничились изучением некоторых вариантов, при которых реализуются условия бифуркационной теоремы Андронова—Хопфа (см. [1, 4, 6, 8, 9]). В частности, в указанных работах не изучались бифуркационные задачи коразмерности 2.

2. Линейный анализ. Обозначим через a состояния равновесия краевой задачи (1), (2), т.е. $u = a = \text{const}$. Следовательно, a можно найти как корни уравнения

$$a = K(1 + \gamma \cos a). \quad (4)$$

Уравнение (4) при всех допустимых K и γ имеет по крайней мере один корень $a > 0$, но может иметь и большее их число. При $K = \pi/2 + \pi m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, оно имеет счетный набор корней

$$a_m = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что в силу положительности K корни a_m тоже могут быть только положительными.

Будем рассматривать два случая для выбора таких корней (состояний равновесия):

$$(1) \quad a_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$(2) \quad a_p = \frac{3\pi}{2} + 2\pi p,$$

где $k, p = 0, 1, 2, \dots$, т.е. состояния равновесия a_m разделим на два типа: a_k и a_p .

Далее будем изучать окрестность таких состояний равновесия и, в частности, вопрос об их устойчивости в смысле нормы пространства начальных условий $\mathbb{H}_2^2$ для краевой задачи (1), (2).

Положим $u(t, x) = a_m + v(t, x)$, $m = 0, 1, 2, \dots$. В результате получим вспомогательную краевую задачу

$$v_t = dv_{xx} - v + b_m \left(v_h - \frac{v_h^3}{3!} + \frac{v_h^5}{5!} + \dots \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$v(t, x) = v(t, x + 2\pi), \quad (6)$$

где $v = v(t, x)$, $v_h = v(t, x + h)$, $b_m = K\gamma \sin a_m$, а точками обозначены члены тейлоровского разложения функции $\cos(v_h + a)$, имеющие более высокий порядок малости по сравнению с выписанными ($o(v_h^3)$). Сразу отметим, что $b_m = \beta = K\gamma > 0$, если $a_m = a_k$, и $b_m = -\beta$, если $a_m = a_p$.

Изучим вопрос об устойчивости нулевого решения краевой задачи (5), (6). Для этого рассмотрим ее линеаризованный вариант. В зависимости от выбора состояния равновесия, мы получаем два типа таких задач, которые целесообразно рассмотреть отдельно.

При выборе состояний равновесия первого типа (a_k) получим следующую краевую задачу:

$$v_t = A_1(\beta)v = dv_{xx} - v - \beta v_h, \quad \beta = K\gamma > 0, \quad (7)$$

$$v(t, x) = v(t, x + 2\pi). \quad (8)$$

Во втором случае $(a = a_p)$ получим краевую задачу

$$v_t = A_2(\beta)v = dv_{xx} - v + \beta v_h, \quad \beta = K\gamma > 0, \quad (9)$$

$$v(t, x) = v(t, x + 2\pi). \quad (10)$$

Вопрос об устойчивости решений краевых задач (7), (8) и (9), (10) решается после нахождения собственных значений линейных дифференциальных операторов $A_1(\beta)$ и $A_2(\beta)$. Функции $\exp(inx)$, $n \in \mathbb{Z}$ являются собственными функциями обоих операторов.

Нетрудно убедиться, что оператор $A_1(\beta)$ имеет собственные значения

$$\lambda_{n,1}(\beta) = -dn^2 - 1 - \beta(\cos nh + i \sin nh),$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{n,1}(\beta) = -dn^2 - 1 - \beta \cos nh, \quad \operatorname{Im} \lambda_{n,1}(\beta) = -\beta \sin nh.$$

Во втором варианте, т.е. для $A_2(\beta)$, имеем

$$\lambda_{n,2}(\beta) = -dn^2 - 1 + \beta(\cos nh + i \sin nh),$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{n,2}(\beta) = -dn^2 - 1 + \beta \cos nh, \quad \operatorname{Im} \lambda_{n,2}(\beta) = \beta \sin nh.$$

Напомним, что решения краевой задачи (7), (8) (соответственно, (9), (10)) асимптотически устойчивы, если $\operatorname{Re} \lambda_{n,1}(\beta) < 0$ (соответственно, $\operatorname{Re} \lambda_{n,2}(\beta) < 0$), $n = 0, 1, 2, \dots$. При реализации указанного условия нулевое состояние равновесия нелинейной краевой задачи (5), (6) будет асимптотически устойчивым, а если $\operatorname{Re} \lambda_{n_0,1}(\beta) > 0$ (соответственно, $\operatorname{Re} \lambda_{n_0,2}(\beta) > 0$) при некотором $n = n_0$ — то неустойчивым. Наконец, пусть $\operatorname{Re} \lambda_{s_j,1}(\beta) = 0$ (соответственно, $\operatorname{Re} \lambda_{s_j,2}(\beta) = 0$) при некоторых $n = s_1, s_2, \dots, s_l$, а при остальных n все собственные числа оператора лежат в левой комплексной полуплоскости; тогда в задаче об устойчивости нулевого решения нелинейной краевой задачи реализуется критический случай. Далее будем изучать расположение комплексных чисел $\lambda_{n,1}(\beta)$ и $\lambda_{n,2}(\beta)$ на комплексной плоскости. Подчеркнем, что собственные значения $\lambda_{n,1}(\beta)$, $\lambda_{n,2}(\beta)$ также зависят и от h . В работе ограничимся анализом выбранных значений h : $h = \pi/4$, $h = \pi/3$.

Рассмотрим сначала вопрос об устойчивости состояний равновесия второго типа, т.е. рассмотрим вопрос об устойчивости состояния равновесия

$$a_p = \frac{3\pi}{2} + 2\pi p, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть сначала $h = \pi/4$. Нетрудно заметить, что $\operatorname{Re} \lambda_{n+8l,2}(\beta) < \operatorname{Re} \lambda_{k,2}(\beta)$, если $n = k + 8m$, $k, m = 1, 2, \dots$. Поэтому в данном случае достаточно проанализировать знак действительной части первых восьми собственных значений оператора $A_2(\beta)$. Очевидно,

$$\operatorname{Re} \lambda_{0,2}(\beta) = -1 + \beta, \quad \operatorname{Re} \lambda_{1,2}(\beta) = -d - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta, \quad \operatorname{Re} \lambda_{2,2}(\beta) = -4d - 1,$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{3,2}(\beta) = -9d - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta, \quad \operatorname{Re} \lambda_{4,2}(\beta) = -16d - 1 - \beta, \quad \operatorname{Re} \lambda_{5,2}(\beta) = -25d - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta,$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{6,2}(\beta) = -36d - 1, \quad \operatorname{Re} \lambda_{7,2}(\beta) = -49d - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta.$$

Сравнения этих действительных чисел показало, что при $\beta \in (0, 1)$ все они отрицательны, а при $\beta > 1$ по крайней мере одно из них ($\operatorname{Re} \lambda_{0,2}(\beta)$) положительно. Наконец, при $\beta = \beta_{\text{кр}} = 1$ и ему соответствует собственная функция $e_0 = 1$.

Аналогичная ситуация для оператора $A_2(\beta)$ реализуется при $h = \pi/3$. Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $h = \pi/4$ или $h = \pi/3$. Любое состояние равновесия $a_p = 3\pi/2 + 2\pi p$, $p = 0, 1, 2, \dots$, краевой задачи (1), (2) асимптотически устойчиво, если $\beta \in [0, 1)$, и неустойчиво при $\beta \in (1, \infty)$.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости состояний равновесия

$$a_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и, следовательно, изучим вопрос о расположении собственных значений оператора $A_1(\beta)$.

Пусть сначала $h = \pi/4$. Как и ранее, просто проверяется справедливость неравенства $\operatorname{Re} \lambda_{n+8l,1}(\beta) < \operatorname{Re} \lambda_{n,1}(\beta)$, если $l = 1, 2, \dots$. Поэтому интерес представляют лишь следующие числа:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_{0,1}(\beta) &= -1 - \beta, & \operatorname{Re} \lambda_{1,1}(\beta) &= -d - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta, & \operatorname{Re} \lambda_{2,1}(\beta) &= -4d - 1, \\ \operatorname{Re} \lambda_{3,1}(\beta) &= -9d - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta, & \operatorname{Re} \lambda_{4,1}(\beta) &= -16d - 1 + \beta, & \operatorname{Re} \lambda_{5,1}(\beta) &= -25d - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta, \\ \operatorname{Re} \lambda_{6,1}(\beta) &= -36d - 1, & \operatorname{Re} \lambda_{7,1}(\beta) &= -49d - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\operatorname{Re} \lambda_{k,1} < 0$ при $k = 0, 1, 2, 6, 7$ для всех значений параметров $\beta, d > 0$, а также, что $\operatorname{Re} \lambda_{5,1}(\beta) < \operatorname{Re} \lambda_{3,1}(\beta)$ для всех рассматриваемых β . Поэтому смена знака при наименьшем из возможных значений параметра β возможна лишь у $\operatorname{Re} \lambda_{k,1}$ при $k = 3, 4$.

Найдем наименьшее β , при котором $\operatorname{Re} \lambda_{3,1}, \operatorname{Re} \lambda_{4,1}$ могут обращаться в нуль:

$$\beta_{\min} = \min \{ \sqrt{2}(9d + 1), 16d + 1 \},$$

где $d > 0$. Следовательно, анализу подлежат неравенства

$$16d + 1 < \sqrt{2}(9d + 1), \quad 16d + 1 > \sqrt{2}(9d + 1).$$

Первое из них выполнено, если $d < (2 + 7\sqrt{2})/94$, а второе, напротив, если $d > (2 + 7\sqrt{2})/94$.

В первом случае смена устойчивости возможна при выборе собственных значений $\lambda_{4,1}$, а в следующем — собственных значений $\lambda_{3,1}$. Из этих построений вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть $h = \pi/4$, $\beta > 0$. Любое состояние равновесия

$$a_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

краевой задачи (1), (2) асимптотически устойчивы, если

$$\beta < \beta_* = \min \{ \sqrt{2}(9d + 1), 16d + 1 \}, \quad d > 0,$$

или в иной форме

$$\gamma < \gamma_{\text{кр}} = \frac{\beta_*}{\pi/2 + 2\pi k}.$$

Эти состояния равновесия неустойчивы, если $\beta > \beta_*$ ($\gamma > \gamma_{\text{кр}}$).

К формулировке результата уместно добавить, что при $\beta = \beta_*$ ($\gamma = \gamma_{\text{кр}}$) реализуется критический случай в задаче об устойчивости соответствующего состояния равновесия. Если $d < (2 + 7\sqrt{2})/94$, то оператор $A_1(\beta)$ имеет двукратное нулевое собственное значение, которому отвечают два собственных элемента $\exp(\pm 4ix)$. Если же $d > (2 + 7\sqrt{2})/94$, то оператор $A_1(\beta)$ имеет два чисто мнимых собственных значения $\pm i\sigma$, $\sigma = \beta\sqrt{2}/2$. Этим собственным значениям отвечают собственные функции $\exp(\pm 3ix)$. В данном случае потеря устойчивости происходит колебательным образом и возможна бифуркация цикла.

Наконец, при $d = d_* = (2 + 7\sqrt{2})/94$ и $\beta = \beta_* = 7(9 + 8\sqrt{2})/47$ реализуется критический случай коразмерности 2, когда на мнимой оси находятся пара $\pm i(7(16 + 9\sqrt{2}))/94$ и нулевое собственное число кратности 2. Им соответствуют собственные функции $\exp(\pm 3ix)$ и $\exp(\pm 4ix)$.

Теперь рассмотрим тот же вопрос при $h = \pi/3$. Справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 3. Любое состояние равновесия

$$a_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

краевой задачи (1), (2) в случае $h = \pi/3$ асимптотически устойчиво, если

$$\beta < \beta_* = \min \{8d + 2, 9d + 1\},$$

или в иной форме

$$\gamma < \gamma_{\text{кр}} = \frac{\beta_*}{\pi/2 + 2\pi k}.$$

Эти состояния равновесия неустойчивы, если $\beta > \beta_*$ ($\gamma > \gamma_{\text{кр}}$).

Отметим, что при $\gamma = \gamma_{\text{кр}}$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости соответствующего состояния равновесия. При $d < 1$ реализуется критический случай двукратного нулевого собственного значения с собственными функциями $\exp(\pm 3ix)$. При $d > 1$ имеет место критический случай пары чисто мнимых собственных значений $\pm i\beta\sqrt{3}/2$, соответствующих собственным функциям $\exp(\pm 2ix)$. Наконец, при $d = 1$, $\beta = 10$ реализуется критический случай коразмерности 2, когда спектру оператора $A_1(\beta)$ принадлежат двукратный нуль с собственными функциями $\exp(\pm 3ix)$ и пара чисто мнимых собственных значений $\pm 5i\sqrt{3}$, которые отвечают собственной функции $\exp(\pm 2ix)$.

3. Бифуркационная задача в случае пары чисто мнимых корней, близком к критическому. Такой критический случай, когда на мнимой оси может появиться пара простых чисто мнимых собственных значений, реализуется только для состояний равновесия первого типа, т.е. при рассмотрении состояний равновесия $a_k = \pi/2 + 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Напомним, что исследуемый критический случай при $h = \pi/4$ возникает на третьей моде ($n = 3$), т.е. собственные функции оператора $A_1(\beta)$ равны $\exp(\pm 3ix)$, а при $h = \pi/3$ — на второй моде (собственные функции $\exp(\pm 2ix)$).

Рассмотрим задачу (5), (6) при $\gamma = \gamma_{\text{кр}}(1 - \varkappa\varepsilon)$, $\varkappa = \pm 1$, $\varepsilon \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $s = \varepsilon t$:

$$v_t = dv_{xx} - v - a_k \gamma_{\text{кр}}(1 - \varkappa\varepsilon) \sin a_k \left(v_h - \frac{v_h^3}{3!} + \frac{v_h^5}{5!} + \dots \right), \quad (11)$$

$$v(t, x) = v(t, x + 2\pi). \quad (12)$$

Положим

$$A(\varepsilon) = A(\gamma_{\text{кр}}(1 - \varkappa\varepsilon)) = dv_{xx} - v - K\gamma_{\text{кр}}(1 - \varkappa\varepsilon) \sin a_k v_h.$$

Этот оператор имеет пару собственных значений $\lambda(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) \pm i\sigma(\varepsilon)$:

$$\tau(\varepsilon) = -dn^2 - 1 - K\gamma_{\text{кр}}(1 - \varkappa\varepsilon) \sin a_k \cos nh, \quad \sigma(\varepsilon) = -K\gamma_{\text{кр}}(1 - \varkappa\varepsilon) \sin a_k \sin nh.$$

Благодаря специальному выбору $\gamma_{\text{кр}}$ выполнено равенство $\tau(0) = 0$. Отметим, что $\sigma(0) \neq 0$ и

$$\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d\tau(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = K\gamma_{\text{кр}}\varkappa \sin a_k \cos nh \neq 0.$$

В результате несложно проверить (см. [1, 9]), что реализуются условия применимости теоремы Андронова—Хопфа. Следовательно, анализ структуры окрестности нулевого состояния равновесия может быть сведен к анализу нормальной формы Пуанкаре—Дюлака (см. [8, 9]).

Будем искать решения краевой задачи (11), (12), которые могут быть представлены в следующем виде:

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} v_1(t, x, s) + \varepsilon v_2(t, x, s) + \varepsilon^{3/2} v_3(t, x, s) + o(\varepsilon^{3/2}); \quad (13)$$

здесь $v_j(t, x, s)$, $j = 1, 2, \dots$, — достаточно гладкие функции, для которых выполнены следующие свойства:

- (i) $v_j(t, x + 2\pi, s) = v_j(t, x, s)$, $j = 1, 2, \dots$;
- (ii) $v_j(t + 2\pi/\sigma_n, x, s) = v_j(t, x, s)$, $j = 1, 2, \dots$, $\sigma_n = \operatorname{Im}(\lambda_{n,1})$;

(iii) для функций $v_k(t, x, s)$ при $k = 2, 3, \dots$ справедливы равенства

$$\frac{\sigma_n}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_n} \int_0^{2\pi} v_k(t, x, s) dx dt = \frac{\sigma_n}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_n} \int_0^{2\pi} v_k(t, x, s) \exp(\pm inx \pm i\sigma_n t) dx dt = 0.$$

Следуя алгоритму построения нормальной формы, подставим сумму (13) в нелинейное уравнение (11). Приравнявая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$ и ε , получаем две краевые задачи:

$$\begin{aligned} v_{1t} &= Bv_1 = dv_{1xx} - v_1 - a_k \sin a_k \gamma_{\text{кр}} v_{h1}, & v_1(t, x + 2\pi) &= v_1(t, x); \\ v_{2t} &= Bv_2, & v_2(t, x + 2\pi) &= v_2(t, x). \end{aligned}$$

Положим

$$v_1(t, x, s) = z(s) \exp(inx + i\sigma_n t) + \overline{z(s)} \exp(-inx - i\sigma_n t); \quad \sigma_n = \text{Im}(\lambda_{n,1}).$$

Краевая задача для $v_2(t, x, s)$ имеет нулевое решение. Следовательно, для определения v_3 получим краевую задачу

$$\begin{aligned} v_{3t} &= Bv_3 - v_{1s} + a_k \sin a_k \gamma_{\text{кр}} \left[\varkappa v_{h1} + \frac{1}{6} v_{h1}^3 \right] = Bv_3 + F(t, x, s), \\ v_3(t, x + 2\pi) &= v_3(t, x). \end{aligned} \tag{14}$$

Для построения нормальной формы воспользуемся условием разрешимости в классе периодических функций применительно к неоднородной краевой задаче (14):

$$\int_0^{2\pi/\sigma_n} \int_0^{2\pi} F(t, x, s) \exp(\pm inx \pm i\sigma_n t) dx dt = 0.$$

Применяя это условие к краевой задаче (14), получаем систему, которая является нормальной формой:

$$z' = a_k \sin a_k \gamma_{\text{кр}} \varkappa \exp(inh) z + \frac{1}{2} \sin a_k \gamma_{\text{кр}} \exp(inh) |z|^2 z. \tag{15}$$

Преобразуем нормальную форму (15), положив $z(s) = \rho(s) \exp(i\varphi(s))$, $\rho(s) > 0$. Введем обозначение $g = a_k \sin a_k \gamma_{\text{кр}} \cos nh$. После несложных вычислений нормальная форма принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \rho' = g \left(\varkappa \rho + \frac{1}{2} \rho^3 \right), \\ \varphi' = a_k \sin a_k \gamma_{\text{кр}} \sin nh \left(\varkappa + \frac{1}{2} \rho^2 \right). \end{cases} \tag{16}$$

Особую роль при анализе полученной нормальной формы (16) играет уравнение для амплитуды ρ . Оно имеет состояние равновесия S_0 : $\rho_0 = \sqrt{-2\varkappa}$, существующее при $\varkappa < 0$. Ему соответствует состояние равновесия системы (16): $\rho(s) = \sqrt{-2\varkappa}$, $\varphi(s) = \varphi_0$, где φ_0 — произвольная действительная постоянная. Стандартным образом определяется, что S_0 асимптотически устойчиво, когда $g < 0$, и неустойчиво при $g > 0$.

Теперь нужно определить знак величины g . Так как a_k , $\sin a_k$ и $\gamma_{\text{кр}}$ положительны в силу положительности K и выбора a_k , то $\text{sign } g = \text{sign } \cos nh$, а $\cos nh$ ($\cos 2\pi/3$ и $\cos 3\pi/4$) отрицателен, и, следовательно, $g < 0$.

Теперь сформулируем полученный результат.

Теорема 4. *Состояние равновесия S_0 дифференциального уравнения для ρ в (16) существует и асимптотически устойчиво при $\varkappa < 0$.*

Анализ нормальной формы (см. теорему 4) и результаты работ [4–6] приводят к следующему утверждению.

Теорема 5. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ рассмотренная краевая задача (5), (6) имеет решение с асимптотикой

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \sqrt{-2\kappa} (q + \bar{q}) + o(\varepsilon), \quad q = \exp(i\sigma_n t + inx + i\varphi_0), \quad \sigma_n = \operatorname{Im} \lambda_{n,1}, \quad \varphi_0 \in \mathbb{R}.$$

Это решение существует и асимптотически устойчиво, если $\kappa < 0$.

Следствие 1. Асимптотическая формула из теоремы 5 при $h = \pi/4$ приобретает следующий вид:

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \sqrt{2} \left(\exp(3ix - i(9d+1)t + i\varphi_0) + \exp(-3ix + i(9d+1)t - i\varphi_0) \right) + o(\varepsilon),$$

а при $h = \pi/3$ — вид

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \sqrt{2} \left(\exp(2ix - i\sqrt{3}(4d+1)t + i\varphi_0) + \exp(-2ix + i\sqrt{3}(4d+1)t - i\varphi_0) \right) + o(\varepsilon).$$

4. Критический случай двукратного нуля. Пусть реализуется критический случай коразмерности 1, когда на мнимой оси появляется пара нулевых собственных значений (см. леммы 2 и 3). Описанная ситуация, как и предыдущая, возникает только при рассмотрении оператора $A_1(\beta)$. Данный критический случай возникает при $n = 4$, если $h = \pi/4$, и при $n = 3$ для $h = \pi/3$.

В данной ситуации анализ бифуркационной задачи почти повторяет предыдущий раздел. В результате исследования рассматриваемого критического случая, можно сформулировать результат, схожий с теоремой 5. Отличие состоит в том, что этом разделе $\sigma_n = 0$ для всех n .

Приведем асимптотические формулы решений, полученных при анализе данной бифуркационной задачи.

Теорема 6. Асимптотическая формула для пространственно неоднородного состояния равновесия при $h = \pi/4$ имеет вид

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \sqrt{2} \left(\exp(4ix + i\varphi_0) + \exp(-4ix - i\varphi_0) \right) + o(\varepsilon), \quad \varphi_0 \in \mathbb{R},$$

а при $h = \pi/3$ — вид

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \sqrt{2} \left(\exp(3ix + i\varphi_0) + \exp(-3ix - i\varphi_0) \right) + o(\varepsilon), \quad \varphi_0 \in \mathbb{R}.$$

В каждом из отмеченных случаев краевая задача (5), (6) имеет однопараметрическое семейство пространственных состояний равновесия.

5. Критический случай коразмерности 2. Из линейного анализа вытекает, что такой критический случай реализуется только при рассмотрении состояний равновесия $a_k = \pi/2 + 2\pi m$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Если $h = \pi/4$, то оператор $A_1(\beta)$ при

$$\beta_{\text{кр}} = \frac{7(9 + 8\sqrt{2})}{47}, \quad d_{\text{кр}} = \frac{2 + 7\sqrt{2}}{94}$$

имеет пару чисто мнимых собственных значений и нуль кратности 2. Соответствующие им собственные функции имеют вид $\exp(\pm 3ix)$, $\exp(\pm 4ix)$.

При $h = \pi/3$, когда $d_{\text{кр}} = 1$, $\beta_{\text{кр}} = 10$, реализуется аналогичная ситуация, но на второй и третьей модах. В обоих случаях можно считать выбранной и соответствующую величину $\gamma_{\text{кр}}$.

Положим $d = d_{\text{кр}}(1 - \kappa_1 \varepsilon)$ и $\gamma = \gamma_{\text{кр}}(1 - \kappa_2 \varepsilon)$, где $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ произвольны, $\varepsilon \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $s = \varepsilon t$. Соответствующие моды обозначим ниже. В первом случае ($h = \pi/4$) имеем $m = 3$, а во втором ($h = \pi/3$) — $m = 2$. Также отметим, что для обоих пространственных отклонений имеет место равенство $\operatorname{Im} \lambda_{m+1,1} = \sigma_{m+1} = 0$:

$$v_t = d_{\text{кр}}(1 - \kappa_1 \varepsilon) v_{xx} - v - a_k \gamma_{\text{кр}}(1 - \kappa_2 \varepsilon) \sin a_k \left(v_h - \frac{v_h^3}{3!} + \frac{v_h^5}{5!} + \dots \right), \quad (17)$$

$$v(t, x) = v(t, x + 2\pi). \quad (18)$$

Найдем решения краевой задачи (17), (18), которые могут быть представлены в следующем виде:

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} v_1(t, x, s) + \varepsilon v_2(t, x, s) + \varepsilon^{3/2} v_3(t, x, s) + o(\varepsilon^{3/2}). \quad (19)$$

Как и в случае коразмерности 1, $v_j(t, x, s)$, $j = 1, 2, \dots$, — достаточно гладкие функции, для которых выполнен ряд свойств:

- (i) $v_j(t, x + 2\pi, s) = v_j(t, x, s)$, $j = 1, 2, \dots$;
- (ii) функции $v_j(t, x, s)$, $j = 1, 2, \dots$, являются периодическими по переменной t с периодом $2\pi/\sigma_m$, где $\sigma_m = \text{Im } \lambda_{m,1}$;
- (iii) для функций $v_k(t, x, s)$, $k = 2, 3, \dots$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_m}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_m} \int_0^{2\pi} v_k(t, x, s) dx dt &= \frac{\sigma_m}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_m} \int_0^{2\pi} v_k(t, x, s) \exp(\pm imx \pm i\sigma_m t) dx dt = 0, \\ \frac{\sigma_m}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_m} \int_0^{2\pi} v_k(t, x, s) \exp(\pm i(m+1)x) dx dt &= 0. \end{aligned}$$

Следуя алгоритму построения нормальной формы, подставим представление (19) в нелинейное уравнение (17). Приравнявая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$, имеем

$$v_{1t} = Bv_1 = d_{\text{кр}} v_{1xx} - v_1 - a_k \sin a_k \gamma_{\text{кр}} v_{h_1}, \quad v_1(t, x + 2\pi, s) = v_1(t, x, s). \quad (20)$$

Несложно проверить, что функции вида

$$\begin{aligned} v_1(t, x, s) &= z_1(s) \exp(imx + i\sigma_m t) + \overline{z_1(s)} \exp(-imx - i\sigma_m t) + \\ &+ z_2(s) \exp(i(m+1)x) + \overline{z_2(s)} \exp(-i(m+1)x); \quad \sigma_m = \text{Im } \lambda_{m,1}, \end{aligned}$$

являются решением краевой задачи (20).

Как и в предыдущем случае, $v_2 = 0$. При $\varepsilon^{1/2}$ получаем следующую краевую задачу:

$$v_{3t} = Bv_3 - v_{1s} - d_{\text{кр}} \varkappa_1 v_{1xx} + a_k \sin a_k \gamma_{\text{кр}} \left[\varkappa_2 v_{h_1} + \frac{1}{6} v_{h_1}^3 \right] = Bv_3 + F(t, x, s). \quad (21)$$

Условия разрешимости в классе периодических функций в данном случае будут иметь вид

$$\int_0^{2\pi/\sigma_m} \int_0^{2\pi} F(t, x, s) \exp(\pm imx \pm i\sigma_m t) dx dt = \int_0^{2\pi/\sigma_m} \int_0^{2\pi} F(t, x, s) \exp(\pm i(m+1)x) dx dt = 0.$$

Применяя это условие к (21), получаем систему, являющуюся нормальной формой:

$$\begin{cases} z_1' = z_1 \left(a_k \sin a_k \gamma_{\text{кр}} \varkappa_2 \exp(imh) + d_{\text{кр}} \varkappa_1 m^2 \right) + \frac{1}{2} \sin a_k \gamma_{\text{кр}} \exp(imh) \left[|z_1|^2 + 2|z_2|^2 \right] z_1, \\ z_2' = z_2 \left(a_k \sin a_k \gamma_{\text{кр}} \varkappa_2 \exp(i(m+1)h) + d_{\text{кр}} \varkappa_1 (m+1)^2 \right) + \\ + \frac{1}{2} \sin a_k \gamma_{\text{кр}} \exp(i(m+1)h) \left[|z_2|^2 + 2|z_1|^2 \right] z_2. \end{cases}$$

Преобразуем полученную нормальную форму, положив $z_1(s) = \rho_1(s) \exp(i\varphi_1(s))$, $z_2(s) = \rho_2(s) \exp(i\varphi_2(s))$. В результате нормальная форма принимает следующий вид

$$\rho_1' = g_1 \rho_1 + l_1 \rho_1 [\rho_1^2 + 2\rho_2^2], \quad \rho_2' = g_2 \rho_2 + l_2 \rho_2 [2\rho_1^2 + \rho_2^2], \quad (22)$$

$$\varphi_1' = q_1 + k_1 [\rho_1^2 + 2\rho_2^2], \quad \varphi_2' = q_2 + k_2 [2\rho_1^2 + \rho_2^2], \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= \nu \varkappa_2 \cos mh + d_{\text{кр}} \varkappa_1 m^2, & g_2 &= \nu \varkappa_2 \cos(m+1)h + d_{\text{кр}} \varkappa_1 (m+1)^2, \\ \nu &= a_k \sin a_k \gamma_{\text{кр}}, & l_1 &= \frac{1}{2} \nu \cos mh, & l_2 &= \frac{1}{2} \nu \cos(m+1)h, \\ q_1 &= \nu \varkappa_2 \sin mh, & q_2 &= \nu \varkappa_2 \sin(m+1)h, & k_1 &= \frac{1}{2} \nu \sin mh, & k_2 &= \frac{1}{2} \nu \sin(m+1)h. \end{aligned}$$

Уточним вид коэффициентов нормальной формы при $h = \pi/3$ и $h = \pi/4$. Приведем их вид для $h = \pi/3$:

$$\begin{aligned} \nu &= 10, & g_1 &= -5\varkappa_2 + 4\varkappa_1, & g_2 &= -10\varkappa_2 + 9\varkappa_1, & l_1 &= -5/2, & l_2 &= -5, \\ q_1 &= 5\sqrt{3}\varkappa_2, & q_2 &= 0, & k_1 &= 5\sqrt{3}/2, & k_2 &= 0. \end{aligned}$$

В свою очередь, при $h = \pi/4$ получим:

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{7}{94}(16 + 9\sqrt{2})\varkappa_2 + \frac{1}{94}(18 + 63\sqrt{2})\varkappa_1, & g_2 &= -\frac{7}{47}(9 + 8\sqrt{2})\varkappa_2 + \frac{8}{47}(2 + 7\sqrt{2})\varkappa_1, \\ \nu &= \frac{7}{47}(9 + 8\sqrt{2}), & l_1 &= -\frac{7}{188}(16 + 9\sqrt{2}), & l_2 &= -\frac{7}{94}(9 + 8\sqrt{2}), & q_1 &= \frac{7}{94}(16 + 9\sqrt{2})\varkappa_2, \\ q_2 &= 0, & k_1 &= \frac{7}{188}(16 + 9\sqrt{2}), & k_2 &= 0. \end{aligned}$$

Особую роль при анализе полученной системы дифференциальных уравнений (22), (23) играет замкнутая система для амплитуд (22). Она может иметь следующие нетривиальные состояния равновесия:

$$S_1: \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \sqrt{-\frac{g_2}{l_2}},$$

которое существует, если $g_2 l_2 < 0$;

$$S_2: \quad \rho_1 = \sqrt{-\frac{g_1}{l_1}}, \quad \rho_2 = 0,$$

существующее при $g_1 l_1 < 0$;

$$S_3: \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{g_1 l_2 - 2l_1 g_2}{3l_1 l_2}}, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{l_1 g_2 - 2g_1 l_2}{3l_1 l_2}},$$

которое существует, если подкоренные выражения положительны.

Учитывая, что в рассматриваемых случаях $l_1, l_2 < 0$ при возможных значениях параметров, можно отметить, что состояние равновесия S_1 существует, если $g_2 > 0$, а S_2 существует при $g_1 > 0$. Добавим, что состояние равновесия S_3 существует, если $a = g_2 l_1 - 2g_1 l_2 > 0$ и $b = g_1 l_2 - 2g_2 l_1 > 0$.

Пусть $\rho_1 = \eta_1$, $\rho_2 = \eta_2$ — координаты одного из состояний равновесия. Тогда вопрос об его устойчивости, как хорошо известно, определяется расположением собственных значений матрицы Якоби, вычисленной в точке $\rho_1 = \eta_1$, $\rho_2 = \eta_2$.

В случае состояния равновесия S_3 матрица Якоби имеет следующий вид:

$$J_3 = \begin{pmatrix} \frac{2b}{3l_2} & \frac{4\sqrt{ab}}{3l_2} \\ \frac{4\sqrt{ab}}{3l_1} & \frac{2a}{3l_1} \end{pmatrix};$$

при этом ее след и определитель отрицательны в силу положительности a , b и отрицательности l_1 и l_2 :

$$\text{tr } J_3 = \frac{2b}{3l_2} + \frac{2a}{3l_1} < 0, \quad \det J_3 = -\frac{4}{3} \cdot \frac{ab}{l_1 l_2}.$$

Напомним, что собственные значения матрицы J находятся из уравнения

$$\lambda^2 - \text{tr } J_3 \lambda + \det J_3 = 0.$$

Следовательно, согласно критерию Рауса—Гурвица состояние равновесия S_3 всегда неустойчиво.

Рассмотрим состояние равновесия S_1 . В этом случае соответствующая матрица J_1 имеет вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} g_1 - 2\frac{l_1 g_2}{l_2} & 0 \\ 0 & -2g_2 \end{pmatrix}.$$

Состояние равновесия S_1 является асимптотически устойчивым, если выполнено условие $g_1 - 2l_1 g_2 / l_2 < 0$. Рассуждая аналогично, несложно показать, что состояние равновесия S_2 асимптотически устойчиво, если $g_2 - 2l_2 g_1 / l_1 < 0$.

Отметим, что из существования состояния равновесия S_3 следует асимптотическая устойчивость состояний равновесия S_1 и S_2 . При отсутствии S_3 и наличии S_1 и S_2 одно из них асимптотически устойчиво, а второе неустойчиво.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.

1. Состояние равновесия S_1 существует, если $g_2 > 0$. Оно асимптотически устойчиво, если выполняется неравенство $g_1 - 2l_1 g_2 / l_2 < 0$, и неустойчиво, когда $g_1 - 2l_1 g_2 / l_2 > 0$.
2. Состояние равновесия S_2 существует, если $g_1 > 0$. Оно является асимптотически устойчивым, если $g_2 - 2l_2 g_1 / l_1 < 0$, и неустойчивым в противном случае.
3. Для существования состояния равновесия S_3 необходимо, чтобы выполнялись условия $g_1 l_2 - 2l_1 g_2 > 0$ и $l_1 g_2 - 2g_1 l_2 > 0$. Если это состояние равновесия существует, то оно неустойчиво.

Конкретизируем этот результат применительно к нашему выбору параметров задачи.

Следствие 2. Пусть $h = \pi/3$. Система дифференциальных уравнений (22) может иметь три нетривиальных состояния равновесия.

- (1) Состояние равновесия

$$S_1 : \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{9\kappa_1 - 10\kappa_2}{5}}$$

существует, если $9\kappa_1 - 10\kappa_2 > 0$, и является асимптотически устойчивым, когда $\kappa_2 < \kappa_1$.

- (2) Состояние равновесия

$$S_2 : \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{8\kappa_1 - 10\kappa_2}{5}}, \quad \rho_2 = 0$$

существует, если $4\kappa_1 - 5\kappa_2 > 0$, и является асимптотически устойчивым при выполнении условия $10\kappa_2 - 7\kappa_1 < 0$.

- (3) Если выполнены условия $\kappa_1 > \kappa_2$ и $7\kappa_1 - 10\kappa_2 > 0$, то существует неустойчивое состояние равновесия

$$S_3 : \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{5\kappa_1 - 5\kappa_2}{3}}, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{7\kappa_1 - 10\kappa_2}{6}}.$$

Следствие 3. Пусть $h = \pi/4$.

- (1) Состояние равновесия

$$S_1 : \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{16 - 8\sqrt{2}}{7}\kappa_1 - \kappa_2}$$

существует, если $(16 - 8\sqrt{2})\kappa_1 - 7\kappa_2 > 0$; при выполнении условия $7(288 + 209\sqrt{2})\kappa_2 < (1358 + 1369\sqrt{2})\kappa_1$ оно является асимптотически устойчивым.

- (2) Состояние равновесия

$$S_2 : \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{18(\sqrt{2} - 1)}{7}\kappa_1 - 2\kappa_2}, \quad \rho_2 = 0$$

существует при $18(\sqrt{2} - 1)\kappa_1 - 14\kappa_2 > 0$ и является асимптотически устойчивым, если выполнено условие $7(288 + 209\sqrt{2})\kappa_2 < 2(538 + 191\sqrt{2})\kappa_1$.

(3) Неустойчивое состояние равновесия S_3

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{(2716 + 2738\sqrt{2})\kappa_1 - 14(288 + 209\sqrt{2})\kappa_2}{6048 + 4389\sqrt{2}}},$$

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{4(538 + 191\sqrt{2})\kappa_1 - 14(288 + 209\sqrt{2})\kappa_2}{6048 + 4389\sqrt{2}}}$$

существует, когда асимптотически устойчивы состояния равновесия S_1 и S_2 .

Каждому состоянию равновесия S_1, S_2, S_3 с координатами $\rho_1 = \eta_1, \rho_2 = \eta_2$ соответствует решение системы (22), (23):

$$\begin{aligned} \rho_1 = \eta_1, \quad \varphi_1 &= B\left(q_1 + k_1[2\rho_2^2 + \rho_1^2]\right)s + \varphi_1, \quad \varphi_1 \in \mathbb{R}, \\ \rho_2 = \eta_2, \quad \varphi_2 &= B\left(q_2 + k_2[2\rho_1^2 + \rho_2^2]\right)s + \varphi_2, \quad \varphi_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Из приведенных теорем и результатов работ [4, 6] вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 8. Пусть выполнены условия существования состояния равновесия (S_1, S_2 или S_3). Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (17), (18) имеет решения с асимптотикой

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\eta_1(p_1 + \overline{p_1}) + \varepsilon^{1/2}\eta_2(p_2 + \overline{p_2}) + o(\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= \exp\left(i(\sigma_m + \varepsilon(q_1 + k_1\psi_1))t + imx + i\varphi_1\right), \quad \psi_1 = 2\eta_2^2 + \eta_1^2, \quad \sigma_m = \text{Im}(\lambda_{m,1}), \\ p_2 &= \exp\left(i\varepsilon(q_2 + k_2\psi_2)t + i(m+1)x + i\varphi_2\right), \quad \psi_2 = 2\eta_1^2 + \eta_2^2, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Эти решения наследуют устойчивость соответствующего состояния равновесия системы (22).

6. Заключение. Среди рассмотренных состояний равновесия только состояния равновесия $a_k = \pi/2 + 2\pi k, k = 0, 1, \dots$, приводят к содержательным бифуркационным задачам, когда из состояния равновесия могут бифурцировать пространственно неоднородные решения, т.е. решения, которые зависят существенным образом от x . Для этих однородных состояний равновесия могут реализовываться критические случаи трех типов ($\gamma = \gamma_{\text{кр}}$). Первый из них таков: на мнимой оси находится одна простая пара чисто мнимых собственных значений. В этом случае бифурцирует периодическое по t решение, которое также зависит от x . Для второго типа имеем критический случай двукратного нулевого собственного значения спектра устойчивости. Изучение соответствующей бифуркационной задачи показало возможность появления пространственно неоднородных состояний равновесия.

В работе изучена и бифуркационная краевая задача коразмерности 2, когда на мнимой оси находятся пара чисто мнимых собственных значений и двукратное нулевое собственное значение. В этом случае получено двухпараметрическое семейство периодических по t решений, которые существенным образом зависят и от x .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002.
2. Кащенко С. А. Асимптотика пространственно неоднородных структур в когерентных оптических системах // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1991. — 31, № 3. — С. 467–473.
3. Кащенко И. С., Кащенко С. А. Быстро осциллирующие пространственно неоднородные структуры в когерентных нелинейно-оптических системах // Докл. РАН. — 2010. — 435, № 1. — С. 14–17.
4. Колесов А. Ю., Куликов А. Н. Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений. — Ярославль: ЯрГУ, 2005.

5. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 6. — С. 738–753.
6. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. — М.: Физматлит, 2004.
7. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
8. Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве// в кн.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль: ЯрГУ, 1976. — С. 114–129.
9. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
10. Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005.
11. Разгулин А. В. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1993. — 33, № 1. — С. 69–80.
12. Скубачевский А. Л. О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения// Диффер. уравн. — 1998. — 34, № 10. — С. 1394–1401.
13. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1967. — 10. — С. 297–350.

Ковалева Анастасия Михайловна

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: anastasia2kovaleva@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 45–52
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-45-52

УДК 517.929

БИФУРКАЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ У КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И СЦЕНАРИЙ ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ

© 2019 г. А. Н. КУЛИКОВ

Аннотация. В работе рассмотрены квазилинейные дифференциальные уравнения второго порядка в сепарабельном гильбертовом пространстве, для которых может быть реализован известный сценарий Ландау—Хопфа перехода к турбулентности. Показано, что при увеличении управляющего параметра возникают шаг за шагом инвариантные торы, возрастающей размерности. При этом притягивающим оказывается инвариантный тор наибольшей размерности из возможных. Результаты получены при помощи методов качественной теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий: метода интегральных многообразий, аппарата теории нормальных форм, а также асимптотических методов анализа динамических систем.

Ключевые слова: квазилинейное дифференциальное уравнение, гильбертово пространство, устойчивость, бифуркация, нормальная форма, сценарий Ландау—Хопфа.

BIFURCATIONS OF INVARIANT TORI IN SECOND-ORDER QUASILINEAR EVOLUTION EQUATIONS IN HILBERT SPACES AND SCENARIOS OF TRANSITION TO TURBULENCE

© 2019 A. N. KULIKOV

ABSTRACT. In this paper, we consider second-order quasilinear differential equations in a separable Hilbert space for which the well-known Landau–Hopf scenario of transition to turbulence can be realized. We prove increasing of the control parameter leads to the consecutive appearance of invariant tori of increasing dimensions. In this case, the invariant torus of the largest possible dimension appears to be attractive. The results are obtained by using methods of the qualitative theory of dynamical systems with an infinite-dimensional space of initial conditions: the method of integral manifolds, the theory of normal forms, and also asymptotic methods of analysis of dynamical systems.

Keywords and phrases: quasilinear differential equation, Hilbert space, stability, bifurcation, normal form, Landau–Hopf scenario.

AMS Subject Classification: 37L10, 37L25, 37N15

1. Введение. В основополагающих работах [11, 12, 17] был предложен сценарий перехода к турбулентности как каскада бифуркаций торов возрастающей размерности. Некоторые примеры реализации такого сценария были предложены в [6–10, 12, 17].

В [7–10] был реализован предложенный Ф. Такенсом план (см. [1]) как каскада бифуркаций в цепочке осцилляторов, связанных только параметрами, в каждом из которых может реализоваться бифуркация Андронова—Хопфа. Ниже будет рассмотрен класс квазилинейных дифференциальных уравнений в полном сепарабельном гильбертовом пространстве. Анализ уравнений из данного класса абстрактных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве позволяет проследить за цепочкой бифуркаций инвариантных торов и следовательно показать, что сценарий Ландау—Хопфа реализуем. Рассматриваемый класс абстрактных дифференциальных уравнений включает в себя краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, имеющие приложения в теории упругой устойчивости. К таким задачам приводит уравнение, описывающее колебания трубы под воздействием потока протекающей в ней жидкости или газа (см. [9, 10, 16]). Аналогичное уравнение используется при описании колебаний тела вращения в потоке газа (см. [9, 10]). Близкие задачи возникают при анализе математической модели, известной под названием «мультипликатор-акселератор», если при этом учесть пространственные эффекты (см. [6]).

В настоящей работе абстрактные дифференциальные уравнения исследуются с использованием таких классических методов анализа динамических систем, как метод интегральных (инвариантных) многообразий, аппарат теории нормальных форм Пуанкаре—Дюлака, а также асимптотических методов анализа динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Центральное место занимает сведение анализа динамики решений рассматриваемых эволюционных уравнений к изучению систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка — нормальных форм.

Обоснование результатов базируется на результатах работ [4, 5]; в первую очередь, речь идет о теореме о сохранении инвариантных торов при возмущениях.

2. Постановка задачи. В действительном полном сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$u_{tt} + 2\varepsilon(g_1 u_t + g_2 A^2 u_t) + A^2 u + 2\varepsilon B_1 u_t + 2\varepsilon b(c)Au = -2\varepsilon[a_1(B_2 u, B_2 u) - a_2(B_2 u_t, B_2 u)]Au, \quad (1)$$

где $u = u(t)$ — функция со значениями в гильбертовом пространстве, ε — малый неотрицательный параметр, т.е. $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, $a_1, a_2, g_1, g_2 \geq 0$, $b = b(c) \in \mathbb{R}$ и зависит от основного управляющего (бифуркационного) параметра $c \geq 0$, $b(0) = 0$. Наконец, через A , A^2 , B_1 , B_2 обозначены линейные замкнутые операторы с плотными в H областями определения H_A , H_{A^2} , H_{B_1} , H_{B_2} . Будем считать, что эти линейные операторы (ЛО) обладают следующими свойствами:

1. Оператор A симметричен и положительно определен, т.е. при любых $v_1, v_2 \in H_A$ справедливо равенство $(Av_1, v_2) = (v_1, Av_2)$ и неравенство $(Av_1, v_1) \geq \gamma_0^2(v_1, v_1)$, где $\gamma_0 > 0$, а через $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в H .
2. Оператор A имеет счетный набор простых положительных собственных значений $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < \dots$. Им соответствуют собственные элементы h_j , $j = 1, 2, \dots$. Будем считать, что семейство собственных элементов образует полную ортонормированную систему в сепарабельном гильбертовом пространстве H . В частности, $(h_j, h_k) = 0$, $j \neq k$; $(h_k, h_k) = 1$.
3. Оператор iA является производящим оператором группы линейных ограниченных операторов в комплексном расширении H ($w \in H_c$, если $w = u + iv$, $u, v \in H$).
4. Операторы B_1 , B_2 подчинены оператору A и, следовательно, $H_A \subseteq H_{B_1}, H_{B_2}$ ($H_{A^2} \subseteq H_A$).
5. Семейство элементов $q_k = B_2 h_k$ образует ортогональную систему в H .

Сформулированные предложения носят характер общности положений. Их наличие гарантируют общие свойства решений уравнения (1). Если уравнение (1) дополнить начальными условиями

$$u(0) = u_0 \in H_{A^2}, \quad u_t(0) = \dot{u}_0 \in H_A, \quad (2)$$

то при достаточно малой величине ε_0 ($\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$) задача Коши корректно разрешима на отрезке $[-T(\varepsilon_0), T(\varepsilon_0)]$, $T(\varepsilon_0) > 0$, и $\lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} T(\varepsilon_0) = \infty$, если $\|u_0\|_{H_{A^2}} \leq r_0$, $\|\dot{u}_0\|_{H_A} \leq r_0$, где r_0 — некоторая положительная постоянная. При этом, конечно, $T(\varepsilon_0) = T(\varepsilon_0, r_0)$, т.е., вообще говоря, зависит от r_0 . Справедливость последнего замечания вытекает из результатов работ [14, 15].

Замечание 1. Некоторые из предположений 1–5 могут быть изменены и даже усилены, но такой вариант условий включает в себя многие прикладные задачи теории аэрогидроупругости, а также макроэкономики (см., например, [3]). Некоторые более актуальные предположения будут сделаны позже, в конце следующего раздела данной работы.

При $\varepsilon = 0$ получаем линейное дифференциальное уравнение в H

$$u_{tt} + A^2 u = 0, \quad (3)$$

которое имеет счетный набор решений в комплексной форме $w_k = \exp(i\sigma_k t)$, а также $\bar{w}_k(t)$. Базисные решения можно записать и в действительной форме: $h_k \cos \sigma_k t$, $h_k \sin \sigma_k t$. Задача Коши (3), (2) имеет решение

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[p_k \cos \sigma_k t + \frac{q_k}{\sigma_k} \sin \sigma_k t \right] h_k, \quad (4)$$

где $p_k = (u_0, h_k)$, $q_k = (\dot{u}_0, h_k)$. В частности, в норме H сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \sigma_k^2 h_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sigma_k h_k, \quad (5)$$

а также числовые ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 \sigma_k^4, \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k^2 \sigma_k^2. \quad (6)$$

Сходимость последних двух рядов является следствием полноты ортонормированной системы собственных элементов.

В следующих разделах будут рассмотрены вопросы, связанные с поведением решений уравнения (1) из достаточно малой окрестности нулевого решения, точнее? с начальными условиями $\|u_0\|_{A^2} \leq r_0$, $\|\dot{u}_0\|_A \leq r_0$, где $r_0 > 0$; обычно эта постоянная достаточно мала. Наконец,

$$\|u\|_A = \|u\| + \|Au\|, \quad u \in H_A, \quad \|u\|_{A^2} = \|u\| + \|Au\| + \|A^2 u\|, \quad u \in H_A, \quad (7)$$

где $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

3. Нормальная форма. Решение дифференциального уравнения (1) с начальными условиями из достаточно малой окрестности нулевого решения (из достаточно малого шара с центром в нуле пространства $E = H_{A^2} \times H_A$ — фазового пространства решений дифференциального уравнения (1)) будем искать в следующем виде:

$$u(t, \varepsilon) = w(t, z) + \varepsilon v(t, z, \varepsilon), \quad w = w(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[z_k \exp(i\sigma_k t) + \bar{z}_k \exp(-i\sigma_k t) \right] h_k, \quad (8)$$

где $z_k = z_k(t)$, $z = z(t) = \{z_1(t), z_2(t), z_3(t), \dots\}$ — счетный набор комплекснозначных функций переменного t . Далее, будем предполагать, что априори при всех рассматриваемых значениях t бесконечномерный вектор $z(t) \in l_{2,2}$. Напомним, что бесконечномерный вектор $a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in l_2$, если сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$, $a \in l_{2,2}$, если сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^4 |a_j|^2$; здесь $a_j \in \mathbb{C}$. В иной терминологии, запись $a \in l_2$ означает, что a принадлежит дискретному аналогу H_c , а $a \in l_{2,2}$ — что a принадлежит дискретному аналогу пространства H_{cA^2} . Последние предположения эквивалентны включению функции $w(t)$ в фазовое пространство решений уравнения (1) т.е. $w(t) \in H_{A^2}$ и $w_t(t) \in H_A$. В свою очередь, функцию $w(t)$ выбираем таким образом, чтобы функции $z_k(t)$ из последовательности $z(t) = \{z_1(t), z_2(t), \dots\}$ удовлетворяли бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_k = \varepsilon \varphi_k(z, \varepsilon), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Правые части системы (9) будут выбраны далее в процессе реализации алгоритма построения системы уравнений (9), которую принято называть *нормальной формой*. При этом основное внимание следует уделить не построению правых частей системы (9), а «укороченной» системе

$$\dot{z}_k(t) = \varepsilon f_k(z), \quad (10)$$

где $f_k(z) = \varphi_k(z, \varepsilon)|_{\varepsilon=0}$. Систему дифференциальных уравнений (10) принято называть *укороченной нормальной формой* (УНФ; в англоязычной литературе — truncated normal form, TNF).

Главная часть в равенстве (8) обозначена через $w(t)$; эта абстрактная функция, записанная в виде ряда (8), является квазипериодической функцией с частотами $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots$ (во многих случаях из приложений из теории упругой устойчивости она оказывается даже периодической с периодом $2\pi/\sigma_1$). Далее будем считать, что набор частот $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ обладает следующими свойствами:

- (1) при $k < m$ справедливо неравенство $|2\sigma_k - \sigma_m| \geq M_0$, где M_0 — некоторая положительная постоянная;
- (2) при $k \geq m$ справедливо неравенство $|2\sigma_k - \sigma_m| \geq \sigma_k$.

Последние два свойства собственных значений в подавляющем числе примеров реализуются и проверяются достаточно элементарно. Так, например, если $Av = -v''(x)$, $v(0) = v(\pi) = 0$, то $\sigma_k = k^2$, и поэтому эти свойства очевидны. В частности, в качестве M_0 можно выбрать 1.

Приступим к изложению способа вычисления правых частей системы (10). Для этого обозначим через $y(t, z)$ главную часть функции $v(t, z, \varepsilon)$, т.е. положим $y(t, z) = v(t, z, 0)$.

Подставим теперь сумму (8) в уравнение (1), вычислим производные функций в силу системы (10) и выделим слагаемые при ε . В результате получим неоднородное уравнение для определения $y(t, z)$, при анализе которого интерпретируем $z = (z_1, z_2, z_3, \dots)$ как параметры.

Итак, для $y(t, z)$ получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$y_{tt} - A^2 y = F(t, z), \quad (11)$$

где правая часть уравнения (11) определена следующим равенством:

$$\begin{aligned} F(t, z) = & -2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k i \sigma_k \exp(i \sigma_k t) - \bar{f}_k i \sigma_k \exp(-i \sigma_k t) \right] h_k - \\ & - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(g_1 + g_2 \sigma_k^2) i \sigma_k z_k \exp(i \sigma_k t) - (g_1 + g_2 \sigma_k^2) i \sigma_k \bar{z}_k \exp(-i \sigma_k t) \right] h_k - \\ & - 2c \sum_{k=1}^{\infty} \left[i \sigma_k z_k \exp(i \sigma_k t) - i \sigma_k \bar{z}_k \exp(-i \sigma_k t) \right] B_1 h_k - 2b \sum_{k=1}^{\infty} \left[z_k \exp(i \sigma_k t) + \bar{z}_k \exp(-i \sigma_k t) \right] \sigma_k h_k - \\ & - 2b \sum_{k=1}^{\infty} \left[z_k \exp(i \sigma_k t) + \bar{z}_k \exp(-i \sigma_k t) \right] \sigma_k h_k \Phi, \end{aligned}$$

где

$$\Phi = a_1(B_2 w, B_2 w) + a_2(B_2 w_t, B_2 w) \quad (12)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi = & a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(z_k \exp(i \sigma_k t) + \bar{z}_k \exp(-i \sigma_k t) \right)^2 \omega_k^2 + a_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(i \sigma_k z_k \exp(i \sigma_k t) - i \sigma_k \bar{z}_k \exp(-i \sigma_k t) \right) \omega_k^2, \\ & \omega_k^2 = (B_2 h_k, B_2 h_k) = (q_k, q_k). \end{aligned}$$

Напомним, что уравнение (11) разрешимо в классе квазипериодических функций с базисом частот $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, если выполнены следующие равенства:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (F, h_k) \exp(\pm i \sigma_k t) dt = 0,$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ (см., например, [2]). Относительно простые вычисления показывают, что

$$f_k(z) = -(g_1 + g_2\sigma_k^2)z_k + c\nu_k z_k - a_2\sigma_k\omega_k^2 z_k |z_k|^2 + ia_1 z_k \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 |z_m|^2.$$

Добавим, что линейный оператор B_2 подчинен A ($\|B_2 v\| \leq M_1 \|Au\|$, $u \in H_A$, $M_1 > 0$), и поэтому ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 |z_m|^2$ сходится, если сходится ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^2 |z_m|^2$; более того, $\omega_m^2 \leq M_1^2 \sigma_m^2$. Наконец, использовано обозначение $\nu_k = (B_1 h_k, h_k)$.

Следовательно, укороченную нормальную форму (10) можно записать в виде

$$\dot{z}_k = \varepsilon \left[-(g_1 + g_2\sigma_k^2)z_k + c\nu_k z_k + ib(c)z_k - a_2\sigma_k\omega_k^2 |z_k|^2 z_k + ia_1\sigma_k z_k \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 |z_m|^2 \right], \quad (13)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$. Ненулевые решения системы дифференциальных уравнений (13) удобно искать в следующем виде:

$$z_k(t) = \rho_k(t) \exp(i\varphi_k(t)), \quad (14)$$

где $\rho_k^2(t) = |z_k(t)|^2$, $\varphi_k(t)$ — аргумент комплекснозначной функции $z(t)$.

В результате получаем систему действительных дифференциальных уравнений

$$\dot{\rho}_k = \varepsilon \rho_k [\beta_k - d_k \rho_k^2], \quad (15)$$

$$\dot{\varphi}_k = \varepsilon \left[b(c)\sigma_k + \sigma_k a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 \rho_m^2 \right], \quad (16)$$

где

$$\beta_k = \beta_k(c) = c\nu_k - (g_1 + g_2\sigma_k^2), \quad \nu_k = (B_1 h_k, h_k), \quad d_k = a_2\sigma_k\omega_k^2 > 0.$$

Далее будем считать, что $\nu_k > 0$; последовательность $\{c_k\}$, где $c_k = (g_1 + g_2\sigma_k^2)/\nu_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, монотонно возрастает; $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \infty$. Отметим, что $\beta_k(0) < 0$ при всех натуральных k .

Из этих предположений вытекает, что можно указать $c = c_m$, при котором

- (1) $\beta_m(c_m) = 0$;
- (2) $\beta_k(c_m) > 0$, если $k < m$;
- (3) $\beta_p(c_m) < 0$, если $p > m$.

Следовательно, при $c \in I_m = (c_m, c_{m+1}]$ выполнены неравенства $\beta_k(c) > 0$, если $k \leq m$, но $\beta_p(c) \leq 0$ при $p > m$.

При таком выборе c , $c \in I_m$, получаем, что

- (1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_s(t) = 0$, если $s = m+1, m+2, m+3, \dots$, $t \rightarrow \infty$;
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_k(t) = \alpha_k$, $\alpha_k = \sqrt{\beta_k(c)/a_2\sigma_k\omega_k^2}$ — состояние равновесия уравнения с номером $k \leq m$.

Отсюда вытекает, что система дифференциальных уравнений (15) при $c \in I_m$ имеет 2^m состояний равновесия $S_{l,m} = (\eta_1, \dots, \eta_m; 0, \dots, 0, \dots)$; первые m компонент могут быть ненулевыми, а $\rho_j = 0$, если $j \geq m+1$. Итак, коэффициенты η_j , $j = 1, \dots, m$, может быть равна либо α_j , либо 0; при этом число l указывает на число ненулевых компонент у $S_{l,m}$. Так, $S_{0,m}$ — нулевое состояние равновесия, $S_{1,m}$ имеет одну ненулевую компоненту среди координат вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$. Особую роль играет состояние равновесия $S_{m,m}$, у которого все первые m координат положительны ($\eta_m = \alpha_m > 0$).

Пусть $G_k(\rho, c) = \rho_k [\beta_k(c) - d_k \rho^2]$. Разделим систему дифференциальных уравнений (15) на две подсистемы. Первая состоит из первых m уравнений системы (15):

$$\dot{\rho}_k = \varepsilon G_k(\rho_k, c), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (17)$$

а вторая — из остальных:

$$\dot{\rho}_s = \varepsilon G_s(\rho_s, c), \quad s = m+1, m+2, \dots \quad (18)$$

Для уравнений системы (18) характерно выполнение неравенств $\dot{\rho}_s < 0$ и, следовательно, в этом случае $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_s = 0$. Вопрос об устойчивости любого состояния вида $S_{l,m}$ сводится к анализу спектра матрицы Якоби системы (17), вычисленной для соответствующего состояния равновесия. Очевидно, она диагональная, т.е.

$$J = \text{diag} \{ \lambda_j(c) \}, \quad (19)$$

где

$$\lambda_j(c) = G'_k(\rho_{k_j}(c)) \big|_{\rho_k = \eta},$$

а $\rho_k = \alpha_k$ или $\rho_k = 0$. При этом

$$G'_k(\rho_k, c) \big|_{\rho_k=0} = \beta_k > 0, \quad G'_k(\rho_k, c) \big|_{\rho_k=\alpha_k} = -2\beta_k < 0.$$

Отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. Пусть $c \in I_m$. Тогда система дифференциальных уравнений (15) имеет 2^m состояний равновесия $S_{l,m}$. Все они неустойчивы, за исключением одного, а именно, $S_{m,m}$, т.е. состояния равновесия с максимально возможным числом положительных компонент $\rho_k = \alpha_k$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Перейдем теперь к системе (16). Состоянию равновесия $S_{l,k} = (\eta_1, \dots, \eta_m; 0, 0, \dots)$, где $\eta_{k_j} = \alpha_{k_j}$, а остальные компоненты вектора $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ равны нулю, соответствуют решения системы (16) вида

$$\Phi_{k_j}(t) = \varepsilon \Theta_{k_j} t + \varphi_{k_j 0}, \quad (20)$$

где $\Theta_{k_j} = (b + a_1 \sum_{j=1}^l \omega_{k_j}^2 \alpha_{k_j}^2) \sigma_{k_j}$, $\varphi_{k_j 0}$ — произвольные действительные постоянные.

Состоянию равновесия $S_{l,m}$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений (16) соответствуют квазипериодические решения нормальной формы (13)

$$z_{k_j}(t) = \alpha_{k_j} (i \Theta_{k_j} \varepsilon t + i \varphi_{k_j 0}), \quad z_p = 0, \quad p \neq k_j. \quad (21)$$

Решение может быть периодическим, если θ_{k_j} соизмеримы.

Семейство решений (21) образует инвариантный тор $T_{TNF,l}(\varepsilon)$ размерности l . Все такие торы седловые, если $l < m$. При $l = m$ имеем асимптотически устойчивый (притягивающий) тор $T_{TNF,m}(\varepsilon)$ размерности m .

Из предшествующих построений и результатов работ [4, 5] вытекает, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $c \in I_m$. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ дифференциальное уравнение (1) имеет инвариантный тор $T_l(\varepsilon)$ размерности l , соответствующий инвариантному тору $T_{TNF,l}(\varepsilon)$ нормальной формы (13) (состоянию равновесия $S_{l,m}$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений (15)). При $l < m$ торы $T_l(\varepsilon)$ — седловые, а тор $T_m(\varepsilon)$ — локальный аттрактор для решений дифференциального уравнения (1). Для решений на $T_l(\varepsilon)$ справедлива асимптотическая формула

$$u(t, \varepsilon) = 2 \sum_{j=1}^m \rho_{k_j} \cos(\sigma_{k_j} t + \varphi_{k_j 0}) + O(\varepsilon), \quad (22)$$

где $\rho_{k_j} = \alpha_{k_j}$, т.е. набору положительных координат состояния равновесия системы дифференциальных уравнений.

4. Сценарий Ландау—Хопфа. Пусть сначала $c \in I_m = (c_m, c_{m+1}]$. Тогда уравнение (1) имеет набор из $2^m - 1$ инвариантных торов $T_l(\varepsilon)$ размерности $l = 1, 2, \dots, m$ (тор нулевой размерности $T_0(\varepsilon)$ — это нулевое состояние равновесия). При этом, как уже отмечалось, будет лишь один тор $T_m(\varepsilon)$ максимальной размерности при данном диапазоне изменения c .

Увеличим теперь c таким образом, что c перейдет из I_m в $I_{m+1} = (c_{m+1}, c_{m+2}]$. Тогда уравнение (1) будет иметь уже $l = 2^{m+1}$ инвариантных торов $T_l(\varepsilon)$. При этом торы, существующие при $c \in I_m$, сохраняются, но добавляются еще 2^m инвариантных торов, среди которых $T_{m+1}(\varepsilon)$;

именно он теперь стал устойчивым. Данный тор возник в результате бифуркации тора $T_m(\varepsilon)$ максимально возможной размерности при $c \in I_m$.

Следует отметить, что при увеличении c можно получить тор достаточно большой размерности $N = N(\varepsilon)$, но предельный период, естественно, невозможен, так как в такой интерпретации $c \rightarrow +\infty$ и, принципе, рассмотреть «предельное» уравнение не представляется возможным.

Приведем пример краевой задачи, которая может быть включена в рассматриваемый класс абстрактных уравнений. Рассмотрим уравнение с частными производными

$$u_{tt} + 2\varepsilon[g_1 u_t + g_2 u_{txxx}] + u_{xxxx} + \varepsilon c^2 u_{xx} + \varepsilon \beta c u_{tx} + \varepsilon \alpha c^2 u_x = \\ = \varepsilon u_{xx} \left[2a_1 \int_0^\pi (u_x)^2 dx + 2a_2 \int_0^\pi u_x u_{tx} dx \right], \quad (23)$$

где функция $u(t, x)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0. \quad (24)$$

Краевая задача (23), (24) приведена в нормированном виде; она описывает колебания трубы под воздействием потока жидкости, протекающей в ней со скоростью c (нормированная величина), в поле силы тяжести (см., например, [16]). В дифференциальном уравнении (23) коэффициенты $c, a_1, a_2, g_1, g_2 \in \mathbb{R}_+, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; наконец, $u(t, x)$ — нормированное отклонение осевой линии трубы от тривиального состояния равновесия. В уравнении (23) присутствует малый параметр $\varepsilon > 0$. При стандартной перенормировке $\varepsilon \approx E^{-1/2}$, где E — модуль упругости материала, из которого изготовлена труба (для стали $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², т.е. величина $E^{-1/2} \sim 10^{-5}$ может быть интерпретирована как малый параметр).

В примере роль A играет дифференциальный оператор

$$Av = -v'', \quad \text{где } v = v(x), \quad v(0) = v(\pi) = 0. \quad (25)$$

Поэтому в качестве H_A можно выбрать пространство $\dot{W}_2^2(0, \pi)$ — подпространство функций из $W_2^2[0, \pi]$, удовлетворяющих краевым условиям $v(0) = v(\pi) = 0$. Наконец, $W_2^p[0, \pi]$ — стандартное обозначение для пространств Соболева (см. [13]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брур Х. В., Дюмортье Ф., ван Стрин С., Такенс Ф. Структуры в динамике. — М.—Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2003.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
3. Кокуйкин Е. С., Куликов А. Н. Циклы и торы деловой активности в одной математической модели макроэкономики // Модел. анал. информ. систем. — 2009. — 16, № 4. — С. 86–95.
4. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца // Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 5. — С. 584–601.
5. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение тора при возмущениях // Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 6. — С. 738–753.
6. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Развитие турбулентности по Ландау в модели «мультипликатор-аксельатор» // Докл. РАН. — 2008. — 42, № 6. — С. 739–743.
7. Куликов А. Н. Аттракторы двух краевых задач для модифицированного телеграфного уравнения // Нелин. динам. — 2008. — 4, № 1. — С. 56–67.
8. Куликов А. Н. Возможность реализации сценария Ландау перехода к турбулентности в задаче о колебаниях трубы, транспортирующей жидкость // в кн.: Тр. VIII Всеросс. конф. «Нелинейные колебания механических систем». — Н. Новгород, 2008. — 2. — С. 378–380.
9. Куликов А. Н. О возможности реализации сценария Ландау—Хопфа перехода к турбулентности в двух задачах теории упругой устойчивости // Диффер. уравн. — 2011. — 47, № 2. — С. 296–298.
10. Куликов А. Н. О реализации сценария Ландау—Хопфа перехода к турбулентности в некоторых задачах теории упругой устойчивости // Диффер. уравн. — 2012. — 48, № 9. — С. 1278–1291.
11. Ландау Л. Д. К проблемам турбулентности // Докл. АН СССР. — 1944. — 44, № 8. — С. 339–342.

12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.
13. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
14. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — 10. — С. 297–350.
15. *Якубов С. Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложениях// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1970. — 22. — С. 37–60.
16. *Holmes P. J., Marsden J. E.* Bifurcation of dynamical systems and nonlinear oscillations in engineering systnes// in: Lect. Notes Math.. — Berlin: Springer-Verlag, 1978. — 648. — P. 165–206.
17. *Hopf E.* A mathematical example displaying the features of turbulence// Commun. Pure Appl. Math. — 1948. — № 1. — P. 303–322.

Куликов Анатолий Николаевич

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: anat_kulikov@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 53–60
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-53-60

УДК 517.929

ДИНАМИКА СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

© 2019 г. Д. А. КУЛИКОВ

Аннотация. В работе рассмотрена задача о синхронизации двух и трех слабосвязанных осцилляторов Ван дер Поля в случае, когда осцилляторы полностью идентичны и связь между ними слабая. Изучены вопросы существования и устойчивости двух типов периодических решений в предположении, что связь между осцилляторами диссипативна или активна. Анализ задачи базируется на использовании таких методов качественной теории дифференциальных уравнений, как метод интегральных многообразий и метод нормальных форм Пуанкаре—Дюлака. Задача сведена к изучению нормальных форм. При этом использована одна из версий алгоритма Крылова—Боголюбова, что позволило получать асимптотические формулы для периодических решений.

Ключевые слова: осциллятор, слабая связь, периодическое решение, устойчивость, нормальная форма, синхронизация.

DYNAMICS OF COUPLED VAN DER POL OSCILLATORS

© 2019 D. A. KULIKOV

ABSTRACT. In this paper, we consider the problem on the synchronization of two and three weakly coupled Van der Pol oscillators in the case where the oscillators are identical and the connection between them is weak. The existence and stability of two types of periodic solutions are studied under the assumption that the connection between the oscillators is dissipative or active. The analysis of the problem is based on methods of the qualitative theory of differential equations, namely, the method of integral manifolds and the method of normal Poincaré–Dulac forms. The problem is reduced to the study of normal forms. We used a version of the Krylov–Bogolyubov algorithm, which allows one to obtain asymptotic formulas for periodic solutions.

Keywords and phrases: oscillator, weak connection, periodic solution, stability, normal form, synchronization.

AMS Subject Classification: 34C23, 34C25, 34D06

1. Введение. В теории нелинейных колебаний и радиофизике важную роль играет широко известное уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} - 2\varepsilon\dot{x} + x + ax^2\dot{x} = 0, \quad (1)$$

где $a > 0$ — постоянная и $\varepsilon > 0$ рассматривается как малый параметр. Хорошо, известно, что уравнение (1) имеет устойчивый предельный цикл. Уравнение Ван дер Поля играет значительную роль в теории нелинейных колебаний, так как служит примером, пожалуй, простейшей автономной системы, в которой прослеживаются многие характерные свойства автоколебательных систем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00672).

Другой известной задачей следует считать задачу о синхронизации автоколебательных систем (см. [4, 5, 10]) при различных видах связи. В представленной работе будет изучена задача о синхронизации двух и трех осцилляторов Ван дер Поля при наличии слабой связи. Предполагается не только указать синхронные решения, но и исследовать вопрос об устойчивости таких решений.

Анализ задач предполагается провести при помощи метода нормальных форм. Такой подход позволяет изучить поставленные задачи в достаточно полном объеме, не упуская при этом вопрос об устойчивости. Данный подход к изучению явления синхронизации в системе слабосвязанных осцилляторов был использован в [6–8, 11]. Более подробное изложение этого подхода к некоторым задачам теории синхронизации можно найти в диссертации [9].

2. Постановка задачи. В работе будут рассмотрены системы из двух и из трех дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + x_1 + ax_1^2\dot{x}_1 = \varepsilon\gamma(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + x_2 + ax_2^2\dot{x}_2 = \varepsilon\gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \end{cases} \quad (2)$$

а также

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + x_1 + ax_1^2\dot{x}_1 = \varepsilon\gamma(\dot{x}_3 - \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + x_2 + ax_2^2\dot{x}_2 = \varepsilon\gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ \ddot{x}_3 - 2\varepsilon\dot{x}_3 + x_3 + ax_3^2\dot{x}_3 = \varepsilon\gamma(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases} \quad (3)$$

Системы (2) и (3) представляют собой системы из двух и из трех слабосвязанных осцилляторов Ван дер Поля при наличии диссипативной (активной) связей. Связь считают *диссипативной*, если $\gamma > 0$, и *активной*, если $\gamma < 0$. Случай $\gamma = 0$ не предполагается изучать, так как при таком варианте выбора γ связь между осцилляторами отсутствует.

Отметим сразу, что системы (2), (3) имеют периодические решения $x_1(t) = x_2(t) = y(t)$ в случае системы (2) (соответственно, $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = y(t)$ в случае системы (3), где $y(t)$ — цикл уравнения Ван дер Поля (1), удовлетворяющий уравнению

$$\ddot{y} - 2\varepsilon\dot{y} + y + ay^2\dot{y} = 0, \quad a > 0, \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_0). \quad (4)$$

Оба цикла в задачах теории колебаний принято называть *синхронными* (*циклами Андронова—Хопфа*). Если вопрос о существовании циклов Андронова—Хопфа в нашем случае очевиден и сводится к наличию циклов у уравнения Ван дер Поля (см. (4) и (1)), то вопрос об их устойчивости уже существенно содержательнее.

В работе также будет рассмотрен вопрос о существовании и устойчивости циклов, отличных от цикла Андронова—Хопфа, например, противофазного, в случае двух связанных осцилляторов. Напомним, что цикл системы дифференциальных уравнений (2) называют *противофазным*, если для него справедливо соотношение

$$x_2(t, \varepsilon) = x_1(t + \pi, \varepsilon).$$

Добавим, что при $\varepsilon > 0$ нулевые состояния равновесия систем (2) и (3) заведомо неустойчивы.

3. Два слабосвязанных осциллятора Ван дер Поля. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2). Решения в достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_1(t, s, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2}u_1(t, s) + \varepsilon v_1(t, s) + \varepsilon^{3/2}w_1(t, s) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ x_2(t, s, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2}u_2(t, s) + \varepsilon v_2(t, s) + \varepsilon^{3/2}w_2(t, s) + o(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $s = \varepsilon t$ — медленное время,

$$u_1(t, s) = z_1(s) \exp(it) + \bar{z}_1(s) \exp(-it), \quad u_2(t, s) = z_2(s) \exp(it) + \bar{z}_2(s) \exp(-it).$$

Функции v_1, v_2, w_1, w_2 имеют период 2π по переменной t ; кроме того, справедливы равенства

$$M_{\pm}(v_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_j(t, s) \exp(\pm it) dt = 0, \quad M_{\pm}(w_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_j(t, s) \exp(\pm it) dt = 0, \quad j = 1, 2.$$

Отметим, что справедливо равенство

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial\psi}{\partial s},$$

где $\psi(t, s)$ — некоторая гладкая функция аргументов t и s . Далее точкой будем обозначать производную по t , а штрихом — по s .

Подставляя суммы (5) в систему (2) и приравнявая коэффициенты при ε , $\varepsilon^{3/2}$, получаем неоднородные системы дифференциальных уравнений. На втором шаге реализации алгоритма для v_1, v_2 получаем систему

$$\ddot{v}_1 + v_1 = 0, \quad \ddot{v}_2 + v_2 = 0.$$

Эта система допускает периодическое решение $v_1 = v_2 = 0$, для которого $M_{\pm}(v_j) = 0$.

На третьем шаге получаем систему из двух неоднородных дифференциальных уравнений

$$\ddot{w}_1 + w_1 = F_1, \quad \ddot{w}_2 + w_2 = F_2, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(t, z_1, z_2) = -au_1^2\dot{u}_1 + 2\dot{u}_1 + \gamma(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - 2\dot{u}_1', \\ F_2 &= F_2(t, z_1, z_2) = -au_2^2\dot{u}_2 + 2\dot{u}_2 + \gamma(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) - 2\dot{u}_2'. \end{aligned}$$

При анализе системы (6) следует интерпретировать вспомогательные переменные z_1, z_2 как параметры. Хорошо известно, что система (6) имеет 2π -периодические решения, если выполнены следующие условия:

$$M_{\pm}(F_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_j \exp(\pm it) dt = 0, \quad j = 1, 2.$$

Добавим, что при этом решения w_1, w_2 следует выбрать таким образом, чтобы были справедливы равенства $M_{\pm}(u_j) = 0$, $j = 1, 2$. Из условий разрешимости в классе 2π -периодических по t функций получаем, что комплекснозначные функции $z_1(s), z_2(s)$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений (нормальных форм)

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1 - \frac{a}{2} z_1 |z_1|^2 + \frac{\gamma}{2} (z_2 - z_1), \\ z_2' &= z_2 - \frac{a}{2} z_2 |z_2|^2 + \frac{\gamma}{2} (z_1 - z_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Для удобства положим $\gamma/2 = \mu$ и перепишем систему (7) в «тригонометрическом» виде, положив

$$z_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \rho_1 \exp(i\varphi_1), \quad z_2 = \sqrt{\frac{2}{a}} \rho_2 \exp(i\varphi_2),$$

где $\rho_1, \rho_2 \geq 0$ ($\rho_1 = \rho_2 = 0$ соответствует нулевому решению системы (7)). В результате получим систему действительных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \rho_1' = \rho_1 - \rho_1^3 + \mu(\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \rho_1), \\ \rho_2' = \rho_2 - \rho_2^3 + \mu(\rho_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \rho_2), \\ \varphi_1' = \mu \frac{\rho_2}{\rho_1} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \varphi_2' = \mu \frac{\rho_1}{\rho_2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{cases} \quad (8)$$

Выполним в системе (8) подстановку $\Theta = \varphi_2 - \varphi_1$ и для медленных переменных ρ_1, ρ_2, Θ получим замкнутую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \rho_1' = \rho_1 - \rho_1^3 + \mu[\rho_2 \cos \theta - \rho_1], \\ \rho_2' = \rho_2 - \rho_2^3 + \mu[\rho_1 \cos \theta - \rho_2], \\ \Theta' = -\mu \sin \theta \left[\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right]. \end{cases} \quad (9)$$

Очевидно, что каждому состоянию равновесия системы (9) соответствует периодическое решение системы (7). Поэтому центральным вопросом можно считать задачу о ненулевых состояниях равновесия системы дифференциальных уравнений (9).

Прежде чем перейти к анализу системы (9), отметим, что нулевое решение системы (7) неустойчиво при всех значениях параметра μ (γ).

Итак, найдем теперь ненулевые состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (9). Получаем, что $\sin \Theta = 0$. Это означает, что имеется два различных варианта выбора Θ : $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = \pi$.

В первом случае получаем состояние равновесия S_1 , координаты которого равны

$$\rho_1 = \rho_2 = 1, \quad \Theta = 0.$$

Второе состояние равновесия S_2 существует, если $1 - 2\mu > 0$; тогда

$$\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{1 - 2\mu}, \quad \Theta = \pi.$$

Следовательно, S_2 существует, если $\mu < 1/2$ ($\gamma < 1$).

Стандартная проверка показывает, что состояние равновесия S_1 : $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\Theta = 0$ асимптотически устойчиво, если $\mu > 0$, и неустойчиво, если $\mu < 0$ (случай $\mu = 0$ не рассматриваем, так как в нем отсутствует связь между осцилляторами).

Аналогичная проверка показала, что состояние равновесия $S_2 = (\sqrt{1 - 2\mu}, \sqrt{1 - 2\mu}, \pi)$ устойчиво при $\mu < 0$. При $\mu \in (0, 1/2)$ оно существует, но неустойчиво.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ система дифференциальных уравнений (2) имеет синхронное периодическое решение ($z_1 = z_2$), которое соответствует состоянию равновесия S_1 системы (9). Этот цикл орбитально асимптотически устойчив, если $\gamma > 0$ ($\mu > 0$).*

Противофазный цикл ($z_2 = -z_1$) существует, если $\gamma < 1$ ($\mu < 1/2$). Он устойчив при $\gamma < 0$ и неустойчив при $\gamma > 0$.

Для решений, образующих синхронный цикл, справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{2}{a}} [\cos(t + \varphi_1)] + O(\varepsilon^{3/2}), \\ x_2 &= 2\varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{2}{a}} [\cos(t + \varphi_1)] + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned}$$

где $\varphi_1 \in \mathbb{R}$ и произвольно.

Для решений, образующих противофазный цикл, справедлива асимптотическое представление

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{1 - \gamma} \cos(t + \varphi_2) + O(\varepsilon^{3/2}), \\ x_2 &= -2\varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{1 - \gamma} \cos(t + \varphi_2) + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned}$$

где $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ произвольно.

4. Три связанных осциллятора. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (3), которую будем рассматривать как систему из трех слабосвязанных осцилляторов. Как и в предыдущем разделе, вопрос о поведении ее решений можно и целесообразно свести к аналогичным вопросам для вспомогательной системы дифференциальных уравнений для комплекснозначной функции, которую принято называть нормальной формой.

Будем искать решения системы дифференциальных уравнений в виде

$$x_j(t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} u_j(t, s) + \varepsilon v_j(t, s) + \varepsilon^{3/2} + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (10)$$

где $j = 1, 2, 3$, $u_j(t, s) = z_j \exp(it) + \bar{z}_j \exp(-it)$, $z_j = z_j(s)$, $s = \varepsilon t$, $u_j(t, s)$ и $w_j(t, s)$ — достаточно гладкие функции, имеющие период 2π по переменной t . Подставляя суммы (10) в систему (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε (ε , $\varepsilon^{3/2}$), получим системы трех

линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка для функций v_j и w_j , $j = 1, 2, 3$. Построения, аналогичные проведенным в предыдущем разделе, позволяют заключить, что $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. Анализ системы неоднородных уравнений для w_1, w_2, w_3 показывает, что из условий их разрешимости в классе 2π -периодических по t функций можно получить систему дифференциальных уравнений первого порядка для вспомогательных комплекснозначных функций $z_1(s), z_2(s), z_3(s)$. Эту систему и принято называть нормальной формой. Итак, нормальная форма в комплексной форме записи приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} z_1' = z_1 - \frac{a}{2}z_1|z_1|^2 + \frac{\gamma}{2}(z_3 - z_1), \\ z_2' = z_2 - \frac{a}{2}z_2|z_2|^2 + \frac{\gamma}{2}(z_1 - z_2), \\ z_3' = z_3 - \frac{a}{2}z_3|z_3|^2 + \frac{\gamma}{2}(z_2 - z_3), \end{cases} \quad (11)$$

где $z_k' = z_k'(s)$ — производная по переменной s . Положим $\mu = \gamma/2$ и

$$z_j(s) = \sqrt{\frac{2}{a}}\rho_j(s) \exp(i\varphi_j(s)), \quad (12)$$

т.е. перейдем к нормированному варианту записи комплекснозначных функций. В результате подстановки равенств (12) в систему (11) и разделения действительных и мнимых частей получаем новый вариант записи системы (11):

$$\begin{cases} \rho_1' = \rho_1 - \rho_1^3 + \mu[\rho_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) - \rho_1], \\ \rho_2' = \rho_2 - \rho_2^3 + \mu[\rho_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \rho_2], \\ \rho_3' = \rho_3 - \rho_3^3 + \mu[\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) - \rho_3], \\ \varphi_1' = \mu \frac{\rho_3}{\rho_1} \sin(\varphi_3 - \varphi_1), \\ \varphi_2' = \mu \frac{\rho_1}{\rho_2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \varphi_3' = \mu \frac{\rho_2}{\rho_3} \sin(\varphi_2 - \varphi_3), \end{cases} \quad (13)$$

т.е. систему, состоящую из трех уравнений для амплитудных переменных и трех уравнений для аргументов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Положим теперь

$$\varphi_3 - \varphi_1 = \Theta_1, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \Theta_2.$$

Тогда $\varphi_2 - \varphi_3 = -\Theta_1 - \Theta_2$. Для $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \Theta_1, \Theta_2$ можно получить замкнутую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \rho_1' = \rho_1 - \rho_1^3 + \mu[\rho_3 \cos \Theta_1 - \rho_1], \\ \rho_2' = \rho_2 - \rho_2^3 + \mu[\rho_1 \cos \Theta_2 - \rho_2], \\ \rho_3' = \rho_3 - \rho_3^3 + \mu[\rho_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) - \rho_3], \\ \Theta_1' = -\mu \left[\frac{\rho_2}{\rho_3} \sin(\Theta_1 + \Theta_2) + \frac{\rho_3}{\rho_1} \sin \Theta_1 \right], \\ \Theta_2' = \mu \left[\frac{\rho_3}{\rho_1} \sin \Theta_1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \sin \Theta_2 \right]. \end{cases} \quad (14)$$

Замкнутую систему (14) следует дополнить любым уравнением из последних трех уравнений системы (13). Очевидно, что любому состоянию равновесия вспомогательной системы дифференциальных уравнений (14) соответствует периодическое решение нормальной формы (11). Найдем состояния равновесия системы (14), представляющие наибольший интерес с прикладной точки зрения. Так, система (14) имеет состояние равновесия

$$S_3 : \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1, \quad \Theta_1 = \Theta_2 = 0,$$

которое соответствует состоянию равновесия S_1 из предыдущего раздела, а также состояние равновесия

$$S_4: \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \left(1 - \frac{3}{2}\mu\right)^{1/2}, \quad \Theta_1 = \Theta_2 = \frac{2\pi}{3},$$

которое существует, если $1 - 3\mu/2 > 0$, т.е. при $\mu < 2/3$ ($\gamma < 4/3$). Состояние равновесия S_3 существует при всех μ (γ).

Рассмотрим вопрос об устойчивости состояний равновесия S_3, S_4 . Для этого нужно изучить расположение собственных значений матриц B_3 и B_4 , получающихся линеаризацией системы дифференциальных уравнений (14) на состояниях равновесия S_3 и S_4 соответственно.

Стандартные вычисления позволяют вычислить элементы матриц B_3, B_4 . Матрица B_3 имеет блочный вид

$$B_3 = \text{diag}(B_{31}, B_{32}), \quad B_{31} = \begin{pmatrix} -2 - \mu & 0 & \mu \\ \mu & -2 - \mu & 0 \\ 0 & \mu & -2 - \mu \end{pmatrix}, \quad B_{32} = \begin{pmatrix} -2\mu & -\mu \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Элементарные вычисления показывают, что все собственные значения матрицы B_3 лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости ($\text{Re } \lambda < 0$), если $\mu > 0$ и, напротив, существует, по крайней мере одно собственное число, лежащее в правой полуплоскости комплексной плоскости, если $\mu < 0$ ($\mu \neq 0$) по условию.

Аналогичные вычисления показывают, что матрица

$$B_4 = \begin{pmatrix} -2 + \frac{7}{2}\mu & 0 & -\frac{\mu}{2} & -\sqrt{3}\eta\frac{\mu}{2} & 0 \\ -\frac{\mu}{2} & -2 + \frac{7}{2}\mu & 0 & 0 & -\sqrt{3}\eta\frac{\mu}{2} \\ 0 & -\frac{\mu}{2} & -2 + \frac{7}{2}\mu & \sqrt{3}\eta\frac{\mu}{2} & \sqrt{3}\eta\frac{\mu}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{\eta}\frac{\mu}{2} & \frac{\sqrt{3}}{\eta}\frac{\mu}{2} & -\mu\frac{\sqrt{3}}{\eta} & \mu & \frac{\mu}{2} \\ -\mu\frac{\sqrt{3}}{\eta} & \frac{\mu}{2}\frac{\sqrt{3}}{\eta} & \frac{\mu}{2}\frac{\sqrt{3}}{\eta} & -\frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} \end{pmatrix},$$

где $\eta = \sqrt{1 - 3\mu/2}$. Вычисления показывают, что при $\mu < 0$ все собственные значения лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости ($\text{Re } \lambda < 0$), но при $\mu > 0$ у данной матрицы имеются собственные значения с $\text{Re } \lambda > 0$. Проверка этого утверждения опиралась, в частности, на использования критерия Рауса—Гурвица.

Приведенные рассуждения вместе с результатами работ [2, 3] приводят к следующему утверждению.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ система дифференциальных уравнений (11) имеет периодические решения, соответствующие состояниям равновесия S_3, S_4 системы дифференциальных уравнений (14).*

Состоянию равновесия S_3 соответствует цикл C_3 :

$$\begin{aligned} x_1(t, \varepsilon) &= 2\sqrt{\frac{2}{a}}\varepsilon^{1/2} \cos(t + \psi_1) + O(\varepsilon^{3/2}), \\ x_2(t, \varepsilon) &= 2\sqrt{\frac{2}{a}}\varepsilon^{1/2} \cos(t + \psi_1) + O(\varepsilon^{3/2}), \\ x_3(t, \varepsilon) &= 2\sqrt{\frac{2}{a}}\varepsilon^{1/2} \cos(t + \psi_1) + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned} \tag{15}$$

где $\psi_1 \in \mathbb{R}$. Данное периодическое решение существует, если $a > 0$, при любом выборе γ . При $\gamma > 0$ эти решения устойчивы (орбитально асимптотически устойчивы; см. [1]).

Состоянию равновесия S_4 соответствует цикл C_4 :

$$\begin{aligned}x_1(t, \varepsilon) &= 2\sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{1 - \frac{3\gamma}{4}}\varepsilon^{1/2} \cos\left(\left(1 + \varepsilon\frac{\sqrt{3}\gamma}{4}\right)t + \psi_2\right) + O(\varepsilon^{3/2}), \\x_2(t, \varepsilon) &= 2\sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{1 - \frac{3\gamma}{4}}\varepsilon^{1/2} \cos\left(\left(1 + \varepsilon\frac{\sqrt{3}\gamma}{4}\right)t + \psi_2 - \frac{2\pi}{3}\right) + O(\varepsilon^{3/2}), \\x_3(t, \varepsilon) &= 2\sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{1 - \frac{3\gamma}{4}}\varepsilon^{1/2} \cos\left(\left(1 + \varepsilon\frac{\sqrt{3}\gamma}{4}\right)t + \psi_2 + \frac{2\pi}{3}\right) + O(\varepsilon^{3/2}),\end{aligned}$$

где $\psi_2 \in \mathbb{R}$ произвольно. Цикл C_4 существует при выполнении неравенства $\gamma < 4/3$, а устойчив (орбитально асимптотически устойчив) при $\gamma < 0$.

5. Заключение. Рассмотрена задача о синхронизации автоколебаний в системе из двух и трех осцилляторов Ван дер Поля в случае активной или диссипативной связи (в терминологии работ [4, 5, 10]). Всегда существует синхронный цикл (цикл Андронова–Хопфа), и он устойчив при $\gamma > 0$ (случай диссипативной связи).

В системе из двух связанных осцилляторов имеется противофазный цикл, для которого справедливо соотношение $x_2(t, \varepsilon) = x_1(t + \pi, \varepsilon) = -x_1(t, \varepsilon)$. В случае трех осцилляторов имеет место «подправка». Существует цикл C_4 , который, вероятно, можно интерпретировать как аналог противофазного. Для него характерно следующее: колебания компонент сдвинуты по фазе на $2\pi/3$, а не на π , как в случае двух осцилляторов.

В данной работе рассматривался случай диссипативной (активной) связи. Иная задача возникает, когда имеет место инерционная связь (см. [4, 5, 10]). Например, в случае двух осцилляторов следует рассмотреть систему

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + x_1 + ax_1^2\dot{x}_1 = \gamma(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + x_2 + ax_2^2\dot{x}_2 = \gamma(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (16)$$

В системе (16) по сравнению с системой (2) предложено изменение вида связи, правых частей уравнений. Следует отметить, что в [7, 8] была изучена система (16), анализ которой показал, что динамика решений системы существенно богаче, чем динамика решений системы (2). Этого следует ожидать, по-видимому, и в случае трех осцилляторов, т.е. при аналогичном изменении правых частей системы дифференциальных уравнений (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
2. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 5. — С. 584–601.
3. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса отображений: сохранение тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 6. — С. 738–752.
4. Кузнецов А. П., Паксютов В. И. О динамике двух слабосвязанных осцилляторов Ван дер Поля—Дуффинга с диссипативной связью// Изв. вузов. Прикл. нелин. динам. — 2003. — 11, № 6. — С. 48–63.
5. Кузнецов А. П., Тюрюкина Л. В., Сатаев И. Р., Чернышов Н. Ю. Синхронизация и многочастотные колебания в низкоразмерных ансамблях осцилляторов// Изв. вузов. Прикл. нелин. динам. — 2014. — 22, № 1. — С. 27–54.
6. Куликов Д. А. Автомодельные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов// Изв. вузов. Прикл. нелин. динам. — 2006. — 14, № 5. — С. 120–132.
7. Куликов Д. А. Циклы билокальной модели волнового уравнения: полный анализ// Соврем. пробл. мат. информ. — 2001. — 4. — С. 93–96.
8. Куликов Д. А. Исследование динамики билокальной модели нелинейных волновых уравнений// Соврем. пробл. мат. информ. — 2002. — 5. — С. 46–52.
9. Куликов Д. А. Аттракторы уравнения Гинзбурга—Ландау и его конечномерного аналога/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, 2006.

10. *Пиковский А., Розенблюм М., Курти Ю.* Синхронизация. Фундаментальное явление. — М.: Техносфера, 2003.
11. *Kulikov D. A.* Self-similar cycles and their local bifurcations in the problem of two weakly coupled oscillators// J. Appl. Math. Mech. — 2010. — 74, № 4. — P. 389–400.

Куликов Дмитрий Анатольевич

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: kulikov_d_a@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 61–70
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-61-70

УДК 517.925.42, 517.925.53, 517.928.7

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

© 2019 г. М. И. КУПЦОВ, В. А. МИНАЕВ,
А. О. ФАДДЕЕВ, С. Л. ЯБЛОЧНИКОВ

Аннотация. Рассматривается задача устойчивости ненулевых интегральных многообразий нелинейной конечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которой является периодической вектор-функцией по независимой переменной и содержит параметр. Предполагается, что у изучаемой системы имеется тривиальное интегральное многообразие при всех значениях параметра, а соответствующая линейная подсистема не обладает свойством экспоненциальной дихотомии. Целью работы является нахождение достаточных условий существования в окрестности состояния равновесия системы ненулевого интегрального многообразия, а также условий его устойчивости и неустойчивости. Для этой цели на основе идей метода функций Ляпунова и метода преобразующей матрицы строятся операторы, позволяющие свести решение указанной задачи к поиску их неподвижных точек.

Ключевые слова: метод функций Ляпунова, метод преобразующей матрицы, устойчивость интегрального многообразия, система обыкновенных дифференциальных уравнений, операторное уравнение.

ON THE STABILITY OF INTEGRAL MANIFOLDS OF A SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE CRITICAL CASE

© 2019 M. I. KUPTSOV, V. A. MINAEV,
A. O. FADDEEV, S. L. YABLOCHNIKOV

ABSTRACT. In this paper, we consider the stability problem for nonzero integral manifolds of a nonlinear, finite-dimensional system of ordinary differential equations whose right-hand side is a periodic vector-valued function with respect to an independent variable containing a parameter. We assume that the system possesses a trivial integral manifold for all values of the parameter and the corresponding linear subsystem does not possess the exponential dichotomy property. We find sufficient conditions for the existence of a nonzero integral manifold in a neighborhood of the equilibrium of the system and conditions for its stability or instability. For this purpose, based of the ideas of the Lyapunov method and the method of transform matrices, we construct operators that allow one to reduce the solution of this problem to the search for fixed points.

Keywords and phrases: Lyapunov method, method of transform matrices, stability of integral manifolds, system of ordinary differential equations, operator equation.

AMS Subject Classification: 34A34, 34C25, 34C45, 34D35

1. Введение. Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f(\nu, y, \dot{y}, t) = 0 \quad (1)$$

для любых ν , t имеет состояние равновесия $y = 0$ и в области Λ ее решения существуют и единственны. Здесь и далее f , y , ν — $(n + m)$ -векторы, $\dot{y} = dy/dt$, $f(\nu, y, \dot{y}, t + T) \equiv f(\nu, y, \dot{y}, t)$, $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$, $\Lambda_1 = \{y : \|y\| \leq \Delta_1\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $\Lambda_2 = \{\nu : \|\nu\| \leq \Delta_2\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, Δ_1, Δ_2 — константы, $\mathbb{R}^p$ — стандартное евклидово пространство размерности p и $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^p$.

Предположим, что замена переменных

$$y = \Gamma(\varepsilon, x, \phi, t), \quad \nu = \xi(\varepsilon) \quad (2)$$

приводит систему (1) к виду

$$\dot{x} = X(\varepsilon, x, \phi, t) \cdot x, \quad \dot{\phi} = \Phi(\varepsilon, x, \phi, t), \quad (3)$$

где Γ , ξ , ε — $(n + m)$ -векторы, X — $(n \times n)$ -матрица, x — n -вектор, ϕ , Φ — m -векторы. Кроме того, будем полагать, что система

$$\dot{x} = X(0, 0, \phi, t) \cdot x, \quad \dot{\phi} = \Phi(0, 0, \phi, t) \quad (4)$$

имеет m -параметрическое семейство ненулевых kT -периодических решений $x = \bar{x}(\phi_0, t)$, $\phi = \bar{\phi}(\phi_0, t)$.

Определение 1. Будем говорить, что у системы (1) существует n -мерное нетривиальное периодическое интегральное многообразие $\Psi(\phi_0, t)$, если для всех ϕ_0 найдется такое значение $\nu_0 = \xi(\varepsilon_0)$ параметра ν , при котором

$$f(\xi(\varepsilon_0), \Gamma(\varepsilon_0, \Psi(\phi_0, t), \phi^\Psi(\phi_0, t), t), \dot{\Gamma}(\varepsilon_0, \Psi(\phi_0, t), \phi^\Psi(\phi_0, t), t), t) \equiv 0,$$

причем $\Psi(\phi_0, t)$ не обращается в нуль ни при каких значениях ϕ_0 и t , является ω -периодическим по компонентам m -вектора ϕ_0 , kT -периодическим по t , где k — натуральное число, $\omega = \text{colop}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$, $\phi = \phi^\Psi(\phi_0, t)$ определяет интегральную кривую на многообразии.

Ставятся задачи изучения проблем существования и устойчивости нетривиального периодического интегрального многообразия системы (1) вблизи ее состояния равновесия.

Вопросы существования и устойчивости (стабильности) инвариантных множеств систем дифференциальных уравнений имеют существенное значение для многих прикладных исследований. Замечательно, что области таких исследований все более и более расширяются и охватывают не только технические и естественнонаучные проблемы, но и философию, социальные и гуманитарные направления. Такие понятия, как нелинейность, бифуркация, аттрактор стали в определенном смысле уже философскими категориями, с помощью которых описывается не только «внешний», но и внутренний мир индивидуума (см. [14]). При моделировании реальных процессов инвариантная поверхность, имеющая меньшую размерность, позволяет упростить рассматриваемые системы, а также изучить их типичные свойства и получить дополнительную информацию об их состоянии. Особенно это характерно для устойчивых многообразий, «притягивающих» к себе траектории с течением времени. Впрочем, и «нестабильные» состояния, представляющие собой сложную смесь устойчивых и неустойчивых траекторий, все чаще возникают в практических моделях. Поэтому изучение интегральных многообразий, поведения траекторий на них и вблизи них позволяет решать многие задачи в различных областях: от теории нелинейных колебаний до диссипативных структур (см., например, [6, с. 6-9]). Однако разнообразие конкретных систем дифференциальных уравнений, возникающих в прикладных исследованиях, порождает трудности в получении общих эффективных методов исследования интегральных многообразий (особенно в критических случаях), что и обуславливает актуальность данной работы.

К наиболее продуктивным методам изучения интегральных многообразий следует отнести метод малого параметра, точечных отображений, усреднения и метод интегральных многообразий. Метод интегральных многообразий, разработанный Н. Н. Боголюбовым, Ю. А. Митропольским и А. М. Самойленко (см. [2, 9, 11]), состоит в построении функции Грина и успешно применяется для многих систем вида (3) (см., например, [8, 15]). Однако в данном случае этот подход

реализовать не удастся, поскольку система (3) при всех значениях параметра имеет нулевое интегральное многообразие, а система (4) — параметрическое семейство периодических решений. Указанные условия удастся обойти лишь с помощью нахождения решения вспомогательного векторного (бифуркационного) уравнения и перехода в его окрестность (см. [1, 3]).

Изложенные в данной статье результаты получены на основе модификации предложенного в [6, 12] метода преобразующей матрицы и метода функций Ляпунова, применение которых позволили получить новые достаточные условия существования как устойчивого, так и неустойчивого локального интегрального многообразия системы (1). Полученные результаты развивают и обобщают работы [4–7, 12, 13].

2. Существование интегрального многообразия. Пусть $F(\phi, t) \in \Omega_1$, $\varepsilon(\phi) \in \Omega_2$ — ω -периодические по компонентам вектора ϕ ограниченные соответственно числами δ_{10} и δ_{20} вектор-функции, удовлетворяющие условию Липшица:

$$\|F(\phi_1, t_1) - F(\phi_2, t_2)\| \leq \delta_{11}\|\phi_1 - \phi_2\| + \delta_{12}|t_1 - t_2|, \quad (5)$$

$$\|\varepsilon(\phi_1) - \varepsilon(\phi_2)\| \leq \delta_{21}\|\phi_1 - \phi_2\|, \quad (6)$$

имеющие соответственно размерность n и l , $0 < l \leq n + m$, $F(\phi, t) - kT$ -периодическая по t ,

$$\|F(\phi, t)\| = \left[\sum_{i=1}^n \sup_{\substack{\phi_j \in [0, \omega_j] \\ t \in [0, kT]}} |F_i(\phi, t)| \right]^{1/2}, \quad \|\varepsilon(\phi)\| = \left[\sum_{i=1}^l \sup_{\phi_j \in [0, \omega_j]} |\varepsilon_i(\phi)| \right]^{1/2}.$$

Отметим, что если для множеств Ω_i ввести указанную норму, то они становятся выпуклыми компактными (см. [6, с. 15]).

Для решения дифференциального уравнения

$$\dot{\phi} = \Phi(\varepsilon(\phi_0), F(\phi_0, t), \phi, t), \quad (7)$$

удовлетворяющего начальным данным $\phi(0) = \phi_0$, примем обозначение ϕ_t^F . Пусть, кроме того, $Y_\varepsilon^F(\phi_0, t)$ — матрицант уравнения

$$\dot{x} = X(\varepsilon(\phi_0), F(\phi_0, t), \phi_t^F, t) \cdot x. \quad (8)$$

Здесь и далее $F(\phi_0, t) \in \Omega_1$, $n + m - l$ значений компонентов вектора ε приняты равными 0, а вместо оставшихся l значений в уравнения системы (3) подставлены элементы функции $\varepsilon(\phi_0) \in \Omega_2$.

Определение 2. Неособенную функциональную $(n \times n)$ -матрицу $Q_\varepsilon^F(\phi_0)$ с постоянным определителем, непрерывную по всем своим переменным и ω -периодическую по компонентам вектора ϕ_0 , будем называть *преобразующей матрицей системы* (3), если у матрицы

$$(Y_\varepsilon^F(\phi_0, kT) - I_n) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0) \quad (9)$$

имеется столбец $q_\varepsilon^F(\phi_0)$, тождественно не обращающийся в нуль. Здесь I_n — единичная $(n \times n)$ -матрица.

Введем обозначения

$$X = \{x : \|x\| \leq \delta_1\} \subset \mathbb{R}^n, \quad E = \{\varepsilon : \|\varepsilon\| \leq \delta_2\} \subset \mathbb{R}^{n+m}, \quad \Theta = \{\phi : \phi_j \in [0, \omega_j]\}.$$

Пусть $\Gamma(\varepsilon, x, \phi, t) \neq 0$ при $x \neq 0$,

$$\Gamma(\varepsilon, 0, \phi, t) \equiv 0, \quad (10)$$

$$\Gamma(\varepsilon, x, \phi, t) \rightarrow 0 \quad (11)$$

при $\|x\| \rightarrow 0$ равномерно относительно совокупности переменных ε, ϕ, t в области $\mathbb{R}^{m+1} \times X \times E$.

Здесь и далее мы предполагаем, что правые части системы (3) являются ω -периодическими по компонентам вектора ϕ и T -периодическими по независимой переменной $t \in \mathbb{R}$, непрерывны и обеспечивают существование и единственность решений системы (3) в области $\mathbb{R}^{m+1} \times X \times E$ при достаточно малых δ_1 и δ_2 . Это, в частности, означает, что замена переменных (2) не

только сохраняет свойства существования и единственности решений системы (1), но и является ω -периодической по ϕ и T -периодической по t .

Рассмотрим систему уравнений

$$q_\varepsilon^F(\phi_0) = 0, \quad \int_0^{kT} \Phi(\varepsilon(\phi_0), F(\phi_0, t), \phi_t^F, t) dt = 0. \quad (12)$$

Теорема 1. Пусть преобразующую матрицу системы (3) удастся построить так, что существуют такое число l ($0 < l \leq n + m$) и такой столбец $q_\varepsilon^F(\phi_0)$, при которых для нахождения решения системы (12) достаточно найти решение некоторой, вообще говоря, отличной от (12) системы l уравнений

$$S_\varepsilon^F(\phi_0) = 0, \quad (13)$$

имеющей для каждой функции $F(\phi_0, t) \in \Omega_1$ единственное решение $\varepsilon^F(\phi_0)$ из множества Ω_2 . Кроме того, пусть при $t \in [0; kT]$ выполнены неравенства

$$\|Y_\varepsilon^F(\phi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0)\| \leq r_0, \quad (14)$$

$$\|Y_\varepsilon^F(\phi_0^*, t^*) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0^*) - Y_\varepsilon^F(\phi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0)\| \leq r_1 \|\phi_0^* - \phi_0\| + r_2 |t^* - t|. \quad (15)$$

Тогда для любого вектора $\phi_0 \in \mathbb{R}^m$ можно указать такое значение параметра ν , что система (1) будет иметь ненулевое интегральное многообразие $\Psi(\phi_0, t) \in \Omega_1$ в окрестности состояния равновесия $y = 0$.

Доказательство теоремы 1 опубликовано в [7, 13], и поэтому здесь мы его не приводим. Отметим лишь, что для интегрального многообразия $\Psi(\phi_0, t)$, существование которого и доказывается в теореме 1, справедливо равенство

$$\Psi(\phi_0, t) = Y_\varepsilon^\Psi(\phi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^\Psi(\phi_0) \cdot C, \quad (16)$$

где все элементы постоянного n -вектора C равны нулю, кроме элемента, соответствующего номеру столбца $q_\varepsilon^\Psi(\phi_0)$, который равен произвольной константе c . При этом значения параметра ε удовлетворяют уравнению (13), а, следовательно, и (12), в которых $F(\phi_0, t) \equiv \Psi(\phi_0, t)$. Тогда выполнены соотношения

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\|\Psi(\phi_0, t)\|}{c} \neq \infty, \quad \lim_{c \rightarrow 0} \|\varepsilon^\Psi(\phi_0)\| = 0.$$

Технику построения преобразующей матрицы продемонстрируем в теореме 2, устанавливающей существование интегрального многообразия по свойствам правых частей системы (3). Случай, когда проблема существования локального интегрального многообразия системы (1) решается по линейным относительно компонент вектора ε членам, подробно рассмотрен в [4–6, 12]. Поэтому будем рассматривать случай, когда линейные члены по компонентам параметра ε не позволяют решить проблему существования локального интегрального многообразия.

Теорема 2. Пусть в области $\mathbb{R}^{m+1} \times X \times E$ при достаточно малых δ_1 и δ_2 функции $X(\varepsilon, x, \phi, t)$, $\Phi(\varepsilon, x, \phi, t)$ липшиц-непрерывны по всем своим переменным, $X(\varepsilon, x, \phi, t)$ имеет квазитреугольный вид

$$X(\varepsilon, x, \phi, t) = \begin{pmatrix} X_1(\varepsilon, x, \phi, t) & X_3(\varepsilon, x, \phi, t) \\ \Xi & X_2(\varepsilon, x, \phi, t) \end{pmatrix},$$

$$X(\varepsilon, 0, \phi, t) = \text{diag} (X_1(\varepsilon, 0, \phi, t), X_2(\varepsilon, 0, \phi, t)),$$

$$X_1(0, 0, \phi, kT) = \text{const}, \quad \det \left(\exp (X_1(0, 0, \phi, kT)) - I_{n-p} \right) \neq 0,$$

$$X_2(\varepsilon, x, \phi, t) = \text{diag} \left(\alpha_1(\varepsilon, x, \phi, t), \alpha_2(\varepsilon, x, \phi, t), \dots, \alpha_p(\varepsilon, x, \phi, t) \right),$$

$$\Phi(\varepsilon, x, \phi, t) = \text{colon} \left(\alpha_{p+1}(\varepsilon, x, \phi, t), \alpha_{p+2}(\varepsilon, x, \phi, t), \dots, \alpha_{p+m}(\varepsilon, x, \phi, t) \right),$$

причем для $\bar{p}$ номеров i выполняются условия

$$\alpha_i(\varepsilon, x, \phi, t) = a_{i1}\varepsilon_1 + a_{i2}\varepsilon_2 + \dots + a_{in+m}\varepsilon_{n+m} + \bar{\alpha}_i(\varepsilon, x, \phi, t),$$

$$\lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} \frac{\|\bar{\alpha}_i(\varepsilon, 0, \phi, t)\|}{\|\varepsilon\|} = 0,$$

для остальных $p - \bar{p} + t$ номеров i выполняются условия

$$\alpha_i(\varepsilon, x, \phi, t) = (\varepsilon_{j_i})^{p_i} - \tilde{\alpha}_i(\varepsilon, x, \phi, t),$$

$$\lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} \frac{\|\tilde{\alpha}_i(\varepsilon, 0, \phi, t)\|}{\|\varepsilon\|} = 0,$$

p_i — рациональное число ($1 < p_i$), $\tilde{\alpha}_i(\varepsilon, x, \phi, t)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим переменным. Если при этом $(-1)^{p_i} = 1$, то для соответствующих номеров i функции $\tilde{\alpha}_i(\varepsilon, x, \phi, t)$ являются в области $\mathbb{R}^{m+1} \times X \times E$ положительно определенными.

Пусть, кроме того, определитель $\bar{p} \times \bar{p}$ -матрицы $\bar{A}$, составленной из $\bar{p}$ столбцов $(\bar{p} \times (n+m))$ -матрицы $A = (a_{ik})$ с номерами, отличными от j_i , не равен 0. Здесь и далее $X_1(\varepsilon, x, \phi, t)$, $X_2(\varepsilon, x, \phi, t)$, $X_3(\varepsilon, x, \phi, t)$ — соответственно $(n-p) \times (n-p)$ -, $p \times p$ -, $(n-p) \times p$ -матрицы, элементами постоянной $p \times (n-p)$ -матрицы Ξ являются нули, $\bar{\alpha}_i(\varepsilon, x, \phi, t)$ и $\tilde{\alpha}_i(\varepsilon, x, \phi, t)$ — скалярные функции, среди номеров j_i нет одинаковых.

Тогда для любого вектора $\phi_0 \in \mathbb{R}^m$ можно указать такое значение параметра ν , что система (1) будет иметь ненулевое интегральное многообразие $\Psi(\phi_0, t) \in \Omega_1$ в окрестности состояния равновесия $y = 0$.

Доказательство. В силу свойств правых частей системы (3), решение ϕ_t^F уравнения (7) ограничено, удовлетворяет условию Липшица по всем своим переменным при $t \in [0; kT]$ и ω -периодическое по начальным данным ϕ_0 . Тогда и матрицант $Y_\varepsilon^F(\phi_0, t)$ уравнения (8) обладает точно такими же свойствами (см., например, [6, с. 29]).

Можно показать (см., например, [6, с. 34]), что для матрицанта уравнения (8) справедливо представление

$$Y_\varepsilon^F(\phi_0, t) = \bar{Y}_\varepsilon^F(\phi_0, t) + \tilde{Y}_\varepsilon^F(\phi_0, t),$$

в котором $\bar{Y}_\varepsilon^F(\phi_0, t)$ является матрицантом системы уравнений

$$\dot{x} = X(\varepsilon(\phi_0), 0, \phi_t^F, t) \cdot x,$$

а $\tilde{Y}_\varepsilon^F(\phi_0, t)$ ограничено, удовлетворяет условию Липшица по всем своим переменным при $t \in [0; kT]$ с постоянными, которые можно сделать как угодно малыми за счет уменьшения числа δ_{10} (т.е. $\|F(\phi_0, t)\| \leq \delta_{10}$).

Поскольку матрица $X(\varepsilon, x, \phi, t)$ имеет квазитреугольный вид, то

$$Y_\varepsilon^F(\phi_0, kT) - I_n = \begin{pmatrix} Y_{11}(\varepsilon, F, \phi_0) & Y_{12}(\varepsilon, F, \phi_0) \\ \Xi & Y_{22}(\varepsilon, F, \phi_0) \end{pmatrix},$$

где матрицы $Y_{11}(\varepsilon, F, \phi_0)$, $Y_{12}(\varepsilon, F, \phi_0)$, $Y_{22}(\varepsilon, F, \phi_0)$ имеют соответственно типы $(n-p) \times (n-p)$, $(n-p) \times p$, $p \times p$. Тогда, в силу выполнения неравенства

$$\det \left(\exp(X_1(0, 0, \phi, kT)) - I_{n-p} \right) \neq 0,$$

уменьшением постоянных δ_1 и δ_2 можно достичь выполнения соотношения

$$\left| \det(Y_{11}(\varepsilon, F, \phi_0)) \right| \geq a_0 \neq 0.$$

Это означает, что существует обратная матрица $(Y_{11}(\varepsilon, F, \phi_0))^{-1}$ к матрице $Y_{11}(\varepsilon, F, \phi_0)$, которая также ограничена, ω -периодична по ϕ_0 и удовлетворяет условию Липшица по ϕ_0 .

Пусть вектор $\bar{q} = \text{colon}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_{n-p})$ определяется равенством

$$\bar{q} = -(Y_{11}(\varepsilon, F, \phi_0))^{-1} \times Y_{12}(\varepsilon, F, \phi_0) J_1,$$

где элементами постоянного $(p \times 1)$ -вектора J_1 являются единицы. Тогда преобразующую матрицу системы (3) выберем в виде

$$Q_\varepsilon^F(\phi_0) = \begin{pmatrix} I_{n-p} & \bar{Q} \\ \Xi & J_p \end{pmatrix},$$

где среди элементов $((n-p) \times p)$ -матрицы $\bar{Q}$ ненулевыми являются лишь элементы $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_{n-p}$ последнего столбца, а среди элементов $(p \times p)$ -матрицы J_p ненулевыми являются лишь элементы главной диагонали и последнего столбца, все равные 1.

Поскольку элементы вектора $\bar{q}$ представляют собой линейные комбинации элементов матриц $(Y_{11}(\varepsilon, F, \phi_0))^{-1}$ и $Y_{12}(\varepsilon, F, \phi_0)$, то $Q_\varepsilon^F(\phi_0)$ ограничена, ω -периодична по ϕ_0 и удовлетворяет условию Липшица по ϕ_0 и, значит, будет выполнено (14) и (15).

В силу выбора преобразующей матрицы $Q_\varepsilon^F(\phi_0)$ у последнего столбца $q_\varepsilon^F(\phi_0)$ матрицы (9) будет ровно p ненулевых компонент. Действительно, первые $n-p$ координат столбца $q_\varepsilon^F(\phi_0)$ примут вид $Y_{11}(\varepsilon, F, \phi_0)\bar{q} + Y_{12}(\varepsilon, F, \phi_0)J_1 \equiv 0$, а остальные p координат запишутся следующим образом: $Y_{22}(\varepsilon, F, \phi_0)J_1$. Диагональный вид $X_2(\varepsilon, 0, \phi, t)$ матрицы обеспечивает и диагональность матрицы $Y_{22}(\varepsilon, F, \phi_0)$.

Выберем теперь число $l = p + m$ и отметим, что из свойств функций $\alpha_i(\varepsilon, x, \phi, t)$ следует, что в системе (12) ровно $p - \bar{p} + m$ уравнений не содержат линейных по компонентам параметра ε членов. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что первые $\bar{p}$ уравнений системы (12) содержат члены, линейные по компонентам параметра ε , а остальные $p - \bar{p} + m$ уравнений — нет.

По условиям теоремы 2 каждое из этих $p - \bar{p} + m$ уравнений может быть представлено в виде $\varepsilon_{j_i} = \pm (f_i(\varepsilon, F, \phi_0))^{1/p_i}$, если $(-1)^{p_i} = 1$, или в виде

$$\varepsilon_{j_i} = (f_i(\varepsilon, F, \phi_0))^{1/p_i}, \quad (17)$$

если $(-1)^{p_i} = -1$. При этом функции $f_i(\varepsilon, 0, \phi_0)$ содержат члены более высокого порядка по ε , чем p_i .

Таким образом, оператор $S_\varepsilon^F(\phi_0)$ (см. (13)) зададим первыми $\bar{p}$ уравнениями системы (12) и $l - \bar{p}$ уравнениями вида (17). Обозначим символом Ξ нулевую $((l - \bar{p}) \times \bar{p})$ -матрицу, а символом $\bar{A} - \bar{p} \times (l - \bar{p})$ -матрицу, состоящую из $l - \bar{p}$ столбцов матрицы A , не вошедших в матрицу $\bar{A}$. Значит, система уравнений (13) может быть записана следующим образом:

$$\tilde{A}\varepsilon(\phi_0) = Y(\varepsilon, F, \phi_0),$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{A} \\ \Xi & I_{l-\bar{p}} \end{pmatrix},$$

т.е. $\det \tilde{A} \neq 0$. Кроме того, функция $Y(\varepsilon, F, \phi_0)$ является ω -периодической по ϕ_0 , ограниченной и удовлетворяет условию Липшица по ϕ_0 с постоянными, которые можно сделать как угодно близкими к нулю за счет уменьшения чисел δ_{ik} (см. (5), (6)).

Тогда путем уменьшения чисел δ_{ik} легко убедиться, что оператор, задающий уравнение (13), является сжимающим и для каждой функции $F(\phi_0, t) \in \Omega_1$ переводит пространство Ω_2 в Ω_2 . Этим фактом окончательно устанавливается выполнение всех условий теоремы 1 и, следовательно, существование локального ненулевого интегрального многообразия системы (1). Теорема 2 доказана. $\square$

3. Устойчивость и неустойчивость интегрального многообразия. Пусть теперь и далее выполнены условия теоремы 1 и, значит, у системы (1) при некоторых значениях параметра $\nu_0 = \xi(\varepsilon_0)$ имеется интегральное многообразие $\Psi(\phi_0, t) \in \Omega_1$, $\Psi(\phi_0, 0) = \Psi_0$. Обозначим через $x(x_0, \phi_0, t)$, $\phi(x_0, \phi_0, t)$ решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным данным $x(x_0, \phi_0, 0) = x_0$, $\phi(x_0, \phi_0, 0) = \phi_0$.

Теорема 3 (см. [13]). Если при $\varepsilon = \varepsilon_0$ существует знакоопределенная функция $V(x, t)$, для которой функция

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V(x(x_0, \phi_0, t) - \Psi(\phi_0, t), t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x(x_0, \phi_0, t) - \Psi(\phi_0, t), t)}{\partial x_i} \quad (18)$$

знакопостоянна и имеет знак, противоположный к знаку $V(x, t)$, то при $\nu_0 = \xi(\varepsilon_0)$ интегральное многообразие $\Psi(\phi_0, t)$ системы (1) устойчиво.

Заметим, что в отличие от [10] устойчивость здесь подразумевается относительно всех переменных y , причем задача устойчивости полностью решается по свойствам лишь части переменных x .

Справедливы и общие теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости интегрального многообразия. Схемы доказательства этих фактов в целом повторяют классические рассуждения (см., например, [10]) с некоторыми модификациями, обусловленными спецификой рассматриваемой системы (1).

Теорема 4. Если при $\varepsilon = \varepsilon_0$ существует знакоопределенная функция $V(x, t)$, для которой функция (18) знакоопределена и имеет знак, противоположный к знаку $V(x, t)$, а сама функция $V(x, t)$ допускает бесконечно малый высший предел, то при $\nu_0 = \xi(\varepsilon_0)$ интегральное многообразие $\Psi(\phi_0, t)$ системы (1) устойчиво асимптотически.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $V(x, t)$ положительна. Тогда из теоремы 3 следует устойчивость многообразия $\Psi(\phi_0, t)$. Значит, начальные данные x_0 можно выбрать настолько близкими к Ψ_0 , что при $t \in [0; +\infty)$ выполнено неравенство $dV/dt < 0$ (см. (18)) и функция

$$V(x(x_0, \phi_0, t) - \Psi(\phi_0, t), t) \quad (19)$$

убывает.

Если предположить, что разность (19) ограничена снизу, то

$$\|x(x_0, \phi_0, t) - \Psi(\phi_0, t)\| \geq l_1 > 0 \quad (20)$$

и, следовательно, $dV/dt \leq -l_2$, $l_2 > 0$. Значит,

$$V(x(x_0, \phi_0, t) - \Psi(\phi_0, t), t) = V(x_0 - \Psi_0, 0) + \int_0^t \frac{dV}{dt} dt \leq V(x_0 - \Psi_0, 0) - l_2 t,$$

что противоречит (20). Поэтому предположение об ограниченности снизу функции (19) неверно и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(x_0, \phi_0, t) - \Psi(\phi_0, t), t) = 0,$$

а тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(x_0, \phi_0, t) - \Psi(\phi_0, t)\| = 0.$$

Теперь справедливость теоремы 4 следует из тождества (10) и предела (11). $\square$

Определение 3. Функцию $y = \Gamma(\varepsilon, x, \phi, t)$, удовлетворяющую соотношениям (10) и (11), будем называть *равномерно возрастающей по x* , если для любого достаточно малого $\epsilon_1 > 0$ найдется такое $\epsilon_2 > 0$, что из неравенства $\|x\| > \epsilon_2$ вытекает неравенство $\|\Gamma(\varepsilon, x, \phi, t)\| > \epsilon_1$ сразу для всех ε, ϕ, t в области $\mathbb{R}^{m+1} \times X \times E$, где $\epsilon_2 < \delta_1$.

Теорема 5. Если функция $y = \Gamma(\varepsilon, x, \phi, t)$ равномерно возрастает по x и при $\varepsilon = \varepsilon_0$ существует допускающая бесконечно малый высший предел функция $V(x, t)$, для которой производная (18) знакоопределена, а сама функция $V(x, t)$ в области $X \times \mathbb{R}$ при сколь угодно малой δ_1 может принимать значения того же знака, что и производная (18), то при $\nu_0 = \xi(\varepsilon_0)$ интегральное многообразие $\Psi(\phi_0, t)$ системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Пусть $\epsilon_1 > 0$ — произвольное сколь угодно малое число, $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $dV/dt > 0$. Значит, можно выбрать постоянную $\epsilon_2 > 0$ и начальные данные x_0 настолько близкими к Ψ_0 , чтобы одновременно выполнялось неравенство

$$\|\Gamma(\varepsilon_0, x_0, \phi_0, 0) - \Gamma(\varepsilon_0, \Psi_0, \phi_0, 0)\| \leq \epsilon_1, \quad (21)$$

где $\|\Gamma(\varepsilon, x, \phi, t)\| > \epsilon_1$ при $\|x\| > \epsilon_2$, $V(x_0 - \Psi_0, 0) > 0$. Поэтому

$$\|x_0 - \Psi_0\| \leq \epsilon_2. \quad (22)$$

Предположим, что с течением времени неравенство (22) не нарушится. Тогда, поскольку $dV/dt > 0$, имеем

$$V(x(x_0, \phi_0, t) - \Psi(\phi_0, t), t) > V(x_0 - \Psi_0, 0) \quad \text{при } t \in (0; +\infty)$$

и, следовательно,

$$\|x(x_0, \phi_0, t) - \Psi(\phi_0, t)\| \geq \epsilon_3 > 0.$$

Но тогда $dV/dt \geq \epsilon_4 > 0$ и, значит,

$$V(x(x_0, \phi_0, t) - \Psi(\phi_0, t), t) \geq V(x_0 - \Psi_0, 0) + \epsilon_4 t,$$

что противоречит ограниченности функции $V(x, t)$ в области (22). Полученное противоречие доказывает, что с течением времени неравенство (22) нарушается и вместе с ним нарушается неравенство (21). Таким образом, интегральное многообразие $\Psi(\phi_0, t)$ системы (1) неустойчиво. Теорема 5 доказана. $\square$

В качестве иллюстрации использования теорем 4 и 5 рассмотрим простейшие системы вида (1) (примеры к теореме 3 см. в [13]).

Пример 1. Положим

$$\beta_1 = \nu_1 - \nu_1^2 + y_1^2 + y_2^2, \quad \beta_2 = \sin t + \nu_1 + \nu_2 + y_1 + y_2^2.$$

Рассмотрим систему двух уравнений

$$\dot{y}_1 = \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2, \quad \dot{y}_2 = \beta_2 y_1 + \beta_1 y_2, \quad (23)$$

содержащую только скалярные величины. Замена $y_1 = x \cos \phi$, $y_2 = x \sin \phi$, $\varepsilon_i = \nu_i$ приводит уравнения (23) к виду (3):

$$\dot{x} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 + x^2)x, \quad \dot{\phi} = \sin t + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + x \cos \phi + x^2 \sin^2 \phi,$$

причем соответствующая линейная подсистема (4)

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{\phi} = \sin t$$

имеет однопараметрическое семейство ненулевых 2π -периодических решений

$$x = 1, \quad \phi = \phi_0 + 1 - \cos t.$$

Тогда уравнения (7) и (8) соответственно запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \sin t + \varepsilon_1(\phi_0) + \varepsilon_2(\phi_0) + F(\phi_0, t) \cos \phi + F^2(\phi_0, t) \sin^2 \phi, \\ \dot{x} &= (\varepsilon_1(\phi_0) - \varepsilon_1^2(\phi_0) + F^2(\phi_0, t))x, \end{aligned}$$

а матрицант уравнения (8)

$$Y_\varepsilon^F(\phi_0, t) = \exp \left[(\varepsilon_1(\phi_0) - \varepsilon_1^2(\phi_0))t + \int_0^t F^2(\phi_0, \tau) d\tau \right].$$

Выбирая теперь преобразующую матрицу $Q_\varepsilon^F(\phi_0) \equiv 1$, приходим к уравнению $q_\varepsilon^F(\phi_0) = 0$ (см. (12)):

$$\exp \left[2\pi(\varepsilon_1(\phi_0) - \varepsilon_1^2(\phi_0)) + \int_0^{2\pi} F^2(\phi_0, t) dt \right] - 1 = 0,$$

или

$$\varepsilon_1(\phi_0) - \varepsilon_1^2(\phi_0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F^2(\phi_0, t) dt = 0.$$

Введя обозначение

$$D_F(\phi_0) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} F^2(\phi_0, t) dt,$$

получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^F(\phi_0) &= \frac{1 - \sqrt{D_F(\phi_0)}}{2}, \\ \varepsilon_2^F(\phi_0) &= -\varepsilon_1^F(\phi_0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(F(\phi_0, t) \cos \phi_t + F^2(\phi_0, t) \sin^2 \phi_t \right) dt; \end{aligned}$$

эти функции являются единственным решением уравнения (13) для каждой функции $F(\phi_0, t)$. Значит, по теореме 1 у системы (23) существует интегральное многообразие $\Psi(\phi_0, t)$, удовлетворяющее (16):

$$\Psi(\phi_0, t) = c \exp \left[\left(\varepsilon_1^\Psi(\phi_0) - (\varepsilon_1^\Psi(\phi_0))^2 \right) t + \int_0^t \Psi^2(\phi_0, \tau) d\tau \right].$$

Можно показать, что в данном случае выполняется соотношение $\Psi(\phi_0, t) \equiv c$, т.е.

$$\varepsilon_1^\Psi(\phi_0) - (\varepsilon_1^\Psi(\phi_0))^2 \equiv -c^2, \quad \varepsilon_2^\Psi(\phi_0) = -\varepsilon_1^\Psi(\phi_0) - \frac{c}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos \phi_t^\Psi + c \sin^2 \phi_t^\Psi \right) dt.$$

Выберем функцию $V(x, t) \equiv x^2$. Заметим, что в силу теоремы о существовании и единственности решений функция $x(x_0, \phi_0, t)$ того же знака, что и $\Psi(\phi_0, t) \equiv c$, и поэтому

$$\frac{dV}{dt} = 2(x - c)^2(x + c)x > 0$$

(см. (18)). Таким образом, из теоремы 5 следует, что интегральное многообразие $\Psi(\phi_0, t)$ неустойчиво.

Если же в системе (23) $\beta_1 = \nu_1 - \nu_1^2 - y_1^2 - y_2^2$, то

$$\varepsilon_1^\Psi(\phi_0) - (\varepsilon_1^\Psi(\phi_0))^2 \equiv c^2$$

и, значит,

$$\frac{dV}{dt} = -2(x - c)^2(x + c)x < 0,$$

т.е. по теореме 4 многообразие $\Psi(\phi_0, t)$ асимптотически устойчиво.

Таким образом, удалось получить новые достаточные условия существования устойчивых и неустойчивых интегральных многообразий системы (1). При этом задача устойчивости (неустойчивости) по всем переменным y решается по свойствам лишь части переменных x . Дальнейшее развитие изложенных в данной работе результатов видится в построении функций Ляпунова $V(x, \phi_0, t)$, зависящих от векторного параметра ϕ_0 , и доказательств для таких функций аналогов теорем 3, 4 и 5.

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору М. Т. Терехину за благожелательное внимание к нашей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибииков Ю. Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1991.
2. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. — Львов: Изд-во АН УССР, 1945.
3. Волков Д. Ю. Бифуркация инвариантных торов из состояния равновесия при наличии нулевых характеристических чисел// Вестн. Ленингр. ун-та. — 1988. — 1, № 2. — С. 102–103.
4. Купцов М. И. Локальное интегральное многообразие систем дифференциальных уравнений, зависящих от параметра// Диффер. уравн. — 1999. — 35, № 11. — С. 1579–1580.
5. Купцов М. И. Существование интегрального многообразия системы дифференциальных уравнений// Диффер. уравн. — 1998. — 34, № 6. — С. 855.
6. Купцов М. И. Существование интегральных многообразий и периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Ижевск: Удмурт. гос. ун-т, 1997.
7. Купцов М. И., Терехин М. Т., Теняев В. В. К проблеме существования интегральных многообразий системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных// Ж. Средневолж. мат. об-ва. — 2017. — 19, № 2. — С. 76–84.
8. Курбанишоев С. З., Нусайриев М. А. Построение оптимальных интегральных многообразий для нелинейных дифференциальных уравнений// Докл. АН Респ. Таджикистан. — 2014. — 57, № 11–12. — С. 807–812.
9. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973.
10. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987.
11. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987.
12. Kuptsov M. I. Local integral manifold of a system of differential equations// Differ. Equations. — 1998. — 34, № 7. — P. 1005–1007.
13. Kuptsov M. I., Minaev V. A. Stability integral manifold of the differential equations system in critical case// J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — 973. — 012055.
14. Prigogine I. The philosophy of instability// Futures. — 1989. — № 21. — P. 396–400.
15. Sobolev V. Slow integral manifolds and control problems in critical and twice critical cases// J. Phys. Conf. Ser. — 2016. — 727. — 012017.

Купцов Михаил Иванович

Рязанский государственный радиотехнический университет

E-mail: kuptsov_michail@mail.ru

Минаев Владимир Александрович

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

E-mail: m1va@yandex.ru

Фаддеев Александр Олегович

Академия права и управления Федеральной службы исполнения наказаний России, Рязань

E-mail: fao1@mail.ru

Яблочников Сергей Леонтьевич

Академия права и управления Федеральной службы исполнения наказаний России, Рязань

E-mail: vvkfek@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 71–79
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-71-79

УДК 517.925.51

СКРЫТАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В СИСТЕМАХ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

© 2019 г. С. С. МАМОНОВ, И. В. ИОНОВА, А. О. ХАРЛАМОВА

Аннотация. В работе рассматривается одна из разновидностей радиотехнических систем, а именно, система частотно-фазовой автоподстройки частоты (ЧФАПЧ). Математическая модель такой системы описывается системой дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством. Для системы ЧФАПЧ определены условия формирования скрытой синхронизации.

Ключевые слова: скрытая синхронизация, система частотно-фазовой автоподстройки частоты, предельный цикл первого рода, квазисинхронный режим, режим биений, положительно инвариантное множество, вращение векторного поля.

HIDDEN SYNCHRONIZATION IN PHASE LOCKED LOOP SYSTEMS

© 2019 S. S. MAMONOV, I. V. IONOVA, A. O. KHARLAMOVA

ABSTRACT. This paper is devoted to the analysis of frequency-phase locked loop systems (FPLL). The mathematical model of this system is a system of differential equations with a cylindrical phase space. For the FPLL system, we obtain conditions of latent synchronization.

Keywords and phrases: hidden synchronization, frequency-phase locked loop, limit cycle of the first kind, quasisynchronous mode, beat mode, positively invariant set, rotation of a vector field.

AMS Subject Classification: 34K05, 34K13, 34K60

Рассмотрим систему частотно-фазовой автоподстройки частоты (ЧФАПЧ), описываемую операторным уравнением (см. [2, 3, 15, 16])

$$p\sigma(t) + \Omega_1 K_1(p) F_1(\sigma(t)) + \Omega_2 K_2(p) F_2(p\sigma(t)) = \Omega_H, \quad (1)$$

где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования, $\sigma(t)$ — разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов, Ω_1 — полоса удержания кольца фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), Ω_2 — полоса удержания частотного кольца, $K_1(p)$ и $K_2(p)$ — коэффициенты передачи фильтров нижних частот в фазовой и частотных цепях управления, $F_1(\sigma(t))$ и $F_2(p\sigma(t))$ — характеристики фазового и частотного детекторов, Ω_H — начальная расстройка. Заменой переменных операторное уравнение (1) сводится к системе дифференциальных уравнений, определяющую математическую модель системы частотно-фазовой автоподстройки частоты (см. [1, 5–14])

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) + d \frac{2\alpha\beta c^T x}{1 + \beta^2 (c^T x)^2}, \quad \dot{\sigma} = c^T x, \quad (2)$$

где A — квадратная $(n \times n)$ -матрица, $x, b, c, d \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varphi(\sigma)$ — Δ -периодическая непрерывно дифференцируемая функция.

Теория систем фазовой синхронизации регулярных сигналов достаточно хорошо развита. В фазовом пространстве системы режиму синхронизации соответствует устойчивое состояние равновесия. Для систем фазовой автоподстройки (ФАП) в работах В. В. Матросова, В. Д. Шалфеева (см. [1, 15, 16]) показано, что при разных видах фильтра нижних частот может произойти нарушение устойчивости состояния равновесия и возникновение около него устойчивого предельного цикла. В этом случае в системе устанавливается квазисинхронный режим, для которого усредненная частота колебаний генератора совпадает с частотой внешнего сигнала, что определяет существование режима фазовой синхронизации. Скрытая синхронизация основывается на понятии «скрытые колебания», сформулированного в работах Г. А. Леонова, Н. В. Кузнецова, И. М. Буркина. Характерной особенностью скрытых колебаний является невозможность попадания на него по траектории с начальными значениями из окрестности состояния равновесия. В данной работе под скрытой синхронизацией понимается наличие в системе устойчивого цикла первого рода, для которого усредненная частота колебаний генератора совпадает с частотой внешнего сигнала, при этом цикл не является «глобально устойчивым».

Определение 1 (см. [15, 16]). Пусть для системы (2) существует цикл первого рода $z^*(t) = \text{colon}(x^*(t), \sigma(t))$ с периодом T , для которого

$$\langle \dot{\sigma} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\sigma}(t) dt = 0.$$

Тогда цикл $z^*(t)$ определяет квазисинхронный режим системы фазовой синхронизации.

С квазисинхронными режимами связано явление джиттера, которое определяется как отклонение временного положения информационных сигналов в трактах вычислительных и телекоммуникационных устройств от заданных значений. Джиттер является следствием совокупного действия множества дестабилизирующих факторов, специфичных для разных классов устройств хранения и передачи данных. Одним из факторов появления джиттера является фазовая модуляция сигнала; при этом частота отклонения фазы называется частотой джиттера. Проблема выделения компонент джиттера представляет собой сложную техническую задачу, требующую разработку математического аппарата определения фазовой синхронизации.

Определение 2. Пусть у системы (2) существует цикл первого рода $z^*(t)$, определяющий режим квазисинхронизма системы фазовой автоподстройки, который не является «глобально» устойчивым. Тогда система ФАП обладает скрытой синхронизацией.

В работе рассматриваются механизмы возникновения скрытой синхронизации; один из таких механизмов связан с использованием частотного управления радиотехнической модели (1). На базе принципа тора (см. [5]) разработаны аналитические методы определения квазисинхронных режимов (см. [9, 10, 12, 13]), которые позволяют использовать численные методы анализа частотно-амплитудных характеристик квазисинхронных режимов для системы ЧФАПЧ с фильтрами второго порядка. В [9, 10, 12, 13] предлагаются новые конструкции для построения положительно инвариантных тороидальных множеств, используемых для нахождения начальных условий колебательных циклов системы (2). Примеры таких множеств изображены на рис. 1(а) (множество построено на основе цилиндрических поверхностей второго порядка, без использования решения матричных уравнений) и на рис. 1(б) (множество получено с помощью решения системы трех матричных уравнений, определяющего границы сферической поверхности).

Установлено, что устранение частотного кольца приводит к сохранению квазисинхронных режимов системы ФАПЧ, что позволяет определить численный метод обнаружения скрытой синхронизации системы ФАПЧ при отсутствии частотного кольца (см. [10]). В настоящее время известны многочисленные результаты, связанные с бифуркацией колебательного цикла. Однако малоизученным является вопрос о количестве и методах обнаружения неустойчивых циклов, возникающих в результате бифуркации. Бифуркации циклов приводят к изменению характеристики $\langle \dot{\sigma} \rangle$ квазисинхронного режима. Для оценки качества скрытой синхронизации предлагается использовать мультипликаторы циклов. В системе (2) происходит бифуркация устойчивого

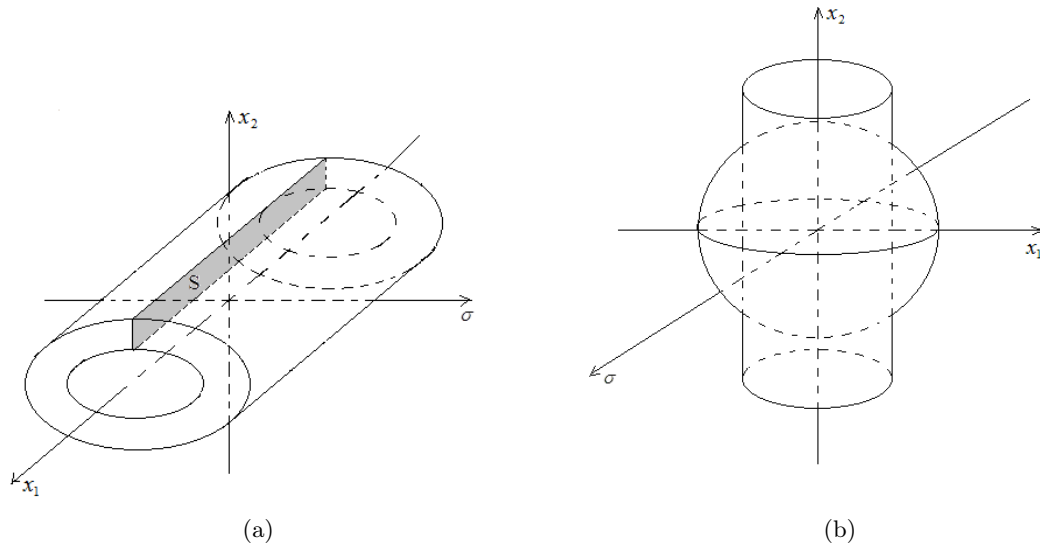


Рис. 1

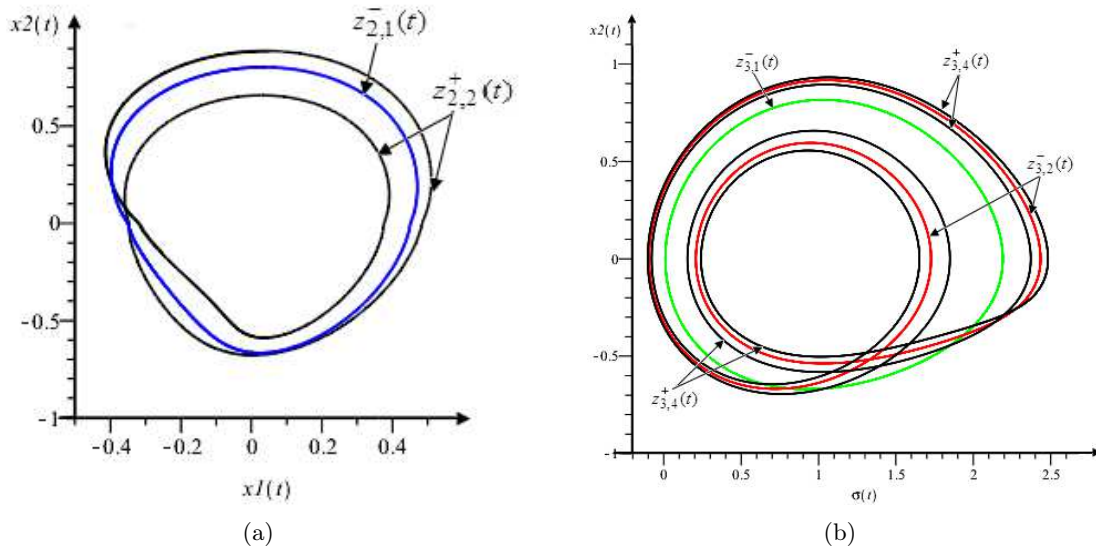


Рис. 2

однооборотного цикла $z_1^+(t)$ в устойчивый двухоборотный цикл $z_{2,2}^+(t)$; при этом наблюдается неустойчивый однооборотный цикл $z_{2,1}^-(t)$ (см. [9]). В дальнейшем появляется один однооборотный неустойчивый цикл $z_{3,1}^-(t)$, один двухоборотный неустойчивый цикл $z_{3,2}^-(t)$ и один четырехоборотный устойчивый цикл $z_{3,4}^+(t)$; при этом неустойчивый цикл $z_{2,1}^-(t)$ трансформируется в неустойчивый цикл $z_{3,1}^-(t)$. На рис. 2(a) изображены циклы $z_{2,1}^-(t)$, $z_{2,2}^+(t)$, а на рис. 2(b) — циклы $z_{3,1}^-(t)$, $z_{3,2}^-(t)$, $z_{3,4}^+(t)$.

Численный анализ показал, что при бифуркации цикла происходит изменение значений

$$\langle \dot{\sigma}_{z_1^+(t)} \rangle = 0,008, \quad \langle \dot{\sigma}_{z_{2,2}^+(t)} \rangle = 0,0589, \quad \langle \dot{\sigma}_{z_{3,4}^+(t)} \rangle = 0,003,$$

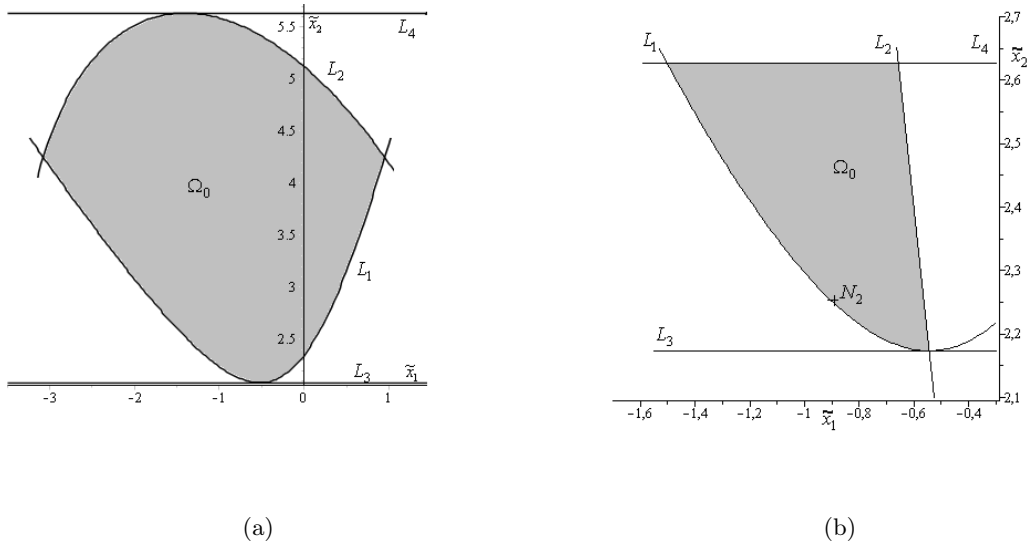


Рис. 3

для качества синхронизации получены мультипликаторы циклов

$$\begin{aligned} \mu_1(z_1^+(t)) &= -0,81125, & \mu_2(z_1^+(t)) &= -0,01725, & \mu_1(z_{2,2}^+(t)) &= -0,14303, \\ \mu_2(z_{2,2}^+(t)) &= -0,00032, & \mu_1(z_{3,4}^+(t)) &= 0,19763, & \mu_2(z_{3,4}^+(t)) &= 1,7402 \cdot 10^{-7}. \end{aligned}$$

Следующий механизм появления скрытой синхронизации связан с появлением в системе (2) циклов второго рода или вращательных режимов в системе ФАПЧ.

Определение 3 (см. [5]). Решение $z(t, z_0) = \begin{pmatrix} x(t, x_0) \\ \sigma(t, \sigma_0) \end{pmatrix}$ системы (2) называется *предельным циклом второго рода* или *вращательным циклом*, если существуют такие $\tau > 0$ и целое число $j \neq 0$, что для любого t выполняются равенства

$$x(t + \tau, x_0) = x(t, x_0), \quad \sigma(t + \tau, \sigma_0) = \sigma(t, \sigma_0 + \Delta_j).$$

В случае реализации в системе вращательного цикла средняя частота колебаний генератора и частота внешнего сигнала не совпадают, что приводит к появлению у системы асинхронного режима (см. [2, 3, 15, 16]). Вращательные режимы предшествуют режиму синхронизации, что позволяет рассматривать их как генератор модулированных колебаний. Реализация в системе нескольких вращательных режимов позволяет выделить в системе область притяжения, которая определяет начальные условия режимов скрытой синхронизации системы ЧФАПЧ. Сечения положительно инвариантных множеств, используемых для нахождения начальных условий устойчивых предельных циклов второго рода системы (2), изображены на рис. 3 (см. [7, 8]).

На рис. 4(a) изображены области Ω_{10} и Ω_{20} , определяющие положительно инвариантные множества, содержащие начальные условия двух предельных циклов второго рода системы (2). На рис. 4(b) изображена область Ω_3 , определяющая гиперболически инвариантное множество, содержащее начальные условия неустойчивого предельного цикла второго рода (см. [8]).

Система ЧФАПЧ, в зависимости от характеристик частотного кольца, наряду с квазисинхронными режимами может обладать и вращательными режимами. Таким образом, существование в системе ЧФАПЧ одновременно колебательных и вращательных режимов обеспечивает наличие скрытой синхронизации. В случае отсутствия частотного кольца в системе ФАПЧ, множителя $K_2(p)$ в уравнении (1) и $\alpha = 0$ в системе (2), механизм появления скрытой синхронизации связан с изменением затухания фильтра нижних частот. Если фильтр нижних частот системы ФАПЧ задается равенством

$$K_1(p) = \frac{A_1 p + A_2}{B_0 p^2 + B_1 p + B_2},$$

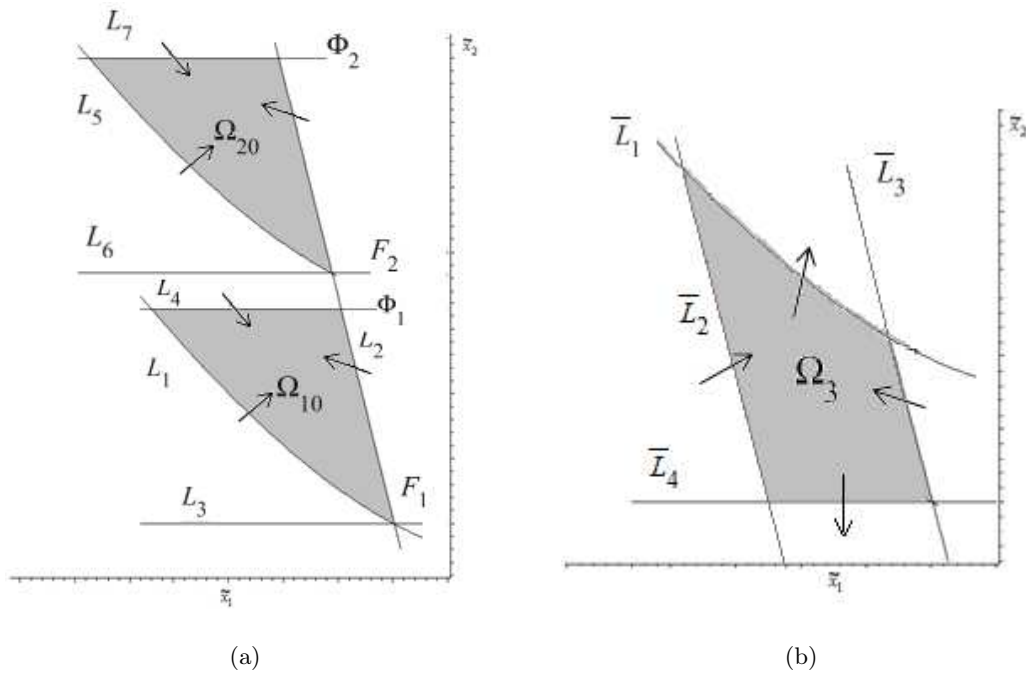


Рис. 4

то ограниченность затухания системы ФАПЧ определяет знак параметра

$$\nu = l^T b = (B_1 A_1 B_0^{-1} - A_2) B_0^{-1} = -\nu_1,$$

где $l^T = c^T A$.

Для математической модели системы ФАПЧ рассматривается вспомогательная нефазовая система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x + u\psi(\sigma), \quad (3)$$

где $x, b, c \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A = l^T$, $l^T b = -\nu_1$, $c^T A^{-1} \neq 0$, $\text{rank} \|c, l\| = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\psi(\sigma) = \nu_1 \beta_1^{-1} \varphi(\sigma) - \alpha_1 \sigma$, $\varphi(\sigma) - \Delta$ -периодическая функция, имеющая два нуля на периоде $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$, $0 = \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$, $\dot{\varphi}(0) > 0$, $\dot{\varphi}(\sigma_2) < 0$, производная $\dot{\varphi}(\sigma)$ ограничена на сегменте $[0; \Delta]$. Аналитически определяются условия существования циклов первого рода многомерной нефазовой системы дифференциальных уравнений (3) (см. [12]). С использованием пакета прикладных программ Maple разработаны численные методы анализа трансформации цикла нефазовой системы (3) в цикл фазовой системы дифференциальных уравнений (2). Предложены критерии близости циклов двух систем, основанные на метрических характеристиках циклов и мультипликаторном анализе (см. [12]). Для системы (2) проведена классификация сложных колебательно-вращательных режимов системы ФАПЧ, сопровождающих скрытую синхронизацию.

Определение 4. Предельный цикл второго рода $\omega(t, z_0) = \text{colon}(x(t, z_0), \sigma(t, z_0))$ называется *колебательно-вращательным циклом* структуры $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, если для него существует такое $T > 0$, что для любого $t \geq 0$ выполняются равенства

$$x(t + T, z_0) = x(t, z_0), \quad \sigma(t + T, z_0) = \sigma(t, z_0) + m\Delta,$$

Δ — период функции $\varphi(\sigma)$ системы (2), функция $\dot{\sigma}(t) = c^T x$ имеет $2k_i$ нулей на промежутке $\sigma \in [(i-1)\Delta; i\Delta]$, $i = \overline{1, m}$.

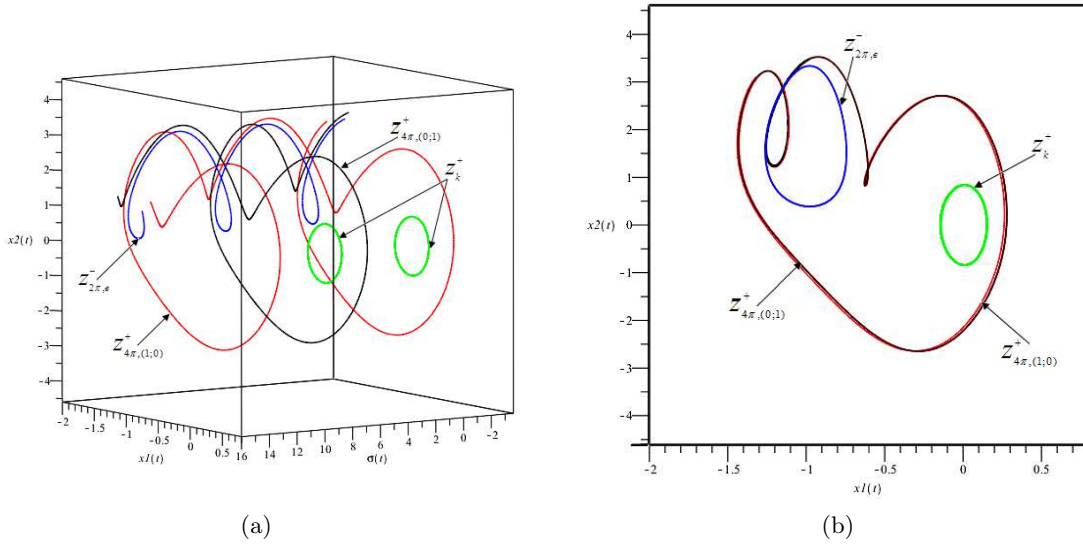


Рис. 5

В частности, если цикл второго рода $\omega(1, 0, 2)$ имеет структуру $(1, 0, 2)$, то для него $m = 3$ и существует такое $T > 0$, что для любого $t \geq 0$ выполняются равенства

$$x(t + T, z_0) = x(t, z_0), \quad \sigma(t + T, z_0) = \sigma(t, x_0) + 6\pi, \quad \Delta = 2\pi.$$

Функция $\dot{\sigma}(t) = c^T x$ имеет два нуля на промежутке $\sigma \in [0; 2\pi]$, не имеет нулей на сегменте $\sigma \in [2\pi; 4\pi]$ и имеет четыре нуля на промежутке $\sigma \in [4\pi; 6\pi]$. Значения $2k_i$, $i = \overline{1, m}$, определяют колебательные характеристики цикла $\omega(t, z_0)$, а именно, число оборотов проекции цикла на плоскость (x_1, x_2) .

У системы (2) наряду с устойчивым колебательным циклом при изменении параметра α_1 могут появляться как вращательные, так и колебательно-вращательные предельные циклы (см. [14]).

На рис. 5(а) изображены два устойчивых колебательно-вращательных цикла $z_{4\pi, (1;0)}^+(t)$, $z_{4\pi, (0;1)}^+(t)$, неустойчивый цикл второго рода $z_{2\pi, \epsilon}^-(t)$ и устойчивые циклы первого рода $z_k^+(t)$. На рис. 5(б) изображены проекции циклов $z_k^+(t)$, $z_{2\pi, \epsilon}^-(t)$, $z_{4\pi, (1;0)}^+(t)$, $z_{4\pi, (0;1)}^+(t)$ на плоскость (x_1, x_2) ; при этом проекции колебательно-вращательных циклов $z_{4\pi, (1;0)}^+(t)$, $z_{4\pi, (0;1)}^+(t)$ на плоскость (x_1, x_2) совпадают.

Условиями формирования скрытой синхронизации являются наличие в системе фазовой автоподстройки мультистабильности. Под мультистабильностью понимают сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов; в частности, аттракторами могут являться предельные циклы. Одним из условий появления мультистабильности в системе ФАПЧ является использование запаздывания. Динамика рассматриваемой системы фазовой автоподстройки с запаздыванием описывается операторным уравнением

$$p\sigma + K_\varphi(p)K_\tau\Omega_y F(\sigma) = \Omega_H \quad (4)$$

(см. [16]), где $K_\varphi(p)$ — коэффициент передачи фильтров нижних частот в фазовой цепи управления, $K_\tau(p) = e^{-\tau p} \approx (1 - \tau p)$ — операторный коэффициент запаздывания, τ — время запаздывания.

Для математической модели система ФАПЧ с запаздыванием рассматривается вспомогательная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0(1 - u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma, \quad (5)$$

где $x, b, c \in \mathbb{R}^2$, $u \in [0; 1]$, $\alpha_1, \rho_1, \rho_0 \in \mathbb{R}$. Запаздывание в системе автоподстройки определяет значение параметра $\rho = \rho_1 + \rho_0 > 0$; при отсутствии запаздывания выполняется равенство $\rho = 0$.

При $u = 0$ система (5) примет вид

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x + \rho\varphi(\sigma). \quad (6)$$

Аналитическими методами определяются условия для параметра $u = u^*$, при котором существует цикл многомерной нефазовой системы дифференциальных уравнений (5) (см. [11]). Численными методами определяется трансформация цикла системы (5) в цикл системы (6) при $u = 0$. В частности, показано, что система (5) при $u = 0,918$ имеет устойчивый цикл первого рода $z_1(t)$ с начальными условиями

$$x_1 = -0,047922, \quad x_2 = 6,207151, \quad \sigma = 0,1, \quad \langle \dot{\sigma} \rangle = 0,0044$$

(см. [11]). Мультипликаторы цикла $z_1(t)$ определяются значениями

$$\mu_1 = 1,0, \quad \mu_2 = 0,102437, \quad \mu_3 = 0,956714.$$

Численно показано, что при уменьшении значения u до $u = 0$ цикл $z_1(t)$ системы (5) трансформируется в цикл $z_{10}(t)$ фазовой системы (6) с начальными условиями

$$x_1 = -0,866482, \quad x_2 = 5,913351, \quad \sigma = 0,1, \quad \langle \dot{\sigma} \rangle = 0,00061$$

и мультипликаторами

$$\mu_1 = 1,0, \quad \mu_2 = 0,1065, \quad \mu_3 = 0,9744.$$

При этом мультипликаторный коэффициент аппроксимации циклов $A_\rho = 2,83\%$; следовательно, цикл системы (5) является порождающим для цикла системы (6) (см. [11]).

Аналогичным образом можно выяснить, что система (6) имеет устойчивый цикл $z_{20}(t)$ с начальными условиями и мультипликаторами

$$x_1 = -1,2813, \quad x_2 = 14,3064, \quad \sigma = 0,1, \quad \langle \dot{\sigma} \rangle = 0,0014,$$

$$\mu_1 = 1,0, \quad \mu_2 = 0,2861, \quad \mu_3 = 0,9857$$

и неустойчивый цикл $z_0^-(t)$ с начальными условиями и мультипликаторами

$$x_1 = -0,339472, \quad x_2 = 9,911372, \quad \sigma = 0,1, \quad \langle \dot{\sigma} \rangle = 0,0009,$$

$$\mu_1 = 1,0, \quad \mu_2 = 3,9, \quad \mu_3 = 1,0159$$

(см. [11]). Взаимное расположение циклов $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$, $z_0^-(t)$ фазовой системы (6) в случае запаздывания изображено на рис. 6(а). Для обнаружения неустойчивого цикла предложены численные методы, основанные на использовании вращения векторного поля (см. [4, 7, 9, 11, 12]). На рис. 6(б) изображены режим биения при отсутствии затухания $\rho = 0$ и квазисинхронные режимы при наличии затухания $\rho = 1,16$.

Показано, что механизмом возникновения скрытой синхронизации является формирование мультистабильности, связанной с характеристиками запаздывания. Мультипликаторы циклов являются показателями устойчивости цикла или быстроты стремления траектории к циклу, поэтому предложено использовать мультипликаторы цикла как критерий выбора квазисинхронных режимов в случае мультистабильности. Запаздывание может быть использовано для подавления хаотически модулированных режимов биения и формирования на их базе квазисинхронных режимов, обеспечивающих фазовую синхронизацию (см. рис. 6(б)). Полученные результаты позволяют получить практические рекомендации для определения параметров фильтров второго порядка с запаздыванием, при которых в системе ФАП наблюдается мультистабильность, т.е. одновременное наличие квазисинхронных режимов с разными частотными характеристиками, что позволяет использовать систему ФАП как генератор многочастотных колебаний.

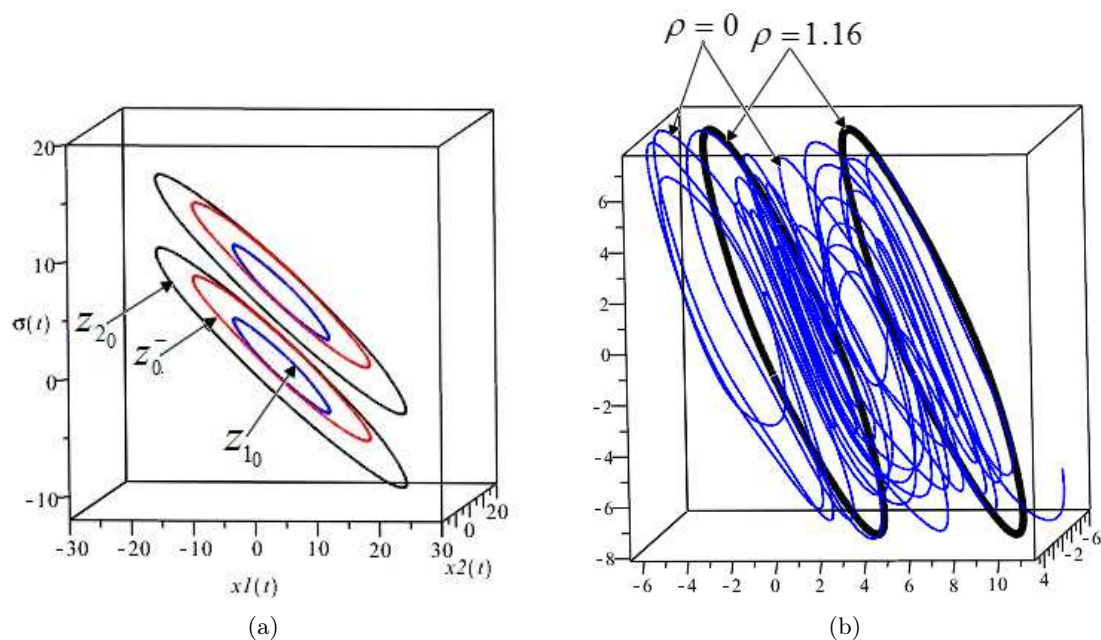


Рис. 6

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакунов Г. М., Матросов В. В., Шалфеев В. Д. О квазисинхронных режимах в системе фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка при приближенном учете запаздывания // в кн.: Изв. вузов. Прикл. нелин. динам., 2011. — 19.
2. Бескерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1972.
3. Капранов М. В., Кулишов В. Н., Уткин Г. М. Теория колебаний в радиотехнике. — М.: Наука, 1984.
4. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
5. Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И. Частотные методы в теории колебаний. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
6. Мамонов С. С. Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами первого порядка // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2011. — 11, № 1. — С. 70–81.
7. Мамонов С. С., ИONOва И. В. Применение вращения векторного поля для определения циклов второго рода // Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2014. — 14, № 5. — С. 46–54.
8. Мамонов С. С., Харламова А. О. Отделение циклов второго рода системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2015. — 15, № 3. — С. 97–102.
9. Мамонов С. С., Харламова А. О. Квазисинхронные режимы фазовой системы // Вестн. Рязан. гос. радиотехн. ун-та. — 2016. — № 56. — С. 45–51.
10. Мамонов С. С., Харламова А. О. Определение условий существования предельных циклов первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // Ж. Средневож. мат. о-ва. — 2017. — 19, № 1. — С. 67–76.
11. Мамонов С. С., Харламова А. О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Вестн. Рязан. гос. радиотехн. ун-та. — 2017. — 62. — С. 26–35.
12. Мамонов С. С., Харламова А. О. Численно-аналитическое определение циклов первого рода фазовой системы дифференциальных уравнений // Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2017. — 17, № 4. — С. 48–56.
13. Мамонов С. С., Харламова А. О. Циклы первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — 148. — С. 83–92.
14. Мамонов С. С., Харламова А. О., ИONOва И. В. Колебательно-вращательные циклы фазовой системы дифференциальных уравнений // Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2018. — 18, № 4. — С. 51–57.

15. *Матросов В. В.* Вынужденная синхронизация. — Н. Новгород, 2013.
16. *Шалфеев В. Д., Матросов В. В.* Нелинейная динамика в радиотехнике. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013.

Мамонов Сергей Станиславович
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Ионова Ирина Викторовна
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: i.ionova@365.rsu.edu.ru

Харламова Анастасия Олеговна
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: a.harlamova@365.rsu.edu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 80–90
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-80-90

УДК 517.956.4

СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ВТОРОГО РОДА УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО—СИВАШИНСКОГО С ОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА

© 2019 г. А. В. СЕКАЦКАЯ

Аннотация. В работе рассматривается задача для уравнения Курамото—Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана. Вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия второго рода изучен двумя способами: методом Галеркина и методами современной теории бесконечномерных динамических систем. Указаны некоторые различия в результатах их применения.

Ключевые слова: уравнение Курамото—Сивашинского, краевая задача, состояние равновесия, устойчивость, метод Галеркина, компьютерный анализ.

SECOND-KIND EQUILIBRIUM STATES OF THE KURAMOTO—SIVASHINSKY EQUATION WITH HOMOGENEOUS NEUMANN BOUNDARY CONDITIONS

© 2019 А. V. SEKATSKAYA

ABSTRACT. In this paper, we consider the boundary-value problem for the Kuramoto–Sivashinsky equation with homogeneous Neumann conditions. The problem on the existence and stability of second-kind equilibrium states was studied in two ways: by the Galerkin method and by methods of the modern theory of infinite-dimensional dynamical systems. Some differences in results obtained are indicated.

Keywords and phrases: Kuramoto–Sivashinsky equation, boundary-value problem, equilibrium, stability, Galerkin method, computer analysis.

AMS Subject Classification: 37L10, 37L25, 37L65

1. Введение. Во многих разделах математической физики при моделировании нелинейных эволюционных процессов (например, динамических процессов в химической кинетике, гидродинамике) используют уравнение Курамото—Сивашинского (см. [13, 18, 20]) или различные его обобщения и модификации (см. [1–4, 6–8, 11, 12, 14, 15]). В большинстве работ данное уравнение рассматривалось вместе с периодическими краевыми условиями.

В [10, 19] и некоторых других уравнение Курамото—Сивашинского изучалось вместе с однородными краевыми условиями Неймана (краевыми условиями «непроницаемости», характерными для задач химической кинетики, см. [18]). При этом, в частности, в цитируемых здесь работах основное внимание уделялось отысканию у изучаемых краевых задач решений, которые существенным образом зависят от одной или нескольких пространственных переменных, а также устойчивости этих решений. Так, например, в [19] было показано, что классический вариант

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00672) и Министерства образования и науки Российской Федерации (государственное задание, проект № 1.5722.2017/8.9).

уравнения Курамото—Сивашинского, рассмотренный вместе с однородными краевыми условиями Неймана, имеет глобальный аттрактор, но структура решений, заполняющих аттрактор, не была найдена. Частично этот пробел пытались устранить авторы работы [10], которые для исследования состояний равновесия использовали метод Галеркина. Краевая задача при этом заменялась на системы из 4 и 5 обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно их анализу и было уделено основное внимание в [10].

Аналогичный подход использован в данной работе, но с некоторыми существенными дополнениями. Во-первых, в представленной работе использованы возможности современной вычислительной техники, что позволило дополнить анализ системы галеркинских приближений. Во-вторых, анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений дополнен более детальным изучением устойчивости состояний равновесия. Наконец, приведено частичное сравнение полученных результатов (и в том числе из [10]) с результатами анализа изучаемой краевой задачи на базе использования современной теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством (пространством начальных условий). Такой подход был разработан в [4–8, 16, 17]. Уместно отметить, что подход, основанный на применении метода Галеркина, не позволяет в ряде случаев находить некоторые из локальных аттракторов (состояний равновесия, периодических по t решений и т. д.), наличие которых вытекает из применения теории локальных бифуркаций для бесконечномерных динамических систем. Так, например, в [6, 17] были найдены локальные аттракторы для периодической краевой задачи для уравнения Курамото—Сивашинского, а также некоторых его модификаций, которые заполнены решениями, неустойчивыми в смысле А. М. Ляпунова.

Вместе с тем в определенной степени использование метода Галеркина иногда полезно. Такой подход позволяет, хотя бы приближенно, находить стационарные решения с достаточно большой нормой в смысле метрики фазового пространства решений изучаемых краевых задач.

2. Постановка задачи. Приведем уравнение Курамото—Сивашинского уже в перенормированном виде:

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx} - c(u_x)^2, \quad (1)$$

где $u = u(t, x)$ и $c \neq 0$. При этом без нарушения общности можно считать, что $c = 1$. Действительно, если положить $u = \gamma v$ и считать, что $\gamma c = 1$ (за счет выбора γ), то получим уравнение (1), в котором $c = 1$. Далее будем считать, что $c = 1$.

В данной работе уравнение (1) рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана. С учетом нормировок можно считать, что при всех $x \in [0, \pi]$, $t \geq 0$, выполнены равенства

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0, \quad x \in [0, \pi]. \quad (2)$$

Очевидно, краевая задача (1), (2) имеет семейство пространственно однородных состояний равновесия

$$u(t, x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

С другой стороны, краевая задача (1), (2) инвариантна относительно замены $u \rightarrow u + C$. Поэтому далее без нарушения общности будем изучать состояние равновесия $u = 0$ ($C = 0$). С точки зрения приложений особый интерес представляет наличие у нелинейной краевой задачи устойчивых решений $u(t, x)$, которые существенно зависят от пространственной переменной x , т.е. $u_x \neq 0$.

Положим

$$u(0, x) = f(x). \quad (3)$$

Смешанная задача (1), (2), (3) локально корректно разрешима, если $f(x) \in \overset{\circ}{W}_2^4[0, \pi]$ (см. [9]). Здесь через $\overset{\circ}{W}_2^4[0, \pi]$ обозначено замыкание линеала достаточно гладких функций $f(x)$, удовлетворяющих краевым условиям (2) по норме пространства Соболева $W_2^4[0, \pi]$. Напомним, что $g(x) \in W_2^4[0, \pi]$, если функция $g(x)$ имеет обобщенные производные $dg/dx, \dots, d^4g/dx^4$ до четвертого порядка включительно, которые принадлежат $L_2[0, \pi]$. Подчеркнем, что в силу теорем вложения $g(x) \in C^3[0, \pi]$, т.е. пространству дважды непрерывно дифференцируемых функций.

3. Линейная краевая задача. Для исследования устойчивости нулевого состояния равновесия рассмотрим вспомогательную краевую задачу, которая возникает после линеаризации краевой задачи (1)–(2) в окрестности тривиального состояния равновесия. В результате получим линейную краевую задачу

$$u_t = Au, \quad (4)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0, \quad (5)$$

где линейный дифференциальный оператор

$$Av = -bv_{xx} - v_{xxxx}$$

определен на достаточно гладких функциях $v = v(x)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$v_x(0) = v_x(\pi) = v_{xxx}(0) = v_{xxx}(\pi) = 0.$$

Пусть λ — собственное значение (СЗ), а $v(x)$ — собственная функция (СФ) линейного дифференциального оператора A . Для исследования устойчивости нулевого решения краевой задачи (4), (5) найдем все ее решения вида

$$u(t, x) = \exp(\lambda t) \cdot v(x).$$

Для нахождения СЗ λ и соответствующей СФ получим краевую задачу

$$Av = \lambda v, \quad (6)$$

$$v_x(0) = v_x(\pi) = v_{xxx}(0) = v_{xxx}(\pi) = 0. \quad (7)$$

Подстановкой проверяется, что краевая задача (6) имеет нетривиальные решения, если

$$\lambda = \lambda(n) = bn^2 - n^4.$$

Каждому из них соответствует собственная функция

$$v(x, y) = e_n(x) = \cos nx,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Хорошо известно, что собственные функции $e_n(x)$ в пространстве $L_2[0, \pi]$ образуют полную ортогональную систему функций. Поэтому линейный дифференциальный оператор A не может иметь иных собственных значений, отличных от $\lambda(n)$.

Отметим, что $\lambda(0) = 0$. Понятно, что если $\lambda(n) < 0$ при всех $n \neq 0$, то любое состояние равновесия задачи (4), (5) устойчиво (но не может быть асимптотически устойчивым). Устойчивость следует понимать в смысле нормы фазового пространства (пространства начальных условий), например, пространства Соболева $W_2^4[0, \pi]$. Если же существует такое $n_0 \neq 0$, что $\lambda(n_0) > 0$, то состояние равновесия неустойчиво. Критические случаи выделяются следующими условиями: пусть для некоторого n_0 выполнено равенство

$$\lambda(n_0) = 0, \quad n_0 \neq 0,$$

а для остальных номеров n ($n \neq 0$) имеет место неравенство $\lambda(n) < 0$. Отметим также, что в нашем случае все собственные значения $\lambda(n)$ действительны. Условие устойчивости приобретает вид неравенства $b < 1$.

Следовательно, равенство $b = b_1 = 1$ выделяет критическое значение параметра b в задаче об устойчивости состояний равновесия $u = C$ для краевой задачи (4), (5). При таком значении b линейный дифференциальный оператор A имеет двукратное нулевое собственное значение, которому отвечает собственные функции $1, \cos x$. Подчеркнем также, что при $b = b_n = n^2$ линейный оператор A имеет также двукратное нулевое собственное значение, но ему уже отвечает собственная функция $\cos nx$ и, конечно, 1 .

Если $b = b_1 = 1$, остальные собственные значения линейного дифференциального оператора A лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости ($\lambda_m = -m^4 + m^2 < 0$, если $m \neq 1$). В случае $b = b_n$ ($n \neq 1$) линейный дифференциальный оператор A имеет уже $n - 1$ собственных значений, находящихся в правой полуплоскости комплексной плоскости ($\lambda_k = -k^4 + n^2 k^2 > 0$, если $k < n$).

4. Нелинейная краевая задача. В этом разделе рассмотрим краевую задачу (4), (5) в случае, когда

$$b = n^2 + \gamma\varepsilon, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0), \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

а $n = 1, 2, \dots$. При $n = 1$ ($b_1 = 1 + \gamma\varepsilon$) данная краевая задача имеет двумерное устойчивое центральное многообразие M_1 , решения на котором определяются после анализа двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — нормальной формы (НФ). Если же $b = b_n = n^2$ и $n \neq 1$, то краевая задача (4), (5) также имеет двумерное инвариантное многообразие M_n , и решения на нем восстанавливаются после анализа соответствующей двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — нормальной формы для данного выбора параметра b . Инвариантное многообразие M_n часто называют «центральным».

При $n = 2, 3, \dots$ соответствующие инвариантные многообразия M_n являются уже не устойчивыми, а седловыми (неустойчивыми), и поэтому все решения на таких инвариантных многообразиях заведомо неустойчивы.

Построим соответствующие инвариантным многообразиям M_n нормальные формы ($b = b_n + \gamma\varepsilon$). Решения на M_n будем искать в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}z(s) \cos nx + \varepsilon u_2(x, z(s)) + \varepsilon^{3/2}u_3(x, z(s)) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (8)$$

где $s = \varepsilon t$ — «медленное время», $z(s)$ — решения НФ, которая будет выписана позднее. Наконец, $u_j(x, z)$ — функции, для которых выполнены следующие свойства:

- 1) они гладко зависят от x, z ;
- 2) при фиксированных z , как функции от x , принадлежат пространству Соболева $\overset{\circ}{W}_2^4[0, \pi]$ функций, для которых выполнены краевые условия (5);
- 3) справедливы равенства

$$M_n(u_j) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_j \cos nx dx = 0.$$

Итак, рассмотрим краевую задачу

$$u_t = A_n(\varepsilon)u - (u_x)^2, \quad (9)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0, \quad (10)$$

где $u = u(t, x)$ и $A_n(\varepsilon)u = -u_{xxxx} - (n^2 + \gamma\varepsilon)u_{xx}$. Также отметим для дальнейших построений, что

$$\dot{\psi} = \varepsilon\psi', \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} = \dot{u}_j + u'_j\varepsilon,$$

где точкой обозначена частная производная по t , а штрихом — по вспомогательной переменной s .

Действительные функции $z = z(s)$, $\psi = \psi(s)$ будем искать как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = a_0 z^2, \quad (11)$$

$$z' = \alpha z - a z^3, \quad (12)$$

где a_0, a, α — действительные числа. Уравнения (11), (12) выписаны с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon^{1/2})$. Система (11), (12) — «главная» часть нормальной формы Пуанкаре—Дюлака. В свою очередь, нормальная форма описывает динамику нелинейной краевой задачи (9), (10) на двумерном инвариантном многообразии («центральное многообразие»). Остальные решения нелинейной краевой задачи с течением времени приближаются к этому двумерному многообразию с экспоненциальной скоростью.

Подстановка суммы (8) в краевую задачу (9), (10) с последующим приравниванием выражений при одинаковых степенях ε приводит к линейным краевым задачам для определения u_j , $j = 1, 2, 3$. При их формировании и изучении будем интерпретировать s как параметр.

В итоге для u_2 , u_3 получим две следующие неоднородные краевые задачи:

$$\psi' + \dot{u}_2 = A_n(0)u_2 - (u_{1x})^2, \quad (13)$$

$$u_{2x}(t, 0) = u_{2x}(t, \pi) = u_{2xxx}(t, 0) = u_{2xxx}(t, \pi) = 0 \quad (14)$$

и

$$z' \cos x + \dot{u}_3 = A_n(0)u_3 - u_{1xx} + 2c_1 u_{1x} u_{2x}, \quad (15)$$

$$u_{3x}(t, 0) = u_{3x}(t, \pi) = u_{3xxx}(t, 0) = u_{3xxx}(t, \pi) = 0. \quad (16)$$

В формулах (13)–(16) точкой обозначена частная производная по t , а штрихом — по вспомогательной переменной s .

Неоднородная краевая задача

$$A_n(0)v(x) = F(x)$$

имеет решение, если справедливы следующие равенства (условия разрешимости):

$$\int_0^\pi F(x) dx = \int_0^\pi F(x) \cos nx dx = 0.$$

Равенства

$$\int_0^\pi v(x) dx = \int_0^\pi v(x) \cos nx dx = 0$$

выделяют одно такое решение.

Применяя условия разрешимости при рассмотрении неоднородной краевой задачи (13), (14), получаем, что

$$\psi' = -n^2 \frac{z^2}{2}.$$

Далее решение краевой задачи (13), (14) будем искать в виде

$$u_2 = \eta_2 z^2 \cos 2nx. \quad (17)$$

После подстановки (17) в (13), (14) находим

$$\eta_2 = \frac{1}{24n^2},$$

и соответственно решение u_2 равно

$$u_2(s, x) = \frac{z^2 \cos 2nx}{24n^2}.$$

Из условий разрешимости неоднородной краевой задачи (15), (16) вытекает, что

$$z'_n = \gamma n^2 z_n - \frac{1}{12} z_n^3.$$

Перейдем к рассмотрению нормальной формы (11), (12). При этом основную роль играет дифференциальное уравнение

$$z'_n = \gamma n^2 z_n - \frac{1}{12} z_n^3. \quad (18)$$

Стандартный анализ показывает, что если $\gamma = 1$, то дифференциальное уравнение (18) имеет ненулевые состояния равновесия $S_{\pm 1}$ вида

$$z_n(s) = \pm 2\sqrt{3}n. \quad (19)$$

При $\gamma = -1$ уравнение (19) имеет только нулевое состояние равновесия, которое асимптотически устойчиво. Состояния равновесия $S_{\pm 1}$ асимптотически устойчивы. Каждому такому решению (19) соответствует следующее решение нормальной формы (11), (12):

$$z(s) = \pm 2\sqrt{3}n, \quad \psi(s) = -6n^4 s + \psi_0, \quad \psi_0 \in \mathbb{R}.$$

Из результатов [4, 5, 7, 18] вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_n > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n)$ каждому решению (19) соответствует решение краевой задачи (9), (10)*

$$u_{11,12}(t, x) = K_{11,12} + (-6n^4\varepsilon + o(\varepsilon))t \pm \varepsilon^{1/2}2\sqrt{3}n \cos nx + \frac{\varepsilon}{2} \cos 2nx + o(\varepsilon), \quad (20)$$

где K_{11}, K_{12} — произвольные постоянные. Каждое из этих семейств решений образует интегральное многообразие $M_1(\varepsilon)$ размерности 1 нелинейной краевой задачи (9), (10). Данное инвариантное многообразие устойчиво, если $n = 1$ ($b = b_1 + \gamma\varepsilon$, $b_1 = 1$), и неустойчиво при $n \neq 1$ ($b = b_n + \gamma\varepsilon$, $b_n = n^2$).

Уместно подчеркнуть, что решения $u_{11}(x, \varepsilon)$ и $u_{12}(x, \varepsilon)$ связаны соотношением

$$u_{12}(x, \varepsilon) = u_{11}(\pi - x, \varepsilon).$$

5. Анализ краевой задачи методом Галеркина. Далее изучим краевую задачу (1), (2) при помощи метода Галеркина при всех допустимых $t \in [0, T]$ (здесь $[0, T]$ — интервал существования решения). Справедливо представление решения в виде ряда

$$u(t, x) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos nx,$$

так как на отрезке $[0, \pi]$ система функций $1, \cos x, \cos 2x, \dots$ образует полную ортогональную систему в пространстве $L_2[0, \pi]$. В нашем случае

$$u_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) dx, \quad u_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) \cos kx dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Приближенные решения целесообразно искать в виде

$$u(t, x) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^m u_n(t) \cos nx.$$

При использовании метода Галеркина принято фиксировать m . В [10] и в данной работе будет изучен вариант $m = 3$ и $m = 4$, что в целом означает изучение четырехчленной и пятичленной галеркинских аппроксимаций. В принципе, натуральное m может быть иным.

Уточним сразу один важный момент. В [10] и здесь главное внимание уделялось нахождению состояний равновесия второго рода, т.е. таких решений $u(t, x)$, что $u_x(t, x)$ уже не зависит от t .

5.1. Редукция с помощью метода Галеркина. Далее будет рассмотрен вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия второго рода. Приближенное решение $u(t, x)$ краевой задачи (1)–(2) будем искать в аналогичном виде:

$$u(t, x) \cong \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^m u_n(t) \cos nx, \quad (21)$$

где

$$u_0(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) dx, \quad u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Сумма (21) стремится к точному решению краевой задачи (1), (2)

$$u(t, x) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos nx$$

при $m \rightarrow \infty$.

Подставив сумму (21) при $m = 3$ в уравнение (1) получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{u}_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 \dot{u}_n(t) \cos nx \right) = & -\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 u_n(t) \cos nx \right) - \\ & - b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 u_n(t) \cos nx \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 u_n(t) \cos nx \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Применив далее стандартную процедуру получения приближений Галеркина, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения $u_j(t)$:

$$\dot{u}_0 = -(u_1^2 + 4u_2^2 + 9u_3^2), \quad (22)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = (b-1)u_1 - 6u_2u_3 - 2u_1u_2, \\ \dot{u}_2 = 4(b-4)u_2 + \frac{u_1^2}{2} - 3u_1u_3, \\ \dot{u}_3 = 9(b-9)u_3 + 2u_1u_2, \end{cases} \quad (23)$$

где точкой обозначена производная по t .

Представляют интерес ненулевые состояния равновесия системы (23). Таким решениям соответствуют приближенные пространственно неоднородные решения краевой задачи (1), (2) (состояния равновесия второго рода)

$$u(t, x) = -\left(v_1^2 + 4v_2^2 + 9v_3^2\right)t + v_1 \cos x + v_2 \cos 2x + v_3 \cos 3x,$$

где (v_1, v_2, v_3) — координаты одного из состояний равновесия системы (23).

В свою очередь, нахождение состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (23) приводит к решению системы трех алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (b-1)v_1 &= 2v_1v_2 + 6v_2v_3, \\ 4(b-4)v_2 &= -\frac{1}{2}v_1^2 + 3v_1v_3, \\ 9(b-9)v_3 &= -2v_1v_2, \end{aligned} \quad (24)$$

у которой, безусловно, имеется решение $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, но интерес представляют иные ее решения. Нулевое состояние равновесия системы (23) устойчиво при $b \in (-\infty, 1)$ и теряет устойчивость дивергентным образом (при $b = 1$ одно из собственных значений равно нулю). Исследование устойчивости проводилось с использованием теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Анализ системы (24) показывает, что при $b \in (-\infty, 1] \cup (9, \infty)$ она не имеет действительных решений, отличных от нуля. Действительно, пусть сначала $b \neq 1$, $b \neq 4$, $b \neq 9$. Эти особые значения для параметра b рассмотрим отдельно. Тогда из третьего уравнения системы (24) можно выразить v_3 и подставить выраженное v_3 в первое уравнение системы (24). После этого получим следующее равенство:

$$(b-1)v_1 = 2v_1v_2 + \left(-\frac{4}{3}\right)\frac{1}{b-9}v_2^2v_1.$$

Если $v_1 = 0$, то $v_2 = v_3 = 0$. При $v_1 \neq 0$ получим квадратное уравнение, которое имеет действительные решения, если $b \in [-23, 9)$. В свою очередь, из второго уравнения после исключения v_3 получаем равенство

$$v_1^2 = \frac{4b(4-b)(b-9)v_2}{3(b-9) + 4v_2},$$

из которого v_1 не определяется как действительное число, если $b < 1$. При $b = 1$ также нетрудно установить наличие только нулевого решения системы (24).

При $b = 4$ система дифференциальных уравнений (23) имеет инвариантное многообразие $u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = \alpha$, где α — произвольная действительная постоянная. На инвариантном многообразии все решения являются состояниями равновесия. При $b = 4$ краевая задача (1), (2) имеет приближенные решения

$$u(t, x) = -4\alpha^2 t + \alpha \cos 2x. \quad (25)$$

Если $b = 9$, то система (24) имеет решение $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = \beta$, где β — произвольная действительная постоянная, т.е. краевая задача (1), (2) имеет приближенные решения

$$u(t, x) = -9\beta^2 t + \beta \cos 3x. \quad (26)$$

Вернемся к общему случаю, когда $b \in (0, 9)$, но $b \neq 4$. Из анализа системы (24) вытекает, что система (24) имеет четыре типа решений $V_1(v_1, v_2, v_3)$, $V_2(v_1, v_2, v_3)$, $V_3(v_1, v_2, v_3)$, $V_4(v_1, v_2, v_3)$, где через v_1, v_2, v_3 обозначены координаты ненулевых состояний равновесия и, следовательно,

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \neq 0.$$

При этом для v_1, v_2, v_3 справедливы следующие формулы: для $V_1(v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\sqrt{2} (3b - 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}) \sqrt{(77 - 5b - 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}) (b - 4)}}{5b - 77 + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}, \\ v_2 = \frac{3b - 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}}{4}, \\ v_3 = -\frac{\sqrt{2} (b - 25 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}) \sqrt{(77 - 5b - 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}) (b - 4)}}{15b - 231 + 9\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}; \end{cases} \quad (27)$$

для $V_2(v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{\sqrt{2} (3b - 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}) \sqrt{(77 - 5b - 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}) (b - 4)}}{5b - 77 + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}, \\ v_2 = \frac{3b - 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}}{4}, \\ v_3 = \frac{\sqrt{2} (b - 25 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}) \sqrt{(77 - 5b - 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}) (b - 4)}}{15b - 231 + 9\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}; \end{cases} \quad (28)$$

для $V_3(v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{\sqrt{2} (-3b + 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}) \sqrt{(77 - 5b + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}) (b - 4)}}{-5b + 77 + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}, \\ v_2 = \frac{3b - 27 - \sqrt{621 - 42b - 3b^2}}{4}, \\ v_3 = \frac{\sqrt{2} (-b + 25 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}) \sqrt{(77 - 5b + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}) (b - 4)}}{-15b + 231 + 9\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}; \end{cases} \quad (29)$$

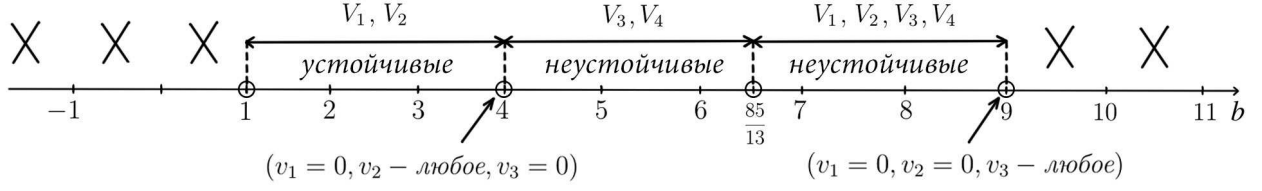


Рис. 1. Состояния равновесия системы (23). Здесь $V_1(v_1, v_2, v_3)$ — одно из состояний равновесия, крестом обозначены области, где решения отсутствуют.

для $V_4(v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\sqrt{2} \left(-3b + 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2} \right) \sqrt{\left(77 - 5b + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2} \right) (b - 4)}}{-5b + 77 + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}, \\ v_2 = \frac{3b - 27 - \sqrt{621 - 42b - 3b^2}}{4}, \\ v_3 = -\frac{\sqrt{2} \left(-b + 25 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2} \right) \sqrt{\left(77 - 5b + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2} \right) (b - 4)}}{-15b + 231 + 9\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}. \end{cases} \quad (30)$$

Данные формулы получены при $b \neq 1$, $b \neq 4$, $b \neq 9$. Проанализировав их подробнее, мы приходим к выводу, что $b \neq 85/13$. При $b = 85/13$ обращаются в нуль знаменатели формул для координат v_1, v_3 решений $V_1(v_1, v_2, v_3)$, $V_2(v_1, v_2, v_3)$.

Решения $V_1(v_1, v_2, v_3)$, $V_2(v_1, v_2, v_3)$ существуют при $b \in (1, 4) \cup (85/13, 9)$; они устойчивы при $b \in (1, 4)$ и неустойчивы при $b \in (85/13, 9)$. Решения $V_3(v_1, v_2, v_3)$, $V_4(v_1, v_2, v_3)$ при $b \in (1, 4)$ не существуют.

Решения $V_3(v_1, v_2, v_3)$, $V_4(v_1, v_2, v_3)$ существуют при $b \in (4, 9)$ и неустойчивы при всех этих значениях b .

Все решения наглядно представлены на рис. 1.

6. Некоторые замечания. Сравним некоторые из результатов анализа краевой задачи (1), (2), полученных при помощи метода Галеркина, с результатами бифуркационного анализа, основанного на использовании строго обоснованных методов качественной теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством.

Непосредственный анализ краевой задачи (1), (2) показал, что при $b = 9 + \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, краевая задача имеет нетривиальные состояния равновесия второго рода.

Отметим также, что если рассмотреть краевую задачу (1), (2) при $b = 9$ в случае, когда

$$u(0, x) = f_3(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{3p} \cos 3px,$$

где $f_3(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^4[0, \pi]$ функций, у которых $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x) \in L_2(0, \pi)$, то, оказывается, что для всех решений с такими начальными условиями

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0,$$

или в иной форме записи

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{3p}(t) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$u(t, x) = \sum_{p=1}^{\infty} u_{3p}(t) \cos 3px$$

(см. раздел 4 данной работы).

С другой стороны, анализ системы дифференциальных уравнений (23) при $b = 9$ показывает, что она имеет состояние равновесия $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольная действительная постоянная и, следовательно, решение $u_3 = \alpha$, $u_1 = u_2 = 0$ не стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$. Данные два замечания показывают ограниченные возможности метода Галеркина при анализе краевой задачи (1), (2).

7. Заключение. В работе изучено уравнение Курамото—Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана. При помощи метода Галеркина и методов качественной теории дифференциальных уравнений изучен вопрос о существовании состояний равновесия второго рода. При помощи численных методов с привлечением современных компьютерных технологий были найдены состояния равновесия, дан анализ устойчивости найденных состояний равновесия по А. М. Ляпунову.

Показано, что у краевой задачи (1), (2) возникают (точнее, могут появиться) пространственно неоднородные решения, в том числе устойчивые. Они бифурцируют из нулевого состояния равновесия при смене им устойчивости. Для бифурцирующих решений приведены асимптотические формулы. С точки зрения приложения к физике (нано и микроэлектронике) наибольший интерес для приложений представляют именно пространственно неоднородные решения, описывающие неоднородный рельеф на поверхности полупроводниковых материалов под воздействием ионной бомбардировки. Изучен вопрос об устойчивости однородных состояний равновесия. В частности, выведены условия на коэффициенты, при которых происходит потеря устойчивости. В случаях, близких к критическим, для значений параметров рассмотрены задачи о локальных бифуркациях. Показано, что вопрос о формировании неоднородного нанорельефа с математической точки зрения сводится к изучению вспомогательных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые принято называть *нормальными формами Пуанкаре—Дюлака*. Подтверждено, что формирование нанорельефа можно рассматривать как явление самоорганизации.

Из полученных результатов вытекает, что применение метода Галеркина для анализа динамики решений краевой задачи (1), (2) при изучении уже простейших вопросов приводит к результатам, противоречащим анализу краевой задачи (1), (2) при помощи методов современной теории динамических систем. Тем более этого следует ожидать при анализе локальных бифуркаций.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю А. Н. Куликову за постановку задачи и помощь при написании статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емельянов В. М. Дефектно-деформационная неустойчивость как универсальный механизм образования решеток и ансамблей наноточек при действии ионных и лазерных пучков на твердые тела // Изв. РАН. Сер. физ. — 2010. — 2, № 74. — С. 124–130.
2. Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Стриханов М. Н. Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Яд. физ. инж. — 2010. — 2, № 1. — С. 151–158.
3. Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Федянин Т. Е. Особенности самоорганизации наноструктур на поверхности полупроводников при ионной бомбардировке // Мат. модел. — 2012. — 12, № 24. — С. 23–28.
4. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — С. 930–945.
5. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Бифуркации пространственно неоднородных решений в двух краевых задачах для обобщенного уравнения Курамото—Сивашинского // Вестн. МИФИ. — 2014. — 3, № 4. — С. 408–415.
6. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Уравнение Курамото—Сивашинского. Локальный аттрактор, заполненный неустойчивыми периодическими решениями // Модел. анал. информ. сист. — 2018. — 1. — С. 92–101.

7. Куликов А. Н., Куликов Д. А., Рудый А. С. Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки// Вестн. Удмурт. ун-та. — 2011. — 4. — С. 86–99.
8. Секацкая А. В. Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского// Модел. анализ. информ. сист. — 2017. — 5, № 24. — С. 615–628.
9. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1961. — № 10. — С. 297–350.
10. Armbruster D., Guckenheimer J., Holmes Ph. Kuramoto–Sivashinsky dynamics on the center-unstable manifold// Siam J. Appl. Math. — 1989. — 3, № 49. — P. 676–691.
11. Barker B., Johnson M. A., Noble P., Zumbrun K. Stability of periodic Kuramoto–Sivashinsky waves// Appl. Math. Lett. — 2012. — 5, № 25. — P. 824–829.
12. Barker B., Johnson M. A., Noble P., Rodrigues L. M., Zumbrun K. Nonlinear modulational stability of periodic traveling-wave solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation// Phys. D. — 2013. — 25. — P. 11–46.
13. Bradley R., Harper J. Theory of ripple topography induced by ion bombardment// J. Vac. Sci. Technol. — 1988. — 4, № 6. — P. 2390–2395.
14. Emel'yanov B. I. The Kuramoto–Sivashinsky equation for the defect-deformation. Instability of a surface-stressed nanolayer// Laser Phys. — 2009. — 3, № 19. — P. 538–543.
15. Gelfand M. P., Bradley R. M. One-dimensional conservative surface dynamics with broken parity: Arrested collapse versus coarsening// Phys. Lett. A. — 2015. — 4, № 1. — P. 199–205.
16. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Bifurcations in a boundary-value problem of nanoelectronics// J. Math. Sci. — 2015. — 6. — P. 211–221.
17. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Bifurcation in Kuramoto–Sivashinsky equation// Pliska Stud. Math. — 2015. — 4, № 3. — P. 101–110.
18. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. — Berlin: Springer-Verlag, 1984.
19. Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R. Some global dynamical properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: Nonlinear stability and attractors// Phys. D. — 1985. — 12, № 24. — P. 155–183.
20. Sivashinsky G. I. Weak turbulence in periodic flow// Phys. D. — 1985. — 2, № 17. — P. 243–255.

Секацкая Алина Вадимовна

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: alinastart@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 91–98
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-91-98

УДК 517.977

УСТОЙЧИВОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2019 г. П. М. СИМОНОВ

Аннотация. В статье продолжается изучение гибридной линейной системы функционально-дифференциальных уравнений с последействием при помощи W -метода Н. В. Азбелева. Рассмотрены два модельных уравнения, изучены банаховы пространства правых частей и решений, являющиеся пространствами асимптотически периодических функций. Получены аналоги теоремы Боля—Перрона об асимптотической устойчивости и о существовании пределов решений.

Ключевые слова: теорема Боля—Перрона, асимптотически периодические функции, гибридная система, функционально-дифференциальное уравнение, уравнение с последействием, устойчивость, метод модельных уравнений.

STABILITY AND ASYMPTOTICALLY PERIODIC SOLUTIONS OF HYBRID SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

© 2019 P. M. SIMONOV

ABSTRACT. In this paper, we study hybrid linear systems of functional differential equations with aftereffect using the Azbelev W -method. Two model equations are considered and Banach spaces of right-hand sides and solutions, which are spaces of asymptotically periodic functions, are examined. Analogs of the Bohl–Perron theorem on the asymptotic stability and on the existence of limits of solutions are obtained.

Keywords and phrases: Bohl–Perron theorem, asymptotically periodic functions, hybrid system, functional differential equation, equation with aftereffect, stability, method of model equations.

AMS Subject Classification: 34K20, 34K25

1. Введение. В настоящей статье мы продолжаем изучение гибридных линейных систем функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ГЛСФДУП). Гибридность понимается в следующем смысле: система является системой линейных функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ЛФДУП) по одной части переменных и системой линейных разностных уравнений с последействием (ЛРУП) по другой части переменных. Применяя W -метод Н. В. Азбелева, мы изучаем два модельных уравнения и банаховы пространства их правых частей и решений (пространства асимптотически периодических функций). Получены аналоги теоремы Боля—Перрона об асимптотической устойчивости и о существовании пределов решений, доказанной ранее в работах Н. В. Азбелева, Л. М. Березанского, П. М. Симонова и А. В. Чистякова (см. [1–4]).

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ векторов $\alpha = \text{col} \{ \alpha^1, \dots, \alpha^n \}$ с действительными компонентами и с нормой $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00332-а).

Обозначим через L пространство локально суммируемых функций $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ с полунормами

$$\|f\|_{L[0,T]} = \int_0^T \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt, \quad T > 0,$$

и через D — пространство локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ с полунормами

$$\|x\|_{D[0,T]} = \|\dot{x}\|_{L[0,T]} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}, \quad T > 0.$$

Обозначим через $y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots$ высоты n , а через $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $g(0), g(1), \dots, g(N), \dots$ высоты n . Каждой бесконечной матрице $y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$ можно поставить в соответствие вектор-функцию

$$y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + \dots + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$$

Аналогично, каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$ можно поставить в соответствие вектор-функцию

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + \dots + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$$

Обозначим через $y(t) = y[t]$ вектор-функцию $y(t) = y([t])$, $t \in [-1, \infty)$, через $g[t]$ — вектор-функцию $g(t) = g([t])$, $t \in [0, \infty)$, через ℓ_0 — множество вектор-функций $y[\cdot]$ с полунормами

$$\|y\|_{\ell_{0T}} = \sum_{i=-1}^T \|y_i\|_{\mathbb{R}^n}, \quad T \geq -1,$$

через ℓ — множество вектор-функций $g[\cdot]$ с полунормами

$$\|g\|_{\ell_T} = \sum_{i=0}^T \|g_i\|_{\mathbb{R}^n}, \quad T \geq 0.$$

Введем также обозначения

$$\begin{aligned} (\Delta y)(t) &= y(t) - y(t-1) = y[t] - y[t-1] \quad \text{при } t \geq 1, \\ (\Delta y)(t) &= y(t) = y[t] = y(0) \quad \text{при } t \in [0, 1). \end{aligned}$$

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y &= \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \\ \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y &= \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \end{aligned} \tag{1}$$

Операторы $\mathcal{L}_{11}, F_{11} : D \rightarrow L$, $\mathcal{L}_{12}, F_{12} : \ell_0 \rightarrow L$, $\mathcal{L}_{21}, F_{21} : D \rightarrow \ell$, $\mathcal{L}_{22}, F_{22} : \ell_0 \rightarrow \ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Если элементы $\text{col}\{x, y\} : [0, \infty) \times [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, образующие банахово пространство

$$D \times M_0 \cong (B \times \mathbb{R}^n) \times (M \times \mathbb{R}^n),$$

где $D \subset D$, $M_0 \subset \ell_0$, $B \subset L$, $M \subset \ell$ (B, M — банаховы пространства), обладают какими-либо специфическими свойствами, например

$$\sup_{t \geq 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{k=-1,0,1,\dots} \|y(k)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty,$$

и для уравнения $\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$, где $\mathcal{L} : D \times M_0 \rightarrow B \times M$ — линейный ограниченный оператор, однозначно разрешима задача Коши, то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами.

Пусть модельное уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ (см. [1–4]) и банахово пространство $B \subset L$ (вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пусть при любом $z \in B$ решение записывается в виде формулы Коши

$$x(t) = U_{11}(t)x(0) + (W_{11}z)(t).$$

Для банахова пространства $\mathbf{B} \subset L$ можно ввести банахово пространство $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ с нормой

$$\|x\|_{D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})} = \|\mathcal{L}_{11}x\|_{\mathbf{B}} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Здесь вложение $\mathbf{B} \subset L$ непрерывно. Предположим, что оператор W_{11} непрерывно действует из пространства $\mathbf{B}$ в пространство $\mathbf{B}$, а оператор U_{11} действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbf{B}$. Это условие эквивалентно тому (см. [3], [4, гл. IV]), что пространство $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ линейно изоморфно пространству Соболева $W_{\mathbf{B}}^{(1)}[0, \infty)$ с нормой

$$\|x\|_{W_{\mathbf{B}}^{(1)}[0, \infty)} = \|\dot{x}\|_{\mathbf{B}} + \|x\|_{\mathbf{B}};$$

в дальнейшем будем обозначать это пространство $\mathbf{W}_{\mathbf{B}}$; при этом $\mathbf{W}_{\mathbf{B}} \subset D$ (вложение непрерывно).

Будем говорить, что уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \rightarrow \mathbf{B}$ является $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчивым, если для каждой правой части $z \in \mathbf{B}$ решение x принадлежит $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ (см. [1]); здесь $D(\mathcal{L}_{11}) \subset D$ — область определения оператора $\mathcal{L}_{11}$. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ называется *сильно $\mathbf{B}$ -устойчивым*, если для любого $z \in \mathbf{B}$ каждое решение x этого уравнения обладает следующим свойством: $x \in \mathbf{B}$ и $\dot{x} \in \mathbf{B}$ (см. [3], [4, гл. IV, § 4.6]). Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{B}$, удовлетворяющим приведенному выше условию, является $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчивым тогда и только тогда, если оно сильно $\mathbf{B}$ -устойчиво.

Операторы $\mathcal{L}_{11} : D \rightarrow L$, $\mathcal{L}_{12} : \ell_0 \rightarrow L$, $\mathcal{L}_{21} : D \rightarrow \ell$, $\mathcal{L}_{22} : \ell_0 \rightarrow \ell$ рассматриваются как приведения на пары $(D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}), \mathbf{B})$, $(M_0, \mathbf{B})$, $(D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}), M)$, (M_0, M) ; здесь $\mathbf{W}_{\mathbf{B}} = D = D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})$. Эти операторы предполагаются линейными, вольтерровыми и ограниченными.

Введем следующие пространства:

$$\begin{aligned} \ell_{\infty 0} &= \left\{ y \in \ell_0 : \|y\|_{\ell_{\infty 0}} = \sup_{k=-1, 0, 1, \dots} \|y(k)\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}, \\ \ell_{\infty} &= \left\{ g \in \ell : \|g\|_{\ell_{\infty}} = \sup_{k=0, 1, \dots} \|g(k)\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

Банаховы пространства $\ell_{\infty 0}$ и ℓ_{∞} являются примерами пространств типа M_0 и M .

Введем обозначение

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (1) записывается в виде

$$\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}.$$

Предположим, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $y(-1) \in \mathbb{R}^n$ задача Коши для «модельной» системы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}^0 x + \mathcal{L}_{12}^0 y &= \dot{x} - F_{11}^0 x - F_{12}^0 y = z \\ \mathcal{L}_{21}^0 x + \mathcal{L}_{22}^0 y &= \Delta y - F_{21}^0 x - F_{22}^0 y = u \end{aligned}$$

однозначно разрешима; здесь операторы $F_{11}^0 : D \rightarrow L$, $F_{12}^0 : \ell_0 \rightarrow L$, $F_{21}^0 : D \rightarrow \ell$, $F_{22}^0 : \ell_0 \rightarrow \ell$ предполагаются непрерывными и вольтерровыми. Тогда модельную систему можно коротко записать в виде

$$\mathcal{L}_0\{x, y\} = \text{col}\{z, u\}.$$

Пусть ее решение имеет представление

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix};$$

через $\mathcal{U} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow D \times \ell_0$ и $\mathcal{W} : L \times \ell \rightarrow D \times \ell_0$ обозначим соответственно фундаментальную матрицу и непрерывный вольтерров оператор Коши системы:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{22}y = g$ для $g \in \mathbf{M}$ принадлежит пространству $\mathbf{M}_0$ и представляется формулой Коши:

$$y[t] = (\mathcal{Y}_{11}y(-1))[t] + (\mathcal{C}_{22}g)[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum_{s=0}^t C_{22}[t, s]g[s], \quad t \geq 0.$$

2. Теоремы Боля—Перрона. Для обыкновенного дифференциального уравнения еще в монографиях [5, 6, 10, 11] отмечались явления, которые в терминах $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчивости можно сформулировать следующим образом. При определенных условиях относительно оператора $\mathcal{L}_{11}$ из $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчивости следует более тонкое асимптотическое свойство, а именно $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}_1)$ -устойчивость, где $\mathbf{B}_1$ — некоторое подпространство пространства $\mathbf{B}$.

Следуя традиции Пермского семинара (см. [1–4]), соответствующие утверждения будем называть *теоремами Боля—Перрона*. В основе доказательств таких теорем, приведенных ниже, лежат свойства подпространства $\mathbf{B} \subset L$, вытекающие из их *порядковой структуры*, которую определим следующим образом. В векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *частичную упорядоченность*: $\alpha = \text{col} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \} \geq 0$, если $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$; соответственно, $\alpha \geq \beta$, если $\alpha - \beta \geq 0$. Через $|\alpha|$ будем обозначать вектор, определяемый равенством $|\alpha| = \text{col} \{ |\alpha_1|, \dots, |\alpha_n| \}$. Будем предполагать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирована норма $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, обладающая свойством *монотонности*:

$$\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\beta\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{если } |\alpha| \leq |\beta|.$$

В соответствии с порядком в пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *отношение порядка* в пространстве L : будем считать, что $y \geq 0$, если $y(t) \geq 0$ почти всюду на $[0, \infty)$; $y \geq z$, если $y - z \geq 0$. Через $|y|$ будем обозначать функцию, почти всюду на $[0, \infty)$ определяемую равенством $|y|(t) = |y(t)|$. Относительно банахова пространства $\mathbf{B} \subset L$ будем предполагать, что норма в пространстве $\mathbf{B}$ согласована с порядком через условие *идеальности*: если $z \in L$, $y \in \mathbf{B}$ и $|z| \leq |y|$, то $z \in \mathbf{B}$ и $\|z\|_{\mathbf{B}} \leq \|y\|_{\mathbf{B}}$.

Среди прочих свойств пространств, удовлетворяющих этому условию (*банаховых идеальных пространств*; см. [9][гл. IV, § 3, п. 3.1; гл. X, § 4, п. 4.1]), отметим следующие:

- (1) норма в таком пространстве $\mathbf{B}$ обладает свойством монотонности;
- (2) любое ограниченное по порядку подмножество пространства $\mathbf{B}$ имеет точные грани ($\mathbf{B}$ — *K-пространство*);
- (3) в пространстве $\mathbf{B}$ определены «срезки» — операторы умножения на характеристические функции χ_M измеримого множества $M \subset [0, \infty)$;
- (4) вложение $\mathbf{B} \subset L$ непрерывно.

3. Асимптотическая устойчивость. Введем подмножество $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}$ всех функций $z \in \mathbf{B}$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|\chi_{[s, \infty)} z\|_{\mathbf{B}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \|z^s\|_{\mathbf{B}} = 0.$$

Здесь и ниже χ_M — характеристическая функция множества M . Иначе говоря, пространство $\mathbf{B}_0$ состоит из всех функций $z \in \mathbf{B}$, стремящихся при $t \rightarrow \infty$ к нулю по метрике пространства $\mathbf{B}$. Нетрудно показать, что $\mathbf{B}_0$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{B}$ и совпадает с замыканием по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{B}}$ линейного многообразия всех финитных функций $z \in \mathbf{B}$. Далее, пусть C_0 — подпространство пространства C , состоящее из всех $x \in C$, для которых $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, $\|x\|_{C_0} = \|x\|_C$. Здесь и ниже C — пространство непрерывных и ограниченных функций $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}$.

Введем обозначение $Q_{11} = \mathcal{L}_{11}W_{11}$. Введем банаховы пространства всех функций $g \in \ell_{\infty}^0 \subset \ell_{\infty}$ (соответственно, $g \in \ell_{\infty 0}^0 \subset \ell_{\infty 0}$), удовлетворяющих условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{[n, n+1, \dots, \infty)} g\|_{\ell_{\infty}} = 0 \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{[n, n+1, \dots, \infty)} g\|_{\ell_{\infty 0}} = 0 \right).$$

Рассмотрим банахово пространство $\mathbf{b} \subset \ell$ бесконечных матриц $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$ с нормой $\|g\|_{\mathbf{b}}$ и банахово пространство $\mathbf{b}_0 \subset \ell_0$ бесконечных матриц $y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$

с нормой $\|y\|_{b_0}$, причем вложения $\mathbf{b} \subset \ell$ и $\mathbf{b}_0 \subset \ell_0$ непрерывны. Предположим, что в банаховом пространстве $\mathbf{b}$ (соответственно, $\mathbf{b}_0$) выполнены все условия, сформулированные в п. 2.

Введем подмножество $\mathbf{b}^0 \subset \mathbf{b}$ всех функций $g \in \mathbf{b}$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{[n, n+1, \dots, \infty)} g\|_{\mathbf{b}} = 0.$$

Иначе говоря, пространство $\mathbf{b}^0$ состоит из всех функций $g \in \mathbf{b}$, стремящихся при $t \rightarrow \infty$ к нулю по метрике пространства $\mathbf{b}$; нетрудно показать, что $\mathbf{b}^0$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{b}$ и совпадает с замыканием по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{b}}$ линейного многообразия всех финитных функций $g \in \mathbf{b}$. Аналогично определим пространство $\mathbf{b}_0^0$. Введем обозначение $Q_{22} = \mathcal{L}_{22}W_{22}$.

4. Теоремы о существовании пределов решений на бесконечности для ЛФДУП и ЛРУП. Ниже дополнительно предполагаем, что пространство $\mathbf{B}$ содержит все функции-константы, а подпространство $\mathbf{B}_0$ не содержит отличных от нуля констант.

Будем говорить, что вектор $z(\infty) = \mathbf{B}\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$ есть $\mathbf{B}$ -предел функции $z \in \mathbf{B}$, если разность $z - z(\infty)$ принадлежит пространству $\mathbf{B}_0$, т.е. если

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|[z - z(\infty)]^s\|_{\mathbf{B}} = 0.$$

Корректность этого определения следует из того, что если $\xi_1 = \mathbf{B}\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$ и $\xi_2 = \mathbf{B}\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$, то $\xi_1 - \xi_2 \in \mathbf{B}_0$. Отсюда $\xi_1 = \xi_2$ ввиду свойств пространства $\mathbf{B}_0$.

Для $(n \times n)$ -матрицы $A(t) = \{A_1(t), \dots, A_n(t)\}$ будем писать

$$A(\infty) = \mathbf{B}\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \left\{ \mathbf{B}\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} A_1(t), \dots, \mathbf{B}\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} A_n(t) \right\}.$$

Если $\mathbf{B} = L_\infty$, то

$$z(\infty) = \text{vrai} \lim_{t \rightarrow \infty} z(t), \quad A(\infty) = \text{vrai} \lim_{t \rightarrow \infty} A(t).$$

Обозначим через $\mathbf{B}_l$ пространство функций $z \in \mathbf{B}$, для каждой из которых существует $\mathbf{B}$ -предел с нормой $\|z\|_{\mathbf{B}_l} = \|z\|_{\mathbf{B}}$. Аналогично определим пространство C_l функций $x \in C$, для которых существует $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(\infty) \in \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{C_l} = \|x\|_C$.

Относительно модельного уравнения $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$ и пространства $\mathbf{B}$ будем предполагать следующее:

- (а) оператор Коши W_{11} действует из пространства $\mathbf{B}_l$ в пространство C_l и ограничен;
- (б) столбцы фундаментальной матрицы U_{11} принадлежат пространству C_l .

Эти условия означают, что имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_l) \subset C_l$. Следовательно, предполагается, что фундаментальная матрица U_{11} имеет конечный предел $U_{11}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} U_{11}(t)$.

Имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}) \subset C$.

Отметим, что для интегральных уравнений утверждения о наличии пределов решений были получены ранее в [12, 13, 22–24]; некоторыми идеями этих работ мы воспользовались.

Здесь предполагаем, что пространство $\mathbf{b}$ содержит все функции-константы, а подпространство $\mathbf{b}^0$ не содержит отличных от нуля констант. Через $\mathbf{b}^l$ обозначим пространство функций $g \in \mathbf{b}$, для которых существует $\mathbf{b}$ -предел $g(\infty)$ с нормой $\|g\|_{\mathbf{b}^l} = \|g\|_{\mathbf{b}}$. Иначе говоря, пространство $\mathbf{b}^l$ состоит из всех функций $g \in \mathbf{b}$, стремящихся при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}$, к пределу $g(\infty)$ по метрике пространства $\mathbf{b}$. Нетрудно показать, что $\mathbf{b}^l$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{b}$ и совпадает с замыканием по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{b}}$ линейного многообразия всех финитных функций $g \in \mathbf{b}$ и функций-констант. Аналогично определяем пространство $\mathbf{b}_0^l$.

Всюду будем предполагать, что для пространства $\mathbf{b}$ и модельного уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = u$ выполнены следующие условия:

- (а) оператор Коши W_{22} действует из пространства $\mathbf{b}^l$ в пространство $\ell_{\infty 0}^l$ и ограничен;
- (б) столбцы фундаментальной матрицы U_{22} уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = 0$ принадлежат пространству $\ell_{\infty 0}^l$.

Таким образом, имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^l) \subset \ell_{\infty 0}^l$ и существование пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = y(\infty)$$

всех решений уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = g$ в случае $g \in \mathbf{b}^l$.

Имеет место непрерывное вложение $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}) \subset \ell_{\infty 0}$.

5. Асимптотически периодические решения. Пусть ω — фиксированное положительное число. Определим оператор сдвига S^ω равенством $(S^\omega z)(t) = z(t + \omega)$. Будем предполагать, что пространство $\mathbf{B}$ содержит все функции-константы, $S^\omega \mathbf{B} \subset \mathbf{B}$ и $\|S^\omega\|_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}} = 1$. Таким образом, пространство $\mathbf{B}_0$ не содержит отличных от нуля функций-констант. Обозначим через $\mathbf{B}_\omega$ подпространство всех асимптотически ω -периодических функций: $z \in \mathbf{B}_\omega$, если $(S^\omega z - z) \in \mathbf{B}_0$. Аналогично определяем пространство $\mathbf{C}_\omega$, элементами которого являются такие $x \in \mathbf{C}$, что $(S^\omega x - x) \in \mathbf{C}_0$. Ниже будем предполагать, что пространство $\mathbf{B}$ вольтеррово допустимо для модельного уравнения $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$ и пространство $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_\omega)$ вложено в пространство $\mathbf{C}_\omega$. Таким образом, $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_\omega)$ -устойчивость уравнения $\mathcal{L}_{11} x = f$ означает, что если $f \in \mathbf{B}_\omega$, то любое решение x этого уравнения является асимптотической ω -периодической функцией.

Введем обозначение $[S^\omega, Q_{11}] = S^\omega Q_{11} - Q_{11} S^\omega$, где $Q_{11} = \mathcal{L}_{11} W_{11}$. Пусть модельное уравнение $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$ удовлетворяет условиям (а) и (б) из п. 4.

Теорема 1. Пусть уравнение $\mathcal{L}_{11} x = f$ является $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})$ -устойчивым, а оператор

$$\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \rightarrow L$$

действует из пространства $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_l)$ в пространство $\mathbf{B}_l$ и ограничен, а также

$$[S^\omega, \mathcal{L}_{11} W_{11}] \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_l.$$

Тогда это уравнение $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_\omega)$ -устойчиво.

Эти утверждения дополняют результаты работ [7, 8].

Лемма 1. Пусть линейный ограниченный оператор $Q_{11} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ вольтерров, $Q_{11} \mathbf{B} \subset \mathbf{B}$. Далее, пусть оператор $[S^\omega, Q_{11}]$ переводит пространство $\mathbf{B}$ в пространство $\mathbf{B}_l$. Тогда оператор Q_{11} действует в пространстве $\mathbf{B}_\omega$. Если, кроме того, оператор $Q_{11} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ имеет обратный оператор $Q_{11}^{-1} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$, то оператор Q_{11}^{-1} действует в пространстве $\mathbf{B}_\omega$.

Теорема 1 и лемма 1 опубликованы в статье [3] и в книге [4][гл. IV, § 4.4, теорема 4.4.1 и лемма 4.4.2]. Отметим, что для интегральных уравнений Вольтерра утверждения, аналогичные лемме 1, приведены в обзоре [22][гл. 2, § 2].

Пусть $\omega \in \mathbb{N}$ — фиксированное число. Будем предполагать, что пространство $\mathbf{b}$ содержит все функции-константы, $S^\omega \mathbf{b} \subset \mathbf{b}$ и $\|S^\omega\|_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}} = 1$. Таким образом, пространство $\mathbf{b}^0$ не содержит отличных от нуля функций-констант. Обозначим через $\mathbf{b}^\omega$ подпространство всех асимптотически ω -периодических функций: $u \in \mathbf{b}^\omega$, если $(S^\omega u - u) \in \mathbf{b}^0$. Аналогично определяем пространство $\ell_{\infty 0}^\omega$, элементами которого являются такие функции $y \in \ell_{\infty 0}$, что $(S^\omega y - y) \in \ell_{\infty 0}^0$. Ниже будем предполагать, что пространство $\mathbf{b}$ вольтеррово допустимо для модельного уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 g = u$ и пространство $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^\omega)$ вложено в пространство $\ell_{\infty 0}^\omega$. Таким образом, $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^\omega)$ -устойчивость уравнения $\mathcal{L}_{22} y = g$ означает, что если $g \in \mathbf{b}^\omega$, то любое решение y этого уравнения является асимптотической ω -периодической функцией.

Введем обозначение $[S^\omega, Q_{22}] = S^\omega Q_{22} - Q_{22} S^\omega$, где $Q_{22} = \mathcal{L}_{22} W_{22}$. Пусть модельное уравнение $\mathcal{L}_{22}^0 g = u$ удовлетворяет условиям (а) и (б) из п. 4.

Теорема 2. Пусть уравнение $\mathcal{L}_{22} y = g$ является $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b})$ -устойчивым, а оператор

$$\mathcal{L}_{22} : D(\mathcal{L}_{22}) \rightarrow \ell$$

действует из пространства $D(\mathcal{L}_{22}^l, \mathbf{b}^l)$ в пространство $\mathbf{b}^l$ и ограничен, а также

$$[S^\omega, \mathcal{L}_{22} W_{22}] \mathbf{b} \subset \mathbf{b}^l.$$

Тогда это уравнение $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^\omega)$ -устойчиво.

Лемма 2. Пусть линейный ограниченный оператор $Q_{22} : \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}$ вольтерров, $Q_{22} \mathbf{b} \subset \mathbf{b}$. Пусть, далее, оператор $[S^\omega, Q_{22}]$ переводит пространство $\mathbf{b}$ в пространство $\mathbf{b}^l$. Тогда оператор Q_{22} действует в пространстве $\mathbf{b}^\omega$. Если, кроме того, оператор $Q_{22} : \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}$ имеет обратный оператор $Q_{22}^{-1} : \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}$, то оператор Q_{22}^{-1} действует в пространстве $\mathbf{b}^\omega$.

Сформулируем распространение теоремы Боля—Перрона на уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \{f, g\}$.

Теорема 3. Пусть $\omega \in \mathbb{N}$ — фиксированное число. Предположим, что выполнены следующие условия: операторы

$$\mathcal{L}_{12} : D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}) \rightarrow B, \quad \mathcal{L}_{21} : D(\mathcal{L}_{11}^0, B) \rightarrow \mathbf{b}$$

действуют и ограничен, причем

$$\mathcal{L}_{12}(D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^l)) \subset B_l, \quad \mathcal{L}_{21}(D(\mathcal{L}_{11}^0, B_l)) \subset \mathbf{b}^l;$$

операторы

$$\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \rightarrow L, \quad \mathcal{L}_{22} : D(\mathcal{L}_{22}) \rightarrow \ell$$

непрерывно действуют из пространств $D(\mathcal{L}_{11}^0, B_l)$ и $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^l)$ в пространства B_l и $\mathbf{b}^l$ и справедливы включения

$$[S^\omega, \mathcal{L}_{11}W_{11}]B \subset B_l, \quad [S^\omega, \mathcal{L}_{22}W_{22}]\mathbf{b} \subset \mathbf{b}^l.$$

Пусть уравнение $\mathcal{L}_{11}x = f$ является $D(\mathcal{L}_{11}^0, B)$ -устойчивым, а и уравнение $\mathcal{L}_{22}y = g - D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b})$ -устойчивым. Далее, пусть уравнение

$$\mathcal{L}_1x = (\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21})x = f_1$$

является $D(\mathcal{L}_{11}^0, B)$ -устойчивым, оператор $\mathcal{L}_1W_{11} : B_l \rightarrow B_l$ ограничен и справедливо включение

$$[S^\omega, \mathcal{L}_1W_{11}]B \subset B_l.$$

Тогда уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$ будет $D(\mathcal{L}_0, B_\omega \times \mathbf{b}^\omega)$ -устойчивым.

Предложенная статья продолжает исследование, начатое в [14–20, 24]. В [14–16, 24] получена теорема Боля—Перрона для ГЛСФДУП в случае экспоненциальной устойчивости. В [17, 18] получена теорема Боля—Перрона для ГЛСФДУП в случае асимптотической устойчивости. В [19] получено обращение к теореме Боля—Перрона для ГЛСФДУП в случае асимптотической устойчивости. В [20] получена теорема Боля—Перрона об асимптотических периодических решениях для ГЛСФДУП в случае асимптотической устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В., Березанский Л. М., Симонов П. М., Чистяков А. В. Устойчивость линейных систем с последствием. II// Диффер. уравн. — 1991. — 27, № 4. — С. 555–562.
2. Азбелев Н. В., Березанский Л. М., Симонов П. М., Чистяков А. В. Устойчивость линейных систем с последствием. III// Диффер. уравн. — 1991. — 27, № 10. — С. 1659–1668.
3. Азбелев Н. В., Березанский Л. М., Симонов П. М., Чистяков А. В. Устойчивость линейных систем с последствием. IV// Диффер. уравн. — 1993. — 29, № 2. — С. 196–204.
4. Азбелев Н. В., Симонов П. М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. — Пермь: Перм. ун-т, 2001.
5. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.
6. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
7. Домошницкий А. И., Драхлин М. Е. О периодических решениях функционально-дифференциальных уравнений// Докл. семин. Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа — 1988. — 3, № 3. — С. 54–57.
8. Драхлин М. Е. Один признак существования асимптотически периодических решений// в кн.: Функционально-дифференциальные уравнения/ Межвуз. сб. науч. тр.. — Пермь: Перм. политехн. ин-т, 1990. — С. 168–170.
9. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — СПб.: Невский Диалект, 2004.
10. Крейн М. Г. О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости// Усп. мат. наук. — 1948. — 3, № 3 (25). — С. 166–169.
11. Массера Х. Л., Шеффер Х. Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970.
12. Пуляев В. Ф. О допустимости некоторых пар пространств относительно линейных интегральных уравнений Вольтерра// Диффер. уравн. — 1984. — 20, № 10. — С. 1800–1805.

13. Пуляев В. Ф. О спектре линейных непрерывных операторов// Изв. Сев.-Кав. науч. центра высш. школы. Естеств. науки. — 1985. — № 4. — С. 25–28.
14. Симонов П. М. Теорема Боля—Перрона для гибридных линейных систем с последействием// Вестн. Перм. ун-та. Мат. Мех. Информ. — 2016. — № 2 (33). — С. 56–60.
15. Симонов П. М. К вопросу о теореме Боля—Перрона для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2016. — 18, № 1. — С. 75–81.
16. Симонов П. М. Теорема Боля—Перрона для гибридных линейных систем с последействием// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2017. — 132. — С. 122–126.
17. Симонов П. М. Теорема Боля—Перрона об асимптотической устойчивости для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием// Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2016. — 16, № 3. — С. 55–59.
18. Симонов П. М. Теорема Боля—Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем// в кн.: Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения/ Мат. конф., посв. 95-летию со дня рожд. проф. Н. В. Азбелева (Пермь, 17–19 мая 2017 г.). — Пермь, 2018. — С. 230–235.
19. Симонов П. М. Теорема Боля—Перрона и обратная к ней об асимптотической устойчивости для гибридных линейных систем с последействием// Вестн. Перм. ун-та. Мат. Мех. Информ. — 2018. — 2, № 41. — С. 38–43.
20. Симонов П. М. Теорема Боля—Перрона об асимптотически периодических решениях для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием// Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2018. — 18, № 4. — С. 58–64.
21. Сокол Д. Г. О допустимости некоторых пар пространств для интегральных операторов и уравнений// Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. — 2000. — 1. — С. 135–137.
22. Цалюк З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра// в кн.: Итоги науки и техн. Мат. анализ. — М.: ВИНТИ, 1977. — 15. — С. 131–198.
23. Цалюк З. Б. О допустимости некоторых пар пространств для интегральных операторов и уравнений Вольтерра// Диффер. уравн. — 1977. — 13, № 11. — С. 2096–2098.
24. Simonov P. M. The Bohl–Perron theorem for hybrid linear systems with aftereffect// J. Math. Sci. — 2018. — 230, № 5. — P. 775–781.

Симонов Петр Михайлович

Пермский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: simpm@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 99–104
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-99-104

УДК 517.933

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА НИТИ, С ИЗМЕНЯЮЩЕЙ ДЛИНОЙ ПОДВЕСА

© 2019 г. В. М. УЛЬЯНОВ, А. Ю. КИРЬЯНОВ, В. А. ХРИПИН

Аннотация. Рассмотрена задача о движении тела, подвешенного на нити переменной длины, и найдены выражения для скорости перемещения гибкой нити при ее наматывании на барабан, угловой скорости барабана, а также времени, затрачиваемого на рассматриваемый процесс.

Ключевые слова: материальная точка, гибкая нить, угол поворота, угловая скорость, пневмодвигатель.

ON THE MOTION OF A BODY SUSPENDED ON A THREAD WITH VARIABLE LENGTH

© 2019 V. M. ULYANOV, A. YU. KIRYANOV, V. A. KHRIPIN

ABSTRACT. In this paper, we consider the motion of a body suspended on a thread of variable length. We obtain expressions for the speed of the flexible thread when it is wound on a drum, the angular velocity of the drum, and the total duration of the process.

Keywords and phrases: particle, flexible thread, rotation angle, angular velocity, pneumatic motor.

AMS Subject Classification: 34K06

1. Введение. Задача о перемещении тела, соединенного нитью с закрепленным на неподвижном корпусе барабаном, носит прикладной характер. Так, при машинном доении коров важно своевременное снятие доильного аппарата с вымени коровы. Добиться этого можно за счет снабжения переносных доильных аппаратов устройством автоматического снятия (см. [1–3]): подвесная часть аппарата по завершению доения снимается с вымени и выводится из-под коровы посредством гибкой нити, наматываемой на барабан.

Главным требованием к исполнительному механизму при снятии доильного аппарата с вымени является исключение удара о пол (рис. 1). При этом для упрощения задачи аппарат моделируется материальной точкой M с массой m . На точку действуют сила тяжести $P = mg$ и сила натяжения гибкой нити K , под действием которых точка M перемещается по некоторой дуге. При движении точки происходит укорачивание длины подвеса за счет наматывания нити на барабан. Принимаем, что начальная длина нити подвеса, связывающая барабан с точкой M равна l_0 . Угол отклонения нити от вертикали в начальный момент времени обозначим ϕ_0 .

Для нахождения закона движения тела подвешенного на нити используем уравнение Лагранжа (см. [4])

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (1)$$

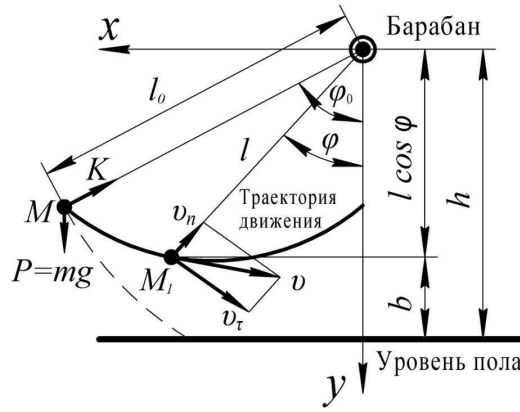


Рис. 1

где L — функция Лагранжа, равная $T - U$; T — кинетическая энергия; U — силовая функция; ϕ — угол отклонения тела от вертикали. В момент времени t тело находится в некоторой точке 1 ; его скорость, направленная по касательной к траектории движения, складывается из нормальной составляющей вдоль нити подвеса длиной l и перпендикулярной тангенциальной составляющей v_τ . Тогда кинетическая энергия тела равна

$$T = \frac{m\dot{\vartheta}^2}{2} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + l^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]. \quad (2)$$

Силовой функцией в системе выступит потенциальная энергия. При допущении, что в точке подвеса потенциальная энергия равна нулю, на высоте $h_1 = l \cos \phi$ относительно оси барабана она будет равна

$$U = -mgl \cos \phi. \quad (3)$$

После соответствующих преобразований уравнение (1) с учетом формул (2) и (3), примет вид

$$l \frac{d^2 \phi}{dt^2} + 2 \frac{dl}{dt} \frac{d\phi}{dt} + g \sin \phi = 0. \quad (4)$$

Найти решение уравнения (3) в аналитическом виде проблематично. Примем, что при уменьшении величины угла ϕ длина l гибкой нити сокращается таким образом, что материальная точка движется параллельно поверхности пола, сохраняя расстояние b от него. Тогда длина гибкой нити равна

$$l = \frac{h - b}{\cos \phi} \quad (5)$$

где h — высота установки над полом стойла барабана пневмодвигателя. Дифференцируя соотношение (5), подставляя результат в (4) и решая получившееся уравнение совместно с формулой (5), получим:

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + 2 \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{g}{h - b} \sin \phi \cdot \cos \phi = 0. \quad (6)$$

Введем обозначение $a = g/(h - b) > 0$ и примем следующие начальные условия для уравнения (6):

$$\phi(0) = \phi_0 > 0, \quad \dot{\phi}(0) = 0.$$

Выполним в уравнении (6) замену

$$y = y(\phi) = \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2, \quad y(\phi_0) = \left(\frac{d\phi}{dt} \Big|_t = 0 \right)^2 = 0. \quad (7)$$

Продифференцируем функцию (7):

$$\frac{d\phi^2}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{dy}{d\phi} \quad (8)$$

Тогда уравнение (6) с учетом выражения (8) примет вид

$$\frac{dy}{d\phi} + 4 \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \cdot y + 2a \sin \phi \cdot \cos \phi = 0. \quad (9)$$

Получившееся линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка решим методом вариации постоянных. Сначала рассмотрим однородное уравнение в (9):

$$\frac{dy}{d\phi} + 4 \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \cdot y = 0 \Rightarrow y = c \cdot \cos^4 \phi. \quad (10)$$

Далее ищем решение исходного неоднородного уравнения (9) в виде

$$y(\phi) = c(\phi) \cdot \cos^4 \phi. \quad (11)$$

Подставляя (11) в уравнение (9), получим

$$\dot{c}(\phi) = -2a \frac{\sin \phi}{\cos^3 \phi} \Rightarrow c(\phi) = -\frac{a}{\cos^3 \phi} + c, \quad (12)$$

где c — постоянная интегрирования. Подставляя в (11) выражение для $c(\phi)$, имеем:

$$y(\phi) = c \cdot \cos^4 \phi - a \cdot \cos^2 \phi. \quad (13)$$

Константу интегрирования c в выражении (13) найдем, применив начальное условие $y(\phi_0) = 0$: $c \cdot \cos^4 \phi_0 - a \cdot \cos^2 \phi_0 = 0$, откуда $c = a / \cos^2 \phi_0$. Формула (13) с учетом значения постоянной c будет

$$y(\phi) = \frac{a \cdot \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi_0} (\cos^2 \phi - \cos^2 \phi_0). \quad (14)$$

После преобразований уравнение (14) принимает вид

$$\frac{d\phi}{dt} = \pm \sqrt{a} \frac{\cos \phi}{\cos \phi_0} \cdot \sqrt{\cos^2 \phi - \cos^2 \phi_0}. \quad (15)$$

В правой части уравнения (15) выберем знак «−», так как величина угла поворота ϕ уменьшается с течением времени t ; тогда

$$\frac{d\phi}{\cos \phi \cdot \sqrt{\cos^2 \phi - \cos^2 \phi_0}} = -\frac{\sqrt{a}}{\cos \phi_0} dt. \quad (16)$$

Интегрируя выражение (16), получаем

$$\int \frac{d\phi}{\cos \phi \cdot \sqrt{\cos^2 \phi - \cos^2 \phi_0}} = -\frac{\sqrt{a}}{\cos \phi_0} (t + c_1). \quad (17)$$

Вычислим интеграл левой части (17):

$$\int \frac{\cos \phi d\phi}{\cos^2 \phi \cdot \sqrt{\cos^2 \phi - \cos^2 \phi_0}} = \int \frac{d(\sin \phi)}{(1 - \sin^2 \phi) \sqrt{(1 - \sin^2 \phi) - (1 - \sin^2 \phi_0)}} = \int \frac{dz}{(1 - z^2) \sqrt{z_0 - z^2}},$$

где выполнена замена $z = \sin \phi$ и введено обозначение $z_0 = \sin^2 \phi_0$, причем $0 < z_0 < 1$. Далее, замена $z = z_0 \sin \tau$ приводит к интегралу

$$\int \frac{z_0 \cos \tau d\tau}{(1 - z_0^2 \sin^2 \tau) \sqrt{(z_0^2 - z_0^2 \sin^2 \tau)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - z_0^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1 - z_0^2} \cdot \operatorname{tg} \tau \right).$$

Осуществляя обратную замену переменных, после упрощения находим интеграл левой части (17):

$$\frac{1}{\cos \phi_0} \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \phi_0 \cdot \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi}} \right), \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), получим:

$$\frac{1}{\cos \phi_0} \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \phi_0 \cdot \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi}} \right) = -\frac{\sqrt{a}}{\cos \phi_0} (t + c_1). \quad (19)$$

Для нахождения постоянной c_1 применяем начальное условие $\phi(0) = \phi_0$. При $\phi \rightarrow \phi_0$

$$\frac{\cos \phi_0 \cdot \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi}} \rightarrow \infty \Rightarrow \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \phi_0 \cdot \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi}} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

поэтому $-\sqrt{a} \cdot c_1 = \pi/2$; тогда

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \phi_0 \cdot \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi}} \right) = -\sqrt{a} \cdot t - \sqrt{a} \cdot c_1 = \frac{\pi}{2} - \sqrt{a} \cdot t,$$

откуда

$$\frac{\cos \phi_0 \cdot \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{a} \cdot t \right) = \operatorname{ctg} (\sqrt{a} \cdot t). \quad (20)$$

Преобразования формулы (20) приводят ее к следующему виду:

$$\sin \phi = \pm \frac{\cos (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin \phi_0}{\sqrt{1 - \sin^2 (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin^2 \phi_0}}; \quad (21)$$

при этом в правой части формулы (21) выбирается знак «+», так как при $t = 0$ должно быть $\phi = \phi_0$. Для угла поворота нити получаем выражение

$$\phi(t) = \arcsin \frac{\cos (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin \phi_0}{\sqrt{1 - \sin^2 (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin^2 \phi_0}}. \quad (22)$$

Длина нити с уменьшением угла ϕ также уменьшается из-за наматывания ее на барабан; при этом формула для скорости движения нити имеет вид

$$-\frac{dl}{dt} = \omega(t) \cdot r \quad (23)$$

где r — радиус барабана, $\omega(t)$ — угловая скорость барабана. Решая совместно уравнения (5) и (23), после преобразований получим:

$$\omega(t) = -\frac{(h-b) \cdot \sin \phi \, d\phi}{r \cdot \cos^2 \phi \, dt}. \quad (24)$$

Совместное решение (15), (21) и (24) приводит к следующему результату:

$$\omega(t) = \frac{\sqrt{g(h-b)} \cdot \sin^2 \phi_0}{r \cdot \cos \phi_0} \cdot \frac{\sin (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \cos (\sqrt{a} \cdot t)}{\sqrt{1 - \sin^2 (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin^2 \phi_0}}. \quad (25)$$

Исследуем функцию $\omega(t)$ на экстремум с целью нахождения критической угловой скорости барабана. Вычислим производную от (25), введя обозначение

$$B_1 = \frac{\sqrt{g(h-b)} \cdot \sin^2 \phi_0}{r \cdot \cos \phi_0},$$

Имеем:

$$\omega(t) = B_1 \cdot \frac{\sin (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \cos (\sqrt{a} \cdot t)}{\sqrt{1 - \sin^2 (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin^2 \phi_0}} = B_1 \cdot \frac{\sin 2\sqrt{a} \cdot t}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + (\cos 2\sqrt{a}t - 1) \cdot \sin^2 \phi_0}}. \quad (26)$$

Производная от выражения (26) равна

$$\dot{\omega}(t) = B_1 \frac{\sqrt{a}}{2 \left(\sqrt{2 + (\cos 2\sqrt{a}t - 1) \cdot \sin^2 \phi_0} \right)^3} \left(\sin^2 \phi_0 \cos^2 2\sqrt{a}t - 2 \cos 2\sqrt{a}t (\sin^2 \phi_0 - 2) + \sin^2 \phi_0 \right).$$

Приравнявая к нулю полученное выражение, получаем

$$\sin^2 \phi_0 \cos^2 2\sqrt{a}t - 2 \cos 2\sqrt{a}t (\sin^2 \phi_0 - 2) + \sin^2 \phi_0 = 0. \quad (27)$$

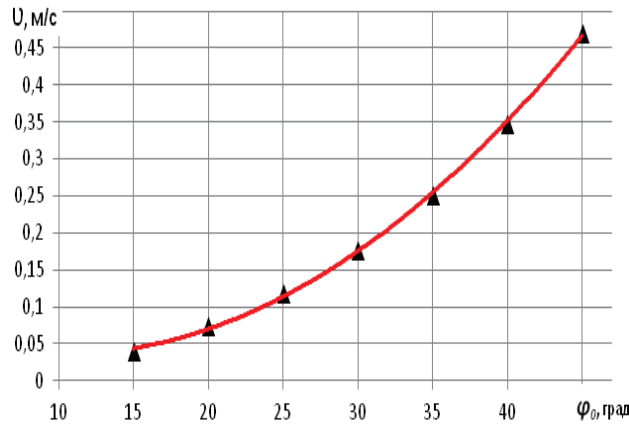


Рис. 2. Зависимость скорости движения v нити от начального угла ϕ_0 отклонения подвесной части от вертикали

Преобразуем выражение (27), используя замену $k = \cos 2\sqrt{a}t$, к квадратному уравнению

$$k^2 - 2 \frac{\sin^2 \phi_0 - 2}{\sin^2 \phi_0} \cdot k + 1 = 0, \quad (28)$$

имеющему корни

$$k_1 = \frac{\cos \phi_0 + 1}{\cos \phi_0 - 1} = -\operatorname{ctg}^2 \frac{\phi_0}{2}, \quad k_2 = \frac{\cos \phi_0 - 1}{\cos \phi_0 + 1} = -\operatorname{tg}^2 \frac{\phi_0}{2}.$$

Начальный угол отклонения материальной точки ϕ_0 лежит будет в интервале

$$0 < \phi_0 < \frac{\pi}{2} \iff 0 < \frac{\phi_0}{2} < \frac{\pi}{4};$$

если $\operatorname{ctg}(\phi_0/2) > 1$, то корень $k_1 = -\operatorname{ctg}^2(\phi_0/2)$, является посторонним. Если $0 < \operatorname{tg}(\phi_0/2) < 1$, то $k_2 = -\operatorname{tg}^2(\phi_0/2)$ является корнем уравнения. Функция $\omega = f(t)$ в точке $t = t_{\text{кр}}$ изменяет свой знак с плюса на минус, что соответствует максимуму. Найдём величину $t = t_{\text{кр}}$, при котором значения угловой скорости $\omega = \omega_{\text{кр}}$. Имеем:

$$\cos 2\sqrt{a}t = -\operatorname{tg}^2 \frac{\phi_0}{2},$$

откуда

$$t_{\text{кр}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \arccos \left(-\operatorname{tg}^2 \frac{\phi_0}{2} \right). \quad (29)$$

Подставив $t = t_{\text{кр}}$ из (29) в (26), после преобразований получим выражение для угловой скорости барабана:

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{\sqrt{g(h-b)}(1 - \cos \phi_0)}{r \cdot \cos \phi_0}; \quad (30)$$

соответственно, скорость движения нити v с подвесной частью при вращении барабана равна

$$v = \frac{\sqrt{g(h-b)}(1 - \cos \phi_0)}{r \cdot \cos \phi_0}. \quad (31)$$

Графическая интерпретация выражения (31) при постоянных параметрах фиксации исполнительного устройства на вакуумном проводе доильной установки представлена на рис. 2.

Из рис. 2 следует, что с увеличением угла поворота ϕ_0 скорость движения гибкой нити увеличивается. Как показала практика применения рассмотренного устройства в производственных условиях, скорость перемещения нити для исключения травмирования вымени коровы должна быть в пределах 0,15–0,2 м/с (см. [5]). Так, для данного диапазона скоростей нити при диаметре

барабана пневмодвигателя $25 \cdot 10^{-3}$ м необходимая угловая скорость согласно (30) составляет 12–16 рад/с. Продолжительность процесса перемещения подвесной части доильного аппарата при снятии по завершению доения можно определить, если в формуле (21) принять, что $\phi = 0$, что правомочно, так как в конце процесса движения подвесная часть зависает под вакуумным проводом, т.е. угол будет $\phi = 0$. Имеем:

$$\sin \phi = \frac{\cos(\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin \phi_0}{\sqrt{1 - \sin^2(\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin^2 \phi_0}} = 0;$$

отсюда следует $\cos(\sqrt{a} \cdot t) = 0$, так что

$$\sqrt{a} \cdot t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}.$$

Заменяя постоянную a , получим:

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{g}{h-b}}}.$$

Очевидно, время перемещения подвесной части зависит от высоты ее расположения над полом и геометрических параметров закрепления барабана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Некрашевич В. Ф., Ульянов В. М., Кирьянов А. Ю., Москвитин И. А. Устройство для автоматического снятия доильного аппарата/ Патент RU 2 203 535 С2.
2. Ульянов В. М., Коледов Р. В., Хрипин В. А., Утолин В. В. Определение величины магнитного поля элементов пневмодвигателя, устройства для автоматического снятия подвесной части доильного аппарата// Науч. ж. КубГАУ. — 2015. — 108, № 4. — С. 10.
3. Ульянов В. М., Шапошников С. В. Переносной доильный аппарат с манипулятором// Сельский механизатор. — 2004. — 11. — С. 35.
4. Жуковский Н. Е. Теоретическая механика. — М.: ГИТТЛ, 1952.
5. Ульянов В. М. Производственная проверка технологий доения коров// Механизация и электрификация сельского хозяйства. — 2008. — 6. — С. 13–14.

Ульянов Вячеслав Михайлович

Рязанский государственный агротехнологический университет им. П. А. Костычева

E-mail: ulyanov-v@list.ru

Кирьянов Александр Юрьевич

Академия права и управления Федеральной службы исполнения наказаний России, Рязань

E-mail: customs.rzn.kay@yandex.ru

Хрипин Владимир Александрович

Рязанский государственный агротехнологический университет им. П. А. Костычева

E-mail: khripin@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 105–113
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-105-113

УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ПОМЕХОЙ

© 2019 г. В. И. УХОВОТОВ, С. А. НИКИТИНА

Аннотация. Для дискретной динамической управляемой системы с помехой рассматривается задача удержания фазовой точки в заданном семействе множеств в дискретные моменты времени. Проанализирован случай, когда вектограмма управления является многогранником, задаваемым с помощью системы линейных неравенств. Доказаны некоторые свойства многогранников специального вида, удовлетворяющих условию линейности, которое позволяет получить условие возможности удержания в явном виде. Приведены необходимые и достаточные условия возможности удержания. Полученные результаты проиллюстрированы примером.

Ключевые слова: дискретная система, многошаговая задача управления, многогранник значений управления.

CONTROL OF A DISCRETE DYNAMIC SYSTEM WITH NOISE

© 2019 V. I. UKHOVOTOV, S. A. NIKITINA

ABSTRACT. For a discrete dynamic controlled system with noise, we consider the problem of retaining a phase point in a given family of sets at discrete instants of time. We analyze the case where the control vectogram is a polyhedron defined by a system of linear inequalities. We prove some properties of specific polyhedra satisfying the linearity condition, which allows us to obtain a condition of retention in the explicit form. Necessary and sufficient conditions for the possibility of retention are given. The results obtained are illustrated by an example.

Keywords and phrases: discrete system, multi-step control problem, polyhedron of control values.

AMS Subject Classification: 93C41, 93C55

1. Введение. В [5, 6] рассматривались дифференциальные игры удержания, в которых цель одного из игроков состоит в том, чтобы фазовая точка находилась в заданных множествах в некоторые моменты времени. В [9] задача удержания решена для динамической системы при наличии помехи и с заданным множеством моментов коррекции. В [7, 8] рассматривались непрерывные задачи управления. В этих работах были предложены процедуры построения стабильного моста и управления, гарантирующего выполнения заданных условий в момент окончания процесса. В данной статье продолжается исследование, начатое в указанных работах. Рассмотрена дискретная модель управляемого процесса, в котором вектограмма управления является многогранником, задаваемым с помощью системы линейных неравенств.

Дискретные процессы управления возникают, как правило, при решении прикладных задач (см. [2, 10]). Это связано с тем, что зачастую информация о состоянии процесса поступает в дискретные моменты времени, а управление осуществляется по шагам.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00264а).

2. Постановка задачи. Рассмотрим дискретный конфликтно-управляемый процесс, заданный уравнением

$$z(t+1) = z(t) - u(t) + v(t), \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $v(t) \in V(t) \subset \mathbb{R}^n$, $u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^n$, $t = \overline{0, p}$. Здесь u — значения управления, v — значения помехи. Считаем, что число шагов (длительность) процесса управления $p \geq 1$ задано. Множество $V(t)$ при каждом $t = \overline{0, N}$ является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^n$.

Предполагаем, что $U(t) = A(\alpha(t))$. Здесь $A(y)$ — многогранник, задаваемый с помощью фиксированного набора из q векторов $c_j \in \mathbb{R}^n$ системой линейных неравенств

$$A(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle c_j, z \rangle \leq y_j, \quad j = \overline{1, q} \right\}, \quad (2)$$

где $\langle c, z \rangle$ — скалярное произведение векторов c и z в $\mathbb{R}^n$. Далее будет рассмотрен случай, когда многогранник (2) удовлетворяет следующему условию линейности:

$$A(y + y^*) = A(y) + A(y^*). \quad (3)$$

Процесс управления строится следующим образом. В начальный момент времени задано начальное состояние $z(0)$. Выбирается управление $u(0)$ из множества $U(0) = A(\alpha(0))$. Тогда при реализовавшейся помехе $v(0)$ из множества $V(0)$ по формуле (1) реализуется состояние $z(1)$; оно принимается за начальное. Далее управление строится по правилу, описанному выше. Требуется определить множество начальных положений $z(0)$, откуда возможно осуществить включения

$$z(t) \in A(\beta(t)) \quad (4)$$

при любых допустимых реализациях помехи.

3. Многогранники, линейно зависящие от правых частей. Известно (см. [3]), что многогранник (2) не пуст тогда и только тогда, когда $y \in K$, где

$$K = \left\{ y \in \mathbb{R}^q : \sum_{j=1}^q \lambda_j y_j \geq 0 : \forall \lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, q}; \quad \sum_{j=1}^q \lambda_j c_j = 0 \right\}. \quad (5)$$

Многогранник (2) будет ограниченным тогда и только тогда (см. [3]), когда

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^n : z = \sum_{j=1}^q \lambda_j c_j, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, q} \right\} = \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим многогранник (2) следующего вида:

$$A(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle x_j, z \rangle \leq y_j, \quad j \in \overline{0, k}, \quad \langle x_j, z \rangle \leq y_j, \quad j \in \overline{k+1, n}, \right. \\ \left. \langle -x_j, z \rangle \leq y_{j+n-k}, \quad j \in \overline{k+1, n} \right\}. \quad (6)$$

Здесь векторы $x_1, \dots, x_n$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$ и

$$x_0 = f_1 x_1 + \dots + f_k x_k. \quad (7)$$

Лемма 1. Многогранник (6) ограничен тогда и только тогда, когда в разложении (7) коэффициенты отрицательны:

$$f_i < 0, \quad i \in \overline{1, k}. \quad (8)$$

Доказательство. Учитывая разложение (7), равенство $z = \sum_{j=1}^l \lambda_j x_j$ можно записать в следующем виде:

$$z = \sum_{j=1}^k (\lambda_0 f_j + \lambda_j) x_j + \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j - \lambda_j^*) x_j, \quad (9)$$

где z — вектор из $\mathbb{R}^n$, а λ_i ($i \in \overline{0, n}$), λ_j^* ($j \in \overline{k+1, n}$) — некоторые числа.

Пусть многогранник (6)) ограничен, но, например, $f_1 \geq 0$. Возьмем $z = -x_1$. Тогда из (9) следует, что $-x_1 = (\lambda_0 f_1 + \lambda_1)x_1$. Очевидно, что полученное равенство не выполняется ни при каких $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0$.

Докажем обратное утверждение. Пусть в разложении (7) коэффициенты отрицательны, $f_i < 0$ ($i \in \overline{1, k}$). Возьмем $z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ и подставим в (9). Приравняв коэффициенты при x_j , получим систему скалярных равенств

$$c_i = \lambda_0 f_i + \lambda_i, \quad i \in \overline{1, k}, \quad c_j = \lambda_j - \lambda_j^*, \quad j \in \overline{k+1, n}.$$

Из неравенств $f_i < 0$ ($i \in \overline{1, k}$) следует, что существует такое число $\lambda_0 \geq 0$, что выполняются равенства $c_i - \lambda_0 f_i = \lambda_i \geq 0$ ($i \in \overline{1, k}$). Далее можно взять такие $\lambda_j^* \geq 0$, чтобы выполнялось неравенство $c_j = \lambda_j - \lambda_j^* \geq 0$. Таким образом, мы показали, что (8) справедливо при некотором наборе чисел $\lambda_i \geq 0$ ($i \in \overline{0, n}$), $\lambda_j^* \geq 0$ ($j \in \overline{k+1, n}$). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть условие (8) выполнено. Тогда конус (5) для многогранника (6) имеет следующий вид:

$$K = \left\{ y \in \mathbb{R}^{2n-k+1} : y_0 - \sum_{i=1}^k f_i y_i \geq 0; \quad y_i + y_{n+i-k} \geq 0, \quad i \in \overline{k+1, n} \right\}. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть y принадлежит конусу K (см. (5)). Тогда система неравенств

$$\langle x_j, z \rangle \leq y_j, \quad j \in \overline{0, n}, \quad \langle -x_j, z \rangle \leq y_{j+n-k}, \quad j \in \overline{k+1, n}, \quad (11)$$

является совместной, откуда следует (см. [3, с. 140]), что не существует таких $\lambda_i \geq 0, \lambda_i^* \geq 0$, что

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j x_j + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j^* (-x_j) = 0, \quad \sum_{j=0}^n \lambda_j y_j + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j^* y_{j+n-k} = -1. \quad (12)$$

Учитывая разложение (7), перепишем первое равенство в (12) в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^k (\lambda_0 f_j + \lambda_j) x_j + \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j - \lambda_j^*) x_j = 0.$$

Так как векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимы, это равенство эквивалентно системе скалярных равенств

$$\lambda_0 f_j + \lambda_j = 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad \lambda_i - \lambda_i^* = 0, \quad i \in \overline{k+1, n}. \quad (13)$$

Допустим теперь, что одно из неравенств

$$y_0 - \sum_{i=1}^k f_i y_i \geq 0, \quad y_i + y_{n+i-k} \geq 0, \quad i \in \overline{k+1, n}, \quad (14)$$

не выполнено. Согласно (8), для любого набора чисел λ , удовлетворяющего условиям $\lambda_0 \geq 0, \lambda_j = -\lambda_0 f_j \geq 0$ ($j \in \overline{1, k}$), $\lambda_i^* = \lambda_i \geq 0$ ($i \in \overline{k+1, n}$) выполнены равенства (13).

Подставляя эти числа во второе равенство (12), получим

$$\lambda_0 \left(y_0 - \sum_{j=1}^k f_j y_j \right) + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i (y_i + y_{i+n-k}) = -1.$$

Это равенство выполнено при некоторых $\lambda_0 \geq 0, \lambda_i \geq 0$ ($i \in \overline{k+1, n}$). Следовательно, второе равенство в (12) выполнено при некоторых $\lambda_j = -\lambda_0 f_j \geq 0$ ($j \in \overline{1, k}$), $\lambda_i^* = \lambda_i \geq 0$ ($i \in \overline{k+1, n}$). Это противоречит совместности системы (11).

Докажем обратное утверждение. Пусть $y \in \mathbb{R}^{2n-k+1}$ удовлетворяет неравенствам (14). Покажем, что y принадлежит конусу (5). Допустим, что это не так. Тогда существует такой набор

чисел $\lambda_j \geq 0$ ($j \in \overline{0, 2n-k}$), что

$$\sum_{j=0}^{2n-k} \lambda_j x_j = 0, \quad \sum_{j=0}^{2n-k} \lambda_j y_j < 0. \quad (15)$$

Учитывая разложение (7), а также условие линейной независимости векторов x_j ($j \in \overline{1, n}$), получим, что первое условие в (15) эквивалентно системе равенств (13). Используя эту систему, второе условие в (15) запишем в виде

$$\lambda_0 \left(y_0 - \sum_{j=1}^k f_j y_j \right) + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j (y_j + y_{j+n-k}) < 0.$$

Однако из неравенств (14) следует, что последнее неравенство не выполняется ни при каких $\lambda_j \geq 0$ ($j \in \overline{0, 2n-k}$). Следовательно, сделанное предположение неверно. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. Пусть для многогранника (6) выполнены соотношения (7) и (8). Тогда для любых $y, y^* \in K$ выполнено условие линейности

$$A(y + y^*) = A(y) + A(y^*).$$

Доказательство. Включение $A(y) + A(y^*) \subset A(y + y^*)$ следует из определения суммы множеств.

Докажем обратное включение. Пусть $z \in A(y + y^*)$. Для доказательства включения $z \in A(y) + A(y^*)$ достаточно найти такую точку $x \in A(y)$, чтобы $z - x \in A(y^*)$; такая точка $x \in A(y)$ существует, если совместна система неравенств

$$\begin{aligned} \langle x_j, x \rangle &\leq y_j, & j \in \overline{0, k}; \\ \langle -x_j, x \rangle &\leq y_j^* - \langle x_j, z \rangle, & j \in \overline{0, k}; \\ \langle x_j, x \rangle &\leq y_j, & j \in \overline{k+1, n}; \\ \langle -x_j, x \rangle &\leq y_{j+n-k}, & j \in \overline{k+1, n}; \\ \langle -x_j, x \rangle &\leq y_j^* - \langle x_j, z \rangle, & j \in \overline{k+1, n}; \\ \langle x_j, x \rangle &\leq y_{j+n-k}^* + \langle x_j, z \rangle, & j \in \overline{k+1, n}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для совместности системы (16) необходимо и достаточно (см. [3, с. 140]), чтобы не существовало таких $\lambda_j \geq 0$ ($j \in \overline{0, n}$), $\lambda_j^* \geq 0$ ($j \in \overline{k+1, n}$), $\mu_j \geq 0$ ($j \in \overline{0, n}$), $\mu_j^* \geq 0$ ($j \in \overline{k+1, n}$), чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{j=0}^k \lambda_j x_j + \sum_{j=0}^k \mu_j (-x_j) = 0, \quad (17)$$

$$\sum_{j=0}^k \left(\lambda_j y_j + \mu_j y_j^* - \mu_j \langle x_j, z \rangle \right) = -1, \quad (18)$$

$$\sum_{j=k+1}^n (\lambda_j - \lambda_j^*) x_j + \sum_{j=k+1}^n (\mu_j^* - \mu_j) x_j = 0, \quad (19)$$

$$\sum_{j=k+1}^n (\lambda_j y_j + \lambda_j^* y_{j+n-k}) + \sum_{j=k+1}^n \mu_j (y_j^* - \langle x_j, z \rangle) + \sum_{j=k+1}^n \mu_j^* (y_{j+n-k}^* + \langle x_j, z \rangle) = -1. \quad (20)$$

Возьмем $\lambda_j \geq 0$ ($j \in \overline{0, n}$), $\lambda_j^* \geq 0$ ($j \in \overline{k+1, n}$), $\mu_j \geq 0$ ($j \in \overline{0, n}$), $\mu_j^* \geq 0$ ($j \in \overline{k+1, n}$), удовлетворяющие равенствам (17) и (19). Покажем, что равенства (18) и (20) при этом не выполнены. Для этого достаточно показать справедливость неравенств

$$\sum_{j=0}^k \mu_j \langle x_j, z \rangle \leq \sum_{j=0}^k (\lambda_j y_j + \mu_j y_j^*), \quad (21)$$

$$\sum_{j=k+1}^n (\mu_j - \mu_j^*) \langle x_j, z \rangle \leq \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j y_j + \lambda_j^* y_{j+n-k}) + \sum_{j=k+1}^n (\mu_j y_j + \mu_j^* y_{j+n-k}). \quad (22)$$

По условию $z \in A(y + y^*)$, поэтому выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \langle x_j, z \rangle &\leq y_j + y_j^*, & j \in \overline{0, k}, \\ \langle x_j, z \rangle &\leq y_j + y_j^*, & j \in \overline{k+1, n}, \\ \langle -x_j, z \rangle &\leq y_{j+n-k} + y_{j+n-k}^*, & j \in \overline{k+1, n}. \end{aligned}$$

Умножив данные неравенства соответственно на λ_j , λ_j^* , μ_j , μ_j^* и сложив, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \lambda_j \langle x_j, z \rangle &\leq \sum_{j=0}^k \lambda_j (y_j + y_j^*), \\ \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j - \lambda_j^*) \langle x_j, z \rangle &\leq \sum_{j=k+1}^n \lambda_j (y_j + y_j^*) + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j^* (y_{j+n-k} + y_{j+n-k}^*), \\ \sum_{j=0}^k \mu_j \langle x_j, z \rangle &\leq \sum_{j=0}^k \mu_j (y_j + y_j^*), \\ \sum_{j=k+1}^n (\mu_j - \mu_j^*) \langle x_j, z \rangle &\leq \sum_{j=k+1}^n \mu_j (y_j + y_j^*) + \sum_{j=k+1}^n \mu_j^* (y_{j+n-k} + y_{j+n-k}^*). \end{aligned}$$

Учитывая равенства (17), (19), получим, что (21) и (22) выполнены, если правые части выражений (21) и (19) не меньше хотя бы одного из следующих двух выражений соответственно:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \lambda_j (y_j + y_j^*), \quad \sum_{j=0}^k \mu_j (y_j + y_j^*); \\ \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j (y_j + y_j^*) + \lambda_j^* (y_{j+n-k} + y_{j+n-k}^*)), \\ \sum_{j=k+1}^n (\mu_j (y_j + y_j^*) + \mu_j^* (y_{j+n-k} + y_{j+n-k}^*)). \end{aligned}$$

Поэтому осталось показать справедливость хотя бы одного из следующих неравенств соответственно:

$$\sum_{j=0}^k (\mu_j - \lambda_j) y_j^* \geq 0, \quad \sum_{j=0}^k (\lambda_j - \mu_j) y_j \geq 0 \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^n (\mu_j - \lambda_j) y_j^* + \sum_{j=k+1}^n (\mu_j^* - \lambda_j^*) y_{j+n-k}^* &\geq 0, \\ \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j - \mu_j) y_j + \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j^* - \mu_j^*) y_{j+n-k}^* &\geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Из равенства (17), учитывая разложение (7), получаем

$$\lambda_j - \mu_j = (\mu_0 - \lambda_0) f_j, \quad j \in \overline{1, k}.$$

Из равенства (19), учитывая, что векторы x_j ($j \in \overline{1, n}$) линейно независимы, получаем

$$\mu_j - \lambda_j = \mu_j^* - \lambda_j^*, \quad j \in \overline{k+1, n}.$$

Перепишем условия (23) в эквивалентной форме

$$(\mu_0 - \lambda_0) \left(\sum_{j=1}^k f_j y_j - y_0 \right) \geq 0, \quad (\lambda_0 - \mu_0) \left(\sum_{j=1}^k f_j y_j^* - y_0^* \right) \geq 0.$$

Отсюда и из условия $y, y^* \in K$ следует, что одно из неравенств (23) справедливо.

Аналогично запишем условия (24):

$$\sum_{j=k+1}^n (\mu_j - \lambda_j) (y_j^* + y_{j+n-k}^*) \geq 0, \quad \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j - \mu_j) (y_j + y_{j+n-k}) \geq 0.$$

Учитывая условия $y, y^* \in K$, получим, что одно из неравенств (24) выполняется. Лемма доказана.

□

В [4] рассмотрены конкретные случаи многогранников (6), а именно, параллелепипед и симплекс. В случае параллелепипеда

$$A(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle x_j, z \rangle \leq y_j, \langle -x_j, z \rangle \leq y_{n+j}, j \in \overline{1, n} \right\},$$

где векторы $x_j \in \mathbb{R}^n$ ($j \in \overline{1, n}$) являются линейно независимыми, конус (5) имеет вид

$$K = \left\{ y = (y_1, \dots, y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : y_j + y_{n+j} \geq 0, j \in \overline{1, n} \right\}.$$

В случае симплекса

$$A(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle x_j, z \rangle \leq y_j, j \in \overline{0, n} \right\},$$

где векторы $x_1, \dots, x_n$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$, а $x_0 = f_1 x_1 + \dots + f_n x_n$, причем все $f_i < 0$, конус (5) имеет вид

$$K = \left\{ y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : y_0 - \sum_{j=1}^n y_j f_j \geq 0 \right\}.$$

4. Решение задачи управления. Сначала введем в рассмотрение геометрическую разность двух множеств A и B из пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [1]):

$$A \overset{*}{-} B = \{ z \in \mathbb{R}^n : z + B \subset A \}.$$

Если $A = \emptyset$, то $A \overset{*}{-} B = \emptyset$.

Лемма 4 (см. [4]). Пусть A — многогранник вида (2), B — компакт в $\mathbb{R}^n$ и $b_j = \max \langle c_j, z \rangle$, где максимум берется по $z \in B$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_q)$. Тогда

$$A \overset{*}{-} B = A(y - b),$$

если $y \in K$.

Введем оператор T_t , который каждому числу $t = \overline{0, p-1}$ и каждому множеству $Y \subset \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие множество $T_t(Y)$, определяемое следующим образом: $z \in T_t(Y)$ тогда и только тогда, когда существует такое управление $u(t) \in A(\alpha(t))$, что

$$z(t+1) = z - u(t) + v(t) \in Y$$

при любой помехе $v(t) \in V(t)$. Положим $T_t(\emptyset) = \emptyset$. Отсюда получим

$$T_t(Y) = \left(Y \overset{*}{-} V(t) \right) + A(\alpha(s)).$$

Рассмотрим случай, когда $Y = A(\gamma)$, $\gamma \in K$. Используя формулу (3) и лемму 4, получим

$$T_t(A(\gamma)) = \emptyset \quad \text{при } \gamma - b(t) \notin K$$

и

$$T_t(A(\gamma)) = A(\gamma - b(t) + \alpha(t)) \quad \text{при } \gamma - b(t) \in K. \quad (25)$$

Определим при $t \leq p$ семейство множеств $W_k(t)$ следующим образом:

$$W_0(t) = A(\beta(t)), \quad (26)$$

$$W_k(t) = A(\beta(t)) \cap T_t(W_{k-1}(t+1)), \quad k = \overline{1, p} \quad (27)$$

Теорема 1. Пусть $p \geq 1$. Из начального положения $z(0)$ возможно осуществить включение (4) при любой реализации помехи тогда и только тогда, когда

$$z(0) \in W_p(0). \quad (28)$$

Доказательство. Предположим, что выполнено включение (28). Тогда из (26) следуют включения $z(0) \in A(\beta(0))$ и

$$z(0) = T_0(W_{p-1}(1)). \quad (29)$$

Используя определение оператора T_t , из включения (29) получим, что существует такое управление $u(0) \in A(\beta(0))$, что соотношение

$$z(1) = W_{p-1}(1) \subset A(\beta(1)) \quad (30)$$

выполнено при любой помехе $v(0) \in V(0)$. Продолжая рассуждения, построим управление так, что будут выполнены включения

$$z(s) \in W_{p-s}(s) \subset A(\beta(s)), \quad s = \overline{1, p},$$

при любых реализациях помехи.

Пусть теперь включение (28) не выполнено. Тогда из (27) следует, что либо не выполнено включение (4) при $t = 0$, либо не выполнено включение (29).

В последнем случае, используя определение оператора T_t , получим, что для любого управления $u(0) \in A(\alpha(0))$ найдется такая реализация помехи $v(0) \in V(0)$, что включение (30) не выполнено. Продолжая это рассуждение дальше, получим, что либо $z(s) \notin A(\beta(s))$ при некотором $s \in \overline{0, p-1}$, либо $z(s) \in A(\beta(s))$, но $z(p-1) \notin W_1(p-1) \subset A(\beta(p-1))$.

Во втором случае $z(p-1) \notin T_{p-1}(W_0(p))$. Значит, для любого управления $u(p-1) \in A(\alpha(p-1))$ найдется такая помеха $v(p-1) \in V(p-1)$, что $z(p) \notin W_0(p)$. Отсюда и из (25) следует, что включение (29) не выполнено при $t = p$. Теорема доказана. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что множество $W_k(t)$ задается системой линейных неравенств вида (2) с правой частью $y_j = \delta_j^{(k)}(t)$ ($j = \overline{1, q}$, $k = \overline{0, p}$). Из (27) получим, что $\delta_j^{(k)}(t)$ можно определить, используя рекуррентные выражения вида

$$\delta_j^{(0)}(t) = \beta_j(t),$$

где

$$\delta_j^{(k)}(t) = \min \left\{ \beta_j(t); \delta_j^{(k-1)}(t+1) - b_j(t) + \alpha_j(t) \right\}, \quad (31)$$

при $\delta_j^{(k-1)}(t+1) - b_j(t) \in K$ ($j = \overline{1, q}$, $k = \overline{1, p}$). Таким образом, для того, чтобы из начального положения $z(0)$ осуществить включение (4), должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} \langle c_1, z(0) \rangle &\leq \min \left\{ \beta_1(0); \delta_1^{(p-1)}(1) - b_1(0) + \alpha_1(0) \right\}, \\ \langle c_2, z(0) \rangle &\leq \min \left\{ \beta_2(0); \delta_2^{(p-1)}(1) - b_2(0) + \alpha_2(0) \right\}, \\ &\dots\dots\dots \\ \langle c_q, z(0) \rangle &\leq \min \left\{ \beta_q(0); \delta_q^{(p-1)}(1) - b_q(0) + \alpha_q(0) \right\}, \\ \sum_{j=1}^q \lambda_j \cdot \left[\delta_j^{(p-1)}(1) - b_j(0) \right] &\geq 0 \quad \forall \lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, q}; \quad \sum_{j=1}^q \lambda_j c_j = 0. \end{aligned}$$

5. Пример. Рассмотрим дискретный процесс, заданный уравнениями

$$x_1(t+1) = x_1(t) - u_1(t) + v_1(t), \quad x_2(t+1) = x_2(t) - u_2(t) + v_2(t).$$

Число шагов p процесса управления задано. Ограничения на выбор управления имеют вид

$$0 \leq u_1 \leq a_1, \quad 0 \leq u_2 \leq a_2,$$

причем $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 1$. Множество значений помехи задается следующим образом:

$$V = \{(v_1, v_2) : v_1^2 + v_2^2 \leq 1\}.$$

Цель процесса управления заключается в том, чтобы при всех $0 \leq t \leq p$ выполнялись неравенства

$$0 \leq x_1(t) \leq d_1, \quad 0 \leq x_2(t) \leq d_2 \quad (32)$$

при любой реализации помехи.

Определим условия на множество начальных положений $(x_1(0), x_2(0))$, откуда возможно осуществить выполнение (32). Запишем векторы $c_1 = (1, 0)$, $c_2 = (-1, 0)$, $c_3 = (0, 1)$, $c_4 = (0, -1)$. Тогда $b_j = \max_{v \in V} \langle c_j, v \rangle = 1$ при всех $j = \overline{1, 4}$.

Обозначим четырехугольник, заданный с помощью системы векторов c_1, c_2, c_3, c_4 , следующим образом:

$$A(y_1, y_2, y_3, y_4) = \{(z_1, z_2) : z_1 \leq y_1, -z_1 \leq y_2, z_2 \leq y_3, -z_2 \leq y_4\}. \quad (33)$$

Тогда для множества управлений получим $U(t) = A(a_1, 0, a_2, 0)$. Условие (32) запишется в виде $(x_1(t), x_2(t)) \in A(d_1, 0, d_2, 0)$.

Как показано выше, для многогранника вида (33) выполнено условие линейности (3). Конус для четырехугольника (33) имеет вид

$$K = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) : y_1 + y_2 \geq 0, y_3 + y_4 \geq 0\}.$$

Запишем (31) для рассматриваемого примера:

$$\delta_j^{(0)} = \beta_j, \quad \delta_j^{(k)} = \min \left\{ \beta_j; \delta_j^{(k-1)} - b_j + \alpha_j \right\}, \quad j = \overline{1, 4}, \quad k = \overline{1, p}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \delta_1^{(0)} &= d_1, \quad \delta_2^{(0)} = 0, \quad \delta_3^{(0)} = d_2, \quad \delta_4^{(0)} = 0, \\ \delta_1^{(1)} &= \min \{ \beta_1; \beta_1 - b_1 + \alpha_1 \} = \min \{ d_1; d_1 - 1 + a_1 \} = d_1. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $a_1 \geq 1$. Аналогично определяем

$$\begin{aligned} \delta_2^{(1)} &= \min \{ 0; 0 - 1 + 0 \} = -1, \\ \delta_3^{(1)} &= \min \{ d_2; d_2 - 1 + a_2 \} = d_2, \\ \delta_4^{(1)} &= \min \{ 0; 0 - 1 + 0 \} = -1, \end{aligned}$$

причем условие непустоты запишется в виде $d_1 - 1 \geq 0$, $d_2 - 1 \geq 0$. Далее находим

$$\begin{aligned} \delta_1^{(2)} &= \min \{ \beta_1; \delta_1^{(1)} - b_1 + \alpha_1 \} = \min \{ d_1; d_1 - 1 + a_1 \} = d_1, \\ \delta_2^{(2)} &= \min \{ 0; -1 - 1 + 0 \} = -2, \\ \delta_3^{(2)} &= \min \{ d_2; d_2 - 1 + a_2 \} = d_2, \\ \delta_4^{(2)} &= \min \{ 0; -1 - 1 + 0 \} = -2. \end{aligned}$$

Условие непустоты четырехугольника запишется в виде $d_1 - 2 \geq 0$, $d_2 - 2 \geq 0$.

Продолжая далее, получим

$$\delta_1^{(k)} = d_1, \quad \delta_2^{(k)} = -k, \quad \delta_3^{(k)} = d_2, \quad \delta_4^{(k)} = -k, \quad k = \overline{1, p}.$$

Условие непустоты принимает вид $d_1 \geq k$, $d_2 \geq k$, $k = \overline{1, p}$.

Таким образом, для того, чтобы из начального положения $(x_1(0), x_2(0))$ осуществить (32), должны выполняться следующие условия:

$$p \leq x_1(0) \leq d_1, \quad p \leq x_2(0) \leq d_2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры. II // Докл. АН СССР. — 1967. — 175, № 4. — С. 764–766.
2. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. — М.: Наука, 1973.
3. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Мир, 1980.
4. Ухоботов В. И. К построению стабильных мостов // Прикл. мат. мех. — 1980. — 44, № 5. — С. 934–938.
5. Ухоботов В. И. К построению стабильного моста в игре удержания // Прикл. мат. мех. — 1981. — 45, № 2. — С. 236–240.
6. Ухоботов В. И. Дифференциальная игра удержания // Техн. киберн. — 1984. — 22, № 3. — С. 53–59.
7. Ухоботов В. И., Никитина С. А. Стабильный мост для одной декомпозиционной дифференциальной игры // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2003. — 1 (7). — С. 99–107.
8. Ухоботов В. И., Никитина С. А. Построение гарантированного управления в квазилинейных системах // Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2005. — 11, № 1. — С. 201–211.
9. Ухоботов В. И., Стабулит И. С. Динамическая задача управления при наличии помехи и с заданным множеством моментов коррекции // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2018. — 28, № 1. — С. 74–81.
10. Шорилов А. Ф. Алгоритм адаптивного минимаксного управления для процесса преследования-уклонения в дискретных системах // Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2000. — 6, № 2. — С. 515–535.

Ухоботов Виктор Иванович

Челябинский государственный университет

E-mail: ukh@csu.ru

Никитина Светлана Анатольевна

Челябинский государственный университет

E-mail: nikitina@csu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 114–122
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-114-122

УДК 517.977

КУСОЧНО ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ С ПРОСТОЙ ДИНАМИКОЙ И ИНТЕГРАЛЬНО-ТЕРМИНАЛЬНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ ПЛАТЫ

© 2019 г. Л. Г. ШАГАЛОВА

Аннотация. Рассматривается антагонистическая дифференциальная игра двух лиц с динамикой, описываемой дифференциальным уравнением с простыми движениями, и интегрально-терминальным функционалом платы. В такой игре существует функция цены, которая является обобщенным (минимаксным/вязкостным) решением соответствующего уравнения Гамильтона—Якоби. Для случая, когда терминальная функция и гамильтониан кусочно линейны, а размерность фазового пространства равна двум, предлагается конечный алгоритм точного построения функции цены. Алгоритм сводится к последовательному решению элементарных задач, возникающих в определенном порядке. Кусочно линейная функция цены дифференциальной игры формируется в результате склейки кусочно линейных решений элементарных задач. Удобным средством представления таких функций являются структурные матрицы.

Ключевые слова: дифференциальная игра, простое движение, функция цены, уравнение Гамильтона—Якоби, обобщенное решение, минимаксное решение, алгоритм.

PIECEWISE-LINEAR PRICE FUNCTION OF A DIFFERENTIAL GAME WITH SIMPLE DYNAMICS AND INTEGRAL-TERMINAL PRICE FUNCTIONAL

© 2019 L. G. SHAGALOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider an antagonistic differential game of two persons with dynamics described by a differential equation with simple motions and an integral-terminal board functional. In this game, there exists a price function, which is a generalized (minimax or viscous) solution of the corresponding Hamilton–Jacobi equation. For the case where the terminal function and the Hamiltonian are piecewise linear and the dimension of the phase space is equal to 2, we propose a finite algorithm for the exact construction of the price function. The algorithm is reduced to the sequential solution of elementary problems arising in a certain order. The piecewise linear price function of a differential game is constructed by gluing piecewise linear solutions of elementary problems. Structural matrices are a convenient tool of representing such functions.

Keywords and phrases: differential game, simple motion, price function, Hamilton–Jacobi equation, generalized solution, minimax solution, algorithm.

AMS Subject Classification: 49N70, 49N75, 91A05, 91A24

1. Введение. Антагонистические дифференциальные игры — раздел математической теории оптимального управления, в котором задачи управления исследуются в случае противоположных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00074) и Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 02.A03.21.0006).

интересов управляющих системой субъектов, называемых игроками. Динамика системы описывается дифференциальным уравнением, содержащим управляющие векторы, которыми распоряжаются игроки. Существуют различные формализации дифференциальной игры.

В настоящей работе игровая задача рассматривается в рамках позиционной формализации, введенной в работах Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см. [2, 11]). Для выбора своего управления каждый игрок может использовать лишь текущую информацию о состоянии системы. Первый игрок стремится минимизировать на движениях системы заданный функционал платы, цель второго игрока противоположна: он максимизирует этот функционал. В рассматриваемом случае подход к решению дифференциальной игры заключается в поиске функции цены. Функция цены заданному начальному состоянию системы ставит в соответствие оптимальный, одинаковый для каждого из игроков, гарантированный результат в игре: наилучшее гарантированное значение функционала платы. Зная функцию цены, можно построить оптимальные управления игроков по принципу обратной связи.

При исследовании дифференциальных игр, как правило, возникают нелинейные уравнения в частных производных первого порядка. В [4, 14] указано, что функция цены является минимаксным решением уравнения Гамильтона—Якоби, соответствующего рассматриваемой дифференциальной игре. При этом понятие обобщенного минимаксного решения эквивалентно понятию вязкостного решения, введенного М. Дж. Крэндаллом и П.-Л. Лионсом (см. [9]).

Таким образом, задача построения функции цены дифференциальной игры может быть сведена к решению дифференциального уравнения первого порядка. При этом для нелинейных уравнений Гамильтона—Якоби не существует универсального метода решения, и далеко не всегда удается получить решение в аналитической форме. Поэтому актуальными направлениями исследований являются разработка вычислительных методов и анализ структуры кусочно гладких минимаксных решений.

При локальной аппроксимации кусочно гладкой функции цены дифференциальной игры с динамикой общего вида можно использовать решение дифференциальной игры с простой динамикой, зависящей только от управлений игроков и не зависящей от фазового вектора. Несмотря на простоту динамики, решения таких игр известны лишь в некоторых частных случаях, а в общем случае нахождение решений также является нелегкой задачей. Поэтому исследование дифференциальных игр с простыми движениями имеет и самостоятельный интерес. Для исследования таких игр привлекаются геометрические методы, выпуклый и негладкий анализ. Дифференциальные игры с простыми движениями исследовались многими авторами; в частности, можно отметить работы [1, 6, 12, 13].

В настоящей работе представлен конечный алгоритм построения точного минимаксного решения уравнения Гамильтона—Якоби, соответствующего дифференциальной игре с простыми движениями и интегрально-терминальной платой, в случае двумерного фазового пространства и кусочно линейных входных данных. Представленные результаты обобщают результаты, полученные в [5, 7, 15].

2. Постановка задачи. Рассматривается следующая позиционная дифференциальная игра двух лиц. Динамика управляемой системы имеет вид

$$\dot{x} = u(t) + v(t), \quad t \in [0, \vartheta], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in P \subset \mathbb{R}^n, \quad v(t) \in Q \subset \mathbb{R}^n; \quad (1)$$

здесь t — время, ϑ — заданный момент окончания игры, x — фазовый вектор, $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — формируемые по принципу обратной связи управления первого и второго игроков соответственно. Предполагается, что множества P и Q — компакты.

Пусть $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ — начальная позиция. На движениях управляемой системы (1), соответствующих начальной позиции, задан интегрально-терминальный функционал платы

$$I = I(t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot)) = \sigma(x(\vartheta)) + \int_{t_0}^{\vartheta} g(u(\tau), v(\tau)) d\tau, \quad (2)$$

где функция $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ предполагается липшицевой, а функция $g : P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывной. Первый игрок выбором своего управления стремится минимизировать плату, второй игрок — максимизировать.

Предположим, что для рассматриваемой дифференциальной игры выполнено следующее условие:

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} [\langle s, u + v \rangle + g(u, v)] = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} [\langle s, u + v \rangle + g(u, v)] = H(s), \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

где $\langle s, f \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов s и f . Функцию $H(\cdot)$, определенную равенством (3), будем называть гамильтонианом дифференциальной игры (1), (2).

Известно (см. [2, 11]), что при выполнении условия (3) для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ существует цена $\omega(t_0, x_0)$ игры. Таким образом, существует функция цены $\omega : [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Однако нахождение функции цены — весьма нелегкая задача, для решения которой не существует универсального метода. Отметим, что в случае, когда подынтегральная функция $g(\cdot)$ тождественно равна нулю, т.е. функционал платы является терминальным, задача существенно упрощается. В частности, если одна из функций $H(\cdot)$ или $\sigma(\cdot)$ является выпуклой или вогнутой, для функции цены можно, используя известные формулы Пшеничного—Сагайдак (см. [3]) и Хопфа—Лакса (см. [8, 10]), выписать явные формулы. Также в случае не обязательно выпуклых кусочно линейных функций $H(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$, когда размерность n фазового пространства равна двум, а терминальная плата положительно однородна, т.е. функция $\sigma(\cdot)$ удовлетворяет условию

$$\sigma(\lambda x) = \lambda \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0, \quad (4)$$

для построения функции цены можно использовать конечный алгоритм (см. [5, 7, 15]). Целью настоящей работы является обобщение этого алгоритма на случай ненулевой подынтегральной функции $g(\cdot)$.

3. Цена игры как минимаксное решение уравнения Гамильтона—Якоби. В этом разделе приведены используемые далее для разработки алгоритма построения функции цены дифференциальной игры (1)–(3) сведения из [4, 14] и факты, которые несложно получить из этих сведений.

Функция цены $\omega : [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ совпадает с минимаксным решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial \omega(t, x)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial \omega(t, x)}{\partial x}\right) = 0, \quad t \leq \vartheta, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

$$\omega(\vartheta, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Минимаксное решение задачи (5), (6) существует и единственно. Далее будем предполагать, что терминальная функция $\sigma(\cdot)$ является положительно однородной, т.е. удовлетворяет условию (4). Гамильтониан $H(\cdot)$ определен равенством (3) и не является положительно однородным.

Определим функции

$$H^*(s, r) = \begin{cases} |r| H\left(\frac{s}{|r|}\right) & \text{при } r \neq 0, \\ \lim_{r \downarrow 0} r H\left(\frac{s}{r}\right) & \text{при } r = 0, \end{cases} \quad (s, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (7)$$

$$\sigma^\#(x, y) = \sigma(x) + y, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Предполагаем, что предел в (7) существует.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона—Якоби с положительно однородным относительно переменной $\bar{s} = (s, r)$ гамильтонианом $H^*(\cdot)$:

$$\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} + H^*\left(\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(t, x, y)}{\partial y}\right) = 0, \quad t \leq \vartheta, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (9)$$

$$u(\vartheta, x, y) = \sigma^\#(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Функция $\omega(t, x)$ является минимаксным решением задачи (5), (6) тогда и только тогда, когда функция $u(t, x, y) = \omega(t, x) + y$ является минимаксным решением задачи (9), (10).*

Итак, задача нахождения функции цены с интегрально-терминальным функционалом платы сводится к решению уравнения Гамильтона—Якоби с положительно однородным гамильтонианом. При этом размерность фазового пространства увеличивается на единицу.

Если гамильтониан $H^*(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица, для минимаксного решения $u(t, x, y)$ имеет место соотношение

$$u(t, x, y) = (\vartheta - t)u\left(0, \frac{x}{\vartheta - t}, \frac{y}{\vartheta - t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Используя соотношение (11), можно заменить задачу (9), (10) редуцированной задачей нахождения функции

$$\varphi(x, y) = u(0, x, y) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Функция $\varphi(\cdot)$ является минимаксным решением следующего уравнения в частных производных первого порядка:

$$H^*\left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\right) + \left\langle \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, x \right\rangle + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \cdot y - \varphi(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

которое рассматривается наряду с предельным соотношением

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha \varphi\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}\right) = \sigma^\sharp(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Минимаксное решение уравнения (13) — непрерывная функция, удовлетворяющая паре дифференциальных неравенств. Эти неравенства можно записать различными по форме, но эквивалентными по существу способами. Здесь удобно выписать эти неравенства в следующем виде:

$$H^*(l, m) + \langle l, x \rangle + m \cdot y \leq \varphi(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (l, m) \in D^- \varphi(x, y), \quad (15)$$

$$H^*(l, m) + \langle l, x \rangle + m \cdot y \geq \varphi(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (l, m) \in D^+ \varphi(x, y), \quad (16)$$

где множества $D^- \varphi(x, y)$ и $D^+ \varphi(x, y)$ — субдифференциал и супердифференциал функции $\varphi(\cdot)$ в точке (x, y) соответственно.

4. Алгоритм построения функции цены. В случае, когда размерность фазового пространства равна двум, а терминальная функция $\sigma(\cdot)$ и подынтегральная функция $g(\cdot)$ кусочно линейны, функция $\omega(\cdot)$ цены дифференциальной игры (1)–(3) является кусочно линейной и может быть построена точно. Опишем алгоритм построения функции $\varphi(\cdot)$, зная которую, можно получить функцию $\omega(\cdot)$ с помощью соотношения (11) и теоремы 1.

4.1. Представление предельной функции. Пусть

$$\begin{aligned} y_+ &= \max\{0; y\}, \quad y_- = \min\{0; y\}, \quad y \in \mathbb{R}, \\ \sigma_+(x) &= \max\{0; \sigma(x)\}, \quad \sigma_-(x) = \min\{0; \sigma(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \sigma_+^\sharp(x, y) &= \sigma_+(x) + y_+, \quad \sigma_-^\sharp(x, y) = \sigma_-(x) + y_-, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что предельная функция $\sigma^\sharp(\cdot)$ в (8) может быть представлена в виде

$$\sigma^\sharp(x, y) = \sigma_+^\sharp(x, y) + \sigma_-^\sharp(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

При этом для решения $\varphi(\cdot)$ задачи (13), (14) справедливо представление

$$\varphi(x, y) = \varphi_+(x, y) + \varphi_-(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

где $\varphi_+(\cdot)$ и $\varphi_-(\cdot)$ — решения задачи (13), (14), соответствующие предельным функциям $\sigma_+^\sharp(\cdot)$ и $\sigma_-^\sharp(\cdot)$ соответственно. При описанных ниже предположениях построения функций $\varphi_+(\cdot)$ и $\varphi_-(\cdot)$ не отличаются по существу.

5. Предположения. Алгоритм разработан при следующих предположениях.

A1. Подынтегральная функция $g(\cdot)$ имеет вид

$$g(u, v) = g_1(u) + g_2(v), \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad v \in \mathbb{R}^2, \quad (19)$$

где $g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и $g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные кусочно линейные функции, склеенные из конечного числа линейных функций. Таким образом, их сумма $g(\cdot)$ тоже является непрерывной кусочно линейной функцией.

A2. Множества P и Q — многогранники. Из (3) следует, что гамильтониан $H(\cdot)$ дифференциальной игры (1)–(3) также кусочно линеен и склеивается из конечного числа линейных функций

$$H^i(s) = \langle h^i, s \rangle + p^i, \quad i \in \overline{1, n_H}, \quad h^i \in \mathbb{R}^2, \quad p^i \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}^2. \quad (20)$$

A3. Функция $\sigma(\cdot)$ положительно однородна (удовлетворяет условию (4)) и кусочно линейна, т.е. сформирована с помощью склейки конечной совокупности линейных функций

$$\sigma^i(x) = \langle s^i, x \rangle, \quad i \in \overline{1, n_\sigma}, \quad s^i \in \mathbb{R}^2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Введем обозначение

$$Z = \{s^i \mid i \in \overline{1, n_\sigma}\}. \quad (21)$$

Кроме того, в силу представлений (17), (18) без ограничения общности можно считать, что функция $\sigma(\cdot)$ неотрицательна:

$$\sigma(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (22)$$

и рассмотреть алгоритм построения функции $\varphi(\cdot)$, соответствующей предельной функции

$$\sigma^\sharp(x, y) = \sigma(x) + y_+, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R} \quad (23)$$

6. Простые кусочно линейные функции. Для разработки алгоритма полезным является использованное в [5, 15] понятие простой кусочно линейной функции (ПКЛФ). Основное свойство ПКЛФ заключается в следующем. Если функция $\psi : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ является ПКЛФ, тогда для любой точки $x_* \in D$ существует окрестность $O_\varepsilon(x_*)$, в которой $\psi(\cdot)$ имеет одно из трех возможных представлений:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \langle s_i, x \rangle + h_i, \\ \psi(x) &= \max \left\{ \langle s_i, x \rangle + h_i, \langle s_j, x \rangle + h_j \right\}, \\ \psi(x) &= \min \left\{ \langle s_i, x \rangle + h_i, \langle s_j, x \rangle + h_j \right\}. \end{aligned}$$

Здесь s_i и s_j — векторы из $\mathbb{R}^2$, а h_i и h_j — числа. Таким образом, область определения ПКЛФ не содержит точек, в малой окрестности которых склеиваются три или более линейных функций.

Для формального определения ПКЛФ используются структурные матрицы. Не будем приводить здесь строгое определение, отметим лишь, что структурная матрица содержит информацию обо всех линейных функциях, формирующих соответствующую ПКЛФ. Зная структурную матрицу, можно вычислить значение ПКЛФ в каждой точке ее области определения.

Отметим также, что при выполнении условия **A3**, неотрицательная функция $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ является ПКЛФ в области $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, где символом 0 обозначен нулевой вектор. На рис. 1 и 2 представлены примеры поведения линий уровня функции σ .

7. Элементарные задачи. Алгоритм построения функции $\varphi(\cdot)$ заключается, по существу, в последовательном решении элементарных задач, которые возникают в определенном порядке.

Пусть

$$\varsigma^{\sharp+}(x, y) = \max\{\langle a, x \rangle + y, \langle b, x \rangle + y\}, \quad \varsigma^{\sharp-}(x, y) = \min\{\langle a, x \rangle + y, \langle b, x \rangle + y\},$$

где a, b, x — векторы из $\mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$.

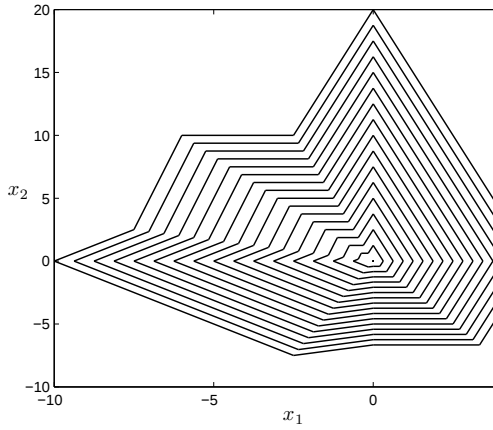


Рис. 1

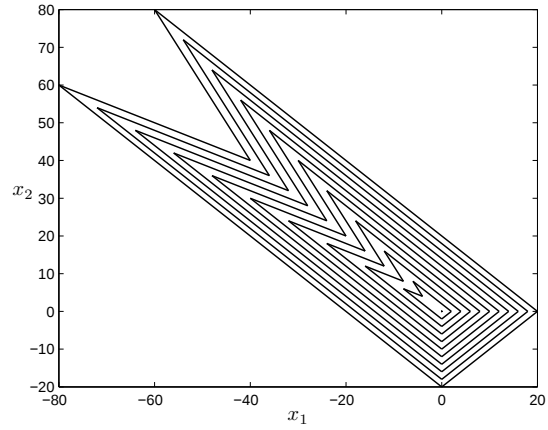


Рис. 2

Задачи 1 и 2. Пусть заданы некоторые линейно независимые векторы a и b . В задаче 1 (задаче 2) требуется построить минимаксное решение задачи (13), (14), (20) при $\sigma^\sharp = \varsigma^{\sharp+}$ (соответственно, при $\sigma^\sharp = \varsigma^{\sharp-}$).

Поскольку функция $\varsigma^{\sharp+}$ выпукла, а функция $\varsigma^{\sharp-}$ вогнута, можно получить явные формулы для решений задач 1 и 2. Можно показать, что решениями этих задач являются функции

$$\phi^+(x, y) = \max_{l \in [a, b]} \phi_l(x, y), \quad \phi^-(x, y) = \min_{l \in [a, b]} \phi_l(x, y),$$

где

$$[a, b] = \{ \lambda a + (1 - \lambda)b \mid \lambda \in [0, 1] \}, \quad \phi_l(x, y) = \langle l, x \rangle + y + H(l).$$

Первый этап алгоритма построения решения $\varphi(\cdot)$ задачи (13), (14), (23) заключается в последовательном решении задач 1 и 2 и склейке из этих решений. Конкретные задачи, которые необходимо решить, определяются функцией $\sigma(\cdot)$.

Дальнейшее построение решения заключается в решении элементарных задач другого типа.

Пусть $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$. Введем обозначение

$$\varphi_{\bar{s}}(x, y) = \langle s, x \rangle + s_3 \cdot y + H^*(\bar{s}), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R},$$

где вектор $s \in \mathbb{R}^2$ образован из первых двух компонент вектора $\bar{s}$, $s = (s_1, s_2)$. Отметим, что если $s_3 = 1$, то $H^*(\bar{s}) = H(s)$ и $\varphi_{\bar{s}}(x, y) = \phi_s(x, y)$.

Для заданного множества M обозначим его замыкание символом $\text{cl} M$, а границу — символом ∂M .

Задачи 3 и 4. Рассмотрим линейно независимые векторы $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ и число $r > 0$. Пусть

$$\varphi^*(x, y) = \max \{ \varphi_{\bar{a}}(x, y), \varphi_{\bar{b}}(x, y) \}, \quad \varphi_*(x, y) = \min \{ \varphi_{\bar{a}}(x, y), \varphi_{\bar{b}}(x, y) \},$$

$$G^* = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi^*(x, y) < r \}, \quad G_* = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi_*(x, y) < r \}.$$

В задаче 3 требуется построить непрерывную функцию $\varphi^0 : \text{cl} G^* \rightarrow \mathbb{R}$, являющуюся в области G^* минимаксным решением уравнения в частных производных (УЧП) первого порядка (13) и удовлетворяющую соотношениям

$$\varphi^0(x, y) < r \quad \forall (x, y) \in G^*; \quad \varphi^0(x, y) = r \quad \forall (x, y) \in \partial G^*.$$

В задаче 4 требуется построить непрерывную функцию $\varphi_0 : \text{cl} G_* \rightarrow \mathbb{R}$, являющуюся в области G_* минимаксным решением уравнения (13) и удовлетворяющую соотношениям

$$\varphi_0(x, y) < r \quad \forall (x, y) \in G_*; \quad \varphi_0(x, y) = r \quad \forall (x, y) \in \partial G_*.$$

Решением задачи 3 является функция

$$\varphi^0(x, y) = \max_{\bar{s}} \varphi_{\bar{s}}(x, y) \quad \text{при} \quad \bar{s} \in S_r(\bar{a}, \bar{b}),$$

где

$$\begin{aligned} S_r(\bar{a}, \bar{b}) &= \{\bar{s} \in \text{con}(\bar{a}, \bar{b}) \mid \langle s, w_0 \rangle + H^*(\bar{s}) = r\}, \\ \text{con}(\bar{a}, \bar{b}) &= \{\lambda \bar{a} + \mu \bar{b} \mid \lambda \geq 0, \mu \geq 0\}, \end{aligned}$$

а точка $w_0 \in \mathbb{R}^2$ — решение системы двух линейных уравнений

$$\langle a, w_0 \rangle + H^*(\bar{a}) = r, \quad \langle b, w_0 \rangle + H^*(\bar{b}) = r.$$

Компоненты векторов $a \in \mathbb{R}^2$ и $b \in \mathbb{R}^2$ совпадают с первыми двумя компонентами векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ соответственно.

Решением задачи 4 в случаях, возникающих при построении решения $\varphi(\cdot)$ задачи (13), (14), (23), является функция

$$\varphi_0(x, y) = \min_{\bar{s}} \varphi_{\bar{s}}(x, y) \quad \text{при} \quad \bar{s} \in S_r(\bar{a}, \bar{b}).$$

8. Основной результат. Обозначим символом Ω множество точек из $\mathbb{R}^3$, в которых гамильтониан $H^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ недифференцируем. Пусть 0 — нулевой вектор в $\mathbb{R}^3$. По множеству $Z \subset \mathbb{R}^2$ (см. (21)) векторов, формирующих функцию σ , определим множество

$$Z^\sharp = \{\bar{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3 \mid s = (s_1, s_2) \in Z, s_3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. Пусть выполнены условия **A2–A3**. Тогда справедливы следующие утверждения.

A. Решение $\varphi(\cdot)$ задачи (13), (14), (23) — неотрицательная кусочно линейная функция, образованная с помощью склейки линейных функций

$$\varphi_{\bar{s}}(x, y) = \langle s, x \rangle + s_3 \cdot y + H^*(\bar{s}), \quad \bar{s} \in L, \quad (24)$$

где множество L состоит из конечного числа элементов, и

$$Z^\sharp \subset L, \quad (L \setminus Z^\sharp) \subset (\Omega \cup 0).$$

B. Для любого $y_* \in \mathbb{R}$ функция $\varphi(x, y_*)$ в области $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x, y_*) > 0\}$ образована с помощью склейки конечного числа простых кусочно линейных функций.

Доказательство теоремы 2 следует из описанного выше алгоритма. Неотрицательность функции $\varphi(\cdot)$ обусловлена неотрицательностью функции $\sigma(\cdot)$, вид (24) линейных функций, формирующих решение, обусловлен конкретными элементарными задачами, возникающими в ходе его построения.

Для доказательства того, что построенная в результате алгоритма функция $\varphi(\cdot)$ является минимальным решением уравнения (13), необходимо проверить выполнение неравенств (15), (16). В точках, где $\varphi(\cdot)$ совпадает с решением какой-либо из рассмотренных выше элементарных задач, эти неравенства выполнены. Таким образом, следует проверить выполнение неравенств (15), (16) на поверхностях склейки решений различных элементарных задач, формирующих функцию $\varphi(\cdot)$. При этом если поверхность Γ склейки не принадлежит никакой из областей определения решений элементарных задач, существует такое число $r \geq 0$, что $\Gamma \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid \varphi(x, y) = r\}$.

Пусть $(x_*, y_*) \in \Gamma$. Если существует окрестность $O_\varepsilon(x_*, y_*)$, в которой функция φ линейна, неравенства (15), (16) выполняются. Действительно, в этом случае существует такой вектор $\bar{s}^* = \{s^*, s_3^*\}$, $s^* \in \mathbb{R}^2$, $s_3^* \in \mathbb{R}$, что

$$\varphi(x, y) = \varphi_{\bar{s}^*} = \langle s^*, x \rangle + s_3^* \cdot y + H^*(\bar{s}^*), \quad (x_*, y_*) \in O_\varepsilon(x_*, y_*).$$

Функция φ дифференцируема в $O_\varepsilon(x_*, y_*)$, и $D^-\varphi(x_*, y_*) = D^+\varphi(x_*, y_*) = \bar{s}^*$, и в точке (x_*, y_*) выполняются неравенства (15), (16).

Рассмотрим случай, когда в точке $(x_*, y_*) \in \Gamma$ происходит склейка двух линейных функций. Из алгоритма следует, что в этом случае возможны две ситуации. В первой для любого $\varepsilon > 0$ в окрестности $O_\varepsilon(x_*, y_*)$ можно указать точку $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$, в которой функция φ склеивается из тех же

линейных функций и является решением какой-либо элементарной задачи, причем $\varphi(x_\varepsilon, y_\varepsilon) > r$. Очевидно, что в этой ситуации

$$D^-\varphi(x_*, y_*) = D^-\varphi(x_\varepsilon, y_\varepsilon), \quad D^+\varphi(x_*, y_*) = D^+\varphi(x_\varepsilon, y_\varepsilon).$$

Поскольку в точке $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ неравенства (15), (16) выполняются, в силу непрерывности получим, что они выполнены и в точке (x_*, y_*) .

Во второй ситуации в некоторой окрестности $O_\varepsilon(x_*, y_*)$ точки (x_*, y_*) функция φ имеет вид

$$\varphi(x, y) = \max \{ \varphi_{\bar{a}}(x, y), \varphi_{\bar{b}}(x, y) \},$$

где векторы $\bar{a}, \bar{b}$ из $\mathbb{R}^3$ связаны равенством $\bar{b} = \mu\bar{a}$, $\mu > 0$, причем вектор $\bar{a}$ ненулевой. Имеем $D^+\varphi(x_*, y_*)$,

$$D^-\varphi(x_*, y_*) = \{ \bar{l} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{l} = \lambda\bar{a}, \lambda \in [0, 1] \} \cup \{ \bar{l} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{l} = \lambda\bar{b}, \lambda \in [0, 1] \}.$$

Так как функции $\varphi_{\bar{a}}$ и $\varphi_{\bar{b}}$ положительно однородны и

$$\varphi(x_*, y_*) = \varphi_{\bar{a}}(x_*, y_*) = \varphi_{\bar{b}}(x_*, y_*) = r \geq 0,$$

получаем, что и в этой ситуации неравенства (15), (16) выполняются.

Рассмотрим, наконец, случай, когда точка (x_*, y_*) является узловой, т.е. в ней происходит склейка n ($n \geq 3$) линейных функций

$$\varphi_{\bar{a}^p}(x, y) = \langle a^p, x \rangle + a_3^p \cdot y + H^*(\bar{a}^p), \quad p = 1, \dots, n. \quad (25)$$

Функция φ не дифференцируема в точке (x_*, y_*) , поэтому одно из множеств $D^-\varphi(x_*, y_*)$, $D^+\varphi(x_*, y_*)$ пусто. Примем для определенности, что $D^+\varphi(x_*, y_*) = \emptyset$. Если при этом $D^-\varphi(x_*, y_*) = \emptyset$, неравенства (15), (16), очевидно, выполняются.

Предположим, что $D^-\varphi(x_*, y_*) \neq \emptyset$. Обозначим символом $\varphi_\varepsilon(\cdot)$ сужение функции φ на такую достаточно малую выпуклую окрестность $O_\varepsilon(x_*, y_*)$, что в этой окрестности функция φ склеивается только из функций (25). Можно показать, что

$$D^-\varphi(x_*, y_*) = D^-\tilde{\varphi}_\varepsilon(x_*, y_*),$$

где $\tilde{\varphi}_\varepsilon(\cdot)$ — выпуклая оболочка функции φ_ε . Таким образом, $D^-\varphi(x_*, y_*)$ является ограниченным замкнутым выпуклым множеством. При этом если $\bar{l}^* \in D^-\varphi(x_*, y_*)$, то существуют такие векторы $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^3$, что

$$\bar{l}^* \in [\bar{a}, \bar{b}] = \{ (1 - \lambda)\bar{a} + \lambda\bar{b} \mid \lambda \in [0, 1] \},$$

и для любого $n = 1, 2, \dots$ существует такая точка $(x_n, y_n) \in O_{\varepsilon_n}(x_*, y_*)$, что $D^-\varphi(x_n, y_n) = [a, b]$. Здесь $\varepsilon_n = \varepsilon/n$. Точки (x_n, y_n) не являются узловыми, поэтому в них выполнено неравенство (15). В частности,

$$H^*(\bar{l}^*) + \langle l, x_n \rangle + l_3 \cdot y_n \leq \varphi(x_n, y_n). \quad (26)$$

Переходя в (26) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$H^*(\bar{l}^*) + \langle l, x_* \rangle + l_3 \cdot y_* \leq \varphi(x_*, y_*),$$

что доказывает выполнение неравенства (15). Неравенство (16) выполнено в силу пустоты супердифференциала.

Случай, когда $D^+\varphi(x_*, y_*) \neq \emptyset$, $D^+\varphi(x_*, y_*) = \emptyset$ рассматривается аналогично. Таким образом, построенная в результате алгоритма функция $\varphi(\cdot)$ является минимаксным решением уравнения (13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камнева Л. В., Пацко В. С. Построение максимального стабильного моста в играх с простыми движениями на плоскости // Тр. ИММ УрО РАН. — 2014. — 20, № 4. — С. 128–142.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
3. Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. — 1970. — № 2. — С. 54–63.
4. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона—Якоби. — М.: Наука, 1991.

5. *Субботин А. И., Шагалова Л. Г.* Кусочно линейное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби // Докл. РАН. — 1992. — 325, № 5. — С. 144–148.
6. *Ухоботов В. И., Цеунова И. В.* Дифференциальная игра с простым движением // Вестн. Челябинск. гос. ун-та. — 2009. — 11. — С. 84–96.
7. *Шагалова Л. Г.* Кусочно линейная функция цены дифференциальной игры с простыми движениями // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. — 2007. — 12, № 4. — С. 564–565.
8. *Bardi M., Evans L.* On Hopf's formulas for solutions of Hamilton–Jacobi equations // Nonlin. Anal. Th. Meth. Appl. — 1984. — 8, № 11. — P. 1373–1381.
9. *Crandall M. G., Lions P. L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Am. Math. Soc. — 1983. — 377, № 1. — P. 1–42.
10. *Hopf E.* Generalized solutions of nonlinear equations of first order // J. Math. Mech. — 1965. — 14, № 6. — P. 951–973.
11. *Krasovskii N. N., Subbotin A. I.* Game-Theoretical Control Problems. — New York: Springer-Verlag, 1988.
12. *Pachter M., Yavin Y.* Simple-motion pursuit-evasion differential games. Part 1. Stroboscopic strategies in collision-course guidance and proportional navigation // J. Optim. Theory Appl. — 1986. — 51, № 1. — P. 95–127.
13. *Petrosjan L. A.* Differential games of pursuit. — Singapore: World Scientific, 1993.
14. *Subbotin A. I.* Generalized Solutions of First Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. — Boston: Birkhäuser, 1995.
15. *Shagalova L. G.* A piecewise linear minimax solution of the Hamilton–Jacobi equation // IFAC Proc. Vols. — 1998. — 31, № 13. — P. 193–197.

Шагалова Любовь Геннадьевна

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

E-mail: shag@imm.uran.ru