

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 164



Москва 2019

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

С. С. Акбаров (НИУ ВШЭ, ВИНТИ РАН)

А. Б. Жижченко (Отделение математических наук РАН)

Е. П. Кругова (ВИНТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Н. Х. Розов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Редактор-составитель:

А. А. Туганбаев (МЭИ, МГУ им. М. В. Ломоносова)

Научный редактор:

С. С. Акбаров (НИУ ВШЭ, ВИНТИ РАН)

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 164

АЛГЕБРА



Москва 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Арифметические кольца (А. А. Туганбаев)	3
Модули над областями дискретного нормирования. III (П. А. Крылов, А. А. Туганбаев)	74
Группы автоморфизмов колец формальных матриц (П. А. Крылов, А. А. Туганбаев)	96
Прямо проективные модули, прямо инъективные модули и их обобщения (А. Н. Абызов, А. А. Туганбаев, Д. Т. Тапкин, Ч. К. Куинь)	125



АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА

© 2019 г. А. А. ТУГАНБАЕВ

Аннотация. В данной работе приводятся с доказательствами некоторые старые и новые результаты о (не обязательно коммутативных) арифметических кольцах и модулях и кольцах Безу. В частности, исследуются связи между арифметическими кольцами и их локализациями по максимальным идеалам, насыщенные подмодули и насыщения, локализуемые кольца, свойства аннуляторов конечно порожденных модулей над арифметическими кольцами, диагонализированные кольца, кольца с плоскими правыми идеалами, кольца с квазипроективными конечно порожденными правыми идеалами, эрмитовы кольца, пирсовские слои, кольца с размерностью Крулля.

Ключевые слова: арифметическое кольцо, дистрибутивный модуль, плоский модуль, локализация по максимальному идеалу, кольцо Безу, эрмитово кольцо, диагонализированное кольцо, пирсовский слой.

ARITHMETICAL RINGS

© 2019 А. А. TUGANBAEV

ABSTRACT. In this paper, some familiar and new results on arithmetical rings, modules, and Bezout rings (not necessarily commutative) are provided. In particular, we examine relationships between arithmetical rings and their localizations by maximal ideals, saturated submodules and saturations, localizable rings, properties of annihilators of finitely generated modules over arithmetical rings, diagonalizable rings, rings with flat right ideals, and rings with quasi-projective finitely generated right ideals, Hermite rings, Pierce stalks, and rings with Krull dimension.

Keywords and phrases: arithmetic ring, distribution module, flat module, localization by maximal ideal, Bezout ring, Hermite ring, diagonalizable ring, Pierce stalk.

AMS Subject Classification: 16Dxx, 13Fxx, 16Exx, 16Pxx

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Насыщенные идеалы и локализации	10
1.1. Дистрибутивные модули	10
1.2. Насыщенные подмодули и насыщения	14
1.3. Локализуемые кольца	17
Глава 2. Конечно порожденные модули и диагонализированность	23
2.1. Аннуляторы и конечно порожденные модули	23
2.2. Диагонализированные кольца	25
Глава 3. Кольца с плоскими и квазипроективными идеалами	26
3.1. Плоские модули	26
3.2. Плоские идеалы и подмодули	34
3.3. Модули, близкие к проективным	40

Глава 4. Эрмитовы кольца и пирсовские слои	50
4.1. Эрмитовы кольца	50
4.2. Пирсовские слои	53
Глава 5. Кольца Безу, размерность Крулля	61
5.1. Кольца и модули Безу	61
5.2. Кольца с размерностью Крулля	65
Список литературы	69

ВВЕДЕНИЕ

Основное содержание работы. Основными результатами главы 1 «Насыщенные идеалы и локализации» являются теоремы 1А, 1В и 1С (см. с. 10).

Основными результатами главы 2 «Конечно порожденные модули и диагонализированность» являются теоремы 2А и 2В.

Основными результатами главы 3 «Кольца с плоскими и квазипроективными идеалами» являются теоремы 3А, 3В и 3С.

Основными результатами главы 4 «Эрмитовы кольца и пирсовские слои» являются теоремы 4А и 4В.

Основными результатами главы 5 «Кольца Безу, размерность Крулля» являются теоремы 5А, 5В и 5С.

Доказательство указанных теорем 1А–5С разбито на ряд утверждений, некоторые из которых имеют самостоятельный интерес.

Все кольца предполагаются ассоциативными кольцами с ненулевой единицей. Модули предполагаются унитарными и, когда не указана сторона, правыми. Словосочетания типа «кольцо Безу» означают «правое и левое кольцо Безу».

I. Дистрибутивные решетки. Арифметические модули и кольца. Дистрибутивные модули и кольца.

А. Решетка $\mathcal{L}$ с операциями $\cap$ и $+$ называется *дистрибутивной*, если выполнены следующие два эквивалентных условия:

- (i) $X \cap (Y + Z) = X \cap Y + X \cap Z$ для всех $X, Y, Z \in \mathcal{L}$;
- (ii) $(X + Y) \cap (X + Z) = X + Y \cap Z$ для всех $X, Y, Z \in \mathcal{L}$.

Эквивалентность условий (i) и (ii) хорошо известна (см., например, [69, Sec. 1.4, Lemma 10]).

В. Кольцо с дистрибутивной решеткой идеалов называется *арифметическим* кольцом. Непосредственно проверяется, что кольцо A является арифметическим в точности тогда, когда $X \cap (Y + Z) = X \cap Y + X \cap Z$ для всех 1-порожденных идеалов X, Y, Z кольца A .

С. Подмодуль M модуля X называется *вполне инвариантным* (соответственно, *характеристическим*) подмодулем в X , если $\alpha(M) \subseteq M$ для каждого эндоморфизма (соответственно, автоморфизма) α модуля X . Модуль M называется *арифметическим*, если решетка $\mathcal{L}$ всех его вполне инвариантных подмодулей дистрибутивна. Поскольку идеалы кольца A совпадают с вполне инвариантными подмодулями в A_A и с вполне инвариантными подмодулями в ${}_A A$, то *арифметичность кольца A равносильна как арифметичности модуля A_A , так и арифметичности модуля ${}_A A$.*

Д. Модуль называется *дистрибутивным*, если решетка всех его подмодулей дистрибутивна. Модуль называется *цепным*, если любые два его (циклических) подмодуля сравнимы по включению.

Каждый цепной модуль дистрибутивен и каждый дистрибутивный модуль арифметичен. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ — дистрибутивный нецепной $\mathbb{Z}$ -модуль. Прямая сумма $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — арифметический недистрибутивный $\mathbb{Z}$ -модуль.

Е. Пусть A — простое кольцо, не являющееся телом (например, пусть A — кольцо всех (2×2) -матриц над телом). Тогда A — арифметическое кольцо, не являющееся дистрибутивным справа или слева.

Ф. Модуль M называется *инвариантным* или *дуо* модулем, если все его подмодули вполне инвариантны в M .

Кольцо называется *инвариантным справа* (соответственно, *слева*), если все его правые (соответственно, левые) идеалы являются идеалами, т.е. A является инвариантным правым (соответственно левым) A -модулем. Кольцо A инвариантно слева (соответственно, справа) в точности тогда, когда ${}_A A$ (соответственно, A_A) — инвариантный модуль.

Ясно, что инвариантное справа кольцо является арифметическим в точности тогда, когда оно дистрибутивно справа.

Инвариантные слева и справа кольца называются *инвариантными* или *дуо* кольцами.

Все коммутативные кольца инвариантны. Если A — некоммутативное тело, то A и $A[[x]]$ — некоммутативные инвариантные кольца.

II. В коммутативной алгебре арифметические кольца играют важную роль; они входят в характеристики различных интересных и важных колец в силу того, что:

- (i) коммутативные арифметические кольца совпадают с коммутативными кольцами, у которых все локализации по максимальным идеалам являются цепными кольцами (см. [78]);
- (ii) все подмодули плоских модулей над коммутативным кольцом A являются плоскими в точности тогда, когда A — арифметическое полупервичное кольцо (см. [78]).

Арифметические кольца также возникают при решении многих других задач коммутативной и гомологической алгебры в качестве необходимых или/и достаточных условий (см., например, [1–4, 14, 15, 18, 28, 33, 50–53, 60, 61, 64, 73, 78, 79, 96, 97, 104, 113]).

III. Модули и кольца Безу. Модуль называется *модулем Безу*, если все его конечно порожденные подмодули циклически.

Каждый цепной модуль является дистрибутивным модулем Безу. Кольцо целых чисел — коммутативное дистрибутивное нецепное кольцо Безу.

А. Каждое инвариантное справа правое кольцо Безу A дистрибутивно справа и, в частности, арифметично. В этом случае каждый циклический правый A -модуль дистрибутивен, и каждое фактор-кольцо кольца A — инвариантное справа дистрибутивное справа правое кольцо Безу.

Действительно, достаточно доказать, что $X = X \cap Y + X \cap Z$ для любых главных правых идеалов X, Y, Z кольца A с условием $X \subseteq Y + Z$. Так как A_A — модуль Безу, то $Y + Z$ — циклический правый модуль над инвариантным справа кольцом A . Поэтому существует такой идеал B в A , что

$$X = (Y + Z)B = YB + ZB \subseteq X \cap Y + X \cap Z \subseteq X.$$

В. Нетрудно проверить, что дистрибутивность модуля равносильна дистрибутивности всех его 2-порожденных подмодулей. Поэтому дистрибутивность модуля Безу равносильна тому, что каждый его циклический подмодуль дистрибутивен.

С. Из двух предыдущих утверждений вытекает, что каждый правый модуль Безу M над инвариантным справа кольцом A является дистрибутивным модулем.

IV. В отличие от коммутативного случая, класс произвольных некоммутативных арифметических колец слишком широк для содержательного изучения, поскольку включает в себя все простые кольца, все регулярные (по фон Нейману) кольца, все наследственные нётеровы полупервичные кольца, все бирегулярные кольца и другие широкие классы колец (см. пп. VI-С и VII-А, В ниже). Поэтому необходимо рассматривать арифметические кольца, которые достаточно близки к коммутативным. Однако и в этом случае исследование становится гораздо более трудным, чем в коммутативном случае.

Например, даже если мы будем рассматривать инвариантные арифметические кольца с сильными дополнительными условиями, то как показывает приведенный ниже пример, для таких

колец не обязаны существовать аналоги локализаций по максимальным идеалам, которые существуют для любых коммутативных колец и являются важнейшим инструментом при изучении коммутативных колец.

V. Пример некоммутативного инвариантного арифметического кольца A без локализаций по максимальным идеалам (см. [11, 105]). В этом примере кольцо A также является подпрямой неразложимым полулокальным кольцом Безу с ровно двумя максимальными правыми (левыми) идеалами.

Пусть $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, $\mathbb{Q}[i]$ — поле частных кольца целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ ($i^2 = -1$). Обозначим через φ автоморфизм $q_1 + q_2i \rightarrow q_1 - q_2i$ поля $\mathbb{Q}[i]$. Пусть R_1 и R_2 — локализации коммутативной области главных идеалов $\mathbb{Z}[i]$ по простым идеалам, порожденным простыми элементами $2 + i$ и $2 - i$ соответственно. Тогда R_1 и R_2 — коммутативные цепные области главных идеалов. Обозначим $R \equiv R_1 \cap R_2$. Пусть X и Y — идеалы в R , порожденные элементами $2 + i$ и $2 - i$ соответственно.

Коммутативная область главных идеалов R имеет ровно два максимальных идеала X и Y ,

$$R_X = R_1, \quad R_Y = R_2, \quad \varphi(R_X) = R_Y, \quad X + Y = R, \quad J(R) = X \cap Y = (2 + i)(2 - i)R = 5R,$$

и факторкольцо $R/J(R)$ изоморфно прямому произведению полей A/X и A/Y . Кольцо R совпадает с множеством всех несократимых рациональных гауссовых дробей, знаменатели которых не делятся ни на $2 + i$, ни на $2 - i$.

Обозначим через M правый R -модуль $\mathbb{Q}[i]/R_X$. Тогда все собственные подмодули в M_R циклически и образуют бесконечную счетную строго возрастающую цепь

$$0 = s_0R \subset s_1R \subset s_2R \subset \dots,$$

где простой модуль s_1R изоморфен модулю $R/Y = R/(2 - i)R$ и $r_R(s_n) = (2 - i)^n R$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Мы также превратим M в левый R -модуль по правилу $rm = m\varphi(r)$ для всех элементов $r \in R$ и $m \in M$. Непосредственно проверяется, что M — R - R -бимодуль, являющийся цепным артиновым¹ делимым правым (левым) R -модулем.

Обозначим через A тривиальное расширение R - R -бимодуля M с помощью кольца R . Напомним, что A — внешняя прямая сумма абелевых групп R и M с таким умножением, что

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2) = (r_1r_2, m_2\varphi(r_1) + m_1r_2)$$

для любых $r_1, r_2 \in R$ и $m_1, m_2 \in M$. Пара $(1, 0)$ — единица кольца A . Мы будем отождествлять M , X и Y с идеалами $(0, M)$, $(X, 0)$ и $(Y, 0)$ в A соответственно. Кольцо R отождествляется с подкольцом $(R, 0)$ в A .

Правые (левые) идеалы кольца A , лежащие в M , совпадают с R -подмодулями в M . Заметим, что $tA = At$ для любого $t \in M$, факторкольцо $A/J(A)$ изоморфно прямому произведению полей A/X и A/Y , $M^2 = 0$, факторкольцо A/M изоморфно коммутативной области главных идеалов R , M — цепной артинов делимый правый (левый) A -модуль Безу, простой правый (левый) A -модуль $s_1A = As_1$ — наименьший ненулевой правый (левый) идеал в A , $r_A(s_1) = Y$ и $\ell_A(s_1) = X$. Перечислим некоторые свойства кольца A .

- (i) $X = (2 + i)A = \ell_A(s_1) = N_\ell$ и $Y = (2 - i)A = r_A(s_1) = N_r$.
- (ii) Элемент $(2 + i) + (2 - i) = 4 = 5 - 1$ обратим в A , поскольку $5 \in J(A)$.
- (iii) Если положить $x = (2 + i)/4 \in X$, то

$$\begin{aligned} 1 - x &= (2 - i)/4 \in Y, \quad (2 + i)s_1 = s_1\varphi(2 + i) = s_1(2 - i) = 0, \quad xs_1 = s_1(1 - x) = 0, \\ x &\in X \setminus J(A) = X \setminus Y \subseteq N_\ell, \quad 1 - x \in Y \setminus X = Y \setminus J(A) \subseteq N_r, \\ s_1 &\in r(x) \cap \ell(1 - x), \quad r(s_1) \cap (A \setminus Y) = Y \cap (A \setminus Y) = \emptyset, \\ \ell(s_1) &\cap (A \setminus X) = X \cap (A \setminus X) = \emptyset. \end{aligned}$$

- (iv) Не существует правостороннего аналога локализации кольца A по максимальному (правому) идеалу X и левостороннего аналога локализации кольца A по максимальному (левому) идеалу Y .

¹Модуль называется *артиновым*, если каждая строго убывающая цепь его подмодулей конечна.

- (v) $J(A)$ содержит не все правые (левые) делители нуля в A .
- (vi) Идеал M сравним по включению с любым правым или левым идеалом кольца A .
- (vii) A — дистрибутивное кольцо.
- (viii) A — инвариантное подпрямо неразложимое кольцо Безу.

Свойства (i)–(iii) проверяются непосредственно. Свойства (iv) и (v) вытекают из свойства (iii). Свойство (vi) вытекает из того, что M — делимый R -модуль. Свойство (vii) вытекает из (vi) и следующих фактов: A/M — коммутативное кольцо Безу; M — A -модуль Безу; $tA = At$ для каждого $t \in M$; s_1A — наименьший ненулевой правый (левый) идеал в A . Свойство (viii) вытекает из свойства (vi) и того, что, согласно п. IIIc, каждый правый модуль Безу над инвариантным справа кольцом дистрибутивен.

VI. Полудистрибутивные и полуцепные модули. Прямая сумма дистрибутивных (соответственно, цепных, простых) модулей называется *полудистрибутивным* (соответственно, *полуцепным*, *полупростым*) модулем.

- A.** Непосредственно проверяется, что все полудистрибутивные (например, полуцепные) модули арифметичны. Это дает большое число примеров некоммутативных арифметических колец, поскольку многие полусовершенные кольца полудистрибутивны (см., например, [6, 84, 115–118]).
- B.** Пусть в кольце A пересечение любых двух ненулевых идеалов — ненулевой идеал (это так, например, если кольцо A первично). Если каждое собственное фактор-кольцо кольца A арифметично (например, полудистрибутивно справа), то A — арифметическое кольцо.
Достаточно доказать, что $X = X \cap Y + X \cap Z$ для любых ненулевых идеалов X, Y, Z с условием $X \subseteq Y + Z$. По условию $X \cap Y \cap Z \neq 0$. Пусть $h : A \rightarrow A/(X \cap Y \cap Z)$ — естественный кольцевой гомоморфизм. Так как кольцо $h(A)$ арифметично, то

$$h(X) = h(X) \cap h(Y) + h(X) \cap h(Z).$$

Поэтому

$$X + X \cap Y \cap Z = X \cap Y + X \cap Z + X \cap Y \cap Z.$$

Тогда

$$X = X \cap Y + X \cap Z.$$

- C.** Каждое наследственное нётерово полупервичное кольцо A является арифметическим кольцом.
Так как A — конечное прямое произведение наследственных нётеровых первичных колец (см. [48] или [58, Theorem 20.30]), то можно без ограничения общности считать, что A — наследственное нётерово первичное кольцо. Тогда каждое собственное фактор-кольцо кольца A является полуцепным (см. [55, Corollary 3.2] или [58, Theorem 25.5.1]). Согласно предыдущему утверждению A — арифметическое кольцо.
- D.** Пусть A — 5-мерная алгебра над полем F , порожденная всеми (3×3) -матрицами вида

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{pmatrix}, \quad f_{ij} \in F.$$

Непосредственно проверяется, что $e_{11}A = e_{11}F + e_{12}F + e_{13}F$ — неразложимый дистрибутивный нётеров артинов нецепной A -модуль Безу и A — полудистрибутивное справа полуцепное слева артиново кольцо, не являющееся полуцепным справа. В частности, A — 5-мерная арифметическая F -алгебра, не являющаяся полуцепной справа.

VII. Кольца с идемпотентными идеалами.

- A.** Если в кольце A каждый 1-порожденный идеал совпадает со своим квадратом (в этом случае любой идеал совпадает со своим квадратом), то A — арифметическое кольцо.
Пусть X, Y, Z — три идеала кольца A . Тогда

$$X \cap (Y + Z) = (X \cap (Y + Z))^2 \subseteq X(Y + Z) = XY + XZ \subseteq X \cap (Y + Z).$$

В. Пусть A — либо *бирегулярное* кольцо (т.е. каждый 1-порожденный идеал кольца A порождается центральным идемпотентом), либо *регулярное* кольцо (т.е., каждый главный правый (левый) идеал порождается идемпотентом). Хорошо известно и непосредственно проверяется, что в кольце A каждый 1-порожденный идеал совпадает со своим квадратом. Согласно предыдущему утверждению A — арифметическое кольцо.

VIII. Некоторые определения и обозначения. Пусть A — кольцо, X — правый A -модуль, Y — левый A -модуль, X_1 и X_2 — два подмножества в X , Y_1 и Y_2 — два подмножества в Y , $\max X$ — множество всех максимальных подмодулей в X , $J(X)$ и $\text{End } X$ — радикал Джекобсона и кольцо эндоморфизмов модуля X .

Если $f : X \rightarrow Q$ — гомоморфизм модулей и M — подмодуль в Q , то через $f^{-1}(M)$ обозначается подмодуль $\{x \in X \mid f(x) \in M\}$ модуля X .

А. Для любого подмножества B кольца A через ABA обозначается идеал в A , порожденный множеством B .

Подмножество $\{a \in A \mid X_1 a \subseteq X_2\}$ кольца A обозначается через $(X_1 \dot{\cdot} X_2)$. Если X_2 — подмодуль в X , то $(X_1 \dot{\cdot} X_2)$ — правый идеал кольца A . Если X_1 и X_2 — подмодули в X , то $(X_1 \dot{\cdot} X_2)$ — идеал в A .

Подмножество $\{a \in A \mid aY_1 \subseteq Y_2\}$ кольца A обозначается через $(Y_2 \dot{\cdot} Y_1)$. Если Y_2 — подмодуль в Y_1 , то $(Y_2 \dot{\cdot} Y_1)$ — левый идеал кольца A . Если Y_1 и Y_2 — подмодули в Y , то $(Y_2 \dot{\cdot} Y_1)$ — идеал в A .

В. Через $r(X_1)$ обозначается *правый аннулятор* $(X_1 \dot{\cdot} 0) = \{a \in A \mid Xa = 0\}$ множества X_1 , являющийся правым идеалом в A . Если X_1 — подмодуль в X , то $r(X_1)$ — идеал в A .

Через $\ell(Y_1)$ обозначается *левый аннулятор* $(0 \dot{\cdot} Y_1) = \{a \in A \mid aY_1 = 0\}$ множества Y_1 , являющийся левым идеалом в A . Если Y_1 — подмодуль в N , то $\ell(Y_1)$ — идеал в A .

С. Кольцо A называется *локальным*, если для любого элемента $a \in A$ хотя бы один из элементов a , $1 - a$ является обратимым. Кольцо A локально в точности тогда, когда его фактор-кольцо $A/J(A)$ по радикалу Джекобсона $J(A)$ изоморфно телу.

Кольцо A называется *полулокальным*, если его фактор-кольцо $A/J(A)$ по радикалу Джекобсона $J(A)$ изоморфно конечному прямому произведению колец матриц над телами.

Кольцо A называется *полусовершенным*, если A полулокально, и все идемпотенты фактор-кольца $A/J(A)$ поднимаются до идемпотентов кольца A .

Д. Кольцо A называется *заменяемым*, если для любого элемента $a \in A$ существует такой идемпотент $e \in aA$, что $1 - e \in (1 - a)A$. Свойство быть заменяемым кольцом эквивалентно своему левостороннему аналогу (см. [11, 101]).

В [101] показано, что если A — кольцо и фактор-кольцо $A/J(A)$ — регулярное кольцо, у которого все идемпотенты поднимаются до идемпотентов кольца A , то A — заменяемое кольцо. В частности, все регулярные или полусовершенные кольца — заменяемые кольца.

Е. Правый A -модуль X называется *свободным циклическим* модулем, если существует такой элемент $x \in X$, называемый *свободным образующим* для X , что $X = xA$ и правый аннулятор $r(x)$ элемента x равен нулю. Заметим, что X — свободный циклический модуль в точности тогда, когда $X \cong A_A$.

Модуль X_A называется *свободным*, если существует такое подмножество $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$, называемое *базисом* модуля X , что $X = \bigoplus_{i \in I} x_i A$ и $r(x_i) = 0$ для всех $i \in I$; мощность $\text{card}(I)$ называется *рангом* свободного модуля X . Заметим, что ранг свободного модуля не всегда определен однозначно.

Модуль X называется *конечно представимым*, если $X \cong F/N$, где F — конечно порожденный свободный модуль и N — конечно порожденный подмодуль в F .

Правый модуль X над кольцом A называется *циклически представимым*, если $M \cong A_A/aA$ для некоторого элемента $a \in A$.

Ф. Модуль X называется *проективным относительно* модуля M , если для любого модульного эпиморфизма $h : M \rightarrow \overline{M}$ и каждого гомоморфизма $\overline{f} : X \rightarrow \overline{M}$ существует такой гомоморфизм $f : X \rightarrow M$, что $\overline{f} = hf$.

Модуль X называется *проективным*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

- (1) X проективен относительно любого правого A -модуля;
- (2) модуль X изоморфен прямому слагаемому свободного модуля;
- (3) ядро любого эпиморфизма произвольного A -модуля M на модуль X является прямым слагаемым модуля M .

Модуль, проективный относительно себя, называется *квазипроективным* или *самопроективным* модулем.

Ясно, что все проективные модули квазипроективны, а циклическая группа любого простого порядка является квазипроективным непроективным простым $\mathbb{Z}$ -модулем.

Кольцо A называется *правым PP кольцом* или *рикартовым справа* кольцом, если выполнены следующие эквивалентные условия:

- (1) для любого элемента $x \in A$ модуль xA проективен;
- (2) для любого элемента $x \in A$ существует такой идемпотент $e \in A$, что $r(x) = eA$.

Модуль называется *наследственным* (*полунаследственным*, если все его подмодули (конечно порожденные подмодули) проективны).

Г. Кольцо A называется *областью* (соответственно, *первичным* кольцом), если произведение любых двух его ненулевых элементов (соответственно, идеалов) ненулевое.

Собственный правый идеал P кольца A называется *вполне первичным*, если $ab \notin P$ для всех $a, b \in A \setminus P$.

Собственный идеал P кольца A называется *вполне первичным* (соответственно, *первичным*), если фактор-кольцо A/P — область (соответственно, первичное кольцо).

Пересечение всех первичных идеалов кольца A является нильидеалом и называется *первичным радикалом* кольца A .

Кольцо A называется *полупервичным* (соответственно, *редуцированным*), если A не имеет ненулевых нильпотентных идеалов (соответственно, ненулевых нильпотентных элементов).

Кольцо, в котором все идемпотенты центральны, называется *нормальным* или *абелевым* кольцом.

Н. Модуль X называется *существенным расширением* своего подмодуля Y , если $Y \cap Z \neq 0$ для любого ненулевого (циклического) подмодуля Z . В этом случае Y называется *существенным подмодулем* в X .

Модуль M называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение, т.е. M — существенное расширение любого своего ненулевого подмодуля.

Если X — подмодуль модуля M и $X + Y \neq M$ для любого собственного подмодуля Y в M , то X называется *малым* подмодулем в M .

Модуль X называется *конечномерным*, если X не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых (циклических) подмодулей; конечномерность X равносильна тому, что X — существенное расширение конечной прямой суммы ненулевых равномерных (циклических) подмодулей.

Конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов называется *правым кольцом Голди*.

Пусть n — натуральное число. Говорят, что модуль M имеет *равномерную размерность n* или *размерность Голди n* , если M — существенное расширение прямой суммы n равномерных ненулевых модулей и M не содержит прямую сумму $n + 1$ равномерных ненулевых модулей.

I. В работе используются и другие хорошо известные понятия и утверждения из теории колец, которые содержатся во многих книгах (см., например, [29, 58, 110, 119]).

ГЛАВА 1

НАСЫЩЕННЫЕ ИДЕАЛЫ И ЛОКАЛИЗАЦИИ

Основными результатами данной главы являются теоремы **1А**, **1В** и **1С**.

1А. Теорема (А. А. Туганбаев, [13]). *Инвариантное справа кольцо A является арифметическим в точности тогда, когда для любого его максимального идеала M все $\{A \setminus M\}$ -насыщенные идеалы кольца A образуют цепь по включению.*

1В. Теорема (К. Йенсен, [78]). *Коммутативное кольцо A является арифметическим в точности тогда, когда для любого его максимального идеала M локализация A_M является цепным кольцом.*

1С. Теорема (А. А. Туганбаев, [8]). *Инвариантное справа кольцо A является арифметическим полупервичным кольцом в точности тогда, когда для любого его максимального идеала M правая локализация A_M существует и является цепной справа областью.*

Замечание. Окончание доказательства теорем **1А**, **1В** и **1С** см. в п. **1.2.7** и **1.3.11**.

1.1. ДИСТРИБУТИВНЫЕ МОДУЛИ

1.1.1. Первый критерий дистрибутивности модуля. Для правого модуля X над кольцом A следующие условия равносильны:

- (1) X — дистрибутивный модуль;
- (2) все подмодули всех гомоморфных образов модуля X дистрибутивны;
- (3) в X все 2-порожденные подмодули дистрибутивны;
- (4) в X каждый 2-порожденный подмодуль лежит в некотором дистрибутивном подмодуле;
- (5) $X_1 \cap (X_2 + X_3) = X_1 \cap X_2 + X_1 \cap X_3$ для любых циклических подмодулей X_1, X_2, X_3 в M ;
- (6) A содержит такое унитарное подкольцо A' , что естественный A' -модуль X дистрибутивен;
- (7) выполняется равенство

$$\left(\sum_{i \in I} X_i \right) \cap \left(\sum_{j \in J} Y_j \right) = \sum_{i \in I, j \in J} (X_i \cap Y_j)$$

для любых двух множеств $\{X_i\}_{i \in I}$ и $\{Y_j\}_{j \in J}$ подмодулей в M .

Эквивалентности из **1.1.1** проверяются непосредственно и используются в дальнейшем без специальных ссылок.

1.1.2. Второй критерий дистрибутивности модуля (см. [98, 109]). Для правого модуля X над кольцом A следующие условия равносильны:

- (1) X — дистрибутивный модуль;
- (2) для любых элементов $x, y \in X$ существует такой элемент $a \in A$, что

$$xaA + y(1 - a)A \subseteq xA \cap yA;$$

- (3) для любых элементов $x, y \in X$ существуют такие элементы $a, b, c, d \in A$, что

$$1 = a + b, \quad xa = yc, \quad yb = xd;$$

- (4) $A = (x \cdot yA) + (y \cdot xA)$ для любых элементов $x, y \in X$.

Доказательство. Эквивалентности (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) проверяются непосредственно.

- (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $T = xA \cap yA$. Так как

$$(x + y)A = (x + y)A \cap xA + (x + y)A \cap yA,$$

то существуют такие $b, d \in A$, что

$$(x + y)b \in xA, \quad (x + y)d \in yA, \quad x + y = (x + y)b + (x + y)d.$$

Поэтому

$$yb = (x + y)b - xb \in T, \quad xd = (x + y)d - yd \in T.$$

Пусть $a \equiv 1 - b$ и $z \equiv a - d = 1 - b - d$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 &= a + b, \quad (x + y)z = (x + y) - (x + y)b - (x + y)d = 0, \\ xa &= xd + xz = xd + (x + y)z - yz = xd - yz, \quad yz = -xz \in T, \quad xa \in T. \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть X_1, X_2, X_3 — подмодули в X и

$$x_3 = x_1 + x_2 \in (X_1 + X_2) \cap X_3,$$

где $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$. По условию существуют такие $a, b \in A$, что $1 = a + b$, $x_1a \in x_2A$ и $x_2b \in x_1A$. Тогда

$$\begin{aligned} x_3b &= x_1b + x_2b \in xA \cap zA, \\ x_3a &= x_1a + x_2a \in yA \cap x_3A, \quad x_3 = x_3b + x_3a \in X_1 \cap X_3 + X_2 \cap X_3, \\ (X_1 + X_2) \cap X_3 &\subseteq X_1 \cap X_3 + X_2 \cap X_3 \subseteq (X_1 + X_2) \cap X_3. \end{aligned}$$

Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (3) вытекает из эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (5). $\square$

1.1.3. Третий критерий дистрибутивности модуля. Для правого модуля M над кольцом A равносильны условия:

- (1) M — дистрибутивный модуль;
- (2) для любых $x, y \in M$ существует такой правый идеал B в A , что $(x + y)A = xB + yB$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $B \equiv (x \cdot (x + y)A)$. Тогда $(x + y)A \cap xA = xB$. Если $b \in B$, то $yb = (x + y)b - xb \in (x + y)A$. Поэтому

$$\begin{aligned} B &= (y \cdot (x + y)A), \quad (x + y)A \cap yA = yB, \\ (x + y)A &= (x + y)A \cap xA + (x + y)A \cap yA = xB + yB. \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $x, y \in M$. По условию $(x + y)A = xB + yB$, где B — правый идеал в A . Из модулярного закона следует, что

$$\begin{aligned} xA \cap (x + y)A &= xA \cap (xB + yB) = xB, \\ yA \cap (x + y)A &= yA \cap (xB + yB) = yB, \\ (x + y)A &= xA \cap (x + y)A + yA \cap (x + y)A \end{aligned}$$

и M дистрибутивен. $\square$

1.1.4. Четвертый критерий дистрибутивности модуля (см. [109]). Для правого модуля M над кольцом A следующие условия равносильны:

- (1) M — дистрибутивный модуль;
- (2) $\text{Hom}(X, Y) = 0$ для любого подфактора $X \oplus Y$ модуля M ;
- (3) M не имеет подфакторов, являющихся прямыми суммами двух изоморфных ненулевых модулей;
- (4) $\text{Hom}(X/(X \cap Y), Y/(X \cap Y)) = 0$ для любых подмодулей X и Y в M ;
- (5) $\text{Hom}((X + Y)/Y, (X + Y)/X) = 0$ для любых подмодулей X и Y в M ;
- (6) в каждом подфакторе модуля M любое прямое слагаемое вполне инвариантно;
- (7) в кольце эндоморфизмов любого подфактора модуля M все идемпотенты центральны.

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) и эквивалентности (2) $\Leftrightarrow$ (4) и (2) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) проверяются непосредственно.

Эквивалентность (4) $\Leftrightarrow$ (5) следует из естественных изоморфизмов

$$X/(X \cap Y) \cong (X + Y)/Y, \quad Y/(X \cap Y) \cong (X + Y)/X.$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Допустим, что M не дистрибутивен. Существуют такие подмодули X, Y, Z в M , что $X \subseteq Y + Z$ и $X/(X \cap Y + X \cap Z)$ — ненулевой подмодуль в $(Y + Z)/(X \cap Y + X \cap Z)$. Пусть

$$h : Y + Z \rightarrow (Y + Z)/(X \cap Y + X \cap Z)$$

— естественный эпиморфизм. Тогда

$$0 \neq h(X) \subseteq h(Y + Z) = h(Y) \oplus h(Z), \quad h(X) \cap h(Y) = 0, \quad h(X) \cap h(Z) = 0.$$

Пусть $f : h(Y) \oplus h(Z) \rightarrow h(Y)$ и $g : h(Y) \oplus h(Z) \rightarrow h(Z)$ — естественные проекции. Так как

$$h(X) \cap h(Y) = 0, h(X) \cap h(Z) = 0,$$

то $f(h(X)) \cong h(X) \cong g(h(X)) \neq 0$. Получено противоречие.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $f \in \text{Hom}(X, Y)$, $x \in X$ и $y = f(x) \in Y$. Согласно 1.1.2 существует такой элемент $a \in A$, что

$$\begin{aligned} xaA + y(1 - a)A &\subseteq xA \cap yA \subseteq X \cap Y = 0, \\ xa = y(1 - a) &= 0, \quad y = ya = f(x)a = f(xa) = f(0) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $f \equiv 0$ и $\text{Hom}(X, Y) = 0$. □

1.1.5. Пятый критерий дистрибутивности модуля (см. [47]). Для правого модуля M над кольцом A следующие условия равносильны:

- (1) M — дистрибутивный модуль;
- (2) M не имеет подфакторов, являющихся прямыми суммами двух изоморфных простых модулей;
- (3) любой 2-порожденный подмодуль X модуля M не имеет такого фактор-модуля $S \oplus T$, что S и T — изоморфные простые модули.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из 1.1.4.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

(3) $\Rightarrow$ (2). Допустим противное: существует такой подмодуль X_1 в M и подмодуль Y_1 в X , что $X_1/Y_1 = S_1 \oplus T_1$, где S_1 и T_1 — изоморфные простые модули. Пусть $h : X_1 \rightarrow X_1/Y_1$ — естественный эпиморфизм. Существуют такие циклические подмодули S_2 и T_2 модуля X_1 , что $S_1 = h(S_2)$ и $T_1 = h(T_2)$. Обозначим 2-порожденный подмодуль $S_2 + T_2$ модуля M через X_2 . Тогда $h(X_2)$ — прямая сумма двух изоморфных простых модулей. Получено противоречие.

(2) $\Rightarrow$ (1). Допустим, что модуль M не дистрибутивен. Согласно 1.1.4, M имеет такой подфактор $X \oplus Y$, что X и Y — ненулевые модули и существует изоморфизм $f : X \rightarrow Y$. Ненулевым модулем X имеет ненулевой циклический подмодуль N . Модуль N имеет простой фактормодуль N/T . Тогда Y имеет простой подфактор $f(N)/f(T)$. Поэтому M имеет подфактор, изоморфный модулю $N/T \oplus N/T$. Получено противоречие. □

1.1.6. Дистрибутивные модули над инвариантными кольцами. Пусть A — инвариантное справа кольцо и M — дистрибутивный правый A -модуль.

А. $A = (Y \cdot X) + (X \cdot Y)$ для любых конечно порожденных подмодулей X, Y модуля M .

В. Для любого подмодуля Z' произвольного конечно порожденного подмодуля Z модуля M существует такой идеал A' кольца A , что $ZA' = Z'$.

С. Если M — конечно порожденный модуль, то M — инвариантный модуль.

Доказательство. **А.** Так как $X + Y$ — конечно порожденный модуль, то существуют такое натуральное число n и элементы $x_i \in X, y_i \in Y, 1 \leq i \leq n$, что

$$X + Y = (x_1 + y_1)A + \cdots + (x_n + y_n)A.$$

Так как модуль M дистрибутивен, то

$$(X + Y) \cap Z = (X \cap Z) + (Y \cap Z)$$

для любого подмодуля Z в M .

Пусть $y \in Y$. Для любых $1 \leq i \leq n$ имеем

$$(x_i + y)A = (x_i + y)A \cap (X + Y) = [(x_i + y)A \cap X] + ((x_i + y)A \cap Y).$$

Поэтому существуют такие элементы $a \in A$ и $z \in Y$, что

$$(x_i + y)a \in X, \quad x_i + y = (x_i + y)a + z.$$

Таким образом, $x_i(1 - a) \in Y$ и $ya \in X$. Следовательно,

$$A = (yA \cdot X) + (x_i A \cdot Y), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Отсюда получаем

$$A = (yA \cdot X) + [(x_1 A \cdot Y) \cap \dots \cap (x_n A \cdot Y)] = (yA \cdot X) + (X \cdot Y).$$

В частности,

$$A = (y_i A \cdot X) + (X \cdot Y), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Поэтому

$$A = [(y_1 A \cdot X) \cap \dots \cap (y_n A \cdot X)] + (X \cdot Y) = (Y \cdot X) + (X \cdot Y).$$

В. Пусть Z — n -порожденный модуль, $n \in \mathbb{N}$. Будем вести индукцию по n . При $n = 1$ мы можем отождествить циклический A -модуль Z над инвариантным справа кольцом A с инвариантным справа фактор-кольцом $A/r(Z)$ кольца A . В этом случае утверждение проверяется непосредственно.

Теперь допустим, что утверждение верно для всех k -порожденных подмодулей модуля M при $k < n$. Можно считать, что $Z = X + Y$, где X — циклический модуль и Y — $(n - 1)$ -порожденный модуль. По предположению индукции существуют такие идеалы B и C кольца A , что $X \cap Y = XB = YC$. Поэтому $X \cap Y = X(X \cdot Y) = Y(Y \cdot X)$. Согласно п. А имеем $A = (Y \cdot X) + (X \cdot Y)$. Следовательно,

$$X = X((Y \cdot X) + (X \cdot Y)) = X(Y \cdot X) + X(X \cdot Y) = X(Y \cdot X) + Y(Y \cdot X) = ZB,$$

где $B = (Y \cdot X)$. Аналогично $Y = ZC$, где $C = (X \cdot Y)$.

Пусть Z' — подмодуль в $Z = X + Y$. Требуется доказать, что существует такой идеал H кольца A , что $Z' = (X + Y)H$. По условию $Z' = X \cap Z' + Y \cap Z'$. По предположению индукции существуют такие идеалы D и E кольца A , что $Z' \cap X = XD$ и $Z' \cap Y = YE$. Кроме того, $X = ZB$ и $Y = ZC$. Поэтому

$$Z' = X \cap Z' + Y \cap Z' = XD + YE = ZBD + ZCE = Z(BD + CE),$$

и $BD + CE$ — требуемый идеал A' кольца A .

С. Согласно **В** существует такой идеал B кольца A , что $X = MB$. Пусть f — эндоморфизм модуля M . Тогда

$$f(X) = f(MB) \subseteq f(M)B \subseteq MB = X.$$

Доказательство завершено. $\square$

1.1.7. Дистрибутивные кольца. Пусть A — дистрибутивное справа кольцо.

А. Если X, Y — правые идеалы кольца A и $X \cap Y = 0$, то $(AX)(AY) = (AY)(AX) = 0$. Следовательно, все идемпотенты кольца A центральны.

В. Если A — область, то кольцо A равномерно справа.

С. Если кольцо A инвариантно справа и M — правый A -модуль, то $MB \cap MC = M(B \cap C)$ для любых правых идеалов B, C в A .

Доказательство. А. Докажем, что $yX = 0$ для любого элемента $y \in Y$. Определим гомоморфизм правых A -модулей $f : X \rightarrow Y$ соотношением $f(x) = yx$ для любого $x \in X$. Согласно п. 1.1.4 имеем $yx = f(x) = 0$ (см. условие (2) из п. 1.1.4). Поэтому $0 = YX = XAY$. Тогда $(AX)(AY) = 0$.

Утверждение **В** следует из **А**.

С. Пусть

$$x = \sum_{i=1}^s m_i b_i = \sum_{j=1}^t n_j c_j \in MB \cap MC,$$

где $m_i, n_j \in M$, $b_i \in B$ и $c_j \in C$. Введем обозначения

$$B_1 = \sum_{i=1}^s b_i A \subseteq A, \quad C_1 = \sum_{j=1}^t c_j \subseteq A.$$

Тогда B_1 и C_1 — конечно порожденные правые идеалы дистрибутивного справа инвариантного справа кольца A . Согласно п. 1.1.6А существуют такие элементы $a, b \in A$, что $1 = a + b$ и $b_i a, c_j b \in B_1 \cap C_1$ для всех i, j . Поэтому

$$x = xa + xb = \sum_{i=1}^s b_i a + \sum_{j=1}^t c_j b \in M(B_1 \cap C_1) \subseteq M(B \cap C)$$

и $MB \cap MC \subseteq M(B \cap C) \subseteq MB \cap MC$. □

1.2. НАСЫЩЕННЫЕ ПОДМОДУЛИ И НАСЫЩЕНИЯ

1.2.1. Насыщенные подмодули. Пусть A — кольцо, X — правый A -модуль, X_1 — подмодуль в X , S — непустое мультипликативно замкнутое подмножество в A , содержащее единицу кольца A и не содержащее его нуля, $\overline{X_1}_S$ — подмножество в X , состоящее из всех таких элементов $x \in X$, что $xs \in X_1$ для некоторого элемента $s \in S$.

Множество $\overline{X_1}_S$ называется S -насыщением множества X_1 . Так как $1 \in S$, то $X_1 \subseteq \overline{X_1}_S$.

Если $X_1 = \overline{X_1}_S$, то X_1 называется S -насыщенным подмодулем модуля X . Ясно, что X_1 является S -насыщенным подмодулем в точности тогда, когда X_1 содержит любой такой элемент $x \in X$, что $xs \in X_1$ для некоторого элемента $s \in S$.

Подмножество B кольца A называется *перестановочным справа*, если для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$ существуют такие элементы $a' \in A$ и $b' \in B$, что $ab' = ba'$.

- А. Если множество S перестановочно справа, то S -насыщение $\overline{X_1}_S$ является S -насыщенным подмодулем в X , содержащим X_1 .
- В. Если кольцо A инвариантно справа, то каждое его подмножество B перестановочно справа.
- С. Если S — перестановочное справа мультипликативно замкнутое подмножество кольца A , содержащее $1 \in A$ и не содержащее $0 \in A$, а Y — произвольный подмодуль модуля X , то его S -насыщение $\overline{Y}_S$ является S -насыщенным подмодулем в M и совпадает с пересечением $\hat{Y}$ всех S -насыщенных подмножеств в X , содержащих Y .

Доказательство. А. Действительно, пусть $y, z \in \overline{X_1}_S$. Тогда $ys \in X_1$ и $zt \in X_1$ для некоторых элементов $s, t \in S$. Так как S перестановочно справа, то $ts' = st'$ для некоторых $s' \in S$ и $t' \in A$. Поскольку S мультипликативно замкнуто, то $ts' \in S$. Тогда $(y + z)ts' = yst' + zts' \in X_1$. Поэтому $y + z \in \overline{X_1}_S$ и $\overline{X_1}_S$ — аддитивная подгруппа в X_1 .

Пусть $a \in A$. Так как S перестановочно справа, то $as' = sa'$ для некоторых $s' \in S$ и $a' \in A$. Тогда $yas' = (ys)a' \in X_1$. Поэтому $\overline{X_1}_S$ — подмодуль в X , содержащий X_1 .

Остается доказать, что $x \in \overline{X_1}_S$, если $xu \in \overline{X_1}_S$ для некоторого элемента $u \in S$. Так как $xu \in \overline{X_1}_S$, то $x(uv) \in X_1$ для некоторого элемента $v \in S$. Тогда $uv \in S$, поскольку S мультипликативно замкнуто.

В. Пусть $a \in A$ и $b \in B$. Так как правый идеал bA является идеалом, то $ba \in bA$ и $ab = ba'$ для некоторого $a' \in A$.

С. Пусть $x, z \in \overline{Y}_S$ и $a \in A$. Найдутся такие $s, s' \in S$, что $xs, zs' \in Y$. По условию $at = sb$ и $sb' = s't'$ для некоторых $t, t' \in S$ и $b, b' \in A$. Тогда

$$(xa)t = (xs)b \in Y, \quad (x + z)s't' = (xs)b' + (zs')t' \in Y, \quad xa, x + z \in Y^S.$$

Поэтому $\overline{Y}$ — подмодуль в X . Так как $1 \in S$, то $Y \subseteq \overline{Y}$. Пусть $x \in X$ и $xs \in \overline{Y}$ для некоторого $s \in S$. Из определения $\overline{Y}$ следует, что $xst \in Y$ для некоторого $t \in S$, причем $st \in S$ в силу мультипликативной замкнутости S . Поэтому $x \in \overline{Y}$, откуда следует, что $\overline{Y}$ — S -насыщенный подмодуль в X . Теперь из определения Y^S следует, что $\overline{Y} = \hat{Y}$. $\square$

1.2.2. Свойства дистрибутивных модулей (см. [109]). Пусть A — кольцо, X — дистрибутивный правый A -модуль, Y — подмодуль в X , $f \in \text{End } X$, $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$.

- A.** Если $X = Y + f^{-1}(Y)$, то $f(Y) \subseteq Y$.
- B.** Если $f(X) \subseteq Y + f(Y)$, то $f(Y) \subseteq Y$.
- C.** Если $Y \neq X$, то $Y + f(Y) \neq X$.
- D.** Если $x_1A \oplus \dots \oplus x_nA$ — подмодуль в X , то $x_1A \oplus \dots \oplus x_nA = (x_1 + \dots + x_n)A$ — циклический модуль.
- E.** Если кольцо A локально, то X — цепной модуль.

Доказательство. **A.** Допустим, что $X = Y + f^{-1}(Y)$. Правилom

$$g(x + f^{-1}(Y)) = f(x) + Y$$

корректно задается мономорфизм $g : X/f^{-1}(Y) \rightarrow X/Y$. Согласно 1.1.4 $g \equiv 0$. Поэтому $f^{-1}(Y) = X$ и $f(X) \subseteq Y$.

B. Допустим, что $f(X) \subseteq Y + f(Y)$. Пусть $x \in X$. По условию $f(x) = y + f(z)$ для некоторых $y, z \in Y$. Поэтому

$$x - z \in f^{-1}(Y), \quad x = z + (x - z) \in Y + f^{-1}(Y).$$

Тогда $X = f^{-1}(Y) + Y$ и согласно п. A $f(X) \subseteq Y$.

C. Допустим, что $X = Y + f(Y)$. Тогда $f(X) \subseteq Y + f(Y)$. Согласно п. A $f(X) \subseteq Y$. Тогда $X = Y + f(Y) \subseteq Y + f(X) = Y$; противоречие.

D. Без ограничения общности можно считать, что $n = 2$. Согласно 1.1.2 существуют такие элементы $a, b \in A$, что

$$1 = a + b, \quad x_1aA + x_2bA \subseteq x_1A \cap x_2A = 0.$$

Поэтому $x_1a = x_2b = 0$. Тогда

$$x_1 = x_1(a + b) = (x_1 + x_2)b, \quad x_2 = x_2(a + b) = (x_1 + x_2)a.$$

Поэтому $x_1A + x_2A = (x_1 + x_2)A$ — циклический модуль.

E. Пусть $x, y \in X$. Достаточно доказать, что подмодули xA и yA сравнимы по включению. Согласно 1.1.2 существуют такие элементы $a, b, c, d \in A$, что $1 = a + b$ и $xaA + ybA \subseteq xA \cap yA$. Так как кольцо A локально и $1 = a + b$, то хотя бы один из правых идеалов aA , bA совпадает с A . Поэтому выполнено хотя бы одно из включений $xA \subseteq yA$, $yA \subseteq xA$. $\square$

1.2.3. Квазиинвариантные модули и кольца. Модуль X называется квазиинвариантным, если все его максимальные подмодули вполне инвариантны в M .

- A.** Кольцо A является квазиинвариантным справа, если все его максимальные правые идеалы являются идеалами.
- B.** Если кольцо A квазиинвариантно справа и M — его максимальный правый идеал, то M — максимальный идеал, фактор-кольцо A/M является телом и $\{A \setminus M\}$ — непустое мультипликативно замкнутое подмножество в A , содержащее единицу кольца A и не содержащее его нуля.
- C.** Пусть кольцо A квазиинвариантно справа и M — такой его максимальный правый идеал, что множество $\{A \setminus M\}$ перестановочно справа. Тогда M — максимальный идеал, фактор-кольцо A/M является телом и $\{A \setminus M\}$ — перестановочное справа непустое мультипликативно замкнутое подмножество в A , содержащее единицу кольца A и не содержащее его нуля, причем для любого правого A -модуля X и произвольного подмодуля X_1 в X , $\{A \setminus M\}$ -насыщение $\overline{X_1}_{\{A \setminus M\}}$ является $\{A \setminus M\}$ -насыщенным подмодулем в X , содержащим X_1 .
- D.** Каждый дистрибутивный модуль X квазиинвариантен.

Е. Каждое дистрибутивное справа кольцо A квазиинвариантно справа и для любого его максимального (правого) идеала M верно, что множество $\{A \setminus M\}$ перестановочно справа.

Доказательство. Утверждения **А**, **В** проверяются непосредственно, **С** следует из **В** и **1.2.1А**.

Д. Пусть Y — максимальный подмодуль в X . Допустим, что $f(Y) \not\subseteq Y$. Тогда $X = Y + f(Y)$. Это противоречит **1.2.2С**.

Е. Согласно **Д** кольцо A квазиинвариантно справа. Пусть M — максимальный (правый) идеал кольца A и $\{A \setminus M\}$. Остается доказать, что для любых элементов $x \in A$ и $y \in \{A \setminus M\}$ существуют элементы $x' \in A$ и $y' \in \{A \setminus M\}$, удовлетворяющие условию $xy' = yx'$. Согласно **1.1.2** существуют такие элементы $a, c, d \in A$, что $xa = yc$ и $y(1 - a) = xd$. Если $a \in \{A \setminus M\}$, то можно положить $y' = a$ и $x' = c$. Поэтому можно считать, что $a \in M$. Тогда

$$1 - a \in \{A \setminus M\}, \quad xd = y(1 - a) \in \{A \setminus M\}.$$

Так как M — идеал, то $d \in \{A \setminus M\}$. В этом случае можно положить $y' = d$ и $x' = 1 - a$. $\square$

1.2.4. Критерий дистрибутивности модуля над квазиинвариантным кольцом с перестановочными дополнениями к максимальным идеалам. Пусть A — квазиинвариантное справа кольцо и X — правый A -модуль. Если для любого максимального (правого) идеала M кольца A верно, что (мультипликативно замкнутое) множество $\{A \setminus M\}$ перестановочно справа, то равносильны следующие условия:

- (1) X — дистрибутивный модуль;
- (2) для любого максимального (правого) идеала M кольца A все $\{A \setminus M\}$ -насыщенные подмодули модуля X образуют цепь по включению.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть M — максимальный идеал кольца A , а Y и Z — два $\{A \setminus M\}$ -насыщенных подмодуля модуля X . Допустим, что Y не содержится в Z . Тогда существует элемент $y \in Y \setminus Z$. Требуется доказать, что $z \in Y$, где z — произвольный элемент из Z . Согласно **1.1.2** существуют такие элементы $a, b \in A$, что $1 = a + b$ и $yaA + zbA \subseteq Y \cap Z$.

Если $a \in \{A \setminus M\}$, то из включения элемента ya в $\{A \setminus M\}$ -насыщенный подмодуль Z следует включение $y \in Z$, что противоречит выбору $y \in Y \setminus Z$.

Поэтому $a \in M$. Тогда $b = 1 - a \in \{A \setminus M\}$. Из включения элемента zb в $\{A \setminus M\}$ -насыщенный подмодуль Y следует включение $z \in Y$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $x_1, x_2 \in X$. Согласно **1.1.2** достаточно доказать, что

$$A = (x_1 \cdot x_2A) + (x_2 \cdot x_1A).$$

Допустим, что $A \neq (x_1 \cdot x_2A) + (x_2 \cdot x_1A)$. Тогда собственный правый идеал $(x_1 \cdot x_2A) + (x_2 \cdot x_1A)$ содержится в некотором максимальном (правом) идеале M . Через $\overline{x_1A}$ и $\overline{x_2A}$ обозначим $\{A \setminus M\}$ -насыщения в X подмодулей x_1A и x_2A соответственно. Согласно **1.2.3С**, $\overline{x_1A}$ и $\overline{x_2A}$ являются $\{A \setminus M\}$ -насыщенными подмодулями в X . По условию (2) $\overline{x_1A}$ и $\overline{x_2A}$ сравнимы по включению. Например, пусть $\overline{x_1A} \subseteq \overline{x_2A}$. Так как $x_1A \subseteq \overline{x_1A} \subseteq \overline{x_2A}$, то $x_1s \in x_2A$ для некоторого $s \in \{A \setminus M\}$. Поэтому $s \in (x_1 \cdot x_2A) \subseteq M \cap \{A \setminus M\} = \emptyset$. Получено противоречие. $\square$

1.2.5. Критерий дистрибутивности кольца. Кольцо A является дистрибутивным справа в точности тогда, когда для любого его максимального¹ (правого) идеала M все $\{A \setminus M\}$ -насыщенные правые идеалы кольца A образуют цепь по включению.

Утверждение **1.2.5** вытекает из **1.2.3Е** и **1.2.4**.

1.2.6. Замечание. Пусть A — произвольное коммутативное кольцо, M — его максимальный идеал, A_M — локализация кольца A по M , X — A -модуль и X_M — локализация модуля X по M . Хорошо известно, что каждому подмодулю X'_M A_M -модуля X_M соответствует такой единственный $\{A \setminus M\}$ -насыщенный подмодуль X' A -модуля X , что его локализация по M совпадает с X'_M , причем при этом соответствии сохраняется строгое включение.

¹Напомним, что по **1.2.3Е** кольцо A квазиинвариантно справа.

1.2.7. Окончание доказательства теорем 1А и 1В. Теорема 1А вытекает из 1.2.5 и того факта, что любое инвариантное справа арифметическое кольцо дистрибутивно справа. Теорема 1В вытекает из теоремы 1А и замечания 1.2.6.

1.3. ЛОКАЛИЗУЕМЫЕ КОЛЬЦА

1.3.1. Редуцированные кольца. Пусть A — редуцированное кольцо (т.е. кольцо без ненулевых нильпотентных элементов).

А. Если $a_1, \dots, a_n \in A$ и $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 0$, то $Aa_{s(1)}A \cdot \dots \cdot Aa_{s(n)}A = 0$ для любой подстановки s на множестве $\{1, \dots, n\}$.

В. Если $x, y \in A$, то

$$xy = 0 \iff yx = 0 \iff (AxA)(AyA) = (AyA)(AxA) = 0 \iff (AxA) \cap (AyA) = 0.$$

С. $xy = 0 \iff x^n Ay = xAy^n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В частности, $r(a) = r(a^n)$ для всех $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$.

Д. Для любого подмножества $B \subseteq A$ аннуляторы $r(B)$ и $\ell(B)$ совпадают, являются идеалами и

$$r(B) = \ell(B) = r(ABA) = \ell(ABA) = \{a \in A \mid ABA \cap AaA = 0\}.$$

Е. A — кольцо без нецентральных идемпотентов, и каждый обратимый справа или слева элемент кольца A обратим.

Ф. Для любого подмножества B в A верно, что фактор-кольцо $A/r(B)$ редуцировано и $h(ABA)$ — существенный правый идеал кольца $A/r(B)$, где $h : A \rightarrow A/r(B)$ — естественный эпиморфизм.

Г. Если A — равномерно справа кольцо, то A — область.

Н. В кольце A каждый главный правый идеал B является квазипроективным правым A -модулем и свободным циклическим правым модулем над редуцированным кольцом $A/r(B)$.

Доказательство. **А, В.** Элемент $b = a_{s(1)} \cdot \dots \cdot a_{s(n)}$ можно получить из произведения $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ с помощью конечного числа перестановок двух соседних сомножителей. Если $x, y \in A$ и $xy = 0$, то

$$(yAx)^2 = 0, \quad yAx = 0, \quad (xAy)^2 = 0, \quad xAy = 0.$$

Поэтому $Aa_{s(1)}A \cdot \dots \cdot Aa_{s(n)}A = 0$.

С. Так как в кольце A нет нильпотентных элементов, то равенства $(AxA) \cap (AyA) = 0$ и $(AxA)(AyA) = 0$ равносильны.

Пусть $a \in A$ и $b \in r(a)$. Тогда $a^n b^n = 0$ и по вышедоказанному $(ab)^n = 0$. Поэтому $ab = 0$ и $r(a^n) \subseteq r(a) \subseteq r(a^n)$. Поэтому $xy = 0 \iff x^n Ay = xAy^n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение **Д** следует из **В**.

Е. Если $e = e^2 \in A$, то $e(1 - e) = 0$. По **В** $(AeA) \cap (A(1 - e)A) = 0$. Поэтому e — центральный идемпотент.

Пусть $a, b \in A$ и $ab = 1$. Тогда ba — идемпотент. Выше доказано, что ba — центральный идемпотент. Поэтому $b = b(ab) = b(ba)$. Тогда $ba = a(bba) = ab = 1$.

Ф. Согласно **Д** $r(B)$ — идеал, поэтому фактор-кольцо $A/r(B)$ существует. Пусть $y \in A$ и $y^n \in r(B)$ для некоторого натурального числа n . Тогда $By^n = 0$. Согласно **С** имеем $By = 0$ и $y \in r(B)$. Поэтому $A/r(B)$ — редуцированное кольцо. Допустим, что $h(C) \cap h(AXA) = h(0)$, где C — некоторый правый идеал кольца A , содержащий $r(B)$. Так как $h(ABA)$ — идеал кольца $h(A)$, то

$$h(C)h(ABA) \subseteq h(C) \cap h(ABA) = h(0).$$

Поэтому $CB \subseteq r(B)$ и $C \subseteq \ell(B)$. Так как согласно **В** имеем $\ell(B) = r(B)$, то $C \subseteq r(B)$ и $h(C) = h(0)$. Поэтому $h(ABA)$ — существенный правый идеал кольца $A/r(B)$.

Г. Пусть $0 \neq x, y \in A$. Так как кольцо A равномерно справа, то $xA \cap yA \neq 0$. Согласно **В** имеем $xy \neq 0$.

Н. Пусть $B = bA$, $b \in B$. Обозначим через X правый аннулятор элемента b в кольце A . Согласно **Д** заключаем, что $X = r(B)$ — идеал кольца A . Пусть $h : A \rightarrow A/X$ — естественный кольцевой эпиморфизм и y — такой элемент кольца A , что $h(b)h(y) = h(0)$. Тогда $by \in X$ и $b^2y = 0$.

Поэтому $(byb)^2 = 0$. Тогда $byb = 0$, откуда $(by)^2 = 0$. Поэтому $by = 0$, $y \in X$, $h(y) = 0$, элемент $h(b)$ имеет нулевой правый аннулятор в кольце A/X и главный правый идеал B является свободным циклическим правым A/X -модулем. В частности, B — проективный правый A/X -модуль. Тогда непосредственно проверяется, что B — квазипроективный правый A/X -модуль. $\square$

1.3.2. Правые множества Оре. Пусть A — кольцо и S — правое множество Оре в A , т.е., S — перестановочное справа мультипликативно замкнутое подмножество в A , содержащее единицу и не содержащее нуля кольца A , причем все элементы $s \in S$ не являются делителями нуля в A . В этом случае хорошо известно, что A является унитарным подкольцом в таком единственном подкольце AS^{-1} , что все элементы из S обратимы в AS^{-1} и $AS^{-1} = \{as^{-1} \mid a \in A, s \in S\}$. Кольцо AS^{-1} называется *правым кольцом частных* кольца A относительно правого множества Оре S .

Если множество всех неделителей нуля кольца A является правым множеством Оре, то A называется *правым кольцом Оре* и соответствующее правое кольцо частных называется *классическим правым кольцом частных* кольца A и обозначается $Q_{cl}(A)$, а кольцо A называется *правым порядком* в кольце $Q_{cl}(A)$.

Для любого подмножества B в A через BS^{-1} обозначается подмножество $\{bs^{-1} \mid b \in B, s \in S\}$ кольца AS^{-1} .

- А.** Если $q_1, \dots, q_n s_n^{-1} \in AS^{-1}$, то существуют такие элементы $s \in A$ и $a_1, \dots, a_n \in A$, что $q_i = a_i s^{-1}$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, отображение $\varphi : \sum_{i=1}^n Aq_i, f(x) = xs$ задает изоморфизм левого A -модуля $\sum_{i=1}^n Aq_i$ на n -порожденный левый идеал $\left(\sum_{i=1}^n Aq_i\right)s$ кольца A .
- В.** Если A — редуцированное кольцо, то AS^{-1} — редуцированное кольцо.
- С.** Кольцо A равномерно справа в точности тогда, когда AS^{-1} — равномерный правый A -модуль.
- Д.** Кольцо A равномерно справа в точности тогда, когда кольцо AS^{-1} равномерно справа. При этих условиях, если A — редуцированное кольцо, то A и AS^{-1} — области.
- Е.** Если кольцо A дистрибутивно справа, то кольцо AS^{-1} дистрибутивно справа.
- Ф.** Если A — дистрибутивно справа кольцо и AS^{-1} — локальное кольцо, то AS^{-1} — цепное справа кольцо, A — равномерное справа кольцо и правый A -модуль AS^{-1} равномерен.
- Г.** Если A — дистрибутивно справа редуцированное кольцо и AS^{-1} — локальное кольцо, то AS^{-1} — цепная справа область, A — равномерная справа область и правый A -модуль AS^{-1} равномерен.
- Н.** Если N — правый идеал кольца A и $q \in NS^{-1}$, то NS^{-1} — правый идеал кольца AS^{-1} и $qs \in N$ для некоторого $s \in S$.
- И.** Если X — правый идеал кольца AS^{-1} , то $X \cap A$ — правый идеал кольца A и $X = (X \cap A)S^{-1}$.
- Ж.** Если B и C — правые идеалы кольца A , то

$$(B + C)S^{-1} = BS^{-1} + CS^{-1}, \quad (B \cap C)S^{-1} = BS^{-1} \cap CS^{-1}.$$

- К.** Если $S = \{A \setminus M\}$, где M — собственный правый идеал кольца A , то кольцо A_S локально и $J(A_S) = M_S$.

При этих условиях, если кольцо A дистрибутивно справа, то A_S — цепное справа кольцо, A — равномерное справа кольцо, и правый A -модуль AS^{-1} равномерен.

Доказательство. **А.** Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Существуют такие элементы $d_i \in A$ и $s_i \in S$, что $q_i = d_i s_i^{-1}$, $i = 1, 2$. Так как S перестановочно справа, то существуют такие элементы $t_1 \in S$ и $t_2 \in A$, что $s_1 t_1 = s_2 t_2 \in S$. Введем обозначения $s = s_1 t_1 = s_2 t_2 \in S$, $a_i = d_i t_i \in A$, $i = 1, 2$. Тогда

$$s_i^{-1} = t_i s^{-1}, \quad a_i s^{-1} = d_i t_i s^{-1} = d_i s_i^{-1} (s_i t_i s^{-1}) = q_i, \quad i = 1, 2.$$

В. Пусть $as^{-1} \in AS^{-1}$ и $(as^{-1})(as^{-1}) = 0$, где $a \in A$ и $s \in S$. Достаточно доказать, что $as^{-1} = 0$. Так как $s^{-1}a = bt^{-1}$ для некоторых $b \in A$ и $t \in S$, то из равенства $(as^{-1})(as^{-1}) = 0$ следует, что

$ab = 0$. Согласно **1.3.1B** имеем $(AxA) \cap (AyA) = 0$. С другой стороны, из равенства $s^{-1}a = bt^{-1}$ следует, что $at = sb \in (AxA) \cap (AyA) = 0$. Поэтому $s^{-1}a = bt^{-1} = 0$, Тогда $a = 0$ и $as^{-1} = 0$.

С. Если AS^{-1} — равномерный правый A -модуль, то его подмодуль A_A тоже равномерен.

Обратно, пусть кольцо A равномерно справа и $\bar{x}, \bar{y}$ — ненулевые элементы кольца AS^{-1} . Согласно **A** существуют такие ненулевые элементы $x, y \in A$ и $s \in S$, что $\bar{x} = xs^{-1}$ и $\bar{y} = ys^{-1}$. Так как x, y — ненулевые элементы равномерного справа кольца A , то $xa = yb \neq 0$ для некоторых элементов $a, b \in A$. Поэтому $\bar{x}sa = xa = yb = \bar{y}sb \neq 0$ и AS^{-1} — равномерный правый A -модуль.

D. Если кольцо A равномерно справа, то по **C** правый A -модуль AS^{-1} равномерен. Поэтому кольцо AS^{-1} равномерно справа.

Обратно, пусть кольцо AS^{-1} равномерно справа и $0 \neq a, b \in A$. Существуют такие элементы $\bar{x}, \bar{y} \in AS^{-1}$, что $a\bar{x} = b\bar{y} \neq 0$. Согласно **A** существуют такие ненулевые элементы $x, y \in A$ и $s \in S$, что $\bar{x} = xs^{-1}$ и $\bar{y} = ys^{-1}$. Тогда $ays^{-1} = bys^{-1} \neq 0$. Поэтому $ay = by \neq 0$, и кольцо A равномерно справа. Оставшееся утверждение следует из **1.3.1F**.

E. Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in AS^{-1}$. Согласно **1.1.2** достаточно доказать существование таких элементов $\bar{a}, \bar{b} \in AS^{-1}$, что

$$1 = \bar{a} + \bar{b}, \quad \bar{x}\bar{a}AS^{-1} + \bar{y}\bar{b}AS^{-1} \subseteq \bar{x}AS^{-1} \cap \bar{y}AS^{-1}.$$

Согласно **A** существуют такие элементы $x, y \in A$ и $s \in S$, что $\bar{x} = xs^{-1}$ и $\bar{y} = ys^{-1}$. Так как кольцо A дистрибутивно справа, то по **1.1.2** существуют такие элементы $a, b \in A$, что $1 = a + b$, $xaA + ybA \subseteq xA \cap yA$. Введем обозначения $\bar{a} = sas^{-1}$, $\bar{b} = sbs^{-1}$. Тогда

$$1 = s(a + b)s^{-1} = sas^{-1} + sbs^{-1} = \bar{a} + \bar{b},$$

$$\begin{aligned} \bar{x}\bar{a}AS^{-1} + \bar{y}\bar{b}AS^{-1} &= (xs^{-1})(sas^{-1})AS^{-1} + (ys^{-1})(sbs^{-1})AS^{-1} = \\ &= xaAS^{-1} + ybAS^{-1} \subseteq (xA \cap yA)AS^{-1} \subseteq \bar{x}AS^{-1} \cap \bar{y}AS^{-1}. \end{aligned}$$

F. Согласно **E** кольцо AS^{-1} дистрибутивно справа. Согласно **1.2.2E** дистрибутивное справа локальное кольцо AS^{-1} является цепным справа кольцом. Согласно **C** и **D** кольцо A равномерно справа, и правый A -модуль AS^{-1} равномерен.

G. Согласно **B**, AS^{-1} является редуцированным кольцом. Согласно **F** достаточно доказать, что цепное справа редуцированное кольцо AS^{-1} является областью. Это вытекает из **1.3.1F**.

H. Если $q \in BS^{-1}$, то ясно, что $qs \in B$ для некоторого $s \in S$.

Докажем, что NS^{-1} — правый идеал кольца A_S . Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in NS^{-1}$ и $\bar{x} = xs_1^{-1}$, $\bar{y} = ys_2^{-1}$, где $x, y \in N$ и $s_1, s_2 \in S$. Согласно утверждению **A**, примененному к элементам s_1^{-1}, s_2^{-1} , существуют такие элементы $a, b \in A$ и $s \in S$, что

$$s_1^{-1} = as^{-1}, \quad s_2^{-1} = bs^{-1}.$$

Тогда

$$\bar{x} = (xa)s^{-1}, \quad \bar{y} = (yb)s^{-1},$$

где $xa, yb \in N$. Поэтому

$$\bar{x} + \bar{y} \in NS^{-1}.$$

Остается доказать, что $\bar{x}z = x(s_1^{-1}z) \in M_S$ для любого $z \in AS^{-1}$. Это следует из включений $x \in M$ и $s_1^{-1}z \in AS^{-1}$.

Утверждения **I**, **J** проверяются с помощью **A**.

K. Пусть $as^{-1} \in J(AS^{-1})$, где $a \in A$ и $s \in S$. Включение $a \in S$ невозможно, поскольку в этом случае обратимый элемент as^{-1} кольца A_S лежит в $J(A_S)$. Поэтому $a \in A \setminus \{A \setminus M\}$, $as^{-1} \in MS^{-1}$ и $J(AS^{-1}) \subseteq MS^{-1}$.

Теперь пусть $mt^{-1} \in M_S$, где $m \in M$ и $t \in S$. Тогда $t - m \in S$, поскольку в противном случае

$$t - m \in M, \quad t = (t - m) + m \in M \cap S = \emptyset.$$

Тогда элемент $1 - mt^{-1} = (t - m)t^{-1}$ обратим в A , причем MS^{-1} — правый идеал кольца AS^{-1} согласно **H**. Поэтому

$$MS^{-1} \subseteq J(A_S) \subseteq MS^{-1},$$

и каждый элемент из $J(AS^{-1}) = MS^{-1}$ обратим в AS^{-1} . Отсюда следует, что кольцо A_S локально и $J(A_S) = M_S$.

Допустим, что кольцо A дистрибутивно справа. Согласно **F**, AS^{-1} является цепным справа кольцом, A — равномерным справа кольцом, и правый A -модуль AS^{-1} равномерен. $\square$

1.3.3. Множества знаменателей и реверсивные множества. Пусть A — кольцо и S — непустое подмножество в A .

А. Реверсивные и слабо реверсивные множества. Множество S называется *реверсивным справа*, если для любых $a \in A$ и $s \in S$, удовлетворяющих условию $sa = 0$, существует такой элемент $s' \in S$, что $as' = 0$.

Множество S называется *слабо реверсивным справа*, если для любых $a \in A$ и $s \in S$, удовлетворяющих условию $sa = a^2 = 0$, существует такое $s' \in S$, что $as' = 0$.

Аналогично определяются (*слабо*) *реверсивные слева* множества.

В. Кольца частных. Множество S называется *множеством правых знаменателей* в кольце A , если существуют ненулевое кольцо AS^{-1} и кольцевой гомоморфизм $f_S \equiv f : A \rightarrow AS^{-1}$, что все элементы из $f(S)$ обратимы в AS^{-1} , причем

$$AS^{-1} = \{f(a)f(s)^{-1} \mid a \in A, s \in S\}, \quad \text{Ker } f = \{a \in A \mid as = 0 \text{ для некоторого } s \in S\}.$$

В этом случае AS^{-1} называется *правым кольцом частных* для A относительно S и f_S называется *каноническим кольцевым гомоморфизмом* для AS^{-1} .

Определение кольца AS^{-1} согласуется с определением из **1.3.2** правого кольца частных относительно правого множества Оре.

С. Определение множества левых знаменателей S , левого кольца частных $S^{-1}A$ и канонического кольцевого гомоморфизма ${}_S f : A \rightarrow {}_S A$ аналогично определению из **В.**

Множество S называется *двусторонним множеством знаменателей*, если существуют такие кольцо $S^{-1}AS^{-1}$ и кольцевой гомоморфизм $f : A \rightarrow S^{-1}AS^{-1}$, что все элементы из $f(S)$ обратимы в кольце $S^{-1}AS^{-1}$,

$$S^{-1}AS^{-1} = \{f(a)f(s)^{-1} \mid a \in A, s \in S\} = \{f(t)^{-1}f(a) \mid a \in A, t \in S\},$$

$$\text{Ker } f = \{a \in A \mid as = ta = 0 \text{ для некоторых } s, t \in S\}.$$

В этом случае $S^{-1}AS^{-1}$ называется *двусторонним кольцом частных* кольца A относительно S и гомоморфизм f называется *каноническим гомоморфизмом* для $S^{-1}AS^{-1}$.

Д. Непосредственно проверяется, что в любом кольце каждое центральное мультипликативно замкнутое подмножество, содержащее единицу и не содержащее нуля кольца A , является реверсивным перестановочным множеством двусторонних знаменателей.

1.3.4. Критерий существования AS^{-1} . Пусть A — кольцо и S — мультипликативно замкнутое подмножество в A , содержащее единицу и не содержащее нуля кольца A . Введем обозначение $K(S) = \{a \in A \mid as = 0 \text{ для некоторого } s \in S\}$. Следующие условия равносильны:

- (1) *существует правое кольцо частных AS^{-1} (т.е. S — множество правых знаменателей);*
- (2) *$K(S)$ — идеал в A , для естественного эпиморфизма $h : A \rightarrow A/K(S)$ множество $h(S)$ является правым множеством Оре в кольце $h(A)$;*
- (3) *S — перестановочное справа реверсивное справа множество;*
- (4) *S — перестановочное справа слабо реверсивное справа множество.*

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из **1.3.2**. Импликации (3) $\Rightarrow$ (4) и (3) $\Rightarrow$ (2) проверяются непосредственно.

(3) $\Rightarrow$ (4). Так как $K(S)$ — идеал в A , то S реверсивно справа. Пусть $a \in A$ и $s \in S$. Так как $h(S)$ — правое множество Оре в $h(A)$, то $h(at_1) = h(sb_1)$ для некоторых $b_1 \in A$ и $t_1 \in S$. Поэтому $at_1 - sb_1 \in K(S)$ и $(at_1 - sb_1)t_2 = 0$ для некоторого $t_2 \in S$. Введем обозначение $s' = t_1 t_2 \in S$ и $b = b_1 t_2$. Тогда $as' = sb$. Поэтому S перестановочно справа.

(4) $\Rightarrow$ (3). Пусть $a \in A$, $s \in S$ и $sa = 0$. Положим $b = as$. Тогда $b^2 = sb = 0$. По условию $x = 0$ для некоторого $x \in S$. Введем обозначение $s' = sx \in S$. Тогда $as' = 0$ и S реверсивно справа. $\square$

1.3.5. Свойства колец частных. Пусть A — кольцо, S — множество правых знаменателей в A , AS^{-1} — правое кольцо частных, $f : A \rightarrow AS^{-1}$ и $h : A \rightarrow A/\text{Ker } f$ — канонические кольцевые гомоморфизмы. Для любого подмножества B кольца A через B_S обозначается подмножество $\{f(b)f(s)^{-1} \mid b \in B, s \in S\}$.

- А.** Кольцо AS^{-1} совпадает с правым кольцом частных $h(A)h(S)^{-1}$ кольца $h(A)$ относительно его правого множества Оре $h(S)$, причем $f = \bar{f}h$, где $\bar{f} : h(A) \rightarrow h(A)h(S)^{-1}$ — вложение кольца $h(S)$ в свое правое кольцо частных $h(A)h(S)^{-1}$ относительно правого множества Оре $h(S)$.
- В.** Если N — правый идеал кольца A и $q \in N_S$, то N_S — правый идеал кольца A_S и $qs \in f(N)$ для некоторого $s \in S$. При этих условиях, если $q = h(a) \in h(A)$, то $at \in N$ для некоторого $t \in S$.
- С.** Если $q_1, \dots, q_n s_n^{-1} \in AS^{-1}$, то существуют такие элементы $s \in A$ и $a_1, \dots, a_n \in A$, что $q_i = a_i s^{-1}$, $i = 1, \dots, n$.
- Д.** Если X — правый идеал кольца AS^{-1} , то $X \cap h(A)$ — правый идеал кольца $h(A)$, полный прообраз X' которого в A — правый идеал кольца A и $X = X'_S$.
- Е.** Если B, C и D — правые идеалы кольца A , то

$$(B + C)_S = B_S + C_S, \quad (B \cap C)_S = B_S \cap C_S, \\ ((B + C) \cap D)_S = (B_S + C_S) \cap D_S, \quad (B \cap D + C \cap D)_S = B_S \cap D_S + C_S \cap D_S.$$

- Ф.** Если $S = \{A \setminus M\}$, где M — собственный правый идеал кольца A и $\text{Ker } f \subseteq M$, то кольцо A_S локально и $J(A_S) = M_S$.

Доказательство. Утверждение **А** следует из **1.3.4**.

В. Так как N — правый идеал кольца A , то $h(N)$ — правый идеал кольца $h(A)$, причем $AS^{-1} = h(A)h(S)^{-1}$ согласно **А**. Согласно **1.3.2Н**, N_S — правый идеал кольца A_S и $qs \in f(N)$ для некоторого $s \in S$. Допустим, что $q = h(a) \in h(A) \cap N_S$, где $a \in A$. Тогда $as \in N + \text{Ker } f$ для некоторого $s \in S$. Тогда $ass' \in N$ для некоторого $s' \in S$. Поэтому $at \in S$, где $t = ss' \in S$.

Утверждения **С**, **Ф** проверяются с помощью **А** и **1.3.2А**, **К**. Утверждения **Д**, **Е** проверяются с помощью **А** и **1.3.2Н**, **И**, **Ј**. $\square$

1.3.6. Кольца частных редуцированных колец. Пусть A — кольцо и S — перестановочное справа мультипликативно замкнутое подмножество в A , содержащее единицу и не содержащее нуля кольца A . Введем обозначение $K(S) = \{a \in A \mid as = 0 \text{ для некоторого } s \in S\}$.

- А.** S является множеством правых знаменателей в A , а ядро канонического кольцевого гомоморфизма $f : A \rightarrow AS^{-1}$ совпадает с $K(S)$. Если $h : A \rightarrow A/\text{Ker } f$ — канонический кольцевой эпиморфизм, то $h(A)$ — редуцированное кольцо и $h(A)h(S)^{-1} = AS^{-1}$ — правое кольцо частных кольца $h(A)$ относительно правого множества Оре $h(S)$.
- В.** Если A — дистрибутивное справа кольцо и $S = \{A \setminus M\}$, где M — собственный правый идеал кольца A , содержащий $\text{Ker } f$, то AS^{-1} — цепная справа область, $J(A_S) = M_S$, $A/\text{Ker } f$ — равномерная справа область и правый A -модуль AS^{-1} равномерен.

Доказательство. **А.** Так как A — редуцированное кольцо, то множество S слабо реверсивно справа. Согласно **1.3.4**, S — множество правых знаменателей и $K(S) = \text{Ker } f$ — идеал кольца A . Согласно **1.3.4**, $h(A)h(S)^{-1} = AS^{-1}$ — правое кольцо частных кольца $h(A)$ относительно правого множества Оре $h(S)$. Если $a \in A$ и $a^2 \in K(S)$, то $a^2 s = 0$ для некоторого $s \in S$. Согласно **1.3.1С**, $as = 0$, $a \in K(S)$ и $h(A)$ — редуцированное кольцо.

Утверждение **В** следует из **А** и **1.3.2Г**, **К**. $\square$

1.3.7. Предлокализуемые и локализуемые кольца. Локализации. Кольцо A называется *предлокализуемым справа*, если каждый его максимальный правый идеал M является идеалом и множество $\{A \setminus M\}$ перестановочно справа. Тогда $\{A \setminus M\}$ — непустое множество, содержащее единицу и не содержащее нуля кольца A . Так как фактор-кольцо A/M является телом, то множество $\{A \setminus M\}$ мультипликативно замкнуто.

Кольцо A называется *локализуемым справа*, если A предлокализуемо справа и для любого его максимального правого идеала M множество $\{A \setminus M\}$ слабо реверсивно справа. Согласно **1.3.4** для любого максимального правого идеала M локализуемого справа кольца A существует правое кольцо частных $A_{\{A \setminus M\}}$, которое мы называем *правой локализацией* кольца A по M и обозначаем через A_M для соответствия классическому коммутативному случаю.

- A.** Непосредственно проверяется, что *каждое коммутативное кольцо локализуемо и каждое инвариантное справа кольцо предлокализуемо справа*.
- B.** *Каждое дистрибутивное справа кольцо предлокализуемо справа* согласно **1.2.3E**.
- C.** В утверждении **V** из введения приведен пример предлокализуемого инвариантного дистрибутивного кольца, не являющегося локализуемым справа или слева.
- D.** *Если кольцо A предлокализуемо справа и для любого его максимального идеала M множество $\{A \setminus M\}$ слабо реверсивно справа, то кольцо A локализуемо справа* согласно **1.3.4**.
- E.** *Пусть кольцо A инвариантно справа. Если для любого его максимального идеала M множество $\{A \setminus M\}$ слабо реверсивно справа (это так, например, если A — редуцированное кольцо), то кольцо A локализуемо справа* согласно **A** и **D**.
- F.** *Пусть кольцо A дистрибутивно справа и для любого его максимального идеала M множество $\{A \setminus M\}$ слабо реверсивно справа. Тогда кольцо A локализуемо справа* согласно **B** и **D**. Согласно **1.2.2D**, A_M — цепное справа кольцо для любого $M \in \max A$ и $J(A_M) = M_M$.

1.3.8. Свойства локализуемых колец. Пусть A — локализуемое справа кольцо и $\max A$ — множество всех его максимальных (правых) идеалов. Для любого $M \in \max A$ и каждого подмножества B в A через f_M и B_M обозначаются канонический кольцевой гомоморфизм $A \rightarrow A_M$ и множество $\{f_M(b)f_M(s)^{-1} \mid b \in B, s \in A \setminus M\}$.

- A.** *Для любого $M \in \max A$ правая локализация A_M является локальным кольцом и $J(A_M) = M_M$.*
- B.** *Пусть $a \in A$ и N — правый идеал кольца A . Элемент a лежит в N в точности тогда, когда элемент a_M лежит в правом идеале N_M кольца A_M для любого $M \in \max A$. В частности, $a = 0$ в точности тогда, когда $a_M = 0_M$ для любого $M \in \max A$.*
- C.** *Если N и N' — правые идеалы кольца A , то равенство $N = N'$ равносильно тому, что $N_M = N'_M$ для любого $M \in \max A$.*
- D.** *Кольцо A дистрибутивно справа $\Leftrightarrow$ для каждого $M \in \max A$ кольцо A_M дистрибутивно справа $\Leftrightarrow$ для каждого $M \in \max A$ кольцо A_M является цепным справа (при последнем условии верно равенство $J(A_M) = M_M$).*
- E.** *A является редуцированным кольцом в точности тогда, когда A_M — редуцированное кольцо для каждого $M \in \max A$.*

Доказательство. Утверждение **A** следует из **1.3.5F**.

B. Если $a \in N$, то ясно, что $a_M \in N_M$ для любого $M \in \max A$. Допустим, что $a \notin N$. Тогда $(a \cdot N)$ — собственный правый идеал в A , лежащий в некотором $M \in \max A$. По условию $a_M \in B_M$. Согласно **1.3.5B**, $as \in N$ для некоторого $s \in S$. Поэтому $(a \cdot N)$ не содержится в M ; противоречие.

Утверждение **C** следует из **B**.

D. Первая эквивалентность вытекает из **1.3.5D**, **E.** Вторая эквивалентность вытекает из первой эквивалентности и **1.3.7F**.

Утверждение **E** проверяется с помощью второго утверждения из **B**. □

1.3.9. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A — дистрибутивное справа редуцированное кольцо;
- (2) кольцо A локализуемо справа и A_M — цепная справа область для каждого $M \in \max A_A$.

При условиях (1) и (2) имеем $J(A_M) = M_M$ для каждого $M \in \max A_A$.

Утверждение **1.3.9** вытекает из **1.3.8D**, **E** и **1.3.6B**.

1.3.10. Инвариантные полупервичные кольца. Пусть A — инвариантное справа полупервичное кольцо. Тогда A — локализуемое справа редуцированное кольцо.

Кольцо A арифметично в точности тогда, когда A_M цепная справа область для каждого $M \in \max A_A$.

1.3.11. Окончание доказательства теоремы 1С. Теорема 1С вытекает из 1.3.10.

ГЛАВА 2

КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫЕ МОДУЛИ И ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОСТЬ

Основными результатами данной главы являются теоремы 2А и 2В.

2А. Теорема (Е. С. Голод [4]). Если A — коммутативное кольцо, то A арифметично в точности тогда, когда $B + r(X) = r(X/XB)$ для каждого конечно порожденного A -модуля X и каждого идеала B кольца A .

2В. Теорема (А. А. Туганбаев [17]). Если A — инвариантное справа диагонализированное¹ кольцо, то $B + r(X) = r(X/XB)$ для каждого конечно порожденного правого A -модуля X и каждого идеала B кольца A .

Замечание. Ясно, что $B + r(X) \subseteq r(X/XB)$ для любого правого модуля X над произвольным кольцом A и каждого идеала B кольца A .

Замечание. Окончание доказательств теорем 2А и 2В см. в п. 2.1.6 и 2.2.4.

2.1. АННУЛЯТОРЫ И КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫЕ МОДУЛИ

2.1.1. Два замечания об арифметических кольцах. Пусть A — арифметическое кольцо и $B, C_1, \dots, C_n$ — идеалы кольца A .

А. $B + C_1 \cap \dots \cap C_n = (B + C_1) \cap \dots \cap (B + C_n)$.

В. Если $A_1, \dots, A_n$ — копии кольца A и X — правый A -модуль $A_1/C_1 \oplus \dots \oplus A_n/C_n$, то $B + r(X) = r(X/(XB))$.

Доказательство. А. Так как A — арифметическое кольцо, то утверждение проверяется непосредственно, с помощью индукции по n .

В. В нашем случае $B + r(X) = B + C_1 \cap \dots \cap C_n$ и $r(X/(XB)) = (B + C_1) \cap \dots \cap (B + C_n)$. Теперь применяем А. $\square$

2.1.2. Пусть A — кольцо и $(B + AcA) \cap (B + AdA) = B + (AcA) \cap (AdA)$ для каждого идеала B и любых элементов c, d кольца A . Тогда A — арифметическое кольцо.

Доказательство. Пусть B, C, D — идеалы кольца A и $b_1 + c = b_2 + d \in (B + C) \cap (B + D)$, где $b_1, b_2 \in B, c \in C$ и $d \in D$. По условию

$$b_1 + c \in B + (AcA) \cap (AdA) \subseteq B + C \cap D.$$

Поэтому

$$(B + C) \cap (B + D) \subseteq B + C \cap D.$$

Следовательно, A — арифметическое кольцо. $\square$

¹Определение диагонализированного кольца приведено в п. 2.2.1.

2.1.3. Критерий арифметичности инвариантных колец. Если A — инвариантное справа кольцо, то равносильны следующие условия:

- (1) A — арифметическое кольцо;
- (2) $B + r(X) = r(X/(XB))$ для любого правого A -модуля X , являющегося прямой суммой конечного числа циклических модулей;
- (3) $B + r(X) = r(X/(XB))$ для любого правого A -модуля X , являющегося прямой суммой двух циклически представимых модулей.

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) проверяется непосредственно.

(3) $\Rightarrow$ (1). Согласно **2.1.2** достаточно доказать, что $(B + AcA) \cap (B + AdA) = B + (AcA) \cap (AdA)$ для каждого идеала B и любых элементов c, d кольца A . Обозначим через X модуль $A_A/cA \oplus A_A/dA$, являющийся прямой суммой двух циклически представимых модулей. Так как A — инвариантное справа кольцо, то $AcA = cA$ и $AdA = A$. Непосредственно проверяется, что

$$B + r(X) = B + (AcA) \cap (AdA), \quad (B + AcA) \cap (B + AdA) = r(X/(XB)).$$

Кроме того, $B + r(X) = r(X/(XB))$ по условию. Поэтому

$$(B + AcA) \cap (B + AdA) = B + (AcA) \cap (AdA).$$

(1) $\Rightarrow$ (2). Так как A — инвариантное справа кольцо, то каждый циклический правый A -модуль изоморфен модулю A_A/C для некоторого двустороннего идеала C кольца A . Поэтому утверждение вытекает из **2.1.1B**. $\square$

2.1.4. Пусть A — кольцо и $B + r(X) = r(X/(XB))$ для каждого конечно представимого правого A -модуля X и каждого идеала B кольца A .

A. $B + r(X) = r(X/(XB))$ для каждого конечно порожденного правого A -модуля X и каждого идеала B кольца A .

B. Если кольцо A инвариантно справа, то A — арифметическое кольцо.

Доказательство. A. Пусть X — конечно порожденный правый A -модуль. Тогда $X \cong F/N$, где F — конечно порожденный свободный A -модуль и N — некоторый подмодуль в F . Пусть $\{N_i\}$ — множество всех конечно порожденных подмодулей в N . Тогда

$$N = \bigcup_i N_i, \quad M/MB \cong F/(N + FB) = F/\bigcup_i (N_i + FB).$$

Для каждого $i \in I$ обозначим через X_i конечно представимый модуль F/N_i . По условию $B + r(X)_i = r(X_i/(X_iB))$ для каждого конечно представимого модуля X_i . Кроме того, непосредственно проверяется, что

$$r(F/N) = \bigcup_i r(F/N_i).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} r(X/(XB)) &= r(F/(N + FB)) = \bigcup_i r(F/(N_i + FB)) = \bigcup_i (B + r(F/N_i)) = \\ &= B + \bigcup_i r(F/N_i) = B + r(F/N) = B + r(X). \end{aligned}$$

B. Согласно **A**, $B + r(X) = r(X/(XB))$ для каждого конечно порожденного правого A -модуля X и каждого идеала B в A . Согласно **2.1.3** кольцо A арифметично. $\square$

2.1.5. Теорема (см. [4]). Коммутативное кольцо A является арифметическим в точности тогда, когда $B + r(X) = r(X/(XB))$ для каждого конечно порожденного A -модуля X и каждого идеала B кольца A .

Доказательство. Для доказательства равенства $B + r(X) = r(X/(XB))$ для каждого конечно порожденного правого A -модуля X и каждого идеала B кольца A достаточно показать, что оно выполняется для локализации по любому максимальному идеалу кольца A . Поэтому кольцо A можно считать локальным. Согласно **1.2.2Е** коммутативное арифметическое локальное кольцо является цепным. Хорошо известно, что всякий конечно представимый модуль X над таким кольцом является прямой суммой конечного числа циклических модулей, $X \cong A/B_1 \oplus \cdots \oplus A/B_n$, где можно считать, что $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n$. Тогда

$$X/XB \cong A/(B + B_1) \oplus \cdots \oplus A/(B + B_n),$$

откуда $r(X/XB) = B + B_1 = B + r(X)$. □

2.1.6. Если A — инвариантное справа, правое кольцо Безу и X — конечная прямая сумма циклических правых A -модулей, то $B + r(X) = r(X/(XB))$ для любого идеала B кольца A .

Утверждение **2.1.6** вытекает из **2.1.3** и утверждения ППС из введения.

2.2. ДИАГОНАЛИЗИРУЕМЫЕ КОЛЬЦА

2.2.1. Диагонализированные матрицы и кольца. Прямоугольная матрица B над кольцом A называется *диагонализированной*, если существуют такие квадратные обратимые матрицы X и Y подходящих размеров, что $XB Y$ — диагональная матрица (т.е. все элементы a_{ij} матрицы $XB Y$ равны нулю при $i \neq j$).

Кольцо A называется *диагонализированным*, если каждая прямоугольная матрица над A диагонализирована. Кольцо целых чисел и коммутативные регулярные кольца являются примерами коммутативных диагонализированных колец.

Диагонализированные кольца изучались в большом числе работ. Здесь мы выделим только работу [83].

2.2.2. (см. [83, с. 477]). Из доказательства [83, Theorem 9.1] вытекает следующее хорошо известное утверждение: *каждый конечно представимый правый или левый модуль над диагонализированным кольцом является конечной прямой суммой циклически представимых модулей.*

2.2.3. Эрмитовы справа (слева) кольца. Кольцо A называется *эрмитовым справа*, если каждая строка (a, b) длины 2, где $a, b \in A$, диагонализирована, т.е. найдется такая обратимая (2×2) -матрица Y , что $(a, b)Y = (c, 0)$ для некоторого $c \in A$.

Кольцо A называется *эрмитовым слева*, если каждый столбец $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ высоты 2, где $a, b \in A$, диагонализирован, т.е. найдется такая обратимая (2×2) -матрица X , что $X \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ для некоторого $c \in A$.

Эрмитовы кольца изучались в большом числе работ. Здесь мы выделим только работы [25, 62, 63, 76, 83, 87, 114].

А. Ясно, что *каждое диагонализированное кольцо является эрмитовым справа и слева кольцом.*

В. *Каждое эрмитово справа кольцо A является правым кольцом Безу* (см. [83, с. 465]).

Действительно, пусть $a, b \in A$. По условию найдется такая обратимая (2×2) -матрица Y над A , что $(a, b)Y = (c, 0)$ для некоторого $c \in A$. Тогда $c = ay_{11} + by_{21} \in aA + bA$. Так как $(a, b) = (c, 0)Y^{-1}$, то $a, b \in cA$.

С. *Существует коммутативное редуцированное кольцо Безу A , не являющееся эрмитовым кольцом. В частности, A — недиагонализированное кольцо* (см. [63, Example 3.4]).

Д. *Все правые кольца Безу без делителей нуля являются эрмитовыми справа* (см. [25] или **4.1.5**).

Е. *Все коммутативные полунаследственные кольца Безу эрмитовы* (см. [87]).

Ф. В [83, Theorem 3.5] доказано, что кольцо A является эрмитовым справа в точности тогда, когда для каждой прямоугольной $(t \times n)$ -матрицы M над A существует такая обратимая $(t \times t)$ -матрица Y , что MY — нижняя треугольная матрица. Аналогично, кольцо A является эрмитовым справа в точности тогда, когда для каждой прямоугольной $(t \times n)$ -матрицы M над A существует такая обратимая $(n \times n)$ -матрица X , что XM — верхняя треугольная матрица.

2.2.4. Окончание доказательства теорем 2А и 2В. Теорема 2А следует из 2.1.5.

Докажем теорему 2В. Пусть A — инвариантное справа диагонализируемое кольцо. Согласно 2.2.3А, В, A — инвариантное справа правое кольцо Безу. Тогда A — арифметическое кольцо по утверждению ППС из введения. Пусть B — идеал кольца A и X — произвольный конечно представимый правый A -модуль. Согласно 2.2.2, X — конечная прямая сумма циклических модулей. Согласно 2.1.3, $B + r(X) = r(X/XB)$. Так как $B + r(X) = r(X/XB)$ для любого конечно представимого правого A -модуля X , то согласно 2.1.4А, $B + r(Y) = r(Y/(YB))$ для любого конечно порожденного правого A -модуля Y . $\square$

2.2.5. Открытый вопрос. Пусть A — инвариантное арифметическое кольцо и X — произвольное прямое слагаемое конечной прямой суммы циклических правых A -модулей. Верно ли, что $B + r(X) = r(X/(XB))$ для любого идеала B кольца A ?

2.2.6. Открытый вопрос. Пусть A — инвариантное арифметическое кольцо и X — произвольный конечно порожденный правый A -модуль. Верно ли, что $B + r(X) = r(X/(XB))$ для любого идеала B кольца A ?

ГЛАВА 3

КОЛЬЦА С ПЛОСКИМИ И КВАЗИПРОЕКТИВНЫМИ ИДЕАЛАМИ

Основными результатами данной главы являются теоремы 3А, 3В и 3С.

3А. Теорема (А. А. Туганбаев [8, 9, 14]). *Для инвариантного полупервичного кольца A равносильны следующие условия:*

- (1) A — арифметическое кольцо;
- (2) каждый подмодуль любого плоского A -модуля является плоским;
- (3) каждый конечно порожденный идеал кольца A является квазипроективным правым A -модулем.

3В. Теорема (К. Йенсен [78]). *Коммутативное кольцо A является арифметическим полупервичным кольцом в точности тогда, когда каждый подмодуль любого плоского A -модуля является плоским модулем.*

3С. Теорема (А. А. Туганбаев [14]). *Если A — инвариантное кольцо, то A является арифметическим кольцом в точности тогда, когда каждый его конечно порожденный идеал является квазипроективным правым A -модулем, у которого все эндоморфизмы продолжаются до эндоморфизмов модуля A_A .*

Замечание. Окончание доказательства теорем 3А, 3В и 3С приведено в п. 3.3.14.

3.1. ПЛОСКИЕ МОДУЛИ

3.1.1. Тензорные произведение модулей и бимодулей. Пусть A — кольцо, X_A и ${}_A Y$ — правый и левый A -модули соответственно, $X \times Y$ — декартово произведение, F — свободная абелева группа с базисом, состоящим из элементов $X \times Y$ и H — подгруппа в F , порожденная всеми элементами вида

$$(x + x', y) - (x, y) - (x', y), \quad (x, y + y') - (x, y) - (x, y'), \quad (xa, y) - (x, ay),$$

где $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$, $a \in A$. Абелева группа F/H называется *тензорным произведением* модулей X и Y и обозначается через $X \otimes_A Y$. Будем писать $X \otimes Y$ вместо $X \otimes_A Y$, если ясно, какое кольцо A имеется в виду. Образ пары (x, y) при естественном отображении $X \times Y \rightarrow X \otimes Y$ обозначается через $x \otimes y$. Если ${}_B X_A$ и ${}_A Y_C$ — бимодули, то группа $X \otimes_A Y$ естественным образом превращается в B - C -бимодуль, в котором умножение на $b \in B$ и $c \in C$ задается равенствами

$$b\left(\sum x_i y_i\right) = \sum b x_i y_i, \quad \left(\sum x_i y_i\right)c = \sum x_i y_i c.$$

В частности, $X \otimes_A Y$ является $\text{End } X$ - $\text{End } Y$ -бимодулем, а $X \otimes_A A$ — правым A -модулем.

Если X — правый A -модуль и X' — такой подмодуль в X , что естественный групповой гомоморфизм $X' \otimes_A Y \rightarrow X \otimes_A Y$ является мономорфизмом, то в этом случае можно рассматривать $X' \otimes_A Y$ как подгруппу в $X \otimes_A Y$.

Следующие свойства **A–I** тензорного произведения хорошо известны и проверяются непосредственно.

A. Для любого элемента x группы $X \otimes_A Y$ существует такое конечное множество индексов I , что $x = \sum_{i \in I} x_i \otimes y_i$.

B. Если $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ и $a \in A$, то

$$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y, \quad x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y', \quad xa \otimes y = x \otimes ay.$$

C. Если $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes_A Y$, то $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ в точности тогда, когда существуют такие конечные множества $\{\bar{x}_k \in X\}_{k=1}^m$ и $\{a_{ik} \in A\}$, что

$$1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq m, \quad x_i = \sum_{k=1}^m \bar{x}_k a_{ik}, \quad \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i = 0 \quad \forall i, k.$$

D. Для любых модульных гомоморфизмов $f : X_A \rightarrow M_A$ и $g : A Y \rightarrow {}_A N$ равенство

$$(f \otimes g)\left(\sum x_i \otimes y_i\right) = \sum f(x_i) \otimes g(y_i)$$

корректно задает групповой гомоморфизм $f \otimes g : X \otimes_A Y \rightarrow M \otimes_A N$.

E. Канонический групповой эпиморфизм $h : X \otimes_A A \rightarrow X$ является изоморфизмом естественного правого A -модуля $X \otimes_A A$ на модуль X_A .

F. Если $X_A = \bigoplus_{i \in I} X_i$, то существует естественный групповой изоморфизм группы $\left(\bigoplus_{i \in I} X_i\right) \otimes_A Y$ на группу $\bigoplus_{i \in I} (X_i \otimes_A Y)$.

G. Если P и Q — подмодули в ${}_A Y$, то пересечение в $X \otimes_A (P + Q)$ канонических образов модулей $X \otimes_A P$ и $X \otimes_A Q$ совпадает с каноническим образом $X \otimes_A (P \cap Q)$.

H. Если ${}_B X_A$, ${}_A Y_C$ и ${}_C Z_D$ — бимодули, то существует естественный B - D -бимодульный изоморфизм

$${}_B((X \otimes_A Y) \otimes_C Z)_D \rightarrow {}_B(X \otimes_A (Y \otimes_C Z))_D.$$

I. Если ${}_B X_A$, ${}_A Y_C$ и ${}_D Z_C$ — бимодули и ${}_B X'_A$ — подбимодуль в ${}_B X_A$, то существуют естественные B - D -бимодульные изоморфизмы

$$\begin{aligned} \alpha : \text{Hom}((X \otimes_A Y)_C, Z_C) &\rightarrow \text{Hom}(X_A, \text{Hom}(Y_C, Z_C)), \\ \beta : \text{Hom}((X' \otimes_A Y)_C, Z_C) &\rightarrow \text{Hom}(X'_A, \text{Hom}(Y_C, Z_C)) \end{aligned}$$

и естественные B - D -бимодульные гомоморфизмы

$$\begin{aligned} f : \text{Hom}((X \otimes_A Y)_C, Z_C) &\rightarrow \text{Hom}((X' \otimes_A Y)_C, Z_C), \\ g : \text{Hom}(X_A, \text{Hom}(Y_C, Z_C)) &\rightarrow \text{Hom}(X'_A, \text{Hom}(Y_C, Z_C)), \end{aligned}$$

причем $g\alpha = \beta f$. Поэтому если f — эпиморфизм, то g — эпиморфизм.

3.1.2. Плоские модули. Первый критерий. Правый модуль X над кольцом A называется *плоским*, если для любого мономорфизма левых A -модулей $Y' \rightarrow Y$ естественный групповой гомоморфизм $X \otimes_A Y' \rightarrow X \otimes_A Y$ является мономорфизмом.

Для правого модуля X над кольцом A равносильны следующие условия:

- (1) X — плоский модуль;
- (2) для каждого левого идеала Y в A канонический групповой эпиморфизм $X \otimes_A Y \rightarrow XY$ является изоморфизмом;
- (3) для каждого конечно порожденного левого идеала Y в A канонический групповой эпиморфизм $X \otimes_A Y \rightarrow XY$ является изоморфизмом;
- (4) для любых элементов $x_1, \dots, x_n \in X$ и $y_1, \dots, y_n \in A$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$, существуют такие элементы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \in X$ и $a_{ik} \in A$, что

$$1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq m, \quad x_i = \sum_{k=1}^m \bar{x}_k a_{ik}, \quad \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i = 0 \quad \forall i, k.$$

Доказательство. Эквивалентность условий (1), (2) и (3) проверяется с помощью **3.1.1С**.

(2) $\Rightarrow$ (4). Положим $Y = \sum_{i=1}^n A y_i \subseteq A$. Так как $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$, то согласно (2) имеем $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$.

Теперь применим **3.1.1С**.

(4) $\Rightarrow$ (2). Пусть Y — левый идеал в A , $h : X \otimes Y \rightarrow XY$ — канонический групповой эпиморфизм и $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in \text{Ker } h$. Тогда $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$ и существуют такие элементы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \in X$ и $a_{ik} \in A$, что

$$1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq m, \quad x_i = \sum_{k=1}^m \bar{x}_k a_{ik}, \quad \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \bar{x}_k a_{ik} \otimes y_i = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \bar{x}_k \otimes a_{ik} y_i = \sum_{k=1}^m \bar{x}_k \otimes 0 = 0.$$

Поэтому h — изоморфизм. □

3.1.3. Свойства плоских модулей.

A. Все прямые суммы и все прямые слагаемые плоских модулей являются плоскими.

B. Все свободные или проективные модули являются плоскими.

Доказательство. Утверждение **A** следует из **3.1.1F**.

B. Согласно **3.1.1E** и **3.1.2** все свободные циклические модули плоские. Так как каждый свободный модуль — прямая сумма свободных циклических модулей, то согласно **A** все свободные модули плоские. Поскольку каждый проективный модуль изоморфен прямому слагаемому свободного модуля, то согласно **A** все проективные модули плоские. □

3.1.4. Модули без кручения по Хаттори. Правый A -модуль X называется модулем *без кручения по Хаттори*, или модулем *без H -кручения*, если для любого $a \in A$ естественный групповой эпиморфизм $X \otimes Aa \rightarrow Xa$ является изоморфизмом (см. [74]).

Для правого модуля X над кольцом A равносильны следующие условия:

- (1) X — модуль без H -кручения;
- (2) в X каждый циклический подмодуль лежит в некотором подмодуле в X , являющемся модулем без H -кручения;
- (3) для любых элементов $x \in X$ и $a \in A$, удовлетворяющих условию $xa = 0$, найдутся такие элементы $x_1, \dots, x_n \in X$ и $a_1, \dots, a_n \in A$, что $x = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ и $a_i a = 0$ для всех i .

Доказательство. Эквивалентность $(1) \Leftrightarrow (2)$ проверяется непосредственно.

$(1) \Rightarrow (3)$. Допустим, что $xa = 0$, где $x \in X$ и $a \in A$. По условию $x \otimes a = 0$. Согласно **3.1.1С** $x = \sum_{j=1}^k x_j a_j$, где $x_j \in X$, $a_j \in A$ и $a_j a = 0$ для всех j . Поэтому X — модуль без H -кручения.

$(3) \Rightarrow (1)$. Допустим, что $\sum_{i=1}^n x_i b_i a = 0$, где $x_i \in X$ и $b_i \in A$. Положим $x \equiv \sum_{i=1}^n x_i b_i \in X$. Тогда $xa = 0$. Так как X — модуль без H -кручения, то $x = \sum_{j=1}^k x_j a_j$, где $x_j \in X$, $a_j \in A$ и $a_j a = 0$ для всех j . Тогда

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes b_i a = x \otimes a = \sum_{j=1}^k x_j a_j \otimes a = \sum_{j=1}^k x_j \otimes a_j a = \sum_{j=1}^k x_j \otimes 0 = 0. \quad \square$$

3.1.5. Свойства модулей без кручения по Хаттори.

A. Каждый плоский модуль является модулем без H -кручения.

B. Если X' — подмодуль правого модуля X над кольцом A , то X/X' является модулем без H -кручения в точности тогда, когда для любых элементов $x \in X$ и $a \in A$, удовлетворяющих условию $xa \in X'$, существуют такие элементы $x_1, \dots, x_n \in X$ и $a_1, \dots, a_n \in A$, что $x = \sum_{i=1}^n x_i a_i \in X'$ и $a_i a = 0$ для всех i .

C. Если a — элемент кольца A , то $(A/aA)_A$ является модулем без H -кручения в точности тогда, когда правый идеал aA порождается идемпотентом, т.е. A/aA — проективный A -модуль.

Доказательство. Утверждения **A**, **B** проверяются с помощью **3.1.4**.

C. Если A/aA — проективный A -модуль, то согласно **3.1.3B** A/aA — модуль без H -кручения.

Допустим, что A/aA — модуль без H -кручения. Так как $1 \cdot a \in aA$ и A/aA — правый A -модуль без H -кручения, то согласно **B** существуют такие $b, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n \in A$, что $1 = ab + \sum_{i=1}^n x_i a_i$ и $a_i a = 0$ для всех i . Тогда

$$a = \left(ab + \sum_{i=1}^n x_i a_i \right) a = aba.$$

Поэтому ab — идемпотент и $abA = aA$. □

3.1.6. Плоские модули. Второй критерий [77]. Для правого модуля X над кольцом A равносильны следующие условия:

- (1) X — плоский модуль;
- (2) X — модуль без H -кручения и $XB \cap XC = X(B \cap C)$ для любых левых идеалов B и C в A ;
- (3) X — модуль без H -кручения и $XB \cap XC = X(B \cap C)$ для любых конечно порожденных левых идеалов B и C в A ;
- (4) в модуле X каждый конечно порожденный подмодуль лежит в некотором плоском подмодуле из X .

Доказательство. Импликации $(2) \Rightarrow (3)$ и $(1) \Rightarrow (4)$ очевидны.

$(3) \Rightarrow (1)$. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и Y — k -порожденный левый идеал. Согласно **3.1.2** достаточно доказать, что канонический групповой эпиморфизм $f_Y : X \otimes Y \rightarrow XY$ является изоморфизмом.

Будем вести индукцию по k . При $k = 1$ утверждение следует из того, что M — модуль без H -кручения. Пусть $Y = B + C$ — k -порожденный левый идеал, где B — $(k-1)$ -порожденный левый идеал и C — главный левый идеал. Пусть

$$\begin{aligned} f_B : X \otimes B &\rightarrow XB, & f_C : X \otimes C &\rightarrow XC, & w : X \otimes A &\rightarrow XA, \\ h_B : X \otimes B &\rightarrow X \otimes Y, & h_C : X \otimes C &\rightarrow X \otimes Y, & g : X \otimes Y &\rightarrow X \otimes A \end{aligned}$$

— канонические групповые гомоморфизмы и пусть

$$p = \sum x_i \otimes (b_i - c_i) = \sum x_i \otimes b_i - \sum x_i \otimes c_i \in \text{Ker } f_Y,$$

$$b_i \in B, \quad c_i \in C, \quad q \equiv \sum x_i c_i \in XB, \quad s \in X \otimes B, \quad \sum x_i \otimes b_i = h_B(s).$$

Так как

$$0 = f_Y(p) = \sum x_i(b_i - c_i),$$

то

$$q = \sum x_i c_i \in XB \cap XC.$$

По условию $XB \cap XC = X(B \cap C)$. Поэтому $q = \sum u_j d_j$ для некоторых $u_j \in X$ и $d_j \in B \cap C$. Пусть $v \in X \otimes B$ и $\sum u_j \otimes d_j = h_B(v)$. Тогда

$$0 = f_Y \left(\sum u_j \otimes d_j - \sum x_i \otimes b_i \right) = wg(h_B(v - s)) = f_B(v - s),$$

откуда $v = s$, поскольку по предположению индукции f_B — мономорфизм. Тогда

$$\sum x_i \otimes b_i = h_B(s) = h_B(v) = \sum u_j \otimes d_j.$$

Аналогично,

$$\sum x_i \otimes c_i = \sum u_j \otimes d_j.$$

Поэтому

$$p = \sum x_i \otimes b_i - \sum x_i \otimes c_i = 0,$$

и f — изоморфизм.

(1) $\Rightarrow$ (2). Согласно **3.1.1G** пересечение в $X \otimes_A (B + C)$ канонических образов модулей $X \otimes_A B$ и $X \otimes_A C$ совпадает с каноническим образом $X \otimes_A (B \cap C)$. Применяя **3.1.2**, получим требуемое утверждение.

(4) $\Rightarrow$ (3). Согласно **3.1.4**, X — модуль без H -кручения. Пусть B и C — конечно порожденные левые идеалы и

$$x = \sum_{i=1}^n y_i b_i = \sum_{j=1}^m z_j c_j \in XB \cap XC, \quad y_i, z_j \in X, \quad b_i \in B, \quad c_j \in C.$$

Обозначим через Y подмодуль в X , порожденный всеми элементами y_i и z_j . Так как Y конечно порожден, то по предположению Y лежит в некотором плоском подмодуле M в X . Поэтому $x \in MB \cap MC$. Так как M — плоский модуль и импликация (1) $\Rightarrow$ (2) уже доказана, то

$$MB \cap MC = M(B \cap C) \subseteq X(B \cap C).$$

Поэтому $x \in X(B \cap C)$ и $XB \cap XC = X(B \cap C)$. □

3.1.7. Точные последовательности модулей. Последовательность модульных гомоморфизмов

$$\dots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

называется *точной в члене M_n* , если $f(M_{n-1}) = \text{Ker } f_n$ для всех n . Последовательность гомоморфизмов называется *точной*, если она точна в каждом своем члене.

С помощью **3.1.1** непосредственно проверяется, что *если*

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{g} X_3 \longrightarrow 0$$

— *точная последовательность правых A -модулей*, то

$$X_1 \otimes Y \xrightarrow{f \otimes 1} X_2 \otimes Y \xrightarrow{g \otimes 1} X_3 \otimes Y \longrightarrow 0$$

— *точная последовательность абелевых групп для любого левого A -модуля Y* . В частности, $g \otimes 1$ является эпиморфизмом и

$$X_3 \otimes Y \cong (X_2 \otimes Y) / (f \otimes 1)(X_1 \otimes Y).$$

3.1.8. Плоские модули. Третий критерий. Пусть P — плоский правый модуль над кольцом A и Q — подмодуль в P . Следующие условия (1)–(5) равносильны:

- (1) P/Q — плоский модуль;
- (2) для любого конечно порожденного левого идеала B в A естественный групповой эпиморфизм $PB/QB \rightarrow (P/Q)B$ является изоморфизмом;
- (3) для любого левого идеала B в A естественный групповой эпиморфизм $PB/QB \rightarrow (P/Q)B$ является изоморфизмом;
- (4) $Q \cap PB = QB$ для любого конечно порожденного левого идеала B кольца A ;
- (5) $Q \cap PB = QB$ для любого левого идеала B в A .

При выполнении условий (1)–(5) Q — плоский модуль.

Доказательство. Согласно **3.1.7** последовательность

$$Q \otimes B \longrightarrow P \otimes B \longrightarrow (P/Q) \otimes B \longrightarrow 0$$

точна. Так как P — плоский модуль, то согласно **3.1.2** канонический эпиморфизм $P \otimes B \rightarrow PB$ является изоморфизмом, отображающим $Q \otimes B$ на QB . Поэтому $(P/Q)B \cong PB/QB$. Согласно **3.1.2**, P/Q — плоский модуль в точности тогда, когда канонический эпиморфизм $(P/Q) \otimes B \rightarrow (P/Q)B$ является изоморфизмом для любого (конечно порожденного) левого идеала B . Из изложенного выше следует эквивалентность условий (1), (2) и (3).

Эквивалентность условий (1), (4) и (5) следует из эквивалентности условий (1), (2), (3) и того факта, что

$$(P/Q)B = (PB + Q)/Q \cong PB/(Q \cap PB).$$

(5) $\Rightarrow$ (1). Надо доказать, что Q — плоский модуль. Так как P — плоский модуль, то согласно **3.1.6**, P — модуль без H -кручения и $PB \cap PC = P(B \cap C)$. Отсюда и из (5) следует, что

$$QB \cap QC = Q \cap PB \cap PC = Q \cap P(B \cap C) = Q(B \cap C).$$

Согласно **3.1.6** достаточно доказать, что Q — модуль без H -кручения. Пусть $qa = 0$, где $q \in Q$ и $a \in A$. Так как P — модуль без H -кручения, то существуют такие элементы $p_1, \dots, p_n \in P$ и $d_1, \dots, d_n \in A$, что $q = \sum_{i=1}^n p_i d_i$ и $d_i a = 0$ для всех i . Пусть $D = \sum_{i=1}^n A d_i$. Тогда $q \in Q \cap PD$ и поэтому $q \in QD$ согласно (5). Тогда существуют такие элементы $q_1, \dots, q_n \in Q$, что $q = \sum_{i=1}^n q_i d_i$. Так как $d_i a = 0$ для всех i , то Q — модуль без H -кручения. $\square$

3.1.9. Плоские модули. Четвертый критерий. Пусть Y — подмодуль свободного правого модуля X над кольцом A . Следующие условия равносильны:

- (1) X/Y — плоский модуль;
- (2) для любого $y \in Y$ существует такой гомоморфизм $h : X \rightarrow Y$, что $h(y) = y$;
- (3) для любого конечного подмножества $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq Y$ существует такой гомоморфизм $h : X \rightarrow Y$, что $h(y_i) = y_i$ для всех $y_1, \dots, y_n$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\{x_i\}_{i \in I}$ — базис свободного модуля X_A , $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \{x_i\}_{i \in I}$ и $y = \sum_{i=1}^n x_i a_i$, где $a_1, \dots, a_n \in A$. Введем обозначение $B = \sum_{i=1}^n A a_i$. Так как $y \in Y \cap XB$ и

согласно **3.1.8** $Y \cap XB = YB$, то $y = \sum_{i=1}^k y_i b_i$ для некоторых элементов $y_1, \dots, y_k \in Y$ и $b_1, \dots, b_k \in B$. Существует такой гомоморфизм $h : X \rightarrow X$, что $h(x_i) = y_i$ для всех $i = 1, \dots, k$ и $h(x_i) = 0$ для всех $i \in I \setminus \{1, \dots, k\}$. Тогда $h(X) \subseteq Y$ и $h(y) = y$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Будем вести индукцию по n . При $n = 1$ утверждение следует из (2). Допустим, что $n > 1$. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — такой гомоморфизм, что $f(y_n) = y_n$. По предположению индукции существует такой гомоморфизм $\varphi : X \rightarrow Y$, что $\varphi(y_i - f(y_i)) = y_i - f(y_i)$ для всех $i = 1, \dots, n-1$. Поэтому

$$(1_X - \varphi)(1_X - f)(y_n) = (1_X - \varphi)(y_n - y_n) = 0.$$

Для любого $i < n$ получаем, что

$$(1_X - \varphi)(1_X - f)(y_i) = (1_X - \varphi)(y_i - f(y_i)) = 0.$$

Введем обозначение $h = 1_X - (1_X - \varphi)(1_X - f) \in \text{End}(X)$. Тогда h обладает нужными свойствами.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть B — конечно порожденный правый идеал в A и $y = \sum_{i=1}^n x_i b_i \in Y \cap XB$, где $x_i \in X$ и $b_i \in B$. По условию существует такой гомоморфизм $h : X \rightarrow Y$, что $y = h(y)$. Тогда $y = h(y) = \sum_{i=1}^n h(x_i) b_i \in YB$, откуда $Y \cap XB = YB$. Согласно 3.1.8, X/Y — плоский модуль. $\square$

3.1.10. Если M — конечно представимый плоский модуль, то M — проективный модуль.

Доказательство. Пусть $M \cong F/Q$, где F — конечно порожденный свободный модуль и Q порождается элементами $q_1, \dots, q_n$. Согласно 3.1.9 существует такой гомоморфизм $h : F \rightarrow Q$, что $h(q_i) = q_i$ для всех i . Тогда $h(q) = q$ для любого $q \in Q$. Поэтому M изоморфен прямому слагаемому свободного модуля F . $\square$

3.1.11. Модули частных. Пусть Q — правое кольцо частных кольца A относительно множества правых знаменателей S , $f : A \rightarrow Q$ — канонический кольцевой гомоморфизм и M — правый A -модуль.

На декартовом произведении $M \times S$ определим отношение $\sim$ так, что

$$(x, s) \sim (y, t) \iff \exists c, d \in A : xc = yd, \quad sc = td \in S.$$

Легко проверить, что $\sim$ — отношение эквивалентности на $M \times S$.

Пусть h — естественное сюръективное отображение

$$M \times S \rightarrow (M \times S) / \sim \equiv MS^{-1}$$

и g_S — такое отображение из M в MS^{-1} , что $g_S(m) = h(m, 1)$. В MS^{-1} определим сложение и умножение на элементы из Q равенствами

$$h((x, s)) + h((y, t)) = h((xc + yd, u)), \quad u = sc = td \in S, \quad h((x, c)) \cdot f(b)f(t)^{-1} = h((xc, tu)),$$

где $b \in A$, $t \in S$, $sc = bu$ и $u \in S$.

Непосредственно проверяется, что MS^{-1} — правый Q -модуль, $g_S \equiv g$ — A -модульный гомоморфизм,

$$\text{Ker } g = \{m \in M \mid \exists s \in S : ms = 0\}, \quad MS^{-1} = \{g(m)f(s)^{-1} \mid m \in M, s \in S\}.$$

Правый Q -модуль MS^{-1} называется *модулем частных* для M относительно S .

A -Модульный гомоморфизм $g_S : M \rightarrow MS^{-1}$ называется *каноническим* гомоморфизмом.

Для каждого подмодуля X в A -модуле M обозначим через $\overline{X}$ и XS^{-1} естественный образ модуля X в A -модуле $M/\text{Ker } g$ и подмодуль $g(X)Q$ в Q -модуле MS^{-1} .

A. Правилom

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n m_i \otimes q_i\right) = \sum_{i=1}^n g(m_i)q_i$$

корректно задается изоморфизм правых Q -модулей $\varphi : M \otimes_A AS^{-1} \rightarrow MS^{-1}$.

B. Для любых $x_1, \dots, x_n \in MS^{-1}$ существуют такие $s \in S$ и $m_1, \dots, m_n \in M$, что $x_i = g(m_i)f(s)^{-1}$ при $i = 1, \dots, n$.

C. Если X — подмодуль в M и $\overline{X}$ — S -насыщение модуля X в M , то

$$XS^{-1} = \overline{X}S^{-1} = \{g(x)f(t)^{-1} \mid x \in X, t \in S\}.$$

Поэтому для любого $y \in XS^{-1}$ существует такое $s \in S$, что $yf(s) \in g(X)$.

D. Если W — подмодуль в Q -модуле MS^{-1} и $X \equiv g^{-1}(W \cap g(M))$ — подмодуль A -модуля M , то $XS^{-1} = W$, $X \supseteq \text{Ker } g$ и X — S -насыщенный подмодуль в M . Соответствие $X \rightarrow XS^{-1}$ является сохраняющей включение биекцией между множеством всех S -насыщенных подмодулей A -модуля M и множеством всех подмодулей Q -модуля MS^{-1} .

Е. Пусть X и Y — подмодули в M_A . Тогда

$$(X + Y)S^{-1} = XS^{-1} + YS^{-1}, \quad (X \cap Y)S^{-1} \subseteq XS^{-1} \cap YS^{-1}.$$

Кроме того, если $\text{Ker } g \subseteq X \cap Y$, то

$$(X \cap Y)S^{-1} = XS^{-1} \cap YS^{-1}.$$

Поэтому отображение $\overline{X} \rightarrow XS^{-1}$ — сюръективный решеточный гомоморфизм решетки всех подмодулей A -модуля $M/\text{Ker } g$ на решетку всех подмодулей Q -модуля MS^{-1} . Следовательно, если M — дистрибутивный (соответственно, нётеров, артинов) A -модуль, то MS^{-1} — дистрибутивный (соответственно, нётеров, артинов) Q -модуль.

Ф. Если t — кардинальное число и X — t -порожденный подмодуль в M_A , то XS^{-1} — t -порожденный подмодуль Q -модуля MS^{-1} . Следовательно, если в A -модуле M все подмодули t -порождены, то в Q -модуле MS^{-1} все подмодули t -порождены. В частности, если M — A -модуль Безу, то MS^{-1} — Q -модуль Безу. Кроме того, для любого t -порожденного подмодуля P_Q в $(MS^{-1})_Q$ существует такой t -порожденный подмодуль X в M_A , что $XS^{-1} = P$.

Г. Если $P_Q = \bigoplus_{i=1}^n P_i$ — подмодуль Q -модуля MS^{-1} , то подмодуль $P \cap g(M)$ модуля $g(M)_{f(A)}$ является прямой суммой модулей $P_i \cap g(M)$.

Н. AQ — плоский модуль.

И. $(X/Y)S^{-1} \cong XS^{-1}/YS^{-1}$ для любых подмодулей X в M и Y в X .

Ж. Если $m \in M$ и X — подмодуль в M , то $g(m) \in g(X)Q$ в точности тогда, когда $ms \in X$ для некоторого $s \in S$.

К. Если M_A — свободный (соответственно, проективный, плоский) модуль, то $(MS^{-1})_Q$ свободный (соответственно, проективный, плоский) модуль.

Л. Если $m \in M$ и X — подмодуль в M , то $f((m \cdot X))Q \subseteq (g(mA)Q \cdot g(X)Q)$.

М. Если t — кардинальное число и все t -порожденные правые идеалы кольца A являются свободными (соответственно, проективными, плоскими) A -модулями, то все t -порожденные правые идеалы кольца Q — свободные (соответственно, проективные, плоские) Q -модули. В частности, если A полунаследственно справа, то Q полунаследственно справа.

Доказательство. Утверждение **А** проверяется непосредственно.

В. По определению модуля частных MS^{-1} существуют такие элементы $s_1, \dots, s_n \in S$ и $y_1, \dots, y_n \in M$, что $x_i = g(y_i)f(s_i)^{-1}$ при $i = 1, \dots, n$. Согласно **1.3.5С** существуют такие элементы $s \in S$ и $a_1, \dots, a_n \in A$, что $f(s_i)^{-1} = f(a_i)f(s)^{-1}$ при $i = 1, \dots, n$. Если положить $m_i = y_i a_i$, то

$$x_i = g(y_i)f(s_i)^{-1} = g(y_i)f(a_i)f(s)^{-1} = g(m_i)f(s)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Утверждение **С** следует из **В** и **1.2.1С**. Утверждение **Д** следует из **В**, **С** и **1.2.1С**.

Е. Ясно, что

$$(X \cap Y)S^{-1} \subseteq XS^{-1} \cap YS^{-1}.$$

Пусть $w_1 \in XS^{-1} + YS^{-1}$. Согласно **В** существуют такие элементы $x_1 \in X$, $y_1 \in Y$ и t , что

$$w_1 = g(x_1)f(t)^{-1} + g(y_1)f(t)^{-1} = g(x_1 + y_1)f(t)^{-1} \in (X + Y)S^{-1}.$$

Поэтому

$$XS^{-1} + YS^{-1} \subseteq (X + Y)S^{-1} \subseteq XS^{-1} + YS^{-1}.$$

Допустим, что $\text{Ker } g \subseteq X \cap Y$ и $w_2 \in XS^{-1} \cap YS^{-1}$. Согласно **В** имеем

$$w_2 = g(x_2)f(u)^{-1} = g(y_2)f(u)^{-1}$$

для некоторых $x_2 \in X$, $y_2 \in Y$ и $u \in S$. Тогда

$$g(x_2) = g(y_2), \quad x_2 - y_2 \in \text{Ker } g \subseteq X \cap Y, \quad x_2 v = y_2 v \in X \cap Y$$

для некоторого $v \in S$. Тогда

$$w_2 = g(x_2 v)f(u)^{-1}f(t)^{-1} \in (X \cap Y)S^{-1}.$$

Утверждение **Ф** проверяется с помощью **В** и **С**. Утверждение **Г** проверяется с помощью **Е**.

Н. Пусть $h : X_A \rightarrow M_A$ — мономорфизм правых A -модулей, $x \in X$ и $g(h(x)) = 0$. Тогда $h(x)s = 0$ для некоторого $s \in S$, откуда $xs \in \text{Ker } h = 0$ и $(xA)S^{-1} = 0$, что и требовалось.

Утверждение **I** следует из **Н** и того факта, что $(XS^{-1})_B \cong (X \otimes_A Q)_Q$ для любого модуля X_A .

Ж. Если $ms \in X$ для некоторого $s \in S$, то $g(m)f(s) \in g(X)$ и

$$g(m) \in g(X)f(s)^{-q} \subseteq g(X)Q.$$

Теперь допустим, что $g(m) \in g(X)Q$. Согласно **С** имеем $g(m) = g(x)f(t)^{-1}$ для некоторых $x \in X$ и $t \in S$. Тогда $g(mt) = g(x)$. Так как $mt - x \in \text{Ker } g$, то $(mt - x)u = 0$ для некоторого $u \in S$. Положим $s = tu \in S$. Тогда $ms = mtu = xu \in X$.

К. Так как Q_Q свободен, то утверждение следует из **3.1.1Н** и равенства $MS^{-1} = M \otimes_A Q$.

Л. Пусть $y \in (g(m)Q \cap g(X)Q)$. Тогда $y = f(a)f(s)^{-1}$ для некоторых $a \in A$ и $s \in S$. Тогда

$$g(ma) = g(m)f(a)f(s)^{-1}f(s) \in g(m)yQ \subseteq g(X)Q.$$

Согласно **Ж**, $mat \in X$ для некоторого $t \in S$. Тогда $at \in (m \cap X)$ и

$$y = f(at)f(t)^{-1}f(s)^{-1} \in f((m \cap X))Q.$$

Утверждение **М** следует из **К** и **Л**. □

3.2. ПЛОСКИЕ ИДЕАЛЫ И ПОДМОДУЛИ

3.2.1. Все подмодули модуля X — модули без H -крючения в точности тогда, когда все циклические подмодули в X — без H -крючения.

Все подмодули в X — плоские модули в точности тогда, когда все конечно порожденные подмодули в X — плоские.

Первое утверждение следует из **3.1.4**, а второе — из **3.1.6**.

3.2.2. Теорема о плоских подмодулях. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) все подмодули плоских правых A -модулей плоские;
- (2) все подмодули плоских левых A -модулей плоские;
- (3) в A все правые идеалы плоские;
- (4) в A все левые идеалы плоские;
- (5) в A все конечно порожденные правые идеалы плоские;
- (6) в A все конечно порожденные левые идеалы плоские;
- (7) в A для любого конечно порожденного правого идеала X и каждого конечно порожденного левого идеала Y естественный групповой гомоморфизм $X \otimes Y \rightarrow XY$ является изоморфизмом.

Доказательство. Так как условие (7) лево-право симметрично, то достаточно доказать эквивалентность условий (1), (3), (5) и (7).

Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) следует из того факта, что согласно **3.1.3В**, A_A является плоским правым модулем.

Эквивалентность (3) $\Leftrightarrow$ (5) следует из **3.2.1**. Эквивалентность (5) $\Leftrightarrow$ (7) следует из **3.1.2**.

(7) $\Rightarrow$ (1). Пусть X — подмодуль плоского модуля M_A , $f : X \rightarrow M$ — естественное вложение, Y — конечно порожденный левый идеал в A . Согласно лево-право симметричному аналогу **3.1.2**, AY — плоский модуль. Поэтому $f \otimes 1$ — мономорфизм. Допустим, что $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$, где $x_1, \dots, x_n \in X$ и $y_1, \dots, y_n \in Y$. Так как M — плоский модуль, то согласно **3.1.2** естественный групповой эпиморфизм $M \otimes Y \rightarrow MY$ является изоморфизмом. Поэтому

$$(f \otimes 1) \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) = 0.$$

Так как $f \otimes 1$ — мономорфизм, то $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$. Поэтому естественный групповой эпиморфизм $X \otimes Y \rightarrow XY$ — изоморфизм. Согласно **3.1.2**, X — плоский модуль. □

3.2.3. Плоские главные правые идеалы и PF кольца. Кольцо A называется *PF* кольцом, если для любых элементов $x, y \in A$, удовлетворяющих условию $xy = 0$, существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $xa = 0$ и $by = 0$.

- A.** Если x — элемент кольца A , то главный правый идеал xA является плоским A -модулем в точности тогда, когда для любого $y \in A$, удовлетворяющего условию $xy = 0$, существуют такие $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $xa = 0$ и $by = 0$.
- B.** Кольцо A является *PF* кольцом в точности тогда, когда все его главные правые идеалы являются плоскими правыми A -модулями.
- C.** Кольцо A является *PF* кольцом в точности тогда, когда все его главные левые идеалы являются плоскими левыми A -модулями.
- D.** Если A — унитарное подкольцо локального кольца Q , то A является *PF* кольцом в точности тогда, когда A — область.
- E.** Если A — *PF* кольцо и S — правое множество Оре в A , то правое кольцо частных AS^{-1} является *PF* кольцом.
- F.** Если A — коммутативное *PF* кольцо, то A — редуцированное кольцо.

Доказательство. **A.** Так как $xA \cong A_A/r(x)$ и $\text{Hom}(A_A, r(x))$ можно отождествить с $r(x)$, то, согласно **3.1.9**, xA является плоским модулем в точности тогда, когда для любого элемента $y \in r(x)$ существует такой элемент $a \in r(x)$, что $y = ay$. Отсюда следует **A**.

Утверждение **B** следует из **A**. Утверждение **C** следует из **B** и того факта, что свойство быть *PF* кольцом лево-право симметрично.

D. Если A — область, то все ее ненулевые главные правые идеалы свободны и A — *PF* кольцо.

Допустим, что A — *PF* кольцо, $x, y \in A$ и $xy = 0$. Согласно **3.2.3** существуют такие $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $xa = 0$ и $by = 0$. Так как $a + b = 1$ и a, b — элементы локального кольца Q , то хотя бы один из элементов a, b обратим в Q и поэтому является делителем нуля в A . Если a не является делителем нуля, то $x = 0$, поскольку $xa = 0$. Если b не является делителем нуля, то $y = 0$, поскольку $by = 0$.

E. Пусть $p, q \in AS^{-1}$ и $pq = 0$. Согласно **1.3.2A** можно считать, что

$$p = xs^{-1}, \quad q = zs^{-1},$$

где $x, z \in A$ и $s \in S$. Тогда $xs^{-1}z = 0$. Существуют такие элементы $y \in A$ и $t \in S$, что $s^{-1}z = yt^{-1}$. Тогда $xy = 0$. Так как A — *PF* кольцо, то существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $xa = 0$, $by = 0$. Поэтому $ps = xs^{-1}sa = 0$, откуда $p(sas^{-1}) = 0$. Кроме того, $0 = byt^{-1} = bs^{-1}z$, откуда

$$(sbs^{-1})q = s(bs^{-1}z)s^{-1} = 0.$$

Поскольку $sas^{-1} + sbs^{-1} = 1$, то AS^{-1} — *PF* кольцо.

F. Пусть $x \in A$ и $x^2 = 0$. Так как A — коммутативное *PF* кольцо, то существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $xa = 0$ и $bx = xb = 0$. Поэтому $x = x(a + b) = 0$. $\square$

3.2.4. Пусть A — редуцированное кольцо и $x \in A$. Следующие условия равносильны:

- (1) xA_A — плоский модуль;
- (2) для любого элемента $y \in A$, удовлетворяющего условию $(Ax)A \cap (Ay)A = 0$, существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$ и $xa = yb = 0$;
- (3) $xA \oplus yA = (x + y)A$ для любого элемента $y \in A$, удовлетворяющего условию $AxA \cap AyA = 0$;
- (4) $xA \oplus yA$ — главный правый идеал для любого элемента $y \in A$ с условием $AxA \cap AyA = 0$.

Доказательство. Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) вытекает из **3.2.3A**.

(2) $\Rightarrow$ (3). Достаточно доказать, что $x \in (x + y)A$ и $y \in (x + y)A$. Согласно (2) существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$ и $xa = yb = 0$. Тогда

$$x = x(a + b) = xb = (x + y)b \in (x + y)A,$$

$$y = y(a + b) = ya = (x + y)a \in (x + y)A.$$

Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) проверяется непосредственно.

(4) $\Rightarrow$ (2). Согласно (4) $xA \oplus yA = zA$. Существуют такие элементы $f, g \in A$, что $z = xf + yg$. Тогда существуют такие элементы $u, v \in A$, что $x = (xf + yg)u$ и $y = (xf + yg)v$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} x(1 - fu) &= ygu \in xA \cap yA = 0, \\ y(1 - gv) &= xfv \in xA \cap yA = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $x = xfu$ и $v \in r(xf)$. Положим $b = 1 - gv$ и $a = 1 - b = gv$. Тогда $yb = 0$. Так как $v \in r(xf)$, то, согласно **1.3.1D**, $ugv \in r(xf)$. Поэтому $xa = xfa = xfgv = 0$. $\square$

3.2.5. PF кольца без нильпотентных элементов. Пусть A — редуцированное кольцо. Следующие условия равносильны:

- (1) A — PF кольцо;
- (2) для любых элементов $x, y \in A$, удовлетворяющих условию $AxA \cap AyA = 0$, существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $AxA \cap AaA = 0$ и $AbA \cap AyA = 0$;
- (3) для любых элементов $x, y \in A$, удовлетворяющих условию $AxA \cap AyA = 0$, существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $xa = 0$ и $yb = 0$;
- (4) 2-порожденный правый идеал $xA \oplus yA$ совпадает с главным правым идеалом $(x + y)A$ для любых таких элементов $x, y \in A$, что $AxA \cap AyA = 0$;
- (5) $(x + y)A = (x + y)A \cap xA \oplus (x + y)A \cap yA$ для любых таких элементов $x, y \in A$, что $AxA \cap AyA = 0$;
- (6) для любого множества правых знаменателей S кольца A правое кольцо частных AS^{-1} является PF кольцом;
- (7) 2-порожденный правый идеал $xA \oplus yA$ является главным для любых таких элементов $x, y \in A$, что $AxA \cap AyA = 0$;
- (8) 2-порожденный левый идеал $Ax \oplus Ay$ является главным для любых двух элементов $x, y \in A$, удовлетворяющих условию $(Ax) \cap (Ay) = 0$.

Доказательство. Эквивалентность условий (1), (2) и (3) следует из **3.2.3** и **1.3.1B**.

(3) $\Rightarrow$ (5). Пусть $x, y \in A$ и $AxA \cap AyA = 0$. Согласно (3) существуют такие $a, b \in A$, что

$$a + b = 1, \quad xa = 0, \quad yb = 0, \quad (x + y)A = (x + y)bA + (x + y)aA = xbA \oplus yaA.$$

Поэтому

$$(x + y)A = (x + y)A \cap xA \oplus (x + y)A \cap yA.$$

(5) $\Rightarrow$ (4). Пусть $h_x : xA \oplus yA \rightarrow xA$ и $h_y : xA \oplus yA \rightarrow yA$ — естественные проекции. По условию

$$(x + y)A = h_x((x + y)A) \oplus h_y((x + y)A).$$

Поэтому

$$x = h_x(x + y) \in (x + y)A, \quad y = h_y(x + y) \in V, \quad (x + y)A = xA \oplus yA.$$

Импликация (4) $\Rightarrow$ (7) очевидна.

(7) $\Rightarrow$ (3). По условию существуют такие $s, t, u, v \in A$, что $x = (xs + yt)u$ и $y = (xs + yt)v$. Так как $AxA \cap AyA = 0$, то $x = xsu$ и $0 = xsv = y(1 - tv) = yb$, где $b \equiv 1 - tv$. Положим $a = 1 - b = tv \in A$. Так как $v \in r(xs)$, то, согласно **1.3.1B**, $utv \in r(xs)$ и $xa = xsua = xsutv = 0$. Доказано существование таких $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $xa = 0$ и $yb = 0$.

Импликация (6) $\Rightarrow$ (1) следует из того факта, что A является правым кольцом частных самого себя относительно множества $S = \{1\}$.

(1) $\Rightarrow$ (6). Пусть $f : A \rightarrow AS^{-1}$ — канонический кольцевой гомоморфизм с ядром $K = \{a \in A \mid as = 0 \text{ для некоторого } s \in S\}$ и $h : A \rightarrow A/K$ — естественный эпиморфизм. Согласно **1.3.6A**, $h(A)$ — редуцированное кольцо и $h(A)h(S)^{-1} = AS^{-1}$ — правое кольцо частных кольца $h(A)$ относительно правого множества $\text{Оре } h(S)$.

Согласно **3.2.3E** достаточно доказать, что $h(A)$ — PF кольцо. Пусть $h(x)h(y) = h(0)$, где $x, y \in A$. Тогда $xys = 0$ для некоторого элемента $s \in S$. Так как A — PF кольцо, то существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $xa = 0$ и $bys = 0$. Тогда

$$h(a) + h(b) = h(1), \quad h(x)h(a) = h(0), \quad by \in K.$$

Тогда $h(b)h(y) = h(0)$ и $h(A)$ — PF кольцо.

(1) $\Leftrightarrow$ (8). Так как эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (7) уже доказана, то эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (8) вытекает из того факта, что условие (1) лево-право симметрично. $\square$

3.2.6. Пусть A — редуцированное кольцо.

- A.** Если для любых элементов $x, y \in A$, удовлетворяющих условию $(xA) \cap (yA) = 0$, правый $A/r(xA \oplus yA)$ -модуль $xA \oplus yA$ является плоским, то A — PF кольцо.
- B.** Если любой 2-порожденный правый идеал X кольца A является плоским $A/r(X)$ -модулем, то A — PF кольцо.
- C.** Если кольцо A дистрибутивно справа, то A — PF кольцо.
- D.** Если A — правое кольцо Безу, то все подмодули плоских правых или левых A -модулей являются плоскими.
- E.** Каждый конечно порожденный правый идеал B кольца A является квазипроективным плоским правым A -модулем и свободным циклическим правым $A/r(B)$ -модулем.

Доказательство. Утверждение **A** следует из **3.2.4**.

B. Пусть $B = r(xA \oplus yA)$ и $h : A \rightarrow A/B$ — естественный кольцевой эпиморфизм. Согласно **1.3.1F**, $h(A)$ — редуцированное кольцо. Согласно **1.3.1D**, $(xA \oplus yA) \cap \text{Ker } h = 0$. Кроме того, $xA \oplus yA$ — плоский $h(A)$ -модуль. Поэтому $h(xA) \cap h(yA) = h(0)$ и $h(xA) \cap h(yA)$ — плоский $h(A)$ -модуль. Тогда главный правый идеал $h(xA)$ редуцированного кольца $h(A)$ является плоским $h(A)$ -модулем. Согласно **3.2.4** имеем

$$h(xA \oplus yA) = h((x + y)A).$$

Тогда

$$xA \oplus yA \oplus B = (x + y)A \oplus B.$$

Тогда $xA \oplus yA = (x + y)A$, так как

$$B \cap (xA \oplus yA) = 0, \quad (x + y)A \subseteq xA \oplus yA.$$

Согласно **3.2.5**, A — PF кольцо.

Утверждение **B** следует из **A**.

C. Согласно **3.2.5**, A — PF кольцо (см. условие (6) из **3.2.5**).

D. Согласно **3.2.2** достаточно доказать, что произвольный конечно порожденный правый идеал B является плоским модулем. Так как A — правое кольцо Безу, то B — главный правый идеал. Согласно **3.2.5**, A — PF кольцо. Согласно **3.2.3B**, B — плоский модуль.

E. Так как A — правое кольцо Безу, то B — главный правый идеал кольца A . Согласно **1.3.1H**, B_A — квазипроективный A -модуль и свободный циклический правый $A/r(B)$ -модуль. Согласно **D**, B_A — плоский A -модуль. $\square$

3.2.7. Свойства PF колец. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A — PF кольцо;
- (2) все подмодули правых A -модулей без H -кручения также не имеют H -кручения;
- (2') все подмодули левых A -модулей без H -кручения также не имеют H -кручения;
- (3) в A все главные правые идеалы не имеют H -кручения;
- (3') в A все главные левые идеалы не имеют H -кручения.

Доказательство. Достаточно доказать эквивалентность условий (1), (2) и (3).

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть M_A — модуль без H -кручения, N — подмодуль в M и B — главный левый идеал в A . Согласно **3.2.3B**, ${}_A B$ — плоский модуль, поэтому естественный групповой гомоморфизм $f : N \otimes B \rightarrow M \otimes B$ является мономорфизмом. Так как M — модуль без H -кручения, то, согласно **3.1.4**, естественный групповой гомоморфизм $g : M \otimes B \rightarrow MB$ является изоморфизмом. Пусть $h : N \otimes B \rightarrow NB$ — естественный групповой эпиморфизм. Так как $h = gf$, то h — изоморфизм. Согласно **3.1.4**, N — модуль без H -кручения.

(2) $\Rightarrow$ (3). Согласно **3.1.6**, A_A — модуль без H -кручения.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $x, y \in A$ и $xy = 0$. Так как xA — модуль без H -кручения, то согласно **3.1.4** существуют такие элементы $x_1, \dots, x_k \in xA$ и $a_1, \dots, a_k \in A$, что $x = \sum_{i=1}^k x_i a_i$ и $a_i y = 0$ для любого i . Существуют такие элементы $y_1, \dots, y_k \in A$, что $x_i = x y_i$ для $i = 1, \dots, k$. Положим

$$a = 1 - \sum_{i=1}^k y_i a_i \in A, \quad b = \sum_{i=1}^k y_i a_i \in A.$$

Тогда $by = 0$,

$$xa = x - xb = x - x \sum_{i=1}^k y_i a_i = x - \sum_{i=1}^k x_i a_i = 0. \quad \square$$

3.2.8. 2-Порожденные плоские правые идеалы, I.. Пусть A — кольцо.

A. Пусть $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$, $a_1 b_1 = a_2 b_2$ и $a_1 A + a_2 A$ — плоский A -модуль. Тогда существуют такие элементы $f_{ij} \in A$, $1 \leq i, j \leq 2$, что

$$a_1 f_{11} = a_2 f_{21}, \quad (1 - f_{11})b_1 = f_{12}b_2, \quad a_1 f_{12} = a_2 f_{22}, \quad (1 - f_{22})b_2 = f_{21}b_1.$$

B. В A все 2-порожденные правые (левые) идеалы являются плоскими в точности тогда, когда для любых $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$, удовлетворяющих условию $a_1 b_1 = a_2 b_2$, существуют такие элементы $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} \in A$, что

$$a_1 = a_1 f_{11} + a_2 f_{21}, \quad a_2 = a_1 f_{12} + a_2 f_{22}, \quad f_{11}b_1 = f_{12}b_2, \quad f_{21}b_1 = f_{22}b_2.$$

Доказательство. A. Пусть X_A — свободный A -модуль ранга 2 с базисом $\{x_1, x_2\}$, $y \equiv x_1 b_1 + x_2 b_2$, $B \equiv a_1 A + a_2 A$, и $g : X_A \rightarrow B_A$ — такой эпиморфизм, что

$$g(x_1 c_1 + x_2 c_2) = a_1 c_1 - a_2 c_2 \quad \forall c_1, c_2 \in A.$$

Положим $Y = \text{Ker } g$. Так как $y \in Y$ и B — плоский модуль, то, согласно **3.1.9**, $f(y) = y$ для некоторого гомоморфизма $f : X \rightarrow Y$. Пусть $f_{ij} \in A$, $1 \leq i, j \leq 2$, причем

$$f(x_1) = x_1 f_{11} + x_2 f_{21} \in Y, \quad f(x_2) = x_1 f_{12} + x_2 f_{22} \in Y.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= g(f(x_1)) = g(f(x_2)), \quad a_1 f_{11} = a_2 f_{21}, \quad a_1 f_{12} = a_2 f_{22}, \\ y &= f(y) = f(x_1 b_1 + x_2 b_2) = x_1 (f_{11} b_1 + f_{12} b_2) + x_2 (f_{21} b_1 + f_{22} b_2), \\ b_1 &= f_{11} b_1 + f_{12} b_2, \quad b_2 = f_{21} b_1 + f_{22} b_2, \\ (1 - f_{11})b_1 &= f_{12} b_2, \quad (1 - f_{22})b_2 = f_{21} b_1. \end{aligned}$$

Доказательство утверждения **B** аналогично доказательству **A** и использует **3.1.9**. $\square$

3.2.9. 2-Порожденные плоские правые идеалы, II.. Пусть в кольце A все 2-порожденные правые идеалы являются плоскими.

A. Для любых элементов $u, v, w, z \in A$, удовлетворяющих условию $uv = zw$ существуют такие элементы $f, g, h \in A$, что $uf = zg$ и $(1 - f)v = hw$.

B. Для любых элементов $u, v, w \in A$, удовлетворяющих условию $uv = vw$, существуют такие элементы $f, g, h \in A$, что $uf = vg$ и $(1 - f)v = hw$.

C. Для любых элементов $u, v, z \in A$, удовлетворяющих условию $uv = zu$, существуют такие элементы $f, g, h \in A$, что $uf = zg$ и $(1 - f)v = hu$.

D. Если A — локальное кольцо, то A — область. Кроме того, если B и C — главные правые идеалы в A и $B \cap C \neq 0$, то либо $B \subseteq C$, либо $C \subseteq B$.

E. Если A — равномерное справа локальное кольцо, то A — цепная справа область.

Доказательство. Утверждение **A** следует из **3.2.7A**. Утверждения **B** и **C** следуют из **A**.

D. Согласно **3.2.3D**, A — область. Пусть $B = uA$ и $C = zA$. Допустим, что $B \not\subseteq C$. Надо доказать, что $C \subset B$. По условию $uv = zw \neq 0$ для некоторых $u, v \in A$. Согласно п. **A** существуют такие элементы $f, g, h \in A$, что $uf = zg$ и $(1 - f)v = hw$. Элемент f необратим, поскольку в противном случае $u \in C$, $B \subseteq C$, и получаем противоречие. Так как кольцо A локально, то $1 - f \in U(A)$. Тогда

$$v = (1 - f)^{-1}hw, \quad zw = uv = u(1 - f)^{-1}hw.$$

Так как A — область, то $z = u(1 - f)^{-1}h$, откуда $C = zA \subseteq uA = B$.

Утверждение **E** следует из **D**. □

3.2.10. РР кольца. Напомним, что кольцо A называется *правым РР кольцом*, если для любого элемента $x \in A$ существует такой идемпотент $e \in A$, что $r(x) = eA$, т.е. модуль xA проективен.

A. Если A — правое или левое РР кольцо, то A — РР кольцо. Существуют коммутативные РР кольца, не являющиеся РР кольцами.

B. Если A — правое кольцо Безу, являющееся правым РР кольцом, то пересечение любых двух главных правых идеалов кольца A является главным правым идеалом.

Доказательство. **A.** Например, пусть A — правое РР кольцо и $xy = 0$, где $x, y \in A$. Существует такой идемпотент $e \in A$, что $r(x) = eA$. Так как $y \in r(x)$, то $ey = y$. Тогда $x = xe + x(1 - e) = x(1 - e)$ и $a = 1 - e$ и $b = e$ — требуемые элементы из определения РР кольца. Можно проверить, что кольцо из **2.2.3C** является коммутативным РР кольцом и не является РР кольцом (см. [63]).

B. Пусть X и Y — два главных правых идеала кольца A . Существует A -модульный эпиморфизм

$$h : X \oplus Y \rightarrow X + Y,$$

ядро которого изоморфно $X \cap Y$. Так как A — правое кольцо Безу, то $X + Y$ — главный правый идеал. По условию $X + Y$ — проективный A -модуль. Поэтому A -модуль $X \cap Y$ изоморфен прямому слагаемому 2-порожденного модуля $X \oplus Y$. Следовательно, $X \cap Y$ — 2-порожденный правый идеал правого кольца Безу A . Поэтому $X \cap Y$ — главный правый идеал. □

3.2.11. Редуцированные РР кольца. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A — правое или левое РР кольцо без нецентральных идемпотентов;
- (2) A — правое и левое РР редуцированное кольцо;
- (3) A — редуцированное кольцо, и для любого его конечно порожденного идеала B существует такой центральный идемпотент $e \in A$, что $r(B) = \ell(B) = eA = Ae$;
- (4) в кольце A каждый элемент — произведение центрального идемпотента и делителя нуля.

Доказательство. Импликация (4) $\Rightarrow$ (2) проверяется непосредственно. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следует из **1.3.1E**.

(1) $\Rightarrow$ (4). Пусть A — правое РР кольцо без нецентральных идемпотентов, $x \in A$ и $x^2 = 0$. Тогда $r(x) = eA$ для некоторого центрального идемпотента $e \in A$ и $x \in r(x) = eA$. Поэтому $x = ex = xe = 0$ и A — редуцированное кольцо. Согласно **1.3.1D**, $\ell(x) = r(x) = eA = Ae$. Поэтому A — левое РР кольцо.

Пусть $a \in A$. Тогда $r(a) = \ell(a) = eA = Ae$ для некоторого центрального идемпотента $e \in A$. Положим $f = 1 - e$ и $d = (1 - e)a + e$. Тогда f — центральный идемпотент и $a = fd$. Пусть $b \in \ell(d)$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= db = (1 - e)ab + eb, \\ eb &= -(1 - e)ab = -ab \in eA \cap (1 - e)A = 0, \quad eb = 0, \quad b \in r(a) = eA, \\ b &= eb = 0, \quad \ell(d) = 0. \end{aligned}$$

Согласно **1.3.1D**, $r(d) = \ell(d) = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $B = \sum_{i=1}^n Ab_iA$, e_i — такие центральные идемпотенты в A , что $r(b_i) = e_iA$ при $i = 1, \dots, n$. Положим $e = e_1 \cdot \dots \cdot e_n$. Согласно **1.3.1D**, $r(B) = \ell(B) = \cap (e_iA) = eA$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Согласно **1.3.1E**, A — кольцо без нецентральных идемпотентов. Пусть $x \in A$. По условию существует такой центральный идемпотент $e \in A$, что $r(AxA) = eA$. Так как $r(x) = r(AxA)$ согласно **1.3.1D**, то A — правое РР кольцо. $\square$

3.2.12. Арифметические кольца и плоские модули. Если A — инвариантное арифметическое кольцо и M — правый A -модуль, то M является плоским в точности тогда, когда M — модуль без кручения по Хаттори.

Доказательство. Если M — плоский модуль, то M — модуль без кручения по Хаттори согласно **3.1.6**.

Пусть M — модуль без кручения по Хаттори. Согласно **1.1.7C**, $MB \cap MC = M(B \cap C)$ для любых идеалов B, C кольца A . Согласно **3.1.6**, M — плоский модуль. $\square$

3.3. Модули, близкие к проективным

3.3.1. Квазипроективные модули. Модуль M называется *квазипроективным*, если M проективен относительно себя, т.е. для любого эпиморфизма $h : M \rightarrow \overline{M}$ и каждого гомоморфизма $\overline{f} : M \rightarrow \overline{M}$ существует такой гомоморфизм $f : M \rightarrow M$, что $\overline{f} = hf$.

- A.** Непосредственно проверяется, что все проективные или полупростые модули квазипроективны. С другой стороны, если натуральное число n делится на квадрат простого числа, то конечная циклическая группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ является квазипроективным непроективным полупростым модулем над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.
- B.** В [112, Proposition 7.7] доказано, что все конечно порожденные подмодули дистрибутивного модуля над коммутативным кольцом квазипроективны. Отсюда вытекает следующий более поздний результат из [19]: *Все конечно порожденные идеалы коммутативного арифметического кольца A являются квазипроективными A -модулями.* Последний результат также следует из теоремы **3A**.

Из следующего примера вытекает, что обратное утверждение неверно.

- C.** Существует конечное коммутативное неарифметическое кольцо A , у которого все идеалы квазипроективны. Действительно, пусть F — конечное поле, A — фактор-кольцо кольца многочленов $F[x, y]$ по идеалу, порожденному x^2 и y^2 , $h : F[x, y] \rightarrow A$ — естественный эпиморфизм. Так как все собственные идеалы кольца A полупросты, а модули A_A и 0_A проективны, то все идеалы кольца A квазипроективны. Кроме того, A — конечное локальное кольцо, не являющееся арифметическим, поскольку

$$(\overline{x} + \overline{y})A = (\overline{x} + \overline{y})A \cap (\overline{x}A + \overline{y}A) \neq (\overline{x} + \overline{y})A \cap \overline{x}A + (\overline{x} + \overline{y})A \cap \overline{y}A = \overline{0},$$

где $\overline{x}, \overline{y}, \overline{0}$ — естественные образы многочленов $x, y, 0$ из кольца $F[x, y]$.

- D.** Существуют конечные некоммутативные кольца, удовлетворяющие теореме **3A**. Пусть F — аддитивная абелева группа, являющаяся прямой суммой двух циклических групп порядка 2 с образующими f и g соответственно. Зададим на F умножение так, что $f^2 = g$, $g^2 = f$, $fg = gf = f + g$. Тогда F превращается в конечное поле из 4 элементов $0, f + g, f, g$ с единицей $f + g$. Пусть α — такой автоморфизм аддитивной группы F , что $\alpha(f) = g$ и $\alpha(g) = f$. Непосредственно проверяется, что α — нетождественный автоморфизм поля F . Пусть $F[x, \alpha]$ — кольцо косых многочленов над F , в котором коэффициенты из F записываются слева от одночленов x^n , причем $xf = \alpha(f)$ для всех $f \in F$. Обозначим через A — фактор-кольцо кольца $F[x, \alpha]$ по идеалу, порожденному x^2 . Непосредственно проверяется, что A — конечное инвариантное кольцо, содержащее единственный собственный односторонний идеал. Поэтому A — конечное инвариантное некоммутативное арифметическое кольцо A , у которого все идеалы квазипроективны.

3.3.2. Конечно порожденные квазипроективные модули. Пусть A — кольцо и X — конечно порожденный квазипроективный правый A -модуль.

- A.** Если X содержит такое конечное подмножество $\{x_1, \dots, x_n\}$, что $r(\{x_1, \dots, x_n\}) = 0$, то X — проективный модуль.

В. Если X содержит такое конечное подмножество $\{x_1, \dots, x_n\}$, что $r(\{x_1, \dots, x_n\}) = r(X)$, то X — проективный $A/r(X)$ -модуль.

С. Если кольцо A инвариантно справа, то X — проективный $A/r(X)$ -модуль.

Доказательство. Утверждение **А** хорошо известно (см., например, [110, 2.12(2)]).

В. Непосредственно проверяется, что X — конечно порожденный квазипроективный правый $A/r(X)$ -модуль. Теперь утверждение **В** вытекает из утверждения **А**, примененного к $A/r(X)$ -модулю X .

С. Пусть $X = \sum_{i=1}^n x_i A$. Так как кольцо A инвариантно справа, то $r(x_i) = r(x_i A)$ для любого i .

Поэтому

$$r(X) = r(x_1 A) \cap \dots \cap r(x_n A) = r(\{x_1, \dots, x_n\}).$$

Согласно **В** заключаем, что X — проективный $A/r(X)$ -модуль. $\square$

3.3.3. Инвариантные полупервичные кольца. Пусть A — инвариантное справа полупервичное кольцо.

А. Каждое первичное фактор-кольцо кольца A является равномерной справа областью, и каждое полупервичное фактор-кольцо кольца A является инвариантным справа локализуемым справа редуцированным кольцом.

В. Если все 2-порожденные правые идеалы кольца A являются плоскими, то для любого его максимального правого идеала M правая локализация A_M является цепным справа кольцом, и кольцо A дистрибутивно справа. В частности, A — арифметическое кольцо.

С. Если все 2-порожденные правые идеалы кольца A квазипроективны, то кольцо A дистрибутивно справа. В частности, A — арифметическое кольцо.

Доказательство. Инвариантное справа полупервичное кольцо A является редуцированным. Согласно **1.3.7Е** и **1.3.8А** кольцо A_M существует, является локальным кольцом и $J(A_M) = M_M$. Пусть P — идеал кольца A , являющийся ядром канонического кольцевого гомоморфизма $f : A \rightarrow A_M$, и $h : A/P \rightarrow A_M$ — естественный эпиморфизм.

А. Остальные утверждения из п. **А** проверяются непосредственно, с учетом **1.3.1С**.

В. Согласно **1.3.8D** достаточно доказать, что A_M — цепное справа кольцо.

Согласно **3.1.11M** все 2-порожденные правые идеалы кольца A_M являются плоскими. Согласно **3.2.3D**, A_M — область. Поэтому P — вполне первичный идеал. Согласно **А** инвариантная справа область A/P равномерна справа. Так как A_M — правое кольцо частных кольца $h(A)$ относительно его правого множества $\text{Ore } h(A) \setminus h(M)$, то локальная область A_M равномерна справа согласно **3.2.3С**. Согласно **3.2.9Е**, A_M — цепная справа область.

С. Согласно **1.3.8D** достаточно доказать, что A_M — цепное справа кольцо.

Согласно **3.3.2С** каждый 2-порожденный правый идеал Y кольца A является проективным $A/r(Y)$ -модулем. Согласно **3.2.6В**, A — PF кольцо. Согласно **3.2.5**, A_M — локальное PF кольцо. Согласно **3.2.3D**, A_M — область. Поэтому P — вполне первичный идеал. Согласно **А** инвариантная справа область A/P равномерна справа. Так как A_M — правое кольцо частных кольца $h(A)$ относительно его правого множества $\text{Ore } h(A) \setminus h(M)$, то локальная область A_M равномерна справа согласно **3.2.3С**.

Пусть X_M — произвольный ненулевой 2-порожденный правый идеал кольца A_M . Существует такой ненулевой 2-порожденный правый идеал X кольца A , что $f(X)A_M = X_M$. Так как $X_M \neq 0$, то $h(X) \neq h(0)$, причем $h(X)h(r(X)) = h(0)$ и $h(A)$ — область. Поэтому $r(X) \subseteq P \subseteq M$. Пусть $\bar{h} : A \rightarrow A/r(X)$ — естественный кольцевой эпиморфизм. Кольцо $\bar{h}(A)$ инвариантно справа. Согласно **1.3.1**, $\bar{h}(A)$ — редуцированное кольцо. Согласно **А**, $\bar{h}(A)$ — инвариантное справа локализуемое справа кольцо. Так как $r(X) \subseteq \text{Ker } f = P \subseteq M$, то непосредственно проверяется, что кольцо A_M является правой локализацией кольца $\bar{h}(A)$ по его максимальному правому идеалу $\bar{h}(M)$. Пусть $\bar{f} : \bar{h}(A) \rightarrow A_M$ — канонический кольцевой гомоморфизм этой правой локализации, согласованный с каноническим гомоморфизмом $f : A \rightarrow A_M$. По условию модуль X_A квазипроективен. Согласно **3.3.2С** правый $\bar{h}(A)$ -модуль $\bar{h}(X)$ проективен, т.е. все 2-порожденные правые идеалы

кольца $\bar{h}(A)$ проективны. Кроме того, A_M — правая локализация кольца $\bar{h}(A)$ по его максимальному правому идеалу $\bar{h}(M)$. Согласно **B** A_M — цепное справа кольцо. $\square$

3.3.4. Эндоморфизм-поднимаемые и π -проективные модули. Модуль M называется *эндоморфизм-поднимаемым*, или *малопроективным*, если для любого эпиморфизма $h : M \rightarrow \bar{M}$ и каждого гомоморфизма $\bar{f} : \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ существует такой эндоморфизм f модуля M , что $\bar{f}h = hf$.

Модуль M называется *π -проективным*, если для любого эпиморфизма $h : M \rightarrow \bar{M}$ и каждого идемпотентного эндоморфизма $\bar{f}$ модуля $\bar{M}$ существует такой эндоморфизм f модуля M , что $\bar{f}h = hf$.

- A.** Пусть Q — модуль и N — вполне инвариантный подмодуль в Q . Если Q — эндоморфизм-поднимаемый (соответственно, квазипроективный) модуль, то непосредственно проверяется, что Q/N — эндоморфизм-поднимаемый (соответственно, квазипроективный) модуль.
- B.** Для любого простого числа p квазициклическая абелева группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$ является эндоморфизм-поднимаемым неквазипроективным модулем над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.
- C.** Каждый цепной модуль является π -проективным. Кольцо $\mathbb{Z}$ является π -проективным нецепным $\mathbb{Z}$ -модулем.
- D.** Каждый эндоморфизм-поднимаемый модуль является π -проективным. Если A — неполная область дискретного нормирования и Q — поле частных области A , то Q — π -проективный A -модуль, не являющийся эндоморфизм-поднимаемым.
- E.** Каждый квазипроективный модуль M — эндоморфизм-поднимаемый модуль.
- F.** Пусть A — инвариантное справа кольцо, M — дистрибутивный правый A -модуль и X — конечно порожденный эндоморфизм-поднимаемый подмодуль в M . Тогда X — квазипроективный модуль.
- G.** Пусть M — π -проективный модуль и X, Y — такие подмодули в M , что $X + Y = M$. Тогда существуют такие гомоморфизмы $f : M \rightarrow X$ и $g : M \rightarrow Y$, что

$$\begin{aligned} f(Y) + g(X) &\subseteq X \cap Y, \quad (f + g - 1_M)(M) \subseteq X \cap Y, \\ M &= (f + g)(M) + X \cap Y, \quad \text{Ker}(f + g) \subseteq X \cap Y. \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждения **A–D** проверяются непосредственно.

E. Пусть $h : M \rightarrow \bar{M}$ — эпиморфизм и $\bar{f}$ — эндоморфизм модуля $\bar{M}$. Тогда $\bar{f}h$ — гомоморфизм из M в $\bar{M}$. Так как M квазипроективен, то существует такой эндоморфизм f модуля M , что $hf = \bar{f}h$. Поэтому M — эндоморфизм-поднимаемый модуль.

F. Пусть X/Y — фактор-модуль модуля X , $h : X \rightarrow X/Y$ — естественный эпиморфизм и $\bar{f} : X \rightarrow X/Y$ — некоторый гомоморфизм. Согласно **1.1.6B** существует такой идеал B кольца A , что $Y = XB$. Тогда $(X/Y)B = (X/XB)B = 0$,

$$\bar{f}(Y) = \bar{f}(XB) = \bar{f}(X)B \subseteq (X/Y)B = 0$$

и $Y \subseteq \text{Ker } \bar{f}$. Поэтому гомоморфизм $\bar{f}$ индуцирует гомоморфизм $f_1 : X/Y \rightarrow X \rightarrow Y$, причем $f_1h = \bar{f}$. Так как X — эндоморфизм-поднимаемый модуль, то существует такой гомоморфизм $f : X \rightarrow X$, что $hf = f_1h = \bar{f}$. Поэтому модуль X квазипроективен.

G. Пусть $h : M \rightarrow M/(X \cap Y)$ — естественный эпиморфизм. Так как $h(M) = h(X) \oplus h(Y)$, то существуют естественные проекции

$$\bar{f} : h(M) \rightarrow h(X), \quad \bar{g} : h(M) \rightarrow h(Y).$$

Поскольку M — π -проективный модуль, то $\bar{f}h = hf$ и $\bar{g}h = hg$ для некоторых $f, g \in \text{End } M$. Поэтому

$$f(M) \subseteq X, \quad g(M) \subseteq Y, \quad f(Y) + g(X) \subseteq X \cap Y.$$

Так как $(\bar{f} + \bar{g} - 1_{h(M)}) = 0$, то

$$(f + g - 1_M)(M) \subseteq X \cap Y.$$

Так как $M = (f + g)(M) + (f + g - 1_M)(M)$, то

$$M = (f + g)(M) + X \cap Y.$$

Если $x \in \text{Ker}(f + g)$, то

$$x = (1_M - f - g)(x) \in X \cap Y.$$

Тогда $\text{Ker}(f + g) \subseteq X \cap Y$. □

3.3.5. Замечание. Для кольца A равносильны условия:

- (1) $aAb = 0$ для любых таких элементов $a, b \in A$, что $ab = 0$;
- (2) для любого элемента $a \in A$ правый идеал $r(a)$ является идеалом в A ;
- (3) для любого элемента $a \in A$ правый идеал $r(a)$ является идеалом в A в точности тогда, когда для любого элемента $b \in A$ левый идеал $\ell(b)$ является идеалом в A .

В 3.3.5 эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) проверяется непосредственно. Так как условие (1) лево-право симметрично, то условия (1) и (3) тоже эквивалентны.

3.3.6. Замечание. Пусть A — некоммутативное кольцо и $R = A[x]$ — кольцо многочленов. Если $a, b \in A$ и $ab \neq ba$, то правый идеал $(a+x)R$ кольца R не является левым идеалом. В частности, R не является инвариантным слева кольцом.

Действительно, допустим противное. Тогда существуют такой многочлен $f \in R$ и элемент $c \in A$, что $b(a+x) = (a+x)(c+xf)$. Так как $b(a+x)$ — многочлен степени 1, то $f = 0$. Поэтому $b(a+x) = (a+x)c$. Приравнявая коэффициенты при x , получаем, что $b = c$ и $b(a+x) = (a+x)b$. Поэтому $ba = ab$; получено противоречие.

3.3.7. Конечно эндоморфизм-продолжаемые модули. Пусть n — натуральное число. Модуль M называется n -эндоморфизм-продолжаемым, если каждый эндоморфизм любого n -порожденного подмодуля в M продолжается до эндоморфизма модуля M . Модуль M называется конечно эндоморфизм-продолжаемым, если каждый эндоморфизм любого конечно порожденного подмодуля в M продолжается до эндоморфизма модуля M .

A. Пусть A — кольцо и M — 2-эндоморфизм-продолжаемый A -модуль, F — вполне инвариантный подмодуль в M и G_1, G_2 — такие подмодули в M , что $G_1 \cap G_2 = 0$. Тогда

$$F \cap (G_1 + G_2) = F \cap G_1 + F \cap G_2.$$

B. Пусть A — 2-эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо, F — идеал кольца A и G_1, G_2 — такие правые идеалы кольца A , что $G_1 \cap G_2 = 0$. Тогда

$$F \cap (G_1 + G_2) = F \cap G_1 + F \cap G_2.$$

C. Если A — кольцо и каждое его факторкольцо 2-эндоморфизм-продолжаемо справа, то A — арифметическое кольцо.

D. Пусть M — инвариантный конечно эндоморфизм-продолжаемый модуль. Если для каждого 2-порожденного подмодуля X в M любой автоморфизм произвольного полупростого фактор-модуля $\bar{X}$ модуля X поднимается до эндоморфизма модуля X , то модуль M дистрибутивен.

E. Пусть A — 1-эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо и $a \in A$. Правый идеал $r(a)$ является идеалом кольца A в точности тогда, когда левый идеал Aa является идеалом. В частности, если a — произвольный левый делитель нуля в A , то Aa — идеал.

F. Кольцо A инвариантно слева в точности тогда, когда A — 1-эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо и $r(a)$ — идеал в A для любого элемента $a \in A$.

G. Пусть A — 1-эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо. Тогда A имеет левое классическое кольцо частных Q и $aAa^{-1} \subseteq A$ для любого делителя нуля $a \in A$. Если A имеет классическое правое кольцо частных, то Q — двустороннее классическое кольцо частных кольца A . Если A — область, то A — инвариантная слева область, обладающая классическим левым телом частных.

H. Если 1-эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо A инвариантно справа или является редуцированным кольцом, то кольцо A инвариантно слева.

- I.** Пусть A — конечно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо. Согласно **G**, A имеет классическое левое кольцо частных Q и $sAs^{-1} \subseteq A$ для любого делителя нуля s в A . Если $q \in Q$ и $q^{n+1} = q^n a_n + \dots + q_1 a + a_0$ для некоторых элементов $a_0, \dots, a_n \in A$, то $q \in s^{-1}As$ для некоторого делителя нуля s в A .
- J.** Если A — 1-эндоморфизм-продолжаемая справа правая область Оре, то A — инвариантная слева левая область Оре.
- K.** Если A — 2-эндоморфизм-продолжаемая справа область, то A — инвариантная слева, правая и левая область Оре.
- L.** Пусть $\mathbb{H}$ — некоммутативное тело гамильтоновых кватернионов и $A = \mathbb{H}[x]$. Тогда A — правая и левая область Оре, не являющаяся 1-эндоморфизм-продолжаемой справа.

Доказательство. А. Пусть $f = g_1 + g_2 \in F \cap (G_1 + G_2)$, где $g_1 \in G_1$ и $g_2 \in G_2$. Введем обозначение $H = g_1 A \oplus g_2 A$. Пусть $h_i : H \rightarrow g_i A$ — естественные проекции. По условию эндоморфизмы h_i модуля H продолжаются до эндоморфизмов $d_i \in \text{End } M$ и $d_1(g_1) = d_2(g_2) = 0$, $d_1(g_2) = g_2$, $d_2(g_1) = g_1$. Так как F — вполне инвариантный подмодуль в M и

$$g_1 = d_2(g_1 + g_2) = d_2(f), \quad g_2 = d_1(f),$$

то

$$\begin{aligned} d_i(f) &\in F, \quad f = d_2(f) + d_1(f) \in F \cap G_1 + F \cap G_2, \\ F \cap (G_1 + G_2) &\subseteq F \cap G_1 + F \cap G_2 \subseteq F \cap (G_1 + G_2). \end{aligned}$$

Утверждение **B** следует из **A**.

C. Пусть F, G_1, G_2 — идеалы кольца A , $F \subseteq G_1 + G_2$ и $h : A \rightarrow A/(G_1 \cap G_2)$ — естественный эпиморфизм колец. Применяя **B** к кольцу $h(A)$, получим равенство

$$h(F) \cap (h(G_1) + h(G_2)) = h(F) \cap h(G_1) + h(F) \cap h(G_2).$$

Поэтому

$$F \cap G_1 + F \cap G_2 + G_1 \cap G_2 = F + G_1 \cap G_2. \quad (*)$$

Используя $(*)$ и модулярный закон, получаем

$$F = F \cap (F \cap G_1 + F \cap G_2 + G_1 \cap G_2) = F \cap G_1 + F \cap G_2 + F \cap G_1 \cap G_2 = F \cap G_1 + F \cap G_2.$$

D. Допустим, что модуль M не дистрибутивен. Согласно **1.1.5** существует такой 2-порожденный подмодуль X модуля M , что X имеет фактор-модуль $X_1 = S_1 \oplus T_1$, где S_1 и T_1 — изоморфные простые модули. Пусть $u : S_1 \rightarrow T_1$ — изоморфизм. Обозначим через f_1 такой автоморфизм полупростого модуля X_1 , что

$$f_1(s + t) = u^{-1}(t) + u(s), \quad \forall s \in S_1, \forall t \in T_1.$$

Пусть $h : X \rightarrow X_1$ — естественный эпиморфизм. По условию существует такой эндоморфизм f конечно порожденного модуля X , что $hf = \bar{f}h$. Пусть S, T — полные прообразы в модуле X модулей S_1 и T_1 соответственно. Так как $f_1(S_1) = T_1 \not\subseteq S_1$, то $f(S) \not\subseteq S$. Поскольку M — 2-конечно эндоморфизм-продолжаемый модуль, эндоморфизм f модуля X продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M . Так как M — инвариантный модуль, то $f(S) = g(S) \subseteq S$. Получено противоречие.

E. Допустим, что $r(a)$ — идеал в A и $b \in A$. Тогда $r(a) \subseteq r(ab)$. Поэтому $f(a) = ab$ для некоторого эпиморфизма $f : aA \rightarrow abA$. Тогда $f \in \text{End}(aA)$. По условию $ta = f(a) = ab$ для некоторого $t \in A$. Поэтому $Aa \supseteq aA$ и Aa — идеал.

Допустим, что Aa — идеал в A и $b \in A$. Тогда $ab = ca$ для некоторого $c \in A$. Поэтому $abr_A(a) = car_A(a) = 0$, $br_A(a) \subseteq r_A(a)$ и $r(a)$ — идеал.

F. Пусть A — инвариантное слева кольцо. Из **3.3.5** вытекает, что $r(a)$ — идеал в A для любого элемента $a \in A$. Пусть $f \in \text{End } aA$. Тогда $f(a) = ab$ для некоторого элемента $b \in A$ и $f(ax) = f(a)x = abx$ для любого $x \in A$. Так как A — инвариантное слева кольцо, то $ab = ca$ для некоторого элемента $c \in A$. Соотношение $g(y) = cy$ задает эндоморфизм $g \in \text{End } A_A S$. Кроме того, $g(ax) = cax = abx = f(ax)$ для всех $x \in A$. Поэтому g — продолжение гомоморфизма f .

Обратная импликация в **F** вытекает из **E**.

Г. Пусть S — множество всех неделителей нуля в A , $s \in S$, $a \in A$. Так как, согласно **A**, $sa = bs$ для некоторого $b \in A$, то S — левое множество Оре. Поэтому A имеет классическое левое кольцо частных. Включение $aAa^{-1} \subseteq A$ следует из **Е**.

Если A имеет классическое правое кольцо частных, то Q — двустороннее классическое кольцо частных кольца A , поскольку если произвольное кольцо имеет классическое правое кольцо частных и классическое левое кольцо частных, то эти два кольца частных можно естественным образом отождествить.

Последнее утверждение из **Г** вытекает из первого утверждения.

Н. Согласно **3.3.5** и **1.3.1D** все правые аннуляторы элементов кольца A являются идеалами. Поэтому **Н** следует из **F**.

И. Обозначим n -порожденный подмодуль $\sum_{i=1}^n q^i A$ модуля Q_A через M . Тогда $qM \subseteq M$. Согласно левостороннему аналогу **1.3.2A**, $sM \subseteq A$ для некоторого неделителя нуля $s \in A$. Правый идеал sM в A конечно порожден и $s \in sM$. Кроме того,

$$qs^{-1} \cdot sM = qM \subseteq M = s^{-1} \cdot sM.$$

Поэтому правилом $f(x) = qs^{-1}x$ задается эндоморфизм f конечно порожденного правого идеала sM кольца A . По условию f продолжается до эндоморфизма g модуля A_A . Обозначим $c = g(1)$. Тогда

$$sq = sqs^{-1} \cdot s = f(s) = cs, \quad q = s^{-1}cs \in s^{-1}As.$$

Ж. Пусть a и b — ненулевые элементы области A . Правая область Оре A имеет классическое правое тело частных Q , содержащее элемент aba^{-1} . Отображение

$$f : aA \rightarrow aA, \quad f(ax) = (aba^{-1})(ax) = abx,$$

является эндоморфизмом главного правого идеала aA . По условию существует такой элемент $c \in A$, что $ca = f(a) = (aba^{-1})a = ab$. Поэтому A — инвариантная слева область. Так как A — инвариантная слева область, то A — левая область Оре.

К. Пусть x — ненулевой элемент в A и y — такой элемент области A , что $xA \cap yA = 0$. Существует такой эндоморфизм f 2-порожденного модуля $xA \oplus yA$, что $f(x) = x$ и $f(y) = 0$. По условию существует такой элемент $a \in A$, что $ax = f(x) = x$ и $ay = f(y) = 0$. Поскольку $(a-1)x = 0$ и A — область, то $a = 1$. Тогда $y = 0$. Поэтому A — правая область Оре. Тогда A — квазинепрерывная справа правая область Оре. Согласно **Ж**, A — инвариантная слева левая область Оре.

Л. Хорошо известно, все правые (левые) идеалы кольца многочленов над телом являются главными. Поэтому A — область Оре. Тогда область A квазинепрерывна. Согласно **3.3.6**, A не является инвариантным слева кольцом. Теперь применяем **К**. $\square$

3.3.8. Пусть A — инвариантное справа кольцо и M — инвариантный конечно эндоморфизм-продолжаемый эндоморфизм-поднимаемый правый A -модуль. Следующие условия равносильны:

- (1) все фактор-модули модуля M — конечно эндоморфизм-продолжаемые модули;
- (2) все конечно порожденные подмодули модуля M эндоморфизм-поднимаемы;
- (3) M — дистрибутивный модуль и все его конечно порожденные подмодули квазипроективны.

Доказательство. Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) следует из того, что все квазипроективные модули эндоморфизм-поднимаемы.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть M/Y — фактор-модуль модуля M , X/Y — конечно порожденный подмодуль в M/X и $\bar{f}$ — эндоморфизм модуля X/Y . Существует естественный изоморфизм $u : X/Y \rightarrow X_1/(X_1 \cap Y)$, где X_1 — конечно порожденный подмодуль в X , причем $\bar{f}$ естественным образом индуцирует эндоморфизм $\bar{f}_1$ конечно порожденного модуля $X_1/(X_1 \cap Y)$ и $u^{-1}\bar{f}_1u = \bar{f}$. Пусть $h : M \rightarrow M/(X_1 \cap Y)$ — естественный эпиморфизм и $h_1 : X_1 \rightarrow X_1/(X_1 \cap Y)$ — сужение эпиморфизма h на X_1 . По условию $X_1/(X_1 \cap Y)$ — эндоморфизм-поднимаемый модуль. Поэтому существует такой эндоморфизм f_1 конечно порожденного подмодуля X_1 в M , что $h_1f_1 = \bar{f}_1h_1$. Так как M —

конечно эндоморфизм-продолжаемый модуль, то f_1 продолжается до эндоморфизма g модуля M . Поскольку M — инвариантный модуль, то

$$g(X) \subseteq X, \quad g(Y) \subseteq Y, \quad g(X_1) \subseteq X_1, \quad g(X_1 \cap Y) \subseteq X_1 \cap Y$$

и g индуцирует эндоморфизм f модуля M/Y . Непосредственно проверяется, что f совпадает с $\bar{f}$ на модуле X/Y . Поэтому M/Y — конечно эндоморфизм-продолжаемый модуль.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть X — конечно порожденный подмодуль модуля M , X/Y — фактор-модуль модуля X , $\bar{f}$ — эндоморфизм конечно порожденного модуля X/Y , $h : M \rightarrow M/Y$ — естественный эпиморфизм и $h_X : X \rightarrow X/Y$ — сужение эпиморфизма h на модуль X . По условию M/Y — конечно эндоморфизм-продолжаемый модуль. Поэтому $\bar{f}$ продолжается до эндоморфизма $\bar{g}$ модуля M/Y . Поскольку M — эндоморфизм-поднимаемый модуль, существует такой эндоморфизм g модуля M , что $\bar{g}h = hg$. Так как M — инвариантный модуль, то $g(X) \subseteq X$ и g индуцирует эндоморфизм f модуля X . Тогда

$$h_X f = (hg)_X = (\bar{g}h)_X = \bar{f}h_X.$$

Поэтому модуль X — эндоморфизм-поднимаемый модуль.

(2) $\Rightarrow$ (3). Согласно **3.3.7D** модуль M дистрибутивен. Согласно **3.3.4D** все конечно порожденные подмодули модуля M квазипроективны. $\square$

3.3.9. Замечание. Пусть A — кольцо, A_1 и A_2 — идеалы кольца A и x_1, x_2 — такие элементы кольца A , что $x_1 - x_2 \in A_1 + A_2$. Тогда существует такой элемент $a \in A$, что $a - x_1 \in A_1$ и $a - x_2 \in A_2$.

Действительно, пусть $x_1 - x_2 = a_1 - a_2$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$. Обозначим через a элемент $x_1 - a_1 = x_2 - a_2$. Тогда $a - x_1 = -a_1 \in A_1$, $a - x_2 = -a_2 \in A_2$. Поэтому a — требуемый элемент.

3.3.10. Арифметические кольца. Для кольца A равносильны условия:

- (1) A — арифметическое кольцо;
- (2) для любых идеалов $A_1, \dots, A_n$ кольца A и произвольных элементов $x_1, \dots, x_n \in A$, удовлетворяющих условию $x_i - x_j \in A_i + A_j$ для всех i, j , существует такой элемент $x \in A$, что $x - x_i \in A_i$ при $i = 1, \dots, n$;
- (3) для любых идеалов A_1, A_2, A_3 кольца A и каждого элемента $d \in (A_1 + A_2) \cap (A_1 + A_3)$ существует такой элемент $x \in A_1$, что $x - d \in A_2 \cap A_3$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). При $n = 2$ утверждение следует из **3.3.9**.

Допустим, что утверждение верно для числа $n - 1$. Существует такой элемент $b \in A$, что $b - x_i \in A_i$ для $i = 1, \dots, n - 1$. Кроме того, $x_i - x_n \in A_i + A_n$ при $i = 1, \dots, n - 1$ и

$$b - x_n = (b - x_i) + (x_i - x_n) \in \bigcap_{i=1}^{n-1} (A_i + A_n).$$

Так как кольцо A арифметично, то

$$b - x_n \in A_n + \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i, \quad b - x_n = a_n - d,$$

где $a_n \in A_n$, $d \in \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i$. Обозначим $a = b + d$. Тогда $a - x_n = a_n \in A_n$. Кроме того, $a - x_i = b - x_i + d \in A_i$ при $i = 1, \dots, n - 1$. Поэтому a — требуемый элемент.

(2) $\Rightarrow$ (3). Утверждение следует из того, что (2) превращается в (3) при $n = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = d$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Достаточно доказать, что если M, B, C — идеалы кольца A и $d \in (M + B) \cap (M + C)$, то $d \in M + (B \cap C)$. Пусть $d = m_1 + b = m_2 + c$, где $m_1, m_2 \in M$, $b \in B$ и $c \in C$. Согласно (3) существует такой элемент $x \in M$, что $x - d \in B \cap C$. Обозначим $y = d - x \in B \cap C$. Тогда $d = x + y \in M + B \cap C$. $\square$

3.3.11. Теорема. Для инвариантного кольца A следующие условия равносильны:

- (1) A — арифметическое кольцо;
- (2) каждое фактор-кольцо $\bar{A}$ кольца A является конечно эндоморфизм-продолжаемым правым $\bar{A}$ -модулем и конечно эндоморфизм-продолжаемым левым $\bar{A}$ -модулем;
- (3) каждый циклический правый A -модуль является конечно эндоморфизм-продолжаемым модулем;
- (4) A_A — конечно эндоморфизм-продолжаемый модуль и все его конечно порожденные подмодули — эндоморфизм-поднимаемые модули;
- (5) A_A — конечно эндоморфизм-продолжаемый дистрибутивный модуль и все его конечно порожденные подмодули квазипроективны.

Доказательство. Мы используем то, что свободный модуль A_A — эндоморфизм-поднимаемый модуль и инвариантное кольцо A является инвариантным правым (левым) A -модулем.

Эквивалентности (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) следуют из **3.3.8**. Импликации (2) $\Rightarrow$ (3) и (5) $\Rightarrow$ (1) проверяются непосредственно. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следует из **3.3.7C**.

(1) $\Rightarrow$ (2). Так как условие (1) лево-право симметрично и наследуется фактор-кольцами, то достаточно доказать, что ${}_A A$ — конечно эндоморфизм-продолжаемый левый A -модуль. Пусть

$$M = \sum_{i=1}^n Am_i$$

— произвольный конечно порожденный подмодуль в ${}_A A$ и $f \in \text{End}_A M$. Так как ${}_A M$ — конечно порожденный дистрибутивный модуль над инвариантным кольцом A , то, согласно **1.1.6C**, $f(Am_i) \subseteq Am_i$ для всех i . Поэтому существуют такие элементы $x_1, \dots, x_n \in A$, что

$$f(m_i) = m_i x_i \in m_i A = Am_i.$$

Тогда

$$0 = (Am_i \cap Am_j)(x_i - x_j) \quad \forall i, j.$$

Так как $Am_i = m_i A$ и $Am_j = m_j A$, то

$$x_i - x_j \equiv d_{ij} \in r(m_i A \cap m_j A).$$

Согласно **1.1.2** существуют такие элементы $a_{ij}, b_{ij} \in A$, что

$$1 = a_{ij} + b_{ij}, \quad m_i A a_{ij} + m_j A b_{ij} \subseteq m_i A \cap m_j A.$$

Тогда

$$a_{ij} d_{ij} \in r(m_i A) \equiv A_i, \quad b_{ij} \in r(m_j A) \equiv A_j, \quad x_i - x_j = a_{ij} d_{ij} + b_{ij} d_{ij} \in A_i + A_j.$$

Согласно **3.3.10** существует такой элемент $x \in A$, что $x - x_i \in A_i$ для всех i . Поэтому соотношение $g(y) = yx$, $y \in A$, корректно задает эндоморфизм g модуля ${}_A A$, являющийся продолжением f . $\square$

3.3.12. Теорема. Инвариантное полупервичное кольцо A является арифметическим кольцом в точности тогда, когда каждый подмодуль любого плоского A -модуля является плоским модулем.

Доказательство. Если каждый подмодуль любого плоского A -модуля является плоским модулем, то все 2-порожденные правые идеалы кольца A являются плоскими правыми A -модулями; согласно **3.3.3B**, A — арифметическое кольцо.

Пусть A — инвариантное арифметическое полупервичное кольцо. Тогда A — дистрибутивное редуцированное кольцо. Согласно **3.2.6C**, A — PF кольцо. Согласно **3.1.5A** каждый главный правый идеал — модуль без H -кручения. Поэтому произвольный правый идеал M кольца A обладает следующим свойством: каждый циклический подмодуль модуля M_A является модулем без H -кручения. Согласно **3.1.4**, M_A — модуль без кручения по Хаттори. Согласно **3.2.12**, M_A — плоский модуль. Согласно **3.2.2** все подмодули любого плоского A -модуля являются плоскими. $\square$

3.3.13. Теорема. *Инвариантное полупервичное кольцо A является арифметическим в точности тогда, когда каждый конечно порожденный идеал кольца A является квазипроективным правым A -модулем.*

Теорема **3.3.13** вытекает из **3.3.3С** и теоремы **3.3.11**.

3.3.14. Окончание доказательства теорем 3А, 3В и 3С. Теорема **3А** вытекает из теорем **3.3.12** и **3.3.13**.

Теорема **3В** вытекает из теоремы **3А** и того, что согласно **3.2.3F** можно считать, что A — редуцированное кольцо.

Теорема **3С** вытекает из теоремы **3.3.11**.

3.3.15. Пусть Q — эндоморфизм-поднимаемый модуль, f — эндоморфизм модуля Q , N — такой малый подмодуль в Q , что Q/N — эндоморфизм-поднимаемый модуль. Введем обозначения

$$X_n = N + \sum_{i=1}^n f^i(N), \quad X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n = N + \sum_{i=1}^{\infty} f^i(N).$$

Тогда $X \subseteq J(Q)$ и существует такой эндоморфизм g модуля Q , что

$$(f - g)(Q) \subseteq X, \quad (f - g)(X) \subseteq J(X), \quad g(N) \subseteq N.$$

Для любого натурального числа n положим

$$Y_n = \sum_{i=1}^n f^{i-1}(f - g)(N), \quad Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

Тогда $X_n = N + Y_n$, $X = N + Y$, Y_n — малый подмодуль в X_n , $Y \subseteq J(X)$ и $X = N + J(X)$.

Доказательство. Так как $J(Q)$ — вполне инвариантный подмодуль в Q и $N \subseteq J(Q)$, то

$$X = N + \sum_{i=1}^n f^i(N) \subseteq J(Q).$$

Поскольку $f(X) \subseteq X$, то f индуцирует эндоморфизм f' модуля Q/X . Обозначим через h естественный эпиморфизм $Q/N \rightarrow Q/X$. Так как Q/N — эндоморфизм-поднимаемый модуль, то существует такой эндоморфизм $\bar{g}$ модуля Q/N , что $h\bar{g} = f'h$.

Обозначим через t естественный эпиморфизм $Q \rightarrow Q/N$. Так как Q — эндоморфизм-поднимаемый модуль, то существует такой эндоморфизм g модуля Q , что $tg = \bar{g}t$. По построению имеем $ht(f - g)(Q) = 0$. Поэтому $(f - g)(Q) \subseteq X$. Ясно, что $g(N) \subseteq N$. Кроме того, $X \subseteq J(Q)$. Поэтому $(f - g)(X) \subseteq J(X)$, поскольку $(f - g)(Q) \subseteq X$ и при модульном гомоморфизме радикал Джекобсона переходит в радикал Джекобсона.

Докажем по индукции, что $X_n = N + Y_n$. Пусть $n = 1$. Так как $g(N) \subseteq N$, то

$$X_1 = N + f(N) + g(N) \supseteq N + (f - g)(N) = N + Y_1 \supseteq N + g(N) + (f - g)(N) \supseteq X_1.$$

Теперь допустим, что $X_n = N + Y_n$. Тогда

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + f^{n+1}(N) = X_n + f^n(f(N)) + f^n(g(N)) \supseteq N + Y_n + f^n(f - g)(N) = \\ &= N + Y_{n+1} \supseteq X_n + f^n g(N) + f^n(f - g)(N) \supseteq X_{n+1}. \end{aligned}$$

Так как $(f - g)(Q) \supseteq X$ и N — малый подмодуль в Q , то $(f - g)(N)$ — малый подмодуль в X . Поэтому $f^n(f - g)(N)$ — малый подмодуль в X для всех n , так как $f^n(X) \subseteq X$. Поэтому Y_n — малый подмодуль в X для всех n и $Y \subseteq J(X)$. Так как $X = N + Y$ и $Y \subseteq J(X)$, то $X = N + J(X)$.

□

3.3.16. Пусть выполнены условия **3.3.15** и одно из следующих условий:

- (1) Y — малый подмодуль в X ;
- (2) $X = X_n$ для некоторого n ;
- (3) $J(X)$ — малый подмодуль в X ;
- (4) эндоморфизм f либо идемпотентен, либо нильпотентен.

Тогда $f(N) \subseteq N$.

Доказательство. Для доказательства включения $f(N) \subseteq N$ достаточно доказать, что каждое из условий (1)–(4) влечет за собой равенство $X = N$.

- (1) Если Y — малый подмодуль в X , то $X = N$, поскольку $X = N + Y$.
- (2) Если $X = X_n$, то $X = N + Y_n$, откуда $X = N$, поскольку Y_n — малый подмодуль в X согласно **3.3.15**.
- (3) Если выполнено условие (3), то $X = N$ согласно **3.3.15**.
- (4) Если $f^2 = f$ или $f^n = 0$, то $X_2 = X$ или $X_n = X$. Тогда выполнено (2) и $X = N$. $\square$

3.3.17. Пусть M — эндоморфизм-поднимаемый модуль.

- A.** Q — квазипроективный модуль, N — малый подмодуль в Q . Если $M \cong Q/N$ и для каждого подмодуля X в $J(Q)$ модуль $J(X)$ — малый подмодуль в X , то M — квазипроективный модуль.
- B.** Если M обладает проективным накрытием Q с ядром N и для каждого подмодуля X в $J(Q)$ модуль $J(X)$ — малый подмодуль в X , то M — квазипроективный модуль.

Доказательство. **A.** Выполнено условие (3) из **3.3.16**. Согласно **3.3.16** N — вполне инвариантный подмодуль в Q . Согласно **3.3.4A**, M — квазипроективный модуль.

Утверждение **B** следует из **A**. $\square$

3.3.18. Проективные накрытия и совершенные кольца. Если модуль M изоморфен модулю Q/N , где Q — проективный модуль и N — малый подмодуль в Q , то модуль Q называется проективным накрытием модуля M с ядром N .

A. Для кольца A следующие условия равносильны:

- (1) каждый правый A -модуль обладает проективным накрытием;
- (2) $A/J(A)$ — артиново кольцо и $X \neq J(X)$ для каждого ненулевого правого A -модуля X ;
- (3) $A/J(A)$ — артиново кольцо и $J(A)$ — t -нильпотентный слева идеал.

При выполнении эквивалентных условий (1)–(3) кольцо A называется совершенным справа.

B. Если A — совершенное справа кольцо, то $J(X)$ — малый подмодуль в X для каждого ненулевого правого A -модуля X .

Утверждения из **3.3.18** хорошо известны; например, **A** см. в [29, Theorem 28.4], а **B** вытекает из **3.3.17B**.

3.3.19. Теорема (см. [7]). Пусть A — совершенное справа кольцо и M — правый A -модуль. Следующие условия равносильны:

- (1) M — эндоморфизм-поднимаемый модуль;
- (2) M — квазипроективный модуль;
- (3) M — проективный модуль над факторкольцом $A/r(M)$.

Доказательство. Эквивалентность (2) $\Leftrightarrow$ (3) для правых модулей над совершенными справа кольцами известна (см. [29, Ex. 16, p. 203]). Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) верна всегда. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из **3.3.17**. $\square$

3.3.20. В связи с **3.3.19** заметим, что каждая квазициклическая абелева группа — эндоморфизм-поднимаемый неквазипроективный $\mathbb{Z}$ -модуль.

3.3.21. Открытый вопрос. Пусть A — инвариантное кольцо, в котором все 2-порожденные (все 1-порожденные) правые идеалы являются плоскими. Верно ли, что A — редуцированное кольцо?

ГЛАВА 4

ЭРМИТОВЫ КОЛЬЦА И ПИРСОВСКИЕ СЛОИ

Основными результатами данной главы являются теоремы **4А** и **4В**.

4А. Теорема (А. А. Туганбаев, [16]). *Если A — правое РР кольцо Безу без нецентральных идемпотентов, то A — эрмитово кольцо.*

4В. Теорема (А. А. Туганбаев, [16]). *Если A — кольцо Безу, у которого каждый пирсовский слой является полуценным кольцом, то A — диагонализируемое кольцо.*

4.1. ЭРМИТОВЫ КОЛЬЦА

4.1.1. Пусть A — РР редуцированное кольцо и A имеет классическое правое кольцо частных Q .

А. A содержит все идемпотенты кольца Q .

В. Если Q — строго регулярное кольцо, то A — правое и левое РР кольцо.

С. Если A — правое или левое РР кольцо, то Q — строго регулярное кольцо.

Доказательство. А. Пусть $e = e^2 \in Q$. Существуют такие элементы $a, b \in A$, что b не является делителем нуля в A и $e = xy^{-1}$. Согласно **1.3.2В**, Q — редуцированное кольцо. Так как $e^2 = e$, то

$$xy^{-1}x = x, \quad (xy^{-1} - 1)x = 0.$$

Согласно **1.3.1В**, $x(xy^{-1} - 1) = 0$. Поэтому

$$x^2y^{-1} = x, \quad x^2 = xy, \quad x(y - x) = 0.$$

Согласно **1.3.1В**, $(Ax) \cap (A(y - x)) = 0$. Согласно **3.2.5**

$$Ax \oplus A(y - x) = A(x + (y - x)) = Ay, \quad (Ax \oplus A(y - x))y^{-1} = A.$$

Поэтому $e = xy^{-1} \in A$.

В. Пусть $a \in A$. Так как a — элемент строго регулярного кольца Q , то $a = eu = ue$, где e — центральный идемпотент кольца Q и u — обратимый элемент кольца Q . Согласно **А**, $e \in A$ и $1 - e \in A$. Ясно, что

$$r_Q(a) = (1 - e)Q, \quad r_A(a) = A \cap (1 - e)Q.$$

Так как $1 - e \in A$, то

$$r_A(a) = A \cap (1 - e)Q = (1 - e)A.$$

Поэтому $aA_A \cong A_A/r_A(a) \cong eA_A$, модуль aA_A проективен, и A — правое редуцированное РР кольцо. Согласно **3.2.11**, A — РР кольцо.

С. Пусть $q = ab^{-1} \in Q$, $a, b \in A$ и b не является делителем нуля в A . Согласно **3.2.11**, $a = ed$, где e — центральный идемпотент кольца A и d — неделитель нуля кольца A . Тогда e — центральный идемпотент кольца Q , элемент db^{-1} обратим в кольце Q и $q = edb^{-1}$. Так как каждый элемент кольца Q является произведением центрального идемпотента на обратимый элемент, то Q — строго регулярное кольцо. $\square$

4.1.2. Стабильно конечные кольца. Кольцо A называется *стабильно конечным*, если для любого натурального числа n каждая обратимая справа матрица из кольца матриц A_n обратима слева в A_n .

- A.** Нетерова справа кольцо является стабильно конечным кольцом.
- B.** Каждое прямое произведение стабильно конечных колец является стабильно конечным кольцом.
- C.** Каждое подкольцо стабильно конечного кольца является стабильно конечным кольцом.
- D.** Каждое подкольцо любого прямого произведения нетеровых справа колец стабильно конечно. В частности, каждое подкольцо любого прямого произведения тел стабильно конечно.
- E.** Если Q — строго регулярное кольцо и A — подкольцо в Q , то A стабильно конечно.

Доказательство. Утверждения **A–C** хорошо известны см., например, [86, Proposition 1.9, Corollary 1.10, Proposition 1.13]). Утверждение **D** вытекает из **A–C**.

E. Так как любое строго регулярное кольцо является подпрямым произведением тел, то утверждение вытекает из **D**. $\square$

4.1.3. Пусть A — редуцированное правое кольцо Безу, являющееся РР кольцом.

- A.** Если a и b — два делителя нуля кольца A , то $aA \cap bA$ — ненулевой главный правый идеал кольца A .
- B.** Если a и b — два делителя нуля кольца A , то существуют такие делители нуля a_1 и b_1 кольца A , что $ab_1 = ba_1$ и $aA \cap bA = ab_1A = ba_1A$.
- C.** Кольцо A обладает строго регулярным классическим правым кольцом частных.
- D.** A — стабильно конечное кольцо.

Доказательство. **A.** Согласно **3.2.10B**, $aA \cap bA$ — главный правый идеал.

Допустим, что $aA \cap bA = 0$. Так как A — правое кольцо Безу, то существуют такие элементы $x, y \in A$, что $aA + bA = (ax + by)A$. Поэтому существуют такие элементы $u, v \in A$, что $a = (ax + by)u$ и $b = (ax + by)v$. Тогда

$$a(1 - xu) = byu \in aA \cap bA = 0, \quad b(1 - yv) = axv \in aA \cap bA = 0.$$

Так как a и b не являются делителями нуля, то

$$1 - xu = yu = 1 - yv = xv = 0.$$

Согласно **1.3.1E** все обратимые справа или слева элементы кольца A обратимы. Поэтому из равенств $1 - xu = 1 - yv = 0$ следует, что x, y, u, v — обратимые элементы. Это противоречит равенствам $yu = xv = 0$.

B. Согласно **A**, $aA \cap bA = d_1A$, где d_1 — ненулевой элемент кольца A . Существуют такие элементы $a_1, b_1 \in A$, что $d_1 = ab_1 = ba_1$. Согласно **3.2.11**, $d_1 = ed$, где e — ненулевой центральный идемпотент кольца A и d — делитель нуля кольца A .

Если $e = 1$, то $d_1 = d = ab_1 = ba_1$ — делитель нуля, a_1 и b_1 — делители нуля, и все доказано.

Допустим, что $e \neq 1$. Тогда $1 - e$ — ненулевой центральный идемпотент и $(1 - e)A$ — ненулевое редуцированное правое кольцо Безу, в котором все главные правые идеалы проективны. Кроме того, $(1 - e)a$ и $(1 - e)b$ — делители нуля кольца $(1 - e)A$ и $(1 - e)aA \cap (1 - e)bA = (1 - e)(aA \cap bA) = (1 - e)edA = 0$. Это противоречит утверждению **A**, примененному к кольцу $(1 - e)A$.

C. Согласно **4.1.1C** достаточно доказать, что A имеет классическое правое кольцо частных Q . Достаточно доказать, что для любых элементов $x, b \in A$, где b — делитель нуля, найдутся такие элементы $x_1, b_1 \in A$, что b_1 — делитель нуля и $xb_1 = bx_1$.

Согласно **3.2.11**, $x = ea$, где e — центральный идемпотент кольца A и a — делитель нуля кольца A . Согласно **B** существуют такие делители нуля a_1 и b_1 кольца A , что $ab_1 = ba_1$. Введем обозначение $x_1 = ea_1$; тогда $xb_1 = bx_1$.

Утверждение **D** вытекает из **C** и **4.1.2**. $\square$

4.1.4. (См. [25]). Пусть A — правое кольцо Безу и для любого левого делителя нуля $a \in A$ правый идеал $r(a)$ конечно порожден.

- А.** Если V — свободный правый A -модуль с базисом $\{v_1, \dots, v_n\}$, то каждый конечно порожденный подмодуль W в V порождается n элементами $w_k = v_k r_{kk} + \dots + v_n r_{kn}$, где $r_{kk}, \dots, r_{kn} \in A$, $k = 1, \dots, n$.
- В.** Кольцо A_n всех $(n \times n)$ -матриц над A является правым кольцом Безу, причем каждый конечно порожденный правый идеал кольца A порождается нижней треугольной матрицей.
- С.** Если M — произвольная $(n \times m)$ -матрица над кольцом A , то существует нижняя треугольная $(n \times m)$ -матрица D и такие две матрицы P и Q , что $DQ = M$ и $MP = D$.

Доказательство. **А.** Введем обозначение $V^k = v_k A + \dots + v_n A$. Пусть $I^{(k)}$ — правый идеал кольца A , состоящий из всех элементов $r_k \in A$, для которых существуют элементы $v \in V^k \cap W$ вида $v = v_k r_k + \dots + v_n r_{kn}$. Ясно, что $I^{(k)}$ — правый идеал.

Сначала заметим, что если W порождается элементами $u_1, \dots, u_m$, то $I^{(1)}$ — правый идеал, порожденный m коэффициентами при v_1 в выражении элементов $\{u_j\}$. Так как A — правое кольцо Безу, то $I^{(1)} = r_{11}A$ для некоторого $r_{11} \in A$, и существует такой элемент $w_1 \in W$, что $w_1 = v_1 r_{11} + \dots + v_n r_{1n}$. Из определения $I^{(1)}$ следует, что для каждого элемента $v \in W$ существует такой элемент $x \in A$, что $v - w_1 x \in V^{(2)}$.

Далее мы утверждаем, что $V^{(2)} \cap W$ — конечно порожденный модуль. Действительно, пусть $w \in V^{(2)} \cap W$. Возьмем такой элемент $x_i \in A$, что $u_i - w_1 x_i \in V^{(2)}$. Так как множество $\{u_i\}$ порождает W , то

$$w = \sum u_i y_i = \sum (u_i - w_1 x_i) y_i + w_1 \cdot \sum x_i y_i. \quad (*)$$

Так как $w \in V^2$, то w имеет нулевой коэффициент при v_1 . Поэтому коэффициент при v_1 в правой части $(*)$ равен $r_{11} \cdot \sum x_i y_i = 0$, т.е. $\sum x_i y_i \in r(r_{11})$. Кроме того, если $a \in r(r_{11})$, то $wa \in V^{(2)} \cap W$. Поэтому $V^{(2)} \cap W$ порождается конечным множеством

$$\{u_1 - w_1 x_1, \dots, u_m - w_1 x_m, w_1 m_1, \dots, w_1 m_t\},$$

где $\{m_1, \dots, m_t\}$ — конечное множество образующих правого аннулятора $r(r_{11})$; это множество конечно по условию.

Оставшаяся часть доказательства легко проверяется индукцией по n .

В. Пусть I — конечно порожденный правый идеал кольца A_n , V — свободный n -порожденный правый A -модуль с базисом $\{v_1, \dots, v_n\}$, где v_i — столбец высоты n , у которого координата с номером i равна единице кольца A , а остальные координаты равны нулю кольца A . Обозначим через W подмодуль в V_A , порожденный всеми столбцами матриц из I . Так как I — конечно порожденный правый идеал кольца A_n , то W — конечно порожденный A -модуль. Согласно **А** модуль W_A порождается столбцами

$$w_1 = \begin{pmatrix} r_{11} \\ \vdots \\ r_{n1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad w_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ r_{kk} \\ \vdots \\ r_{nk} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad w_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через P нижнюю треугольную матрицу, образованную всеми столбцами w_j .

Докажем, что $I = PA_n$. Пусть E_{ik} — матрица из A_n , у которой 1 в позиции ij и нули на остальных местах. Так как $w_j \in W$, то w_j появляется в строке с номером $k = k(j)$ некоторой матрицы $P_j \in I$. Поэтому $P = \sum P_j E_{kj} \in I$.

Для любой матрицы $Q \in I$ столбец с номером j матрицы Q является линейной комбинацией $\sum w_i r_{ij}$. Поэтому $QE_{jj} = P(r)_{jj}$, где $(r)_{jj}$ — матрица, содержащая $(r_{1j} \dots r_{nj})^T$ в качестве столбца с номером j и нули на остальных позициях. Поэтому $Q = \sum QE_{jj} = P(r)_{jj}$, и доказательство завершено.

Утверждение **С** вытекает из доказательства **В**. □

4.1.5. Теорема (см. [25]). *Область A является эрмитовым справа кольцом в точности тогда, когда A — правое кольцо Безу.*

Доказательство. Каждое эрмитово справа кольцо является правым кольцом Безу согласно **2.2.3В**.

Теперь пусть A — правая область Безу и $a, b \in A$. Нужно доказать, что $(a \ b)P = (d \ 0)$ для некоторой обратимой матрицы $P \in A_2$.

Если $a = 0$, то можно взять обратимую матрицу $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Допустим теперь, что $a \neq 0$. Тогда $aA + bA = dA$ для некоторого ненулевого элемента $d \in aA + bA$. Применим **4.1.4С** к правой области Безу A и матрице

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно **4.1.4С** существуют такие (2×2) -матрицы $P, Q \in A_2$, что

$$MP = \begin{pmatrix} d & 0 \\ u & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d & 0 \\ u & v \end{pmatrix} Q = M.$$

Тогда $(a \ b)P = (d \ 0)$ и $MPQ = M$. Остается доказать, что матрица P обратима. Из явного вида матрицы M и того факта, что a не является делителем нуля в A , заключаем, что M не является делителем нуля в кольце матриц A_2 . Поэтому PQ — единичная матрица. Согласно **4.1.3Д**, A — стабильно конечное кольцо. Поэтому матрица P обратима. $\square$

4.1.6. Кольца с диагонализруемыми квадратными матрицами.

А. (См. [92, с. 18]). *Если A — кольцо всех нижних треугольных (2×2) -матриц над полем, то все квадратные матрицы над A диагонализруемы, но A — недиагонализруемое кольцо.*

В. *Если A — эрмитово кольцо и каждая квадратная матрица над A диагонализруема, то A — диагонализруемое кольцо.*

Доказательство. Требуется доказать, что произвольная прямоугольная $(m \times n)$ -матрица M над кольцом A диагонализруема. По условию можно считать, что $m \neq n$.

Допустим, что $m > n$. Так как A — эрмитово слева кольцо, то существует такая обратимая $(m \times m)$ -матрица U , что UM — верхняя треугольная матрица. Матрица UM имеет вид $\begin{pmatrix} S \\ O \end{pmatrix}$, где S — квадратная $(n \times n)$ -матрица и O — нулевая $((m - n) \times n)$ -матрица. По условию существуют такие обратимые $(n \times n)$ -матрицы P и Y , что $PSY = D$ — диагональная $(n \times n)$ -матрица. Пусть E — единичная $((m - n) \times (m - n))$ -матрица. Обозначим через X обратимую $(m \times m)$ -матрицу

$$X = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} U.$$

Тогда

$$X \cdot M \cdot Y = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ O \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} D \\ O \end{pmatrix}$$

— диагональная матрица. Случай $m < n$ рассматривается аналогично. $\square$

4.2. ПИРСОВСКИЕ СЛОИ

4.2.1. Пусть A — кольцо и $S(A)$ — множество всех собственных идеалов кольца A , порожденных некоторыми множествами центральных идемпотентов. (Так как $0 \in S(A)$, то $S(A) \neq \emptyset$.)

По лемме Цорна множество $S(A)$ содержит максимальные элементы, которые называются *пирсовскими идеалами* кольца A . Эти пирсовские идеалы P образуют множество $\mathcal{P}(A)$, а факторкольца A/P называются *пирсовскими слоями* кольца A . О пирсовских слоях см., например, [44, 45, 111].

Пусть P — собственный идеал кольца A , порожденный некоторым множеством $\{e_i\}_{i \in I}$ центральных идемпотентов кольца A , и $h : A \rightarrow A/P$ — естественный эпиморфизм.

А. Если кольцо A/P не является пирсовским слоем кольца A , то существует такой центральный идемпотент $e \in A$, что $P + eA$ и $P + (1 - e)A$ — собственные идеалы кольца A , порожденные центральными идемпотентами, идеалы $P + eA$ и $P + (1 - e)A$ строго содержат идеал P ,

$$A = (P + eA) + (P + (1 - e)A), \quad P = (P + eA)(P + (1 - e)A) = \\ = (P + (1 - e)A)(P + eA) = (P + eA) \cap (P + (1 - e)A),$$

и кольцо A/P изоморфно прямому произведению ненулевых колец $h(eA)$ и $h((1 - e)A)$.

- В.** Для любого конечного подмножества P' идеала P существует такой центральный идемпотент $e \in P$, что P' содержится в кольцевом прямом сомножителе eA кольца A .
- С.** Для любого идемпотента $\bar{f} \in A/P$ существует такой идемпотент $f \in A$, что $h(f) = \bar{f}$.
- Д.** Если A/P — пирсовский слой кольца A и e — центральный идемпотент кольца A , то либо $e \in P$, либо $1 - e \in P$.
- Е.** Если A/P — неразложимое кольцо, то A/P — пирсовский слой кольца A .
- Ф.** Существует хотя бы один такой пирсовский слой A/E , что $P \subseteq E$.
- Г.** Если d — элемент в A с нулевым правым (левым) аннулятором и A/P — пирсовский слой, то в кольце A/P элемент $d + P$ имеет нулевой правый (левый) аннулятор.
- Н.** Если $A - PF$ кольцо, то $A/P - PF$ кольцо.
- И.** Любое конечное множество ортогональных идемпотентов $\{\bar{f}\}_{i=1}^n$ кольца A/P поднимается до некоторого множества $\{f_i\}_{i=1}^n$ ортогональных идемпотентов кольца A .
- Ж.** Любое счетное множество ортогональных идемпотентов $\{\bar{f}\}_{i=1}^\infty$ кольца A/P поднимается до некоторого счетного множества $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ ортогональных идемпотентов кольца A .
- К.** Если A не содержит бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов, то кольцо A/P не содержит бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов.
- Л.** Если A не содержит бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов и A/P — пирсовский слой кольца A , то A/P не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов.
- М.** Если A — правое кольцо Безу, то каждый пирсовский слой P кольца A является правым кольцом Безу.

Доказательство. А. Так как идеал P порождается центральными идемпотентами и A/P не является пирсовским слоем, то существует такой центральный идемпотент $e \in A \setminus P$, что $P + eA$ — собственный идеал в A . Тогда $P + (1 - e)A$ — собственный идеал в A , поскольку в противном случае $e \in e(P + (1 - e)A) \subseteq P$. Идеал $P + (1 - e)A$ строго содержит P , поскольку в противном случае $1 = (1 - e) + e \in P + eA$. Оставшиеся утверждения проверяются непосредственно.

В. Достаточно доказать, что для любого элемента $p \in P$ существует такой центральный идемпотент $e \in P$, что p принадлежит кольцевому прямому сомножителю eA кольца A . Существует такое конечное подмножество $\{e_1, \dots, e_n\}$ множества $\{e_i\}_{i \in I}$ центральных идемпотентов, являющихся образующими для идеала P , что $p \in \sum_{i=1}^n e_i A$. Существует такой центральный идемпотент $e \in A$, что

$$eA = \sum_{i=1}^n e_i A.$$

Поэтому $p \in eA$.

С. Пусть $\bar{f} = h(a)$, где $a \in A$. Тогда $a - a^2 \in P$. Согласно **В** существует такой центральный идемпотент $e \in P$, что $a - a^2 \in eA$. Тогда

$$a - a^2 = ea - ea^2, \quad a(1 - e) - (a(1 - e))^2 = 0.$$

Поэтому $a(1 - e)$ — идемпотент кольца A и $h(a(1 - e)) = h(a) = \bar{f}$.

Д. Допустим, что $e \notin P$. Так как A/P — пирсовский слой кольца A и e — центральный идемпотент, то $P + eA = A$. Тогда $1 = ea + p$ для некоторых $a \in A$ и $p \in P$. Тогда

$$1 - e = (1 - e)(ea + p) = (1 - e)p \in P.$$

Утверждение **Е** следует из **А**.

Ф. Пусть $\mathcal{E}$ — множество всех собственных идеалов в A , которые содержат P и порождаются центральными идемпотентами в A . Так как $P \in \mathcal{E}$, то $\mathcal{E} \neq \emptyset$. По лемме Цорна достаточно доказать, что если E — объединение возрастающей цепи идеалов $E_i \in \mathcal{E}$, $i \in I$, то $E \in \mathcal{E}$. Так как все идеалы E_i порождаются центральными идемпотентами, то E порождается центральными идемпотентами. Остается доказать, что $E \neq A$. Допустим противное. Тогда $1 \in E = \bigcup_{i \in I} E_i$.

Поэтому 1 лежит в некотором собственном идеале E_i в A ; противоречие.

Г. Пусть $r_A(d) = 0$, $a \in A$ и $da \in P$. Согласно **В** существует такой центральный идемпотент $e \in P$, что $da \in eA$. Тогда $da(1 - e) = 0$. Так как $r(d) = 0$, то $a(1 - e) = 0$ и $a = ae \in P$. Поэтому $r_{A/P}(d + P) = 0$.

Н. Пусть $a, b \in A$ и $h(a)h(b) = 0$. Тогда $ab \in P$. Согласно **В** существует такой центральный идемпотент $e \in P$, что $ab \in eA$. Тогда $a(1 - e)b = 0$. Так как A — PF кольцо, то согласно **3.2.3** существуют такие элементы $x, y \in A$, что

$$\begin{aligned} x + y &= 1, & a(1 - e)x &= 0, & y(1 - e)b &= 0, \\ h(x) + h(y) &= h(1), & h(a)h(x) &= 0, & h(y)h(b) &= 0. \end{aligned}$$

Согласно **3.2.3**, A/P — PF кольцо.

И. Существуют такие элементы $a_1, \dots, a_n \in A$, что $\bar{f}_i = h(a_i)$ для всех i . Тогда $a_i - a_i^2 \in P$ для всех i , причем $a_i a_j \in P$ при $i \neq j$. Согласно **В** существует такое конечное подмножество $J = \{e_1, \dots, e_n\}$ в I , что идеал $\sum_{i \in J} e_i A$ содержит все элементы $a_i - a_i^2$ и $a_i a_j \in P$, где $i, j \in J$, $i \neq j$. Существует такой центральный идемпотент $e \in P$, что $eA = \sum_{i \in J} e_i A$. Положим $f_i = a_i(1 - e)$,

$i = 1, \dots, n$. Тогда $h(f_i) = h(a_i)$ для всех i . Кроме того, все элементы $f_i - f_i^2$ и $e_i e_j$ ($i \neq j$) лежат в идеале $fA \cap (1 - f)A = 0$. Поэтому $f_1, \dots, f_n$ — искомые ортогональные идемпотенты кольца A .

Ж. Существует такое счетное множество $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов кольца A , что $\bar{e}_i = h(a_i)$ для всех i . Пусть $n \in \mathbb{N}$. Согласно **И** существует такое множество ортогональных идемпотентов $\{e_i\}_{i=1}^n$ кольца A , что $h(e_i) = \bar{e}_i$ при $i = 1, \dots, n$. Теперь достаточно доказать существование такого идемпотента $e_{n+1} \in A$, что идемпотенты $e_1, \dots, e_{n+1}$ ортогональны и $h(e_{n+1}) = \bar{e}_{n+1}$. Идеал P содержит элементы $a_{n+1} - a_{n+1}^2$, $e_i a_{n+1}$, $a_{n+1} e_i$ при $i = 1, \dots, n$. Существуют такие центральные идемпотенты $f_1, \dots, f_m \in P$, что идеал $\sum_{k=1}^m f_k A$ содержит элементы

$$a_{n+1} - a_{n+1}^2, \quad e_i a_{n+1}, \quad a_{n+1} e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Существует такой центральный идемпотент f кольца A , что

$$fA = \sum_{k=1}^m f_k A.$$

Введем обозначение $e_{n+1} = a_{n+1}(1 - f)$. Тогда $h(e_{n+1}) = h(a_{n+1})$. Кроме того, элементы

$$e_{n+1} - e_{n+1}^2, \quad e_i e_{n+1}, \quad e_{n+1} e_i, \quad i \neq j,$$

лежат в идеале $fA \cap (1 - f)A = 0$ при $i = 1, \dots, n$. Поэтому $e_1, \dots, e_{n+1}$ — ортогональные идемпотенты кольца A .

Утверждение **К** следует из **Ж**.

Л. Допустим, что пирсовский слой A/P содержит счетное множество $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ нетривиальных ортогональных идемпотентов. Пусть $h : A \rightarrow A/P$ — естественный эпиморфизм. Согласно **Ж** A содержит такое счетное множество ортогональных идемпотентов $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq A \setminus P$, что $h(e_i) = \bar{e}_i$ для

всех i . Так как A не содержит бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов, то существует центральный идемпотент $e \in \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Поскольку A/P — пирсовский слой, то $A = P + eA$. Тогда $h(e) = h(1)$, что противоречит нетривиальности идемпотента $h(e)$ кольца $h(A)$.

М. Утверждение следует из того, что каждое фактор-кольцо правого кольца Безу является правым кольцом Безу. $\square$

4.2.2. Пусть M — правый модуль над кольцом A и $\{A/P_i\}_{i \in I}$ — множество всех пирсовских слоев кольца A .

- А.** Если $0 \neq m \in M$, то $m \notin MP_i$ для некоторого пирсовского слоя A/P_i .
- В.** $\bigcap_{i \in I} (MP_i) = 0$; в частности, A — подпрямое произведение своих пирсовских слоев.
- С.** Если N — подмодуль в M и $m \notin N$, то $m \notin N + MP_i$ для некоторого пирсовского слоя A/P_i .
- Д.** Если N — подмодуль в M , $m \in M$ и $m \in N + MP$ для каждого пирсовского слоя A/P , то $m \in N$.
- Е.** Для каждого ненулевого правого A -модуля M существует хотя бы один такой пирсовский слой A/P_i , что $M \neq MP_i$.
- Ф.** Для каждого неразложимого правого A -модуля X существует такой пирсовский слой A/P , что $P \subseteq r(X)$.
- Г.** Если все идемпотенты любого пирсовского слоя A/P кольца A центральны, то все идемпотенты кольца A центральны.
- Н.** Если любой пирсовский слой кольца A не имеет нетривиальных идемпотентов, то все идемпотенты кольца A центральны.

Доказательство. **А.** Пусть $\{B_j\}_{j \in J}$ — множество всех таких собственных идеалов B_j в A , что B_j порождается центральными идемпотентами в A и $m \notin MB_j$. Множество $\{B_j\}$ не пусто, поскольку содержит нулевой идеал. Кроме того, непосредственно проверяется, что $\{B_j\}$ содержит объединение любой возрастающей цепи его элементов. По лемме Цорна $\{B_j\}$ содержит максимальный элемент P . Тогда $m \notin MP$. Достаточно доказать, что A/P — пирсовский слой кольца A . Допустим противное. Согласно **4.2.1А**, $P = QS = SQ$ для некоторых таких собственных идеалов Q и S , что Q и S строго содержат P , $A = Q + S$ и Q и S порождаются центральными идемпотентами. Так как P — максимальный элемент в $\{B_j\}$, то

$$m \in MQ \cap MS = (MQ \cap MS)(Q + S) \subseteq MSQ + MQS = MP,$$

противоречие.

Утверждение **В** следует из **А**.

С. Применим **А** к ненулевому элементу $m + N \in M/N$. Согласно **А**

$$m + N \notin (M/N)P_i = (N + MP_i)/N$$

для некоторого пирсовского слоя A/P_i . Поэтому $m \notin N + MP_i$.

Утверждения **Д** и **Е** следуют из **С** и **В** соответственно.

Ф. Пусть P — идеал в A , порожденный множеством всех центральных идемпотентов в A , содержащихся в идеале $r(X)$. Достаточно доказать, что $P + eA = A$ для любого центрального идемпотента $e \in A \setminus P$. Так как $e \in A \setminus r(X)$ по определению идеала P , то Xe — ненулевой подмодуль неразложимого модуля $X = Xe \oplus X(1 - e)$. Тогда

$$X(1 - e) = 0, \quad 1 - e \in r(X).$$

Поэтому $1 - e \in P$. Тогда $A = (1 - e)A + eA \subseteq P + eA$.

Г. Пусть $e = e^2 \in A$, $a \in A$, A/P — пирсовский слой и $h : A \rightarrow A/P$ — естественный эпиморфизм. Надо доказать, что $ea - ae = 0$ для любого элемента $a \in A$. Согласно **В**, A — подпрямое произведение своих пирсовских слоев. Поэтому достаточно показать, что $h(ea - ae) = 0$; это так по условию.

Утверждение **Н** следует из **г**. $\square$

4.2.3. Пусть A — правое РР кольцо, у которого все идемпотенты центральны.

А. Каждый пирсовский слой A/P кольца A является областью.

В. Если A — правое кольцо Безу, то каждый пирсовский слой кольца A является эрмитовым справа кольцом.

Доказательство. **А.** Пусть A/P — пирсовский слой, $h : A \rightarrow A/P$ — естественный эпиморфизм. Допустим, что $h(a)h(b) = h(0)$, где $a, b \in A$ и $h(a) \neq h(0)$, т.е. $a \notin P$ и $ab \in P$. Согласно **4.2.1В** существует такой центральный идемпотент $e \in P$, что ab содержится в кольцевом прямом сомножителе eA кольца A . Тогда $ab(1-e) = 0$. По условию существует такой центральный идемпотент f кольца A , что $r_A(a) = fA$. Поэтому

$$b(1-e) = b(1-e)f.$$

Согласно **4.2.1D** либо $h(f) = h(0)$, либо $h(f) = h(1)$, т.е. либо $1-f \in P$, либо $f \in P$.

Допустим, что $1-f \in P$. Тогда

$$h(f) = h(1), \quad h(a) = h(af) = h(0);$$

противоречие, так как $h(a) \neq h(0)$.

Допустим, что $f \in P$. Тогда

$$b = be + b(1-e)f \in P, \quad h(b) = h(0)$$

и A/P — область.

В. Пусть A/P — пирсовский слой кольца A . Согласно **А** и **4.2.1D**, A/P — правая область Безу. Согласно **4.1.5**, A/P — эрмитово справа кольцо. $\square$

4.2.4. Образы целых чисел в кольцах. Когда мы рассматриваем целое число z как элемент некоторого фактор-кольца $\bar{A}$ кольца A , то мы имеем в виду элемент $\alpha(z)$ при естественном унитарном кольцевом гомоморфизме $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \bar{A}$.

4.2.5. Пусть A — кольцо, $a_1, \dots, a_m \in A$ и $f_1, \dots, f_k$ — многочлены с целыми коэффициентами от некоммутирующих переменных $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$. Для каждого фактор-кольца A/P обозначим через h_P естественный кольцевой эпиморфизм $A \rightarrow A/P$. Следующие условия равносильны:

(1) существуют такие элементы $b_1, \dots, b_n$ кольца A , что

$$f_j(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) = 0, \quad j = 1, \dots, k;$$

(2) для каждого фактор-кольца A/P кольца A существуют такие элементы $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ кольца A/P , что в A/P верны равенства

$$f_j(h_P(a_1), \dots, h_P(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) = h_P(0), \quad j = 1, \dots, k;$$

(3) для каждого пирсовского слоя A/P кольца A существуют такие элементы $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ кольца A/P , что в A/P верны равенства

$$f_j(h_P(a_1), \dots, h_P(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) = h_P(0), \quad j = 1, \dots, k.$$

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) и (2) $\Rightarrow$ (3) очевидны.

(3) $\Rightarrow$ (1). Назовем фактор-кольцо A/P *специальным*, если существуют такие элементы $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ кольца A/P , что в A/P верны равенства

$$f_i(h_P(a_1), \dots, h_P(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всех таких собственных идеалов E в A , что A/E не специально. Через $\mathcal{E}^*$ обозначим подмножество в $\mathcal{E}$, образованное всеми элементами из $\mathcal{E}$, являющимися идеалами в A , порожденными какими-либо множествами центральных идемпотентов. Заметим, что множества $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$ могут быть пустыми.

Допустим, что утверждение (1) не верно, а (3) верно. Так как $0 \in \mathcal{E}^*$, то $\mathcal{E}^* \neq \emptyset$. Непосредственно проверяется, что объединение любой возрастающей цепи идеалов из $\mathcal{E}^*$ лежит в $\mathcal{E}^*$. По лемме Цорна $\mathcal{E}^*$ содержит максимальный элемент P . По условию (3) достаточно доказать, что A/P — пирсовский слой. Допустим противное. Тогда существует такой центральный идемпотент

$e \in A$, что $P + eA$ и $P + (1 - e)A$ — собственные идеалы в A , $P + eA$ и $P + (1 - e)A$ строго содержат P и

$$A/P \cong (A/(P + eA)) \times (A/(P + (1 - e)A)). \quad (*)$$

Идеалы $P + eA$ и $P + (1 - e)A$ порождаются некоторыми множествами центральных идемпотентов. Кроме того, $P + eA$ и $P + (1 - e)A$ не лежат в $\mathcal{E}^*$. Поэтому $A/(P + eA)$ и $A/(P + (1 - e)A)$ — специальные кольца. Поскольку справедливо (*), непосредственно проверяется, что A/P — специальное кольцо; противоречие. $\square$

4.2.6. Пусть A — кольцо, $\{P_i\}_{i \in I}$ — множество всех пирсовских идеалов кольца A и $h_i : A \rightarrow A/P_i$ — естественные кольцевые эпиморфизмы. Иногда мы пишем $\bar{a}$ вместо $h_i(a)$.

A. Если

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

— (2×2) -матрица, где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in A$, и для любого $i \in I$ матрица

$$M_i = \begin{pmatrix} h_i(a_{11}) & h_i(a_{12}) \\ h_i(a_{21}) & h_i(a_{22}) \end{pmatrix}$$

обратима слева в кольце (2×2) -матриц над пирсовским слоем A/P_i , то матрица M обратима слева в кольце (2×2) -матриц над A .

B. Пусть a_1 и a_2 — элементы кольца A . Если для каждого $i \in I$ существуют такие элементы $\bar{b}_{11}, \bar{b}_{12}, \bar{b}_{21}, \bar{b}_{22} \in A/P_i$, что матрица

$$M_i = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} \end{pmatrix}$$

обратима справа в кольце (2×2) -матриц над A/P_i , причем произведение $(h_i(a_1), h_i(a_2))M_i$ — это строка длины 2 с нулевым вторым элементом, то существуют такие элементы $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in A$, что матрица

$$M = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

обратима справа в кольце (2×2) -матриц над A , причем произведение $(a_1, a_2)M$ — это строка длины 2 с нулевым вторым элементом.

C. Если каждый пирсовский слой A/P_i кольца A является эрмитовым справа кольцом, то A — эрмитово справа кольцо.

D. Если n — натуральное число и каждая $(n \times n)$ -матрица над любым пирсовским слоем A/P_i кольца A диагонализирована, то каждая $(n \times n)$ -матрица над кольцом A диагонализирована.

E. Если каждый пирсовский слой A/P_i кольца A является эрмитовым кольцом, над которым каждая квадратная матрица диагонализирована, то A — диагонализированное кольцо.

F. Если каждый пирсовский слой A/P_i кольца A является полулокальным правым кольцом Безу, то A — эрмитово справа кольцо.

G. Если каждый пирсовский слой A/P_i кольца A является полуцепным кольцом Безу, то A — диагонализированное кольцо.

H. Если A — кольцо Безу, у которого каждый пирсовский слой является полуцепным кольцом, то A — диагонализированное кольцо.

I. Если каждый пирсовский слой A/P_i кольца A является правой областью Безу, то A — эрмитово справа кольцо.

J. Если A — PF редуцированное кольцо, в котором правый аннулятор каждого элемента — конечно порожденный правый идеал, то A — PP кольцо, и каждый пирсовский слой кольца A является областью.

Доказательство. А. Рассмотрим следующие многочлены f_1, f_2, f_3, f_4 от некоммутирующих переменных $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$:

$$\begin{aligned} f_1 &= y_{11}x_{11} + y_{12}x_{21} - 1, & f_2 &= y_{11}x_{12} + y_{12}x_{22}, \\ f_3 &= y_{21}x_{11} + y_{22}x_{21}, & f_4 &= y_{21}x_{12} + y_{22}x_{22} - 1. \end{aligned}$$

Левая обратимость матрицы M в кольце (2×2) -матриц над A равносильна существованию таких элементов $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ кольца A , что

$$f_j(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Так как для любого $i \in I$ матрица

$$M_i = \begin{pmatrix} h_i(a_{11}) & h_i(a_{12}) \\ h_i(a_{21}) & h_i(a_{22}) \end{pmatrix}$$

обратима слева в кольце (2×2) -матриц над пирсовским слоем A/P_i , то существуют такие элементы $\bar{b}_{11}, \bar{b}_{12}, \bar{b}_{21}, \bar{b}_{22}$ кольца A/P_i , что в кольце A/P_i верны равенства

$$f_j(h_i(a_{11}), h_i(a_{12}), h_i(a_{21}), h_i(a_{22}), \bar{b}_{11}, \bar{b}_{12}, \bar{b}_{21}, \bar{b}_{22}) = h_i(0), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Согласно 4.2.5 существуют такие элементы $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ кольца A , что

$$f_j(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Поэтому матрица M обратима слева в кольце (2×2) -матриц над A .

В. Рассмотрим следующие многочлены $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ от некоммутирующих переменных $x_1, x_2, z, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, y'_{11}, y'_{12}, y'_{21}, y'_{22}$:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1y_{11} + x_2y_{21} - z, & f_2 &= x_1y_{12} + x_2y_{22}, \\ f_3 &= y_{11}y'_{11} + y_{12}y'_{21} - 1, & f_4 &= y_{11}y'_{12} + y_{12}y'_{22}, \\ f_5 &= y_{21}y'_{11} + y_{22}y'_{21}, & f_6 &= y_{21}y'_{12} + y_{22}y'_{22} - 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим произвольный пирсовский слой A/P_i . Из условия следует существование таких элементов $\bar{d}, \bar{b}_{11}, \bar{b}_{12}, \bar{b}_{21}, \bar{b}_{22}, \bar{b}'_{11}, \bar{b}'_{12}, \bar{b}'_{21}, \bar{b}'_{22} \in A/P_i$, что

$$f_j(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{d}, \bar{b}_{11}, \bar{b}_{12}, \bar{b}_{21}, \bar{b}_{22}, \bar{b}'_{11}, \bar{b}'_{12}, \bar{b}'_{21}, \bar{b}'_{22}) = h_i(0), \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Согласно 4.2.5 существуют такие элементы $d, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, b'_{11}, b'_{12}, b'_{21}, b'_{22} \in A$, что

$$f_j(a_1, a_2, d, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, b'_{11}, b'_{12}, b'_{21}, b'_{22}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Введем (2×2) -матрицы

$$M = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ b'_{21} & b'_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда $M \cdot M'$ — единичная (2×2) -матрица. Поэтому матрица M обратима справа. Кроме того, $(a_1, a_2)M = (d, 0)$ — строка длины 2 с нулевым вторым элементом.

С. Пусть a_1 и a_2 — два элемента кольца A . Так как каждый пирсовский слой A/P_i кольца A является эрмитовым справа кольцом, то для каждого $i \in I$ существуют такие элементы $\bar{b}_{11}, \bar{b}_{12}, \bar{b}_{21}, \bar{b}_{22} \in A/P_i$, что матрица

$$M_i = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} \end{pmatrix}$$

обратима справа и слева в кольце (2×2) -матриц над A/P_i , причем произведение $(h_i(a_1), h_i(a_2))M_i$ — это строка длины 2 с нулевым вторым элементом $h_i(0)$. Согласно В существуют такие элементы $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in A$, что матрица

$$M = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

обратима справа в кольце (2×2) -матриц над A , причем произведение $(a_1, a_2)M$ — это строка длины 2 с нулевым вторым элементом 0. Так как все матрицы M_i обратимы слева в кольце

(2×2) -матриц над A/P_i , то согласно (1) обратимая справа матрица M также обратима слева. Поэтому A — эрмитово справа кольцо.

Доказательство утверждения **D** аналогично доказательству **C**.

E. Согласно **C**, A — эрмитово кольцо. Согласно **D**, каждая квадратная матрица над A диагонализируема. Согласно **4.1.6B**, A — диагонализируемое кольцо.

F. Каждое полулокальное правое кольцо Безу является эрмитовым справа (см. [114]). Поэтому каждый пирсовский слой кольца A является эрмитовым справа кольцом. Согласно **C**, A — эрмитово справа кольцо.

G. Так как каждое полулокальное кольцо Безу является эрмитовым (см. [114]) и каждая квадратная матрица над полуцепным кольцом диагонализируема (см. [92]), то согласно **E**, A — диагонализируемое кольцо.

Утверждение **H** вытекает из **G** и того факта, что каждое фактор-кольцо кольца Безу является кольцом Безу.

I. По условию каждый пирсовский слой A/P_i кольца A является правой областью Безу. Согласно **4.1.5** каждая правая область Безу является эрмитовым справа кольцом. Поэтому каждый пирсовский слой A/P_i кольца A является эрмитовым справа кольцом. Согласно **C**, A — эрмитово справа кольцо.

J. Пусть $a \in A$. По условию aA — плоский правый A -модуль. Так как модуль aA_A изоморфен фактор-модулю $A_A/r(a)$ свободного модуля A_A и $r(A)$ — конечно порожденный правый A -модуль, то aA — конечно представимый плоский A -модуль. Так как все конечно представимые плоские модули проективны, то модуль aA_A проективен и A — правое РР кольцо. Согласно **3.2.11**, A — РР кольцо. Согласно **4.2.2B** каждый пирсовский слой кольца A является областью. $\square$

4.2.7. Теорема. Пусть A — редуцированное кольцо, в котором правый аннулятор каждого элемента — конечно порожденный правый идеал. Кольцо A является правым кольцом Безу в точности тогда, когда A — эрмитово справа кольцо. При этих условиях A — полунаследственное справа стабильно конечное кольцо, которое обладает строго регулярным классическим правым кольцом частных Q и содержит все идемпотенты кольца Q . Кроме того, каждый конечно порожденный правый идеал B кольца A является квазипроективным правым A -модулем и свободным циклическим правым $A/r(B)$ -модулем.

Доказательство. Если A — эрмитово справа кольцо, то A — правое кольцо Безу согласно **2.2.3B**.

Пусть A — правое кольцо Безу. Согласно **3.2.6D**, A — РР кольцо. Согласно **4.2.6J**, A — РР кольцо, и каждый пирсовский слой кольца A является областью. Так как область A/P является фактор-кольцом правого кольца Безу A , то A/P — правая область Безу. Согласно **4.1.5**, A/P — эрмитово справа кольцо. Согласно **4.2.6I**, A — эрмитово справа кольцо.

Пусть выполнены указанные выше эквивалентные условия. Согласно **4.2.6J**, A — правое РР кольцо и правое кольцо Безу. Поэтому A — полунаследственное справа кольцо. Согласно **4.1.3**, A — стабильно конечное кольцо, обладающее строго регулярным классическим правым кольцом частных. Согласно **4.1.1A**, A содержит все идемпотенты кольца Q . Согласно **3.2.6E** каждый конечно порожденный правый идеал B кольца A является квазипроективным правым A -модулем и свободным циклическим правым $A/r(B)$ -модулем. $\square$

4.2.8. Окончание доказательства теорем 4A и 4B. Теорема **4A** вытекает из теоремы **4.2.7**. Теорема **4B** вытекает из **4.2.6H**.

4.2.9. Открытый вопрос. Верно ли, что каждая коммутативная область Безу диагонализируема?

ГЛАВА 5

КОЛЬЦА БЕЗУ, РАЗМЕРНОСТЬ КРУЛЛЯ

Основными результатами данной главы являются теоремы **5А**, **5В** и **5С**.

5А. Теорема (А. А. Туганбаев, [16]). *Если A — заменяемое кольцо Безу без нецентральных идемпотентов, то A — диагонализируемое кольцо.*

5В. Теорема (А. А. Туганбаев, [17]). *Если A — инвариантное справа заменяемое правое кольцо Безу, то $B + r(X) = r(X/XB)$ для каждого конечно порожденного правого A -модуля X и каждого идеала B кольца A .*

5С. Теорема (А. А. Туганбаев, [18]). *Если A — коммутативное арифметическое кольцо, то A обладает размерностью Крулля в точности тогда, когда каждое фактор-кольцо кольца A конечномерно и не имеет идемпотентных собственных существенных идеалов.*

Комментарии к теореме **5С** приведены ниже в **5.2.2**.

Замечание. Окончание доказательств теорем **5А**, **5В** и **5С** приведено в пп. **5.1.12**, **5.1.13** и **5.2.12**.

5.1. Кольца и модули Безу

5.1.1. Модули Безу. Пусть A — кольцо и M — правый A -модуль Безу.

А. *Если кольцо A квазиинвариантно справа, то модуль M дистрибутивен.*

В. *Если кольцо A локально, то M — цепной модуль.*

Доказательство. А. Допустим, что существует недистрибутивный модуль Безу M . Согласно **1.1.5** существует 2-порожденный подмодуль X модуля M , обладающий таким фактор-модулем $S \oplus T$, что S и T — изоморфные простые модули. Так как M — модуль Безу, то $S \oplus T$ — циклический модуль. Поэтому существуют такие не совпадающие максимальные правые идеалы B и C кольца A , что

$$A/B \cong S \cong T \cong A/C.$$

По условию B и C — идеалы. Поэтому $B = r(A/B)$ и $C = r(A/C)$. Так как аннуляторы изоморфных модулей совпадают и $(A/B)_A \cong (A/C)_A$, то $B = C$; противоречие.

В. Так как локальное кольцо A квазиинвариантно, то модуль M дистрибутивен согласно **А**. Согласно **1.2.2Е**, M — цепной модуль. $\square$

5.1.2. *Если A — квазиинвариантное слева кольцо, то каждый его обратимый справа или слева элемент обратим.*

Доказательство. Пусть $a, b \in A$ и $ab = 1$. Достаточно доказать, что $Aa = A$.

Допустим, что $Aa \neq A$. Тогда a лежит в некотором максимальном левом идеале M . Так как по условию M — идеал, то $1 = ab \in M$; противоречие. $\square$

5.1.3. Пусть A — правое кольцо Безу.

А. *Кольцо A квазиинвариантно справа в точности тогда, когда A дистрибутивно справа.*

В. *Если кольцо A квазиинвариантно слева, то A — дистрибутивное справа квазиинвариантное справа кольцо.*

Доказательство. А. Если A квазиинвариантно справа, то A дистрибутивно справа согласно **5.1.1А**. Если A дистрибутивно справа, то A квазиинвариантно справа согласно **1.2.3D**.

В. В силу **А** достаточно доказать, что любой максимальный правый идеал M квазиинвариантного слева правого кольца Безу A является идеалом.

Допустим противное. Тогда $A = AM$ и $1 = \sum_{i=1}^n a_i m_i$, где $a_i \in A$ и $m_i \in M$. Так как A — правое кольцо Безу, то существуют такие элементы $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \in A$, что

$$\sum_{i=1}^n m_i c_i \equiv m \in M, \quad m_i = m b_i \forall i.$$

Так как $m \in M$, то $mA \neq A$. Согласно 5.1.2, $Am \neq A$. Поэтому m лежит в некотором максимальном левом идеале B . По условию B — идеал. Поэтому

$$1 = \sum_{i=1}^n a_i m b_i \in B;$$

противоречие. □

5.1.4. Если A — кольцо Безу, то следующие условия равносильны:

- (1) A дистрибутивно справа;
- (2) A дистрибутивно слева;
- (3) A квазиинвариантно справа;
- (4) A квазиинвариантно слева.

Утверждения п. 5.1.4 вытекают из 5.1.3.

5.1.5. Кольцо A является правым кольцом Безу в точности тогда, когда все пирсовские слои кольца A являются правыми кольцами Безу.

Доказательство. Так как все фактор-кольца правых колец Безу являются правыми кольцами Безу, то каждый пирсовский слой кольца A является правым кольцом Безу.

Допустим, что каждый пирсовский слой кольца A является правым кольцом Безу. Пусть $m, n \in A$ и

$$X_1 - (X_1 Y_1 + X_2 Y_2) Y_3, \quad X_2 - (X_1 Y_1 + X_2 Y_2) Y_4$$

— многочлены от некоммутирующих переменных X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 . Кроме того, пусть A/P — пирсовский слой кольца A . Пусть $h : A \rightarrow A/P$ — естественный эпиморфизм. Так как $h(A)$ — правое кольцо Безу, то существуют такие элементы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in h(A)$, что

$$0 = h(m) - (h(m)\bar{a} + h(n)\bar{b})\bar{c}, \quad 0 = h(n) - (h(m)\bar{a} + h(n)\bar{b})\bar{d}.$$

Согласно 4.2.5 существуют такие элементы $a, b, c, d \in A$, что

$$0 = m - (ma + nb)c, \quad 0 = n - (ma + nb)d.$$

Поэтому A — правое кольцо Безу. □

5.1.6. Кольцо A является заменяемым в точности тогда, когда все пирсовские слои кольца A — заменяемые кольца.

Доказательство. Если A — заменяемое кольцо, то каждое его фактор-кольцо заменяемо. Допустим, что все пирсовские слои кольца A заменяемы.

Пусть X_1, X_2, Y_1, Y_2 — некоммутирующие переменные. Рассмотрим многочлены

$$\begin{aligned} f_1(X_1, Y_1, Y_2) &= Y_1 - X_1 Y_2, \\ f_2(X_1, X_2, Y_1, Y_2) &= X_2 - Y_1 - (X_2 - X_1) Y_2, \\ f_3(Y_1) &= Y_1 - Y_1^2. \end{aligned}$$

Кроме того, пусть A/P — пирсовский слой кольца A , $h : A \rightarrow A/P$ — естественный эпиморфизм и $a \in A$. Так как $h(A)$ — заменяемое кольцо, то существуют такие элементы $\bar{e}, \bar{b}, \bar{c} \in h(A)$, что

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{e} - h(a)\bar{b} = f_1(h(a), \bar{e}, \bar{b}), \\ 0 &= h(1) - \bar{e} - (h(1) - h(a))\bar{c} = f_2(h(a), h(1), \bar{e}, \bar{c}), \\ 0 &= \bar{e} - \bar{e}^2 = f_3(\bar{e}). \end{aligned}$$

Согласно 4.2.5 существуют такие элементы $e, b, c \in A$, что

$$0 = e - ab = f_1(a, e, b), \quad 0 = 1 - e - (1 - a)c = f_2(a, 1, e, c), \quad 0 = e - e^2 = f_3(e).$$

Тогда e — идемпотент, $e \in aA$ и $1 - e \in (1 - a)A$. Поэтому A — заменяемое кольцо. $\square$

5.1.7. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) все идемпотенты кольца A центральны;
- (2) для каждого собственного идеала P кольца A , порожденного центральными идемпотентами, все идемпотенты кольца A/P центральны;
- (3) каждый пирсовский слой кольца A не имеет нетривиальных идемпотентов.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $h : A \rightarrow A/P$ — естественный эпиморфизм и $\bar{e} = \bar{e}^2 \in h(A)$. Согласно 4.2.1C, $\bar{e} = h(e)$ для некоторого идемпотента $e \in A$. По условию e — центральный идемпотент кольца A . Тогда $h(e)$ — центральный идемпотент кольца $h(A)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть A/P — пирсовский слой, $h : A \rightarrow A/P$ — естественный эпиморфизм и $\bar{e}$ — ненулевой идемпотент кольца $h(A)$. Согласно 4.2.1C существует такой идемпотент $e \in A$, что $h(e) = \bar{e} \neq 0$. Так как все идемпотенты кольца A центральны и $h(e) \neq 0$, то идемпотент e централен в A и $e \notin P$. Согласно 4.2.1D, $1 - e \in P$. Тогда $h(e) = h(1)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $e = e^2 \in A$, $a \in A$, A/P — пирсовский слой и $h : A \rightarrow A/P$ — естественный эпиморфизм. По условию $h(e)$ — центральный идемпотент кольца $h(A)$. Поэтому

$$h(ea - ae) = 0, \quad ea - ae \in P.$$

Согласно 4.2.2B, A — подпрямое произведение своих пирсовских слоев. Поэтому $ea - ae = 0$ и e — центральный идемпотент. $\square$

5.1.8. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A — заменяемое кольцо без нецентральных идемпотентов;
- (2) каждый элемент кольца A — сумма обратимого элемента и центрального идемпотента;
- (3) все пирсовские слои кольца A — локальные кольца.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $x \in A$. Так как A — заменяемое кольцо без нецентральных идемпотентов, то существуют центральный идемпотент $e \in xA$ и такие элементы $a, b \in A$, что $e = xa$ и $1 - e = (1 - x)b$. Без ограничения общности можно считать, что

$$a = ea = ae, \quad b = (1 - e)b = (1 - e)b.$$

Тогда ax и $b(1 - x)$ — центральные идемпотенты и

$$ax = a(xa)x = xa(ax) = xaxa = xa = e.$$

Аналогично доказывается, что $(1 - x)b = 1 - e$. Кроме того,

$$[x - (1 - e)](a - b) = xa + (1 - x)b - b - a + ea + (1 - e)b = e + (1 - e) - b + b = 1.$$

Аналогично доказывается, что

$$(a - b)[x - (1 - e)] = 1.$$

Поэтому $x - (1 - e)$ — обратимый элемент и $x = x - (1 - e) + (1 - e)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть A/P — пирсовский слой, $h : A \rightarrow A/P$ — естественный эпиморфизм и $h(a)$ — любой необратимый элемент в $h(A)$, где $a \in A$. Достаточно доказать, что $h(1) - h(a)$ — обратимый элемент в $h(A)$. По условию существует такой центральный идемпотент $e \in A$, что $e - a \in U(A)$. Тогда

$$h(e) - h(a) \in U(h(A)).$$

Так как $h(a) \notin U(h(A))$, то $h(e) \neq 0$. Тогда $e \in A \setminus P$ и идеал $P + eA$ порождается центральными идемпотентами и строго содержит идеал P , где A/P — пирсовский слой. Поэтому $P + eA = A$. Тогда $h(e) = h(1)$. Таким образом,

$$h(1) - h(a) \in U(h(A)).$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Так как локальное кольцо не имеет нецентральных идемпотентов, то согласно **5.1.7** все идемпотенты кольца A центральны. Кроме того, каждое локальное кольцо заменяемо. Согласно **5.1.6**, A заменяемо. $\square$

5.1.9. *Кольцо A дистрибутивно справа в точности тогда, когда все пирсовские слои кольца A дистрибутивны справа.*

Доказательство. Если кольцо A дистрибутивно справа, то все его факторкольца дистрибутивны справа.

Пусть все пирсовские слои кольца A дистрибутивны справа,

$$Y_1 + Y_2 - 1, \quad X_1 Y_1 - X_2 Y_3, \quad X_2 Y_2 - X_1 Y_4$$

— многочлены от некоммутирующих переменных X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 . Кроме того, пусть A/P — пирсовский слой, $h : A \rightarrow A/P$ — естественный эпиморфизм, $m, n \in A$. Так как кольцо $h(A)$ дистрибутивно справа, то согласно **1.1.2** существуют такие элементы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in h(A)$, что

$$\bar{a} + \bar{b} - h(1) = 0, \quad h(m)\bar{a} - h(n)\bar{c} = 0, \quad h(n)\bar{b} - h(n)\bar{d} = 0.$$

Согласно **4.2.5** существуют такие элементы $a, b, c, d \in A$, что

$$0 = a + b - 1, \quad 0 = ma - nc, \quad 0 = nb - md.$$

Согласно **1.1.2**, A дистрибутивно справа. $\square$

5.1.10. Теорема. Для кольца A следующие условия равносильны:

- (1) A — заменяемое правое кольцо Безу без нецентральных идемпотентов;
- (2) A — квазиинвариантное справа заменяемое правое кольцо Безу;
- (3) A — дистрибутивное справа заменяемое кольцо;
- (4) каждый пирсовский слой A/P кольца A является цепным справа кольцом.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (4). Согласно **5.1.8** каждый пирсовский слой A/P является локальным кольцом. Так как все фактор-кольца правых колец Безу являются правыми кольцами Безу, то каждый пирсовский слой A/P является локальным правым кольцом Безу. Согласно **5.1.1B**, A/P — цепное справа кольцо.

(4) $\Rightarrow$ (1), (4) $\Rightarrow$ (2) и (4) $\Rightarrow$ (3). Согласно **5.1.9** кольцо A дистрибутивно справа. Поскольку каждое цепное справа кольцо является заменяемым правым кольцом Безу, то каждый пирсовский слой кольца A является заменяемым правым кольцом Безу. Согласно **5.1.5** и **5.1.8**, A — заменяемое правое кольцо Безу без нецентральных идемпотентов. Согласно **1.2.3D**, кольцо A квазиинвариантно справа.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) следует из **5.1.1A**.

(3) $\Rightarrow$ (4). Согласно **1.1.7A** все идемпотенты кольца A центральны. Так как все фактор-кольца дистрибутивных справа колец дистрибутивны справа, то каждый пирсовский слой A/P является дистрибутивным справа локальным кольцом согласно **4.2.3C**. Согласно **1.2.2D**, A/P — цепное справа кольцо. $\square$

5.1.11. Теорема. Для кольца A следующие условия равносильны:

- (1) A — заменяемое диагонализируемое кольцо без нецентральных идемпотентов;
- (2) A — заменяемое кольцо Безу без нецентральных идемпотентов;
- (3) A — заменяемое квазиинвариантное кольцо Безу;
- (4) A — заменяемое дистрибутивное кольцо;
- (5) все пирсовские слои кольца A являются цепными кольцами.

Доказательство. Эквивалентность условий (2)–(5) вытекает из **5.1.10**.

(1) $\Rightarrow$ (2). Так как каждое диагонализируемое кольцо является эрмитовым, то (2) вытекает из **2.2.3B**.

(2) $\Rightarrow$ (1). По условию (2), A — заменяемое кольцо без нецентральных идемпотентов. Так как условия (2) и (5) эквивалентны, то каждый пирсовский слой кольца A является цепным кольцом.

В частности, каждый пирсовский слой кольца A является полуцепным кольцом Безу. Согласно 4.2.6H, A — диагонализируемое кольцо. $\square$

5.1.12. Окончание доказательства теоремы 5A. Теорема 5A вытекает из теоремы 5.1.11.

5.1.13. Окончание доказательства теоремы 5B. Так как A — инвариантное справа заменяемое кольцо Безу, то по теореме 5.1.11, A — диагонализируемое кольцо. По теореме 2B (см. гл. 2) $B + r(X) = r(X/XB)$ для каждого конечно порожденного правого A -модуля X и каждого идеала B кольца A .

5.2. КОЛЬЦА С РАЗМЕРНОСТЬЮ КРУЛЛЯ

5.2.1. Размерность Крулля модуля и кольца. Напомним трансфинитное определение размерности Крулля $\text{Kdim } M$ модуля M (см. [68]). (Заметим, что не каждый модуль обладает размерностью Крулля.)

По определению считается, что нулевые модули имеют размерность Крулля -1 , а размерность Крулля каждого ненулевого артинова модуля равна нулю.

Допустим, что α — ординал > 0 , для всех ординалов $\beta < \alpha$ модули с размерностью Крулля β определены и M — такой модуль, что $\text{Kdim } M \neq \beta$. Говорят, что *размерность Крулля* $\text{Kdim } M$ модуля M равна α , если для любой бесконечной строго убывающей цепи $M_1 > M_2 > \dots$ подмодулей в M найдется такое натуральное число n , что $\text{Kdim}(M_n/M_{n+1}) < \alpha$.

Правой размерностью Крулля $\text{Kdim } A_A$ кольца A называется размерность Крулля модуля A_A , если она существует. Например, размерность Крулля кольца вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ равна 0, а размерность Крулля кольца многочленов $k[x_1, \dots, x_n]$ над любым полем k равна n .

A. Все фактор-модули и подмодули модуля с размерностью Крулля обладают размерностью Крулля, каждое расширение модуля с размерностью Крулля с помощью модуля с размерностью Крулля имеет размерность Крулля, каждый нётеров модуль обладает размерностью Крулля (см. [68]).

B. Класс всех колец с правой размерностью Крулля шире класса всех нётеровых справа колец, причем кольца с правой размерностью Крулля обладают многими полезными свойствами нётеровых справа колец.

Например, если A — кольцо с правой размерностью Крулля, то его первичный радикал P нильпотентен, а фактор-кольцо A/P обладает полупростым артиновым классическим правым кольцом частных (см. [68]).

C. Любой модуль с размерностью Крулля конечномерен (см. [68, Proposition 1.4]).

5.2.2. Арифметические кольца и размерность Крулля. Идеал B называется *идемпотентным*, если $B = B^2$.

В [91] доказано, что коммутативное цепное кольцо A обладает размерностью Крулля в точности тогда, когда A не имеет идемпотентных собственных ненулевых идеалов. В этом случае ясно, что каждое фактор-кольцо кольца A не имеет идемпотентных собственных ненулевых идеалов.

Кроме того, каждое фактор-кольцо любого коммутативного цепного кольца является конечномерным цепным кольцом, в котором каждый ненулевой идеал является существенным.

A. Заметим, что $\mathbb{Z}$ — коммутативное арифметическое кольцо с размерностью Крулля 1. Кроме того, $\mathbb{Z}$ не имеет идемпотентных собственных ненулевых идеалов, а его фактор-кольцо $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ имеет идемпотентные собственные ненулевые идеалы.

B. Прямое произведение $A = \prod_{i \in I} A_i$ любого множества полей A_i является коммутативным арифметическим кольцом, в котором все идеалы являются идемпотентными. В этом случае кольцо A обладает размерностью Крулля в точности тогда, когда множество I конечно.

C. Пусть A — коммутативное кольцо с размерностью Крулля. В [90, Théorème 12] доказано, что $A = A_1 \times \dots \times A_n$, где каждое кольцо A_i обладает размерностью Крулля и не имеет идемпотентных собственных ненулевых идеалов. Так как каждое фактор-кольцо кольца A обладает размерностью Крулля, то отсюда следует, что каждое фактор-кольцо $\bar{A}$ кольца

A не имеет идемпотентных собственных существенных идеалов. Кроме того, $\overline{A}$ — конечномерное кольцо.

5.2.3. Пусть A — дистрибутивное справа кольцо.

- A.** Если $P_1 \subset P_2 \subset \dots$ — бесконечная строго возрастающая цепь вполне первичных правых идеалов кольца A , то $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ — идемпотентный собственный вполне первичный правый идеал.
- B.** Если кольцо A не имеет идемпотентных собственных вполне первичных идеалов, то A — кольцо с условием максимальности для вполне первичных идеалов.
- C.** Если кольцо A не имеет идемпотентных собственных вполне первичных правых идеалов, то A — кольцо с условием максимальности для вполне первичных правых идеалов.
- D.** Если A — конечномерное справа редуцированное кольцо, то A — конечное прямое произведение дистрибутивных справа равномерных справа областей.

Доказательство. **A.** Обозначим через X правый идеал $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$. Так как все P_i — собственные правые идеалы, то X — собственный правый идеал. Поскольку все P_i — вполне первичные правые идеалы, то X — вполне первичный правый идеал.

Допустим, что $X \neq X^2$. Пусть $x \in X \setminus X^2$. Тогда $x \in P_i$ для некоторого i . Так как P_i — вполне первичный правый идеал и X строго содержит P_i , то $X^2 \not\subseteq P_i$ и существует элемент $y \in X^2 \setminus P_i$. Согласно 1.1.2 существуют такие элементы $a, b \in A$, что

$$a + b = 1, \quad xa \in yA \subseteq X^2, \quad yb \in xA \subseteq P_i.$$

Так как $x \notin X^2$ и $xa \in X^2$, то $xb = x - xa \notin X^2$. Поэтому $b \notin X$. Так как $y \notin P_i$ и элемент yb лежит во вполне первичном правом идеале P_i , то $b \in P_i \subseteq X$; противоречие.

Утверждения **B** и **C** вытекают из **A**.

D. Конечномерное справа кольцо A содержит существенный правый идеал $x_1A \oplus \dots \oplus x_nA$, где каждый правый идеал x_iA является равномерным. Так как кольцо A дистрибутивно справа, то, согласно 1.2.2D, $x_1A \oplus \dots \oplus x_nA = xA$, где $x = x_1 + \dots + x_n$. Так как A — редуцированное кольцо и xA — существенный правый идеал, то из 1.3.1B следует, что $r(x) = 0$. Поэтому xA_A — свободный циклический модуль. Кроме того,

$$xA = (xA \cap x_1A) \oplus \dots \oplus (xA \cap x_nA).$$

Поэтому A — конечное прямое произведение дистрибутивных справа равномерных справа областей. $\square$

5.2.4. Пусть A — инвариантное справа арифметическое кольцо и N — множество всех правых или левых делителей нуля кольца A .

- A.** Если A не имеет идемпотентных собственных первичных идеалов, то A — кольцо с условием максимальности для первичных идеалов.
- B.** Если множество N является первичным идеалом кольца A , то A обладает цепным справа классическим правым кольцом частных Q , $NQ = J(Q)$ и кольцо A равномерно справа.

Доказательство. Так как A — инвариантное справа арифметическое кольцо, то A — дистрибутивное справа кольцо, обладающее классическим правым кольцом частных Q .

A. Так как каждый первичный идеал инвариантного справа кольца A вполне первичен, то утверждение вытекает из 5.2.3B.

B. Так как кольцо A инвариантно справа, то первичный идеал N вполне первичен, и множество S всех неделителей нуля кольца A имеет вид $A \setminus N$. Согласно 1.3.2K, Q — цепное справа кольцо, $J(Q) = NQ$ и кольцо A равномерно справа. $\square$

5.2.5. Пусть A — инвариантное справа арифметическое кольцо, в котором все правые делители нуля являются левыми делителями нуля и пересечение любых двух ненулевых идеалов равно нулю. Пусть N — множество всех правых или левых делителей нуля кольца A .

- A.** N — вполне первичный идеал кольца A , кольцо A обладает цепным справа классическим правым кольцом частных Q и $NQ = J(Q)$.
B. Если A имеет вполне первичный нильидеал P , то $P = xP$ для любого неделителя нуля x кольца A , $P = QP$ — левый идеал кольца Q , $PQ = QPQ$ — идеал кольца Q и $(PQ)^n = P^nQ$ для каждого натурального числа n .

Доказательство. Так как A — инвариантное справа арифметическое кольцо, в котором пересечение любых двух ненулевых идеалов равно нулю, то A — дистрибутивное справа равномерное справа кольцо.

A. Так как кольцо A равномерно справа, то множество N_1 всех его левых делителей нуля совпадает со множеством всех элементов кольца A , правые аннуляторы которых являются существенными правыми идеалами. В этом случае хорошо известно, что N_1 — вполне первичный идеал кольца A (см., например, [110, 5.30(2)] или [12, Lemma 1.4]). Так как в кольце A все правые делители нуля являются левыми делителями нуля, то $N = N_1$. Поэтому N — вполне первичный идеал. Согласно **5.2.4B**, A обладает цепным справа классическим правым кольцом частных Q и $NQ = J(Q)$.

B. Пусть $y \in P$. Согласно **1.1.2** существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$ и $xa, yb \in xA \cap yA$. Так как $x \notin P$ и xa — элемент вполне первичного идеала P , то a — элемент нильидеала P . Тогда $b = 1 - a$ — обратимый элемент, причем $yb \in xA$. Поэтому $y = ybb^{-1} \in xA$ и $P = xP$. Так как x — обратимый элемент кольца Q и $P = xP$, то $P = x^{-1}P$. Поэтому $P = QP$. Тогда $PQ = QPQ$ — идеал кольца A и $(PQ)^n = P^nQ$ для каждого натурального числа n . $\square$

5.2.6. Пусть A — коммутативное арифметическое равномерное кольцо, P — первичный радикал кольца A , причем A/P — конечномерное кольцо.

- A.** P — вполне первичный нильидеал и либо $P = P^2$, либо P — нильпотентный идеал.
B. Если кольцо A не имеет идемпотентных собственных существенных идеалов, то P — нильпотентный идеал.

Доказательство. **A.** Так как A/P — коммутативное конечномерное дистрибутивное редуцированное кольцо, то A/P — конечное прямое произведение областей согласно **5.2.3D**. Поскольку P — нильидеал, то все идемпотенты кольца A/P поднимаются до идемпотентов коммутативного неразложимого кольца A . Поэтому кольцо A/P не имеет нетривиальных идемпотентов. Тогда A/P — область и P — вполне первичный нильидеал. Согласно **5.2.5** кольцо A обладает цепным классическим кольцом частных Q , $P = xP$ для любого неделителя нуля x кольца A , $P = QP$ — идеал кольца Q и $P^n = P^nQ$ для каждого натурального числа n .

Допустим, что $P \neq P^2$. Пусть $p \in P \setminus P^2$. Тогда pQ — нильпотентный идеал коммутативного цепного кольца Q , не лежащий в идеале $P^2 = P^2Q$. Тогда идеал P^2 содержится в нильпотентном идеале pQ . Поэтому идеал P^2 нильпотентен. Тогда P — нильпотентный идеал.

B. Без ограничения общности можно считать, что P — ненулевой собственный идеал кольца A . Так как A — равномерное кольцо, то P — существенный идеал. По условию кольцо A не имеет собственных существенных идемпотентных идеалов. Поэтому $P \neq P^2$. Согласно **A**, P — нильпотентный идеал. $\square$

5.2.7. (См. [91, Proposition 2]). Пусть M — такой модуль, что все фактор-модули модуля M конечномерны и любой ненулевой фактор-модуль Q модуля M содержит ненулевой подмодуль, имеющий размерность Крулля. Тогда M имеет размерность Крулля.

5.2.8. (См. [68, 1.4, 7.1, 7.3, 7.4]). Пусть A — кольцо, обладающее правой размерностью Крулля. Тогда каждое фактор-кольцо кольца A конечномерно справа, A — кольцо с условием максимальнойности для первичных идеалов и для каждого собственного идеала B кольца A существуют такие первичные идеалы $P_1, \dots, P_n$ кольца A , что $P_1 \cdots P_n \subseteq B$ и каждый из идеалов P_i содержит идеал B .

5.2.9. Пусть A — такое кольцо, что все циклические правые A -модули конечномерны.

А. Если существует такое конечное множество $\{P_1, \dots, P_n\}$ идеалов кольца A , что каждый из циклических правых A -модулей A/P_i имеет размерность Крулля, то кольцо $A/(P_1 \cdots P_n)$ имеет правую размерность Крулля.

В. Допустим, что существует такое множество $\mathcal{Q}$ собственных идеалов кольца A , что возрастающие цепи идеалов из $\mathcal{Q}$ стабилизируются на конечном шаге, и для любого ненулевого идеала B кольца A существуют такие идеалы $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{Q}$, что

$$P_1 \cdots P_n \subseteq B \subseteq P_1 \cap \dots \cap P_n.$$

Тогда A имеет правую размерность Крулля.

Доказательство. **А.** Доказательство этого утверждения сообщил автору В. Т. Марков. Используем индукцию по n . При $n = 1$ нечего доказывать. Пусть $n > 1$ и $Q = P_1 \cdots P_{n-1}$. По предположению индукции фактор-кольцо A/Q имеет правую размерность Крулля. Пусть X — произвольный ненулевой фактор-модуль правого A -модуля Q/QP_n . Тогда X — подмодуль правого A/P_n -модуля Q/QP_n . Так как X — правый модуль над кольцом A/P_n с правой размерностью Крулля, каждый ненулевой подмодуль A/P_n -модуля X содержит ненулевой подмодуль с размерностью Крулля. Тогда каждый ненулевой подмодуль A -модуля X содержит ненулевой подмодуль с размерностью Крулля. Кроме того, X_A — подмодуль циклического A -модуля A/QP_n , и все фактор-модули циклического A -модуля A/QP_n конечномерны по условию. Поэтому все фактор-модули модуля X_A конечномерны. Согласно 5.2.7 модуль X_A имеет размерность Крулля. Так как X — произвольный ненулевой фактор-модуль $(Q/QP_n)_A$, то модуль $(Q/QP_n)_A$ имеет размерность Крулля. Кроме того, $(A/Q)_A$ имеет размерность Крулля по предположению индукции. Так как $(A/QP_n)_A$ — расширение модуля $(Q/QP_n)_A$ с размерностью Крулля с помощью модуля $(A/Q)_n$, то $(A/QP_n)_A$ имеет размерность Крулля. Поэтому кольцо A/QP_n имеет правую размерность Крулля.

В. Допустим, что A не имеет правой размерности Крулля. Построим такую строго возрастающую последовательность идеалов $Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \dots$ из $\mathcal{Q} \cup \{0\}$, что кольцо A/Q_i не имеет размерности Крулля для всех $i \geq 0$. Введем обозначение $Q_0 = 0$. Допустим, что идеалы $Q_0 \subset \dots \subset Q_k$ уже построены, где $k \geq 0$. Так как правый A -модуль A/Q_k не имеет размерности Крулля, то существует такой правый идеал B кольца A , что $B \supseteq Q_k$, $B/Q_k \neq 0$ и $(A/B)_A$ не имеет размерности Крулля. По условию, существуют такие идеалы $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{Q}$, что

$$P_1 \cdots P_n \subseteq B \subseteq P_1 \cap \dots \cap P_n.$$

Согласно 5.2.7 существует такое целое число $i \in \{1, \dots, n\}$, что циклический правый A -модуль A/P_i не имеет размерности Крулля. Положим $Q_{k+1} = P_i$. Получена бесконечная строго возрастающая цепь $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots$ идеалов из $\mathcal{Q}$, что противоречит условию. $\square$

5.2.10. Для инвариантного справа кольца A следующие условия равносильны:

А. кольцо A имеет правую размерность Крулля;

В. A — кольцо с условием максимальнойности для первичных идеалов, все фактор-кольца кольца A конечномерны справа и для любого ненулевого идеала B кольца A существуют такие идеалы $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{Q}$, что

$$P_1 \cdots P_n \subseteq B \subseteq P_1 \cap \dots \cap P_n.$$

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из 5.2.8.

(2) $\Rightarrow$ (1). Кольцо A инвариантно справа и все фактор-кольца кольца A конечномерны справа. Поэтому все циклические правые A -модули конечномерны. Обозначим через $\mathcal{Q}$ множество всех простых идеалов кольца A . Теперь утверждение вытекает из 5.2.9В. $\square$

5.2.11. Пусть A — коммутативное арифметическое кольцо, причем каждое фактор-кольцо кольца A конечномерно и не имеет идемпотентных собственных существенных идеалов. Тогда A обладает размерностью Крулля.

Доказательство. По условию каждое фактор-кольцо кольца A конечномерно. Согласно 5.2.4, A — кольцо с условием максимальности для первичных идеалов. Пусть B — произвольный собственный идеал кольца A . Согласно 5.2.10 достаточно доказать существование таких первичных идеалов $Q_1, \dots, Q_n$ кольца A , что $Q_1 \cdots Q_n \subseteq B$ и каждый из идеалов Q_i содержит идеал B .

По условию A/B — конечномерное кольцо. Поэтому существуют такие идеалы $B_1, \dots, B_k$ кольца A , что $B_1 \cap \dots \cap B_k = B$ и каждое фактор-кольцо A/B_i является равномерным кольцом. Пусть $P_1, \dots, P_k$ — такие идеалы кольца A , что $B_i \subseteq P_i$ и P_i/B_i — первичный радикал кольца A/B_i , $i = 1, \dots, k$. По условию каждое фактор-кольцо A/P_i является равномерным кольцом. По условию каждое фактор-кольцо A/B_i является коммутативным арифметическим кольцом без идемпотентных собственных существенных идеалов. Согласно 5.2.6, P_i/B_i — первичный нильпотентный идеал кольца A/B_i , $i = 1, \dots, k$. Поэтому существуют такие натуральные числа $n_1, \dots, n_k$, что $P_i^{n_i} \subseteq B_i$, $i = 1, \dots, k$. Поэтому идеал $X = P_1^{n_1} \cdots P_k^{n_k}$ содержится в идеале $B_1 \cap \dots \cap B_k = B$ и каждый первичный идеал P_i содержит идеал B . Отсюда следует требуемое утверждение. $\square$

5.2.12. Окончание доказательства теоремы 5С. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из 5.2.2С. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) доказана в 5.2.11.

5.2.13. Открытый вопрос. Пусть A — инвариантное арифметическое кольцо, и каждое фактор-кольцо кольца A конечномерно и не имеет идемпотентных собственных существенных идеалов. Верно ли, что A обладает правой размерностью Крулля?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вечтомов Е. М. Дистрибутивные кольца непрерывных функций и F -пространства // Мат. заметки. — 1983. — 34, № 3. — С. 321–332.
2. Голод Е. С. Арифметические кольца, биэндоморфизмы и базисы Грёбнера // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 1. — С. 167–168.
3. Голод Е. С. Дистрибутивность, бинарные соотношения и стандартные базисы // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 3. — С. 127–134.
4. Голод Е. С. Замечание о коммутативных арифметических кольцах // Фундам. прикл. мат. — 2014. — 19, № 2. — С. 21–23.
5. Голод Е. С., Туганбаев А. А. Аннуляторы и конечно порожденные модули // Фундам. прикл. мат. — 2016. — 21, № 1. — С. 79–82.
6. Кириченко В. В., Яременко Ю. В. О полусовершенных полудистрибутивных кольцах // Мат. заметки. — 2001. — 69, № 1. — С. 153–156.
7. Туганбаев А. А. Характеризации колец, использующие малоинъективные и малопроективные модули // Вестн. МГУ. Сер. мат. мех. — 1979. — № 3. — С. 48–51.
8. Туганбаев А. А. Дистрибутивные модули // Усп. мат. наук. — 1980. — 35, № 5 (215). — С. 245–246.
9. Туганбаев А. А. Кольца с плоскими правыми идеалами и дистрибутивные кольца // Мат. заметки. — 1985. — 38, № 2. — С. 218–228.
10. Туганбаев А. А. Плоские модули и кольца, конечно порожденные как модули над своим центром // Мат. заметки. — 1996. — 60, № 2. — С. 254–277.
11. Туганбаев А. А. Дистрибутивные нелокализуемые кольца // Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 3. — С. 165–166.
12. Туганбаев А. А. Строение дистрибутивных колец // Мат. сб. — 2002. — 193, № 5. — С. 113–128.
13. Туганбаев А. А. Дистрибутивные и мультипликативные модули и кольца // Мат. заметки. — 2004. — 75, № 3. — С. 425–434.
14. Туганбаев А. А. Арифметические кольца и квазипроективные идеалы // Фундам. прикл. мат. — 2014. — 19, № 2. — С. 207–211.
15. Туганбаев А. А. Кольца, у которых все конечнопорожденные правые идеалы квазипроективны // Дискр. мат. — 2015. — 27, № 1. — С. 146–154.

16. Туганбаев А. А. Кольца Безу без нецентральных идемпотентов// Дискр. мат. — 2016. — 28, № 2. — С. 133–145.
17. Туганбаев А. А. Кольца Безу, аннуляторы и диагонализированность// Фундам. прикл. мат. — 2016. — 21, № 2. — С. 253–256.
18. Туганбаев А. А. Арифметические кольца и размерность Крулля// Дискр. мат. — 2017. — 29, № 3. — С. 126–132.
19. Abuhlail J., Jarrar M., Kabbaj S. Commutative rings in which every finitely generated ideal is quasi-projective// J. Pure Appl. Algebra. — 2011. — 215. — P. 2504–2511.
20. Achkar H. Sur les anneaux arithmétiques à gauche// C. R. Acad. Sci. — 1974. — 278, № 5. — P. A307–A309.
21. Achkar H. Sur les propriétés des anneaux arithmétiques à gauche// C. R. Acad. Sci. — 1977. — 284, № 17. — P. A993–A995.
22. Achkar H. Anneaux arithmétiques à gauche// C. R. Acad. Sci. — 1978. — 286, № 20. — P. A871–A873.
23. Achkar H. Anneaux arithmétiques à gauche: propriétés de transfert// C. R. Acad. Sci. — 1979. — 288, № 11. — P. A583–A586.
24. Albu T., Năstăsescu C. Modules arithmétiques// Acta. Math. Acad. Sci. Hung. — 1974. — 25, № 3–4. — P. 299–311.
25. Amitsur S. A. Remarks on principal ideal rings// Osaka Math. J. — 1963. — 15, № 1. — P. 59–69.
26. Anderson D. D. Some remarks on the ring $R(X)$ // Comment. Math. Univ. St. Pauli. — 1977. — 26, № 2. — P. 137–140.
27. Anderson D. D., Anderson D. F., Markanda R. The rings $R(X)$ and $R\langle X \rangle$ // J. Algebra. — 1985. — 95, № 1. — P. 96–115.
28. Anderson D. D., Camillo V. Armendariz rings and Gaussian rings// Commun. Algebra. — 1998. — 26, № 7. — P. 2265–2272.
29. Anderson F., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. — Berlin: Springer-Verlag, 1973.
30. Aubert K. E., Beck I. Chinese rings// J. Pure Appl. Algebra. — 1982. — 24. — P. 221–226.
31. Bandelt H. J., Petrich M. Subdirect products of rings and distributive lattices// Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1982. — 25, № 2. — P. 155–171.
32. Bazzoni S., Glaz S. Prüfer rings// in: Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra (Brewer J. W., Glaz S., Heinzer W. J., Olberding B. M., eds.). — Boston: Springer, 2006.
33. Bazzoni S., Glaz S. Gaussian properties of total rings of quotients// J. Algebra. — 2007. — 310. — P. 180–193.
34. Behrens E. A. Distributive Darstellbare Ringe, I// Math. Z. — 1960. — 73, № 5. — P. 409–432.
35. Behrens E. A. Distributive Darstellbare Ringe, II// Math. Z. — 1961. — 76, № 4. — P. 367–384.
36. Behrens E. A. Die Halbgruppe der Ideale in Algebren mit distributivem Idealverband// Arch. Math. — 1962. — 13. — P. 251–266.
37. Behrens E. A. Ring Theory. — New York: Acad. Press, 1972.
38. Behrens E. A. Noncommutative arithmetic rings// in: Rings, Modules and Radicals. — Amsterdam: London, 1973. — P. 67–71.
39. Belzner T. Towards self-duality of semidistributive Artinian rings// J. Algebra. — 1990. — 135, № 1. — P. 74–95.
40. Bessenrodt K., Brungs H. H., Törner G. Right chain rings, Part 1// in: Schriftenreihe des Fachbereich Mathematik. — Universität Duisburg, 1990.
41. Blair R. L. Ideal lattice and the structure of rings// Trans. Am. Math. Soc. — 1953. — 75, № 1. — P. 136–153.
42. Boynton J. Pullbacks of Arithmetical Rings// Commun. Algebra. — 2007. — 35, № 9. — P. 2671–2684.
43. Boynton J. Prüfer conditions and the total quotient ring// Commun. Algebra. — 2011. — 39, № 5. — P. 1624–1630.
44. Burgess W. D., Stephenson W. An analogue of the Pierce sheaf for non-commutative rings// Commun. Algebra. — 1978. — 6, № 9. — P. 863–886.
45. Burgess W. D., Stephenson W. Rings all of whose Pierce stalks are local// Can. Math. Bull. — 1979. — 22, № 2. — P. 159–164.
46. Caballero C. E. Self-duality and ℓ -hereditary semidistributive rings// Commun. Algebra. — 1986. — 14, № 10. — P. 1821–1843.

47. *Camillo V.* Distributive modules// J. Algebra. — 1975. — 36, № 1. — P. 16–25.
48. *Chatters A. W.* A decomposition theorem for Noetherian hereditary rings// Bull. London Math. Soc. — 1972. — 4. — P. 125–126.
49. *Arithmetical Properties of Commutative Rings and Monoids.* — CRC Press, 2005.
50. *Chouinard L. G., Hardy B. R., Shores T. S.* Arithmetical semihereditary semigroup rings// Commun. Algebra. — 8, № 17. — P. 1593–1652.
51. *Couchot F.* Localization of injective modules over arithmetical rings// Commun. Algebra. — 2009. — 37, № 10. — P. 3418–3423.
52. *Couchot F.* Finitistic weak dimension of commutative arithmetical rings// Arab. J. Math. — 2012. — 1, № 1. — P. 63–67.
53. *Couchot F.* Gaussian trivial ring extensions and FQP-rings// Commun. Algebra. — 2015. — 43, № 7. — P. 2863–2874.
54. *Dung N. V., Huynh D. V., Smith P. F., Wisbauer R.* Extending Modules. — New York: Wiley, 1994.
55. *Eisenbud D., Griffith Ph.* Serial rings// J. Algebra. — 1971. — 17. — P. 389–400.
56. *Er N.* Rings whose modules are direct sums of extending modules// Proc. Am. Math. Soc. — 2009. — 137, № 7. — P. 2265–2271.
57. *Faith C.* Algebra: Rings, Modules and Categories I. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1973.
58. *Faith C.* Algebra II. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1976.
59. *Fuchs L.* Über die Ideale arithmetischer Ringe// Comment. Math. Helvet. — 1949. — 23, № 1. — P. 334–341.
60. *Fuchs L., Heinzer W., Olberding B.* Commutative ideal theory without finiteness conditions: Primal ideals// Trans. Am. Math. Soc. — 2005. — 357. — P. 2771–2798.
61. *Fuchs L., Heinzer W., Olberding B.* Commutative ideal theory without finiteness conditions: Completely irreducible ideals// Trans. Am. Math. Soc. — 2006. — 358, № 7. — P. 3113–3131.
62. *Gillman L., Henriksen M.* Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal// Trans. Am. Math. Soc. — 1956. — 82, № 2. — P. 366–391.
63. *Gillman L., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings// Trans. Am. Math. Soc. — 1956. — 82, № 2. — P. 362–365.
64. *Glaz S., Schwarz R.* Prüfer conditions in commutative rings// Arab. J. Sci. Engin. — 2011. — 36. — P. 967–983.
65. *Goodearl K. R.* Ring Theory. — New York: Marcel Dekker, 1976.
66. *Goodearl K. R.* Von Neumann Regular Rings. — London: Pitman, 1979.
67. *Goodearl K. R., Warfield R. B.* An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
68. *Gordon R., Robson J. C.* Krull dimension// Mem. Am. Math. Soc. — 1973. — № 133. — P. 1–78.
69. *Gräter G.* General Lattice Theory. Second edition. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2003.
70. *Gräter J.* Über die Distributivität des Idealverbandes eines kommutativen Ringes// Monatsh. Math. — 1985. — 99, № 4. — P. 267–278.
71. *Handelman D.* Strongly semiprime rings// Pac. J. Math. — 1975. — 60, № 1. — P. 115–122.
72. *Handelman D., Lawrence J.* Strongly prime rings// Trans. Am. Math. Soc. — 1975. — 211. — P. 209–223.
73. *Hardy B. R., Shores T. S.* Arithmetical semigroup rings// Can. J. Math. — 1980. — 32, № 6. — P. 1361–1371.
74. *Hattori A.* A foundation of torsion theory for modules over general rings// Nagoya Math. J. — 1960. — 17. — P. 147–158.
75. *Heinzer W. J., Ratliff L. J., Rush D. E.* Strongly irreducible ideals of a commutative ring// J. Pure Appl. Algebra. — 2002. — 166, № 3. — P. 267–275.
76. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings, II// Michigan Math. J. — 1956. — 3. — P. 159–163.
77. *Hinohara Y.* Note on noncommutative local rings// Nagoya Math. J. — 1960. — 17. — P. 161–166.
78. *Jensen C. U.* A remark on arithmetical rings// Proc. Am. Math. Soc. — 1964. — 15, № 6. — P. 951–954.
79. *Jensen C. U.* Arithmetical rings// Acta Math. Acad. Sci. Hung. — 1966. — 17, № 1–2. — P. 115–123.
80. *Jeremy L.* Modules et anneaux quasi-continus// Can. Math. Bull. — 1974. — 17, № 2. — P. 217–228.
81. *Johnson R. E., Wong F. T.* Quasi-injective modules and irreducible rings// J. London Math. Soc. — 1961. — 36. — P. 260–268.

82. *Jondrup S.* p.p. rings and finitely generated flat ideals// Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — 28, № 2. — P. 431–435.
83. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules// Trans. Am. Math. Soc. — 1949. — 19, № 2. — P. 21–23.
84. *Koike K.* Self-duality of quasi-Harada rings and locally distributive rings// J. Algebra. — 2006. — 302, № 2. — P. 613–645.
85. *Lam T. Y.* Exercises in Classical Ring Theory. — New York: Springer-Verlag, 1995.
86. *Lam T. Y.* Lectures on Modules and Rings. — New York: Springer-Verlag, 1999.
87. *Larsen M. D., Lewis W. J., Shores T. S.* Elementary divisor rings and finitely presented modules// Trans. Am. Math. Soc. — 1974. — 187, № 1. — P. 231–248.
88. *Lawrence J.* A singular primitive ring// Trans. Am. Math. Soc. — 1974. — 45, № 1. — P. 59–62.
89. *Lee T. K., Zhou Y.* Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls// J. Algebra Appl. — 2013. — 6, № 2. — 1250159.
90. *Lemonnier B.* Sur les anneaux qui ont une déviation// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. — 1972. — 275. — P. 357–359.
91. *Lemonnier B.* Dimension de Krull et codéviation des anneaux semi-héréditaires// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. — 1977. — 284. — P. 663–666.
92. *Levy L. S.* Sometimes only square matrices can be diagonalized// Proc. Am. Math. Soc. — 1975. — 52. — P. 18–22.
93. *Lu X.* Some properties of completely arithmetical rings// Algebra Colloq. — 2016. — 23, № 1. — P. 83–88.
94. *Lu X., Boynton J.* Completely arithmetical rings// Commun. Algebra. — 2014. — 42, № 9. — P. 4047–4054.
95. *Lucas T. G.* Strong Prüfer rings and the ring of finite fractions// J. Pure Appl. Algebra. — 1993. — 84. — P. 59–71.
96. *Lucas T. G.* The Gaussian property for rings and polynomials// Houston J. Math. — 2008. — 34, № 1. — P. 1–18.
97. *McGovern W., Sharma M.* Gaussian Property of the Rings $R(X)$ and $R\langle X \rangle$ // Commun. Algebra. — 2016. — 44, № 4. — P. 1636–1646.
98. *Menzel W.* Ein Kriterium für Distributivität des Untergruppenverbands einer Abelschen Operatorgruppe// Math. Z. — 1961. — 75, № 3. — P. 271–276.
99. *Michler G., Wille R.* Die primitiven Klassen arithmetischer Ringe// Math. Z. — 1970. — 113, № 5. — P. 369–372.
100. *Min L. S.* On the constructions of local and arithmetical rings// Acta. Math. Acad. Sci. Hung. — 1978. — 32, № 1–2. — P. 31–34.
101. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings// Trans. Am. Math. Soc. — 1977. — 229, № 2. — P. 269–278.
102. *Nikseresht A., Aziz A.* On arithmetical rings and the radical formula// Vietnam J. Math. — 2010. — 38, № 1. — P. 55–62.
103. *van Oystaeyen F.* Generalized Rees rings and arithmetical graded rings// J. Algebra. — 1983. — 82, № 1. — P. 185–193.
104. *Parkash A.* Arithmetical rings satisfy the radical formula// J. Commun. Algebra. — 2012. — 4, № 2. — P. 293–296.
105. *Puninski G. E.* Projective modules over the endomorphism ring of a biuniform module// J. Pure Appl. Algebra. — 2004. — 188, № 1–3. — P. 227–246.
106. *Rowen L. H.* Ring Theory. — Boston: Academic Press, 1988.
107. *Shores T., Lewis W. J.* Serial modules and endomorphism rings// Duke Math. J. — 1974. — 41, № 4. — P. 889–909.
108. *Stenström B.* Rings of Quotients. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1975.
109. *Stephenson W.* Modules whose lattice of submodules is distributive// Proc. London Math. Soc. — 1974. — 28, № 2. — P. 291–310.
110. *Tuganbaev A. A.* Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic, 1998.
111. *Tuganbaev A. A.* Rings Close to Regular. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic, 2002.
112. *Tuganbaev A. A.* Multiplication modules// J. Math. Sci. — 2004. — 123, № 2. — P. 3839–3905.

- 113. *Warfield R. B.* Decomposability of finitely presented modules// *Proc. Am. Math. Soc.* — 1970. — 25. — P. 167–172.
- 114. *Warfield R. B.* Stable generation of modules// *Lect. Notes Math.* — 1979. — 700. — P. 16–33.
- 115. *Wright M. H.* Right locally distributive rings// in: *Ring Theory/ Proc. Bien. Ohio State.* — Singapore, 1993. — P. 350–357.
- 116. *Xue W.* Rings with Morita duality// *Lect. Notes Math.* — 1992. — 1523. — P. 1–197.
- 117. *Yaremenko Yu.* Noetherian semi-perfect rings of distributive module type// *Mat. Stud.* — 1997. — 8, № 1. — P. 3–10.
- 118. *Yukimoto Y.* Artinian rings whose projective indecomposables are distributive// *Osaka J. Math.* — 1985. — 22. — P. 339–344.
- 119. *Wisbauer R.* *Foundations of Module and Ring Theory.* — Philadelphia: Gordon & Breach, 1991.

Туганбаев Аскар Аканович

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: tuganbaev@gmail.com



МОДУЛИ НАД ОБЛАСТЯМИ ДИСКРЕТНОГО НОРМИРОВАНИЯ. III

© 2019 г. П. А. КРЫЛОВ, А. А. ТУГАНБАЕВ

Аннотация. Данная обзорная статья является продолжением двух предыдущих обзорных статей, посвященных свойствам модулей над областями дискретного нормирования. Первая и вторая части были опубликованы в 2006 г. в выпусках 121 и 122 серии «Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» (пер. на англ. язык: *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 2007, т. 145, № 4, с. 4997–5117; 2008, т. 151, № 5, с. 3225–3371). Первая часть содержит главы 1–4, разделы 1–22, вторая — главы 5–8, разделы 23–39.

В данной обзорной статье продолжается нумерация глав и разделов первой и второй частей. Третья часть состоит из главы 9 «Дополнения», включающей разделы 40–42.

В разделе 40 рассматриваются p -адические модули без кручения с изоморфными группами автоморфизмов. Раздел 41 посвящен модулям без кручения над полной областью дискретного нормирования с изоморфными радикалами их колец эндоморфизмов. Объем работы не позволяет привести доказательства всех результатов, появившихся после выхода первых двух частей и непосредственно относящихся к рассматриваемым в ней вопросам. В заключительном разделе 42 рассказывается о некоторых таких новых результатах и определениях.

Ключевые слова: область дискретного нормирования, p -адический модуль, кольцо эндоморфизмов.

MODULES OVER DISCRETE VALUATION DOMAINS. III

© 2019 P. A. KRYLOV, A. A. TUGANBAEV

ABSTRACT. This review paper is a continuation of two previous review papers devoted to properties of modules over discrete valuation domains. The first and second parts of this work (containing respectively of Chaps. 1–4, Secs. 1–22 and Chaps. 5–8, Secs. 23–39) were published in *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, **145**, No. 4, 4997–5117 (2007), and **151**, No. 5, 3225–3371 (2008).

In this review paper, we continue the numeration of chapters and sections of parts I and II. The present third part consists of Chap. 9 “Appendix,” Secs. 40–42.

In Sec. 40, we consider p -adic torsion-free modules with isomorphic automorphism groups. Section 41 is devoted to torsion-free modules over a complete discrete valuation domain with isomorphic radicals of their endomorphism rings.

The volume of the paper does not allow us to provide proofs of all results that appeared after publication of the previous parts and directly related to the issues under consideration in it. In the final Section 42, we describe some of these new results.

Keywords and phrases: discrete valuation domain, p -adic module, endomorphism ring.

AMS Subject Classification: 13C05, 13F30, 13F10

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 9. Дополнения	75
40. Изоморфные группы автоморфизмов p -адических модулей без кручения	75
41. Теоремы изоморфизма для радикалов	78
42. Разные результаты	81
Список литературы	83

ГЛАВА 9

ДОПОЛНЕНИЯ

40. ИЗОМОРФНЫЕ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ
 p -АДИЧЕСКИХ МОДУЛЕЙ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Все обозначения и понятия предыдущих частей имеют прежний смысл.

Этот и следующий разделы расширяют тематику главы 7. В замечаниях в конце главы 7 отмечается, что при решении проблемы изоморфизма можно исходить из группы автоморфизмов модуля вместо кольца эндоморфизмов.

В этом разделе мы убедимся, что редуцированный p -адический модуль без кручения определяется своей группой автоморфизмов в классе таких модулей; p -адический модуль — это модуль над кольцом целых p -адических чисел $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Это кольцо определено в разделе 3; там же указано, что $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — полная область дискретного нормирования. Нам также понадобится следствие 11.7, содержащее одно характерное свойство редуцированных модулей без кручения над полной областью дискретного нормирования.

Мы будем регулярно использовать матричное представление эндоморфизмов из предложения 2.3, при котором автоморфизмы переходят в обратимые матрицы. Когда это удобно, мы отождествляем эндоморфизмы с соответствующими матрицами.

Пусть G — некоторая мультипликативная группа и $X \subseteq G$. Тогда $Z(G)$ — центр группы G , а $C(X)$ — централизатор подмножества X , т.е. $C(X) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ для всех } x \in X\}$.

Запишем главный результат раздела.

Теорема 40.1 (см. Corner, Goldsmith [94]). *Пусть M и N — редуцированные p -адические модули без кручения, $p \neq 2$ и $\text{Aut } M \cong \text{Aut } N$. Тогда $M \cong N$.*

Введем некоторые новые понятия и докажем две леммы.

Пусть M — редуцированный p -адический модуль без кручения и $p \neq 2$. В таком случае 2 является автоморфизмом $2 \cdot 1_M$ модуля M . Будем писать 1 вместо 1_M и 2 вместо $2 \cdot 1_M$. Элементы $\theta \in \text{Aut } M$ с условием $\theta^2 = 1$ называются *инволюциями*. Отображение $\theta \rightarrow 2^{-1}(1 + \theta)$ является биекцией между множеством всех инволюций в $\text{Aut } M$ и множеством всех идемпотентов в $\text{End } M$. Таким образом, каждая инволюция θ определяет прямое разложение

$$M = \text{Ker}(1 - \theta) \oplus \text{Ker}(1 + \theta). \quad (1)$$

Инволюция θ называется *экстремальной*, если одно из двух прямых слагаемых в (1) неразложимо. Тогда оно изоморфно $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ согласно следствию 11.8; поэтому оно является циклическим модулем. Мы будем называть это циклическое прямое слагаемое *линией* $L(\theta)$, а дополнительное прямое слагаемое — *гиперплоскостью* $H(\theta)$.

Экстремальные инволюции могут быть охарактеризованы в чисто теоретико-групповых терминах.

Лемма 40.2. *Инволюция θ в $\text{Aut } M$ экстремальна в точности тогда, когда для любой инволюции $\eta \in C(\theta)$ центр $Z(C(\theta, \eta))$ содержит не более 8 инволюций.*

Доказательство. Сначала предположим, что инволюция θ не является экстремальной. Тогда оба ядра $\text{Ker}(1 - \theta)$, $\text{Ker}(1 + \theta)$ разложимы в нетривиальную прямую сумму. Поэтому мы можем выбрать прямые разложения $\text{Ker}(1 - \theta) = A_1 \oplus A_2$, $\text{Ker}(1 + \theta) = A_3 \oplus A_4$, в которых все четыре слагаемых не равны нулю. Далее мы получаем такое прямое разложение

$$M = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4, \quad (2)$$

что θ представляется диагональной матрицей $\text{diag}(1, 1, -1, -1)$ относительно этого прямого разложения. Обозначим $\eta = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$. Тогда η — инволюция в $\text{Aut } M$, она коммутирует с θ и централизатор $C(\theta, \eta)$ состоит из всех диагональных матриц $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, где

$\alpha_i \in \text{Aut } A_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Следовательно, центр $Z(C(\theta, \eta))$ состоит из всех диагональных матриц $\text{diag}(v_1 \cdot 1, v_2 \cdot 1, v_3 \cdot 1, v_4 \cdot 1)$, где v_1, v_2, v_3, v_4 — обратимые целые p -адические числа. Ясно, что $Z(C(\theta, \eta))$ содержит 16 инволюций.

С другой стороны, если θ — экстремальная инволюция, то одно из слагаемых $\text{Ker}(1 - \theta)$, $\text{Ker}(1 + \theta)$ неразложимо. Поэтому в (2) одно из слагаемых равно нулю. Тогда для любой инволюции η , коммутирующей с θ , диагональные матрицы для θ и η имеют ноль в некотором месте. Ясно, что центр $Z(C(\theta, \eta))$ содержит не более 8 инволюций. $\square$

Пусть N — еще один редуцированный p -адический модуль без кручения и $\Phi: \text{Aut } M \rightarrow \text{Aut } N$ — некоторый групповой изоморфизм. Обозначим через $\bar{\alpha}$ образ автоморфизма $\alpha \in \text{Aut } M$ при действии Φ , т. е. $\Phi(\alpha) = \bar{\alpha}$. Зафиксируем экстремальную инволюцию θ в $\text{Aut } M$; такие θ всегда существуют по следствию 11.7. Пусть L и H — линия и гиперплоскость для θ соответственно. Таким образом, имеем

$$M = L \oplus H. \quad (3)$$

Обозначим через Δ и ∇ подгруппы группы всех автоморфизмов модуля M , матрицами которых являются нижние треугольные и верхние треугольные матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, соответственно.

Из леммы 40.2 вытекает, что $\bar{\theta}$ — экстремальная инволюция в $\text{Aut } N$. Пусть $N = \bar{L} \oplus \bar{H}$ — соответствующее прямое разложение, где $\bar{L}$ — линия и $\bar{H}$ — гиперплоскость.

Наконец, определим подгруппы $\bar{\Delta}$ и $\bar{\nabla}$, аналогичные подгруппам Δ и ∇ .

Сформулируем лемму, содержащую ключевое свойство изоморфизма Φ .

Лемма 40.3. *Одно из следующих двух утверждений справедливо:*

- (a) $\Phi(\Delta) = \bar{\Delta}$ и $\Phi(\nabla) = \bar{\nabla}$;
- (b) $\Phi(\Delta) = \bar{\nabla}$ и $\Phi(\nabla) = \bar{\Delta}$.

Доказательство. Рассмотрим автоморфизм ω модуля M , соответствующий матрице $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что $\omega \in Z(C(\theta))$, но $\omega, \theta\omega \notin Z(\text{Aut } M)$. Поэтому $\bar{\omega} \in Z(C(\bar{\theta}))$, но $\bar{\omega}, \bar{\theta}\bar{\omega} \notin Z(\text{Aut } N)$. Учитывая лемму 33.4, получаем, что

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} u_1 \cdot 1 & 0 \\ 0 & u_2 \cdot 1 \end{pmatrix},$$

где u_1, u_2 — обратимые элементы в $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Удобнее считать, что

$$\bar{\omega} = u_2 \bar{\chi}, \quad \text{где} \quad \bar{\chi} = \begin{pmatrix} v \cdot 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а v — обратимый элемент в $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Так как $\bar{\omega}$ и $\bar{\theta}\bar{\omega}$ нецентральны, то $v \neq \pm 1$. Поэтому $v \neq v^{-1}$.

Теперь возьмем произвольный автоморфизм

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix} \in \Delta.$$

Из непосредственных вычислений вытекают равенства

$$\omega^{-1}\alpha\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\sigma & 1 \end{pmatrix} = \alpha^2, \quad \theta\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix};$$

в частности, $\theta\alpha$ — инволюция. Также верны равенства

$$\bar{\alpha}^2 = \bar{\omega}^{-1}\bar{\alpha}\bar{\omega} = \bar{\chi}^{-1}\bar{\alpha}\bar{\chi}, \quad (\bar{\theta}\bar{\alpha})^2 = 1. \quad (4)$$

В соответствии с прямым разложением $N = \bar{L} \oplus \bar{H}$ запишем

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие значения в матричных равенствах (4), получаем две серии равенств

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^2 + \varphi_{12}\varphi_{21} &= \varphi_{11}, & \varphi_{11}^2 - \varphi_{12}\varphi_{21} &= 1, \\ \varphi_{11}\varphi_{12} + \varphi_{12}\varphi_{22} &= v^{-1}\varphi_{12}, & \varphi_{11}\varphi_{12} - \varphi_{12}\varphi_{22} &= 0, \\ \varphi_{21}\varphi_{11} + \varphi_{22}\varphi_{21} &= v\varphi_{21}, & -\varphi_{21}\varphi_{11} + \varphi_{22}\varphi_{21} &= 0, \\ \varphi_{21}\varphi_{12} + \varphi_{22}^2 &= \varphi_{22}, & -\varphi_{21}\varphi_{12} + \varphi_{22}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Складывая равенства во второй строке из (5), затем в третьей строке, получим равенства

$$(2\varphi_{11} - v^{-1})\varphi_{12} = 0, \quad \varphi_{21}(2\varphi_{11} - v) = 0.$$

По крайней мере, один из эндоморфизмов $2\varphi_{11} - v^{-1}$, $2\varphi_{11} - v$ не является нулевым. Поэтому хотя бы один из эндоморфизмов φ_{12} , φ_{21} является нулевым. Из равенств в первой и последней строках (5) вытекает, что φ_{11} и φ_{22} являются одновременно идемпотентами и инволюциями. Иными словами, $\varphi_{11} = 1$ и $\varphi_{22} = 1$. В итоге получаем, что $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$ или $\bar{\alpha} \in \bar{\nabla}$.

Теперь можно убедиться, что Φ либо отображает все элементы из Δ в $\bar{\Delta}$, либо отображает все элементы из Δ в $\bar{\nabla}$. Допустим противное, т. е. существуют такие автоморфизмы $\alpha, \beta \in \Delta$, что $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$ и $\bar{\beta} \in \bar{\nabla}$. Поскольку $\alpha\beta \in \Delta$, то или $\bar{\alpha}\bar{\beta} \in \bar{\Delta}$ или $\bar{\alpha}\bar{\beta} \in \bar{\nabla}$. Например, пусть $\bar{\alpha}\bar{\beta} \in \bar{\Delta}$. В таком случае

$$\bar{\beta} = \bar{\alpha}^{-1}\bar{\alpha}\bar{\beta} \in \bar{\Delta} \cap \bar{\nabla} = \{1\};$$

это невозможно.

Из соображений симметрии следует, что Φ^{-1} отображает каждую из подгрупп $\bar{\Delta}$, $\bar{\nabla}$ в одну из подгрупп Δ , ∇ . Все вместе дает нужный результат. $\square$

Доказательство теоремы 40.1. Отображение

$$\text{Hom}(L, H) \rightarrow \nabla, \quad \tau \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

является групповым изоморфизмом. Из изоморфизма $L \cong \hat{\mathbb{Z}}_p$ следует, что $\text{Hom}(L, H) \cong H$; см. предложение 2.2. Следовательно, существует групповой изоморфизм $H \rightarrow \nabla$. Также существует групповой изоморфизм $\bar{H} \rightarrow \bar{\nabla}$. Как и в лемме 40.3 различаем два случая.

Случай (а). Φ изоморфно отображает ∇ на $\bar{\nabla}$. Тогда существует аддитивный изоморфизм $H \cong \bar{H}$. Поскольку $L \cong \hat{\mathbb{Z}}_p \cong \bar{L}$, то существует изоморфизм $L \oplus H \cong \bar{L} \oplus \bar{H}$, т. е. M и N изоморфны как абелевы группы. Тогда они изоморфны как $\hat{\mathbb{Z}}_p$ -модули. Это проверяется с помощью стандартных аргументов, основанных на непрерывности, поскольку кольцо $\mathbb{Z}$ плотно в p -адической топологии кольца $\hat{\mathbb{Z}}_p$. Также можно опираться на то, что M и N — так называемые $E(\hat{\mathbb{Z}}_p)$ -модули; см. [183, раздел 6]. Также получаем, что любой аддитивный гомоморфизм $M \rightarrow N$ является гомоморфизмом p -адических модулей.

Случай (б). В этом случае Φ изоморфно отображает ∇ и Δ на $\bar{\Delta}$ и $\bar{\nabla}$ соответственно. Повторяя приведенные выше аргументы, получаем, что существуют $\hat{\mathbb{Z}}_p$ -модульные изоморфизмы

$$\text{Hom}(H, L) \cong \bar{H}, \quad \text{Hom}(\bar{H}, \bar{L}) \cong H.$$

Теперь несложно доказать, что H и $\bar{H}$ — свободные модули одного и того же конечного ранга. Действительно, выберем некоторый базисный подмодуль B модуля H . Так как L — полный модуль, то из предложения 11.12 вытекает изоморфизм $\text{Hom}(H, L) \cong \text{Hom}(B, L)$, где $\text{Hom}(B, L)$ — произведение некоторого числа копий модуля L . Поэтому $\text{Hom}(\bar{H}, \bar{L})$ имеет ранг, который превосходит ранг модуля H , за исключением случая, когда H — свободный модуль конечного ранга. Но тогда ясно, что M и N — свободные модули одного и того же конечного ранга. Доказательство теоремы закончено. $\square$

Открытый вопрос. Можно ли перенести теорему 40.1 на редуцированные модули без кручения над полной областью дискретного нормирования?

Упражнение 1. Используя результаты раздела 12, найдите группы автоморфизмов R -модулей R , $R(p^n)$, $R(p^\infty)$, $\hat{R}$, K .

Кольца R , $\widehat{R}$ и K определены в разделе 3; в частности, K — поле частных коммутативной области дискретного нормирования R . Модули $R(p^n)$ и $R(p^\infty)$ определены в разделе 4.

Упражнение 2. Пусть $M = A \oplus B$, где B — вполне инвариантный подмодуль в M . Проверить равенство

$$\operatorname{Aut} M = \begin{pmatrix} \operatorname{Aut} A & 0 \\ \operatorname{Hom}(A, B) & \operatorname{Aut} B \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3. Вычислить группы автоморфизмов следующих модулей:

$$R(p^n) \oplus R, R(p^\infty) \oplus R(p^n), K \oplus R, R(p^\infty) \oplus K;$$

см. упражнение 4 раздела 12.

Упражнение 4. Если $M = A \oplus B$, то можно рассматривать группу $\operatorname{Aut} A$ как подгруппу группы $\operatorname{Aut} M$, отождествляя $\operatorname{Aut} A$ с множеством всех таких $\alpha \in \operatorname{Aut} M$, что $\alpha|_B = 1$.

Упражнение 5. Прямое разложение

$$M = A_1 \oplus \dots \oplus A_n, \quad (*)$$

где $A_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, определяет множество $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ таких коммутирующих инволюций, что $\theta_i|_{A_j} = \delta_{ij}1_{A_j}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Обратно, любое множество $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ коммутирующих инволюций в $\operatorname{Aut} M$ определяет единственное прямое разложение $(*)$.

Упражнение 6. Пусть $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ — система инволюций из упражнения 5. Имеет место прямое разложение

$$C(\theta_1, \dots, \theta_n) = \operatorname{Aut} A_1 \times \dots \times \operatorname{Aut} A_n,$$

где подразумеваются отождествления, о которых говорится в упражнении 4.

41. ТЕОРЕМЫ ИЗОМОРФИЗМА ДЛЯ РАДИКАЛОВ

Этот раздел, как и предыдущий, примыкает к главе 7. При поиске теорем изоморфизма для колец эндоморфизмов можно поставить вопрос об определяемости модуля не всем кольцом эндоморфизмов, а какой-то его частью.

Пусть R — коммутативная область дискретного нормирования с простым элементом p . Тогда для любого R -модуля M кольцо $\operatorname{End} M$ является R -алгеброй; см. начало раздела 19. Радикал Джекобсона $J(\operatorname{End} M)$ также является R -алгеброй. Определения и различная информация об этом радикале содержатся в разделе 14. Вместо «радикал Джекобсона» мы будем писать «радикал».

Пусть M и N — некоторые R -модули. Можно задать следующий вопрос: Если R -алгебры $J(\operatorname{End} M)$ и $J(\operatorname{End} N)$ изоморфны как алгебры без единицы, то будут ли модули M и N изоморфны? И существует ли изоморфизм модулей $M \rightarrow N$, индуцирующий исходный изоморфизм алгебр $J(\operatorname{End} M) \rightarrow J(\operatorname{End} N)$? Теоремы, положительно отвечающие на эти вопросы, можно называть теоремами изоморфизма для радикалов (колец эндоморфизмов).

Данный раздел содержит довольно подробное доказательство одной теоремы изоморфизма для радикалов и обзор других подобных результатов.

Область дискретного нормирования предполагается полной. Будет весьма полезно следствие 11.7 о модулях без кручения над такой областью.

В разделе 14 определен идеал $\operatorname{Fin} M$ конечных эндоморфизмов R -модуля M без кручения. Он детально исследуется в разделе 17. Мы будем постоянно использовать два утверждения из предложения 14.3. Для удобства оформим их здесь в следующем виде.

Лемма 41.1. Пусть M — редуцированный модуль без кручения.

A. $J(\operatorname{End} M) \subseteq \operatorname{Hom}(M, pM)$.

B. $\operatorname{Hom}(M, pM) \cap \operatorname{Fin} M \subseteq J(\operatorname{End} M)$.

В доказательстве теоремы 41.5 фактически применяется некоторая версия метода Капланского доказательства теорем изоморфизма. Суть этого метода изложена в разделе 33 и там же была продемонстрирована его эффективность. В методе Капланского особую роль играют примитивные идемпотенты. Сейчас мы выделим те элементы из $J(\text{End } M)$, которые заменяют примитивные идемпотенты в методе Капланского.

Лемма 41.2. Пусть M — R -модуль без кручения, $\omega \in J(\text{End } M)$ и $\omega \neq 0$. Тогда существует такой единственный эндоморфизм $\beta \in \text{End } M$, что $\omega = p\beta$. Эндоморфизм β является примитивным идемпотентом в точности тогда, когда выполняются следующие условия:

- (1) $\omega^2 = p\omega$;
- (2) если найдутся такие эндоморфизмы $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{End } M$, что
 - (a) $\omega = \sigma_1 + \sigma_2$;
 - (b) $\sigma_1\sigma_2 = 0 = \sigma_2\sigma_1$;
 - (c) $\sigma_1^2 = p\sigma_1$ и $\sigma_2^2 = p\sigma_2$,
 то $\sigma_1 = 0$ или $\sigma_2 = 0$.

Доказательство. В силу леммы 41.1 для любого $\alpha \in J(\text{End } M)$ существует такой эндоморфизм $\gamma \in \text{End } M$, что $\alpha = p\gamma$. Единственность γ гарантирует то, что $\text{End } M$ — R -модуль без кручения. Чтобы доказать лемму, теперь мы будем использовать это свойство и известные свойства примитивных идемпотентов.

Итак, имеется единственный эндоморфизм β , для которого верно равенство $\omega = p\beta$. Сначала предположим, что β — примитивный идемпотент. Тогда $\omega^2 = p^2\beta^2 = p\omega$, т. е. условие (1) выполнено.

Для доказательства того, что для ω выполняется условие (2), предположим, что эндоморфизмы $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{End } M$ удовлетворяют условиям (a)–(c). Пусть τ_1, τ_2 — те единственные эндоморфизмы, для которых верны равенства $\sigma_i = p\tau_i$, $i = 1, 2$. Теперь из равенств $\sigma_i^2 = p\sigma_i$ получаем равенства $p^2(\tau_i^2 - \tau_i) = 0$, $i = 1, 2$. Далее имеем $\tau_i^2 - \tau_i = 0$ и $\tau_i^2 = \tau_i$, т. е. τ_1 и τ_2 — идемпотенты. Используя похожие рассуждения и условие (b), получим, что $\tau_1\tau_2 = 0 = \tau_2\tau_1$.

Затем из условия (a) выводим, что $p(\beta - \tau_1 - \tau_2) = 0$, откуда $\beta = \tau_1 + \tau_2$. Так как β — примитивный идемпотент, то $\tau_1 = 0$ или $\tau_2 = 0$. Следовательно, $\sigma_1 = 0$ или $\sigma_2 = 0$.

Наоборот, пусть ω удовлетворяет условиям (1) и (2). Нужно проверить, что β — примитивный идемпотент.

Как и в рассмотренном выше случае для τ_i , из равенства $\omega^2 = p\omega$ получаем равенство $\beta^2 = \beta$.

Теперь предположим, что эндоморфизмы $\pi_1, \pi_2 \in \text{End } M$ являются ортогональными идемпотентами и $\beta = \pi_1 + \pi_2$. Положим $\sigma_1 = p\pi_1$ и $\sigma_2 = p\pi_2$. Из того, что

$$\omega = p\beta = p\pi_1 + p\pi_2 \in J(\text{End } M),$$

получаем, что $p\pi_1, p\pi_2 \in J(\text{End } M)$, т. е. $\sigma_1, \sigma_2 \in J(\text{End } M)$. Используя свойства идемпотентов π_1 и π_2 , теперь нетрудно вывести, что σ_1 и σ_2 удовлетворяют условиям (a)–(c). Поэтому $\sigma_1 = 0$ или $\sigma_2 = 0$, откуда получаем, что $\pi_1 = 0$ или $\pi_2 = 0$, т. е. β — примитивный идемпотент. $\square$

Следующую теорему можно считать обобщением теоремы 33.5.

Теорема 41.3 (Flagg [129]). Пусть M и N — редуцированные R -модули без кручения. Тогда всякий изоморфизм алгебр $J(\text{End } M)$ и $J(\text{End } N)$ индуцируется некоторым изоморфизмом модулей M и N .

Доказательство. Пусть $\psi: J(\text{End } M) \rightarrow J(\text{End } N)$ — некоторый изоморфизм алгебр. Как и ранее, обозначаем $\alpha^* = \psi(\alpha)$ для каждого $\alpha \in J(\text{End } M)$.

Выберем некоторое циклическое прямое слагаемое Ra модуля M и запишем $M = Ra \oplus A$ для некоторого подмодуля A . Обозначим через π проекцию M на Ra с ядром A . Тогда π — примитивный идемпотент и $p\pi \in J(\text{End } M)$ по лемме 41.1. Положим $\omega = p\pi$ и заметим, что ω удовлетворяет условиям (1) и (2) леммы 41.2. Следовательно, ω^* также удовлетворяет этим условиям. Из леммы 41.1 следует, что найдется такой эндоморфизм $\rho \in \text{End } N$, что $\omega^* = p\rho$. По

лемме 41.2 ρ — примитивный идемпотент. Поэтому $\rho N \cong R$ (см. следствие 11.8). Можно записать $\rho N = Rb$ и $N = Rb \oplus B$ для некоторого элемента $b \in N$ и подмодуля B .

Для всякого элемента $x \in M$ существует единственный эндоморфизм $\alpha \in \text{End } M$ со свойствами $\alpha a = x$ и $\alpha A = 0$. Так как $p\alpha \in J(\text{End } M)$, то по лемме 41.1 $(p\alpha)^* \in \text{Hom}(N, pN)$. Поэтому $(p\alpha)^* = p\beta$ для единственного $\beta \in \text{End } N$. Определим отображение $\varphi: M \rightarrow N$, полагая $\varphi x = \beta b$. Это отображение определено корректно в силу единственности β . Проверка того, что φ — изоморфизм и φ индуцирует ψ , аналогична проверке из доказательства 33.2; см. также [20]. Тем не менее, приведем некоторые подробности.

Прежде всего заметим, что верно равенство $(p\alpha)^* B = 0$ или $\beta B = 0$ (более общее утверждение содержится в упражнении 7).

В самом деле, из равенства $\alpha = \pi\alpha$ следует равенство $p^2\alpha = p\pi \cdot p\alpha$. Теперь получаем

$$(p^2\alpha)^* = p(p\alpha)^* = p(p\beta) = (p\pi)^*(p\alpha)^* = \omega^* \cdot p\beta.$$

Далее находим $p\beta = \omega^*\beta = p\rho\beta$ и $\beta = \rho\beta$. Поэтому $\beta B = 0$.

В дополнение к x возьмем еще один элемент $y \in M$. Также возьмем такой эндоморфизм $\gamma \in \text{End } M$, что $\gamma a = y$ и $\gamma A = 0$. Далее запишем $(p\gamma)^* = p\delta$, где $\delta \in \text{End } N$. Согласно определению φ имеем $\varphi y = \delta b$. Получаем равенства

$$(p(\alpha + \gamma))^* = (p\alpha)^* + (p\gamma)^* = p(\beta + \delta).$$

Следовательно,

$$\varphi(x + y) = (\beta + \delta)b = \beta b + \delta b = \varphi x + \varphi y,$$

т. е. φ сохраняет сумму.

Возьмем произвольный элемент $r \in R$. Из равенства $(r\alpha)a = rx$ следует, что $p(r\alpha)^* = p(r\beta)$. Далее получаем

$$\varphi(rx) = (r\beta)b = r(\beta b) = r\varphi(x).$$

Итак, φ — модульный гомоморфизм.

Если $\varphi x = \beta b = 0$ для некоторого x , то $(\rho\beta)b = 0$ и $\rho\beta = 0$. Из равенств $\omega^* = p\rho$ и $(p\alpha)^* = p\beta$ получаем

$$(p(\omega\alpha))^* = 0, \quad p(\omega\alpha) = 0, \quad \omega\alpha = 0.$$

Поэтому $x = \alpha a = (\omega\alpha)a = 0$.

Для каждого $z \in N$ существует такой единственный эндоморфизм $\gamma \in \text{End } N$, что $z = \gamma b$ и $\gamma B = 0$. Так как $p\gamma \in J(\text{End } N)$, то $p\gamma = \delta^*$ для некоторого $\delta \in J(\text{End } M)$. Также имеем $\delta = p\alpha$, где $\alpha \in \text{End } M$. Применяя приведенное выше замечание к ψ^{-1} , получаем $\alpha A = 0$. Принимая во внимание равенство $(p\alpha)^* = p\gamma$, теперь получаем $\varphi(\alpha a) = \gamma b = z$. Итак, φ — изоморфизм модулей M и N .

Осталось проверить, что φ индуцирует ψ . Возьмем произвольный эндоморфизм $\mu \in J(\text{End } M)$ и элемент $z \in N$. Тогда $z = \varphi x$, где $x \in M$. Пусть $\alpha \in \text{End } M$ таков, что $x = \alpha a$ и $\alpha A = 0$. Тогда $z = \varphi x = \beta b$, где $(p\alpha)^* = p\beta$, $\beta \in \text{End } N$. Теперь можно записать равенства

$$p\mu^*(z) = p\mu^*(\beta b) = (p\mu\alpha)^*(b) = p(\mu\alpha)^*(b) = p\varphi(\mu\alpha(a)) = p\varphi\mu\varphi^{-1}(z)$$

и $\mu^*(z) = \varphi\mu\varphi^{-1}(z)$. Поэтому $\psi(\mu) = \mu^* = \varphi\mu\varphi^{-1}$, что и требовалось. $\square$

В замечаниях к главе 7 упоминаются статьи [188, 189, 320]. В них рассматривается вопрос об определяемости абелевой p -группы, т. е. примарного $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -модуля, радикалом ее кольца эндоморфизмов. Работы Flagg [130–132] также посвящены этому вопросу для ряда классов модулей. Примечательно, что в этих работах доказаны аналоги многих известных теорем для колец эндоморфизмов (почти все эти теоремы содержатся в главе 7).

Так в [189] доказано, что для абелевой p -группы с неограниченной базисной подгруппой верна теорема изоморфизма для радикала кольца эндоморфизмов. Используя идеи и методы этой работы, Flagg в [130, 131] получила следующий результат (уточним, что в приведенных ниже трех теоремах R — полная область дискретного нормирования).

Теорема 41.4. Пусть M и N — R -модули. Допустим, что периодический подмодуль $t(M)$ имеет неограниченный базисный подмодуль и $M/t(M)$ — делимый модуль. Пусть дан изоморфизм R -алгебр $\psi: J(\text{End } M) \rightarrow J(\text{End } N)$. Тогда существует такой модульный изоморфизм $\varphi: t(M) \rightarrow t(N)$, что $\psi(\alpha)$ и $\varphi^{-1}\alpha\varphi$ совпадают на $t(N)$ для каждого $\alpha \in J(\text{End } M)$.

Конечно, можно рассматривать теорему 41.4 как некоторое обобщение теоремы Капланского 33.2.

В [131] также доказана теорема, расширяющая теорему 35.4 May–Toubassi из статьи [268].

Теорема 41.5. Пусть M и N — смешанные R -модули ранга 1. Допустим, что периодический подмодуль $t(M)$ тотально проективен и неограничен. Тогда всякий изоморфизм алгебр $J(\text{End } M)$ и $J(\text{End } N)$ индуцируется некоторым изоморфизмом модулей M и N .

Тотально проективные модули определены в конце раздела 30.

Еще один результат из [131] является теоремой изоморфизма для радикала кольца эндоморфизмов модуля Уорфилда. Можно рассматривать этот результат как аналог теоремы 36.4 (see [122]). Модулям Уорфилда посвящен раздел 32.

Теорема 41.6. Пусть M и N — редуцированные модули Уорфилда конечного ранга, причем M имеет неограниченный периодический подмодуль. Если существует изоморфизм алгебр $J(\text{End } M) \cong J(\text{End } N)$, то $M \cong N$.

Если считать, что все алгебры снабжены конечной топологией, то на радикалах этих алгебр возникает индуцированная топология. Поэтому, как и в разделах 33 и 34, можно считать, что изоморфизмы между радикалами непрерывны в обоих направлениях, т. е. топологические. Естественно при этом ожидать новых теорем изоморфизма. В статье [132] теоремы топологического изоморфизма (May), представленные в разделах 33 и 34, обобщаются на ситуацию, когда радикалы алгебр эндоморфизмов двух модулей топологически изоморфны.

Также обратим внимание на упражнение 8 раздела 37. Результат, сформулированный в этом упражнении, переносит одну теорему из [10] на модули без кручения.

Упражнение 7. При условиях теоремы 41.3 для любого изоморфизма R -алгебр

$$\psi: J(\text{End } M) \rightarrow J(\text{End } N)$$

верно равенство

$$\psi(\text{Fin } M \cap \text{Hom}(M, pM)) = \text{Fin } N \cap \text{Hom}(N, pN).$$

Следующее упражнение говорит о том, что условия теорем 33.5 и 41.3 могут быть ослаблены.

Упражнение 8. Пусть M и N — редуцированные модули без кручения. Тогда всякий изоморфизм алгебр $\text{Fin } M$ и $\text{Fin } N$ (или алгебр $\text{Fin } M \cap \text{Hom}(M, pM)$ и $\text{Fin } N \cap \text{Hom}(N, pN)$) индуцируется некоторым изоморфизмом модулей M и N .

42. РАЗНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Кратко изложим содержание нескольких статей, опубликованных после выхода первого издания данной книги.

Тематика статьи [174] связана с разделом 20. В ней предполагается, что R — полная область дискретного нормирования с простым элементом p .

Пусть κ — некоторое бесконечное кардинальное число. R -модуль M называется κ -свободным, если все подмодули, порожденные менее чем κ элементами, свободны. Модуль M называется κ - Σ -циклическим, если каждый его подмодуль, порожденный менее чем κ элементами, является прямой суммой циклических модулей.

Теорема 42.1 (см. [174]). Если n — натуральное число, то существуют собственные классы R -модулей без кручения M и периодических R -модулей N со следующими свойствами:

- (1) M — $\aleph_n$ -свободный модуль без гомоморфных образов, являющихся свободными модулями счетного ранга;
- (2) N — $\aleph_n$ - Σ -циклический модуль без гомоморфных образов $\bigoplus_{m=1}^{\infty} R/p^m R$.

Приведенная теорема имеет несколько простых следствий. Например, свободные прямые слагаемые модуля M из 1) должны иметь конечный ранг. Кроме того, любое прямое разложение модуля M содержит конечное число ненулевых слагаемых. Эти следствия иллюстрируют интересную связь с теоремой 20.6. В частности, ясно, что модуль M имеет ранг $r(M) \geq 2^{\aleph_0}$.

Пусть M — примарный над (не обязательно полной) областью дискретного нормирования R . Подмодуль A модуля M называется *регулярным*, если равенство

$$p^n A \cap p^{n+k} M = p^n (A \cap p^k M)$$

верно для всех $n, k \geq 0$; см. [218]. В [68] найдены два условия, эквивалентные регулярности подмодуля A модуля M . Оба этих условия уже встречались в литературе; см. подробности в [68].

Несколько работ посвящено нормированиям, кольцам нормирования и их аналогам для векторных пространств и модулей.

В работе [183] дана историческая справка о генезисе понятий нормирования тела и колец нормирования тела. Приводятся и обсуждаются основные исходные результаты о некоммутативных инвариантных кольцах нормирования тел и о кольцах дискретного нормирования. Отметим, что часть этих результатов содержится в разделе 3.

Приведем основное определение работы [213]. Пусть R — коммутативная область с полем частных K . Будем говорить, что R — максимальное подкольцо в K , не являющееся кольцом дискретного нормирования, если всякое собственное подкольцо в K , строго содержащее R , является подкольцом дискретного нормирования в K . В [213] изучаются максимальные подкольца R в K , не являющиеся кольцами дискретного нормирования. Получены различные характеристики таких подколец, использующие, в частности, такие понятия как размерность Крулля и спектры простых и максимальных идеалов. При этом общая ситуация распадается на три случая: R — кольцо нормирования; R — целозамкнутое кольцо, не являющееся кольцом нормирования; R не является целозамкнутым кольцом.

Понятия нормирования поля и кольца нормирования были перенесены на модули. Концепция модуля нормирования была предложена в [46]. В [279] модули нормирования были определены несколько другим способом. Для мультипликативных модулей определения из [46, 279] эквивалентны.

Между кольцами нормирования и нормированиями полей имеется взаимно однозначное соответствие; см. раздел 3. В [210] понятие нормирования поля обобщается до понятия нормирования векторного пространства. Оказалось, что такое нормирование векторного пространства каноническим способом определяет некоторый модуль нормирования. Однако, в отличие от случая колец не всегда верно, что модуль нормирования можно получить исходя из некоторого нормирования векторного пространства.

В ряде статей рассматривались многочлены над областями дискретного нормирования. В частности, эти статьи содержат условия неприводимости для различных многочленов. При этом используется техника, пришедшая из теории нормирований. Статьи на эту тему содержатся, например, в списке литературы работы [322]. В [322] получен один критерий неприводимости и факторизации многочлена в терминах соответствующего нормирования поля частных области дискретного нормирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гриншпон С. Я.* Вполне характеристические подгруппы сепарабельных абелевых групп// *Фундам. прикл. мат.* — 1998. — 4, № 4. — С. 1281–1307.
2. *Гриншпон С. Я.* Вполне характеристические подгруппы абелевых групп без кручения и их решетки// *Фундам. прикл. мат.* — 2000. — 6, № 3. — С. 747–759.
3. *Гриншпон С. Я.* Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность/ *дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук.* — Томск, 2000.
4. *Гриншпон С. Я.* Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность// *Фундам. прикл. мат.* — 2002. — 8, № 2. — С. 407–473.
5. *Гриншпон С. Я., Мисяков В. М.* О вполне транзитивных абелевых группах// в кн.: *Абелевы группы и модули.* — Томск, 1986. — 6. — С. 12–27.
6. *Давыдова О. И.* Факторно делимые группы ранга 1// *Фундам. прикл. мат.* — 2007. — 13, № 3. — С. 25–33.
7. *Добрусин Ю. Б.* Абелевы группы, близкие к алгебраически компактным/ *дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук.* — Томск, 1981.
8. *Ераскина А. П.* О λ -чистоте модулей над кольцами дискретного нормирования// *Сиб. мат. ж.* — 1973. — 14. — С. 208–212.
9. *Иванов А. В.* Об одной проблеме абелевых групп// *Мат. сб.* — 1978. — 105 (147), № 4. — С. 525–542.
10. *Крылов П. А.* Сильно однородные абелевы группы без кручения// *Сиб. мат. ж.* — 1983. — 24, № 2. — С. 77–84.
11. *Крылов П. А.* Вполне транзитивные абелевы группы без кручения// *Алгебра и логика.* — 1990. — 29, № 5. — С. 549–560.
12. *Крылов П. А.* Кольца эндоморфизмов и структурная теория абелевых групп/ *дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.мат наук.* — Томск, 1991.
13. *Крылов П. А.* Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов// *Фундам. прикл. мат.* — 2000. — 6, № 3. — С. 793–812.
14. *Крылов П. А.* Аффинные группы модулей и их автоморфизмы// *Алгебра и логика.* — 2001. — 40, № 1. — С. 60–82.
15. *Крылов П. А.* Наследственные кольца эндоморфизмов смешанных абелевых групп// *Сиб. мат. ж.* — 2002. — 43, № 1. — С. 108–119.
16. *Крылов П. А.* Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы// *Алгебра и логика.* — 2004. — 43, № 1. — С. 60–76.
17. *Крылов П. А., Классен Е. Д.* Центр кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы// *Сиб. мат. ж.* — 1999. — 40, № 5. — С. 1074–1085.
18. *Крылов П. А., Пахомова Е. Г.* Абелевы группы и регулярные модули// *Мат. заметки.* — 2001. — 69, № 3. — С. 402–411.
19. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Идемпотентные функторы и локализации в категориях модулей и абелевых групп// *Фундам. прикл. мат.* — 2010. — 16, № 7. — С. 75–159.
20. *Крылов П. А., Туганбаев А. А., Царев А. В.* Вокруг Теоремы Бэра—Капланского// *Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз.* — 2019. — 159. — С. 46–67.
21. *Крылов П. А., Чехлов А. Р.* Абелевы группы без кручения с большим числом эндоморфизмов// *Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН.* — 2001. — 7, № 2. — С. 194–207.
22. *Куликов Л. Я.* К теории абелевых групп произвольной мощности// *Мат. сб.* — 1941. — 9 (51), № 1. — С. 165–181.
23. *Куликов Л. Я.* К теории абелевых групп произвольной мощности// *Мат. сб.* — 1945. — 16 (58), № 2. — С. 129–162.
24. *Куликов Л. Я.* Обобщенные примарные группы, I// *Тр. Моск. мат. о-ва.* — 1952. — 1. — С. 247–326.
25. *Куликов Л. Я.* Обобщенные примарные группы, II// *Тр. Моск. мат. о-ва.* — 1953. — 2. — С. 85–167.
26. *Марков В. Т., Михалев А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А.* Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей// *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия.* — 1983. — 21. — С. 183–254.
27. *Мисяков В. М.* Полная транзитивность абелевых групп/ *дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат наук.* — Томск, 1992.

28. Приходовский М. А. Изоморфизмы тензорных произведений модулей и T -модулей/ дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат наук. — Томск, 2002.
29. Пунинский Г. Е., Туганбаев А. А. Кольца и модули. — М.: Союз, 1998.
30. Тимошенко Е. А. T -радикалы и E -радикалы в категории модулей// Сиб. мат. ж. — 2004. — 45, № 1. — С. 201–210.
31. Тимошенко Е. А., Царев А. В. Последовательности групп эндоморфизмов абелевых групп// Мат. заметки. — 2018. — 104, № 2. — С. 309–317.
32. Туганбаев А. А. Малопроективные модули// Сиб. мат. ж. — 1980. — 21, № 5. — С. 109–113.
33. Туганбаев А. А. Полуцепные кольца и модули// Мат. заметки. — 1990. — 48, № 2. — С. 99–106.
34. Фомин А. А. Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов// Мат. заметки. — 1984. — 36, № 2. — С. 179–187.
35. Фомин А. А. Двойственность в некоторых классах абелевых групп без кручения конечного ранга// Сиб. мат. ж. — 1986. — 27, № 4. — С. 117–127.
36. Фомин А. А. Чистые свободные группы// в кн.: Абелевы группы и модули. — Томск, 1986. — С. 145–164.
37. Фомин А. А. Инварианты и двойственность в некоторых классах абелевых групп без кручения конечного ранга// Алгебра и логика. — 1987. — 26, № 1. — С. 63–83.
38. Фригер М. Д. О жестких кольцах без кручения// Сиб. мат. ж. — 1986. — 27, № 3. — С. 217–219.
39. Царев А. В. T -кольца и факторно делимые группы ранга 1// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. — 2013. — 4 (24). — С. 50–53.
40. Челлов А. Р. О разложимых вполне транзитивных группах без кручения// Сиб. мат. ж. — 2001. — 42, № 3. — С. 714–719.
41. Челлов А. Р. Об одном классе эндотранзитивных групп// Мат. заметки. — 2001. — 69, № 6. — С. 944–949.
42. Челлов А. Р. Вполне транзитивные группы без кручения конечного p -ранга// Алгебра и логика. — 2001. — 40, № 6. — С. 698–715.
43. Челлов А. Р. Абелевы группы с большим числом эндоморфизмов/ дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — Томск, 2003.
44. Яковлев А. В. О прямых разложениях p -адических групп// Алгебра и анализ. — 2000. — 12, № 6. — С. 217–223.
45. Яковлев А. В. О прямых разложениях S -локальных групп// Алгебра и анализ. — 2001. — 13, № 4. — С. 229–253.
46. Ali M. M. Invertibility of multiplication modules// New Zealand J. Math. — 2006. — 35. — P. 17–29.
47. Anderson F. W., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. — New York: Springer-Verlag, 1974.
48. Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhalev A. V. Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules. — New York: Marcel Dekker, 1995.
49. Arnold D. A duality for torsion-free modules of finite rank over a discrete valuation ring// Proc. London Math. Soc. — 1972. — 24. — P. 204–216.
50. Arnold D. A duality for quotient divisible Abelian groups of finite rank// Pac. J. Math. — 1972. — 42. — P. 11–15.
51. Arnold D. Exterior powers and torsion free modules over discrete valuation rings// Trans. Am. Math. Soc. — 1972. — 170. — P. 471–481.
52. Arnold D. Finite rank torsion-free Abelian groups and rings// Lect. Notes Math. — 1982. — 931. — P. 1–191.
53. Arnold D. A finite global Azumaya theorem in additive categories// Proc. Am. Math. Soc. — 1984. — 91, № 1. — P. 25–30.
54. Arnold D. Abelian Groups and Representations of Finite Partially Ordered Sets. — New York: Springer-Verlag, 2000.
55. Arnold D. Direct sums of local torsion-free Abelian groups// Proc. Am. Math. Soc. — 2001. — 130, № 6. — P. 1611–1617.
56. Arnold D., Dugas M. Indecomposable modules over Nagata valuation domains// Proc. Am. Math. Soc. — 1994. — 122. — P. 689–696.
57. Arnold D., Dugas M. Representation type of posets and finite rank Butler groups// Colloq. Math. — 1997. — 74. — P. 299–320.

58. *Arnold D., Dugas M.* Co-purely indecomposable modules over discrete valuation rings// J. Pure Appl. Algebra. — 2001. — 161. — P. 1–12.
59. *Arnold D., Dugas M., Rangaswamy K. M.* Finite rank Butler groups and torsion-free modules over a discrete valuation ring// Proc. Am. Math. Soc. — 2001. — 129. — P. 325–335.
60. *Arnold D., Dugas M., Rangaswamy K. M.* Torsion-free modules of finite rank over a discrete valuation ring// J. Algebra. — 2004. — 272, № 2. — P. 456–469.
61. *Arnold D., Hunter R., Richman F.* Global Azumaya theorems in additive categories// J. Pure Appl. Algebra. — 1980. — 16. — P. 223–242.
62. *Arnold D., Rangaswamy K. M.* Mixed modules of finite torsion-free rank over a discrete valuation domain// Forum Math. — 2006. — 18, № 1. — P. 85–98.
63. *Arnold D., Rangaswamy K. M., Richman F.* Pi-balanced torsion-free modules over a discrete valuation domain// J. Algebra. — 2006. — 295, № 1. — P. 269–288.
64. *Arnold D., Richman F.* Subgroups of finite direct sums of valuated cyclic groups// J. Algebra. — 1988. — 114, № 1. — P. 1–15.
65. *Arnold J.* Power series rings over discrete valuation rings// Pac. J. Math. — 1981. — 93, № 1. — P. 31–33.
66. *Artin E.* Geometric Algebra. — New York: Interscience Publ., 1957.
67. *Astuti P., Wimmer H. K.* Stacked submodules of torsion modules over discrete valuation domains// Bull. Austr. Math. Soc. — 2003. — 68, № 3. — P. 439–447.
68. *Astuti P., Wimmer H. K.* Regular submodules of torsion modules over discrete valuation domains//, arXiv:1601.06356v1 [math. AC].
69. *Atiyah M.* On the Krull–Schmidt theorem with applications to sheaves// Bull. Soc. Math. Fr. — 1956. — 84. — P. 307–317.
70. *Auslander M., Reiten I., Smalø S. O.* Representation Theory of Artin Algebras. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
71. *Azumaya G.* Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull–Remak–Schmidt’s theorem// Nagoya Math. J. — 1950. — 1. — P. 117–124.
72. *Baer R.* Abelian groups that are direct summands of every containing Abelian group// Bull. Am. Math. Soc. — 1940. — 46. — P. 800–806.
73. *Baer R.* A unified theory of projective spaces and finite Abelian groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1942. — 52. — P. 283–343.
74. *Baer R.* Automorphism rings of primary Abelian operator groups// Ann. Math. — 1943. — 44. — P. 192–227.
75. *Baer R.* Linear Algebra and Projective Geometry. — New York: Academic Press, 1952.
76. *Bass H.* Algebraic K-Theory. — New York: Benjamin, 1968.
77. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Torsion-free rings// Ill. J. Math. — 1961. — 5. — P. 61–98.
78. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Subrings of algebraic number fields// Acta Sci. Math. Szeged. — 1961. — 22. — P. 202–216.
79. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Some invariant of p -groups// Michigan Math. J. — 1964. — 11. — P. 138–149.
80. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Isomorphic direct summands of abelian groups// Math. Ann. — 1964. — 153, № 1. — P. 21–37.
81. *Blagoveschenskaya E., Ivanov G., Schultz P.* The Baer–Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups// Contemp. Math. — 2001. — 273. — P. 85–93.
82. *Bourbaki N.* Algèbre Commutative. — Paris: Hermann, 1961, 1964, 1965.
83. *Bowshell R. A., Schultz P.* Unital rings whose additive endomorphisms commute// Math. Ann. — 1977. — 228, № 3. — P. 197–214.
84. *Breaz S.* On a class of mixed groups with semi-local Walk-endomorphism ring// Commun. Algebra. — 2002. — 30, № 9. — P. 4473–4485.
85. *Carroll D., Goldsmith B.* On transitive and fully transitive Abelian p -groups// Proc. Roy. Irish Acad. — 1996. — 96A, № 1. — P. 33–41.
86. *Cartan H., Eilenberg S.* Homological Algebra. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1956.
87. *Chekhlov A. R., Krylov P. A.* On L. Fuchs’ problems 17 and 43// J. Math. Sci. — 2007. — 143, № 5. — P. 3517–3602.

88. *Corner A. L. S.* Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring// Proc. London Math. Soc. — 1963. — 13, № 3. — P. 687–710.
89. *Corner A. L. S.* Endomorphism rings of torsion-free Abelian groups// in: Proc. Int. Conf. Theory of Groups. — Canberra, 1965. — P. 59–60.
90. *Corner A. L. S.* On endomorphism rings of primary Abelian groups// Quart. J. Math. Oxford. — 1969. — 20, № 79. — P. 277–296.
91. *Corner A. L. S.* The independence of Kaplansky's notions of transitivity and full transitivity// Quart. J. Math. Oxford. — 1976. — 27. — P. 15–20.
92. *Corner A. L. S.* Fully rigid systems of modules// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1989. — 82. — P. 55–66.
93. *Corner A. L. S., Göbel R.* Prescribing endomorphism algebras, a unified treatment// Proc. London Math. Soc. — 1985. — 50, № 3. — P. 447–479.
94. *Corner A. L. S., Goldsmith B.* Isomorphic automorphism groups of torsion-free p -adic modules// in: Abelian Groups, Theory of Modules, and Topology. — New York: Marcel Dekker, 1998. — P. 125–130.
95. *Crawley P., Hales A. W.* paper *The structure of torsion Abelian groups given by presentations* Bull. Am. Math. Soc. — 1968. — 74. — P. 954–956.
96. *Crawley P., Hales A. W.* The structure of Abelian p -groups given by certain presentations// J. Algebra. — 1969. — 12. — P. 10–23.
97. *Crawley P., Jónsson B.* Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems// Pac. J. Math. — 1964. — 14. — P. 797–855.
98. *Dugas M.* On the existence of large mixed modules// Lect. Notes Math. — 1983. — 1006. — P. 412–424.
99. *Dugas M.* On the Jacobson radical of some endomorphism rings// Proc. Am. Math. Soc. — 1988. — 102, № 4. — P. 823–826.
100. *Dugas M.* AA-rings// Commun. Algebra. — 2004. — 32, № 10. — P. 3853–3860.
101. *Dugas M., Feigelshtock S.* A-rings// Colloq. Math. — 2003. — 96, № 2. — P. 277–292.
102. *Dugas M., Göbel R.* Every cotorsion-free ring is an endomorphism ring// Proc. London Math. Soc. — 1982. — 45. — P. 319–336.
103. *Dugas M., Göbel R.* Every cotorsion-free algebra is an endomorphism algebra// Math. Z. — 1982. — 181. — P. 451–470.
104. *Dugas M., Göbel R.* On endomorphism rings of primary Abelian groups// Math. Ann. — 1982. — 261. — P. 359–385.
105. *Dugas M., Göbel R.* Endomorphism algebras of torsion modules, II// Lect. Notes Math. — 1983. — 1006. — P. 400–411.
106. *Dugas M., Göbel R.* Torsion-free Abelian groups with prescribed finitely topologized endomorphism rings// Proc. Am. Math. Soc. — 1984. — 90, № 4. — P. 519–527.
107. *Dugas M., Göbel R., Goldsmith B.* Representation of algebras over a complete discrete valuation ring// Quart. J. Math. (2). — 1984. — 35. — P. 131–146.
108. *Dugas M., Vinsonhaler C.* Two-side E -rings// J. Pure Appl. Algebra. — 2003. — 185. — P. 87–102.
109. *Eklof P. C.* Set-Theoretic Methods in Homological Algebra and Abelian Groups. — Montréal: Presses Univ. Montréal, 1980.
110. *Eklof P. C., Goodearl K. R., Trlifaj J.* Dually slender modules and steady rings// Forum. Math. — 1997. — 9, № 1. — P. 61–74.
111. *Eklof P. C., Mekler A. H.* Almost Free Modules. Set-Theoretic Methods. — Amsterdam: North-Holland Publ., 1990.
112. *Facchini A.* Module Theory: Endomorphism Rings and Direct Sum Decompositions in Some Classes of Modules. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1998.
113. *Facchini A., Zanardo P.* Discrete valuation domains and rank of their maximal extensions// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1986. — 75. — P. 143–156.
114. *Faith C.* Algebra: Rings, Modules, and Categories. — Berlin: Springer-Verlag, 1973.
115. *Faith C.* Algebra, Ring Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1976.
116. *Faticoni T.* Categories of modules over endomorphism rings// Mem. Am. Math. Soc. — 1993. — 103, № 492. — P. 1–140.
117. *Faticoni Th. G.* Direct sums and refinement// Commun. Algebra. — 1999. — 27, № 1. — P. 451–464.
118. *Feigelshtock S.* Full subrings of E -rings// Bull. Austr. Math. Soc. — 1996. — 54. — P. 275–280.

119. *Feigelshtock S.* Additive groups of commutative rings// Quaest. Math. — 2000. — 23, № 2. — P. 241–245.
120. *Feigelshtock S., Hausen J., Raphael R.* Groups which map onto their endomorphism rings// in: Proceedings Dublin Conference, 1998. — Basel, 1999. — P. 231–241.
121. *Files S. T.* Mixed modules over incomplete discrete valuation rings// Commun. Algebra. — 1993. — 21, № 11. — P. 4103–4113.
122. *Files S. T.* Endomorphisms of local Warfield groups// Contemp. Math. — 1994. — 171. — P. 99–107.
123. *Files S. T.* Outer automorphisms of endomorphism rings of Warfield groups// Arch. Math. — 1995. — 65. — P. 15–22.
124. *Files S. T.* Endomorphism algebras of modules with distinguished torsion-free elements// J. Algebra. — 1995. — 178. — P. 264–276.
125. *Files S. T.* On transitive mixed Abelian groups// Lect. Notes Pure Appl. Math. — 1996. — 132. — P. 243–251.
126. *Files S. T.* Transitivity and full transitivity for nontorsion modules// J. Algebra. — 1997. — 197. — P. 468–478.
127. *Files S. T.* The fully invariant subgroups of local Warfield groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1997. — 125, № 12. — P. 3515–3518.
128. *Files S., Goldsmith B.* Transitive and fully transitive groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — 126, № 6. — P. 1605–1610.
129. *Flagg M.* A Jacobson radical isomorphism theorem for torsion-free modules// in: Models, Modules and Abelian Groups. — Berlin: de Gruyter, 2008. — P. 309–314.
130. *Flagg M.* Jacobson radical isomorphism theorems for mixed modules part one: determining the torsion// Commun. Algebra. — 2009. — 37, № 5. — P. 1739–1747.
131. *Flagg M.* The role of the Jacobson radical in isomorphism theorems// Contemp. Math. — 2012. — 576. — P. 77–88.
132. *Flagg M.* The Jacobson radical's role in isomorphism theorems for p -adic modules extends to topological isomorphism// in: Groups, Modules, and Model Theory Surveys and Recent Developments. — Springer-Verlag, 2017. — P. 285–300.
133. *Fomin A. A.* The category of quasi-homomorphisms of torsion-free Abelian groups of finite rank// Contemp. Math. — 1992. — 131. — P. 91–111.
134. *Fomin A. A.* Finitely presented modules over the ring of universal numbers// Contemp. Math. — 1994. — 171. — P. 109–120.
135. *Fomin A., Wickless W.* Categories of mixed and torsion-free Abelian groups// in: Abelian Groups and Modules. — Boston: Kluwer, 1995. — P. 185–192.
136. *Fomin A., Wickless W.* Quotient divisible Abelian groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — 126, № 1. — P. 45–52.
137. *Franzen B., Gobel R.* Prescribing endomorphism algebras, the cotorsion-free case// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1989. — 80. — P. 215–241.
138. *Franzen B., Goldsmith B.* On endomorphism algebras of mixed modules// J. London Math. Soc. — 1985. — 31, № 3. — P. 468–472.
139. *Franzen W. N., Schultz P.* The endomorphism ring of locally free module// J. Austral. Math. Soc. Ser. A. — 1983. — 35. — P. 308–326.
140. *Fuchs L.* On the structure of Abelian p -groups// Acta Math. Acad. Sci. Hung. — 1953. — 4. — P. 267–288.
141. *Fuchs L.* Notes on Abelian groups, I// Ann. Univ. Sci. Budapest. — 1959. — 2. — P. 5–23.
142. *Fuchs L.* Notes on Abelian groups, II// Acta Math. Acad. Sci. Hung. — 1960. — 11. — P. 117–125.
143. *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups. Vols. I, II. — New York–London: Academic Press, 1970, 1973.
144. *Fuchs L.* Abelian p -Groups and Mixed Groups. — Montreal: Univ. of Montreal Press, 1980.
145. *Fuchs L.* Abelian Groups. — Springer-Verlag, 2015.
146. *Fuchs L., Salce L.* Modules over valuation domains// in: Lect. Notes Pure Appl. Math. — New York: Marcel Dekker, 1985. — 97.
147. *Fuchs L., Salce L.* Modules over non-Noetherian domains/// Math. Surv. Monogr.. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2001. — 84.
148. *Gabriel P.* Des catégories abéliennes// Bull. Soc. Math. Fr. — 1962. — 90. — P. 323–448.
149. *Goeters H. P.* The structure of Ext for torsion-free modules of finite rank over Dedekind domains// Commun. Algebra. — 2003. — 31, № 7. — P. 3251–3263.

150. *Goldsmith B.* Endomorphism rings of torsion-free modules over a complete discrete valuation ring// J. London Math. Soc. — 1978. — 2, № 3. — P. 464–471.
151. *Goldsmith B.* Essentially-rigid families of Abelian p -groups// J. London Math. Soc. (2). — 1978. — 18. — P. 70–74.
152. *Goldsmith B.* Essentially indecomposable modules over a complete discrete valuation ring// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1983. — 70. — P. 21–29.
153. *Goldsmith B.* An essentially semi-rigid class of modules// J. London Math. Soc. (2). — 1984. — 29, № 3. — P. 415–417.
154. *Goldsmith B.* On endomorphisms and automorphisms of some torsion-free modules// in: Abelian Group Theory. — New York: Gordon & Breach, 1987. — P. 417–423.
155. *Goldsmith B.* On endomorphism rings of non-separable Abelian p -groups// J. Algebra. — 1989. — 127. — P. 73–79.
156. *Goldsmith B., May W.* The Krull–Schmidt problem for modules over valuation domains// J. Pure Appl. Algebra. — 1999. — 140, № 1. — P. 57–63.
157. *Goldsmith B., Pabst S., Scott A.* Unit sum numbers of rings and modules// Quart. J. Math. — 1998. — 49. — P. 331–344.
158. *Goldsmith B., Zanardo P.* On the analogue of Corner’s finite rank theorem for modules over valuation domains// Arch. Math. — 1993. — 60, № 1. — P. 20–24.
159. *Goldsmith B., Zanardo P.* The Walker endomorphism algebra of a mixed module// Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. — 1993. — 93, № 1. — P. 131–136.
160. *Goldsmith B., Zanardo P.* Endomorphism rings and automorphism groups of separable torsion-free modules over valuation domains// in: Abelian Groups, Theory of Modules, and Topology. — New York: Marcel Dekker, 1998. — P. 249–260.
161. *Goodearl K. R.* Ring Theory. — New York–Basel: Marcel Dekker, 1976.
162. *Göbel R.* Endomorphism rings of Abelian groups// Lect. Notes Math. — 1983. — 1006. — P. 340–353.
163. *Göbel R.* Modules with distinguished submodules and their endomorphism algebras// in: Abelian Groups. — New York: Marcel Dekker, 1993. — P. 55–64.
164. *Göbel R., Goldsmith B.* Essentially indecomposable modules which are almost free// Quart. J. Math. Oxford (2). — 1988. — 39. — P. 213–222.
165. *Göbel R., Goldsmith B.* Mixed modules in L // Rocky Mountain J. Math. — 1989. — 19. — P. 1043–1058.
166. *Göbel R., Goldsmith B.* On almost-free modules over complete discrete valuation rings// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1991. — 86. — P. 75–87.
167. *Göbel R., Goldsmith B.* On separable torsion-free modules of countable density character// J. Algebra. — 1991. — 144. — P. 79–87.
168. *Göbel R., Goldsmith B.* Cotorsion-free algebras as endomorphism algebras in L — the discrete and topological cases// Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1993. — 34, № 1. — P. 1–9.
169. *Göbel R., May W.* The construction of mixed modules from torsion modules// Arch. Math. — 1987. — 48. — P. 476–490.
170. *Göbel R., May W.* Independence in completions and endomorphism algebras// Forum Math. — 1989. — 1. — P. 215–226.
171. *Göbel R., Opdenhövel A.* Every endomorphism of a local Warfield module of finite torsion-free rank is the sum of two automorphisms// J. Algebra. — 2000. — 233. — P. 758–771.
172. *Göbel R., Paras A.* Splitting off free summand of torsion-free modules over complete dvrs// Glasgow Math. J. — 2002. — 44. — P. 349–351.
173. *Göbel R., Shelah S., Strüngmann L.* Generalized E -Rings// — 2003, arXiv: arxiv.org/pdf/math/0404271.
174. *Göbel R., Shelah S., Strüngmann L.* $\aleph_n$ -Free modules over complete discrete valuation domains with almost trivial duals// Glasgow Math. J. — 2013. — 55. — P. 369–380.
175. *Göbel R., Trlifaj J.* Approximations and Endomorphism Algebras of Modules/// Expos. Math.. — Berlin: de Gruyter, 2006. — 41.
176. *Göbel R., Wald B.* Separable torsion-free modules of small type// Houston J. Math. — 1990. — 16. — P. 271–287.
177. *Grätzer G.* General Lattice Theory. — Berlin: Akademie-Verlag, 1978.
178. *Griffith P.* Transitive and fully transitive primary Abelian groups// Pac. J. Math. — 1968. — 25. — P. 249–254.

179. *Griffith P. A.* Infinite Abelian Group Theory. — Chicago–London: Univ. of Chicago Press, 1970.
180. *Grinshpon S. Ya., Krylov P. A.* Fully invariant subgroups, full transitivity, and homomorphism groups of Abelian groups// J. Math. Sci. — 2005. — 128, № 3. — P. 2894–2997.
181. *Grishin A. V.* Strongly indecomposable localizations of the ring of algebraic integers// Commun. Algebra — 2015. — 43, № 9. — P. 3816–3822.
182. *Grishin A. V., Tsarev A. V.* $\mathcal{E}$ -closed groups and modules// J. Math. Sci. (New York) — 2012. — 186, № 4. — P. 592–598.
183. *Gubareni N.* Valuation and discrete valuation rings// Sci. Res. Inst. Math. Comp. Sci. — 2011. — 10, № 1. — P. 61–70.
184. *Harada M.* Factor Categories with Applications to Direct Decomposition of Modules. — New York: Marcel Dekker, 1983.
185. *Harrison D. K.* Infinite Abelian groups and homological methods// Ann. Math. — 1959. — 69, № 2. — P. 366–391.
186. *Harrison D. K.* On the structure of Ext // in: Topics in Abelian Groups. — Chicago: Scott Foresman and Co., 1963. — P. 195–209.
187. *Hausen J.* Modules with the summand intersection property// Commun. Algebra. — 1989. — 17, № 1. — P. 135–148.
188. *Hausen J., Johnson J. A.* Determining Abelian p -groups by the Jacobson radical of their endomorphism rings// J. Algebra. — 1995. — 174. — P. 217–224.
189. *Hausen J., Praeger C. E., Schultz P.* Most Abelian p -groups are determined by the Jacobson radical of their endomorphism rings// Math. Z. — 1994. — 216. — P. 431–436.
190. *Hennecke G., Strüngmann L.* Transitivity and full transitivity for p -local modules// Arch. Math. — 2000. — 74. — P. 321–329.
191. *Herstein I. N.* Noncommutative Rings. — New York: Wiley, 1968.
192. *Hill P.* Sums of countable primary groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1966. — 17. — P. 1469–1470.
193. *Hill P.* Ulm's theorem for totally projective groups// Not. Am. Math. Soc. — 1967. — 14. — P. 940.
194. *Hill P.* On transitive and fully transitive primary groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1969. — 22. — P. 414–417.
195. *Hill P.* Endomorphism rings generated by units// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — 141. — P. 99–105.
196. *Hill P.* The classification problem// in: Abelian Groups and Modules. — Vienna: Springer-Verlag, 1984. — P. 1–16.
197. *Hill P., Lane M., Megibben C.* On the structure of p -local groups// J. Algebra. — 1991. — 143. — P. 29–45.
198. *Hill P., Megibben C.* On the theory and classification of Abelian p -groups// Math. Z. — 1985. — 190. — P. 17–38.
199. *Hill P., Megibben C.* Axiom 3 modules// Trans. Am. Math. Soc. — 1986. — 295, № 2. — P. 715–734.
200. *Hill P., Megibben C.* Torsion-free groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1986. — 295. — P. 735–751.
201. *Hill P., Megibben C.* Mixed groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1992. — 334. — P. 121–142.
202. *Hill P., Ullery W.* The transitivity of local Warfield groups// J. Algebra. — 1998. — 208. — P. 643–661.
203. *Hill P., Ullery W.* Isotype subgroups of local Warfield groups// Commun. Algebra. — 2001. — 29, № 5. — P. 1899–1907.
204. *Hill P., West J. K.* Subgroup transitivity in Abelian groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — 126, № 5. — P. 1293–1303.
205. *Hunter R.* Balanced subgroups of Abelian groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1976. — 215. — P. 81–98.
206. *Hunter R., Richman F.* Global Warfield groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1981. — 266, № 1. — P. 555–572.
207. *Hunter R., Richman F., Walker E.* Warfield modules// Lect. Notes Math. — 1977. — 616. — P. 87–123.
208. *Hunter R., Richman F., Walker E.* Existence theorems for Warfield groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — 235. — P. 345–362.
209. *Hunter R., Walker E.* S -groups revisited// Proc. Am. Math. Soc. — 1981. — 82. — P. 13–18.
210. *Irwan S. E., Garminia H., Astuti P.* On valuations of vector spaces// JP J. Alg. Number Theory Appl. — 2016. — 38, № 6. — P. 633–646.
211. *Jacobson N.* Structure of Rings. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1968.
212. *Jarisch R., Mutzbauer O., Toubassi E.* Calculating indicators in a class of mixed modules// Lect. Notes Pure Appl. Math. — 1996. — 182. — P. 291–301.

213. *Jaballah A.* Integral domains whose overrings are discrete valuation rings// *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Mat. (N.S.)* — 2016. — 62, № 2. — P. 361–369.
214. *Jarisch R., Mutzbauer O., Toubassi E.* Characterizing a class of simply presented modules by relation arrays// *Arch. Math.* — 1998. — 71. — P. 349–357.
215. *Jarisch R., Mutzbauer O., Toubassi E.* Characterizing a class of Warfield modules by relation arrays// *Rocky Mountain J. Math.* — 2000. — 30, № 4. — P. 1293–1314.
216. *Jarisch R., Mutzbauer O., Toubassi E.* Characterizing a class of Warfield modules by Ulm submodules and Ulm factors// *Arch. Math.* — 2001. — 76. — P. 326–336.
217. *Jech T.* Set Theory. — New York: Academic Press, 1978.
218. *Kaplansky I.* Infinite Abelian Groups. — Univ. of Michigan Press, 1954.
219. *Kaplansky I.* Projective modules// *Ann. Math.* — 1958. — 68. — P. 372–377.
220. *Kaplansky I.* Modules over Dedekind rings and valuation rings// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1952. — 72. — P. 327–340.
221. *Kaplansky I., Mackey G.* A generalization of Ulm's theorem// *Summa Brasil. Math.* — 1951. — 2. — P. 195–202.
222. *Kasch F.* Modules and Rings. — London–New York: Academic Press, 1982.
223. *Keef P.* An equivalence for categories of modules over a complete discrete valuation domain// *Rocky Mountain J. Math.* — 1997. — 27, № 3. — P. 843–860.
224. *Kolettis G., Jr.* Direct sums of countable groups// *Duke Math. J.* — 1960. — 27. — P. 111–125.
225. *Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A.* Endomorphism rings of Abelian groups// *J. Math. Sci.* — 2002. — 110, № 3. — P. 2683–2745.
226. *Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2003.
227. *Krylov P. A., Tuganbaev A. A.* Modules over discrete valuation domains, I// *J. Math. Sci.* — 2007. — 145, № 4. — P. 4997–5117.
228. *Krylov P. A., Tuganbaev A. A.* Modules over discrete valuation domains, II// *J. Math. Sci.* — 2008. — 151, № 5. — P. 3255–3371.
229. *Krylov P. A., Tuganbaev A. A.* Formal Matrices. — Springer-Verlag, 2017.
230. *Kurosh A. G.* Primitive torsionsfreie abelsche gruppen vom endlichen range// *Ann. Math.* — 1937. — 38. — P. 175–203.
231. *Kurosh A. G.* The Theory of Groups. — New York: Chelsea Publ., 1960.
232. *Lady E. L.* On classifying torsion free modules over discrete valuation rings// *Lect. Notes Math.* — 1977. — 616. — P. 168–172.
233. *Lady E. L.* Splitting fields for torsion-free modules over discrete valuation rings, I// *J. Algebra.* — 1977. — 49. — P. 261–275.
234. *Lady E. L.* Splitting fields for torsion-free modules over discrete valuation rings, II// *J. Algebra.* — 1980. — 66. — P. 281–306.
235. *Lady E. L.* Splitting fields for torsion-free modules over discrete valuation rings, III// *J. Algebra.* — 1980. — 66. — P. 307–320.
236. *Lam T. Y.* A First Course in Noncommutative Rings. — New York: Springer-Verlag, 1991.
237. *Lambek J.* Lecture on Rings and Modules. — Waltham: Blaisdell Publ., 1968.
238. *Lane M.* A new characterization for p -local balanced projective groups// *Proc. Am. Math. Soc.* — 1986. — 96. — P. 379–386.
239. *Lane M.* Isotype submodules of p -local balanced projective groups// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1987. — 301, № 1. — P. 313–325.
240. *Lane M.* Fully invariant submodules of p -local balanced projective groups// *Rocky Mountain J. Math.* — 1988. — 18, № 4. — P. 833–841.
241. *Lane M., Megibben C.* Balance projectives and Axiom 3// *J. Algebra.* — 1987. — 111. — P. 457–474.
242. *Leptin H.* Abelsche p -gruppen und ihre Automorphismengruppen// *Math. Z.* — 1960. — 73. — P. 235–253.
243. *Levy L.* Torsion-free and divisible modules over non-integral domains// *Can. J. Math.* — 1963. — 15, № 1. — P. 132–151.
244. *Liebert W.* Endomorphism rings of Abelian p -groups// in: *Études sur les Groupes Abéliens.* — Berlin: Springer-Verlag, 1968. — P. 239–258.

245. *Liebert W.* Characterization of the endomorphism rings of divisible torsion modules and reduced complete torsion-free modules over complete discrete valuation rings// *Pac. J. Math.* — 1971. — 37, № 1. — P. 141–170.
246. *Liebert W.* Endomorphism rings of reduced torsion-free modules over complete discrete valuation rings// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1972. — 169. — P. 347–363.
247. *Liebert W.* Endomorphism rings of reduced complete torsion-free module over complete discrete valuation rings// *Proc. Am. Math. Soc.* — 1972. — 36, № 1. — P. 375–378.
248. *Liebert W.* The Jacobson radical of some endomorphism rings// *J. Reine Angew. Math.* — 1973. — 262/263. — P. 166–170.
249. *Liebert W.* On-sided ideals in the endomorphism rings of reduced complete torsion-free modules and divisible torsion modules over complete discrete valuation rings// *Symp. Math.* — 1974. — 13. — P. 273–298.
250. *Liebert W.* Endomorphism rings of free modules over principal ideal domains// *Duke Math. J.* — 1974. — 41. — P. 323–328.
251. *Liebert W.* Endomorphism rings of Abelian p -groups// *Lect. Notes Math.* — 1983. — 1006. — P. 384–399.
252. *Liebert W.* Isomorphic automorphism groups of primary Abelian groups// in: *Abelian Group Theory.* — New York: Gordon & Breach, 1987. — P. 9–31.
253. *Loth P.* Classification of Abelian Groups and Pontryagin Duality. — Amsterdam: Gordon & Breach, 1998.
254. *Loth P.* Characterizations of Warfield groups// *J. Algebra.* — 1998. — 204. — P. 32–41.
255. *MacLane S.* Homology. — New York: Academic Press, 1963.
256. *MacLane S.* Categories for the Working Mathematician. — Berlin: Springer-Verlag, 1971.
257. *Mader A.* Almost Completely Decomposable Groups. — Amsterdam: Gordon & Breach, 1998.
258. *Mader A., Vinsonhaler C.* Torsion-free E -modules// *J. Algebra.* — 1988. — 115, № 2. — P. 401–411.
259. *Matlis E.* Cotorsion modules// *Mem. Am. Math. Soc.* — 1964. — 49.
260. *Matlis E.* The decomposability of torsion-free modules of finite rank// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1968. — 134, № 2. — P. 315–324.
261. *May W.* Endomorphism rings of mixed Abelian groups// *Contemp. Math.* — 1989. — 87. — P. 61–74.
262. *May W.* Isomorphism of endomorphism algebras over complete discrete valuation rings// *Math. Z.* — 1990. — 204. — P. 485–499.
263. *May W.* Endomorphism algebras of not necessarily cotorsion-free modules// in: *Abelian Groups and Non-commutative Rings.* — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1992. — P. 257–264.
264. *May W.* Endomorphisms over incomplete discrete valuation domains// *Contemp. Math.* — 1994. — 171. — P. 277–285.
265. *May W.* The theorem of Baer and Kaplansky for mixed modules// *J. Algebra.* — 1995. — 177. — P. 255–263.
266. *May W.* The use of the finite topology on endomorphism rings// *J. Pure Appl. Algebra.* — 2001. — 163. — P. 107–117.
267. *May W.* Torsion-free modules with nearly unique endomorphism algebras// *Commun. Algebra.* — 2003. — 31, № 3. — P. 1271–1278.
268. *May W., Toubassi E.* Endomorphisms of rank one mixed modules over discrete valuation rings// *Pac. J. Math.* — 1983. — 108, № 1. — P. 155–163.
269. *May W., Zanardo P.* Modules over domains large in a complete discrete valuation ring// *Rocky Mountain J. Math.* — 2000. — 30, № 4. — P. 1421–1436.
270. *Megibben C.* Large subgroups and small homomorphisms// *Michigan Math. J.* — 1966. — 13. — P. 153–160.
271. *Megibben C.* Modules over an incomplete discrete valuation ring// *Proc. Am. Math. Soc.* — 1968. — 19. — P. 450–452.
272. *Megibben C.* A nontransitive, fully transitive primary group// *J. Algebra.* — 1969. — 13. — P. 571–574.
273. *van der Merwe B.* Unique addition modules// *Commun. Algebra.* — 1999. — 27, № 9. — P. 4103–4115.
274. *Mikhalev A. V.* Isomorphisms and anti-isomorphisms of endomorphism rings of modules// in: *First Int. Tainan–Moscow Algebra Workshop, Tainan, 1994.* — Berlin: de Gruyter, 1996. — P. 69–122.
275. *Mishina A. P., Skornyakov L. A.* Abelian Groups and Modules. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1976.

276. *Mo Bang C.* A classification of modules over complete discrete valuation rings// Bull. Am. Math. Soc. — 1970. — 76. — P. 381–383.
277. *Mo Bang C.* Countable generated modules over complete discrete valuation rings// J. Algebra. — 1970. — 14. — P. 552–560.
278. *Mo Bang C.* Direct sums of countable generated modules over complete discrete valuation rings// Proc. Am. Math. Soc. — 1971. — 28, № 2. — P. 381–388.
279. *Moghaderi J., Nekooei R.* Valuation, discrete valuation and Dedekind modules// Int. Electron. J. Algebra. — 2010. — 8. — P. 18–29.
280. *Mohamed S. H., Muller B. J.* Continuous and Discrete Modules. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
281. *Monk G.* One sided ideals in the endomorphism ring of an Abelian p -group// Acta Math. Acad. Sci. — 1968. — 19. — P. 171–185.
282. *Moore J. H.* A characterization of Warfield groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1983. — 87. — P. 617–620.
283. *Mutzbauer O., Toubassi E.* A splitting criterion for a class of mixed modules// Rocky Mountain J. Math. — 1994. — 24. — P. 1533–1543.
284. *Mutzbauer O., Toubassi E.* Extending a splitting criterion on mixed modules// Contemp. Math. — 1994. — 171. — P. 305–312.
285. *Mutzbauer O., Toubassi E.* Classification of mixed modules// Acta Math. Hung. — 1996. — 72, № 1–2. — P. 153–166.
286. *Nagata M.* Local Rings. — New York: Wiley, 1962.
287. *Nunke R. J.* Modules of extensions over Dedekind rings// Ill. J. Math. — 1959. — 3. — P. 222–241.
288. *Nunke R. J.* Purity and subfunctors of the identity// in: Topics in Abelian Groups. — Chicago–Illinois, 1963. — P. 121–171.
289. *Nunke R. J.* Homology and direct sums of countable Abelian groups// Math. Z. — 1967. — 101. — P. 182–212.
290. *Pierce R. S.* Homomorphisms of primary Abelian groups// in: Topics in Abelian Groups. — Chicago, Illinois, 1963. — P. 215–310.
291. *Pierce R. S.* Endomorphism rings of primary Abelian groups// in: Proc. Colloq. Abelian Groups. — Budapest: Akadémiai Kiadó, 1964. — P. 125–137.
292. *Pierce R. S.* E -modules// in: Abelian group theory. — Perth, 1987. — P. 221–240.
293. *Plotkin B. I.* Groups of Automorphisms of Algebraic Systems. — Groningen: Wolters-Noordhoff Publ., 1972.
294. *Procházka L.* A generalization of a Prüfer–Kaplansky theorem// Lect. Notes Math. — 1983. — 1006. — P. 617–629.
295. *Prüfer H.* Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen// Math. Z. — 1923. — 17. — P. 35–61.
296. *Ribenboim P.* On the completion of a valuation ring// Math. Ann. — 1964. — 155. — P. 392–396.
297. *Richman F.* The constructive theory of KT -modules// Pac. J. Math. — 1975. — 61. — P. 621–637.
298. *Richman F.* Mixed local groups// Lect. Notes Math. — 1981. — 874. — P. 374–404.
299. *Richman F.* Mixed groups// Lect. Notes Math. — 1983. — 1006. — P. 445–470.
300. *Richman F.* Nice subgroups of mixed local groups// Commun. Algebra. — 1983. — 11, № 1. — P. 1629–1642.
301. *Richman F., Walker E. A.* Extending Ulm’s theorem without group theory// Proc. Am. Math. Soc. — 1969. — 21. — P. 194–196.
302. *Richman F., Walker E. A.* Filtered modules over discrete valuation domains// J. Algebra. — 1998. — 199, № 2. — P. 618–645.
303. *Rickart C. E.* Isomorphic groups of linear transformations// Am. J. Math. — 1950. — 72. — P. 451–464.
304. *Rotman J.* A note on completions of modules// Proc. Am. Math. Soc. — 1960. — 11. — P. 356–360.
305. *Rotman J.* Mixed modules over valuation rings// Pac. J. Math. — 1960. — 10. — P. 607–623.
306. *Rotman J.* A completion functor on modules and algebras// J. Algebra. — 1968. — 9. — P. 369–387.
307. *Rotman J., Yen T.* Modules over a complete discrete valuation ring// Trans. Am. Math. Soc. — 1961. — 98. — P. 242–254.
308. *Roux B.* Anneaux non commutatifs de valuation discrète ou finie, scindés, I// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. — 1986. — 302, № 7. — P. 259–262.

309. Roux B. Anneaux non commutatifs de valuation discrète ou finie, scindés, II// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. — 1986. — 302, № 8. — P. 291–293.
310. Roux B. Anneaux non commutatifs de valuation discrète, scindés, en caractéristique zéro// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. — 1986. — 303, № 14. — P. 663–666.
311. Roux B. Hautes σ -dérivations et anneaux de valuation discrète non commutatifs, en caractéristique zéro// C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I. Math. — 1986. — 303, № 19. — P. 943–946.
312. Roux B. Anneaux de valuation discrète complets, scindés, non commutatifs, en caractéristique zéro// Lect. Notes Math. — 1987. — 1296. — P. 276–311.
313. Rowen L. H. Ring Theory. — New York: Academic Press, 1988.
314. Salce L., Zanardo P. Rank-two torsion-free modules over valuation domains// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1988. — 80. — P. 175–201.
315. Sands A. D. On the radical of the endomorphism ring of a primary Abelian group// in: Abelian Groups and Modules. — Vienna: Springer-Verlag, 1984. — P. 305–314.
316. Schultz P. Periodic homomorphism sequences of Abelian groups// Arch. Math. — 1970. — 21. — P. 132–135.
317. Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring// J. Austr. Math. Soc. — 1973. — 15. — P. 60–69.
318. Schultz P. Notes on mixed groups, I// in: Abelian Groups and Modules. — Vienna: Springer-Verlag, 1984. — P. 265–278.
319. Schultz P. Notes on mixed groups, II// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1986. — 75. — P. 67–76.
320. Schultz P. When is an Abelian p -group determined by the Jacobson radical of its endomorphism ring?// Contemp. Math. — 1994. — 171. — P. 385–396.
321. Schultz P. Automorphisms which determine an Abelian p -group// in: Abelian Groups, Theory of Modules, and Topology. — New York: Marcel Dekker, 1998. — P. 373–379.
322. Stefanescu D. On the factorization of polynomials over discrete valuation domains// An. St. Univ. Ovidius Constanta. — 2014. — 22, № 1. — P. 273–280.
323. Stanton R. O. An invariant for modules over a discrete valuation ring// Proc. Am. Math. Soc. — 1975. — 49, № 1. — P. 51–54.
324. Stanton R. O. Decomposition bases and Ulm's theorem// Lect. Notes Math. — 1977. — 616. — P. 39–56.
325. Stanton R. O. Relative S -invariants// Proc. Am. Math. Soc. — 1977. — 65. — P. 221–224.
326. Stanton R. O. Decomposition of modules over a discrete valuation ring// J. Austr. Math. Soc. — 1979. — 27. — P. 284–288.
327. Stanton R. O. Almost affable Abelian groups// J. Pure Appl. Alg. — 1979. — 15. — P. 41–52.
328. Stratton A. E. Mixed modules over an incomplete discrete valuation ring// Proc. London Math. Soc. — 1970. — 21. — P. 201–218.
329. Stratton A. E. A note on the splitting problem for modules over an incomplete discrete valuation ring// Proc. London Math. Soc. (3). — 1971. — 23. — P. 237–250.
330. Tuganbaev A. A. Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
331. Tuganbaev A. A. Distributive Modules and Related Topics. — Amsterdam: Gordon & Breach, 1999.
332. Tuganbaev A. A. Rings Close to Regular. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
333. Ulm H. Zur Theorie der abzählbar-unendlichen abelschen Gruppen// Math. Ann. — 1933. — 107. — P. 774–803.
334. Underwood R. G. Galois theory of modules over a discrete valuation ring// in: Recent Research on Pure and Applied Algebra. — Hauppauge: Nova Sci. Publ., 2003. — P. 23–45.
335. Vámos P. Decomposition problems for modules over valuation domains// J. London Math. Soc. — 1990. — 41. — P. 10–26.
336. Vidal R. Anneaux de valuation discrète complets, non nécessairement commutatifs// C. R. Acad. Sci., Paris. Sér. A–B. — 1976. — 283.
337. Vidal R. Un exemple d'anneaux de valuation discrète complet, non commutatif qui n'est pas un anneau de Cohen// C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A–B. — 1977. — 284.
338. Vidal R. Anneaux de valuation discrète complets non commutatifs// Trans. Am. Math. Soc. — 1981. — 267, № 1. — P. 65–81.
339. Vinsonhaler C. E -rings and related structures// in: Non-Noetherian commutative ring theory. — Kluwer: Math. Apl., 2002. — 520. — P. 387–402.

340. *Vinsonhaler C., Wickless W.* Dualities for torsion-free Abelian groups of finite rank// J. Algebra. — 1990. — 128, № 2. — P. 474–487.
341. *Walker C. L.* Local quasi-endomorphism rings of rank one mixed Abelian groups// Lect. Notes Math. — 1977. — 616. — P. 368–378.
342. *Walker C. L., Warfield R. B., Jr.* Unique decomposition and isomorphic refinement theorems in additive categories// J. Pure Appl. Algebra. — 1976. — 7. — P. 347–359.
343. *Walker E. A.* Ulm's theorem for totally projective groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1973. — 37. — P. 387–392.
344. *Walker E. A.* The groups P_β // in: Symposia Mathematica XIII. Gruppi Abeliani. — London: Academic Press, 1974. — P. 245–255.
345. *Wallace K. D.* On mixed groups of torsion free rank one with totally projective primary components// J. Algebra. — 1971. — 17. — P. 482–488.
346. *Warfield R. B., Jr.* Homomorphisms and duality for torsion-free groups// Math. Z. — 1968. — 107. — P. 189–200.
347. *Warfield R. B., Jr.* A Krull–Schmidt theorem for infinite sums of modules// Proc. Am. Math. Soc. — 1969. — 22, № 2. — P. 460–465.
348. *Warfield R. B., Jr.* Decompositions of injective modules// Pac. J. Math. — 1969. — 31. — P. 263–276.
349. *Warfield R. B., Jr.* An isomorphic refinement theorem for Abelian groups// Pac. J. Math. — 1970. — 34, № 1. — P. 237–255.
350. *Warfield R. B., Jr.* Exchange rings and decomposition of modules// Math. Ann. — 1972. — 199. — P. 31–36.
351. *Warfield R. B., Jr.* Classification theorems for p -groups and modules over a discrete valuation ring// Bull. Am. Math. Soc. — 1972. — 78, № 1. — P. 88–92.
352. *Warfield R. B., Jr.* Simply presented groups// in: Proc. Special Semester on Abelian Groups. — Tucson: Univ. of Arizona, 1972.
353. *Warfield R. B., Jr.* A classification theorem for Abelian p -groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1975. — 210. — P. 149–168.
354. *Warfield R. B., Jr.* Classification theory of Abelian groups, I: Balanced projectives// Trans. Am. Math. Soc. — 1976. — 222. — P. 33–63.
355. *Warfield R. B., Jr.* The structure of mixed Abelian groups// Lect. Notes Math. — 1977. — 616. — P. 1–38.
356. *Warfield R. B., Jr.* Cancellation of modules an groups and stable range of endomorphism rings// Pac. J. Math. — 1980. — 91, № 2. — P. 457–485.
357. *Warfield R. B., Jr.* Classification theory of Abelian groups, II: Local theory// Lect. Notes Math. — 1981. — 874. — P. 322–349.
358. *Wick B. D.* A projective characterization for SKT -modules// Proc. Am. Math. Soc. — 1980. — 80. — P. 39–43.
359. *Wick B. D.* A classification theorem for SKT -modules// Proc. Am. Math. Soc. — 1980. — 80. — P. 44–46.
360. *Wilson G. V.* Modules with the summand intersection property// Commun. Algebra. — 1986. — 14, № 1. — P. 21–38.
361. *Wilson G. V.* Additive groups of T -rings// Proc. Am. Math. Soc. — 1987. — 99, № 2. — P. 219–220.
362. *Wisbauer R.* Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon & Breach, 1991.
363. *Wolfson K. G.* An ideal-theoretic characterization of the ring of all linear transformation// Am. J. Math. — 1953. — 75. — P. 358–386.
364. *Wolfson K. G.* Isomorphisms of the endomorphism rings of torsion-free modules// Proc. Am. Math. Soc. — 1962. — 13, № 5. — P. 712–714.
365. *Wolfson K. G.* Isomorphisms of the endomorphism ring of a free module over a principal left ideal domain// Michigan Math. J. — 1962. — 9. — P. 69–75.
366. *Wolfson K. G.* Isomorphisms of the endomorphism rings of a class of torsion-free modules// Proc. Am. Math. Soc. — 1963. — 14, № 4. — P. 589–594.
367. *Wolfson K. G.* Anti-isomorphisms of endomorphism rings of locally free modules// Math. Z. — 1989. — 202. — P. 151–159.
368. *Zanardo P.* Kurosch invariants for torsion-free modules over Nagata valuation domains// J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — 82. — P. 195–209.
369. *Zariski O., Samuel P.* Commutative Algebra. — Princeton: Van Nostrand, 1958, 1960.

370. *Žemlička J.* Steadiness is tested by a single module// in: Abelian groups, rings and modules. — Perth, 2000. — P. 301–308.
371. *Zipin L.* Countable torsion groups// Ann. Math. — 1935. — 36. — P. 86–99.

Крылов Петр Андреевич

Национальный исследовательский Томский государственный университет

E-mail: krylov@math.tsu.ru

Туганбаев Аскар Аканович

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: tuganbaev@gmail.com



ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ КОЛЕЦ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

© 2019 г. П. А. КРЫЛОВ, А. А. ТУГАНБАЕВ

Аннотация. Изучаются группы автоморфизмов алгебр формальных матриц. В некоторых случаях такая группа оказывается полупрямым произведением подгрупп с известным строением.

Ключевые слова: расщепляющееся расширение идеала, автоморфизм, алгебра формальных матриц.

AUTOMORPHISM GROUPS OF FORMAL MATRIX RINGS

© 2019 P. A. KRYLOV, A. A. TUGANBAEV

ABSTRACT. We study automorphism groups of formal matrix algebras. In some cases, such a group turns out the semidirect product of subgroups with familiar structure.

Keywords and phrases: split extension of an ideal, automorphism, formal matrix algebra.

AMS Subject Classification: 16R99; 16D10

1. Введение. Приведем три известные теоремы об автоморфизмах колец матриц. Прежде всего, конечно, это следующий классический результат.

Теорема 1.1 (Сколем—Нётер). *Если F — поле, то каждый автоморфизм алгебры матриц $M(n, F)$ является внутренним.*

Пусть теперь R — коммутативное кольцо. R -Алгебра $M(n, R)$ уже может иметь внешние автоморфизмы (см. [14]). Заметим, что строение группы внешних автоморфизмов, в целом, известно.

Теорема 1.2 (см. [14]).

- (1) *Группа внешних автоморфизмов R -алгебры $M(n, R)$ является абелевой группой, порядки элементов которой делят n .*
- (2) *Если R — область с однозначной факторизацией, то любой автоморфизм R -алгебры $M(n, R)$ является внутренним.*

Для колец треугольных матриц ситуация с автоморфизмами более благоприятная.

Теорема 1.3 (см. [18]). *Всякий автоморфизм R -алгебры $T(n, R)$ верхних треугольных матриц является внутренним.*

Интересные и более общие, чем теорема 1.3, результаты об автоморфизмах колец треугольных матриц получены в [9, 15, 16].

В последнее время активно изучаются кольца формальных матриц, являющиеся более общими объектами по сравнению с обычными кольцами матриц. Таким кольцам посвящена книга [21].

Изоморфизмы и автоморфизмы колец формальных матриц рассматривались в [1–8, 11, 19]. Также исследовались другие отображения матричных колец: лиевы и йордановы изоморфизмы,

Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10013).

дифференцирования, коммутирующие и централизующие отображения (см., например, [22, 24, 25]). В [12, 17] изучаются хопфовы модули и их обобщения над кольцами формальных матриц.

В начале данной статьи, в разделах 3–6, изучаются автоморфизмы алгебр, которые являются расщепляющимся расширением нильпотентного идеала с помощью некоторого кольца. Затем в оставшихся разделах полученные результаты применяются к некоторым кольцам формальных матриц.

Отметим, что в [1, 2, 5–8, 11, 19] изоморфизмы и автоморфизмы колец формальных матриц описываются в терминах их действия на элементах отдельных матриц. Вычисление всей группы автоморфизмов или каких-либо ее подгрупп или фактор-групп фактически не проводится. Суть подхода к изучению группы автоморфизмов, развиваемого в данной работе, можно приблизительно указать следующим образом. Кольцо формальных матриц записывается как расщепляющееся расширение некоторого нильпотентного идеала с помощью подкольца диагональных матриц; затем определяются несколько гомоморфизмов между группами автоморфизмов и вся группа автоморфизмов исследуется с помощью ядер и образов этих гомоморфизмов.

В разделах 3–11 все рассматриваемые кольца являются ассоциативными унитарными алгебрами над некоторым коммутативным унитарным кольцом T ; в разделах 12–15 все рассматриваемые кольца являются ассоциативными унитарными алгебрами над некоторым коммутативным унитарным кольцом R . Сами кольца T и R почти не используются явно. Обычно мы пишем «алгебра» и иногда пишем «кольцо».

Пусть K — некоторая алгебра. Тогда $\text{Aut } K$ — ее группа автоморфизмов, $\text{In}(\text{Aut } K)$ — подгруппа внутренних автоморфизмов и $\text{Out } K$ — группа внешних автоморфизмов алгебры K , т.е. $\text{Out } K$ — фактор-группа $\text{Aut } K / \text{In}(\text{Aut } K)$.

Если S — некоторое кольцо, то $U(S)$ — его группа обратимых элементов, а $P(S)$ — первичный радикал кольца S . Через $\text{Aut}_S M$ обозначается группа автоморфизмов S - S -бимодуля M .

Пусть T — некоторое коммутативное кольцо, L — T -алгебра и M — L - L -бимодуль. Дифференцированием алгебры L со значениями в бимодуле M называется гомоморфизм R -модулей $\delta : L \rightarrow M$, удовлетворяющий равенству

$$\delta(xz) = \delta(x)z + x\delta(z)$$

для всех $x, z \in L$. Дифференцирование называется *внутренним*, если существует элемент $d \in M$ со свойством

$$\delta(x) = xd - dx$$

для всех $x \in L$. В этом случае говорят, что δ *определяется* элементом d .

Полупрямое произведение групп G и H обозначается через $G \rtimes H$.

2. Бимодули и их изоморфизмы. Пусть R, S — два кольца, A — R - S -бимодуль и α, γ — автоморфизмы колец R и S соответственно. Можно задать новую структуру бимодуля на A , положив

$$x \circ a = \alpha(x)a, \quad a \circ y = a\gamma(y)$$

для всех $x \in R, y \in S, a \in A$. Обычно этот бимодуль обозначается через ${}_{\alpha}A_{\gamma}$, а исходный бимодуль может быть обозначен через ${}_1A_1$.

Пусть R — некоторая T -алгебра и α, γ — ее автоморфизмы. Имеем регулярный R - R -бимодуль ${}_1R_1$ и R - R -бимодуль ${}_{\alpha}R_{\gamma}$.

Как устроены изоморфизмы между этими бимодулями и когда они существуют?

Кратко изложим факты, относящиеся к этим вопросам (см. [13, гл. 2, предложение 5.2]).

Пусть $f : {}_1R_1 \rightarrow {}_{\alpha}R_{\gamma}$ — изоморфизм R - R -бимодулей. Верны равенства

$$f(a) = \alpha(a)u, \quad f(a) = u\gamma(a), \quad a \in R,$$

где $u = f(1)$ — обратимый элемент. Далее,

$$\alpha^{-1}\gamma(a) = (\alpha^{-1}(u))^{-1}a\alpha^{-1}(u), \quad a \in A,$$

т.е. $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм T -алгебры R .

Обратно, пусть $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм T -алгебры R , $\alpha^{-1}\gamma(a) = v^{-1}av$, $a \in A$, где v — некоторый обратимый элемент. Тогда

$$\alpha(v)\gamma(a) = \alpha(a)\alpha(v), \quad a \in A,$$

и соответствие $a \rightarrow \alpha(a)\alpha(v)$ является изоморфизмом R - R -бимодулей ${}_1R_1 \rightarrow {}_\alpha R_\gamma$.

3. Автоморфизмы алгебр вида $K = L \oplus M$. Напомним, что все встречающиеся кольца являются алгебрами над некоторым коммутативным кольцом T . В разделах 3–6 считаем, что алгебра K — расщепляющееся расширение своего идеала M с помощью некоторой алгебры L , т.е. $K = L \oplus M$, где $\oplus$ — групповая прямая сумма. Идеал M естественным образом является L - L -бимодулем. Для краткости мы пишем « L -бимодуль».

Возьмем произвольный автоморфизм φ алгебры K . Как каждый аддитивный эндоморфизм, φ может быть представлен матрицей $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ относительно прямого разложения $K = L \oplus M$. Здесь

$$\alpha : L \rightarrow L, \quad \beta : M \rightarrow M, \quad \gamma : M \rightarrow L, \quad \delta : L \rightarrow M$$

— T -модульные гомоморфизмы и

$$\varphi(x + y) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha(x) + \gamma(y)) + (\delta(x) + \beta(y))$$

для всех $x \in L$ и $y \in M$. Мы будем рассматривать только «треугольный случай», т.е. когда $\gamma = 0$ для любого автоморфизма φ . При таком предположении можно получить содержательную информацию о группе $\text{Aut } K$. В любом случае все результаты для «треугольного случая» применимы к подгруппе автоморфизмов, матрицы которых имеют вид $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$. В дальнейшем не будем различать автоморфизм φ и соответствующую ему матрицу. Для краткости пишем «треугольный автоморфизм φ », если $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$, и «диагональный автоморфизм φ », если $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$$

— некоторый автоморфизм алгебры K . Используя тот факт, что φ сохраняет произведение, нетрудно проверить равенства

$$\begin{aligned} \alpha(xz) &= \alpha(x)\alpha(z), & \delta(xz) &= \delta(x)\alpha(z) + \alpha(x)\delta(z) + \delta(x)\delta(z), \\ \beta(yu') &= \beta(y)\beta(y'), & \beta(xy) &= \alpha(x)\beta(y) + \delta(x)\beta(y), & \beta(yx) &= \beta(y)\alpha(x) + \beta(y)\delta(x) \end{aligned} \quad (1)$$

для всех $x, z \in L$ и $y, y' \in M$.

Отображения α и β являются биекциями. Поэтому α — автоморфизм алгебры L и β — автоморфизм алгебры M (как неунитальной алгебры). Верно и обратное. Пусть $\alpha : L \rightarrow L$, $\beta : M \rightarrow M$, $\delta : L \rightarrow M$ — отображения с перечисленными выше свойствами. Тогда преобразование алгебры K , задаваемое матрицей $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$, т.е.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha(x) + (\delta(x) + \beta(y)), \quad x \in L, \quad y \in M,$$

является ее автоморфизмом.

Введем два гомоморфизма для групп автоморфизмов. Определим гомоморфизм $f : \text{Aut } K \rightarrow \text{Aut } L$ так, что $f(\varphi) = \alpha$ для каждого $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$. Тогда

$$\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha = 1 \right\}.$$

Также существует гомоморфизм

$$\Delta : \text{Aut } K \rightarrow \text{Aut } L \times \text{Aut } M, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \rightarrow (\alpha, \beta);$$

его ядро состоит из автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}$.

Теперь определим две подгруппы в $\text{Aut } K$. Пусть Λ — подгруппа диагональных автоморфизмов, т.е. автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, а Ψ — подгруппа, состоящая из автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. В первом случае β — автоморфизм алгебры M и изоморфизм L -бимодулей M и ${}_{\alpha}M_{\alpha}$. Во втором случае β — автоморфизм алгебры M и L -бимодуля M . Обозначим через Ω образ гомоморфизма f . Итак,

$$\Omega = \left\{ \alpha \in \text{Aut } L \mid \text{найдется } \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in \text{Aut } K \text{ для некоторых } \delta, \beta \right\}.$$

Остановимся на нормальной подгруппе Δ . Из равенств (1) вытекают равенства

$$xy = xy + \delta(x)y, \quad yx = yx + y\delta(x)$$

для всех $x \in L$ и $y \in M$. Поэтому $\delta(L)M = 0 = M\delta(L)$. Также верно равенство

$$\delta(xz) = \delta(x)z + x\delta(z), \quad x, z \in L.$$

Поэтому δ — дифференцирование алгебры L со значениями в L -бимодуле M .

Изучая ядра введенных гомоморфизмов и фактор-группы по ним, можно надеяться получить какую-либо информацию о строении группы $\text{Aut } K$. В проблеме описания группы $\text{Aut } K$ можно выделить следующие направления исследований.

- (1) Вычисление нормальной подгруппы Δ .
- (2) Вычисление подгруппы Ψ .
- (3) Вычисление подгруппы Ω .

Разумеется, трудно сказать что-нибудь содержательное об этих подгруппах без дополнительных сведений о кольце L , идеале и L -бимодуле M .

Самый простой случай для описания автоморфизмов алгебры $K = L \oplus M$ — это когда M — нильпотентный идеал степени 2, т.е. $M^2 = 0$. В этом случае равенства (1) превращаются в равенства

$$\begin{aligned} \alpha(xz) &= \alpha(x)\alpha(z), & \delta(xz) &= \delta(x)\alpha(z) + \alpha(x)\delta(z), \\ \beta(xy) &= \alpha(x)\beta(y), & \beta(yx) &= \beta(y)\alpha(x) \end{aligned} \tag{2}$$

для всех $x, z \in L$ и $y \in M$. По-прежнему, α — автоморфизм алгебры L , а δ — дифференцирование алгебры L со значениями в бимодуле ${}_{\alpha}M_{\alpha}$ и β — изоморфизм бимодулей $M \rightarrow {}_{\alpha}M_{\alpha}$.

В таком случае, если $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ — автоморфизм алгебры K , то $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ — также автоморфизм.

Любой автоморфизм $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ равен произведению

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Следовательно, можно записать полупрямые произведения

$$\text{Aut } K = \Delta \rtimes \Lambda, \quad \text{Ker } f = \Delta \rtimes \Psi.$$

Кроме того, нетрудно проверить, что $\text{In}_1(\text{Aut } K) \subseteq \Delta$ (подгруппа $\text{In}_1(\text{Aut } K)$ определяется в следующем разделе).

4. Внутренние и другие близкие к ним автоморфизмы. Кратко рассмотрим внутренние автоморфизмы алгебры $K = L \oplus M$. Считаем, что M — нильпотентный идеал. Напоминаем, что мы рассматриваем только такие алгебры K , у которых все автоморфизмы являются треугольными.

Каждый элемент $u \in U(K)$ дает автоморфизм μ_u алгебры K согласно правилу

$$\mu_u(x) = u^{-1}xu, \quad x \in K.$$

Такой автоморфизм называется *внутренним* автоморфизмом, определяемым элементом u . Все внутренние автоморфизмы образуют нормальную подгруппу $\text{In}(\text{Aut } K)$. Верны равенства

$$\mu_{uv} = \mu_v \cdot \mu_u, \quad (\mu_u)^{-1} = \mu_{u^{-1}}, \quad u, v \in U(K).$$

Поэтому соответствие $u \rightarrow \mu_{u^{-1}}$ — гомоморфизм групп $U(K) \rightarrow \text{In}(\text{Aut } K)$, ядро которого состоит из обратимых центральных элементов алгебры K . Любая подгруппа V в $U(K)$ дает подгруппу $\text{In}_V(\text{Aut } K)$ автоморфизмов вида μ_v , где $v \in V$.

Существует полупрямое разложение $U(K) = (1 + M) \rtimes U(L)$, индуцирующее разложение

$$\text{In}(\text{Aut } K) = \text{In}_{1+M}(\text{Aut } K) \rtimes \text{In}_{U(L)}(\text{Aut } K).$$

Обозначим первый сомножитель через $\text{In}_1(\text{Aut } K)$, а второй — через $\text{In}_0(\text{Aut } K)$.

Нам будет полезна подгруппа внутренних автоморфизмов алгебры K , определяемых обратимыми центральными элементами алгебры L ; обозначим ее Ψ_0 . Имеем включение $\Psi_0 \subseteq \Psi$, равенство

$$\text{Ker } f \cap \text{In}_0(\text{Aut } K) = \Psi_0$$

и изоморфизм

$$\text{In}_0(\text{Aut } K)/\Psi_0 \cong \text{In}(\text{Aut } L).$$

Действительно, ядро гомоморфизма

$$\text{In}_0(\text{Aut } K) \rightarrow \text{In}(\text{Aut } L), \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \rightarrow \alpha,$$

совпадает с Ψ_0 .

Пусть $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ — некоторый внутренний автоморфизм алгебры K , определяемый элементом a .

Запишем $a = c + d$, где $c \in L$, $d \in M$ и c — обратимый элемент. Тогда имеем

$$\alpha(x) = c^{-1}xc, \quad x \in L,$$

т.е. α — внутренний автоморфизм алгебры L .

Теперь рассмотрим автоморфизмы алгебры K , являющиеся более общими по сравнению с внутренними автоморфизмами. Именно, пусть автоморфизм $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ таков, что α — внутренний автоморфизм алгебры L . Что можно сказать о множестве таких автоморфизмов?

Выберем обратимый элемент $c \in L$, для которого выполняется равенство

$$\alpha(x) = c^{-1}xc \quad \forall x \in L.$$

Обозначим через ψ внутренний автоморфизм алгебры K , определяемый элементом c . Он имеет матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, где $\gamma(y) = c^{-1}yc$, $y \in M$, т.е. $\psi \in \text{In}_0(\text{Aut } K)$. Имеем

$$\psi^{-1}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma^{-1}\delta & \gamma^{-1}\beta \end{pmatrix}.$$

Полагая $\xi = \psi^{-1}\varphi$, получаем $\varphi = \psi\xi$, где $\xi \in \text{Ker } f$.

Обозначим через Φ нормальную подгруппу

$$\left\{ \varphi \in \text{Aut } K \mid \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \text{In}(\text{Aut } L) \right\}$$

группы $\text{Aut } K$.

Предложение 4.1. (1) *Имеют место равенство*

$$\Phi = \text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \text{Ker } f$$

и изоморфизм

$$\Phi / \text{Ker } f \cong \text{In}(\text{Aut } L).$$

(2) *Если $\Omega = \text{In}(\text{Aut } L)$, то справедливы соотношения*

$$\text{Aut } K = \text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot \text{Ker } f, \quad \text{Aut } K / \text{Ker } f \cong \text{In}(\text{Aut } L).$$

Доказательство. Утверждение (1) вытекает из изложенного выше. Утверждение (2) вытекает из утверждения (1), определения подгрупп Φ и Ω , а также включения $\text{In}(\text{Aut } L) \subseteq \Omega$. $\square$

Замечание. Если все автоморфизмы алгебры L являются внутренними, то верны соотношения, указанные в предложении 4.1(2).

Пусть S — некоторая алгебра. Фактор-группа $\text{Aut } S / \text{In}(\text{Aut } S)$ называется *группой внешних автоморфизмов* алгебры S . Эта группа обозначается через $\text{Out } S$.

Следствие 4.2. *Существует изоморфизм $\text{Aut } K / \Phi \cong \Omega / \text{In}(\text{Aut } L)$.*

Доказательство. Пусть p — канонический эпиморфизм $\text{Aut } L \rightarrow \text{Out } L$. Ядро гомоморфизма pf совпадает с Φ , а его образ — с $\Omega / \text{In}(\text{Aut } L)$. $\square$

Обратим внимание на случай, когда $M^2 = 0$ (как в конце раздела 3). Учитывая наличие разложения $\text{Ker } f = \Delta \rtimes \Psi$, получаем равенство

$$\Phi = \text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot (\Delta \rtimes \Psi).$$

Если, как в предложении 4.1(2), предположить выполнение равенства $\Omega = \text{In}(\text{Aut } L)$, то придем к равенству

$$\text{Aut } K = \text{In}_0(\text{Aut } K) \cdot (\Delta \rtimes \Psi).$$

Можно утверждать, что строение группы $\text{Aut } K$, в целом, понятно. Правда, остается трудный вопрос об описании группы Ψ .

5. Случай внутренних дифференцирований. Как и в разделах 3–4, имеется алгебра $K = L \oplus M$. Дополнительно предполагаем, что M — нильпотентный идеал и все дифференцирования алгебры L со значениями в некоторых L -бимодулях являются внутренними. Цель раздела — получить аналог разложения $\text{Aut } K = \Delta \rtimes \Lambda$, записанного в конце раздела 3. Указанные дифференцирования будут внутренними, если L — сепарабельная алгебра (см. [23, предложение 11.5]) или матричная алгебра, как в разделах 8–14.

Сначала предположим, что $M^2 = 0$ и любое дифференцирование $L \rightarrow M$ является внутренним. Каждый автоморфизм $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}$ является внутренним. В самом деле, если внутреннее дифференцирование δ определяется элементом $d \in M$, то автоморфизм φ определяется элементом $1 + d$. Поэтому, учитывая конец раздела 3, получаем, что

$$\Delta = \text{In}_1(\text{Aut } K), \quad \text{Aut } K = \Delta \rtimes \Lambda.$$

Теперь перейдем к более общей ситуации. Считаем, что идеал M нильпотентен, $M^k = 0$, причем k — минимальное натуральное число с этим свойством. По-прежнему предполагаем, что все автоморфизмы алгебры K являются треугольными. Кроме того, считаем, что любое дифференцирование $L \rightarrow {}_\alpha(M^i / M^{i+1})_\alpha$ является внутренним для всех $\alpha \in \text{Aut } L$ и $i = 1, \dots, k-1$. Возьмем произвольный автоморфизм φ алгебры K с матрицей $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$. Так как $\varphi M^i = M^i$ для каждого

i , то φ индуцирует автоморфизм $\bar{\varphi}$ алгебры $K_1 = L \oplus M/M^2$. Ему соответствует матрица $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \bar{\delta} & \bar{\beta} \end{pmatrix}$ относительно прямой суммы $L \oplus M/M^2$. Здесь

$$\bar{\delta}(x) = \delta(x) + M^2, \quad x \in L, \quad \bar{\beta}(y + M^2) = \beta(y) + M^2, \quad y \in M.$$

Так как $(M/M^2)^2 = 0$, то $\bar{\delta}$ — дифференцирование со значениями в бимодуле ${}_{\alpha}(M/M^2)_{\alpha}$ (см. конец раздела 3). Согласно условию $\bar{\delta}$ — внутреннее дифференцирование. Пусть оно определяется смежным классом $d_1 + M^2$. Обозначим через μ_1 внутренний автоморфизм алгебры K , определяемый элементом $1 + d_1$. Его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & \gamma \end{pmatrix}$. Несложно проверить, что $\bar{\delta} = \bar{\sigma}\alpha$, где $\bar{\sigma}$ — такое отображение $L \rightarrow M/M^2$, что

$$\bar{\sigma}(x) = \sigma(x) + M^2, \quad x \in L.$$

Теперь положим $\varphi_1 = \mu_1^{-1}\varphi$. Пусть автоморфизм φ_1 имеет матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta_1 & \beta_1 \end{pmatrix}$ относительно разложения $L \oplus M$. Используя равенство $\bar{\delta} = \bar{\sigma}\alpha$, можно вывести, что $\delta_1 L \subseteq M^2$.

Итак, мы пришли к равенству $\varphi = \mu_1\varphi_1$, где $\mu_1 \in \text{In}_1(\text{Aut } K)$, $\varphi_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta_1 & \beta_1 \end{pmatrix}$, причем $\delta_1 L \subseteq M^2$.

Автоморфизм φ_1 индуцирует автоморфизм алгебры $L \oplus M^2$ и, следовательно, автоморфизм

$$\bar{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \bar{\delta}_1 & \bar{\beta}_1 \end{pmatrix}$$

алгебры $L \oplus M^2/M^3$. Применим к $\bar{\varphi}_1$ рассуждения, аналогичные рассуждениям, примененным к $\bar{\varphi}$. В результате получим автоморфизмы μ_2 и

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

со следующими свойствами:

$$\mu_2 \in \text{In}_1(\text{Aut } K), \quad \delta_2 L \subseteq M^3, \quad \varphi = \mu_1\mu_2\varphi_2.$$

Далее повторяем аналогичные рассуждения для бимодулей

$$L \oplus M^3/M^4, \dots, L \oplus M^{k-1}/M^k = L \oplus M^{k-1}.$$

В итоге получим равенство

$$\varphi = \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_{k-1}\varphi_{k-1} = \mu\varphi_{k-1},$$

где $\mu \in \text{In}_1(\text{Aut } K)$, $\varphi_{k-1} \in \Lambda$.

Соберем в одном месте условия, которые мы наложили на алгебру $K = L \oplus M$:

- (a) все автоморфизмы алгебры K треугольные;
- (b) $M^k = 0$, где k — минимальное натуральное число с этим свойством;
- (c) любое дифференцирование $L \rightarrow {}_{\alpha}(M^i/M^{i+1})_{\alpha}$ является внутренним для всех $\alpha \in \text{Aut } L$ и $i = 1, \dots, k-1$.

Еще напомним о равенстве из раздела 4:

$$\text{In}(\text{Aut } K) = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \text{In}_0(\text{Aut } K).$$

Теперь на основании изложенного выше материала и предложения 4.1 можно записать следующую теорему.

Теорема 5.1. Пусть алгебра $K = L \oplus M$ удовлетворяет условиям (a)–(c).

(1) Имеют место равенства

$$\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Lambda, \quad \text{Ker } f = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Psi.$$

(2) Верны соотношения

$$\Phi = \text{In}(\text{Aut } K) \cdot \Psi, \quad \Phi / \text{In}(\text{Aut } K) \cong \Psi / (\Psi \cap \text{In}(\text{Aut } K)).$$

(3) Если $\Omega = \text{In}(\text{Aut } L)$, то верны соотношения

$$\text{Aut } K \cong \text{In}(\text{Aut } K) \cdot \Psi, \quad \text{Out } K \cong \Psi / (\Psi \cap \text{In}(\text{Aut } K)).$$

Отметим, что если $M^2 = 0$, то $\Psi \cap \text{In}(\text{Aut } K) = \Psi_0$.

Для рассматриваемых алгебр $K = L \oplus M$ справедлив аналог одной известной теоремы А. И. Мальцева (см. [23, теорема 11.6]).

Именно, пусть нашлось еще одно расщепляющееся расширение $K = L' \oplus M$. Тогда подалгебра L' переводится в L сопряжением посредством обратимого элемента вида $1 + d$, $d \in M$.

Можно применить теорему 5.1 к конечномерным алгебрам K над совершенным полем F . Для такой алгебры K имеем $K = L \oplus N$, где L — некоторая подалгебра, N — наибольший нильпотентный идеал. Если дополнительно поле F алгебраически замкнуто, то L — произведение колец матриц над F , и можно уточнять теорему 5.1 для соответствующих алгебр в том же ключе, как это делается в разделах 8–14 для колец формальных матриц.

6. Гомоморфизмы алгебр вида $K = L \oplus M$. Равенство $\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Lambda$ из теоремы 5.1(1) сводит описание группы $\text{Aut } K$ к описанию групп Ψ и Ω , поскольку имеется изоморфизм $\Lambda / \Psi \cong \Omega$. Можно также сказать, что любой автоморфизм алгебры K является диагональным с точностью до сопряжения. В этом разделе мы перенесем это свойство на гомоморфизмы рассматриваемых алгебр.

Пусть даны две алгебры $K' = L_1 \oplus M_1$ и $K = L \oplus M$, являющиеся расщепляющимися расширениями своих идеалов M_1 и M с помощью подалгебр L_1 и L соответственно. Предположим, что идеал M нильпотентен и k — его степень нильпотентности. Кроме того, считаем, что любое дифференцирование $L_1 \rightarrow M^i / M^{i+1}$ является внутренним для всех $i = 1, \dots, k - 1$. Подразумевается, что в каждом конкретном случае M^i / M^{i+1} рассматривается определенным образом как L_1 -бимодуль.

Не будем излагать все детали рассуждений, поскольку они с небольшими поправками повторяют соответствующие места из раздела 5.

Пусть $\varphi : K' \rightarrow K$ — некоторый гомоморфизм алгебр. Гомоморфизму φ можно известным образом поставить в соответствие матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$, где

$$\alpha : L_1 \rightarrow L, \quad \beta : M_1 \rightarrow M, \quad \gamma : M_1 \rightarrow L, \quad \delta : L_1 \rightarrow M$$

— T -модульные гомоморфизмы. Договоримся, что далее всегда $\gamma = 0$; будем называть такие гомоморфизмы *треугольными* (термин *диагональный гомоморфизм* используется в понятном смысле). Отображения α и β являются гомоморфизмами алгебр. С помощью гомоморфизма α можно задать структуру L_1 -бимодуля ${}_{\alpha}M_{\alpha}$ на M , полагая

$$x \circ y = \alpha(x)y, \quad y \circ x = y\alpha(x), \quad x \in L_1, \quad y \in M.$$

Также справедливы равенства, подобные равенствам (1) раздела 3. Если $M^2 = 0$, то получаем равенства, подобные равенствам (2) раздела 3. В этом частном случае δ — дифференцирование алгебры L_1 со значениями в L_1 -бимодуле ${}_{\alpha}M_{\alpha}$.

Отождествим гомоморфизм φ с матрицей $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$. Верны равенства

$$\varphi(x + y) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha(x) + (\delta(x) + \beta(y)), \quad x \in L_1, \quad y \in M_1.$$

Имеем гомоморфизм

$$\bar{\varphi} : K' \rightarrow K_1 = L \oplus M / M^2, \quad \bar{\varphi}(x + y) = \varphi(x + y) + M^2, \quad x \in L_1, \quad y \in M_1.$$

Пусть $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \bar{\delta} & \bar{\beta} \end{pmatrix}$ — матрица, соответствующая гомоморфизму $\bar{\varphi}$, где

$$\bar{\delta}(x) = \delta(x) + M^2, \quad x \in L_1, \quad \bar{\beta}(y) = \beta(y) + M^2, \quad y \in M_1.$$

Так как $(M/M^2)^2 = 0$, то $\bar{\delta} : L_1 \rightarrow {}_{\alpha}(M/M^2)_{\alpha}$ — внутреннее дифференцирование по условию.

Дальнейшие рассуждения практически ничем не отличаются от рассуждений, проведенных в разделе 5. Так же, как и в разделе 5, в итоге получаем равенство

$$\varphi = \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_{k-1} \varphi_{k-1},$$

где $\mu_1, \dots, \mu_{k-1} \in \text{In}_1(\text{Aut } K)$, а гомоморфизм φ_{k-1} имеет диагональную матрицу. Итак, получен следующий результат.

Предложение 6.1. Пусть $\varphi : K' \rightarrow K$ — произвольный треугольный гомоморфизм. Тогда найдется такой внутренний автоморфизм μ алгебры K , определяемый элементом $1 + d$, где $d \in M$, что $\mu\varphi$ — диагональный гомоморфизм.

7. Кольца формальных матриц. В последующих разделах мы применим полученные результаты к описанию автоморфизмов колец формальных матриц, а в этом разделе определим данный вид матричных колец. Теория таких колец изложена в книге [21]. Имеется много статей, посвященных кольцам формальных матриц. Часть из них представлены в списке литературы книги [21]. Как и раньше, считаем все кольца алгебрами над некоторым коммутативным кольцом T , поэтому можно говорить «алгебра формальных матриц».

Зафиксируем натуральное число $n \geq 2$. Пусть $R_1, \dots, R_n$ — кольца и M_{ij} — R_i - R_j -бимодули, причем $M_{ii} = R_i$, $i, j = 1, \dots, n$. Предположим, что для любых таких индексов $i, j, k = 1, \dots, n$, что $i \neq j$, $j \neq k$, задан R_i - R_k -бимодульный гомоморфизм

$$\varphi_{ijk} : M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \rightarrow M_{ik}.$$

Обозначим через φ_{iik} и φ_{ikk} канонические изоморфизмы

$$R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \rightarrow M_{ik}, \quad M_{ik} \otimes_{R_k} R_k \rightarrow M_{ik}$$

соответственно, $i, k = 1, \dots, n$. Вместо $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$ просто пишем ab . Допустим также, что в этих обозначениях $(ab)c = a(bc)$ для всех элементов $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$, $c \in M_{k\ell}$ и индексов i, j, k, ℓ .

Обозначим через K множество всех квадратных матриц (a_{ij}) порядка n со значениями в бимодулях M_{ij} . Относительно стандартных матричных операций сложения и умножения K образует кольцо. Его можно записать в следующем виде:

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n \end{pmatrix}.$$

Кольцо K называется *кольцом формальных* (или *обобщенных*) *матриц* порядка n . Если $M_{ij} = 0$ для всех i, j , удовлетворяющих неравенству $i > j$, то K — *кольцо формальных (верхних) треугольных матриц*.

Для каждого $k = 1, \dots, n$ положим

$$I_k = \sum_{i \neq k} \text{Im}(\varphi_{kik}) \quad \text{или иначе} \quad I_k = \sum_{i \neq k} M_{ki} M_{ik}.$$

Здесь $M_{ki} M_{ik}$ — множество всех конечных сумм элементов вида ab , $a \in M_{ki}$, $b \in M_{ik}$. Тогда I_k — идеал кольца R_k . Говорят, что $I_1, \dots, I_n$ — *идеалы следа* кольца K .

8. Автоморфизмы алгебр формальных матриц. Сформулируем и докажем один простой факт о дифференцированиях.

Предложение 8.1. Пусть $n \geq 2$, $R_1, \dots, R_n$ — алгебры, $L = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$, M — такой L -бимодуль, что

$$M = \bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n M_{ij},$$

причем $R_k M_{ij} = 0$ при $k \neq i$ и $M_{ij} R_k = 0$ при $k \neq j$ (некоторые L -бимодули M_{ij} могут равняться нулю). Тогда всякое дифференцирование $L \rightarrow {}_L M_L$ является внутренним.

Доказательство. Достаточно проверить, что для любых i, j все дифференцирования $L \rightarrow M_{ij}$ являются внутренними (см. [7, § 11.2]).

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — единичные элементы алгебр $R_1, \dots, R_n$ соответственно. Зафиксируем два различных индекса i, j , возьмем произвольное дифференцирование $\delta : L \rightarrow M_{ij}$ и докажем, что δ — внутреннее дифференцирование.

Пусть индекс k отличен от i и j . Тогда для любого $x \in R_k$ имеем

$$\delta(x) = \delta(e_k x) = \delta(e_k)x + e_k \delta(x) = 0, \quad \delta(R_k) = 0.$$

Поэтому

$$0 = \delta(1) = \delta(e_1) + \dots + \delta(e_n) = \delta(e_i) + \delta(e_j).$$

Пусть $\delta(e_i) = a$. Тогда $\delta(e_j) = -a$.

Для любого $x \in R_i$ верны равенства

$$\delta(x) = \delta(xe_i) = \delta(x)e_i + x\delta(e_i) = x\delta(e_i) = xa.$$

Аналогично, для элемента $x \in R_j$ имеем $\delta(x) = -ax$.

Наконец, взяв произвольный элемент $x \in L$ и записав $x = x_1 + \dots + x_n$, $x_i \in R_i$, получим

$$\delta(x) = \delta(x_i) + \delta(x_j) = x_i a - a x_j = (x_1 + \dots + x_n)a - a(x_1 + \dots + x_n) = xa - ax.$$

Итак, справедливо равенство $\delta(x) = xa - ax$ для любого $x \in L$. Это означает, что δ — внутреннее дифференцирование. $\square$

Пусть теперь K — некоторая алгебра формальных матриц. Обозначим через L подкольцо всех диагональных матриц, а через M — подгруппу всех матриц с нулями на главной диагонали. Можно записать прямую сумму $K = L \oplus M$ абелевых групп. Подгруппа M будет идеалом в точности тогда, когда все идеалы следа кольца K равны нулю. В таком случае говорят, что K — *кольцо с нулевыми идеалами следа*. К таким кольцам относятся все кольца треугольных матриц.

Если K — кольцо с нулевыми идеалами следа, то нетрудно убедиться, что M — нильпотентный идеал степени нильпотентности $\leq n$. Из [21, теорема 2.4.4] вытекает равенство $P(K) = P(L) \oplus M$ (напоминаем, что символ $P(S)$ обозначает первичный радикал кольца S). Наконец, имеют место прямые разложения

$$L = R_1 \oplus \dots \oplus R_n, \quad M = \bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n M_{ij}.$$

Из предложения 8.1 можно вывести, что любое дифференцирование $L \rightarrow M^i/M^{i+1}$ является внутренним для всех $i = 1, \dots, k-1$. Это открывает возможность для применения результатов разделов 5 и 6 к кольцам формальных матриц. В связи с этим сформулируем одно условие на алгебру K .

(I) Для любого автоморфизма $\varphi \in \text{Aut } K$ верно равенство $\varphi M = M$, т.е. любой автоморфизм является треугольным.

Данное условие выполняется не для каждого кольца K . Приведем пример из [16]. Возьмем T -алгебры

$$R = \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & T & T & T \\ 0 & T & 0 & T \\ 0 & 0 & T & T \\ 0 & 0 & 0 & T \end{pmatrix}.$$

Для алгебры K имеем $L = R \oplus R$ и $M = R$. Подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ дает такой автоморфизм алгебры K , что $\varphi M \neq M$ (о действии подстановок на матрицах см. раздел 12).

Условие **(I)** выполняется, если все кольца $R_1, \dots, R_n$ полупервичны. Ниже появятся и другие ситуации, когда это условие выполняется.

Пусть алгебра формальных матриц K имеет нулевые идеалы следа. Тогда алгебра K удовлетворяет условиям **(b)** и **(c)**, записанным перед теоремой 5.1. Следовательно, для алгебры K верен аналог этой теоремы. Мы не будем переписывать теорему 5.1, а ограничимся следующей формулировкой.

Теорема 8.2. Пусть K — алгебра формальных матриц с нулевыми идеалами следа и выполнено условие **(I)**. Тогда для алгебры K справедливы утверждения (1)–(3) теоремы 5.1.

Возьмем две алгебры формальных матриц $K' = L_1 \oplus M_1$ и $K = L \oplus M$ с нулевыми идеалами следа. Соображения, подобные высказанным перед теоремой 8.2, приводят к мысли о том, что алгебры K' и K подпадают под действие предложения 6.1. Поэтому получаем следующий результат.

Следствие 8.3. Для любого треугольного гомоморфизма алгебр $K' \rightarrow K$ верно утверждение предложения 6.1.

Также обратим внимание на следующее. Пусть $\varphi : K' \rightarrow K$ — диагональный гомоморфизм и $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Тогда α — гомоморфизм алгебр $L_1 \rightarrow L$, а β — гомоморфизм алгебр $M_1 \rightarrow M$ и гомоморфизм бимодулей ${}_{L_1}M_1{}_{L_1} \rightarrow {}_L M_L$ относительно α .

9. Автоморфизмы алгебр формальных матриц, II. Пусть, по-прежнему, $K = L \oplus M$ — алгебра формальных матриц с нулевыми идеалами следа. Желательно получить какие-либо сведения о том, как автоморфизмы алгебры K действуют на кольцах $R_1, \dots, R_n$ и бимодулях M_{ij} . Пример в разделе 8 говорит о том, что автоморфизмы могут «перемешивать» эти кольца и бимодули. Мы выделим некоторые условия, препятствующие такому перемешиванию. Эти условия требуют от колец $R_1, \dots, R_n$ отсутствия идемпотентов определенного вида. Что хорошо, при этом автоматически выполняется условие **(I)**, введенное в предыдущем разделе.

Напомним ряд понятий, относящихся к идемпотентам кольца.

Определение 9.1. Кольцо R называется *неразложимым*, если 1 — единственный его ненулевой центральный идемпотент.

Неразложимое кольцо нельзя представить в виде нетривиального прямого произведения колец. Кольцо матриц над неразложимым кольцом является неразложимым кольцом.

Определение 9.2.

- (1) (см. [10]). Идемпотент e кольца R называется *полуцентральный*, если $(1 - e)Re = 0$.
- (2) (см. [8, 10]). Кольцо R называется *сильно неразложимым*, если 1 — единственный его ненулевой полуцентральный идемпотент.

Сильно неразложимое кольцо не изоморфно никакому кольцу формальных матриц вида $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$. Ясно, что центральные идемпотенты являются полуцентральными.

Лемма 9.3. Если фактор-кольцо $R/P(R)$ является неразложимым, то R — сильно неразложимое и, в частности, неразложимое кольцо.

Доказательство. Допустим, что существует такой ненулевой идемпотент $e \neq 1$ кольца R , что $(1 - e)Re = 0$. Кольцо R можно отождествить с кольцом матриц

$$\begin{pmatrix} eRe & eR(1 - e) \\ 0 & (1 - e)R(1 - e) \end{pmatrix}$$

(см. [21, раздел 2.1]). На основании [21, теорема 2.4.4] имеется изоморфизм

$$R/P(R) \cong eRe/P(eRe) \oplus (1 - e)R(1 - e)/P((1 - e)R(1 - e)),$$

что невозможно в силу неразложимости фактор-кольца $R/P(R)$. $\square$

Следствие 9.4. Полупервичное кольцо неразложимо в точности тогда, когда оно сильно неразложимо.

Соберем вместе несколько элементарных фактов об идемпотентах кольца K .

Лемма 9.5. Пусть $e + y$ — идемпотент кольца K , где $e \in L$ и $y \in M$. Тогда e — идемпотент. Если $f + z$ — идемпотент кольца K , где $f \in L$ и $z \in M$, и $f + z$ ортогонален и дополнителен к $e + y$, то идемпотенты e и f ортогональны и дополнителены друг к другу.

Обозначим через $e_1, \dots, e_n$ единичные элементы колец $R_1, \dots, R_n$ соответственно. Добавим к условию (I) из раздела 8 еще одно условие.

(II) Для любого автоморфизма φ алгебры K и каждого $i = 1, \dots, n$ справедливо включение $\varphi(e_i) \in e_k + M$ для некоторого k .

В разных формах условие (II) встречается в [7, 8].

Предположим сейчас, что условие (II) выполняется для алгебры $K = L \oplus M$ и $\varphi \in \text{Aut } K$. Возьмем два различных индекса i и j . Пусть

$$\varphi(e_i) \in e_k + M, \quad \varphi(e_j) \in e_\ell + M.$$

Из равенства $e_i e_j = 0$ вытекает, что $e_k e_\ell = 0$ и $k \neq \ell$. Следовательно, φ индуцирует подстановку на числах $1, \dots, n$.

Так как любой бимодуль M_{ij} можно отождествить с $e_i K e_j$ (см. [21, предложение 2.3.1]), то теперь ясно, что из выполнения условия (II) вытекает выполнение условия (I). Поэтому все автоморфизмы алгебры K являются треугольными.

Как ориентир для поиска условий, о которых говорилось перед определением 9.1, отметим следующий результат.

Лемма 9.6. Пусть даны неразложимые кольца $R_1, \dots, R_n$, $L = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ и $\alpha \in \text{Aut } L$. Тогда для каждого $i = 1, \dots, n$ найдется такой индекс j , что $\alpha R_i = R_j$.

Доказательство. Пусть $1 = e_1 + \dots + e_n$, где e_i — единица кольца R_i , $i = 1, \dots, n$. Для определенности положим $i = 1$. Тогда $\alpha(e_1) = e_{j_1} + \dots + e_{j_t}$. Если ограничение автоморфизма α на R_1 не является изоморфизмом, то найдется элемент $y \in L$, имеющий нулевую проекцию в R_1 , т.е.

$$\alpha(y) \in R_{j_1} \oplus \dots \oplus R_{j_t}, \quad \alpha(y) \neq 0.$$

В таком случае из $e_1 y = 0$ следует, что $\alpha(e_1) \alpha(y) = 0$. Последнее равенство противоречиво, поскольку $\alpha(e_1)$ — единичный элемент кольца $R_{j_1} \oplus \dots \oplus R_{j_t}$. Следовательно, α — изоморфизм колец R_1 и $R_{j_1} \oplus \dots \oplus R_{j_t}$. Так как R_1 — неразложимое кольцо, то это возможно только при $t = 1$. $\square$

Можно сделать вывод, что любой автоморфизм $\alpha \in \text{Aut } L$ «переставляет» кольца $R_1, \dots, R_n$. Выделим в группе $\text{Aut } L$ некоторую группу подстановок на числах $1, \dots, n$. Для этого разобьем множество колец $R_1, \dots, R_n$ на классы эквивалентности относительно изоморфизма колец. Затем

в каждом классе перенумеруем все кольца. Возьмем какой-либо класс колец; пусть для простоты $R_1, \dots, R_\ell$ — нумерация колец из этого класса. Для каждого $s = 1, \dots, \ell$ зафиксируем некоторый изоморфизм $\varepsilon_{s1} : R_1 \rightarrow R_s$, причем ε_{11} — тождественный автоморфизм кольца R_1 . Далее полагаем

$$\varepsilon_{1s} = \varepsilon_{s1}^{-1}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{i1}\varepsilon_{1j} : K_j \rightarrow K_i$$

для любых $i, j \in \{2, \dots, \ell\}$.

Пусть σ — некоторая подстановка степени ℓ . Определим автоморфизм α_σ алгебры $R_1 \oplus \dots \oplus R_\ell$, считая, что α_σ действует на R_i как изоморфизм $\varepsilon_{\sigma(i)i}$. После этого ясно, что

$$(\alpha_\sigma)^{-1} = \alpha_{\sigma^{-1}}.$$

Если τ — еще одна подстановка, то верно равенство

$$\alpha_{\tau\sigma} = \alpha_\tau \alpha_\sigma.$$

Поэтому соответствие $\sigma \rightarrow \alpha_\sigma$ является изоморфным вложением симметрической группы S_ℓ степени ℓ в группу $\text{Aut}(R_1 \oplus \dots \oplus R_\ell)$; обозначим его образ через Σ_ℓ . Теперь положим

$$\Sigma = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_t,$$

где t — число классов определенной выше эквивалентности колец. Подгруппа автоморфизмов Σ изоморфна некоторой группе подстановок степени n . Мы отождествляем Σ с этой группой подстановок, т.е. считаем, что $\alpha_\sigma = \sigma$.

Введем еще одну подгруппу группы $\text{Aut } L$. Пусть

$$\Gamma = \{\mu \in \text{Aut } L \mid \mu R_i = R_i \text{ для всякого } i = 1, \dots, n\}.$$

Тогда Γ — нормальная подгруппа группы $\text{Aut } L$ и $\Gamma \cap \Sigma = \langle 1 \rangle$.

Возьмем произвольный автоморфизм $\varphi \in \text{Aut } L$. В силу леммы 9.6 φ индуцирует подстановку τ степени n . Кроме того, имеем $\varphi\alpha_\tau^{-1} \in \Gamma$. Обозначая $\mu = \varphi\alpha_\tau^{-1}$, получаем $\varphi = \mu\alpha_\tau$, где $\mu \in \Gamma$, $\alpha_\tau \in \Sigma$. Можно утверждать, что группа $\text{Aut } L$ является полупрямым произведением $\Gamma \ltimes \Sigma$.

Следующие две леммы выделяют ситуации, когда условие **(II)** выполнено (и поэтому условие **(I)** выполнено). До конца раздела мы снова обозначаем $K = L \oplus M$, где символы K , L и M имеют прежний смысл.

Лемма 9.7. *Если все фактор-кольца $R_1/P(R_1), \dots, R_n/P(R_n)$ неразложимы, то условие **(II)** выполняется.*

Доказательство. Из [21, теорема 2.4.4] вытекает, что $P(K) = P(L) \oplus M$. Поэтому можно отождествить фактор-кольца $K/P(K)$ и $L/P(L)$. При этом кольцо $L/P(L)$ можно отождествить с прямой суммой $R_1/P(R_1) \oplus \dots \oplus R_n/P(R_n)$.

Зафиксируем автоморфизм $\varphi \in \text{Aut } K$. Пусть $\bar{\varphi}$ — автоморфизм алгебры $K/P(K)$, индуцированный автоморфизмом φ . В силу леммы 9.6 для каждого идемпотента e_i существует идемпотент e_j со свойством $\bar{\varphi}(\bar{e}_i) = \bar{e}_j$, где черта над e_i (соответственно, e_j) обозначает смежный класс относительно $P(R_i)$ (соответственно, $P(R_j)$) или, эквивалентно, относительно $P(K)$. Возвращаясь в кольцо K , получаем

$$\varphi(e_i) = e_j + a + b, \quad a \in P(L), \quad b \in M,$$

$e_j + a$ — идемпотент в L . Далее запишем

$$a = c + d, \quad c \in R_j, \quad d \in \bigoplus_{s \neq j} R_s.$$

Так как $d \in P(L)$ и d — идемпотент, то $d = 0$. Поэтому $e_j + c$ — идемпотент и обратимый элемент в R_j , поскольку $c \in P(R_j)$. Тогда $e_j + c = e_j$ и $c = 0$. Итак, доказано, что

$$\varphi(e_i) = e_j + b, \quad b \in M,$$

что и требовалось. □

Для кольца K треугольных матриц предположения из леммы 9.7 допускают ослабление (в связи с этим см. лемму 9.3).

Справедливость следующего утверждения в разных ситуациях использовалась в [6–8].

Лемма 9.8. Пусть K — такое кольцо формальных треугольных матриц, что все кольца $R_1, \dots, R_n$ сильно неразложимы. Тогда условие (II) выполняется.

Доказательство. Пусть для каждого $i = 1, \dots, n$ имеем $\varphi(e_i) = g_i + y_i$, где $g_i \in L$, $y_i \in M$. На основании леммы 9.5 можно утверждать, что $g_1, \dots, g_n$ — полная ортогональная система идемпотентов в L . Запишем их относительно разложения $L = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$:

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1^{(1)} + \dots + g_n^{(1)}, \\ g_2 &= g_1^{(2)} + \dots + g_n^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ g_n &= g_1^{(n)} + \dots + g_n^{(n)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Все первые слагаемые в равенствах (3) образуют полную ортогональную систему идемпотентов в кольце R_1 и т. д. Из равенства

$$(e_n + e_{n-1} + \dots + e_2)Ke_1 = 0$$

следует равенство

$$(g_n + g_{n-1} \dots + g_2)Kg_1 = 0;$$

затем получаем равенство

$$(g_1^{(n)} + g_1^{(n-1)} + \dots + g_1^{(2)})R_1g_1^{(1)} = 0.$$

По условию идемпотент $g_1^{(1)}$ равен либо 0, либо 1 (т.е. e_1). В случае $g_1^{(1)} = 1$ получаем

$$g_1^{(n)} = \dots = g_1^{(2)} = 0.$$

Если же $g_1^{(1)} = 0$, то

$$g_1^{(n)} + \dots + g_1^{(2)} = 1.$$

Так же, как и выше, имеем равенство

$$(g_1^{(n)} + \dots + g_1^{(3)})R_1g_1^{(2)} = 0.$$

Повторяя проведенные рассуждения, получаем, что один из идемпотентов $g_1^{(1)}, \dots, g_1^{(n)}$ равен 1, а остальные равны нулю. То же самое верно и для вторых слагаемых в равенствах (3) и для всех остальных. Поскольку все элементы g_i отличны от нуля, то ясно, что среди $g_1^{(1)}, \dots, g_n^{(1)}$ ровно один элемент равен 1, а остальные элементы равны нулю. Это означает, что для каждого i имеется включение $\varphi(e_i) \in e_j + M$ для какого-либо j , что и требуется. $\square$

В ситуации лемм 9.7 или 9.8 к группе автоморфизмов алгебры $L = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ применима лемма 9.6 (надо еще учесть лемму 9.3). Именно, можно записать равенство

$$\text{Aut } L = \Gamma \rtimes \Sigma,$$

где Γ — подгруппа всех автоморфизмов, оставляющих каждое кольцо R_i на месте, Σ — некоторая группа подстановок степени n . Любой автоморфизм $\alpha \in \text{Aut } L$ единственным образом представим в виде $\alpha = \mu\tau$, где $\mu \in \Gamma$, $\tau \in \Sigma$. Это дает гомоморфизм $h : \text{Aut } L \rightarrow \Sigma$, $\alpha \rightarrow \tau$, с ядром Γ . Определим теперь гомоморфизм $g = hf : \text{Aut } K \rightarrow \Sigma$ (гомоморфизм f появился в разделе 3). Тогда имеем

$$\text{Ker } g = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha R_i = R_i, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Ясно, что $\Phi \subseteq \text{Ker } g$, а с учетом теоремы 8.2 получаем разложение

$$\text{Ker } g = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha R_i = R_i, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Иногда, как в разделах 11 и 13, подгруппа $\text{Ker } g$ является полупрямым множителем в $\text{Aut } K$, а дополнительный множитель — некоторая подгруппа, изоморфная Σ .

Следствие 9.9. Пусть алгебра формальных матриц K удовлетворяет одному из следующих условий:

- (1) все фактор-кольца $R_1/P(R_1), \dots, R_n/P(R_n)$ неразложимы;
- (2) K — алгебра треугольных матриц, у которой все кольца $R_1, \dots, R_n$ сильно неразложимы.

Тогда для алгебры K выполняются условия (II) и (I) и, следовательно, справедливы утверждения теоремы 5.1.

Сейчас мы можем прояснить характер действия автоморфизмов из $\text{Aut } K$ на кольцах R_i и бимодулях M_{ij} . Ввиду теоремы 8.2 имеется разложение

$$\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Lambda.$$

Поэтому можно ограничиться автоморфизмами из Λ . Итак, пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Lambda.$$

Здесь α — автоморфизм алгебры L , $\alpha \in \Omega$, а β — автоморфизм нильпотентной алгебры M и изоморфизм L -бимодулей $M \rightarrow {}_\alpha M_\alpha$ (см. формулы (1) раздела 3).

Предположим, что алгебра K удовлетворяет условию (II). Например, пусть все фактор-кольца $R_1/P(R_1), \dots, R_n/P(R_n)$ неразложимы (см. лемму 9.7) или все кольца $R_1, \dots, R_n$ сильно неразложимы при условии, что K — кольцо треугольных матриц (см. лемму 9.8). В обоих случаях кольца $R_1, \dots, R_n$ неразложимы (лемма 9.3).

Теперь можно утверждать следующее. Согласно лемме 9.6 автоморфизм α переставляет кольца R_i в соответствии с некоторой подстановкой τ степени n . Положим $\alpha_i = \alpha|_{R_i}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда α_i — изоморфизм алгебр $R_i \rightarrow R_{\tau(i)}$. Далее, имеем

$$\beta M_{ij} = \beta(e_i K e_j) = e_{\tau(i)} K e_{\tau(j)} = M_{\tau(i)\tau(j)}$$

для каждых двух различных индексов i, j . Введем обозначение $\beta_{ij} = \beta|_{M_{ij}}$. Таким образом, β_{ij} — изоморфизм R_i - R_j -бимодуля M_{ij} на $R_{\tau(i)}$ - $R_{\tau(j)}$ -бимодуль $M_{\tau(i)\tau(j)}$ относительно кольцевых изоморфизмов α_i и α_j .

Если $\varphi \in \text{Ker } g$, т.е. α переводит каждое кольцо R_i в себя, то β_{ij} — изоморфизм L -бимодулей $M_{ij} \rightarrow {}_{\alpha_i}(M_{ij})_{\alpha_j}$.

Оформим только что изложенное в кратком, но не совсем точном виде.

Теорема 9.10. В описанной перед теоремой ситуации пусть $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ — диагональный автоморфизм алгебры K . Тогда автоморфизм α алгебры L переставляет кольца $R_1, \dots, R_n$, а автоморфизм β L -бимодуля M переставляет бимодули M_{ij} в соответствии с некоторой подстановкой τ степени n . Кроме того, сужение β на M_{ij} является изоморфизмом бимодулей $M_{ij} \rightarrow M_{\tau(i)\tau(j)}$.

Утверждение, аналогичное теореме 9.10, безусловно верно для диагональных автоморфизмов рассматриваемых алгебр (см. следствие 8.3). Собственно, соответствующие детали уже изложены после следствия 8.3.

10. Когда все автоморфизмы алгебры K — внутренние? В этом разделе $K = L \oplus M$ — кольцо формальных треугольных матриц. Коснемся вопроса, поставленного в названии раздела. Мы увидим, что положительный ответ на него можно дать довольно редко.

Пусть алгебра K удовлетворяет условию (I) из раздела 8. В такой ситуации выполнение равенства $\Omega = \text{In}(\text{Aut } L)$ является необходимым условием для того, чтобы все автоморфизмы алгебры K были внутренними (см. следствие 9.9 и теорему 5.1). Включение $\text{In}(\text{Aut } L) \subseteq \Omega$ верно всегда (это вытекает из раздела 4). Кроме того, из следствия 9.9 и теоремы 5.1 вытекает, что если $\Omega = \text{In}(\text{Aut } L)$, то справедливость равенства $\text{Aut } K = \text{In}(\text{Aut } K)$ равносильна выполнению включения $\Psi \subseteq \text{In}(\text{Aut } K)$. Напомним, что подгруппы Ω и Ψ появились в разделе 3.

Следствие 10.1. *Предположим, что K — такое кольцо формальных треугольных матриц, что $R_1, \dots, R_n$ — коммутативные неразложимые кольца и $\Omega = \langle 1 \rangle$. Тогда*

$$\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Psi,$$

а выполнение равенства $\text{Aut } K = \text{In}(\text{Aut } K)$ равносильно выполнению равенства $\Psi = \text{In}_0(\text{Aut } K)$.

Доказательство. Из равенства $\Omega = \langle 1 \rangle$ вытекает равенство $\text{Aut } K = \text{Ker } f$. Поэтому из следствия 9.9 и теоремы 5.1 вытекает равенство $\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Psi$.

Перейдем ко второму утверждению. Сначала напомним о равенстве

$$\text{In}(\text{Aut})K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \text{In}_0(\text{Aut } K)$$

из раздела 4. Достаточно проверить, что если $\Psi \subseteq \text{In}(\text{Aut } K)$, то $\Psi \subseteq \text{In}_0(\text{Aut } K)$. Действительно, так как кольца $R_1, \dots, R_n$ коммутативны, то $\text{In}_0(\text{Aut } K) \subseteq \Psi$.

Пусть $\psi \in \Psi$ и $\psi = \mu\nu$, где $\mu \in \text{In}_1(\text{Aut } K)$, $\nu \in \text{In}_0(\text{Aut } K)$. Допустим, что $\mu \neq 1$. Тогда

$$\mu = \psi\nu^{-1} \in \text{In}_1(\text{Aut } K),$$

а с другой стороны $\mu \in \Psi$.

Пусть $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Из одного из равенств (1) раздела 3 вытекает, что $\beta M_{ij} = M_{ij}$ для любых индексов i, j . Рассмотрим элемент $1 + d$, $d \in M$, определяющий внутренний автоморфизм μ . Для любых индексов i и j , $i < j$, и для любого элемента $y \in M_{ij}$ запишем равенство

$$\beta(y) = y + (d'y + yd + d'yd),$$

где $1 + d'$, $d' \in M$, — обратный элемент к $1 + d$. Так как $y, \beta(y) \in M_{ij}$, то ясно, что

$$d'y + yd + d'yd = 0.$$

Поэтому $\beta = 1$ и $\mu = 1$, что противоречит предположению. Итак, $\mu = 1$. Доказано, что $\Psi \subseteq \text{In}_0(\text{Aut } K)$.

В конце доказательства заметим, что $\text{In}(\text{Aut } K) = \langle 1 \rangle$, поскольку кольца $R_1, \dots, R_n$ коммутативны. Поэтому равенство $\Omega = \text{In}(\text{Aut } L)$, приведенное перед следствием, эквивалентно равенству $\Omega = \langle 1 \rangle$. $\square$

К следствию 10.1 добавим, что верно равенство

$$\text{In}_0(\text{Aut } K) = \Psi_0$$

(о подгруппе Ψ_0 см. раздел 4). Следовательно, имеем изоморфизм

$$\text{Out } K \cong \Psi/\Psi_0.$$

Примем одно соглашение технического характера. Будем часто писать ниже «... для любых значений индексов i, j ...» или «... для любых значений индексов i, j, k ...»; при этом подразумевается, что $i < j$ или $i < j < k$.

Итак, в условиях следствия 10.1 справедливо равенство $\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Psi$. В разделе 3 сформулирована проблема вычисления подгруппы Ψ . Здесь мы сделаем несколько замечаний об этой подгруппе.

Возьмем произвольный автоморфизм $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi$. Известно, что β — автоморфизм алгебры M и автоморфизм L -бимодуля M . Обратно, если преобразование $\beta : M \rightarrow M$ имеет указанные свойства, то $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi$. Это наблюдение уточним следующим образом.

Аutomорфизм β индуцирует автоморфизм β_{ij} на каждом R_i - R_j -бимодуле M_{ij} . При этом для любых значений индексов i, j, k и элементов $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$ должно выполняться равенство

$$\beta_{ik}(ab) = \beta_{ij}(a) \cdot \beta_{jk}(b). \quad (4)$$

Теперь пусть для всех значений индексов i, j имеется автоморфизм β_{ij} бимодуля M_{ij} , причем верно равенство (4) для всех значений входящих в него символов. Полагая

$$\beta = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \beta_{ij},$$

получим автоморфизм $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, принадлежащий Ψ .

Равенство (4) не очень полезно для вычисления подгруппы Ψ , однако в одном случае это можно легко сделать. Допустим, что кольцо K обладает свойством $M^2 = 0$ (это свойство уже упоминалось в тексте). Тогда соответствие $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \rightarrow \beta$ дает изоморфизм $\Psi \cong \text{Aut}_L M$. Далее, имеем изоморфизм

$$\text{Aut}_L M \cong \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \text{Aut}_L M_{ij}.$$

Для более узкого класса колец запишем аналог следствия 10.1.

Следствие 10.2. Пусть K — такая алгебра формальных треугольных матриц, что $R_1 = \dots = R_n = T$, где T — коммутативное неразложимое кольцо. Кроме того, считаем, что $M_{ij} \neq 0$ для всех значений индексов i и j . Тогда для группы $\text{Aut } K$ справедливы утверждения следствия 10.1.

Доказательство. Из следствия 9.9 и теоремы 5.1 вытекает равенство

$$\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \cdot \Lambda.$$

Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Lambda.$$

Тогда α индуцирует подстановку τ на числах $1, \dots, n$. Кроме того, α и β переставляют кольца $R_1, \dots, R_n$ и бимодули M_{ij} в соответствии с подстановкой τ (см. лемму 9.6 и теорему 9.10). Поскольку все бимодули M_{ij} отличны от нуля, то подстановка τ является тождественной. Поэтому из равенств $R_1 = \dots = R_n = T$ следует, что $\alpha = 1$, и затем получаем равенство $\Omega = \langle 1 \rangle$. Доказано, что $\Lambda = \Psi$, откуда

$$\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Psi.$$

Второе утверждение следствия 10.1 также верно. $\square$

Дополнительно к условиям следствия 10.2 предположим, что автоморфизмы каждого бимодуля M_{ij} состоят из умножений на обратимые элементы кольца T , т.е. $\text{Aut}_T M_{ij} = U(T)$. Теперь возьмем произвольный автоморфизм $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi$ и положим $\beta_{ij} = \beta|_{M_{ij}}$. Пусть c_{ij} — тот обратимый элемент кольца T , для которого выполняется равенство $\beta_{ij}(y) = c_{ij}y$, $y \in M_{ij}$. Тогда формула (4) приобретает вид

$$c_{ik}ab = c_{ij}c_{jk}ab. \quad (5)$$

Все изложенное подтверждает, что характеристика алгебр K , у которых все автоморфизмы являются внутренними, является непростой задачей. Здесь есть много интересных деталей и разнообразных примеров. Ниже мы обратим внимание только на некоторые моменты.

Получается, что можно поставить в соответствие автоморфизму $\varphi \in \Psi$ систему обратимых элементов c_{ij} кольца T , $i, j = 1, \dots, n$, $i < j$, для которых верна формула (5). Если все T -модули M_{ij} точны, то эта система единственна.

Лемма 10.3. Пусть алгебра K формальных треугольных матриц удовлетворяет следующим условиям:

- (1) $R_1 = \dots = R_n = T$, где T — коммутативное неразложимое кольцо;
- (2) $tm = mt$ для всех $t \in T$ и $m \in M$;
- (3) T -модуль M_{ij} точен для всех значений индексов i и j ;
- (4) $\text{Aut}_T M_{ij} = U(T)$ для всех i, j .

Далее, пусть $\varphi \in \Psi$ и автоморфизму φ соответствует система элементов $c_{ij} \in U(T)$. Автоморфизм φ является внутренним в точности тогда, когда $c_{ij}c_{jk} = c_{ik}$ для всех i, j, k .

Доказательство. Предположим, что φ — внутренний автоморфизм, определяемый обратимым элементом $\text{diag}(v_1, \dots, v_n)$. Для любых значений индексов i, j и любого элемента $y \in M_{ij}$ имеем

$$\varphi(y) = v_i^{-1}yv_j = v_i^{-1}v_jy.$$

С другой стороны, $\varphi(y) = c_{ij}y$. Так как T -модуль M_{ij} точен, то $c_{ij} = v_i^{-1}v_j$. Далее, находим

$$c_{ij}c_{jk} = v_i^{-1}v_k = c_{ik}.$$

Наоборот, пусть верны равенства $c_{ij}c_{jk} = c_{ik}$ для всех i, j, k . Выберем некоторый обратимый элемент v_1 в T и положим $v_2 = v_1c_{12}$, $\dots$, $v_n = v_1c_{1n}$. Тогда для любых i, j имеем равенство $v_i^{-1}v_j = c_{ij}$. Ясно, что сопряжение матрицей $\text{diag}(v_1, \dots, v_n)$ совпадает с автоморфизмом φ . Поэтому φ — внутренний автоморфизм. $\square$

Вряд ли возможно вычислить группу Ψ без какой-нибудь дополнительной информации о бимодулях M_{ij} .

Следствие 10.4. Пусть K — такая алгебра, как в лемме 10.3, только условие (3) заменено на следующее более сильное условие: T -модуль $M_{ij}M_{jk}$ точен для любых i, j, k . Тогда все автоморфизмы алгебры K являются внутренними.

Доказательство. Ввиду следствия 10.1 достаточно показать, что подгруппа Ψ состоит из внутренних автоморфизмов. Пусть автоморфизму $\varphi \in \Psi$ соответствует система обратимых элементов $c_{ij} \in T$. В силу равенства (5) имеем

$$c_{ij}c_{jkab} = c_{ikab} \quad \forall i, j, k, \quad \forall a \in M_{ij}, \quad \forall b \in M_{jk}.$$

Так как T -модуль $M_{ij}M_{jk}$ точен, то $c_{ij}c_{jk} = c_{ik}$. Согласно лемме 10.3, φ — внутренний автоморфизм. $\square$

Приведем один простой пример. Пусть K — такое кольцо формальных треугольных матриц, что $R_1 = \dots = R_n = \mathbb{Z}$ и M_{ij} — ненулевая абелева группа для всех i, j . Тогда

$$\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Psi.$$

Если все M_{ij} — группы без кручения и $\text{Aut } M_{ij} = \mathbb{Z}(2)$, то все автоморфизмы кольца K являются внутренними.

11. Кольца формальных матриц порядка 2. Остановимся на кольцах формальных матриц второго порядка. Пусть $K = \begin{pmatrix} R & V \\ W & S \end{pmatrix}$ — кольцо формальных матриц с нулевыми идеалами следа, т.е. $VW = 0 = WV$. Считаем дополнительно, что фактор-кольца $R/P(R)$ и $S/P(S)$ неразложимы. Если K — кольцо треугольных матриц, т.е. $W = 0$ и $V \neq 0$, то достаточно считать, что R и S сильно неразложимы. В таком случае все автоморфизмы алгебры K являются треугольными согласно леммам 9.7 и 9.8, и для K верны следствие 9.9 и теоремы 5.1, 9.10.

Обратим внимание на некоторые детали. Во-первых, для кольца $K = \begin{pmatrix} R & V \\ W & S \end{pmatrix}$ имеем $L = R \oplus S$ и $M = V \oplus W$. Подгруппа Ψ состоит из автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, где β — автоморфизм L -бимодуля M . Это приводит к изоморфизму групп $\Psi \cong \text{Aut}_L M$. Также верно равенство

$$\Psi \cap \text{In}(\text{Aut } K) = \Psi_0.$$

Более внимательно рассмотрим автоморфизмы из подгруппы Λ . Могут представиться два случая:

- (i) для любого автоморфизма $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Lambda$ верны равенства $\alpha R = R$ и $\alpha S = S$;
- (ii) существует эндоморфизм $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Lambda$, для которого $\alpha R = S$ и $\alpha S = R$.

В обоих случаях β индуцирует определенные изоморфизмы бимодулей V и W (см. раздел 9).

В случае (1) верно равенство $\text{Aut } K = \text{Ker } g$, а в случае (2) имеем полупрямое разложение $\text{Aut } K = \text{Ker } g \rtimes \Sigma$, где Σ — циклическая группа порядка 2 (гомоморфизм g определен в разделе 9).

Мы ограничимся только следующим частным случаем следствия 9.9 и теоремы 5.1.

Следствие 11.1.

А. Пусть $K = \begin{pmatrix} R & V \\ W & S \end{pmatrix}$ — алгебра формальных матриц с нулевыми идеалами следа, причем $R/P(R)$ и $S/P(S)$ — неразложимые кольца, и все автоморфизмы алгебр R и S являются внутренними. Тогда имеет место одно из следующих двух утверждений:

- (1) верны соотношения

$$\text{Aut } K = \text{In}(\text{Aut } K) \cdot \Psi, \quad \text{Out } K \cong \Psi/\Psi_0$$

либо

- (2) верны соотношения

$$\text{Aut } K = (\text{In}(\text{Aut } K) \cdot \Psi) \rtimes \Sigma, \quad \text{Out } K \cong \Psi/\Psi_0 \rtimes \Sigma.$$

В. Если $K = \begin{pmatrix} R & V \\ 0 & S \end{pmatrix}$, кольца R и S сильно неразложимы и $V \neq 0$, то всегда верно утверждение (i) и утверждение А(1).

Напомним о подгруппе Δ , появившейся в разделе 3. В начале раздела 5 замечено, что для колец K с $M^2 = 0$ имеем $\Delta = \text{In}_1(\text{Aut } K)$. Следовательно, для таких колец имеем равенство

$$\text{Aut } K = \Delta \rtimes \Lambda.$$

Также заметим следующее. Пусть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \in \Delta$ и внутреннее дифференцирование δ определяется элементом $d \in M$. Соответствие

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1 + d$$

приводит к изоморфизму между Δ и мультипликативной группой $1 + M$. Последняя изоморфна аддитивной группе M . Поэтому Δ — коммутативная группа. Все сказанное также относится к кольцам K порядка 2.

Теперь на основе предыдущего раздела займемся вопросом о внутренних автоморфизмах.

Следствие 11.2. Пусть $K = \begin{pmatrix} R & V \\ 0 & S \end{pmatrix}$, где R и S — коммутативные неразложимые кольца, $\text{Aut } R = \langle 1 \rangle = \text{Aut } S$ и $V \neq 0$.

(1) Имеет место соотношение

$$\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Psi,$$

где $\text{In}_1(\text{Aut } K) \cong V$, $\Psi \cong \text{Aut}_L V$.

(2) Каждый автоморфизм алгебры K является внутренним в точности тогда, когда справедлив канонический изоморфизм $\text{Aut}_L V \cong \Psi_0$.

Доказательство. (1) Наличие указанного полупрямого разложения вытекает из следствия 11.1В и следствия 10.1. Изоморфизм $\text{In}_1(\text{Aut } K) \cong V$ по существу доказан в абзаце перед следствием.

Между группами Ψ и $\text{Aut}_L V$ имеется канонический изоморфизм для любой алгебры K при условии $M^2 = 0$. Это отмечено в разделе 10. В утверждении (2) доказываемого следствия подразумевается именно этот изоморфизм, т.е. фактически требуется выполнение равенства $\Psi = \Psi_0$.

Для доказательства (2) достаточно использовать следующие факты. Согласно следствию 10.1 выполнение равенства $\text{Aut } K = \text{In}(\text{Aut } K)$ эквивалентно выполнению равенства $\Psi = \text{In}_0(\text{Aut } K)$. Затем напомним, что верно равенство $\text{In}_0(\text{Aut } K) = \Psi_0$. Нужно также принять во внимание изоморфизм $\Psi_0 \cong \text{Aut}_L V$ в (1). $\square$

Из следствия 11.2(1) можно вывести, что группа $\text{Aut } K$ изоморфна аффинной группе T -модуля V . Автоморфизмы аффинных групп модулей изучаются в [20].

Следствие 11.3. Пусть $K = \begin{pmatrix} T & V \\ 0 & T \end{pmatrix}$ — такая алгебра, что T — коммутативное неразложимое кольцо, $ty = yt$ для всех $t \in T$, $y \in V$ и $V \neq 0$. Группа $\text{Aut } K$ состоит из внутренних автоморфизмов в точности тогда, когда справедливо равенство $\text{Aut}_T V = U(T)$.

Доказательство. Предположим, что $\text{Aut } K = \text{In}(\text{Aut } K)$. В этом случае имеется изоморфизм $\text{Aut}_T V \cong \Psi_0$ (следствие 11.2). Возьмем произвольный автоморфизм β T -модуля V . Тогда автоморфизм $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ принадлежит Ψ_0 . Поэтому существует такой обратимый элемент $\text{diag}(u, v)$ в K , что

$$\beta(y) = \varphi(y) = u^{-1}yv = u^{-1}vy$$

для всех $y \in V$. Делаем вывод, что β совпадает с умножением модуля V на элемент $u^{-1}v \in T$. Поэтому $\text{Aut}_T V = U(T)$.

Пусть теперь верно равенство $\text{Aut}_T V = U(T)$. В силу следствия 11.2(2) нужно убедиться в справедливости изоморфизма $\text{Aut}_T V \cong \Psi_0$.

Если $\beta \in \text{Aut}_T V$, то пусть c — тот элемент из $U(T)$, для которого $\beta(y) = cy$ для всех $y \in V$. Тогда автоморфизм $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ совпадает с сопряжением матрицей $\text{diag}(1, c)$, т.е. $\varphi \in \Psi_0$. Это означает, что существует изоморфизм $\text{Aut}_T V \cong \Psi_0$. $\square$

Приведем пример, иллюстрирующий следствия 11.2 и 11.3. Пусть F — поле, V — векторное пространство над F и $K = \begin{pmatrix} F & V \\ 0 & F \end{pmatrix}$. Тогда

- (1) $\text{Aut } K = \text{In}_1(\text{Aut } K) \rtimes \Psi = \Delta \rtimes \Psi$, где $\Delta \cong V$, $\Psi \cong \text{Aut}_T V$;
- (2) все автоморфизмы F -алгебры K являются внутренними в точности тогда, когда V — одномерное пространство.

Следствия 11.2 и 11.3 устраняют некоторую некорректность в формулировках леммы 10.3 и следствия 10.4, в которых говорится о попарно различных индексах i, j, k , чего при $n = 2$ не может быть.

12. Кольца формальных матриц над данным кольцом. Вернемся в раздел 7, где были определены кольца формальных матриц. Пусть R — некоторое кольцо и $n \geq 2$. Если K — такое кольцо формальных матриц порядка n , что $R_1 = \dots = R_n = R$ и $M_{ij} = R$ для всех несовпадающих i и j , то говорят, что K — *кольцо формальных матриц над кольцом R* . Такие кольца проще и удобнее определить непосредственно.

Пусть $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ — некоторое множество центральных элементов кольца R , удовлетворяющих тождествам

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ikl} = s_{ijl} \cdot s_{jkl} \quad (6)$$

для всех индексов $i, j, k, \ell = 1, \dots, n$. Для произвольных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ порядка n положим

$$A \circ B = C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ikj} a_{ik} b_{kj}.$$

Далее пишем AB вместо $A \circ B$. Все матрицы порядка n над кольцом R относительно умножения $\circ$ и обычного сложения образуют ассоциативное кольцо с единицей. Будем обозначать его $M(n, R, \{s_{ijk}\})$ или $M(n, R, \Sigma)$, где $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$, или буквой K (см. [21, раздел 4.1]). Кольцо K называется *кольцом формальных матриц над кольцом R* . Тождества (6) называются *основными тождествами*, множество Σ — *системой множителей*, а его элементы — *множителями* кольца K . Если все s_{ijk} равны 1, то получаем обычное кольцо матриц $M(n, R)$. Приведенное выше определение кольца K эквивалентно определению, приведенному в начале раздела.

Из основных тождеств (6) можно вывести ряд других тождеств. Прежде всего, это равенства

$$s_{iji} = s_{jij} = s_{ijl} \cdot s_{jil} = s_{lij} \cdot s_{lji}. \quad (7)$$

Из тождеств (7) выводятся следующие тождества, получаемые друг из друга перестановкой индексов:

$$\begin{aligned} s_{iji} &= s_{jij} = s_{ijk} \cdot s_{jik} = s_{kij} \cdot s_{kji}, \\ s_{jkj} &= s_{kjk} = s_{jki} \cdot s_{kji} = s_{ijk} \cdot s_{ikj}, \\ s_{iki} &= s_{kik} = s_{ikj} \cdot s_{kij} = s_{jik} \cdot s_{jki}. \end{aligned} \quad (8)$$

Можно задать действие симметрической группы степени n на системах множителей и, следовательно, на кольцах формальных матриц. Соответствующие орбиты состоят из изоморфных колец. Пусть τ — подстановка степени n . Действие τ на матрицах известно. Именно, для матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n полагаем $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$. Имеется в виду, что матрица τA содержит элемент $a_{\tau(i)\tau(j)}$ в позиции (i, j) .

Теперь, если $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ — некоторая система множителей, то положим $t_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$. Тогда $\{t_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ — тоже система множителей, поскольку она удовлетворяет равенствам (6). Обозначим ее через $\tau\Sigma$. Следовательно, существует кольцо формальных матриц $M(n, R, \tau\Sigma)$. Кольца $M(n, R, \Sigma)$ и $M(n, R, \tau\Sigma)$ изоморфны при соответствии $A \rightarrow \tau A$.

Мы изложили предварительные сведения о кольцах формальных матриц над данным кольцом; теория таких колец представлена в [21, ч. 4].

Теперь до конца статьи буква K обозначает некоторое кольцо формальных матриц $M(n, R, \Sigma)$ с системой множителей $\Sigma = \{s_{ijk}\}$. Также считаем, что R — коммутативное кольцо, а все кольца считаем R -алгебрами.

Рассматривая тождества 8, нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 12.1. Пусть индексы i, j, k попарно различны. Тогда для элементов s_{iji} , s_{jkj} и s_{kik} имеет место только одна из следующих возможностей:

- (1) все три элемента — делители нуля;

- (2) какие-либо два из этих трех элементов — делители нуля, а третий элемент не является делителем нуля;
 (3) все три элемента — делители нуля.

Введем на множестве чисел $\{1, \dots, n\}$ бинарное отношение $\sim$, полагая $i \sim j \Leftrightarrow s_{iji}$ не является делителем нуля.

Следующее утверждение вытекает из леммы 12.1.

Лемма 12.2. *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.*

Симметрическая матрица $S = (s_{iji})$ называется *матрицей множителей* кольца K .

Составим подстановку τ следующим образом. В верхней строке поставим числа от 1 до n в естественном порядке. Нижняя строка состоит из классов эквивалентности относительно отношения $\sim$, расположенных в произвольном порядке. Внутри классов числа также располагаются в произвольном порядке. Тогда в матрице τS на главной диагонали стоят блоки, состоящие из неделителей нуля. Блоки находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности относительно отношения $\sim$. Порядок данного блока равен числу элементов соответствующего класса эквивалентности. Все позиции в матрице τS вне рассматриваемых блоков заняты делителями нуля.

Как замечено выше, кольца K и τK изоморфны при соответствии $A \rightarrow \tau A$, $A \in K$. Для упрощения записей условимся, что матрица множителей S кольца K уже имеет указанный выше блочный вид.

Сузим рассматриваемый класс колец K . Считаем в дальнейшем, что любой множитель s_{iji} либо не является делителем нуля, либо равен нулю. В таком случае в матрице S вне блоков, расположенных на главной диагонали, стоят нули. Пусть число блоков на главной диагонали матрицы S равно m .

На главной диагонали всякой матрицы A из K выделим блоки $A_1, \dots, A_m$ того же порядка и в той же последовательности, что и на главной диагонали матрицы S . Тогда блоки A_ℓ для фиксированного ℓ всех матриц из K образуют кольцо формальных матриц R_ℓ с множителями, не являющимися делителями нуля. Блоки $A_1, \dots, A_m$ очевидным образом задают блочное разбиение матрицы A .

Обозначим через L прямую сумму колец $R_1 \oplus \dots \oplus R_m$, через M — множество всех матриц $A \in K$, для которых соответствующие блоки $A_1, \dots, A_m$ состоят из нулей. Ясно, что M — L -бимодуль.

Посмотрим, как кольцо L действует на M . Разложение $L = R_1 \oplus \dots \oplus R_m$ индуцирует то же блочное разложение каждой матрицы, о котором говорилось выше. Именно, запишем $1 = e_1 + \dots + e_m$, где e_i — единичный элемент кольца R_i . Теперь положим $M_{ij} = e_i M e_j$, M_{ij} — подбимодуль в M . Действие кольца L на подбимодуле M_{ij} сводится к действию колец R_i и R_j слева и справа соответственно. Справедливо бимодульное прямое разложение

$$M = \bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m M_{ij}.$$

Кольцо K является кольцом формальных (блочных) матриц, построенным из колец $R_1, \dots, R_m$ и бимодулей M_{ij} в соответствии с изложенной в разделе 7 процедурой (см. [21, раздел 2.3]). В основном будем рассматривать кольцо K как это кольцо блочных матриц. Иногда, если это нужно, мы не будем учитывать наличие блочных разложений у матриц из K .

Как кольцо блочных матриц, кольцо K имеет нулевые идеалы следа. Поэтому M — нильпотентный идеал. Равенство $K = L \oplus M$ означает, что K является расщепляющимся расширением идеала M с помощью кольца L (см. разделы 7 и 8). Таким образом, R -алгебра K является одним из объектов, изученных в разделах 8–11. Правда, неясно, всегда ли автоморфизмы этой алгебры будут треугольными. Поэтому примем следующие предположения об алгебре K .

Отметим, что для коммутативного кольца R неразложимость фактор-кольца $R/P(R)$ равносильна неразложимости кольца R (о неразложимости см. лемму 9.3). Считаем далее, что R — коммутативное неразложимое кольцо. Тогда $R_1/P(R_1), \dots, R_m/P(R_m)$ — неразложимые кольца. Следовательно, алгебра K удовлетворяет условиям (II) и (I) (см. разделы 9 и 8). Поэтому к алгебре K применимы все результаты разделов 8, 9. Запишем только следующее следствие.

Следствие 12.3. *Для группы $\text{Aut } K$ справедливо следствие 9.9 и, следовательно, для $\text{Aut } K$ верны теоремы 5.1 и 9.10.*

13. Группа $\text{Aut } K$ при условии $M^2 = 0$. Сохраняются все обозначения и соглашения, принятые в предыдущем разделе. Таким образом, K — кольцо формальных матриц над коммутативным неразложимым кольцом R . Рассматриваем K как кольцо формальных блочных матриц, о чем договорились в разделе 12. Дополнительно считаем, что каждый множитель s_{ijk} равен 1 или 0, т.е. матрица множителей S кольца K является (01)-матрицей. Можно записать $K = L \oplus M$, где $L = R_1 \oplus \dots \oplus R_m$, а каждое R_i — обычное кольцо матриц $M(k_i, R)$ для некоторого $k_i \geq 1$.

Цель раздела — показать, что для алгебры K с условием $M^2 = 0$ можно уточнить некоторые общие факты и получить дополнительную информацию о группе $\text{Aut } K$.

Из равенств (8) раздела 12 вытекает следующая лемма.

Лемма 13.1. *Для данной алгебры K равенство $M^2 = 0$ имеет место в точности тогда, когда выполняется следующее условие: для любых попарно различных индексов i, j, k из равенств $s_{iji} = s_{jkj} = s_{kik} = 0$ следует равенство $s_{ijk} = 0$.*

До конца статьи дополнительно считаем, что нильпотентный идеал M кольца K имеет индекс нильпотентности 2, т.е. $M^2 = 0$.

Итак, пусть $K = L \oplus M$, причем выполняются все принятые в этом разделе соглашения. Покажем, что подгруппа $\text{Ker } g$ является полупрямым множителем в $\text{Aut } K$ (подобное уже было в разделе 11). Сначала вернемся в раздел 9. Там установлено равенство $\text{Aut } L = \Gamma \ltimes \Sigma$, где Γ — подгруппа автоморфизмов, оставляющих кольца $R_1, \dots, R_m$ на месте, Σ — некоторая подгруппа. Мы условились отождествлять Σ с соответствующей группой подстановок степени m , считая, что $\alpha_\sigma = \sigma$. Еще уточним, что подстановки из Σ можно естественным образом считать подстановками степени n . Был также определен гомоморфизм $g : \text{Aut } K \rightarrow \Sigma$. Убедимся, что $\text{Im } g$ совпадает с подгруппой Σ (напомним, что $\Sigma = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_t$).

Как в первом абзаце после доказательства леммы 9.6, пусть $R_1, \dots, R_\ell$ — кольца из некоторого класса эквивалентности. Для каждого $s = 1, \dots, \ell$ отождествим кольца R_1 и R_s , и возьмем тождественный автоморфизм в качестве изоморфизма ε_{s1} (так можно было поступить сразу в разделе 9). Тогда все ε_{ij} тоже будут тождественными автоморфизмами.

Для произвольного автоморфизма $\alpha_\tau \in \Sigma$ установим, что $s_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$ для всех $i, j, k = 1, \dots, n$. Если пара (i, j) или (j, k) занимает позицию в одном из блоков на главной диагонали матрицы множителей S кольца K , то с учетом тождеств (8) из раздела 12 находим, что $s_{ijk} = 1$. Из тех же соображений получаем $s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)} = 1$. В противном случае из тождеств (8) и условия в лемме 13.1 вытекает, что $s_{ijk} = 0 = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$.

Теперь несложно проверить, что сопоставление $(a_{ij}) \rightarrow (a_{\tau(i)\tau(j)})$ является автоморфизмом алгебры K ; см. текст перед леммой 12.1. Обозначим этот автоморфизм через ξ_τ . Тогда

$$\xi_\tau = \begin{pmatrix} \alpha_\tau & 0 \\ 0 & \gamma_\tau \end{pmatrix},$$

где изоморфизм γ_τ переставляет в M те же строки и столбцы, что и α_τ в L . Поэтому $g(\xi) = \alpha_\tau$, т.е. g — сюръекция, что и утверждалось. Автоморфизмы вида ξ_τ для всех $\tau \in \Sigma$ образуют подгруппу в $\text{Aut } K$, которая изоморфна Σ при соответствии $\xi_\tau \rightarrow \alpha_\tau$. Мы отождествляем ξ_τ с α_τ ; как и раньше, α_τ отождествляем с τ .

Пусть дан автоморфизм $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ алгебры K . Запишем $\alpha = \mu\alpha_\tau$, где $\mu \in \Gamma$, $\alpha_\tau \in \Sigma$ (как после леммы 9.6). Положим

$$\psi = \varphi\xi_\tau^{-1} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \delta\alpha_\tau^{-1} & \beta\gamma_\tau^{-1} \end{pmatrix},$$

где ξ_τ — введенный выше автоморфизм. Теперь получаем $\varphi = \psi\xi_\tau$, где $\psi \in \text{Ker } g$, $\xi_\tau \in \Sigma$. Так как $\text{Ker } g \cap \Sigma = \langle 1 \rangle$, то имеем полупрямое разложение $\text{Aut } K = \text{Ker } g \rtimes \Sigma$. В частности, получаем равенство $\text{Im } g = \Sigma$, как и утверждалось.

В разделе 3 была определена подгруппа Δ . Для нашей алгебры K имеем соотношения

$$\Delta = \text{In}_1(\text{Aut } K), \quad \Delta \cong 1 + M$$

(см. начало раздела и текст после следствия 11.1). Следовательно, согласно теореме 5.1 справедливо равенство $\text{Aut } K = \Delta \rtimes \Lambda$. Можно также записать разложение

$$\text{Ker } g = \Delta \rtimes \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha R_i = R_i, \ i = 1, \dots, m \right\}.$$

Для задачи вычисления группы $\text{Aut } K$ важное значение имеет подгруппа Ψ , появившаяся в разделе 3. Пусть $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi$. Соответствие $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \rightarrow \beta$ задает изоморфизм групп $\Psi \cong \text{Aut}_L M$, где $\text{Aut}_L M$ — группа автоморфизмов L -бимодуля M . Это уже отмечалось перед следствием 10.2. Далее, если аналогично положить $\beta_{ij} = \beta|_{M_{ij}}$, то получим автоморфизм β_{ij} R_i - R_j -бимодуля M_{ij} . Все вместе приводит к изоморфизму

$$\text{Aut}_L M \cong \prod_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^m \text{Aut } M_{ij},$$

где $\text{Aut } M_{ij}$ — группа автоморфизмов R_i - R_j -бимодуля M_{ij} .

Предложение 13.2.

1. Для любых различных индексов i и j имеем равенство $\text{Aut } M_{ij} = U(R)$, т.е. автоморфизмы R_i - R_j -бимодуля M_{ij} совпадают с умножениями на обратимые элементы кольца R . Поэтому имеем изоморфизм

$$\Psi \cong \prod_{m^2-m} U(R).$$

2. Существуют изоморфизмы

$$\Psi_0 \cong \prod_{m-1} U(R), \quad \Psi/\Psi_0 \cong \prod_{(m-1)^2} U(R).$$

Доказательство. 1. Принимая во внимание текст перед предложением, достаточно доказать равенство $\text{Aut } M_{ij} = U(R)$. Пусть $\beta \in \text{Aut } M_{ij}$. Положим $P = R_i$, $Q = R_j$ и $V = M_{ij}$. Пусть k и ℓ — порядки матриц из колец P и Q соответственно. Тогда бимодуль V состоит из всех матриц из R размера $k \times \ell$. Существуют канонические изоморфизмы колец

$$\text{End}_P V \cong Q, \quad \text{End}_Q V \cong P.$$

Это означает, что найдутся матрицы $A \in P$ и $B \in Q$, для которых $\beta Y = AY = YB$ при $Y \in V$. Несложно убедиться, что A и B — скалярные матрицы с одинаковым элементом, скажем s , на главной диагонали. Это означает, что β действует как умножение на обратимый элемент s из R .

Таким образом, конкретный автоморфизм $\varphi \in \Psi$ соответствует некоторой системе обратимых элементов c_{ij} , $i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$, кольца R . Похожая ситуация уже возникала в разделе 10 перед леммой 10.3.

2. Подгруппа Ψ_0 определена в разделе 4. Кроме того, после теоремы 5.1 отмечено, что если $M^2 = 0$, то $\Psi \cap \text{In}(\text{Aut } K) = \Psi_0$.

Пусть автоморфизм $\varphi \in \Psi$ соответствует системе элементов $c_{ij} \in U(R)$, где $i, j = 1, \dots, m, i \neq j$. Тогда φ является внутренним автоморфизмом или, эквивалентно, φ лежит в Ψ_0 в точности тогда, когда справедливо равенство $c_{ij} \cdot c_{jk} = c_{ik}$ для всех попарно различных индексов i, j, k . Подобный факт был установлен в доказательстве леммы 10.3. Здесь можно повторить эти рассуждения.

Теперь перейдем к изоморфизмам, сформулированным в **2**. Если $\varphi \in \Psi_0$, то из равенств

$$c_{jk} = c_{1j}^{-1} \cdot c_{1k},$$

в которых $j > 1$ и $c_{11} = 1$, вытекает, что элементы $c_{12}, \dots, c_{1m}$ полностью определяют оставшиеся элементы c_{ij} . Наоборот, теперь пусть даны произвольные элементы $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n} \in U(R)$, причем $c_{11} = 1$. Положим

$$c_{jk} = c_{1j}^{-1} \cdot c_{1k}, \quad j > 1, \quad j \neq k.$$

Элементы c_{ij} удовлетворяют равенству $c_{ij} \cdot c_{jk} = c_{ik}$ для всех попарно различных индексов i, j, k . Поэтому они определяют автоморфизм, принадлежащий Ψ_0 . Не углубляясь больше в детали, скажем, что из изложенного можно вывести существование изоморфизмов, указанных в **2**. $\square$

Перед тем как сформулировать основную теорему раздела, заметим, что некоторые сведения о кольцах K со свойством $M^2 = 0$ содержатся в разделах 3–5.

Введем еще одно обозначение

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha R_i = R_i \text{ для всех } i = 1, \dots, m \right\}.$$

Опираясь на теорему 5.1 и изложенный материал, сформулируем следующий результат.

Теорема 13.3. Пусть R -алгебра K удовлетворяет всем требованиям, принятым в начале раздела.

1. Справедливы равенства

$$\text{Aut } K = \Delta \rtimes \Lambda, \quad \text{Ker } f = \Delta \rtimes \Psi, \quad \Phi = \text{In}(\text{Aut } K) \cdot \Psi.$$

2. Также верны равенства

$$\text{Aut } K = \text{Ker } g \rtimes \Sigma = \Delta \rtimes C \rtimes \Sigma.$$

3. Если все автоморфизмы каждой R -алгебры $R_1, \dots, R_m$ являются внутренними, то имеют место соотношения

$$\text{Aut } K = ((\Delta \rtimes \text{In}_0(\text{Aut } K)) \cdot \Psi) \rtimes \Sigma, \quad \text{Out } K \cong \Psi / \Psi_0 \rtimes \Sigma.$$

Доказательство. Ограничимся только несколькими словами о **3**. При выполнении условий **3** имеем равенство $\text{Ker } g = \Psi$. Поэтому можно записать равенства

$$\text{Aut } K = \text{Ker } g \rtimes \Sigma = \Phi \rtimes \Sigma = ((\Delta \rtimes \text{In}_0(\text{Aut } K)) \cdot \Psi) \rtimes \Sigma. \quad \square$$

Известно строение подгрупп Δ , $\text{In}_0(\text{Aut } K)$, Ψ и Σ , входящих в теорему. Поэтому известно строение всей группы $\text{Aut } K$ из **3**. Условие на автоморфизмы алгебр $R_1, \dots, R_m$ выполняется, например, если коммутативное кольцо R является областью с однозначной факторизацией или локальным кольцом.

14. Группа Ω . Продолжим изучение группы $\text{Aut } K$ с условием $M^2 = 0$, начатое в предыдущем разделе. Раздел 14 посвящен группе Ω . Она определена в разделе 3, в котором подчеркнута важность вычисления этой подгруппы. Группа Ω — это образ гомоморфизма

$$f : \text{Aut } K \rightarrow \text{Aut } L, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \rightarrow \alpha.$$

Так как $\text{Aut } L = \Gamma \rtimes \Sigma$ (см. раздел 9) и $\text{Aut } K = \text{Ker } g \rtimes \Sigma$ (см. теорему 13.3), то имеется полупрямое разложение $\Omega = \Omega_1 \rtimes \Sigma$, где Ω_1 — образ сужения гомоморфизма f на $\text{Ker } g$. (Нужно еще учесть

соглашение о группе Σ , принятое в разделе 13.) Видим, что задача поиска группы Ω сводится к такой же задаче для Ω_1 .

Следствие 14.1. *Существуют изоморфизмы*

$$\text{Aut } K / \text{Ker } f \cong \Omega, \quad \text{Aut } K / \Phi \cong \Omega_1 / \text{In}(\text{Aut } L) \rtimes \Sigma,$$

где $\Omega_1 / \text{In}(\text{Aut } L)$ — абелева группа, порядки элементов которой ограничены в совокупности.

Доказательство. Второй изоморфизм выводится из следствия 4.2 и наличия полупрямого разложения $\text{Aut } K = \text{Ker } g \rtimes \Sigma$. Утверждение о порядке элементов следует из теоремы 1.2. $\square$

Строение групп $\text{Ker } f$ и Ψ известно; см. теорему 13.3. Поэтому если удастся вычислить группу Ω_1 , то строение всей группы $\text{Aut } K$ также будет понятно в определенном смысле.

Рассмотрим следующий вопрос. Какие автоморфизмы из Γ принадлежат Ω_1 ? Предложим одно необходимое условие такой принадлежности.

Сначала обратим внимание на следующий факт. Пусть $\alpha \in \Gamma$. Тогда α лежит в Ω_1 в точности тогда, когда найдется изоморфизм L -бимодулей $\beta : M \rightarrow {}_\alpha M_\alpha$. Это равносильно тому, что матрица $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ определяет автоморфизм алгебры K (необходимо учесть равенства (2) раздела 3).

Пусть $\alpha \in \Omega_1$ и $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ — соответствующий автоморфизм алгебры K , т.е. $f(\varphi) = \alpha$. Для любых $i, j = 1, \dots, m$ имеем равенства

$$\beta(M_{ij}) = \alpha(e_i)M\alpha(e_j) = e_i M e_j = M_{ij}.$$

Подобные равенства есть перед теоремой 9.10. Введем обозначение $\beta_{ij} = \beta|_{M_{ij}}$. Запишем еще

$$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \quad \text{где} \quad \alpha_i = \alpha|_{R_i} \in \text{Aut } R_i.$$

Тогда

$$\beta = \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^m \beta_{ij}, \quad \text{где} \quad \beta_{ij} : M_{ij} = \alpha_i(M_{ij})_{\alpha_j}$$

— изоморфизм R_i - R_j -бимодулей; бимодули вида ${}_\alpha A_\gamma$ определены в разделе 2. Вопрос о том, какие элементы из Γ входят в Ω_1 может быть переформулирован следующим образом. Для каких автоморфизмов $\alpha_i \in \text{Aut } R_i$ и $\alpha_j \in \text{Aut } R_j$ существуют изоморфизмы между R_i - R_j -бимодулями, и как эти изоморфизмы устроены?

Примем на время более удобные обозначения (как в доказательстве предложения 13.2). Зафиксируем индексы $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Положим $P = R_i$, $Q = R_j$ и $V = M_{ij}$. Далее, пусть α — автоморфизм R -алгебры P , γ — автоморфизм R -алгебры Q . Предположим, что существует изоморфизм P - Q -бимодулей $\beta : V \rightarrow {}_\alpha V_\gamma$. Пусть k и ℓ — порядки матриц из колец P и Q соответственно. Тогда матрицы из V имеют размер $k \times \ell$. Пусть c — наименьшее общее кратное чисел k и ℓ , $\ell' = c/k$ и $k' = c/\ell$. Будем писать ℓ вместо ℓ' и k вместо k' .

Возьмем кольцо матриц $H = M(c, R)$. Его можно представить в виде кольца блочных матриц двумя способами: как кольцо блочных матриц над P порядка ℓ и как кольцо блочных матриц над Q порядка k . Его также можно представить как P - Q -бимодуль блочных матриц над V размера $\ell \times k$.

Автоморфизмы α и γ индуцируют автоморфизмы R -алгебры H ; они называются *кольцевыми* автоморфизмами. Оставим за ними обозначения α и γ . Изоморфизм β также индуцирует аналогичный изоморфизм H -бимодулей

$$\bar{\beta} : H \rightarrow H, \quad \bar{\beta}(A) = (\beta(A_{ij}))$$

для любой матрицы $A = (A_{ij})$, где $A_{ij} \in V$. Следовательно, $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм R -алгебры H . Это вытекает из раздела 2.

Пусть снова, как выше,

$$\alpha \in \Omega_1, \quad \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \quad \alpha_i = \alpha|_{R_i} \in \text{Aut } R_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Также напомним, что $L = R_1 \oplus \dots \oplus R_m$. Обозначим через $\ell_1, \dots, \ell_m$ порядки матриц из $R_1, \dots, R_m$ соответственно. Обозначим через s наименьшее общее кратное чисел $\ell_1, \dots, \ell_m$. Кроме того, положим $H = M(s, R)$. Аналогично только что разобранному случаю двух колец, считаем $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ автоморфизмами алгебры H . Теперь можно сформулировать необходимое условие существования изоморфизма L -бимодулей $M \rightarrow {}_\alpha M_\alpha$.

Следствие 14.2. Пусть существует изоморфизм между L -бимодулями M и ${}_\alpha M_\alpha$. Тогда для любых $i, j \in \{1, \dots, m\}$ автоморфизм $\alpha_i^{-1} \alpha_j$ R -алгебры H является внутренним.

Не ясно, будет достаточным условие из следствия 14.2. Иногда это так.

Строение группы Ω_1 можно найти в случае, когда кольца матриц $R_1, \dots, R_m$ имеют одинаковый порядок. Тогда мы отождествим эти кольца и обозначим их буквой P .

Следствие 14.3. Пусть все кольца матриц $R_1, \dots, R_m$ имеют одинаковый порядок.

1. Группа Ω_1 порождается внутренними автоморфизмами R -алгебры L и автоморфизмами вида $(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$. Иными словами, верно равенство

$$\Omega_1 = \text{In}(\text{Aut } L) \cdot D,$$

где

$$D = \{(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \in \text{Aut } L \mid \alpha \in \text{Aut } P\}.$$

2. Существует изоморфизм $\Omega_1 / \text{In}(\text{Aut } L) \cong \text{Out } P$.

Доказательство. 1. Справедливость включения $\text{In}(\text{Aut } L) \subseteq \Omega_1$ уже использовалась в доказательстве предложения 4.1.

Возьмем автоморфизм $\bar{\alpha} = (\alpha, \dots, \alpha)$, где α — некоторый автоморфизм R -алгебры P . Всегда существует изоморфизм P -бимодулей $V \rightarrow {}_{\bar{\alpha}} V_{\bar{\alpha}}$, где V — некоторый подмодуль L -бимодуля M .

Поэтому имеется такой автоморфизм $\varphi \in \text{Aut } K$, что $\varphi = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ для некоторого β , т.е. $\bar{\alpha} \in \Omega_1$.

Теперь предположим, что $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \Omega_1$, где все α_i лежат в $\text{Aut } P$. На основании следствия 14.2 можно утверждать, что $\alpha_i \alpha_j^{-1}$ — внутренний автоморфизм алгебры P для любых i и j . Обозначим автоморфизм $\alpha_i \alpha_1^{-1}$ через γ_i . Тогда $\alpha_i = \gamma_i \alpha_1$, откуда вытекает равенство $\alpha = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)(\alpha_1, \dots, \alpha_1)$.

Изоморфизм в 2 можно вывести из равенства $\Omega_1 = \text{In}(\text{Aut } L) \cdot D$. □

15. Примеры. Для R -алгебры K из теоремы 13.3(3) справедливо равенство

$$\text{Aut } K = ((\Delta \rtimes \text{In}_0(\text{Aut } K)) \cdot \Psi) \rtimes \Sigma,$$

где $\Delta \cong 1 + M$ (см. текст после следствия 11.1), $\Psi \cong \prod_{m^2-m} U(R)$ (см. предложение 13.2) и Σ —

некоторая группа подстановок степени m (см. текст после леммы 9.6). Можно утверждать, что строение группы $\text{Aut } K$ полностью известно.

Чтобы получить пример алгебры K из теоремы 13.3(3), рассмотрим одну «экстремальную» ситуацию.

Пусть K — такое кольцо формальных матриц порядка n , что множители s_{ijk} равны нулю для всех i, j, k , $i \neq j$ и $j \neq k$. Тогда матрица множителей¹ S равна единичной матрице E , и все кольца R_i равны R . Поэтому $\text{In}_0(\text{Aut } K) = \Psi_0$, и из теоремы 13.3 получаем следующий результат.

¹См. раздел 12.

Следствие 15.1. Для рассматриваемого кольца K имеют место соотношения

$$\text{Aut } K = \Delta \rtimes \Psi \rtimes \Sigma, \quad \text{Out } K \cong \Psi/\Psi_0 \rtimes S_n,$$

где

$$\Delta \cong 1 + M, \quad \Psi \cong \prod_{n^2-n} U(R), \quad \Psi/\Psi_0 \cong \prod_{(n-1)^2} U(R), \quad \Sigma \cong S_n.$$

Приведем примеры рассматриваемых колец $K = M(n, R, \Sigma)$ для $n = 3, 4$. Сначала сформулируем следующий факт без доказательства.

Пусть $T = (t_{ij})$ — симметрическая (01)-матрица, в которой главная диагональ состоит из единиц и для любых элементов t_{ij}, t_{jk}, t_{ki} верно одно из утверждений **1–3** леммы 12.1. Тогда существует кольцо K с матрицей множителей $S = T$.

Таким образом, существуют кольца K с матрицами множителей S , равными

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(два последних кольца не изоморфны!). Ввиду следствия 14.3 известно строение группы Ω для третьего кольца.

Заметим, что разделы 13–15 основаны на работах [3, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абызов А. Н., Тапкин Д. Т. Кольца формальных матриц и их изоморфизмы // Сиб. мат. ж. — 2015. — 56. — С. 1199–1214.
2. Абызов А. Н., Тапкин Д. Т. О некоторых классах колец формальных матриц // Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 3. — С. 3–14.
3. Крылов П. А., Норбосамбуев Ц. Д. Автоморфизмы алгебр формальных матриц // Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 5. — С. 1116–1127.
4. Крылов П. А., Норбосамбуев Ц. Д. Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц // Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. Мех. — 2018. — 53, № 3. — С. 16–21.
5. Тапкин Д. Т. Кольца формальных матриц и обобщение алгебры инцидентности // Чебышевский сб. — 2015. — 16, № 3. — С. 442–449.
6. Тапкин Д. Т. Изоморфизмы колец инцидентности формальных матриц // Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 12. — С. 84–91.
7. Anh P. N., van Wyk L. Automorphism groups of generalized triangular matrix rings // Lin. Alg. Appl. — 2011. — 434. — P. 1018–1026.
8. Anh P. N., van Wyk L. Isomorphisms between strongly triangular matrix rings // Lin. Alg. Appl. — 2013. — 438. — P. 4374–4381.
9. Barker J. P. Automorphism groups of algebras of triangular matrices // Lin. Alg. Appl. — 1989. — 121. — P. 207–215.
10. Birkenmeier G. F., Heatherly H. E., Kim J. Y., Park J. K. Triangular matrix representations // J. Algebra. — 2000. — 230. — P. 558–595.
11. Boboc C., Dăscălescu S., van Wyk L. Isomorphisms between Morita context rings // Lin. Multilin. Algebra. — 2012. — 60, № 5. — P. 545–563.
12. Chekhlov A., Danchev P. n'' -Hopfian and n'' -co-Hopfian Abelian groups // Hacet. J. Math. Stat. — 2019. — 48, № 2. — P. 479–489.
13. Faith C. Algebra: Rings, Modules and Categories. — Berlin: Springer-Verlag, 1973.
14. Isaacs I. M. Automorphisms of matrix algebras over commutative rings // Lin. Alg. Appl. — 1980. — 31. — P. 215–231.
15. Jøndrup S. The group of automorphisms of certain subalgebras of matrix algebras // J. Algebra. — 1991. — 141. — P. 106–114.

16. *Jøndrup S.* Automorphisms and derivations of upper triangular matrix rings// *Lin. Alg. Appl.* — 1995. — 221. — P. 205–218.
17. *Kaigorodov E. V., Krylov P. A.* On some classes of Hopfian Abelian groups and modules// *J. Math. Sci.* — 2018. — 230, № 3. — P. 392–397.
18. *Kezlan T. P.* A note on algebra automorphisms of triangular matrices over commutative rings// 1990. — 135. — P. 181–184.
19. *Khazal R., Dăscălescu S., van Wyk L.* Isomorphisms of generalized triangular matrix rings and recovery of tiles// *Int. J. Math. Math. Sci.* — 2003. — 2003, № 9. — P. 533–538.
20. *Krylov P. A.* Affine module groups and their automorphisms// *Algebra Logic.* — 2001. — 40, № 1. — P. 34–46.
21. *Krylov P., Tuganbaev A.* Formal Matrices. — Springer-Verlag, 2017.
22. *Li Y.-B., Wei F.* Semi-centralizing maps of generalized matrix algebras// *Lin. Alg. Appl.* — 2012. — 436. — P. 1122–1153.
23. *Pierce R. S.* Associative Algebras. — Berlin: Springer-Verlag, 1982.
24. *Xiao Z., Wei F.* Commuting mappings of generalized matrix algebras// *Lin. Alg. Appl.* — 2010. — 433. — P. 2178–2197.
25. *Xiao Z., Wei F.* Commuting traces and Lie isomorphisms of generalized matrix algebras// *Operators and Matrices.* — 2014. — 8. — P. 821–847.

Крылов Петр Андреевич

Национальный исследовательский Томский государственный университет

E-mail: krylov@math.tsu.ru

Туганбаев Аскар Аканович

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: tuganbaev@gmail.com



ПРЯМО ПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ, ПРЯМО ИНЪЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

© 2019 г. А. Н. АБЫЗОВ, А. А. ТУГАНБАЕВ,
Д. Т. ТАПКИН, Ч. К. КУИНЬ

Аннотация. Работа содержит как новые, так и ранее известные результаты о модулях, близких к прямо проективным и прямо инъективным. Основные результаты приведены с доказательствами.

Ключевые слова: прямо инъективный модуль, прямо проективный модуль, просто прямо инъективный модуль, просто прямо проективный модуль, SSP-модуль, SIP-модуль, кольцо формальных матриц.

DIRECT PROJECTIVE MODULES, DIRECT INJECTIVE MODULES, AND THEIR GENERALIZATIONS

© 2019 A. N. ABYZOV, A. A. TUGANBAEV,
D. T. TAPKIN, QUYNH TRUONG CONG

ABSTRACT. This paper contains new and previously known results on modules that are close to direct projective and direct injective modules. The main results are presented with proofs.

Keywords and phrases: direct injective module, direct projective module, simple-direct-injective module, simple-direct-projective module, SSP-module, SIP-module, ring of formal matrices.

AMS Subject Classification: 16D10

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	126
2. D3- и C3-модули	126
3. A-C2- и A-D2-модули	130
4. Просто прямо проективные модули и просто прямо инъективные модули	135
Список литературы	138

Работа А. Н. Абызова и Д. Т. Тапкина выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Республики Татарстан (проект № 18-41-160024).

Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10013).

1. ВВЕДЕНИЕ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули — унитарными.

В работе [20] о непрерывных кольцах Утуми рассмотрел три условия для колец, которым удовлетворяют самоинъективные кольца. Эти условия были обобщены на модули в [12, 16, 19]. Модуль M называется *C1-модулем* (или *CS-модулем*), если каждый подмодуль модуля M является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом M . Модуль M называется *C2-модулем*, если каждый подмодуль модуля M , изоморфный некоторому прямому слагаемому модуля M , сам является прямым слагаемым модуля M . В [14] Никольсон назвал C2-модули прямо инъективными. Модуль M называется *C3-модулем*, если для любых прямых слагаемых M_1 и M_2 модуля M , для которых выполнено условие $M_1 \cap M_2 = 0$, сумма $M_1 + M_2$ является прямым слагаемым модуля M .

Модуль M называется *прямо проективным* (или *D2-модулем*), если каждый подмодуль модуля M , фактор-модуль по которому изоморфен некоторому прямому слагаемому модуля M , сам является прямым слагаемым модуля M . Модуль M называется *D3-модулем*, если для любых прямых слагаемых M_1 и M_2 модуля M , для которых выполнено условие $M_1 + M_2 = M$, пересечение $M_1 \cap M_2$ является прямым слагаемым модуля M . Прямо проективные модули были введены Никольсоном в [14]. Понятие D3-модуля было введено в [8].

Важными частными случаями понятий C3-модуля и D3-модуля являются соответственно понятия SSP-модуля и SIP-модуля. Модуль M называется *SSP-модулем*, если сумма двух прямых слагаемых модуля M является прямым слагаемым модуля M . Модуль M называется *SIP-модулем*, если пересечение двух прямых слагаемых модуля M является прямым слагаемым модуля M .

Тот факт, что N является подмодулем (соответственно, прямым слагаемым) модуля M будем обозначать через $N \leq M$ (соответственно, $N \leq^\oplus M$). Радикал Джекобсона правого R -модуля M обозначается через $J(M)$.

В работе используются стандартные понятия и факты теории колец и модулей (см., например, [3, 9, 22]).

2. D3- и C3-модули

Теорема 1. Для правого R -модуля M следующие условия эквивалентны:

- (1) M является C3-модулем;
- (2) если $A, B \leq^\oplus M$ и $A \cap B = 0$, то $M = A_1 \oplus B = A \oplus B_1$, где $A \leq A_1$, $B \leq B_1$;
- (3) если $A, B \leq^\oplus M$ и $A \cap B \leq^\oplus M$, то $A + B \leq^\oplus M$;
- (4) если $A, B \leq^\oplus M$, $A \cap B = 0$, то для любого гомоморфизма $f : A \oplus B \rightarrow M$ существует гомоморфизм $\varphi : M \rightarrow M$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A \oplus B & \xrightarrow{i} & M \\ f \downarrow & \nearrow \varphi & \\ M & & \end{array}$$

где $i : A \oplus B \rightarrow M$ — вложение;

- (5) если для идемпотентов $\pi_1, \pi_2 \in \text{End}(M)$ выполнено условие $\text{Ker}(\pi_1\pi_2) \leq^\oplus M$, то выполнено также и условие $\text{Im}(\pi_1\pi_2) \leq^\oplus M$.

Доказательство. Эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) проверяются непосредственно (см. [6, предложение 2.2]). Импликация (1) $\Rightarrow$ (4) очевидна.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть $M = A \oplus A' = B \oplus B'$, $A \cap B = 0$, $\pi_1 : A \oplus B \rightarrow A$, $\pi : A \oplus A' \rightarrow A$ — естественные проекции, а $i_A : A \rightarrow M$, $i_{A \oplus B} : A \oplus B \rightarrow M$ — вложения. По предположению существует такой гомоморфизм $\varphi : M \rightarrow M$, что $\varphi i_{A \oplus B} = i_A \pi_1$. Тогда $\pi \varphi i_A = 1_A$, и, следовательно, $\text{Im}(i_A) \oplus \text{Ker}(\pi \varphi) = M$. А так как $B \leq \text{Ker}(\pi \varphi)$, то $A \oplus B \leq^\oplus A \oplus \text{Ker}(\pi \varphi) = M$.

(1) $\Rightarrow$ (5). Пусть $M = \text{Ker}(\pi_1) \oplus \text{Im}(\pi_1) = \text{Ker}(\pi_2) \oplus \text{Im}(\pi_2)$. Согласно [1, lemma 2.2] должно выполняться равенство

$$\text{Ker}(\pi_1\pi_2) = \text{Ker}(\pi_1) \cap \text{Im}(\pi_2) + \text{Ker}(\pi_2) \leq^\oplus M.$$

Следовательно, $\text{Ker}(\pi_1) \cap \text{Im}(\pi_2) \leq^{\oplus} M$, и для некоторого подмодуля N получаем разложение в прямую сумму $\text{Ker}(\pi_1) \cap \text{Im}(\pi_2) \oplus N = \text{Ker}(\pi_1)$. По предположению $N \oplus \text{Im}(\pi_2) \leq^{\oplus} M$. Так как $\text{Ker}(\pi_1) \leq N \oplus \text{Im}(\pi_2)$, то

$$N \oplus \text{Im}(\pi_2) = \text{Ker}(\pi_1) \oplus (N \oplus \text{Im}(\pi_2)) \cap \text{Im}(\pi_1) = \text{Ker}(\pi_1) \oplus (\text{Ker}(\pi_1) + \text{Im}(\pi_2)) \cap \text{Im}(\pi_1).$$

Таким образом, $\text{Im}(\pi_1\pi_2) = (\text{Ker}(\pi_1) + \text{Im}(\pi_2)) \cap \text{Im}(\pi_1) \leq^{\oplus} M$.

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть $M = A \oplus A' = B \oplus B'$, $A \cap B = 0$. Рассмотрим проекции $\pi_1 : A \oplus A' \rightarrow A$, $\pi_2 : B \oplus B' \rightarrow B'$. Из [1, Lemma 2.2] следует, что $\text{Ker}(\pi_2\pi_1) = A' \leq^{\oplus} M$. Тогда прямым слагаемым в M является и $\text{Im}(\pi_2\pi_1) = (A + B) \cap B'$. В частности, $(A + B) \cap B' \leq^{\oplus} B'$. А тогда из равенства $A + B = B \oplus (A + B) \cap B'$ получаем, что $A + B \leq^{\oplus} M$. $\square$

Для D3-модулей имеет место утверждение, двойственное предыдущей теореме.

Теорема 2. Для правого R -модуля M следующие условия эквивалентны:

- (1) M является D3-модулем;
- (2) если $A, B \leq^{\oplus} M$ и $M = A + B$, то $M = A_1 \oplus B = A \oplus B_1$, где $A_1 \leq A$, $B_1 \leq B$;
- (3) если $A, B \leq^{\oplus} M$ и $A + B \leq^{\oplus} M$, то $A \cap B \leq^{\oplus} M$;
- (4) если $A, B \leq^{\oplus} M$, $A + B = M$, то для любого гомоморфизма $f : M \rightarrow M/(A \cap B)$ существует гомоморфизм $\psi : M \rightarrow M$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \psi \swarrow & \downarrow f & \\ M & \xrightarrow{e} & M/(A \cap B) \end{array}$$

где $e : M \rightarrow M/(A \cap B)$ — естественный эпиморфизм;

- (5) если для идемпотентов $\pi_1, \pi_2 \in \text{End}(M)$ выполнено условие $\text{Im}(\pi_1\pi_2) \leq^{\oplus} M$, то выполняется также условие $\text{Ker}(\pi_1\pi_2) \leq^{\oplus} M$.

Доказательство. Эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) проверяются непосредственно с помощью [21, предложение 3]. Импликация (1) $\Rightarrow$ (4) очевидна.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть $M = A \oplus A' = B \oplus B'$, $A + B = M$, $\pi_1 : A \oplus B \rightarrow A$ — проекция и $e : M \rightarrow M/(A \cap B)$ — естественный эпиморфизм. Зададим отображение $f : M \rightarrow M/(A \cap B)$ по правилу $f(a + b) = a + A \cap B$ для всех $a \in A$, $b \in B$. Несложно заметить, что это корректно определенный гомоморфизм. В силу предположения существует такой гомоморфизм $\psi : M \rightarrow M$, что $e\psi = f$. Так как $\text{Ker}(f) = B$, то

$$e\psi(B') = f(B') = f(B \oplus B') = f(M) = A/(A \cap B).$$

Таким образом, $\psi(B') + (A \cap B) = A$. Покажем, что $\psi(B') \cap (A \cap B) = 0$. Допустим, что $x \in \psi(B') \cap (A \cap B)$. Тогда для некоторого $b \in B'$ имеют место равенства $0 = ex = f(b')$. Но тогда $b' \in B \cap B'$, а значит $b' = 0$. Таким образом, получаем разложение $A = \psi(B') \oplus (A \cap B)$ и, следовательно, $(A \cap B) \leq^{\oplus} M$.

(1) $\Rightarrow$ (5) Пусть $M = \text{Ker}(\pi_1) \oplus \text{Im}(\pi_1) = \text{Ker}(\pi_2) \oplus \text{Im}(\pi_2)$. Согласно [1, Lemma 2.2] должно выполняться равенство

$$\text{Im}(\pi_1\pi_2) = (\text{Im}(\pi_2) + \text{Ker}(\pi_1)) \cap \text{Im}(\pi_1) \leq^{\oplus} M.$$

Тогда для некоторого подмодуля $N \leq M$ получаем разложение

$$\text{Im}(\pi_1) = N \oplus (\text{Im}(\pi_2) + \text{Ker}(\pi_1)) \cap \text{Im}(\pi_1).$$

Следовательно, выполняется равенство $N + \text{Ker}(\pi_1) + \text{Im}(\pi_2) = M$. В силу условия (D3) прямым слагаемым M также является и подмодуль $(N + \text{Ker}(\pi_1)) \cap \text{Im}(\pi_2) = \text{Ker}(\pi_1) \cap \text{Im}(\pi_2)$. Таким образом, в силу [1, Lemma 2.2] имеем

$$\text{Ker}(\pi_1\pi_2) = \text{Ker}(\pi_1) \cap \text{Im}(\pi_2) + \text{Ker}(\pi_2) \leq^{\oplus} M.$$

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть $M = A \oplus A' = B \oplus B'$, $A + B = M$. Рассмотрим проекции $\pi_1 : A \oplus A' \rightarrow A$, $\pi_2 : B \oplus B' \rightarrow B'$. Из [1, Lemma 2.2] следует, что $\text{Im}(\pi_2\pi_1) = B' \leq^{\oplus} M$. Тогда прямым слагаемым в M является и $\text{Ker}(\pi_2\pi_1) = A \cap B + A'$. Следовательно, $A \cap B \leq^{\oplus} M$. $\square$

Предложение 3. Следующие условия эквивалентны для модуля M :

- (1) M является SSP-модулем;
- (2) для любого разложения $M = A \oplus B$ и для любого гомоморфизма $f : A \rightarrow B$, $\text{Im}(f)$ является прямым слагаемым модуля M ;
- (3) для любого расщепляющего мономорфизма $f : A \rightarrow M$ такого, что A — прямое слагаемое модуля M , $A + f(A)$ является прямым слагаемым модуля M ;
- (4) для любого расщепляющего эпиморфизма $f : M \rightarrow M/A$ такого, что A — прямое слагаемое модуля M , $A + \text{Ker}(f)$ является прямым слагаемым модуля M .

Доказательство. Эквивалентность $(1) \Leftrightarrow (2)$ следует из [10, теорема 2.3]. Импликации $(1) \Rightarrow (3), (4)$ очевидны.

$(3) \Rightarrow (1)$. Предположим, что $M = A_1 \oplus A_2$ и $f : A_1 \rightarrow A_2$ — R -гомоморфизм. Пусть $T := \{a_1 + f(a_1) \mid a_1 \in A_1\}$ — подмодуль модуля M . Тогда $M = T \oplus A_2$. Рассмотрим такой гомоморфизм $\psi : A_1 \rightarrow M$, что $\psi(x) = x + f(x)$. Легко видеть, что ψ — расщепляющий мономорфизм. Из предположения следует, что $A_1 + \psi(A_1) = A_1 + T$ — прямое слагаемое модуля M . Так как $A_1 + T = A_1 \oplus \text{Im}(f)$, то $\text{Im}(f)$ — прямое слагаемое модуля A_2 . Тогда согласно $(2) \Rightarrow (1)$ заключаем, что M — SSP-модуль.

$(4) \Rightarrow (1)$ Предположим, что $M = A_1 \oplus A_2$ и $f : A_1 \rightarrow A_2$ — R -гомоморфизм. Пусть $T := \{a_1 + f(a_1) \mid a_1 \in A_1\}$ — подмодуль модуля M . Тогда $M = T \oplus A_2$. Рассмотрим такой гомоморфизм $\psi : M \rightarrow M/T$, что $\psi(a_1 + a_2) = a_2 + T$ для всех $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$. Очевидно, ψ — расщепляющий эпиморфизм, и $\text{Ker}(\psi) = A_1$. Из предположения следует, что $A_1 + T$ — прямое слагаемое модуля M . Так как $A_1 + T = A_1 \oplus \text{Im}(f)$, то $\text{Im}(f)$ — прямое слагаемое модуля A_2 . Тогда согласно $(2) \Rightarrow (1)$ заключаем, что M является SSP-модулем. $\square$

Следствие 4. Следующие условия эквивалентны для модуля M :

- (1) M является SSP-модулем;
- (2) для любых двух прямых слагаемых A_1 и A_2 модуля M , удовлетворяющих условию $A_1 \simeq A_2$, сумма $A_1 + A_2$ является прямым слагаемым модуля M .

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству предложения 3.

Предложение 5. Следующие условия эквивалентны для модуля M :

- (1) M является SIP-модулем;
- (2) для любого разложения $M = A \oplus B$ и для любого гомоморфизма $f : A \rightarrow B$, $\text{Ker}(f)$ является прямым слагаемым модуля M ;
- (3) для любого расщепляющего мономорфизма $f : A \rightarrow M$ такого, что A — прямое слагаемое модуля M , $A \cap f(A)$ является прямым слагаемым модуля M ;
- (4) для любого расщепляющего эпиморфизма $f : M \rightarrow M/A$ такого, что A — прямое слагаемое модуля M , $A \cap \text{Ker}(f)$ является прямым слагаемым модуля M .

Следствие 6. Следующие условия эквивалентны для модуля M :

- (1) M является SIP-модулем;
- (2) для любых таких двух прямых слагаемых A_1 и A_2 модуля M , что $A_1 \simeq A_2$, пересечение $A_1 \cap A_2$ является прямым слагаемым модуля M .

Пусть R — кольцо и Ω — некоторый класс правых R -модулей, который замкнут относительно изоморфизмов и прямых слагаемых. Гомоморфизм $g : M \rightarrow E$ правых R -модулей называется Ω -оболочкой правого R -модуля M , если $E \in \Omega$ и любая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & E \\ g' \downarrow & & \\ E' & & \end{array}$$

где $E' \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & E \\ g' \downarrow & \swarrow h & \\ E' & & \end{array}$$

и если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & E \\ g \downarrow & \swarrow h & \\ E & & \end{array}$$

коммутативна, то h — автоморфизм.

Гомоморфизм $g : E \rightarrow M$ правых R -модулей называется Ω -накрытием правого R -модуля M , если $E \in \Omega$ и любая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & M \\ & \uparrow g' & \\ & E' & \end{array}$$

где $E' \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & M \\ & \swarrow h & \uparrow g' \\ & & E' \end{array}$$

и если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & M \\ & \swarrow h & \uparrow g \\ & & E \end{array}$$

коммутативна, то h — автоморфизм.

Предложение 7. Следующие условия эквивалентны для кольца R :

- (1) R — классически полупростое кольцо;
- (2) каждый правый R -модуль имеет D3-накрытие;
- (3) каждый 2-порожденный правый R -модуль имеет D3-накрытие;
- (4) каждый правый R -модуль имеет D3-оболочку;
- (5) каждый 2-порожденный правый R -модуль имеет D3-оболочку.

Доказательство. Импликации $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ очевидны.

$(3) \Rightarrow (1)$. Пусть S — простой правый R -модуль. Пусть $\varphi : R_R \rightarrow S$ — эпиморфизм. Согласно (3), $M = R_R \oplus S$ имеет D3-накрытие. Рассмотрим гомоморфизм $\alpha : C \rightarrow M$, где C — D3-модуль, который является D3-накрытием модуля M . Пусть $\iota_1 : S \rightarrow M$ и $\iota_2 : R_R \rightarrow M$ — включения для всех $i = 1, 2$. Заметим, что S и R_R — D3-модули, и существуют такие гомоморфизмы $\beta_1 : S \rightarrow C, \beta_2 : R_R \rightarrow C$, что $\alpha\beta_i = \iota_i$. Ясно, что $\text{id}_M = \iota_1 \oplus \iota_2 = \alpha(\beta_1 \oplus \beta_2)$. Из этого следует, что M изоморфен прямому слагаемому в C ; следовательно, M — D3-модуль. Тогда $\text{Ker}(\varphi)$ — прямое слагаемое модуля R_R , согласно [21, предложение 4]. Таким образом, S — проективный модуль. Следовательно, R — полупростое кольцо.

Импликации $(1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$ очевидны.

$(5) \Rightarrow (1)$. Пусть S — простой правый R -модуль. Пусть $\varphi : R_R \rightarrow S$ — эпиморфизм. Согласно (5), $M = R_R \oplus S$ имеет D3-оболочку $\iota : M \rightarrow E$, где E — D3-модуль. Поскольку S и R — D3-модули, существуют такие гомоморфизмы $f_1 : E \rightarrow S, f_2 : E \rightarrow R$, что $f_i \iota = \pi_i$, где $\pi_1 : M \rightarrow S$ и $\pi_2 : M \rightarrow R$ — естественные проекции. Существует такой $\phi : E \rightarrow M$, что $\pi_i \phi = f_i$ для всех $i = 1, 2$. Тогда $\phi \iota = \text{id}_M$; следовательно, ι — расщепляющий мономорфизм. Таким образом, M изоморфен

прямому слагаемому в E . Значит, $S \oplus R$ — также D3-модуль. Мы заключаем, что $\text{Ker}(\varphi)$ — прямое слагаемое в R_R . Тогда S — проективный модуль. Таким образом, R — классически полупростое кольцо. $\square$

Следствие 8. *Следующие условия эквивалентны для кольца R :*

- (1) R — классически полупростое кольцо;
- (2) R_R является SIP-модулем и каждый R -модуль имеет SIP-накрытие;
- (3) R_R является SIP-модулем и каждый 2-порожденный правый R -модуль имеет SIP-накрытие;
- (4) R_R является SIP-модулем и каждый R -модуль имеет SIP-оболочку;
- (5) R_R является SIP-модулем и каждый 2-порожденный правый R -модуль имеет SIP-оболочку.

Кольцо R называется правым V -кольцом, если любой простой правый R -модуль инъективен.

Предложение 9. *Следующие условия эквивалентны для кольца R :*

- (1) R — правое V -кольцо;
- (2) каждый конечно копорожденный правый R -модуль имеет C3-оболочку;
- (3) каждый конечно копорожденный правый R -модуль имеет C3-накрытие.

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2), (3) очевидны.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть N — произвольный простой модуль. Предположим, что $\iota : M = N \oplus E(N) \rightarrow E$ — C3-оболочка, где E — C3-модуль. Поскольку N и $E(N)$ — C3-модули, то существуют такие $f_1 : E \rightarrow N$, $f_2 : E \rightarrow E(N)$, что $f_i \iota = \pi_i$, где $\pi_1 : M \rightarrow N$ и $\pi_2 : M \rightarrow E(N)$ — проекции. Существует такой гомоморфизм $\phi : E \rightarrow M$, что $\pi_i \phi = f_i$ для всех $i = 1, 2$. Тогда $\phi \iota = \text{id}_M$; следовательно, ι — расщепляющий мономорфизм. Таким образом, $N \oplus E(N)$ изоморфен прямому слагаемому в E . Значит, $N \oplus E(N)$ — также C3-модуль. Тогда несложно заметить, что N — прямое слагаемое в $E(N)$. Тогда модуль N инъективен. Таким образом, R — правое V -кольцо.

(3) $\Rightarrow$ (1). Доказательство аналогично импликации (3) $\Rightarrow$ (1) из доказательства предложения 7.

$\square$

Аналогичным образом получаем также следующий результат.

Предложение 10. *Следующие условия эквивалентны для кольца R :*

- (1) R — нетерово справа правое V -кольцо;
- (2) каждый правый R -модуль с существенным цоколем имеет C3-оболочку;
- (3) каждый правый R -модуль с существенным цоколем имеет C3-накрытие.

3. $\mathcal{A}$ -C2- и $\mathcal{A}$ -D2-модули

Пусть M — правый R -модуль и $\mathcal{A}$ — класс правых R -модулей, который замкнут относительно изоморфных образов. Следуя [13, 18], для модуля M введем следующие условия:

$\mathcal{A}$ -C2: для каждого $N \in \mathcal{A}$, если $X \leq^\oplus M$, $N \leq M$ и $N \cong X$, то $N \leq^\oplus M$;

$\mathcal{A}$ -C3: для каждого $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$, если $M_1, M_2 \leq^\oplus M$ и $M_1 \cap M_2 = 0$, то $M_1 + M_2 \leq^\oplus M$.

Также рассмотрим следующие условия:

$\mathcal{A}$ -SSP: для каждого $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$, если $M_1, M_2 \leq^\oplus M$, то $M_1 + M_2 \leq^\oplus M$;

$\mathcal{A}$ -SIP: для каждого прямых слагаемых M_1, M_2 модуля M , если $M/M_1, M/M_2 \in \mathcal{A}$, то $M_1 \cap M_2 \leq^\oplus M$;

$\mathcal{A}$ -D2: для каждого подмодуля N модуля M , если фактор-модуль M/N изоморфен прямому слагаемому модуля M и $M/N \in \mathcal{A}$, то $N \leq^\oplus M$;

$\mathcal{A}$ -D3: для каждого прямых слагаемых M_1, M_2 модуля M , если $M/M_1, M/M_2 \in \mathcal{A}$ и $M_1 + M_2 = M$, то $M_1 \cap M_2 \leq^\oplus M$.

Модуль M называется $\mathcal{A}$ -SIP-модулем (соответственно, $\mathcal{A}$ -SSP, $\mathcal{A}$ -C2, $\mathcal{A}$ -C3, $\mathcal{A}$ -D2, $\mathcal{A}$ -D3-модулем), если он удовлетворяет условию $\mathcal{A}$ -SIP (соответственно, $\mathcal{A}$ -SSP, $\mathcal{A}$ -C2, $\mathcal{A}$ -C3, $\mathcal{A}$ -D2, $\mathcal{A}$ -D3).

Следующие два утверждения доказываются непосредственно.

Лемма 11. Пусть $\mathcal{A}$ — класс правых R -модулей, который замкнут относительно изоморфных образов. Тогда имеют место следующие утверждения:

- (1) каждый $\mathcal{A}$ -C2-модуль является $\mathcal{A}$ -C3-модулем;
- (2) каждый $\mathcal{A}$ -D2-модуль является $\mathcal{A}$ -D3-модулем;
- (3) каждое прямое слагаемое в $\mathcal{A}$ -SIP-модуле (соответственно, $\mathcal{A}$ -SSP, $\mathcal{A}$ -C2, $\mathcal{A}$ -C3, $\mathcal{A}$ -D2 и $\mathcal{A}$ -D3-модуле) также является $\mathcal{A}$ -SIP-модулем (соответственно, $\mathcal{A}$ -SSP, $\mathcal{A}$ -C2, $\mathcal{A}$ -C3, $\mathcal{A}$ -D2 и $\mathcal{A}$ -D3).

Если M, N — правые R -модули и $f \in \text{Hom}_R(M, N)$, то через $\langle f \rangle$ будем обозначать подмодуль модуля $M \oplus N$ вида $\{t + f(t) \mid t \in M\}$.

Лемма 12. Пусть $M = X \oplus Y$ — разложение правого R -модуля M и $f : A \rightarrow Y$ — гомоморфизм правых R -модулей, где $A \leq X$. Тогда $A \oplus Y = \langle f \rangle \oplus Y$ и $\text{Ker}(f) = X \cap \langle f \rangle$.

Предложение 13. Пусть M — правый R -модуль, который является $\mathcal{A}$ -D3-модулем, и $\mathcal{A}$ — класс правых R -модулей, замкнутый относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если $M = M_1 \oplus M_2$ и $f : M_1 \rightarrow M_2$ — гомоморфизм, у которого $\text{im}(f) \leq^\oplus M_2$ и $\text{im}(f) \in \mathcal{A}$, то $\text{Ker}(f)$ — прямое слагаемое модуля M_1 .

Доказательство. Пусть $M' := M_1 \oplus \text{im}(f)$. Тогда M' — прямое слагаемое M и, следовательно, M' — $\mathcal{A}$ -D3-модуль. Тогда согласно лемме 12 имеет место равенство $M' = M_1 \oplus \text{im}(f) = \langle f \rangle \oplus \text{im}(f)$. Несложно заметить, что $M'/M_1, M'/\langle f \rangle \in \mathcal{A}$ и $M' = M_1 + \langle f \rangle$. Так как M' — $\mathcal{A}$ -D3-модуль, то $\langle f \rangle \cap M_1 = \text{Ker}(f)$ — прямое слагаемое M' . $\square$

Теорема 14 (см. [4, предложение 2.7]). Пусть M — правый R -модуль и $\mathcal{A}$ — класс правых R -модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если каждый фактор-модуль модуля M является $\mathcal{A}$ -инъективным, то следующие условия эквивалентны:

- (1) M — $\mathcal{A}$ -SIP-модуль;
- (2) M — $\mathcal{A}$ -D3-модуль;
- (3) M — $\mathcal{A}$ -D2-модуль;
- (4) для любого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ из условия $M_2 \in \mathcal{A}$ следует, что у каждого гомоморфизма $f : M_1 \rightarrow M_2$ ядро является прямым слагаемым модуля M_1 ;
- (5) если $X_1, \dots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и $M/X_1, M/X_2, \dots, M/X_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcap_{i=1}^n X_i$ — прямое слагаемое модуля M .

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть M_1, M_2 — такие прямые слагаемые модуля M , что $M/M_1, M/M_2 \in \mathcal{A}$. Тогда $M = M_1 \oplus M'_1$. Без ограничения общности можно считать, что $M_2 \not\subseteq M_1$, $M_2 \not\subseteq M'_1$. Из предположения следует, что $\pi(M_2)$ — прямое слагаемое M'_1 . Тогда $M'_1 = \pi(M_2) \oplus M''_1$. Так как класс $\mathcal{A}$ замкнут относительно прямых слагаемых, то $M''_1 \in \mathcal{A}$. Легко видеть, что $M_1 + M''_1$ — прямое слагаемое модуля M , $M/(M_1 + M''_1) \in \mathcal{A}$ и $M_1 + M''_1 + M_2 = M$. Тогда $M_1 \cap M_2 = (M_1 + M''_1) \cap M_2$ — прямое слагаемое M .

Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 11.

(1) $\Rightarrow$ (4). Предположим, что $M = M_1 \oplus M_2$, где $M_2 \in \mathcal{A}$, и задан гомоморфизм $f : M_1 \rightarrow M_2$. Отсюда следует, что $M = M_1 \oplus M_2 = \langle f \rangle \oplus M_2$. Отметим, что $M/M_1, M/\langle f \rangle \in \mathcal{A}$. Согласно (1), $\langle f \rangle \cap M_1 = \text{Ker}(f)$ — прямое слагаемое модуля M . Таким образом, $\text{Ker}(f)$ — прямое слагаемое M_1 .

(4) $\Rightarrow$ (3). Пусть M_1, M_2 — такие подмодули в M , что $M = M_1 \oplus A$, $M/M_2 \cong A$ и $A \in \mathcal{A}$. Рассмотрим проекции $\pi_1 : M_1 \oplus A \rightarrow M_1$ и $\pi_2 : M_1 \oplus A \rightarrow A$. Согласно предположению $\pi_2(M_2)$ — прямое слагаемое модуля A . Следовательно, $A = \pi_2(M_2) \oplus B$ для некоторого подмодуля B модуля A . Пусть $p : M \rightarrow M/M_2$ — канонический гомоморфизм и $\phi : M/M_2 \rightarrow A$ — изоморфизм. Рассмотрим гомоморфизм $f = \phi \circ (p|_{M_1}) : M_1 \rightarrow A$. Ясно, что $\text{Ker}(f) = M_1 \cap M_2$. В силу (4), $\text{Ker}(f) = M_1 \cap M_2$ — прямое слагаемое модуля M_1 . Для некоторого подмодуля N_1 модуля M_1 имеет место разложение $M_1 = N_1 \oplus (M_1 \cap M_2)$. Так как $M_1 + M_2 = M_1 \oplus \pi_2(M_2)$ и $N_1 \cap M_2 = 0$,

то

$$\begin{aligned} M &= M_1 \oplus \pi_2(M_2) \oplus B = (M_1 + M_2) \oplus B = \\ &= [N_1 \oplus (M_1 \cap M_2) + M_2] \oplus B = (N_1 + M_2) \oplus B = (N_1 \oplus M_2) \oplus B. \end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow$ (5). Докажем индукцией по n . При $n = 2$ справедливость утверждения следует из определения $\mathcal{A}$ -SIP-модулей. Предположим, что утверждение верно при $n = k$. Пусть $X_1, \dots, X_{k+1}$ — прямые слагаемые модуля M и $M/X_1, \dots, M/X_{k+1} \in \mathcal{A}$. Можно представить M в виде $M = \bigcap_{i=1}^k X_i \oplus N$ для некоторого подмодуля N в M . Без ограничения общности можно считать что $\bigcap_{i=1}^k X_i \not\subseteq X_{k+1}$. Пусть $f : M \rightarrow M/X_{k+1}$ — естественный гомоморфизм. Тогда модуль $\bigcap_{i=1}^k X_i / \left(\left(\bigcap_{i=1}^k X_i \right) \cap X_{k+1} \right)$ является $\mathcal{A}$ -инъективным и, следовательно, изоморфен прямому слагаемому в $M/X_{k+1} \in \mathcal{A}$. Следовательно, $\bigcap_{i=1}^k X_i / \bigcap_{i=1}^{k+1} X_i$ изоморфен прямому слагаемому в M и

$$M / \left(\bigcap_{i=1}^{k+1} X_i \oplus N \right) = \left(\bigcap_{i=1}^k X_i \oplus N \right) / \left(\bigcap_{i=1}^{k+1} X_i \oplus N \right) \in \mathcal{A}.$$

Так как (1) и (3) эквивалентны, то $\bigcap_{i=1}^{k+1} X_i \oplus N$ является прямым слагаемым модуля M и, следовательно, $\bigcap_{i=1}^{k+1} X_i$ также является прямым слагаемым модуля M . $\square$

Следствие 15. Пусть M — инъективный правый R -модуль над наследственным справа кольцом R . Тогда следующие условия равносильны:

- (1) M является D2-модулем;
- (2) M является D3-модулем;
- (3) M является SIP-модулем.

Следствие 16. Пусть P — квазипроективный модуль. Если $X_1, \dots, X_n$ — прямые слагаемые модуля P и $P/X_1, \dots, P/X_n$ — полупростые модули, то $\bigcap_{i=1}^n X_i$ — прямое слагаемое модуля P .

Теорема 17 (см. [4, предложение 2.13]). Пусть M — правый R -модуль и $\mathcal{A}$ — множество подмодулей модуля M , которое замкнуто относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если каждый подмодуль модуля M является $\mathcal{A}$ -проективным, то следующие условия эквивалентны:

- (1) M является $\mathcal{A}$ -SSP-модулем;
- (2) M является $\mathcal{A}$ -СЗ-модулем;
- (3) для любого разложения $M = A_1 \oplus A_2$ из условия $A_1 \in \mathcal{A}$ следует, что у каждого гомоморфизма $f : A_1 \rightarrow A_2$ образ является прямым слагаемым модуля A_2 .

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $f : A_1 \rightarrow A_2$ — R -гомоморфизм и $A_1 \in \mathcal{A}$. Согласно предположению для некоторого подмодуля B модуля A_1 существует разложение $A_1 = \text{Ker}(f) \oplus B$. Тогда $B \oplus A_2$ — прямое слагаемое в M . Поскольку каждое прямое слагаемое в $\mathcal{A}$ -СЗ-модуле также является $\mathcal{A}$ -СЗ-модулем, то $B \oplus A_2$ — $\mathcal{A}$ -СЗ-модуль. Пусть $g = f|_B : B \rightarrow A_2$. Тогда g является мономорфизмом и $\text{Im}(g) = \text{Im}(f)$. Нетрудно видеть, что $B \oplus A_2 = \langle g \rangle \oplus A_2$, $\langle g \rangle \cap B = 0$ и $\langle g \rangle \simeq B$. Заметим, что $B, \langle g \rangle \in \mathcal{A}$. Так как $B \oplus A_2$ удовлетворяет условию п. (2), то $B \oplus \langle g \rangle$ — прямое слагаемое в $B \oplus A_2$. Поскольку $B \oplus \langle g \rangle = B \oplus \text{Im}(g)$, то $\text{Im}(f)$ является прямым слагаемым в A_2 .

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть N и K — такие прямые слагаемые модуля M , что $N, K \in \mathcal{A}$. Тогда $M = N \oplus N'$ и $M = K \oplus K'$ для некоторых $N', K' \leq M$. Рассмотрим канонические проекции $\pi_K : K \oplus K' \rightarrow K$

и $\pi_{N'} : N \oplus N' \rightarrow N'$. Пусть $A = \pi_{N'}(\pi_K(N))$. Тогда $A = (N + K) \cap (N + K') \cap N'$ и A — прямое слагаемое в M в силу (3). Следовательно, имеет место разложение $M = A \oplus L$ для некоторого подмодуля $L \leq M$. Очевидно, что

$$(N + K) \cap [(N + K') \cap (N' \cap L)] = 0.$$

Следовательно, $N' = A \oplus (N' \cap L)$ и $M = (N \oplus A) \oplus (N' \cap L)$. Так как $A \leq N + K$ и $A \leq N + K'$, то имеют место равенства

$$N + K = (N \oplus A) + [(N + K) \cap (N' \cap L)], \quad N + K' = (N \oplus A) + [(N + K') \cap (N' \cap L)].$$

Тогда

$$\begin{aligned} M = N + K' + K &= (N \oplus A) + [(N + K) \cap (N' \cap L)] + [(N + K') \cap (N' \cap L)] \leq \\ &\leq (N + K) + [(N + K') \cap (N' \cap L)]. \end{aligned}$$

Таким образом, $M = (N + K) \oplus [(N + K') \cap (N' \cap L)]$. $\square$

Теорема 18 (см. [4, предложение 2.14]). Пусть M — правый R -модуль и $\mathcal{A}$ — класс артиновых правых R -модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если каждый подмодуль модуля M является $\mathcal{A}$ -проективным, то следующие условия равносильны:

- (i) M является $\mathcal{A}$ -СЗ-модулем;
- (ii) M является $\mathcal{A}$ -С2-модулем;
- (iii) если $X_1, \dots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$, то $\sum_{i=1}^n X_i$ — прямое слагаемое модуля M .

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть M_1 — подмодуль модуля M , изоморфный прямому слагаемому M_2 модуля M , и $M_1 \in \mathcal{A}$. Тогда $M = M_2 \oplus M'_2$. Если $M_1 \subset M_2$, то из артиновости модуля M_2 и изоморфизма $M_1 \cong M_2$ следует, что $M_1 = M_2$. Пусть $M_1 \not\subset M_2$ и $\pi : M_2 \oplus M'_2 \rightarrow M'_2$ — проекция. Согласно предположению $\text{Ker}(\pi|_{M_1})$ — прямое слагаемое в M_1 . Тогда $M_1 = M_1 \cap M_2 \oplus N_1$. Так как $N_1 \cong \pi(M_1)$ и $M_1 \cong M_2$, то существует изоморфизм $\phi : N' \rightarrow \pi(M_1)$, где N' — прямое слагаемое модуля M_2 . Так как $\langle \phi \rangle \in \mathcal{A}$ и $\langle \phi \rangle \cap M_2 = 0$, то $M_2 + \langle \phi \rangle = M_2 \oplus \pi(M_1) = M_2 \oplus N_1$ — прямое слагаемое модуля M . Следовательно, N_1 — ненулевое прямое слагаемое в M . Ясно, что $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{A}$ и $M_1 \cap M_2$ изоморфен прямому слагаемому M . Если $M_1 \cap M_2$ не является прямым слагаемым модуля M , то, используя рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведенным выше, можно показать, что $M_1 \cap M_2 = N_2 \oplus N'_2$, где N_2 — ненулевое прямое слагаемое M , N'_2 — подмодуль M , изоморфный прямому слагаемому M и $N_2, N'_2 \in \mathcal{A}$. Так как любой модуль из класса $\mathcal{A}$ артинов, продолжив приведенные выше рассуждения, для некоторого k получаем разложение $M_1 = N_1 \oplus \dots \oplus N_k$, где N_i — прямое слагаемое M и $N_i \in \mathcal{A}$ для любого i . Так как M — $\mathcal{A}$ -СЗ-модуль, то $N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$ является прямым слагаемым модуля M .

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следует из п. (1) леммы 11. Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

Импликацию (1) $\Rightarrow$ (3) докажем индукцией по n . При $n = 2$ справедливость утверждения следует из теоремы 17. Предположим, что утверждение верно для $n = k$. Пусть $X_1, \dots, X_{k+1}$ — прямые слагаемые в M и $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathcal{A}$. Тогда для некоторого подмодуля N из M имеем

$$M = \left(\sum_{i=1}^k X_i \right) \oplus N. \text{ Пусть } \pi : \left(\sum_{i=1}^k X_i \right) \oplus N \rightarrow N \text{ — естественная проекция. Так как } \pi(X_{k+1})$$

является $\mathcal{A}$ -проективным, то $X_{k+1} = \left(\left(\sum_{i=1}^k X_i \right) \cap X_{k+1} \right) \oplus S$, где S — подмодуль M . Так как (1)

и (2) эквивалентны, то $\pi(X_{k+1})$ есть прямое слагаемое в M и, следовательно, $N = \pi(X_{k+1}) \oplus T$,

где T — подмодуль в M . Тогда $\sum_{i=1}^{k+1} X_i = \left(\sum_{i=1}^k X_i \right) \oplus \pi(X_{k+1})$ и $M = \left(\sum_{i=1}^k X_i \right) \oplus \pi(X_{k+1}) \oplus T$. Таким

образом, $\sum_{i=1}^{k+1} X_i$ является прямым слагаемым M . $\square$

Следствие 19. Пусть M — артинов наследственный модуль. Тогда следующие условия равносильны:

- (1) M является C2-модулем;
- (2) M является C3-модулем;
- (3) M является SSP-модулем.

Теорема 20 (см. [4, предложение 2.7]). Пусть M — правый R -модуль и $\mathcal{A}$ — класс правых R -модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Если каждый фактор-модуль модуля M является $\mathcal{A}$ -проективным, то следующие условия эквивалентны:

- (1) M является $\mathcal{A}$ -SSP-модулем;
- (2) M является $\mathcal{A}$ -C3-модулем;
- (3) для любого разложения $M = A_1 \oplus A_2$ из условия $A_1 \in \mathcal{A}$ следует, что у каждого гомоморфизма $f : A_1 \rightarrow A_2$ образ является прямым слагаемым модуля A_2 ;
- (4) M является $\mathcal{A}$ -C2-модулем;
- (5) если $X_1, \dots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$, то $\sum_{i=1}^n X_i$ — прямое слагаемое модуля M .

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

Доказательство импликаций (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) аналогично доказательству теоремы 17.

Импликация (4) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 11(1).

(3) $\Rightarrow$ (4). Пусть $\sigma : A \rightarrow B$ — изоморфизм, $A \in \mathcal{A}$ — прямое слагаемое модуля M и $B \leq M$. Покажем, что B является прямым слагаемым модуля M . Имеет место равенство $M = A \oplus T$ для некоторого подмодуля T из M . Так как модуль $A/A \cap B$ изоморфен фактор-модулю модуля M , то $A \cap B$ — прямое слагаемое A . Тогда $A = (A \cap B) \oplus C$ для некоторого подмодуля C из A . Следовательно, $M = (A \cap B) \oplus (C \oplus T)$. Ясно, что

$$A \cap [(C \oplus T) \cap B] = 0, \quad B = (A \cap B) \oplus [(C \oplus T) \cap B].$$

Пусть $H := \sigma^{-1}((C \oplus T) \cap B)$. Тогда H — подмодуль A , $H \cap [(C \oplus T) \cap B] = 0$ и существует такой подмодуль H' в H , что $A = H \oplus H'$. Заметим, что $M = H \oplus (H' \oplus T)$. Рассмотрим проекцию $\pi : H \oplus (H' \oplus T) \rightarrow H' \oplus T$. Тогда

$$H \oplus [(C \oplus T) \cap B] = H \oplus \pi((C \oplus T) \cap B).$$

В силу (3) образ гомоморфизма $\pi|_{(C \oplus T) \cap B} \circ \sigma|_H : H \rightarrow H' \oplus T$ является прямым слагаемым $H' \oplus T$. Тогда $H' \oplus T = \pi|_{(C \oplus T) \cap B} \sigma(H) \oplus K$ для подмодуля K в $H' \oplus T$. Тогда $H' \oplus T = \pi((C \oplus T) \cap B) \oplus K$. Следовательно,

$$M = H \oplus \pi((C \oplus T) \cap B) \oplus K = H \oplus [(C \oplus T) \cap B] \oplus K.$$

По закону модулярности имеем

$$C \oplus T = [(C \oplus T) \cap B] \oplus [(H \oplus K) \cap (C \oplus T)].$$

Таким образом,

$$M = (A \cap B) \oplus [(C \oplus T) \cap B] \oplus [(H \oplus K) \cap (C \oplus T)] = B \oplus [(H \oplus K) \cap (C \oplus T)].$$

Импликация (1) $\Rightarrow$ (5) очевидна. Импликация (1) $\Rightarrow$ (5) доказывается аналогично импликации (1) $\Rightarrow$ (3) из теоремы 18. $\square$

Следствие 21. Пусть Q — квазиинъективный модуль. Если $X_1, \dots, X_n$ — полупростые прямые слагаемые модуля Q , то $\sum_{i=1}^n X_i$ — прямое слагаемое модуля Q .

4. ПРОСТО ПРЯМО ПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ И ПРОСТО ПРЯМО ИНЪЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ

Если $\mathcal{A}$ — класс всех простых (соответственно, полупростых) правых R -модулей, то $\mathcal{A}$ -D2-модули называются *просто* (соответственно, *полупросто*) *прямо проективными модулями*.

Следующее утверждение непосредственно следует из теоремы 14

Теорема 22. *Следующие условия эквивалентны для модуля M :*

- (1) M — полупросто прямо проективный модуль;
- (2) если A, B — прямые слагаемые модуля M и $M/A, M/B$ — полупростые модули, то $A \cap B \leq^{\oplus} M$;
- (3) если A, B — прямые слагаемые модуля M , $M/A, M/B$ — полупростые модули и $A+B = M$, то $A \cap B$ — прямое слагаемое модуля M ;
- (4) если $X_1, \dots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и $M/X_1, \dots, M/X_n$ — полупростые модули, то $\bigcap_{i=1}^n X_i$ — прямое слагаемое модуля M .

Теорема 23 (см. [11, предложение 2.1]). *Следующие условия эквивалентны для модуля M :*

- (1) M — просто прямо проективный модуль;
- (2) если A, B — прямые слагаемые модуля M и $M/A, M/B$ — простые модули, то $A \cap B \leq^{\oplus} M$;
- (3) если $X_1, \dots, X_n$ — прямые слагаемые модуля M и $M/X_1, \dots, M/X_n$ — простые модули, то $\bigcap_{i=1}^n X_i$ — прямое слагаемое модуля M ;
- (4) для любого разложения $M = M_1 \oplus M_2$, где M_2 — простой модуль, ядро всякого гомоморфизма $f: M_1 \rightarrow M_2$ является прямым слагаемым модуля M_1 ;
- (5) если M/A — конечно порожденный полупростой модуль и $M/A \cong B \leq^{\oplus} M$, то $A \leq^{\oplus} M$.

Доказательство. Эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) следуют из теоремы 14. Импликация (5) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

(1) $\Rightarrow$ (5). Имеет место разложение $M/A = M_1/A \oplus \dots \oplus M_n/A$ модуля M/A , где M_i/A — простой модуль для каждого i . Ясно, что $M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right) = A$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Для каждого подмножества $\{i_1, \dots, i_{n-1}\}$ множества $I := \{1, \dots, n\}$ имеет место изоморфизм

$$M/(M_{i_1} + M_{i_2} + \dots + M_{i_{n-1}}) \simeq M_k/A$$

для некоторого $k \in I \setminus \{i_1, \dots, i_{n-1}\}$. Тогда фактор-модуль $M/(M_{i_1} + \dots + M_{i_{n-1}})$ изоморфен простому прямому слагаемому модуля M . Следовательно, согласно (1), $M_{i_1} + \dots + M_{i_{n-1}}$ — прямое слагаемое M . Нетрудно заметить, что имеет место равенство

$$A = \bigcap_{\{i_1, \dots, i_{n-1}\} \subset I} (M_{i_1} + \dots + M_{i_{n-1}}).$$

Тогда согласно п. (3) имеем $A \leq^{\oplus} M$. □

Если $\mathcal{A}$ — класс всех простых (соответственно, полупростых) правых R -модулей, то $\mathcal{A}$ -C2-модули называются *просто* (соответственно, *полупросто*) *прямо инъективными модулями*.

Следующее утверждение непосредственно следует из теоремы 20.

Теорема 24. *Следующие условия равносильны для модуля M :*

- (1) M — полупросто прямо инъективный модуль;
- (2) если A, B — полупростые прямые слагаемые модуля M , то $A+B \leq^{\oplus} M$;
- (3) если A, B — полупростые прямые слагаемые модуля M и $A \cap B = 0$, то $A+B \leq^{\oplus} M$;
- (4) если $X_1, \dots, X_n$ — полупростые прямые слагаемые модуля M и $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$, то $\sum_{i=1}^n X_i$ — прямое слагаемое модуля M ;
- (5) для любого разложения $M = A_1 \oplus A_2$, где A_1 — полупростой модуль, у каждого гомоморфизма $f: A_1 \rightarrow A_2$ образ является прямым слагаемым модуля A_2 .

Теорема 25 (см. [7, предложение 2.1]). *Следующие условия равносильны для модуля M :*

- (1) M — просто прямо инъективный модуль;
- (2) если A, B — простые прямые слагаемые модуля M , то $A + B \leq^{\oplus} M$;
- (3) для всяких конечнопорожденных полупростых подмодулей A, B модуля M из условий $A \cong B, B \leq^{\oplus} M$ следует, что $A \leq^{\oplus} M$;
- (4) для любых конечнопорожденных полупростых прямых слагаемых A, B модуля M выполнено условие $A + B \leq^{\oplus} M$.

Доказательство. Эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) следуют из теоремы 20. Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

(2) $\Rightarrow$ (4). Достаточно показать, что если $M_1, \dots, M_n$ — простые прямые слагаемые модуля M , то $M_1 + \dots + M_n$ — прямое слагаемое M . Это можно показать с помощью стандартных рассуждений, используя математическую индукцию. $\square$

Правый R -модуль M называется V -модулем, если каждый простой правый R -модуль M -инъективен. Кольцо R называется *правым V -кольцом*, если R_R — V -модуль. Согласно теореме Капланского коммутативное кольцо R является регулярным, в точности тогда, когда R — V -кольцо.

Пусть M — правый R -модуль. Правый модуль над кольцом R называется M -циклическим, если он изоморфен некоторому фактор-модулю модуля M .

Лемма 26. *Пусть F — регулярный правый R -модуль. Если A — конечно порожденный малый подмодуль фактор-модуля F/F_0 , то $A \oplus F/F_0$ — F -циклический модуль.*

Доказательство. Для некоторых элементов $f_1, \dots, f_m \in F$ имеет место равенство $(f_1R + \dots + f_mR + F_0)/F_0 = A$. Так как F — регулярный модуль, то согласно [3, 11.1] имеем $f_1R + \dots + f_mR = \pi(F)$, где $\pi \in \text{End}_R(F)$ и $\pi^2 = \pi$. Поскольку A — малый подмодуль модуля F/F_0 , то

$$F/F_0 = ((1 - \pi)F + F_0)/F_0.$$

Тогда существуют эпиморфизмы $f_1 : \pi(F) \rightarrow A, f_2 : (1 - \pi)(F) \rightarrow F/F_0$. Следовательно, модуль $A \oplus (F/F_0)$ является F -циклическим. $\square$

Теорема 27. *Для регулярного правого R -модуля F следующие условия равносильны:*

- (1) F является V -модулем;
- (2) каждый F -циклический модуль является просто прямо инъективным.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $S \in \sigma(F)$ — простой модуль и $E_F(S)$ — инъективная оболочка модуля S в категории $\sigma(F)$. Предположим, что $E_F(S) \neq S$. Так как модуль $E_F(S)$ порождается модулем F , то существует такой гомоморфизм $f : F \rightarrow E_F(S)$, что $f(F) \neq S$. Тогда S — малый подмодуль модуля $f(F)$, и из предыдущей леммы вытекает, что $S \oplus f(F)$ — F -циклический. Так как, очевидно, модуль $S \oplus f(F)$ не является просто прямо инъективным, то получаем противоречие с условием п. (2). $\square$

Следствие 28 (см. [7, теорема 4.4]). *Для регулярного кольца R следующие условия равносильны:*

- (1) R является правым V -кольцом;
- (2) над кольцом R каждый циклический правый модуль является просто прямо инъективным.

Предложение 29. *Пусть $\mathcal{A}$ — класс правых R -модулей, замкнутый относительно изоморфизмов и прямых слагаемых. Если всякий правый R -модуль $\mathcal{A}$ -инъективен, то следующие условия эквивалентны:*

- (1) все модули из $\mathcal{A}$ инъективны;
- (2) каждый правый R -модуль является $\mathcal{A}$ -С2-модулем;
- (3) каждый правый R -модуль является $\mathcal{A}$ -С3-модулем.

Доказательство. Импликации $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ очевидны.

$(3) \Rightarrow (1)$. Предположим, что $A \in \mathcal{A}$. Тогда $A \oplus E(A)$ является $\mathcal{A}$ -СЗ-модулем. Таким образом, A — прямое слагаемое в $E(A)$ и, следовательно, модуль A инъективен. $\square$

Следствие 30 (см. [7, предложение 4.1]). *Следующие условия эквивалентны для кольца R :*

- (1) R является V -кольцом;
- (2) каждый правый R -модуль является просто прямо инъективным модулем.

Предложение 31. *Пусть $\mathcal{A}$ — класс правых R -модулей, замкнутый относительно изоморфизмов и прямых слагаемых. Если все правые R -модули $\mathcal{A}$ -проективны, то следующие условия эквивалентны:*

- (1) все модули из $\mathcal{A}$ проективны;
- (2) каждый правый R -модуль является $\mathcal{A}$ -D2-модулем;
- (3) каждый правый R -модуль является $\mathcal{A}$ -D3-модулем.

Доказательство. Импликации $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ очевидны.

$(3) \Rightarrow (1)$. Пусть $A \in \mathcal{A}$. Существует эпиморфизм $\varphi : R^{(I)} \rightarrow A$. Тогда $M = R^{(I)} \oplus A$ является $\mathcal{A}$ -D3-модулем. Так как $\langle \varphi \rangle \oplus A = R^{(I)} \oplus A$ и $\langle \varphi \rangle + R^{(I)} = M$, то $\langle \varphi \rangle \cap R^{(I)}$ — прямое слагаемое модуля M . Таким образом, A изоморфен прямому слагаемому в $R^{(I)}$ и, следовательно, модуль A проективен. $\square$

Следствие 32 (см. [11, теорема 3.4]). *Следующие условия эквивалентны для кольца R :*

- (1) R является классически полупростым кольцом;
- (2) каждый правый R -модуль является просто прямо проективным модулем.

Пусть даны кольца R и S , бимодули ${}_R M_S$ и ${}_S N_R$ и бимодульные гомоморфизмы $\varphi : M \otimes_S N \rightarrow R$ и $\psi : N \otimes_R M \rightarrow S$. Для $m \in M$ и $n \in N$ положим $mn = \varphi(m \otimes n)$ и $nm = \psi(n \otimes m)$. Тогда если для всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$ выполняются тождества $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$, то множество K матриц вида $\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$, где $r \in R, m \in M, n \in N, s \in S$, относительно естественных операций матричного сложения и умножения образует кольцо, которое называют *кольцом формальных матриц*.

Пусть даны модули A_R и B_S и такие гомоморфизмы модулей $f : A \otimes_R M \rightarrow B_S$ и $g : B \otimes_S N \rightarrow A_R$, что

$$g(f(a \otimes m) \otimes n) = a(mn), \quad f(g(b \otimes n) \otimes m) = b(nm),$$

для всех $a \in A, b \in B, m \in M, n \in N$. Тогда множество пар (A, B) становится правым K -модулем. Нетрудно видеть (см. например, [2]), что все правые K -модули могут быть представлены в таком виде.

Далее будем предполагать, что $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ — кольцо формальных матриц с нильпотентными идеалами следа, т.е. идеалы $MN \leq R$ и $NM \leq S$ нильпотентны.

Пусть дан правый K -модуль $(A, B)_K$. Введем обозначения

$$L_A = \{a \in A \mid aM = 0\}, \quad L_B = \{b \in B \mid bN = 0\}.$$

Лемма 33. *Пусть K — кольцо формальных матриц с нильпотентными идеалами следа, $(A, B)_K$ — правый K -модуль и (A', B') — его подмодуль. Подмодуль (A', B') является простым прямым слагаемым K -модуля $(A, B)_K$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:*

- (1) $(A', B') = (A', 0)$, где $A' \leq L_A$ — простой подмодуль, и существует такое разложение $A' \oplus C = A$, что $BN \leq C$;
- (2) $(A', B') = (0, B')$, где $B' \leq L_B$ — простой подмодуль, и существует такое разложение $B' \oplus D = B$, что $AM \leq D$.

Доказательство. Пусть (A', B') — простой подмодуль $(A, B)_K$. Если $0 \neq A'$, то $0 \neq (A', A'M) \leq (A', B')$, а значит, $(A', B') = (A', A'M)$. Если $A'M \neq 0$, то получаем следующую цепочку равенств:

$$(A', B') = (A', A'M) = (A'MN, A'M) = (A'MN, A'MNM) = \dots = \\ = (A'(MN)^k, A'(MN)^k M) = \dots = 0,$$

которая выполняется в силу нильпотентности идеала MN . Таким образом, любой простой подмодуль $(A, B)_K$ имеет вид либо $(A', 0)$, либо $(0, B')$, где $A' \leq A$ и $B' \leq B$ — простые подмодули. В частности, $A' \leq L_A$, $B' \leq L_B$.

Предположим, что $(A', 0)$ является простым прямым слагаемым модуля $(A, B)_K$. Тогда для некоторого $C \leq A$ должно иметь место разложение

$$(A', 0) \oplus (C, B) = (A, B).$$

Так как (C, B) является подмодулем $(A, B)_K$, то $BN \leq C$. □

Теорема 34. Пусть K — кольцо формальных матриц с нильпотентными идеалами следа. Для правого K -модуля $(A, B)_K$ следующие условия эквивалентны:

- (1) (A, B) — полупросто прямо проективный модуль;
- (2) (а) если для подмодулей $A_1, A_2 \leq A$, удовлетворяющих условию $BN \leq A_1 \cap A_2$, имеет место разложение $A_1 \oplus C_1 = A = A_2 \oplus C_2$, где $C_1, C_2 \leq L_A$ — полупростые подмодули, то существует и разложение $A = (A_1 \cap A_2) \oplus C$, где $C \leq L_A$;
- (б) если для подмодулей $B_1, B_2 \leq B$, удовлетворяющих условию $AM \leq B_1 \cap B_2$, имеет место разложение $B_1 \oplus D_1 = B = B_2 \oplus D_2$, где $D_1, D_2 \leq L_B$ — полупростые подмодули, то существует и разложение $B = (B_1 \cap B_2) \oplus D$, где $D \leq L_B$.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $(A_1, B_1) \oplus (C_1, D_1) = (A, B) = (A_2, B_2) \oplus (C_2, D_2)$, где подмодули (C_1, D_1) и (C_2, D_2) полупросты. Так как каждый из них является суммой простых подмодулей, то в силу леммы 33 заключаем, что $C_1, C_2 \leq L_A$, $D_1, D_2 \leq L_B$ полупросты. В силу условий (2а) и (2б) получаем

$$(A, B) = (A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \oplus (C, D). \quad \square$$

Следствие 35. Пусть $K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ — кольцо формальных матриц. Для правого K -модуля $(A, B)_K$ следующие условия эквивалентны:

- (1) (A, B) — просто (полупросто) прямо проективный модуль;
- (2) (а) если для подмодулей $A_1, A_2 \leq A$ имеет место разложение $A_1 \oplus C_1 = A = A_2 \oplus C_2$, где $C_1, C_2 \leq L_A$ — (простые) полупростые подмодули, то существует и разложение $A = (A_1 \cap A_2) \oplus C$, где $C \leq L_A$;
- (б) если подмодули $B_1, B_2 \leq B$, обладающие тем свойством, что $AM \leq B_1 \cap B_2$ и фактор-модули B/B_1 и B/B_2 просты (полупросты), выделяются в виде прямых слагаемых в B , то прямым слагаемым также является и их пересечение $B_1 \cap B_2$.

В частности, если $AM \leq J(B_S)$, то условие (2б) превращается в просто (полупросто) прямо проективность модуля B .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абызов А. Н., Туганбаев А. А. Модули, в которых суммы или пересечения двух прямых слагаемых являются прямыми слагаемыми // Фундам. прикл. мат. — 2014. — 19, № 1. — С. 3–11.
2. Крылов П. А., Туганбаев А. А. Кольца формальных матриц и модули над ними. — М.: МЦНМО, 2017.
3. Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.
4. Abyzov A. N., Quynh T. C., Nhan T. H. N. On classes of C3 and D3 modules // Hacettepe J. Math. Stat. — 2018. — 47. — P. 317–329.
5. Abyzov A. N., Nhan T. H. N., Quynh T. C. Modules close to SSP- and SIP-modules // Lobachevskii J. Math. — 2017. — 38, № 1. — P. 16–23.

6. *Amin I., Ibrahim Y., Yousif M. F.* C3-modules// Algebra Colloq. — 2015. — 22. — P. 655–670.
7. *Camillo V., Ibrahim Y., Yousif M., Zhou Y.* Simple-direct-injective modules// J. Algebra. — 2014. — 420. — P. 39–53.
8. *Clark J., Lomp C., Vanaja N., Wisbauer R.* Lifting Modules. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser-Verlag, 2006.
9. *Enochs E. E., Jenda O. M. G.* Relative Homological Algebra. — Berlin: de Gruyter, 2011.
10. *Hamdouni A., Harmanci A., Özcan C. A.* Characterization of modules and rings by the summand intersection property and the summand sum property// JP J. Algebra Number Theory Appl. — 2005. — 5. — P. 469–490.
11. *Ibrahim Y., Tamer Kosan M., Quynh T. C., Yousif M.* Simple-direct-projective modules// Commun. Algebra. — 2016. — 44, № 12. — P. 5163–5178.
12. *Jeremy L.* Sur les modules et anneaux quasi-continus// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. — 1971. — 272. — P. 80–83.
13. *Lopez-Permouth S. R., Oshiro K., Rizvi S. T.* On the relative (quasi-) continuity of modules// Commun. Algebra. — 1998. — 26, № 11. — P. 3497–3510.
14. *Nicholson W. K.* Semiregular modules and rings// Can. J. Math. — 1976. — 28. — P. 1105–1120.
15. *Nicholson W. K., Yousif M. F.* Quasi-Frobenius Rings. — Cambridge Univ. Press, 2003.
16. *Mohamed S. H., Bouhy T.* Continuous modules// Arab. J. Sci. Eng. — 1977. — 2. — P. 107–112.
17. *Mohamed S. H., Muller B. J.* Continuous and Discrete Modules. — Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1990.
18. *Oshiro K.* Continuous modules and quasi-continuous modules// Osaka J. Math. — 1983. — 20.
19. *Takeuchi T.* On direct modules// Hokkaido Math. J. — 1972. — P. 168–177.
20. *Utumi Y.* On continuous regular rings// Can. Math. Bull. — 1961. — P. 63–69.
21. *Yousif M. F., Amin I., Ibrahim Y.* D3-modules// Commun. Algebra. — 2014. — 42. — P. 578–592.
22. *Wisbauer R.* Foundations of Module and Ring Theory. — Gordon and Breach, 1991.

Абызов Адель Наилевич

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Adel.Abyzov@kpfu.ru

Туганбаев Аскар Аканович

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: tuganbaev@gmail.com

Тапкин Даниль Тагирзянович

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: danil.tapkin@yandex.ru

Куинь Чюонг Конг

The University of Danang, Vietnam

E-mail: tcquynhtcq@gmail.com