

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 163



Москва 2019

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

С. С. Акбаров (НИУ ВШЭ, ВИНТИ РАН)

А. Б. Жижченко (Отделение математических наук РАН)

Е. П. Кругова (ВИНТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Н. Х. Розов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Редакторы-составители:

Д. И. Борисов (Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа),

Р. С. Юлмухаметов (Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа)

Научный редактор:

Е. П. Кругова

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 163

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



Москва 2019

СОДЕРЖАНИЕ

О возникновении резонансов из кратного собственного значения оператора Шрёдингера в цилиндре с разбегающимися возмущениями (Д. И. Борисов, А. М. Головина)	3
О частоте нелинейного осциллятора (Л. А. Калякин)	15
Равномерная асимптотика функции синус амплитуды (О. М. Киселев)	25
Существование ренормализованного решения параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева—Орлича (Н. А. Воробьёв)	39
Параметрический резонанс в интегрируемых системах и усреднение на римановых поверхностях (В. Ю. Новокшенов)	65
Об аналогах функций волновых катастроф, являющихся решениями нелинейных интегрируемых уравнений (Б. И. Сулейманов)	81
Функции Ляпунова и асимптотика на бесконечности решений уравнений, близких к гамильтоновым (О. А. Султанов)	96
Об основных состояниях и решениях с компактными носителями эллиптических уравнений с нелипшицевыми нелинейностями (Э. Э. Холоднов)	108
Методы исследования устойчивости линейных периодических систем, зависящих от малого параметра (М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова, А. С. Белова)	113



О ВОЗНИКНОВЕНИИ РЕЗОНАНСОВ ИЗ КРАТНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА В ЦИЛИНДРЕ С РАЗБЕГАЮЩИМИСЯ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© 2019 г. Д. И. БОРИСОВ, А. М. ГОЛОВИНА

Аннотация. В работе рассматривается оператор Шрёдингера с локализованным потенциалом в многомерном цилиндре. Граница цилиндра разбивается на три части, две из которых представляют собой «рукава», уходящие на бесконечность, а третья — центральная часть — расположена между ними. На «рукавах» задается краевое условие Неймана, на центральной части — краевое условие Дирихле. Исследуется ситуация, когда расстояние между «рукавами» растёт. Предполагается, что тот же оператор Шрёдингера в том же цилиндре, но с условием Дирихле на всей границе, имеет изолированное двукратное собственное значение. Показано, что для достаточно большого расстояния между рукавами из данного двукратного собственного значения возникает пара резонансов исходного оператора. Для этих резонансов в явном виде получены первые члены асимптотического разложения, описано поведение мнимой части резонансов.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, возмущение непрерывного спектра, резонанс, разбегающееся возмущение.

ON OCCURRENCE OF RESONANCES FROM MULTIPLE EIGENVALUES OF THE SCHRÖDINGER OPERATOR IN A CYLINDER WITH SCATTERING PERTURBATIONS

© 2019 D. I. BORISOV, A. M. GOLOVINA

ABSTRACT. In this paper, the Schrödinger operator with a localized potential in a multidimensional cylinder is considered. The boundary of the cylinder is split into three parts, two of which are “sleeves” going to infinity, and the third (central) part is located between them. On the sleeves and the central part, respectively, the Neumann and Dirichlet boundary conditions are posed. We examine the situation where the distance between the sleeves increases. We assume that the same Schrödinger operator in the same cylinder endowed with the Dirichlet condition on the whole boundary has an isolated double eigenvalue. We show that for a sufficiently large distance between the sleeves, this double eigenvalue splits into a pair of resonances of the original operator. For these resonances, we explicitly obtain the first terms of their asymptotic expansions and describe the behavior of the imaginary part of the resonances.

Keywords and phrases: Schrödinger operator, perturbation of continuous spectrum, resonance, scattering perturbation.

AMS Subject Classification: 35B34, 35B20, 35B40

1. Введение. Классическим примером задачи с разбегающимися возмущениями является оператор Шрёдингера во всём пространстве с парой потенциальных ям, находящихся на большом расстоянии друг от друга. Исследованию спектральных свойств операторов такого рода посвящено достаточно много работ, ставших в определённой степени классическими (см., например, [8–10, 17, 19–24]). Основные исследованные вопросы — это поведение резольвент и собственных значений данных операторов при увеличении расстояния между ямами. Основные полученные результаты — выяснение вида предельных операторов и описание асимптотических разложения для резольвент и собственных значений. В наиболее общей форме эти вопросы были решены в [2, 4, 5, 12, 13, 18] для операторов с разбегающимися возмущениями, описываемыми абстрактными локализованными операторами. В достаточно явной форме были выписаны резольвенты операторов с разбегающимися возмущениями, что позволило выяснить вид предельных операторов, а также получить асимптотические разложения для этих резольвент. Для собственных значений, сходящихся в пределе к изолированным предельным собственным значениям, и для соответствующих собственным функциям были построены полные асимптотические разложения. Была дополнительно доказана равномерная абсолютная сходимость данных разложений к соответствующим собственным значениям и собственным функциям. В [14, 15] для моделей волноводов с геометрическими разбегающимися возмущениями были построены первые члены асимптотических разложений собственных значений, сходящихся в пределе к изолированным предельным собственным значениям.

Помимо собственных значений, рассматриваемые операторы с разбегающимися возмущениями могут иметь резонансы, возникающих при разбегании из внутренних точек. В [11] была предложена модель плоского волновода, где все возмущения описываются определённой комбинацией смен типа краевых условий. При этом основой конструкции является разбегание трёх операторов таких, что простые изолированные собственные значения одного оператора накрываются существенными спектрами двух других операторов. Было показано, что в такой ситуации из упомянутых изолированных собственных значений, накрытых существенными спектрами, возникают резонансы. Для возникающих резонансов были вычислены первые члены асимптотических разложений, позволявших оценить величину мнимой части этих резонансов.

Настоящая работа является продолжением работы [11]. А именно, здесь мы рассматриваем многомерный цилиндр, в сечении которого лежит произвольная ограниченная область с достаточно гладкой границей. В цилиндре рассматривается оператор Шрёдингера с локализованным потенциалом и специальной сменой краевых условий. Цилиндр разрезается на три части, две из которых представляют собой «рукава», уходящие на бесконечность, а третья, центральная часть — конечный цилиндр, но с растущей длиной. На границах «рукавов» ставится краевое условие Неймана, на границе центральной части — краевое условие Дирихле. Внутри центральной части помещается упомянутый выше локализованный потенциал. При возрастании длины части с краевым условием Дирихле, резольвента такого оператора сходится в определённом смысле к прямой сумме резольвент предельных операторов в том же цилиндре. Один из предельных операторов представляет собой оператор Шрёдингера с прежним потенциалом, но с условием Дирихле всюду на границе, а два других — Лапласиан в цилиндре, но со сменой типа краевых условий. Относительно первого предельного оператора предполагается наличие двукратного изолированного собственного значения, накрываемого существенным спектром двух других предельных операторов. Основным полученный результат утверждает наличие пары резонансов у рассматриваемого оператора, возникающих при разбегании из упомянутого двукратного собственного значения. Для этих резонансов вычислены первые члены асимптотических разложений, причём предположения работы позволили нам оценить поведение мнимой части данных резонансов.

2. Постановка задачи и основной результат. Пусть $x = (x', x_n)$ и $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ — декартовы координаты в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n-1}$ соответственно, $n \geq 2$, ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с гладкой границей $\partial\omega \in C^2$ и $\Pi := \omega \times \mathbb{R}$ — цилиндр в пространстве $\mathbb{R}^n$. Через $V = V(x)$ обозначим вещественную ограниченную измеримую функцию, заданную в Π , с носителем внутри области $\Pi \cap \{x : |x_n| < a\}$, где $a > 0$ — некоторое фиксированное число.

Введём в рассмотрение большой положительный параметр ℓ и разделим боковую поверхность области Π на три непересекающиеся части:

$$S_0^\ell := \{x : x' \in \partial\omega, |x_n| < \ell\}, \quad S_+^\ell := \{x' \in \partial\omega, x_n > \ell\}, \quad S_-^\ell := \{x' \in \partial\omega, x_n < -\ell\}.$$

Через $\mathcal{H}_\ell$ обозначим оператор $-\Delta + V$ в Π с краевым условием Дирихле на S_0 и условием Неймана на $S_\pm$. Строго такой оператор определим как самосопряжённый полуограниченный оператор в $L_2(\Pi)$, соответствующий квадратичной форме

$$\mathfrak{h}_\ell[u] = \|\nabla u\|_{L_2(\Pi)}^2 + (Vu, u)_{L_2(\Pi)}$$

в $L_2(\Pi)$ на области определения, состоящей из функций из $W_2^1(\Pi)$ с нулевым следом на S_0^ℓ .

Основным объектом исследования в данной работе являются резонансы оператора $\mathcal{H}_\ell$ и их поведение при больших ℓ . Определим вначале, что понимается под резонансами оператора $\mathcal{H}_\ell$.

Резонансы определим как числа λ , при которых следующая задача имеет нетривиальные решения:

$$(-\Delta + V - \lambda)u = 0 \text{ в } \Pi, \quad u = 0 \text{ на } S_0^\ell, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } S_\pm^\ell, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(x) &= c_+(\lambda) e^{i\sqrt{\lambda}x_n} + \mathcal{O}(e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\nu_2-\lambda}x_n}) \quad \text{при } x_n \rightarrow +\infty, \\ u(x) &= c_-(\lambda) e^{-i\sqrt{\lambda}x_n} + \mathcal{O}(e^{\operatorname{Re}\sqrt{\nu_2-\lambda}x_n}) \quad \text{при } x_n \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь n — внешняя нормаль к боковой поверхности $\partial\Pi$, ν_2 — второе собственное значение оператора Лапласа на сечении ω с граничным условием Неймана, $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $c_\pm(\lambda)$ — некоторые комплексные константы. Выбор ветви квадратного корня фиксируется условием $\sqrt{1} = 1$. Сразу подчеркнём, что в работе мы исследуем только резонансы λ , у которых вещественная часть лежит в интервале $(0, \nu_2)$. Для таких значений λ указанное выше определение резонансов согласуется с обычным определением резонансов через полюса аналитического продолжения резольвенты оператора $\mathcal{H}_\ell$.

Решения задачи (1), (2) понимаются в обобщенном смысле, как элементы пространства $W_{2,\text{loc}}^1(\Pi)$. Стандартные теоремы о повышении гладкости гарантируют для таких решений по крайней мере гладкость C^1 вплоть до границ при $|x_n| > \ell + 1$. Поэтому условия (2) на поведение решений на бесконечности следует понимать в обычном, поточечном смысле.

Для формулировки основных результатов нам понадобятся дополнительные обозначения. В пространстве $L_2(\Pi)$ определим оператор $\mathcal{H}_0 := -\Delta + V$ с краевым условием Дирихле; область определения такого оператора есть множество функций из $W_2^2(\Pi)$ с нулевым следом на боковой поверхности области Π . Оператор $\mathcal{H}_0$ самосопряжён.

Через μ_1, μ_2 обозначим первое и второе собственные значения оператора Лапласа на сечении ω с краевым условием Дирихле, а через ϕ_1 — собственную функцию, соответствующую собственному значению μ_1 . Функция ϕ_1 предполагается нормированной в $L_2(\omega)$. Известно, что $0 < \mu_1 < \mu_2$ и $\nu_2 < \mu_1$ (см. [7]).

Существенный спектр оператора $\mathcal{H}_0$ представляет собой полуось $[\mu_1, +\infty)$. Хорошо известно, что добавление подходящего локализованного потенциала приводит к возникновению собственных значений из края существенного спектра у Лапласиана с краевым условием Дирихле (см. [16]). Поэтому при выборе подходящего потенциала V можно утверждать наличие непустого дискретного спектра у оператора $\mathcal{H}_0$. Поэтому далее мы будем предполагать, что у данного оператора имеется двукратное собственное значение λ_0 , лежащее достаточно далеко от непрерывного спектра, а именно, $\lambda_0 < \nu_2$. Через $\psi^{(j)} = \psi^{(j)}(x)$, $j = 1, 2$, обозначим соответствующие собственные функции. Данные собственные функции имеют следующее поведение на бесконечности:

$$\psi_0^{(j)}(x) = \Psi_\pm^{(j)} e^{\mp\sqrt{\mu_1-\lambda_0}x_n} \phi_1(x') + \mathcal{O}(e^{-\sqrt{\mu_2-\lambda_0}|x_n|}) \quad \text{при } x_n \rightarrow \pm\infty, \quad (3)$$

где $\Psi_{\pm}^{(j)}$ — некоторые константы. Положим $\Psi_j := (\Psi_-^{(j)}, \Psi_+^{(j)}) \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$. Используя теорему об одновременной диагонализации двух квадратичных форм, функции $\psi_0^{(j)}$ выберем ортонормированными в $L_2(\Pi)$ и удовлетворяющими условию ортогональности

$$(\Psi_1, \Psi_2)_{\mathbb{R}^2} = 0. \quad (4)$$

Дополнительно предполагаем, что

$$\|\Psi_1\|_{\mathbb{R}^2} \neq \|\Psi_2\|_{\mathbb{R}^2}, \quad \|\Psi_1\|_{\mathbb{R}^2} \neq 0, \quad \|\Psi_2\|_{\mathbb{R}^2} \neq 0. \quad (5)$$

Введем обозначение $S_{\pm} := \{x : x' \in \partial\omega, \pm x_2 > 0\}$; ясно, что $\partial\Pi = \overline{S_- \cup S_+}$. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} (-\Delta - \lambda_0)U &= 0 \text{ в } \Pi, \quad U = 0 \text{ на } S_+, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ на } S_-, \\ U(x) &= (e^{\sqrt{\mu_1 - \lambda_0} x_n} + C_0 e^{-\sqrt{\mu_1 - \lambda_0} x_n}) \phi_1(x') + \mathcal{O}(e^{-\sqrt{\mu_2 - \lambda_0} x_n}), \quad x_n \rightarrow +\infty, \\ U(x) &= c_0 e^{-i\sqrt{\lambda_0} x_n} + \mathcal{O}(e^{\sqrt{\mu_2 - \lambda_0} x_n}), \quad x_n \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (6)$$

где c_0, C_0 — некоторые константы. В работе будет показано, что данная задача однозначно разрешима.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Предположим, что константа c_0 в задаче (6) не равна нулю. Для достаточно больших ℓ существует пара резонансов $\Lambda_j(\ell)$ задачи (1), (2), расположенных в нижней комплексной полуплоскости и сходящихся к λ_0 при $\ell \rightarrow +\infty$. Асимптотики резонансов при $\ell \rightarrow +\infty$ имеют вид*

$$\Lambda^{(j)}(\ell) = \lambda_0 - 2C_0 \sqrt{\mu_1 - \lambda_0} \|\Psi_j\|_{\mathbb{R}^2}^2 e^{-2\sqrt{\mu_1 - \lambda_0} \ell} + \mathcal{O}\left(e^{-(\sqrt{\mu_2 - \lambda_0} + \sqrt{\mu_1 - \lambda_0}) \ell} + \ell^2 e^{-3\sqrt{\mu_1 - \lambda_0} \ell}\right). \quad (7)$$

Константа C_0 не обращается в нуль и верно равенство

$$\operatorname{Im} C_0 = \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}} |c_0|^2 |\omega|. \quad (8)$$

Обсудим основной результат работы. Вначале заметим, что существенный спектр оператора $\mathcal{H}_\ell$ представляет собой положительную полуось $[0, +\infty)$ и по условию $\lambda_0 > 0$. Данная точка, являясь собственным значением оператора $\mathcal{H}_0$, лежит внутри существенного спектра оператора $\mathcal{H}_\ell$ и не соответствует какому-либо собственному значению данного оператора. Вместе с тем мы рассматриваем случай достаточно больших ℓ , когда точки смены граничных условий — многообразия $\{x : x' \in \partial\omega, x_n = \pm\ell\}$ — находятся друг от друга и от носителя потенциала V на достаточно большом расстоянии. В такой ситуации у оператора $\mathcal{H}_\ell$ возникают резонансы в окрестности точки λ_0 . Число резонансов равно двум, что соответствует кратности λ_0 как собственного значения оператора $\mathcal{H}_0$. Каждый из этих резонансов расположен, разумеется, в нижней полуплоскости и теорема 1 даёт его асимптотику (см. (7)). При этом формула (8) позволяет оценить и мнимые части данных резонансов:

$$\operatorname{Im} \Lambda^{(j)}(\ell) = -\sqrt{\lambda_0} |c_0|^2 |\omega| \|\Psi_j\|_{\mathbb{R}^2}^2 e^{-2\sqrt{\mu_1 - \lambda_0} \ell} + \mathcal{O}\left(e^{-(\sqrt{\mu_2 - \lambda_0} + \sqrt{\mu_1 - \lambda_0}) \ell} + \ell^2 e^{-3\sqrt{\mu_1 - \lambda_0} \ell}\right).$$

Отметим ещё, что все обсуждаемые здесь асимптотики экспоненциально малые.

3. Сведение к операторному уравнению. Настоящий раздел посвящён сведению задачи (1), (2) к операторному уравнению в специальном гильбертовом пространстве. Анализ данного уравнения позволит нам затем описать поведение резонансов оператора $\mathcal{H}_\ell$ и доказать теорему 1.

Пусть $\chi = \chi(x_n)$, $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\chi(x_n) = 1 \text{ при } x_n \geq 1, \quad \chi(x_n) = 0 \text{ при } x_n \leq 0.$$

Введём ещё три срезающие функции:

$$\chi_+(x_n) := \chi_+(x_n - a), \quad \chi_-(x_n) := \chi(-a - x_n), \quad \chi_0(x_n, \ell) := \chi\left(x_n - \frac{1}{2} + \ell\right) + \chi\left(\ell + \frac{1}{2} - x_n\right) - 1.$$

В пространстве $L_{2,\text{loc}}(\Pi)$ введём оператор сдвига по правилу:

$$(\mathcal{S}(X)u)(x', x_n) = u(x', x_n - X),$$

где X — некоторое действительное число.

Обозначим $\Pi(A, B) := \{x' \in \omega, A < x_n < B\}$ и определим три вспомогательные краевые задачи. Первая вспомогательная краевая задача имеет вид:

$$(-\Delta - \lambda)u_+ = g_+ \text{ в } \Pi, \quad u_+ = 0 \text{ на } S_-, \quad \frac{\partial u_+}{\partial n} = 0 \text{ на } S_+, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_+(x) &= C_+^+(g_+, \lambda)e^{i\sqrt{\lambda_0}x_n} + \mathcal{O}(e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\nu_2-\lambda}x_n}), & x_n \rightarrow +\infty, \\ u_+(x) &= C_-^+(g_+, \lambda)e^{\sqrt{\mu_1-\lambda}x_n}\phi_1 + \mathcal{O}(e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\mu_2-\lambda_0}x_n}), & x_n \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (10)$$

где g_+ — некоторая функция из $L_2(\Pi)$ с носителем внутри $\overline{\Pi(-1, 1)}$, а $C_\pm^\pm(g_+, \lambda)$ — некоторые линейные функционалы от g_+ , зависящие от параметра λ . Вторая вспомогательная задача выглядит следующим образом:

$$(-\Delta - \lambda)u_- = g_- \text{ в } \Pi, \quad u_- = 0 \text{ на } S_+, \quad \frac{\partial u_-}{\partial n} = 0 \text{ на } S_-, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_-(x) &= C_+^-(g_-, \lambda)e^{-\sqrt{\mu_1-\lambda}x_n}\phi_1 + \mathcal{O}(e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\mu_2-\lambda}x_n}), & x_n \rightarrow +\infty, \\ u_-(x) &= C_-^-(g_-, \lambda)e^{-i\sqrt{\lambda_0}x_n} + \mathcal{O}(e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\nu_2-\lambda}x_n}), & x_n \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (12)$$

где g_- — некоторая функция из $L_2(\Pi)$ с носителем внутри $\overline{\Pi(-1, 1)}$, а $C_\pm^\pm(g_-, \lambda)$ — ещё одна пара линейных функционалов от g_- , зависящих от параметра λ . Введённые задачи однозначно разрешимы, что можно доказать совершенно аналогично лемме 3.4 в [11].

Так как задачи на $u_\pm$ переходят друг в друга при замене $x_n \mapsto -x_n$, то очевидна следующая формула:

$$C_\pm^\pm(g(x', x_n), \lambda) = C_\mp^\pm(g(x', -x_n), \lambda). \quad (13)$$

Через u_0 обозначим действие резольвенты оператора $\mathcal{H}_0$ в точке λ на некоторую функцию g_0 из $L_2(\Pi)$ с носителем внутри $\overline{\Pi(-a, a)}$. Ясно, что функция u_0 есть решение уравнения

$$(\mathcal{H}_0 - \lambda)u_0 = g_0, \quad (14)$$

ведущее себя на бесконечности следующим образом:

$$u_0(x) = C_\pm^0(g_0, \lambda)e^{\mp\sqrt{\mu_1-\lambda}x_n}\phi_1 + \mathcal{O}(e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\mu_2-\lambda}|x_n|}) \quad \text{при } x_n \rightarrow \pm\infty, \quad (15)$$

где $C_\pm^0(g_0, \lambda)$ — некоторые линейные функционалы от g_0 , зависящие от дополнительного параметра λ .

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u_\ell(x) = \chi_0(x_n, \ell)u_0(x) + \chi_+(x_n)(\mathcal{S}(\ell)u_+)(x) + \chi_-(x_n)(\mathcal{S}(-\ell)u_-)(x). \quad (16)$$

По определению срезающих функций χ_0 , $\chi_\pm$ и специальным образом введённых функций u_0 , $u_\pm$, функция u_ℓ , определённая равенством (16), удовлетворяет граничным условиям в задаче (1) и имеет нужное асимптотическое поведение (2) на бесконечности. Остаётся проверить, что функция u_ℓ решает уравнение (1). Для этого подставим (16) в (1):

$$(-\Delta + V - \lambda)\left(\chi_0(x_n, \ell)u_0(x) + \chi_+(x_n)(\mathcal{S}(\ell)u_+)(x) + \chi_-(x_n)(\mathcal{S}(-\ell)u_-)(x)\right) = 0.$$

С учётом определения срезающих функций и уравнений (9), (11), (14), левая часть данного равенства не равна тождественно нулю лишь в трёх областях: $\Pi(-a-1, a+1)$, $\Pi(\ell-1, \ell+1)$, $\Pi(-\ell-1, \ell+1)$. Отметим ещё очевидное равенство

$$\chi_\pm V = 0. \quad (17)$$

Поэтому полученное уравнение эквивалентно переписывается к следующей тройке уравнений:

$$g_0 + \mathcal{T}_+(\lambda, \ell)g_+ + \mathcal{T}_-(\lambda, \ell)g_- = 0, \quad g_+ + \mathcal{T}_+^0(\lambda, \ell)g_0 = 0, \quad g_- + \mathcal{T}_-^0(\lambda, \ell)g_0 = 0, \quad (18)$$

где операторы $\mathcal{T}_\pm = \mathcal{T}_\pm(\lambda, \ell)$, $\mathcal{T}_\pm^0 = \mathcal{T}_\pm^0(\lambda, \ell)$ определены следующими равенствами:

$$\mathcal{T}_\pm g_\pm := \mathcal{L}_\pm \mathcal{S}(\pm \ell)u_\pm, \quad \mathcal{T}_\pm^0 g_0 := \mathcal{L}_\pm^0 \mathcal{S}(\mp \ell)u_0, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\pm &:= -2\chi'_\pm \frac{\partial}{\partial x_n} - \chi''_\pm, \\ \mathcal{L}_-^0 &:= -2\chi' \left(\cdot - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_n} - \chi'' \left(\cdot - \frac{1}{2} \right), \\ \mathcal{L}_+^0 &:= 2\chi' \left(\frac{1}{2} - \cdot \right) \frac{\partial}{\partial x_n} - \chi'' \left(\frac{1}{2} - \cdot \right). \end{aligned}$$

Операторы $\mathcal{T}_\pm = \mathcal{T}_\pm(\lambda, \ell)$ действуют в пространстве $L_2(\Pi(-a-1, a+1))$, а операторы $\mathcal{T}_\pm^0 = \mathcal{T}_\pm^0(\lambda, \ell)$ действуют из пространства $L_2(\Pi(-a-1, a+1))$ в пространство $L_2(\Pi(-1, 1))$. Эти операторы ограничены в силу стандартных теорем о повышении гладкости.

Далее сформулируем ряд вспомогательных утверждений, которые нам понадобятся для анализа уравнений (18).

Лемма 1. *Собственные функции $\psi_0^{(j)}$ оператора $\mathcal{H}_0$ могут быть представлены в виде равномерно сходящегося ряда*

$$\psi_0^{(j)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{0,n}^{(\pm,j)} e^{\mp \sqrt{\mu_n - \lambda_0} x_n} \phi_n \text{ при } \pm x_n > a, \quad \Psi_{0,n}^{(\pm,j)} = \Psi_{\pm}^{(j)}, \quad (20)$$

где $\Psi_{0,n}^{(\pm,j)}$ — некоторые константы, μ_n — собственные значения оператора Лапласа на сечении ω с условием Дирихле, взятые с учётом кратности, а ϕ_n — соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(\omega)$. Сходимость ряда понимается в смысле нормы пространства $W_2^1(\Pi \setminus \Pi(-a, a))$. Коэффициенты $\Psi_{0,n}^{(\pm,j)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{\infty} n |\Psi_{0,n}^{(\pm,j)}|^2 \leq C \|\psi_0^{(j)}\|_{W_2^1(\Pi(-a,a))}^2 \quad (21)$$

с некоторой константой C , не зависящей от $\psi_0^{(j)}$.

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 3.1 в [11].

Лемма 2. *Для всех $g \in L_2(\Pi)$, удовлетворяющих условию $\text{supp } g \subseteq \Pi(-a-1, a+1)$, и всех λ из достаточно малой окрестности λ_0 имеет место представление*

$$(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} f = \sum_{j=1}^2 \frac{(f, \psi_0^{(j)})_{L_2(\Pi)}}{\lambda_0 - \lambda} \psi_0^{(j)} + \mathcal{R}_0(\lambda) f, \quad (22)$$

где $\mathcal{R}_0(\lambda)$ — редуцированная резольвента оператора $\mathcal{H}_0$, голоморфная по λ для всех λ из малой окрестности точки λ_0 и действующая в ортогональное дополнение к собственным функциям $\psi_0^{(j)}$, $j = 1, 2$. Имеют место оценки

$$\|\mathcal{R}_0(\lambda) f\|_{W_2^2(\Pi \setminus \Pi(-b,b))} \leq C b e^{-\varrho b} \|f\|_{L_2(\Pi(-a-1, a+1))}, \quad (23)$$

где

$$\varrho := \min \left\{ \sqrt{\mu_1 - \lambda_0}, \text{Re } \sqrt{\mu_1 - \lambda} \right\},$$

$b \geq a+1$, и C — некоторая константа, не зависящая от f , λ , b .

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.2 в [11].

Лемма 3. Для всех функций $f \in L_2(\Pi)$, удовлетворяющих условию $\text{supp } f \subseteq \Pi(-1, 1)$, и всех λ из малой окрестности точки λ_0 при $\ell \rightarrow +\infty$ операторы $\mathcal{T}_{\pm}^0$ представимы в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{-}^0(\lambda, \ell)f &= \sum_{j=1}^2 \frac{(f, \psi_0^{(j)})_{L_2(\Pi)}}{\lambda_0 - \lambda} \mathcal{L}_{-}^0 \mathcal{S}(\ell) \psi_0^{(j)} + \mathcal{R}_{-}(\lambda, \ell)f, & \mathcal{R}_{-}(\lambda, \ell) &:= \mathcal{L}_{-}^0 \mathcal{S}(\ell) \mathcal{R}_0(\lambda), \\ \mathcal{T}_{+}^0(\lambda, \ell)f &= \sum_{j=1}^2 \frac{(f, \psi_0^{(j)})_{L_2(\Pi)}}{\lambda_0 - \lambda} \mathcal{L}_{+}^0 \mathcal{S}(-\ell) \psi_0^{(j)} + \mathcal{R}_{+}(\lambda, \ell)f, & \mathcal{R}_{+}(\lambda, \ell) &:= \mathcal{L}_{+}^0 \mathcal{S}(-\ell) \mathcal{R}_0(\lambda),\end{aligned}$$

где операторы $\mathcal{R}_{\pm}(\lambda, \ell) : L_2(\Pi(-a-1, a+1)) \rightarrow L_2(\Pi(-1, 1))$ голоморфны по λ из малой окрестности точки λ_0 и удовлетворяют оценке

$$\|\mathcal{R}_{\pm}(\lambda, \ell)f\|_{W_2^2(\Pi(-1, 1))} \leq C \ell e^{-\ell} \|f\|_{L_2(\Pi(-1, 1))},$$

причем константа C не зависит от f , ℓ и λ .

Утверждение последней леммы следует из равенств (19) и леммы 2.

Лемма 4. Для всех $f \in L_2(\Pi)$, удовлетворяющих условию $\text{supp } f \subseteq \Pi(-1, 1)$, операторы $\mathcal{T}_{\pm}(\lambda, \ell)$ равномерно ограничены, и справедлива оценка

$$\|\mathcal{T}_{\pm}(\lambda, \ell)f\|_{W_2^2(\Pi(-1, 1))} \leq C \ell e^{-\ell} \|f\|_{L_2(\Pi(-1, 1))} \quad (24)$$

где C — константа, не зависящая от f , λ , ℓ .

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.5 в [11].

Вернёмся к уравнению (18). Введём в рассмотрение специальное гильбертово пространство

$$\mathfrak{L} := \left\{ h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, h_i \in L_2(\mathbb{R}^n), i = 1, 2, 3 \right\}$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathfrak{L}} = \sum_{i=1}^3 (u_i, v_i)_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Введём следующие обозначения:

$$g := \begin{pmatrix} g_- \\ g_0 \\ g_+ \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}, \quad \mathcal{T}(\lambda, \ell) := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{T}_{-}^0(\lambda, \ell) & 0 \\ \mathcal{T}_{-}(\lambda, \ell) & 0 & \mathcal{T}_{+}(\lambda, \ell) \\ 0 & \mathcal{T}_{+}^0(\lambda, \ell) & 0 \end{pmatrix}.$$

С учётом введённых обозначений уравнение (18) переписывается в виде

$$g + \mathcal{T}(\lambda, \ell)g = 0.$$

Последнее равенство представляет собой операторное уравнение в пространстве $\mathfrak{L}$. Для его анализа воспользуемся специальной версией метода Бирмана—Швингера, описанной в [1, 3], которая позволяет свести поиск резонансов краевой задачи (1), (2) к отысканию нулей некоторой явно заданной функции.

Пользуясь леммой 3, получаем представление

$$g + \sum_{j=1}^2 \frac{(g, \Psi_0^{(j)})_{\mathfrak{L}}}{\lambda_0 - \lambda} \Phi^{(j)} + \mathcal{R}(\lambda, \ell)g = 0 \quad (25)$$

где

$$\Psi_0^{(j)} := \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0^{(j)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi^{(j)} := \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{+}^0 \mathcal{S}(-\ell) \psi_0^{(j)} \\ 0 \\ \mathcal{L}_{-}^0 \mathcal{S}(\ell) \psi_0^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}(\lambda, \ell) := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}_{-}(\lambda, \ell) & 0 \\ \mathcal{T}_{-}(\lambda, \ell) & 0 & \mathcal{T}_{+}(\lambda, \ell) \\ 0 & \mathcal{R}_{+}(\lambda, \ell) & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу леммы 1 вектор-функция $\Phi^{(j)}$ экспоненциально убывает, и имеет место оценка

$$\|\Phi^{(j)}\|_{\mathfrak{L}} = \mathcal{O}(e^{-\sqrt{\mu_1 - \lambda_0} \ell}). \quad (26)$$

Объединяя первое и последнее слагаемое в (25), имеем

$$(\mathbf{I} + \mathcal{R}(\lambda, \ell))g + \sum_{j=1}^2 \frac{(g, \Psi_0^{(j)})_{\mathfrak{L}}}{\lambda_0 - \lambda} \Phi^{(j)} = 0, \quad (27)$$

где $\mathbf{I}$ — единичный оператор. Для анализа последнего уравнения нам понадобится ещё одна лемма. Напомним, что было введено обозначение $\varrho = \min \left\{ \sqrt{\mu_1 - \lambda_0}, \operatorname{Re} \sqrt{\mu_1 - \lambda} \right\}$.

Лемма 5. Для всех $f \in \mathfrak{L}$ и всех λ из малой окрестности точки λ_0 при достаточно больших ℓ имеет место оценка

$$\|\mathcal{R}(\lambda, \ell)f\|_{\mathfrak{L}} \leq C\ell e^{-\varrho\ell} \|f\|_{\mathfrak{L}}$$

с константой C , не зависящей от f , λ и ℓ .

Утверждение данной леммы следует непосредственно из лемм 3 и 4.

В силу леммы 5 для достаточно больших ℓ существует обратный оператор $(\mathbf{I} + \mathcal{R}(\lambda, \ell))^{-1}$. Действуя этим оператором на обе части уравнения (27), получаем:

$$g + \sum_{j=1}^2 \frac{(g, \Psi_0^{(j)})_{\mathfrak{L}}}{\lambda_0 - \lambda} (\mathbf{I} + \mathcal{R}(\lambda, \ell))^{-1} \Phi^{(j)} = 0.$$

Вычислим теперь скалярное произведение левой и правой части последнего равенства с вектор-функцией $\Psi_0^{(q)}$ в пространстве $\mathfrak{L}$:

$$(g, \Psi_0^{(q)})_{\mathfrak{L}} + \sum_{j=1}^2 \frac{(g, \Psi_0^{(j)})_{\mathfrak{L}}}{\lambda_0 - \lambda} \left((\mathbf{I} + \mathcal{R}(\lambda, \ell))^{-1} \Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)} \right)_{\mathfrak{L}} = 0. \quad (28)$$

Введем обозначение

$$A(\lambda, \ell) = \begin{pmatrix} A_{11}(\lambda, \ell) & A_{12}(\lambda, \ell) \\ A_{21}(\lambda, \ell) & A_{22}(\lambda, \ell) \end{pmatrix}, \quad A_{qj}(\lambda, \ell) = \left((\mathbf{I} + \mathcal{R}(\lambda, \ell))^{-1} \Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)} \right)_{\mathfrak{L}}, \quad j, q = 1, 2, \quad (29)$$

$\mathbf{z}^{(j)}$, $j = 1, 2$ — вектор с компонентами $z_i^{(j)} = (g, \Psi_0^{(i)})_{\mathfrak{L}}$, $i = 1, 2$. С учётом введённых обозначений равенство (28) примет вид

$$\left(A(\lambda, \ell) + (\lambda - \lambda_0) \mathbf{E} \right) \mathbf{z}^{(j)} = 0. \quad (30)$$

Будем искать ненулевое решение последнего уравнения, так как в противном случае $\mathbf{z}^{(j)} \equiv 0$, $g \equiv 0$ и соответствующее решение уравнений (18) оказывается тривиальным. Последнее уравнение имеет ненулевое решение, если выполнено соотношение

$$\det \left(A(\lambda, \ell) - (\lambda - \lambda_0) \mathbf{E} \right) = 0. \quad (31)$$

Решая данное уравнение как квадратное относительно $\lambda - \lambda_0$, приходим к эквивалентной системе двух уравнений:

$$\lambda - \lambda_0 = -\frac{1}{2} \left(A_{11}(\lambda, \ell) + A_{12}(\lambda, \ell) \pm \sqrt{(A_{11}(\lambda, \ell) - A_{22}(\lambda, \ell))^2 + 4A_{12}(\lambda, \ell)A_{21}(\lambda, \ell)} \right). \quad (32)$$

В следующем разделе мы исследуем разрешимость данных уравнений при больших значениях параметра ℓ . Решения данных уравнений определяют числа λ , при которых задача (1), (2) имеет нетривиальное решение, т.е. искомые резонансы.

4. Существование и асимптотики резонансов. В данном разделе мы докажем, что каждое из уравнений (32) имеет единственное решение при достаточно больших ℓ и вычислим первые члены асимптотического разложения корня.

Исследование уравнений (32) начнём с анализа поведения функций $A_{qj}(\lambda, \ell)$, представленных равенством (29). Используя формулу

$$(I + \mathcal{R}(\lambda, \ell))^{-1} = I - \mathcal{R}(\lambda, \ell) + \mathcal{R}^2(\lambda, \ell)(I + \mathcal{R}(\lambda, \ell))^{-1}, \quad (33)$$

получаем:

$$A_{qj}(\lambda, \ell) = \left(\Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)} \right)_{\mathfrak{L}} - \left(\mathcal{R}(\lambda, \ell) \Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)} \right)_{\mathfrak{L}} + \left(\mathcal{R}^2(\lambda, \ell) (I + \mathcal{R}(\lambda, \ell))^{-1} \Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)} \right)_{\mathfrak{L}}.$$

Первое слагаемое в правой части последнего равенства $\left(\Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)} \right)_{\mathfrak{L}} = 0$ в силу определения функций $\Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)}$ в специальном гильбертовом пространстве $\mathfrak{L}$. Кроме того, для резольвенты $\mathcal{R}(\lambda, \ell)$ верно представление

$$\mathcal{R}(\lambda, \ell) = \mathcal{R}(\lambda_0, \ell) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\mathcal{R}}{d\lambda}(z, \ell) dz = \mathcal{R}(\lambda_0, \ell) + \tilde{\mathcal{R}}(\lambda, \ell), \quad \tilde{\mathcal{R}}(\lambda, \ell) := \int_{\lambda_0}^{\lambda} \mathcal{R}^2(z, \ell) dz,$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку в комплексной плоскости между указанными точками. Следовательно, имеет место равенство

$$A_{qj}(\lambda, \ell) = \left(\mathcal{R}(\lambda, \ell) \Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)} \right)_{\mathfrak{L}} + \left(\tilde{\mathcal{R}}(\lambda, \ell) \Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)} \right)_{\mathfrak{L}} + \left(\mathcal{R}^2(\lambda, \ell) (I + \mathcal{R}(\lambda, \ell))^{-1} \Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)} \right)_{\mathfrak{L}}. \quad (34)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части последнего равенства в точке $\lambda = \lambda_0$:

$$\left(\mathcal{R}(\lambda_0, \ell) \Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)} \right)_{\mathfrak{L}} = M_{jq}^+ + M_{jq}^-, \quad M_{jq}^{\pm} := \left(\mathcal{T}_{\pm} \mathcal{L}_{\pm}^0 \mathcal{S}(\mp \ell) \psi_0^{(j)}, \psi_0^{(q)} \right)_{L_2(\Pi)}. \quad (35)$$

Пользуясь определением оператора сдвига, финитностью потенциала V и уравнением на функции $\psi_0^{(j)}$, для достаточно больших ℓ получаем:

$$M_{jq}^{\pm} := \int_{\Pi} \psi_0^{(q)} \mathcal{T}_{\pm} \mathcal{L}_{\pm}^0 \mathcal{S}(\mp \ell) \psi_0^{(j)} dx = - \int_{\Pi} \psi_0^{(q)} \mathcal{T}_{\pm} (\Delta + \lambda_0) \chi \left(\pm \left(x_n - \frac{1}{2} \right) \right) \psi_0^{(j)}(x', x_n \pm \ell) dx.$$

Пользуясь теперь асимптотическим поведением (3), приходим к соотношениям:

$$M_{jq}^{\pm} := e^{-\sqrt{\mu_1 - \lambda_0} \ell} \Psi_{0,1}^{(\pm, j)} \int_{\Pi} \psi_0^{(q)} \mathcal{T}_{\pm} h_{\pm} dx + \mathcal{O}(e^{-\sqrt{\mu_2 - \lambda_0} \ell}), \quad (36)$$

где введено обозначение

$$h_{\pm}(x) := -(\Delta + \lambda_0) \left(e^{\mp \sqrt{\mu_1 - \lambda_0} x_n} \chi \left(\pm \left(x_n - \frac{1}{2} \right) \right) \phi_1(x') \right). \quad (37)$$

Отметим, что в силу уравнения на функцию ϕ_1 , функции $h_{\pm}$ финитны и их носители лежат внутри $\overline{\Pi(-1, 1)}$.

Пусть $v_{\pm} = v_{\pm}(x)$ — решения краевых задач (9)–(10) и (11)–(12) с правыми частями $h_{\pm}(x)$ соответственно и $\lambda = \lambda_0$. Прямыми вычислениями с учётом определения операторов $\mathcal{T}_{\pm}$ и равенства (17), получаем:

$$\mathcal{T}_{\pm} h_{\pm} = (-\Delta + V - \lambda_0) \chi_{\pm} \mathcal{S}(\pm \ell) v_{\pm} \text{ в } \Pi(-a - 1, a + 1), \quad \text{supp } \mathcal{T}_{\pm} h_{\pm} \subseteq \overline{\Pi(-a - 1, a + 1)}.$$

Последние соотношения и известное поведение функций $v_{\pm}$ на бесконечности позволяют переписать равенства (36) следующим образом:

$$M_{jq}^{\pm} = -\Psi_j^{\pm} e^{-2\sqrt{\mu_1 - \lambda_0} \ell} C_{\mp}^{\pm}(h_{\pm}, \lambda_0) \int_{\Pi} \psi_0^{(q)} (-\Delta + V - \lambda_0) e^{\pm \sqrt{\mu_1 - \lambda_0} x_n} \chi_{\pm} \phi_1 dx + \\ + \mathcal{O}(e^{-(\sqrt{\mu_2 - \lambda_0} + \sqrt{\mu_1 - \lambda_0}) \ell}), \quad (38)$$

где $C_{\pm}^{\mp}(h_{\pm}, \lambda)$ — константы из асимптотик (10), (12) функций $v_{\pm}(x)$ при $x_n \rightarrow \mp\infty$, $j, q = 1, 2$.

Вычислим интеграл в правой части (38). Для этого проинтегрируем по частям по области $\Pi(-R, R)$ с фиксированным R , учитывая уравнения и граничные условия для функций $\psi_0^{(q)}$ и ϕ_1 :

$$\begin{aligned} \int_{\Pi(-R, R)} \psi_0^{(q)}(-\Delta + V - \lambda_0) e^{\pm\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}x_n} \chi_{\pm} \phi_1 dx = \\ = \int_{\omega} \left(\psi_0^{(q)} \frac{\partial}{\partial x_n} e^{\pm\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}x_n} \chi_{\pm} \phi_1 - e^{\pm\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}x_n} \chi_{\pm} \phi_1 \frac{\partial \psi_0^{(q)}}{\partial x_n} \right) \Big|_{x_n = -R} ds - \\ - \int_{\omega} \left(\psi_0^{(q)} \frac{\partial}{\partial x_n} e^{\pm\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}x_n} \chi_{\pm} \phi_1 - e^{\pm\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}x_n} \chi_{\pm} \phi_1 \frac{\partial \psi_0^{(q)}}{\partial x_n} \right) \Big|_{x_n = R} ds. \end{aligned}$$

Вычислим теперь предел данного выражение при $R \rightarrow +\infty$, учитывая при этом уравнение на собственные функции $\psi_0^{(q)}$, граничные условия на функции $\psi_0^{(q)}$, $v_{\pm}$, определения срезающих функций $\chi_{\pm}$, функции ϕ_1 и поведение функций $\psi_0^{(q)}$, $v_{\pm}$ на бесконечности:

$$\int_{\Pi} \psi_0^{(q)}(-\Delta + V - \lambda_0) e^{\pm\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}x_n} \chi_{\pm} \phi_1 dx = -2\sqrt{\mu_1 - \lambda_0} \Psi_q^{\pm}. \quad (39)$$

Подставляя теперь полученные соотношения в равенства (38), получаем

$$M_{jq}^{\pm} = -2\sqrt{\mu_1 - \lambda_0} e^{-2\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}\ell} \Psi_q^{\pm} \Psi_j^{\pm} C_{\mp}^{\pm}(h_{\pm}, \lambda) + \mathcal{O}\left(e^{-(\sqrt{\mu_2 - \lambda_0} + \sqrt{\mu_1 - \lambda_0})\ell}\right). \quad (40)$$

Отсюда и из (35), (36) следует, что

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{R}(\lambda_0, \ell) \Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)} \right)_{\mathcal{E}} = -2\sqrt{\mu_1 - \lambda_0} e^{-2\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}\ell} \left(\Psi_q^+ \Psi_j^+ C_-^+(h_+, \lambda_0) + \Psi_q^- \Psi_j^- C_+^-(h_-, \lambda_0) \right) + \\ + \mathcal{O}\left(e^{-(\sqrt{\mu_2 - \lambda_0} + \sqrt{\mu_1 - \lambda_0})\ell}\right). \quad (41) \end{aligned}$$

Отметим ещё, в что силу равенства (13) верно

$$C_+^-(h_-, \lambda_0) = C_-^+(h_+, \lambda_0). \quad (42)$$

Кроме того, из вида функций $h_{\pm}$ и определения функций $v_{\pm}$ легко следует, что

$$v_- - e^{\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}x_n} \chi \left(\frac{1}{2} - x_n \right) \phi_1(x') = -U;$$

однозначная разрешимость задачи (6) легко выводится из однозначной разрешимости задачи (11)–(12). Следовательно, с учётом равенства (42) имеем

$$C_+^-(h_-, \lambda_0) = C_-^+(h_+, \lambda_0) = -C_0. \quad (43)$$

Оценим теперь оставшиеся слагаемые в равенстве (34). Пользуясь леммой 5, соотношением (26) и определением собственных функций $\psi_0^{(q)}$, получаем

$$\begin{aligned} \left| \left(\mathcal{R}^2(\lambda, \ell) (\mathbf{I} + \mathcal{R}(\lambda, \ell))^{-1} \Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)} \right)_{\mathcal{E}} \right| = \mathcal{O}\left(\ell^2 e^{-(2\varrho + \sqrt{\mu_1 - \lambda_0})\ell}\right), \\ \left| \left(\tilde{\mathcal{R}}(\lambda, \ell) \Phi^{(j)}, \Psi_0^{(q)} \right)_{\mathcal{E}} \right| = \mathcal{O}\left(|\lambda - \lambda_0| e^{-(2\varrho + \sqrt{\mu_1 - \lambda_0})\ell}\right). \end{aligned}$$

Подставляя теперь два последних соотношения и (41), (42) в (34) и используя определение векторов Ψ_j (см. раздел 2), выводим

$$\begin{aligned} A_{qj}(\lambda, \ell) = 2C_0 \sqrt{\mu_1 - \lambda_0} e^{-2\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}\ell} (\Psi_q, \Psi_j)_{\mathbb{R}^2} + \\ + \mathcal{O}\left(e^{-(\sqrt{\mu_2 - \lambda_0} + \sqrt{\mu_1 - \lambda_0})\ell} + (\ell^2 + |\lambda - \lambda_0|) e^{-(2\varrho + \sqrt{\mu_1 - \lambda_0})\ell}\right). \quad (44) \end{aligned}$$

Выразим константу C_0 через c_0 . Для этого дважды проинтегрируем по частям в интеграле:

$$0 = \int_{\Pi(-R,R)} \overline{U}(\Delta + \lambda_0)U \, dx$$

с учётом задачи (6) и перейдём к пределу при $R \rightarrow +\infty$. Тогда получим

$$-4i\sqrt{\mu_1 - \lambda_0} \operatorname{Im} C_0 + 2i\sqrt{\lambda_0}|c_0|^2|\omega| = 0,$$

откуда следует равенство (8). Так как по предположению константа c_0 не обращается в нуль, то же верно и для C_0 .

Лемма 6. При достаточно больших ℓ каждое из уравнений (32) имеет единственное решение. Для этих решений $\Lambda^{(j)}(\ell)$, $j = 1, 2$, справедливо равенство

$$\Lambda^{(j)}(\ell) = \lambda_0 - 2C_0\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}\|\Psi_j\|_{\mathbb{R}^2}^2 e^{-2\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}\ell} + \mathcal{O}\left(e^{-(\sqrt{\mu_2 - \lambda_0} + \sqrt{\mu_1 - \lambda_0})\ell} + \ell^2 e^{-3\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}\ell}\right). \quad (45)$$

Доказательство. Перепишем уравнения (32) в виде

$$\lambda - \lambda_0 + G_j(\lambda, \ell) = 0, \quad (46)$$

где

$$G_1(\lambda, \ell) := \frac{1}{2} \left(A_{11}(\lambda, \ell) + A_{12}(\lambda, \ell) + \sqrt{(A_{11}(\lambda, \ell) - A_{22}(\lambda, \ell))^2 + 4A_{12}(\lambda, \ell)A_{21}(\lambda, \ell)} \right),$$

$$G_2(\lambda, \ell) := \frac{1}{2} \left(A_{11}(\lambda, \ell) + A_{12}(\lambda, \ell) - \sqrt{(A_{11}(\lambda, \ell) - A_{22}(\lambda, \ell))^2 + 4A_{12}(\lambda, \ell)A_{21}(\lambda, \ell)} \right).$$

Из асимптотик (44), условий (4), (5) и леммы 5 следует, что при λ , достаточно близких к λ_0 , и достаточно больших ℓ для подкоренных выражений в функциях G_j верно следующее:

$$(A_{11}(\lambda, \ell) - A_{22}(\lambda, \ell))^2 + 4A_{12}(\lambda, \ell)A_{21}(\lambda, \ell) = 4C_0^2(\mu_1 - \lambda_0)e^{-4\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}\ell}(\|\Psi_1\|_{\mathbb{R}^2}^2 - \|\Psi_2\|_{\mathbb{R}^2}^2) +$$

$$+ \mathcal{O}\left(e^{-(\sqrt{\mu_2 - \lambda_0} + 3\sqrt{\mu_1 - \lambda_0})\ell} + (\ell^2 + |\lambda - \lambda_0|)e^{-(2\ell + 3\sqrt{\mu_1 - \lambda_0})\ell}\right).$$

Следовательно, корни в определении функций G_j аналитичны по λ из малой окрестности λ_0 и достаточно больших ℓ и тоже верно для функций G_j . Более того, справедливы оценки

$$|G_j(\lambda, \ell)| \leq Ce^{-2\sqrt{\mu_1 - \lambda_0}\ell},$$

где константа C не зависит от λ и ℓ . Используя эти оценки и применяя теорему Руше к функциям $\lambda \mapsto \lambda - \lambda_0 + G_j(\lambda)$, немедленно заключаем, что каждое из уравнений (46) имеет единственное решение в окрестности точки λ_0 . Асимптотика для этих решений легко выводится из (44), откуда уже получаем (45). Лемма доказана. $\square$

Утверждение последней леммы завершает доказательство теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов Д. И. Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном// Мат. сб. — 2006. — 197, № 4. — С. 3–32.
2. Борисов Д. И., Головина А. М. О резольвентах периодических операторов с разбегающимися возмущениями// Уфим. мат. ж. — 2012. — 4, № 2. — С. 65–74.
3. Гадильшин Р. Р. О локальных возмущениях оператора Шредингера на оси// Теор. мат. физ. — 2002. — 132, № 1. — С. 97–104.
4. Головина А. М. Резольвенты операторов с разбегающимися возмущениями// Мат. заметки. — 2012. — 91, № 3. — С. 464–466.
5. Головина А. М. О спектре периодических эллиптических операторов с разбегающимися возмущениями в пространстве// Алгебра и анализ. — 2013. — 25, № 5. — С. 32–60.
6. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1967. — 16. — С. 209–292.

7. *Филонов Н.* Об одном неравенстве на собственные числа задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа// Алгебра и анализ. — 2004. — 16, № 2. — С. 172–176.
8. *Ahlrichs R.* Convergence properties of the intermolecular Force series ($1/R$ -expansion)// Theor. Chem. Acta. — 1976. — 66, № 1. — P. 7–15.
9. *Aktosun T., Klaus M., van der Mee C.* On the number of bound states for the one-dimensional Schrödinger equation// J. Math. Phys. — 1998. — 39, № 9. — P. 4249–4259.
10. *Aventini P., Seiler R.* On the electronic spectrum of the diatomic molecular ion// Commun. Math. Phys. — 1975. — 41, № 2. — P. 119–134.
11. *Borisov D., Exner P., Golovina A.* Tunneling resonances in systems without a classical trapping// J. Math. Phys. — 2013. — 54, № 1. — 012102.
12. *Borisov D. I.* Asymptotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation// Math. Phys. Anal. Geom. — 2007. — 10, № 2. — P. 155–196.
13. *Borisov D. I.* Distant perturbation of the Laplacian in a multi-dimensional space// Ann. Inst. H. Poincaré. — 2007. — 8, № 7. — P. 1371–1399.
14. *Borisov D. I., Exner P.* Exponential splitting of bound in a waveguide with a pair of distant windows// J. Phys. A: Math. Gen. — 2004. — 37, № 10. — P. 3411–3428.
15. *Borisov D., Exner P.* Distant perturbation asymptotics in window-coupled waveguides. I. The non-threshold case// J. Math. Phys. — 2006. — 47, № 11. — 113502.
16. *Bulla W., Gesztesy F., Renger W., Simon B.* Weakly coupled bound states in quantum waveguides// Proc. Am. Math. Soc. — 1997. — 125, № 5. — P. 1487–1495.
17. *Davies E. B.* The twisting trick for double well Hamiltonians// Commun. Math. Phys. — 1982. — 85, № 3. — P. 471–479.
18. *Golovina A. M.* On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations in the space// Russ. J. Math. Phys. — 2012. — 19, № 2. — P. 182–192.
19. *Harrell E. M.* Double wells// Commun. Math. Phys. — 1980. — 75, № 3. — P. 239–261.
20. *Harrell E. M., Klaus M.* On the double-well problem for Dirac operators// Ann. Inst. H. Poincaré. — 1983. — 38, № 2. — P. 153–166.
21. *Høegh-Krohn R., Mebkhout M.* The $1/r$ -expansion for the critical multiple well problem// Commun. Math. Phys. — 1983. — 91, № 1. — P. 65–73.
22. *Klaus M.* Some remarks on double-wells in one and three dimensions// Ann. Inst. H. Poincaré. — 1981. — 34, № 4. — P. 405–417.
23. *Klaus M., Simon B.* Binding of Schrödinger particles through conspiracy of potential wells// Ann. Inst. H. Poincaré. Sect. A. — 1979. — 30, № 2. — P. 83–87.
24. *Kostykin V., Schrader R.* Cluster properties of one particle Schrödinger operators, I// Rev. Math. Phys. — 1994. — 6, № 5. — P. 833–853.

Борисов Денис Иванович

Институт математики с вычислительным центром,

Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия;

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия;

Университет Градца Кралове, Градец Кралове, Чешская Республика

E-mail: borisovdi@yandex.ru

Головина Анастасия Михайловна

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: nastya_gm@mail.ru



О ЧАСТОТЕ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

© 2019 г. Л. А. КАЛЯКИН

Аннотация. При исследовании нелинейных колебаний часто возникает вопрос о зависимости частоты или периода от энергии. В данной работе выясняются условия, при которых частота зависит от энергии монотонно. Кроме того, для колебаний вблизи сепаратрисных траекторий строится асимптотика периода по энергии.

Ключевые слова: нелинейные колебания, период, частота, асимптотика.

ON THE FREQUENCY OF A NONLINEAR OSCILLATOR

© 2019 L. A. KALYAKIN

ABSTRACT. In the study of nonlinear oscillations, the question on the dependence of the frequency or the period on the energy often arises. In this paper, we find conditions under which the frequency depends on the energy monotonically. In addition, for oscillations near separatrix trajectories, an asymptotics of the period with respect to the energy is constructed.

Keywords and phrases: nonlinear oscillations, period, frequency, asymptotics.

AMS Subject Classification: 34E10

1. Постановка задачи. Пусть нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + U'(x) = 0 \quad (1)$$

задается гладким потенциалом $U(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Такое уравнение легко интегрируется:

$$t + t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad t_0, E = \text{const}.$$

Константа E представляет значение первого интеграла; она определяется выражением

$$E = \frac{1}{2}y^2 + U(x), \quad y = \dot{x}(t). \quad (2)$$

Вдоль траектории любого решения $x = x(t)$, $y = \dot{x}(t)$ величина E постоянна; ее значение принято называть энергией.

Исходным объектом данного исследования является двухпараметрическое семейство периодических решений $x(t + t_0, E)$ с параметрами t_0, E . Ставится вопрос о свойствах периода колебаний $T = T(E)$ как функции от E . Требуется выяснить условия на потенциал, при которых эта функция монотонна, а также найти асимптотику $T(E)$ на границе осцилляционной области. Эти свойства играют ключевую роль при исследовании конкретных задач о возмущении нелинейных колебаний (см. [1–4]). Предъявляемые результаты демонстрируют применение известной техники анализа интегралов и в частных случаях известны.

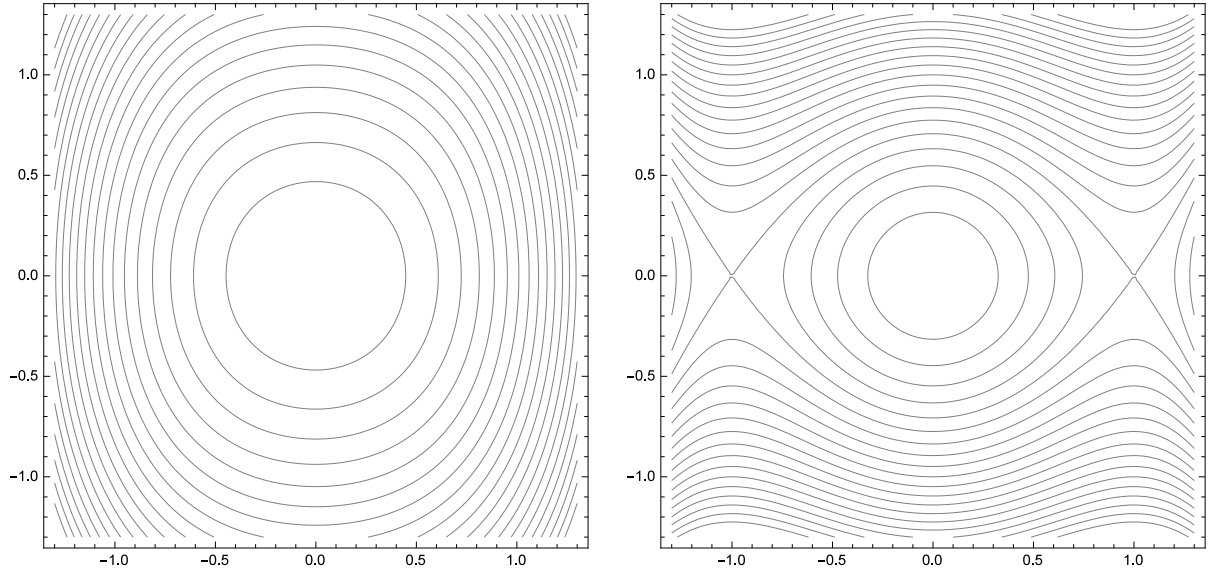


Рис. 1. Фазовый портрет уравнения (1) с потенциалом $U = x^2 + w x^4$. Слева $w = 1/2$, осцилляционная область соответствует плоскости без точки $(0, 0)$. Справа $w = -1/2$, осцилляционная область заключена между сепаратрисами.

2. Исходные ограничения. Периодические решения соответствуют замкнутым траекториям на фазовой плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Замкнутые траектории заполняют область, называемую осцилляционной. Рассматривается ситуация в одной из связных частей этой области; обозначим ее $D \subset \mathbb{R}^2$. Предполагается, что ее граница $\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ состоит из двух непересекающихся связных компонент. Будем различать внутреннюю часть границы Γ_0 и внешнюю часть Γ_1 . Внутренняя часть может состоять из одной неподвижной точки типа центр, либо из сепаратрис с седловыми точками. Эта часть границы окружена замкнутыми траекториями. Внешняя граница (если существует) всегда состоит из сепаратрис с седловыми точками. Отметим, что все неподвижные точки находятся на оси $y = 0$ и определяются экстремумами потенциала $U'(x) = 0$. Предполагается, что седловые точки с координатами $x = x_s$ являются невырожденными: $U''(x_s) < 0$; они соответствуют строгим максимумам потенциала. Характерные примеры фазовых портретов с осцилляционными областями изображены на рис. 1, 2.

На отрезках оси $y = 0$ между внутренней и внешней границами нет неподвижных точек, т.е. нет экстремумов потенциала. Поэтому любая замкнутая траектория пересекает ось $y = 0$ только в двух точках $x = x_{\pm}(E)$, которые будем называть точками поворота траектории. Эти точки расположены на оси по разные стороны от внутренней границы Γ_0 . Они определяются уравнением $U(x) = E$ и очевидно зависят от E , т.е. от выбора траектории.

При сдвиге переменной x на константу структура уравнения (1) сохраняется. Поэтому можно считать, что начало координат $x = 0$ выбрано на внутренней границе Γ_0 . Например, $x = 0$ совпадает с неподвижной точкой (центр либо седло). При таком выборе системы отсчета точки поворота имеют x -координаты разных знаков: $x_- < 0 < x_+$. Ясно, что от выбора системы координат зависит выражение для потенциала $U(x)$.

Ввиду возможности сдвига потенциала на константу можно считать $U(0) = 0$. В таком случае замкнутые траектории из рассматриваемой области D описываются уравнением (2) с энергиями из интервала $E \in (0, E_s)$. Предельное значение E_s (если оно конечно) соответствует сепаратрисной траектории и определяется значением потенциала в любой из седловых точек на внешней границе $E_s = U(x_s)$, $(x_s, 0) \in \Gamma_1$.

Период $T = T(E)$ соответствующих решений зависит от E и определяются через интеграл по траектории. Ввиду симметрии траектории относительно оси $y = 0$ период определяется через

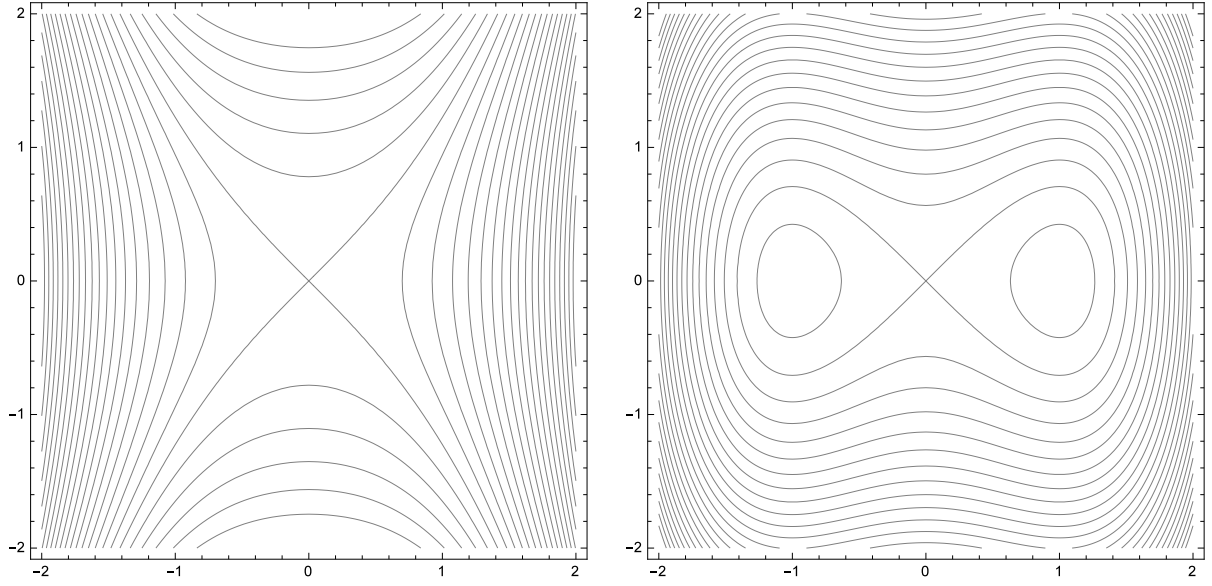


Рис. 2. Фазовый портрет уравнения (1) с потенциалом $U = -x^2 + w x^4$. Слева $w = -1/2$, осцилляционная область отсутствует. Справа $w = 1/2$, осцилляционная область состоит из трех подобластей, отделенных сепаратрисами

интеграл по промежутку между точками поворота:

$$T(E) = \sqrt{2} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (3)$$

Соответственно определяется частота $\Omega(E) = 2\pi/T(E)$.

Координаты точек поворота $x_{\pm} = x_{\pm}(E)$ — простые нули подкоренного выражения. Таким образом, период выражается через интеграл со слабой особенностью. В таком виде интеграл нельзя формально дифференцировать по параметру E . Для вычисления производных функции $T(E)$ следует выписать другие, более подходящие представления. Для этого вводится пара интегралов

$$T_{\pm}(E) = \pm \int_0^{x_{\pm}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (4)$$

которые в сумме представляют период: $T = \sqrt{2}[T_+ + T_-]$. Затем у функции $E - U(x) \equiv U(x_{\pm}(E)) - U(x)$ выделяются множители $x_{\pm} - x$, определяющие нули, и делается замена переменных $x = x_{\pm}\xi$, $dx = x_{\pm}d\xi$. В результате для интегралов получаются представления

$$T_{\pm}(E) = |x_{\pm}(E)| \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{U(x_{\pm}(E)) - U(x_{\pm}(E)\xi)}} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi} \sqrt{W_{\pm}(\xi, E)}}$$

с функциями

$$W_{\pm}(\xi, E) = \frac{U(x_{\pm}(E)) - U(x_{\pm}(E)\xi)}{(1 - \xi)x_{\pm}^2(E)}.$$

В этом представлении подынтегральная функция будет гладкой по E , и после дифференцирования интегралы сходятся (пока корни $x_{\pm}(E)$ остаются простыми).

3. Примеры. Рассмотрим пару потенциалов $U(x) = x^2 + wx^4$, которые отличаются знаком множителя w , например $w = \pm 1/2$ (см. рис. 1). В случае $w > 0$ осцилляционная область совпадает со всей плоскостью за исключением точки равновесия $(0, 0)$; энергия периодических решений не ограничена: $0 < E < \infty$. При $w < 0$ имеется пара седловых точек с координатами $x_s = \pm 1/\sqrt{-2w}$. Вместе с соответствующими ветвями сепаратрис они представляют собой внешнюю границу осцилляционной области. Эти точки определяют предельное значение энергии для периодических решений $E_s = 1/4w$. Точки поворота замкнутых траекторий $x_{\pm}$ определяются уравнением $x^2 + wx^4 = E$ при $0 < E < E_s$; очевидно, $x_- = -x_+$.

Ввиду симметрии потенциала формула для периода имеет вид

$$T(E) = 2\sqrt{2} \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - x^2 - wx^4}} = 2\sqrt{2} \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{x_+^2 + wx_+^4 - x^2 - wx^4}}.$$

После замены переменной $x = x_+\xi$ выражение для периода приводится к форме

$$T(E) = 2\sqrt{2} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)[1 + wx_+^2(E)(1 + \xi^2)]}}.$$

Обратим внимание, что корень алгебраического уравнения, записанный в виде

$$wx_+^2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + wE}$$

монотонно по E растет либо убывает в зависимости от знака w . Поэтому период $T(E)$ монотонно убывает в случае $w > 0$ и монотонно растет в случае $w < 0$.

В случае $w > 0$ нетрудно выделить главный член асимптотики на бесконечности:

$$wx_+^2 = w^2\sqrt{wE}[1 + \mathcal{O}(E^{-1})], \quad T(E) = T_0(wE)^{-1/4}[1 + \mathcal{O}(E^{-1/2})], \quad E \rightarrow \infty,$$

с коэффициентом

$$T_0 = 2\sqrt{2} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^4}}.$$

В случае $w < 0$ асимптотика строится при подходе к границе осцилляционной области, т.е. при $E \rightarrow E_s - 0$. Здесь надо учесть выражение для корня

$$wx_+^2(E) = -\frac{1}{2} + \sqrt{-w(E_s - E)}.$$

Предельный интеграл (при $E = E_s$) расходится; это указывает на неограниченный рост периода при $E \rightarrow E_s - 0$. Его асимптотику в форме

$$T(E) = T_s |\ln(E_s - E)| \left[1 + \mathcal{O}(\sqrt{E_s - E}) \right], \quad E \rightarrow E_s - 0, \quad T_s = \text{const} > 0,$$

можно получить известным способом (см. [5]).

4. Монотонность периода. Результаты, приведенные для примеров, имеют место для общих потенциалов.

Теорема 1. Пусть потенциал является гладкой функцией $U(x) \in C^\infty \mathbb{R}$. Тогда период является гладкой функцией энергии $T(E) \in C^\infty(0, E_s)$.

Доказательство. Рассмотрим один из интегралов (4), например, $T_+(E)$. На промежутке $0 < x < x_s$ функция $U(x)$ монотонно растет. Поэтому для уравнения $U(x) = E$ корень $x = x_+(E)$ является гладкой функцией, которая монотонно растет по $E \in (0, E_s)$. Следовательно, функция $W_+(\xi, E)$ является гладкой и положительной при $0 \leq \xi \leq 1, 0 < E < E_s$. Тогда квадратный корень $\sqrt{W_+(\xi, E)}$ определен.

Поскольку функция $U(x)$ гладкая, то из разложения Тейлора при $\xi \rightarrow 1$ следует, что дробь, которая определяет $W_+(\xi, E)$, является гладкой функцией двух переменных при $0 \leq \xi \leq 1$,

$0 < E < E_s$. Поскольку $W_+(\xi, E) \neq 0$ в этой области, то дробь $1/\sqrt{W_+}(\xi, E)$ также будет гладкой функцией. Отсюда получается гладкость интеграла $T_+(E)$ при $0 < E < E_s$. Аналогично анализируется второй интеграл $T_-(E)$. Таким образом получается гладкость периода (3) по $E \in (0, E_s)$. Теорема доказана. $\square$

Монотонности периода по энергии в общем случае не бывает. Достаточные условия монотонности извлекаются из анализа интегралов (4).

Теорема 2. Пусть на множестве замкнутых траекторий с энергиями из промежутка $E \in (E_1, E_2)$ значения координаты x содержатся в интервале $x \in L = (X_1, X_2)$ и $0 \in L$. Если на этом интервале

$$x^2 U''(x) - xU'(x) > 0 \quad \forall x \in L, x \neq 0,$$

то период $T(E)$ монотонно убывает и $T'(E) < 0$; если

$$x^2 U''(x) - xU'(x) < 0 \quad \forall x \in L, x \neq 0,$$

то период $T(E)$ монотонно растет и $T'(E) > 0$ на промежутке $E \in (E_1, E_2)$.

Доказательство. В рассматриваемом случае $0 \in L$. Поэтому период представляется в виде суммы двух интегралов (4). Поскольку эти интегралы можно дифференцировать по параметру E , то

$$T'_\pm(E) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial_E W_\pm(\xi, E)}{\sqrt{1-\xi} (W_\pm(\xi, E))^{3/2}} d\xi.$$

Вычислим производную

$$\partial_E W_\pm(\xi, E) = \frac{x'_\pm(E)}{(1-\xi)x_\pm^3(E)} \left([x_\pm U'(x_\pm) - 2U(x_\pm)] - [x_\pm \xi U'(x_\pm \xi) - 2U(x_\pm \xi)] \right).$$

Функция $Z(x) = xU'(x) - 2U(x)$ имеет производную $Z'(x) = xU''(x) - U'(x)$, которая при условиях теоремы меняет знак в точке $x = 0$. Это означает, что на каждом интервале $x \in (0, x_\pm)$ функция $Z(x)$ достигает максимума (либо минимума) на границе $x = x_\pm$. В таком случае разность $Z(x_\pm) - Z(x_\pm \xi)$, которая фигурирует в выражении для производной $\partial_E W_\pm(\xi, E)$, будет знакоопределенной при $0 < \xi < 1$. В первом случае она будет положительна, во втором — отрицательна.

Поскольку $x'_\pm(E)/x_\pm^3(E) > 0$, то знак производной $T'_\pm(E)$ будет отрицательным в первом случае и положительным во втором. Эти свойства определяют монотонное убывание либо рост пары функций $T_\pm(E)$, а следовательно, и монотонность периода. Теорема доказана. $\square$

Легко проверить, что условия теоремы 2 выполняются для примеров с потенциалами $U(x) = x^2 + wx^4$, $w = \text{const}$.

Условия теоремы 2 выполняется также для потенциала $U(x) = -x^2 + wx^4$, $w = \text{const} > 0$, в осцилляционной области вне сепаратрисных петель. При энергиях $E > 0$ период убывает, поскольку $x^2 U''(x) - xU'(x) = 4wx^4 > 0$ при $w > 0$, $x \neq 0$. Для этого потенциала имеются еще две осцилляционные области внутри сепаратрисных петель. В них период растет с ростом энергии. Однако такой результат не извлекается из теоремы. При формальной проверке условий надо перенести начало координат в неподвижную точку типа центр внутри сепаратрисной петли, введя новую переменную; например, $x = 1 + \tilde{x}$ при $w = 1/2$. Потенциал приобретает вид $U = -(1 + \tilde{x})^2 + (1 + \tilde{x})^4/2$. Теперь производная определенной выше функции Z имеет вид

$$Z'(\tilde{x}) = 2 - 2(1 - \tilde{x})^2.$$

Легко видеть, что в рассматриваемой осцилляционной области внутри сепаратрисной петли $-1 < \tilde{x} < \sqrt{2} - 1$ эта производная не меняет знак. Поэтому доказательство теоремы в этом случае не проходит.

Замечание. Доказательство теоремы 2 основано на монотонности каждого из интегралов $T_\pm(E)$, которые составляют период, и поэтому является довольно грубым. Получение монотонности периода из сравнения этих интегралов ведет к трудно проверяемым условиям на потенциал и здесь не обсуждается.

5. Асимптотика периода вблизи сепаратрисы. Рассматривается случай, когда граница осцилляционной области содержит сепаратрисы, а следовательно, и седловые точки. Исследуется поведение периода $T(E)$ при приближении энергии к сепаратрисному значению. При этом возможны два варианта:

- (1) значение E_s соответствует сепаратрисе внешней границе Γ_1 , и тогда энергия стремится к сепаратрисному значению снизу: $E \rightarrow E_s - 0$;
- (2) сепаратрисное значение соответствует внутренней границе Γ_0 , и тогда энергия стремится к сепаратрисному значению сверху: $E \rightarrow +0$.

При этом внешняя граница может содержать от одной до двух седловых точек. Внутренняя граница может содержать любое конечное число седловых точек.

Как известно, время движения по сепаратрисной траектории по направлению к седловой неподвижной точке бесконечно. Формально это проявляется в расходимости интеграла вида (3). Расходимость возникает из-за наличия у функции $E - U(x)$ кратного нуля (неподвижной точки) на промежутке интегрирования. Можно догадаться, что время движения по замкнутой траектории (период) увеличивается при приближении траектории к сепаратрисам. Основной вклад в неограниченное увеличение периода будет вносить интеграл по той части траектории, которая проходит вблизи седловой точки. Точная асимптотика периода извлекается из анализа интегралов известным способом (см. [5]). Доказательства утверждений, которые приводятся ниже, по сути сводятся к редукции исходных интегралов для периода (4) к стандартным интегралам со слабой особенностью. Способ редукции несколько отличается для случаев внешней и внутренней границ.

Теорема 3. Пусть значение энергии $E_s = U(x_s) > 0$ соответствует сепаратрисной траектории на внешней границе Γ_1 рассматриваемой осцилляционной области, и эта граница расположена в конечной части фазовой плоскости. Тогда для периодических решений с энергией $E < E_s$ период имеет асимптотику

$$T(E) = T_s |\ln(E_s - E)| + \mathcal{O}(1), \quad E \rightarrow E_s - 0. \quad (5)$$

Константа T_s определяется суммой

$$T_s = \sum_s \frac{1}{\sqrt{-U''(x_s)}} \quad (6)$$

по седловым точкам $(x_s, 0) \in \Gamma_1$, которых может быть одна либо две.

Доказательство теоремы основано на анализе асимптотики корней $x_{\pm}(E)$ функционального уравнения $U(x) = E$ при $E \rightarrow E_s - 0$. Асимптотика содержит дробные степени, появление которых обусловлено увеличением кратности (по крайней мере одного из корней) $x_{\pm}(E)$ в предельной точке, каковой является седло x_s . В простейшем случае речь идет о слиянии корней параболы $x^2 = E_s - E$ при $E \rightarrow E_s - 0$. Подобные задачи анализировались в [6].

Лемма 1. Пусть x_s — локальный граничный максимум гладкой функции $U(x)$, $x \leq x_s$, так что $U(x_s) = E_s$, $U'(x_s - 0) = 0$, $U''(x_s - 0) < 0$. Тогда для уравнения $U(x) = E$ при $E < E_s$ существует единственный простой корень $X(E) < x_s$, который в пределе при $E = E_s$ имеет кратность два и разлагается в асимптотический ряд по полуцелым степеням:

$$X(E) = x_s + \sum_{n=1}^{\infty} x_n (E_s - E)^{n/2}, \quad E \rightarrow E_s, \quad x_n = \text{const}.$$

Доказательство. Из перечисленных свойств гладкой функции $U(x)$ вытекает ее убывание при уменьшении x в окрестности максимума x_s и существование единственного корня $X(E)$ при всех E , достаточно близких к E_s . Введем функцию $Z(x) = \sqrt{E_s - U(x)}$. Тогда $X(E)$ является решением уравнения $Z(x) = \sqrt{E_s - E}$. Производная этой функции

$$Z'(x) = \frac{-U'(x)}{2\sqrt{E_s - U(x)}}$$

не обращается в нуль при всех $x \leq x_s$ вплоть до граничной точки $x = x_s$, как это видно с учетом разложения Тейлора: $Z'(x_s) = -\sqrt{-U''(x_s)}/2$. В таком случае для рассматриваемого уравнения $Z(x) = \sqrt{E_s - E}$ решение $X(E)$ является гладким по параметру $\sqrt{E_s - E} \geq 0$ и разлагается в ряд Тейлора по целым степеням этого параметра при $\sqrt{E_s - E} \rightarrow 0$. Коэффициент первой поправки выражается через производную $x_1 = 1/Z'(x_s) = -\sqrt{2}/\sqrt{-U''(x_s)}$. $\square$

Доказательство теоремы сводится к редукции интегралов из (4) к стандартным интегралам со слабой особенностью, а затем применяется лемма. Рассмотрим один из интегралов в предположении, что соответствующая точка поворота приближается к седловой точке

$$T_+(E) = \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

В функции $E - U(x)$ выделим два множителя $(x_+ - x)(x_s - x)$, которые ответственны за возникающую особенность, и затем сделаем замену переменной $x = x_+ \xi$. Введем комбинацию $\varepsilon = (x_s - x_+(E))/x_+(E)$, которая представляет собой малый параметр: $\varepsilon \rightarrow 0$ при $E \rightarrow E_s$. Получаем

$$T_+(E) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 + \varepsilon - \xi)(1 - \xi)} \sqrt{V(\xi, \varepsilon)}}.$$

Здесь функция $V(\xi, \varepsilon)$ определяется соотношением

$$V(\xi, \varepsilon) = \frac{U((1 + \varepsilon/(1 - \varepsilon))x_s) - U((1 + \varepsilon/(1 - \varepsilon))x_+ \xi)}{(1 - \xi)(1 + \varepsilon - \xi)x_s^3/(1 - \varepsilon)^3}.$$

Нетрудно понять, что эта функция двух переменных $V(\xi, \varepsilon)$ является гладкой и не имеет нулей в замкнутой области $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ при достаточно малом ε_0 . Ее предельное значение в угловой точке области $\xi = 1$, $\varepsilon = 0$ выражается из формулы Тейлора через вторую производную:

$$V(\xi, \varepsilon) = -\frac{U''(x_s)}{2x_s^3} + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(1 - \xi), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow 1.$$

Следовательно часть подынтегральной функции $1/\sqrt{V(\xi, \varepsilon)}$ является гладкой по $\xi \in [0, 1]$, $\varepsilon \geq 0$. В таком случае к интегралу приложимы известные результаты (см. [5]) об асимптотике при $\varepsilon \rightarrow 0$. В частности, для главного члена можно выделить стандартный интеграл

$$T_+(E) = \frac{1}{\sqrt{V(1, 0)}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 + \varepsilon - \xi)(1 - \xi)}} + \mathcal{O}(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

После замены $1 - \xi = \varepsilon \zeta$ легко извлекается асимптотика

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 + \varepsilon - \xi)(1 - \xi)}} = \int_0^{1/\varepsilon} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 + \zeta)\zeta}} = |\ln \varepsilon| + \mathcal{O}(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом,

$$T_+(E) = |\ln \varepsilon| \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-U''(x_s)}} + \mathcal{O}(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Наконец, надо учесть выражение для малого параметра и асимптотику корня $x_+(E)$, которые приводит к соотношению

$$\ln \varepsilon = \ln \left[\frac{x_s - x_+(E)}{x_+(E)} \right] = \ln [x_1 \sqrt{E_s - E}] + \mathcal{O}(1) = \frac{1}{2} \ln(E_s - E) + \mathcal{O}(1), \quad E \rightarrow E_s.$$

Аналогично строится асимптотика для другого интеграла $T_-(E)$ по траектории вблизи другой неподвижной седловой точки на внешней границе, если такая точка имеется. После этого в сумме получается формула (5).

Если седловая точка на внешней границе только одна, то внешняя граница при условиях теоремы представляет собой сепаратрисную петлю конечной длины. В таком случае траектория, по которой вычисляется один из интегралов $T_{\pm}(E)$, приближается к той части петли, которая не содержит неподвижных точек, т.е. вторая точка поворота отделена от седловых точек. Предельное значение такого интеграла при $E = E_s$ остается ограниченным и имеет асимптотику порядка единицы при $E \rightarrow E_s$. В таком случае в выражении (6) содержится одно слагаемое. Теорема доказана.

Замечание. Здесь не обсуждается асимптотика периода на траекториях, длина которых неограниченно растет. Она существенно зависит от структуры потенциала в окрестности бесконечности.

В случае, когда замкнутая траектория приближается к внутренней границе Γ_0 , асимптотика периода зависит от структуры этой границы. Если Γ_0 состоит из одной изолированной неподвижной точки $(0, 0)$ типа центр общего положения, то предельное значение $T(E)$ совпадает с периодом линеаризованного уравнения $2\pi/\sqrt{U''(0)/2}$. Если внутренняя граница содержит сепаратрисы, то период растет, и его асимптотика в главном определяется присутствующими седловыми точками. Все такие точки расположены на оси $y = 0$. Крайние сепаратрисы представляют собой петли (см. рис. 2). Поэтому часть замкнутой траектории с точками поворота $x_{\pm}$ теперь не играет роли в главном члене асимптотики. Основной вклад дают интегралы вблизи седловых точек.

Теорема 4. Пусть значение энергии $E_0 = U(0) = 0$ соответствует сепаратрисной траектории на внутренней границе Γ_0 рассматриваемой осцилляционной области. Тогда для периодических решений с энергией $E > 0$ период имеет асимптотику

$$T(E) = T_0 |\ln E| + \mathcal{O}(1), \quad E \rightarrow +0. \quad (7)$$

Константа T_0 определяется суммой

$$T_0 = 2 \sum_s \frac{1}{\sqrt{-U''(x_s)}} \quad (8)$$

по всем седловым точкам x_s на границе Γ_0 .

Доказательство. Детальное доказательство приведем для случая, когда на границе Γ_0 имеется одна седловая точка $(0, 0)$. Граница является линией уровня первого интеграла $y^2 + U(x) = 0$. Поскольку в точке $x = 0$ потенциал имеет максимум, то внутри сепаратрисной петли $U(x) < 0$ для всех $x \in (0, x_{os})$ (здесь $x_{os} > 0$ — точка поворота сепаратрисы; это простой нуль потенциала: $U(x_{os}) = 0$).

Рассмотрим один из интегралов, составляющих период:

$$T_+(E) = \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Разобьем его на две части:

$$T_+(E) = \left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{x_+} \right) \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Число δ выбирается из условия $0 < \delta < x_{os}$. При таком выборе одна из частей дает в пределе при $E \rightarrow +0$ интеграл по куску сепаратрисы, который отделен от седловой точки:

$$\int_{\delta}^{x_{os}} \frac{dx}{\sqrt{-U(x)}}.$$

Этот интеграл сходится, поскольку $U(x)$ имеет нуль первого порядка $x_{\text{ос}}$. Поэтому

$$T_+(E) = \int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \mathcal{O}(1), \quad E \rightarrow +0.$$

Оставшаяся здесь часть интеграла в пределе имеет более сильную особенность из-за кратного нуля потенциала в точке $x = 0$. Эта особенность выделяется стандартным способом. Учитывая, что потенциал имеет асимптотику

$$U(x) = ax^2 + \mathcal{O}(x^3), \quad U'(x) = 2ax + \mathcal{O}(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

с коэффициентом $a = U''(0)/2 < 0$, сделаем обратимую замену переменной по формуле

$$y = \sqrt{-U(x)}, \quad dy = \frac{-U'(x)}{2\sqrt{-U(x)}} dx.$$

Получается интеграл

$$T_+(E) = \int_0^\Delta \frac{Z(y)}{\sqrt{E + y^2}} dy + \mathcal{O}(1)$$

с гладкой функцией

$$Z(y) = \frac{2\sqrt{-U(x)}}{-U'(x)} = \frac{1}{\sqrt{-a}} + \mathcal{O}(y), \quad y \rightarrow 0,$$

и с константой $\Delta = \sqrt{-U(\delta)}$ в верхнем пределе. Асимптотика такого интеграла со слабой особенностью хорошо известна (см. [5]). В главном члене асимптотика получается путем замены переменных $y = E\eta$:

$$T_+(E) = Z(0) \int_0^{\Delta/E} \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} + \mathcal{O}(1) = |\ln E| \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-U''(0)}} + \mathcal{O}(1).$$

Подобную асимптотику имеет второй интеграл $T_-(E)$.

При наличии нескольких седловых точек на Γ_0 таким способом вычисляется асимптотика интегралов вблизи каждой из них. В сумме получается требуемая формула (7) для периода. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Формулы для коэффициентов асимптотики (6) и (8) отличаются множителем 2. Удвоение коэффициента в случае внутренней границы Γ_0 обязано обходу седловой точки с двух сторон по замкнутой траектории (снизу и сверху; см. рис. 2).

Выводы. Для нелинейных колебаний установлены свойства периода $T(E)$:

- (1) монотонность по энергии E ;
- (2) логарифмическая асимптотика по E вблизи границ области осцилляции.

Отсюда, в частности, следует монотонность частоты $\Omega(E) = 2\pi/T(E)$ и неограниченный рост производной $\Omega'(E)$ вблизи границы. Это свойство позволяет эффективно решать задачи о захвате в резонанс вдали от равновесия, которые обсуждались в [3, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математические аспекты классической и небесной механики // в кн.: Динамические системы-3/ Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНТИ, 1985. — 3. — С. 5–290.
2. Калякин Л. А. Усреднение в модели авторезонанса // Мат. заметки. — 2003. — 73, № 3. — С. 449–452.
3. Калякин Л. А. Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Усп. мат. наук. — 2008. — 63, № 5. — С. 3–72.

4. *Нейштадт А. И.* Усреднение, прохождение через резонансы и захват в резонанс в двухчастотных системах // Усп. мат. наук. — 2014. — 69, № 5. — С. 3–80.
5. *Федорюк М. В.* Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
6. *Murdock J. A.* Perturbations: theory and methods. — New York: Wiley, 1991.

Калякин Леонид Анатольевич

Институт математики с вычислительным центром,

Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия

E-mail: klenru@mail.ru



РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ СИНУС АМПЛИТУДЫ

© 2019 г. О. М. КИСЕЛЕВ

Аннотация. Хорошо известны два случая вырождения эллиптических функций — это вырождение в тригонометрические функции и вырождение в гиперболические функции. Для аппроксимации эллиптических функций в окрестности вырождений обычно рассматриваются ряды по модулю эллиптической функции. Для приложений теории эллиптических функций в теории динамических систем оказывается важной аппроксимация равномерная по модулю и независимой переменной. В обзоре приведены методы построения равномерных асимптотик.

Ключевые слова: эллиптическая функция, асимптотика, ряд.

UNIFORM ASYMPTOTICS OF THE SINE AMPLITUDE FUNCTION

© 2019 О. М. KISELEV

ABSTRACT. Two cases of degeneration of elliptic functions are well known: degeneration into trigonometric functions and degeneration into hyperbolic functions. Approximations of an elliptic function in a neighborhood of a degeneration are usually examined by means of series in the modulus of the elliptic function. For applications of the theory of elliptic functions in the theory of dynamical systems, uniform approximations with respect to the modulus and the independent variable are important. This review contains methods for constructing uniform asymptotics.

Keywords and phrases: elliptic function, asymptotics, series.

AMS Subject Classification: 33-02, 33E05

1. Введение. Вырождение эллиптических функций в гиперболические, а также асимптотические формулы, пригодные в окрестности такого вырождения, часто используются в теории динамических систем около особых траекторий — сепаратрис (см. [4, 7, 8]).

Основная трудность при построении асимптотик состоит в том, что в окрестности вырождения эллиптические функции имеют различные по аналитическим свойствам участки. Это регулярное поведение вдали от точек поворота и поведение, близкое к нерегулярному в окрестности точек поворота.

С другой стороны, известно представление эллиптической функции $\operatorname{sn}(t|k)$ через тэта-функции. Из-за быстрой сходимости рядов для тэта-функции при $k < 1$ такие представления широко используются. Однако для $k \rightarrow 1 - 0$ в таком подходе возникают трудности при вычислении асимптотик так называемых тэта-констант и самих рядов для тэта-функций. Эти ряды оказываются медленно сходящимися, когда параметр тэта-функции близок к единице. В результате из представления через тэта-функции сложно получить асимптотическое представление эллиптической функции в окрестности точки $k = 1$.

Наиболее удобными для использования в окрестности вырождения представляются формулы для эллиптических функций в виде рядов из гиперболических функций. Такие формулы хорошо известны, в частности, приближение $\operatorname{sn}(t|1 - \epsilon)$ -функции Якоби функцией $\operatorname{th} z$ при $\epsilon \rightarrow +0$. К сожалению, известные формулы для таких разложений (например, из справочников [1, 3]) неравномерны по независимой переменной. Причина в том, что периодическая функция аппроксимируется непериодической.

Кроме упомянутых рядов из справочников известны еще несколько формул в виде рядов из гиперболических функций, которые пригодны при всех значениях независимой переменной. К сожалению, эти ряды не упоминаются в стандартных справочниках по эллиптическим функциям. Упоминание и использование таких формул есть, например, в статьях [5, 9]. Еще одну формулу такого вида можно найти на интернет-странице компании Вольфрам (см. [18]). Однако и эти формулы требуют некоторых преобразований для построения по ним равномерных асимптотик.

Один из способов обойти перечисленные затруднения — прямое построение асимптотической формулы, равномерно пригодной на всем периоде. В этом подходе используется последовательное построение асимптотик в окрестности регулярного поведения эллиптической функции, асимптотики в окрестности точки поворота и сращивание этих асимптотик методом, предложенным в [12]. На основе этого подхода вычислены асимптотики функции $\operatorname{sn}(t|k)$ в препринте [13]; они также воспроизведены в книге [10].

В обзоре последовательно рассматриваются перечисленные подходы к анализу поведения эллиптических функций в окрестности $k = 1$. При вычислениях использовалась свободно распространяемая программа компьютерной алгебры Maxima (см. [16]).

2. Функция синус амплитуды. В этом разделе приведены стандартные определения и формулы для эллиптических функций Якоби (см. [2, 11, 17]). Название функции синус амплитуды происходит из ее связи с решением уравнения математического маятника:

$$\phi'' + \sin \phi = 0. \quad (1)$$

Умножая уравнение на ϕ' и интегрируя по t , получим

$$\frac{(\phi')^2}{2} - \cos \phi = E. \quad (2)$$

Будем рассматривать только колебательные движения математического маятника; для таких движений $|E| \leq 1$. В этом случае удобно параметр E переобозначить: $E = \cos \phi_0$. Воспользовавшись формулой $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha/2$, решение уравнения математического маятника можно записать в виде

$$t + t_0 = \frac{1}{2} \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{ds}{\sqrt{\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{s}{2}}}.$$

Эту формулу оказывается удобнее рассматривать, когда подынтегральная функция под знаком корня вместо синуса содержит полином от переменной интегрирования. Для перехода к такой записи можно сделать замену:

$$ku = \sin \frac{s}{2}, \quad k = \sin \frac{\phi_0}{2}.$$

Тогда

$$k du = \frac{\cos \frac{s}{2}}{2} ds \quad \text{или} \quad ds = \frac{2k du}{\sqrt{1 - k^2 u^2}}.$$

Следовательно, решение уравнения математического маятника выражается через интеграл вида

$$t = \int_0^{\sin \frac{\phi}{2}/k} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}. \quad (3)$$

Удобно рассматривать функцию, обратную интегралу, как специальную функцию:

$$u = \operatorname{sn}(t|k), \quad \text{где} \quad \sin \frac{\phi}{2} = u \sin \frac{\phi_0}{2}.$$

Эта функция называется *синус амплитуды*, или *sn-функция Якоби*.

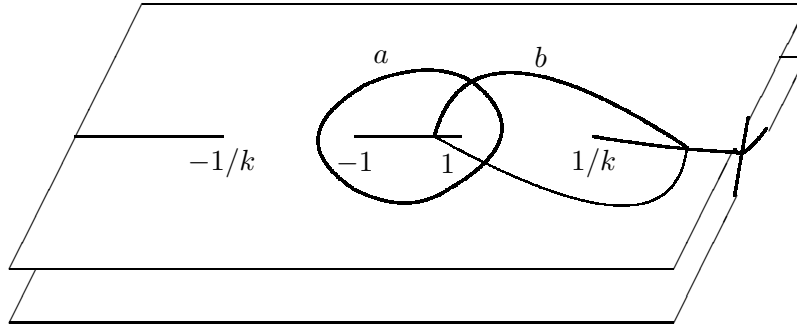


Рис. 1. Риманова поверхность $\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$ как двулистное накрытие комплексной плоскости с разрезами $[-1, 1]$, $(-\infty, -1/k]$ и $(1/k, \infty]$. Цикл a обходит вокруг разреза $[-1, 1]$. Цикл b на верхнем листе выходит из разреза $[-1, 1]$ и уходит на нижний лист через разрез $[1/k, \infty)$.

2.1. *Периодичность.* Функция $\text{sn}(t|k)$ обратна интегралу

$$z = \int_0^y \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \quad (4)$$

Здесь параметр k — *модуль эллиптической функции* — положительное число, не большее единицы. Интегрирование ведется по пути на двулистной римановой поверхности, определяемой уравнением

$$w^2 = (1-u^2)(1-k^2u^2).$$

Проведем на верхнем листе этой поверхности два разреза. Пусть один разрез проходит по отрезку $[-1, 1]$, второй — соединяет точки $-1/k$ и $1/k$ через бесконечно удаленную точку и лежит на вещественной оси. Противоположные края разрезов склеим, как обычно, с противоположными краями таких же разрезов на нижнем листе. Устроим циклы на этой римановой поверхности. Пусть цикл a лежит на верхнем листе и окружает отрезок $[-1, 1]$. Цикл b проходит по верхнему листу от точки ветвления 1 до точки ветвления $1/k$, затем переходит на нижний лист и там проходит от $1/k$ до 1, где и возвращается на верхний лист поверхности.

Путь интегрирования по римановой поверхности в интеграле (4) определен с точностью до целого числа циклов a и b . Это означает, что функция, обратная интегралу (4), — периодическая функция с периодами, равными интегралам по циклам a и b :

$$T = \int_a \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = 2 \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}};$$

$$T' = \int_b \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = 2 \int_1^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Период T — вещественная функция k , так как подынтегральная функция вещественная на всем пути интегрирования. Период T' — мнимая функция k , потому что подынтегральная функция мнимая. Отношение периодов функции $\text{sn}(t|k)$ — мнимое, функция $\text{sn}(t|k)$ — двоякопериодическая.

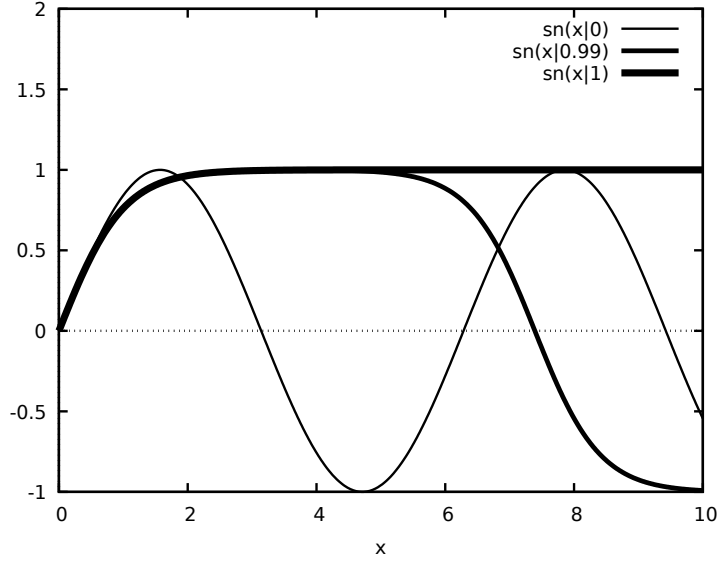


Рис. 2. График функции синус амплитуды при различных значениях модуля k .

Обычно вводят следующие обозначения:

$$K(k) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad K_1(k) = \frac{1}{2} \int_1^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Пользуясь этими обозначениями, запишем

$$T = 4K(k), \quad T' = 4K_1(k).$$

После замены переменной интегрирования $u^2 = 1/(1-k'^2w^2)$, где $k'^2 = 1-k^2$, интеграл $K_1(k)$ можно выразить через интеграл $K(k')$:

$$K_1(k) = -iK(k').$$

Ниже часто будем использовать формулу

$$K'(k) \equiv K(k').$$

2.2. Эллиптические функции Якоби. Эллиптические функции в анализе обычно вводятся либо как мероморфные двоякопериодические функции комплексного переменного, либо как обратные функции эллиптических интегралов. Мы воспользуемся определением эллиптических функций Якоби при помощи дифференциальных уравнений.

Продифференцировав (3) по t , легко увидеть, что функция синус амплитуды удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = \sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}.$$

Введем обозначения

$$\operatorname{cn}^2(t|k) = 1 - \operatorname{sn}^2(t|k), \quad \operatorname{dn}^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(t|k).$$

Функция $\operatorname{sn}(t|k)$ называется *косинус амплитуды*, а $\operatorname{dn}(t|k)$ — *дельта амплитуды*. Формулы для производных этих функций получаются прямым дифференцированием:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{cn}'(t|k) \operatorname{cn}(t|k) &= -2 \operatorname{sn}(t|k) \sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2(t|k))(1 - k^2 \operatorname{sn}^2(t|k))}, \\ 2 \operatorname{dn}'(t|k) \operatorname{dn}(t|k) &= -2k^2 \operatorname{sn}(t|k) \sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2(t|k))(1 - k^2 \operatorname{sn}^2(t|k))} \end{aligned}$$

или

$$\operatorname{sn}'(t|k) = \operatorname{cn}(t|k) \operatorname{dn}(t|k), \quad \operatorname{cn}'(t|k) = -\operatorname{sn}(t|k) \operatorname{dn}(t|k), \quad \operatorname{dn}'(t|k) = -k^2 \operatorname{sn}(t|k) \operatorname{cn}(t|k).$$

Таким образом, тройка функций $\operatorname{sn}(t|k)$, $\operatorname{cn}(t|k)$, $\operatorname{dn}(t|k)$ удовлетворяет системе уравнений

$$y_1' = y_2 y_3, \quad y_2' = -y_1 y_3, \quad y_3' = -k^2 y_1 y_2 \quad (5)$$

с начальными условиями, легко получающимися из интегрального представления $\operatorname{sn}(t|k)$:

$$y_1|_{u=0} = 0, \quad y_2|_{u=0} = 1, \quad y_3|_{u=0} = 1. \quad (6)$$

Если отвлечься от истоков появления функции $\operatorname{sn}(t|k)$ как обращения интеграла (3), то можно вводить эллиптические функции как решения задачи Коши (5), (6). Один первый интеграл этой системы получается, если первое уравнение умножить на $2y_1$, второе — на $2y_2$ и сложить полученные выражения:

$$2y_1 y_1' + 2y_2 y_2' = (y_1^2 + y_2^2)' = 0.$$

Еще один первый интеграл получается, если первое уравнение умножить на $2k^2 y_1$, третье — на $2y_3$ и сложить их:

$$2k^2 y_1' y_1 + 2k^2 y_3' y_3 = (k^2 y_1^2 + y_3^2)' = 0.$$

В результате получим два первых интеграла:

$$y_1^2 + y_2^2 = c_1, \quad k^2 y_1^2 + y_3^2 = c_2.$$

Постоянные c_1 и c_2 определяются из начальных условий (6). Это приводит к тождествам

$$\operatorname{sn}^2(t|k) + \operatorname{cn}^2(t|k) = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2(t|k) + \operatorname{dn}^2(t|k) = 1. \quad (7)$$

3. Асимптотика полного эллиптического интеграла первого рода. Вещественный период эллиптической функции $\operatorname{sn}(t, 1 - \epsilon)$ определяется формулой

$$T(\epsilon) = 4 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-(1-\epsilon)y^2)}} \equiv 4K(1-\epsilon).$$

Интеграл в правой части называется *эллиптическим интегралом первого рода* и обычно обозначается $K(k)$. В справочнике [1] (формула (17.3.34)) приведена аппроксимация интеграла первого рода полиномом:

$$K(k) = \left(1.38662943 + 0.096663\epsilon + 0.035900\epsilon^2 + 0.037425\epsilon^3 + 0.014511\epsilon^4 \right) + \\ + \left(0.5 + 0.124985\epsilon + 0.068802\epsilon^2 + 0.033283\epsilon^3 + 0.004417\epsilon^4 \right) \log \frac{1}{\epsilon} + e(m), \quad (8)$$

где $|e(k)| < 2 \times 10^{-8}$.

Ниже будет построена асимптотика эллиптического интеграла первого рода.

3.1. Асимптотическая формула для периода. Для малых значений ϵ эллиптический интеграл может быть представлен как интеграл со слабой особенностью в точке $y = 1$. Следуя [10, 13], удобно выделить особенность в подынтегральной функции:

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-(1-\epsilon)y^2)}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1+y)(1+y\sqrt{1-\epsilon})}} \frac{1}{\sqrt{(1-y)(1-y\sqrt{1-\epsilon})}}.$$

Вводя обозначение $1 - \sqrt{1-\epsilon} = \mu$, перепишем интеграл в виде

$$K(1-\epsilon) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1+y)(1+y-\mu y)}} \frac{1}{\sqrt{(1-y)(1-y+\mu y)}}.$$

Теперь можно разложить первый из множителей подынтегральной функции в ряд по μ :

$$\frac{1}{\sqrt{(1+y)(1+y-\mu y)}} = \frac{1}{y+1} + \frac{\mu y}{2(y+1)^2} + \frac{3\mu^2 y^2}{8(y+1)^3} + \frac{5\mu^3 y^3}{16(y+1)^4} + \frac{35\mu^4 y^4}{128(y+1)^5} + O(\mu^5).$$

На следующем шаге подставим это разложение в интегральное выражение для $K(1-\epsilon)$. В результате интеграл можно представить как сумму интегралов. Получившиеся интегралы вычисляются

явно, например, с помощью системы компьютерной алгебры Maxima (см. [16]). Первый интеграл из суммы равен

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dy}{(y+1)\sqrt{(1-y)(1-(1-\mu)y)}} = \frac{\sqrt{4-2\mu} \log \mu}{2\mu-4} - \frac{\log(-\mu+2\sqrt{4-2\mu}+4)\sqrt{4-2\mu}}{2\mu-4}.$$

Похожие формулы можно получить и для следующих членов разложения:

$$I_n = \mu^k a_k \int_0^1 \frac{y^n dy}{(y+1)^{n+1} \sqrt{(1-y)(1-(1-\mu)y)}}, \quad n = 1, 2, 3, 4;$$

здесь $a_1 = 1/2$, $a_2 = 3/8$, $a_3 = 5/16$, $a_4 = 35/128$. Применив результаты, полученные с помощью Maxima, получим:

$$K(1-\epsilon) \sim I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad \mu \rightarrow 0.$$

Удобно вернуться к параметру ϵ ; тогда результат примет следующий вид:

$$\begin{aligned} K(1-\epsilon) \sim & -\frac{1}{2} \log \epsilon + 2 \log 2 + \left(\frac{-1+2 \log 2}{4} - \frac{\log \epsilon}{8} \right) \epsilon + \\ & + \left(\frac{-21+36 \log 2}{128} - \frac{9 \log \epsilon}{128} \right) \epsilon^2 + \left(\frac{-185+300 \log 2}{1536} - \frac{25 \log \epsilon}{512} \right) \epsilon^3 + \\ & + \left(\frac{-18655+29400 \log 2}{196608} - \frac{1225 \log \epsilon}{32768} \right) \epsilon^4, \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для сравнения (8) с формулой из справочника перепишем полученную формулу в терминах чисел с плавающей точкой:

$$\begin{aligned} K(1-\epsilon) \sim & -0.5 \log \epsilon + 1.386294 + \epsilon(0.096573 - 0.125 \log \epsilon) + \\ & + \epsilon^2(0.030885 - 0.07031 \log \epsilon) + \epsilon^3(0.014937 - 0.048828 \log \epsilon) + \\ & + \epsilon^4(0.008766 - 0.037384 \log \epsilon). \end{aligned} \quad (10)$$

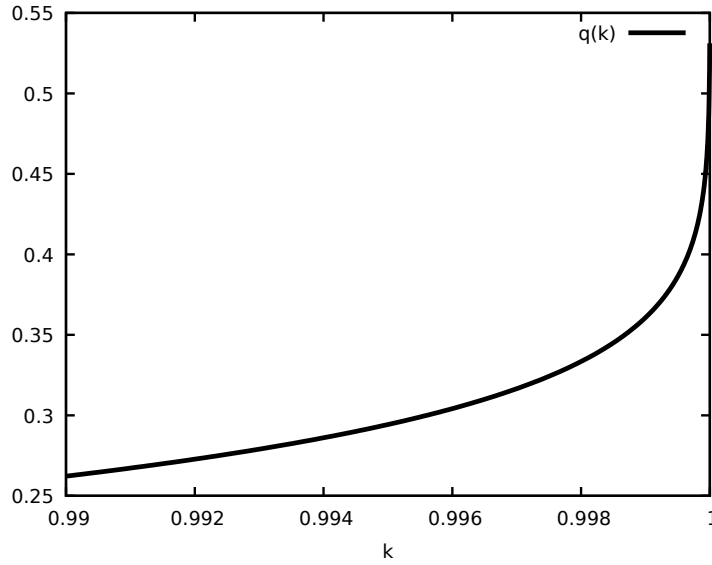
Различие между (10) и (8) объясняется разным характером этих формул. Формула (10) — отрезок асимптотического разложения эллиптического интеграла, в то время как формула (8) — аппроксимация полиномом полученных численно значений эллиптического интеграла в окрестности особой точки.

3.2. Асимптотика мнимого периода эллиптической функции. Для вычисления асимптотики интеграла $K_1(k)$ можно применить ту же методику. Единственное отличие состоит в интервале интегрирования $[-1, 1/k]$. В результате вычислений, полностью аналогичных вычислениям предыдущего пункта, получится регулярный асимптотический ряд. Ниже приведен отрезок этого ряда:

$$2K_1(1-\epsilon) \sim i\pi + i\frac{\pi}{4}\epsilon + i\frac{9\pi}{64}\epsilon^2 + i\frac{25\pi}{256}\epsilon^3 + i\frac{1225\pi}{16384}\epsilon^4 + i\frac{3969\pi}{65536}\epsilon^5. \quad (11)$$

Тогда

$$K'(k) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\epsilon + \frac{9\pi}{128}\epsilon^2 + \frac{25\pi}{512}\epsilon^3 + \frac{1225\pi}{32768}\epsilon^4 + \frac{3969\pi}{131972}\epsilon^5.$$

Рис. 3. График зависимости $q(k)$.

4. Ряды тригонометрических и гиперболических функций.

4.1. *Тригонометрический ряд для функции синус амплитуды.* При $k = 0$ разрез $(1/k, \infty)$ на двулистной поверхности вырождается. В результате обращение интеграла приводит к тригонометрической функции синус. Асимптотические разложения для эллиптической функции в малой окрестности $k = 0$ представляют собой отрезки тригонометрических рядов. Равномерные разложения такого вида хорошо известны. В частности, разложения такого вида для нелинейных осцилляторов использовал еще Ньюком в [14]. В наиболее простой форме методика построения подобных асимптотик изложена в [15]. Сходящийся ряд для $\text{sn}(t, k)$ приведен, например, в справочнике [3, с. 84, формула (108)]:

$$\text{sn}(t|k) = \frac{2\pi}{kK} \left(\frac{\sqrt{q}}{1-q} \sin \frac{\pi z}{2K} + \frac{q^{3/2}}{1-q^3} \sin \frac{3\pi z}{2K} + \dots + \frac{q^{s+1/2}}{1-q^{2s+1}} \sin \frac{(2s+1)\pi z}{2K} + \dots \right). \quad (12)$$

Задача о вычислении параметра q по заданному значению модуля эллиптической функции называется задачей обращения. Известна следующая формула (см. [3, с. 91]):

$$q = \exp \frac{-\pi K'(k)}{K(k)}. \quad (13)$$

Из формулы (13) и формул для асимптотик $K(k)$ и $K'(k)$ при $k \rightarrow 1 - 0$ следует, что $q \rightarrow 1$, а именно,

$$q \sim \exp \frac{\pi^2}{\log \epsilon}, \quad k = 1 - \epsilon, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Из этой формулы и формулы для сходящегося ряда в (12) следует, что вблизи $k = 1$ сходимость ряда ухудшается, и для аппроксимации с точностью $o(\epsilon)$ необходимо использовать отрезок ряда длиной N , где $N \rightarrow \infty$ при $\epsilon \rightarrow +0$.

Кроме того, в формулу (12) явным образом входит эллиптический интеграл $K(k)$, через который вычисляется период. Однако при $k = 1$ период обращается в бесконечность, и (12) теряет смысл.

4.2. *Представление через ряды гиперболических функций.* В окрестности $k = 1$ эллиптическая функция близка к гиперболической. Известны представления эллиптической функции в виде

ряда гиперболических функций (см. например, [3, с. 85, формула (125)]):

$$\operatorname{sn}(t|k) = \frac{\pi}{2kK'(k)} \left(\operatorname{th} x' - 2q' \frac{\operatorname{sh} 2x'}{\operatorname{sh} 2\rho'} + 2q'^2 \frac{\operatorname{sh} 4x'}{\operatorname{sh} 4\rho'} - \dots \right); \quad (14)$$

здесь

$$q' = \exp \frac{-\pi K(k)}{K'(k)}, \quad \rho' = \frac{\pi K(k)}{2K'(k)}, \quad x' = \frac{\pi t}{2K'(k)}.$$

При $k \rightarrow 1 - \epsilon$ и $\epsilon \rightarrow +0$ коэффициенты ряда малы, и ряд является асимптотическим. Действительно,

$$q' \sim \exp \frac{-\pi(-\frac{1}{2} \log \epsilon)}{\frac{\pi}{2}} = \epsilon, \quad \rho' \sim -\frac{1}{2} \log \epsilon, \quad x' \sim t.$$

Однако свойство асимптотичности неравномерно по переменной t , так как периодическая функция аппроксимируется непериодическими.

4.3. Равномерно пригодные ряды гиперболических функций. Равномерно пригодные ряды из гиперболических функций для представления эллиптических функций построены, исходя из решетчатых периодов эллиптических функций.

В [9] приведена формула для квадрата функции синус амплитуды:

$$k \operatorname{sn}^2(t|k) = \frac{E(k')}{K'(k)} - \left(\frac{\pi}{2K'(k)} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\pi}{2K'(k)} (t - 2nK(k)) \right); \quad (15)$$

здесь

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx$$

— полный эллиптический интеграл второго рода.

Наиболее просто выглядит формула

$$\operatorname{sn}(t|k) = \frac{\pi}{2\sqrt{k}K'(k)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \operatorname{th} \left(\pi \frac{K(k)}{K'(k)} \left(n + \frac{t}{2K(k)} \right) \right) \quad (16)$$

(см. [18]). Этот ряд, вообще говоря, не сходится. Его можно использовать для вычисления значений эллиптической функции, если дополнительно установить правило суммирования.

5. Асимптотики и тэта-функции. Тэта-функции часто используются для представления эллиптических функций. Удобство этого представления объясняется быстрой сходимостью рядов для тэта-функций в широком диапазоне параметров. Для справки ниже приведены четыре представления в виде рядов для четырех тэта-функций:

$$\theta_4(t, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nt,$$

$$\theta_1(t, q) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \sin(2n+1)t,$$

$$\theta_2(t, q) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)t,$$

$$\theta_3(t, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nt.$$

Представление функции $\operatorname{sn}(t|k)$ через тэта-функции хорошо известно. Общая теория подробно изложена, например, в книге [17]. Формула для функции синус амплитуды:

$$\operatorname{sn}(t|k) = \left(\frac{\theta_3(0, q)}{\theta_2(0, q)} \right)^2 \left(\frac{\theta_1(z, q)}{\theta_4(z, q)} \right)^2, \quad k = \left(\frac{\theta_3(0, q)}{\theta_2(0, q)} \right)^2, \quad z = \frac{t}{\theta_3^2(0, q)};$$

здесь вторая формула определяет связь между модулем эллиптической функции k и параметром тэта-функции q . Эта формула ниже рассматривается как уравнение для определения q при заданном значении модуля эллиптической функции k .

Еще одна формула для $\operatorname{sn}(t|k)$ представлена в справочнике Журавского (см. [3, с. 91, формула 14]):

$$\operatorname{sn}(t|k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{\pi t}{2K(k)}\right)}{\theta_4\left(\frac{\pi t}{2K(k)}\right)}.$$

На графике (см. рис. 3) видно, что значение q быстро растет в малой окрестности $k = 1$. Значения q вне малой окрестности $k = 1$ существенно отличаются от 1. Быстрая сходимость рядов для тэта-функций позволяет использовать тэта-функции для вычисления функции $\operatorname{sn}(t|k)$ при k , достаточно близких к 1. Это означает, что если $q = 1 - \delta$, то $\epsilon = \exp(-\pi^2/\delta)$, т.е. ϵ экспоненциально мало по сравнению с δ . Следовательно, сходимость рядов для тэта-функций ухудшается для экспоненциально малых значений ϵ . В этих случаях для хорошей аппроксимации тэта-функциями оказывается необходимым использовать большое число членов ряда. Заметим, что при $q \rightarrow 1 - 0$ тэта-функция $\theta_4(t, q)$ стремится к сумме дельта-функций (см. [6, с. 13]).

Оценим номер n коэффициента Фурье тэта-функции, имеющего тот же порядок, что и необходимая точность $O(\epsilon^m)$, $m > 1$, для вычисления значения функции $\operatorname{sn}(t|1 - \epsilon)$:

$$\begin{aligned} \left(1 - \exp\left(\frac{\pi^2}{\log \epsilon}\right)\right)^{n^2} &\sim C\epsilon^m, \quad C = \text{const} > 0, \\ n^2 \log\left(1 - \left(\frac{\pi^2}{\log \epsilon}\right)\right) &\sim m \log \epsilon, \quad -n^2 \left(\frac{\pi^2}{\log \epsilon}\right) \sim m \log \epsilon, \quad n \sim \frac{\sqrt{(1-m) \log \epsilon}}{\pi}. \end{aligned}$$

6. Равномерная асимптотика sn -функции Якоби в окрестности особой точки. Цель этого раздела — получить равномерную по периоду формулу для эллиптической функции Якоби $\operatorname{sn}(t|k)$ при $m \rightarrow 1 - 0$. Выше отмечалось, что формулы для аппроксимации эллиптических функций при $k \rightarrow 1 - 0$ имеются в справочниках (см., например, [1, 3]). Однако имеющиеся там разложения неравномерны по независимому аргументу t , если $t = O(T(k))$, где $T(k)$ — период эллиптической функции. Причина неравномерности разложения — существенные различия в самом поведении функции около точек поворота $t = T(k)/4 + nT/2$, $n \in \mathbb{Z}$, и вдали от них.

Уравнение для эллиптической функции будем рассматривать в виде

$$(u')^2 = (1 - u^2)(1 - (1 - \epsilon)u^2), \quad 0 < \epsilon \ll 1. \quad (17)$$

Здесь модуль $k = 1 - \epsilon$, где ϵ — малый положительный параметр. Для функции $\operatorname{sn}(t|k)$ начальное условие $u(0) = 0$. Решение задачи Коши — эллиптическая функция Якоби:

$$u(t, \epsilon) = \operatorname{sn}(t|k), \quad m = 1 - \epsilon.$$

Например, в справочнике [1] предлагается аппроксимация этой функции при $\epsilon \rightarrow +0$ в следующем виде (см. [1, формула 16.15.1]):

$$\operatorname{sn}(t|1 - \epsilon) \sim \operatorname{th} t + \frac{1}{4}\epsilon(\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t) \operatorname{sech}^2 t. \quad (18)$$

Очевидно, что эта формула может быть пригодна менее, чем на половине периода эллиптической функции. При больших значениях независимой переменной эта формула непригодна, так как периодическая эллиптическая функция заменяется на непериодическую аппроксимацию. Для использования этой формулы нужно учитывать также, что на половине периода функция $\operatorname{sn}(t|k)$ отрицательна.

6.1. Асимптотика на регулярном участке траектории. При $k = 1$ эллиптическая функция Якоби sn вырождается в гиперболический тангенс:

$$\operatorname{sn}(t, 1) \equiv \operatorname{th} x,$$

поэтому в окрестности $k = 1$ естественно строить асимптотику по ϵ в виде

$$u = \operatorname{th} t + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n u_n(t). \quad (19)$$

Уравнения для высших поправок можно получить после подстановки формулы для разложения (19) в уравнение (17) и вычисления коэффициентов при ϵ^k для $k \in \mathbb{N}$. Эти уравнения представляют собой рекуррентную систему.

Например, уравнения для u_1 и u_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{2}{\operatorname{ch}^2 t} u_1' + 4 \frac{\operatorname{th} t}{\operatorname{ch}^2 t} u_1 + \operatorname{th}^4 t - \operatorname{th}^2 t &= 0, \\ \frac{2}{\operatorname{ch}^2 t} u_2' + 4 \frac{\operatorname{th} t}{\operatorname{ch}^2 t} u_2 + (u_1')^2 + (-6 \operatorname{th}^2 t + 2) u_1^2 + (4 \operatorname{th}^3 t - 2 \operatorname{th} t) u_1 &= 0. \end{aligned}$$

В общем виде уравнения для n -го члена разложения можно записать в форме

$$\frac{2}{\operatorname{ch}^2 t} u_n' + 4 \frac{\operatorname{th} t}{\operatorname{ch}^2 t} u_n + \sum_{|\alpha|=n} A_\alpha \operatorname{th}^{\alpha_0} t u_1^{\alpha_1} \dots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}} = 0. \quad (20)$$

Начальные условия для всех поправок можно принять нулевыми: $u_n|_{t=0} = 0$.

Решения уравнений для высших поправок можно представить в виде

$$u_n = \frac{a_n(t)}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

В частности, для a_1 получим

$$a_1' = \operatorname{sh}^2 t \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{8} \operatorname{sh} 2t - \frac{1}{4} t.$$

Уравнение для a_2 имеет вид

$$a_2' = \frac{1}{64} \operatorname{ch} 4t - \frac{5}{32} \operatorname{ch} 2t + \frac{1}{8} t \operatorname{th} t + \frac{1}{16} t^2 \operatorname{sh}^2 t + \frac{9}{64},$$

а его решение —

$$a_2 = -\frac{t^2}{16} \operatorname{th} t - \frac{1}{256} \operatorname{sh} 4t + \frac{5}{64} \operatorname{sh} 2t - \frac{9}{64} t.$$

В результате находим

$$\operatorname{sn}(t|k - \epsilon) \sim \operatorname{th} t + \frac{\epsilon}{\operatorname{sech}^2 t} \left(\frac{1}{8} \operatorname{sh} 2t - \frac{1}{4} t \right) + \frac{\epsilon^2}{\operatorname{sech}^2 t} \left(-\frac{t^2}{16} \operatorname{th} t - \frac{1}{256} \operatorname{sh} 4t + \frac{5}{64} \operatorname{sh} 2t - \frac{9}{64} t \right).$$

Высшие поправки получаются таким же способом из (20). В частности, для n -й поправки уравнение примет вид

$$a_n' = -\frac{1}{2 \operatorname{ch}^{2n-6} t} \sum_{|\alpha|=n} A_\alpha \operatorname{th}^{\alpha_0} t a_1^{\alpha_1} \dots a_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

Явная форма решения этого уравнения довольно громоздка. Для определения области пригодности асимптотики важно поведение этого решения при $t \rightarrow \pm\infty$: $a_n = O(e^{\pm 2nt})$. В результате получаем область пригодности известного асимптотического разложения эллиптической функции: $\log \epsilon/2 \ll t \ll -\log \epsilon/2$.

Построенное разложение пригодно менее чем на половине периода эллиптической функции sn , т.е. это разложение непригодно в окрестности точек поворота $u \sim \pm 1$.

Ниже понадобятся асимптотические свойства построенного разложения на границе пригодности. Заменим независимую переменную:

$$t = -\frac{1}{2} \log \epsilon + \tau;$$

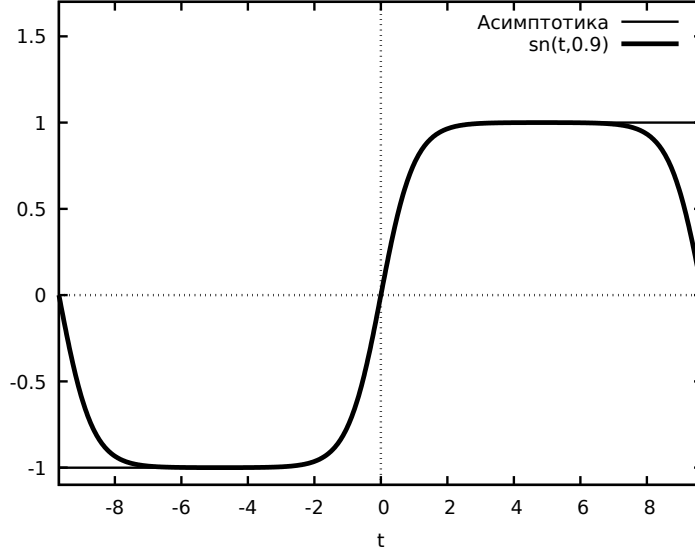


Рис. 4. Кривая по отрезку асимптотики до порядка ϵ и функция $\text{sn}(t|1-\epsilon)$. Асимптотика непригодна в окрестностях точек максимума и минимума.

здесь τ — новая независимая переменная. После подстановки можно получить асимптотическое разложение в терминах τ при $\tau \ll -1$:

$$u \sim 1 + \epsilon \left(-\frac{e^{2\tau}}{128} - 2e^{-2\tau} + \frac{1}{4} \right) + \\ + \epsilon^2 \left(\frac{\tau e^{2\tau}}{256} - \frac{e^{2\tau} \log \epsilon}{512} - \frac{5e^{2\tau}}{512} - \tau e^{-2\tau} + \frac{e^{-2\tau} \log \epsilon}{2} - \frac{e^{-2\tau}}{2} + 2e^{-4\tau} + \frac{11}{64} \right).$$

Похожее асимптотическое разложение можно получить в окрестности нижней ветви эллиптической кривой благодаря свойству $u(t + T/2, \epsilon) = -u(t, \epsilon)$.

6.2. Асимптотические свойства в окрестности точки поворота. В окрестностях точек поворота эллиптическая функция $\text{sn}(t|k)$ имеет асимптотическое разложение другого типа. Это разложение по своим свойствам близко к разложениям в окрестности седловой точки дифференциального уравнения второго порядка. Будем строить асимптотическое разложение в виде

$$u(t, \epsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n v_n(\tau); \quad (21)$$

здесь $v_n = v_n(\tau)$.

Уравнения для коэффициентов асимптотического разложения (21) можно получить, подставив формулы (21) в уравнение для эллиптической функции и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях параметра ϵ . В результате получается рекуррентная система уравнений

$$(v_1')^2 = 4v_1^2 - 2v_1, \\ 2v_1'v_2' = 8v_1v_2 - 2v_2 + 4v_1^3 + 5v_1, \\ 2v_1'v_n' = 8v_1v_n - 2v_n + P_n(v_1, \dots, v_{n-1});$$

здесь P_n — полином четвертого порядка по $v_{k_1}v_{k_2}v_{k_3}v_{k_4}$, где $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = n$.

Решение уравнения для первой поправки v_1 :

$$v_1 = \frac{e^{2\tau}}{16}c_1 + \frac{e^{-2\tau}}{4c_1} + \frac{1}{4};$$

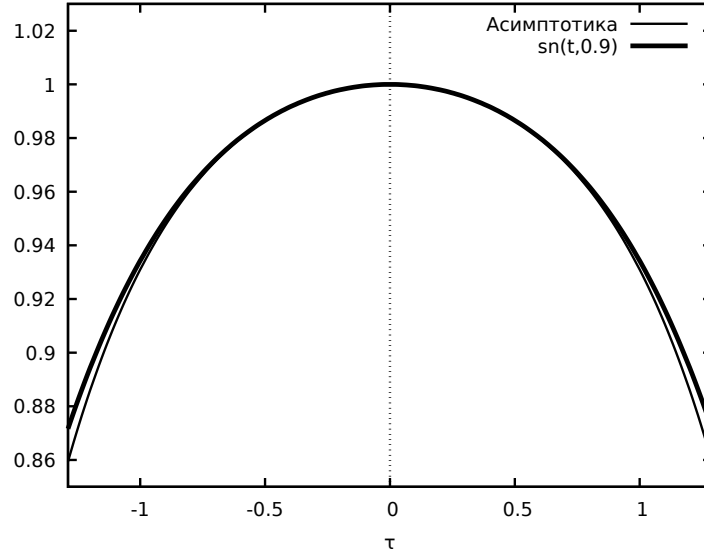


Рис. 5. Окрестность точки поворота $u = 1$. Асимптотическая кривая и функция $\text{sn}(t - \log \epsilon/2, 1 - \epsilon)$ при $\epsilon = 0.01$.

здесь c_1 — параметр решения. Решение для второй поправки:

$$v_2 = e^{2\tau} c_2 - 256e^{-2\tau} c_2 + \frac{e^{4\tau}}{32768} + \frac{\tau e^{2\tau}}{256} - \tau e^{-2\tau} - 3e^{-2\tau} + 2e^{-4\tau} + \frac{11}{64};$$

здесь c_2 — также параметр решения.

Высшие поправки определяются из линейных уравнений первого порядка. Их решения можно представить в виде

$$v_n = e^{2\tau} c_n - 256e^{-2\tau} c_n + O(e^{\pm 2n\tau}), \quad \tau \rightarrow \pm\infty;$$

здесь c_n — параметр решения. Параметры c_n определяются при согласовании асимптотических разложений, пригодных вне точки поворота и в окрестности точки поворота соответственно.

Область пригодности построенного асимптотического разложения определяется из условия

$$\epsilon^{n+1} v_{n+1} = o(\epsilon^n v_n).$$

Оценки роста поправок дают

$$|\tau| \ll -1/2 \log \epsilon.$$

Интервал пригодности асимптотического разложения (19) пересекается с интервалом пригодности (21) при $t \gg 1$ и $\tau \ll -1$. В области пересечения можно согласовать параметры асимптотических разложений c_n . В частности, согласование дает

$$c_1 = -\frac{1}{8}, \quad c_2 = -\frac{\log \epsilon + 5}{512}.$$

В результате получаем

$$u(t, \epsilon) \sim 1 - \epsilon \left(-\frac{e^{2\tau}}{128} - 2e^{-2\tau} + \frac{1}{4} \right) + \\ + \epsilon^2 \left(-e^{2\tau} \frac{\log \epsilon + 5}{512} - e^{-2\tau} \frac{\log \epsilon + 5}{2} + \frac{e^{4\tau}}{32768} + \frac{\tau e^{2\tau}}{256} - \tau e^{-2\tau} - 3e^{-2\tau} + 2e^{-4\tau} + \frac{11}{64} \right).$$

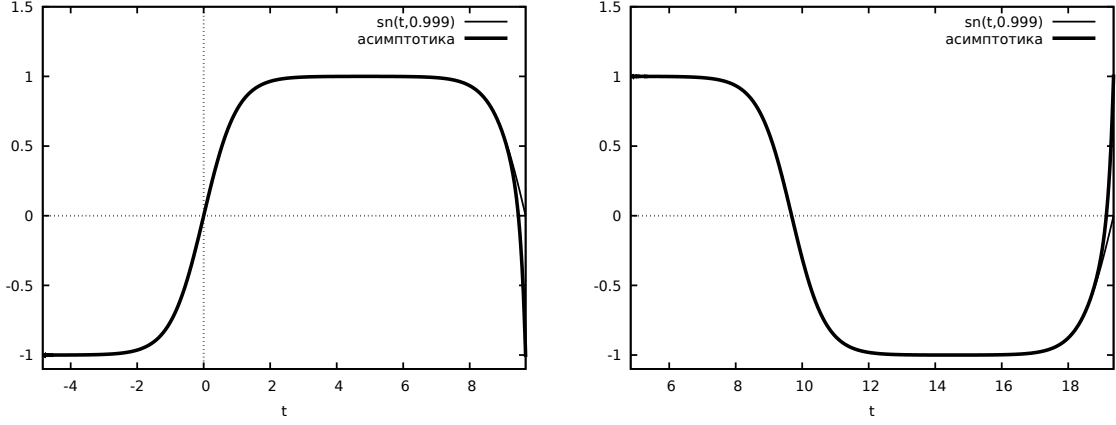


Рис. 6. График слева — равномерное асимптотическое разложение, которое пригодно на более чем половине периода эллиптической функции. График справа получен по формуле $\text{sn}(t + T/2|1 - \epsilon) = -\text{sn}(t|1 - \epsilon)$ из графика слева. В результате построена равномерная асимптотика функции $\text{sn}(t|k)$ на всем периоде. Для кривых, изображенных на графике, $k = 0.999$, т.е. $\epsilon = 0.001$.

6.3. Равномерное асимптотическое разложение. Здесь будет построено асимптотическое разложение, равномерно пригодное более чем на половине периода эллиптической функции $\text{sn}(t|1 - \epsilon)$, т.е. асимптотика пригодна при $t \in (\log \sqrt{\epsilon}, -3 \log \sqrt{\epsilon})$ при $\epsilon \rightarrow \infty$. Для этого построения использован подход согласования асимптотических разложений, предложенный С. Каплуном (см. [12]). Именно для получения равномерно пригодной асимптотики мы суммируем построенные выше асимптотические разложения и вычитаем из получившегося выражения общую часть этих разложений.

Для наглядности здесь разобрано построение равномерной асимптотики порядка ϵ . Разложение с точностью до порядка ϵ , пригодное вне точек поворота, совпадает с формулой (18). Асимптотика этой формулы при $t = \tau - 1/2 \log \epsilon$:

$$\text{th } t + \frac{1}{4}\epsilon (\text{sh } t \text{ ch } t - t) \text{sech}^2 t \sim 1 - \epsilon \left(\frac{1}{4} - 2e^{-2\tau} \right). \quad (22)$$

В то же время асимптотическое разложение в окрестности $u = 1$ с точностью порядка ϵ имеет вид

$$u \sim 1 - \epsilon \left(-\frac{e^{2\tau}}{128} - 2e^{-2\tau} + \frac{1}{4} \right). \quad (23)$$

Из сравнения формул (22) и (23) следует, что общая часть этих асимптотик совпадает с асимптотикой в формуле (22). Тогда равномерная составная асимптотика (см. рис. 6) такова:

$$u(t, \epsilon) \sim \text{th } t + \epsilon \frac{1}{\text{ch}^2 t} \left(\frac{1}{8} \text{sh } 2t - \frac{1}{4}t \right) - \epsilon \frac{e^{2\tau}}{128}. \quad (24)$$

В терминах переменной t формула (24) для равномерной асимптотики при $1/2 \log \epsilon \ll t \ll -\log \epsilon$ примет вид

$$u(t, \epsilon) = \text{th } t + \epsilon \frac{1}{\text{ch}^2 t} \left(\frac{1}{8} \text{sh } 2t - \frac{1}{4}t \right) - \epsilon^2 \frac{e^{2t}}{128} + o(\epsilon). \quad (25)$$

Здесь важно заметить, что хотя правая часть содержит слагаемое с множителем ϵ^2 , его необходимо удерживать в асимптотике порядка ϵ . Это слагаемое оказывается порядка ϵ при $t \sim -1/2 \log \epsilon$, т.е. внутри интервала, в котором построенная асимптотика пригодна.

В окрестности левой точки поворота $u = -1$ построения совпадают с точностью до замены знаков, так как $\text{sn}(t - T/2|k) = -\text{sn}(t|k)$. В результате асимптотическая формула, пригодная

на симметричном относительно $t = 0$ интервале $\log \epsilon \ll t \ll -\log \epsilon$, существенно большем, чем половина периода, имеет вид

$$u(t, \epsilon) = \operatorname{th} t + \epsilon \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \left(\frac{1}{8} \operatorname{sh} 2t - \frac{1}{4} t \right) - \epsilon^2 \frac{e^{2t}}{128} + \epsilon^2 \frac{e^{-2t}}{128} + o(\epsilon). \quad (26)$$

Для построения равномерной асимптотики на всем периоде можно построить похожие асимптотические разложения. Однако проще воспользоваться формулой $u(t + T/2, \epsilon) = -u(t, \epsilon)$, и асимптотическое разложение получится автоматически из разложения (25) (см. рис. 6):

$$u(t, \epsilon) \sim -\operatorname{th}(t - T/2) - \epsilon \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t - T/2)} \left(\frac{1}{8} \operatorname{sh} 2 \left(t - \frac{T}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right) - \epsilon^2 \frac{e^{2(t-T/2)}}{128}. \quad (27)$$

Единая формула для асимптотики эллиптической функции, пригодная на всем периоде, может быть построена таким же образом из формул (25) и (27) или (26). Однако такая формула довольно громоздко выглядит и здесь не приводится.

Благодарность. Автор выражает признательность Б. И. Сулейманову за поддержку работы, а также В. Ю. Новокшенову за полезные комментарии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
2. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. — М.: Наука, 1970.
3. *Журавский А. М.* Справочник по эллиптическим функциям. — М.: АН СССР, 1941.
4. *Киселев О. М.* Осцилляции около сепаратрисы уравнения Дюффинга// Тр. ИММ УрО РАН. — 2012. — 18, № 2. — С. 141–153.
5. *Кузнецов Е. А., Михайлов А. В.* Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах со слабой дисперсией// ЖЭТФ. — 1974. — 67, № 5. — С. 1717–1727.
6. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях. — М.: Мир, 1988.
7. *Нейштадт А. И.* Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром// Прикл. мат. мех. — 1975. — 39, № 4. — С. 621–632.
8. *Тимофеев А. В.* К вопросу о постоянстве адиабатического инварианта при изменении характера движения// ЖЭТФ. — 1978. — 75, № 4. — С. 1303–1308.
9. *Dunne G. V., Rao K.* Lamé instantons// J. High Energy Phys. — 2000. — 1, № 019. — P. 1–9.
10. *Glebov S. G., Kiselev O. M., Tarkhanov N.* Nonlinear equations with small parameter. — Berlin: de Gruyter, 2017.
11. *Jacobi C. K. G. J.* Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. — Regiomontanus, 1829.
12. *Kaplan S.* Fluid mechanics and singular perturbation. — New York: Academic Press, 1967.
13. *Kiselev O. M.* Uniform asymptotic behaviour of Jacobi sn near a singular point. The lost formula from handbooks for elliptic functions// in: arxiv 1510.06602, 2015.
14. *Newcomb S.* An investigation of the orbit of Uranus with general tables of its moon// Smithsonian Contributions to Knowledge. — 1873. — 19, № 262. — P. 296.
15. *Lindstedt A.* Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Strungstheorie// Mem. Acad. Imper. Sci. St. Petersburg — 1883. — 31, № 4. — P. 20.
16. Maxima. A computer algebra system. <http://maxima.sourceforge.net>.
17. *Whittaker E. T., Watson G. N.* A course of modern analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927.
18. Wolfram research. <http://functions.wolfram.com/EllipticFunctions/JacobiSN/06/03/>.

Олег Михайлович Киселев

Институт математики с вычислительным центром,

Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия

E-mail: olegkiselev@matem.anrb.ru, ok@ufanet.ru



СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА—ОРЛИЧА

© 2019 г. Н. А. ВОРОБЬЁВ, Ф. Х. МУКМИНОВ

Аннотация. Рассматривается первая смешанная задача для некоторого класса анизотропных параболических уравнений

$$(\beta(x, u))'_t - \operatorname{div} a(t, x, u, \nabla u) - b(t, x, u, \nabla u) = \mu$$

с мерой в правой части и нестепенными нелинейностями в цилиндрической области $D^T = (0, T) \times \Omega$, где область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена. Доказано существование ренормализованного решения задачи при $g_t = 0$ для функции $\beta(x, r)$, которая возрастает по r и удовлетворяет условию Каратеодори.

Ключевые слова: анизотропное параболическое уравнение, ренормализованное решение, нестепенная нелинейность, существование решения, N -функция.

EXISTENCE OF A RENORMALIZED SOLUTION OF A PARABOLIC PROBLEM IN ANISOTROPIC SOBOLEV–ORLICZ SPACES

© 2019 N. A. VOROB'YOV, F. KH. MUKMINOV

ABSTRACT. We consider the first mixed problem for a certain class of anisotropic parabolic equations of the form

$$(\beta(x, u))'_t - \operatorname{div} a(t, x, u, \nabla u) - b(t, x, u, \nabla u) = \mu$$

where μ is a measure and the coefficients contain nonpower nonlinearities in the cylindrical domain $D^T = (0, T) \times \Omega$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain. We prove the existence of a renormalized solution of the problem for $g_t = 0$ and a function $\beta(x, r)$, which increases with respect to r and satisfies the Carathéodory condition.

Keywords and phrases: anisotropic parabolic equation, renormalized solution, nonpower nonlinearity, existence of solutions, N -function.

AMS Subject Classification: 35K20, 35K55, 35K65

1. Введение. Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 1$. В цилиндрической области $D^T = (0, T) \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача для уравнения вида

$$(\beta(x, u))'_t - \operatorname{div} a(t, x, u, \nabla u) - b(t, x, u, \nabla u) = \mu, \quad a = (a_1, \dots, a_n), \quad (1.1)$$

где $\beta(x, u)$ — возрастающая и непрерывная по u функция, измеримая по x . Краевые условия однородны:

$$u(t, x)|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \quad (1.2)$$

$$\beta(x, u(0, x)) = \beta(x, u_0(x)) \in L_1(\Omega). \quad (1.3)$$

Модельным примером уравнений (1.1) с нестепенными нелинейностями служит уравнение вида

$$(\beta(u))_t = \sum_{i=1}^n \left(B'_i(u_{x_i}) + \Psi_i(t, x) \right)_{x_i} + \Phi(t, x), \quad (1.4)$$

где B_i — N -функции (см. [4]), $\beta(u)$ — возрастающая непрерывная функция, $\Psi_i \in E_{\overline{B_i}(D^T)}$, $\Phi \in L_1(D^T)$; $\overline{B_i}$ — N -функция, сопряженная к B_i . Отметим, что уравнение (1.4) можно переписать в виде уравнения

$$(\beta(u))_t - \sum_{i=1}^n \left(B'_i(u_{x_i}) \right)_{x_i} = \mu$$

с мерой в правой части частного вида $\mu = \Phi(t, x) + \operatorname{div} \Psi(t, x)$. Подробнее об уравнениях с мерами будет сказано в п. 2.

Существование слабого решения уравнения

$$(\beta(u))'_t = \operatorname{div} a(\beta(u), \nabla u)$$

(и систем таких уравнений) и единственность в предположении $(\beta)'_t \in L_1(D^T)$ доказаны в [9]. Обзор работ, касающихся единственности ренормализованных решений параболических задач, дан в [8].

В [12] была показана необходимость расширения понятия решения в случае уравнения $\Delta_p u = F(x, u)$ с L_1 -данными: $\sup_{|u|<c} F(x, u) \in L_{1,\operatorname{loc}}(\Omega)$. Именно, были доказаны существование и единственность энтропийного решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения. Авторы указывают, что вместо энтропийного решения, введенного впервые С. Н. Кружковым для уравнений первого порядка (см. [5]), можно рассматривать также ренормализованные решения. Понятие ренормализованного решения было впервые введено в [18] при изучении задачи Коши для уравнения Больцмана.

В [14] доказаны существование и единственность ренормализованного решения уравнения

$$u_t - \operatorname{div} a(t, x, \nabla u) = f$$

со степенными нелинейностями. В [30] для этого же уравнения доказаны существование и единственность энтропийного решения и показана его эквивалентность ренормализованному решению.

В настоящей работе доказывается существование ренормализованного решения задачи (1.1), (1.3) для анизотропного уравнения с нелинейностями, определяемыми N -функциями. Близкий результат для уравнения

$$(\beta(x, u))'_t = \operatorname{div} (a(x, \nabla u) + F(u)),$$

сформулирован в [23] при условиях, о которых будет сказано ниже, однако доказательство дано лишь для случая $\beta(x, u) = u$.

Существование ренормализованного решения первой смешанной задачи в ограниченной области для изотропного уравнения (1.1) с нестепенными нелинейностями доказано в [31] при сильном ограничении $0 < c < \beta'_u < C(K)$, $\nabla_x \beta'_u < C(K)$, $|u| < K$. Эти условия не выполнены даже в степенном случае $\beta(r) = r^q$, $q > 0$, $q \neq 1$. Существование и единственность ренормализованного решения первой смешанной задачи в ограниченной области для уравнения (1.1) с $\beta = u$ и переменными нелинейностями доказана в [11, 32] (см. также [1]).

2. Об уравнениях с мерой в правой части. Приведем один результат, касающийся сингулярных мер.

Теорема 2.1 (см. [15]). Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $N > 2$, $0 \in \Omega$. Пусть функция $f \in L_1(\Omega)$ и последовательность $f_n \in L_\infty(\Omega)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus B_\rho(0)} |f - f_n| dx = 0 \quad \forall \rho > 0.$$

Тогда последовательность решений задач Дирихле

$$\begin{aligned} -\Delta u_n + |u_n|^{q-1}u_n &= f_n, \quad q \geq \frac{N}{N-2}, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

сходится к единственному решению и задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta u + |u|^{q-1}u = f.$$

Из этой теоремы следует, что если взять $f = 0$ и дельта-образную последовательность f_n , то последовательность решений задачи Дирихле с f_n будет стремиться к нулю. Другими словами, решение задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta u + |u|^{q-1}u = \delta$$

не существует. Но если $q < N/(N-2)$, то решение существует (см. [13]). Аналогичный результат для p -лапласиана установлен в [28].

Проблема возникает благодаря достаточно быстро растущей нелинейности по u . Если нет зависимости от u , то задача Дирихле для уравнения $\operatorname{div}(a(x, \nabla u)) = \mu$ имеет ренормализованное решение при любой ограниченной мере Радона (см. [17]).

Сформулируем теперь результат для параболического уравнения.

Теорема 2.2 (см. [29]). Пусть последовательность $f_n \in L_\infty(Q)$, $Q = (0, T) \times \Omega$ удовлетворяют условию

$$\int_Q \varphi f_n dx \rightarrow \int_Q \varphi d\lambda \quad \forall \varphi \in C(\overline{Q}),$$

где λ — ограниченная мера Радона на Q , сосредоточенная на множестве нулевой параболической r -емкости, и $q > r/(r-2)$. Тогда последовательность решений задачи

$$u_t - \Delta u_n + |u_n|^{q-1}u_n = f_n, \quad u_n(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad u_n(0, x) = 0$$

такова, что u_n , $|\nabla u_n|$ стремятся к нулю в пространстве $L_1(Q)$. Более того,

$$\int_Q \varphi |u_n|^{q-1}u_n dx \rightarrow \int_Q \varphi d\lambda, \quad \varphi \in C_0(Q).$$

Эти результаты побуждают ограничиться рассмотрением диффузных мер $M_0(Q)$, равных нулю на множествах нулевой параболической емкости. Другое название этих мер — мягкие меры, или абсолютно непрерывные меры.

Пусть $\chi(P)$ обозначает логическую функцию, равную 1, когда P истинно, и 0, когда P ложно. Приведем определение параболической емкости $\operatorname{cap}_p(B)$.

Определение 2.1. Пусть

$$\begin{aligned} V &= L_2(Q) \cap \dot{W}_p^{-1}(Q), \quad W = \left\{ u \in L_p((0, T); V) : u_t \in L_{p'}((0, T); V') \right\}, \\ \operatorname{cap}_p(U) &= \inf \left\{ \|u\|_W : u \in W, u \geq \chi((t, x) \in U) \right\}, \\ \operatorname{cap}_p(B) &= \inf \left\{ \operatorname{cap}_p(U) : B \subset U \right\}. \end{aligned}$$

Для диффузных мер справедливо следующее разложение.

Теорема 2.3 (см. [19]). Для $\mu \in M_0(Q)$ существуют такие функции (f, g_1, g_2) , $f \in L_1(Q)$, $g_1 \in L_{p'}(0, T; W_{p'}^{-1}(\Omega))$, $g_2 \in L_p((0, T); V)$, что

$$\int_Q \varphi d\mu = \int_Q \varphi f dx dt + \int_0^T ((g_1, \varphi) - (g_2, \varphi_t)) dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([0, T] \times \Omega).$$

Описанное разложение неединственно. Несколько загроуляя, его можно записать в виде

$$\mu = f + \operatorname{div} G + (g_2)_t, \quad G \in (L_{\bar{p}}(Q))^N, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{\bar{p}} = 1.$$

Такое же разложение (без g_2) справедливо для мер, абсолютно непрерывных относительно эллиптической емкости.

Наше наблюдение состоит в том, что для эллиптических уравнений вида

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + b(x, u, \nabla u) = \mu$$

с обычными ограничениями на функции a, b (см., например, [3]) наличие диффузной меры $\mu = f + \operatorname{div} G$ в правой части ничего нового не дает: надо положить $\hat{a} = a + G$, $\hat{b} = b - f$, и условия сохраняются. Нарушится только условие коэрцитивности, которое традиционно записывают в виде $a(x, u, y) \cdot y \geq c|y|^p$. Но если потребовать его выполнения в мягкой форме, $a(x, u, y)y \geq c|y|^p - F(x)$, $F(x) \in L_1(\Omega)$, то и оно не нарушится.

Описанный факт справедлив и для параболических уравнений (см. п. 3 настоящей работы), слагаемые $f, \operatorname{div} G$ меры μ могут быть также включены в функцию b и поток a . Таким образом, среди диффузных мер достаточно рассмотреть лишь меры, имеющие разложение $\mu = (0, 0, g_2)$.

Но и для диффузных мер есть задачи, для которых слабое решение отсутствует. В [20] показано, что существуют диффузные меры, для которых отсутствует слабое решение задачи

$$-\Delta u + f(u) = \mu, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1-0} f(t) = \infty.$$

В связи с этим в [25] было предложено новое определение ренормализованного решения задачи

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} a(x, \nabla u) + f(u) &\ni \mu, & x &\in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x &\in \partial\Omega, \end{aligned}$$

где $f, \operatorname{dom} f = [m, M]$ — максимальный монотонный граф, μ — диффузная мера,

$$\begin{aligned} a(x, y)y &\geq \delta_0|y|^p, & (a(x, y) - a(x, z))(y - z) &> 0, \\ |a(x, y)| &\leq j_1(x) + c|y|^{p-1}, & j_1 &\in L_{\bar{p}}(\Omega). \end{aligned}$$

Теорема 2.4. *Для диффузной меры μ существует пара функций (u, w) , $w \in L_1(\Omega)$, $u \in \operatorname{dom} f$, $w \in f(u)$, $T_k(u) \in \dot{W}_p^1(\Omega)$ для всех $k > 0$, являющаяся решением задачи в следующем смысле: существует такая диффузная мера ν , что ν^+ сосредоточена на $\{u = M\} \cap \{u \neq \infty\}$, ν^- сосредоточена на $\{u = m\} \cap \{u \neq -\infty\}$ и для всех $h \in C_0(\mathbb{R})$, $h(u) \in L_\infty(\Omega, d|\nu|)$ выполнено соотношение*

$$\int_{\Omega} (a(x, \nabla u) \nabla (h(u)\xi) + wh(u)\xi) dx = \int_{\Omega} h(u)\xi d(\mu - \nu)$$

при любом $\xi \in \dot{W}_p^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[n < |u| < n+1]} |\nabla u|^p dx = 0.$$

Единственность указанного решения не ясна.

3. Функциональные пространства и предположения. Введем следующие обозначения:

$$\langle f(t) \rangle = \int_{\Omega} f(t, x) dx, \quad [f] = \int_{D^T} f(t, x) dx dt, \quad f(\varphi) = (f, \varphi)_{\Omega}.$$

В последнем равенстве записано значение обобщенной функции f на элементе φ .

Все постоянные, встречающиеся в работе, положительны (или, в оговоренных случаях, неотрицательны).

Предполагается, что область Ω обладает сегментным свойством: *существует локально конечный набор таких открытых множеств U_i и векторов $e_i \in \mathbb{R}^n$, что*

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_i U_i$$

и для любых $x \in \overline{\Omega} \cap U_i$, $t \in (0, 1)$, точка $x + te_i$ лежит в Ω .

Для выпуклых функций $B(s)$, $s \geq 0$, функция

$$\overline{B}(z) = \sup_{s \geq 0} (s|z| - B(s))$$

называется *дополнительной*. Очевидно следующее свойство дополнительных функций (неравенство Юнга):

$$|zs| \leq B(z) + \overline{B}(|s|).$$

Выпуклая четная функция $B(s)$, $s \in \mathbb{R}$, называется *N-функцией*, если

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{B(s)}{s} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{B(s)}{s} = \infty.$$

Подробные сведения из теории *N-функций* можно найти в [4, 21, 22]. Приведем здесь только необходимые для дальнейшего использования.

Говорят, что *N-функция* $B(s)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, если существуют такие числа $s_0, k > 0$, что $B(2s) \leq kB(s)$ для всех $s \geq s_0$. В настоящей работе не предполагается, что используемые *N-функции* удовлетворяют Δ_2 -условию.

Будем использовать следующее обозначение для *N-функций*:

$$\tilde{B} \prec B \iff \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tilde{B}(\lambda s)}{B(s)} = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Через $L_B(Q)$ обозначим пространство Орлика, соответствующее *N-функции* $B(s)$, с нормой Люксембурга

$$\|u\|_{B,Q} = \inf \left\{ k > 0 : \int_Q B\left(\frac{u(x)}{k}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

Неравенство Гёльдера можно записать в виде

$$\int_Q |uv| dx \leq 2 \|u\|_{B,Q} \|v\|_{\overline{B},Q}.$$

Отметим очевидное неравенство

$$\|u\|_{B,Q} \leq 1 + \int_Q B(u(x)) dx.$$

Ниже в качестве Q могут выступать области Ω , D^T и другие, причем индекс $Q = \Omega$ может быть опущен.

Через $\text{Lip}_0(Q)$ обозначим пространство липшицевых функций с компактным носителем, лежащим в Q . Справедливо неравенство Стеклова—Фридрихса

$$\int_Q B(u(x)) dx \leq \int_Q B(C_Q u_{x_1}(x)) dx, \quad u \in \text{Lip}_0(Q).$$

Замыкание пространства $\text{Lip}_0(Q)$ в $L_B(Q)$ будем обозначать через $E_B(Q)$. Пространство $E_B(Q)$ сепарабельно. Пространство $L_B(Q)$ является сопряженным к пространству $E_{\overline{B}}(Q)$. Если $\tilde{B} \prec B$, то $L_B(Q) \subset E_{\tilde{B}}(Q)$. Если $u_n \in L_B(Q)$ — ограниченная последовательность, сходящаяся $u_n \rightarrow u$ почти всюду в Q , то $u_n \rightarrow u$ по норме в $L_{\tilde{B}}(Q)$ (см. [4, леммы 11.2, 13.2]).

Если $f \in L_B(D^T)$ продолжена нулем вне ограниченной области D^T , f_h — осреднение Стеклова,

$$f_h(t, x) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau, x) d\tau, \quad f_{\rho_m}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \rho_m(x - y) dy,$$

где ρ_m — ядро осреднения, то имеет место модулярная сходимость осреднений

$$\left[B(\varepsilon(f_h - f)) \right] \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0; \quad \left[B(\varepsilon(f_{\rho_m} - f)) \right] \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

при некотором $\varepsilon > 0$ и, тем более, слабая сходимость на элементах из пространства $L_{\overline{B}}(Q)$ (см. [21]).

Определим анизотропные пространства Соболева—Орлича $\dot{W}_{\mathbf{LB}}^1(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{W_{\mathbf{LB}}^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{B_i, \Omega},$$

как множество тех элементов $u \in L_1(\Omega)$ для которых $\nabla u = \theta = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \prod_{i=1}^n L_{B_i}(\Omega)$, и существуют такие последовательности $\varphi_m \in C_0^1(\Omega)$, что $\nabla \varphi_m \rightarrow \theta$ *-слабо как последовательности функционалов над $\prod_{i=1}^n E_{\overline{B}_i}(\Omega)$. Легко видеть, что $\dot{W}_{\mathbf{LB}}^1(\Omega)$ является подмножеством в $\dot{W}_1^1(\Omega)$. Будем обозначать через $\dot{W}_{\mathbf{E}}^1(\Omega)$ замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $\dot{W}_{\mathbf{LB}}^1(\Omega)$.

Пространство $\dot{W}_{\mathbf{LB}}^{0,1}(D^T)$ с нормой

$$\|u\|_{W_{\mathbf{LB}}^{0,1}(D^T)} = \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{B_i, D^T}$$

определяется аналогично описанному выше и в дальнейшем будет обозначаться через V . Вложение $V \subset \dot{W}_1^{0,1}(D^T)$ определяется как следствие вложений $L_{B_i}(D^T) \subset L_1(D^T)$.

Через X' обозначим пространство $\prod_{i=1}^n L_{\overline{B}_i}(D^T)$. Элемент $\Phi \in X'$ можно рассматривать как функционал, действующий на элементы $v \in V$ по формуле

$$(\Phi, v)_{D^T} = \sum_{i=1}^n [\Phi_i v_{x_i}].$$

Приведем условия на функции, входящие в уравнение (1.1). Функция $\beta(x, r)$, $\beta(x, 0) = 0$, удовлетворяет условию Каратеодори, возрастает по r и при любом $r \in \mathbb{R}$

$$\beta(x, r) \in L_1(\Omega). \quad (3.1)$$

Функции $a_i(t, x, u, y)$, $b(t, x, u, y)$ непрерывны по $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$ и измеримы по $(t, x) \in D^T$.

Будем предполагать, что измеримая начальная функция u_0 такова, что $\beta(x, u_0) \in L_1(\Omega)$, и при любом $\delta > 0$ найдется такая функция $v \in C_0^1(\Omega)$, что

$$\langle |\beta(x, u_0) - \beta(x, v)| \rangle < \delta.$$

Запишем условие коэрцитивности

$$a(t, x, r, y) \cdot y \geq \delta_0 S(y) - C_1 F(t, x), \quad S(y) = \sum_{i=1}^n B_i(y_i), \quad F \in L_1(D^T). \quad (3.2)$$

Пусть существуют такие непрерывная функция $C(m)$ и неотрицательные функции F_j , что

$$|a_j(t, x, r, y)| \leq C(m) \left(F_j(t, x) + \overline{B}_j^{-1}(C(m)S(y)) \right), \quad F_j \in E_{\overline{B}_j}(D^T), \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.3)$$

при всех $r \in [-m, m]$, $y, z \in \mathbb{R}^n$, $(t, x) \in D^T$.

Условие монотонности записывается в следующем виде:

$$\Lambda(t, x, r, y, z) = (a(t, x, r, y) - a(t, x, r, z)) \cdot (y - z) > 0, \quad y \neq z. \quad (3.4)$$

Положим $b(t, x, r, y) = b(t, x, 0, y) - b_0(t, x, r, y)$. Пусть $|b(t, x, 0, y)| \leq F(t, x)$,

$$rb_0(t, x, r, y) \geq 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n, (t, x) \in D^T; \quad (3.5)$$

$$|b_0(t, x, r, y)| \leq C(m)(S(y) + F(t, x)), \quad |r| \leq m, \quad \forall m > 0. \quad (3.6)$$

Приведем для сравнения некоторые условия из [23]:

$$a(x, y) \cdot y \geq c_a \left(M(x, y) + \overline{M}(x, a(x, y)) \right) - F(x),$$

где $M(x, y)$ — N -функция Музилака,

$$M(x, y) \geq c_M |y|^{1+\delta}, \quad |y| \geq a_0.$$

Кроме того требуется, чтобы N -функция $\overline{M}$ удовлетворяла Δ_2 -условию.

Покажем, что наличие диффузной меры $\mu = f + \operatorname{div} G$, $f \in L_1(D^T)$, $G_j \in E_{\overline{B_j}}(D^T)$, $j = \overline{1, n}$, в правой части уравнения (1.1) ничего нового не дает. Действительно, после замены $\widehat{a} = a + G$, $\widehat{b} = b + f$ условия (3.2)–(3.6) сохраняются.

4. Формулировка результатов. Определим функции

$$T_k(v) = \begin{cases} k & \text{при } v > k, \\ v & \text{при } |v| \leq k, \\ -k & \text{при } v < -k; \end{cases} \quad \eta(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r > 1, \\ 1 - r & \text{при } 0 \leq r \leq 1, \\ 1 & \text{при } r < 0; \end{cases}$$

$$H_\varepsilon(r) = 1 - \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right), \quad \eta_m(r) = \eta(1 + |r| - m).$$

Пусть измеримая функция $u : D^T \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойством

$$T_k(u) \in \dot{W}_{\mathbf{LB}}^{0,1}(D^T) \quad (4.1)$$

при всех $k > 0$. Тогда определен градиент ∇u этой функции по формуле

$$\chi(|u| < k) \nabla u = \nabla T_k(u).$$

Для таких функций u будем использовать обозначения

$$\widetilde{b}(u) = b(t, x, u, \nabla u), \quad \widetilde{a}(u) = a(t, x, u, \nabla u).$$

(оператор Немыцкого).

Определение 4.1. Ренормализованным решением задачи (1.1)–(1.3) называется такая измеримая функция $u : D^T \rightarrow \mathbb{R}$, обладающая свойством (4.1), что

- (1) $\widetilde{b}(u) = b(t, x, u, \nabla u) \in L_1(D^T)$, $\beta(x, u) \in L_1(D^T)$;
- (2) функция $\widetilde{a}(u) = a(t, x, u, \nabla u)$ удовлетворяет при всех $k > 0$ условию

$$\left[\chi(k \leq |u| \leq k+1) |\widetilde{a}(u) \cdot \nabla u| \right] \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty; \quad (4.2)$$

- (3) при всех $\xi \in \operatorname{Lip}_0(\mathbb{R})$, $\phi \in C_0^1(D_{-1}^T)$ выполнено равенство

$$\left[\phi_t \int_{u_0}^u \xi(r) d\beta(x, r) + \phi \widetilde{b}(u) \xi(u) \right] = \left[\widetilde{a}(u) \cdot \nabla (\xi(u) \phi) \right], \quad \beta(x, u_0) \in L_1(\Omega). \quad (4.3)$$

Замечание 4.1. Интеграл Стильтьеса в формуле (4.3) вычисляется при фиксированных x .

Замечание 4.2. В условии (4.2) предполагается конечность интегралов при всех $m = 0, 1, \dots$. Из условий (4.1), (3.3) и (3.4) следует, что

$$\widetilde{a}(T_k u) \in X'. \quad (4.4)$$

Действительно, пусть $[\widetilde{a}(T_k u) \cdot \nabla T_k u] < C_k$. Из (3.2) следует неравенство

$$[\delta_0 S(\nabla T_k u)] \leq C_k + C_1.$$

Используя условие монотонности (3.4), запишем неравенство для вектора

$$\varphi = \pm \gamma_k \psi \in \prod_{i=1}^n E_{B_i}(D^T), \quad \gamma_k \in (0, 1), \quad \|\psi_i\|_{B_i} < 1 :$$

следующее неравенство:

$$\left[\tilde{a}(T_k u) \cdot \varphi \right] \leq \left[\tilde{a}(T_k u) \cdot \nabla T_k u \right] - \left[a(t, x, T_k u, \varphi) \cdot (\nabla T_k u - \varphi) \right].$$

При достаточно малом γ_k справедливо неравенство

$$\left\| \overline{B}_j^{-1} C(k) \gamma_k S(\nabla \psi) \right\|_{\overline{B}_j, D^T} \leq 1.$$

Используя условие (3.3), устанавливаем, что

$$\left[\tilde{a}(T_k u) \cdot \varphi \right] \leq C_k + \sum_{j=1}^n C(k) \left(\|F_j\|_{\overline{B}_j, D^T} + 1 \right) \|(T_k u)_{x_j} - \varphi_j\|_{B_j, D^T} \leq C_2(k).$$

Функционал в левой части ограничен на некотором малом шаре, поэтому он ограничен по норме. Тем самым, (4.4) доказано.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия (3.1)–(3.6) и $\mu = 0$. Тогда существует ренормализованное решение задачи (1.1)–(1.3).

Обозначим через $\text{sign}^+(s)$ многозначную функцию, равную 1 при $s > 0$, нулю при $s < 0$, $[0, 1]$ при $s = 0$; пусть $r^+ = \max(r, 0)$.

При дополнительном условии

$$\begin{aligned} & \left(a(t, x, r, y) - a(t, x, \tilde{r}, z) \right) \cdot (y - z) + \\ & + C(m) \left(F(t, x) + |a(t, x, r, y) \cdot y| + |a(t, x, \tilde{r}, y) \cdot y| \right) |r - \tilde{r}| \geq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $r, \tilde{r} \in [-m, m]$, $y, z \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$, в [8] доказано следующее утверждение о единственности решения.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия (3.3), (4.5). Пусть при $j = 1, 2$ функции $u_{0j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что $\beta(x, u_{0j}) \in L_1(\Omega)$. Пусть u_j — ренормализованные решения задачи (1.1) — (1.3) с данными u_{0j} , b_j и диффузной мерой вида $\mu = f + \text{div } G$. Тогда существует такая функция $K(t, x) \in \text{sign}^+(u_1 - u_2)$, что для всех $\alpha(t) \in \text{Lip}_0(-1, T)$, $\alpha(0) = 1$, $\alpha \geq 0$ выполнено неравенство

$$-\left[\alpha'(\beta(x, u_1(t)) - \beta(x, u_2(t)))^+ \right] \leq \left\langle (\beta(x, u_{01}) - \beta(x, u_{02}))^+ \right\rangle + \left[\alpha(\tilde{b}_1(u_1) - \tilde{b}_2(u_2)) K \right].$$

В частности, если $\beta(x, u_{0j}) = \beta(x, u_0)$, $b_j = b = b(t, x, s)$ и функция b удовлетворяет условию

$$b(t, x, r) - b(t, x, s) \leq L(\beta(x, r) - \beta(x, s)) \quad \forall r, s \in \mathbb{R}, \quad r > s,$$

то $\beta(x, u_1) = \beta(x, u_2)$ почти всюду в D^T .

Замечание 4.3. В [8] рассматривались уравнения без меры в правой части. Но, как показано в п. 3, диффузная мера вида $\mu = f + \text{div } G$ может быть перенесена в левую часть уравнения, и поэтому теорема 4.2 справедлива и для уравнений с такими мерами.

5. Применение формулы интегрирования по частям. В следующей лемме использована идея работы [9].

Лемма 5.1. Пусть $\beta_m(x, r)$ — каратеодориева функция, неубывающая по r , и измеримые функции $v, v_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что

$$\beta_m(x, v) \in L_1(D^T), \quad \beta_m(x, v_0) \in L_1(\Omega).$$

Пусть $w \in X' + L_1(D^T)$ и

$$\left[\phi_t(\beta_m(x, v) - \beta_m(x, v_0)) \right] + (w, \phi)_{D^T} = 0$$

при всех $\phi \in C_0^\infty((-1, T) \times \Omega)$. Тогда

$$-(\beta_m(x, v)_t, \xi(x, v)\varphi)_{D^T} = \left[\varphi_t \int_{v_0}^v \xi(x, r) d\beta_m(x, r) \right] \quad (5.1)$$

при всех ограниченных $\xi(x, s)$, монотонных и липшицевых по s и удовлетворяющих условию $\nabla \xi(x, v) \in X$, и $\varphi \in C_0^\infty((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$ (либо $\xi = \xi(s) \in \text{Lip}_0 \mathbb{R}$ и $\nabla(\xi(v)\varphi) \in X$ при всех $\varphi \in C_0^\infty((-1, T) \times \Omega)$).

Доказательство см. в [8]. Обычно формулу (5.1), в частной форме установленную впервые в [9], называют «формулой интегрирования по частям» и доказывают только для функций $\xi = \xi(v)$ (см. [16]).

Подставив $\xi(r) = \eta_m(r)$ в (4.3), получим

$$\left[\phi_t \int_{u_0}^u \eta_m(r) d\beta(x, r) + \phi f \eta_m(u) \right] = [\tilde{a}(u) \cdot \nabla(\eta_m(u)\phi)]. \quad (5.2)$$

Положим

$$\beta_m(x, s) = \int_0^s \eta_m(r) d\beta(x, r). \quad (5.3)$$

Тогда, как нетрудно видеть, $\beta_m(x, u) \in L_1(D^T)$ и $\beta_m(x, u_0) \in L_1(\Omega)$. Поскольку из определения ренормализованного решения следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u) \cdot \nabla \eta_m(u) &= \chi(m-1 < |u| < m) \tilde{a}(u) \cdot \nabla \eta_m(u) \in L_1(D^T), \\ \eta_m(u) \tilde{a}(u) &= \eta_m(u) \chi(|u| < m) \tilde{a}(u), \\ \chi(|u| < m) \tilde{a}(u) &= \chi(|u| < m) a(t, x, T_m u, \nabla T_m u) = \chi(|u| < m) \tilde{a}(T_m u) \in X', \end{aligned}$$

то из равенства (5.2), записанного в виде

$$\left[\phi_t (\beta_m(x, u) - \beta_m(x, u_0)) + \phi \tilde{b}(u) \eta_m(u) \right] = [\tilde{a}(u) \cdot \nabla(\eta_m(u)\phi)],$$

по лемме 5.1 следует, что для $\beta_m(x, u)$ справедливо равенство вида (5.1) и

$$\left[\varphi_t \int_{u_0}^u \xi(x, r) d\beta_m(x, r) + f_m \xi(x, u) \varphi \right] = [\eta_m(u) \tilde{a}(u) \cdot \nabla(\xi(x, u)\varphi)]$$

при всех $\xi(x, u) \in V$ и $\varphi \in C_0^\infty((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$, где $\xi(x, s)$ — ограниченная, монотонная и липшицева по s функция,

$$f_m = \tilde{b}(u) \eta_m(u) - \tilde{a}(u) \cdot \nabla \eta_m(u).$$

6. Существование слабого решения.

Определение 6.1. Слабым решением задачи (1.1)–(1.3) называется функция $u \in V$, удовлетворяющая условиям

$$\beta(x, u) \in L_1(D^T), \quad b(t, x, u, \nabla u) \in L_1(D^T), \quad a(t, x, u, \nabla u) \in X',$$

а также при $\varphi \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$ равенству

$$\left[(\beta(x, u_0) - \beta(x, u)) \varphi_t + \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla u) D_i \varphi \right] = [b(t, x, u, \nabla u) \varphi]. \quad (6.1)$$

Замечание 6.1. Из леммы 5.1 сразу следует, что слабое решение является ренормализованным.

Следуя [9], положим при $x \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{B}(x, r) = \beta(x, r)r - \Phi(x, r), \quad \Phi(x, r) = \int_0^r \beta(x, s)ds.$$

Легко видеть, что

$$\mathcal{B}(x, r) = \Psi(x, \beta(x, r)); \quad \Psi(x, r) = \sup_s \{sr - \Phi(x, s)\}.$$

Поскольку $\beta(x, r) \in L_1(\Omega)$ возрастающая по r функция, то Φ и Ψ — выпуклые функции при фиксированных x , $\mathcal{B}(x, r)$ возрастает по r на $[0, \infty)$. Интегрированием по частям устанавливается формула

$$\mathcal{B}(x, r) = \int_0^r s d\beta(x, s),$$

из которой следует, что $\mathcal{B}(x, r) \in L_1(\Omega)$, $\mathcal{B}(x, r) \geq 0$ и

$$\mathcal{B}(x, r) - \mathcal{B}(x, r_0) \geq (\beta(x, r) - \beta(x, r_0))r_0, \quad r, r_0 \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

Функция

$$\mathcal{B}_k(x, r) = \int_0^r T_k(s) d\beta(x, s)$$

удовлетворяет аналогичному неравенству

$$\mathcal{B}_k(x, r) - \mathcal{B}_k(x, r_0) \geq (\beta(x, r) - \beta(x, r_0))T_k(r_0), \quad r, r_0 \in \mathbb{R}.$$

Здесь потребуются несколько иные требования по сравнению с (3.3)–(3.6).

Пусть существуют такие число $C > 0$ и N -функции P_j , что $\overline{B}_j \prec P_j$ и

$$|a_j(t, x, r, y)| \leq F_j(t, x) + P_j^{-1}(C\mathcal{B}(x, r)) + \overline{B}_j^{-1}(CS(y)) \quad (6.3)$$

при всех $r \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$; $F_j \in E_{\overline{B}_j}(D^T)$. Условие коэрцитивности имеет вид

$$a(t, x, r, y) \cdot y \geq \delta_0 S(y) - C(F(t, x) + \mathcal{B}(x, r)). \quad (6.4)$$

Пусть $B_\delta \prec B_1$ и выполнено следующее неравенство:

$$b(t, x, r, y) \leq \overline{B}_\delta^{-1}(\delta_0 S(y)/2 + C\mathcal{B}(x, r)) + F_\delta(t, x), \quad F_\delta \in E_{\overline{B}_\delta}(D^T). \quad (6.5)$$

Теорема 6.1. Пусть выполнены условия (3.1), (3.4), (6.3)–(6.5), $\mathcal{B}(x, u_0) \in L_1(\Omega)$. Тогда существует такое слабое решение задачи (1.1)–(1.3), что

$$\langle \mathcal{B}(x, u(t, x)) \rangle \leq C, \quad t \in [0, T].$$

Решение задачи (1.1)–(1.3) будем строить как предел решений уравнений, полученных дискретизацией уравнения (1.1) по переменной t .

Выберем целое $m > 0$. Пусть $h = T/m$ (всюду в этом разделе) и положим

$$\partial_t^{-h} \beta(x, u(t, x)) = \frac{\beta(x, u(t, x)) - \beta(x, u(t-h, x))}{h},$$

$$(b)_{-h}(t, x, r, y) = \frac{1}{h} \int_{(k-1)h}^{kh} b(\tau, x, r, y) d\tau, \quad t \in ((k-1)h, kh], \quad x \in \Omega, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

при $k = 1, 2, \dots, m$. Аналогичным образом определяется вектор $(a)_{-h}(t, x, r, y)$. Для функций $(b)_{-h}$, $(a)_{-h}$ сохраняются неравенства (6.3)–(6.5) и (3.4).

Положим $\tilde{b}_h(u) = (b)_{-h}(t, x, u(t-h), \nabla u(t-h))$. Имеем эллиптическое уравнение

$$\partial_t^{-h} \beta(x, u(t)) = \operatorname{div} \left((a)_{-h}(t, x, u(t-h), \nabla u(t)) \right) + \tilde{b}_h(u), \quad (6.6)$$

которое решается последовательно на интервалах $((k-1)h, kh]$, $k = 1, 2, \dots, m$, с начальным условием

$$u(t, x) = u_{0m}(x), \quad t \in (-h, 0]. \quad (6.7)$$

Начальные функции берутся гладкие, $u_{0m}(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, чтобы $\mathcal{B}(x, u_{0m}(x)) \rightarrow \mathcal{B}(x, u_0(x))$ в $L_1(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$ и

$$\frac{1}{m} \langle S(\nabla u_{0m}) \rangle \leq C. \quad (6.8)$$

Зафиксируем m . Выберем последовательность $w_j \in C_0^\infty(\Omega)$ линейно независимых функций, линейная оболочка которых плотна в $\dot{W}_{\mathbf{E}}^1(\Omega)$. Галеркинские приближения к решению задачи (6.6), (6.7) будем искать в виде

$$u_m(t, x) = \sum_{j=1}^m c_{mj}(t) w_j(x),$$

где функции $c_{mj}(t)$ постоянны на интервалах $((k-1)h, kh]$ для каждого $j = 1, 2, \dots, m$ и определяются из уравнений

$$J_j(u_m(t)) := \left\langle \partial_t^{-h} \beta(x, u_m) w_j + (a)_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m) \cdot \nabla w_j - \tilde{b}_h(u_m) w_j \right\rangle = 0. \quad (6.9)$$

Здесь и ниже используется обозначение

$$u_{mh}(t, x) = u_m(t - h, x), \quad t \leq T; \quad u_m(t, x) = u_{0m}(x), \quad t \leq 0.$$

Пусть функции $c_{mj}(t)$ уже определены на отрезке $[0, (k-1)h]$. Докажем, что числа $d_j = c_{mj}(t)$, $j = 1, 2, \dots, m$, $t \in ((k-1)h, kh]$ определяются из уравнений (6.9) при фиксированном m . Определим отображение

$$G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad G_j(d) = J_j(u_m(t)).$$

Тогда задача отыскания чисел d_j сводится к решению уравнения $G(d) = 0$. Существование решения последнего уравнения следует из [7, гл. 1, лемма 4.3], поскольку ниже будет установлено неравенство $\langle G(d), d \rangle > 0$ при достаточно больших $|d|$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle G(d), d \rangle &= \sum_{j=1}^m J_j(u_m(t)) d_j = \\ &= \left\langle \partial_t^{-h} \beta(x, u_m(t)) u_m(t) + (a)_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m(t)) \cdot \nabla u_m(t) - \tilde{b}_h(u_m) u_m(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (6.4), получим

$$\left\langle (a)_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m(t)) \cdot \nabla u_m(t) \right\rangle \geq \left\langle \delta_0 S(\nabla u_m(t)) - CF_{-h}(t, x) + \mathcal{B}(x, u_m(t-h, x)) \right\rangle. \quad (6.10)$$

Сделаем индуктивное предположение:

$$\left\langle \mathcal{B}(x, u_m(t-h, x)) + S(\nabla u_m(t-h, x)) \right\rangle = C(m, k) < \infty, \quad t \in ((k-1)h, kh].$$

При $k = 1$ оно выполнено в силу условий на начальную функцию.

Пусть $B_\delta(s) \leq \varepsilon B_1(s/C_\Omega)$ при $s \geq s_0$. С помощью неравенства Фридрихса устанавливаем оценку

$$\langle B_\delta(u_m(t)) \rangle \leq \left\langle \varepsilon B_1 \left(\frac{u_m(t)}{C_\Omega} \right) + B_\delta(s_0) \right\rangle \leq \left\langle \varepsilon B_1((u_m(t))_{x_1}) + C \right\rangle \leq \left\langle \frac{\delta_0}{8} S(\nabla u_m(t)) + C \right\rangle.$$

Используя (6.5) и индуктивное предположение, запишем неравенства

$$\begin{aligned} \left\langle |u_m(t) \tilde{b}_h(u_m)| \right\rangle &\leq \left\langle 2B_\delta(u_m(t)) + \overline{B}_\delta(F_\delta(t, x)) + C\mathcal{B}(x, u_{mh}) + \frac{\delta_0}{2} S(\nabla u_{mh}) \right\rangle + C_1 \leq \\ &\leq \left\langle \frac{\delta_0}{4} S(\nabla u_m(t)) \right\rangle + C_2(m, k). \end{aligned}$$

Оценим снизу параболический член с помощью неравенства (6.2):

$$\left\langle u_m \partial_t^{-h} \beta(x, u_m(t)) \right\rangle \geq \left\langle \frac{1}{h} (\mathcal{B}(x, u_m(t)) - \mathcal{B}(x, u_m(t-h))) \right\rangle. \quad (6.11)$$

Пользуясь (6.10)–(6.11), устанавливаем, что

$$(G(d), d) \geq \left\langle \frac{1}{2} \delta_0 S(\nabla u_m(t)) + \frac{1}{h} \mathcal{B}(x, u_m(t)) \right\rangle - C_3(m, k) > 0. \quad (6.12)$$

Последнее неравенство выполнено при достаточно больших $|d|$, поскольку

$$\lim_{|d| \rightarrow \infty} \langle S(\nabla u_m(t)) \rangle = \infty.$$

Разрешимость уравнений (6.9) относительно коэффициентов $c_{mj}(t)$ доказана полностью, так как из (6.12) при $G(d) = 0$ следует неравенство

$$\left\langle \frac{1}{2} \delta_0 S(\nabla u_m(t)) + \frac{1}{h} \mathcal{B}(x, u_m(t)) \right\rangle \leq C(m, k)$$

для следующего шага индукции.

Установим некоторые оценки.

После умножения уравнений (6.9) на $c_{mj}(t)\alpha(t)$, $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha(t) \in [0, 1]$, и суммирования, будем иметь

$$\left\langle \alpha u_m(t) \left(\partial_t^{-h} \beta(x, u_m(t)) - \tilde{b}_h(u_m) \right) + \alpha a_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m(t)) \cdot \nabla u_m(t) \right\rangle = 0. \quad (6.13)$$

С помощью неравенства (6.11) устанавливаем, что при $\alpha \in C_0^\infty(\varepsilon, T - \varepsilon)$

$$\int_0^T \left\langle \alpha u_m \partial_t^{-h} \beta(x, u_m(t)) \right\rangle dt \geq \left\langle h^{-1} \int_0^{T-h} \mathcal{B}(x, u_m(t)) (\alpha(t) - \alpha(t+h)) \right\rangle dt. \quad (6.14)$$

Пользуясь (6.10)–(6.11), из (6.13) при $\alpha = 1$ выводим неравенство

$$\begin{aligned} \left\langle h^{-1} \int_{\tau-h}^{\tau} \mathcal{B}(x, u_m(t)) dt \right\rangle + \frac{3\delta_0}{4} \int_0^{\tau} \langle S(\nabla u_m(t)) \rangle dt &\leq \\ &\leq \int_0^{\tau} \left\langle C \mathcal{B}(x, u_m(t-h)) + \frac{\delta_0}{2} S(\nabla u_{mh}) \right\rangle dt + C(T + \langle \mathcal{B}(x, u_0) \rangle). \end{aligned}$$

Поскольку функция $\mathcal{B}(x, u_m(t))$ кусочно постоянна по времени, согласно лемме Гронуолла, используя (6.8), при достаточно больших m (и малых h) устанавливаем неравенство

$$\max_{[0, T]} \langle \mathcal{B}(x, u_m(t)) \rangle + [S(\nabla u_m)] \leq C. \quad (6.15)$$

Отсюда следует ограниченность последовательности u_m в пространстве V . Неравенство Фридрикса

$$\langle B_1(u) \rangle \leq \langle B_1(C_\Omega u_{x_1}) \rangle$$

влечет также ее ограниченность в $L_{B_1}(D^T)$. Поэтому из последовательности u_m в пространстве $L_{B_1}(D^T)$ можно выделить *-слабо сходящуюся подпоследовательность $u_m \rightarrow u$.

Неравенство (6.15) при помощи условий (6.3), (6.5) позволяет установить ограниченность последовательности $(a)_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m)$ в пространстве X' и последовательности $\tilde{b}_h(u_m)$ в $L_{\overline{B}_\delta}(D^T)$. Отсюда следуют сходимости при $m \rightarrow \infty$ (по подпоследовательности):

$$(a_i)_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m(t)) \rightarrow v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.16)$$

*-слабо как последовательности функционалов над $E_{B_i}(\Omega)$ и

$$\tilde{b}_h(u_m) \rightarrow v_0 \quad \text{*}-слабо в } L_{\overline{B}_\delta}(D^T). \quad (6.17)$$

Далее, как в [9], устанавливается компактность последовательности $\beta(x, u_m(t))$ в пространстве $L_1(D^T)$.

В следующей лемме из [9] функция β предполагается возрастающей.

Лемма 6.1. Пусть последовательность u_m ограничена в $L_1([0, T]; W_1^1(\Omega))$ и

$$\int_{\Omega} \mathcal{B}(x, u_m(t)) dx \leq c, \quad t \in (0, T);$$

$$\int_0^{T-\mu} \int_{\Omega} \left(\beta(x, u_m(t+\mu)) - \beta(x, u_m(t)) \right) (u_m(t+\mu) - u_m(t)) dx dt \leq c\mu$$
(6.18)

при $0 < \mu < \mu_0$ и любом $m > 1/\mu$. Тогда найдется такая подпоследовательность, что

$$\beta(x, u_m) \rightarrow \beta(x, u) \quad \text{в } L_1(D^T) \text{ почти всюду в } D^T.$$

Для доказательства неравенства (6.18) установим оценку

$$I := \int_0^{T-kh} \left\langle \left(\beta(x, u_m(t+kh)) - \beta(x, u_m(t)) \right) \Delta_{kh} u_m(t) \right\rangle dt \leq Ckh,$$
(6.19)

где $\Delta_{kh} u_m(t) = u_m(t+kh) - u_m(t)$, $k = 0, \dots, m$.

Пусть

$$\gamma(x) = \sum_{j=1}^m d_j w_j(x), \quad t_i = ih, \quad i = 0, \dots, m.$$

Из (6.9) следует равенство

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\beta(x, u_m(t_i+h)) - \beta(x, u_m(t_i)) \right) \gamma \right\rangle &= \\ &= h \left\langle \tilde{b}_h(u_m(t_i+h)) \gamma - (a)_{-h}(t_i+h, x, u_m(t_i), \nabla u_m(t_i+h)) \cdot \nabla \gamma \right\rangle. \end{aligned}$$

После суммирования по $i = s, \dots, s+k-1$ будем иметь

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\beta(x, u_m(t_{s+k})) - \beta(x, u_m(t_s)) \right) \gamma \right\rangle &= \\ &= h \sum_{l=1}^k \left\langle \tilde{b}_h(u_m(t_{s+l})) \gamma - (a)_{-h}(t_{s+l}, x, u_m(t_{s+l-1}), \nabla u_m(t_{s+l})) \cdot \nabla \gamma \right\rangle. \end{aligned}$$

Выбрав $\gamma_s(x) = h(u_m(t_{s+k}, x) - u_m(t_s, x))$ и суммируя по $s = 0, \dots, m-k$, получим

$$I = h \sum_{l=1}^k \sum_{s=0}^{m-k} \left\langle \tilde{b}_h(u_m(t_{s+l})) \gamma_s(x) - (a)_{-h}(t_{s+l}, x, u_m(t_{s+l-1}), \nabla u_m(t_{s+l})) \cdot \nabla \gamma_s(x) \right\rangle.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= h \sum_{l=1}^k \int_0^{T-kh} \left\langle \tilde{b}_h(u_m(t+lh)) \Delta_{kh} u_m \right\rangle dt - \\ &\quad - h \sum_{l=1}^k \int_0^{T-kh} \left\langle (a)_{-h}(t+lh, x, u_m(t+lh-h), \nabla u_m(t+lh)) \cdot \nabla \Delta_{kh} u_m \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Имеем оценку

$$\sum_{l=1}^k \int_0^{T-kh} \left| \left\langle \tilde{b}_h(u_m(t+lh)) (u_m(t+kh) - u_m(t)) \right\rangle \right| dt \leq 2k \|\tilde{b}_h(u_m)\|_{\overline{B}_\delta} \|u_m\|_{B_\delta, D^T} \leq Ck.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^k \int_0^{T-kh} \left\langle \left| (a)_{-h}(t+lh, x, u_m(t+lh-h), \nabla u_m(t+lh)) \cdot \nabla \Delta_{kh} u_m \right| \right\rangle dt &\leq \\ &\leq 2k \left\| (a)_{-h}(t+h, x, u_m(t), \nabla u_m(t+h)) \right\|_{X'(D^{T-h})} \|u_m\|_V \leq Ck. \end{aligned}$$

Постоянная C не зависит от m и h . В итоге имеем оценку (6.19). В силу того, что функция $u_m(t)$ кусочно постоянна, из оценки (6.19) теперь следует неравенство (6.18) при $\mu \in [1/m, T]$.

Согласно лемме 6.1 выберем такую подпоследовательность $\beta(x, u_m)$, что $\beta(x, u_m) \rightarrow \beta(x, u)$ в $L_1(D^T)$ и почти всюду в D^T . В силу строгой монотонности функции β отсюда следует также сходимость

$$u_m \rightarrow u \text{ почти всюду в } D^T$$

по некоторой подпоследовательности. Тогда $u_{mh} \rightarrow u$ и $\mathcal{B}(x, u_m) \rightarrow \mathcal{B}(x, u)$ почти всюду в D^T .

Положим $\chi^s = \chi(|\nabla u| \leq s)$. Докажем, что $(a_j)_{-h}(t, x, u_{mh}, \chi^s \nabla u) \in E_{\overline{B}_j}(D^T)$ и

$$(a_j)_{-h}(t, x, u_{mh}, \chi^s \nabla u) \rightarrow a_j(t, x, u, \chi^s \nabla u) \quad \text{сильно в } L_{\overline{B}_j}(D^T). \quad (6.20)$$

Действительно, $\overline{B}_j^{-1}(CS(\chi^s \nabla u)) \in E_{\overline{B}_j}(D^T)$. Далее, в силу (6.15), функции $P_j^{-1}(C\mathcal{B}(x, u_m))$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы в $L_{\overline{B}_j}(D^T)$ (см. [4, лемма 13.2]). Поэтому, в силу (6.3), функции $(a_j)_{-h}(t, x, u_{mh}, \chi^s \nabla u)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы. Теперь (6.20) следует из [4, лемма 11.2] в силу сходимости $u_{mh} \rightarrow u$ почти всюду в D^T . Далее, можно считать последовательность u_m слабо сходящейся в $L_{B_1}(D^T)$. Тогда она сильно сходится в $L_{B_\delta}(D^T)$, поскольку $B_\delta \prec B_1$. Следствием этого и (6.17) является соотношение

$$[u_m \tilde{b}_h(u_m)] \rightarrow [uv_0].$$

После умножения уравнений (6.9) на $d_j(t) \in C_0^\infty(-1, T - \delta)$ и интегрирования по $t \in [0, T]$ получим равенство

$$\left[\varphi \left(\partial_t^{-h} \beta(x, u_m(t)) - \tilde{b}_h(u_m) \right) + (a)_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m(t)) \nabla \varphi \right] = 0, \quad (6.21)$$

где

$$\varphi = \sum_{j=1}^k d_j(t) w_j(x), \quad k \leq m.$$

Нетрудно видеть, что при $2h < \delta$, $m \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \left[\varphi \partial_t^{-h} \beta(x, u_m) \right] &= - \int_0^{T-h} \langle \beta(x, u_m) \partial_t^h \varphi(t) \rangle dt - \frac{1}{h} \int_0^h \langle \varphi(t) \beta(x, u_{0m}) \rangle dt \rightarrow \\ &\rightarrow - [\beta(x, u) \varphi_t] - \langle \varphi(0) \beta(x, u_0) \rangle. \end{aligned} \quad (6.22)$$

После предельного перехода в (6.21) с учетом (6.16), (6.17) и (6.22) будем иметь

$$\left[(\beta(x, u_0) - \beta(x, u)) \varphi_t \right] + \left[\sum_{i=1}^n v_i D_i \varphi - v_0 \varphi \right] = 0. \quad (6.23)$$

Пусть V_k — множество линейных комбинаций вида $\varphi_k = \sum_{j=1}^k d_j(t) w_j(x)$, $V_\infty = \bigcup_{i=1}^\infty V_k$. Отметим, что любая функция $\varphi \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$ может быть приближена функциями $\varphi_k \in V_k$ так, что $\varphi_k \rightarrow \varphi$

слабо как функционалы над X' (см. [26, (1.3)]) и $(\varphi_k)_t \rightarrow \varphi_t$ в $L_\infty(D^T)$. Поэтому соотношение (6.23) справедливо и для функций $\varphi \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$. Применяя к (6.23) лемму 5.1, получаем

$$\left[\varphi_t \int_{u_0}^u \xi(r) d\beta(x, r) - \sum_{i=1}^n v_i D_i(\xi(u)\varphi) + v_0 \varphi \xi(u) \right] = 0, \quad (6.24)$$

где $\xi(r)$ — монотонная ограниченная липшицева функция, $\xi(0) = 0$, $\varphi \in C_0^\infty((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$ (либо $\xi \in C_0^1(\mathbb{R})$, $\varphi \in C_0^1(D_{-1}^T)$). Тогда при $\xi = T_k(r)$, $\varphi = \alpha(t) \in C_0^\infty(0, T)$ имеем равенство

$$\left[\alpha_t \mathcal{B}_k(x, u(t)) - \sum_{i=1}^n v_i \alpha D_i T_k u + v_0 \alpha T_k u \right] = 0, \quad (6.25)$$

где

$$\mathcal{B}_k(x, r) = \int_0^r T_k(s) d_s \beta(x, s).$$

Отсюда следует, что функция $\langle \mathcal{B}_k(x, u(t)) \rangle$ абсолютно непрерывна по t . Покажем, что здесь возможен предельный переход при $k \rightarrow \infty$. Имеем неравенства

$$[|v_i D_i T_k u|] \leq [|v_i D_i u|] \leq C.$$

Поэтому в соответствующем слагаемом в силу теоремы Лебега об ограниченной сходимости предельный переход справедлив ввиду сходимости $D_i T_k u \rightarrow D_i u$ почти всюду.

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, устанавливаем, что

$$\left[\alpha_t \mathcal{B}(x, u(t)) - \sum_{i=1}^n v_i \alpha D_i u + v_0 \alpha u \right] = 0. \quad (6.26)$$

Из (6.14) имеем соотношение

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \alpha u_m \partial_t^{-h} \beta(x, u_m(t)) \rangle dt \geq -[\alpha_t \mathcal{B}(x, u)].$$

Переходя к пределу в (6.13), будем иметь при $\alpha \in C_0^\infty(\varepsilon, T - \varepsilon)$, $\alpha \geq 0$:

$$-\limsup_{m \rightarrow \infty} [\alpha(a)_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m) \cdot \nabla u_m] + [\alpha v_0 u] \geq -[\alpha_t \mathcal{B}(x, u)].$$

Сопоставляя это с (6.26), устанавливаем неравенство

$$\sum_{i=1}^n [\alpha v_i D_i u] \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} [\alpha(a)_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m) \cdot \nabla u_m]. \quad (6.27)$$

Запишем равенство (см. (3.4))

$$\begin{aligned} [\alpha \Lambda_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m, \chi^s \nabla u)] &= [\alpha(a)_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m) \cdot (\nabla u_m - \chi^s \nabla u) - \\ &\quad - \alpha(a)_{-h}(t, x, u_{mh}, \chi^s \nabla u) \cdot (\nabla u_m - \chi^s \nabla u)], \quad \chi^s = \chi(|\nabla u| < s), \end{aligned}$$

где использовано обозначение

$$\Lambda_{-h}(t, x, r, y, z) = ((a)_{-h}(t, x, r, y) - (a)_{-h}(t, x, r, z)) \cdot (y - z) > 0, \quad r \in \mathbb{R}, \quad y, z \in \mathbb{R}^n.$$

После предельного перехода $m \rightarrow \infty$ с использованием соотношений (6.16), (6.20), (6.27) находим

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} [\alpha \Lambda_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m, \chi^s \nabla u)] \leq \left[\alpha \sum_{i=1}^n (v_i - a_i(t, x, u, \chi^s \nabla u))(1 - \chi^s) D_i u \right].$$

Поэтому

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} \left[\alpha \Lambda_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m, \chi^s \nabla u) \right] = 0. \quad (6.28)$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \left[\alpha \Lambda_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m, \nabla u) \chi^{s_0} \right] &\leq \lim_{s \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} \left[\alpha \Lambda_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m, \nabla u) \chi^s \right] = \\ &= \limsup_{s, m \rightarrow \infty} \left[\alpha \Lambda_{-h}(t, x, u_{mh}, \nabla u_m, \chi^s \nabla u) \chi^s \right] = 0. \end{aligned}$$

Лемма 6.2. Пусть выполнено условие (3.4) и $\alpha(t) \in C_0(0, T)$, $\alpha \geq 0$. Пусть $v_m : D^T \rightarrow \mathbb{R}$, $w_m : D^T \rightarrow \mathbb{R}^n$ — последовательности измеримых функций, причем $v_m \rightarrow v$ почти всюду в D^T и

$$\left[\alpha((a)_{-h}(t, x, v_m, w_m) - (a)_{-h}(t, x, v_m, w)) \cdot (w_m - w) \chi(|v| < s_0, |w| < s_0) \right] \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$ и $h = T/m$. Тогда

$$w_m \rightarrow w \text{ почти всюду в } D^T(s_0) = \left\{ (t, x) \in D^T : \alpha(t) > 0, |v(t, x)| < s_0, |w(t, x)| < s_0 \right\}.$$

Доказательство. Нетрудно установить неравенство [6, лемма 2.4]

$$\Lambda(t, x, r, y, z) \geq \nu(t, x)|y - z|, \quad |r| < s_0 + 1, |z| < s_0, |y| > 2 + s_0; \quad \nu(t, x) \geq 0,$$

причем $\nu(t, x) = 0$ на множестве меры нуль. Очевидно, что

$$\Lambda_{-h}(t, x, r, y, z) \geq (\nu)_{-h}(t, x)|y - z|.$$

Из условия леммы следует, что

$$\Lambda_{-h}(t, x, v_m, w_m, w) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

при почти всех $(t, x) \in D^T(s_0)$. Пусть при некотором $(t, x) \in D^T(s_0)$ существует такая подпоследовательность, что $w_{m_k}(t, x) > s_0 + 2$. Не ограничивая общности, можно считать при этом, что $v_{m_k} < s_0 + 1$. Переходя к пределу в неравенстве

$$\Lambda_{-h_k}(t, x, v_{m_k}, w_{m_k}, w) \geq 2\nu_{-h_k}(t, x),$$

получаем, что $0 \geq 2\nu(t, x)$. Следовательно, множество таких точек имеет меру нуль. В точке $(t, x) \in D^T(s_0)$ из дополнения к этому множеству последовательность $w_m(t, x)$ ограничена, и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $w_{m_k}(t, x) \rightarrow w_0(t, x)$. Переходя к пределу устанавливаем, что

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_{-h_k}(t, x, v_{m_k}, w_{m_k}, w) = (a(t, x, v, w_0) - a(t, x, v, w)) \cdot (w_0 - w) \geq 0.$$

Это возможно только при $w_0(t, x) = w(t, x)$. Тогда вся последовательность имеет этот же предел. Лемма доказана. $\square$

Согласно лемме 6.2, примененной к $v_m = u_{mh}$, $w_m = \nabla u_m$, устанавливаем сходимость $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$ почти всюду в $D^T(s_0)$. В силу произвольности s_0 и α , фактически имеем сходимость почти всюду в D^T . Это влечет равенства

$$v_i = a_i(x, u, \nabla u), \quad v_0 = b(x, u, \nabla u).$$

Тогда (6.23) совпадает с (6.1).

Для дальнейшего использования (6.24) перепишем в виде

$$-\left[\varphi_t \int_{u_0}^u \xi(r) d\beta(x, r) \right] = [\tilde{b}(u)\xi(u)\varphi - \tilde{a}(u) \cdot \nabla(\xi(u)\varphi)], \quad (6.29)$$

где $\xi \in C_0^1(\mathbb{R})$, $\varphi \in C_0^1(D_{-1}^T)$, либо $\xi(r)$ — монотонная ограниченная липшицева функция, $\xi(0) = 0$, $\varphi \in C_0^\infty((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$.

7. Существование ренормализованного решения. Доказательство теоремы 4.1.

Шаг 1. Пусть $\beta(x, u)$ возрастает по u , $\beta(x, 0) = 0$, $\beta(x, u_0) \in L_1(\Omega)$. Пусть

$$u_{0q}(x) = T_q u_0(x), \quad |u_{0q}(x)| \leq |u_0(x)|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x, u_{0q}) &\in L_1(\Omega), \\ u_{0q}(x) &\rightarrow u_0(x) \quad \text{почти всюду в } \Omega, \\ \beta(x, u_{0q}) &\rightarrow \beta(x, u_0) \quad \text{в } L_1(\Omega). \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} f_q(t, x, y) &= T_q b(t, x, 0, y), \quad |f_q| \leq q, \\ a^q &= a(t, x, T_q r, y), \quad b_q(t, x, u, y) = \frac{b_0(t, x, u, y)}{1 + |b_0(t, x, u, y)|/q}, \quad |b_q| \leq q. \end{aligned}$$

Отметим еще равенство $T_q(T_m r) = T_m r$ при $q > m$, поэтому

$$a^q(t, x, T_m r, y) = a(t, x, T_m r, y).$$

Рассмотрим задачу

$$D_t \beta(x, u_q) - \operatorname{div} (a^q(t, x, u_q, \nabla u_q)) = f_q(t, x, \nabla u_q) - b_q(t, x, u_q, \nabla u_q); \quad (7.1)$$

$$u_q = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \quad \beta(x, u_q(0, x)) = \beta(x, u_{0q}). \quad (7.2)$$

Существование слабого решения задачи (7.1), (7.2) уже доказано в теореме 6.1. Условия (6.3)–(6.5) этой теоремы очевидным образом следуют из (3.3), (3.2).

Слабое решение удовлетворяет следующему тождеству вида (6.29):

$$\left[\varphi_t \int_{u_{0q}}^{u_q} \xi(r) d\beta(x, r) + f_q(x, \nabla u_q) \xi(u_q) \varphi \right] = \left[\xi(u_q) \varphi \tilde{b}_q(u_q) \right] + \left[\tilde{a}^q(u_q) \cdot \nabla (\xi(u_q) \varphi) \right], \quad (7.3)$$

где $\xi(r)$ — монотонная ограниченная липшицева функция, $\xi(0) = 0$, $\varphi \in C_0^1((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$ (либо $\xi \in C_0^1(\mathbb{R})$, $\varphi \in C_0^1(D_{-1}^T)$).

Из (3.5) следует, что $|f_q(t, x, \nabla u_q)| \leq F(t, x) \in L_1(D^T)$. По теореме Данфорда—Петтиса можно выделить подпоследовательность $f_q(t, x, \nabla u_q) \rightarrow \bar{f}$, слабо сходящуюся в $L_1(D^T)$ (см. [2, т. 1, гл. 4, § 8, следствие 11]).

Шаг 2. Установим следующие оценки для решения задачи (7.1), (7.2):

$$[S(\nabla T_k u_q)] \leq ck, \quad \|T_k u_q\|_{W_{LB}^1(D^T)} \leq 1 + ck, \quad k \geq 1, \quad (7.4)$$

где c не зависит от k и q ;

$$\langle \mathcal{B}_k(x, u_q(t)) \rangle \leq ck \quad \forall t \in (0, T), \quad (7.5)$$

где

$$\mathcal{B}_k(x, r) = \int_0^r T_k(s) d\beta(x, s),$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\chi(|u_q| > k)] = 0 \quad (7.6)$$

равномерно по q .

Для доказательства в соотношении (7.3), записанном для уравнения (7.1), выберем функцию $\xi(r) = T_k r$ и $\varphi_m(t) = \chi(h < t < \tau - h)_h$ (индекс h обозначает осреднение Стеклова, $h = 1/m$).

Здесь и ниже в аналогичных ситуациях сходимость $\varphi_m \rightarrow \chi(0 < t < \tau)$ понимается как сходимость почти всюду в интервале $(0, T)$. Будем иметь после предельного перехода при $m \rightarrow \infty$ ($q > k$)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}_k(x, u_q(\tau)) - \mathcal{B}_k(x, u_{0q}) \rangle + \left[\chi(0 < t < \tau) \tilde{a}(T_k u_q) \cdot \nabla(T_k u_q) \right] + \\ + \left[\chi(0 < t < \tau) T_k u_q (\tilde{b}_q(u_q) - f_q(x, \nabla u_q)) \right] = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что из условия (3.5) следует неравенство

$$T_k(u_q) \tilde{b}_q(u_q) \geq 0,$$

поэтому соответствующий интеграл будет неотрицательным. Очевидно, что

$$|\mathcal{B}_k(x, r)| \leq k|\beta(x, r)|, \quad \langle \mathcal{B}_k(x, u_{0q}) \rangle \leq k\|\beta(x, u_0)\|_1.$$

Используя (3.2), выведем оценку

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}_k(x, u_q(\tau)) \rangle + \delta_0 \left[S(\nabla u_q) \chi(|u_q| < k) \right] + \left[k \tilde{b}_q(u_q) |\chi(|u_q| \geq k)| \right] \leq \\ \leq k\|\beta(x, u_0)\|_1 + kC\|F\|_{L_1(D^T)}, \quad \tau \in (0, T). \end{aligned}$$

Таким образом, неравенства (7.4), (7.5) установлены.

Чтобы установить (7.6), воспользуемся неравенством Фридрихса—Стеклова. Применим его к $v = T_k(u_q)/C_\Omega$. Тогда из (7.4) имеем оценку

$$\left[B_1 \left(\frac{T_k(u_q)}{C_\Omega} \right) \right] \leq [B_1((T_k u_q)_{x_1})] \leq C_1 k.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} C_1 k \geq \left[\chi(|u_q| > k) B_1 \left(\frac{T_k(u_q)}{C_\Omega} \right) \right] = B_1 \left(\frac{k}{C_\Omega} \right) [\chi(|u_q| > k)], \\ [\chi(|u_q| > k)] \leq \frac{C_1 k}{B_1 \left(\frac{k}{C_\Omega} \right)} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Шаг 3. Существует подпоследовательность индексов такая, что

$$\beta(x, u_q) \rightarrow \beta(x, u), \quad u_q \rightarrow u \quad \text{почти всюду в } D^T; \quad (7.7)$$

$$\tilde{a}(T_k(u_q)) \rightarrow \theta_k \quad \text{*}-\text{слабо в } \prod_{i=1}^n L_{\overline{B_i}}(D^T), \quad p \rightarrow \infty; \quad (7.8)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow \infty} \left[\chi(k < |u_q| < k+1) |a(t, x, u_q, \nabla u_q) \cdot \nabla u_q| \right] = 0; \quad (7.9)$$

$$\beta(x, u) \in L_\infty(0, T; L_1(\Omega)). \quad (7.10)$$

Сходимость (7.8) выводится из оценки (7.4): так же, как в замечании 4.2, устанавливается оценка

$$[\overline{B_j}(\overline{a_j}(T_k u_q))] \leq C(k+1), \quad (7.11)$$

откуда следует *-слабая сходимость (7.8).

В силу неравенства (3.6) и (7.4) последовательность

$$\tilde{b}_q(T_k u_q) \quad \text{ограничена в } L_{B_b}(D^T).$$

Поэтому из нее можно выделить подпоследовательность, *-слабо сходящуюся в этом пространстве:

$$\tilde{b}_q(T_k u_q) \rightarrow \bar{b}_k \quad \text{*}-\text{слабо в } L_{B_b}(D^T). \quad (7.12)$$

Соотношение (7.7) выведем из леммы 6.1. Для этого запишем формулу вида (5.2):

$$\left[\varphi_t \int_{u_{0q}}^{u_q} \xi(r) d\beta_m(x, r) + f_q(t, x, \nabla u_q) \xi \varphi \eta_m(u_q) \right] = \left[\xi \varphi \eta_m(u_q) \tilde{b}_q(u_q) \right] + \left[\tilde{a}^q(u_q) \cdot \nabla (\xi \varphi \eta_m(u_q)) \right]; \quad (7.13)$$

здесь $\eta_m(r) = \eta(1 + |r| - m) = 0$ при $|r| > m$, функция β_m определена в (5.3), при этом $\beta_m(x, r) = \beta_m(x, T_m r)$. Очевидно,

$$\eta_m(u_q) \tilde{a}^q(u_q) = \eta_m(u_q) \tilde{a}(T_m u_q), \quad q \geq m.$$

Установим оценку

$$\int_0^{T-h} \left\langle \Delta_h \beta_{qm}(t) \Delta_h u_{qm}(t) \right\rangle dt \leq c(m)h, \quad (7.14)$$

где

$$\Delta_h u_{qm} = T_m u_q(t+h) - T_m u_q(t), \quad \Delta_h \beta_{qm}(t) = \beta_m(x, u_q(t+h)) - \beta_m(x, u_q(t)).$$

Выбрав $\xi = 1$, $\varphi(t, x) = \alpha(t)\gamma(x)$, $\gamma \in C_0^\infty(\Omega)$ в (7.13), устанавливаем абсолютную непрерывность функции $\langle \beta_m(x, u_q(t))\gamma(x) \rangle$. Выбирая последовательность $\alpha_k \rightarrow \chi(t < \tau < t+h)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \langle \Delta_h \beta_{qm}(t)\gamma \rangle &= \int_t^{t+h} \langle (\beta_m(x, u_q(\tau)))'_t \gamma \rangle d\tau = \\ &= \int_t^{t+h} \langle \gamma f_q \eta_m(u_q) \rangle d\tau - \int_t^{t+h} \left\langle \tilde{a}(T_m u_q)(\eta_m(u_q) \nabla \gamma + \gamma \nabla \eta_m(u_q)) \right\rangle d\tau - \\ &\quad - \int_t^{t+h} \langle \eta_m(u_q) \gamma \tilde{b}_q(T_m u_q) \rangle d\tau = I_1 - I_2 - I_3. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Имеем оценку

$$\int_0^{T-h} |I_1| dt \leq \max |\gamma| h \int_0^{T-h} \langle |f_q|_h \rangle dt \leq h \|\gamma\|_\infty \|F\|_1,$$

где $|f_q|_h$ обозначает осреднение Стеклова функции $|f_q|$. Второй интеграл подчиняется оценке

$$|I_2| \leq h \left\langle |\tilde{a}(T_m u_q) \cdot \nabla \gamma|_h + |\tilde{a}(T_m u_q) \cdot \nabla T_m u_q|_h |\gamma| \right\rangle.$$

Ясно, что в (7.15) можно подставить $\gamma = T_m u_q(t+h) - T_m u_q(t)$. Тогда $\|\gamma\|_\infty \leq 2m$. Покажем, например, как оценивается одно из слагаемых (другое оценивается аналогично), входящих в интеграл $\int I_2 dt$:

$$\begin{aligned} h \int_0^{T-h} \left\langle |(\tilde{a}(T_m u_q))_h \cdot \nabla T_m u_q(t+h)| \right\rangle dt &\leq \\ &\leq h \|\tilde{a}_h\|_{X'(D^{T-h})} \|T_m u_q\|_{W_{LB}^{0,1}(D^T)} \leq Ch \|\tilde{a}\|_{X'} \|T_m u_q\|_{W_{LB}^{0,1}(D^T)} \leq C_1(m)h. \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из (7.4) и (7.11). В итоге имеем оценку

$$\int_0^{T-h} |I_2| dt \leq ch.$$

Оценим теперь интеграл от I_3 , используя (3.6):

$$\begin{aligned} \int_0^{T-h} |I_3| dt &\leq \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} 2m \langle |\tilde{b}_q(T_m u_q)| \rangle d\tau dt \leq \\ &\leq \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} 2m \langle C(m)(S(\nabla T_m u_q) + F(t, x) + C) \rangle d\tau dt \leq ch. \end{aligned}$$

Тем самым, (7.14) установлено.

Применим лемму 6.1 к последовательности $T_m u_q$, $\beta = \beta_m$. Ограниченность последовательности $T_m u_q$ в пространстве $L_1([0, T]; W_1^1(\Omega))$ вытекает из (7.4). Первое неравенство в условии леммы 6.1 будет следовать из неравенства (7.5), если взять $k = m$. Лемма 6.1 устанавливает сходимости $\beta_m(x, T_m u_q) \rightarrow \beta_m(x, T_m u)$ в $L_1(D^T)$, $q \rightarrow \infty$. В силу возрастания функции $\beta_m(x, r)$ по $r \in [-m, m]$ можно выделить такую подпоследовательность, что $T_m u_q \rightarrow T_m u$ почти всюду в D^T при $q \rightarrow \infty$. Поскольку число $m > 0$ произвольно, отсюда следует (7.7).

Докажем (7.9). Выберем $\xi_k(u_q) = T_1(u_q - T_k(u_q))$ в (7.3) и положим $\varphi = \alpha_j(t) \rightarrow \chi(0 < t < T)$ при $j \rightarrow \infty$. После предельного перехода $j \rightarrow \infty$ и удаления неотрицательных слагаемых получим неравенство

$$\left[\tilde{a}^q(u_q) \cdot \nabla(\xi_k(u_q)) \right] \leq \left[f_q(t, x, \nabla u_q) \xi_k(u_q) \right] + \left\langle \int_0^{u_{0q}} \xi_k(r) d\beta(x, r) \right\rangle. \quad (7.16)$$

Очевидно, что

$$\left\langle \int_0^{u_{0q}} \xi_k(r) d\beta(x, r) \right\rangle \leq \left\langle \chi(|u_{0q}| \geq k) |\beta(x, u_{0q})| \right\rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

и в силу (7.6)

$$\left[f_q(t, x, \nabla u_q) \xi_k(u_q) \right] \leq \left[F(t, x) \chi(|u_q| \geq k) \right] \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Поэтому соотношение (7.16) при $q > k + 1$ имеет вид

$$\left[\tilde{a}(u_q) \cdot \nabla \xi_k(u_q) \right] \leq \epsilon(k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Поскольку $\nabla \xi_k(u_q) = \chi(k < |u_q| < k + 1) \nabla u_q$, то в случае неотрицательных интегралов $[\tilde{a}(u_q) \cdot \nabla u_q]$ соотношение (7.9) установлено. В общем случае в силу (3.2) имеем

$$\begin{aligned} \left[\chi(k < |u_q| < k + 1) |\tilde{a}(u_q) \cdot \nabla u_q| \right] &= \\ &= \left[\chi(k < |u_q| < k + 1) \left| C_1 F(t, x) + \tilde{a}(u_q) \cdot \nabla u_q - C_1 F(t, x) \right| \right] \leq \\ &\leq \left[\chi(k < |u_q| < k + 1) \left(C_1 F(t, x) + \tilde{a}(u_q) \cdot \nabla u_q + C_1 F(t, x) \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (7.6), нетрудно вывести (7.9).

Чтобы установить (7.10), выберем $\xi = H_1(u_q)$, $\varphi = \alpha_j(t) \rightarrow \chi(0 < t < T)$ при $j \rightarrow \infty$ в (7.13). Тогда

$$\langle \mathcal{B}_1^m(x, u_q(T)) \rangle + [\tilde{a}^q(u_q) \nabla(\eta_m(u_q) T_1(u_q))] + [T_1(u_q) \eta_m(u_q) \tilde{b}_q(u_q)] = [f_q \eta_m T_1] + \langle \mathcal{B}_1^m(x, u_{0q}) \rangle,$$

где

$$\mathcal{B}_1^m(x, r) = \int_0^r H_1(s) \eta_m(s) d\beta(x, s).$$

Пользуясь условием (3.2), получим

$$[\chi(0 < u_q < 1) \tilde{a} \cdot \nabla u_q] \geq -C [F(t, x) \chi(0 < u_q < 1)] \geq -C_1 \|F\|_1.$$

Поэтому предельный переход $m \rightarrow \infty$ приводит к неравенству

$$\langle \mathcal{B}_1(x, u_q(T)) \rangle \leq C_2 + \|\beta(x, u_0)\|_1.$$

Поскольку $(\beta(x, r))^+ \leq \beta(x, 1) + \mathcal{B}_1(x, r)$, имеем неравенство

$$\langle \beta(x, u_q^+(T)) \rangle \leq C_2 + \|\beta(x, u_0)\|_1 + \|\beta(x, 1)\|_1.$$

Очевидно, неравенство останется справедливым после замены T на $t \in [0, T]$.

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$\left| \langle \beta(x, -u_q^-(t)) \rangle \right| \leq C.$$

Итак, (7.10) установлено.

Шаг 4. Докажем, что

$$\nabla T_k u_q \rightarrow \nabla T_k u \quad \text{почти всюду в } D^T, \quad q \rightarrow \infty \quad \forall k > 0. \quad (7.17)$$

В разделе 8 приводится доказательство следующего неравенства:

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} [\alpha \tilde{a}(u_q) \cdot \nabla T_k u_q] \leq [\alpha \theta_k \cdot \nabla T_k u], \quad (7.18)$$

где $\alpha \in C_0^1(-1, T)$ — произвольная неотрицательная функция. Оно аналогично неравенству из [10], установленному в другой ситуации.

Пусть $\chi^s = \chi(|\nabla T_k u| < s)$ и

$$\Lambda(T_k u_q, \nabla T_k u_q, \chi^s \nabla T_k u_q) := \left(\tilde{a}(T_k u_q) - a(t, x, T_k u_q, \chi^s \nabla T_k u) \right) \cdot (\nabla T_k u_q - \chi^s \nabla T_k u).$$

Из условия монотонности (3.4) следует, что

$$\Lambda(T_k u_q, \nabla T_k u_q, \chi^s \nabla T_k u_q) \geq 0.$$

Из (7.7) следует, что

$$a(t, x, T_k u_q, \chi^s \nabla T_k u) \rightarrow a(t, x, T_k u, \chi^s \nabla T_k u) \quad \text{почти всюду в } D^T$$

при $q \rightarrow \infty$, и из (3.3) имеем оценку

$$\overline{B}_j(a_j(t, x, T_k u_q, \chi^s \nabla T_k u)) \leq c(k)(F(t, x) + S(\chi^s \nabla T_k u)).$$

Тогда из [4, леммы 11.2, 13.2] следует, что

$$a_j(t, x, T_k u_q, \chi^s \nabla T_k u) \rightarrow a_j(t, x, T_k u, \chi^s \nabla T_k u) \quad \text{сильно в } E_{\overline{B}_j}(D^T).$$

Соотношение

$$\lim_{q \rightarrow \infty} [\alpha \Lambda(T_k u_q, \nabla T_k u_q, \chi^s \nabla T_k u)] = 0$$

при любом $k > 0$ выводится точно так же, как и (6.28).

Применяя лемму 6.2 к последовательностям $v_q = T_k u_q$, $w_q = \nabla T_k u_q$, устанавливаем (7.17). Поэтому справедливо равенство

$$\theta_k = a(t, x, T_k u, \nabla T_k u). \quad (7.19)$$

Далее, в силу (3.2), функции

$$\tilde{G}(u_q) = \alpha(t) \left(a(x, T_k u_q, \nabla T_k u) \cdot \nabla T_k u_q + CF(x) \right)$$

неотрицательны. Согласно лемме Фату и (7.18) имеем неравенства

$$[\tilde{G}(u)] \leq \liminf_{q \rightarrow \infty} [\tilde{G}(u_q)] \leq \limsup_{q \rightarrow \infty} [\tilde{G}(u_q)] \leq [\tilde{G}(u)].$$

Сходимость интегралов $[\tilde{G}(u_q)] \rightarrow [\tilde{G}(u)]$ от неотрицательных функций вместе со сходимостью почти всюду влечет сильную сходимость $\tilde{G}(u_q) \rightarrow \tilde{G}(u)$ в $L_1(D^T)$ (см. [24, теорема 13.47]). Пользуясь произволом в выборе функции $\alpha(t)$, устанавливаем сильную сходимость

$$\tilde{a}(T_k u_q) \cdot \nabla T_k u_q \rightarrow \tilde{a}(T_k u) \cdot \nabla T_k u \quad \text{в } L_1(D^{T-\varepsilon}) \quad (7.20)$$

при малых $\varepsilon > 0$.

Отметим еще, что из теоремы Данфорда—Петтиса следует равномерная интегрируемость последовательности функций $\alpha \tilde{a}(T_k u_q) \cdot \nabla T_k u_q$, и тогда из (3.2) и теоремы Витали (см. [2, гл. III, § 6, теорема 15]) — сходимость

$$S(T_k u_q) \rightarrow S(T_k u), \quad q \rightarrow \infty, \quad (7.21)$$

в $L_1(D^T)$.

Шаг 5. Установим соотношение (4.2) в определении ренормализованного решения. Согласно лемме Фату

$$\begin{aligned} \liminf_{q \rightarrow \infty} \left[\chi(k < |u_q| < k+1) |\tilde{a}(u_q) \cdot \nabla u_q| \right] &\geq \\ &\geq \liminf_{q \rightarrow \infty} \left[\chi(k < |u_q| < k+1) \chi(k < |u| < k+1) |\tilde{a}(u_q) \cdot \nabla u_q| \right] \geq \\ &\geq \left[\chi(k < |u| < k+1) |\tilde{a}(u) \cdot \nabla u| \right]. \end{aligned}$$

Теперь (4.2) следует из (7.9).

Наконец, докажем (4.3). Для уравнения (7.1) запишем (7.3) при $\xi \in C_0^1(\mathbb{R})$, $\varphi \in C_0^1(D_{-1}^T)$:

$$- \left[\varphi_t \int_{u_{0q}}^{u_q} \xi(r) d\beta(x, r) + \tilde{a}^q(u_q) \cdot \nabla (\xi(u_q) \varphi) \right] + \left[\varphi \xi(u_q) (\tilde{b}_q(u_q) - f_q(t, x, \nabla u_q)) \right] = 0.$$

Из (7.8), (7.19) и равенства $\xi(u_q) = \xi(u_q) \chi(|u_q| < k)$ при достаточно большом k , имеем

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left[\xi(u_q) \tilde{a}^q(u_q) \cdot \nabla \varphi \right] = \left[\xi(u) \tilde{a}(u) \cdot \nabla \varphi \right].$$

Далее, в силу (7.20)

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left[\varphi \xi'(u_q) \tilde{a}(T_k u_q) \cdot \nabla T_k u_q \right] = \left[\varphi \xi'(u) \tilde{a}(u) \cdot \nabla u \right].$$

Также по теореме Витали из (3.6), (7.21) следует, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left[\varphi \xi(u_q) \tilde{b}_q(T_k u_q) \right] = \left[\varphi \xi(u) \tilde{b}(u) \right].$$

По теореме Лебега об ограниченной сходимости имеем

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left[\varphi \xi(u_q) f_q(t, x, \nabla u_q) \right] = \left[\varphi \xi(u) b(t, x, 0, \nabla u) \right].$$

Используя (7.7), (7.10) и теоремой Лебега об ограниченной сходимости, совершаем оставшийся предельный переход:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left[\varphi_t \int_{u_{0q}}^{u_q} \xi(r) d\beta(x, r) \right] = \left[\varphi_t \int_{u_0}^u \xi(r) d\beta(x, r) \right].$$

8. Приложение. Доказательство неравенства (7.18). В тождество (7.13) можно подставить пробную функцию $\xi = T_k(u_q)$, $\varphi = \alpha(t)$. Получим

$$\begin{aligned} \left[\alpha'(t) \int_{u_{0q}}^{u_q} T_k(r) d\beta_m(x, r) + \alpha(t) T_k(u_q) \eta_m(u_q) f_q(t, x, \nabla u_q) \right] = \\ = \left[\alpha(t) \tilde{a}(T_m u_q) \cdot \nabla (T_k(u_q) \eta_m(u_q)) + \alpha(t) \eta_m(u_q) T_k(u_q) \tilde{b}_q(u_q) \right]. \quad (8.1) \end{aligned}$$

Определим функцию $\bar{u}_0$ равенством

$$\bar{u}_0(x)\beta_m(x, u_0(x)) = \int_0^{u_0(x)} T_k(r) d\beta_m(x, r), \quad (8.2)$$

полагая $\bar{u}_0(x) = 0$ в тех точках x , в которых $\beta(x, u_0(x)) = 0$. Тогда $\|\bar{u}_0\|_\infty \leq k$. Выберем последовательность гладких функций $\psi_j \rightarrow \bar{u}_0$, $\|\psi_j\|_\infty \leq k$, сходящуюся в $L_1(\Omega)$ и почти всюду.

Нижний индекс μ в этом разделе обозначает осреднение Ландеса (см. [27]):

$$D_t(T_k u)_\mu = \mu(T_k u - (T_k u)_\mu), \quad t > 0; \quad (T_k u)_\mu(t, x) = 0 \quad \text{при} \quad t \leq 0.$$

По поводу приведенных ниже свойств осреднения см. [31]. Пусть $v_j \in C_0^\infty(D^T)$ — последовательность, сходящаяся к u в пространстве V . Положим

$$w_j^\mu = (T_k v_j)_\mu + e^{-\mu t} \psi_j;$$

тогда

$$D_t w_j^\mu = \mu(T_k(v_j) - w_j^\mu), \quad w_j^\mu(0, x) = \psi_j(x), \quad |w_j^\mu| \leq k, \quad (8.3)$$

а также

$$\begin{aligned} w_j^\mu &\rightarrow (T_k u)_\mu + e^{-\mu t} \bar{u}_0(x), \quad j \rightarrow \infty, \quad \text{модулярно в } V, \\ (T_k u)_\mu &\rightarrow T_k u, \quad \mu \rightarrow \infty, \quad \text{модулярно в } V. \end{aligned}$$

При этом

$$w_j^\mu \rightarrow (T_k u)_\mu + e^{-\mu t} \bar{u}_0(x) \quad \text{почти всюду в } D^T \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty, \quad (8.4)$$

$$(T_k u)_\mu \rightarrow T_k u \quad \text{почти всюду в } D^T \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (8.5)$$

В тождество (7.13) подставим пробную функцию $\xi = 1$, $\varphi = \alpha(t)w_j^\mu$. Получим

$$\left[(\alpha w_j^\mu)_t \int_{u_{0q}}^{u_q} d\beta_m + \alpha w_j^\mu \eta_m(u_q) f_q \right] = \left[\alpha w_j^\mu \eta_m(u_q) \tilde{b}_q(u_q) + \tilde{a}(T_m u_q) \cdot \nabla (\alpha w_j^\mu \eta_m(u_q)) \right]. \quad (8.6)$$

Поскольку $\alpha(T) = 0$, имеем

$$\left[\alpha_t \int_{u_{0q}}^{u_q} T_k(r) d\beta_m(x, r) \right] = \left[\alpha_t \int_0^{u_q} T_k(r) d\beta_m(x, r) \right] + \left\langle \alpha(0) \int_0^{u_{0q}} T_k(r) d\beta_m(x, r) \right\rangle. \quad (8.7)$$

Лемма 8.1. Пусть

$$E(q, j, \mu, m) = \left[(\alpha w_j^\mu)_t \int_{u_{0q}}^{u_q} d\beta_m(x, r) - \alpha_t \int_{u_{0q}}^{u_q} T_k(r) d\beta_m(x, r) \right].$$

Тогда

$$\liminf_{q, j, \mu \rightarrow \infty} E(q, j, \mu, m) \geq 0.$$

Здесь пределы вычисляются в следующем порядке: $q \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow \infty$.

Доказательство. Поскольку $u_q \rightarrow u$ почти всюду в D^T , имеем в силу (8.3), (8.4) и (8.7):

$$\begin{aligned} E_{\mu, m} = \lim_{q, j \rightarrow \infty} E &= \left[\left(\alpha(T_k(u))_\mu + e^{-\mu t} \bar{u}_0(x) \right)_t \int_0^u d\beta_m(x, r) - \alpha_t \int_0^u T_k(r) d\beta_m(x, r) \right] + \\ &\quad + \left\langle \alpha(0) \left(\bar{u}_0(x) \beta_m(x, u_0(x)) - \int_0^{u_0(x)} T_k(r) d\beta_m(x, r) \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

где выражение в последней строке равно нулю (см. (8.2)). Очевидно,

$$E_{\mu,m} = \left[\alpha_t \left((T_k u)_\mu \int_0^u d\beta_m(x, r) - \int_0^u T_k(r) d\beta_m(x, r) \right) \right] + \\ + \mu \left[\alpha (T_k u - (T_k u)_\mu) \beta_m(x, u) \right] + \left[(\alpha_t - \mu \alpha) e^{-\mu t} \bar{u}_0(x) \beta_m(x, u_0) \right], \quad (8.8)$$

где

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left[(\alpha_t - \mu \alpha) e^{-\mu t} \bar{u}_0(x) \beta_m(x, u_0) \right] = 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left[\alpha (T_k u - (T_k u)_\mu) \beta_m(x, u) \right] &= \left[\alpha (T_k u - (T_k u)_\mu) (\beta_m(x, u) - \beta_m(x, T_k u)) \right] + \\ &+ \left[\alpha (T_k u - (T_k u)_\mu) (\beta_m(x, T_k u) - \beta_m(x, (T_k u)_\mu)) \right] + \\ &+ \left[\alpha (T_k u - (T_k u)_\mu) \beta_m(x, (T_k u)_\mu) \right] = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Из очевидного равенства

$$I_1 = \left[\alpha \chi(|u| > k) (k \operatorname{sign}(u) - (T_k u)_\mu) (\beta_m(x, u) - \beta_m(x, T_k u)) \right]$$

имеем $I_1 \geq 0$, поскольку $|(T_k u)_\mu| \leq k$ и подынтегральная функция неотрицательна. Аналогично, $I_2 \geq 0$. Введя обозначение

$$\widehat{B}(x, u) = \int_0^u \beta_m(x, r) dr,$$

запишем равенства

$$\mu I_3 = \left[\alpha ((T_k u)_\mu)_t \beta_m(x, (T_k u)_\mu) \right] = \left[\alpha (\widehat{B}(x, (T_k u)_\mu))_t \right] = - \left[\alpha_t \widehat{B}(x, (T_k u)_\mu) \right].$$

Поэтому в силу (8.5), (8.8)

$$E_m = \liminf_{\mu \rightarrow \infty} E_{\mu,m} \geq \left[\alpha_t \left(T_k u \beta_m(x, u) - \int_0^u T_k(r) d\beta_m(x, r) \right) \right] - \left[\alpha_t \widehat{B}(x, T_k u) \right] = 0.$$

Действительно, интегрируя по частям, устанавливаем, что

$$T_k u \beta_m(x, u) - \int_0^u T_k(r) d\beta_m(x, r) = \int_0^u \beta_m(x, r) (T_k r)' dr = \int_0^{T_k u} \beta_m(x, r) dr = \widehat{B}(x, T_k u).$$

Лемма доказана. □

Вычитая из (8.6) равенство (8.1), получим

$$\begin{aligned} \left[\alpha \eta_m(u_q) \tilde{a}(T_m(u_q)) \cdot \nabla (T_k(u_q) - w_j^\mu) \right] + E(q, j, \mu, m) &= \\ = \left[(b_q - f_q) \alpha \eta_m(u_q) (w_j^\mu - T_k(u_q)) \right] + \left[\alpha (w_j^\mu - T_k(u_q)) \tilde{a}(T_m(u_q)) \cdot \nabla \eta_m(u_q) \right] &= \\ = \epsilon(q, j, \mu, m). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Докажем, что

$$\lim_{q, j, \mu, m} \epsilon(q, j, \mu, m) = 0. \quad (8.10)$$

В дальнейшем символ ϵ с аргументами из списка q, j, μ, m будет обозначать различные функции, обладающие свойством (8.10). Имеем в силу (8.3) и (7.9),

$$\begin{aligned} \left| \left[\alpha(w_j^\mu - T_k(u_q)) \tilde{a}(T_m(u_q)) \cdot \eta'_m(u_q) \nabla u_q \right] \right| &\leq \\ &\leq 2k \left[\left| \tilde{a}(T_m(u_q)) \cdot \nabla u_q \right| \chi(m-1 \leq |u_q| \leq m) \right] \leq \epsilon(q, m). \end{aligned}$$

Далее, в силу (8.4) и (8.5),

$$\left| \left[f_q \alpha \eta_m(u_q) (w_j^\mu - T_k(u_q)) \right] \right| \leq \left[F |w_j^\mu - T_k(u_q)| \right] = \epsilon(q, j, \mu).$$

Наконец, используя (7.12), (8.4), (8.5), получаем

$$\left| \left[\tilde{b}_q(u_q) \alpha \eta_m(u_q) (w_j^\mu - T_k(u_q)) \right] \right| \leq \left[\chi(|u_q| \leq m) |(w_j^\mu - T_k(u_q)) \tilde{b}_0(u_q)| \right] = \epsilon(q, j, \mu).$$

При $m > k + 1$ имеем равенство

$$\begin{aligned} &\left[\alpha \tilde{a}(T_m(u_q)) \cdot \nabla (T_k(u_q) - w_j^\mu) \eta_m(u_q) \right] = \\ &= \left[\alpha \left(\tilde{a}(T_k u_q) \cdot \nabla T_k u_q - \theta_k \cdot \nabla T_k u \right) \right] + \left[\alpha \left(\theta_k \cdot \nabla T_k u - \eta_m(u_q) \chi(|u_q| \leq k) \tilde{a}(T_k u_q) \cdot \nabla w_j^\mu \right) \right] - \\ &- \left[\alpha \eta_m(u_q) \chi(|u_q| > k) \tilde{a}(T_m(u_q)) \cdot \nabla w_j^\mu \right] = I_1 + I_2 + I_3. \quad (8.11) \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{q,j,\mu} I_2 = \left[\alpha \left(\theta_k \cdot \nabla T_k u - \chi(|u| \leq k) \theta_k \cdot \nabla T_k u \right) \right] = 0,$$

то $I_2 = \epsilon(q, j, \mu)$. Аналогично,

$$\lim_{q,j,\mu} I_3 = \left[\alpha \eta_m(u) \chi(|u| > k) \theta_m \cdot \nabla T_k u \right] = 0$$

и $I_3 = \epsilon(q, j, \mu)$. Поэтому из (8.9), леммы 8.1 и (8.11) следует, что $I_1 \leq \epsilon(q)$. Это доказывает (7.18).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алхутлов Ю. А., Жиков В. В. Теоремы существования и единственности решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности // Мат. сб. — 2014. — 205, № 3. — С. 3–14.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
3. Кожеевникова Л. М. Об энтропийных решениях анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей в неограниченных областях // Совр. мат. Фундам. направл. — 2017. — 63, № 3. — С. 475–493.
4. Красносельский М. А., Рутецкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: ГИФМЛ, 1958.
5. Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. — 1970. — 81 (123), № 2. — С. 228–255.
6. Лаптев Г. И. Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью // Мат. сб. — 1997. — 188, № 9. — С. 83–112.
7. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
8. Мукминов Ф. Х. Единственность ренормализованного решения первой смешанной задачи для анизотропного параболического уравнения с переменными нелинейностями // Мат. сб. — 2017. — 208, № 8. — С. 83–112.
9. Alt H. W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. — 1983. — 183, № 3. — P. 311–341.
10. Azroul E., Redwane H., Rhoudaf M. Existence of solutions for nonlinear parabolic systems via weak convergence of truncations // Electron. J. Differ. Equations. — 2010. — 68. — P. 1–18.
11. Bendahmane M., Wittbold P., Zimmermann A. Renormalized solutions for a nonlinear parabolic equation with variable exponents and L_1 data // J. Differ. Equations. — 2010. — 249, № 6. — P. 1483–1515.

12. Benilan P., Boccardo L., Galluet T., Pierre M., Vazquez J. L. An L_1 -theory of existence and Uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations// Ann. Scu. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. — 1995. — 22, № 2. — P. 241–273.
13. Benilan P., Brezis H., Crandall M. A semilinear elliptic equation in L_1 (RN)// Ann. Sco. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. — 1975. — № 2. — P. 523–555.
14. Blanchard D., Murat F. Renormalised solutions of nonlinear parabolic problems with L_1 data: existence and uniqueness// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. — 1997. — 127, № 6. — P. 1137–1152.
15. Brezis H. Nonlinear elliptic equations involving measures// in: Contributions to Nonlinear Partial Differential Equations. Madrid, 1981/ Res. Notes Math. — Boston: Pitman, 1983. — P. 82–89.
16. Carrillo J., Wittbold P. Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems// J. Differ. Equations. — 1999. — 156, № 1. — P. 93–121.
17. Dal Maso G., Murat F., Orsina L., Prignet A. Renormalized solutions for elliptic equations with general measure data// Ann. Scu. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. — 1999. — 28, № 4. — P. 741–808.
18. Di Perna R. J., Lions P. L. On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability// Ann. Math. — 1989. — 130, № 2. — P. 321–366.
19. Droniou J., Porretta A., Prignet A. Parabolic capacity and soft measures for nonlinear equations// Potential Anal. — 2003. — 19, № 2. — P. 99–161.
20. Dupaigne L., Ponce A. C., Porretta A. Elliptic equations with vertical asymptotes in the nonlinear term// J. Anal. Math. — 2006. — 98, № 1. — P. 349–396.
21. Gossez J. P. Some approximation properties in Orlicz–Sobolev spaces// Stud. Math. — 1982. — 74, № 1. — P. 17–24.
22. Gossez J. P. Nonlinear elliptic boundary-value problems for rapidly or slowly increasing coefficients// Trans. Am. Math. Soc. — 1974. — 190, № 4. — P. 163–205.
23. Gwiazda P., Wittbold P., Wroblewska-Kaminska A., Zimmermann A. Renormalized solutions to nonlinear parabolic problems in generalized Musielak–Orlicz spaces// Nonlin. Anal. — 2015. — 129, № 6. — P. 1–36.
24. Hewitt E., Stromberg K. Real and Abstract Analysis. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1965.
25. Igbida N., Ouaro S., Soma S. Elliptic problem involving diffuse measures data// J. Differ. Equations. — 2012. — 253, № 12. — P. 3159–3183.
26. Kačur J. On a solution of degenerate elliptic-parabolic systems in Orlicz–Sobolev spaces, I// Math. Z. — 1990. — 203, № 1. — P. 153–171.
27. Landes R. On the existence of weak solutions for quasilinear parabolic initial-boundary value problems// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1981. — 89, № 3–4. — P. 217–237.
28. Orsina L., Prignet A. Non-existence of solutions for some nonlinear elliptic equations involving measures// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. — 2000. — 130, № 1. — P. 167–187.
29. Petitta F. A nonexistence result for nonlinear parabolic equations with singular measures as data// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. — 2009. — 139, № 2. — P. 381–392.
30. Prignet A. Existence and uniqueness of entropy solutions of parabolic problems with L_1 data// Nonlin. Anal. Theor. Math. Appl. — 1997. — 28, № 12. — P. 1943–1954.
31. Redwane H. Existence results for a class of nonlinear parabolic equations in Orlicz spaces// Electron. J. Qualit. Theory Differ. Equations. — 2010. — № 2. — P. 1–19.
32. Zhang Ch., Zhou Sh. Renormalized and entropy solutions for nonlinear parabolic equations with variable exponents and L_1 data// J. Differ. Equations. — 2010. — 248, № 6. — P. 1376–1400.

Воробьёв Никита Александрович

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова,

Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия

E-mail: Niksparrow@yandex.ru

Мукминов Фарит Хамзаевич

Институт математики с вычислительным центром,

Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия;

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия

E-mail: mfk@rambler.ru



ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ И УСРЕДНЕНИЕ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

© 2019 г. В. Ю. НОВОКШЕНОВ

Аннотация. В работе рассматриваются адиабатические деформации римановых поверхностей, которые сохраняют интегрируемость соответствующей динамической системы, что приводит к возникновению модулированных квазипериодических движений, похожих на эффект параметрического резонанса. Показано, что таким образом можно управлять амплитудой и частотой нелинейных мод. Рассмотрен ряд примеров динамики систем типа волчков.

Ключевые слова: интегрируемая система, пара Лакса, алгебро-геометрический метод, конечнозонное решение, тета-функция, инвариантный тор, параметрический резонанс, деформация Уизема, синхронизация, захват фазы.

PARAMETRIC RESONANCE IN INTEGRABLE SYSTEMS AND AVERAGING ON RIEMANN SURFACES

© 2019 V. YU. NOVOKSHENOV

ABSTRACT. In this paper, we consider adiabatic deformations of Riemann surfaces that preserve the integrability of the corresponding dynamic system, which leads to the appearance of modulated quasi-periodic motions, similar to the effect of parametric resonance. We show that in this way it is possible to control the amplitude and frequency of nonlinear modes. We consider several examples of the dynamics of top-type systems.

Keywords and phrases: integrable system, Lax pair, algebraic-geometric method, finite-gap solution, theta function, invariant torus, parametric resonance, Whitham deformation, synchronization, phase capture.

AMS Subject Classification: 37J35, 37K15, 37K20

1. Введение. Интегрируемые модели, демонстрирующие квазипериодическое движение, решаются алгебро-геометрическим методом, основанным на спектральной теории дифференциальных операторов на римановых поверхностях. Для многих примеров таких систем эти операторы действуют на векторных мероморфных функциях с неспецифическим дивизором полюсов на гиперэллиптических поверхностях. Спектр оператора Лакса здесь образован конечным числом зон, которые определяют риманову поверхность. В работе рассматриваются адиабатические деформации римановых поверхностей, которые сохраняют интегрируемость соответствующей динамической системы. Это приводит к возникновению модулированных квазипериодических движений, похожих на эффект параметрического резонанса. Показано, что таким образом можно управлять амплитудой и частотой нелинейных мод.

Параметрический резонанс обычно связан с одночастотным режимом возбуждения из-за синхронизации и захвата фазы различных нелинейных мод по отношению к возбуждающей силе. Здесь этот эффект переносится на многочастотный случай на классе вполне интегрируемых систем. Это явление обусловлено наличием устойчивых инвариантных торов, управляемых медленно эволюционирующими интегралами движения.

Основной резонансный эффект захвата фазы появляется посредством деформаций Уизема инвариантных торов. Это обеспечивает также возможность перестройки определенного начального n -периодического движения к заданному m -периодическому движению в качестве конечного состояния. Рассмотрен ряд примеров динамики систем типа волчков, демонстрирующих этот эффект.

Алгебро-геометрический (конечнозонный) метод интегрирования обеспечивает единый подход к линеаризации фазового потока динамических систем. Он основан на представлении Лакса для уравнений движения:

$$\frac{dL(\lambda)}{dt} + [L(\lambda), A(\lambda)] = 0, \quad (1.1)$$

где $L, A, \Psi = \cdot(\lambda, I, \phi) - (l \times l)$ -матрицы, полиномиальные по λ . Уравнение (1.1) эквивалентно динамической системе, например, гамильтоновой в переменных действие-угол $\dot{I} = 0, \dot{\phi} = \phi_0$.

С помощью представления Лакса можно построить Ψ -функцию, также называемую функцией Бейкера–Ахиезера, являющуюся решением линейной системы

$$L(\lambda)\Psi = \mu\Psi, \quad (1.2)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = A(\lambda)\Psi. \quad (1.3)$$

Эта функция может быть найдена из ее аналитических свойств, подразумеваемых формой матриц L и A , составляющих пару Лакса. Ψ -Функция строится явно в терминах тета-функций римановой поверхности Γ , определяемой уравнением $\det(L(\lambda) - \mu I) = 0$. Это дает явные формулы для динамических переменных исходной нелинейной системы. Язык Ψ -функции хорошо подходит для теории возмущений уравнения (1.1) относительно дополнительного параметра. Заметим, что исходная версия метода конечнозонного интегрирования подразумевала такую конструкцию: если x — параметр деформации, то правая часть уравнения (1.1) равна $\partial_x A$, и уравнение (1.1) принимает вид $\Psi_x = L(\lambda)\Psi$. В этом случае функция Ψ остается качественно неизменной, потому что вектор обмотки $tV + D$ в аргументе соответствующей тета-функции просто заменяется на $tV + xU + D$. Этот факт позволяет рассматривать малые деформации уравнения (1.1), которые сохраняют торы Лиувилля $\text{Jas}(\Gamma)$ и квазипериодическую обмотку на $\text{Jas}(\Gamma)$. В дальнейшем мы построим такой класс правых частей для уравнения (1.1) вида $\varepsilon F(A, L)$, $\varepsilon \ll 1$, что квазипериодическая обмотка на деформированном торе $\text{Jas}(\Gamma)$ заполняет его без «щелей», а деформация тора происходит гладко со скоростью $O(\varepsilon)$. Так как якобиан римановой поверхности Γ и сама поверхность определяются точками ветвления λ_k , являющимися нулями функции $\det(L(\lambda) - \mu I)$, удобно описать деформацию в терминах λ_k . Оказывается, что динамика $\lambda_k = \lambda_k(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, определяется уравнениями Уизема (см. [26, 28]) и что при достаточно общих условиях можно доказать, что

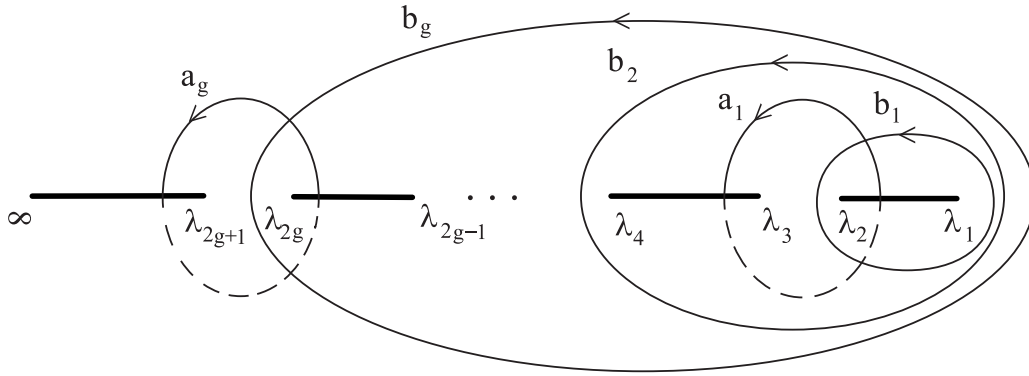
$$\Gamma(\tau)|_{\tau=\tau^+} = \Gamma_+, \quad \Gamma(\tau)|_{\tau=\tau^-} = \Gamma_-,$$

где Γ_+ и Γ_- — некоторые заданные поверхности одинакового рода. Тогда главный член асимптотики Ψ дается явно той же формулой, что и в невозмущенном случае с учетом «подвижной» поверхности $\Gamma(\tau)$.

Заметим, что процедура по существу является многофазной, что нечасто встречается в физических системах. Например, таким образом можно адиабатически управлять волчком от состояния равновесия до некоторого заданного n -периодического вращения.

Общее свойство слабо управляемого нелинейного осциллятора состоит в том, что при определенных условиях они *автоматически* остаются в резонансе с частотой возбуждения, даже если параметры системы изменяются во времени и/или пространстве. Это явление называется авторезонансом (см. [22]). Например, рассмотрим осциллятор, частота которого увеличивается с амплитудой. Предположим, что осциллятор первоначально находится в резонансе. Тогда рост амплитуды колебаний приведет к увеличению частоты и осциллятор выйдет из резонанса. Однако в ряде важных случаев этого не происходит и собственная частота всегда соответствует частоте привода (см. [27]).

Ряд приложений в физике и технике известен с 1930-х гг., где используется эффект авторезонанса. Самыми известными являются автогенераторы радиочастот (см. [19]) и циклотронное

Рис. 1. Спектр оператора A и базис циклов a, b .

ускорение релятивистских частиц (см. [7, 24]). В последнее время в астрономии (см. [18]) и в физике плазмы (см. [27]) найдено больше приложений. Легко видеть сходство эффекта фазовой синхронизации в авторезонансном осцилляторе с адиабатическими деформациями вполне интегрируемых гамильтоновых систем. Теория КАМ доказывает эту деформацию, чтобы сохранить движение по торам Лиувилля системы почти для всех начальных данных. Торы Лиувилля, в свою очередь, управляются первыми интегралами, которые теперь зависят от медленной переменной $\tau = \varepsilon t$ (см. [28]). Аналитическое описание движения осуществляется с помощью известного метода Кузмака—Уизема (см. [13]) или Боголюбова—Митропольского (см. [14, 19]). Здесь фазовые сдвиги квазипериодических колебаний сильно соответствуют частотам вождения, а эволюция первого интеграла контролируется средними движущей силы в течение основных периодов. Последнее осуществляется через решения уравнений Уизема, которые обеспечивают устранение «светских» термов для приближений более высокого порядка. Заметим, что для гамильтоновой системы, приведенной к каноническим переменным действие-угол $(I, \phi) = (I_1, \dots, I_n, \phi_1, \dots, \phi_n)$,

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon f(I, \phi, \varepsilon), \\ \dot{\phi} = \phi_0 + \varepsilon g(I, \phi, \varepsilon). \end{cases} \quad (1.4)$$

Эта процедура применения канонических преобразований эквивалентна классическому методу многофазного усреднения, восходящего к А. Пуанкаре (см. [1]).

2. Алгебро-геометрический метод. Дадим сначала краткий обзор метода конечнозонного интегрирования (см., например [10–12]). Предположим, что определитель матричного оператора $L(\lambda) - \mu I$ (см. (1.2)) имеет вид

$$\det(L(\lambda) - \mu I) = \mu^2 - P_{2g+1}(\lambda) = \mu^2 - (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_{2g+1}). \quad (2.1)$$

Тогда уравнение

$$\mu^2 = P_{2g+1}(\lambda)$$

определяет гиперэллиптическую риманову поверхность Γ рода g . Пусть точки ветвления Γ вещественны, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{2g+1}$; тогда интервалы $(-\infty, \lambda_{2g+1}]$, $\dots$, $[\lambda_4, \lambda_3]$, $[\lambda_2, \lambda_1]$ образуют спектр оператора A в уравнении (1.3).

Канонический базис циклов на Γ выбирается как показано на рис. 1. Определим нормированный базис голоморфных дифференциалов $d\omega_1(p), \dots, d\omega_g(p)$:

$$\int_{a_j} d\omega_k(p) = 2\pi i \delta_{jk}, \quad B_{jk} = \int_{b_j} d\omega_k(p). \quad (2.2)$$

Здесь $p \in \Gamma$ с проекцией на точку λ на двух листах поверхности $\mathbb{C} \setminus (\lambda_{2g+1}, \lambda_{2g}) \cup \dots \cup (\lambda_3, \lambda_2)$. Риманова тета-функция с характеристиками определяется стандартным образом (см. [25]):

$$\theta[\alpha, \beta](z | B) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \exp \left[\frac{1}{2} \langle B(m + \alpha), m + \alpha \rangle + \langle z + 2\pi i \beta, m + \alpha \rangle \right], \quad (2.3)$$

где $B = \{B_{jk}\}$ — матрица периодов, а $\theta[0, 0](z | B) = \theta(z)$ — обычная тета-функция.

Определим $d\Omega$ как абелев дифференциал второго рода на Γ с главным членом асимптотики $d(\sqrt{\lambda})$ при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$d\Omega = \lambda^{2g} + a_1 \lambda^{2g-1} + \dots + \frac{a_{2g}}{2\sqrt{P_{2g+1}(\lambda)}} d\lambda, \quad (2.4)$$

$$\int_{a_j} d\Omega = 0, \quad U_j = \int_{b_j} d\Omega, \quad j = 1, 2, \dots, g. \quad (2.5)$$

Теорема 1 (см. [5]). Уравнения пары Лакса

$$L\Psi = \Psi\hat{\mu}, \quad \Psi_t = A\Psi, \quad (2.6)$$

имеют мероморфное матричное решение $\Psi(p, t)$ на $\Gamma \setminus \infty$, где $\hat{\mu} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_l)$ и

$$\det(L(\lambda) - \mu_k I) = 0, \quad k = 1, \dots, l.$$

Столбец с номером m этой матрицы имеет вид

$$\begin{aligned} [\Psi(p, t)]_m^T = & \left\{ \dots, s_m \frac{\theta[\gamma_m](\mathcal{A}(p) + Ut + D + \sigma R) \theta[\delta_m](D + (1 - \sigma)R)}{\theta[\gamma_m](\mathcal{A}(p) + D) \theta[\delta_m](Ut + D + R)} \right. \\ & \left. \times e^{t\Omega(p) + \kappa_m \omega(p)}, \dots \right\}, \quad m = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\mathcal{A}(p) = \left(\int^p d\omega_1, \dots, \int^p d\omega_g \right)$$

— отображение Абеля на $\text{Jas}(\Gamma)$, p — локальный параметр на Γ , $\gamma_m, \delta_m = [\alpha_m, \beta_m]$ — тета-характеристики и $D, R \in \mathbb{C}^g$ — некоторые константы. Коэффициенты κ_m , s_m и $\sigma = 0, 1$ выбираются из условий нормировки при $p = 0^\pm, \infty^\pm$.

Конструкция, описанная в теореме 1, справедлива для собственной функции Ψ , определенной на двулистной гиперэллиптической римановой поверхности Γ . Этот случай оказывается достаточно общим, он описывает ряд механических систем, таких, как система Неймана (см. [8]), специальный случай волчка Ковалевской (см. [23]) и некоторые другие (см. [6]).

Якобиан $\text{Jas}(\Gamma)$ на поверхности Γ служит лиувилевским тором для системы (1.1), т.е. переменные действие-угол в (1.4) имеют вид ($\varepsilon = 0$)

$$\begin{cases} I = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2g+1}), \\ \phi(t) = Ut + D. \end{cases} \quad (2.8)$$

Другие неканонические переменные также явно выражаются в терминах Ψ -функции. Например, в n -периодической редукции уравнения Кортевега—де Фриза они могут быть представлены как нули Ψ , лежащие в точках $p_1 = (\gamma_1, \sqrt{P_{2g+1}(\gamma_1)}), \dots, p_g = (\gamma_g, \sqrt{P_{2g+1}(\gamma_g)})$. Тогда вещественные переменные $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g$ удовлетворяют уравнениям Дубровина (см. [9])

$$\frac{d\gamma_j}{dt} = \frac{2i\sqrt{P_{2g+1}(\gamma_j)}}{\prod_{j \neq k} (\gamma_j - \gamma_k)}, \quad j = 1, 2, \dots, g, \quad (2.9)$$

которые эквивалентны системе (1.1).

Продолжая этот пример, детализируем случай двухпериодической редукции КдФ. Здесь $g = 2$ в (2.9), а оператор A представим в виде матричного оператора Штурма—Лиувилля (1.3),

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & u(t) \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда нелинейная система (1.1) гамильтонова с гамильтонианом

$$H = p_1 p_2 + V(q_1, q_2),$$

где

$$q_1 = u, \quad q_2 = \ddot{u} - \frac{5}{2}u^2, \quad p_1 = \dot{q}_1, \quad p_2 = \dot{u},$$

а потенциал V биквадратичен по переменным q_1, q_2 (см. детали в [5, 9]). Согласно теореме 1 двухчастотное решение $u = u(t)$ и Ψ -функция имеют следующий вид ($g = 2$):

$$\Psi(p, t) = \frac{\theta(\mathcal{A}(p) + Ut + D)\theta(D)}{\theta(\mathcal{A}(p) + D)\theta(Ut + D)} e^{t\Omega(p)}, \quad u(t) = 2\partial_t^2 \ln \theta(Ut + D),$$

Динамические переменные γ_1, γ_2 , удовлетворяющие системе Дубровина,

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \frac{2i\sqrt{P_5(\gamma_1)}}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{2i\sqrt{P_5(\gamma_2)}}{\gamma_2 - \gamma_1},$$

связаны с решением $u(t)$ соотношениями

$$\gamma_1 + \gamma_2 = u, \quad \gamma_1 \gamma_2 = \frac{1}{8}(3u^2 + u'') + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j.$$

3. Уиземовские деформации уравнений Лакса. Точки ветвления λ_j римановой поверхности Γ в теореме 1 постоянны и играют роль законов сохранения в уравнении (2.8). Определим «медленную деформацию» этого уравнения, введя малый параметр $\varepsilon \ll 1$ и медленное время $\tau = \varepsilon t$. Пусть теперь точки ветвления поверхности Γ зависят от медленного времени:

$$\lambda_j = \lambda_j(\tau), \quad j = 1, 2, \dots, 2g + 1,$$

в то время как остальные компоненты Ψ -функции остаются прежними как выше в формуле (2.7).

Найдем условия, при которых Ψ -функция, измененная таким образом, является близкой к первоначальной (2.7). Заметим, что вектор скоростей $U(\tau)$ нуждается в коррекции, поскольку t -производная от $\phi(t) = Ut + D$ приобрела вид

$$\frac{d\phi}{dt} = U + \tau U_\tau = U + O(1), \quad \tau > 0.$$

Для того, чтобы скорректировать возникшие «секулярные члены», воспользуемся теорией Кузмага—Уизема о возмущении динамических систем (см. [14, 20]). Необходимая поправка в фазе может быть введена с помощью нового абелева дифференциала $d\Upsilon$, $n = 1, 2, \dots$, следующим образом:

(a) существует абелев интеграл, обладающий асимптотиками

$$\begin{aligned} \Upsilon(p, \tau) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{p_0}^p d\Upsilon, \\ \Upsilon(p, \tau) &= -\lambda^{2n+1/2} + c_1 \lambda^{2n-1/2} + \dots + c_{2n-1} \lambda^{1/2} + O(\lambda^{-1/2}), \quad p \rightarrow \infty^+, \\ \partial_\tau c_j &= 0, \quad j = 1, \dots, 2n-1; \end{aligned} \tag{3.1}$$

(b) имеет место равенство

$$\int_{a_m} d\Upsilon = 0, \quad m = 1, 2, \dots, g; \tag{3.2}$$

(c) дифференциал $d\Upsilon$ может иметь не более g вещественных нулей и $2n$ нулей, не лежащих на вещественной оси.

Существование такого дифференциала доказано в Приложении.

Пусть V — вектор b -периодов дифференциала $d\Upsilon$, т.е.

$$V = (V_1, \dots, V_g), \quad V_m = \int_{b_m} d\Upsilon.$$

Определим деформацию Ψ -функции следующим образом:

$$\begin{aligned} [\Psi(p, t, \varepsilon)]_m^T = & \left\{ \dots, s_m \frac{\theta[\gamma_m](\mathcal{A}(p) + tU(\tau) + \varepsilon^{-1}V(\tau) + D + \sigma R)\theta[\delta_m](D + (1 - \sigma)R)}{\theta[\delta_m](tU(\tau) + \varepsilon^{-1}V(\tau) + D + R)\theta[\gamma_m](\mathcal{A}(p) + D)} \times \right. \\ & \left. \times \exp \{t\Omega(p, \tau) + \varepsilon^{-1}\Omega_n(p, \tau) + \kappa_m\omega(p)\}, \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь все компоненты Ψ -функции в (3.3) совпадают с теми, что в формуле (2.7), а риманова поверхность $\Gamma = \Gamma(\tau)$ определяется уравнением (2.1). Кроме того, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(p, \tau)$, $B_{ij} = B_{ij}(\tau)$, поскольку Γ зависит сейчас от τ .

Предположим, что деформация $\Gamma = \Gamma(\tau)$ задана решениями системы Уизема:

$$\left(\tau d\Omega(p, \tau) + d\Upsilon(p, \tau) \right) \Big|_{\lambda=\lambda_j(\tau)} \partial_\tau \lambda_j(\tau) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2g + 1. \quad (3.4)$$

Уравнения (3.4) представляют собой автомодельную редукцию известной квазилинейной системы Уизема, возникающей в теории модулированных нелинейных волн в уравнениях типа КдФ (см. [26]). Основная мотивация такого выбора деформации в виде (3.3) вытекает из следующих свойств абелевых интегралов (3.1), (3.2).

Теорема 2. Если точки ветвления удовлетворяют системе Уизема (3.4), то справедливы следующие уравнения:

$$\tau \partial_\tau d\Omega(p, \tau) + \partial_\tau d\Upsilon(p, \tau) = 0, \quad (3.5)$$

$$\tau \partial_\tau U + \partial_\tau V = 0. \quad (3.6)$$

Доказательство. Уиземовские уравнения (3.5) и (3.6) были выведены в более общем случае (см., например, [12]). Для данного случая доказательство значительно проще, и мы воспроизведем его здесь, следуя рассуждениям из [12].

Рассмотрим дифференциалы $d\Phi = \tau \partial_\tau d\Omega + \partial_\tau d\Upsilon$. В силу гиперэллиптичности $\Gamma(\tau)$ дифференциалы $d\Omega$ и $d\Upsilon$ вблизи точек ветвления имеют вид

$$d\Omega = \frac{q(p, \tau)}{\sqrt{\lambda - \lambda_j(\tau)}}, \quad d\Upsilon = \frac{v(p, \tau)}{\sqrt{\lambda - \lambda_j(\tau)}}, \quad \lambda \rightarrow \lambda_j, \quad (3.7)$$

где q, v аналитичны при $\lambda \rightarrow \lambda_j$, так что $d\Phi$ имеет асимптотику

$$d\Phi = \frac{\tau d\Omega(p, \tau) + d\Upsilon(p, \tau)}{2(\lambda - \lambda_j(\tau))} \partial_\tau \lambda_j(\tau) + O\left(\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda - \lambda_j(\tau)}}\right), \quad \lambda \rightarrow \lambda_j. \quad (3.8)$$

Из уравнения (3.4) следует, что дифференциал $d\Phi$ является абелевым, т.е. имеет асимптотику (3.7) в каждой точке ветвления. Условия нормировки (2.5), (3.2) обеспечивают, что a -периоды $d\Phi$ нулевые, а асимптотики на бесконечности (2.4), (3.1) доказывают, что $d\Phi$ не сингулярен:

$$d\Phi = O(\lambda^{-2}d\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Объединяя эти факты, заключаем, что дифференциал голоморфен на Γ и потому равен нулю, $d\Phi = 0$. Интегрируя $d\Phi$ по b -циклам, немедленно получаем уравнение (3.6). $\square$

Вычислим действие операторов L и A на «деформированную» функцию $\Psi(p, t, \varepsilon)$ (см. (3.3)). Докажем, что указанная выше деформация приводит к близости измененной и первоначальной пар Лакса.

Теорема 3. Функция $\Psi(p, t, \varepsilon)$ (см. (3.3)) мероморфна и однозначна на Γ/∞ и удовлетворяет уравнениям Лакса

$$L(\lambda)\Psi = \Psi\hat{\mu}, \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{dt}\Psi = (A(\lambda) + \varepsilon H(\lambda))\Psi. \quad (3.10)$$

Здесь матрицы L , A и $\hat{\mu}$ совпадают с матрицами (2.6) при фиксированном τ , H — рациональная матрица-функция по λ .

Доказательство. Мероморфность по p функции $\Psi(p, t, \varepsilon)$ следует непосредственно из конструкции формулы (3.3); ее однозначность на Γ вытекает из условий нормировки (2.5). Доказательство формул (3.9), (3.10) следует из известной схемы Кричевера (см. [12]).

В самом деле, функция Ψ (см. (3.3)) однозначно определена на Γ , поскольку обход по a -циклам не изменяет значений Ψ . Обход по b -циклам дает следующее приращение аргумента Ψ :

$$\hat{\Omega} = \Omega t + \varepsilon^{-1}\Omega_n \mapsto \hat{\Omega} + \sum_{j=1}^g m_j \int_{b_j} d\Omega = \hat{\Omega} + \langle M, \hat{U} \rangle,$$

$$u(p) \mapsto u(p) + \hat{B}M, \quad M = (m_1, \dots, m_g) \in \mathbb{Z}^g.$$

С другой стороны, отношение тета-функций (3.3) дает контрчлен

$$\frac{\exp\{-\langle \hat{B}M, U \rangle/2 - \langle M, u + \hat{U} + D \rangle\}}{\exp\{-\langle \hat{B}M, \hat{U} \rangle/2 - \langle M, u + D \rangle\}} = \exp(-\langle M, \hat{U} \rangle),$$

что доказывает однозначность Ψ на $\Gamma(\tau)$.

В силу уравнений (3.5) и (3.6) «секулярные члены» исчезают:

$$\frac{d}{dt} \frac{\tau U(\tau) + V(\tau)}{\varepsilon} = U(\tau) + \tau \partial_\tau U(\tau) + \partial_\tau V(\tau) = U(\tau).$$

Таким образом, $\Psi_t = A(\lambda)\Psi + \varepsilon\Psi_\tau$, где остаточное слагаемое включает производные вида

$$\frac{\partial \theta(u | B)}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \theta(u | B)}{\partial B_{ij}} \frac{\partial B_{ij}}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \tau}. \quad (3.11)$$

Для доказательства равенства $\Psi_\tau = H\Psi$ с рациональной H , рассмотрим логарифмическую производную $\Psi_\tau\Psi^{-1}$. В силу уравнения (3.10) и определения $z = \mathcal{A}(p) + \dots$ в (3.11), матрица $\Psi_\tau\Psi^{-1}$ мероморфна по p на $\Gamma \setminus \infty$. Из асимптотик (2.4), (3.1) и (3.7) следует, что матрица ограничена на бесконечности и, следовательно, имеет полюсы только в нулях знаменателя $\theta[\gamma_m](\mathcal{A}(p) + D)$ в (3.3). Окончательно, из однозначности этой матрицы следует ее рациональность по λ :

$$\Psi_\tau\Psi^{-1} = \sum_{s=1}^{g+l-1} \frac{H_s}{\lambda - \lambda_s} + H_0, \quad (3.12)$$

где λ_s — нули знаменателя $\theta[\gamma_m](\mathcal{A}(p) + D)$. Заметим, что точки ветвления не дают дополнительных полюсов $\Psi_\tau\Psi^{-1}$ в силу разложения (3.8) и уиземовских уравнений (3.5).

При фиксированном τ матрицы L удовлетворяют уравнению

$$\Psi(p, t, \varepsilon)\hat{\mu}\Psi^{-1}(p, t, \varepsilon) = \Psi e^{\Omega_n \varepsilon^{-1}} \hat{\mu} e^{-\Omega_n \varepsilon^{-1}} \Psi^{-1} \Big|_{\tau=\text{const}} = L \Big|_{\tau=\text{const}},$$

в силу формулы (3.3) для Ψ . □

В заключение этого раздела уточним вид возмущенной нелинейной системы (1.1), которая получается из условия совместности пары Лакса (3.9) и (3.10):

$$\frac{d}{dt}(L\Psi) = L_t\Psi + L(A + \varepsilon H) = (A + \varepsilon H)\Psi\mu = (A + \varepsilon H)L\Psi,$$

так что

$$L_t + [L, A] = \varepsilon[H, L].$$

Поскольку левая часть (3.12) не имеет полюсов в точках $\lambda = \lambda_s$, имеем

$$[H_s, L] = 0, \quad s \neq 0,$$

что оставляет ненулевой только матрицу H_0 в правой части:

$$L_t + [L, A] = \varepsilon[H_0, L]. \quad (3.13)$$

4. Структура уиземовских деформаций.

4.1. *Свойство монотонности.* Рассмотрим свойства решений системы Уизема (3.4)

$$(\tau d\Omega(p, \tau) + d\Upsilon(p, \tau)) \Big|_{\lambda=\lambda_j(\tau)} \partial_\tau \lambda_j(\tau) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2g + 1. \quad (4.1)$$

Уравнения (4.1), как было сказано, являются автомодельной редукцией квазилинейной системы Уизема, предложенной Г. Флашкой, Г. Форестом и Д. МакЛафлином (см. [26]) для асимптотического интегрирования уравнения КдФ:

$$(\partial_T - S_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{2g+1}) \partial_X) \lambda_j(X, T) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2g + 1. \quad (4.2)$$

где

$$S_j = - \frac{d\Omega_2(\lambda)}{d\Omega_1(\lambda)} \Big|_{\lambda=\lambda_j},$$

Ω_1, Ω_2 — интегралы на Γ вида (2.4) и (3.1), умноженные на t и x соответственно в формуле для соответствующей Ψ -функции для уравнения КдФ, $T = \varepsilon t$, $X = \varepsilon x$.

Для интегрирования системы (4.1) С. П. Царев предложил метод годографа (см. [21]). Однако автомодельная система (4.2) значительно проще, так что здесь можно дать полную классификацию решений, впервые обсуждавшуюся в [2–4] на примере асимптотических решений уравнения КдФ. Решения системы (4.2) рассматривались также в [16] для случая граничных значений КдФ типа ступеньки. Здесь мы применим эти результаты для управления динамической системой с помощью g -периодической силы, описанной в разделе 2. В частности, теоремы 4 и 5 (см. ниже), впервые доказанные ранее Р. Ф. Бикбаевым и автором для асимптотики решений уравнения КдФ, будут основой для доказательства существования медленной деформации g -периодического движения с заданным начальным и конечным состоянием.

Следуя обозначениям [2–4], назовем точку ветвления λ_j *подвижной точкой*, если $\partial_\tau \lambda_j \neq 0$. Ясно, что каждое уравнение (4.1) имеет два решения $\tau = -\Upsilon/\Omega$ и $\partial_\tau \lambda_j = 0$. Напомним, что все точки ветвления предполагаются вещественными.

Основное утверждение о монотонности уиземовской деформации описывается следующей теоремой.

Теорема 4 (см. [2]). *Существует такой момент времени $\tau_0 > 0$, что если точка $\lambda_j(\tau)$ движется при $0 < \tau < \tau_0$, то*

(1) *все остальные точки ветвления неподвижны:*

$$\partial_\tau \lambda_i(\tau) = 0, \quad i \neq j;$$

(2) *точка λ_j движется справа налево вдоль вещественной оси:*

$$\partial_\tau \lambda_i(\tau) < 0.$$

Доказательство. Мы следуем работе [3], где описаны основные этапы доказательства. Рассмотрим функцию

$$\gamma(p) = \frac{\tau d\Omega + d\Upsilon}{d\lambda}.$$

Для любого τ она допускает представление

$$\gamma(p) = \frac{\lambda^{2n+g} + \dots}{\sqrt{P_{2g+1}(\lambda)}},$$

где в числителе стоит вещественный полином. Из условий нормировки (2.5), (3.2) вытекает, что $\gamma(p)$ имеет нуль в каждой из лакун $(\lambda_2, \lambda_3), \dots, (\lambda_{2g}, \lambda_{2g+1})$. Для $\tau = 0$ все остальные $2n$ нулей не

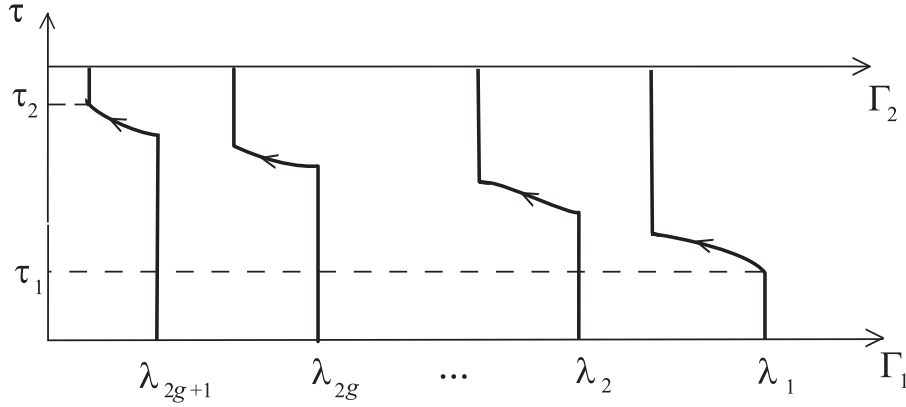


Рис. 2. Монотонная деформация Уизема

лежат на вещественной оси в силу условия (с) на дифференциал $d\Upsilon$. Следовательно, существует такое $\tau_0 > 0$, что при $0 < \tau < \tau_0$ это свойство все еще выполнено.

Предположим, от противного, что имеется две движущиеся точки λ_i и λ_j в некоторый момент времени $0 < \tau < \tau_0$. Это означает, что справедливы равенства

$$\gamma|_{\lambda=\lambda_i} = \gamma|_{\lambda=\lambda_j} = 0,$$

т.е. функция $\gamma(p)$ имеет $g + 2$ вещественных нуля, что невозможно по определению $\gamma(p)$.

Для доказательства свойства (2) введем обозначение

$$G(\lambda | \{\lambda_j\}) = \frac{d\Upsilon}{d\Omega}$$

и предположим, что точка $\lambda = \lambda_i(\tau)$ движется. Тогда из системы Уизема (4.1) следует

$$\tau = -G(\lambda_i | \{\lambda_j\}), \quad (4.3)$$

$$\partial_\tau \lambda_i(\tau) = -\frac{1}{\partial_{\lambda_i} G(\lambda | \{\lambda_j\})}, \quad (4.4)$$

где все остальные точки неподвижны в силу свойства (1).

Оценим полную производную

$$\frac{d}{d\lambda_i} G(\lambda_i | \{\lambda_j\}) = \partial_\lambda G(\lambda | \{\lambda_j\})|_{\lambda=\lambda_i} + \partial_{\lambda_i} G(\lambda | \{\lambda_j\})|_{\lambda=\lambda_i}. \quad (4.5)$$

Здесь первое слагаемое положительно, так как уравнение (4.3) имеет единственное решение и $G(\lambda | \{\lambda_j\}) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Для оценки второго слагаемого (4.5) заметим, что равенство (4.4) и предположение $\partial_\tau \lambda_j \neq 0$ дают

$$\tau \partial_{\lambda_i} d\Omega + \partial_{\lambda_i} d\Upsilon + \tau d\Omega + \frac{d\Upsilon}{2(\lambda - \lambda_i)} = 0.$$

Переходя к пределу $\lambda \rightarrow \lambda_i$, получаем

$$G(\lambda | \{\lambda_j\})|_{\lambda=\lambda_i} = -\frac{1}{2} \partial_{\lambda_i} G(\lambda | \{\lambda_j\})|_{\lambda=\lambda_i}.$$

Таким образом, правая часть (4.5) положительна, что доказывает свойство (2). $\square$

Теорема 4 обеспечивает существование и единственность уиземовской деформации римановой поверхности $\Gamma = \Gamma(\tau)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$\Gamma(\tau_1) = \Gamma_1, \quad \Gamma(\tau_2) = \Gamma_2. \quad (4.6)$$

Приведем один простой пример такой деформации.

Теорема 5 (см. [3]). Пусть множества точек ветвления $\{\lambda_j^1\}$ и $\{\lambda_j^2\}$, отвечающие граничным поверхностям Γ_1 и Γ_2 , удовлетворяют условиям

$$\lambda_1^1 > \lambda_1^2 > \lambda_2^1 > \lambda_2^2 > \dots > \lambda_{2g+1}^1 > \lambda_{2g+1}^2. \quad (4.7)$$

Тогда для любого заданного дифференциала $d\Upsilon$ существует только одна деформация $\Gamma = \Gamma(\tau)$ с граничными условиями (4.7).

Доказательство. В силу теоремы 2 все $\lambda_j(\tau)$ могут двигаться только одна за другой справа налево, так что

$$G(\lambda_i) > G(\lambda_j) \quad \text{при} \quad \lambda_i > \lambda_j.$$

Таким образом, из уравнения $\tau = -G(\lambda_i)$ следует, что первая точка λ_1 начинает двигаться в момент $\tau_1 = -G(\lambda_1^1 \mid \{\lambda_j^1\})$. Ее движение заканчивается, когда $\lambda_1(\tau)$ достигнет граничной точки λ_1^2 . Следующая точка λ_2^1 двигается в интервале $[\lambda_2^1, \lambda_2^2]$ и т. д. Движение всех точек $\lambda_i(\tau)$ определено однозначно уравнениями (4.3), где все $\lambda_i \neq \lambda_j$ остаются неподвижными. Деформация заканчивается в момент $\tau = -G(\lambda_{2g+1}^2 \mid \{\lambda_j^2\})$, что доказывает теорему. $\square$

Описанный в теореме 5 процесс деформации проиллюстрирован на рис. 2.

4.2. Параметрический резонанс. Свойства монотонности, установленные выше, обеспечивают характерные признаки параметрического резонанса. В качестве примера рассмотрим систему (3.13):

$$L_t + [L, A] = \varepsilon[H_0, L], \quad (4.8)$$

где возмущение определено условием (3.12).

Согласно [27], главным условием резонанса является возможность увеличить амплитуду осцилляций до сколь угодно большой величины. Для доказательства этого факта заметим, что уравнение (4.8) эквивалентно системе Дубровина (2.9), где все динамические переменные γ_j осциллируют между соседними точками ветвления на $\Gamma(\tau)$, т.е. $\lambda_{2j+1}(\tau) \leq \gamma_j \leq \lambda_{2j}$. Поэтому амплитуды изменяются при медленной эволюции $\lambda_j(\varepsilon t)$. Теорема 5 показывает, что λ_j могут быть сдвинуты сколь угодно далеко (нужно обратить время в (4.8), тогда эволюция λ_j пойдет слева направо, как показано на рис. 2).

Другими словами, система (4.8) может быть представлена в переменных действие-угол в следующем виде (2.8):

$$\begin{cases} I = (\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \dots, \lambda_{2g+1}(\tau)), \\ \phi(t) = U(\tau)t + \varepsilon^{-1}V(\tau) + D(\tau). \end{cases}$$

Отсюда вытекает другое свойство параметрического резонанса: нелинейный сдвиг фазы остается малым по сравнению с линейными членами. Это происходит благодаря уравнениям Уизема (3.5) и (3.6) в теореме 2:

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = U(\tau) + \tau U_\tau(\tau) + V_\tau(\tau) + O(\varepsilon) = U(\tau) + O(\varepsilon).$$

Наконец, эффект захвата фазы, т.е. резонанс между собственными частотами и частотой накачки достигается автоматически в (4.8). Это прямое следствие «интегрируемости» возмущения; возмущенная система также имеет представление Лакса (3.9) и (3.10) (см. теорему 3). Совместное решение Ψ (см. (3.3)) этих уравнений выступает как подходящая деформация точной Ψ -функции (2.7).

Заметим также, что описанная выше в разделе 3 уиземовская деформация обеспечивает многофазное возбуждение с любым заданным набором частот. Например, можно стартовать с устойчивого равновесия и затем «раскрутить» систему (1.1) до любых g -периодических колебаний. В алгебро-геометрических терминах этот процесс соответствует деформации (4.6) от тривиальной римановой поверхности до поверхности рода g :

$$\Gamma(\tau_1) = \mathbb{C} \quad \mapsto \quad \Gamma(\tau_2) = \Gamma_g.$$

Этот сценарий похож на описанный в теореме 5, но здесь дополнительные точки ветвления «возникают» так, чтобы обеспечить заданную структуру Γ_g . Они «рождаются» парами и движутся согласно уравнениям (4.3) и (4.4). Детальное описание этого процесса имеется в [2–16].

5. Примеры. Рассмотрим два важных примера динамических систем, интегрируемых с помощью конечнозонного метода, описанного выше в разделе 1. Это система Неймана, описывающая движение точки на двумерной сфере (см. [9, 17]), и волчок Ковалевской (см. [23]).

5.1. Система Неймана. Рассмотрим движение точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ на сфере

$$x^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1 \quad (5.1)$$

в поле квадратичного потенциала

$$U(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i x_i^2, \quad a_i = \text{const}.$$

Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (a_i x_i^2 + y_i^2).$$

Тогда с учетом связи $x^2 = 1$ получаем уравнения движения

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -a_i x_i + u(t) x_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $u(t)$ — множитель Лагранжа, возникающий из условия (5.1). Таким образом, система приобретает вид

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -a_i x_i + x_i \sum_{k=1}^3 \left(a_k x_k^2 - \left(\frac{dx_k}{dt} \right)^2 \right). \quad (5.2)$$

Легко проверяется (см. [17]), что выражения

$$J_k = x_k^2 + \sum_{i \neq j} \frac{(x_k y_i - x_i y_k)^2}{a_i - a_k}, \quad k = 1, 2, 3,$$

являются интегралами в инволюции для системы (5.2).

Система Неймана допускает явные решения в терминах тета-функций на римановой поверхности рода 2. Следуя [8, 17], рассмотрим три собственные функции x_1, x_2, x_3 оператора $L = d^2/dt^2 - u(t)$ с собственными значениями $-a_1, -a_2, -a_3$ соответственно:

$$Lx_i = -a_i x_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.3)$$

Здесь потенциал $u(t)$ задает такой двухзонный спектр для оператора L , что

$$\lambda_5 = -a_3 < \lambda_4 < \lambda_3 = -a_2 < \lambda_2 < \lambda_1 = -a_1, \quad (5.4)$$

а риманова поверхность Γ определяется уравнением (2.1) при $g = 2$:

$$\mu^2 = P_5(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_5).$$

Решения x_1, x_2, x_3 уравнения (5.3) восстанавливаются из функции Бейкера—Ахиезера $\Psi(\lambda, t)$ (см. (2.7)) из условий (см. [8])

$$x_i(t) = \alpha_i \Psi(-a_i, t), \quad \alpha_i = \left(\prod_{i \neq j} (a_i - a_j) \right)^{-1/2}.$$

Отсюда следуют соотношения (5.1), а также явные выражения для динамических переменных (см. [8]):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha_1 \frac{\theta[(0, 1/2), (0, 0)](tU + z_0)\theta(z_0)}{\theta[(0, 1/2), (0, 0)](z_0)\theta(tU + z_0)}, \\ x_2(t) &= \alpha_2 \frac{\theta[(1/2, 0), (0, 1/2)](tU + z_0)\theta(z_0)}{\theta[(1/2, 0), (0, 1/2)](z_0)\theta(tU + z_0)}, \\ x_3(t) &= \alpha_3 \frac{\theta[(0, 0), (1/2, 1/2)](tU + z_0)\theta(z_0)}{\theta[(0, 0), (1/2, 1/2)](z_0)\theta(tU + z_0)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь z_0 произвольный двумерный вектор, U — тот же, что и в формуле (2.5), а тета-функции с характеристиками определены в формуле (2.3).

Подвергнем теперь систему (5.1) адиабатическому возмущению, отображая исходный лиувиллев тор, заданный интегралами движения $J_k = J_k(\tau_-)$, в некоторый другой тор с интегралами $J_k = J_k(\tau_+) > J_k(\tau_-)$, $k = 1, 2, 3$, где τ_- , τ_+ — некоторые значения медленного времени. Отсюда вытекают граничные условия (5.4) для точек ветвления $\lambda_j = \lambda_j(\tau)$, $j = 1, 2, \dots, 5$, поскольку они явно выражаются через интегралы J_k (см. [8]):

$$J_k = \frac{\prod_{j=0}^2 (\lambda_{2k} - \lambda_{2j+1})}{\prod_{j \neq k} (\lambda_{2k} - \lambda_{2j})}.$$

Это преобразование лиувиллевских торов производится с помощью деформации Уизема (4.1). Ее существование и единственность обеспечено теоремой 4 из раздела 3.

Медленная деформация решения (5.5) строится с помощью процедуры, описанной в разделе 2. А именно, добавим поправочный член в фазе тета-функции (5.5)

$$tU + z_0 \mapsto tU(\tau) + \varepsilon^{-1}V(\tau) + z_0.$$

Тогда асимптотика для x_i примет вид

$$x_i(t) = \Theta_i(z + z_0(\tau) | \tau) + \varepsilon \Delta_i(z + z_0(\tau) | \tau) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.6)$$

где $z = tU(\tau) + \varepsilon^{-1}V(\tau)$, $z_0 = (z_{01}, z_{02})$, Θ обозначает правую часть (5.5), а $| \tau$ означает, что функции Θ_i и Δ_i зависят от τ только посредством $\lambda_j(\tau)$. Члены первого порядка Δ_j удовлетворяют линеаризованной системе

$$\begin{aligned} L\Delta_i + a_i\Delta_i - 2\Theta_i \sum_{k=1}^3 (a_k\Theta_k\Delta_k - \partial_t\Theta_k\partial_t\Delta_k) = \\ = -2\partial_{t\tau}^2\Theta_i - 2U_1\partial_{z_1}\Theta_i z'_{01}(\tau) - 2U_2\partial_{z_2}\Theta_i z'_{02}(\tau), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь мы использовали оценку $\sum \Theta_k \partial_\tau \Theta_k = O(\varepsilon)$, вытекающую из (5.6) и соотношения (5.1). Пусть Δ_i^0 удовлетворяет однородной системе (5.7). Можно показать (см. [11]), что все функции Δ_i периодичны по t с периодами U_1 , U_2 и что они выражаются через Ψ -функции оператора L .

Уравнение (5.7) имеет решения в классе медленно растущих на бесконечности функций, $\Delta_i(t) = o(t)$, $t \rightarrow \infty$, если двухпериодическое усреднение в правой части (5.7) обращается в нуль:

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2\partial^2\Theta_i}{\partial t \partial \tau} - 2U_1 \frac{\partial\Theta_i}{\partial z_1} z'_{01}(\tau) - 2U_2 \frac{\partial\Theta_i}{\partial z_2} z'_{02}(\tau) \right) \Delta_i^0 dt_1 dt_2 = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.8)$$

где $t_1 = tU_1 + z_{01}$, $t_2 = tU_2 + z_{02}$. Достаточно рассмотреть только два из трех уравнений (5.7), поскольку третья функция Δ_3 зависит от остальных посредством соотношения (5.1). В силу того, что решения (5.5) x_1 , x_2 линейно независимы, система (5.8) для $z_{01}(\tau)$, $z_{02}(\tau)$ невырождена и имеет по крайней мере одно решение. Если существует глобальное решение на всем интервале медленного времени (τ_-, τ_+) , то оно дает главный член асимптотики (5.6). Тем самым построена гладкая деформация двумерного лиувиллевого тора системы Неймана (5.2) от начального к

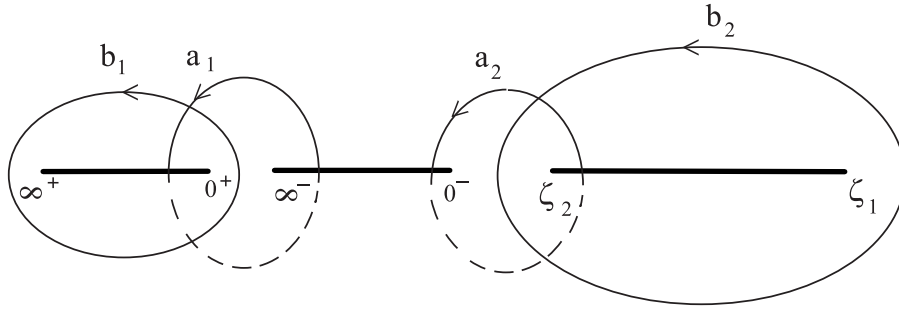


Рис. 3. Риманова поверхность волчка Ковалевской

конечному состоянию вместе с фазовым потоком, который локально (при фиксированном τ) удовлетворяет системе (5.2).

5.2. Волчок Ковалевской. Метод конечнозонного интегрирования волчка Ковалевской основан на паре Лакса (1.2) и (1.3) с рациональной зависимостью от спектрального параметра (см. [23])

$$L(\lambda) = L_{-1}\lambda^{-1} + L_0 + L_1\lambda = \begin{pmatrix} 0 & p_2 + ip_1 & 0ip_3 \\ p_2 - ip_1 & 0 - ip_3 & 0 \\ 0 & ip_3 & 0 & p_2 + ip_1 \\ -ip_3 & 0 & p_2 - ip_1 & 0\lambda^{-1} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -M_2 - iM_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -M_2 + iM_1 \\ M_2 - iM_1 & 0 & -2iM_3 & -2i\lambda \\ 0 & M_2 + iM_1 & 2i\lambda & 2iM_3 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$$A(\lambda) = A_1\lambda + A_0 = \begin{pmatrix} iM_3 & 0 & -\frac{1}{2}(M_2 + iM_1) & 0 \\ 0 & -iM_3 & 0 & -\frac{1}{2}(M_2 + iM_1) \\ \frac{1}{2}(M_2 - iM_1) & 0 & -iM_3 & -i\lambda \\ 0 & -M_2 - iM_1 & i\lambda & iM_3 \end{pmatrix}; \quad (5.10)$$

здесь M и p обозначают векторы углового момента и вектор силы тяжести соответственно в подвижной системе координат, связанной с волчком. Рассмотрим частный случай

$$\langle p, M \rangle = \sum p_j M_j = 0,$$

что дает выражение для римановой поверхности в виде (см. [23])

$$\xi^2 = \zeta \left((\zeta - H)^2 - \frac{1}{4}K \right) \left((\zeta - H)^2 - \frac{1}{4}K + 1 \right), \quad (5.11)$$

где

$$\xi = \sqrt{2}\mu\lambda^2\zeta, \quad \zeta = \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda^{-2}).$$

Гамильтониан системы и дополнительный интеграл Ковалевской имеют вид

$$H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2) - p_1, \quad K = (M_1^2 - M_2^2 + 2p_1)^2 + 4M_1^2M_2^2.$$

Уравнение (5.11) определяет гиперэллиптическую поверхность Γ рода 2 как двулистное накрытие комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с шестью точками ветвления $\infty^\pm$, $0^\pm$, ζ_1 , ζ_2 . Для $K > 4$ обе точки ζ_1 и ζ_2 являются вещественными.

Матричная функция Ψ удовлетворяет уравнениям пары Лакса (1.3). Она аналитична на римановой поверхности (5.11), ее первый столбец имеет вид (см. [23])

$$\begin{aligned}\Psi_{11} &= \frac{\theta(u + Vt + D)\theta[\delta](D + R)}{\theta(u + D)\theta[\delta](Vt + D + R)}e^{\Omega t}, & \Psi_{12} &= \frac{\theta[\delta](u + Vt + D)\theta[\delta](D + R)}{\theta(u + D)\theta(Vt + D + R)}e^{\Omega t + \omega}, \\ \Psi_{13} &= \frac{\theta[\delta](u + Vt + D + R)\theta(D + R)}{\theta(u + D)\theta[\delta](Vt + D + R)}e^{\Omega t}, & \Psi_{14} &= -i\frac{\theta(u + Vt + D + R)\theta[\delta](D)}{\theta(u + D)\theta(Vt + D + R)}e^{\Omega t + \omega},\end{aligned}$$

где $p_0 = \infty^+$, $\delta = [(0, 0, 0), (0, 1/2, 0)]$. Тогда остальные компоненты матрицы Ψ получаются из ее асимптотик в сингулярных точках $p = 0^\pm, \infty^\pm$. Это дает, в частности, выражения для угловых моментов в виде

$$\begin{aligned}M_1 - iM_2 &= 2\frac{\theta[(1/2, 0), (0, 0)](tV + D)}{\theta(tV + D)}, \\ M_1 + iM_2 &= 2\frac{\theta[(1/2, 0), (0, 1/2)](tV + D)}{\theta[(0, 0), (0, 1/2)](tV + D)}, \\ M_3 &= -i\frac{d}{dt}\ln\frac{\theta[(0, 0), (0, 1/2)](tV + D)}{\theta(tV + D)}.\end{aligned}$$

Параметрическое возмущение волчка Ковалевской задается уравнением (3.13), т.е.

$$L_t + [L, A] = \varepsilon[H_0, L].$$

Оно эквивалентно отображению

$$\zeta_j = \zeta_j(\tau), \quad Ut + D \mapsto U(\tau)t + \varepsilon^{-1}V(\tau) + D(\tau),$$

где $U(\tau), V(\tau)$ удовлетворяют уравнениям Уизема (3.6). Структура силы возбуждения $[H_0, L]$ в уравнении (3.13) устанавливается из вида тета-функций в уравнении (3.11). Отсюда вытекает представление (см. [15, теорема 6])

$$[H_0, L] = \begin{pmatrix} im_1 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & -im_i & 0 & i\bar{m}_1 \\ m_3 & 0 & -im_1 & 0 \\ 0 & \bar{m}_3 & 0 & im_1 \end{pmatrix} + C_1 + C_2[A_0, L_0] + [C_3, L_0],$$

где A_0, L_0 определены в (5.9), (5.10), C_1, C_2, C_3 — произвольные матричные функции, зависящие только от τ , а величины m_j имеют вид

$$\begin{aligned}m_1 &= M'_2M_1 - M'_1M_2, \\ m_2 &= iM'_3(M_2 - iM_1) + \frac{i}{2}M_3(M'_2 + iM'_1), \\ m_3 &= -iM'_3(M_2 + iM_1) + \frac{i}{2}M_3(M'_2 - iM'_1).\end{aligned}$$

6. Приложение. Докажем здесь существование дифференциала $d\Upsilon$, имеющего свойства (а)–(с), указанные в разделе 2.

Пусть $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \dots, \lambda_{2g+1}(\tau)$ — заданные точки ветвления поверхности $\Gamma(\tau)$. Будем искать дифференциал $d\Upsilon$ в виде

$$\frac{d\Upsilon}{d\lambda} = -\frac{\lambda^{2n+g} + \kappa_1\lambda^{2n+g-1} + \dots + \kappa_{2n}\lambda^g + \gamma_1\lambda^{g-1} + \dots + \gamma_{g-1}\lambda + \gamma_g}{\sqrt{P_{2g+1}(\lambda)}},$$

где все коэффициенты κ_j, γ_j вещественны. Отсюда вытекает асимптотика на бесконечности

$$\frac{d\Upsilon}{d\lambda} = -\lambda^{2n-1/2} + (\kappa_1 + p_1)\lambda^{2n-3/2} + \dots + (\kappa_{2n} + p_{2n})(\lambda^{-1/2}) + O(\lambda^{-3/2}),$$

где $p_1, \dots, p_{2n}$ — вещественные полиномы от переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2g+1}$. Для того, чтобы удовлетворить условию (а), положим

$$c_j = \kappa_j + p_j, \quad \partial_\tau c_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n - 1.$$

Условие (b) достигается выбором коэффициентов $\gamma_1, \dots, \gamma_g$, которые пока оставались свободными. Фиксируем их условием нормировки (3.2), что дает систему алгебраических уравнений

$$\int_{a_1} d\Upsilon = \dots = \int_{a_g} d\Upsilon = 0.$$

Она линейна по переменным $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ и имеет матричные коэффициенты

$$\left\{ \int_{a_j} \frac{\lambda^k}{\sqrt{P_{2g+1}(\lambda)}} d\lambda \right\}, \quad j, k = 1, 2, \dots, g,$$

с определителем Вандермонда, который отличен от нуля.

Из условия (b) следует, что $d\Upsilon/d\lambda$ имеет по крайней мере g вещественных нулей. Для того, чтобы остальные $2n$ нулей оставались не вещественными, используем следующее свойство вещественных полиномов: между двумя вещественными нулями имеется нуль производной полинома. Потребуем, чтобы производная $\partial_\lambda^g (\lambda^{2n+g} + \kappa_1 \lambda^{2n+g-1} + \dots + \kappa_{2n} \lambda^g)$ не имела бы вещественных нулей. Это налагает некоторые условия типа неравенств на постоянные $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$, входящие в величины κ_j линейно.

Тем самым, построенный дифференциал $d\Upsilon$ удовлетворяет условиям (a)–(c).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1967.
2. Бикбаев Р. Ф. Уравнение Кортевега—де Фриза с конечнозонными граничными условиями и уиземовские деформации римановых поверхностей// Функц. анализ. прилож. — 1989. — 23, № 4. — С. 1–10.
3. Бикбаев Р. Ф. Конечнозонные аттракторы и переходные процессы типа ударных волн в интегрируемых системах// Зап. научн. сем. ПОМИ. — 1992. — 199. — С. 25–36.
4. Бикбаев Р. Ф., Шарипов Р. А. Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для уравнения Кортевега—де Фриза в классе потенциалов с конечнозонным поведением при $x \rightarrow \pm\infty$ // Теор. мат. физ. — 1989. — 78, № 3. — С. 345–356.
5. Бобенко А. И. Интегрирование классических волчков методом обратной задачи/ Препринт ЛОМИ № 10-87. — 1987.
6. Борисов А. В., Мамаев И. С. Современная теория интегрируемых систем. — М.: РХД, 2003.
7. Векслер В. И. Новый метод ускорения релятивистских частиц// ЖЭТФ. — 1945. — 9, № 3. — С. 153–158.
8. Веселов А. П. Конечнозонные потенциалы и интегрируемые системы на сфере с квадратичным потенциалом// Функц. анализ. прилож. — 1980. — 14, № 1. — С. 48–50.
9. Дубровин Б. А. Тета-функции и нелинейные уравнения// Усп. мат. наук. — 1981. — 36, № 2. — С. 11–92.
10. Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы. 1// в кн.: Динамические системы—4/ Итоги науки и техники. — М.: ВИНТИ, 1985. — С. 179–285.
11. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега—де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия// Усп. мат. наук. — 1976. — 31, № 1 (187). — С. 55–136.
12. Кричевер И. М. Метод усреднения для двумерных интегрируемых уравнений// Функц. анализ. прилож. — 1989. — 22, № 3. — С. 200–213.
13. Кузмак Г. А. Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами// Прикл. мат. мех. — 1959. — 23. — С. 515–526.
14. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. — Киев: Изд-во АН УССР, 1955.
15. Новокшенов В. Ю. Уиземовские деформации интегрируемых динамических систем типа волчков// Функц. анализ. прилож. — 1993. — 27, № 2. — С. 50–62.
16. Новокшенов В. Ю. Временные асимптотики для солитонных уравнений со ступенчатыми начальными условиями// Совр. мат. прилож. — 2003. — 5. — С. 138–168.
17. Оден М. Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем. — М.: РХД, 1999.

18. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. — М.: Техносфера, 2003.
19. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984.
20. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
21. *Царев С. П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — 54, № 5. — С. 1048–1068.
22. *Чуриков Б. В.* Нелинейный резонанс. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1977.
23. *Bobenko A. I., Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A.* The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions// Commun. Math. Phys. — 1989. — 122, № 2. — P. 321–354.
24. *Bohm D., Foldy L.* The Theory of the Synchrotron// Phys. Rev. A. — 1946. — 70.
25. *Fay J. D.* Theta functions on Riemann surfaces// Lect. Notes Math. — 1973. — 352.
26. *Flaschka H., Forest M. G., McLaughlin D. W.* Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg–de Vries equation// Commun. Pure Appl. Math. — 1980. — 33, № 6. — P. 732–784.
27. *Fajans J., Gilson E., Friedland L.* Autoresonant excitation of diocotron waves// Phys. Rev. Lett. — 1999. — 82. — P. 4444.
28. *Novokshenov V. Yu.* Whitham deformations of two-dimensional Liouville tori// in: Singular Limits of Dispersive Waves (Ercolani N., Levermore D., eds.). — World Scientific, 1996. — P. 105–116.

Новокшенов Виктор Юрьевич

Институт математики с вычислительным центром,

Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия

E-mail: novik53@mail.ru



ОБ АНАЛОГАХ ФУНКЦИЙ ВОЛНОВЫХ КАТАСТРОФ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЯМИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2019 г. Б. И. СУЛЕЙМАНОВ

Аннотация. Рассматриваются симметричные и изомонодромные свойства универсальных специальных решений интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений, являющихся аналогами известных по линейным задачам эталонных функций волновых катастроф. Проведен сравнительный анализ двух различных подходов к выбору симметрий интегрируемых нелинейных уравнений, которые могут быть применены для исследования подобных специальных решений, приведены примеры.

Ключевые слова: функция волновой катастрофы, нелинейное интегрируемое уравнение, симметрия, оператор рекурсии, метод изомонодромных деформаций.

ON ANALOGS OF WAVE CATASTROPHE FUNCTIONS THAT ARE SOLUTIONS OF NONLINEAR INTEGRABLE EQUATIONS

© 2019 B. I. SULEIMANOV

ABSTRACT. In this paper, we consider symmetry and isomonodromy properties of universal special solutions of integrable nonlinear evolution equations, which are analogs of standard wave catastrophe functions known for linear problems. We perform a comparative analysis of two different approaches to the choice of symmetries of integrable nonlinear equations, which can be applied to the study of such special solutions. Some examples are also presented.

Keywords and phrases: wave catastrophe function, nonlinear integrable equation, symmetries, recursion operator, method of isomonodromy deformation.

AMS Subject Classification: 34Mxx

1. Введение. При описании различных резких переходных режимов, характерных для широкого класса асимптотических решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром, универсальным образом возникают интегралы Фурье специального вида. Исследованию свойств (в частности, исследованию асимптотик) таких универсальных специальных интегралов, называемых иногда функциями волновых катастроф (ФВК), посвящено множество публикаций (см., например, [1, 8, 22, 23, 27, 29, 33, 41, 52, 55, 57, 58]). Оказывается, что в нелинейных задачах с малым параметром подобную универсальную роль играет широкий ряд специальных решений интегрируемых эволюционных уравнений, которые можно рассматривать в качестве аналогов этих ФВК.

Общая теория таких решений, берущая начало от публикации А. В. Китаева (см. [21]; независимо частный случай одного подобного решения рассматривался автором данной статьи в том же выпуске Записок ЛОМИ [34]), позднее получила дальнейшее развитие и уже многочисленные применения (см. [7, 24–26, 35–40, 42, 43, 45–47, 53, 54]).

Ниже дается обзор и сравнительный анализ различных известных на сегодняшний день подходов к описанию свойств такого сорта решений нелинейных эволюционных интегрируемых уравнений.

2. Изомонодромные деформации. Хорошо известными по своим многочисленным приложениям аналогами классических специальных функций линейной теории являются решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) Пенлеве, простейшими представителями которых являются первое $\varphi''_{xx} = 6\varphi^2 + x$ и второе $\varphi''_{xx} = 2\varphi^3 + x\varphi + \alpha$ уравнения Пенлеве (здесь α — произвольный комплексный параметр). Эти уравнения интегрируемы; они допускают применение метода изомонодромных деформаций: их выполнение является необходимым и достаточным условием совместности двух линейных систем ОДУ

$$\Psi'_x = Q(x, \lambda), \quad \Psi'_\lambda = R(x, \lambda),$$

коэффициенты которых рациональны по переменной λ и явным образом зависят от x , $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$. (О теории уравнений Пенлеве и некоторых их приложениях см. монографию [20].)

В приложениях наряду с решениями ОДУ Пенлеве встречаются и решения нелинейных ОДУ порядка выше второго. Например, в упомянутой работе [34] было указано, что аналог интеграла Пирси

$$I = d \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-2i(\lambda x + 2\lambda^2 t + \beta \lambda^4) \right) d\lambda \quad (2.1)$$

(здесь $d, \beta \in \mathbb{R}$ — постоянные), который является решением нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)

$$-iq'_t = q''_{xx} + 2\delta|q|^2 q \quad (2.2)$$

($\delta = \text{const} \in \mathbb{R}$), рассмотренного в [50], одновременно удовлетворяет уравнению

$$\beta(q'''_{xxx} + 6\delta|q|^2 q'_x) + 2(ixq - 2tq'_x) = 0. \quad (2.3)$$

Это решение НУШ относится к классу изомонодромных решений уравнений нулевой кривизны, введенному в рассмотрение в статье [19] А. Р. Итса. Соответствующие этому решению НУШ совместные решения известной (см. [13]) системы уравнений метода обратной задачи рассеяния

$$\Psi_x = U(\lambda, t, x)\Psi = i \begin{pmatrix} -\lambda & q \\ \delta q^* & \lambda \end{pmatrix} \Psi, \quad (2.4)$$

$$\Psi_t = V(\lambda, t, x) = \begin{pmatrix} -i(2\lambda^2 - \delta|q|^2) & 2i\lambda q - q_x \\ \delta(2i\lambda q^* + q_x^*) & i(2\lambda^2 + \delta|q|^2) \end{pmatrix} \Psi, \quad (2.5)$$

могут быть выбраны так (см. [34]), чтобы они удовлетворяли также системе линейных ОДУ

$$\Psi'_\lambda = A(t, x, \lambda)\Psi, \quad (2.6)$$

где матрица $A(t, x, \lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned} A(t, x, \lambda) &= \sum_{j=0}^3 A_j(t, x) \lambda^j = \\ &= - \left[i(4\beta\lambda^3 + 4\lambda t - 2\delta\beta|q|^2\lambda + x) + \delta\beta(q_x q^* - q_x^* q) \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 4i\beta\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & q \\ \delta q^* & 0 \end{pmatrix} - \\ &\quad - 2\beta\lambda \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ -\delta q_x^* & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 4tq - \beta(q_{xx} + 2\delta|q|^2 q) \\ \delta(4tq^* - \beta(q_{xx}^* + 2\delta|q|^2 q^*)) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из теории линейных систем ОДУ с иррегулярными особыми точками (см. [4, гл. IV, §§10–11, §14] следует, что для каждого сектора

$$S_k = \left(\lambda : \frac{\pi}{4}(k-1) < \arg \lambda < \frac{\pi}{4}(k+1), \quad k = 1, \dots, 8 \right) \quad (2.7)$$

существует фундаментальное решение Ψ_k системы (2.6), асимптотическое разложение которого при $\lambda \rightarrow \infty$ в этом секторе имеет вид

$$\Psi = \left(E + \sum_{j=0}^{\infty} P_j(t, x) \lambda^{-j} \right) \exp \left(\sum_{\substack{j=0, \\ j \neq 4}}^{\infty} B_j(t, x) \frac{\lambda^{4-j}}{4-j} + B_4(t, x) \ln \lambda \right), \quad (2.8)$$

где E — единичная матрица,

$$B_0 = A_0 = -4i\beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

матрицы B_j диагональны, а матрицы P_j антидиагональны:

$$\begin{aligned} B_j(t, x) &= \begin{pmatrix} b_{11}^j(t, x) & 0 \\ 0 & b_{22}^j(t, x) \end{pmatrix}, \quad P_j(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & p_{12}^j(t, x) \\ \partial_{21}^j(t, x) & 0 \end{pmatrix}, \\ B_1 &= 0, \quad B_2 = -4it \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = -ix \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ P_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\delta q^* & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ \delta q_x^* & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & q_{xx} + \delta |q|^2 q^* \\ \delta (q_{xx}^* + \delta |q|^2 q) & 0 \end{pmatrix}, \\ B_4 &= ib_4(t, x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\delta \left[\frac{\beta}{2} (q_{xx} q^* + q_{xx}^* q + 3\delta |q|^4 - |q_x|^2) - 2t |q|^2 \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Легко видеть, что в силу того, что $q(t, x)$ удовлетворяет НУШ (2.2) и ОДУ (2.3), выполняется соотношение $(b_4)'_t = (b_4)'_x = 0$.) Отсюда стандартным образом следует существование восьми фундаментальных совместных решений Ψ_k систем (2.4)–(2.6), которые в соответствующих секторах (2.7) при $\lambda \rightarrow \infty$ имеют асимптотики

$$\Psi_k(t, x, \lambda) \approx \exp \left(\left(-ix\lambda - 2it\lambda^2 - i\beta\lambda^4 + ib_4 \ln \lambda \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad (2.9)$$

и связаны друг с другом не зависящими от t и x матрицами Стокса $M_k = (\Psi_k)^{-1} \Psi_{k+1}$. (Именно эта независимость дает основание говорить об изомонодромности совместных решений НУШ (2.2) и ОДУ (2.3); см. [19].)

Асимптотики при $t \rightarrow \pm\infty$ решений НУШ (2.2) из [50] в пределе при $\delta \rightarrow 0$ переходят в соответствующие асимптотики интеграла Пирси (2.1) (см. по этому поводу также [34, 53]). Изомонодромность данного специального решения НУШ позволяет, в частности, строго обосновать эти его асимптотики (см. [53]).

Вид фазы экспоненты в асимптотике (2.9) весьма схож с фазой экспоненты в интеграле Пирси (2.1). Кроме того, интеграл (2.1) наряду с линейной частью $-iI'_t = I''_{xx}$ НУШ (2.2) удовлетворяет линейной части ОДУ (2.3)

$$\beta I'''_{xxx} + 2(ixI - 2tI'_x) = 0. \quad (2.10)$$

Эти два обстоятельства дают дополнительные основания рассматривать соответствующее совместное решение уравнений (2.2) и (2.3) в качестве нелинейного аналога интеграла Пирси (2.1).

Тот факт, что это решение $q(t, x)$ НУШ также удовлетворяет ОДУ (2.3), представляется даже более важным, чем возможность писать и строго обосновывать формулы, связывающие его поведение при больших значениях аргументов. Аналогичное замечание справедливо и для других изомонодромных аналогов ФВК, удовлетворяющих уравнениям нулевой кривизны (см. по этому поводу [37, 40]). Заметим, что в приложениях изомонодромность подобных аналогов ФВК, как правило, априори не очевидна. Обычно эти аналоги в различных задачах нелинейной математической физики с малым параметром возникают именно в качестве решений уравнений в частных производных, про которые изначально известна лишь информация об их асимптотике при больших значениях аргументов в части из направлений.

Замечание 1. Отметим, что в последние годы в ряде работ обыкновенные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют некоторые подобные аналоги ФВК, из неинтегрируемых задач математической физики с малым параметром были выведены с помощью восходящей

к Б. А. Дубровину методики, основанной на использовании приближенных симметрий (см. [2]) этих неинтегрируемых уравнений (см., например, [43, 45–47]). При использовании данной методики эти ОДУ возникали автоматически. Но пока не ясна широта применимости данного подхода: примеров, относящихся к физически существенно разным ситуациям, с его помощью рассмотрено немного.

Для некоторых из рассматриваемых в данной статье подходов к специальным решениям интегрируемых уравнений в частных производных ключевым моментом является их ассоциация с ФВК линейной теории. В случае успешной ассоциации имеющиеся на сегодняшний день результаты дают основания надеяться на то, что для данных решений удастся найти и нелинейные ОДУ, которым они также удовлетворяют. Однако надо заметить, что затруднения могут возникнуть уже на стадии попытки ассоциации таких решений с конкретной ФВК линейной теории.

Например, в недавней работе [39] автора данной статьи содержится описание специального решения НУШ (2.2) с $\delta = 1$, которое в пространственно одномерном случае довольно универсальным образом описывает поправочное влияние малой дисперсии на процессы самофокусировки приближения нелинейной геометрической оптики. В ходе исследования свойств этого специального решения $q(t, x) = r(t, x) \exp(i\varphi(t, x))$ как раз и встал вопрос об его ассоциации с ФВК линейной теории, исходя из того требования, чтобы при $t \rightarrow -\infty$ вне двух ветвей кривой $x^2 = 18at^{4/3}$ оно стремилось к нулю, а внутри них его амплитуда $|r(t, x)|$ и фаза $\varphi(t, x)$ в основном задавались формулами

$$\varphi = t^{1/3} \left[3a + \frac{s^2}{6} \right] + \dots, \quad |r| = |t|^{-1/3} l \left[\frac{a}{2} - \frac{s^2}{36} \right]^{1/2} + \dots, \quad (2.11)$$

где $s = x/t^{2/3}$. Вид автомодельной переменной s в асимптотике (2.11) дал основание для сопоставления в [39] данному решению НУШ интегралов Фурье вида

$$I(t, x) = \int_S \lambda^m \exp \left(i(\lambda x - \lambda^2 t + \delta \lambda^{-1}) \right) d\lambda; \quad (2.12)$$

здесь δ, m — постоянные, а контуры S предполагаются такими, что интегрирования по частям всех производных по переменным t и x этих интегралов не дают вкладов от внеинтегральных членов. При этом использовалась следующая цепочка рассуждений:

- (1) исходя из вида линейного предела $-iI'_t = I''_{xx}$ НУШ (2.2) и предполагаемой изомонодромности данного специального решения, решению $q(t, x)$ прежде всего были поставлены в соответствие более общие решения этого предела

$$I(t, x) = \int_S \lambda^m \exp \left(i(\lambda x - \lambda^2 t + \delta \lambda^n) \right) d\lambda, \quad (2.13)$$

зависящие от целого числа n ;

- (2) далее в интегралах (2.13) были произведены замены $x = st^{2/3}$, $\lambda = \xi t^\rho$ и наложено требование, чтобы в получающихся в результате данных замен подынтегральных экспонентах

$$\exp \left(i(\xi st^{2/3+\rho} - \xi^2 t^{1+2\rho} + \delta \xi^n t^{n\rho}) \right)$$

все слагаемые имели одинаковый порядок по t . Последнее означает справедливость равенств $\rho = -1/3$ и $n = -1$, а следовательно, и требование, чтобы интегралы $I(t, x)$ имели именно вид (2.12). (Их асимптотики при больших значениях t согласно методу стационарной фазы (см. [41]) описываются как раз в терминах переменной s .)

Вид же подынтегральной экспоненты линейных аналогов (2.12) данного решения $q(t, x)$ НУШ (2.2) и вид линейных систем (2.4), (2.5) уравнений метода обратной задачи рассеяния позволили, следуя общей идеологии (см. [21]) и более рассуждениям из [35], исходящих из вида особенностей данной экспоненты при $\lambda \rightarrow 0$, сделать вывод о том, что в соответствующей системе

линейных ОДУ (2.6)

$$A(\lambda, t, x) = \sum_{j=-2}^1 A_j(t, x) \lambda^j, \quad (2.14)$$

где ν — постоянная и

$$\begin{aligned} A_1 &= -4it \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} -ix & 4itq \\ 4itq^* & ix \end{pmatrix}, \quad A_{-1} = \begin{pmatrix} 2it|q|^2 & ixq - 2tq'_x \\ ixq^* + 2tq_x^* & -2it|q|^2 \end{pmatrix}, \\ A_{-2} &= \left(-t(q'_x q^* - (q^*)'_x q) + \frac{i}{2} \left(x|q|^2 + \int_0^x |q|^2(t, \zeta) d\zeta + \nu \right) \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & -tq'_t - (xq)'_x/2 \\ t(q^*)'_t + (xq^*)'_x/2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из совместности на данном изомонодромном решении $q(t, x)$ систем линейных ОДУ (2.4) и (2.6), (2.14) следует, в частности, тот факт, что помимо НУШ (2.2) функция $q(t, x)$ удовлетворяет также нелинейному ОДУ

$$it(q'''_{xxx} + 6|q|^2 q'_x) + \frac{xq''_{xx}}{2} + q'_x + x|q|^2 q + \left(\nu + \int_0^x |q|^2(t, \zeta) d\zeta \right) q = 0 \quad (2.15)$$

по независимой переменной x . Более тщательный анализ позволил сделать вывод и о том, что $\nu = 0$ для рассматриваемого в [39] изомонодромного решения.

В только что приведенном рассуждении соответствие между предполагаемыми изомонодромными решениями уравнений нулевой кривизны и функциями волновых катастроф линейной теории основывалось на виде автомодельной переменной в асимптотике этого решения. Аналогичные рассуждения могли бы быть применены и к другим известным на сегодняшний день нелинейным аналогам ФВК (например, к тем, что рассматривались в [7, 24, 36, 38]). Но описанный выше подход, при котором приходится сначала в дополнение к уравнениям метода обратной задачи искать и выписывать явно совместные с ними подходящие системы линейных ОДУ, содержащие дифференцирование по спектральному параметру, не лишен и недостатков: его непосредственное применение к интегрируемым уравнениям размерности $1 + 2$ (таким, как, например, уравнение Кадомцева—Петвиашвили $u''_{tx} + u''''_{xxxx} + 3u''_{yy} + 3(u^2)''_{xx} = 0$), затруднительно (см. [40]), а в случаях высших катастроф велик объем производимых вычислений (см. [37]).

Для преодоления таких трудностей можно использовать симметрии интегрируемых уравнений; по поводу их применения к уравнениям размерности $1 + 2$ см. [40]. В оставшейся же части данного обзора проводится сравнительный анализ двух различных подходов к выбору симметрий эволюционных пространственно одномерных интегрируемых уравнений, которые могут быть применены для исследования их решений, являющихся аналогами ФВК.

Замечание 2. Существуют различные определения симметрий. В данной статье под локальной симметрией порядка n системы эволюционных дифференциальных уравнений

$$U'_t = F \left(U, U'_x, \dots, \frac{\partial^k U}{\partial x^k} \right), \quad U, F \in \mathbb{R}^m, \quad (2.16)$$

понимается система эволюционных уравнений

$$U'_\tau = G \left(t, x, U, U'_x, \dots, \frac{\partial^n U}{\partial x^n} \right), \quad G \in \mathbb{R}^m, \quad (2.17)$$

правая часть которой удовлетворяет условию коммутирования

$$\frac{dF}{d\tau} = \frac{dG}{dt}.$$

Под нелокальной симметрией системы (2.16) далее понимается совместная с ним система эволюционных уравнений по времени τ , правая часть которой наряду с зависимостью от t, x, U и производных U по переменной x содержит также интегралы по переменной x . Общая теория гарантирует, что с системой (2.16) совместны стационарные части всех его симметрий, определяемые равенством $U'_\tau = G = 0$. Симметрии (2.17) системы (2.16), в которых $G = G(t, x, U, U'_x, U'_t)$, называются *классическими* (определяемые же их стационарными частями решения системы (2.16) — *автомодельными*). Симметрии (2.17) с $n > k$ называются *высшими*. Наличие высших симметрий как раз и выделяет интегрируемые эволюционные нелинейные уравнения среди прочих.

3. «Линейный» вариант использования симметрий. А. В. Китаев в [21] среди прочих свойств рассматриваемых им изомонодромных аналогов СФВК указал на их отношение к дополнительными (в смысле [31]) симметриям интегрируемых методом обратной задачи эволюционных уравнений. В связи с этим в [40] было замечено, что левая часть ОДУ (2.3) есть линейная комбинация стационарных частей высшей симметрии НУШ (2.2)

$$q_{\nu_3} = q'''_{xxx} + 6\delta|q|^2 q'_x \quad (3.1)$$

и его классической симметрии Галилея

$$q_{\tau_0} = \frac{1}{\beta}(-4tq'_x + 2ixq). \quad (3.2)$$

Там же было отмечено то, что ОДУ (2.3) получается из ОДУ (2.10), решением которого является интеграл Пирси (2.1), заменой I_{xxx} на его нелинейное обобщение — правую часть симметрии (3.1).

Исходя из этого наблюдения в [40] были предложены следующие общие правила выбора стационарных частей симметрий уравнений в частных производных, которым могут удовлетворять аналоги ФВК — решения данных уравнений. По сути эти правила сводятся к осуществлению следующей последовательности действий:

- (1) взятия интеграла (здесь $(x_1, \dots, x_n)$ — управляющие параметры волновой катастрофы)

$$\int_S \lambda^r \exp\left(\Phi(\lambda, x_1, \dots, x_n)\right) d\lambda, \quad (3.3)$$

удовлетворяющего *линейной части* того интегрируемого методом обратной задачи уравнения, решением которого является нелинейный аналог ФВК. Контур S при этом надо считать таким, что все дальнейшие интегрирования по частям не дадут внеинтегральных членов, а функцию Φ выбрать так, чтобы уравнение $\Phi'_\lambda(\lambda, x_1, \dots, x_n) = 0$ описывало волновую катастрофу того же типа, к которой относится данный нелинейный аналог ФВК;

- (2) выписыванию линейного ОДУ (относительно одной из независимых переменных линейного уравнения в частных производных, использовавшегося в предыдущем пункте), которому удовлетворяет интеграл (3.3);
- (3) сопоставлении возникающему линейному ОДУ стационарной части той симметрии исходного интегрируемого уравнения, для которой это линейное ОДУ было бы ее линейной частью (осуществимость этого сопоставления накладывает ограничения на выбор возможных линейных ОДУ на интеграл (3.3);
- (4) устранении остающегося произвола, на основе имеющейся информации об асимптотике данной «нелинейной» специальной функции при $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow \infty$.

В [37] эти правила были применены для выписывания ОДУ, которым наряду с НУШ (2.2) удовлетворяет изомонодромная иерархия его специальных решений, описывающих влияние малой нелинейности на высокочастотные асимптотики при перестройках каустик. (Безотносительно к рассматриваемой в [37] конкретной задаче, эта изомонодромная иерархия описывались в [21].) Как отмечено в [37], использование таких правил позволяет при выводе соответствующих нелинейных ОДУ избежать технически тяжелой процедуры обращения к уравнениям изомонодромных

деформаций: достаточно использовать лишь стационарную часть симметрии Галилея (3.2) и нелинейные аналоги производных порядка n — стационарные части симметрий

$$W_k = W\left(q, q^*, q'_x, (q^*)'_x, \dots, \frac{\partial^n q}{\partial x^n}, \frac{\partial^n q^*}{\partial x^n}\right)$$

порядка n уравнения (2.2), которые с помощью оператора рекурсии, выписанного в [12], по индукции задаются формулами

$$W_{n+1} = L_{NS}W_n = -i\frac{\partial W_n}{\partial x} - 2i\delta q \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1} (q^*W_n + qW_n^*) \quad (3.4)$$

Любопытный пример подобного аналога ФВК доставляет, по-видимому, и решение НУШ (2.2) из [51], которое при $\delta = 0$ переходит в интеграл

$$d \int_{-\infty}^0 \exp\left(i(x\lambda - t\lambda^2 + \beta\lambda^3)\right) d\lambda, \quad (3.5)$$

где $d, \beta \in \mathbb{R}$ — константы.

Есть основания полагать, что этот аналог интеграла (3.5) есть также решение ОДУ

$$3\beta\left(q'''_{xxx} + 6\delta|q|^2q'_x\right) - 2it\left(q''_{xx} + 2\delta|q|^2q\right) - xq'_x - q - i\nu q = 0, \quad (3.6)$$

где $\nu = \text{const}$. Это ОДУ есть линейная комбинация стационарных частей высшей симметрии НУШ (2.2), задаваемой формулой (3.1), его простейшей нетривиальной симметрии $q_\kappa = iq$ и его симметрии растяжения

$$q_\chi = 2tq'_t + xq'_x + q. \quad (3.7)$$

При $\delta = 0$ ОДУ (3.6) переходит в линейное ОДУ, которому удовлетворяет интеграл (3.5), а асимптотика этого нелинейного аналога ФВК в «однофазовой» области, приведенная в [51], является и асимптотикой одного из решений ОДУ (3.6). Два этих факта свидетельствуют о большой правдоподобности предположения об удовлетворении данной нелинейной специальной функцией ОДУ (3.6). Примечательно то, что стационарная часть симметрии (3.6) и стационарная часть классической симметрии НУШ (2.2)

$$3\beta\left(q''_{xx} + 2\delta|q|^2q\right) - 2itq'_x - xq = -\left(3i\beta q'_t + 2itq'_x + xq\right) = 0 \quad (3.8)$$

связаны друг с другом посредством оператора рекурсии L_{NS} , задаваемым формулой (3.4).

Впоследствии неожиданно выяснилось, что описанные в этом разделе правила отбора симметрий применимы и к нелинейным аналогам ФВК, асимптотики которых при больших значениях даже качественно отличаются от соответствующих асимптотик этих ФВК. Впервые это обстоятельство было обнаружено в [36, 38] при успешном применении этих правил к специальному решению Гуревича—Питаевского (см. [10, 11]) уравнения Кортевега—де Вриза (КдВ)

$$u'_t + u'''_{xxx} + uu'_x = 0. \quad (3.9)$$

Сами А. В. Гуревич и Л. П. Питаевский в [10] введенное ими в рассмотрение специальное решение уравнения (3.9) трактовали в качестве аналога ФВК сборки, которая является решением линеаризованного уравнения КдВ $v_t = -v_{xxx}$ и представляет собой линейную комбинацию интеграла вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^r \exp\left(-2i(c\lambda^7 + 4t\lambda^3 + x\lambda)\right) d\lambda \quad (3.10)$$

(c и r — постоянные) и его комплексного сопряжения I^* . Эта трактовка основывалась на том, что асимптотика интеграла (3.10) при $t^2 + x^2 \rightarrow \infty$ согласно методу стационарной фазы (см. [41]) выписывается в терминах корней кубического уравнения катастрофы сборки $7c\lambda^6 + 12t\lambda^2 + x = 0$ (специальное решение уравнения КдВ, рассматриваемое в [10], определяется как раз тем, что его асимптотика при больших значениях x в главном порядке задается корнем $H(t, x)$ кубического

уравнения $x - tH + H^3 = 0$). Как видим, п. (1) только что описанных правил применялся еще в 1971 г. в [10].

В ходе применения в [36] к данному специальному решению уравнения КдВ (3.9) пунктов (2) и (3) этих правил был сделан вывод о том, что в интеграле (3.10) надо положить

$$r = 1, \quad c = -\frac{3456}{35}$$

При таких значениях констант интеграл (3.10) есть точное решение ОДУ

$$I_{xxxxxx}'''''' + \frac{5}{54}(xI'_x - 3tI'''_{xxx} + 2I) = 0, \quad (3.11)$$

которому можно поставить в соответствие его нелинейный аналог — ОДУ

$$u_{xxxxxx}'''''' + \frac{7}{3}(uu_{xxxxx}'''' + 3u'_xu_{xxx}'''' + 5u''_{xx}u'''_{xxx}) + \frac{35}{18}(u'''_{xxx}u^2 + (u'_x)^3 + 4u''_{xx}u'_xu) + \\ + \frac{35}{54}u'_xu^3 + \frac{5}{54}(xu'_x - 3t(u'''_{xxx} + uu'_x) + 2u) = 0, \quad (3.12)$$

являющегося (см. [16]) суммой стационарных частей высшей симметрии уравнения (3.9) седьмого порядка

$$u'_{\tau_7} = u_{xxxxxx}'''''' + \frac{7}{3}(uu_{xxxxx}'''' + 3u'_xu_{xxx}'''' + 5u''_{xx}u'''_{xxx}) + \frac{35}{18}(u'''_{xxx}u^2 + (u'_x)^3 + 4u''_{xx}u'_xu) + \frac{35u'_xu^3}{54}$$

(нелинейного аналога I_{xxxxxx}'''''') и его классической симметрии растяжения

$$u'_{\tau_r} = \frac{5}{54}(xu'_x + 3tu'_t + 2u) = \frac{5}{54}(xu'_x - 3t(u'''_{xxx} + uu'_x) + 2u);$$

ей в линейном ОДУ (3.11) соответствует слагаемое $\frac{5}{54}(xI'_x - 3tI'''_{xxx} + 2I)$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (3.12), будучи стационарной частью симметрии уравнения (3.9), совместно с последним. Оказалось, что «бездисперсионный» предел

$$u'_x(7u^3 + x - 3tu) = -2u$$

этого ОДУ в качестве решения имеет корень кубического уравнения

$$x - tu + u^3 = 0. \quad (3.13)$$

Позднее в работе [38], явившейся непосредственным продолжением [36], было указано, что с уравнением КдВ (3.9) совместны также решения ОДУ четвертого порядка

$$u_{xxxx}'''' + \frac{5}{3}uu''_{xx} + \frac{5}{6}u_x^2 + \frac{5}{18}(x - tu - u^3) = 0 \quad (3.14)$$

(все решения этого ОДУ удовлетворяют и (3.12)), и что «бездисперсионный предел» этого уравнения (получающийся в результате формального зануления всех производных в его левой части) в точности совпадает с кубическим уравнением сборки. Главным образом на основании этого факта в [38] был сделан вывод о том, что специальное решение Гуревича—Питаевского уравнения КдВ (3.9) одновременно является решением ОДУ четвертого порядка (3.14). (Существование глобально гладкого совместного решения $u(t, x)$ этих двух уравнений с такой асимптотикой строго доказано в статье [44].)

4. «Бездисперсионный» вариант использования симметрий. В связи с только что изложенным результатом касательно специального решения Гуревича—Питаевского уравнения КдВ (3.9) В. Р. Кудашев заметил следующее:

- (i) уравнение (3.14) возникает при интегрировании стационарной части симметрии уравнения КдВ (3.9) пятого порядка

$$u'_\varrho = \left(u_{xxxx}'''' + \frac{5}{3}uu''_{xx} + \frac{5}{6}(u'_x)^2 + \frac{5}{18}u^3 \right)'_x + \frac{5}{18}(1 - tu'_x)$$

(определяемой линейной комбинацией его классической симметрии Галилея

$$u'_\sigma = 1 - tu'_x \quad (4.1)$$

(см. [30, § 5.2, с. 404]) и первой из его высших «автономных» симметрий (см. [30, § 5.2, с. 402]);

- (ii) корень $u(t, x)$ кубического уравнения (3.13), совпадающего с «бездисперсионным» пределом ОДУ (3.14), одновременно удовлетворяет «бездисперсионному» пределу уравнения КдВ (3.9)

$$u'_t + uu'_x = 0. \quad (4.2)$$

Обобщая это наблюдение, В. Р. Кудашев выдвинул в [54] свой вариант правил выбора подобных симметрий интегрируемых уравнений в частных производных. Он предложил делать такой выбор, исходя из требования, чтобы стационарными частями этих симметрий удовлетворяли их специальные решения, главные члены асимптотик которых при больших значениях аргументов в некоторых направлениях суть точные решения их бездисперсионных пределов, претерпевающих ту или конкретную волновую катастрофу. В применении к решениям уравнений КдВ (3.9) и Бюргерса

$$u'_t + uu'_x = u''_{xx} \quad (4.3)$$

с доминирующей при $x^2 + t^2 \rightarrow \infty$ нелинейностью сущность этого варианта сводится к следующим соображениям.

Главные члены асимптотик таких аналогов ФВК, описываемых решениями этих уравнений, предполагаются корнями уравнения

$$x - tu = G(u). \quad (4.4)$$

Корни (4.4) удовлетворяют уравнению Хопфа (4.2), являющегося «бездиссипативным» («бездисперсионным») пределом уравнения Бюргерса (4.3) (КдВ (3.9)). Логично поэтому искать стационарные части симметрий уравнений Бюргерса или КдВ, которым одновременно удовлетворяют такие их специальные решения, полагая, что их «бездиссипативные» («бездисперсионные») пределы имеют вид $1 - tu_x + G'(u)u_x = 0$, т.е. считать, что эти искомые специальные решения удовлетворяют суммам

$$1 - tu_x + K \left(u, u'_x, u''_{xx}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right) = 0 \quad (4.5)$$

стационарных частей симметрии Галилея (4.1) уравнения Бюргерса (уравнения КдВ) и их «автономных» симметрий

$$u_{\vartheta} = K \left(u, u'_x, u''_{xx}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right),$$

определяемых условиями $K(u, u'_x, 0, \dots, 0) = G'(w)w_1$. По крайней мере для всех многочленов $G(w)$ такие симметрии имеются (см. [30]).

В [54] применимость этого варианта правил выбора симметрий в [54] была проиллюстрирована, в частности, на примере специального решения уравнения Бюргерса (4.3), задаваемого формулой

$$u(t, x) = -2 \left[\ln \Lambda(t, x) \right]'_x, \quad \Lambda(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{1}{8} (4\lambda x - 2t\lambda^2 + \lambda^4) \right) d\lambda. \quad (4.6)$$

С помощью этого решения, впервые указанного Лайтхиллом в [56], универсальным образом (см. [17, 18, 26, 46, 48, 49]) описывается поправочное влияние малой диссипации на процессы образования одномерных ударных волн. Главный член асимптотики этого явного решения при $x^2 + t^2 \rightarrow \infty$ всюду, кроме луча $M : (x = 0, t > 0)$, есть корень кубического уравнения сборки (3.13). Как было замечено в [54], уравнение Бюргерса (4.3) также обладает симметрией, стационарная часть которой совместна с требованием, чтобы главный член асимптотики решения этой стационарной части при $x \rightarrow \pm\infty$ определялся корнем кубического уравнения (3.13): непосредственно из представления (4.6) следует факт, что это решение удовлетворяет ОДУ

$$x - tu + 4u''_{xx} - 6uu'_x + u^3 = 0,$$

один раз продифференцированная по x форма которого представляет собой стационарную часть симметрии уравнения Бюргерса вида (4.5).

Этот подход для ситуаций, когда в асимптотиках предполагаемых аналогов ФВК нелинейность доминирует над диссипацией (дисперсией), кажется более естественным, чем «линейный» подход, описанный в предыдущем разделе статьи. В пользу такой точки зрения говорят, например, результаты статей [24, 25]: использование в них подхода В. Р. Кудашева позволило описать аналог интеграла Пирси (2.1), являющийся — так же, как и его аналог из [50] — совместным решением НУШ (2.2) и ОДУ (2.3), но в асимптотике которого при $x^2 + t^2 \rightarrow \infty$ доминирует нелинейность.

Однако некритическое применение правил отбора симметрий, предложенных В. Р. Кудашевым в [54], может иногда давать сбой. Автору данной статьи это стало ясно после рассмотрения симметричных свойств специального решения

$$u(t, x) = -2 \left[\ln \Lambda(t, x) \right]'_x, \quad \Lambda(t, x) = \int_0^\infty \exp \left(\lambda x + t \lambda^2 - \frac{\lambda^3}{3} \right) d\lambda \quad (4.7)$$

уравнения Бюргерса (4.3), о котором рассказал А. М. Ильин в своем выступлении на семинаре по аналитическим методам в газовой динамике и оптимизации вычислений (САМГОП-1998, Уфа, 1998 г.). Посредством данной нелинейной специальной функции для случая модельного уравнения

$$V'_T + g(V)V'_X = \varepsilon^2 V''_{XX} \quad (4.8)$$

в главном по малому параметру ε порядке описывается процесс, соответствующий переходу слабого разрыва решения предельного к (4.8) уравнения $V'_T + g(V)V'_X = 0$ в его сильный разрыв (см. [14, 15, 59]). В [7] показано, что это же специальное решение описывает влияние малой диссипации на аналогичные процессы, описываемые различными малыми диссипативными возмущениями уравнений одномерного движения идеальной сжимаемой жидкости (h — плотность, v — скорость, $\alpha(h) = c^2(h)/h > 0$, $c(h) = (p'(h))^{1/2}$ — скорость звука, $p(h)$ — давление):

$$h'_T + (vh)'_X = 0, \quad v'_T + vv'_X + \alpha(h)h'_X = 0,$$

например, уравнений движения вязкого баротропного газа (см. [28]):

$$h'_T + (hv)'_X = 0, \quad v'_T + vv'_X + \alpha(h)h'_X = \varepsilon^4 \frac{v''_{XX}}{h}, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Специальное решение (4.7) соответствует ФВК складки: главный член $f(t, x)$ ее асимптотики при $x \rightarrow \infty$ есть корень уравнения

$$x - tf - \frac{f^2}{4} = 0. \quad (4.9)$$

Катастрофа складки зависит лишь от одного управляющего параметра (см. [9, гл. 6, §1]), которым в данном случае является переменная $x + t^2$. Поэтому в приложениях среди аналогов ФВК складки, удовлетворяющих интегрируемым уравнениям в частных производных, в основном встречаются их автомодельные решения (с управляющим параметром катастрофы в качестве автомодельной переменной).

Уравнение Бюргерса (4.3) также обладает автомодельным решением

$$u(t, x) = -2t + g(x + t^2), \quad (4.10)$$

главный член асимптотики которого при $x \rightarrow \infty$ есть корень уравнения (4.9). В самом деле, подстановка (4.10) в уравнение (4.3) дает ОДУ

$$\left(\frac{u'_x}{2} - \frac{u^2}{4} + x - tu \right)'_x = 0. \quad (4.11)$$

Это есть стационарная часть классической симметрии уравнения (4.3)

$$u_\nu = \frac{u''_{xx} - uu'_x}{2} + 1 - tu'_x = u'_t + 1 - tu'_x, \quad (4.12)$$

образуемая комбинацией стационарных частей его симметрии Галилея (4.1) и его правой части. Очевидно, уравнение (4.11) имеет решение с корнем (4.9) в качестве главного члена его асимптотики при $x \rightarrow \infty$.

Однако решение (4.7) не автомодельно.

Утверждение. Функция (4.7) есть точное решение ОДУ, определяемого стационарной частью высшей симметрии уравнения (4.3):

$$u_\mu = \left(u''_{xx} - 3\frac{uu'_x}{2} + \frac{u^3}{4} \right)'_x - 2t(u''_{xx} - uu'_x) - xu'_x - u \quad (4.13)$$

Действительно, согласно второй из формул (4.7) имеет место равенство $\Lambda''_{xx} = 2t\Lambda'_x + x\Lambda + 1$, означающее, что $u(t, x)$ удовлетворяет ОДУ

$$u''_{xx} - 3\frac{uu'_x}{2} + \frac{u^3}{4} - 2t\left(u'_x - \frac{u^2}{2} - xu\right) = -2. \quad (4.14)$$

Один раз продифференцированная по x форма ОДУ (4.14) как раз и представляет собой стационарную часть симметрии (4.13), которая есть разность между стационарной частью не зависящей от x и t высшей симметрии уравнения (4.3) (см. [30, гл. 5, §1])

$$\left(u''_{xx} - 3\frac{uu'_x}{2} + \frac{u^3}{4} \right)'_x = 0 \quad (4.15)$$

и стационарной частью его классической симметрии растяжения

$$2tu'_t + xu'_x + u = 0. \quad (4.16)$$

Подчеркнем тот факт, что среди решений ОДУ (4.14) есть и совместные решения уравнения Бюргерса (4.3) и ОДУ (4.11). Но функция (4.7) к их числу не принадлежит.

В то же время справедливость ОДУ (4.14) соответствует правилам выбора стационарных частей симметрий интегрируемых эволюционных уравнений, которые были изложены в разделе 3 данной статьи.

Применение этих правил к решению (4.3), соответствующего описываемой уравнением (4.9) катастрофе складки, сводится к следующим действиям:

- (1) исходя из вида квадратного уравнения складки $x + 2t\lambda = -3c\lambda^2$, берем интеграл

$$I = \int_S \lambda^r \exp(x\lambda + t\lambda^2 + c\lambda^3) d\lambda, \quad (4.17)$$

который, очевидно, удовлетворяет линейной части $I'_t = I''_{xx}$ уравнения Бюргерса (4.3);

- (2) из интеграла (4.17) выводим ОДУ

$$-3cI'''_{xxx} + 2tI''_{xx} + xI'_x + (1+r)I = 0, \quad (4.18)$$

которому он удовлетворяет;

- (3) исходя из известного вида симметрий уравнения Бюргерса (4.3) (см. [30, гл. 5, §1]) полагаем постоянную r равной нулю, а линейному ОДУ (4.18) ставим в соответствие его нелинейный аналог

$$-\frac{3c}{4}(4u''_{xx} - 6uu'_x + u^3)'_x + 2t(u''_{xx} - uu'_x) + xu'_x + u = 0, \quad (4.19)$$

образуемый линейной комбинацией стационарной части классической симметрии растяжения (4.16) уравнения Бюргерса (4.3) и стационарной части его не зависящей от x и t высшей симметрии (4.15);

- (4) исходя из предположения о том, что ОДУ (4.19) должно иметь решение, главный член асимптотики которого при $x \rightarrow \infty$ есть корень $f(t, x)$ уравнения складки (4.9), налагаем ограничение $c = -1/3$, которое как раз и приводит в итоге к стационарной части симметрии (4.13).

Еще два контрпримера к непосредственному использованию подхода из [54], при котором обязательно используется симметрия Галилея, дают исследованные в [5–7] совместные решения уравнения КдВ (3.9) и нелинейных ОДУ пятого порядка

$$\left(u''''_{xxxx} + \frac{5}{3}u''_{xx}u + \frac{5}{6}(u'_x)^2 + \frac{5}{18}u^3 \right)'_x \mp \frac{2u + xu'_x - 3t(u'''_{xxx} + uu'_x)}{6} = 0, \quad (4.20)$$

которые представляют собой (см. [30, гл. 5, §5.2]) комбинации стационарных частей высшей симметрии уравнения КдВ

$$u'_{\tau_5} = \left(u''''_{xxx} + \frac{5}{3} u''_{xx} u + \frac{5}{6} (u'_x)^2 + \frac{5}{18} u^3 \right)'_x$$

и его классической симметрии растяжения

$$u'_{\tau_r} = 2u + xu'_x - 3t(u'''_{xxx} + uu'_x).$$

Эти совместные решения можно рассматривать в качестве аналогов ФВК складки вида

$$I = \int_S \lambda \exp \left(x\lambda - t\lambda^3 \mp \frac{6}{5} \lambda^5 \right) d\lambda \quad (4.21)$$

(поведение таких ФВК при больших $|x|$ и $|t|$ согласно методу стационарной фазы (см. [41]) описывается в терминах корней λ^2 квадратного уравнения складки $x - 3t\lambda^2 = -6\lambda^4$), поскольку интегралы I удовлетворяют как линейной части $I'_t + I'''_{xxx} = 0$ уравнения КдВ (3.9), так и линейной части

$$\mp 6I''''_{xxxx} - 3tI'''_{xxx} + xI'_x + 2I = 0 \quad (4.22)$$

уравнения (4.20).

Замечание 3. Дополнительное основание для этой аналогии следует из изомонодромного характера совместных решений уравнения КдВ (3.9) и ОДУ (4.20) — у уравнений метода обратной задачи рассеяния

$$\Psi_x = L(\lambda, t, x)\Psi, \quad \Psi_t = Q(\lambda, t, x)\Psi,$$

где

$$L(\lambda, t, x) = \begin{pmatrix} -i\lambda & u/6 \\ -1 & i\lambda \end{pmatrix},$$

$$Q(\lambda, t, x) = \left(-4i\lambda^3 + \frac{i\lambda u}{3} - \frac{u_x}{6} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 4\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & u/6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i\lambda u_x}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -u_{xx}/6 - u^2/18 \\ u/3 & 0 \end{pmatrix},$$

имеются такие общие фундаментальные решения, которые для совместных решений уравнений (3.9), (4.20) удовлетворяют еще и линейной системе ОДУ вида

$$\Psi_\lambda = \lambda^4 A(\lambda, t, x)\Psi$$

и при $\lambda \rightarrow \infty$ в некоторых секторах комплексной плоскости имеют асимптотики

$$\Psi(t, x, \lambda) \approx \exp \left\{ -i \left(\lambda x + 4t\lambda^3 \mp \frac{96}{5} \lambda^5 + \text{const} \cdot \ln \lambda \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

схожими с подынтегральным выражением в (4.21) (см. [32]).

Как отмечено в [7], уравнение КдВ (3.9) совместно также с ОДУ

$$u'''_{xxx} + uu'_x = \pm \frac{(1 - tu'_x)}{2}, \quad (4.23)$$

представляющими собой линейные комбинации правой части уравнения КдВ и стационарной части его классической симметрии Галилея (4.1). Все решения ОДУ (4.23) с соответствующим знаком удовлетворяют также ОДУ (4.20), что не случайно: из левых частей ОДУ (4.23) левые части этих ОДУ пятого порядка получаются применением оператора рекурсии (см. [30]) $L_{KdV} = 3D_x^2 + 2u + u'_x(D_x)^{-1}$. Легко видеть также, что бездисперсионному пределу $u^2 = \pm(x - tu) + \text{const}$ первого уравнения Пенлеве

$$2u''_{xx} + u^2 = \pm(x - tu) + \text{const} \quad (4.24)$$

в главном порядке удовлетворяют корни квадратных уравнений $u^2 = \pm(x - tu)$, совпадающих с главными членами требуемых асимптотик решений уравнений КдВ (3.9) и ОДУ (4.20) при

$x \rightarrow +\infty$ или при $x \rightarrow -\infty$ в зависимости от знака в ОДУ (4.20). Однако решения первого уравнения Пенлеве имеют бесконечное число полюсов на вещественной оси (см. [3]). По этой причине для описания влияния малой дисперсии на трансформации слабых разрывов в ударные волны эти решения ОДУ (4.24) не годятся.

Замечание 4. Совместные решения уравнений КдВ (3.9) и ОДУ (4.20) можно рассматривать также в качестве своего рода дисперсионных аналогов только что описанного выше специального решения (4.7) уравнения Бюргерса (4.3). Отметим, что стационарная часть высшей симметрии (4.13) с $c = -1/3$ уравнения (4.3) из стационарной части его классической симметрии (4.12) также получается применением оператора рекурсии (см. [30]) $L_B = 2D_x - u - u'_x(D_x)^{-1}$.

Тем не менее идея, лежащая в основе предложенного в [54] подхода к выбору симметрий интегрируемых уравнений, представляется здоровой. Надо только отказаться от неперменного использования симметрии Галилея, а требуемые симметрии искать так, чтобы отбрасывание высших производных в их стационарных частях давало уравнения, которым приближенно удовлетворяют главные члены асимптотик соответствующих аналогов ФВК.

5. Выводы. Из изложенных выше симметричных свойств специальных решений НУШ (2.2), Бюргерса (4.3) и КдВ (3.9), являющихся, соответственно, аналогами ФВК (3.5), (4.17) и (4.21) становится ясно, что множеству специальных функций той или иной катастрофы, удовлетворяющих нелинейному интегрируемому уравнению, соответствует не только стационарная часть $R(x_1, \dots, x_n, W) = 0$ его какой-то конкретной (в частности, классической) симметрии. Данному множеству могут быть, в принципе, поставлены в соответствие и обыкновенные дифференциальные уравнения $L^m R(x_1, x_2, \dots, x_n, W) = 0$, определяемые всеми целочисленными (не только натуральными) степенями оператора рекурсии L для этого интегрируемого уравнения. Только что сказанное касается как «линейного», так и «бездисперсионного» варианта правил выбора симметрий. В самом деле, понятно, что наряду с каким-то конкретным линейным ОДУ его решения удовлетворяет продифференцированным и проинтегрированным следствиям данного ОДУ. Если говорить о множестве специальных решений интегрируемого уравнения, отвечающих данной катастрофе, то при использовании «линейного подхода», описанного в разделе 3, надо иметь в виду и все стационарные части симметрий, являющиеся «нелинейными» обобщениями этих следствий.

В заключение обратим внимание на то обстоятельство, что в результате кратного применения к стационарной части локальной симметрии оператора рекурсии, как правило, возникают стационарные части нелокальных симметрий, одна из которых как раз и может оказаться в итоге подходящим аналогом ФВК, в то время как среди локальных симметрий таких не найдется. Примером справедливости только что сказанного является совместное с НУШ (2.2) решение уравнения (2.15), совпадающего с стационарной частью нелокальной симметрии НУШ, которая из стационарной части его классической симметрии растяжения (3.7) получается применением оператора рекурсии (3.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. — М.: Наука, 1972.
2. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Методы возмущений в групповом анализе // Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Новейшие достижения. — 1980. — 34. — С. 85–147.
3. Барташев Д. А. О качественном поведении вещественных решений первого уравнения Пенлеве // Диффер. уравн. — 1973. — 9, № 5. — С. 942–944.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
5. Гарифуллин Р. Н. Сдвиг фазы для совместного решения уравнения КдВ и дифференциального уравнения пятого порядка // Уфим. мат. ж. — 2012. — 4, № 2. — С. 80–86.
6. Гарифуллин Р. Н. О совместном решении уравнения КдВ и дифференциального уравнения пятого порядка // Уфим. мат. ж. — 2016. — 8, № 4. — С. 53–62.

7. Гарифуллин Р. Н., Сулейманов Б. И. От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам// ЖЭТФ. — 2010. — 137, № 1. — С. 149–165.
8. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. — М.: Наука, 1980.
9. Гильмор Р. Прикладная теория катастроф. — М.: Мир, 1984.
10. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Опрокидывание простой волны в кинетике разреженной плазмы// ЖЭТФ. — 1971. — 60, № 6. — С. 2155–2174.
11. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны// ЖЭТФ. — 1973. — 65, № 2. — С. 590–604.
12. Жибер А. В. Полное описание алгебры Ли–Беклунда для уравнений генерации второй гармоники// Динамика сплошной среды. — 1980. — № 44. — С. 3–14.
13. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах// ЖЭТФ. — 1971. — 61, № 1. — С. 118–134.
14. Захаров С. В. Зарождение ударной волны в одной задаче Коши для уравнения Бюргерса// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2004. — 44, № 3. — С. 536–542.
15. Захаров С. В., Ильин А. М. От слабого разрыва к градиентной катастрофе// Мат. сб. — 2001. — 192, № 10. — С. 3–18.
16. Ибрагимов Н. Х., Шабат А. В. Уравнения Кортевега–де Фриза с групповой точки зрения// Докл. АН СССР. — 1979. — 244, № 1. — С. 57–61.
17. Ильин А. М. Задача Коши для одного квазилинейного уравнения с малым параметром// Докл. АН СССР. — 1985. — 283, № 3. — С. 530–534.
18. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1987.
19. Итс А. Р. «Изонодромные» решения уравнений нулевой кривизны// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1985. — 49, № 3. — С. 330–365.
20. Итс А. Р., Капаев А. А., Новокшенов В. Ю., Фокас А. С. Трансценденты Пенлеве: метод задачи Римана. — Москва–Ижевск: РХД, 2005.
21. Китаев А. В. Точки поворота линейных систем и двойные асимптотики трансцендентов Пенлеве// Зап. ЛОМИ. — 1991. — 187. — С. 53–74.
22. Кравцов Ю. А. Об одной модификации метода геометрической оптики// Изв. вузов. Радиофизика. — 1964. — 7, № 4. — С. 664–673.
23. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Каустики, катастрофы и волновые поля// Усп. мат. наук. — 1983. — 141, № 4. — С. 591–629.
24. Кудашев В. Р., Сулейманов Б. И. Особенности некоторых типичных процессов самопроизвольного падения интенсивности в неустойчивых средах// Письма в ЖЭТФ. — 1995. — 62, № 4. — С. 358–362.
25. Кудашев В. Р., Сулейманов Б. Малоамплитудные дисперсионные колебания на фоне приближения нелинейной геометрической оптики// Теор. мат. физ. — 1995. — 118, № 3. — С. 413–422.
26. Кудашев В. Р., Сулейманов Б. И. Влияние малой диссипации на процессы зарождения одномерных ударных волн// Прикл. мат. мех. — 2001. — 65, № 3. — С. 456–466.
27. Лукин Д. С., Палкин Е. А. Численный канонический метод в задачах теории дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. — М.: Изд-во МФТИ, 1982.
28. Маслов В. П., Мосолов П. П. Уравнения одномерного баротропного газа. — М.: Наука, 1990.
29. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
30. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.
31. Орлов А. Ю., Шульман Е. И. О дополнительных симметриях нелинейного уравнения Шредингера// Теор. мат. физ. — 1985. — 64, № 2. — С. 323–328.
32. Павленко В. А., Сулейманов Б. И. «Квантования» изонодромных гамильтоновых систем $H^{7/2+1}$ // Уфим. мат. ж. — 2017. — 9, № 4. — С. 100–110.
33. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. — Рига: Зинатне, 1977.
34. Сулейманов Б. И. Второе уравнение Пенлеве в одной задаче о нелинейных эффектах вблизи каустик// Зап. ЛОМИ. — 1991. — 187. — С. 110–128.
35. Сулейманов Б. И. О «нелинейном» обобщении специальных функций волновых катастроф, описываемых двукратными интегралами// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 5. — С. 102–106.
36. Сулейманов Б. И. О решении уравнения Кортевега–де Фриза, возникающего вблизи точки опрокидывания в задачах с малой дисперсией// Письма в ЖЭТФ. — 1993. — 58, № 5. — С. 606–610.

37. Сулейманов Б. И. О влиянии малой нелинейности на высокочастотные асимптотики при перестройках каустик// Теор. мат. физ. — 1994. — 98, № 2. — С. 198–206.
38. Сулейманов Б. И. Возникновение бездиссипативных ударных волн и «непертурбативная» квантовая теория гравитации// ЖЭТФ. — 1994. — 105, № 5. — С. 1089–1094.
39. Сулейманов Б. И. Влияние малой дисперсии на самофокусировку в пространственно одномерном случае// Письма в ЖЭТФ. — 2017. — 106, № 6. — С. 375–380.
40. Сулейманов Б. И., Хабибуллин И. Т. Симметрии уравнения Кадомцева—Петвиашвили, изомонодромные деформации и «нелинейные» обобщения специальных функций волновых катастроф// Теор. мат. физ. — 1993. — 97, № 2. — С. 213–226.
41. Федорюк М. В. Асимптотика, интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987.
42. Bertola M., Tovbis A. Universality for the focusing nonlinear Schrödinger equation at the gradient catastrophe point: Rational breathers and poles of the tritronquée solution to Painlevé I// Commun. Pure Appl. Math. — 2013. — 66. — P. 678–752.
43. Clayes T. Pole-free solutions of the first Painlevé hierarchy and non-generic critical behavior for the KdV equation// Phys. D: Nonlin. Phenomena. — 2011. — 241, № 23–24. — P. 2226–2236.
44. Clayes T., Vanlessen M. The existence of a real pole-free solution of the fourth order analogue of the Painlevé I equation// Nonlinearity. — 2007. — 20, № 5. — P. 1163–1184.
45. Dubrovin B. On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws, II: Universality of critical behaviour// Commun. Math. Phys. — 2006. — 267. — P. 117–139.
46. Dubrovin B., Elaeva M. On the critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity// Russ. J. Math. Phys. — 19, № 4. — P. 449–460.
47. Dubrovin B., Grava T., Klein C. On universality of critical behavior in the focusing nonlinear Schrödinger equation, elliptic umbilic catastrophe and the tritronquée solution to the Painlevé-I equation// J. Nonlin. Sci. — 2009. — 19, № 1. — P. 57–94.
48. Haberman R. Note of the initial formation of shocks// SIAM J. Appl. Math. — 1986. — 6, № 3. — P. 16–19.
49. Haberman R. The initial formation and structure of two dimensional diffusive shock waves// Wave Motion. — 1986. — 8. — P. 267–276.
50. Haberman R., Sun Ren-ji. Nonlinear cusped caustics for dispersive waves// Stud. Appl. Math. — 1985. — 72, № 1. — P. 1–37.
51. Haberman R., Sun Ren-ji. Focusing at a penumbral caustic// in: Proc. 5th Int. Conf. on Boundary and Interior Layers. — Shanghai, 1988. — P. 339–344.
52. Hardy G. H. On the asymptotic value of certain integrals// Mess. Math. — 1917. — 46. — P. 70–73.
53. Kitaev A. V. Caustics in 1+1 integrable systems// J. Math. Phys. — 1994. — 35, № 6. — P. 2934–2954.
54. Kudashev V. R. KdV shock-like waves as invariant solutions of KdV equation symmetry, arXiv:math-ph/9404002v1.
55. Langer R. E. On the asymptotic solutions of ordinary differential equations with an application to the Bessel functions of large order// Trans. Am. Math. Soc. — 1931. — 38, № 1. — P. 23–64.
56. Lighthill M. J. Viscosity effects in sound waves of finite amplitude// in: Surveys in Mechanics (Batchelor G. K., Davies R. M., eds.). — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1956. — P. 250–351.
57. Ludwig D. Uniform asymptotic expansions at a caustic// Commun. Pure Appl. Math. — 1966. — 19, № 2. — P. 215–250.
58. Ludwig D. Uniform asymptotic expansion of the field scattering by an convex object at high frequencies// Commun. Pure Appl. Math. — 1966. — 20, № 1. — P. 103–138.
59. Zaharov S. V., Il'in A. M. On the influence of small dissipation on the evolution of weak discontinuities// Funct. Differ. Equations. — 2001. — 8, № 3–4. — P. 257–271.

Сулейманов Булат Ирекович

Институт математики с вычислительным центром,

Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия

E-mail: bisul@mail.ru



ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА И АСИМПТОТИКА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ, БЛИЗКИХ К ГАМИЛЬТОНОВЫМ

© 2019 г. О. А. СУЛТАНОВ

Аннотация. Рассматривается нелинейная неавтономная система двух обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющая устойчивую неподвижную точку. Предполагается, что негамильтонова часть системы стремится к нулю на бесконечности. Исследуется асимптотика двухпараметрического семейства решений, стартующих из окрестности устойчивого равновесия. Предлагаемая конструкция асимптотических решений основана на методе усреднения и переходе в исходной системе к новым зависимым переменным, одну из которых играет угол предельной гамильтоновой системы, а другую — функция Ляпунова для полной системы.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, асимптотика, усреднение, функция Ляпунова.

LYAPUNOV FUNCTIONS AND ASYMPTOTICS AT INFINITY OF SOLUTIONS OF EQUATIONS THAT ARE CLOSE TO HAMILTONIAN EQUATIONS

© 2019 О. А. SULTANOV

ABSTRACT. We consider a nonlinear nonautonomous system of two ordinary differential equations with a stable fixed point and assume that the non-Hamiltonian part of the system tends to zero at infinity. We examine the asymptotic behavior of a two-parameter family of solutions that start from a neighborhood of the stable equilibrium. The proposed construction of asymptotic solutions is based on the averaging method and the transition in the original system to new dependent variables, one of which is the angle of the limit Hamiltonian system, and the other is the Lyapunov function for the complete system.

Keywords and phrases: nonlinear differential equation, asymptotics, averaging, Lyapunov function.

AMS Subject Classification: 34E05, 34D05, 34D20

1. Введение. В настоящей работе исследуется асимптотика решений неавтономной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \partial_y H(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = -\partial_x H(x, y, t) + F(x, y, t). \quad (1)$$

Функции $H(x, y, t)$ и $F(x, y, t)$, заданные при $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $t > 0$, предполагаются бесконечно дифференцируемыми. Специфика задачи определяется поведением гамильтониана $H(x, y, t)$ усеченной системы и возмущения $F(x, y, t)$ в асимптотике на бесконечности:

$$H(x, y, t) = H_0(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} t^{-k/q} H_k(x, y), \quad F(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{-k/q} F_k(x, y), \quad t \rightarrow \infty, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Предполагается, что система (1) имеет тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$, которое для предельной при $t \rightarrow \infty$ гамильтоновой системы является неподвижной точкой типа центр общего

положения. Это накладывает определенные ограничения на поведение коэффициентов уравнения в окрестности неподвижной точки. Далее будем предполагать, что

$$H_0(x, y) = \frac{r^2}{2} + O(r^3), \quad H_k(x, y) = O(r^2) \text{ для } k \neq 0, \quad F_k(x, y) = O(r) \text{ при } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае свойство устойчивости тривиального решения зависит от структуры негамильтоновых членов. Для системы (1) также будем предполагать наличие бесконечно дифференцируемой функции Ляпунова $V(x, y, t)$, заданной при $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $t > 0$, и удовлетворяющей оценкам

$$V(x, y, t) = r^2 + O(r^3) + O(t^{-1/q})O(r^2),$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x V \partial_y H + \partial_y V (-\partial_x H + F) + \partial_t V = -\gamma t^{-p/q} [r^2 + O(r^3)] + t^{-(p+1)/q} O(r^2) \quad (2)$$

при $r \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ с параметрами $\gamma \neq 0$ и $p \in \mathbb{N}$. Наличие такой функции Ляпунова позволяет сделать вывод об устойчивости тривиального решения в системе (1). Например, при $\gamma > 0$ тривиальное решение устойчиво, причем если $p/q \leq 1$, то устойчивость асимптотическая; при $\gamma < 0$ тривиальное решение неустойчиво. Далее будем считать, что $\gamma > 0$. В этом случае для любого $0 < \varepsilon < \min(1, \gamma)$ существуют такие $r_0 > 0$, $t_0 > 0$, что в области $\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : r < r_0, t > t_0\}$ для функции $V(x, y, t)$ справедливы неравенства

$$(1 - \varepsilon)r^2 \leq V(x, y, t) \leq (1 + \varepsilon)r^2, \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} \leq -\frac{\gamma - \varepsilon}{1 + \varepsilon} t^{-p/q} V.$$

Интегрируя последнее неравенство, нетрудно вывести грубую оценку для амплитуды решения системы (1) при $t > t_0$:

$$\begin{aligned} [x^2(t) + y^2(t)]^{1/2} &\leq C_0 \exp\left(-\frac{\tilde{\gamma} t^{1-p/q}}{2(1-p/q)}\right) && \text{при } p < q, \\ [x^2(t) + y^2(t)]^{1/2} &\leq C_0 t^{-\tilde{\gamma}/2} && \text{при } p = q, \\ [x^2(t) + y^2(t)]^{1/2} &\leq C_0 && \text{при } p > q, \end{aligned} \quad (3)$$

с константой $C_0 > 0$, зависящей от r_0 и t_0 и параметром $\tilde{\gamma} = (\gamma - \varepsilon)/(1 + \varepsilon) > 0$. Оценки для фазы решений отсюда не извлекаются. В настоящей работе обсуждается вопрос об уточнении асимптотики для двухпараметрического семейства решений при $t \rightarrow \infty$, стартующих из некоторой окрестности неподвижной точки.

Заметим, что требование существования функции Ляпунова с оценками (2) накладывает определенные ограничения на возмущение $F(x, y, t)$. Примеры таких неавтономных возмущений гамильтоновых систем рассматривались в [10, 14], где был также описан один из возможных алгоритмов построения соответствующих функций Ляпунова. Для близких задач с малым параметром вопрос построения функций Ляпунова обсуждается в [13]. Кратко опишем способ построения такой функции для системы (1). Будем искать функцию Ляпунова в виде

$$V(x, y, t) = 2H(x, y, t) + \sum_{k=1}^p t^{-k/q} v_k(x, y),$$

где функции $v_1(x, y), \dots, v_p(x, y)$ удовлетворяют следующей системе рекуррентных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\partial_y H_0 \partial_x v_k - \partial_x H_0 \partial_y v_k = G_k(x, y), \quad k = 1, \dots, p. \quad (4)$$

Для каждого $1 \leq k \leq p-1$ правая часть $G_k(x, y)$ определяются функциями $v_1, \dots, v_{k-1}$, например,

$$G_1(x, y) = -2F_1 \partial_y H_0, \quad G_2(x, y) = -2F_2 \partial_y H_0 - 2F_1 \partial_y H_1 - \partial_y v_1 F_1 - [\partial_y H_1 \partial_x v_1 - \partial_x H_1 \partial_y v_1].$$

Если для некоторого $p \in \mathbb{N}$ система (4) разрешима в классе функций $v_k(x, y) = O(r^2)$ при таких $r \rightarrow 0$, что $G_p(x, y) = -\gamma r^2 + O(r^3)$ при $r \rightarrow 0$, то функция Ляпунова считается построенной. Отметим, что условия разрешимости системы (4) в настоящей работе не обсуждаются.

В качестве примера рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta t^{-1} \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (5)$$

которое может быть записано в форме системы (1) с $q = 1$:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - \beta t^{-1}y. \quad (6)$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова возьмем $u(x, y, t) = x^2 + y^2 + \beta t^{-1}xy$. Ее полная производная по t в силу системы (6) имеет вид

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{(6)} = -\beta t^{-1}(x^2 + y^2) - \beta(1 + \beta)t^{-2}xy.$$

Видно, что функция $u(x, y, t)$ обладает оценками (2) с $p = q = 1$ и $\gamma = \beta$, при этом знак параметра β определяет свойство устойчивости тривиального решения системы (6). С другой стороны, для решений уравнения (5) легко выписывается асимптотика на бесконечности с использованием ВКБ-приближений (см. [12]):

$$x(t) = a_- x_-(t) + a_+ x_+(t), \quad x_{\pm}(t) = t^{-\beta/2} \exp(\pm it) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^{-k} x_k^{\pm} \right], \quad t \rightarrow \infty;$$

здесь $a_{\pm}$ — произвольные постоянные, а постоянные коэффициенты $x_k^{\pm}$ асимптотических рядов определяются однозначно. Последние оценки согласуются с (3), при этом являются более точными, поскольку позволяют уловить зависимость асимптотики решения от двух произвольных постоянных интегрирования:

$$x(t; a, \varphi) = at^{-\beta/2} [\cos(\varphi + t) + O(t^{-1})], \quad a, \varphi = \text{const}.$$

Для нелинейных дифференциальных уравнений ситуация оказывается сложнее: проблемы возникают как при выборе главного члена асимптотического анзатца, так и при обосновании построенных асимптотик. Наиболее характерная форма асимптотических разложений для решений нелинейных систем имеет вид рядов с постоянными коэффициентами по степеням и логарифмам независимой переменной t . Построение и обоснование таких решений обсуждается в [2, 7–9]. В настоящей работе исследуются немного другие решения, в асимптотических рядах которых содержатся осциллирующие коэффициенты по t . Ключевые результаты, связанные с исследованием таких решений, содержатся в [4, 6], где на основе обобщения метода усреднения Крылова—Боголюбова—Кузмака (см. [1]) был предложен алгоритм построения асимптотических разложений для класса систем, близких к гамильтоновым. Однако несмотря на общность алгоритма конструктивное построение асимптотических рядов оказывается возможным только в частных случаях при конкретных функциях $H(x, y, t)$ и $F(x, y, t)$. В настоящей работе будет показано, что вместо явного задания правых частей системы (1) достаточно ограничиться предположением о наличии подходящей функции Ляпунова, обладающей оценками (2), причем эта функция может быть эффективно использована при построении асимптотики решения.

2. Конструкция асимптотического решения. На первом шаге в системе (1) необходимо перейти к новым переменным, связанным с общим решением предельной гамильтоновой системы:

$$\frac{dx}{dt} = \partial_y H_0(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -\partial_x H_0(x, y). \quad (7)$$

Из свойств гамильтониана $H_0(x, y)$ следует, что на фазовой плоскости линии уровня гамильтониана $H_0(x, y) = h$ определяют семейство замкнутых кривых, параметризованных значением $h \in (0, h_0)$, $h_0 = \text{const} > 0$. Каждой замкнутой кривой соответствует периодическое решение $x_0(t, h)$, $y_0(t, h)$ системы (7) с периодом $T(h) = 2\pi/\omega(h)$ ($\omega(h) = 1 + O(h)$ при $h \rightarrow 0$), зависящим от траектории. Определим вспомогательные 2π -периодические функции

$$\xi(\sigma, h) = x_0\left(\frac{\sigma}{\omega(h)}, h\right), \quad \eta(\sigma, h) = y_0\left(\frac{\sigma}{\omega(h)}, h\right),$$

удовлетворяющие системе

$$\omega(h) \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \partial_\eta H_0(\xi, \eta), \quad \omega(h) \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = -\partial_\xi H_0(\xi, \eta).$$

Эти функции будем использовать для перехода в системе (1) к новым переменным:

$$x(t) = \xi(\sigma(t), h(t)), \quad y(t) = \eta(\sigma(t), h(t)). \quad (8)$$

Отметим, что якобиан такого преобразования отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \partial_h \eta & \partial_h \xi \\ \partial_\sigma \eta & \partial_\sigma \xi \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega(h)} \neq 0.$$

В новых переменных $h(t)$, $\sigma(t)$ исходная система (1) принимает вид

$$\frac{dh}{dt} = -\omega(h) [\partial_\sigma \tilde{H}(\sigma, h, t) - \partial_\sigma \xi \tilde{F}(\sigma, h, t)], \quad \frac{d\sigma}{dt} = \omega(h) [\partial_h \tilde{H}(\sigma, h, t) - \partial_h \xi \tilde{F}(\sigma, h, t)], \quad (9)$$

где $\tilde{F}(\sigma, h, t) \equiv F(\xi(\sigma, h), \eta(\sigma, h), t)$, $\tilde{H}(\sigma, h, t) \equiv H(\xi(\sigma, h), \eta(\sigma, h), t)$ являются 2π -периодическими функциями по σ . Подход, изложенный в [4], предполагает асимптотическое интегрирование системы (9) в переменных (h, σ) методом усреднения. В настоящей работе этот подход несколько модифицируется с использованием функции Ляпунова.

На следующем шаге введем новую независимую переменную $v(t)$, связанную с $h(t)$ и $\sigma(t)$ через функцию Ляпунова:

$$v(t) = \tilde{V}(\sigma(t), h(t), t), \quad (10)$$

где $\tilde{V}(\sigma, h, t) \equiv V(\xi(\sigma, h), \eta(\sigma, h), t) - 2\pi$ -периодическая функция по σ . При этом оценки (2) для функции Ляпунова в новых переменных переписываются в следующем виде:

$$\tilde{V} = 2[h + O(t^{-1/q})O(h)], \quad \left. \frac{d\tilde{V}}{dt} \right|_{(1)} = -2\gamma t^{-p/q} [h + O(h^{3/2}) + O(t^{-1/q})O(h)]$$

при $t > t_0$, $h < h_0$ и любом $\sigma \in \mathbb{R}$. Последние оценки указывают на то, что преобразование (10) обратимо, $\partial_h \tilde{V} \neq 0$ при $t > t_0$, $h < h_0$ и любом $\sigma \in \mathbb{R}$. В новых переменных система (9) приобретает вид

$$\frac{dv}{dt} = -\partial_\sigma Q(\sigma, v, t) + R(\sigma, v, t), \quad \frac{d\sigma}{dt} = \partial_v Q(\sigma, v, t), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} Q(\sigma, v, t) &= \int U(\sigma, v, t) dv, \quad U(\sigma, \tilde{V}(\sigma, h, t), t) \equiv \omega(h) [\partial_h \tilde{H}(\sigma, h, t) - \partial_h \xi(\sigma, h) \tilde{F}(\sigma, h, t)], \\ R(\sigma, v, t) &= W(\sigma, v, t) + \partial_\sigma Q(\sigma, v, t), \\ W(\sigma, \tilde{V}(\sigma, h, t), t) &\equiv [\partial_\xi V \partial_\eta H + \partial_\eta V (-\partial_\xi H + F) + \partial_t V](\xi(\sigma, h), \eta(\sigma, h), t). \end{aligned}$$

При этом функции $W(\sigma, v, t)$ и $U(\sigma, v, t)$ имеют следующую асимптотику при $t \rightarrow \infty$:

$$W(\sigma, v, t) = \sum_{k=p}^{\infty} t^{-k/q} w_k(\sigma, v), \quad U(\sigma, v, t) = u_0(v) + \sum_{k=1}^{\infty} t^{-k/q} u_k(\sigma, v),$$

где $w_k(\sigma, v)$ и $u_k(\sigma, v)$ являются 2π -периодическими по σ ,

$$w_p(\sigma, v) = -\gamma v + O(v^{3/2}), \quad u_0(v) = 1 + \frac{1}{2} \omega'(0) v + O(v^{3/2}) \quad \text{при } v \rightarrow 0.$$

Асимптотическое решение системы (11) будем строить методом, предложенным в [4]. В конструкции решения $v(t) = \hat{v}(t) + \vartheta(\sigma, \hat{v}(t), t)$ будем выделять среднее значение и осциллирующую часть с нулевым средним:

$$\langle \vartheta(\sigma, \hat{v}, t) \rangle_\sigma := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vartheta(\sigma, \hat{v}, t) d\sigma \equiv 0.$$

Функцию $\hat{v}(t)$ будем определять из усредненного уравнения:

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \left\langle R(\sigma, \hat{v} + \vartheta(\sigma, \hat{v}, t), t) \right\rangle_{\sigma} = \left\langle W(\sigma, \hat{v} + \vartheta(\sigma, \hat{v}, t), t) \right\rangle_{\sigma}; \quad (12)$$

тогда уравнение на $\vartheta(\sigma, \hat{v}, t)$ будет иметь вид

$$\partial_{\sigma} Q(\sigma, \hat{v} + \vartheta, t) + \partial_v Q(\sigma, \hat{v} + \vartheta, t) \partial_{\sigma} \vartheta + \partial_t \vartheta = R(\sigma, \hat{v} + \vartheta, t) - [1 + \partial_{\hat{v}} \vartheta] \left\langle R(\sigma, \hat{v} + \vartheta(\sigma, \hat{v}, t), t) \right\rangle_{\sigma}.$$

Последнее уравнение можно проинтегрировать по σ , выбирая константы в неопределенных интегралах таким образом, чтобы сохранялось нулевое среднее значение:

$$\begin{aligned} Q(\sigma, \hat{v} + \vartheta(\sigma, \hat{v}, t), t) - \left\langle Q(\sigma, \hat{v} + \vartheta(\sigma, \hat{v}, t), t) \right\rangle_{\sigma} + \partial_t \int \vartheta(\sigma, \hat{v}, t) d\sigma = \\ = \int \left[W(\sigma, \hat{v} + \vartheta, t) - \left\langle W(\sigma, \hat{v} + \vartheta(\sigma, \hat{v}, t), t) \right\rangle_{\sigma} \right] d\sigma - \\ - \left\langle W(\sigma, \hat{v} + \vartheta(\sigma, \hat{v}, t), t) \right\rangle_{\sigma} \partial_{\hat{v}} \int \vartheta(\sigma, \hat{v}, t) d\sigma. \end{aligned} \quad (13)$$

Асимптотика для $\vartheta(\sigma, \hat{v}, t)$ строится в виде степенного ряда:

$$\vartheta(\sigma, \hat{v}, t) = \sum_{k=p}^{\infty} t^{-k/q} \vartheta_k(\sigma, \hat{v}). \quad (14)$$

Подстановка ряда в (13) и группировка слагаемых при одинаковых степенях t приводит к системе рекуррентных уравнений:

$$u_0(\hat{v}) \vartheta_k(\sigma, \hat{v}) = \Lambda_k(\sigma, \hat{v}), \quad k = p, p+1, \dots$$

При этом каждая функция $\Lambda_k(\sigma, \hat{v})$ зависит только от младших членов разложения $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{k-1}$, причем

$$\left\langle \Lambda_k(\sigma, \hat{v}) \right\rangle_{\sigma} = 0.$$

В случае $p = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\sigma, \hat{v}) &= \int \left[w_1(\sigma, \hat{v}) - \left\langle w_1(\sigma, \hat{v}) \right\rangle_{\sigma} \right] d\sigma + \left\langle q_1(\sigma, \hat{v}) \right\rangle_{\sigma} - q_1(\sigma, \hat{v}), \\ \Lambda_2(\sigma, \hat{v}) &= \int \left[w_2(\sigma, \hat{v}) - \left\langle w_2(\sigma, \hat{v}) \right\rangle_{\sigma} + \partial_v w_1(\sigma, \hat{v}) \vartheta_1(\sigma, \hat{v}) - \left\langle \partial_v w_1(\sigma, \hat{v}) \vartheta_1(\sigma, \hat{v}) \right\rangle_{\sigma} \right] d\sigma + \\ &+ \left\langle q_2(\sigma, \hat{v}) \right\rangle_{\sigma} - q_2(\sigma, \hat{v}) + \left\langle u_1(\sigma, \hat{v}) \vartheta_1(\sigma, \hat{v}) \right\rangle_{\sigma} - u_1(\sigma, \hat{v}) \vartheta_1(\sigma, \hat{v}) - \\ &- \frac{u'_0(\hat{v})}{2} \left(\vartheta^2(\sigma, \hat{v}) - \left\langle \vartheta^2(\sigma, \hat{v}) \right\rangle_{\sigma} \right) - \left\langle w_1(\sigma, \hat{v}) \right\rangle_{\sigma} \int \partial_v \vartheta_1(\sigma, \hat{v}) d\sigma, \end{aligned}$$

где

$$q_k(\sigma, v) = \int u_k(\sigma, v) dv.$$

Таким образом, все коэффициенты ϑ_k определяются однозначно в классе 2π -периодических функций по σ с нулевым средним $\left\langle \vartheta_k(\sigma, \hat{v}) \right\rangle_{\sigma} = 0$.

Следующий этап состоит в асимптотическом интегрировании уравнения для угла σ . Решение ищется в виде $\sigma(t) = s(t) + \psi(s(t), \hat{v}(t), t)$, где

$$\frac{ds}{dt} = \left\langle \partial_v Q \left(s + \psi(s, \hat{v}, t), \hat{v} + \vartheta(s + \psi(s, \hat{v}, t), \hat{v}, t), t \right) \right\rangle_s, \quad (15)$$

а функция $\psi(s, \hat{v}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} (\partial_s \psi + 1) \left\langle \partial_v Q \left(s + \psi(s, \hat{v}, t), \hat{v} + \vartheta(s + \psi(s, \hat{v}, t), \hat{v}, t), t \right) \right\rangle_s + \partial_t \psi = \\ = \partial_v Q \left(s + \psi(s, \hat{v}, t), \hat{v} + \vartheta(s + \psi(s, \hat{v}, t), \hat{v}, t), t \right) - \partial_{\hat{v}} \psi \left\langle W(\sigma, \hat{v} + \vartheta(\sigma, \hat{v}, t), t) \right\rangle_{\sigma}, \end{aligned} \quad (16)$$

которое дополняется условием $\langle \psi(s, \hat{v}, t) \rangle_s = 0$. Асимптотическое решение для $\psi(s, \hat{v}, t)$ будем искать в виде степенного ряда:

$$\psi(s, \hat{v}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{-k/q} \psi_k(s, \hat{v}). \quad (17)$$

Подстановка ряда в (16) и группировка слагаемых при одинаковых степенях t приводит к системе рекуррентных дифференциальных уравнений:

$$u_0(\hat{v}) \partial_s \psi_k(s, \hat{v}) = \Omega_k(s, \hat{v}) - \langle \Omega_k(s, \hat{v}) \rangle_s, \quad k = 1, 2, \dots,$$

причем каждая функция $\Omega_k(s, \hat{v})$ содержит только младшие члены разложения $\psi_1, \dots, \psi_{k-1}$. Например, для $p = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \Omega_1(s, \hat{v}) &= u_1(s, \hat{v}) + u'_0(\hat{v}) \vartheta_1(s, \hat{v}), \\ \Omega_2(s, \hat{v}) &= u_2(s, \hat{v}) + u'_0(\hat{v}) (\vartheta_2(s, \hat{v}) + \partial_s \vartheta_1(s, \hat{v}) \psi_1(s, \hat{v})) + \frac{u''_0(\hat{v})}{2} \vartheta_1^2(s, \hat{v}) + \\ &+ \partial_v u_1(s, \hat{v}) \vartheta_1(s, \hat{v}) + \partial_s u_1(s, \hat{v}) \psi_1(s, \hat{v}) - \\ &- \partial_s \psi_1(s, \hat{v}) \langle u'_0(\hat{v}) \vartheta_1(s, \hat{v}) + u_1(s, \hat{v}) \rangle_s - \partial_v \psi_1(s, \hat{v}) \langle w_1(\sigma, \hat{v}) \rangle_\sigma. \end{aligned}$$

Коэффициенты ψ_k определяются однозначно в классе 2π -периодических функций по s с нулевым средним $\langle \psi_k(s, \hat{v}) \rangle_s = 0$.

На последнем шаге интегрируются усредненные уравнения (12) и (15). Заметим, что свойство устойчивости тривиального решения в исходной системе дает ценную априорную информацию о глобальном поведении функции $\hat{v}(t)$ с начальными данными при $t = t_0$ из окрестности нуля. Например, в случае асимптотической устойчивости имеем $v(t) \rightarrow 0$ при $t > t_0$ и $v(t_0) \leq v_0$. В случае, когда асимптотической устойчивости нет, $v(t)$ не обязано стремиться к нулю на бесконечности, но должно оставаться в некоторой окрестности нуля, диаметр которой определяется выбором начальной точки. Поэтому при интегрировании усредненного уравнения можно использовать асимптотику функции $W(\sigma, v, t)$ при $v \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$:

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = -\gamma t^{-p/q} [\hat{v} + O(\hat{v}^{3/2})] [1 + O(t^{-1/q})].$$

Отсюда, в частности, извлекается главный член асимптотики $\hat{v}(t)$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \hat{v}(t) &= v_0 \exp \left(-\frac{\gamma t^{1-p/q}}{1-p/q} \right) [1 + o(1)] && \text{при } p < q, \\ \hat{v}(t) &= v_0 t^{-\gamma} [1 + o(1)] && \text{при } p = q, \\ \hat{v}(t) &= v_0 [1 + o(1)] && \text{при } p > q. \end{aligned}$$

Асимптотическое разложение в форме ряда по степеням t с постоянными коэффициентами может быть построено в частных случаях, например, при $p = q$, $\gamma \in \mathbb{Q}$. В общем случае, структура полного асимптотического разложения требует уточнения данных системы.

Усредненное уравнение (15) для угла интегрируется тривиально:

$$s(t) = \sigma_0 + \int \left\langle \partial_v Q \left(s + \psi(s, \hat{v}(t), t), \hat{v}(t) + \vartheta(s + \psi(s, \hat{v}(t), t), \hat{v}(t), t), t) \right) \right\rangle_s dt,$$

параметр σ_0 играет роль константы интегрирования. Асимптотика для $s(t)$ при $t \rightarrow \infty$ определяется разложением для $\hat{v}$, ϑ и ψ при $t \rightarrow \infty$. Например, при $p = q$, $\gamma = m/q$, $m \in \mathbb{N}$ имеет место следующее разложение:

$$s(t) = \sigma_0 + s_{-1}(v_0) \log t + t + \sum_{k=1}^{\infty} t^{1-k/q} s_k(v_0), \quad t \rightarrow \infty, \quad s_k(v_0) = \text{const}.$$

В случае $p = q = 1$ и $\gamma = 1$ имеем $s_{-1} = \omega'(0)v_0/2$.

Предложение 1. Асимптотическое решение системы (11) при $t \rightarrow \infty$ представимо в виде

$$v(t) = \hat{v}(t) + \vartheta(\sigma(t), \hat{v}(t), t), \quad \sigma(t) = s(t) + \psi(s(t), \hat{v}(t), t),$$

где $\hat{v}(t)$ и $s(t)$ являются решениями усредненных уравнений (12) и (15) соответственно, а функции $\vartheta(\sigma, \hat{v}, t)$ и $\psi(s, \hat{v}, t)$, удовлетворяющие уравнениям (13) и (16), имеют вид (14) и (17) с такими периодическими коэффициентами $\vartheta_k(\sigma, \hat{v})$ и $\psi_k(s, \hat{v})$, что

$$\langle \vartheta_k(\sigma, \hat{v}) \rangle_\sigma = 0, \quad \langle \psi_k(s, \hat{v}) \rangle_s = 0.$$

Формулы преобразований зависимых переменных (8) и (10) позволяют восстановить асимптотику решения исходной системы (1). В частности, при $p = q$, $\gamma = m/q$, $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$x(t; a, \varphi) = at^{-\gamma/2} [\cos \Phi(t; a, \varphi) + O(t^{-1/q})], \quad y(t; a, \varphi) = -at^{-\gamma/2} [\sin \Phi(t; a, \varphi) + O(t^{-1/q})],$$

$$\Phi(t; a, \varphi) = \varphi + c_{-1}(a) \log t + t + \sum_{k=1}^{q-1} t^{k/q} c_k(a)$$

при $t \rightarrow \infty$, где a, φ — произвольные числовые параметры, $c_k(a) = \text{const}$.

Обоснование асимптотик, построенных выше, проводится так же, как в [4].

3. Примеры. Для иллюстрации предложенного метода рассмотрим несколько примеров, которые либо имеют вид (1), либо сводятся к нему после простейших преобразований.

3.1. Уравнение Пенлеве-I

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = 6u^2 - 6z$$

при $z > 0$ с помощью замены переменных $\tau = 4z^{5/4}/5$, $u(z) = \sqrt{z} q(\tau)$ сводится к системе

$$\frac{dq}{d\tau} = p, \quad \frac{dp}{d\tau} = 6q^2 - 6 - \tau^{-1}p + \tau^{-2} \frac{4}{25}q, \quad (18)$$

которая не имеет тривиального решения. В то же время система (18) имеет два частных решения со степенной асимптотикой на бесконечности:

$$q_*(\tau) = q_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \tau^{-k} q_k, \quad p_*(\tau) = \sum_{k=3}^{\infty} \tau^{-k} p_k, \quad \tau \rightarrow \infty,$$

$$q_0 = \pm 1, \quad q_2 = -\frac{1}{75}, \quad q_3 = 0, \quad q_4 = \mp \frac{49}{11250}, \quad p_3 = \frac{2}{75}, \quad p_4 = 0, \quad p_5 = \pm \frac{98}{56280}, \quad \dots$$

Используя эти решения, выполним в системе (18) замену переменных

$$q(\tau) = q_*(\tau) + \alpha x(t), \quad p(\tau) = p_*(\tau) + y(t), \quad \tau = \alpha t, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Для новых функций $x(t)$ и $y(t)$ система

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = xq_*(\alpha t) + \frac{\alpha x^2}{2} - t^{-1}y + t^{-2} \frac{4}{25}x \quad (19)$$

имеет неподвижную точку $(0, 0)$. При этом для решения $q_*(\tau)$ с $q_0 = 1$ эта точка оказывается неустойчивой, что вытекает из анализа линеаризованной автономной системы. Для другого частного решения, определяемого выбором $q_0 = -1$, система (19) принимает вид (1), где

$$H(x, y, t) \equiv \frac{y^2}{2} - q_*(\alpha t) \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha x^3}{6} - t^{-2} \frac{2x^2}{25} = \frac{r^2}{2} + O(r^3) + O(t^{-1})O(r^2), \quad r \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

и $F(x, y, t) \equiv -t^{-1}y$. В этом случае тривиальное решение является асимптотически устойчивым, функция Ляпунова $V(x, y, t) = 2H(x, y, t) + t^{-1}xy$ обладает оценками (2) с $p = q = 1$ и $\gamma = 1$:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(19)} = -t^{-1} [r^2 + O(r^3)] [1 + O(t^{-1})].$$

Поэтому для системы (19) с $q_0 = -1$ применима конструкция предыдущего раздела для асимптотики двухпараметрического семейства решений:

$$x(t; \tilde{a}, \tilde{\varphi}) = \tilde{a}t^{-1/2} \cos \left(\tilde{\varphi} + \tilde{c}(a) \log t + t \right) + O(t^{-3/2}), \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\tilde{a}, \tilde{\varphi}$ — произвольные константы, $\tilde{c}(\tilde{a}) = \text{const}$. Отсюда с учетом замены переменных извлекается асимптотика решения уравнения Пенлеве-I:

$$u(z; a, \varphi) = -\sqrt{z} + az^{-1/8} \cos \left(\varphi + c(a) \log z + \frac{8\sqrt{3}}{5} z^{5/4} \right) + O(z^{-11/8}), \quad z \rightarrow \infty.$$

3.2. Уравнение Пенлеве-II

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = 2u^3 - 2zu + \frac{3\nu}{2}, \quad z > 0, \quad \nu = \text{const},$$

после замены переменных $u(z) = \sqrt{z}q(\tau)$, $\tau = 2z^{3/2}3$ переписывается в виде системы двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq}{d\tau} = p, \quad \frac{dp}{d\tau} = -2q + 2q^3 + \tau^{-1}(\nu - p) + \tau^{-2}\frac{q}{9}, \quad (20)$$

которая не имеет неподвижных точек. Вместо них будем рассматривать частные решения системы (20), определяемые специальной асимптотикой на бесконечности:

$$q_*(\tau) = q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} q_k, \quad p_*(\tau) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} p_k, \quad \tau \rightarrow \infty,$$

$$q_0(q_0^2 - 1) = 0, \quad p_0 = 0, \quad q_1 = \frac{\nu}{2 - 6q_0^2}, \quad p_1 = 0, \quad q_2 = \frac{q_0(1 + 54q_1^2)}{9(2 - 6q_0^2)}, \quad p_2 = -q_1, \quad \dots$$

На основе этих решений сделаем замену переменных

$$q(\tau) = q_*(\tau) + \alpha x(t), \quad p(\tau) = p_*(\tau) + y(t), \quad \tau = \alpha t, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

в системе (20). Тогда преобразованная система

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -(1 - 3q_*^2(\alpha t))x + \frac{3x^2}{\sqrt{2}}q_*(\alpha t) + \frac{x^3}{2} - t^{-1}y + t^{-2}x \quad (21)$$

для новых неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$ будет обладать тривиальным решением $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$. В случаях, соответствующих $q_0 = \pm 1$, тривиальное решение оказывается неустойчивым, что гарантируется анализом линеаризованной системы. Для другого значения $q_0 = 0$ система (21) принимает вид (1), где

$$H(x, y, t) \equiv \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}(1 - 3q_*^2(\alpha t)) - \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{\sqrt{2}}q_*(\alpha t) - t^{-2}\frac{x^2}{2}, \quad F(x, y, t) \equiv -t^{-1}y,$$

$$H(x, y, t) = \frac{r^2}{2} + O(r^4) + O(t^{-1})O(r^2), \quad r \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

и тривиальное решение является асимптотически устойчивым. При этом $V(x, y, t) = 2H(x, y, t) + t^{-1}xy$ является функцией Ляпунова, обладающей оценками (2) с $\gamma = 1$, $p = 1$ и $q = 1$. Поэтому для системы (21) с $q_0 = 0$ можно применить результаты предыдущего раздела. С учетом замены переменных мы имеем следующую асимптотику двухпараметрического семейства решений уравнения Пенлеве-II:

$$u(z; a, \varphi) = az^{-1/4} \cos \left(\varphi + c(a) \log z + \frac{2\sqrt{2}}{3} z^{3/2} \right) + \frac{3\nu}{4} z^{-1} + O(z^{-7/4}), \quad z \rightarrow \infty,$$

где a, φ — произвольные константы, $c(a) = \text{const}$.

3.3. Уравнение Пенлеве-III в форме

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \sin u + z^{-1} \frac{du}{dz} = 0 \quad (22)$$

эквивалентно системе (1)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x - t^{-1}y, \quad (23)$$

в которой можно выделить гамильтониан $H(x, y) \equiv y^2/2 + 1 - \cos x = r^2/2 + O(r^4)$ и негамильтонову компоненту $F(y, t) \equiv -t^{-1}y$. Тривиальное решение является асимптотически устойчивым с функцией Ляпунова $V(x, y, t) = 2H(x, y) + t^{-1}xy$, обладающей оценками (2) с $\gamma = 1$, $p = 1$, $q = 1$:

$$\frac{dV}{dt} = -t^{-1}(y^2 + x \sin x) - 2xyt^{-2} = -t^{-1}[r^2 + O(r^4)] + O(t^{-2})O(r^2), \quad r \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Это позволяет применить к системе (23) результаты предыдущего раздела и построить асимптотику для двухпараметрического семейства решений уравнения (22):

$$u(z; a, \varphi) = az^{-1/2} \cos(\varphi + c(a) \log z + z) + O(z^{-3/2}), \quad z \rightarrow \infty,$$

где a, φ — произвольные константы, $c(a) = \text{const}$.

3.4. Уравнение Пенлеве-IV

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{1}{2u} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \frac{3}{2}u^3 + 4zu^2 + 2(z^2 - \nu_1)u + \frac{\nu_2}{u}, \quad \nu_k = \text{const},$$

будем рассматривать при $z > 0$. Замена переменных $\tau = z^2$, $u(z) = zq(\tau)$ приводит к уравнению

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} - \frac{1}{2q} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 - \frac{q}{2} - q^2 - \frac{3q^3}{8} = -\tau^{-1} \left(\frac{\nu_1 q}{2} \frac{dq}{d\tau} \right) + \tau^{-2} \left(\frac{\nu_2}{4q} + \frac{q}{8} \right),$$

которое можно переписать в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dq}{d\tau} = pq, \quad \frac{dp}{d\tau} = q + \frac{1}{2} - \frac{p^2}{2} + \frac{3q^2}{8} - \tau^{-1} \left(\frac{\nu_1}{2} + p \right) + \tau^{-2} \left(\frac{\nu_2}{4q^2} + \frac{1}{8} \right). \quad (24)$$

Система (24) имеет частное решение со степенной асимптотикой на бесконечности:

$$q_*(\tau) = -\frac{2}{3} + \tau^{-1}\nu_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \tau^{-k} q_k, \quad p_*(t) = (\log q_*(t))', \quad t \rightarrow \infty.$$

Постоянные коэффициенты $q_k = \text{const}$ определяются однозначно после подстановки рядов в систему и группировки слагаемых при одинаковых степенях τ . Воспользуемся этим решением для приведения системы (24) к виду (1). Сделаем замену

$$q(\tau) = q_*(\tau) + x(t), \quad p(\tau) = p_*(\tau) + \alpha y(t), \quad \tau = \beta t, \quad \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta = \sqrt{3}$$

в (24); тогда на новые функции $x(t)$ и $y(t)$ получается система вида (1), в которой

$$H(x, y, t) \equiv \left(4 + 3q_*(\beta t) \right) \frac{x^2}{4} - 3q_*(\beta t) \frac{y^2}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{3xy^2}{4} + \\ + \sqrt{3}p_*(\beta t)xy - t^{-2} \frac{\nu_2}{6} \left[\frac{x}{q_*^2(\beta t)} + \frac{1}{x + q_*(\beta t)} - \frac{1}{q_*(\beta t)} \right],$$

и $F(x, y, t) \equiv -t^{-1}y$. Легко проверить, что $V(x, y, t) = 2H(x, y, t) + t^{-1}xy$ является функцией Ляпунова и обладает оценками (2) с $\gamma = 1$, $p = 1$ и $q = 1$. Это позволяет применить результаты предыдущего раздела и построить асимптотику общего решения уравнения Пенлеве-IV:

$$u(z; a, \varphi) = -\frac{2z}{3} + a \cos \left(\varphi + c(a) \log z + \frac{z^2}{\sqrt{3}} \right) + z^{-1}\nu_1 + O(z^{-2}), \quad z \rightarrow \infty,$$

где a, φ — произвольные константы, $c(a) = \text{const}$.

3.5. Более сложным примером является система уравнений главного авторезонанса [5]:

$$\frac{du}{dz} = \sin \phi, \quad u \frac{d\phi}{dz} = (u^2 - \nu^2 z)u + \cos \phi, \quad \nu = \text{const} \neq 0. \quad (25)$$

Рассматриваемая система возникает при исследовании резонансных явлений в нелинейных колебательных системах с медленно меняющимся осциллирующим возмущением. Интерес с точки зрения приложений представляют решения с растущей компонентой $u(z)$ при $z \rightarrow \infty$. Частное решение такого типа определяется степенной асимптотикой с постоянными коэффициентами:

$$u_*(z) = \nu z^{1/2} + \sum_{k=2}^{\infty} z^{-k/2} u_k, \quad \phi_*(z) = \pi - z^{-1/2} \frac{\nu}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} z^{-k/2} \phi_k, \quad z \rightarrow \infty.$$

Отметим, что все коэффициенты u_k , ϕ_k определяются однозначно после подстановки рядов в систему. Используя это частное решение, сделаем замену переменных

$$u(z) = u_*(z) + \frac{z^{-1/4} x(t)}{\alpha}, \quad \phi(z) = \phi_*(z) + y(t), \quad t = \frac{4}{5} \alpha z^{5/4}, \quad \alpha = \sqrt{2\nu}$$

в системе (25). В новых переменных рассматриваемая система может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\partial_y H(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = \partial_x H(x, y, t) + F(x, y, t), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} H(x, y, t) &= \cos(y + \phi_*) - \cos \phi_* + y \sin \phi_* + x^2 \frac{u_*}{2\nu} z^{-1/2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} z^{-3/4} - \frac{xy}{4\alpha} z^{-5/4} = \\ &= \frac{r^2}{2} + O(r^3) + O(r^2)O(t^{-2/5}), \\ F(x, y, t) &= \left[\frac{\cos(y + \phi_*)}{\alpha u_* + x z^{-1/4}} - \frac{\cos \phi_*}{\alpha u_*} \right] z^{-1/4} + \frac{y}{4\alpha} z^{-5/4} = \\ &= \lambda t^{-3/5} (1 - \cos y) - \gamma t^{-1} [y + O(r^3)] + O(t^{-6/5})O(r^2), \quad r \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\lambda = 2/(5\nu^2)^{3/5}$ и $\gamma = 1/5$. Система (26) имеет неподвижную точку $(0, 0)$, которая является асимптотически устойчивой. Функция Ляпунова имеет вид

$$V(x, y, t) = 2H(x, y, t) + t^{-3/5} v_3(x, y) + t^{-1} v_5(x, y), \quad v_3 = 2\lambda \left[x(1 - \cos y) + \frac{x^3}{3} \right], \quad v_5 = -\gamma xy$$

(см. [14]) и обладает оценками (2) с $q = p = 5$ и $\gamma = 1/q$:

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma t^{-1} [r^2 + O(r^3)] + O(t^{-6/5})O(r^2), \quad r \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Это позволяет применить к (26) результаты предыдущего раздела и построить асимптотику общего решения системы уравнений главного авторезонанса с растущей амплитудой:

$$\begin{aligned} u(z; a, \varphi) &= \nu z^{1/2} + \frac{a}{\sqrt{2\nu}} z^{-3/8} \cos \left(\varphi + c_{-1}(a) \log z + \sum_{k=1}^4 c_1(a) z^{k/4} + \frac{4\sqrt{2\nu}}{5} z^{5/4} \right) + O(z^{-1/2}), \\ \phi(z; a, \varphi) &= \pi + a z^{-1/8} \sin \left(\varphi + c_{-1}(a) \log z + \sum_{k=1}^4 c_1(a) z^{k/4} + \frac{4\sqrt{2\nu}}{5} z^{5/4} \right) + O(z^{-1/4}) \end{aligned}$$

при $z \rightarrow \infty$, где a , φ — произвольные константы, $c_k(a) = \text{const}$.

3.6. Система уравнения параметрического авторезонанса [5]:

$$\frac{du}{dz} = u \sin \phi, \quad \frac{d\phi}{dz} = u - \nu_1^2 z + \nu_2 \cos \phi, \quad \nu_k = \text{const} \neq 0, \quad (27)$$

возникает при исследовании начального этапа резонансного захвата в нелинейных колебательных системах с медленно меняющейся параметрической накачкой (см. [5]). С резонансом связаны решения, у которых $u(z) \rightarrow \infty$ и $\phi(z) = O(1)$ при $z \rightarrow \infty$. Система (27) имеет частное резонансное решение, определяемое асимптотикой

$$u_*(z) = \nu_1^2 z + \nu_2 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} u_k, \quad \phi_*(z) = \pi + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \phi_k, \quad z \rightarrow \infty.$$

Как и выше, будем использовать это решения для преобразования исходной системы (27) к виду (1). Для этого в системе (27) сделаем замену переменных

$$u(z) = u_*(z) + \nu_1 z^{1/2} x(t), \quad \phi(z) = \phi_*(z) + y(t), \quad t = \frac{2}{3} \nu_1 z^{3/2}.$$

Для новых неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$ получается следующая система:

$$\frac{dx}{dt} = -\partial_y H(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = \partial_x H(x, y, t) + F(x, y, t), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} H(x, y, t) &= \frac{x^2}{2} + \lambda^2 u_* \left(\cos(y + \phi_*) - \cos \phi_* + y \sin \phi_* \right) t^{-2/3} + \\ &+ \lambda x \left(\cos(y + \phi_*) - \cos \phi_* \right) t^{-1/3} + \frac{xy}{3} t^{-1} = \frac{r^2}{2} + O(r^3) + O(r^2) O(t^{-1/3}), \\ F(x, y, t) &= \lambda(\nu_2 - 1) \left(\cos(y + \phi_*) - \cos \phi_* \right) t^{-1/3} - \frac{y}{3} t^{-1} = \\ &= \lambda(\nu_2 - 1) t^{-1/3} (1 - \cos y) - \gamma t^{-1} [y + O(r^3)] + O(t^{-4/3}) O(r^2), \quad r \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$\lambda = (2/3\nu_1^2)^{1/3}$ и $\gamma = (2\nu_2 - 1)/3$. При $\nu_2 > 1/2$ тривиальное решение системы (28) является асимптотически устойчивым. Более того, функция Ляпунова имеет вид

$$\begin{aligned} V(x, y, t) &= 2H(x, y, t) + \sum_{k=1}^3 t^{-k/3} v_k(x, y), \\ v_1 &= 2\lambda(\nu_2 - 1) \left[x(1 - \cos y) + \frac{x^3}{3} \right], \quad v_2 = -\lambda^2(\nu_2 - 1) \left[\nu_2(1 - \cos y)^2 + \frac{x^4}{2} \right], \quad v_3 = -\gamma xy \end{aligned}$$

(см. [11]) и обладает оценками (2) с $q = p = 3$:

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma t^{-1} [r^2 + O(r^3)] + O(t^{-4/3}) O(r^2), \quad r \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Это дает возможность применить к рассматриваемой системе (28) результаты предыдущего раздела и построить асимптотику для общих резонансных решений системы (27). В частности, при $1/2 < \nu_2 < 3/2$ имеем

$$\begin{aligned} u(z; a, \varphi) &= \nu_1^2 z + a\nu_1 z^{(3-2\nu_2)/4} \left\{ \cos \left(\varphi + c_{-1}(a) \log z + c_1(a) z^{1/2} + c_2(a) z + \frac{2\nu_1}{3} z^{3/2} \right) + o(1) \right\}, \\ \phi(z; a, \varphi) &= \pi + a z^{(1-2\nu_2)/4} \left\{ \sin \left(\varphi + c_{-1}(a) \log z + c_1(a) z^{1/2} + c_2(a) z + \frac{2\nu_1}{3} z^{3/2} \right) + o(1) \right\} \end{aligned}$$

при $z \rightarrow \infty$, где a , φ — произвольные константы, $c_k(a) = \text{const}$.

4. Заключение. В работе предложен метод построения асимптотики двухпараметрического семейства решений для системы нелинейных уравнений, близких к гамильтоновым, на основе функции Ляпунова. Ключевым шагом в настоящем подходе является замена переменных, при которой одну из новых зависимых переменных играет функция Ляпунова для полной системы, а в качестве другой зависимой переменной используется угол предельной гамильтоновой системы. Этот шаг существенно упрощает асимптотическое интегрирование системы методом усреднения, поскольку моментально выписывается усредненное уравнение для переменной функции Ляпунова, которая по сути определяет конструкцию всего асимптотического разложения.

Предлагаемый метод был применен для различных дифференциальных уравнений второго порядка, которые несложным образом сводятся к системам, близким к гамильтоновым, и для которых строятся функции Ляпунова. По большей части рассмотренные примеры носят иллюстративный характер. В частности, асимптотика решений уравнений Пенлеве извлекается более сложным способом из свойств интегрируемости уравнений (см. [3]) и считается известной. Асимптотика для моделей авторезонанса согласуется с [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
2. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Наука, 1998.
3. Итс А. Р., Капаев А. А., Новокшенов В. Ю., Фокас А. С. Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. — Москва–Ижевск: РХД, 2005.
4. Калякин Л. А. Асимптотика на бесконечности решений уравнений, близких к гамильтоновым // Совр. мат. прилож. — 2008. — 53. — С. 138–160.
5. Калякин Л. А. Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Усп. мат. наук. — 2008. — 63, № 5. — С. 3–72.
6. Калякин Л. А. Метод усреднения в задачах об асимптотике на бесконечности // Уфим. мат. ж. — 2009. — 1, № 2. — С. 29–52.
7. Калякин Л. А. Функции Ляпунова в теоремах обоснования асимптотики // Мат. заметки. — 2015. — 98, № 5. — С. 695–709.
8. Козлов В. В., Фурта С. Д. Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во МГУ, 1996.
9. Кузнецов А. Н. О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функци. анал. прилож. — 1989. — 23, № 4. — С. 63–74.
10. Султанов О. А. Функции Ляпунова для неавтономных систем, близких к гамильтоновым // Уфим. мат. ж. — 2010. — 2, № 4. — С. 88–98.
11. Султанов О. А. Устойчивость захвата в параметрический авторезонанс // Тр. Инст. мат. мех. УрО РАН. — 2015. — 21, № 1. — С. 220–230.
12. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.
13. Хапаев М. М. Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. — М.: Высшая школа, 1988.
14. Kalyakin L. A., Sultanov O. A. Stability of autoresonance models // Differ. Equations. — 2013. — 49. — P. 267–281.

Султанов Оскар Анварович

Институт математики с вычислительным центром,

Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия

E-mail: oasultanov@gmail.com



ОБ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЯХ И РЕШЕНИЯХ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИПШИЦЕВЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© 2019 г. Э. Э. ХОЛОДНОВ

Аннотация. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ рассматривается краевая задача Дирихле для эллиптического уравнения с нелипшицевой нелинейностью вида

$$\Delta u = \lambda u - |u|^{\alpha-1}u, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Исследуется вопрос существования решения типа основного состояния с компактным носителем.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, решение с компактным носителем, нелипшицева нелинейность.

ON GROUND STATES AND COMPACTLY SUPPORTED SOLUTIONS OF ELLIPTIC EQUATIONS WITH NON-LIPSCHITZ NONLINEARITIES

© 2019 Е. Е. KHOLODNOV

ABSTRACT. In a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, we consider the Dirichlet boundary-value problem for an elliptic equation with a non-Lipschitz nonlinearity of the form

$$\Delta u = \lambda u - |u|^{\alpha-1}u, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

The problem of the existence of a solution of the ground-state-type with compact support is examined.

Keywords and phrases: elliptic equation, solution with compact support, non-Lipschitz nonlinearity.

AMS Subject Classification: 35B44, 35B32, 35K59, 35J60, 35J70

Введение. Рассматривается следующая краевая задача:

$$-\Delta u = \lambda u - |u|^{\alpha-1}u, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, Ω — некоторая область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Предполагается, что $0 < \alpha < 1$, т.е. нелинейность в правой части является нелипшицевой. Известно, что уравнения с нелипшицевой нелинейностью могут обладать решениями с компактным носителем, т.е. слабыми решениями (1), удовлетворяющими дополнительному условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Слабое решение u_λ называется *основным состоянием*, если неравенство $E_\lambda(u_\lambda) \leq E_\lambda(w)$ выполняется для всех слабых решений w задачи (1), где $E_\lambda(\cdot)$ — энергетический функционал, соответствующий (1).

Известно, что некоторые типы уравнений с нелипшицевыми нелинейностями (см. [2–5]) обладают основными состояниями с компактными носителями. Из результатов [6, 7] следует, что при определённых значениях λ задача (1) имеет решение с компактным носителем, тогда как в [1]

показано, что (1) обладает решениями типа основного состояния при всех $\lambda > \lambda_1(\Omega)$, где $\lambda_1(\Omega)$ — минимальное собственное значение оператора $-\Delta$ с граничными условиями Дирихле. Возникает вопрос, может ли задача (1) иметь основные состояния, которые обладали бы компактными носителями.

В представленной заметке дан следующий ответ на это вопрос.

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < 1$, Ω — односвязная открытая область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, с гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда найдётся такое $\lambda^* > \lambda_1(\Omega)$, что при всех $\lambda \in (\lambda_1(\Omega), \lambda^*)$ основное состояние u_λ задачи (1) не является решением с компактным носителем.

1. Предварительные сведения. В дальнейшем $W := W_0^{1,2}(\Omega)$ обозначает соболевское пространство, которое задаётся пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_1 = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Задача (1) имеет вариационную форму с функционалом энергии следующего вида:

$$E_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{1+\alpha} \int_{\Omega} |u|^{1+\alpha} dx, \quad u \in W. \quad (3)$$

Слабые решения u_λ задачи (1) определяются как критические точки этого функционала:

$$D_u E_\lambda(u_\lambda)(\phi) = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (4)$$

где $D_u E_\lambda(u_\lambda)$ — производная по Фреше.

Известно (см. [1]), что в условиях теоремы 1 задача (1) имеет слабое неотрицательное решение тогда и только тогда, когда $\lambda > \lambda_1(\Omega)$. Кроме этого, при всех $\lambda > \lambda_1(\Omega)$ существует основное состояние u_λ , которое может быть найдено посредством решения следующей минимизационной задачи:

$$\hat{E}_\lambda(\Omega) = \inf \left\{ E_\lambda(r^*(w)w) : \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |w|^2 dx < 0 \right\}, \quad (5)$$

где

$$E_\lambda(r^*(w)w) = \frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)} \left(\frac{\left(\int_{\Omega} |w|^{1+\alpha} dx \right)^{\frac{2}{1-\alpha}}}{\left(- \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}} \right),$$

$$r^*(w) := \left(\frac{\int_{\Omega} |w|^{1+\alpha} dx}{- \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |w|^2 dx} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

так что $u_\lambda = r^*(w_\lambda)w_\lambda$, где w_λ — решение задачи (5).

В [3] доказана следующая лемма.

Лемма 1. Отображение $\lambda \mapsto E_\lambda(u_\lambda)$ является дифференцируемой функцией аргумента $\lambda \in (\lambda_1(\Omega), +\infty)$. Кроме того,

$$\frac{d}{d\lambda} E_\lambda(u_\lambda) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_\lambda|^2 dx. \quad (6)$$

Лемма 2. $E_\lambda(u_\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \downarrow \lambda_1(\Omega)$.

Доказательство. Возьмём $\lambda = \lambda_1(\Omega) + \varepsilon$; тогда (см. [1]) существует решение w_λ минимизационной задачи (5). Так как в (5) функционалы однородны, то можно положить $\|w_\lambda\|_1 = 1$. Поскольку

$$\int_{\Omega} |\nabla w_\lambda|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |w_\lambda|^2 dx < 0 \quad (7)$$

и $\|w_\lambda\|_1 = 1$, получаем $\int_{\Omega} |w_\lambda|^2 dx > \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{\lambda_1(\Omega)}$. Покажем, что

$$\int_{\Omega} |w_\lambda|^{1+\alpha} dx > M > 0, \quad (8)$$

где M не зависит от λ . Предположим противное, что $\int_{\Omega} |w_{\lambda_n}|^{1+\alpha} dx \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ для некоторой последовательности $\lambda_n = \lambda_1(\Omega) + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Из условия $\|w_{\lambda_n}\|_1 = 1$ по теореме вложения Соболева найдётся такая подпоследовательность (которую мы снова обозначаем λ_n), что $w_{\lambda_n} \rightarrow w$ сильно в $L^\gamma(\Omega)$, где $\gamma \in (1, 2^*)$. Заметим, что из (7) вытекает, что $w \neq 0$. Следовательно,

$$\int_{\Omega} |w_{\lambda_n}|^{1+\alpha} dx \rightarrow \int_{\Omega} |w|^{1+\alpha} dx \neq 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty;$$

получили противоречие.

Оценим

$$\begin{aligned} E_{\lambda_n}(r^*(w_{\lambda_n})w_{\lambda_n}) &= \\ &= \frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)} \left(\frac{\left(\int_{\Omega} |w_{\lambda_n}|^{1+\alpha} dx \right)^{\frac{2}{1-\alpha}}}{\left(- \int_{\Omega} |\nabla w_{\lambda_n}|^2 dx + (\lambda_1(\Omega) + \varepsilon_n) \int_{\Omega} |w_{\lambda_n}|^2 dx \right)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}} \right) \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{\varepsilon_n} \right)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)} \cdot \left(\frac{\left(\int_{\Omega} |w_{\lambda_n}|^{1+\alpha} dx \right)^{\frac{2}{1-\alpha}}}{\left(\int_{\Omega} |w_{\lambda_n}|^2 dx \right)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}} \right). \end{aligned}$$

По теореме вложения Соболева получаем $\int_{\Omega} |w_{\lambda_n}|^2 dx < M_1$. Отсюда и из (8) получаем, что при $n \rightarrow +\infty$

$$E_{\lambda_n}(r^*(w_{\lambda_n})w_{\lambda_n}) \geq \left(\frac{1}{\varepsilon_n} \right)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)} \cdot \left(\frac{\left(\int_{\Omega} |w_{\lambda_n}|^{1+\alpha} dx \right)^{\frac{2}{1-\alpha}}}{\left(\int_{\Omega} |w_{\lambda_n}|^2 dx \right)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}} \right) \rightarrow +\infty.$$

Учитывая теперь, что по лемме 1 функция $E_\lambda(u_\lambda)$ является непрерывной, получаем требуемое: $E_\lambda(u_\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow \lambda_1(\Omega)$. $\square$

2. Доказательство теоремы. Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta u = u - |u|^{\alpha-1}u, \quad x \in B_R, \quad u|_{\partial B_R} = 0, \quad (9)$$

где $0 < \alpha < 1$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq R\}$. Известно (см. [6, 8]), что существует такой радиус R^c , что задача (9) имеет единственное положительное решение $u_c \in C^1(B_{R^c})$ с компактным носителем, совпадающим с B_{R^c} . При этом оно является радиально-симметричным. Легко видеть, что

$$v_c^\lambda(x) = \frac{u_c(x\sqrt{\lambda})}{\lambda^{\frac{1}{1-\alpha}}} \quad (10)$$

является единственным решением с компактным носителем следующей задачи:

$$-\Delta v_c^\lambda = \lambda v_c^\lambda - |v_c^\lambda|^{\alpha-1}v_c^\lambda, \quad x \in B_{R_\lambda}^c, \quad v_c^\lambda|_{\partial B_{R_\lambda}^c} = 0, \quad (11)$$

где $R_\lambda = R^c/\sqrt{\lambda}$.

Заметим, если $B_{R_\lambda}^{x_0} := \{y \in \mathbb{R}^N : |x_0 - y| \leq R_\lambda\} \subset \Omega$ при некотором $x_0 \in \Omega$, то по определению основного состояния имеем

$$E_\lambda(v_c^\lambda) \geq E_\lambda(u_\lambda). \quad (12)$$

Обозначим через $R^m > 0$ максимальный радиус такого шара, что $B_{R^m}^{x_0} \subset \overline{\Omega}$ при некотором $x_0 \in \Omega$. Без ограничения общности можем считать, что x_0 совпадает с началом координат в $\mathbb{R}^N$. Тогда носитель $\text{supp}(v_c^\lambda) := B_{R_\lambda}$ лежит в области Ω при выполнении условия $R_\lambda \leq R^m$, где $\lambda = (R^c/R_\lambda)^2$. При этом при всех $\lambda < \lambda^* := (R^c/R^m)^2$ не существует решений задачи (1) с компактным носителем, носители которых содержались бы в Ω .

Поскольку v_c^λ имеет компактный носитель, то его продолжение на Ω (для которого мы сохраняем обозначение v_c^λ)

$$v_c^\lambda(x) = \begin{cases} v_c^\lambda(x) & \text{при } x \in B_{R_\lambda}, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega/B_{R_\lambda}, \end{cases} \quad (13)$$

принадлежит $C^1(\mathbb{R}^N)$.

Заметим, что с ростом λ носитель функции v_c^λ уменьшается. Отсюда, учитывая вложение $B_{R^c} \subset \Omega$, заключаем, что v_c^λ удовлетворяет задаче (1) при всех $\lambda \geq \lambda^*$, тогда как при $\lambda < \lambda^*$ носитель v_c^λ не лежит в Ω и, следовательно, v_c^λ не является решением задачи (1). Отсюда, в силу (12), имеем

$$E_\lambda(u_\lambda) \leq E_\lambda(v_c^\lambda) \quad \text{при всех } \lambda \geq \lambda^*. \quad (14)$$

Отметим, что

$$E_\lambda(v_c^\lambda) = \lambda^{1-\frac{N}{2}+\frac{2}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_c|^2 dy - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_c|^2 dy + \frac{1}{1+\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |u_c|^{1+\alpha} dy \right) = \lambda^{1-\frac{N}{2}+\frac{2}{\alpha-1}} E_1(u_c),$$

где

$$E_1(u_c) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_c|^2 dy - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_c|^2 dy + \frac{1}{1+\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |u_c|^{1+\alpha} dy. \quad (15)$$

Заметим, что u_c принадлежит многообразию Нехари, т.е. выполняется следующее равенство:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_c|^2 dy - \int_{\mathbb{R}^N} |u_c|^2 dy + \int_{\mathbb{R}^N} |u_c|^{1+\alpha} dy = 0. \quad (16)$$

Отсюда, подставляя

$$-\int_{\mathbb{R}^N} |u_c|^{1+\alpha} dy = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_c|^2 dy - \int_{\mathbb{R}^N} |u_c|^2 dy \quad (17)$$

в функционал $E_1(u_c)$, получаем

$$E_1(u_c) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_c|^{1+\alpha} dy + \frac{1}{\alpha+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_c|^{1+\alpha} dy = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |u_c|^{1+\alpha} dy > 0. \quad (18)$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} E_\lambda(v_c^\lambda) = \left(1 - \frac{N}{2} + \frac{2}{\alpha - 1}\right) \lambda^{-\frac{N}{2} + \frac{2}{\alpha - 1}} E_1(u_c) < 0, \quad (19)$$

для всех $\lambda > 0$, поскольку $0 < \alpha < 1$. Следовательно, $E_\lambda(v_c^\lambda)$ является монотонно убывающей функцией по λ и при этом

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} E_\lambda(v_c^\lambda) = +\infty. \quad (20)$$

В то же время из (6) вытекает, что $E_\lambda(u_\lambda)$ является монотонно убывающей функцией по λ . Поэтому, учитывая лемму 2 и (14), заключаем, что функции $E_\lambda(v_c^\lambda)$ и $E_\lambda(u_\lambda)$ имеют единственную точку пересечения при некотором значении $\lambda_p \in (\lambda_1(\Omega), +\infty)$, для которой

$$\begin{aligned} E_{\lambda_p}(v_c^{\lambda_p}) &= E_{\lambda_p}(u_{\lambda_p}), \\ E_\lambda(v_c^\lambda) &< E_\lambda(u_\lambda), \quad \lambda \in (\lambda_1, \lambda_p), \\ E_\lambda(v_c^\lambda) &\geq E_\lambda(u_\lambda), \quad \lambda \in (\lambda_p, +\infty). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что v_c^λ не может быть решением задачи (1) при $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_p)$. С другой стороны, v_c^λ удовлетворяет задаче (1) при $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, так как в этом случае $\text{supp}(v_c^\lambda) \subset \Omega$. Следовательно, $\lambda_p \leq \lambda^*$. Таким образом мы получили, что задача (1) не может иметь основные состояния с компактным носителем при $\lambda \in (\lambda_1(\Omega), \lambda^*)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильясов Я. Ш., Холоднов Э. Э. О глобальной неустойчивости решений гиперболических уравнений с нелипшицевой нелинейностью// Уфим. мат. ж. — 2017. — 9, № 4. — С. 45–54.
2. Díaz J. I., Hernández J., P'yasov Y. Flat solutions of some non-Lipschitz autonomous semilinear equations may be stable for $N \geq 3$ // Chin. Ann. Math. Ser. B. — 2017. — 38 (1). — P. 345–378.
3. Díaz J. I., Hernández J., P'yasov Y. On the existence of positive solutions and solutions with compact support for a spectral nonlinear elliptic problem with strong absorption// Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl. — 2015. — 119. — P. 484–500.
4. P'yasov Y. S. On critical exponent for an elliptic equation with non-Lipschitz nonlinearity// Dynam. Syst. — 2011. — P. 698–706.
5. P'yasov Y. S., Egorov Y. Höpf maximum principle violation for elliptic equations with non-Lipschitz nonlinearity// Nonlin. Anal. — 2010. — 72. — P. 3346–3355.
6. Kaper H. G., Kwong M. K. Free boundary problems for Emden–Fowler equations// Differ. Integr. Equations. — 1990. — 3 (2). — P. 353–362.
7. Kaper H., Kwong M. K., Li Y. Symmetry results for reaction-diffusion equations// Differ. Integr. Equations. — 1993. — 6. — P. 1045–1056.
8. Serrin J., Zou H. Symmetry of ground states of quasilinear elliptic equations// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1999. — 148, № 4. — P. 265–290.

Холоднов Эмиль Эдуардович

Институт математики с вычислительным центром,

Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия

E-mail: emil.kholod@gmail.com



МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

© 2019 г. М. Г. ЮМАГУЛОВ, Л. С. ИБРАГИМОВА, А. С. БЕЛОВА

Аннотация. Рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, зависящие от малого параметра. Предлагаются новые подходы в задаче построения матрицы монодромии, приводящие к новым эффективным формулам для вычисления мультипликаторов изучаемой системы. Рассматривается ряд приложений в задачах теории возмущений линейных операторов, в задаче исследования устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, в задаче построения областей устойчивости линейных динамических систем и др.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическая система, гамильтонова система, матрица монодромии, мультипликатор, устойчивость, малый параметр.

METHODS FOR STUDYING THE STABILITY OF LINEAR PERIODIC SYSTEMS DEPENDING ON A SMALL PARAMETER

© 2019 M. G. YUMAGULOV, L. S. IBRAGIMOVA, A. S. BELOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider systems of linear differential equations with periodic coefficients depending on a small parameter. We propose new approaches to the problem of constructing a monodromy matrix that lead to new effective formulas for calculating multipliers of the system studies.

We present a number of applications in problems of the perturbation theory of linear operators, in the analysis of stability of linear differential equations with periodic coefficients, in the problem of constructing the stability domains of linear dynamical systems, etc.

Keywords and phrases: differential equation, periodic system, Hamiltonian system, monodromy matrix, multiplier, stability, small parameter.

AMS Subject Classification: 34D20

1. Введение и постановка задачи. Многие теоретические и практические задачи приводят к необходимости исследования линейной системы, зависящей от скалярного или векторного параметра ε :

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t, \varepsilon)]x, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.1)$$

в которой A_0 — вещественная постоянная квадратная матрица, а $S(t, \varepsilon)$ — вещественная T -периодическая по t матрица (т.е. $S(t + T, \varepsilon) \equiv S(t, \varepsilon)$), удовлетворяющая условию

$$S(t, 0) \equiv 0. \quad (1.2)$$

При рассмотрении таких систем особенно важными являются задачи анализа их устойчивости и, в частности, задача определения областей устойчивости в пространстве параметров системы,

задачи изучения порядка роста или убывания решений и т. п. Изучению таких задач посвящена обширная литература, предложен ряд эффективных методов исследования как в общей постановке, так и направленных на изучение различных вариантов систем вида (1.1) (см., например, [5, 7, 8, 11] и имеющуюся там библиографию).

Анализ невозмущенной системы

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.3)$$

т.е. системы (1.1) при $\varepsilon = 0$, относительно прост. Эта простота связана с существованием явных формул для фундаментальной системы решений и, следовательно, явных формул для общего решения автономной системы (1.3) типа $x(t) = e^{A_0 t} x_0$. К сожалению, для возмущенной системы (1.1) в общем случае (при $N \geq 2$) в силу ее неавтономности не существует такого рода явных формул, что существенно усложняет анализ системы.

В литературе предложен ряд методов исследования систем вида (1.1), приводящих к тем или иным формулам для приближенного представления их общего решения, для анализа устойчивости системы, для изучения свойств решений и пр. Классической здесь является теория Флоке (см., например, [5, 11]), позволяющая переходить от линейных уравнений с периодическими коэффициентами к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Однако использование этой теории предполагает знание фундаментальной системы решений уравнения с периодическими коэффициентами, что возможно лишь в простейших случаях. Поэтому теория Флоке, имея важное теоретическое значение, с практической точки зрения далеко не всегда эффективна. В ряде работ (см., например, [5, 8, 11]) были предложены методы приближенного исследования систем вида (1.1) для ряда важных случаев, в частности, для случая, когда элементы матрицы $S(t, \varepsilon)$ представляет собой конечные суммы экспоненциальных слагаемых. В [7] был предложен метод, позволяющий пошагово (по степеням малого параметра ε) преобразовывать коэффициенты периодической матрицы $S(t, \varepsilon)$ в коэффициенты специально конструируемой постоянной матрицы. Исследование различных задач, связанных с рассмотрением систем вида (1.1), активно продолжается в различных направлениях (см., например, [1, 6, 13, 15]).

В настоящей работе предлагаются новые подходы в задаче приближенного построения фундаментальной матрицы решений системы (1.1) и новые формулы для приближенного вычисления ее мультипликаторов. Рассматривается ряд приложений.

2. Вычисление фундаментальной матрицы решений. Будем предполагать, что матрица $S(t, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по ε до порядка k ($k \geq 1$) включительно. Для простоты будем считать, что малый параметр ε является скалярным.

Обозначим через $U = X(t, \varepsilon)$ решение следующей матричной задачи Коши:

$$U' = [A_0 + S(t, \varepsilon)]U, \quad U(0) = I, \quad (2.1)$$

где I — единичная матрица. Матрица $X(t, \varepsilon)$ является *фундаментальной матрицей решений* (ФМР) системы (1.1), а матрица $V(\varepsilon) = X(T, \varepsilon)$ — ее *матрицей монодромии*. Собственные значения матрицы $V(\varepsilon)$ называются *мультипликаторами* системы (1.1). Очевидны равенства $X(t, 0) = e^{A_0 t}$ и $V(0) = e^{A_0 T}$.

Приведем схему получения формул для приближенного вычисления ФМР системы (1.1). Строить ФМР будем в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$X(t, \varepsilon) = X_0(t) + \varepsilon X_1(t) + \varepsilon^2 \frac{X_2(t)}{2!} + \dots + \varepsilon^k \frac{X_k(t)}{k!} + \Psi(t, \varepsilon), \quad (2.2)$$

где $X_0(t) = e^{A_0 t}$, а матрицы $X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)$ требуют определения; здесь $\Psi(t, \varepsilon)$ — непрерывная по t и непрерывно дифференцируемая по ε матрица, удовлетворяющая условию:

$$\|\Psi(t, \varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^{k+1}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Для простоты введем обозначения

$$S_j(t) = S_\varepsilon^{(j)}(t, 0), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (2.3)$$

т.е. $S_j(t)$ — это производная j -го порядка матрицы $S(t, \varepsilon)$ по ε при $\varepsilon = 0$.

Теорема 2.1. ФМР системы (1.1) представима в виде равенства (2.2), в котором

$$X_0(t) = e^{A_0 t}, \quad X_1(t) = e^{A_0 t} \int_0^t e^{-A_0 \tau} S_1(\tau) e^{A_0 \tau} d\tau, \quad (2.4)$$

а матрицы $X_2(t), \dots, X_k(t)$ определяются рекуррентной формулой

$$X_m(t) = e^{A_0 t} \int_0^t e^{-A_0 \tau} \sum_{j=0}^{m-1} \left(C_m^j S_{m-j}(\tau) X_j(\tau) \right) d\tau, \quad m = 2, \dots, k; \quad C_m^j = \frac{m!}{(m-j)!j!}. \quad (2.5)$$

В частности, матрица $X_2(t)$ определяется формулой

$$X_2(t) = e^{A_0 t} \int_0^t e^{-A_0 \tau} \left(S_2(\tau) e^{-A_0 \tau} + 2S_1(\tau) X_1(\tau) \right) d\tau. \quad (2.6)$$

Доказательство этого и других основных утверждений работы приводится ниже в п. 4. Следствием теоремы 2.1 является следующее утверждение.

Теорема 2.2. Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ системы (1.1) представима в виде равенства

$$V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 \frac{V_2}{2!} + \dots + \varepsilon^k \frac{V_k}{k!} + \tilde{V}(\varepsilon), \quad (2.7)$$

в котором

$$V_0 = e^{A_0 T}, \quad V_1 = e^{A_0 T} \int_0^T e^{-A_0 \tau} S_1(\tau) e^{A_0 \tau} d\tau, \quad (2.8)$$

матрицы $V_2, \dots, V_k$ определяются рекуррентной формулой

$$V_m = e^{A_0 T} \int_0^T e^{-A_0 \tau} \sum_{j=0}^{m-1} \left(C_m^j S_{m-j}(\tau) X_j(\tau) \right) d\tau, \quad m = 2, \dots, k,$$

а $\tilde{V}(\varepsilon)$ — непрерывно дифференцируемая по ε матрица, удовлетворяющая следующему условию:

$$\|\tilde{V}(\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^{k+1}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

В частности, матрица V_2 определяется формулой

$$V_2 = e^{A_0 T} \int_0^T e^{-A_0 \tau} \left(S_2(\tau) e^{A_0 \tau} + 2S_1(\tau) X_1(\tau) \right) d\tau.$$

3. Приложения. В этом разделе приводятся некоторые приложения теорем 2.1 и 2.2.

3.1. Формулы теории возмущений линейных операторов. В качестве первого приложения рассмотрим задачу о построении мультипликаторов системы (1.1) в следующих случаях, важных с точки зрения приложений:

- 1° матрица A_0 имеет простое собственное значение 0;
- 2° матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm \omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$, причем $\omega_0 T \neq \pi k$ при целых k ;
- 3° матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm \omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$, причем $\omega_0 T = \pi k_0$ при некотором целом k_0 .

Во всех этих случаях предполагается, что других собственных значений с нулевой вещественной частью матрица A_0 не имеет.

Случай 1°. В этом случае матрица монодромии $V_0 = e^{A_0 T}$ невозмущенной системы (1.3) имеет простое собственное значение 1. Из теории возмущения линейных операторов (см. [3]) следует, что матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (1.1) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет единственное

простое собственное значение $\mu(\varepsilon)$, для которого $\mu(0) = 1$, и функция $\mu(\varepsilon)$ является C^k -гладкой. Рассмотрим вопрос о приближенном построении функции $\mu(\varepsilon)$.

С этой целью обозначим через e и g^* собственные векторы матриц A_0 и A_0^* (здесь и ниже через B^* обозначается транспонированная матрица), отвечающие их нулевому собственному значению.

Теорема 3.1. *Векторы e и g^* можно нормировать в соответствии с равенствами*

$$\|e\| = 1, \quad (e, g^*) = 1. \quad (3.1)$$

Ясно, что существует в точности два варианта указанной нормировки векторов e и g^* , отличающиеся лишь знаками.

Теорема 3.2. *Функция $\mu(\varepsilon)$ при малых $|\varepsilon|$ представима в виде*

$$\mu(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\mu_1 + O(\varepsilon^2), \quad (3.2)$$

где

$$\mu_1 = \int_0^T (S_1(t)e, g^*) dt; \quad (3.3)$$

здесь $S_1(t)$ — первая из матриц (2.3).

Случай 2°. В этом случае матрица монодромии $V_0 = e^{A_0 T}$ невозмущенной системы (1.3) имеет пару простых комплексно сопряженных собственных значений $e^{\pm\omega_0 T i}$ ($e^{\pm\omega_0 T i} \neq \pm 1$). Из теории возмущения линейных операторов (см. [3]) следует, что матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (1.1) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет единственное простое собственное значение $\mu(\varepsilon)$, для которого $\mu(0) = \mu_0 = e^{\omega_0 T i}$, и функция $\mu(\varepsilon)$ является C^k -гладкой. Рассмотрим вопрос о приближенном построении функции $\mu(\varepsilon)$.

Так как матрица A_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_0 i$ ($\omega_0 > 0$), то найдутся такие ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in \mathbb{R}^N$, что выполняются равенства

$$A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig), \quad A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*). \quad (3.4)$$

Векторы e и g (векторы e^* и g^*) линейно независимы; при этом они определяются неоднозначно. Здесь нас интересует следующая нормировка этих векторов.

Теорема 3.3. *Векторы e, g, e^*, g^* можно нормировать в соответствии с равенствами*

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1, \quad (e, g^*) = (g, e^*) = 0. \quad (3.5)$$

Будем считать, что указанная нормировка для векторов e, g, e^*, g^* выполнена.

Теорема 3.4. *Функция $\mu(\varepsilon)$ при малых $|\varepsilon|$ представима в виде*

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + O(\varepsilon^2), \quad (3.6)$$

где $\mu_0 = e^{\omega_0 T i}$,

$$\mu_1 = \frac{\mu_0}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2);$$

здесь

$$\gamma_1 = \int_0^T [(S_1(t)e, e^*) + (S_1(t)g, g^*)] dt, \quad \gamma_2 = \int_0^T [(S_1(t)g, e^*) - (S_1(t)e, g^*)] dt,$$

а $S_1(t)$ — первая из матриц (2.3).

Случай 3°. В этом случае матрица монодромии $V_0 = e^{A_0 T}$ невозмущенной системы (1.3) имеет полупростое собственное значение μ_0 кратности 2, где $\mu_0 = 1$, если k_0 четно, или $\mu_0 = -1$, если k_0 нечетно. Из теории возмущения линейных операторов (см. [3]) следует, что матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (1.1) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$, для которых $\mu_1(0) = \mu_2(0) = \mu_0$ и функции $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ являются C^k -гладкими. Рассмотрим вопрос о приближенном построении этих функций.

Так как матрица A_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_0 i$ ($\omega_0 > 0$), то найдутся такие ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in \mathbb{R}^N$, что выполняются равенства (2.8). Здесь также будем считать выполненными равенства (3.5).

Ниже используется следующее утверждение (см., например, [14]).

Теорема 3.5. *Функции $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ при малых $|\varepsilon|$ представимы в виде*

$$\mu_1(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \mu_2(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_2\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (3.7)$$

где μ_1 и μ_2 — собственные значения матрицы

$$B = \begin{bmatrix} (V_1 e, e^*) & (V_1 g, e^*) \\ (V_1 e, g^*) & (V_1 g, g^*) \end{bmatrix}; \quad (3.8)$$

здесь V_1 — матрица, определенная вторым из равенств (2.8).

Элементы матрицы (3.8) могут быть вычислены с использованием формул (2.8) и (3.4). В результате получим равенства

$$(V_1 e, e^*) = \mu_0 \int_0^T \left\{ \cos^2(\omega_0 t) (S_1(t) e, e^*) + \sin^2(\omega_0 t) (S_1(t) g, g^*) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) [(S_1(t) e, g^*) + (S_1(t) g, e^*)] \right\} dt, \quad (3.9)$$

$$(V_1 g, e^*) = \mu_0 \int_0^T \left\{ \cos^2(\omega_0 t) (S_1(t) g, e^*) - \sin^2(\omega_0 t) (S_1(t) e, g^*) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) [(S_1(t) e, e^*) + (S_1(t) g, g^*)] \right\} dt, \quad (3.10)$$

$$(V_1 e, g^*) = \mu_0 \int_0^T \left\{ \cos^2(\omega_0 t) (S_1(t) e, g^*) - \sin^2(\omega_0 t) (S_1(t) g, e^*) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) [(S_1(t) e, e^*) - (S_1(t) g, g^*)] \right\} dt, \quad (3.11)$$

$$(V_1 g, g^*) = \mu_0 \int_0^T \left\{ \cos^2(\omega_0 t) (S_1(t) g, g^*) + \sin^2(\omega_0 t) (S_1(t) e, e^*) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) [(S_1(t) e, g^*) - (S_1(t) g, e^*)] \right\} dt. \quad (3.12)$$

3.2. Устойчивость линейных периодических систем. В качестве второго приложения рассмотрим вопрос об устойчивости линейной системы (1.1) при малых $|\varepsilon|$.

Этот вопрос решается относительно просто в следующих двух случаях (см., например, [7, 11]). Первым является случай, когда все собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части; тогда при всех малых $|\varepsilon|$ нулевое решение системы (1.1) является асимптотически устойчивым. Вторым является случай, когда хотя бы одно собственное значение матрицы A_0 имеет положительную вещественную часть; тогда при всех малых $|\varepsilon|$ нулевое решение системы (1.1) является неустойчивым.

Устойчивость решений в критических случаях. Критическим и существенно более сложным является случай, когда матрица A_0 имеет одно или несколько собственных значений с нулевой вещественной частью, при этом она не имеет собственных значений с положительной вещественной частью. Рассмотрим три основных варианта критического случая, а именно, указанные в предыдущем пункте случаи 1° – 3° . При этом будем предполагать, что остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части.

Рассмотрим сначала случай 1° , т.е. пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0. Из теоремы 3.2 следует, что верно следующее утверждение.

Теорема 3.6. *При всех малых $|\varepsilon|$, удовлетворяющих условию $\varepsilon\mu_1 < 0$ ($\varepsilon\mu_1 > 0$) решение $x = 0$ уравнения (1.1) является асимптотически устойчивым (неустойчивым).*

Рассмотрим теперь случай 2° , т.е. пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$, причем $\omega_0 T \neq \pi k$ при целых k . Из теоремы 3.4 следует, что верно следующее утверждение.

Теорема 3.7. *При всех малых $|\varepsilon|$, удовлетворяющих условию $\varepsilon\gamma_1 < 0$ ($\varepsilon\gamma_1 > 0$) решение $x = 0$ уравнения (1.1) является асимптотически устойчивым (неустойчивым).*

В случае 3° вопрос об устойчивости системы (1.1) сводится к вопросу нахождения собственных значений матрицы (3.8) и анализу формул (3.7) при малых $|\varepsilon|$. Ограничимся здесь примером.

Пример. Рассмотрим (см., например, [11]) систему

$$x' = (A_0 + \varepsilon A_1(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (3.13)$$

где ε — малый параметр,

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos t & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A_0 — это числа $\lambda_{1,2} = \pm i$ и $\lambda_3 = -1$. Изучим вопрос об устойчивости решения $x = 0$ системы (3.13) при малых ε .

Так как матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm i$ и период T правой части системы (3.13) равен $T = 2\pi$, то в рассматриваемом примере выполнены условия случая 3° при $k_0 = 2$.

Для изучения устойчивости системы (3.13) построим матрицу (3.8), элементы которой вычислим с помощью формул (3.9)–(3.12). С этой целью найдем собственные векторы e , g и e^* , g^* матриц A_0 и A_0^* , отвечающие собственным значениям i и $-i$ соответственно и удовлетворяющие соотношениям (3.5):

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

В результате несложных вычислений получим, что матрица (3.8) здесь имеет вид

$$B = \pi \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда из теоремы 3.5 и формул (3.7) получим, что система (3.13) имеет пару мультипликаторов, представимых в виде $\mu_{1,2}(\varepsilon) = 1 - \pi\varepsilon \pm \pi i\varepsilon + o(\varepsilon)$. Третий мультипликатор, очевидно, представим в виде $\mu_3(\varepsilon) = e^{-2\pi} + O(\varepsilon)$. Отсюда следует, что при малых $\varepsilon > 0$ решение $x = 0$ системы (3.13) асимптотически устойчиво, а при малых $\varepsilon < 0$ — неустойчиво.

Устойчивость линейных гамильтоновых систем. Рассмотрим случай, когда система (1.1) является гамильтоновой, а именно, рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t, \varepsilon)]x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}, \quad (3.14)$$

в тех же предположениях, что и для исходной системы (1.1), и дополнительно предполагая, что система (3.14) является гамильтоновой (см., например, [11]). Тогда произведение ее мультипликаторов равно 1, а отображение Пуанкаре $U(T)$ указанной системы за время T сохраняет фазовый объем.

Так как система (3.14) является частным случаем системы (1.1), то проведенные выше построения и полученные результаты остаются справедливыми и для системы (3.14). Однако, система (3.14) имеет свою специфику, содержащуюся, в частности, в следующих свойствах линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами (см., например, [11]):

- (i) если система (3.14) имеет мультипликатор μ_1 , то число $\mu_2 = 1/\mu_1$ также является ее мультипликатором той же кратности;
- (ii) если система (3.14) имеет мультипликатор $\mu = 1$ или $\mu = -1$, то его кратность четна;
- (iii) система (3.14) устойчива по Ляпунову если и только если все ее мультипликаторы μ удовлетворяют равенству $|\mu| = 1$ и являются полупростыми.

Так как мультипликаторы μ невозмущенной системы $x' = A_0 x$ связаны с собственными значениями λ матрицы A_0 равенством $\mu = e^{\lambda T}$, то система (3.14) может быть устойчивой по Ляпунову при малых $|\varepsilon|$, если и только если все собственные значения матрицы A_0 имеют нулевые вещественные части.

Обсудим условия устойчивости гамильтоновой системы (3.14) в ситуациях, аналогичных случаям 1°–3°, указанным в предыдущем пункте. Сначала отметим, что случай 1° для гамильтоновой системы (3.14) выполняться не может, так как для нее матрица A_0 не может иметь простого собственного значения 0.

Рассмотрим аналог случая 2°, предположив, что у матрицы A_0 все собственные значения являются простыми и чисто мнимыми вида $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$, причем $\omega_0 T \neq \pi k$ при целых k . Пусть при этом выполнено следующее условие:

- (а) для любых двух различных пар собственных значений $\pm\omega_1 i$ и $\pm\omega_2 i$ при целых k выполнено соотношение $\omega_1 - \omega_2 \neq 2\pi k/T$.

В этом случае при всех малых $|\varepsilon|$ система (3.14) устойчива по Ляпунову (но не асимптотически).

Рассмотрим теперь аналог случая 3°. Пусть матрица A_0 имеет в точности одну пару простых собственных значений $\pm\omega_0 i$, у которых $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 T = \pi k_0$ при некотором целом k_0 . Пусть все остальные собственные значения матрицы A_0 являются простыми (естественно, имея нулевые вещественные части) и пусть для них выполнено условие (а). В указанных условиях можно построить определенную равенством (3.8) матрицу B . Верно следующее утверждение.

Теорема 3.8. *Если $\det B < 0$, то при всех малых $|\varepsilon|$ система (3.14) неустойчива, а если $\det B > 0$, то она устойчива (но не асимптотически).*

Справедливость этой теоремы следует из того факта, что в ее условиях (как это несложно показать, например, с использованием равенств (3.9)–(3.12)) собственные значения μ_1 и μ_2 матрицы B являются решениями уравнения

$$\lambda^2 + \det B = 0.$$

3.3. Построение границ областей устойчивости динамических систем. В качестве третьего приложения рассмотрим задачу о построении границы области устойчивости линейной системы

$$x' = [A_0 + S(t, \alpha, \beta)]x, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (3.15)$$

содержащей два скалярных параметра α и β . Такие задачи возникают во многих теоретических и практических вопросах теории дифференциальных уравнений и ее приложений (см., например, [2, 10, 12]).

Будем предполагать, что матрица $S(t, \alpha, \beta)$ является T -периодической, т.е. $S(t + T, \alpha, \beta) \equiv S(t, \alpha, \beta)$; при этом $S(t, \alpha_0, \beta_0) \equiv 0$.

Система при одних значениях параметров может быть устойчивой по Ляпунову, а при других — неустойчивой. Множество G в плоскости Π параметров (α, β) будем называть областью устойчивости (областью неустойчивости) системы (3.15), если для любого $(\alpha, \beta) \in G$ система (3.15) является устойчивой по Ляпунову (неустойчивой).

Точку $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ будем называть *граничной точкой* области устойчивости G системы (3.15), если в любой ее окрестности содержатся как точки из области устойчивости G , так и точки из области неустойчивости. Очевидно, что для того, чтобы точка $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ была граничной для области устойчивости G , необходимо, чтобы матрица A_0 имела хотя бы одно чисто мнимое собственное значение и не имела собственных значений с положительной вещественной частью.

Совокупность граничных точек множества G будем называть границей Γ множества G . Если некоторая точка $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ является граничной точкой области устойчивости системы (3.15), то, как правило, через эту точку проходят одна или несколько гладких граничных кривых.

Пусть (α_0, β_0) — граничная точка области устойчивости системы (3.15). Рассмотрим вопрос о построении граничной кривой (одной или нескольких), проходящей через точку (α_0, β_0) .

Уравнение, описывающую искомую граничную кривую, можно строить различными способами. Считая для определенности, что соответствующая функция является монотонной по α , будем строить ее в параметрическом виде:

$$\begin{cases} \alpha(\delta) = \alpha_0 + \delta, \\ \beta(\delta) = \beta_0 + \beta_1\delta + \beta_2\delta^2 + \dots + \beta_k\delta^k + \psi(\delta), \end{cases} \quad (3.16)$$

где δ — малый параметр, $\beta_1, \dots, \beta_k$ — требующие определения коэффициенты, $\|\psi(\delta)\| = o(|\delta|^k)$ при $\delta \rightarrow 0$.

Подставляя (3.16) в (3.15), получим систему вида (1.1), зависящую от малого параметра δ . Применяя описанные в теоремах 2.1 и 2.2 схемы, искомые коэффициенты $\beta_1, \dots, \beta_k$ подберем так, чтобы мультипликаторы соответствующих систем оставались на единичной окружности комплексной плоскости.

Проиллюстрируем приведенную схему на примере уравнения Матье (см., например, [8]):

$$u'' + (\alpha + \beta \cos 2t)u = 0, \quad (3.17)$$

где α и β — вещественные параметры. Уравнение (3.17) является гамильтоновым, что следует учитывать при построении ее областей устойчивости.

Рассмотрим вопрос о граничных точках области устойчивости уравнения (3.17), расположенных на положительной полуоси α плоскости Π параметров (α, β) , а также вопрос о построении граничных кривых, проходящих через эти точки. Из приведенных выше свойств гамильтоновых систем следует, что искомые граничные точки располагаются в точках с координатами $(n^2, 0)$ плоскости (α, β) (здесь n — целые числа).

Для простоты ограничимся рассмотрением случая $n = 1$, т.е. построением граничных кривых области устойчивости уравнения (3.17), проходящих через точку $(1, 0)$ плоскости (α, β) . Это означает, что динамику уравнения (3.17) будем рассматривать при значениях α и β , близких к $\alpha_0 = 1$ и $\beta_0 = 0$ соответственно.

С помощью стандартной замены переменных $x_1 = u$, $x_2 = u'$ приведем уравнение (3.17) к линейной системе

$$x' = A(t, \alpha, \beta)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.18)$$

где

$$A(t, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta \cos 2t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Система (3.18) является линейной системой с периодическими коэффициентами, при этом период равен $T = \pi$.

Кривую Υ_0 , ограничивающую области устойчивости и неустойчивости уравнения (3.17) и проходящую через точку $(1, 0)$ в плоскости параметров (α, β) , будем искать в виде параметрически заданной функции:

$$\begin{cases} \alpha(\delta) = 1 + \delta, \\ \beta(\delta) = \beta_1\delta + \beta_2\delta^2 + \dots + \beta_k\delta^k + o(\delta^k), \end{cases} \quad (3.19)$$

где β_j — коэффициенты, требующие определения.

Ограничимся задачей нахождения первого коэффициента β_1 ; остальные коэффициенты в (3.19) находятся по той же схеме. Подставляя (3.19) в (3.18), получим систему

$$x' = [A_0 + \delta S(t, \beta_1)]x + \tilde{S}(t, \delta)x, \quad (3.20)$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(t, \beta_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(1 + \beta_1 \cos 2t) & 0 \end{bmatrix},$$

а матрица $\tilde{S}(t, \delta)$ удовлетворяет соотношению $\|\tilde{S}(t, \delta)\| = o(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по t .

Обозначим через $V(\delta)$ матрицу монодромии системы (3.20). Так как матрица A_0 имеет простые собственные значения $\pm i$, а период правой части системы (3.18) равен $T = \pi$, то матрица $V(0)$ имеет полупростое собственное значение $\mu_0 = -1$.

В соответствии с приведенной выше схемой по формуле (2.8) вычислим первую производную матрицы монодромии $V(\delta)$ в точке $\delta = 0$. В результате получим матрицу

$$V'(0) = V_1 = \frac{1}{4}\pi \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 - 2 \\ \beta_1 + 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы V_1 — это числа $\pm \pi \sqrt{\beta_1^2 - 4}/4$. Поэтому при $\beta_1 = \pm 2$ мультипликаторы $\mu(\delta)$ системы (3.20) равны $\mu(\delta) = -1 + O(\delta^2)$, т.е. с точностью до δ эти мультипликаторы равны -1 . Таким образом, искомый коэффициент β_1 принимает два значения: $\beta_1 = 2$ и $\beta_1 = -2$. Это подтверждает тот известный факт (см., например, [8]), что через точку $(1, 0)$ в плоскости параметров (α, β) проходит в точности две граничные кривые, ограничивающие области устойчивости и неустойчивости уравнения Матье (3.17); при этом угловые коэффициенты касательных к этим кривым равны 2 и -2 .

3.4. Производная матричной экспоненты. В качестве четвертого приложения рассмотрим одну интересную задачу, формально не связанную с периодическими системами дифференциальных уравнений, но которая может быть решена с помощью приведенных в настоящей статье подходов. Пусть $A(\mu)$ — квадратная вещественная матрица порядка N , которая непрерывно дифференцируемо зависит от скалярного параметра μ . Требуется вычислить производную матричной экспоненты $e^{A(\mu)}$ по μ , т.е. найти $(e^{A(\mu)})'_\mu$. Необходимость вычисления такой производной естественным образом возникает во многих теоретических и практических задачах (см., например, [4, 9]).

Так как по определению

$$e^{A(\mu)} = I + A(\mu) + \frac{1}{2!}(A(\mu))^2 + \dots + \frac{1}{n!}(A(\mu))^n + \dots,$$

то вычисление производной с помощью этой формулы приводит к необходимости подсчета сложного матричного ряда:

$$(e^{A(\mu)})'_\mu = A' + \frac{1}{2!}(A'A + A'A) + \frac{1}{3!}(A'A^2 + AA'A + A^2A') + \dots,$$

где для краткости введены обозначения $A = A(\mu)$ и $A' = (A(\mu))'$. Основная сложность здесь связана с отсутствием свойства коммутативности произведения матриц, т.е. вообще говоря, $AA' \neq A'A$.

Приведенные выше подходы позволяют установить, что верна следующая теорема.

Теорема 3.9. *Производная матричной экспоненты $e^{A(\mu)}$ равна*

$$(e^{A(\mu)})'_\mu = e^{A(\mu)} \int_0^1 e^{-A(\mu)\tau} A'(\mu) e^{A(\mu)\tau} d\tau.$$

4. Доказательства основных утверждений.

Доказательство теоремы 2.1. Участвующие в формуле (2.2) матрицы $X_j(t)$ — это производные ФМР $X(t, \varepsilon)$ системы (1.1) по ε в точке $\varepsilon = 0$:

$$X_1(t) = X'_\varepsilon(t, 0), \quad X_2(t) = X''_\varepsilon(t, 0), \dots \quad (4.1)$$

Другими словами, формула (2.2) — это формула Тейлора для $X(t, \varepsilon)$, существование которой следует из общих теорем о C^k -гладкости по параметру ε решения задачи Коши (2.1) (напомним, что матрица $S(t, \varepsilon)$ предполагается непрерывно дифференцируемой по ε до порядка k включительно). Таким образом, остается вычислить производные матрицы $X(t, \varepsilon)$ по ε до k -го порядка включительно.

Матрица $X(t, \varepsilon)$ является решением задачи Коши (2.1) и, следовательно, выполняется равенство

$$X(t, \varepsilon) = e^{A_0 t} + e^{A_0 t} \int_0^t e^{-A_0 \tau} S(\tau, \varepsilon) X(\tau, \varepsilon) d\tau.$$

Продифференцировав обе части этого равенства по ε , получим

$$X'_\varepsilon(t, \varepsilon) = e^{A_0 t} \int_0^t e^{-A_0 \tau} \left[S'_\varepsilon(\tau, \varepsilon) X(\tau, \varepsilon) + S(\tau, \varepsilon) X'_\varepsilon(\tau, \varepsilon) \right] d\tau. \quad (4.2)$$

Полагая здесь $\varepsilon = 0$ и учитывая равенства (1.2), (2.3) и (4.1), приходим ко второму из равенств (2.4).

Для того, чтобы определить $X_2(t)$, следует продифференцировать равенство (4.2) по ε . Затем, полагая в полученном равенстве $\varepsilon = 0$ и учитывая равенства (1.2), (2.3) и (4.1), приходим к равенству (2.6).

Общая формула (2.5) может быть получена по аналогичной схеме с использованием метода математической индукции. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. Утверждение этой теоремы будем доказывать в более общей постановке. А именно, пусть H — вещественное гильбертово или конечномерное линейное пространство. Пусть $A : H \rightarrow H$ — линейный вполне непрерывный оператор, имеющий простое вещественное изолированное собственное значение μ_0 . Здесь и ниже изолированность собственного значения μ_0 оператора A понимается в том смысле, что некоторая окрестность числа μ_0 (на комплексной плоскости) не содержит точек спектра оператора A , отличных от μ_0 ; в частности, в случае, когда H является бесконечномерным гильбертовым пространством, получим $\mu_0 \neq 0$.

В силу указанного предположения найдутся ненулевые векторы $e, g^* \in H$, для которых выполняются равенства

$$Ae = \mu_0 e, \quad A^* g^* = \mu_0 g^*; \quad (4.3)$$

здесь $A^* : H \rightarrow H$ — сопряженный оператор. Векторы e и g^* определяются неоднозначно: если e и g^* — удовлетворяют равенствам (4.3), то векторы $e_1 = C_1 e$ и $g_1^* = C_2 g^*$ при любых значениях констант C_1 и C_2 также удовлетворяют равенствам (4.3). Поэтому векторы e и g^* можно нормировать, например, равенствами $\|e\| = \|g^*\| = 1$. Но нас больше интересует нормировка этих векторов в соответствии с равенствами (3.1): $\|e\| = 1$ и $(e, g^*) = 1$.

Так как μ_0 является изолированным собственным значением оператора A , то пространство H может быть представлено в виде $H = H_0 \oplus H^0$, где H_0 — содержащее вектор e одномерное подпространство, а H^0 — дополнительное к H_0 инвариантное для A подпространство.

Теорема 4.1. Для любого $u \in H^0$ выполняется равенство $(u, g^*) = 0$.

Доказательство. Справедливость этой теоремы может быть установлена следующими рассуждениями. Обозначим через $\sigma(B)$ спектр линейного оператора B . Так как $\mu_0 \notin \sigma(A : H^0 \rightarrow H^0)$, то (см., например, [3]) существует ограниченный обратный оператор $(A - \mu_0 I)^{-1} : H^0 \rightarrow H^0$. Следовательно, для любого $u \in H^0$ уравнение $(\mu_0 I - A)v = u$ имеет единственное решение $v \in H^0$: $v = (\mu_0 I - A)^{-1}u$. Отсюда и из очевидного равенства $((\mu_0 I - A)x, g^*) = 0$, верного для любого $x \in H$, получим требуемое соотношение $(u, g^*) = 0$. $\square$

Теорема 4.2. *Имеет место соотношение $(e, g^*) \neq 0$.*

Доказательство. Действительно, допустим противное, т.е. $(e, g^*) = 0$. Тогда $g^* \perp H_0$. В соответствии с теоремой 4.1 имеем $g^* \perp H^0$. Отсюда и из равенства $H = H_0 \oplus H^0$ получим $g^* = 0$. Это противоречит тому, что вектор g^* является ненулевым. $\square$

Отметим, что из теорем 4.1 и 4.2 следует, что пространство H^0 может быть определено равенством

$$H^0 = \{x : x \in H, (x, g^*) = 0\}.$$

Справедливость теоремы 3.1 теперь следует из теоремы 4.2: сначала можно нормировать собственный вектор e так, чтобы $\|e\| = 1$, а затем (имея уже нормированный вектор e) нормировать вектор g исходя из требования $(e, g^*) = 1$. $\square$

Доказательство теоремы 3.2.

В силу теоремы 2.2 матрица $V(\varepsilon)$ может быть представлена в виде

$$V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + o(\varepsilon), \quad (4.4)$$

где V_0 и V_1 определяются равенствами (2.8) (см. формулу (2.7)). Из теории возмущений линейных операторов (см., например, [3, 4]) известно, что поскольку оператор V_0 имеет простое собственное значение 1, то оператор (4.4) имеет непрерывную ветвь простых собственных значений $\mu(\varepsilon)$, $\mu(0) = 1$. При этом если соответствующие собственные векторы e и g^* выбраны в соответствии с равенствами (3.1), то функция $\mu(\varepsilon)$ представима в виде (3.2), в котором коэффициент μ_1 определяется равенством $\mu_1 = (V_1 e, g^*)$.

Для завершения доказательства теоремы 3.2 остается показать, что число $\mu_1 = (V_1 e, g^*)$ совпадает с числом (3.3). Действительно, в силу (2.8) имеем:

$$(V_1 e, g^*) = \left(e^{A_0 T} \int_0^T e^{-A_0 \tau} S_1(\tau) e^{A_0 \tau} d\tau e, g^* \right) = \int_0^T (S_1(\tau) e, g^*) d\tau,$$

что и требовалось; здесь учтены равенства $e^{At} e = e$ и $e^{A^* t} g^* = g^*$, верные для любого t . $\square$

Доказательство теоремы 3.3. Как и в случае с теоремой 3.1, теорему 3.3 будем доказывать в более общей постановке. При этом для определенности теорему 3.3 будем доказывать применительно к рассмотренному в теореме 3.5 случаю 3°. Теорему 3.3 применительно к рассмотренному в теореме 3.4 случаю 2° можно доказать по той же схеме.

Пусть H — вещественное гильбертово или конечномерное линейное пространство. Пусть $A : H \rightarrow H$ — линейный вполне непрерывный оператор, имеющий полупростое вещественное собственное значение μ_0 кратности 2. Тогда найдутся такие ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in H$, что выполняются равенства

$$Ae = \mu_0 e, \quad Ag = \mu_0 g, \quad A^* e^* = \mu_0 e^*, \quad A^* g^* = \mu_0 g^*; \quad (4.5)$$

при этом векторы e и g (векторы e^* и g^*) линейно независимы. Векторы e, g, e^*, g^* определяются неоднозначно.

Докажем более сильное утверждение, чем теорема 3.3, а именно, докажем, что векторы e, g, e^*, g^* можно нормировать в соответствии с равенствами

$$\|e\| = \|g\| = 1, \quad (4.6)$$

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1, \quad (e, g^*) = (g, e^*) = 0. \quad (4.7)$$

Другими словами, покажем, что наряду с указанной в теореме 3.3 нормировкой (3.5) можно обеспечить и выполнение нормировки (4.6).

Ниже будут использованы следующие два вспомогательных утверждения, в справедливости которых можно убедиться прямым подсчетом.

Пусть e, g, e^*, g^* — собственные векторы матриц A_0 и A_0^* , удовлетворяющие равенствам (4.5).

Теорема 4.3. *Векторы e, g, e^*, g^* удовлетворяют соотношениям*

$$(e, e^*) = (g, g^*), \quad (e, g^*) = -(g, e^*), \quad (e, e^*)^2 + (e, g^*)^2 > 0.$$

Для произвольных вещественных чисел a, b, α, β положим

$$e_1 = ae + bg, \quad g_1 = ag - be, \quad e_1^* = \alpha e^* + \beta g^*, \quad g_1^* = \alpha g^* - \beta e^*. \quad (4.8)$$

Теорема 4.4. Векторы (4.8) при любых a, b, α, β удовлетворяют равенствам (4.5), в которых вместо e, g, e^*, g^* следует подставить e_1, g_1, e_1^*, g_1^* . Обратно, если некоторый набор векторов e_1, g_1, e_1^*, g_1^* удовлетворяет равенствам (4.5), то эти векторы представляются в виде (4.8).

Приведем сначала формулы, обеспечивающие выполнение равенств (4.6). Естественно при этом предполагать, что

$$((e, e) - 1)^2 + ((g, g) - 1)^2 > 0.$$

Положим

$$e_1 = r(e \cos \varphi + g \sin \varphi), \quad g_1 = r(g \cos \varphi - e \sin \varphi). \quad (4.9)$$

Эти векторы совпадают с соответствующими векторами из (4.8) при $a = r \cos \varphi$ и $b = r \sin \varphi$ и поэтому для них верна теорема 4.4. Подберем $r > 0$ и φ таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$(e_1, e_1) = (g_1, g_1) = 1. \quad (4.10)$$

Этим самым будет доказано, что векторы e, g можно выбрать так, чтобы выполнялись нужные равенства (4.6).

Возможны следующие случаи:

S1: $(e, g) = 0, (e, e) = (g, g)$;

S2: $(e, g) = 0, (e, e) \neq (g, g)$;

S3: $(e, g) \neq 0$.

В случае S1 в качестве r в (4.9) следует положить $r = 1/\sqrt{(e, e)}$, а угол φ можно взять любым. Следовательно, векторы

$$e_1 = \frac{e \cos \varphi + g \sin \varphi}{\sqrt{(e, e)}}, \quad g_1 = \frac{g \cos \varphi - e \sin \varphi}{\sqrt{(e, e)}}$$

при любом значении φ удовлетворяют равенствам (4.10).

В случае S2 в качестве r в (4.9) следует положить

$$r = \sqrt{\frac{2}{(e, e) + (g, g)}}, \quad (4.11)$$

а в качестве φ следует взять любой из углов $\varphi = \pi/4 + n\pi/2$, где n — целое число.

Наконец, в случае S3 в качестве r в (4.9) следует выбрать число (4.11), а в качестве φ следует взять любой из углов

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(g, g) - (e, e)}{2(e, g)} + \frac{n\pi}{2},$$

где n — целое число.

Пусть в равенствах (4.9) значения r и φ уже выбраны так, чтобы для векторов e_1, g_1 выполнялись равенства (4.10). Выберем теперь векторы e_1^*, g_1^* в соответствии с равенствами (4.8) так, чтобы выполнялись нужные равенства (4.7):

$$(e_1, e_1^*) = (g_1, g_1^*) = 1, \quad (e_1, g_1^*) = (g_1, e_1^*) = 0. \quad (4.12)$$

Отметим, что в силу теоремы 4.3 для выполнения этих четырех равенств достаточно обеспечить выполнение двух равенств

$$(e_1, e_1^*) = 1, \quad (e_1, g_1^*) = 0.$$

С этой целью положим

$$\alpha = \frac{(e, e^*) \cos \varphi - (e, g^*) \sin \varphi}{rC_0}, \quad \beta = \frac{(e, g^*) \cos \varphi + (e, e^*) \sin \varphi}{rC_0},$$

где $C_0 = (e, e^*)^2 + (e, g^*)^2 > 0$ (см. теорему 4.3). Тогда векторы $e_1^* = \alpha e^* + \beta g^*$ и $g_1^* = \alpha g^* - \beta e^*$ удовлетворяют равенствам (4.12). $\square$

Доказательство теоремы 3.9. Рассмотрим вспомогательную линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\varepsilon)x, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (4.13)$$

в которой $A(\varepsilon)$ — вещественная постоянная квадратная матрица, гладко (непрерывно дифференцируемо) зависящая от скалярного параметра ε . Матричная экспонента $X(t, \varepsilon) = e^{A(\varepsilon)t}$ является ФМР системы (4.13).

Систему (4.13) можно рассматривать и как линейную систему с периодическими по t коэффициентами, причем в качестве периода T можно использовать любое положительное число. Полагая для определенности $T = 1$, получим, что матрица монодромии этой системы имеет вид $V(\varepsilon) = X(1, \varepsilon) = e^{A(\varepsilon)}$; в частности, $V_0 = V(0) = e^{A(0)}$. Теорема 3.9 будет доказана, если показать справедливость равенства

$$V'_\varepsilon(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = (e^{A(\varepsilon)})'_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = e^{A_0} \int_0^1 e^{-A_0\tau} A'(0) e^{A_0\tau} d\tau. \quad (4.14)$$

Полагая $A_0 = A(0)$, систему (4.13) представим в виде

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + (A(\varepsilon) - A_0)]x, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (4.15)$$

т.е. в виде системы (1.1) при $S(t, \varepsilon) = A(\varepsilon) - A_0$; тогда, в частности, из формул (2.3) получим равенство

$$S_1(t) = S'_\varepsilon(t, 0) = A'_\varepsilon(0).$$

Отсюда и из формул (2.8) применительно к системе (4.15) получим равенство (4.14). $\square$

5. Заключение. В статье рассмотрены системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, зависящие от малого параметра. Предполагается, что невозмущенная система является автономной. Предложены формулы для построения фундаментальной матрицы решений и матрицы монодромии системы в виде разложения по степеням малого параметра. Получены новые эффективные формулы для вычисления коэффициентов соответствующих разложений, а также новые формулы для вычисления мультипликаторов изучаемой линейной системы. Рассмотрен ряд приложений в задаче теории возмущений линейных операторов, в задаче исследования устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, в задаче построения областей устойчивости линейных динамических систем и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. ж. — 2001. — 42, № 2. — С. 332–348.
2. Ибрагимова Л. С., Мустафина И. Ж., Юмагулов М. Г. Асимптотические формулы в задаче построения областей гиперболичности и устойчивости динамических систем // Уфим. мат. ж. — 2016. — № 3. — С. 59–81.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1975.
4. Красносельский М. А., Юмагулов М. Г. Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений // Докл. РАН. — 1999. — 365, № 2. — С. 162–164.
5. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
6. Перов А. И. Об одном критерии устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Автомат. телемех. — 2013. — № 2. — С. 22–37.
7. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. — М.: Наука, 1971.
8. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.
9. Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Имангулова Э. С. Главные асимптотики в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа и их приложения // Диффер. уравн. — 2017. — 53, № 12. — С. 1627–1642.

10. Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Мустафина И. Ж. Исследование границ областей устойчивости двухпараметрических динамических систем// Автомат. телемех. — 2017. — № 10. — С. 74–89.
11. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972.
12. Chiang H. D., Alberto L. F. Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems: Theory, Estimation, and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2015.
13. Jianjun Paul Tiana, Jin Wangb Some results in Floquet theory, with application to periodic epidemic models// Appl. Anal. — 2015. — 94, № 6. — P. 1128–1152.
14. Seyranian A. P., Mailybaev A. A. Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. — New Jersey: World Scientific, 2003.
15. Traversa F. L., Di Ventra M., Bonani F. Generalized Floquet theory: application to dynamical systems with memory and Bloch's theorem for nonlocal potentials// Phys. Rev. Lett. — 2013. — 110. — 170602.

Юмагулов Марат Гаязович

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

E-mail: yum_mg@mail.ru

Ибрагимова Лилия Сунагатовна

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

E-mail: lilibr@mail.ru

Белова Анна Сергеевна

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

E-mail: 89177662488@yandex.ru