ISSN 0233-6723

ВИНИТИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 162

Москва 2019

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 162

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Москва 2019

СОДЕРЖАНИЕ

О лакунах в спектре лапласиана с краевым условием Дирихле
в полосе с осциллирующей границей
(*Д. И. Борисов*) 3

Поведение коэффициентов ряда экспонент конечного порядка роста вблизи границы
(*А. М. Гайсин, Г. А. Гайсина*) 15

Обобщенная интерполяционная задача типа Коревара—Диксона
(*Р. А. Гайсин*) 25

Определение температурных полей в пространственно-неоднородной нелинейной среде
(*А. В. Жибер, Н. М. Цирельман*) 34

Представление рядами экспонент функций в нормированных подпространствах $A^\infty(D)$
(*К. П. Исаев, К. В. Трунов, Р. С. Юлмухаметов*) 42

Аппроксимация полиномами в весовом пространстве
бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой
(*И. Х. Мусин*) 57

Интерполяция суммами рядов экспонент с показателями,
сгущающимися в одном направлении
(*С. Г. Мерзляков, С. В. Попенов*) 62

Симметрии одной периодической цепочки
(*М. Н. Попцова*) 80

Законы сохранения для гиперболических уравнений:
локальный алгоритм поиска прообраза относительно полной производной
(*С. Я. Старцев*) 85

Порядковые версии теоремы Хана—Банаха и огибающие.
II. Применения в теории функций
(*Б. Н. Хабибуллин, А. П. Розит, Э. Б. Хабибуллина*) 93

Инвариантные многообразия интегрируемых уравнений гиперболического типа
и их приложения
(*И. Т. Хабибуллин, А. Р. Хакимова*) 136

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 162 (2019). С. 3–14

УДК 517.958, 517.984, 519.21

О ЛАКУНАХ В СПЕКТРЕ ЛАПЛАСИАНА С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ В ПОЛОСЕ С ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2019 г. Д. И. БОРИСОВ

Аннотация. В работе рассматривается оператор Лапласа в плоской полосе, нижняя граница которой периодически осциллирует. Период и амплитуда осцилляций считаются двумя независимыми параметрами, достаточно малыми. На границе всюду ставится условие Дирихле. Основной результат утверждает отсутствие внутренних лакун в нижней части спектра рассматриваемого оператора при достаточно малых периоде и амплитуде. При этом верхние оценки на период и амплитуду выписаны явно, в виде конкретных ограничений с конкретными числовыми константами. Длина нижней части спектра, в которой гарантировано отсутствие лакун, также выписана в явном виде в терминах конкретной функции периода и амплитуды.

Ключевые слова: гипотеза Бете—Зоммерфельда, лапласиан, полоса, осциллирующая граница.

ON LACUNAS IN THE SPECTRUM OF THE LAPLACIAN WITH THE DIRICHLET BOUNDARY CONDITION IN A STRIP WITH OSCILLATING BOUNDARY

© 2019 D. I. BORISOV

Abstract. In this paper, we consider the Laplace operator in a flat strip whose lower boundary periodically oscillates under the Dirichlet boundary condition. The period and the amplitude of oscillations are two independent small parameters. The main result obtained in the paper is the absence of internal lacunas in the lower part of the spectrum of the operator for sufficiently small period and amplitude. We obtain explicit upper estimates of the period and amplitude in the form of constraints with specific numerical constants. The length of the lower part of the spectrum, in which the absence of lacunas is guaranteed, is also expressed explicitly in terms of the period function and the amplitude.

Keywords and phrases: Bethe–Sommerfeld hypothesis, Laplacian, strip, oscillating boundary.
AMS Subject Classification: 35P05, 47A10, 35B27

1. Введение. Классическая гипотеза Бете—Зоммерфельда формулируется следующим образом: у многомерных периодических дифференциальных операторов спектр содержит конечное число внутренних лакун. Эта гипотеза была подтверждена для операторов Шрёдингера с потенциалами из широкого класса в различных размерностях (см. [4, 5, 14, 15, 18, 21]). Удалось также исследовать случай магнитного оператора Шрёдингера во всём пространстве (см. [16, 17]). Операторы наиболее общего вида, для которых эта гипотеза была доказана — это полигармонические операторы во всём пространстве, возмущённые псевдодифференциальными операторами меньшего порядка (см. [6, 19, 20]). Насколько нам известно, для областей, отличных от всего пространства, эта гипотеза была доказана лишь в одном случае — для оператора Шрёдингера в плоской полосе достаточно большой ширины (см. [7]). Отметим ещё, что для операторов во

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00046).

ISSN 0233–6723

всем пространстве был известен следующий факт: если возмущающий потенциал достаточно мал, то в спектре соответствующего периодического оператора нет ни одной внутренней лакуны (см., например, [14], [5, теоремы 15.2, 16.2]). С учётом очевидного растяжение переменных этот факт можно сформулировать иначе: если для периодического оператора Шрёдингера во всём пространстве период достаточно мал, то в его спектре отсутствуют внутренние лакуны. Данное утверждение подсказывает и мотивирует исследование усиленной гипотезы Бете—Зоммерфельда: отсутствие внутренних лакун в спектре периодических операторов при малых периодах. Ясно, что подобные вопросы следует рассматривать для нетривиальных случаев, когда упомянутое выше растяжение переменных неприменимо. Простейшим примером здесь являются периодические оператора в плоской полосе: указанное растяжение неизбежно приводит к полосе расширяющейся ширины, т.е. к переменной области.

В 2017 г. началось исследование сформулированной усиленной гипотезы Бете—Зоммерфельда (см. [1–3]). Рассматривался лапласиан в плоской полосе фиксированной ширины с потенциалом (см. [1]), магнитным потенциалом (см. [3]) и периодической сменой типа краевых условий (см. [2]). Основной полученный результат — отсутствие внутренних лакун в нижней части спектра для достаточно малого периода. Под нижней частью понимается зона спектра до некоторой точки; при этом данная точка найдена явно в виде достаточно простой функции периода. Условие малости периода тоже выписано явно: утверждение верно, если период меньше некоторого фиксированного числа, выписанного явно, но включающего в себя специфические характеристики возмущения: осцилляция потенциала (см. [1]), максимум модуля магнитного потенциала (см. [3]), соотношение частей границы с разными типами краевых условий (см. [2]). Указанный результат не является полным доказательством усиленной гипотезы Бете—Зоммерфельда, а только частичным её подтверждением: удалось доказать отсутствие лакун лишь в части спектра, однако было также установлено, что длина данной нижней части спектра растёт с уменьшением периода. Следует подчеркнуть, что за исключение случая возмущения потенциалом, возмущение магнитным полем и сменой краевых условий не позволяет применить методы работы [7] и доказать в этих случаях хотя бы классическую гипотезу Бете—Зоммерфельда ни для каких периодов.

Отметим, что исследование периодических операторов в полосах с малым периодом также мотивировано сравнительно недавними работами по граничному усреднению в полосах [8–13], в которых рассматривались эллиптические операторы с частой сменой краевых условий, с быстро осциллирующей границей и с мелкой перфорацией вдоль заданной кривой. Было показано, что резольвенты возмущённых операторов сходятся в операторной норме к резольвентам усреднённых операторов. Отсюда вытекает сходимость соответствующих зонных спектров, которая, однако, не может гарантировать отсутствие внутренних лакун в спектре возмущённых операторов, несмотря на отсутствие таковых в предельном спектре. Единственный гарантированный факт — это возрастание расстояния от нижнего края спектра до первой возможной лакуны при уменьшении периода, причём скорость возрастания неизвестна. Кроме того, для задач с частой сменой в [10–12] были выписаны асимптотики первых зонных функций. Отсюда следовало, что расстояние до первой возможной лакуны пропорционально по крайней мере обратной второй степени малого параметра. Подчеркнём, что результаты работ [1–3] существенно лучше: здесь показано, что расстояние до первой возможной лакуны пропорционально по меньшей мере обратной шестой степени малого параметра.

В настоящей работе мы продолжаем исследования, начатые в [1–3], но для модели, предложенной в [9]. Речь идёт об операторе Лапласа в полосе, нижняя граница которой часто и периодически осциллирует. Период и амплитуда осцилляций — два независимых достаточно малых параметра. Всюду на границе выставляется краевое условие Дирихле. Основной полученный результат аналогичен результатам работ [1–3]: отсутствие лакун в нижней части спектра, причем верхние оценки и длина зоны спектра, где гарантированно нет лакун, вновь вычислены явно в терминах конкретных чисел и функций. Основное отличие данной работы от предыдущих — в характере возмущений. Изменение границы меняет формы ячейки периодичности, и такое возмущение оказывается гораздо более сильным, нежели потенциал, магнитное поле или смена краевых условий. Последние возмущения можно считать в некотором смысле возмущениями первого порядка, в том отношении, что соответствующие возмущающие операторы ограничены как операторы из W_2^1 в L_2. Изменение формы границы — это уже возмущение второго порядка, серьезно ухудшающее серию основных оценок в доказательстве основного результата и, как следствие, уменьшающее длину нижней части спектра, где доказывается отсутствие лакун. Вместе с тем, длина данной части спектра остаётся растущей с уменьшением периода, но точный порядок малости её зависит от того, каким образом стремятся к нулю период и амплитуда осцилляций. Подчеркнём ещё, что асимптотики соответствующих первых зонных функций в [9] построены не были; более того, это достаточно нетривиальная задача в случае, когда период стремится к нулю быстрее, чем амплитуда. В настоящей же работе никаких условий на взаимное поведение периода и амплитуды не налагается.

Отметим наконец, что хотя для рассматриваемой модели достаточно разумно предполагать выполнение как классической, так и усиленной гипотезы Бете—Зоммерфельда, имеющиеся на сегодняшний день известные методы не позволяют доказать ни одной из этих гипотез.

2. Постановка задачи и основные результаты. Пусть $x = (x_1, x_2)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^2$, ε и μ — положительные параметры, $b = b(t)$ — некоторая 2π-периодическая функция, не равная тождественно нулю. Предполагаем, что

$$-\pi \leqslant b \leqslant 0, \quad b(\pi + 2\pi m) = 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad b \in C^1(\mathbb{R}). \tag{1}$$

Через $\Pi_{\varepsilon,\mu}$ обозначим бесконечную полосу с периодически осциллирующей границей:

$$\Pi_{\varepsilon,\mu} := \left\{ x : x_1 \in \mathbb{R},\ \mu b\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) < x_2 < \pi \right\}.$$

В области $\Pi_{\varepsilon,\mu}$ рассматривается оператор Лапласа с условием Дирихле. Этот оператор определяется как самосопряжённый полуограниченный снизу оператор $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$, соответствующий квадратичной форме

$$\mathfrak{h}_{\varepsilon,\mu}[u] := \|\nabla u\|^2_{L_2(\Pi_{\varepsilon,\mu})}$$

в $L_2(\Pi_{\varepsilon,\mu})$ на области определения

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_{\varepsilon,\mu}) = \mathring{W}_2^1(\Pi_{\varepsilon,\mu}),$$

состоящей из функций из $W_2^1(\Pi_{\varepsilon,\mu})$ с нулевым следом на $\partial\Pi_{\varepsilon,\mu}$.

Обозначим через $[\cdot]$ целую часть числа, а через $\sigma(\cdot)$ — спектр оператора.

В силу периодичности функции b оператор $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ является периодическим и потому имеет зонный спектр. Наш основной результат утверждает отсутствие внутренних лакун в нижней части спектра этого оператора для достаточно малых ε.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ таковы, что*

$$5\varepsilon + \frac{9\pi + 12}{2}\mu < \frac{7^2 \cdot 3319^2}{2^4 \cdot 5^{12}}, \quad 4\varepsilon + \frac{9\pi + 12}{2}\mu < \frac{1369}{10^4}. \tag{2}$$

Введем обозначения

$$z(\varepsilon,\mu) = \frac{1}{(3\pi\mu)^{1/2}}\left(w^{1/3}(\varepsilon,\mu) - \frac{4(\varepsilon+\mu)}{w^{1/3}(\varepsilon,\mu)} \right), \tag{3}$$

$$w(\varepsilon,\mu) := \sqrt{27\pi\beta^2\mu + 64(\varepsilon+\mu)^3} + 3^{3/2}\beta(\pi\mu)^{1/2}, \quad \beta := \frac{7^2 \cdot 3319^2}{2^4 \cdot 5^{12} \cdot \sqrt{3}}.$$

Часть спектра

$$\sigma(\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}) \cap \left(-\infty, \frac{z^2(\varepsilon,\mu)}{\varepsilon^2} \right)$$

оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ не имеет внутренних лакун. Для функции $z(\varepsilon,\mu)$ верны оценки

$$\frac{4^{2/3}\beta}{6\big(3^{3/2}\beta\pi^{1/2}\mu^{1/2} + 4(\varepsilon+\mu)^{3/2}\big)^{2/3}} \leqslant z(\varepsilon,\mu) \leqslant \frac{3\beta}{2(\varepsilon+\mu)}. \tag{4}$$

Обсудим теорему 1. Основное её утверждение — отсутствие лакун в спектре оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ вплоть до точки $z^2(\varepsilon,\mu)/\varepsilon^2$. Данное утверждение верно при условии (2), которое означает, что числа ε и μ достаточно малы. Поведение функции $z(\varepsilon,\mu)$ при таких ε и μ неплохо описывается оценкой (4). В частности, эта оценка означает, что функция $z(\varepsilon,\mu)$ стремится к нулю при $\varepsilon\to+0$ и $\mu\to+0$, и тем самым длина части спектра, в которой гарантировано отсутствие внутренних лакун, возрастает. Если предполагать некоторую функциональную зависимость между ε и μ, то поведение функции $z(\varepsilon,\mu)$ можно уточнить на основе явной формулы (3). Отметим ещё, что для функции $z(\varepsilon,\mu)$ в работе получено ещё одно представление, которое может быть полезным при изучении поведения данной функции (см. формулу (35)).

3. Считающие функции. В этом разделе мы обсуждаем предварительные понятия и факты, которые далее будут использованы в доказательстве теоремы 1.

В первую очередь введём ячейку периодичности и зонные функции для оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$. Ячейка периодичности имеет вид

$$\square_{\varepsilon,\mu} := \left\{x:\ |x_1|<\varepsilon\pi,\ \mu b\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)<x_2<\pi\right\}.$$

Зонные функции оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ вводятся как упорядоченные по возрастанию с учётом кратностей собственные значения $E^k_{\varepsilon,\mu}(\tau)$, $k\geqslant 1$, оператора с дифференциальным выражением

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\tau) := \left(i\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^2-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \tag{5}$$

в $\square_{\varepsilon,\mu}$ с краевым условием Дирихле на $\gamma_+ := \partial\square_{\varepsilon,\mu}\cap\Gamma_+$, периодическими краевыми условиями на боковых сторонах $\square_{\varepsilon,\mu}$. На нижней границе

$$\gamma_{\varepsilon,\mu} := \left\{x:\ x_2=\mu b\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right),\ |x_1|<\varepsilon\pi\right\}$$

для оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ ставится краевое условие Дирихле.

Оператор $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\tau)$ строго определяется как самосопряжённый оператор в $L_2(\square_{\varepsilon,\mu})$, соответствующий квадратичной форме

$$\mathfrak{h}_{\varepsilon,\mu}(\tau)[u] := \left\|\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\tau}{\varepsilon}\right)u\right\|^2_{L_2(\square_{\varepsilon,\mu})}+\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|^2_{L_2(\square_{\varepsilon,\mu})},\quad \tau\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],$$

в $L_2(\square_{\varepsilon,\mu})$ на области определения

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_{\varepsilon,\mu}(\tau)) = \mathring{W}^1_{2,\mathrm{per}}(\square_{\varepsilon,\mu},\gamma_+\cup\gamma_\varepsilon);$$

пространство $\mathring{W}^1_{2,\mathrm{per}}(\square_{\varepsilon,\mu},S)$ определяется как множество функций из $W^1_2(\square_{\varepsilon,\mu})$, удовлетворяющих периодическому краевому условию на боковых сторонах $\square_{\varepsilon,\mu}$ и имеющих нулевой след на $\partial\square_{\varepsilon,\mu}\cap\partial\Pi_{\varepsilon,\mu}$.

Так как форма $\mathfrak{h}_{\varepsilon,\mu}(\tau)$ неотрицательна, то зонные функции $E^k_{\varepsilon,\mu}(\tau)$ неотрицательны для всех значений ε, μ, τ, k.

Для произвольного $L>0$ через $N_{\varepsilon,\mu}(L,\tau)$ обозначим масштабированную считающую функцию оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\tau)$, а именно, число зонных функций $E_{\varepsilon,\mu}(\tau)$, не превосходящих L/ε^2:

$$N_{\varepsilon,\mu}(L,\tau) := \max\left\{k:\ E^\varepsilon_k(\tau)\leqslant\frac{L}{\varepsilon^2}\right\}. \tag{6}$$

Отсутствие лакун в части спектра $[\lambda_-,\lambda_+]$ оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ эквивалентно выполнению неравенства

$$\sup_\tau N_{\varepsilon,\mu}(L,\tau)-\inf_\tau N_{\varepsilon,\mu}(L,\tau)\geqslant 1 \tag{7}$$

для $L\in[\varepsilon^2\lambda_-,\varepsilon^2,\lambda_+]$ (см., например, [3, § 3], [2, § 3]).

Введём вспомогательные операторы. Через $\mathcal{H}_0(\tau)$ обозначим оператор $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ при $\mu=0$, т.е. в ячейке $\square_0=\{x:\ |x_1|<\varepsilon\pi,\ 0<x_2<\pi\}$ с краевым условием Дирихле на нижней границе. Через $\mathcal{H}_\mu(\tau)$ обозначим оператор $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ при $b\equiv-\pi$, т.е. в ячейке $\square_\mu := \{x:\ |x_1|<\varepsilon\pi,\ -\pi\mu<x_2<\pi\}$ с краевым условием Дирихле на нижней границе. Соответствующие зонные функции и считающие функции, введённые аналогично (6), обозначим через $E_0^k(\tau)$, $N_0(L,\tau)$ и $E_\mu^k(\tau)$, $N_\mu(L,\tau)$.

Считающие функции введённых вспомогательных операторов позволяют оценить считающие функции операторов $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$.

Лемма 1. *Для всех ε, L, k, τ выполнены неравенства*

$$N_0(L,\tau) \leqslant N_{\varepsilon,\mu}(L,\tau) \leqslant N_\mu(L,\tau). \tag{8}$$

Нижняя граница спектра оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ удовлетворяет неравенству

$$\inf \sigma(\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}) \geqslant \frac{1}{(1+\mu)^2}. \tag{9}$$

Доказательство. Внутри ячейки $\square_{\varepsilon,\mu}$ введём дополнительную границу $\{x: \ |x_1| < \varepsilon\pi, \ x_2 = 0\}$ и поставим на ней граничное условие Дирихле. Тогда в силу стандартной вилки Дирихле—Неймана и условий (1) для оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\tau)$ верно неравенство

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\tau) \leqslant \mathcal{H}_0(\tau) \oplus \tilde{\mathcal{H}}_0(\tau)$$

в смысле квадратичных форм, где $\tilde{\mathcal{H}}_0(\tau)$ — оператор в $L_2(\square_{\varepsilon,\mu} \setminus \square_0)$ с дифференциальным выражением (5) и краевым условием Дирихле. В силу принципа минимакса отсюда следуют соответствующие оценки для собственных значений и оценка для считающих функций:

$$N_{\varepsilon,\mu}(L,\tau) \geqslant N_0(L,\tau) + \tilde{N}_0(L,\tau) \geqslant N_0(L,\tau),$$

где $\tilde{N}_0(L,\tau)$ — считающая функция оператора $\tilde{\mathcal{H}}_0(\tau)$. Аналогично, верна оценка

$$\mathcal{H}_\mu(\tau) \leqslant \mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\tau) \oplus \tilde{\mathcal{H}}_\mu(\tau), \tag{10}$$

где $\tilde{\mathcal{H}}_\mu(\tau)$ — оператор в $L_2(\square_\mu \setminus \square_{\varepsilon,\mu})$ с дифференциальным выражением (5) и краевым условием Дирихле, и поэтому

$$N_\mu(L,\tau) \geqslant N_{\varepsilon,\mu}(L,\tau) + \tilde{N}_\mu(L,\tau) \geqslant N_{\varepsilon,\mu}(L,\tau),$$

где $\tilde{N}_\mu(L,\tau)$ — считающая функция оператора $\tilde{\mathcal{H}}_\mu(\tau)$. Это завершает доказательство неравенств (8).

Так как наименьшее собственное значение оператора $\mathcal{H}_\mu(\tau)$ находится разделением переменных и имеет вид $1/(1+\mu)^2$, то в силу (10) немедленно получаем (9). Лемма доказана. $\square$

Из неравенства (8) следует, что

$$\sup_\tau N_{\varepsilon,\mu}(L,\tau) \geqslant \sup_\tau N_0(L,\tau), \quad \inf_\tau N_\varepsilon(L,\tau) \leqslant \inf_\tau N_\mu(L,\tau).$$

Используя эти оценки, аналогично [3, § 3], [2, § 3] несложно доказать, что для выполнения неравенства (7) достаточно подобрать такие точки $\tau_{\min}$, $\tau_{\max} \in [-1/2, 1/2]$, что

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(L,\tau_{\min}) > 0. \tag{11}$$

Это неравенство послужит далее основой доказательства теоремы 1.

Кроме того, если при некотором L и некотором $\tau_{\min} \in [-1/2, 1/2]$ выполнено равенство

$$N_\mu(L,\tau_{\min}) = 0, \tag{12}$$

то это означает, что в спектре оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ ниже (левее) точки L/ε^2 отсутствуют внутренние лакуны.

Зонные функции $E_0^k(\tau)$ и $E_\mu^k(\tau)$ и соответствующие собственные функции легко находятся разделением переменных:

$$\begin{aligned} E_0^k(\tau) &= \frac{(n+\tau)^2}{\varepsilon^2} + m^2, & \Psi_0^k(x) &= e^{inx_1/\varepsilon} \sin m x_2, \\ E_\mu(\tau) &= \frac{(n+\tau)^2}{\varepsilon^2} + \frac{m^2}{(1+\mu)^2}, & \Psi_0^k(x) &= e^{inx_1/\varepsilon} \sin m \frac{x_2 + \pi\mu}{1+\mu}, \end{aligned}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, а индекс k следует выбирать из условия упорядочения соответствующих собственных значений. Поэтому для соответствующих считающих функций верны равенства:

$$\begin{aligned} N_0(L,\tau) &= \#\left\{(n,m):\ (n+\tau)^2+\varepsilon^2 m^2 \leqslant L,\ n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N}\right\} = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}:\ |n+\tau|\leqslant L} \left[\frac{\sqrt{L-(n+\tau)^2}}{\varepsilon}\right] = \sum_{n=-[L+\tau]}^{[L-\tau]} \left[\frac{\sqrt{L-(n+\tau)^2}}{\varepsilon}\right], \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} N_\mu(L,\tau) &= \#\left\{(n,m):\ (n+\tau)^2+\frac{\varepsilon^2}{(1+\mu)^2} m^2 \leqslant L,\ n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N}\right\} = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}:\ |n+\tau|\leqslant L} \left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{L-(n+\tau)^2}\right] = \sum_{n=-[L+\tau]}^{[L-\tau]} \left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{L-(n+\tau)^2}\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

4. Доказательство теоремы 1. Настоящий раздел посвящён доказательству теоремы 1. Сразу отметим, что в силу оценки (9), при проверке условий (11) или (12) достаточно предполагать, что

$$L \geqslant \frac{\varepsilon^2}{(1+\mu)^2}.$$

Рассмотрим значения

$$\frac{\varepsilon}{1+\mu} \leqslant L < \frac{1}{2}.$$

Выберем $\tau_{\min} = 1/2$. Тогда из (14) выводим:

$$N_\mu(L,\tau_{\min}) = \sum_{n=0}^{-1} \left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{L-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right] = 0,$$

и условие (12) выполнено, что означает отсутствие лакун до спектральной точки $1/(4\varepsilon^2)$.

Далее рассматриваем случай

$$L \geqslant \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Введем обозначения $K := [L]$, $\alpha := L - [L]$. Величины $\tau_{\min}$, $\tau_{\max}$ будем выбирать по следующим правилам:

$$\begin{aligned} \tau_{\min} &:= \begin{cases} \alpha & \text{при}\quad 0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ 1-\alpha & \text{при}\quad \dfrac{1}{2} \leqslant \alpha < 1, \end{cases} \\ \tau_{\max} &:= \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{при}\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{13}{100} \quad \text{или} \quad \dfrac{39267}{62500} \leqslant \alpha \leqslant 1, \\ 0 & \text{при}\quad \dfrac{13}{100} < \alpha < \dfrac{39267}{62500}. \end{cases} \end{aligned} \tag{16}$$

Указанный выбор $\tau_{\min}$, $\tau_{\max}$ мотивирован предварительными численными экспериментами. Оказалось, что при данном выборе значения функций $N_0(L,\tau_{\max})$ и $N_\mu(L,\tau_{\min})$ достаточно точно аппроксимируют истинные значения максимума и минимума этих функций.

С учётом определения чисел $\tau_{\min}$ и $\tau_{\max}$ в доказательстве необходимо рассмотреть четыре независимых случая:

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{13}{100}, \qquad \frac{13}{100} < \alpha < \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{39267}{62500}, \qquad \frac{39267}{62500} \leqslant \alpha < 1.$$

При этом считаем выполненным условие (15).

При рассмотрении этих случаев нам понадобятся следующие вспомогательные функции:

$$F_0(L,\xi,t) := 2F_1(L,\xi,0) - F_1(L,\xi,t) - F_1(L,\xi,-t), \qquad F_1(L,\xi,t) := \sqrt{L^2-(\xi+t)^2}.$$

В силу монотонного убывания функции F_1 по ξ для любого $a \in [0,1)$ верна оценка

$$\sum_{n=0}^{[L-a]} F_1(L,n,a) \leqslant \sqrt{L^2-a^2} + \int\limits_0^{L-a} \sqrt{L^2-(t+a)^2}\,dt =$$
$$= \frac{\pi L^2}{4} + \left(1-\frac{a}{2}\right)\sqrt{L^2-a^2} - \frac{L^2}{2}\arcsin\frac{a}{L} \leqslant \frac{\pi L^2}{4} + L. \quad (17)$$

Введём обозначения

$$Z_1(\varepsilon,\mu) := \frac{1369}{4\cdot 10^4} - \frac{9\pi+12}{8}\mu - \varepsilon, \quad Z_2(\varepsilon,\mu) := \frac{7^2\cdot 3319^2}{2^4\cdot 5^{13}} - \frac{9\pi+12}{10}\mu - \varepsilon.$$

В силу условия (2) имеем

$$Z_1(\varepsilon,\mu) > 0, \quad Z_2(\varepsilon,\mu) > 0 \quad (18)$$

для всех рассматриваемых пар (ε,μ).

4.1. Случай $0 \leqslant \alpha \leqslant 13/100$. В силу (15) здесь необходимо имеем $K \geqslant 1$. В этом случае $\tau_{\max} = 1/2$, $\tau_{\min} = \alpha$ и в силу формул (13), (14) получаем:

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(L,\tau_{\min}) = \sum_{n=-K}^{K-1}\left[\frac{\sqrt{(K+\alpha)^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}}{\varepsilon}\right] -$$
$$- \sum_{n=-K}^{K}\left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-(n+\alpha)^2}\right] = \sum_{n=0}^{K-1}\left(2\left[\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right] -\right.$$
$$\left. - \left[\frac{(1+\mu)}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-(n+\alpha)^2}\right] - \left[\frac{(1+\mu)}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-(n+1-\alpha)^2}\right]\right).$$

Используя теперь оценку $z-1 \leqslant [z] \leqslant z$, получаем

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(L,\tau_{\min}) \geqslant \frac{S_1(K,\alpha)-\mu S_2(K,\alpha)}{\varepsilon} - 2K, \quad (19)$$

где введены обозначения

$$S_1(K,\alpha) := \sum_{n=0}^{K-1} F_2(K,\alpha,n), \quad S_2(K,\alpha) := \sum_{n=0}^{K-1} F_3(K,\alpha,n), \quad (20)$$

$$F_2(K,\alpha,\xi) := F_0\left(K+\alpha, \xi+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\alpha\right), \quad F_3(K,\alpha,\xi) := F_1(K+\alpha,\xi,\alpha) + F_1(K+\alpha,\xi,1-\alpha).$$

Вначале рассмотрим случай $K=1$. Как несложно проверить, здесь функция $S_1(K,\alpha)$ достигает минимума при $\alpha = 13/100$ и при таком же значении $S_2(K,\alpha)$ достигает максимума. Отсюда в силу (19) при $K=1$ получаем:

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_0(L,\tau_{\min}) \geqslant \frac{S_1\left(1,\frac{13}{100}\right) - \mu S_2\left(1,\frac{13}{100}\right) - 2\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (21)$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что

$$S_1\left(1,\frac{13}{100}\right) - \mu S_2\left(1,\frac{13}{100}\right) - 2\varepsilon - 2Z_1(\varepsilon,\mu) > \frac{1}{10} + 8\mu > 0. \quad (22)$$

Следовательно, в силу (18) и (21)

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(L,\tau_{\min}) > 0 \quad \text{при} \quad K=1.$$

В случае $K \geqslant 2$ из (17) для $S_2(K,\alpha)$ получаем оценку:

$$S_2(L) \leqslant \frac{\pi L^2}{2} + 2L. \quad (23)$$

Из результатов [3, § 4.2] для $S_1(L)$ вытекает оценка:

$$S_1(K,\alpha) \geqslant \frac{1369}{\sqrt{2}\cdot 10^4}\sqrt{K}.$$

Отсюда и из (19), (20), (23) выводим:

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_0(L,\tau_{\min}) \geqslant Q_1(K,\varepsilon,\mu), \tag{24}$$
$$Q_1(K,\varepsilon,\mu) := \frac{1369}{\sqrt{2}\cdot 10^4}\frac{\sqrt{K}}{\varepsilon} - \frac{\mu}{\varepsilon}\left(\frac{\pi(K+1)^2}{2} + 2(K+1)\right) - 2K.$$

4.2. Случай $13/100 < \alpha < 1/2$. В силу (15) здесь также выполнено $K \geqslant 1$. Согласно (16), здесь $\tau_{\max} = 0$, $\tau_{\min} = \alpha$ и из (13), (14) получаем:

$$\begin{aligned} N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(L,\tau_{\min}) = \sum_{n=-K}^{K}\left[\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2 - n^2}\right] - \\ - \sum_{n=-K}^{K-1}\left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-(n+\alpha)^2}\right] = \sum_{n=1}^{K}\Bigg(2\left[\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-n^2}\right] - \\ - \left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-(n+\alpha)^2}\right] - \left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-(n-\alpha)^2}\right]\Bigg) + \\ + \left[\frac{K+\alpha}{\varepsilon}\right] - \left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-\alpha^2}\right]. \end{aligned}$$

Отсюда выводим:

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(L,\tau_{\min}) \geqslant \frac{S_3(K,\alpha) - \mu S_4(K,\alpha)}{\varepsilon} - 2K - 1, \tag{25}$$
$$S_3(K,\alpha) := \sum_{n=1}^{K} F_0(K+\alpha,\xi,\alpha) + K + \alpha - \sqrt{(K+\alpha)^2-\alpha^2},$$
$$S_4(K,\alpha) := \sum_{n=1}^{K}\big(F_1(K+\alpha,n,\alpha) + F_1(K+\alpha,n-1,1-\alpha)\big) + F_1(K+\alpha,0,\alpha).$$

При $K = 1$ функция S_3 достигает минимума при $\alpha = 13/100$, а функция S_4 достигает максимума при $\alpha = 1/2$. Поэтому, аналогично (21), (22) имеем:

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_0(L,\tau_{\min}) \geqslant \frac{S_3\left(1,\frac{13}{100}\right) - \mu S_4\left(1,\frac{1}{2}\right) - 3\varepsilon}{\varepsilon},$$
$$S_3\left(1,\frac{13}{100}\right) - \mu S_4\left(1,\frac{1}{2}\right) - 3\varepsilon - 3Z_1(\varepsilon,\mu) > \frac{1}{5} + 12\mu > 0$$

и в силу (25)

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(L,\tau_{\min}) > 0 \quad \text{при} \quad K = 1.$$

Переходим к случаю $K \geqslant 2$. Из (17) выводим:

$$S_4(K,\alpha) \leqslant \frac{\pi(K+1)^2}{2} + 2(K+1).$$

Дословно воспроизводя вычисления из [3, § 4.3], для $S_3(K,\alpha)$ получим оценку

$$S_3(K,\alpha) \geqslant \left(\frac{\sqrt{13}(\sqrt{2}-1)}{5} + \frac{169\sqrt{7}}{42000}\right)\sqrt{K}.$$

Из последних двух оценок и (25) при $K \geqslant 2$ следует:

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_0(L,\tau_{\min}) \geqslant Q_2(K,\varepsilon,\mu), \tag{26}$$

$$Q_2(K,\varepsilon,\mu) := \left(\frac{\sqrt{13}(\sqrt{2}-1)}{5} + \frac{169\sqrt{7}}{42000}\right)\frac{\sqrt{K}}{\varepsilon} - \frac{\mu}{\varepsilon}\left(\frac{\pi(K+1)^2}{2} + 2(K+1)\right) - 2K - 1.$$

4.3. Случай $1/2 \leqslant \alpha < 39267/62500$. Здесь уже следует считать, что $K \geqslant 0$. В силу (16), (13), (14) имеем $\tau_{\max} = 0$, $\tau_{\min} = 1-\alpha$ и

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(L,\tau_{\min}) = \sum_{n=-K}^{K}\left[\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-n^2}\right] -$$
$$- \sum_{n=-K}^{K}\left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-(n+1-\alpha)^2}\right] = \sum_{n=1}^{K}\Bigg(2\left[\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-n^2}\right] -$$
$$-\left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-(n+1-\alpha)^2}\right] - \left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-(n-1+\alpha)^2}\right]\Bigg) +$$
$$+\left[\frac{K+\alpha}{\varepsilon}\right] - \left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}\right].$$

Следовательно,

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(L,\tau_{\min}) \geqslant \frac{S_5(K,\alpha) - \mu S_6(K,\alpha)}{\varepsilon} - 2K - 1, \tag{27}$$
$$S_5(K,\alpha) := \sum_{n=1}^{K} F_0(K+\alpha, n, 1-\alpha) + K + \alpha - \sqrt{(K+\alpha)^2-(1-\alpha)^2},$$
$$S_6(K,\alpha) := \sum_{n=0}^{K}\big(F_1(K+\alpha,n,1-\alpha) + F_1(K+\alpha,n,\alpha)\big).$$

При $K = 0, 1$ минимум функции S_5 и максимум функции S_6 достигаются при $\alpha = 39267/62500$. Далее следует проделать вычисления, аналогичные (21), (22):

$$S_5(K,\alpha) - \mu S_6(K,\alpha) \geqslant S_5\left(K, \frac{39267}{62500}\right) - \mu S_6\left(K, \frac{39267}{62500}\right), \quad K = 0, 1,$$
$$S_5\left(0, \frac{39267}{62500}\right) - \mu S_6\left(0, \frac{39267}{62500}\right) - \varepsilon - Z_2(\varepsilon,\mu) > \frac{9}{100} + 3\mu > 0,$$
$$S_5\left(1, \frac{39267}{62500}\right) - \mu S_6\left(1, \frac{39267}{62500}\right) - 3\varepsilon - 3Z_2(\varepsilon,\mu) > \frac{1}{10} + 8\mu > 0,$$

и в силу (27) получаем

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(L,\tau_{\min}) > 0 \quad \text{при} \quad K = 0, 1.$$

В случае $K \geqslant 2$ согласно (17) и результатам [3, §4.4] верны оценки

$$S_5(K,\alpha) \geqslant \frac{7^2 \cdot 3319^2 \cdot \sqrt{2}}{2^5 \cdot 5^{12}}\sqrt{K}, \quad S_6(K,\alpha) \leqslant \frac{\pi(K+1)^2}{2} + 2(K+1),$$

и потому из (27) при $K \geqslant 2$ вытекает

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_0(L,\tau_{\min}) \geqslant Q_3(K,\varepsilon,\mu), \tag{28}$$
$$Q_3(K,\varepsilon,\mu) := \frac{7^2 \cdot 3319^2 \cdot \sqrt{2}}{2^5 \cdot 5^{12}}\frac{\sqrt{K}}{\varepsilon} - \frac{\mu}{\varepsilon}\left(\frac{\pi(K+1)^2}{2} + 2(K+1)\right) - 2K - 1.$$

4.4. Случай $39267/62500 \leqslant \alpha < 1$. Здесь $K \geqslant 0$. Из (16), (13), (14) следует, что $\tau_{\max} = 1/2$, $\tau_{\min} = 1 - \alpha$ и

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(L,\tau_{\min}) = \sum_{n=0}^{K-1}\left(2\left[\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right] - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-(n+1-\alpha)^2}\right] - \left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-(n+\alpha)^2}\right]\right) +$$
$$+ 2\left[\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-\left(K+\frac{1}{2}\right)^2}\right] - \left[\frac{1+\mu}{\varepsilon}\sqrt{(K+\alpha)^2-(K+1-\alpha)^2}\right]$$

и потому

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(K+\alpha,\tau_{\min}) \geqslant \frac{S_7(K,\alpha)-\mu S_8(K,\alpha))}{\varepsilon} - 2K - 2, \tag{29}$$
$$S_7(K,\alpha) = \sum_{n=0}^{K} F_0\left(K+\alpha, n+\frac{1}{2}, \alpha-\frac{1}{2}\right),$$
$$S_8(K,\alpha) = \sum_{n=0}^{K}\big(F_1(K+\alpha,n,1-\alpha) + F_1(K+\alpha,n,\alpha)\big).$$

При $K = 0,1$ функция $S_7(K,\alpha)$ достигает минимума при $\alpha = 39267/62500$, а функция $S_8(K,\alpha)$ достигает максимума при $\alpha = 1$. Аналогично (21), (22) имеем:

$$S_7(K,\alpha) - \mu S_8(K,\alpha) \geqslant S_7\left(K,\frac{39267}{62500}\right) - \mu S_8(K,1), \quad K = 0,1,$$
$$S_7\left(0,\frac{39267}{62500}\right) - \mu S_8(0,1) - 2\varepsilon - 2Z_2(\varepsilon,\mu) > \frac{1}{10} + 7\mu > 0,$$
$$S_7\left(1,\frac{39267}{62500}\right) - \mu S_8(1,1) - 4\varepsilon - 4Z_2(\varepsilon,\mu) > \frac{1}{5} + 10\mu > 0,$$

и с учётом (29) получаем

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(L,\tau_{\min}) > 0 \quad \text{при} \quad K = 0,1.$$

При $K \geqslant 2$ в силу (17) и результатов [3, § 4.5] справедливы неравенства

$$S_7(K,\alpha) \geqslant \left(\frac{\sqrt{8017}(\sqrt{2}-1)}{125} + \frac{8017^2}{3\cdot 5^5\cdot 10^4\cdot\sqrt{4363}}\right)\sqrt{K}, \quad S_8(K,\alpha) \leqslant \frac{\pi(K+1)^2}{2} + 2(K+1).$$

Следовательно, ввиду (29) при $K \geqslant 2$ имеем

$$N_0(L,\tau_{\max}) - N_\mu(L,\tau_{\min}) \geqslant Q_4(K,\varepsilon,\mu), \tag{30}$$
$$Q_4(K,\varepsilon,\mu) := \left(\frac{\sqrt{8017}(\sqrt{2}-1)}{125} + \frac{8017^2}{3\cdot 5^5\cdot 10^4\cdot\sqrt{4363}}\right)\frac{\sqrt{K}}{\varepsilon} - \frac{\mu}{\varepsilon}\left(\frac{\pi(K+1)^2}{2} + 2(K+1)\right) - 2K - 2.$$

4.5. Заключительные оценки. Сравним правые части неравенств (24), (26), (28), (30). Непосредственно проверяем, что

$$Q_2(K,\varepsilon,\mu) > Q_3(K,\varepsilon,\mu) \tag{31}$$

и при $K \geqslant 2$

$$Q_4(K,\varepsilon,\mu) - Q_3(K,\varepsilon,\mu) \geqslant \left(\frac{\sqrt{8017}(2-\sqrt{2})}{125} + \frac{8017^2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 5^5\cdot 10^4\cdot\sqrt{4363}} - \frac{7^2\cdot 3319^2}{2^4\cdot 5^{12}}\right)\frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Из условий (2) следует, что
$$\varepsilon < \min\left\{\frac{7^2\cdot 3319^2}{2^4\cdot 5^13},\ \frac{1369}{4\cdot 10^4}\right\} = \frac{7^2\cdot 3319^2}{2^4\cdot 5^13}$$
и потому в силу предыдущей оценки
$$Q_4(K,\varepsilon,\mu) - Q_3(K,\varepsilon,\mu) > 0. \tag{32}$$
Введем обозначение
$$Q(z,\varepsilon,\mu) := \frac{7^2\cdot 3319^2}{2^4\cdot 5^{12}\cdot\sqrt{3}}\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\mu}{\varepsilon}\left(\frac{\pi}{2}z^3 + 2z\right) - 2z.$$
Несложно убедиться, что при $K \geqslant 2$ имеем
$$Q_1(K,\varepsilon,\mu) > \sqrt{K+1}\,Q(\sqrt{K+1},\varepsilon,\mu), \quad Q_3(K,\varepsilon,\mu) > \sqrt{K+1}\,Q(\sqrt{K+1},\varepsilon,\mu).$$
Отсюда и из (31), (32) вытекает, что левые части оценок (24), (26), (28), (30) будут положительными, если $Q(\sqrt{K+1},\varepsilon,\mu) > 0$. Последнее неравенство выполнено при
$$\sqrt{K+1} < z(\varepsilon,\mu), \tag{33}$$
где $z = z(\varepsilon,\mu)$ — вещественный корень уравнения $Q(z,\varepsilon,\mu) = 0$; он задаётся формулой (3). Решая неравенство (33) относительно K и учитывая тот факт, что спектр оператора — замкнутое множество, заключаем, что спектр оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ не содержит внутренних лакун вплоть до точки $z^2(\varepsilon,\mu)/\varepsilon^2$.

Выясним поведение функции $z(\varepsilon,\mu)$ при $\varepsilon\to+0$, $\mu\to+0$. Для этого введём обозначения
$$a = a(\varepsilon,\mu) := 3^{3/2}\beta(\pi\mu)^{1/2}, \quad b = b(\varepsilon,\mu) := 4(\varepsilon+\mu)$$
и заметим, что
$$w(\varepsilon,\mu) = \sqrt{a^2(\varepsilon,\mu) + b^3(\varepsilon,\mu)} + a(\varepsilon,\mu)$$
и перепишем формулу (3) следующим образом:
$$\begin{aligned}
z = \frac{3\beta\Big(\big(\sqrt{a^2+b^3}+a\big)^{2/3} - b\Big)}{a\big(\sqrt{a^2+b^3}+a\big)^{1/3}} &= \\
&= \frac{3\beta\Big(\big(\sqrt{a^2+b^3}+a\big)^{2} - b^3\Big)}{a\big(\sqrt{a^2+b^3}+a\big)^{1/3}\Big(\big(\sqrt{a^2+b^3}+a\big)^{4/3} + b\big(\sqrt{a^2+b^3}+a\big)^{2/3} + b^2\Big)} = \\
&= \frac{6\beta\big(\sqrt{a^2+b^3}+a\big)^{2/3}}{\big(\sqrt{a^2+b^3}+a\big)^{4/3} + b\big(\sqrt{a^2+b^3}+a\big)^{2/3} + b^2} = \frac{6\beta}{b}\frac{v\big(ab^{-3/2}\big)}{v^2\big(ab^{-3/2}\big) + v\big(ab^{-3/2}\big) + 1},
\end{aligned} \tag{34}$$
где
$$v(s) := \left(\sqrt{s^2+1} + s\right)^{2/3}.$$
Функция $v(s)$, определённая в (4), монотонно растёт по $s \geqslant 0$ и удовлетворяет оценкам
$$1 \leqslant (s+1)^{2/3} \leqslant v(s) \leqslant (2s+1)^{2/3}. \tag{35}$$
При таких значениях v функция $v \mapsto v/(v^2+v+1)$ монотонно убывает по v и выполнены неравенства
$$\frac{v}{v^2+v+1} \leqslant \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3v} \leqslant \frac{v}{v^2+v+1} \leqslant \frac{1}{v}.$$
Из последних двух оценок и (34) немедленно вытекают неравенства (4). Теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов Д. И.* О лакунах в спектре лапласиана в полосе, возмущенного ограниченным периодическим оператором// Уфим. мат. ж. — 2018. — *10*, № 2. — С. 13–29.
2. *Борисов Д. И.* Об отсутствии лакун в нижней части спектра лапласиана с частым чередованием краевых условий в полосе// Теор. мат. физ. — 2018. — *195*, № 2. — С. 225–239.
3. *Борисов Д. И.* О лакунах в нижней части спектра периодического магнитного оператора в полосе// Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — *63*, № 3. — С. 373–391.
4. *Скриганов М. М., Соболев А. В.* Асимптотические оценки для спектральных зон периодических операторов Шрёдингера// Алгебра и анализ. — 2005. — *17*, № 1. — С. 276–288.
5. *Скриганов М. М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1985. — *171*. — С. 3–122.
6. *Barbatis G., Parnovski L.* Bethe–Sommerfeld conjecture for pseudo-differential perturbation// Commun. Partial Differ. Equations. — 2009. — *34*, № 4. — P. 383–418.
7. *Beeken C. B. E.* Periodic Schrödinger operators in dimension two: constant magnetic fields and boundary-value problems/ Ph.D. thesis. — Brighton: University of Sussex, 2002.
8. *Borisov D., Cardone G., Durante T.* Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sec. A. Math. — 2016. — *146*, № 6. — P. 1115–1158.
9. *Borisov D., Cardone G., Faella L., Perugia C.* Uniform resolvent convergence for a strip with fast oscillating boundary// J. Differ. Equations. — 2013. — *255*, № 12. — P. 4378–4402.
10. *Borisov D., Bunoiu R., Cardone G.* Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics// Zeit. Angew. Math. Phys. — 2013. — *64*, № 3. — P. 439–472.
11. *Borisov D., Bunoiu R., Cardone G.* On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition// Ann. Inst. H. Poincaré. — 2010. — *11*, № 8. — P. 1591–1627.
12. *Borisov D. and Cardone G.* Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions// J. Phys. A. Math. Gen. — 2009. — *42*, № 36. — 365205.
13. *Borisov D., Bunoiu R., Cardone G.* On a waveguide with an infinite number of small windows// Comp. Rend. Math. — 2011. — *349*, № 1-2. — P. 53–56.
14. *Dahlberg B. E. J., Trubowitz E.* A remark on two dimensional periodic potentials// Comment. Math. Helvet. — 1982. — *57*, № 1. — P. 130–134.
15. *Helffer B., Mohamed A.* Asymptotics of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electric potential// Duke Math. J. — 1998. — *92*, № 1. — P. 1–60.
16. *Karpeshina Y.* Spectral properties of the periodic magnetic Schrödinger operator in the high-energy region. Two-dimensional case// Commun. Math. Phys. — 2004. — *251*, № 3. — P. 473–514.
17. *Mohamed A.* Asymptotic of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electromagnetic potential// J. Math. Phys. — 1997. — *38*, № 8. — P. 4023–4051.
18. *Parnovski L.* Bethe–Sommerfeld conjecture// Ann. Inst. H. Poincaré. — 2008. — *9*, № 3. — P. 457–508.
19. *Parnovski L., Sobolev A.* On the Bethe–Sommerfeld conjecture for the polyharmonic operator// Duke Math. J. — 2001. — *107*, № 2. — P. 209–238.
20. *Parnovski L., Sobolev A.V.* Bethe–Sommerfeld conjecture for periodic operators with strong perturbations// Invent. Math. — 2010. — *181*, № 3. — P. 467–540.
21. *Skriganov M. M., Sobolev A. V.* Variation of the number of lattice points in large balls// Acta Arithm. — 2005. — *120*, № 3. — P. 245–267.

Борисов Денис Иванович
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия;
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия;
Университет Градца Кралове, Градец Кралове, Чешская Республика
E-mail: `borisovdi@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 162 (2019). С. 15–24

УДК 517.537.7

ПОВЕДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ЭКСПОНЕНТ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА РОСТА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

© 2019 г. **А. М. ГАЙСИН, Г. А. ГАЙСИНА**

Аннотация. Пусть G — ограниченная выпуклая область с гладкой границей, в которой заданная система экспонент не полна. Для класса функций, аналитических в G и представимых в данной области рядом экспонент, в терминах порядка роста вблизи границы ∂G изучается поведение коэффициентов разложения в ряд. Установлены двусторонние оценки для порядка через характеристики, зависящие только от показателей ряда экспонент и опорной функции области (эти оценки точны). Как следствие получена формула для вычисления порядка роста через коэффициенты.

Ключевые слова: ряд экспонент, область с гладкой границей, поведение вблизи границы, порядок, R-порядок.

BEHAVIOR OF COEFFICIENTS OF SERIES OF EXPONENTS OF FINITE ORDER NEAR THE BOUNDARY

© 2019 **A. M. GAISIN, G. A. GAISINA**

Abstract. Let G be a bounded convex domain with a smooth boundary in which a given system of exponents is not complete. For a class of analytic functions in G that can be represented in G by a series of exponents, we examine the behavior of coefficients of the series expansion in terms of the growth order near the boundary ∂G. We establish two-sided estimates for the order through characteristics depending only on the indices of the series of exponents and the supporting function of the domain (these estimates are strong). As a consequence, we obtain a formula for calculating the growth order through the coefficients.

Keywords and phrases: series of exponents, domain with smooth boundary, behavior near the boundary, order, R-order.

AMS Subject Classification: 30D10

1. Введение. Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, содержащая начало координат, $K(\varphi)$ — опорная функция $\overline{D}$, $h(\varphi) = K(-\varphi)$, $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$ и простыми нулями λ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Предположим, что

$$|L(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{A}{r^{\mu}} e^{h(\varphi)r}, \quad \mu > 1. \tag{1}$$

В силу условия (1) функции

$$\psi_k(t) = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

как известно (см. [4, с. 230]), регулярны вне $\overline{D}$, непрерывны вплоть до границы ∂D и $\psi_k(\infty) = 0$. Поэтому каждой функции f, аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$, ставится в соответствие ряд

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(t)\psi_k(t)\, dt, \quad k \geqslant 1. \tag{2}$$

Как показано в [4, с. 232], для ψ_k на ∂D верны оценки

$$|\psi_k(t)| \leqslant \frac{A}{|L'(\lambda_k)|}, \quad t \in \partial D, \quad k \geqslant 1,$$

где постоянная A не зависит от k. Таким образом, коэффициенты ряда (2) имеют оценки

$$|a_k| \leqslant \frac{A}{|L'(\lambda_k)|} \max_{t \in \partial D} |f(t)|, \quad k \geqslant 1. \tag{3}$$

Необходимые и достаточные условия представимости любой такой функции f (аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$) в области D рядом экспонент (2) формулируются следующим образом (см. [4, с. 296]):

(i) $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста;
(ii) для всякого $\varepsilon > 0$ при $k \geqslant k_0(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\ln \bigl|L'(\lambda_k)\bigr| \geqslant \bigl[h(\varphi_k) - \varepsilon\bigr] r_k, \quad \lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}, \quad k \geqslant 1. \tag{4}$$

Таким образом, при выполнении условий (i) и (ii) имеем

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D$$

(внутри D имеет место равномерная сходимость); при этом, как видно из (3), (4), для всякого $\varepsilon > 0$ при $k \geqslant k_0(\varepsilon)$

$$|a_k| \leqslant e^{[-h(\varphi_k)+\varepsilon] r_k}. \tag{5}$$

Может оказаться, что вместо (4) выполняется более сильное условие[1]

$$|L'(\lambda_k)| \geqslant \frac{B}{r_k^p} e^{h(\varphi_k) r_k}, \quad k \geqslant 1. \tag{6}$$

Рассматривая более общую ситуацию, когда функция f аналитична в D, но не обязательно непрерывна в $\overline{D}$, А. Ф. Леонтьев показал (см. [4, с. 358]), что существуют такие целая функция $M(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ с ростом не выше первого порядка минимального типа и функция g, аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g^{(k)}(z), \quad z \in D.$$

Представляя g рядом (2), получим

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k z}, \quad b_k = a_k M(\lambda_k), \quad z \in D. \tag{7}$$

Учитывая (3), замечаем, что оценка для коэффициентов b_k ряда (7) зависит от оценки снизу для $|L'(\lambda_k)|$ и оценки сверху для $|M(\lambda_k)|$. В случае (6), например,

$$|b_k| \leqslant C r_k^p |M(\lambda_k)| e^{-h(\varphi) r_k}, \quad k \geqslant 1. \tag{8}$$

При этом данная оценка никакой дополнительной информации о поведении $|M(\lambda_k)|$ при $k \to \infty$ не доставляет.

[1] Если, например, D — выпуклый многоугольник, то условие (6) будет выполнено при $p = 2$ (см. [5]).

Однако, как показано в [5], если функция f вблизи ∂D имеет заданный рост, например, если для любого $\varepsilon > 0$ при $r < r_0(\varepsilon)$

$$|f(z)| \leqslant \exp\left[\left(\frac{1}{r}\right)^{q+\varepsilon}\right], \quad r = d(z),$$

где $d(z) = \rho(z, \partial D) = \inf\limits_{\xi\in\partial D} |z-\xi|$, то $M(\lambda)$ имеет порядок не выше $q/(q+1)$, и тогда из (8) сразу следует, что

$$|b_k| \leqslant e^{r_k^{p+\varepsilon} - h(\varphi_k) r_k}, \quad k \geqslant k_0(\varepsilon), \quad p = \frac{q}{q+1}. \tag{9}$$

Таким образом, любая аналитическая в D функция f порядка[1]

$$\rho = \varlimsup_{z\to\partial D} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(z)|}{-\ln d(z)}, \quad a^+ = \max(a, 0),$$

не превышающего q, допускает разложение в ряд экспонент (7), причем (это выводится из (9)) при $r < r_0(\varepsilon)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k e^{\lambda_k z}| \leqslant \exp\left[\left(\frac{1}{r}\right)^{q+\varepsilon}\right], \quad r = d(z),$$

где $\varepsilon > 0$ — любое.

Цель статьи — найти явную зависимость между порядком произвольной аналитической в некоторой области G функции f и коэффициентами ее разложения в ряд экспонент.

2. Постановка задачи и основной результат. Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть D — конечная выпуклая область, $K(\varphi)$ — опорная функция области D, $h(\varphi) = K(-\varphi)$, $\{\lambda_k\}$ — последовательность комплексных чисел с конечной верхней плотностью:*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_k|} = \tau < \infty.$$

Если для любого $\varepsilon > 0$

$$|a_k| \leqslant \exp\Big[-h(\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k|^{p+\varepsilon}\Big], \tag{10}$$

при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, $\varphi_k = \arg\lambda_k$, $0 \leqslant p < 1$, то для любого $\nu > 0$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_k e^{\lambda_k z}\right| \leqslant \exp\left(\frac{1}{r}\right)^{q+\nu}, \tag{11}$$

где $r = d(z)$, $q = p/(1-p)$, $z \in D$, $r < r_0(\nu)$.

Лемма 1 доказана в [5]. Укажем только основные выкладки, они нам понадобятся в дальнейшем.

Если $z \in D$, $\arg\lambda = \varphi$, $\arg z = \psi$, то

$$\left|e^{\lambda z}\right| = \exp\Big[|\lambda|\,|z|\cos(\varphi+\psi)\Big].$$

Выражение $|z|\cos(\varphi+\psi)$ есть проекция вектора z на луч $\{t : \arg t = -\varphi,\ t > 0\}$. Проведем опорную прямую к $\overline{D}$, перпендикулярную к этому лучу. Расстояние от нее до начала координат равно $K(-\varphi) = h(\varphi)$. Видно, что

$$|z|\cos(\varphi+\psi) < h(\varphi) - d(z), \quad z \in D. \tag{12}$$

Следовательно, из (10), (12) получаем

$$\left|a_k e^{\lambda_k z}\right| \leqslant A(\varepsilon)\exp\Big[|\lambda_k|^{p+\varepsilon} - r|\lambda_k|\Big], \quad k \geqslant 1,$$

[1] В [9] изучается пространство $H(q)$ аналитических в D функций порядка не выше q, где в терминах преобразования Лапласа получено описание пространства $H'(q)$, сопряженного с $H(q)$.

$r = d(z)$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_k e^{\lambda_k z}\right| \leqslant A(\varepsilon) \exp\left[\max_{k\geqslant 1}\left(2|\lambda_k|^{p+\varepsilon} - r|\lambda_k|\right)\right] \sum_{k=1}^{\infty} e^{-|\lambda_k|^{p+\varepsilon}}. \tag{13}$$

Максимум явно подсчитывается, а поскольку $\tau < \infty$, то последний ряд сходится. В [5] показано, что правая часть в (13) не превосходит

$$B(\nu)\exp\left(\frac{1}{r}\right)^{q+\nu}, \quad r > 0,$$

где $\nu > 0$ — любое.

Таким образом, оценка (11) имеет место для любой ограниченной выпуклой области D. При этом в лемме 1, как видно, никаких дополнительных условий на границу ∂D не требуется. Однако если вместо $\tau < \infty$ выполнено более слабое условие $\ln k = o\big(\ln|\lambda_k|\big)$ при $k \to \infty$, то лемма 1 вообще неверна (см. [5]).

Но если показатели ряда экспонент

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D,$$

имеют конечную верхнюю плотность, а функция f — конечный порядок ρ, $\rho \leqslant q$, то в общей ситуации оценка (10) для коэффициентов a_k тоже не имеет места.

В [5] приведен следующий пример. Пусть $\varphi(r)$ — такая положительная возрастающая функция, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln\varphi(r)}{r} = 0.$$

Известно (см. [4, с. 97]), что существует целая функция $L(\lambda)$ вполне регулярного роста с индикатрисой роста $h(\varphi) = K(-\varphi)$ ($K(\varphi)$ — опорная функция области D), для которой выполняется условие (4) и

$$\left|L(re^{i\varphi})\right| \leqslant \frac{e^{h(\varphi)r}}{\varphi(r)}. \tag{14}$$

Тогда (см. [4, с. 527])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)} = 0, \quad z \in D. \tag{15}$$

В [5] показано, что для коэффициентов $a_k = |L'(\lambda_k)|^{-1}$ ряда (15) имеют место следующие оценки:

$$|a_k| \geqslant A\varphi(|\lambda_k| - 1)e^{-h(\varphi_k)|\lambda_k|}.$$

Видим, что сумма ряда (15) равна нулю в D, а коэффициенты a_k за счет выбора $\varphi(r)$ не могут иметь оценки типа (10). Действительно, можно взять функцию

$$\varphi(r) = \exp\frac{r+1}{\ln(r+1)}, \quad r \geqslant 0.$$

В ситуации, когда сумма ряда экспонент равна нулю (впрочем, как и в случае разложения (7)), а его коэффициенты не все равны нулю, нельзя ставить вопрос о получении формул, выражающих коэффициенты ряда через сумму ряда, ибо нет единственности. Поэтому в [5] вообще не обсуждается вопрос о какой-либо формуле, выражающей зависимость порядка ρ произвольной аналитической в области D функции f от коэффициентов ее разложения в ряд экспонент. Другое дело, если соответствующий ряд экспонент сходится в большей области G, $G \supset \overline{D}$. В этом случае имеет место единственность разложения в ряд экспонент, и можно указать формулы для коэффициентов (см. [4, с. 201]): пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с простыми нулями в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots$, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, $\overline{D}$ — сопряженная диаграмма,

$$L_\nu(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

$\psi_\nu(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L_\nu(\lambda)$, (ψ_ν регулярна вне $\overline{D}$).

Если ряд
$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{\lambda_k z} \tag{16}$$
сходится в области $G\supset\overline{D}$, то
$$a_k=\frac{1}{L'(\lambda_k)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \psi_k(t)f(t)\,dt,\quad k=1,2,\dots, \tag{17}$$
где C — замкнутый спрямляемый контур, охватывающий $\overline{D}$, на котором и внутри которого функция f регулярна.

Так как $\tau<\infty$, то
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{|\lambda_k|}=0. \tag{18}$$
В этом случае область сходимости G совпадает с областью абсолютной сходимости ряда (16). Поэтому область G выпукла (см. [4, с. 196]).

В [6, с. 103] показано, что для всех $\alpha\in\mathbb{C}$, для которых $\overline{D}_\alpha\subset G$ ($\overline{D}_\alpha$ — сдвиг $\overline{D}$ на вектор α),
$$a_k=e^{-\alpha\lambda_k}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \psi_k(t)f(t+\alpha)dt,\quad k=1,2,\dots; \tag{19}$$
при этом контур C выбирается так, чтобы $t+\alpha\in G$ при всех $t\in C$.

Задача ставится следующим образом. Пусть функция f, представленная в области $G\supset\overline{D}$ рядом (16), имеет порядок ρ. Требуется найти формулу, аналогичную формуле Коши—Адамара для целых функций, позволяющую вычислить порядок ρ через коэффициенты a_k ряда (16).

Отметим, что при условии (18) область сходимости G любого ряда (16) может быть явно определена, если известны коэффициенты (см. [4, с. 197]): ряд (16) сходится абсолютно в области G, точки $z=x+iy$ которой удовлетворяют при любом φ неравенству
$$\operatorname{Re}(ze^{i\varphi})=x\cos\varphi-y\sin\varphi>K(\varphi);$$
если при некотором ψ
$$\operatorname{Re}(ze^{i\psi})=x\cos\psi-y\sin\psi<K(\psi), \tag{20}$$
то в точке $z=x+iy$ ряд (16) расходится. Здесь $K(\varphi)=\lim\limits_{\beta\to0}K(\varphi,\beta)$, где
$$K(\varphi,\beta)=\varlimsup_{\substack{k\to\infty\\ \varphi-\beta\leqslant\arg\lambda_k\leqslant\varphi+\beta}}\frac{\ln|a_k|}{|\lambda_k|},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad \beta>0.$$

Точки z, для каждой из которых при некотором ψ выполняется соотношение (20), образуют внешность $\overline{G}$. Таким образом, в G ряд (16) сходится, а вне $\overline{G}$ — расходится.

Так как ряд (16) сходится в $G\supset\overline{D}$, то
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \gamma(t)f(t+z)dt=0 \tag{21}$$
в окрестности начала координат. Если λ не является нулем целой функции $L(\lambda)$, то $\varphi(z)=e^{\lambda z}$ не удовлетворяет уравнению (21), и поэтому ее нельзя представить в области G рядом (16). Исходя из этого обозначим через $H(G,\Lambda)$ ($G\supset\overline{D}$) класс аналитических в G функций, представимых в G рядами (16), причем для них G — область сходимости.

Положим
$$Q(\lambda)={\prod_{k=1}^{\infty}}'\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right),$$

где $'$ означает, что в бесконечном произведении $\lambda_k^2 \neq \lambda_n^2$, $k \neq n$. Известно (см. [6, с. 106-107]), что при условиях

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k}{|\lambda_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \right| = 0 \tag{22}$$

область сходимости G ряда (16) совпадает с областью H регулярности его суммы. В дальнейшем будем считать, что выполнены условия (22).

В случае $0 < \lambda_k \uparrow \infty$, $G = \Pi_0 = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ зависимость порядка суммы ряда Дирихле

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$$

от коэффициентов a_k изучалось в [1] (более подробно см. в [3]).

Верно следующее утверждение (см. [3]): порядок ρ любой функции $f \in H(\Pi_0, \Lambda)$ вычисляется по формуле

$$\frac{\rho}{\rho+1} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_k|}{\ln \lambda_k},$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\ln k}{\ln \lambda_k} = 0.$$

Цель настоящей работы — перенести этот результат для любой ограниченной выпуклой области G, содержащей $\overline{D}$.

3. Оценка для коэффициентов ряда экспонент конечного порядка. Так как плотность τ равна нулю, $\tau = 0$, то $\overline{D} = \{0\}$, где $\overline{D}$ — сопряженная диаграмма функции $Q(\lambda)$. Имеем

$$a_k = e^{-\lambda_k z} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=\delta} \psi_k(t) f(t+z)dt, \quad k \geqslant 1, \tag{23}$$

причем для каждого $z \in G$ величина $\delta > 0$ выбирается так, чтобы $t + z \in G$ для всех t, $|t| = \delta$.

Имеем

$$\psi_k(t) = \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \int\limits_0^{\infty e^{i\varphi_0}} \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad t \in \Pi(\varphi_0),$$

где $\Pi(\varphi_0) = \{t : \operatorname{Re}(te^{i\varphi_0}) \geqslant \delta\}$. Отсюда

$$\max_{t\in\Pi(\varphi_0)} |\psi_k(t)| \leqslant \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|} \int\limits_0^{\infty} \max_{|\lambda|=r} \left| \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \right| e^{-\delta r} dr. \tag{24}$$

Но для всякого $k \geqslant 1$

$$\left| \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \right| = \frac{1}{\lambda_k} \left| 1 + \frac{\lambda}{\lambda_k} \right| \prod_{k\neq n} \left| 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right|.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\lambda_k} \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\lambda_k^2}\right), \quad 1 + \frac{r}{|\lambda_k|} \leqslant 2\left(1 + \frac{r^2}{|\lambda_k|^2}\right), \quad r = |\lambda|,$$

то

$$\max_{|\lambda|=r} \left| \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \right| \leqslant M(1)M(r),$$

где $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |Q(z)|$. Следовательно, из (24) будем иметь

$$\max_{|t|=\delta} |\psi_k(t)| \leqslant M(1) \int\limits_0^{\infty} M(r) e^{-\delta r} dr, \quad k \geqslant 1.$$

В итоге из (23) получим
$$|a_k| \leqslant \frac{|e^{-\lambda_k z}|}{|Q'(\lambda_k)|} M(1)\delta H(\delta) \max_{|\xi - z| \leqslant \delta} |f(\xi)|, \tag{25}$$
где
$$H(\delta) = \int_0^\infty M(r) e^{-\delta r} dr.$$
В (25) δ выбирается так, что $z - \xi \in G$ для $z \in G$.

Лемма 2. *Целая функция* $Q(\lambda)$ *имеет порядок не выше* $q = \rho/(\rho+1)$ *тогда и только тогда, когда для всякого* $\varepsilon > 0$ *при* $0 < \delta < \delta_0(\varepsilon)$
$$H(\delta) \leqslant \exp\left[\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\rho+\varepsilon}\right]. \tag{26}$$

Доказательство. Необходимость. Если порядок $Q(\lambda)$ не выше q, то
$$H(\delta) \leqslant \frac{\pi}{2} \exp\left[\max_{r \geqslant 0} \left(\ln M(r) + \ln(1+r^2) - \delta r\right)\right].$$
Далее, для любого $\nu > 0$ при $r > r_0(\nu)$ имеем
$$\ln M(r) + \ln(1+r^2) < r^{q+\nu}.$$
Функция $r^{q+\nu} - \delta r$ имеет максимум в точке
$$r_0 = \left(\frac{q_1}{\delta}\right)^{1/(1-q_1)},$$
где $q_1 = q + \nu < 1$ (ν мало). Этот максимум равен
$$m = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{q_1/(1-q_1)} \left[q_1^{q_1/(1-q_1)} - q_1^{1/(q_1)}\right], \quad 0 < q_1 < 1.$$
Если учесть, что $q_1 = q + \nu$, $q = \rho/(\rho+1)$, то для любого $\varepsilon > 0$
$$m \leqslant \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\rho+\varepsilon/2} C_\rho(\varepsilon), \quad 0 < C_\rho(\varepsilon) < \infty, \quad 0 < \delta < \delta_0(\varepsilon).$$
В итоге действительно
$$H(\delta) \leqslant \exp\left[\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\rho+\varepsilon}\right],$$
если $\delta < \delta_1(\varepsilon)$.

Достаточность. Так как $\tau = 0$, то $M(\lambda)$ — целая функция минимального типа при порядке 1. Имеем
$$Q(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} \gamma(t) e^{\lambda t} dt, \quad 0 < \delta < 1,$$
где $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $Q(\lambda)$. Отсюда для любого $\nu > 0$ получаем
$$M(r) \leqslant \exp\left\{\inf_{0<\delta\leqslant 1}\left[\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\rho+\nu} + r\delta\right]\right\}, \quad r = |\lambda|.$$
Здесь мы учли, что
$$\max_{|t|=\delta} |\gamma(t)| \leqslant H(\delta).$$

Проверяется (см., например в [1]), что
$$\inf_{0<\delta\leqslant 1}\left[\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\rho+\nu} + r\delta\right] = K_\rho(\nu) r^{q/(q+1)}, \quad q = \rho + \nu, \quad 0 < K_\rho(\nu) < \infty.$$

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ при $|\lambda| > r_0(\varepsilon)$

$$|Q(\lambda)| \leqslant \exp\left[|\lambda|^{\rho/(\rho+1)+\varepsilon}\right].$$

Лемма доказана. □

Таким образом,

$$\overline{\lim_{\delta\downarrow 0}} \frac{\ln\ln H(\delta)}{-\ln\delta} \leqslant \rho$$

тогда и только тогда, когда целая функция $Q(\lambda)$ имеет порядок не выше $\rho/(\rho+1)$.

Нам понадобится и следующее утверждение из [2].

Лемма 3. *Пусть G — ограниченная выпуклая область с гладкой границей ∂G, $z_0 \in \partial G$, N_0 — нормаль в точке z_0. Тогда при $z \in G \cap N_0$ и $z \to z_0$*

$$|z - z_0| = d(z)(1 + o(1)),$$

где $d(z) = \rho(z, \partial G) = \min_{\xi\in\partial G} |z - \xi|$.

Вернемся теперь к оценке (25). Перепишем ее в виде

$$|a_k| \leqslant M(1)\frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}\delta H(\delta)|e^{-\lambda_k z}|\max_{|t|=\delta}|f(z)|, \quad z \in G, \quad k \geqslant 1. \tag{27}$$

Пусть $\lambda_k = |\lambda_k|e^{i\varphi_k}$, а z_k — такая точка границы ∂G, что $\operatorname{Re}(z_k e^{i\varphi_k}) = K(-\varphi_k)$ (здесь $K(\varphi)$ — опорная функция области G). Если N_k — нормаль в точке z_k, а $z \in G \cap N_k$, $z \to z_k$, то согласно лемме 3

$$\begin{aligned}-\operatorname{Re}(\lambda_k z) = -K(-\varphi_k)|\lambda_k| + \operatorname{Re}\left[\lambda_k z_k - \lambda_k z\right] \leqslant \\ \leqslant -K(-\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k|\,|z_k - z| = -K(-\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k|\big(1 + o(1)\big)d(z).\end{aligned}$$

Учитывая это и лемму 2, из (26), (27) получаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ при $\delta < \delta_0(\varepsilon)$ имеет место оценка

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}e^{-K(-\varphi_k)|\lambda_k|+|\lambda_k|(1+o(1))d(z)}\exp\left[\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\rho+\varepsilon}\right]\max_{|t|=\delta}|f(t+z)| \tag{28}$$

при $z \to z_k$, $z \in G \cap N_k$.

Положим $\delta = \gamma d(z)$, где γ — фиксированное число из $(0,1)$. Так как функция $d(z) = \rho(z, \partial G)$ удовлетворяет условию Липшица в G (см. [8, с. 123]), т.е. для всех z', z'' из G

$$\big|d(z') - d(z'')\big| \leqslant |z' - z''|,$$

то

$$d(t+z) \geqslant d(z) - \delta = (1-\gamma)d(z), \quad 0 < \gamma < 1. \tag{29}$$

Функция f имеет порядок ρ. Значит, в силу неравенства (29),

$$\max_{|t|=\delta}|f(t+z)| \leqslant \exp\left[\left(\frac{1}{(1-\gamma)d(z)}\right)^{\rho+\varepsilon}\right],$$

если $d(z) < d_1(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ — та же величина, что и в формуле (28)), γ фиксировано ($0 < \gamma < 1$). Значит, для заданного $\varepsilon > 0$ при $d(z) < d_2(\varepsilon)$ имеем

$$|a_k| \leqslant \frac{e^{-K(-\varphi_k)|\lambda_k|}}{|Q'(\lambda_k)|}\exp\left[\left(\frac{1}{d(z)}\right)^{\rho+2\varepsilon} + 2|\lambda_k|d(z)\right].$$

Отсюда

$$|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \leqslant \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}\exp\left\{\inf_{0<d<d_2}\left[\left(\frac{1}{d}\right)^{\rho+2\varepsilon} + 2d|\lambda_k|\right]\right\}. \tag{30}$$

Как было отмечено выше (см. [1]), для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$I = \inf_{0<d<d_2}\left[\left(\frac{1}{d}\right)^{\rho+2\varepsilon} + 2d|\lambda_k|\right] \leqslant N_\rho(\varepsilon)|\lambda_k|^{\rho_1/(\rho_1+1)},$$

где $\rho_1 = \rho + 2\varepsilon$. Значит, для любого $\nu > 0$

$$I \leqslant |\lambda_k|^{\rho/(\rho+1)+\nu}$$

при $k \geqslant k_0(\nu)$. Учитывая это, из (30) получаем: для любого $\nu > 0$ при $k \geqslant k_0(\nu)$

$$|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \leqslant \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}\exp|\lambda_k|^{\rho/(\rho+1)+\nu}.$$

Пользуясь известным неравенством (см., например, в [7, с. 22])

$$\ln^+(a+b) \leqslant \ln^+ a + \ln^+ b + \ln 2, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Отсюда имеем при $k > k_0(\nu)$

$$\ln^+\ln^+\left[|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\right] \leqslant \ln^+\ln\frac{1}{|Q'(\lambda_k)|} + \left(\frac{\rho}{\rho+1}+\nu\right)\ln|\lambda_k| + \ln 2.$$

Следовательно,

$$\beta = \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+\left[|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\right]}{\ln|\lambda_k|} \leqslant q_0 + \frac{\rho}{\rho+1},$$

где

$$q_0 = \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln^+\ln\dfrac{1}{|Q'(\lambda_k)|}}{\ln|\lambda_k|}.$$

Далее, если $\beta \geqslant 1$, то $\beta > \rho/(\rho+1)$ (мы предположили, что $\rho < \infty$). Пусть $\beta < 1$. Докажем, что $\beta \geqslant \rho/(\rho+1)$.

Действительно, из определения β имеем

$$\ln^+\ln^+\left[|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\right] < (\beta+\varepsilon)\ln|\lambda_k|$$

для любого $\varepsilon > 0$ при $k \geqslant k_0(\varepsilon)$, т.е.

$$|a_k| < e^{-K(-\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k|^{\beta+\varepsilon}}, \quad \beta < 1.$$

Воспользуемся теперь леммой 1 (в ней теперь $\tau = 0$, $h(\varphi_k) = K(-\varphi_k)$). Тогда для любого $\nu > 0$ при $d(z) < d_0(\nu)$

$$|f(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k e^{\lambda_k z}\right| \leqslant \exp\left[\left(\frac{1}{d(z)}\right)^{q+\nu}\right],$$

где $q = \beta/(1-\beta)$, $z \in G$, так что порядок ρ функции не превышает $q = \beta/(1-\beta)$, т.е. $\beta \geqslant \rho/(\rho+1)$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ имеет нулевую плотность. Тогда для всякой ограниченной выпуклой области G с гладкой границей порядок ρ любой функции $f \in H(G,\Lambda)$ удовлетворяет оценкам*

$$\frac{\rho}{\rho+1} \leqslant \beta \leqslant \frac{\rho}{\rho+1} + q_0, \tag{31}$$

где

$$\beta = \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+\left[|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\right]}{\ln|\lambda_k|}, \quad q_0 = \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln^+\ln\dfrac{1}{|Q'(\lambda_k)|}}{\ln|\lambda_k|},$$

$\lambda_k = |\lambda_k|e^{i\varphi_k}$, $K(\varphi)$ *— опорная функция области G.*

Оценки типа (31) для порядка по Ритту в области G установлены в [2] (они неулучшаемы). Тем же способом показывается (см. [2]), что и двусторонние оценки (31) точны.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Если* $q_0 = 0$, *то порядок любой функции* $f \in H(G, \Lambda)$ *вычисляется по формуле*

$$\frac{\rho}{\rho+1} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+\left[|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\right]}{\ln|\lambda_k|}. \tag{32}$$

Замечание. Формально из формулы (32) вытекает известная формула для порядка в полуплоскости Π_0 (см. [3]), ибо $\tau = 0$, а для $\lambda_k > 0$ значения $K(-\varphi_k)$ равны $K(0) = 0$. Отметим также, что при $q_0 = 0$ индекс конденсации (см. в [6]) также равен нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайсин А. М.* Исследования по теории аппроксимации функций. — Уфа: ОФМ БФАН СССР, 1981.
2. *Гайсин А. М.* Поведение суммы ряда экспонент вблизи границы области регулярности// Мат. заметки. — 1990. — *48*, № 3. — С. 45–53.
3. *Гайсина Г. А.* Об одном обобщении формулы Н. В. Говорова—Мак-Лейна—М. Н. Шереметы для вычисления порядка// Вестн. Башкир. ун-та. — 2016. — *21*, № 3. — С. 556–559.
4. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
5. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 6. — С. 1308–1328.
6. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1983.
7. *Хейман У.* Мероморфные функции. — М.: Мир, 1966.
8. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Т. I. — М.: Наука, 1976.
9. *Юлмухаметов Р. С.* Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы// Мат. заметки. — 1982. — *32*, № 1. — С. 41–57.

Гайсин Ахтяр Магазович
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия;
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: `gaisinam@mail.ru`

Гайсина Галия Ахтяровна
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: `gaisinaga@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 162 (2019). С. 25–33

УДК 517.53

ОБОБЩЕННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ТИПА КОРЕВАРА—ДИКСОНА

© 2019 г. **Р. А. ГАЙСИН**

Аннотация. Изучается обобщенная интерполяционная задача в классе целых функций экспоненциального типа, определяемом некоторой мажорантой из класса сходимости.

Ключевые слова: интерполяционная последовательность, целая функция, класс сходимости, $\overline{\partial}$-задача.

GENERALIZED INTERPOLATION PROBLEM OF THE KOREVAAR–DIXON TYPE

© 2019 **R. A. GAISIN**

Abstract. In this paper, we study the generalized interpolation problem in the class of entire functions of exponential type defined by a certain majorant from the convergence class.

Keywords and phrases: interpolation sequence, entire function, convergence class, $\overline{\partial}$-problem.

AMS Subject Classification: 30E05

1. Введение. В работе рассматривается обобщенная интерполяционная задача в классе целых функций экспоненциального типа, определяемом некоторой мажорантой из класса сходимости. Обычная интерполяционная задача типа Коревара—Диксона в классе целых функций, также определяемом некоторой неквазианалитической мажорантой, исследовалась в [2]. В более узком классе, когда мажоранта обладала свойством вогнутости, аналогичная задача ранее рассматривалась Б. Берндсоном, но с узлами в точках некоторой подпоследовательности натуральных чисел. Берндсон получил критерий разрешимости данной интерполяционной задачи, впервые применив метод, основанный на одной оценке Хёрмандера решения $\overline{\partial}$-задачи. В работах А. И. Павлова, Я. Коревара и М. Диксона интерполяционные последовательности успешно применялись в ряде задач комплексного анализа; при этом была обнаружена некоторая связь с аппроксимативными свойствами систем степеней $\{z^{p_n}\}$ и с известными задачами Полиа и Макинтайра.

В [2] установлен критерий интерполяционности в более общем смысле и для произвольной последовательности действительных чисел. При доказательстве основной теоремы в [2] был использован модифицированный метод Б. Берндсона. В настоящей работе этот результат перенесен на случай, когда на заданные значения, принимаемые целой функцией, накладываются минимальные ограничения — естественные условия, диктуемые классом сходимости.

Пусть L — класс всех таких непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций $l = l(x)$, что $0 < l(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$,

$$W = \left\{ w \in L : \int_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\}, \quad \Omega = \left\{ \omega \in W : \frac{\omega(x)}{x} \downarrow, \ x \to \infty \right\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00095).

Множество W принято называть *классом сходимости*, а функции w из W — *весами* (*неквазианалитическими весами*; см. [2]).

Определение 1 (см. [6]). Пусть $\{p_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{p_n\}$ называется *интерполяционной в смысле Павлова—Коревара—Диксона*, если найдется такая функция $\omega \in \Omega$, зависящая только от последовательности $\{p_n\}$, что для любой последовательности $\{b_n\}$ комплексных чисел, $|b_n| \leqslant 1$, существует целая функция f, обладающая следующими свойствами:

$$(1)\ f(p_n) = b_n, \quad n \geqslant 1, \qquad\qquad (2)\ M_f(r) = \max_{|z|\leqslant r} |f(z)| \leqslant e^{\omega(r)}.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — произвольная последовательность действительных чисел, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$. Последовательность Λ будем называть *интерполяционной*, если найдется такая функция $w \in W$, зависящая только от этой последовательности, что для любой последовательности $\{b_n\}$ комплексных чисел, $|b_n| \leqslant 1$, существует целая функция f, обладающая свойствами (1) и (2), но с функцией w.

Условия, необходимые и достаточные для интерполяционности последовательности $\{p_n\}$ ($p_n \in \mathbb{N}$) в классе Ω были получены в [6], а в классе функций W — в [2].

Определение 2. Пусть β — некоторая функция из класса W. Последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ ($0 < \lambda_n \uparrow \infty$) назовем *интерполяционной в широком смысле*, если найдется такая функция $w \in W$, зависящая только от последовательности Λ, что для любой последовательности $\{b_n\}$ комплексных чисел, $|b_n| \leqslant e^{\beta(\lambda_n)}$ ($n \geqslant 1$), существует целая функция f, обладающая следующими свойствами:

$$(1')\ f(\lambda_n) = b_n, \quad n \geqslant 1, \qquad\qquad (2')\ M_f(r) = \max_{|z|\leqslant r} |f(z)| \leqslant e^{w(r)}.$$

Задачу (1′), (2′) будем называть *обобщенной интерполяционной задачей (в смысле Коревара—Диксона)*, а требование

$$|b_n| \leqslant e^{\beta(\lambda_n)} \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

где β — некоторая фиксированная функция из класса W, будем называть *естественным условием*.

Цель статьи — доказать критерий интерполяционности последовательности Λ в широком смысле.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть

$$n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$$

— считающая функция последовательности Λ и

$$N(t) = \int_0^t \frac{n(x)}{x} dx.$$

Не умаляя общности, будем считать, что $\lambda_1 = 1$; это несколько упростит выкладки в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть* $\tau_n = \min\limits_{\substack{k\neq n\\ \geqslant 1}} |\lambda_n - \lambda_k|$, $h_n = \min(\tau_n, 1)$,

$$K_n = \left\{\xi : \frac{h_n}{4} \leqslant |\xi - \lambda_n| \leqslant \frac{h_n}{2}\right\}, \quad n \geqslant 1.$$

Тогда в кольцах K_n *верны следующие оценки*:

$$(1)\ \sup_{k\neq n}\left|\ln\left|\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - \lambda_n}\right|\right| \leqslant \ln 2; \qquad\qquad (2)\ \sup_{k}\left|\ln\left|\frac{\lambda_k + z}{\lambda_k + \lambda_n}\right|\right| \leqslant \ln\frac{4}{3};$$

$$(3)\ \left|\ln\left|1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right|\right| \leqslant \ln 10 + |\ln h_n| + \ln \lambda_n.$$

Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{n}{\lambda_n}=\tau<\infty.$$

Тогда

$$q(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

— целая функция экспоненциального типа.

Лемма 2 (см. [2])**.** *Пусть последовательность* $\Lambda=\{\lambda_n\}$ $(1=\lambda_1<\lambda_n\uparrow\infty)$ *имеет конечную верхнюю плотность,* $h_n=\min\bigl(\min_{k\neq n}|\lambda_k-\lambda_n|,1\bigr)$,

$$q(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right).$$

Тогда в кольцах

$$K_n=\left\{\xi:\frac{h_n}{4}\leqslant|\xi-\lambda_n|\leqslant\frac{h_n}{2}\right\}$$

верна оценка

$$\left|\ln\frac{1}{|q(z)|}-\int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\nu(\lambda_n;\,t)}{t}dt\right|\leqslant m(\lambda_n),$$

где $\nu(\lambda_n;\,t)$ *— число точек* $\lambda_k\neq\lambda_n$ *из отрезка* $\{h:|h-\lambda_n|\leqslant t\}$,

$$m(\lambda_n)=\ln 10+\ln\lambda_n+|\ln h_n|+n(2\lambda_n)\ln 8+2N(2\lambda_n)+20\ln M_q(\lambda_n).$$

Следствие 1. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}<\infty\quad\text{и}\quad|\ln h_n|\leqslant w_1(\lambda_n),\quad n\geqslant1,$$

для некоторой функции $w_1\in W$, *то для* $z\in K_n$

$$\left|\ln\frac{1}{|q(z)|}-\int\limits_0^{r}\frac{\nu(z;\,t)}{t}dt\right|\leqslant w_2(r),$$

где w_2 *— некоторая функция из* W.

Следствие 1 легко вытекает из леммы 2, если учесть, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/\lambda_n$ равносильна сходимости интегралов

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{n(r)}{r^2}dr,\quad\int\limits_1^{\infty}\frac{N(r)}{r^2}dr,\quad\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln M_q(r)}{r^2}dr$$

(см. [1, 5]). Далее, так как

$$-\ln\prod_{\substack{\lambda_n/2\leqslant\lambda_k\leqslant2\lambda_n,\\ k\neq n}}\left|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right|=-\sum_{|\lambda_k-\lambda_n|\leqslant\lambda_n}\ln\left|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right|+\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda_n/2}\left|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right|=-\Sigma_1(\lambda_n)+A,$$

то для $\Sigma_1(\lambda_n)$ и A верны соотношения:

$$0\leqslant A=\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda_n/2}\ln\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k}-1\right)\leqslant\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda_n/2}\ln\left(1+\frac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2}\right)\leqslant\ln M_q(\lambda_n),$$

$$\Sigma_1(\lambda_n)=-\int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\nu(\lambda_n;\,t)}{t}dt+N_1(2\lambda_n)-n_1(2\lambda_n)\ln 2.$$

Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Верна оценка*

$$\left|-\ln \prod_{\substack{k\neq n\\ \lambda_n/2\leqslant\lambda_k\leqslant 2\lambda_n}} \left|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right| - \int\limits_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n;\ t)}{t}dt\right| \leqslant n(2\lambda_n)+N(2\lambda_n)+\ln M_q(\lambda_n),$$

где $\nu(\lambda_n;t)$ *— число точек* $\lambda_k\neq\lambda_n$ *из отрезка* $\bigl\{h:|h-\lambda_n|\leqslant t\bigr\}$.

Лемма 4 (см. [4])**.** *Пусть* $w\in W$. *Тогда*

$$v(z)=w^*(|z|),$$

где

$$w^*(r)=\int\limits_1^{\infty}\ln\left(1+\frac{r^2}{t^2}\right)dw(t),\qquad r=|z|,$$

— субгармоническая функция в $\mathbb{C}$.

3. Критерий разрешимости обобщенной интерполяционной задачи.

Пусть

$$\Lambda=\{\lambda_n\},\qquad 0<\lambda_n\uparrow\infty,\qquad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=\tau<\infty.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы последовательность* Λ *была интерполяционной в широком смысле, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция* $w\in W$, *что*

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}<\infty;\qquad \text{(b)}\ -\ln\prod_{\substack{\lambda_n/2<\lambda_k<2\lambda_n\\ k\neq n}}\left|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right|\leqslant w(\lambda_n),\quad n\geqslant 1.$$

Отметим, что из леммы 3 и условий (a), (b) следует, что

$$\ln\frac{1}{h_n}\leqslant w_0(\lambda_n),\quad n\geqslant 1,$$

где $h_n=\min\Bigl(\min\limits_{1\leqslant k\neq n}|\lambda_n-\lambda_k|,1\Bigr)$, w_0 — некоторая функция из класса W.

Доказательство достаточной части теоремы 1 основано на одной теореме существования Хёрмандера для $\overline{\partial}$-уравнений. Сформулируем эту теорему (она приведена в [6]).

Теорема 2. *Пусть* $\varphi=\varphi(z)$ *— функция, субгармоническая в* $\mathbb{C}$, $g\in C^{\infty}(\mathbb{C})$. *Тогда существует решение* $u\in C^{\infty}(\mathbb{C})$ *уравнения* $\partial u/\partial\overline{z}=g$, *удовлетворяющее условию*

$$\int\limits_{\mathbb{C}}|u|^2e^{-\varphi}\bigl(1+|z|^2\bigr)^{-2}d\lambda\leqslant\int\limits_{\mathbb{C}}|g|^2e^{-\varphi}d\lambda,\tag{2}$$

при условии, что правая часть конечна (λ *— мера Лебега*).

Доказательство теоремы 1. *Достаточность.* Возьмем такую функцию $\psi\in C^{\infty}$, что $0\leqslant\psi(z)\leqslant 1$, $\psi(z)=1$ при $|z|<1/4$ и $\psi(z)=0$ при $|z|>1/2$. Положим

$$A(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\Psi_n(z-\lambda_n),\qquad \Psi_n(z)=\psi\left(\frac{z}{h_n}\right)$$

где $\{b_n\}$ — любая заданная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая естественному условию (1). Поскольку $A(z)=b_k\Psi_k(z-\lambda_k)$ для $z\in B_k=\{z:|z-\lambda_k|<h_k/2\}$ и $A(z)=0$ для z из внешности объединения кружков B_n, $n\geqslant 1$, то, очевидно, $A\in C^{\infty}$. Далее, так как $|\lambda_k-\lambda_n|\geqslant h_n$ при $k\neq n$, то $A(\lambda_k)=b_k\psi(0)=b_k$, $k\geqslant 1$.

Пусть

$$\varphi(z)=2\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right|+v(z),$$

где v — субгармоническая функция, которая будет выбрана позже. Так как последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность, то

$$q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

— целая функция экспоненциального типа, и φ является субгармонической функцией. Имеем

$$M_\varphi(r) = \max_{|z|=r} |\varphi(z)| \leqslant 2 \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right) + M_v(r).$$

Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right) = \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2}{t^2}\right) dn(t). \tag{3}$$

Интегрируя по частям интеграл Стилтьеса (3), очевидно, получаем:

$$\int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2}{t^2}\right) dn(t) = 2r^2 \int_1^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2+r^2)} dt \equiv w_1(r).$$

Непосредственно проверяется, что $w_1 \in W$.

Построим субгармоническую функцию v так, чтобы величина $M_v(r)$ (максимум модуля функции v) допускала оценку сверху через некоторую функцию из класса W, и при этом правая часть в (2) для функции $g = \partial A / \partial \overline{z}$ была конечной. Пусть

$$K_n = \left\{\xi : \frac{h_n}{4} < |\xi - \lambda_n| < \frac{h_n}{2}\right\}, \quad n \geqslant 1.$$

Заметим, что кольца K_n, $n \geqslant 1$, попарно не пересекаются. Это следует из того, что

$$\frac{h_n}{2} + \frac{h_{n+1}}{2} \leqslant \lambda_{n+1} - \lambda_n, \quad n \geqslant 1.$$

Имея это в виду, запишем:

$$\int_{\mathbb{C}} \left|\frac{\partial A}{\partial \overline{\xi}}\right|^2 e^{-\varphi} d\lambda = \int_{\bigcap_n \{\xi : |\xi-\lambda_n| > h_n/2\}} \left|\frac{\partial A}{\partial \overline{\xi}}\right|^2 e^{-\varphi} d\lambda +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{K_n} \left|\frac{\partial A}{\partial \overline{\xi}}\right|^2 e^{-\varphi} d\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{\xi : |\xi-\lambda_n| < h_n/4\}} \left|\frac{\partial A}{\partial \overline{\xi}}\right|^2 e^{-\varphi} d\lambda. \tag{4}$$

Первый и последний из интегралов справа в равенстве (4), очевидно, равны нулю. Далее,

$$A(\xi) = b_n \psi \left(\frac{\xi - \lambda_n}{h_n}\right), \quad \xi \in K_n.$$

Считая, что $\psi = \psi(w, \overline{w})$, где $w = x + iy = (\xi - \lambda_n)/h_n$, получаем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \overline{\xi}} = \frac{\partial \psi}{\partial \overline{w}} \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)} = \frac{\partial \psi}{\partial \overline{w}} \frac{1}{h_n}.$$

Отсюда находим

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial \overline{\xi}}\right| = \frac{1}{2h_n} \left|\frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}\right| \leqslant \frac{1}{h_n} \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|, \quad \xi \in K_n.$$

Поскольку $|b_n| \leqslant e^{\beta(\lambda_n)}$, $n \geqslant 1$, где β — некоторая функция из класса W, то

$$\int_{\mathbb{C}} \left|\frac{\partial A}{\partial \overline{\xi}}\right|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} T_n,$$

где

$$T_n = \frac{e^{2\beta(\lambda_n)}}{h_n^2}\int\limits_{K_n} e^{-v(\xi)}\prod_{k=1}^{\infty}\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right|^{-2} d\lambda(\xi),$$

$\beta \in W$, $C_1 = \max\limits_{|x|\leqslant 1/2} |\partial\psi/\partial x|^2$.

Для каждого фиксированного n и $\xi \in K_n$ имеем

$$p(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty}\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| = \prod_{\lambda_k\leqslant\lambda_n/2}\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| \prod_{\substack{\lambda_n/2<\lambda_k<2\lambda_n\\ k\neq n}}\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| \prod_{\lambda_k\geqslant 2\lambda_n}\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| \left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_n^2}\right|.$$

Так как $\operatorname{Re}\xi > 0$ для $\xi \in K_n$, $n \geqslant 1$, то

$$\left|1+\frac{\xi}{\lambda_k}\right| \geqslant 1. \tag{5}$$

Далее, для $\lambda_k \leqslant \lambda_n/2$ и $n \geqslant n_0$ также

$$\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| \geqslant \frac{|\xi|^2}{\lambda_k^2} - 1 \geqslant 4\left[1-\frac{1}{2\lambda_n}\right]^2 - 1 \geqslant 1. \tag{6}$$

Учитывая оценки (5), (6), получаем

$$p(\xi) \geqslant \prod_{\substack{\lambda_n/2<\lambda_k<2\lambda_n\\ k\neq n}}\left|1-\frac{\xi}{\lambda_k}\right| \prod_{\lambda_k\geqslant 2\lambda_n}\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| \left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_n^2}\right| \tag{7}$$

для $\xi \in K_n$, $n \geqslant n_0$. Применяя лемму 1, для $\xi \in K_n$ $(n \geqslant 1)$ имеем:

$$\left|1-\frac{\xi}{\lambda_k}\right| = \left|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right| \frac{|\xi-\lambda_k|}{|\lambda_n-\lambda_k|} \geqslant \frac{1}{2}\left|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right|, \quad k \neq n. \tag{8}$$

Оценим теперь величину $\left|1-\xi^2/\lambda_n^2\right|$ для $\xi \in K_n$:

$$\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_n^2}\right| \geqslant \frac{h_n}{4}\frac{|\xi+\lambda_n|}{\lambda_n^2} \geqslant \frac{h_n}{4\lambda_n}.$$

Как было уже отмечено, из условий (a) и (b) следует, что

$$\frac{1}{h_n} \leqslant e^{w_0(\lambda_n)}, \quad n \geqslant 1,$$

где w_0 — некоторая функция из класса W. Значит, при $n \geqslant 1$ для $\xi \in K_n$ имеет место оценка

$$\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_n^2}\right| \geqslant e^{-w_2(\lambda_n)}, \quad w_2 \in W. \tag{9}$$

Требуемая оценка через функцию из W для первого произведения в (7) легко следует из условий (a) и (b), если учесть (8). Осталось оценить произведение

$$\prod_{\lambda_k\geqslant 2\lambda_n}\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right|.$$

Поскольку

$$\frac{|\xi|^2}{t^2} \leqslant \left(\frac{\lambda_n+1/2}{2\lambda_n}\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\lambda_1}\right)^2 < \frac{2}{3},$$

имеем

$$\ln\left|1-\frac{\xi^2}{t^2}\right| \geqslant \ln\left(1-\frac{|\xi|^2}{t^2}\right) \geqslant -3\frac{|\xi|^2}{t^2},$$

так как функция $\varphi(\alpha) = \ln(1-\alpha) + 3\alpha$ возрастает при $\alpha < 2/3$. Но $|\xi|/\lambda_n \leqslant 3/2$ при $\xi \in K_n$, $n \geqslant 1$, поэтому

$$\ln\left|1 - \frac{\xi^2}{t^2}\right| \geqslant -C_2\frac{\lambda_n^2}{t^2}, \quad C_2 = \frac{27}{4}.$$

Учитывая это, далее имеем:

$$\ln\prod_{\lambda_k \geqslant 2\lambda_n}\left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| = \int\limits_{2\lambda_n}^{\infty}\ln\left|1 - \frac{\xi^2}{t^2}\right| dn(t) \geqslant -C_2\int\limits_{2\lambda_n}^{\infty}\frac{\lambda_n^2}{t^2}dn(t) \geqslant -2C_2\lambda_n^2\int\limits_{2\lambda_n}^{\infty}\frac{n(t)}{t^3}dt. \tag{10}$$

Пусть

$$w_3(r) \equiv r^2\int\limits_{2r}^{\infty}\frac{n(t)}{t^3}dt = \int\limits_{2}^{\infty}\frac{n(sr)}{s^3}ds.$$

Легко проверяется, что $w_3 \in W$.

Так как $p(\xi) \geqslant \beta > 0$ на $\bigcup\limits_{n \leqslant n_0} K_n$, то отсюда и оценок (7)–(10), условий (a), (b) теоремы окончательно получаем, что существует такая функция $w_4 \in W$, что для всех $n \geqslant 1$

$$p(\xi) \geqslant e^{-w_4(\lambda_n)}, \quad \xi \in K_n. \tag{11}$$

Положим

$$w^*(r) = \int\limits_{1}^{\infty}\ln\left(1 + \frac{r^2}{t^2}\right)dw_4^*(t) + \bigl(w_4^*(1) + 1\bigr)\ln(1 + r^2),$$

где $w_4^* = w_4 + \beta$. Тогда $v(z) = Cw^*(|z|)$ является искомой функцией при некотором $C > 0$. Действительно, согласно лемме 4, v является субгармонической в $\mathbb{C}$ функцией, а величина $M_v(r) = Cw^*(r)$, как мы видели выше с функцией w_1, представляет собой функцию из класса W.

Остается показать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n < \infty$. Учитывая оценку (11) и определение функции v, имеем:

$$T_n \leqslant \frac{e^{2\beta(\lambda_n)}}{h_n^2}\int\limits_{K_n} e^{-Cw^*\left(|\xi|\right) + 2w_4(\lambda_n)}d\lambda(\xi) \leqslant C_3\exp\left[2\beta(\lambda_n) + 2w_4(\lambda_n) - Cw^*\left(\lambda_n - \frac{1}{2}\right)\right],$$

$C_3 = 3/16\pi$. Заметим, что

$$w^*(r) = 2r^2\int\limits_{1}^{\infty}\frac{w_4^*(t)}{t(t^2+r^2)}dt + \ln(1+r^2) \geqslant 2r^2w_4^*(r)\int\limits_{r}^{\infty}\frac{dt}{t(t^2+r^2)} \geqslant \frac{1}{2}w_4^*(r),$$

а также

$$\frac{w^*(\lambda_n)}{w^*(\lambda_n - \frac{1}{2})} \leqslant M, \quad n \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n \leqslant C_3\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{C}{M}w^*(\lambda_n) + 2w_4^*(\lambda_n)} \leqslant C_3\sum_{n=1}^{\infty} e^{(-C/M+4)w^*(\lambda_n)}.$$

Из определения функции $w^*(r)$ следует, что $w^*(r) \geqslant (w_4^*(1) + 1)\ln(1 + r^2)$, поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n \leqslant C_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\lambda_n^2)^{C_4}},$$

где

$$C_4 = \left(\frac{C}{M} - 4\right)\bigl(w_4^*(1) + 1\bigr) > \frac{1}{2}$$

за счет выбора постоянной C из определения функции v (достаточно взять $C > 5M$). Тогда, очевидно, последний ряд сходится.

Как уже говорилось выше, $M_v(r) = Cw^*(r)$, $w^* \in W$. Значит,

$$M_\varphi(r) \leqslant w_5(r), \tag{12}$$

где $w_5 = 2w_1 + Cw^*$ — функция из класса W.

Применим теорему 2 для $g = \partial A/\partial\overline{z}$. Поскольку функция φ выбрана так, что $e^{-\varphi}$ имеет неинтегрируемую особенность в каждой точке λ_n, должно быть $u(\lambda_n) = 0$, $n \geqslant 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial\overline{z}} = \frac{\partial A}{\partial\overline{z}}, \quad u(\lambda_n) = 0, \quad n \geqslant 1. \tag{13}$$

Положим $f = A - u$, где u — решение уравнения (13) (оно существует согласно теореме Хёрмандера). Ясно, что f — целая функция и $f(\lambda_n) = b_n$, $n \geqslant 1$.

Так как $|f|^2$ — субгармоническая во всей плоскости, то для любого $\rho > 0$, в частности, при $1 \leqslant \rho = r$ (см. [3, гл. I, п. 6]) имеем

$$|f(z)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi\rho^2}\int\limits_{|\xi - z|\leqslant\rho} |f(\xi)|^2 d\lambda(\xi) \leqslant \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{|\xi|\leqslant 2r} |f(\xi)|^2 d\lambda(\xi), \quad r = |z|.$$

Поскольку $|f|^2 \leqslant 2\big(|A|^2 + |u|^2\big)$, имеем:

$$\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{|\xi|\leqslant 2r} |f|^2 d\lambda(\xi) \leqslant \frac{2}{\pi r^2}\int\limits_{|\xi|\leqslant 2r} |A|^2 d\lambda(\xi) + \frac{2}{\pi r^2}\int\limits_{|\xi|\leqslant 2r} |u|^2 d\lambda(\xi).$$

Так как $A(\xi) = 0$ вне кружков B_k, $k \geqslant 1$, то первый интеграл из правой части на самом деле берется только по множеству

$$B(r) = \Big(\bigcup_k B_k\Big) \cap \{\xi : |\xi| \leqslant 2r\}, \quad \text{где} \quad B_k = \Big\{\xi : |\xi - \lambda_k| \leqslant \frac{h_k}{2}\Big\},$$

причем B_k попарно не пересекаются. Но при $\xi \in B_k$, $k \geqslant 1$, имеем

$$|A(\xi)| = |b_k|\left|\psi\left(\frac{\xi - \lambda_k}{h_k}\right)\right| \leqslant e^{\beta(\lambda_k)}, \quad \beta \in W,$$

так что данный интеграл не превосходит величины $8e^{\beta(2r+1)} \leqslant 8e^{\beta(3r)}$, $r \geqslant 1$. Следовательно,

$$|f(z)|^2 \leqslant 8e^{\beta(3r)} + \int\limits_{|\xi|\leqslant 2r} |u|^2 \frac{e^{-\varphi}}{\big(1 + |\xi|^2\big)^2}\big(1 + |\xi|^2\big)^2 e^{\varphi} d\lambda(\xi), \quad r = |z|.$$

Применив к последнему интегралу оценку (2) из теоремы Хёрмандера, отсюда получим:

$$|f(z)|^2 \leqslant 8e^{\beta(3r)} + \exp\big\{2\ln(1 + 4r^2) + M_\varphi(2r)\big\}\int\limits_{\mathbb{C}} |g|^2 e^{-\varphi} d\lambda.$$

Учитывая сходимость последнего интеграла и оценку (12), заключаем, что $|f(z)| \leqslant e^{w_6(|z|)}$, где $w_6 \in W$. Последнее означает, что функция $f = A - u$ решает обобщенную интерполяционную задачу. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — интерполяционная в широком смысле последовательность и $\tilde{w}$ — функция из класса W, существование которой утверждается в определении 2. Поэтому найдется целая функция f, которая решает обобщенную интерполяционную задачу для $b_1 = 1$ и $b_n = 0$, $n > 1$. Из неравенства Йенсена, учитывая свойство $(2')$ из определения 2 интерполяционной в широком смысле последовательности, получаем:

$$n(r) \leqslant \ln M_f(er) \leqslant \tilde{w}(er).$$

Как уже говорилось выше, следующие интеграл и ряд сходятся одновременно:

$$\int\limits_1^\infty \frac{n(r)}{r^2} dr, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n}.$$

Для того, чтобы доказать условие (b), зафиксируем n и выберем такую целую функцию f, которая решает обобщенную интерполяционную задачу для $b_n = 1$ и $b_k = 0$, $k \neq n$.

Справедливо представление

$$f(z) = \prod_{\substack{\lambda_n/2<\lambda_k<2\lambda_n,\\ k\neq n}} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) G(z), \tag{14}$$

где G — целая функция (если ни одно из λ_k, $k \neq n$, не попало в интервал $(\lambda_n/2, 2\lambda_n)$, то считаем, что $G = f$). Для $\lambda_n/2 < \lambda_k < 2\lambda_n$ имеем:

$$\left|1 - \frac{z}{\lambda_k}\right| \geqslant \left|1 - \frac{4\lambda_n}{\lambda_k}\right| \geqslant 1, \quad |z| = 4\lambda_n.$$

Отсюда следует, что $|G(z)| \leqslant |f(z)|$, $|z| = 4\lambda_n$. Согласно принципу максимума модуля

$$\big|G(\lambda_n)\big| \leqslant M_G(4\lambda_n) \leqslant M_f(4\lambda_n) \leqslant e^{\tilde{w}(4\lambda_n)}. \tag{15}$$

С другой стороны, из (14) следует, что

$$G(\lambda_n) = \prod_{\substack{\lambda_n/2<\lambda_k<2\lambda_n,\\ n\neq k}} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{-1}, \tag{16}$$

поскольку $f(\lambda_n) = 1$. Из соотношений (15), (16) окончательно получаем

$$-\ln \prod_{\substack{\lambda_n/2<\lambda_k<2\lambda_n,\\ k\neq n}} \left|1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right| \leqslant \tilde{w}(4\lambda_n), \quad n \geqslant 1,$$

где $\tilde{w}$ — функция из класса W.

Теорема полностью доказана. □

Автор выражает благодарность участникам семинара по комплексному и гармоническому анализу Института математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайсин А. М.* Целые функции: основы классической теории с приложениями к исследованиям по комплексному анализу. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2016.
2. *Гайсин Р. А.* Интерполяционная задача Павлова—Коревара—Диксона с мажорантой из класса сходимости// Уфим. мат. ж. — 2017. — *9*, № 4. — С. 22–35.
3. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984.
4. *Кацнельсон В. Э.* Целые функции класса Картрайт с нерегулярным поведением// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 35–44.
5. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
6. *Berndtsson B.* A note on Pavlov–Korevaar–Dixon interpolation// Indag. Math. — 1978. — *40*, № 4. — P. 409–414.

Гайсин Рашит Ахтярович
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: `rashit.gajsin@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 162 (2019). С. 34–41

УДК 536.2:517.9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

© 2019 г. **А. В. ЖИБЕР, Н. М. ЦИРЕЛЬМАН**

Аннотация. Показано определение температурных полей в пространственно-неоднородной среде при зависящих от температуры теплофизических свойствах материала. При этом использованы точечные и нелокальные преобразования уравнения нестационарной теплопроводности. Даны примеры применения теории для различного рода граничных условий при наличии сферической симметрии.

Ключевые слова: неоднородность, нелинейность, сферическая симметрия, точечные и нелокальные преобразования, полый шар, граничные условия.

DETERMINING TEMPERATURE FIELDS IN A SPATIALLY INHOMOGENEOUS NONLINEAR MEDIUM

© 2019 **A. V. ZHIBER, N. M. TSIRELMAN**

Abstract. A method of determining temperature fields in a spatially inhomogeneous medium with temperature-dependent thermophysical properties of the material is shown. For this purpose, point and nonlocal transformations of the nonstationary heat conduction equation are used. Examples of applying the theory for various boundary conditions in the spherical symmetric case are given.

Keywords and phrases: inhomogeneity, nonlinearity, spherical symmetry, point and nonlocal transformations, hollow ball, boundary conditions.

AMS Subject Classification: 35Q51, 37K60

1. Введение. Подавляющее большинство известных работ по решению нелинейных задач нестационарной теплопроводности посвящено определению температурных полей в однородной среде, объёмная теплоёмкость которой C и коэффициент теплопроводности λ зависят от искомой температуры T (нелинейная среда; см., например, [4,5]). Между тем многие изделия различного технического и технологического назначения изготавливаются из пространственно неоднородных материалов, теплофизические свойства которых зависят не только от искомой температуры T, но и от координат x_1, x_2, x_3. В этом случае уравнение процесса теплопереноса, развивающегося во времени t, относительно температуры $T = T(x_1, x_2, x_3, t)$ при выборе переменной $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ таково:

$$C(T,r)\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\left[B_1(r)\lambda(T,r)\operatorname{grad} T\right]. \tag{1}$$

Предположим, что функции $C(T,r)$ и $\lambda(T,r)$ могут быть представлены в виде произведения фукнции координаты r на функцию температуры T, и вместо (1) рассмотрим следующее нелинейное уравнение теплопроводности:

$$A(r)C(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\left[B(r)\lambda(T)\operatorname{grad} T\right]. \tag{2}$$

2. Точечные преобразования уравнения для тел со сферической симметрией. Рассмотрим новую неизвестную функцию $u = u(x_1, x_2, x_3)$, связанную с искомой температурой соотношением

$$T = f(u). \tag{3}$$

Тогда с использованием замены (3) уравнение (2) принимает вид

$$A(r)C(f(u))f'(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[B(r)\lambda(f(u))f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]. \tag{4}$$

Теперь выберем функцию (3) таким образом , чтобы выполнялось равенство

$$\lambda(f(u))f'(u) = 1, \tag{5}$$

и введём функцию

$$\varphi(u) = C(f(u))f'(u). \tag{6}$$

Следовательно, в силу (5) и (6) уравнение (4) приводится к следующему виду:

$$A(r)\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial t} = B(r)\Delta u + \sum_{i=1}^{3} B'(r)\frac{x_i}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{7}$$

Рассмотрим решения уравнения (7), обладающие сферической симметрией:

$$u = u(r, t). \tag{8}$$

Подстановка функции (8) в уравнение (7) даёт уравнение следующего вида:

$$A(r)\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial t} = B(r)\left[u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right] + B'(r)u_r,$$

или

$$\frac{A(r)}{B(r)}\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left[\frac{2}{r} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right]\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{9}$$

3. Приведение уравнения (9) к линейному виду. Выясним, при каких функциях $A(r)$, $B(r)$ и $\varphi(u)$ уравнения (9) нелокальным преобразованием типа

$$u(r,t) = \omega(y,t), \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \psi(r,\omega), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = h\left(r, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \tag{10}$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \tag{11}$$

Отметим, что почти обратимые преобразования вида (10) рассматривались в [9, 11, 15] при классификации эволюционных уравнений второго порядка.

Согласно формулам (10) имеем систему равенств

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial y}h + \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial \omega}{\partial y}\psi, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\psi^2 + \frac{\partial \omega}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}\psi\right). \tag{12}$$

Используя формулы (10), (12), уравнение (9) в новых переменных приведем к виду

$$\frac{A(r)}{B(r)}\varphi(\omega)\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}h + \frac{\partial \omega}{\partial t}\right) = \psi^2\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}\psi\right) + \left[\frac{2}{r} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right]\frac{\partial \omega}{\partial y}\psi.$$

Следовательно, в силу (11) получаем последовательно

$$\frac{A(r)}{B(r)}\varphi(\omega) = \psi^2(r,\omega), \tag{13}$$

$$\frac{A(r)}{B(r)}\varphi(\omega)h = \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}\psi + \psi\left[\frac{2}{r} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right]. \tag{14}$$

К условиям (13), (14) с привлечением (10) дополнительно можно присоединить условие совместности вида

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial r},$$

которое можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \omega}\left[\frac{\partial \omega}{\partial y}h + \frac{\partial \omega}{\partial t}\right] = \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}\psi + \frac{\partial h}{\partial \omega_y}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\psi.$$

Последнее соотношение согласно уравнению (11) эквивалентно равенствам

$$\frac{\partial \psi}{\partial \omega} = \psi \frac{\partial h}{\partial \omega_y}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \omega} h = \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}\psi. \tag{16}$$

Таким образом, нелинейное уравнение (9) преобразованием (10) сводится к линейному уравнению (11), если функции ψ и h удовлетворяют соотношениям (13)–(16).

Из равенства (15) получаем

$$h = \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} + (r, \omega); \tag{17}$$

тогда, подставляя (17) в (16), будем иметь

$$\omega_y \psi_w \left[\frac{\psi_w}{\psi}\omega_y + p\right] = \omega_y \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi_w}{\psi}\right) + p_r + \omega_y \psi \left[p_w + \omega_y \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\psi_w}{\psi}\right)\right].$$

Следовательно, верны равенства

$$\frac{\psi_w^2}{\psi^2} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\psi_w}{\psi}\right), \quad p_r = 0, \quad \psi_w p = \frac{\psi_w}{\psi} + \psi p_w,$$

и, таким образом, имеем

$$\frac{\psi_w}{\psi} = \frac{1}{D(r) - \omega}, \quad \psi = \frac{D_1(r)}{D(r) - \omega}, \quad p = p(\omega),$$

$$p(\omega)\frac{D_1(r)}{\left(D(r) - \omega\right)^2} = -\frac{D'(r)}{\left(D(r) - \omega\right)^2} + p'(\omega)\frac{D_1(r)}{\left(D(r) - \omega\right)}. \tag{18}$$

Далее, введя обозначение

$$\frac{2}{r} + \frac{B'(r)}{B(r)} = q(r),$$

получаем соотношение (14) в силу (13) в виде

$$h = \frac{\psi_r}{\psi^2} + \frac{\omega_y \psi_w}{\psi} + \frac{q(r)}{\psi}. \tag{19}$$

Сравнивая между собой (17) и (19), получаем равенство

$$p(\omega) = \frac{\psi_r}{\psi^2} + \frac{q(r)}{\psi}, \tag{20}$$

которое с учётом формулы (18) для функции ψ перепишем следующим образом:

$$p(\omega) = \left[\frac{D'(r)}{D(r) - \omega} - \frac{D_1(r)D'(r)}{\left(D(r) - \omega\right)^2}\right]\frac{\left(D(r) - \omega\right)^2}{D_1^2(r)} + q(r)\frac{D(r) - \omega}{D_1(r)},$$

или

$$p(\omega) = \frac{{D'}_1(r)}{D_1^2(r)}\big(D(r) - \omega\big) - \frac{D'(r)}{D_1(r)} + \frac{q}{D_1(r)}\big(D(r) - \omega\big).$$

Поэтому справедливо соотношение

$$p(\omega) = \alpha\omega + \beta, \tag{21}$$

в котором постоянные α и β определяются следующим образом:

$$-\frac{D'_1(r)}{D_1^2(r)} - \frac{q}{D_1(r)} = \alpha, \quad \frac{D'_1(r)}{D_1^2(r)}D(r) - \frac{D'(r)}{D_1(r)} + \frac{q}{D_1(r)}D(r) = \beta. \tag{22}$$

Далее, подставляя функцию (21) в соотношение (18), будем иметь

$$\big(\alpha\omega + \beta\big)D_1(r) = -C'(r) + \alpha D_1(r)\big(D(r) - \omega\big)$$

или

$$\alpha D_1(r) = -\alpha D_1(r), \quad \beta D_1(r) = -D'(r) + \alpha D_1(r)D(r). \tag{23}$$

Используя формулы (22) и (23) и учитывая, что $\psi \neq 0$, получаем равенства

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{D'(r)}{D_1(r)}, \quad q = -\frac{C'_1(r)}{D_1(r)} \tag{24}$$

и зависимость для расчёта $D_1(r)$ в виде

$$D_1(r) = \exp\left[-\int q(r)dr\right] = \exp\left[-\int\left[\frac{2}{r} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right]dr\right],$$

т.е. имеем

$$D_r(r) = \frac{k}{r^2B(r)}, \quad D'(r) = -\beta\frac{k}{r^2B(r)}, \quad k = \text{const}\,. \tag{25}$$

Тогда соотношение (13) в силу (18) и (25) примет вид

$$\frac{A(r)}{B(r)}\varphi(\omega) = \frac{k^2}{r^4B^2(r)}\bigg/\left[\int\frac{\beta k}{r^2B(r)}dr + \omega\right]^2,$$

или

$$\frac{r^4}{k^2}A(r)B(r)\varphi(\omega) = \left[\int\frac{k\beta}{r^2B(r)}dr + \omega\right]^{-2},$$

откуда получаем $\beta = 0$, $D(r) = \text{const}$ и, следовательно, имеем

$$\varphi(\omega) = \frac{\gamma}{(D+\omega)^2}, \quad \frac{r^4}{k^2}A(r)B(r) = \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma = \text{const}\,. \tag{26}$$

Итак, уравнение (9) преобразованием типа (10) приводится к линейному уравнению теплопроводности тогда и только тогда, когда функции $A(r)$, $B(r)$ и $\varphi(u)$ связаны соотношениями (26).

4. Виды линеаризуемых уравнений. Опишем теперь нелинейные уравнения (2), которые для решений, обладающих сферической симметрией, преобразованиями (3) и (10) приводятся к одномерному линейному уравнению (11). Для таких уравнений согласно формулам (5), (6) и (26) имеем

$$\lambda(f(u))f'(u) = 1, \quad C(f(u))f'(u) = \frac{\gamma}{(D+u)^2}, \quad A(r)B(r) = \frac{k^2}{\gamma r^4}. \tag{27}$$

Обозначим через $F(\xi)$ первообразную функции $\lambda(\xi)$:

$$F(f(u)) = u, \quad f(u) = F^{-1}(u)$$

и

$$C(f(u)) = \frac{\gamma}{(D+u)^2}\lambda(f(u)).$$

Таким образом, линеаризуемые уравнения (2) имеют вид

$$A(r)\frac{\gamma}{\big[D+F(T)\big]^2}F'(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\left[\frac{k^2}{\gamma r^4A(r)}\lambda(T)\operatorname{grad}T\right].$$

Здесь $A(r)$ и $\lambda(T)$ — произвольные функции, $F'(T) = \lambda(T)$, а D, γ, k — постоянные.

Так как $D + F(T)$ также является первообразной, то, заменяя $\frac{\gamma}{k}A(r)$ на $A(r)$, приходим к уравнению

$$\frac{A(r)}{F^2(T)}F'(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\left[\frac{F'(T)}{r^4A(r)}\operatorname{grad}T\right], \tag{28}$$

которое линеаризуется при любых функциях $A(r)$ и $F(T)$.

Таким образом, уравнение теплопроводности

$$C(r,T)\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\left[\chi(r,T)\operatorname{grad}T\right], \tag{29}$$

в котором

$$C(r,T) = \frac{A(r)F'(T)}{F^2(T)}, \quad \chi(r,T) = \frac{F'(T)}{r^4A(r)}, \tag{30}$$

точечной заменой

$$u = F(T), \quad T = T(r,t) \tag{31}$$

(см. (3)) преобразуется к виду

$$\frac{r^4A^2(r)}{u^2}u_t = u_{rr} - u_r\left(\frac{2}{r} + \frac{A'(r)}{A(r)}\right). \tag{32}$$

Уравнение (32) при помощи нелокального преобразования типа (10)

$$u(r,t) = v(y,t), \quad \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{r^2A(r)}{v}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\ln v \tag{33}$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности

$$v_t = v_{yy}. \tag{34}$$

Далее из (33) находим, что

$$y(r,t) = \int\limits_L \frac{\partial y}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial y}{\partial \tau}\partial\tau. \tag{35}$$

Здесь L — кривая, соединяющая точки $M_0(r_0,t_0)$ и $M(r,t)$. В силу (33) и (34) этот интеграл не зависит от пути интегрирования L.

С использованием (33) формулу (35) запишем следующим образом:

$$y(r,t) = \int\limits_L \frac{\rho^2A(\rho)}{u(\rho,\tau)}d\rho - \frac{u_\rho}{\rho^2A(\rho)}d\tau$$

и, наконец, учитывая (31), находим

$$y(r,t) = \int\limits_L \frac{\rho^2A(\rho)}{F(T(\rho,\tau))}d\rho - \frac{F'(T(\rho,\tau))T_\rho(\rho,r)}{\rho^2A(\rho)}d\tau. \tag{36}$$

Отметим, что преобразования типа (10) использовались для решения краевых задач и нахождения точных решений для эволюционных уравнений второго порядка (см. [2,3,6,7,12–14]). Ниже показано применение этих преобразований к краевым задачам для нелинейных уравнений (29), (30).

5. Примеры решения задач нестационарной теплопроводности для полого шара.

5.1. Решения задач нестационарной теплопроводности для граничных условий первого рода. Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения (29) в области $\Omega_T = (0,T] \times \Omega$,

$$\Omega = \left\langle M(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; R_1 < r < R_2,\ r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \right\rangle,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$T(r,0) = \varphi(r), \quad R_1 < r < R_2, \tag{37}$$

и граничным условиям первого рода

$$T(R_1,t) = \varphi_1(t), \quad t > 0, \tag{38}$$
$$T(R_2,t) = \varphi_2(t), \quad t > 0. \tag{39}$$

Покажем, что краевая задача (29), (37)–(39) сводится к решению задачи со свободными границами для уравнения теплопроводности. При преобразовании (36) «прямая» $r = R_1$ плоскости (r,t) перейдёт в кривую $y = y_1(t)$ плоскости (y,t), а «прямая» $r = R_2$ — в кривую $y = y_2(t)$:

$$y_1(t) = y(R_1,t) = -\int_0^t \frac{F'(T(R_1,\tau))T_\rho(R_1,\tau)}{R_1^2 A(R_1)} d\tau, \tag{40}$$

$$y_2(t) = y(R_2,t) = -\int_0^t \frac{F'(T(R_2,\tau))T_\rho(R_2,\tau)}{R_1^2 A(R_2)} d\tau + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2 A(\rho)}{F(T(\rho,0))} d\rho. \tag{41}$$

Далее, положим

$$y(r) = y(r,0) = \int_r^{R_1} \frac{\rho^2 A(\rho)}{F(T(\rho,0))} d\rho \tag{42}$$

и рассмотрим краевую задачу следующего вида:

$$v_t = v_{yy}, \qquad t > 0, \quad y_1(t) < y < y_2(t), \tag{43}$$
$$v(y,0) = F(\varphi(r)) = F(\varphi(r(y))), \qquad y_1(0) < y < y_2(0), \tag{44}$$
$$v(y_1(t),t) = F(\varphi_1(t)), \qquad t > 0, \tag{45}$$
$$\frac{dy_1(t)}{dt} = -\frac{v_y(y_1(t),t)}{F(\varphi_1(t))}, \qquad t > 0, \tag{46}$$
$$v(y_2(t),t) = F(\varphi_2(t)), \qquad t > 0, \tag{47}$$
$$\frac{dy_2(t)}{dt} = -\frac{v_y(y_2(t),t)}{F(\varphi_2(t))}, \qquad t > 0; \tag{48}$$

здесь $r(y)$ — функция, обратная функции

$$y(r) = \int_{R_1}^{r} \frac{\rho^2 A(\rho)}{F(\varphi(\rho))}.$$

Непосредственно проверяется, что рассмотренная здесь задача сводится к решению задачи со свободными границами (43)–(48) с использованием формул (31), (33), (34), (36)–(42).

5.2. Решения задач нестационарной теплопроводности для граничных условий второго рода. Будем искать решение уравнения (29) в области Ω_τ, удовлетворяющее начальному условию (37) и граничным условиям второго рода

$$\chi(r,T)T_r = f_1(t), \quad r = R_1, \quad t > 0, \tag{49}$$

$$\chi(r,T)T_r = f_2(t), \quad r = R_2, \quad t > 0. \tag{50}$$

Так как справедливо равенство

$$\chi(r,T)T_r = \frac{F'(T)}{r^4 A(r)} T_r,$$

то в силу (49) и (50) формулы (40) и (41) примут соответственно вид

$$y_1(t) = -\int_0^t R_1^2 f_1(\tau)d\tau, \quad y_2(t) = -R_2^2 \int_{R_1}^{R_2} f_2(\tau)d\tau + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2 A(\rho)}{F(\phi(\rho))} d\rho.$$

Таким образом, функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ полностью определяются начальными и граничными условиями (37), (49), (50), и мы приходим к следующей краевой задаче:

$$v_t = v_{yy}, \quad t > 0, \quad y_1(t) < y < y_2(t), \tag{51}$$

$$v(y,0) = F(\varphi(r(y))), \quad y_1(0) < y < y_2(0), \tag{52}$$

$$v_y = R_1^2 v, \quad y = y_1(t), \quad t > 0, \tag{53}$$

$$v_y = R_2^2 v, \quad y = y_2(t), \quad t > 0. \tag{54}$$

Отметим, что условия (53) и (54) соответствуют граничным условиям (49) и (50), так что решение рассмотренной здесь задачи (29), (37), (49), (50) сводится к решению краевой задачи (51)–(54).

5.3. Решения задач нестационарной теплопроводности для граничных условий третьего рода. Будем искать решение уравнения (29) в области Ω_T, удовлетворяющее начальному условию (37) и граничным условиям третьего рода

$$\chi(r,T)T_r = \alpha_1(T - f_1(t)), \quad r = R_1, \quad t > 0, \tag{55}$$

$$\chi(r,T)T_r = \alpha_2(T - f_2(t)), \quad r = R_2, \quad t > 0. \tag{56}$$

В данном случае задача (29), (37), (55), (56) сводится к решению задачи со свободными границами, имеющей вид

$$v_t = v_{yy}, \quad y_1(t) < y < y_2(t), \quad t > 0, \tag{57}$$

$$v(y,0) = F(\varphi(r(y))), \quad y_1(0) < y < y_2(0), \tag{58}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y} \ln v, \quad y = y_i(t), \quad i = 1,2, \quad t > 0, \tag{59}$$

$$v_y = \alpha_i R_i^2 v(F^{-1}(v) - f_i), \quad y = y_i(t), \quad i = 1,2, \quad t > 0. \tag{60}$$

Отметим, что условия (60) соответствуют граничным условиям (55), (56).

Краевые задачи со свободными границами для уравнений параболического типа исследовались многими авторами (см., например, [1, 8, 10]).

6. Выводы.

1. Нелинейные краевые задачи нестационарной теплопроводности в пространственно неоднородной нелинейной среде для полого шара с граничными условиями первого и третьего рода на ограничивающих поверхностях приведены к линейной краевой задаче с двумя неизвестными границами для уравнения теплопроводности.

2. Нелинейная краевая задача нестационарной теплопроводности в пространственно неоднородной нелинейной среде для полого шара с граничными условиями второго рода на ограничивающих поверхностях приведена к линейной краевой задаче. При этом граничные условия можно выбрать таким образом, чтобы искомое решение было получено в аналитической форме.

3. Нелинейные краевые задачи теплопроводности в пространственно неоднородной нелинейной среде с граничным условием второго рода на одной ограничивающей поверхности полого шара с граничным условием первого или третьего рода на другой его поверхности приведены к классической задаче Стефана для линейного уравнения теплопроводности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жибер А. В.* Дифференциальные подстановки в задачах со свободными границами// в кн.: Асимптотические методы решений дифференциальных уравнений. — Уфа: ИМВЦ УрО РАН, 1992. — С. 27–45.
2. *Жибер А. В., Цирельман Н. М.* Точное решение задачи стефановского типа для твёрдого водорода// Инж.-физ. ж. — 1989. — *54*, № 51. — С. 144–145.
3. *Жибер А. В., Цирельман Н. М.* Точные решения задачи динамики адсорбции-десорбции с нелинейной изотермой сорбции// Изв. АН СССР. Мех. жидк. газа. — 1989. — № 5. — С. 107–112.
4. *Коздоба Л. А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности. — М.: Наука, 1975.
5. *Лыков А. В.* Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности. Обзор// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1970. — № 5. — С. 109–184.
6. *Мейерманов А. М.* Задача Стефана. — Новосибирск: Наука, 1986.
7. *Пухначев В. В., Шмарев С. И.* Исследование квазилинейных уравнений методом лагранжевых координат// в кн.: Функциональные и численные методы математической физики. — Киев: Наукова думка, 1988. — С. 181–185.
8. *Рубинштейн Л. Н.* Проблема Стефана. — Рига: Звайзгне, 1967.
9. *Свинолупов С. И.* Эволюционные уравнения второго порядка — 1985. — *40*, № 5. — С. 263–264.
10. *Фридман А.* Уравнения с частичными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.
11. *Хабиров С. В.* Проблема Беклунда для эволюционных уравнений второго порядка. — Уфа, 1986.
12. *Bluman G., Kumei S.* On the remarkable nonlinear diffusion equation// J. Math. Phys. — 1980. — *21*, № 5. — P. 1019–1023.
13. *Rosen G.* Method for the exact solution of a nonlinear diffusion-convection equation// Phys. Rev. Lett. — 1982. — *49*, № 25. — P. 1844–1847.
14. *Rosen G.* Nonlinear heat conduction in solid H_2// Phys. Rev. B. — 1979. — *19*, № 19. — P. 2398–2399.
15. *Sokolov V. V., Svinolupov S J.* On the generation of nonlinear integrable evolution equations from linear second order equation. — Friedrich-Schiller Universität.

Жибер Анатолий Васильевич
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия
E-mail: `zhiber@mail.ru`

Цирельман Наум Моисеевич
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия
E-mail: `bkcuazs@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 162 (2019). С. 42–56

УДК 517.537

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ ФУНКЦИЙ В НОРМИРОВАННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ $A^\infty(D)$

© 2019 г. К. П. ИСАЕВ, К. В. ТРУНОВ, Р. С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Вводится нормированное пространство функций, аналитических в ограниченной выпуклой области и бесконечно дифференцируемых вплоть до ее границы, с оценками всех производных, задаваемыми логарифмически выпуклой последовательностью положительных чисел. Доказано, что функции из этого пространства представляются рядами экспонент, сходящимися в ослабленной норме. Основным инструментом в конструкции систем экспонент служат целые функции с заданным асимптотическим поведением. Доказана теорема о совместном приближении субгармонических функций логарифмами модулей целых функций.

Ключевые слова: аналитическая функция, целая функция, субгармоническая функция, ряд экспонент.

REPRESENTATION OF FUNCTIONS BY SERIES OF EXPONENTS IN NORMED SUBSPACES OF $A^\infty(D)$

© 2019 K. P. ISAEV, K. V. TROUNOV, R. S. YULMUKHAMETOV

Abstract. We introduce the normalized space of functions that are analytic in a bounded convex domain and infinitely differentiable up to its boundary, with estimates of all derivatives determined by a logarithmically convex sequence of positive numbers. We prove that functions from this space are represented by series of exponents converging in a weakened norm. The main tool in the construction of systems of exponents are entire functions with a given asymptotic behavior. Also, a theorem on the joint approximation of subharmonic functions by the logarithms of the modules of entire functions is proved.

Keywords and phrases: analytic function, entire function, subharmonic function, series of exponents.

AMS Subject Classification: 30B50, 30D20, 30D60

1. Введение. В работе рассматриваются подпространства $A \subset A^\infty(D) = H(D) \cap C^\infty(\overline{D})$ для ограниченной выпуклой области D на плоскости на предмет представления функций $f \in A$ из этих подпространств рядами экспонент. В классической теории рядов экспонент, подробно изложенной в монографии [8] А. Ф. Леонтьева, одной из основных теорем является теорема о представлении рядами экспонент в $H(D)$ с топологией равномерной сходимости на компактах из D (см. [8, теорема 5.3.2, с. 382]).

Теорема А. *Пусть D — ограниченная выпуклая область. Тогда имеется такая последовательность $\{\lambda_n\}$, зависящая только от области D, что любую функцию $F(z)$, аналитическую в области D, можно в D разложить в ряд Дирихле*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00095А)..

сходящийся равномерно на компактах из D.

Основным инструментом в конструкции систем экспонент служат целые функции с заданным асимптотическим поведением. Например, в доказательстве теоремы A показатели $\{\lambda_n\}$ выбираются как простые нули такой целой функции $L(\lambda)$ экспоненциального типа и вполне регулярного роста, что при любом $\varepsilon > 0$ выполняются соотношения

$$\bigl|L(\lambda)\bigr| \prec e^{H_D(\lambda)+\varepsilon|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \bigl|L'(\lambda_n)\bigr| \succ e^{H_D(\lambda_n)-\varepsilon|\lambda_n|}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где $H_D(\lambda) = \max\limits_{z\in\overline{D}} \Re\lambda\overline{z}$ — опорная функция области D, запись $A(x) \prec B(x)$, $x \in X$, означает, что для некоторой константы $C > 0$ для всех $x \in X$ выполняется оценка $A(x) \leqslant C \cdot B(x)$. В связи с этим обстоятельством в теории представления рядами экспонент обособленное место занимали выпуклые многоугольники; дело в том, что характеристическую целую функцию L в этом случае можно взять в виде квазиполинома

$$L(\lambda) = \sum_j a_j e^{\gamma_j \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где γ_j — вершины многоугольника, и требуемое свойство (1) будет выполняться в существенно более точном виде

$$\bigl|L(\lambda)\bigr| \prec e^{H_D(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \bigl|L'(\lambda_n)\bigr| \succ e^{H_D(\lambda_n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

С помощью таких целых функций доказана следующая теорема.

Теорема AI (см. [8, теорема 4.7.4, с. 328])**.** *Для любого ограниченного выпуклого многоугольника* D *существует такая система экспонент* $e^{\lambda_n z}$*, что любая функция, аналитическая в многоугольнике* D *и непрерывная вместе со своей первой производной в* $\overline{D}$*, может быть представлена в виде ряда по этой системе, причем этот ряд сходится всюду в* $\overline{D}$ *и равномерно сходится в* $\overline{D} \setminus \bigcup\limits_j B(\gamma_j, \varepsilon)$*; здесь* γ_j *— вершины многоугольника и* $\varepsilon > 0$ *— произвольное число.*

В [7] доказано, что эта система образует (безусловный) базис в пространстве Смирнова $E_2(D)$. В [3] построены базисы из экспонент в пространстве Бергмана $B_2(D)$ на выпуклом многоугольнике D. Из результатов работ [2, 4] видно, что базисы из экспонент в нормированных пространствах — редкое явление.

Приведем здесь теорему из [7].

Теорема B. *Пусть функция* $L(\lambda)$ *с простыми нулями* λ_n *удовлетворяет условиям*

$$\bigl|L(\lambda)\bigr| \prec e^{H_D(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \bigl|L(\lambda)\bigr| \succ e^{H_D(\lambda)}, \quad z \notin \bigcup_n B(\lambda_n, \delta),$$

причем круги $B(\lambda_n, \delta)$ *попарно не пересекаются. Тогда любая функция* $f \in E_2(D)$ *единственным образом представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_n f_n e^{\lambda_n z},$$

и при этом выполняется соотношение

$$\|f\|^2 \asymp \sum_n |f_n|^2 e^{-2H_D(\lambda_n)}, \quad f \in E_2(D).$$

Теорема B в некотором смысле перенесена на области с гладкой границей (см. [9, теорема 5.2]). Из этого результата, в частности, вытекает следующее утверждение.

Теорема BI. *Если граница выпуклой области* D *во всех точках имеет конечную, отличную от нуля кривизну, то существует такая система экспонент, что любая функция из пространства* $E_2^{1/4}(D)$ *представляется в виде ряда по этой системе, сходящегося в норме пространства* $E_2(D)$.

Пространство $E_2^{1/4}(D)$ — собственное подпространство пространства Смирнова $E_2(D)$.

Пусть $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ — возрастающая логарифмически выпуклая последовательность (см. [10]). Обозначим через $H(D, \mathcal{M})$ пространство аналитических в D функций с нормой

$$\|f\| = \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \left(\sup_{z\in D} \frac{|f^{(n)}(z)|}{M_n} \right).$$

В работе доказана теорема 4, которую можно рассматривать как аналог теорем AI и BI.

Отметим, что имеется ряд работ о представлении рядами экспонент в пространствах с «промежуточными» топологиями, а именно, в проективных и индуктивных пределах весовых нормированных пространств (см., например, [1, 5, 11]).

Обозначим через $B(z,t)$ открытый круг с центром в точке z радиуса t. Для меры μ через $\mu(z,t)$ будем обозначать μ-меру круга $B(z,t)$ и полагать $\mu(t) = \mu(0,t)$. Символ $N(f)$ обозначает множество нулей аналитической функции f.

2. Целые функции с заданными асимптотическими свойствами. В этом разделе будут доказаны теоремы о существовании целых функций с заданными асимптотическими свойствами. В теории рядов экспонент такие целые функции являются основным инструментом. Отправным фактом для наших конструкций является следующая теорема.

Теорема C (см. [12]). *Для любой субгармонической функции u на плоскости, имеющей конечный порядок роста, существует целая функция f, удовлетворяющая соотношению*

$$\Big| u(\lambda) - \ln|f(\lambda)| \Big| = O\Big(\ln\big(|\lambda|+1\big) \Big), \quad \lambda \notin E, \quad |\lambda| \to \infty.$$

Для любого $\beta < 0$ исключительное множество E может быть покрыто системой кругов $B(w_k, r_k)$ так, что

$$\sum_{|w_k|\geqslant R} r_k = O(R^{\beta}), \quad R \to \infty.$$

В применениях приближаемая субгармоническая функция обычно имеет какие-либо дополнительные свойства, что может дать возможность для уточнений асиптотики, с одной стороны, с другой — обычно требуется не просто оценка размеров исключительного множества, но в большей степени его конструкция. Поскольку в вопросах разложения функций в ряд из экспонент приближаемая субгармоническая функция, как правило, удовлетворяет условию Липшица, то в [6] приближение таких субгармонических функций рассмотрено отдельно и доказана следующая теорема.

Теорема D (см. [6, теорема 1.5]). *Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, μ — мера, ассоциированная с ней по Риссу. Если для некоторого $M > 0$ для всех точек $z \in \mathbb{C}$ выполняется условие*

$$\mu(B(z,t)) \leqslant Mt, \quad t \in (0;1), \tag{2}$$

то существует такая целая функция f с простыми нулями λ_n, что при некотором $\delta \in (0;1)$ круги $B_\delta(\lambda_n) = B(\lambda_n, \delta(|\lambda_n|+1)^{-1})$ попарно не пересекаются, а сама функция удовлетворяет соотношению

$$\Big| \ln|f(\lambda)| - u(\lambda) \Big| \leqslant A \ln\big(|\lambda|+1\big) + C, \quad \lambda \notin \bigcup_n B_\delta(\lambda_n),$$

а производная — оценке

$$\Big| \ln|f'(\lambda)| - u(\lambda) \Big| \leqslant A \ln\big(|\lambda|+1\big) + C', \quad \lambda \in N(f);$$

при этом постоянная $A > 0$ не зависит от M и функции u, а постоянные C, C', δ зависят от M, но не зависят от функции u.

Заметим, что если субгармоническая функция u для некоторой константы $K > 0$ удовлетворяет условию Липшица

$$\big| u(z) - u(w) \big| \leqslant K|z-w|, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

то ее ассоциированная мера удовлетворяет условию типа (2):

$$\mu(z,t) \leqslant Ket, \quad z \in \mathbb{C}, \quad t > 0.$$

Это следует из формулы Йенсена

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\bigl(z + re^{i\varphi}\bigr)d\varphi = u(z) + \int_0^r \frac{\mu(z,t)}{t}dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad t > 0.$$

В самом деле, из условия Липшица следует оценка

$$\mu\left(z, \frac{r}{e}\right) \leqslant \int_{r/e}^{r} \frac{\mu(z,t)}{t}dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Bigl|u\bigl(z+re^{i\varphi}\bigr) - u(z)\Bigr| d\varphi \leqslant Kr.$$

В применениях аппроксимационных теорем нередко возникает необходимость совмещенных приближений. Например, в [6] доказана следующая теорема.

Теорема DI (см. [6, теорема 1.2])**.** *Пусть u_j — субгармонические функции на плоскости, имеющие конечный тип при порядке роста ρ, $j = 1, 2, \ldots, k$, μ_j — меры, ассоциированные с ними по Риссу и удовлетворяющие для некоторых констант $a, \alpha > 0$ следующему условию*:

$$\mu_j(B(z,t)) \leqslant a(|z|+1)^{\alpha} t, \quad t \in \Bigl(0; \bigl(|z|+1\bigr)^{-\alpha}\Bigr).$$

Тогда существуют такие целые функции f_j, что все нули произведения $f = f_1 f_2 \cdots f_k$ простые, при некоторых $\delta > 0$, $\beta \geqslant 0$ круги $B_{\delta,\beta}(\lambda) = B(\lambda, \delta(|\lambda|+1)^{-\beta})$, $\lambda \in N(f)$, попарно не пересекаются, и для $j = 1, 2, \ldots, k$ и некоторых постоянных $A, B > 0$ выполняются соотношения

$$\ln\bigl|f_j(\lambda)\bigr| \leqslant u_j(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\ln\bigl|f_j(\lambda)\bigr| \geqslant u_j(\lambda) - A\ln(|\lambda|+e), \quad \lambda \notin \bigcup_{z \in N(f_j)} B_{\delta,\beta}(z),$$

$$\ln\bigl|f_j'(\lambda)\bigr| \geqslant u_j(\lambda) - B\ln(|\lambda|+e), \quad \lambda \in N(f_j).$$

Постоянные A, B зависят от ρ, α, a и не зависят от конкретного вида функций u_j.

Здесь докажем подобную теорему с более жесткими условиями на приближаемые функции.

Теорема 1. *Пусть u_j — субгармонические функции на плоскости, μ_j, $j = 1, 2,$ — меры, ассоциированные с ними по Риссу, удовлетворяющие условию*

$$\mu_j(B(z,t)) \leqslant Mt, \quad t \in (0;1), \tag{3}$$

а мера μ_2, кроме того, удовлетворяет условию

$$\int_1^{\infty} \frac{\mu_2(r)dr}{r^2} < \infty. \tag{4}$$

Тогда существуют такие целые функции f_j, что все нули произведения $f = f_1 f_2$ простые, при некотором $\delta > 0$ круги $B_\delta(\lambda) = B(\lambda, \delta(|\lambda|+1)^{-1})$, $\lambda \in N(f)$, попарно не пересекаются, и для некоторых постоянных A, C, $C' > 0$ выполняются соотношения

$$\Bigl|\ln\bigl|f_j(\lambda)\bigr| - u_j(\lambda)\Bigr| \leqslant B\ln\bigl(|\lambda|+1\bigr) + C, \quad \lambda \notin \bigcup_{z \in N(f_j)} B_\delta(z),$$

$$\Bigl|\ln\bigl|f_j'(\lambda)\bigr| - u_j(\lambda)\Bigr| \leqslant B\ln\bigl(|\lambda|+1\bigr) + C', \quad \lambda \in N(f_j);$$

при этом постоянная $B > 0$ не зависит от M и функций u_j, а постоянные C, C', δ зависят от M, но не зависят от функций u_j.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы основывается на теореме D и представляет собой модификацию доказательства из [6, теорема 1.2].

По теореме D для каждой из функций u_j существует целая функция f_j, удовлетворяющая оценкам

$$\Big|\ln|f_j(\lambda)| - u_j(\lambda)\Big| \leqslant A\ln\big(|\lambda|+1\big) + C, \quad \lambda \notin \bigcup_{\lambda\in N(f_j)} B\Big(\lambda, \delta\big(|\lambda|+1\big)^{-1}\Big), \tag{5}$$

$$\Big|\ln|f_j'(\lambda)| - u_j(\lambda)\Big| \leqslant A\ln\big(|\lambda|+1\big) + C', \quad \lambda \in N(f_j).$$

При этом круги $B_\delta(\lambda) = B(\lambda, \delta(|\lambda|+1)^{-1})$, $\lambda \in N(f_j)$, для каждого $j = 1, 2$ по отдельности попарно не пересекаются. Сформулируем свойства меры μ_2 и ассоциированной меры ν_2 функции $\ln|f_2|$ в виде следующей леммы.

Лемма 1.

1. *Имеют место соотношения*

$$\mu_2(t) = o(t), \quad \nu_2(t) = o(t), \quad t \to \infty. \tag{6}$$

2. *Если* $\lambda \notin \bigcup\limits_{z\in N(f_2)} B_\delta(z)$, *то*

$$\int_0^{1/2} \frac{\nu_2(\lambda,\tau)d\tau}{\tau} \leqslant 2A\ln\big(1+|\lambda|\big) + C''.$$

Доказательство леммы 1. Первое утверждение леммы — непосредственное следствие условия (4). Для доказательства второго воспользуемся формулой Йенсена для функции $v(z) = u_2(z) - \ln|f_2(z)|$ с ассоциированным зарядом $\nu = \mu_2 - \nu_2$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\lambda + re^{i\varphi})d\varphi = v(\lambda) + \int_0^r \frac{\nu(\lambda,\tau)d\tau}{\tau}.$$

Согласно соотношению (6) найдется такое $R > 2$, что $\mu_2(t) \leqslant t/4$ для всех $t \geqslant R$. Пусть $|\lambda| \geqslant R$. Положим $r(w) = \delta(1+|w|)^{-1}$. С окружностями $C(\lambda, r)$, $r \in [1/2; 1)$, могут пересекаться только исключительные круги $B(w_k, r(w_k))$, центры которых лежат в $B(\lambda, 1+\delta)$, и для них $r(w_k) \leqslant 2r(\lambda)$, поэтому

$$\sum_{w_k\in B(\lambda,1+\delta)} r(w_k) \leqslant 2r(\lambda)\mu_2(1+\delta+|\lambda|) < \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что найдется такое число $r \in [1/2; 1)$ такое, что окружность $C(\lambda, r)$ не пересекается с исключительным множеством. По построению на этой окружности выполняется неравенство

$$\big|v(z)\big| = \Big|u_2(z) - \ln\big|f_2(z)\big|\Big| \leqslant A\ln\big(1+|z|\big) + C,$$

и такое же неравенство выполняется в точке λ. По формуле Йенсена получим

$$\left|\int_0^r \frac{\mu_2(t) - \nu_2(t)}{t}dt\right| \leqslant 2A\ln\big(1+|z|\big) + C_1.$$

Отсюда и из условия (3) вытекает второе утверждение леммы 1. □

Докажем еще одно вспомогательное утверждение об исключительных множествах.

Утверждение 1. *Для любого* $\delta' \in (0;\delta)$ *оценка* (5) *для* u_2 *выполняется вне кругов* $B\big(\lambda, \delta'(|\lambda|+1)^{-1}\big)$, $\lambda \in N(f_2)$, *возможно, с другой постоянной* C.

Доказательство утверждения 1. В самом деле, возьмем произвольное

$$\lambda \notin E' := \bigcup_{z\in N(f_2)} B\big(z, \delta'(|z|+1)^{-1}\big).$$

Если при этом $\lambda \notin E := \bigcup\limits_{z \in N(f_2)} B\bigl(z, \delta(|z|+1)^{-1}\bigr)$, то оценки выполняются по утверждению теоремы. Если $\lambda \in E$, то найдется такой номер n, что

$$r' := \delta'\bigl(1+|\lambda_n|\bigr)^{-1} \leqslant |\lambda - \lambda_n| < r := \delta\bigl(1+|\lambda_n|\bigr)^{-1}.$$

Пусть $G(\lambda, w)$ — функция Грина круга $B(\lambda_n, r)$; тогда имеют место представления

$$u_2(\lambda) = h(\lambda) - \int\limits_{B(\lambda_n, r)} G(\lambda, w)\,d\mu_2(w), \qquad \ln\bigl|f_2(\lambda)\bigr| = h_0(\lambda) - G(\lambda, \lambda_n),$$

где функции h, h_0 — гармонические мажоранты функций u_2 и $\ln|f_2|$ в круге $B(\lambda_n, r)$. Разность $\bigl|h(\lambda) - h_0(\lambda)\bigr|$ оценивается по принципу максимума для гармонических функций: для некоторой постоянной C_1

$$\bigl|h_0(\lambda) - h(\lambda)\bigr| \leqslant A\ln\bigl(1+|\lambda|\bigr) + C_1.$$

Потенциал меры μ_2 оценим на основании условия (3). Пусть h_1 — гармоническая мажоранта функции u_2 в круге $B(\lambda, 2r)$. Тогда, если выбрать изначально $\delta < 1/2$, то

$$\int\limits_{B(\lambda_n, r)} G(\lambda, w)\,d\mu_2(w) = h(\lambda) - u_2(\lambda) \leqslant h_1(\lambda) - u_2(\lambda) = \int\limits_0^{2r} \frac{\mu_2(\lambda, t)\,dt}{t} \leqslant 2Mr \leqslant M.$$

Наконец,

$$G(\lambda, \lambda_n) = \ln\frac{r}{|\lambda_n - \lambda|} \leqslant \ln\frac{r}{r'} = \ln\left(\frac{\delta}{\delta'}\right), \qquad \lambda \notin B(\lambda_n, r').$$

Таким образом, для $\lambda \notin B(\lambda_n, r')$

$$\Bigl|u_2(\lambda) - \ln\bigl|f_2(\lambda)\bigr|\Bigr| \leqslant A\ln\bigl(1+|\lambda|\bigr) + C_1 + M + \ln\left(\frac{\delta}{\delta'}\right).$$

Утверждение 1 доказано. □

Пусть $z \in N(f_1)$. Тогда в круге $B_{\delta/2}(z)$ других нулей функции f_1 нет, и может быть только один нуль функции f_2. Если $w \in N(f_2) \cap B_{\delta/2}(z)$, то переместим эту точку в ближайшую к ней точку w' на границе круга $B_{\delta/4}(z)$. Пусть $N(f_2) = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$. Через $\widetilde{w}_k$ обозначим точку w_k, если w_k не попадает в объединение кругов $B_{\delta/2}(\lambda)$, $\lambda \in N(f_1)$, и точку w'_k для точек w_k, попадающих в какой-либо из этих кругов, и через $\widetilde{N}$ обозначим множество точек $\widetilde{w}_k$. Очевидно, круги $B_{\delta/8}(\lambda)$, $\lambda \in N(f_1) \cup \widetilde{N}$, попарно не пересекаются.

Лемма 2. *Пусть*

$$\pi_2(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w_k}\right|, \qquad \widetilde{\pi}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{\widetilde{w}_k}\right|, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

(*Сходимость этих рядов следует из условия* (4)). *Тогда вне множества попарно непересекающихся кругов* $E := \bigcup\limits_{w \in N(f_2) \cup \widetilde{N}} B_{\delta/8}(w)$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *и некоторой постоянной* C *выполняется оценка*

$$\bigl|\pi_2(\lambda) - \widetilde{\pi}(\lambda)\bigr| \leqslant \varepsilon\ln\bigl(1+|\lambda|\bigr) + C.$$

Доказательство леммы 2. Поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{\lambda \notin E} \sum_{k \leqslant n} \left|\ln\left|1 - \frac{\lambda}{w_k}\right| - \ln\left|1 - \frac{\lambda}{\widetilde{w}_k}\right|\right| \leqslant C(n),$$

не уменьшая общности, можем рассматривать только достаточно большие по модулю w_k, например, считать, что $|w_k| \geqslant 25$. Поскольку при $|z - w| \leqslant 1$ и $|z| \geqslant 25$

$$\frac{23}{24} \leqslant \frac{1+|z|}{1+|w|} \leqslant \frac{25}{24}, \tag{7}$$

то можем считать, что $|w_k - \widetilde{w}_k| \leqslant \frac{\delta}{3}(1+|w_k|)^{-1}$ и, следовательно,

$$\left|\frac{w_k - \widetilde{w}_k}{w_k}\right| \leqslant \frac{\delta}{2|w_k|(1+|w_k|)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда, учитывая простое неравенство $\big|\ln|1-\zeta|\big| \leqslant 2|\zeta|$ при $|\zeta| \leqslant 1/2$, имеем

$$\left|\ln\left|1 - \frac{w_k - \widetilde{w}_k}{w_k}\right|\right| \leqslant \frac{2|w_k - \widetilde{w}_k|}{|w_k|} \leqslant \frac{\delta}{|w_k|(1+|w_k|)}.$$

Согласно соотношению (6)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\ln\left|\frac{\widetilde{w}_k}{w_k}\right|\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\ln\left|1 - \frac{\widetilde{w}_k - w_k}{w_k}\right|\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta}{|w_k|(1+|w_k|)} =$$
$$= \int_1^{\infty}\frac{\delta d\nu_2(w)}{|w|(1+|w|)} \leqslant \int_1^{\infty}\frac{\delta d\nu_2(t)}{t^2} = 2\delta\int_1^{\infty}\frac{\nu_2(t)dt}{t^3} := C_1. \quad (8)$$

Зафиксируем точку λ и обозначим через $I_1(\lambda)$ множество индексов k, для которых $|w_k| \geqslant 2|\lambda|$, через $I_2(\lambda)$ — тех, для которых $|w_k| \leqslant |\lambda|/2$, и пусть $I_3(\lambda)$ — множество всех остальных k, т.е. k, для которых $|\lambda|/2 < |w_k| < 2|\lambda|$. Через $J_1(\lambda)$ обозначим множество таких индексов $k \in I_3(\lambda)$, что $|\lambda - w_k| \geqslant 1/2$, и пусть для некоторого $p > 1$ множество $J_2(\lambda)$ состоит из индексов k, для которых $1/2 > |\lambda - w_k| \geqslant p\delta\big(1+|\lambda|\big)^{-1}$, а множество $J_3(\lambda)$ образовано всеми остальными индексами $k \in I_3(\lambda)$.

Пусть $k \in I_1(\lambda)$; тогда $|\lambda| \leqslant |w_k|/2$ и $|\lambda - w_k| \geqslant |w_k|/2$, поэтому

$$\left|\frac{w_k - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right| \leqslant \frac{\delta}{|w_k|(1+|w_k|)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\left|\ln\left|\frac{\lambda - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right|\right| = \left|\ln\left|1 - \frac{\widetilde{w}_k - w_k}{\lambda - w_k}\right|\right| \leqslant \frac{2\delta}{|w_k|(1+|w_k|)},$$

и

$$\left|\sum_{k\in I_1}\ln\left|\frac{\lambda - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right|\right| \leqslant \int_{2|\lambda|}^{\infty}\frac{2\delta d\nu_2(w)}{|w|(1+|w|)} \leqslant \int_{2|\lambda|}^{\infty}\frac{2\delta d\nu_2(t)}{t(1+t)} \leqslant C_2. \quad (9)$$

Пусть $k \in I_2(\lambda)$; тогда $|\lambda - w_k| \geqslant |\lambda|/2$, поэтому для $|\lambda| \geqslant 1$

$$\left|\frac{w_k - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right| \leqslant \frac{\delta}{|\lambda|(1+|w_k|)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\left|\ln\left|\frac{\lambda - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right|\right| = \left|\ln\left|1 - \frac{\widetilde{w}_k - w_k}{\lambda - w_k}\right|\right| \leqslant \frac{2\delta}{|\lambda|(1+|w_k|)},$$

и

$$\left|\sum_{k\in I_2}\ln\left|\frac{\lambda - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right|\right| \leqslant \int_{1}^{|\lambda|/2}\frac{2\delta d\nu_2(w)}{|\lambda|(1+|w|)} \leqslant \int_{1}^{|\lambda|/2}\frac{2\delta d\nu_2(t)}{|\lambda|(1+t)} \leqslant C_3. \quad (10)$$

Пусть $k \in J_1(\lambda)$. Тогда

$$\left|\frac{w_k - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right| \leqslant \frac{2\delta}{3(1+|w_k|)} \leqslant \frac{1}{2},$$

и согласно соотношению (6)

$$\left|\sum_{k\in J_1}\ln\left|\frac{\lambda - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right|\right| \leqslant \int_{|\lambda|/2}^{2|\lambda|}\frac{4\delta d\nu_2(t)}{3(1+t)} \leqslant \int_{|\lambda|/2}^{2|\lambda|}\frac{8\delta d\nu_2(t)}{3(|\lambda|+2)} \leqslant C_4. \quad (11)$$

Нам остается оценить разность потенциалов по множеству таких индексов k, что $|\lambda - w_k| \leqslant 1/2$. Для $k \in J_2(\lambda)$ за счет выбора p по-прежнему имеем

$$\left|\frac{w_k - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Поэтому для $r = p\delta(1+|\lambda|)^{-1}$ в силу (7)

$$\left|\sum_{k\in J_2} \ln\left|\frac{\lambda - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right|\right| \leqslant \frac{2\delta}{3}\sum_{k\in J_2}\left|\frac{1}{(\lambda - w_k)(1+|w_k|)}\right| \leqslant \frac{\delta}{1+|\lambda|}\int\limits_r^{1/2}\frac{d\nu_2(\lambda,t)}{t}.$$

Значит,

$$\left|\sum_{k\in J_2} \ln\left|\frac{\lambda - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right|\right| \leqslant \frac{2\delta\nu_2(\lambda,1/2)}{1+|\lambda|} + \frac{\delta}{1+|\lambda|}\int\limits_r^{1/2}\frac{\nu_2(\lambda,t)dt}{t^2}. \tag{12}$$

Согласно утверждению второго пункта леммы 1

$$\nu_2(\lambda,t) \leqslant 2A\ln(1+|\lambda|) + C,$$

поэтому

$$\frac{\delta\nu_2(\lambda,1/2)}{1+|\lambda|} \leqslant C_5$$

и

$$\frac{\delta}{1+|\lambda|}\int\limits_r^{1/2}\frac{\nu_2(\lambda,t)dt}{t^2} \leqslant \frac{\delta}{(1+|\lambda|)r}\int\limits_r^{1/2}\frac{\nu_2(\lambda,t)dt}{t} \leqslant \frac{2A}{p}\ln\big(1+|\lambda|\big) + \frac{C''}{p} = \frac{2A}{p}\ln(1+|\lambda|) + C_6.$$

Из последних двух оценок и из (12) имеем

$$\left|\sum_{k\in J_2} \ln\left|\frac{\lambda - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right|\right| \leqslant \frac{2A}{p}\ln(1+|\lambda|) + C_7. \tag{13}$$

Количество индексов в $J_3(\lambda)$ конечно, ограничено некоторой абсолютной постоянной N, и для $k \in J_3(\lambda)$

$$\left|\ln\left|\frac{\lambda - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right|\right| \leqslant \mathrm{const}, \quad \lambda \notin E,$$

поэтому

$$\left|\sum_{k\in J_3} \ln\left|\frac{\lambda - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right|\right| \leqslant C_8. \tag{14}$$

Поскольку

$$\big|\pi_2(\lambda) - \widetilde{\pi}(\lambda)\big| \leqslant \sum_k\left|\ln\left|\frac{w_k}{\widetilde{w}_k}\right|\right| + \sum_k\left|\ln\left|1 - \frac{\lambda - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right|\right|,$$

то из оценок (8)–(11), (13)–(14) следует утверждение леммы 2. □

Завершим доказательство теоремы 1. По условию (4) имеет место представление

$$f_2(\lambda) = e^{g(\lambda)}\prod_k\left(1 - \frac{\lambda}{w_k}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где g — целая функция. Положим

$$\widetilde{f}(\lambda) = e^{g(\lambda)}\prod_k\left(1 - \frac{\lambda}{\widetilde{w}_k}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C};$$

тогда по лемме 2 для любого $\varepsilon > 0$

$$\Big|\ln\big|f_2(\lambda)\big| - \ln\big|\widetilde{f}(\lambda)\big|\Big| = \big|\pi_2(\lambda) - \widetilde{\pi}(\lambda)\big| \leqslant \varepsilon \ln\big(1+|\lambda|\big) + C, \quad \lambda \notin E = \bigcup_{w\in N(f_2)\cup\widetilde{N}} B_{\delta/8}(w).$$

Согласно утверждению 1 вне множества E имеем оценку с некоторой постоянной C и произвольным $\varepsilon > 0$

$$\Big|u_2(\lambda) - \ln\big|\widetilde{f}(\lambda)\big|\Big| \leqslant \Big|u_2(\lambda) - \ln\big|f_2(\lambda)\big|\Big| + \big|\pi_2(\lambda) - \widetilde{\pi}(\lambda)\big| \leqslant$$
$$\leqslant (A+\varepsilon)\ln\big(1+|\lambda|\big) + C, \quad \lambda \notin E = \bigcup_{w\in N(f_2)\cup\widetilde{N}} B_{\delta/8}(w). \qquad (15)$$

Продолжим эту оценку на объединение множеств $\bigcup_k (B_{\delta/8}(w_k) \setminus B_{\delta/8}(\widetilde{w}_k))$. Объединение $B_{\delta/8}(w_k) \cup B_{\delta/8}(\widetilde{w}_k)$ лежит в круге $B_{11\delta/24}(\widetilde{w}_k) \subset B_{14\delta/24}(w_k) \subset B_{\delta}(w_k)$. Таким образом, оценка (15) выполняется вне попарно непересекающихся кругов $B_{11\delta/24}(\widetilde{w}_k)$. Согласно утверждению 1 она выполняется и вне кругов $B_{\delta/8}(\widetilde{w}_k)$. Теорема 1 доказана. □

3. Представление рядами экспонент функций в нормированных подпространствах $A^\infty(D)$. Пусть D — ограниченная выпуклая область, содержащая начало координат, а возрастающая последовательность положительных чисел $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0}^\infty$ логарифмически выпукла (см. [10]). Рассмотрим банахово пространство $H(D,\mathcal{M})$ аналитических в области D функций с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \left(\frac{1}{M_n}\sup_{z\in D}|f^{(n)}(z)|\right).$$

Положим $M_n = M_0$ для $-n \in \mathbb{N}$; пусть

$$T_k(r) = \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{r^n}{M_{n+k}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

— функции следа последовательностей со сдвигом $\mathcal{M}_k = (M_{n+k})_{n=0}^\infty$. Для $k \in \mathbb{Z}$ введем обозначение $\psi_k(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T_k(|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где $H_D(\lambda) = \sup_{z\in D} \Re\lambda z$ — опорная функция области D. Через $H(\mathbb{C},\psi_k)$ обозначим банахово пространства целых функций F с нормой

$$\|F\|_{\psi_k} = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} |F(\lambda)|e^{-\psi_k(\lambda)}.$$

Всюду далее будем считать, что последовательности удовлетворяют условию «неквазианалитичности»

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty, \qquad (16)$$

которое по теореме Данжуа—Карлемана равносильно условию на функцию следа

$$\int^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} < \infty. \qquad (17)$$

Следующие свойства опорных функций и функций следа логарифмически выпуклых последовательностей доказаны в [13, леммы 1.1 и 1.2].

Утверждение 2.

1. *Опорная функция ограниченной выпуклой области удовлетворяет условию Липшица*
$$\big|H_D(\lambda_1) - H_D(\lambda_2)\big| \leqslant \sup_{z\in D}|z| \cdot |\lambda_1 - \lambda_2|, \quad \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}.$$
2. *При любых $k, m \in \mathbb{Z}$*
$$T_k(r) = r^{m-k}T_m(r), \quad r \geqslant r(k,m).$$
3. *Если последовательность логарифмически выпукла и удовлетворяет условию (16), то*

(a) *сходятся интегралы*

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T_k(r)dr}{r^2} := \sigma_k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

в частности,

$$\ln T_k(r) = o(r), \quad r \to \infty;$$

(b) *функция* $\ln T_k(|\lambda|)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\Big|\ln T_k\big(|\lambda_1|\big) - \ln T_k\big(|\lambda_2|\big)\Big| \leqslant 2\sigma_k|\lambda_1 - \lambda_2|, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2. *Существует такое натуральное число s, что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$, удовлетворяющей условию* (16)*, и для любой ограниченной выпуклой области D, содержащей начало координат, каждая функция $f \in H(D, \mathcal{M})$ является преобразованием Фурье—Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $H(\mathbb{C}, \psi_s)$:*

$$f(z) = \widehat{S}(z) = S\left(e^{\lambda z}\right), \quad z \in D.$$

Доказательство теоремы 2. Доказательство представляет собой уточнение доказательства теоремы 1 из [13] с использованием доказанной нами в первом разделе теоремы 1.

Для доказательства нам понадобятся несколько предварительных утверждений. Для целой функции экспоненциального типа

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

через γ_F обозначим функцию, ассоциированную с ней по Борелю:

$$\gamma_F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}}.$$

Для $q \in (1/2; 1)$, $k \in \mathbb{N}$ введем билинейную форму на $H(D, \mathcal{M}) \times H(\mathbb{C}, \psi_k)$:

$$\mathcal{A}_q(f, F) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial(D/q)} f(qz)\gamma_F(z)dz, \tag{18}$$

где $D/q = \{z/q,\ z \in D\}$, $f \in H(D, \mathcal{M})$, $F \in H(\mathbb{C}, \psi_k)$.

Лемма 3. *Найдется такая константа $C > 0$, что для целой функции F, имеющей вид $F = Gg$, где целые функции G, g при некотором $M > 0$ удовлетворяют оценкам*

$$\big|G(\lambda)\big| \leqslant Me^{H_D(\lambda) - 2\ln\left(1+|\lambda|\right)}, \quad \big|g(\lambda)\big| \leqslant M\frac{T_0(|\lambda|)}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

имеет место оценка

$$\big|\mathcal{A}_q(f, F)\big| \leqslant CM^2\|f\|_{\mathcal{M}}, \quad f \in H(D, \mathcal{M}), \quad q \in (1/2; 1),$$

и существует предел $\lim\limits_{q \nearrow 1} \mathcal{A}_q(f, F)$.

Доказательство леммы 3. Функция γ_G является непрерывной на множестве $\mathbb{C} \setminus D$ и, кроме того,

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{C}\setminus D} |\gamma_G(\zeta)| \leqslant C_1 M.$$

Если

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\lambda^n, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

то согласно формулам Коши и логарифмической выпуклости последовательности $\mathcal{M}$ имеем

$$|g_n| \leqslant \inf_{r>0} \frac{1}{r^n} \max_{|\lambda|=r} |g(\lambda)| \leqslant M \inf_{r>0} \frac{T_0(r)}{r^{n+1}} = \frac{M}{M_{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

В частности,

$$\gamma_F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_n \gamma_G^{(n)}(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}\setminus\overline{D}.$$

Интегрированием по частям получим

$$\mathcal{A}_q(f,F) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial(D/q)} \gamma_G(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty} g_n q^n f^{(n)}(q\zeta)d\zeta.$$

Функции $f_n(q,z) = g_n q^n f^{(n)}(qz)$ равномерно непрерывны на компакте $[1/2;1]\times\overline{D}$, а ряд

$$f(q,z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(q,z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n q^n f^{(n)}(qz)$$

в силу оценок (19) сходится равномерно на этом компакте, поэтому существует

$$f(1,z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(1,z) = \sum_n g_n f^{(n)}(z),$$

причем, так как последовательность $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию (16), то

$$\big|f(q,z)\big| \leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_n}{M_{n+1}}\frac{|f^{(n)}(z)|}{M_n} \leqslant C_2 M\|f\|_{\mathcal{M}}.$$

Таким образом, существует предел

$$\lim_{q\nearrow 1}\mathcal{A}_q(f,F),$$

и

$$\big|\mathcal{A}_q(f,F)\big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial(D/q)}\big|\gamma_G(\zeta)\big|\cdot\big|f(q,\zeta)\big|\cdot\big|d\zeta\big| \leqslant CM^2\|f\|_{\mathcal{M}}.$$

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Существует такое натуральное s, что для любой ограниченной выпуклой области D, содержащей начало координат, и любой неубывающей логарифмически выпуклой последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$, удовлетворяющей условию* (16)*, для билинейной формы, определенной в* (18)*, существует предел*

$$\mathcal{A}(f,F) = \lim_{q\nearrow 1}\mathcal{A}_q(f,F), \quad (f,F)\in H(D,\mathcal{M})\times H(\mathbb{C},\psi_s),$$

и форма $\mathcal{A}(f,F)$ непрерывна, т.е. для некоторой постоянной $C>0$

$$\big|\mathcal{A}(f,F)\big| \leqslant C\|f\|_{\mathcal{M}}\|F\|_{\psi_s}, \quad f\in H(D,\mathcal{M}), \quad F\in H(\mathbb{C},\psi_s).$$

Доказательство леммы 4. Функции $u_1(\lambda) = H_D(\lambda)$, $u_2(\lambda) = \ln T_0(|\lambda|)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Относительно функции $H_D(\lambda)$ это следует из первого пункта утверждения 2. Липшицевость функции $\ln T(|\lambda|)$ следует из пункта 3(b) утверждения 2, а условие (4) на ассоциированную меру — из формулы Йенсена и из соотношения (17). По теореме 1 найдутся постоянная $B_0>0$ и целые функции f_1, f_2, удовлетворяющие следующим условиям: круги $B_\delta(\zeta) = B\big(\zeta,\delta(1+|\zeta|)^{-1}\big)$, $\zeta\in N(f_1f_2)$, попарно не пересекаются и для некоторых постоянных C, C' выполняются оценки

$$H_D(\lambda) - B_0\ln\big(1+|\lambda|\big) - C \leqslant \ln\big|f_1(\lambda)\big| \leqslant H_D(\lambda), \quad \lambda\notin E(\delta,f_1) := \bigcup_{\zeta\in N(f_1)} B_\delta(\zeta), \tag{f_1I}$$

$$\ln T_0\big(|\lambda|\big) - B_0\ln\big(1+|\lambda|\big) - C' \leqslant \ln\big|f_2(\lambda)\big| \leqslant \ln T_0\big(|\lambda|\big), \quad \lambda\notin E(\delta,f_2) := \bigcup_{\zeta\in N(f_2)} B_\delta(\zeta), \tag{f_2I}$$

$$H_D(\lambda) - B_0\ln\big(1+|\lambda|\big) - C \leqslant \ln\big|f_1'(\lambda)\big| \leqslant H_D(\lambda), \quad \lambda\in N(f_1), \tag{f_1II}$$

$$\ln T_0\big(|\lambda|\big) - B_0\ln\big(1+|\lambda|\big) - C'\ln\big|f_2'(\lambda)\big| \leqslant \ln T_0\big(|\lambda|\big), \quad \lambda\in N(f_2). \tag{f_2I}$$

Пусть $\zeta_n,\ n\in\mathbb{N}$, — нули функции f_2 и

$$g_0(\lambda)=\frac{f_2(\lambda)}{(\lambda-\zeta_1)(\lambda-\zeta_2)(\lambda-\zeta_3)}.$$

Тогда в силу соотношений (f_2I), (f_2II) функция g_0 при некотором $c>0$ удовлетворяет оценкам

$$\ln T_0\bigl(|\lambda|\bigr)-(B_0+3)\ln\bigl(1+|\lambda|\bigr)-c\leqslant\ln\bigl|g_0(\lambda)\bigr|\leqslant\ln T_0\bigl(|\lambda|\bigr)-3\ln\bigl(1+|\lambda|\bigr)+c,\ \ \lambda\notin E(\delta,g_0),\quad (g_0\mathrm{I})$$

$$\ln T_0\bigl(|\lambda|\bigr)-(B_0+3)\ln\bigl(1+|\lambda|\bigr)-c\leqslant\ln\bigl|g_0'(\lambda)\bigr|\leqslant\ln T_0\bigl(|\lambda|\bigr)-3\ln\bigl(1+|\lambda|\bigr)+c,\ \ \lambda\in N(g_0).\quad (g_0\mathrm{II})$$

Целая функция $L=f_1g_0$ удовлетворяет соответственно оценкам

$$H_D(\lambda)+\ln T_0\bigl(|\lambda|\bigr)-(2B_0+3)\ln\bigl(1+|\lambda|\bigr)-c\leqslant\ln\bigl|L(\lambda)\bigr|,\quad\lambda\notin E(\delta,L),\qquad (L\mathrm{I})$$

$$H_D(\lambda)+\ln T_0\bigl(|\lambda|\bigr)-(2B_0+3)\ln\bigl(1+|\lambda|\bigr)-c\leqslant\ln\bigl|L'(\lambda)\bigr|,\quad\lambda\in N(L).\qquad (L\mathrm{II})$$

Исключительное множество $E(\delta,L)$ состоит из непересекающихся кругов малых радиусов, поэтому можно найти такие замкнутые спрямляемые кривые Γ_m, $m\in\mathbb{N}$, не пересекающиеся с $E(\delta,L)$, что

$$|\Gamma_m|=O\left(\min_{z\in\Gamma_m}|z|\right)\to\infty,\quad m\to\infty.$$

Положим $s=2[B_0]+6$, где $[x]$ — целая часть x. Возьмем функцию $F\in H(\mathbb{C},\psi_s)$. В силу оценки ($L$I) выполняется соотношение

$$\left|\frac{F(\lambda)}{L(\lambda)}\right|\prec\frac{T_s\bigl(|\lambda|\bigr)}{T_0\bigl(|\lambda|\bigr)}\bigl(1+|\lambda|\bigr)^{2B_0+3},\quad\lambda\in\Gamma_m.$$

Согласно п. 2 утверждения 2 и выбору числа s

$$\left|\frac{F(\lambda)}{L(\lambda)}\right|\prec\bigl(1+|\lambda|\bigr)^{2\{B_0\}-3},\quad\lambda\in\Gamma_m,$$

где $\{x\}\in[0;1)$ — дробная часть x. Значит,

$$\left|\frac{F(\lambda)}{L(\lambda)}\right|\prec\frac{1}{\bigl(1+|\lambda|\bigr)},\quad\lambda\in\Gamma_m.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{\Gamma_m}\frac{F(\lambda)d\lambda}{(\lambda-z)L(\lambda)}\right|\to 0,\quad m\to\infty.$$

Это значит, что ряд Лагранжа функции F по функции L сходится к самой функции F:

$$F(\lambda)=\sum_{\zeta\in N(L)}\frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)(\lambda-\zeta)}L(\lambda).\qquad (20)$$

Оценим $|F(\zeta)/L'(\zeta)|$, $\zeta\in N(L)$, на основании соотношения (LII):

$$\left|\frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)}\right|\prec\|F\|_{\psi_s}\frac{T_s(|\zeta|)}{T_0(|\zeta|)}\bigl(1+|\zeta|\bigr)^{2B_0+3}\prec\bigl(1+|\zeta|\bigr)^{2\{B_0\}-3},\quad\zeta\in N(L).\qquad (21)$$

Функции $L(\lambda)/(\lambda-\zeta)$, $\zeta\in N(L)$, удовлетворяют условиям леммы 3. В самом деле, если $f_1(\zeta)=0$ и ζ', ζ'' — нули функции f_1, отличные от ζ, например, наименьшие по модулю, то положим

$$G(\lambda)=\frac{f_1(\lambda)}{(\lambda-\zeta)(\lambda-\zeta')(\lambda-\zeta'')},\quad g(\lambda)=(\lambda-\zeta'')(\lambda-\zeta')g_0(\lambda).$$

Тогда согласно соотношениям (f_1I), (g_0I) имеем оценки

$$\bigl|G(\lambda)\bigr|\leqslant Me^{H_D(\lambda)-2\ln(1+|\lambda|)},\quad\bigl|g(\lambda)\bigr|\leqslant M\frac{T_0(|\lambda|)}{1+|\lambda|},\quad\lambda\in\mathbb{C},$$

причем с постоянной M, не зависящей от точки $\zeta\in N(L)$. Аналогично, если $g_0(\zeta)=0$, то положим

$$G(\lambda)=\frac{f_1(\lambda)}{(\lambda-\zeta')(\lambda-\zeta'')},\quad g(\lambda)=\frac{(\lambda-\zeta'')(\lambda-\zeta')g_0(\lambda)}{\lambda-\zeta},$$

и выполняются такие же оценки. Согласно утверждению этой леммы

$$\left|\mathcal{A}_q\left(f, \frac{L(\zeta)}{\lambda-\zeta}\right)\right| \leqslant CM^2\|f\|_{\mathcal{M}}, \quad f \in H(D,\mathcal{M}), \quad q \in (1/2;1), \quad \zeta \in N(L). \tag{22}$$

Из представления (20) следует

$$\mathcal{A}_q(f,F) = \sum_{\zeta\in N(L)} \frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)}\mathcal{A}_q\left(f, \frac{L(\lambda)}{\lambda-\zeta}\right),$$

сходимость этого ряда получим из (21) и последней оценки:

$$|\mathcal{A}_q(f,F)| \leqslant \sum_{\zeta\in N(L)} \left|\frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)}\right| \left|\mathcal{A}_q\left(f, \frac{L(\lambda)}{\lambda-\zeta}\right)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot M^2\|f\|_{\mathcal{M}}\|F\|_{\psi_s} \sum_{\zeta\in N(L)} \frac{1}{(1+|\zeta|)^{2\{B_0\}-3}},$$
$$f \in H(D,\mathcal{M}), \quad q \in (1/2;1), \quad F \in H(\mathbb{C},\psi_s).$$

Переходя к пределу при $q \to 1$, получим утверждение леммы 4. □

Пусть $f \in H(D,\mathcal{M})$, а s выбрано как в лемме 4. Тогда согласно этой лемме выражение

$$S_f(F) = \mathcal{A}(f,F), \quad F \in H(\mathbb{C},\psi_s),$$

— линейный непрерывный функционал на $H(\mathbb{C},\psi_s)$, причем

$$\widehat{S}_f(z) = S_f(e^{\lambda z}) = \mathcal{A}(f,e^{\lambda z}) = \lim_{q\nearrow 1}\mathcal{A}_q(f,e^{\lambda z}) =$$
$$= \lim_{q\nearrow 1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial(D/q)} \frac{f(q\zeta)d\zeta}{\zeta-z} = \lim_{q\nearrow 1} f(qz) = f(z), \quad z \in D.$$

Из леммы 4 также следует оценка нормы этого функционала:

$$\|S_f\|_{H^*(\mathbb{C},\psi_s)} \leqslant C\|f\|_{\mathcal{M}}, \quad f \in H(D,\mathcal{M}).$$

Теорема 2 доказана. □

Теперь мы можем доказать основную теорему данной статьи.

Теорема 3. *Существует такое натуральное число s, что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$, удовлетворяющей условию (16), и для любой ограниченной выпуклой области D, содержащей начало координат, найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая следующим свойством: каждая функция $f \in H(D,\mathcal{M})$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D,\mathcal{M}_s)$.

Доказательство теоремы 3. Пусть λ_k, $k \in \mathbb{N}$, — нули целой функции L, построенной в доказательстве теоремы 2, $s = 2[B_0]+6$, $f \in H(D,\mathcal{M})$ и S_f — функционал на $H(\mathbb{C},\psi_s)$, построенный в теореме 2 и обладающий свойством $S_f(e^{\lambda z}) = f(z)$, $z \in D$. По построению функционала S_f поточечно для каждого $z \in D$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}\mathcal{A}\left(f, \frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_k}\right). \tag{23}$$

Докажем, что ряд сходится равномерно на $\overline{D}$. Согласно соотношению (22)

$$\left|\mathcal{A}\left(f, \frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_k}\right)\right| \leqslant C\|f\|_{\mathcal{M}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Согласно условию $(L\mathrm{II})$

$$\sup_{z\in D}\left|\frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}\right| \leqslant \frac{(1+|\lambda_k|)^{2B_0+3}}{T_0(|\lambda_k|)}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

По определению функции следа

$$T_0(r) \geqslant \frac{r^m}{M_m}, \quad r > 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Применяя это неравенство при $m = s$, получим

$$\sup_{z\in D}\left|\frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}\right| \prec (1+|\lambda_k|)^{2\{B_0\}-3}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Учитывая, что последовательность λ_k имеет конечную линейную плотность, получим, что ряд (23) сходится равномерно.

Тем самым, для любого $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^n e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)} \mathcal{A}\left(f, \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}\right), \quad z \in D.$$

Пусть

$$F_N(z) = \sum_{k\leqslant N} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)} \mathcal{A}\left(f, \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}\right), \quad z \in D.$$

Тогда согласно соотношению (24)

$$\sup_{z\in D}\left|f^{(n)}(z) - F_N^{(n)}(z)\right| \leqslant C\|f\|_{\mathcal{M}} \sum_{k>N} \sup_{z\in D} \frac{|\lambda_k|^n \left|e^{\lambda_k z}\right|}{|L'(\lambda_k)|}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

и согласно (25)

$$\sup_{z\in D}\left|f^{(n)}(z) - F_N^{(n)}(z)\right| \leqslant C\|f\|_{\mathcal{M}} \sum_{k>N} \frac{|\lambda_k|^n (1+|\lambda_k|)^{2B_0+3}}{T_0(|\lambda_k|)}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Применим соотношение (26) при $m = n + s$:

$$\sup_{z\in D}\left|f^{(n)}(z) - F_N^{(n)}(z)\right| \leqslant C_1 M_{n+s}\|f\|_{\mathcal{M}} \sum_{k>N} (1+|\lambda_k|)^{2\{B_0\}-3}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\};$$

значит,

$$\left\|f(z) - F_N(z)\right\|_{\mathcal{M}_s} = \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{1}{M_{n+s}} \sup_{z\in D}\left|f^{(n)}(z) - F_N^{(n)}(z)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_1\|f\|_{\mathcal{M}} \sum_{k>N} \bigl(1+|\lambda_k|\bigr)^{2\{B_0\}-3} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Теорема 3 доказана. □

В заключение приведем одну переформулировку теоремы 3, которая может рассматриваться как аналог теорем AI и BI.

Теорема 4. *Существует такое натуральное число s, что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$, удовлетворяющей условию (16), и для любой ограниченной выпуклой области D, содержащей начало координат, найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая следующим свойством: каждая функция $f \in H(D)$, для которой $f^{(s)} \in H(D, \mathcal{M})$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \mathcal{M})$.

Доказательство теоремы 4. Очевидно, что если $f^{(s)} \in H(D, \mathcal{M})$, то $f \in (D, \mathcal{M}_{-s})$. Согласно теореме 3 найдется такая система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, что каждая функция $f \in H(D, \mathcal{M}_{-s})$ разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D,$$

сходящийся в норме пространства $f \in H(D, \mathcal{M}_0)$. Теорема 4 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абанин А. В.* Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы// Мат. заметки. — 1995. — *57*, № 4. — С. 483–492.
2. *Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.* Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками// Изв. РАН. Сер. мат. — 2007. — *71*, № 6. — С. 69–90.
3. *Исаев К. П.* Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках// Уфим. мат. ж. — 2010. — *2*, № 1. — С. 71–86.
4. *Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.* Безусловные базисы из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций// Уфим. мат. ж. — 2013. — *5*, № 3. — С. 67–77.
5. *Исаев К. П., Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С.* Представление рядами экспонент функций в локально выпуклых подпространствах $A^{\infty}(D)$// Уфим. мат. ж. — 2017. — *9*, № 3. — С. 50–62.
6. *Исаев К. П.* Представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — 2019. — *161*. — С. 3–64.
7. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1975. — *39*, № 3. — С. 657–702.
8. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
9. *Любарский Ю. И.* Ряды экспонент в пространстве Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — *52*, № 3. — С. 559–580.
10. *Мандельбройт С. Ф.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. — М.: ИЛ, 1955.
11. *Напалков В. В.* Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1987. — *51*, № 2. — С. 287–305.
12. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций// Anal. Math. — 1985. — *11*, № 3. — С. 257–282.
13. *Юлмухаметов Р. С.* Квазианалитические классы функций в выпуклых областях// Мат. сб. — 1986. — *130 (172)*, № 4 (8). — С. 500–519.

Исаев Константин Петрович
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия;
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: `orbit81@list.ru`

Трунов Кирилл Владимирович
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: `trounovkv@mail.ru`

Юлмухаметов Ринад Салаватович
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия;
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: `yulmukhametov@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 162 (2019). С. 57–61

УДК 517.5

АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛИНОМАМИ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ

© 2019 г. **И. Х. МУСИН**

Аннотация. По семейству выпуклых функций на вещественной оси, растущих на бесконечности быстрее любой линейной функции, и некоторой логарифмически выпуклой последовательности положительных чисел строится пространство бесконечно дифференцируемых функций на числовой прямой. При условии логарифмического зазора между весовыми функции доказана возможность приближении полиномами в этом пространстве.

Ключевые слова: преобразование Фурье—Лапласа, целые функции, выпуклые функции, преобразование Юнга—Фенхеля.

APPROXIMATION OF INFINITELY DIFFERENTIABLE FUNCTIONS ON THE REAL LINE BY POLYNOMIALS IN WEIGHTED SPACES

© 2019 **I. KH. MUSIN**

Abstract. By a given family of convex functions on the real axis that grow at infinity faster than any linear function and by a certain logarithmically convex sequence of positive numbers, we construct the space of infinitely differentiable functions on the real line. Under the condition of a logarithmic gap between weight functions, we prove the possibility of approximation by polynomials in this space.

Keywords and phrases: Fourier–Laplace transform, entire function, convex function, Young–Fenchel transform.

AMS Subject Classification: 41A10

1. Введение. В [3] рассматривался ряд задач теории аппроксимации и гармонического анализа в весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой. При этом в силу применявшихся методов на весовые функции накладывались довольно ограничительные условия. Цель данной работы — получить аппроксимацию полиномами в такого типа пространстве при меньших ограничениях на весовые функции.

Определим функциональные пространства, с которыми будем иметь дело, следующим образом. Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство таких непрерывных функций $\varphi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнены следующие условия:

$$(1)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_m(x)}{|x|} = +\infty;$$

$$(2)\quad \lim_{x\to\infty} \big(\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)\big) = +\infty.$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ введем нормированное пространство

$$\mathcal{E}(\varphi_m) = \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}) : \ p_m(f) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R},\\ 0\leqslant k\leqslant m}} \frac{|f^{(k)}(x)|}{\exp(\varphi_m(x))} < \infty \right\}. \tag{1}$$

Пусть $\mathcal{E}(\varphi) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}(\varphi_m)$. Множество $\mathcal{E}(\varphi)$ является линейным пространством с обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа. Наделим $\mathcal{E}(\varphi)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{E}(\varphi_m)$.

Отметим, что $\mathcal{E}(\varphi)$ инвариантно относительно дифференцирования, а оператор дифференцирования непрерывен в $\mathcal{E}(\varphi)$. Действительно, для любого $j = 1, \ldots, n$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$p_m(f') \leqslant \exp\Bigl(\sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl(\varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x)\bigr)\Bigr) p_{m+1}(f), \quad f \in \mathcal{E}(\varphi).$$

Так как для каждого $m \in \mathbb{N}$ пространство $\mathcal{E}(\varphi_{m+1})$ вложено вполне непрерывно в $\mathcal{E}(\varphi_m)$ (см. [1]), то $\mathcal{E}(\varphi)$ — пространство (M^*) (см. [1,6]). Известно (см. [5]), что полиномы плотны в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Далее, зафиксируем последовательность $M = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ положительных чисел с $M_0 = 1$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i_1) $M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(i_2) существуют такие числа $H_1 > 0$, $H_2 > 1$, что

$$M_{k+n} \leqslant H_1 H_2^{k+n} M_k M_n \quad \forall k, n \in \mathbb{Z}_+; \tag{2}$$

(i_3) найдутся числа такие $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$, что

$$M_n \geqslant Q_1 Q_2^n n! \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

По заданным $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ определим нормированные пространства

$$G(\varphi_m, \varepsilon) = \left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : \ q_{\varphi_m,\varepsilon}(f) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R},\\ k\in\mathbb{Z}_+}} \frac{|f^{(k)}(x)|}{\varepsilon^k M_k e^{\varphi_m(x)}} < \infty \right\}. \tag{3}$$

Пусть $G(\varphi) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{\varepsilon>0} G(\varphi_m, \varepsilon)$. Множество $G(\varphi)$ является линейным пространством с обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа. Наделим пространство $G(\varphi)$ топологией проективного предела пространств $G(\varphi_m, \varepsilon)$.

Основной результат работы — следующая теорема.

Теорема. *Пусть функции семейства φ являются выпуклыми и для любого $m \in \mathbb{N}$ найдётся такое число $a_m \geqslant 0$, что*

$$\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x) \geqslant \ln\bigl(1 + |x|\bigr) - a_m, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда полиномы плотны в $G(\varphi)$.

С последовательностью $(M_k)_{k=0}^{\infty}$ ассоциируем функцию w на $[0, \infty)$ по правилу:

$$w(r) = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{M_k}, \quad r > 0, \quad w(0) = 0.$$

Далее, для каждого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\varepsilon_m := H_2^{-m}, \quad w_m(r) := w(H_2^m r) \ (r \geqslant 0), \quad q_m(f) := q_{\varphi_m,\varepsilon_m}(f) \ (f \in G(\varphi)).$$

Преобразование Юнга—Фенхеля функции $u : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ есть функция $u^* : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$, определяемая по формуле

$$u^*(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} \bigl(xy - u(y)\bigr), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Семейство $\{\varphi_m^*\}_{m=1}^{\infty}$ обозначим через φ^*. Через $\mathcal{E}'(\varphi)(G'(\varphi))$ обозначим совокупность линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{E}(\varphi)(G(\varphi))$, через $\mathcal{E}^*(\varphi)(G^*(\varphi))$ — сильное сопряжённое к $\mathcal{E}(\varphi)(G(\varphi))$ пространство.

Для функционала $T \in \mathcal{E}'(\varphi)(G'(\varphi))$ полагаем $\check{T}(z) = T(e^{-i\xi z})$, $z \in \mathbb{C}$. Функция $\check{T}$ называется *преобразованием Фурье—Лапласа функционала T*.

Пусть $H(\mathbb{C})$ — пространство целых функций в $\mathbb{C}$, $P(\varphi^*) = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} P(\varphi_m^*)$, где

$$P(\varphi_m^*) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \|f\|_m = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{(1+|z|)^m \exp\big(\varphi_m^*(\operatorname{Im} z)\big)} < \infty \right\}.$$

Множество $P(\varphi^*)$ является линейным пространством с обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа. Пространство $P(\varphi^*)$ наделим топологией индуктивного предела нормированных пространств $P(\varphi_m^*)$.

Для краткости полагаем $\theta_m(x) = e^{\varphi_m(x)}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Введём пространства

$$C(\varphi_m) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : \ \frac{|f(x)|}{\theta_m(x)} \to 0 \quad \text{при } x \to \infty \right\},$$

снабженные нормами

$$\|f\|_{\theta_m} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\theta_m(x)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

2. Вспомогательные сведения и результаты. При доказательстве основного результата понадобятся следующие вспомогательные утверждения, первые три из которых доказаны в [3].

Лемма 1. *Для любого $T \in \mathcal{E}'(\varphi)$ $(G'(\varphi))$ функция $\check{T}$ — целая, причем для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ имеем*

$$\check{T}^{(n)}(z) = T((-i\xi)^n e^{-i\xi z}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Лемма 2. *Для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство*

$$\Big| w\big(|z_2|\big) - w\big(|z_1|\big) \Big| \leqslant A_w e |z_2 - z_1|,$$

где A_w — некоторое положительное число, зависящее от w.

По стандартной схеме (см. [7, предложения 2.10, 2.11, следствие 2.12] доказывается следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть числа $m \in \mathbb{N}$, $c > 0$ таковы, что для $T \in G'(\varphi)$*

$$\big|T(f)\big| \leqslant c q_m(f), \quad f \in G(\varphi).$$

Тогда найдутся такие линейные непрерывные функционалы T_k на $C(\varphi_m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, что

$$\big|T_k(f)\big| \leqslant \frac{c\|f\|_{\theta_m}}{\varepsilon_m^k M_k}, \quad f \in C(\varphi_m),$$

и

$$T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(f^{(k)}), \quad f \in G(\varphi).$$

Также понадобится теорема Пэли—Винера—Шварца для пространства $\mathcal{E}(\varphi)$.

Теорема A. *Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство таких выпуклых функций $\varphi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнены следующие условия:*

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_m(x)}{|x|} = +\infty;$

(2) $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists B_m \geqslant 0 : \quad \varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x) \geqslant \ln\big(1+|x|\big) - B_m, \quad x \in \mathbb{R}.$

Тогда отображение $\mathcal{F} : S \in \mathcal{E}^*(\varphi) \to \check{S}$ устанавливает топологический изоморфизм между пространствами $\mathcal{E}^*(\varphi)$ и $P(\varphi^*)$.

Теорема A доказывается точно так же, как [4, теорема 1.1.4] (см. также [3, теорема 2]) с учётом результата об аппроксимации полиномами в [5]), поэтому её доказательство не приводится. Отметим лишь, что в ходе доказательства теоремы A используется следующая теорема (переформулировка теоремы 1.1.3 из [4]).

Теорема B. *Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, растущая на бесконечности быстрее любой линейной функции. Пусть $U \in H(\mathbb{C})$ удовлетворяет при некоторых $C > 0$, $N \in \mathbb{N}$ неравенству*

$$\bigl|U(z)\bigr| \leqslant C\bigl(1+|z|\bigr)^N \exp\bigl(\varphi_m^*(\operatorname{Im} z)\bigr), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда существует единственный функционал $T \in \mathcal{E}'(\varphi)$, удовлетворяющий условию $\check{T} = U$, причем

$$\bigl|T(f)\bigr| \leqslant C_1 C p_{m+N+2}(f), \quad f \in \mathcal{E}(\varphi),$$

где $C_1 = C_1(m,N) > 0$ не зависит от U.

3. Доказательство основного результата. Пусть функционал $T \in G'(\varphi)$ таков, что для любого полинома p выполняется равенство $T(p) = 0$. Тогда, пользуясь леммой 1, для целой функции $\check{T}$ при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ имеем $\check{T}^{(n)}(0) = 0$. Следовательно, $\check{T} \equiv 0$. Покажем, что $T(f) = 0$ для всех $f \in G(\varphi)$. Будем действовать по схеме из [7, доказательство теоремы 2.8]. Найдутся такие числа $m \in \mathbb{N}$, $c > 0$, что

$$\bigl|T(f)\bigr| \leqslant c q_m(f) \quad \forall f \in G(\varphi).$$

По лемме 3 существуют такие функционалы $T_k \in C'(\varphi_m)$, что

$$\bigl|T_k(f)\bigr| \leqslant \frac{c\|f\|_{\theta_m}}{\varepsilon_m^k M_k}, \quad f \in C_{\varphi,m}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

и

$$T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(f^{(k)}), \quad f \in G(\varphi). \tag{4}$$

Сужения функционалов T_k на $\mathcal{E}(\varphi)$ обозначим через R_k. Из представления (4) имеем

$$\check{T}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(z) z^k,$$

где целые функции $V_k(z) = (-i)^k R_k\bigl(\exp(-i\xi z)\bigr)$ удовлетворяют оценке

$$\bigl|V_k(z)\bigr| \leqslant \frac{c\exp\bigl(\varphi_m^*(\operatorname{Im} z)\bigr)}{\varepsilon_m^k M_k}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим функцию $H(z,u) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} V_k(z)u^k$, $z, u \in \mathbb{C}$. Нетрудно видеть, что $H(z,u)$ — целая функция. Используя оценку (2), имеем

$$\bigl|H(z,u)\bigr| \leqslant \frac{c\varepsilon_m}{\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}} \exp\bigl(\varphi_m^*(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|u|)\bigr), \quad z, u \in \mathbb{C}.$$

Так как $H(z,z) = 0$, то $H(z,u) = (z-u)S(z,u)$, где S — целая функция. Отметим, что S удовлетворяет оценке

$$\bigl|S(z,u)\bigr| \leqslant B_m \exp\bigl(\varphi_m^*(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|u|)\bigr), \quad z, u \in \mathbb{C},$$

где $B_m > 0$ — некоторая постоянная. В случае $|z-u| \geqslant 1$ это очевидно, а для $|z-u| < 1$ получается применением принципа максимума к функции $S(z,\zeta)$ как функции переменного $\zeta \in \mathbb{C}$ при фиксированном z. Далее, разлагаем S в ряд по степеням u:

$$S(z,u) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(z) u^k.$$

Пользуясь неравенством Коши для коэффициентов степенного ряда, равенством

$$\inf_{r>0} \frac{\exp(w(r))}{r^k} = \frac{1}{M_k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

(см. [2, гл. 1]). Получаем, что для любого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\bigl|S_k(z)\bigr| \leqslant \frac{B_m}{\varepsilon_{m+1}^k M_k} \exp\bigl(\varphi_m^*(\operatorname{Im} z)\bigr), \quad z \in \mathbb{C}.$$

По теореме B существуют такие функционалы $\Phi_k \in \mathcal{E}'(\varphi)$, что $\check{\Phi}_k = S_k$, причем

$$\big|\Phi_k(f)\big| \leqslant \frac{K}{\varepsilon_{m+1}^k M_k} p_{m+2}(f), \quad f \in \mathcal{E}(\varphi),$$

где постоянная $K > 0$ не зависит от $k \in \mathbb{Z}_+$.

Так как H представимо в виде

$$H(z,u) = zS_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(zS_k(z) - S_{k-1}(z)\big)u^k,$$

то $V_0(z) = zS_0(z)$, $V_k(z) = zS_k(z) - S_{k-1}(z)$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда по теореме A

$$R_0(f) = i\Phi_0(f'), \quad (-i)^k R_k(f) = i\Phi_k(f') - \Phi_{k-1}(f), \quad f \in \mathcal{E}(\varphi).$$

Из (3), пользуясь условием (i_2), имеем для $f \in G(\varphi)$

$$\Big|\Phi_n\big(f^{(n+1)}\big)\Big| \leqslant KH_1 \sup_{0\leqslant k\leqslant m+2} \big(\varepsilon_{m+3}^{k+1} M_{k+1} H_2^{k+1}\big) q_{m+3}(f) \left(\frac{\varepsilon_{m+3}H_2}{\varepsilon_{m+1}}\right)^n.$$

Отсюда следует, что $\Phi_n(f^{(n+1)}) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, для любого $f \in G(\varphi)$

$$T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(f^{(k)}) = i\Phi_0(f') + \sum_{k=1}^{\infty}(i^{k+1}\Phi_k(f^{(k+1)}) - i^k\Phi_{k-1}(f^{(k)})) = \lim_{n\to\infty} i^{n+1}\Phi_n(f^{(n+1)}) = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. При условии, что последовательность $M = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ является неквазианалитической, приближение полиномами в $G(\varphi)$ может быть показано при меньших ограничениях на семейство $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$, а именно, достаточно потребовать, чтобы для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнялись условия:

$$(1)\ \varphi_m \in C(\mathbb{R}); \quad (2)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_m(x)}{|x|} = +\infty; \quad (3)\ \lim_{x\to\infty} \big(\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)\big) = +\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS// Усп. мат. наук. — 1979. — *34*, № 4. — С. 97–131.
2. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения. — М.: ИЛ, 1955.
3. *Мусин И. Х.* О преобразовании Фурье—Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций// Мат. сб. — 2000. — *191*, № 10. — С. 57–86.
4. *Мусин И. Х.* Весовые пространства бесконечно дифференцирумых функций/ Дисс. на соиск. уч. степ. д.ф.-м.н. — Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2004.
5. *Мусин И. Х., Попёнов С. В.* О весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$// Уфим. мат. ж. — 2010. — *2*, № 3. — С. 52–60.
6. *Себаштьян-и-Сильва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях// Математика. — 1957. — *1*, № 1. — С. 60–77.
7. *Taylor B. A.* Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions// Commun. Pure Appl. Math. — 1971. — *24*, № 1. — P. 39–51.

Мусин Ильдар Хамитович
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия;
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: musin_ildar@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 162 (2019). С. 62–79

УДК 517.98

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СУММАМИ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ С ПОКАЗАТЕЛЯМИ, СГУЩАЮЩИМИСЯ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ

© 2019 г. **С. Г. МЕРЗЛЯКОВ, С. В. ПОПЕНОВ**

Аннотация. Для комплексных узлов интерполяции изучается проблема интерполяции суммами рядов экспонент с показателями из множества, сгущающегося в бесконечности только в одном направлении. Получен критерий для всех множеств узлов из специального класса. Для произвольных множеств узлов, получено необходимое условие для разрешимости более общей проблемы интерполяции функциями, представляющимися как интегралы Радона от экспоненциальной функции по множеству показателей. Статья содержит известные результаты об интерполяции, которые, в частности, позволяют изучать многоточечную голоморфную проблему Валле-Пуссена для операторов свертки.

Ключевые слова: ряд экспонент, показатель экспоненты, предельное направление показателей, интерполяция, оператор свертки, проблема Коши, проблема Валле-Пуссена, интеграл Радона.

INTERPOLATION BY SERIES OF EXPONENTIAL FUNCTIONS WHOSE EXPONENTS ARE CONDENSED IN A CERTAIN DIRECTION

© 2019 **S. G. MERZLYAKOV, S. V. POPENOV**

Abstract. For complex interpolation nodes, we study the problem of interpolation by series of exponential functions whose exponents form a set, which is condensed at infinity in a certain direction. We obtain a criterion for all sets of nodes from a special class. For arbitrary sets of nodes, we obtain a necessary condition for the solvability of a more general problem of interpolation by functions that can be represented as Radon integrals of an exponential function over a set of exponents. The paper also contains well-known results on interpolation, which, in particular, allow studying the multipoint holomorphic Vallée Poussin problem for convolution operators.

Keywords and phrases: series of exponential functions, exponent of exponential function, limit direction of exponents, interpolation, convolution operator, Cauchy problem, Vallée Poussin problem, Radon integral.

AMS Subject Classification: 30E05, 30D05

1. Проблема интерполяции суммами рядов экспонент и обсуждение условий. Исследования по данной тематике активно развиваются после появления работ В. В. Напалкова и его учеников, к каковым относятся и авторы данной статьи. В упомянутых работах впервые были найдены достаточные условия разрешимости глобальной голоморфной задачи Коши для операторов свертки с данными, задаваемыми на бесконечном множестве узлов; В. В. Напалков использовал также термин «многоточечная проблема Валле-Пуссена». Подробнее историю вопроса и ссылки можно найти в работах [13–15, 22]. В конце данной статьи приводится обсуждение применений полученных результатов к известным и новым ситуациям.

Пусть $\mathcal{M} = \{\mu_k\} \subset \mathbb{C}$ — произвольное счетное множество узлов. Рассмотрим проблему интерполяции с помощью абсолютно сходящихся в каждом узле μ_k рядов экспонент с показателями из некоторого множества $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Более точно, нужно найти описания классов множеств Λ и

$\mathcal{M}$, которые обеспечивают разрешимость следующей проблемы кратной интерполяции: *для любой последовательности кратностей $\{m_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, и произвольных данных $b_k^j \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, m_k - 1$, существует такой ряд экспонент $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \exp(\lambda_n z)$ с показателями $\lambda_n \in \Lambda$, абсолютно сходящийся в окрестностях всех узлах μ_k, сумма U которого удовлетворяет равенствам $U^{(j)}(\mu_k) = b_k^j$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, m_k - 1$.* Если все $m_k = 1$, то это проблема простой интерполяции $U(\mu_k) = b_k$.

В дальнейшем показано, что в этой общей формулировке сумма U является локально аналитической функцией на $\mathcal{M}$.

Будем предполагать, что множество $\mathcal{M}$ не содержит свои конечные предельные точки; в противном случае, в силу непрерывности суммы произвольного ряда в окрестности любой такой точки, интерполяция невозможна для неограниченных данных, задаваемых в узлах из этой окрестности.

Для разрешимости проблемы интерполяции суммами рядов экспонент необходимо также требовать, чтобы множество Λ было неограниченным, так как в противном случае имеет место аналитическое продолжение суммы любого ряда экспонент до целой функции экспоненциального типа.

Действительно, если $|\lambda_n| \leqslant C$ и ряд $u(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z}$ абсолютно сходится в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, из простой оценки

$$|e^{\lambda_n z}| \leqslant e^{C|z-z_0|} |e^{\lambda_n z_0}|, \quad z \in \mathbb{C},$$

вытекает, что ряд абсолютно сходится в произвольной точке $z \in \mathbb{C}$ и

$$|u(z)| \leqslant e^{C|z-z_0|} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \big| e^{\lambda_n z_0} \big|.$$

Известно, что такой ряд сходится равномерно на компактах (см. [8]), а оценка показывает, что простая интерполяция невозможна для данных интерполяции с большой скоростью роста, например, для $|b_k| \geqslant k e^{C|\mu_k - z_0|}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Мы ограничимся рассмотрением лишь узкого класса неограниченных множеств показателей, которые имеют только одно предельное направление сгущения в бесконечности: будем предполагать, что выполнено условие

$$\exists \omega \in [0, 2\pi) \qquad \lim_{\substack{|\lambda| \to \infty, \\ \lambda \in \Lambda}} \frac{\lambda}{|\lambda|} = \exp(i\omega) = s_\omega. \tag{1}$$

Для рядов экспонент известен аналог теоремы Абеля о степенных рядах (в наибольшей общности см. [11]; для рядов Дирихле с положительными λ_n см. [8], а также [1,3,5,6], где рассмотрены ряды экспоненциальных мономов и их обобщения, а также аналитическое продолжение элементов инвариантных подпространств).

Если ряд экспонент с показателями из Λ абсолютно сходится в некоторой точке $\mu_k \in \mathcal{M}$, то из условия (1) следует, что ряд абсолютно сходится в полуплоскости

$$\Pi(s_\omega, \mu_k) = \big\{ \operatorname{Re}(s_\omega z) < \operatorname{Re}(s_\omega \mu_k) \big\};$$

более того он сходится нормально (см. [11, 12]): для любого компакта $K \subset \Pi(s_\omega, \mu_k)$ сходится числовой ряд из норм

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{z \in K} \big| c_n e^{\lambda_n z} \big| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| e^{H_K(\lambda_n)},$$

где $H_K(z) = \sup\limits_{\xi \in K} \operatorname{Re}(\xi z)$, $z \in \mathbb{C}$, — опорная функция компакта K в смысле комплексного анализа. Известно, что $H_K(z) = h_K(\theta)|z|$, $z = |z| e^{i\theta}$, где

$$h_K(\theta) = \frac{H_K(z)}{|z|} = \sup_{\xi \in K} \operatorname{Re}(\xi e^{i\theta})$$

— опорная функция (в смысле $\mathbb{R}^2$) выпуклого компакта $\overline{\operatorname{ch} K}$, комплексно сопряженного с выпуклой оболочкой $\operatorname{ch} K$.

Видим, что любой ряд экспонент, абсолютно сходящийся в точке μ_k, равномерно сходится на любом компакте из $\Pi(s_\omega, \mu_k)$; тогда его сумма u есть голоморфная функция в области $\Pi(s_\omega, \mu_k)$.

Так как ряды, рассматриваемые в сформулированной проблеме интерполяции, абсолютно сходятся во всех узлах μ_k, они сходятся нормально, а их суммы суть голоморфные функции в области

$$\left\{\operatorname{Re}(s_\omega z) < d(s_\omega, \mathcal{M}) = \sup_{\mu_k \in \mathcal{M}} \operatorname{Re}(s_\omega \mu_k) \leqslant +\infty\right\}.$$

Если $d(s_\omega, \mathcal{M}) = +\infty$, то эта область — вся комплексная плоскость, а суммы рядов — целые функции.

Если $d(s_\omega, \mathcal{M}) < +\infty$, суммы рядов — голоморфные функции в полуплоскости

$$\Pi(s_\omega, \mathcal{M}) = \Big\{ \operatorname{Re}(s_\omega z) < d(s_\omega, \mathcal{M}) \Big\}.$$

Возможны ситуации, когда сумма каждого рассматриваемого ряда голоморфна в своей, более широкой области.

Например, если на прямой $\{\operatorname{Re}(s_\omega z) = d(s_\omega, \mathcal{M})\}$ лежит точка из $\mathcal{M}$, из условия абсолютной сходимости рядов в окрестности каждой точки из $\mathcal{M}$ следует, что каждый рассматриваемый ряд сходится в некоторой индивидуальной «полуплоскости»

$$\Pi_\delta(s_\omega, \mathcal{M}) = \Big\{ \operatorname{Re}(s_\omega z) < d(s_\omega, \mathcal{M}) + \delta,\ \delta \leqslant +\infty \Big\}.$$

Случай $\delta = +\infty$, $\Pi_\delta(s_\omega, \mathcal{M}) = \mathbb{C}$, возможен, например, если прямая $\{\operatorname{Re}(s_\omega z) = d(s_\omega, \mathcal{M})\}$ содержит бесконечное множество точек из $\mathcal{M}$.

Продолжим обсуждение необходимых условий: множество узлов $\mathcal{M}$ должно быть дискретным в области, в которой голоморфна сумма любого ряда, рассматриваемого в проблеме интерполяции. Если это не так, существует конечная предельная точка μ_0 множества $\mathcal{M}$, принадлежащая этой области. Сумма u любого ряда, абсолютно сходящегося в окрестностях всех точках из $\mathcal{M}$, голоморфна в μ_0; значит, она ограничена в окрестности этой точки. Простая интерполяция $u(\mu_k) = b_k$ невозможна для неограниченных данных интерполяции, задаваемых в узлах из этой окрестности.

Отсюда и из обсуждения необходимых условий интерполяции выше, в частности, следуют простые необходимые условия разрешимости рассматриваемой проблемы интерполяции: пусть $d(s_\omega, \mathcal{M}) < +\infty$, и проблема интерполяции разрешима; тогда

(1) в случае, когда граница $\{\operatorname{Re}(s_\omega z) = d(s_\omega, \mathcal{M})\}$ полуплоскости $\{\operatorname{Re}(s_\omega z) < d(s_\omega, \mathcal{M})\}$ содержит некоторую точку из $\mathcal{M}$, у множества $\mathcal{M}$ нет конечных предельных точек как во внутренности, так и на границе полуплоскости;

(2) в случае, когда на границе нет точек из $\mathcal{M}$ и существуют конечные предельные точки $\mathcal{M}$, все они лежат на границе, т.е. существует предел $\operatorname{Re}(s_\omega \mu_{k,l})$, $\operatorname{Re}(s_\omega \mu_{k,l}) \to d(s_\omega, \mathcal{M})$ для всех подпоследовательностей $\{\mu_{k,l}\}$, имеющих конечные пределы.

Пусть D — произвольная выпуклая область, Λ — некоторое неограниченное множество показателей. Введем обозначение

$$\Sigma(D, \Lambda) = \left\{ u : u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z},\ z \in D,\ \lambda_n \subset \Lambda \right\};$$

ряды экспонент сходятся абсолютно для всех $z \in D$.

Множество $\Sigma(D, \Lambda)$ не пусто. Действительно, выберем исчерпание области D выпуклыми компактами $\{K_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, $D = \bigcup K_j$, $K_j \subset \operatorname{int} K_{j+1}$, и для каждого $j \in \mathbb{N}$ выберем c_j так, чтобы

$$p_{K_j}(c_j e^{\lambda_j \cdot}) = \max_{\xi \in K_j} \Big| c_j \exp(\lambda_j \xi) \Big| \leqslant \frac{1}{2^j}.$$

Тогда для всех $z \in K_j$ и $n \geqslant j+1$ имеем

$$|c_n| p_{K_j}(e^{\lambda_n \cdot}) \leqslant \frac{1}{2^n},$$

т.е. абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{n=j+1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z}$. Кроме того, он сходится в топологии $H(D)$.

Обобщая отмеченную выше ситуацию, в которой, в случае ограниченного множества Λ, все суммы рядов имеют контролируемый рост (все — функции экспоненциального типа), предположим, что множество Λ неограничено, но обладает следующим свойством: любая функция $u \in \Sigma(D,\Lambda)$ имеет контролируемый рост на $\mathcal{M}$; тогда простая интерполяция с произвольными данными невозможна. В дальнейшем это наблюдение лежит в основе доказательства необходимости условия интерполяции для более общей проблемы интерполяции функциями, представляющимися как интегралы Радона по множеству Λ от экспоненциальной функции.

Теорема 1. *Пусть множество Λ удовлетворяет условию (1). Пусть D — это полуплоскость*

$$\Pi(s_\omega, \mathcal{M}) = \left\{ \operatorname{Re}(s_\omega z) < \sup_{\mu_k \in \mathcal{M}} \operatorname{Re}(s_\omega \mu_k) = d(s_\omega, \mathcal{M}) < +\infty \right\}$$

или плоскость $\mathbb{C}$ (в этом случае $d(s_\omega, \mathcal{M}) = +\infty$), а $\mathcal{M}$ — произвольное множество узлов, дискретное в D. Пусть z_0 — произвольная точка в D. Тогда для всех z в полуплоскости $\big\{\operatorname{Re}(s_\omega z) < \operatorname{Re}(s_\omega z_0)\big\}$ и любого такого $\varepsilon > 0$, что круг $K = \{|z - z_0| < \varepsilon\}$ лежит в D, определена конечная выпуклая функция

$$G_{K,\Lambda}(z) = \sup_{\lambda_n \in \Lambda} \Big(\operatorname{Re}(\lambda_n z) - H_K(\lambda_n) \Big), \quad G_{K,\Lambda}(z) < \infty, \tag{2}$$

где $H_K(z) = \sup\limits_{|\xi - z_0| < \varepsilon} \operatorname{Re}(\xi z)$ — опорная функция круга K, и для любой функции $u \in \Sigma(D,\Lambda)$ справедлива оценка суммы ряда

$$\big|u(z)\big| \leqslant C e^{G_{K,\Lambda}(z)}, \quad C > 0. \tag{3}$$

Доказательство. Любой ряд $u(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \exp(\lambda_n z)$ из $\Sigma(D,\Lambda)$ сходится нормально в D. В частности, если круг $K = \{|z - z_0| < R\}$ лежит в этой области, сходится ряд из норм

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{z \in K} \big|c_n e^{\lambda_n z}\big| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| e^{H_K(\lambda_n)}.$$

Покажем, что из условия (1) следует, что для всех $z \in \{\operatorname{Re}(s_\omega z) < \operatorname{Re}(s_\omega z_0)\}$ определена конечная функция (2).

Пусть z — некоторая точка, $\operatorname{Re}(s_\omega z) < \operatorname{Re}(s_\omega z_0)$, $\lambda_n = |\lambda_n| \exp(\theta_n)$; тогда $H_K(\lambda_n) = h_K(\theta_n)|\lambda_n|$. Так как

$$\operatorname{Re}(\lambda_n z) - H_K(\lambda_n) = |\lambda_n| \left(\frac{\operatorname{Re}(\lambda_n z)}{|\lambda_n|} - h_K(\theta_n) \right),$$

видим, что

$$\frac{\operatorname{Re}(\lambda_n z)}{|\lambda_n|} - h_K(\theta_n) = \operatorname{Re}\left(\frac{\lambda_n s_{-\omega}}{|\lambda_n|} s_\omega (z - z_0) \right) + \operatorname{Re} \frac{(\lambda_n z_0)}{|\lambda_n|} - h_K(\theta_n) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \operatorname{Re}\big(s_\omega(z - z_0)\big) + \operatorname{Re}\big(s_\omega z_0\big) - h_K(\theta_n) < 0, \quad \lambda_n \in \Lambda, \quad |\lambda_n| \to \infty,$$

так как

$$Re(s_\omega z_0) - h_K(\theta_n) = \big(Re(s_\omega z_0) - h_K(\omega)\big) + \big(h_K(\omega) - h_K(\theta_n)\big)$$

и оба выражения в скобках отрицательны, из чего следует, что

$$\operatorname{Re}(\lambda_n z) - H_K(\lambda_n) \to -\infty, \quad \lambda_n \in \Lambda, \ |\lambda_n| \to \infty,$$

а значит, $G_{K,\Lambda}(z) < +\infty$.

Функция $G_{K,\Lambda}$ выпукла как верхняя огибающая линейных $l_n(z) = \operatorname{Re}(\lambda_n z) - H_K(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим произвольную функцию $u \in \Sigma(D,\Lambda)$. Для всех $z \in \{\operatorname{Re}(s_\omega z) < \operatorname{Re}(s_\omega z_0)\}$ справедлива оценка
$$\bigl|u(z)\bigr| \leqslant Ce^{G_{K,\Lambda}(z)}, \quad C > 0.$$
Действительно,
$$\bigl|u(z)\bigr| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| e^{\operatorname{Re}(z\lambda_n)} \leqslant e^{G_{K,\Lambda}(z)} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| e^{H_K(\lambda_n)}.$$
Теорема доказана. □

Пусть существует $\{\mu_{k,l}\} \subset \mathcal{M}$, $\operatorname{Re}(s_\omega \mu_{k,l}) < \operatorname{Re}(s_\omega z_0)$, $\bigl|\mu_{k,l}\bigr| \to +\infty$, $l \to +\infty$, т.е. существует такое $z_0 \in D$, что множество $\mathcal{M} \cap \{\operatorname{Re}(s_\omega z) < \operatorname{Re}(s_\omega z_0)\}$ бесконечно. Тогда из оценок функций u следует, что проблема простой интерполяции $u(\mu_{k,l}) = b_{k,l}$ функциями из $\Sigma(D,\Lambda)$ неразрешима, например, для $|b_{k,l}| \geqslant l \exp(G_{K,\Lambda}(\mu_{k,l}))$.

По существу, в данной работе мы улучшили доказательство необходимости из [13], что позволило избавиться от используемого там технического условия на Λ. Нам кажется важным данное наблюдение об оценках роста сумм рядов экспонент, и мы намерены продолжить исследования в этом направлении.

Указанный результат позволяет добавить к отмеченным выше необходимым условиям (1) и (2) на конечные предельные точки $\mathcal{M}$ еще и соответствующие условия для бесконечных предельных точек: если проблема интерполяции разрешима и $d(s_\omega, \mathcal{M}) < +\infty$, то

(3) если граница $\bigl\{\operatorname{Re}(s_\omega z) = d(s_\omega, \mathcal{M})\bigr\}$ полуплоскости $\bigl\{\operatorname{Re}(s_\omega z) < d(s_\omega, \mathcal{M})\bigr\}$ содержит некоторую точку из $\mathcal{M}$, то не существует подпоследовательностей $\{\mu_{k,l}\} \subset \mathcal{M}$, $\bigl|\mu_{k,l}\bigr| \to +\infty$;

(4) если на границе нет точек из $\mathcal{M}$ и существует такая подпоследовательность $\{\mu_{k,l}\} \subset \mathcal{M}$, что $\bigl|\mu_{k,l}\bigr| \to +\infty$, то $\operatorname{Re}(s_\omega \mu_{k,l}) \to d(s_\omega, \mathcal{M})$.

Из (1) и (3) получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $d(s_\omega, \mathcal{M}) < +\infty$.*

1. *Если граница полуплоскости $\bigl\{\operatorname{Re}(s_\omega z) < d(s_\omega, \mathcal{M})\bigr\}$ содержит некоторую точку из $\mathcal{M}$, проблема интерполяции неразрешима.*
2. *Если на границе нет точек из $\mathcal{M}$ и проблема интерполяции разрешима, существует предел*
$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{Re}(s_\omega \mu_k) = d(s_\omega, \mathcal{M}).$$

Интерполяция невозможна и в случае, когда множество Λ таково, что значения сумм всех рядов экспонент в некоторых узлах являются зависимыми, так как это означает, что нельзя произвольно задавать данные в этих узлах.

Пример 1. Если $\mathcal{M} = \{2\pi n,\ n \in \mathbb{N}\}$, любая целая функция вида $u(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e^{(2\pi n z)}$ удовлетворяет разностному уравнению $u(z) = u(z+i)$. Интерполяция для любой пары точек вида $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu + i$, $\mu \in \mathbb{C}$, с данными $b_1 \neq b_2$ невозможна.

Если для некоторого множества узлов $\mathcal{M} \subset D$ проблема интерполяции разрешима, то для каждого $\mathcal{M}$ из этого класса и для любого счетного множества кратностей $\{m_k\}$ имеет место следующее представление пространства $H(D)$:
$$H(D) = \Sigma(D,\Lambda) + I(D,\mathcal{M}), \tag{4}$$
где
$$I(D,\mathcal{M}) = \Bigl\{h \in H(D):\ h^{(j)}(\mu_k) = 0,\ k \in \mathbb{N},\ j = 0,\ldots,m_k - 1\Bigr\}.$$
Действительно, для произвольной функции $f \in H(D)$ существует функция $u \in \Sigma(D,\Lambda)$, для которой $u^{(j)}(\mu_k) = f^{(j)}(\mu_k)$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 0,\ldots,m_k - 1$, откуда и вытекает представление (4).

Обратно, для данного множества узлов и множества кратностей, так как разрешима проблема кратной интерполяции голоморфными функциями (это следствие теорем Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса, см. [25]), из представления (4) вытекает разрешимость проблемы кратной интерполяции элементами $\Sigma(D,\Lambda)$.

Итак, существование представлений (4) для всех допустимых $\mathcal{M}$, Λ и произвольных кратностей $\{m_k\}$ равносильно разрешимости проблемы интерполяции.

Отметим следующее. По теореме Вейерштрасса (см. [25]) для любого множества узлов, дискретного в D, и любого множества кратностей $\{m_k\}$, приписываемых к узлам, существует такая функция $\psi = \psi_{\mathcal{M}}$ из $H(D)$, что $\psi^{(j)}(\mu_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, m_k - 1$. Из теоремы деления в $H(D)$ следует, что замкнутый идеал $I(D, \mathcal{M})$ порождается функцией ψ, т.е.

$$I(D, \mathcal{M}) = (\psi) = \big\{h \in H(D) : \exists g \in H(D),\ h = g\psi\big\}.$$

Существование представлений (4) не зависит от выбора ψ с требуемыми свойствами. Кроме того, можно показать, что существование (4) равносильно, в силу бесконечности множества узлов, существованию представлений с функциями, нулевые множества которых принадлежат рассматриваемому классу множеств узлов интерполяции и содержат данное множество узлов, с учетом кратностей. Отсюда для бесконечных множеств узлов можно получить, что в представлениях нет единственности; более того, подпространство $\Sigma(D, \Lambda) \cap \big(\psi\big)$ бесконечномерно. Для частных ситуаций различные подходы к доказательству этого утверждения демонстрируются в [13, 15]. В рассматриваемой ситуации доказательство абсолютно аналогично.

Единственность (т.е. прямая сумма в представлениях) возможна только в случае конечного $\mathcal{M}$ (и конечного Λ), а это классический случай (например, в [27] имеется ссылка на статью Б. Мальгранжа) глобальной голоморфной задачи Коши с данными в конечном числе узлов для дифференциальных операторов конечного порядка в $H(\mathbb{C})$. Такую задачу Коши можно трактовать как интерполяцию элементами ядра дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

Для случая простой интерполяции единственность имеет место, когда порядок оператора s и количество узлов совпадает и $(s \times s)$-матрица $(\exp(\mu_k \lambda_n))$ невырождена. Это задача конечномерной линейной алгебры. Для многочленов нескольких переменных, порождающих дифференциальные операторы в частных производных, известен ряд результатов о глобальной голоморфной задаче Коши Л. Хермандера, А. Мерила, Д. Струппы, А. Айжера, Г. Шапиро и его учеников, Д. Хавинсона, Д. Эбенфельда и др. (см. библиографию в [13–15, 22]).

2. Проблема интерполяции элементами ядра оператора свертки и двойственность. Пусть D — произвольная выпуклая область, G — некоторая целая функция минимального типа с множеством простых нулей $\{\lambda_n\}$. Функция G порождает (см. [17]) линейный непрерывный сюръективный оператор свертки M_G на пространстве $H(D)$. Ядро этого оператора $\operatorname{Ker} M_G = \{u \in H(D) : M_G[u] = 0\}$ — это замкнутое подпространство, инвариантное относительно оператора дифференцирования и содержащее множество $\{e^{\lambda_n z}\}$. Ядро M_G совпадает с замыканием линейной оболочки этого множества экспонент (спектральный синтез), т.е. элементы $\operatorname{Ker} M_G$ — это пределы линейных комбинаций экспонент, но, вообще говоря, они не представляются в виде рядов экспонент. Итак, $\Sigma(D, \{\lambda_n\}) \subset \operatorname{Ker} M_G$. Если $\Sigma(D, \{\lambda_n\}) = \operatorname{Ker} M_G$, говорят, что для оператора свертки, или, равнозначно, для $\operatorname{Ker} M_G$ имеет место фундаментальный принцип.

Рассмотрим проблему кратной интерполяции элементами $\operatorname{Ker} M_G$. Требуется найти условия на $\{\lambda_n\}$ и дискретное в D множество узлов $\mathcal{M}$, чтобы для любого множества кратностей $\{m_k\}$ имело место представление

$$H(D) = \operatorname{Ker} M_G + (\psi). \tag{5}$$

Функцию $\psi \in H(D)$ можно выбирать произвольно, лишь бы она имела множество $\mathcal{M}$ в качестве нулевого множества с кратностями $\{m_k\}$. Как и выше, это представление равносильно решению интерполяционной задачи элементами ядра, или глобальной задаче Коши, в $H(D)$ с данными, задаваемыми на $\mathcal{M}$.

Для решения рассматриваемых проблем интерполяции используется схема, впервые предложенная в [22] и основанная на двойственности с использованием преобразования Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов (см. [17, 25]). Кратко опишем ее (более подробные доказательства можно найти в [13–15]).

Существование представлений (5) равносильно следующим двум утверждениям: для любого допустимого множества узлов $\mathcal{M} \subset D$ и любого множества кратностей

(I) подпространство $\operatorname{Ker} M_G + (\psi)$ всюду плотно в пространстве $H(D)$;

(II) подпространство $\operatorname{Ker} M_G + (\psi)$ замкнуто в пространстве $H(D)$.

Покажем, что данные утверждения равносильны двум соответствующим двойственным утверждениям в классическом пространстве P_D. Это пространство всех целых функций экспоненциального типа, сопряженные индикаторные диаграмы которых содержатся в D. В P_D вводится традиционная топология индуктивного предела весовых банаховых пространств целых функций, которая обеспечивает топологический изоморфизм (см. [17, 25]; по существу, это следствие результата Полиа) между сильным сопряженным пространством $H^*(D)$ и пространством P_D, реализующийся с помощью преобразования Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов $F \in H^*(D)$. Точнее, линейное непрерывное взаимно однозначное преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов $F \in H^*(D)$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{L} : F \mapsto \mathcal{L}F(z) = \left\langle F_\lambda, e^{\lambda z} \right\rangle, \quad \mathcal{L}F \in P_D.$$

Топология в (LN^*)-пространстве P_D не описывается в терминах сходимости последовательностей, однако секвенциально замкнутые подпространства являются замкнутыми (см. [24]). Точное определение сходимости последовательностей в этой топологии будет приведено ниже в доказательстве достаточности условия интерполяции суммами рядов.

Пусть U — подпространство в топологическом векторном пространстве X; обозначим через U^0 его поляру (или аннулятор), т.е. множество функционалов из X^*, которые обращаются в нуль на U. Обозначим через $H^*(D)$ сопряженное пространство к $H(D)$ с сильной топологией.

Из теоремы Хана—Банаха следует, что утверждение (I) равносильно тому, что

$$\big(\operatorname{Ker} M_G + (\psi)r\big)^0 = \big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0 \cap \big((\psi)\big)^0 = \{0\}.$$

Из [10, лемма 2] следует, что утверждение (II) в FS-пространстве $H(D)$ равносильно тому, что подпространство $\big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0 + \big((\psi)\big)^0$ замкнуто в $H^*(D)$.

Определим раздельно непрерывную билинейную форму

$$[\cdot,\cdot] : H(D) \times P_D \to \mathbb{C}, \quad [\psi, \varphi] = \left\langle \mathcal{L}^{-1}\varphi, \psi \right\rangle, \quad \psi \in H(D), \ \varphi \in P_D.$$

С помощью отображения $\varphi \mapsto [\cdot, \phi] = \left\langle \mathcal{L}^{-1}\varphi, \cdot \right\rangle$, где $\mathcal{L}^{-1}\varphi \in H^*(D)$, задается изоморфизм между P_D и сильным сопряженным пространством $H^*(D)$. Согласно введенной двойственности, любая функция из пространства P_D взаимно однозначно соответствует некоторому линейному непрерывному функционалу из $H^*(D)$. В этой двойственности поляра $\big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0$ совпадает с замкнутым идеалом

$$(G)_{P_D} = \big\{h \in P_D : \ h = G \cdot v; \ v \in P_D\big\}.$$

Здесь используется теорема деления в P_D на целую функцию G минимального типа и тот факт, что индикаторные диаграммы функций v и $G \cdot v$ совпадают.

Каждая функция $\psi = \psi_{\mathcal{M}} \in H(D)$, $\psi \not\equiv 0$, порождает в P_D оператор

$$\widetilde{M}_\psi : P_D \mapsto P_D, \quad \widetilde{M}_\psi[\varphi](z) = \big[(\Theta\psi)_\lambda, S_z\big(\varphi(\lambda)\big)\big], \quad \varphi \in P_D,$$

где S_z – оператор сдвига,

$$S_z\big(\varphi(\lambda)\big) = \varphi(\lambda + z), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

а Θ — канонический изоморфизм рефлексивного пространства $H(D)$ и $H^{**}(D)$.

Используя известную формулу для обратного преобразования Бореля (см. [9]), получаем отсюда, что оператор свертки $\widetilde{M}_\psi$ имеет следующий вид:

$$\widetilde{M}_\psi[\varphi](z) = \frac{\omega}{2\pi i} \int\limits_C \psi(\lambda) e^{z\lambda} \gamma_\varphi(\lambda)\, d\lambda, \quad \varphi \in P_D,$$

где γ_φ — функция, ассоциированная по Борелю с функцией φ, а C — спрямляемый замкнутый контур, охватывающий все особые точки функции γ_φ. Известно, что $\widetilde{M}_\psi$ — линейный, непрерывный и сюръективный оператор.

Введем обозначение

$$\operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi = \Big\{ f \in P_D : \ \widetilde{M}_\psi[f] = 0 \Big\}.$$

Это замкнутое подпространство в P_D. С учетом двойственности, поляра $\big(I(D,\mathcal{M})\big)^0 = \big((\psi)\big)^0$ совпадает с $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$.

Итак, в рассматриваемой двойственности, утверждения (I) и (II) в (M^*)-пространстве $H(D)$, равносильны, соответственно, двум двойственным утверждениям в (LN^*)-пространстве P_D:

(I*) справедливо равенство $(G)_{P_D} \cap \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi = \{0\}$;

(II*) подпространство $(G)_{P_D} + \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$ замкнуто в пространстве P_D.

Получили следующую теорему (подобный результат есть в [15]) о двойственных условиях разрешимости проблемы интерполяции элементами ядра оператора свертки M_G, порожденного целой функцией G минимального типа.

Теорема 2. *Для каждого дискретного в D множества узлов $\mathcal{M}$ и произвольного множества кратностей $\{m_k\}$ существование представления (5) для $H(D)$ равносильно двум двойственным утверждениям* (I*) *и* II*) *в пространстве P_D.*

Пусть Λ — множество показателей из исходной проблемы интерполяции суммами рядов экспонент и выполнено (1). В следующем разделе мы покажем, как можно выбрать из Λ нулевое множество $\{\lambda_n\}$, являющееся нулевым множеством функции G минимального типа, таким образом, чтобы множество $\{\lambda_n\}$ удовлетворяло условию (1) и $\operatorname{Ker} M_G = \Sigma(D,\{\lambda_n\})$. Затем для некоторого узкого класса множеств $\mathcal{M}$ узлов интерполяции в областях D специального вида (вся плоскость и полуплоскость) будет установлена справедливость двойственных утверждений (I*) и (II*). Далее, в силу теоремы 2, имеют место представления (5). Так как

$$\operatorname{Ker} M_G = \Sigma(D,\{\lambda_n\}), \quad \Sigma(D,\{\lambda_n\}) \subset \Sigma(D,\{\Lambda\}),$$

из (5) вытекают представления (4), которые для рассматриваемого узкого класса множеств узлов интерполяции эквивалентны разрешимости проблемы интерполяции суммами рядов экспонент, голоморфных в рассматриваемых выпуклых областях.

3. Достаточные условия интерполяции для специальных множеств узлов. Здесь будем рассматривать только множества узлов $\mathcal{M} \subset D$, удовлетворяющих условию: на любой прямой $l(\omega,c) = \{\operatorname{Re}(s_\omega z) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, лежит не более одной точки из $\mathcal{M}$, или

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \quad \big\{z \in \mathcal{M} : \operatorname{Re}\big(s_\omega(z-\mu_k)\big) = 0\big\} \iff \{z = \mu_k\}. \tag{6}$$

В качестве обоснования этого условия может выступать пример, в котором неразрешима проблема интерполяции с помощью всех целых сумм рядов, которые являются решениями разностного уравнения (см. пример 1). С другой стороны, известны ситуации, в которых проблема интерполяции разрешима, но данное условие не выполнено. В таких ситуациях требуются дополнительные условия на множество показателей Λ, поэтому этой проблеме будут посвящены дальнейшие исследования.

Одна из целей статьи — получить критерий разрешимости проблемы интерполяции суммами рядов экспонент для всех множеств показателей Λ, имеющих только одно направление сгущения в бесконечности s_ω, и для множеств узлов из введенного узкого класса. Необходимость условий по существу уже установлена в первом разделе для общих множеств узлов и будет далее доказана в большей общности для произвольных множеств узлов, а также для проблемы интерполяции интегралами Радона от экспоненциальной функции по множеству Λ с одним направлением сгущения s_ω.

Напомним, что множество Λ неограничено и удовлетворяет условию (1); в этом случае, как показано выше в утверждении 1, необходимо полагать, что D это полуплоскость

$$\Pi(s_\omega,\mathcal{M}) = \left\{\operatorname{Re}(s_\omega z) < \sup_{\mu_k\in\mathcal{M}} \operatorname{Re}(s_\omega \mu_k) = d(s_\omega,\mathcal{M}) < +\infty\right\}$$

или плоскость $\mathbb{C}$ (в этом случае $d(s_\omega,\mathcal{M}) = +\infty$).

Теорема 3. *Пусть Λ и $\mathcal{M}$ удовлетворяют условиям* (1) *и* (6) *соответственно.*

1. *Пусть* $\sup\limits_{\mu_k\in\mathcal{M}} \operatorname{Re}(s_\omega\mu_k)\} = +\infty$. *Тогда* $D = \mathbb{C}$. *Если существует предел* $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Re}(s_\omega\mu_k) = +\infty$, *то проблема кратной интерполяции функциями из* $\Sigma(\mathbb{C},\Lambda)$ *разрешима в* $H(\mathbb{C})$.
2. *Пусть* $d(s_\omega,\mathcal{M}) < +\infty$. *Тогда* $D = \Pi(s_\omega,\mathcal{M})$. *Если* $\operatorname{Re}(s_\omega\mu_k) < d(s_\omega,\mathcal{M})$ *для всех* $k\in\mathbb{N}$, *и существует предел* $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Re}(s_\omega\mu_k) = d(s_\omega,\mathcal{M})$, *то проблема кратной интерполяции функциями из* $\Sigma(\Pi(s_\omega,\mathcal{M}),\Lambda)$ *разрешима в* $H(\Pi(s_\omega,\mathcal{M}))$.

Доказательство. Используя условие (1), можно выбрать из множества Λ последовательность $\{\lambda_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, обладающую следующими свойствами: для всех $n\in\mathbb{N}$

$$|\lambda_n| > n, \quad \left|\frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} - s_\omega\right| < \frac{1}{2^n}, \quad |\lambda_{n+1}| > 2|\lambda_n|, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} = s_\omega = \exp(i\omega).$$

Последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет плотность 0. Введем целую функцию с простыми нулями λ_n

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right).$$

Функция G — целая функция минимального типа при порядке 1. Величина

$$\delta = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\frac{1}{|G'(\lambda_n)|}$$

есть индекс конденсации Гельфонда—Леонтьева. Из свойств последовательности $\{\lambda_n\}$ следует, что $\delta = 0$ (доказательство см., например, в [13]).

Из результатов монографии А. Ф. Леонтьева [9] (теоремы 2.1.2, 4.2.2, 4.2.3) вытекает следующее важное утверждение (более подробные обсуждения см. в [13–15]).

Предложение. *Если* $\delta = 0$, *то ядро* $\operatorname{Ker} M_G$ *состоит из всех функций* $f(z)$, *которые представляются рядами экспонент,* $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z}$, $z\in D$, *сходящимися в топологии пространства* $H(D)$, *т.е.* $\operatorname{Ker} M_G = \Sigma(\{\lambda_n\}, D)$.

Следует отметить, что в многомерном случае и в более общей ситуации инвариантных подпространств в [2] изучен *фундаментальный принцип* (в нашей ситуации это и есть последнее утверждение). Самая общая постановка этой задачи для комплексной плоскости рассмотрена в [7]. В [4] подробно изучен случай рядов Дирихле (случай $\{\lambda_n\}\subset\mathbb{R}$). Доказательство последнего утверждения также можно получить, используя введенную в этих работах новую локальную характеристику S конденсации.

Для завершения доказательства теоремы 3 в пространстве P_D нужно доказать два двойственных утверждения (I*) и (II*) из теоремы 2. □

Следующий хорошо известный факт является важным моментом в доказательстве этих утверждений. Это несложно доказываемый фундаментальный принцип для $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$ в пространстве P_D.

Предложение. *Подпространство* $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi \subset P_D$ *представляет собой линейную оболочку системы всех мономов вида* $\{z^\nu e^{\mu_k z}\}$, $k\in\mathbb{N}$, $\nu = 0,1,\dots,m_k-1$, *т.е. оно состоит только из полиномов из экспонент следующего вида*

$$p(z) = \sum_{\operatorname{Fin}_p(\mathcal{M})} a_k(z)e^{\mu_k z}, \tag{7}$$

где $a_k(z)$ — *некоторые многочлены степени не выше* m_k-1. *Справа стоит сумма по всем* μ_k *из некоторого конечного множества* $\operatorname{Fin}_p(\mathcal{M})\subset\mathcal{M}$.

Отметим также, что сходимость последовательности $\{g_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ в (LN^*)-топологии пространства P_D означает следующее:

(i) последовательность $\{g_l\}$ сходится к g в топологии пространства $H(\mathbb{C})$ равномерной сходимости на всех компактах из $\mathbb{C}$;

(ii) существуют такие постоянная $A > 0$ и выпуклый компакт $K \subset D$, что для всех $l \in \mathbb{N}$ справедлива оценка
$$\bigl|g_l(z)\bigr| \leqslant Ae^{H_K(z)}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{8}$$
Как и ранее, $H_K(z) = \sup\limits_{\sigma\in K} \operatorname{Re}(z\sigma)$ — опорная функция компакта K в смысле комплексного анализа. Если $z = |z|e^{i\theta}$, функция $h_K(\theta) = H_K(z)/|z|$ является опорной функцией (в смысле $\mathbb{R}^2$) компакта $\overline{K}$, комплексно сопряженного с K. Функции H_K, h_K непрерывны, H_K — выпуклая, позитивно однородная функция.

Иногда удобно интерпретировать $h_K(\theta)$ как наименьшую верхнюю грань проекций точек из компакта K на луч $\{te^{-i\theta},\ t > 0\}$. Другими словами, если $k(\theta, K) : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ — опорная функция (в смысле $\mathbb{R}^2$) компакта K в направлении $e^{i\theta}$, то $k(-\theta, K) = h_K(\theta)$. Отметим, что опорная полуплоскость $\Pi(s, K)$ (в смысле $\mathbb{R}^2$) компакта K с направлением нормали $\overline{s_\theta} = e^{-i\theta}$ имеет вид
$$\Pi(s, K) = \Pi_0(s_\theta) + \overline{s_\theta}h_K(\theta), \quad \text{где} \quad h_K(\theta) = k(-\theta, K), \quad \Pi_0(s_\theta) = \bigl\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s_\theta z) < 0\bigr\}.$$
Выпуклый компакт есть пересечение замыканий опорных полуплоскостей $\Pi(s, K)$ по всем $s \in \mathbb{S}$.

Дальнейшие рассуждения относятся к геометрии выпуклых компактов и используют свойства их опорных функций. В [13, 14] рассматривались множества вещественных узлов; в этом случае найдены критерии разрешимости обсуждаемой здесь задачи. Применяя преобразование поворота и параллельного переноса, получаем узлы, лежащие на произвольной прямой в направлении s_α. Показано, что задача интерполяции разрешима в том и только в том случае, когда Λ содержит подмножество показателей Λ_1 с направлением сгущения в бесконечности s_ω, причем $\operatorname{Re}(s_\omega s_\omega) > 0$. Но этом случае легко заметить, что Λ_1 удовлетворяет условию (1), а условие (6) на узлы выполняется автоматически, и это позволяет использовать способы доказательства из [13], где $D = \mathbb{C}$, и из [14], где отдельно в лемме рассмотрен случай $D = \Pi(s_\omega, \mathcal{M})$ — полуплоскость. По существу, в доказательствах в этих работах используется лишь поведение $\operatorname{Re}(s_\omega \mu_k)$, поэтому доказательства в этих работах, после применения указанных преобразований, с очевидными изменениями в обозначениях проходят и в рассматриваемой ситуации.

В данной работе демонстрируется другая схема доказательства, более простая, по нашему мнению, чем применяемые ранее, и пригодная как для полуплоскости, так и для плоскости.

В дальнейшем, когда $D = \Pi(s_\omega, \mathcal{M})$, используя преобразование плоскости $z \mapsto z - h$, можно считать, без ограничения общности, что $0 \in \partial D$: для любого фиксированного $h \in \mathbb{C}$, для множеств $\Lambda - h$ выполнено условие (1), класс рассматриваемых множеств $\mathcal{M}$ сохраняется и $\Sigma(D-h, \Lambda-h) = \Sigma(D - h, \Lambda)$, в силу равенства $c_n e^{\lambda_n(z-h)} = (c_k e^{-\lambda_n h})e^{\lambda_n z}$.

Итак, в дальнейшем в доказательстве $d(s_\omega, \mathcal{M}) = 0$.

Кроме того, используя преобразование поворота плоскости $z \mapsto zs_\omega$, из равенства $e^{\lambda_n z} = e^{(\lambda_n s_{-\omega})(zs_\omega}$, получаем, что в дальнейшем, для определенности, можно считать, что условие (1) на рассматриваемые множества показателей $\{\lambda_n\}$ выполнено для $|\omega| < \pi/2$. В связи с этим далее будем полагать, что условия на узлы в теореме 3 выглядят следующим образом:

(i) если D — это вся плоскость $\mathbb{C}$, существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Re}(s_\omega \mu_k) = +\infty$;

(ii) если D — это полуплоскость $D = \Pi(s_\omega, \mathcal{M}) = \{\operatorname{Re}(s_\omega z) < 0\}$, то выполняется условие $\operatorname{Re}(s_\omega \mu_k) < 0$ и существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Re}(s_\omega \mu_k) = 0$.

Как и в [14, лемма 4], выберем в качестве исчерпания полуплоскости $\Pi(s_\omega, \mathcal{M}))$ полукруги — компакты $K_j = s_{-\omega} \cdot B_j^-$, где
$$B_j^- = \left(-\frac{1}{j} + \{|z| \leqslant j\}\right) \cap \left\{\operatorname{Re} z \leqslant -\frac{1}{j}\right\}.$$
Для каждого j обозначим через $H_j(z)$ опорную функцию компакта K_j и пусть
$$\Gamma_\delta(s_\omega) = \bigl\{z = re^{i\theta} : |\omega - \theta| < \delta\bigr\}.$$
Введем также обозначения
$$t_j = \operatorname{arctg} j^2, \quad \varepsilon_j = \frac{\omega}{2}\left(\frac{\pi}{2} - t_j\right).$$

Несложно показать (см. [14]), что справедливы оценки

$$-\frac{\omega}{j}|z| \leqslant H_j(z) \leqslant -A_j|z| \quad \forall z \in \Gamma_{\varepsilon_j}(s_\omega), \qquad A_j = \frac{\sqrt{1+j^4}}{j^2}\sin\varepsilon_j = \frac{\omega}{2j^2}(s_\omega + o(j)), \quad j \to \infty. \quad (9)$$

В качестве исчерпания всей плоскости $\mathbb{C}$ выберем компакты $K_j = \{|z| \leqslant j\}$, $j \in \mathbb{N}$ (см. доказательство основной теоремы в [13]).

Докажем утверждение (II*). Как известно (см. [24]), в (LN^*)-пространстве P_D замкнутость любого подпространства X равносильна его секвенциальной замкнутости.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{g_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ функций из подпространства $(G)_{P_D} + \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$. Предположим, что она сходится в пространстве P_D к функции $g \in P_D$. Нужно показать, что предельная функция g принадлежит $(G)_{P_D} + \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$.

Последовательность $\{g_l\}$ имеет вид $g_l = p_l + R_l$, где $p_l \in \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$ для каждого $l \in \mathbb{N}$ и $R_l \in (G)_{P_D}$, т.е., в частности, $R_l(\lambda_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Если в последовательности $\{g_l\}$ содержится бесконечное множество членов с $R_l \equiv 0$, то в силу непрерывности оператора свертки предельная функция g лежит в $\in \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$. Если же последовательность $\{g_l\}$ такова, что в ней содержится бесконечно много членов с $p_l \equiv 0$, то $g \in (G)_{P_D}$ в силу теоремы деления в P_D на функцию G минимального типа и того факта, что топология в P_D сильнее топологии поточечной сходимости.

Получили, что для таких двух типов последовательностей $\{g_l\}$ их предельная функция g лежит в $(G)_{P_D} + \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$. Следовательно, в дальнейшем можно считать, что последовательность $\{g_l\} = \{p_l + R_l\}$ такова, что $R_l \not\equiv 0$, $p_l \not\equiv 0$, для всех $l \in \mathbb{N}$.

Так как $p_l \in \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$, $p_l \not\equiv 0$, в силу фундаментального принципа (7) это полином из экспонент вида

$$p_l(z) = \sum_{\operatorname{Fin}_{p_l}(\mathcal{M})} a_k^l(z)e^{\mu_k z}, \tag{10}$$

где $a_k^l(z)$ — некоторые ненулевые многочлены степени не выше $m_k - 1$. Справа стоит сумма по всем μ_k из некоторого конечного множества $\operatorname{Fin}_{p_l}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$.

В силу условия (8) сходимости последовательности $\{g_l\}$ в P_D выполнена оценка

$$\big|g_l(z)\big| \leqslant Ae^{H_K(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

В дальнейшем будем считать, что в качестве K в условии (8) сходимости используется произвольный компакт K_j, так что $K = K_j$ — произвольный компакт из выбранных выше исчерпаний плоскости или полуплоскости.

В частности, так как $R_l(\lambda_n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\big|g_l(\lambda_n)\big| = \big|p_l(\lambda_n)\big| \leqslant Ae^{H_K(\lambda_n)}. \tag{11}$$

Покажем, что из этой оценки вытекает следующее утверждение: для каждого $l \in \mathbb{N}$ все показатели $\mu_k \in \operatorname{Fin}_{p_l}(\mathcal{M})$ из представления (10) принадлежат полуплоскости

$$\Pi(s_\omega,\ K) = \left\{ z \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Re}(s_\omega z) \leqslant \sup_{\xi\in K}\operatorname{Re}(s_\omega \xi) = h_K(\omega) \right\}.$$

Предположим, что это не так. Для произвольного фиксированного $l \in \mathbb{N}$ обозначим через T замкнутую выпуклую оболочку множества $\operatorname{Fin}_{p_l}(\mathcal{M}) \cup K$ и через μ_q узел из Fin_{p_l} с максимальной вещественной частью. Отметим, что $\mu_q = \mu_q(l)$.

Так как $T \not\subset \Pi(s_\omega, K)$, $\operatorname{Re}\mu_q > h_K(\omega)$, μ_q является крайней точкой компакта T, $\operatorname{Re}(s_\omega\mu_q) = h_T(\omega)$, по условию (6) это единственная точка на опорной прямой $\operatorname{Re}(s_\omega z) = h_T(\omega)$.

Пусть $r_l(z) = p_l(z) - a_k^q(z)e^{\mu_q z}$. Введем обозначение

$$\operatorname{Fin}_{r_l}(\mathcal{M}) = \Big\{ \mu_k \in \operatorname{Fin}_{p_l}(\mathcal{M}):\ \mu_k \neq \mu_q \Big\}$$

и обозначим через T_1 замкнутую выпуклую оболочку множества $\operatorname{Fin}_{r_l}(\mathcal{M}) \cup K$. Тогда по предположению $T \neq T_1$. Отметим, что $K \subset T_1$, возможно $K = T_1$.

Компакт $\mathrm{Fin}_{r_l}(\mathcal{M}) \cup K$ лежит в открытой опорной полуплоскости $\Pi(\omega, T)$, т.е.
$$\mathrm{Re}(s_\omega z) < \mathrm{Re}(s_\omega \mu_q) \quad \forall z \in \mathrm{Fin}_{r_l}(\mathcal{M}) \cup K.$$
В силу непрерывности $\mathrm{Re}(s_\omega z)$ существует такая точка $z_0 \in \mathrm{Fin}_{r_l}(\mathcal{M}) \cup K$, что
$$\sup_{z \in \mathrm{Fin}_{r_l}(\mathcal{M}) \cup K} \mathrm{Re}(s_\omega z) = \mathrm{Re}(s_\omega z_0) < \mathrm{Re}(s_\omega \mu_q) - 2\varepsilon$$
для некоторого $\varepsilon > 0$. Далее, поскольку
$$\mathrm{Re}(s_\omega \mu_q) = h_T(\omega), \quad \mathrm{Re}(s_\omega z_0) = h_{T_1}(\omega),$$
из неравенства
$$\mathrm{Re}(s_\omega \mu_q) = h_T(\omega) > h_{T_1}(\omega) + 2\varepsilon$$
и непрерывности следует, что
$$\mathrm{Re}(\mu_q e^{i\theta}) > h_{T_1}(\theta) + 2\varepsilon, \quad |\omega - \theta| < \delta$$
для некоторого $\delta > 0$.

Далее используем эту оценку и тот факт, что для всех $z = re^{i\theta}$ полином $r_l(z) = p_l(z) - a_k^q(z)e^{\mu_q z}$ из экспонент удовлетворяет оценке
$$\big|r_l(z)\big| \leqslant C_\varepsilon e^{(h_{T_1}(\theta)+\varepsilon)|z|}.$$
Для всех $z = re^{i\theta}$ в угле $\Gamma_\delta(s_\omega) = \big\{z = re^{i\theta} : |\omega - \theta| < \delta\big\}$ для $\{|z| > r\}$ получаем оценку
$$\big|p_l(z)\big| \geqslant \Big|a_k^q(z)e^{\mu_q z}\Big| - \big|r_l(z)\big| \geqslant$$
$$\geqslant e^{\mathrm{Re}(\mu_q e^{i\theta})|z|}\Big(1 - C_\varepsilon e^{(h_{T_1}(\theta)+\varepsilon)|z| - \mathrm{Re}(\mu_q e^{i\theta})|z|}\Big) > e^{\mathrm{Re}(\mu_q e^{i\theta})|z|}\Big(1 - C_\varepsilon e^{-\varepsilon|z|}\Big)$$
(в частности, в круге $\{|z| \leqslant r\}$ могут лежать возможные общие нули многочленов $a_k^l(z)$ из представления (10)).

Так как $\mathrm{Re}(s_\omega \mu_q) = h_T(\omega)$, можно так выбрать $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \delta$, что $\mathrm{Re}(\mu_q e^{i\theta}) = h_T(\theta)$ для всех $|\omega - \theta| < \delta_1$. Действительно, точка μ_q является концом двух примыкающих отрезков на границе T, и достаточно выбрать любое δ_1, которое меньше, чем величина угла между перпендикулярами к этим отрезкам. Получили, что для всех z в угле $\Gamma_{\delta_1}(s_\omega) \subset \Gamma_\delta(s_\omega)$ верна оценка
$$\mathrm{Re}(\mu_q e^{i\theta})|z| = H_T(\theta) > H_{T_1}(\theta) + 2\varepsilon|z|$$
и
$$\big|p_l(z)\big| > Ae^{H_{T_1}(z)+\varepsilon|z|}$$
для всех $z = re^{i\theta}$ в некотором множестве $\Gamma_{\delta_1,r_1}(s_\omega) = \Gamma_{\delta_1}(s_\omega) \cap \{|z| > r_1\}$, $r_1 \geqslant r$. Здесь A — постоянная из неравенств (8) и (11), которым удовлетворяет последовательность p_l.

Таким образом, получена оценка
$$\big|p_l(\lambda_n)\big| > Ae^{H_{T_1}(\lambda_n)+\varepsilon|\lambda_n|}, \quad \{\lambda_n\} \subset \Gamma_{\delta_1,r_1}(s_\omega), \quad n > n_0,$$
которая противоречит оценке (11), так как $H_K(z) \leqslant H_{T_1}(z)$ для всех z.

Доказано, что для каждого $l \in \mathbb{N}$ все показатели $\mu_k \in \mathrm{Fin}_{p_l}(\mathcal{M})$ из представления (10) принадлежат полуплоскости
$$\Pi(s_\omega,\ K) = \left\{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(s_\omega z) \leqslant \sup_{\xi \in K} \mathrm{Re}\,\xi \leqslant h_K(\omega)\right\}, \quad h_K(\omega) < d(s_\omega, \mathcal{M}).$$
Тогда из существования предела в частях 1 и 2 теоремы и условия (6) на рассматриваемые множества узлов отсюда следует, что множество $\bigcup\limits_{l \in \mathbb{N}} \mathrm{Fin}_{p_l}(\mathcal{M})$ конечно.

Получено, что в любой сходящейся в пространстве P_D последовательности вида $g_l = p_l + R_l$, $R_l \not\equiv 0$, $p_l \not\equiv 0$, последовательность $\{p_l\}$ принадлежит некоторому конечномерному подпространству $X \subset \mathrm{Ker}\,\widetilde{M}_\psi$.

Известно, что в любом топологическом векторном пространстве алгебраическая сумма конечномерного и замкнутого подпространств является замкнутым подпространством (см. [23, с. 41]). Получаем, что предельная функция g последовательности $g_l = p_l + R_l$ принадлежит $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi + (G)_{P_D}$. Доказательство утверждения утверждения (II*) закончено.

Из приведенного доказательства вытекает и утверждение (I*). Действительно, для доказательства (I*) нужно показать, что никакой полином p из экспонент, $p \in \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$, $p \not\equiv 0$, не может принадлежать $\big(G\big)_{P_D}$.

Предположим противное, пусть $p \in \big(G\big)_{P_D}$ и $p \not\equiv 0$. Тогда $p(\lambda_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Полином p из экспонент имеет представление (10). Рассмотрим стационарную последовательность, $p_l = p$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Выберем такой компакт $K_0 \subset D$, что K_0 не содержит ни одной точки $\mu_k \in \operatorname{Fin}_p(\mathcal{M})$. Справедлива очевидная оценка

$$0 = |p_l(\lambda_n)| < Ae^{H_{K_0}(\lambda_n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В доказательстве утверждения (II*) показано, что из этой оценки следует, что все $\mu_k \in \operatorname{Fin}_p(\mathcal{M})$ должны лежать в K_0, противоречие. Значит, $p \equiv 0$. Утверждение (I*) доказано.

Утверждение (I*) можно доказать независимо: для произвольного полинома из экспонент p, $p \not\equiv 0$, вида (11) обозначим через $T = T_p$ выпуклую оболочку множества $\operatorname{Fin}_p(\mathcal{M})$. Тогда T — выпуклый многоугольник. Пусть $\mu_q \in \operatorname{Fin}_p(\mathcal{M})$ имеет максимальную вещественную часть. Так же, как выше, получаем простую оценку

$$|p| > e^{\operatorname{Re}(\mu_q e^{i\theta})|z|}\Big(1 - C_\varepsilon e^{-\varepsilon|z|}\Big) > 0$$

для всех z, $|z| > r$, в некотором угле $\Gamma_\delta(\theta_0)$. Итак, у p нет нулей в некотором угле $\Gamma_\delta(s_\omega)$ и во внешности некоторого круга $\{z : |z| > r\}$. В таком множестве лежит бесконечно много точек из Λ в силу условия (1). Получили, что $p \notin \big(G\big)_{P_D}$. Значит, $p \equiv 0$, если $p \in \big(G\big)_{P_D}$.

Далее повторяем рассуждения, приведенные после теоремы 2: согласно теореме 2 утверждения (I*) и (II*) равносильны существованию представления (5) для $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$. С учетом результатов А. Ф. Леонтьева $\operatorname{Ker} M_G = \Sigma(D, \{\lambda_n\}) \subset \Sigma(D, \Lambda)$. Из этого следует, что имеет место представление (4) для исходного множества Λ, которое равносильно разрешимости проблемы интерполяции. Достаточность условий доказана.

4. Критерий интерполяции для общих множеств узлов и интегралы Радона от экспоненты. Пусть неограниченное множество Λ удовлетворяет условию (1),

$$\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty,\\ \lambda\in\Lambda}} \frac{\lambda}{|\lambda|} = \exp(i\omega) = s_\omega,$$

и пусть D — это полуплоскость

$$\Pi(s_\omega, \mathcal{M}) = \left\{\operatorname{Re}(s_\omega z) < \sup_{\mu_k\in\mathcal{M}} \operatorname{Re}(s_\omega \mu_k) = d(s_\omega, \mathcal{M}) < +\infty\right\}$$

или плоскость $\mathbb{C}$ (т.е. $d(s_\omega, \mathcal{M}) = +\infty$). В этом разделе $\mathcal{M}$ — произвольное множество, дискретное в D.

Теорема 4. *Пусть неограниченное множество Λ удовлетворяет условию (1), а $\mathcal{M}$ — произвольное дискретное в D множество узлов. Предположим, что выполнено хотя бы одно из двух следующих условий*:

(a) *существует такая точка $z_0 \in D$, что полуплоскость $\big\{\operatorname{Re}(s_\omega\mu_k) \leqslant \operatorname{Re}(s_\omega z_0)\big\}$ содержит бесконечное число точек из $\mathcal{M}$,*

(b) *$d(s_\omega, \mathcal{M}) < +\infty$ и граница полуплоскости содержит некоторую точку из $\mathcal{M}$.*

Тогда проблема простой интерполяции $u(\mu_k) = b_k$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, суммами рядов экспонент с показателями из Λ не разрешима в $H(D)$.

Доказательство по существу проведено в первом разделе: в предложении 1 рассмотрен случай конечных предельных точек, это следствие необходимых условий (1) и (3); аналогично, случай бесконечных точек содержится в (2) и (4), с учетом общего обсуждения перед предложением 1, дает полное доказательство. Следует только отметить, что условие (a) в теореме 4 равносильно тому, что существует конечная предельная точка множества $\mathrm{Re}(s_\omega \mu_k)$, т.е. не существует $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{Re}(s_\omega \mu_k) = d(s_\omega, \mathcal{M}) \leqslant +\infty$; аналогично, условия (a) и (b) в совокупности — это отрицание условий в частях 1 и 2 в теореме 3.

Следствие 1. *Проблема интерполяции суммами рядов экспонент с показателями из Λ, удовлетворяющих условию* (1), *для всех множеств узлов $\mathcal{M}$, удовлетворяющих условию* (6) *и дискретных в D, разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия теоремы* 3.

Это утверждение вытекает из теорем 3 и 4.

Следствие 2. *Проблема кратной интерполяции суммами рядов экспонент с показателями из Λ, для всех множеств узлов $\mathcal{M}$, удовлетворяющих условию* (6) *и дискретных в D, эквивалентна аналогичной проблеме простой интерполяции.*

Это утверждение вытекает из теорем 3 и 4. Так, показано, что условия теоремы 3 являются необходимыми для разрешимости проблемы простой интерполяции рядами экспонент; значит, из разрешимости простой интерполяции следует разрешимость кратной интерполяции. Обратное очевидно.

Более того, в указанных нами условиях, отметим также, что из теоремы 3 и теоремы 4 следует, что в рассмотренных нами условиях проблема кратной интерполяции эквивалентна проблеме поточечной аппроксимации функций, как целых, так и аналитических в полуплоскости, суммами рядов экспонент. Более подробное обсуждение этих вопросов можно посмотреть в последнем разделе [15].

В заключение рассмотрим еще одну общую проблему интерполяции. Будем полагать, что Λ — замкнутое множество в пространстве $\mathbb{C}$. Для комплексных мер Радона ν в пространстве $\mathbb{C}$ рассмотрим интегралы

$$u(z) = \int\limits_{\Lambda} e^{\lambda z}\, d\nu(\lambda). \tag{12}$$

Будем называть их интегралами Радона от экспоненциальной функции (в комплексном анализе ее принято называть просто экспонентой). Как известно, интеграл $\int_\Lambda f(\lambda)\, d\nu(\lambda)$ от непрерывной функции f определен тогда и только тогда, когда определен интеграл $\int_\Lambda |f(\lambda)|\, d|\nu|(\lambda)$.

Пусть $\{\lambda_n\}$ — произвольное счетное множество точек в $\mathbb{C}$, а K — произвольный компакт в $\mathbb{C}$. Обозначим через $C_K(\mathbb{C})$ линейное пространство всех функций, непрерывных в $\mathbb{C}$ и имеющих компактный носитель, содержащийся в K. По определению, δ-функция $\delta_{(\lambda)}$ с носителем в точке $\lambda \in \mathbb{C}$ с массой 1 — это линейный функционал, определенный на любом из пространств $C_K(\mathbb{C})$, где K — произвольный компакт в $\mathbb{C}$, который непрерывен относительно каждой из норм $\|\varphi\| = \sup\limits_{z\in K} |\varphi(z)|$, $\varphi \in C_K(\mathbb{C})$, причем $\langle \delta_{(\lambda_n)}, \varphi \rangle = \varphi(\lambda_n)$.

Пусть $\{\lambda_n\}$ — некоторое счетное множество точек $\mathbb{C}$. Одним из примеров меры Радона является ряд из δ-функций с массами $c_n \in \mathbb{C}$ с носителями в λ_n (см. [26, с. 448]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{(\lambda_n)}, \quad c_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

для которого выполнено условие локальной сходимости

$$\forall R \in \mathbb{R} \quad \sum_{|\lambda_n| \leqslant R} |c_n| < +\infty.$$

Пусть ряд экспонент $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \exp(\lambda_n z)$ с показателями $\lambda_n \in \Lambda$ абсолютно сходится в точке $z = z_0$. Для любого $R \in \mathbb{R}$ введем обозначение

$$C(R) = \inf_{|\lambda_n| \leqslant R} |\exp(\lambda_n z_0)| > 0.$$

Справедлива оценка

$$\sum_{|\lambda_n|\leqslant R}|c_n|\leqslant\frac{1}{C(R)}\sum_{|\lambda_n|\leqslant R}|c_n|\big|\exp(\lambda_n z_0)\big|\leqslant\frac{1}{C(R)}\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\big|\exp(\lambda_n z_0)\big|<+\infty.$$

Если множество интегрирования Λ ограничено, любой интеграл Радона от экспоненты имеет экспоненциальный рост. Действительно, если $|\lambda|\leqslant C$, $\lambda\in\Lambda$, и интеграл $u(z)=\int_\Lambda e^{\lambda z}\,d\nu$ определен в точке $z_0\in\mathbb{C}$, из простой оценки

$$|e^{\lambda z}|\leqslant e^{C|z-z_0|}|e^{\lambda_n z_0}|,\quad z\in\mathbb{C},$$

вытекает, что интеграл определен в произвольной точке $z\in\mathbb{C}$ и

$$|u(z)|\leqslant e^{C|z-z_0|}\int\limits_\Lambda\big|e^{\lambda z_0}\big|\,d|\nu|.$$

Если Λ неограничено, но удовлетворяет условию (1), можно получить оценку роста интеграла.

Теорема 5. *Пусть интеграл* (12) *сходится в точке* $z_0\in\mathbb{C}$. *Тогда для всех* z *в полуплоскости* $\big\{\operatorname{Re}(s_\omega z)<\operatorname{Re}(s_\omega z_0)\big\}$ *функция* $H_\Lambda(z)=\sup\limits_{\xi\in\Lambda}\operatorname{Re}(\xi(z-z_0))$ *принимает конечные значения, и справедлива оценка интеграла*

$$\big|u(z)\big|\leqslant C\exp\big(H_\Lambda(z)\big),\quad C=\int\limits_\Lambda\big|e^{\lambda z_0}\big|\,d|\nu(\lambda)|. \tag{13}$$

Доказательство сводится к известной оценке интеграла; нужно только показать, что функция H_Λ принимает конечные значения в полуплоскости $\big\{\operatorname{Re}(s_\omega z)<\operatorname{Re}(s_\omega z_0)\big\}$. Действительно, по условию

$$\frac{\lambda}{|\lambda|}\to\exp(i\omega)=s_\omega,\quad |\lambda|\to\infty,\quad \lambda\in\Lambda,$$

поэтому для $z\in\{\operatorname{Re}(s_\omega z)<0\}$ имеем

$$\frac{\operatorname{Re}\big(\lambda(z-z_0)\big)}{|\lambda|}=\operatorname{Re}\left(\frac{\lambda s_{-\omega}}{|\lambda|}s_\omega(z-z_0)\right)\to\operatorname{Re}\big((z-z_0)s_\omega\big)<0,\quad \lambda\in\Lambda,\quad |\lambda|\to\infty,$$

откуда получаем, что

$$\operatorname{Re}\big(\lambda(z-z_0)\big)=\frac{\operatorname{Re}\big(\lambda(z-z_0)\big)}{|\lambda|}|\lambda|\to-\infty,$$

если $\lambda\in\Lambda$, $|\lambda|\to\infty$. Доказано, что $H_\Lambda(z)<+\infty$, если $\operatorname{Re}(s_\omega z)<\operatorname{Re}(s_\omega z_0)$.

Данная оценка слабее, чем оценка (3), полученная в теореме 1, так как в этой теореме предположения существенно слабее. Действительно, в теореме 1 предполагается, что ряд абсолютно сходится в некоторой окрестности z_0, и оценка суммы получена в полуплоскости, отделенной от границы полуплоскости абсолютной сходимости. В теореме 13 точка может лежать на границе полуплоскости абсолютной сходимости, и оценка справедлива для всех z в этой полуплоскости.

Однако и ее достаточно для получения необходимых условий разрешимости проблемы интерполяции суммами рядов экспонент, а также, что важно, новой проблемы интерполяции интегралами Радона по множеству Λ от экспоненты.

Для произвольных дискретных множеств узлов $\mathcal{M}$, в области

$$D=\left\{\operatorname{Re}(s_\omega z)<\sup_{\mu_k\in\mathcal{M}}\operatorname{Re}(s_\omega\mu_k)\right\},$$

можно рассматривать проблему интерполяции в $H(D)$ интегралами Радона от экспоненты, абсолютно сходящимися в окрестностях $z=\mu_k$, $\mu_k\in\mathcal{M}$: для произвольного $\mathcal{M}$ и для произвольных данных интерполяции b_k, $k\in\mathbb{N}$, существует такой интеграл Радона u от экспоненты, что $u(\mu_k)=b_k$.

Теорема 6. *Пусть неограниченное замкнутое множество Λ удовлетворяет условию (1), а $\mathcal{M}$ — произвольное дискретное в D множество узлов. Если существует такая точка $z_0 \in D$, что полуплоскость $\{\operatorname{Re}(s_\omega \mu_k) \leqslant \operatorname{Re}(s_\omega z_0)\}$ содержит бесконечное число точек из $\mathcal{M}$, то проблема простой интерполяции $u(\mu_k) = b_k$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, интегралами Радона по множеству Λ от экспоненциальной функции не разрешима в $H(D)$.*

Действительно, из теоремы 13 следует, что равенства $u(\mu_k) = b_k$ невозможны для $|b_k| \geqslant k \exp H_\Lambda(\mu_k)$.

Конечно, в частном случае мер, имеющих вид рядов из δ-функций с массами c_n, получаем проблему простой интерполяции суммами рядов экспонент, рассматриваемую в данной статье. Простая интерполяция, как показано выше, равносильна кратной.

5. Примеры применения результатов.

1. Пусть $\mathcal{M}$ лежит на некотором луче $r(a, s_\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : z = a + ts_\alpha,\ t > 0\}$, а множество Λ таково, что существует такая подпоследовательность $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$, $|\lambda_n| \to +\infty$, что

$$\lim_{|\lambda_n| \to +\infty} \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} = s_\omega,$$

причем $\operatorname{Re}(s_\alpha s_\omega) > 0$. Тогда легко проверить, что выполнены условия теоремы 3, и проблема интерполяции элементами из $\Sigma(\mathbb{C}, \Lambda)$ разрешима, так как $\Sigma(\mathbb{C}, \{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию (1), $\mathcal{M}$ — условию (6) и $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$. Применяя преобразования поворота и параллельного переноса комплексной плоскости, можно считать, что $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^+$, и получаем результат из нашей работы [13]. Тогда, как описано во втором разделе, отсюда вытекает результат В. В. Напалкова и А. Н. Нуятова (см. [20]) о проблеме Валле-Пуссена для оператора свертки с вещественными узлами, причем наше решение этой проблемы дается в виде сумм рядов экспонент.

2. Из теоремы 3 следует и результат по той же тематике из [21], в котором рассматриваются операторы свертки в пространстве целых функций, у которых характеристические функции имеют бесконечно много нулей в первом угле, и предполагается, что узлы интерполяции лежат во втором угле. Решается глобальная голоморфная проблема Коши для этого класса операторов свертки с данными, задаваемыми на множествах узлов из этого класса. Дополнительно предполагается, что растворы углов удовлетворяют некоторому условию, а узлы — некоторому условию разделенности, которое учитывает растворы этих двух углов.

В наших терминах это означает, что решается проблема интерполяции элементами ядер операторов свертки (или проблема Коши для оператора свертки с данными на бесконечном дискретном множестве точек) из некоторого класса для специального класса множеств узлов. Из результатов [21] легко вытекает, что каковы бы ни были предельные направления в бесконечности нулевых множеств, лежащих во втором угле, характеристических функций в рассматриваемом классе операторов свертки, для каждого множества узлов во втором угле выполнены условия теоремы 3. Таким образом, получаем решение проблемы Коши в виде сумм рядов рядов экспонент.

В рассматриваемых классах операторов свертки и множеств узлов условия точны, однако для индивидуального оператора свертки теорема 3 показывает, что можно рассматривать узлы во втором угле без условия разделенности, лишь бы для некоторого одного оператора свертки выполнялось условие (6) и условия теоремы 3.

Если же исходить из множества узлов в некотором угле, теорема 3 позволяет дать описание множеств узлов, для которых проблема интерполяции из [21] разрешима. Проблема интерполяция разрешима с помощью элементов любого оператора свертки со следующим свойством: для некоторого предельного направления сгущения нулей его характеристической функции выполняются условия (6) и условия теоремы 3.

3. Несложно также получить, что из условий задачи, рассмотренной в [14, 18], вытекают все условия теоремы 3.

4. В [16, 19] изучается случай, когда $\Lambda = \overline{\mathcal{M}}$, причем $\Lambda = \Lambda_G$ — это нулевое множество функции G экспоненциального типа. Утверждается, что существует представление (5) следующего вида:

$$H(D) = \operatorname{Ker} M_G + (G^*), \quad G^*(z) = \overline{G}(\overline{z}).$$

Покажем, что доказательство в этих двух работах некорректно.

Основным моментом в доказательстве достаточности условий в теореме 3 является доказательство конечномерности подпространства, в котором лежит последовательность квазиполиномов, сходящаяся в P_D, а значит, удовлетворяющая равномерной весовой оценке (8) для всех $z \in \mathbb{C}$. Мы обратили внимание на то, что в [16, 19] равномерная весовая оценка не используется (см. в этих работах определение понятия достаточного множества в $\operatorname{Ker} \widetilde{M_G}$).

Рассмотрим функцию G минимального типа с простыми положительными нулями $\Lambda = \Lambda_G = \{\lambda_n\}$; тогда $G = G^*$. Выберем при этом функцию, для которой $\operatorname{Ker} M_G = \Sigma(\mathbb{C}, \Lambda_G)$. Тогда, в силу теоремы 3, имеет место представление (4)

$$H(D) = \Sigma(\mathbb{C}, \Lambda_G) + (G).$$

Как было отмечено ранее, применяя метод из [13] для доказательства утверждения о неединственности таких представлений, можно доказать, что $H(D) = \Sigma(\mathbb{C}, \Lambda_G) \cap \big(G\big)$ — бесконечномерное подпространство $H(\mathbb{C})$.

Возьмем произвольную функцию $f \not\equiv 0$ из $\Sigma(\mathbb{C}, \Lambda_G) \cap (G)$. Она представляется в виде предела, равномерного на компактах, квазиполиномов $p_l \in \operatorname{Ker} \widetilde{M_G}$; это частичные суммы ряда экспонент с показателями из Λ_G.

Функция $f \not\equiv 0$ равна нулю на Λ_G. В частности, отсюда следует, что значения квазиполиномов $p_l(\lambda_n)$, $\lambda_n \in \Lambda_G$, стремятся к $f(\lambda_n) = 0$. В доказательстве из работ [16, 19] утверждается, что Λ_G — достаточное множество в $\operatorname{Ker} \widetilde{M_G}$, а это означает, в силу определения из этих работ, что такая последовательность сходится к 0; противоречие.

5. В заключение отметим, что теорема 3 позволяет строить примеры рядов экспонент, сходящиеся в полуплоскости, которые на на границе обладают довольно экзотическим поведением.

Например, на всюду плотном подмножестве Y некоторого замкнутого множества X на границе сумма ряда может иметь различные предельные значения по последовательностям узлов из внутренности полуплоскости, которые сходятся ко всем точкам из Y. Эти предельные значения могут заполнять любые заранее предписанные замкнутые множества значений, включающие в себя и бесконечность. Одновременно с этим также можно предписывать и предельные множества значений для всех производных суммы ряда экспонент.

Для построения таких примеров можно применить теорему 3: для этого нужно лишь построить счетное число таких последовательностей узлов из внутренности полуплоскости, объединение которых удовлетворяет условию (1), и на каждой последовательности узлов надлежащим образом задать данные интерполяции из предписанных множеств предельных значений суммы ряда и его производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства голоморфных функций. Аналитическое продолжение// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1973. — *37*, № 4. — С. 931–945.
2. *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях// Изв. РАН. Сер. мат. — 2004. — *68*, № 2. — С. 71–136.
3. *Кривошеев А. С.* Критерий аналитического продолжения функций из главных инвариантных подпространств в выпуклых областях из $\mathbb{C}^n$// Алгебра и анализ. — 2010. — *22*, № 4. — С. 137–197.
4. *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Замкнутость множества сумм рядов Дирихле// Уфим. мат. ж. — 2013. — *5*, № 3. — С. 96–120.
5. *Кривошеева О. А.* Область сходимости рядов экспоненциальных мономов// Уфим. мат. ж. — 2011. — *3*, № 2. — С. 43–56.
6. *Кривошеева О. А.* Область сходимости рядов экспоненциальных многочленов// Уфим. мат. ж. — 2013. — *5*, № 4. — С. 84–90.

7. *Кривошеева О. А., Кривошеев А. С.* Критерий выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости// Функц. анал. прилож. — 2012. — *46*, № 4. — С. 14–30.
8. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
9. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. — М.: Наука, 1980.
10. *Мерзляков С. Г.* Инвариантные подпространства оператора кратного дифференцирования// Мат. заметки. — 1983. — *33*, № 5. — С. 701–713.
11. *Мерзляков С. Г.* Интегралы от экспоненты по мере Радона// Уфим. мат. ж. — 2011. — *3*, № 2. — С. 57–80.
12. *Мерзляков С. Г.* Теорема Коши—Адамара для рядов экспонент// Уфим. мат. ж. — 2014. — *6*, № 1. — С. 75–83.
13. *Мерзляков С. Г., Попенов С. В.* Кратная интерполяция рядами экспонент в $H(C)$ с узлами на вещественной оси// Уфим. мат. ж. — 2013. — *5*, № 3. — С. 130–143.
14. *Мерзляков С. Г., Попенов С. В.* Интерполяция рядами экспонент в $H(D)$ с вещественными узлами// Уфим. мат. ж. — 2015. — *7*, № 1. — С. 46–58.
15. *Мерзляков С. Г., Попенов С. В.* Множество показателей для интерполяции суммами рядов экспонент во всех выпуклых областях// в кн.: Дифференциальные уравнения. Математический анализ/ Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и ее прилож. Темат. обзоры. — М.: ВИНИТИ РАН, 2017. — *143*. — С. 48–62.
16. *Муллабаева А. У., Напалков В. В. (мл.).* Решение задачи Шапиро для оператора свертки// Изв. Уфим. науч. центра РАН. — 2017. — *4*. — С. 5–11.
17. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. — М.: Наука, 1982.
18. *Напалков В. В., Зименс К. Р.* Кратная задача Валле-Пуссена на выпуклых областях в ядре оператора свёртки// Докл. РАН. — 2014. — *458*, № 4. — С. 387–389.
19. *Напалков В. В., Муллабаева А. У.* Разложение Фишера пространства целых функций для оператора свертки// Докл. РАН. — 2017. — *476*, № 3. — С. 465–467.
20. *Напалков В. В., Нуятов А. А.* Многоточечная задача Валле-Пуссена для операторов свертки// Мат. сб. — 2012. — *203*, № 2. — С. 77–86.
21. *Напалков В. В., Нуятов А. А.* Многоточечная задача Валле-Пуссена для операторов свертки с узлами, заданными в угле// Теор. мат. физ. — 2014. — *180*, № 2. — С. 264–271.
22. *Напалков В. В., Попенов С. В.* Голоморфная задача Коши для оператора свертки в аналитически равномерных пространствах и разложения Фишера// Докл. РАН. — 2001. — *381*, № 2. — С. 164–166.
23. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
24. *Себаштьян-и-Сильва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях// Математика. — 1957. — *1*, № 1. — С. 60–77.
25. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. — М.: Мир, 1968.
26. *Шварц Л.* Анализ. — М., 1972.
27. *Meril A., Yger A.* Problèmes de Cauchy globaux// Bull. Soc. Math. France. V. — 1992. — *120*. — P. 87–111.

Мерзляков Сергей Георгиевич
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия;
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: `msg2000@mail.ru`

Попенов Сергей Викторович
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия;
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: `spopenov@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 162 (2019). С. 80–84

УДК 517.9

СИММЕТРИИ ОДНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЦЕПОЧКИ

© 2019 г. М. Н. ПОПЦОВА

Аннотация. Рассматривается периодическое замыкание нелинейной интегрируемой двумеризованной трехточечной цепочки. Интегрируемость понимается в том смысле, что цепочка допускает широкий класс редукций, представляющих собой нелинейные гиперболические системы уравнений с двумя независимыми переменными, интегрируемые по Дарбу. В данной работе рассматривается система, полученная, как периодическое замыкание периода 2 одной из двумеризованных трехточечных цепочек, найденных в рамках такого подхода. Для этой системы уравнений построена высшая симметрия второго порядка, зависящая от двух произвольных функций.

Ключевые слова: двумеризованная интегрируемая цепочка, периодическая цепочка, симметрия, система, интегрируемая по Дарбу, характеристическое кольцо Ли.

SYMMETRIES OF A CERTAIN PERIODIC CHAIN

© 2019 M. N. POPTSOVA

Abstract. We consider a periodic closure of a nonlinear integrable two-dimensional three-point chain. Integrability is understood in the sense that the chain admits a wide class of reductions, which are nonlinear hyperbolic Darboux integrable systems with two independent variables. We consider a system obtained as a period-2 periodic closure of one of two-dimensional three-point chains found within this framework. For this system, a second-order higher symmetry depending on two arbitrary functions is constructed.

Keywords and phrases: two-dimensional integrable chain, periodic chain, symmetry, Darboux integrable system, characteristic Lie ring.

AMS Subject Classification: 35L51, 39A14

1. Введение. Настоящая работа является частью цикла работ, направленных на разработку алгоритма классификации интегрируемых многомерных уравнений при помощи характеристических колец Ли (см. [4,6]). В качестве определения интегрируемости понимается наличие у уравнения бесконечного класса редукций в виде интегрируемых по Дарбу систем уравнений в частных производных гиперболического типа с меньшим числом независимых переменных. В данной работе рассматривается конкретная цепочка, полученная в [5] в результате классификации при помощи указанного метода. Построена высшая симметрия второго порядка для периодического замыкания периода 2 этой цепочки.

Перейдем к конкретным классам объектов и точным определениям. Рассмотрим нелинейную цепочку

$$u_{n,xy} = f\big(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}\big). \tag{1}$$

Здесь искомая функция $u = u_n(x, y)$ зависит от вещественных x, y и целого n. Зададим некоторые граничные условия в двух целочисленных точках

$$u_{N_1} = \varphi_1\big(x, y, u_{N_1+1}, \dots\big), \tag{2}$$

$$u_{n,xy} = f\big(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}\big), \quad N_1 < n < N_2, \tag{3}$$

$$u_{N_2} = \varphi_2\big(x, y, u_{N_2-1}, \dots\big). \tag{4}$$

Определение 1. Цепочку (1) назовем *интегрируемой*, если существуют такие функции φ_1 и φ_2, что для любого выбора пары целых чисел N_1, N_2, где $N_1 < N_2 - 1$, система гиперболического типа (2)–(4) является интегрируемой по Дарбу.

Для поиска систем вида (2)–(4), интегрируемых по Дарбу, эффективно работает метод, основанный на понятии характеристического кольца Ли (см. [2]).

В [5] была проведена классификация интегрируемых в смысле определения 1 квазилинейных цепочек следующего вида:

$$u_{n,xy} = \alpha u_{n,x} u_{n,y} + \beta u_{n,x} + \gamma u_{n,y} + \delta \tag{5}$$

при некотором дополнительном предположении о структуре соответствующего характеристического кольца Ли. Предполагалось, что функции

$$\alpha = \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}), \quad \beta = \beta(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}), \quad \gamma = \gamma(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}), \quad \delta = \delta(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$$

являются аналитическими в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^3$ и производные

$$\frac{\partial \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})}{\partial u_{n+1}}, \quad \frac{\partial \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})}{\partial u_{n-1}}$$

не являются тождественно нулевыми. Согласно определению 1, если цепочка (5) интегрируема, то существуют условия обрыва, заданные в целых точках $n = N_1$, $n = N_2$ ($N_1 < N_2 - 1$), которые сводят цепочку (5) к конечной системе гиперболических уравнений

$$\begin{aligned} &u_{N_1} = \varphi_1, \\ &u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y} + \beta_n u_{n,x} + \gamma_n u_{n,y} + \delta_n, \quad N_1 < n < N_2, \\ &u_{N_2} = \varphi_2, \end{aligned}$$

интегрируемой по Дарбу.

В результате классификации с точностью до точечных преобразований в указанной работе были найдены следующие цепочки, интегрируемые в смысле определения 1:

$$\text{(i)} \quad u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y}, \tag{6}$$

$$\text{(ii)} \quad u_{n,xy} = \alpha_n (u_{n,x} u_{n,y} - u_n(u_{n,x} + u_{n,y}) + u_n^2) - u_n + u_{n,x} + u_{n,y}, \tag{7}$$

$$\text{iii)} \quad u_{n,xy} = \alpha_n (u_{n,x} u_{n,y} - s_n(u_{n,x} + u_{n,y}) + s_n^2) + s_n'(u_{n,x} + u_{n,y} - s_n),$$

где

$$s_n = u_n^2 + C, \quad s_n' = 2u_n, \quad \alpha_n = \frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n+1} - u_n},$$

C — произвольная постоянная. Цепочка (6) является известной цепочкой Ферапонтова—Шабата—Ямилова (см. [3,8]). Остановимся в данной работе на цепочке (7).

2. Построение симметрии. Рассматривается цепочка

$$u_{n,xy} = \alpha_n \Big(u_{n,x} u_{n,y} - u_n \big(u_{n,x} + u_{n,y} \big) + u_n^2 \Big) - u_n + u_{n,x} + u_{n,y}. \tag{8}$$

Зададим периодические условия обрыва

$$u_{n+2} = u_n, \quad u_{n+1} = u_{n-1}.$$

Для удобства и компактности записи сразу введем обозначение $u_{n+2} = u_n = u$, $u_{n+1} = u_{n-1} = v$. Тогда цепочка (8) сведется к нелинейной гиперболической системе уравнений

$$u_{xy} = f_1 = \frac{2}{u - v} \big(u_x u_y - u(u_x + u_y) + u^2 \big) - u + u_x + u_y, \tag{9}$$

$$v_{xy} = f_2 = \frac{2}{v - u} \big(v_x v_y - v(v_x + v_y) + v^2 \big) - v + v_x + v_y. \tag{10}$$

Одним из признаков интегрируемости нелинейного гиперболического уравнения является наличие высших симметрий. Понятие симметрии является фундаментальным в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Основы метода исследования и классификации уравнений в частных производных, использующего понятие высшей симметрии подробно изложены в [1, 7].

Будем искать симметрию второго порядка для системы (9), (10) следующего вида:

$$u_t = g_1\big(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}\big), \tag{11}$$

$$v_t = g_2\big(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}\big). \tag{12}$$

Здесь u_t обозначает производную функции u по переменной t. Условие совместности систем уравнений (9)–(10) и (11)–(12) имеет вид

$$(u_{xy})_t = (u_t)_{xy}, \quad (v_{xy})_t = (v_t)_{xy}.$$

Записывая последние равенства в терминах правых частей уравнений (9), (10), (11), (12), получаем, что искомые функции g_1, g_2 должны удовлетворять уравнениям

$$D_x D_y(g_1) = D_t(f_1), \quad D_x D_y(g_2) = D_t(f_2). \tag{13}$$

Здесь D_x, D_y — операторы полного дифференцирования в силу уравнений системы (9), (10) по переменным x и y соответственно, D_t — оператор полного дифференцирования в силу уравнений системы (11), (12) по переменной t. Последнее означает, что при дифференцировании производные u_t, v_t мы заменяем соответственно на правые части g_1, g_2 уравнений (11), (12), а смешанные производные u_{xy}, v_{xy} заменяем соответственно на правые части f_1, f_2 уравнений (9), (10).

Предполагается, что переменные

$$u,\ v,\ u_x,\ v_x,\ u_y,\ v_y,\ u_t,\ v_t,\ u_{xx},\ v_{xx},\ u_{yy},\ v_{yy},\ \ldots \tag{14}$$

являются независимыми. Поэтому равенства (13) должны выполняться тождественно для всех значений независимых переменных (14).

В нашем случае уравнения (13) являются довольно громоздкими, поэтому их явный вид здесь не приводится. Кроме этого, сузим множество поиска до симметрий вида

$$u_t = g_1\big(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}\big) = a_1\big(u, v, u_x, v_x\big)u_{xx} + a_2\big(u, v, u_x, v_x\big)v_{xx} + F_1\big(u, v, u_x, v_x\big), \tag{15}$$

$$v_t = g_2\big(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}\big) = b_1\big(u, v, u_x, v_x\big)u_{xx} + b_2\big(u, v, u_x, v_x\big)v_{xx} + F_2\big(u, v, u_x, v_x\big). \tag{16}$$

Подставим (15), (16) и правые части f_1, f_2 уравнений (9), (10) в (13). Получим два переопределенных уравнения, которым должны удовлетворять искомые функции $a_i = a_i\big(u, v, u_x, v_x\big)$, $b_i = b_i\big(u, v, u_x, v_x\big)$, $F_i = F_i\big(u, v, u_x, v_x\big)$, $i = 1, 2$. Запишем их в общем виде:

$$\varphi_1\Big(a_1, a_2, b_1, b_2, F_1, F_2, u, v, u_y, v_y, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}, u_{xxx}, v_{xxx}\Big) = 0, \tag{17}$$

$$\varphi_2\Big(a_1, a_2, b_1, b_2, F_1, F_2, u, v, u_y, v_y, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}, u_{xxx}, v_{xxx}\Big) = 0. \tag{18}$$

Дифференцируя уравнение (17) по старшей переменной u_{xxx}, получим

$$\Big(a_{1,u}(v-u) + a_{1,u_x}\big(u - 2u_x + v\big)\Big)u_y + \Big(a_{1,v}(v-u) - a_{1,v_x}\big(u - 2v_x + v\big)\Big)v_y - \\ - (u+v)\Big(a_{1,u_x}(u-u_x) - a_{1,v_x}(v-v_x)\Big) = 0.$$

Нетрудно видеть, что в силу независимости переменных u_y, v_y последнее уравнение сводится к системе трех уравнений:

$$\begin{aligned} &a_{1,u}(v-u) + a_{1,u_x}(u - 2u_x + v) = 0,\\ &a_{1,v}(v-u) - a_{1,v_x}(u - 2v_x + v) = 0,\\ &a_{1,u_x}(u-u_x) - a_{1,v_x}(v-v_x) = 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$a_1(u,v,u_x,v_x) = \frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2} F\left(\frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2}\right),$$

где F — произвольная функция.

Дифференцируя уравнение (17) по старшей переменной v_{xxx}, получим

$$\Big(a_{2,u}(v-u) + a_{2,u_x}(u-2u_x+v) + 2a_2\Big)u_y + \Big(a_{2,v}(v-u) - a_{2,v_x}(u-2v_x+v) + 2a_2\Big)v_y - \\ -(u+v)\Big(a_{2,u_x}(u-u_x) - a_{2,v_x}(v-v_x) + 2a_2\Big) = 0.$$

Нетрудно видеть, что в силу независимости переменных u_y, v_y последнее уравнение сводится к системе трех уравнений:

$$\begin{aligned} &a_{2,u}(v-u) + a_{2,u_x}(u-2u_x+v) + 2a_2 = 0,\\ &a_{2,v}(v-u) - a_{2,v_x}(u-2v_x+v) + 2a_2 = 0,\\ &a_{2,u_x}(u-u_x) - a_{2,v_x}(v-v_x) + 2a_2 = 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$a_2(u,v,u_x,v_x) = \frac{(u_x-u)^2}{(u-v)^2} H\left(\frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2}\right),$$

где H — произвольная функция.

Аналогично определяются функции b_1, b_2. Подставляя найденные функции в (17), (18) и пользуясь независимостью переменных (14), уточняем функции (15), (16). В результате находим следующую симметрию системы уравнений (9), (10):

$$u_t = \frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2} F\left(\frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2}\right) u_{xx} + \frac{(u_x-u)^2}{(u-v)^2} F\left(\frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2}\right) v_{xx} + \\ + \frac{(u_x-u)\Big(3\big(u_x v^2 - v_x u^2\big) - 5uv(u_x-v_x) + 2\big(u_x v_x^2 - 2v_x u_x^2 + 2v u_x^2 - 2u v_x^2\big)\Big)}{(u-v)^3} F\left(\frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2}\right) + \\ + \frac{4(u_x-u)(uv+u_x v_x)}{(u-v)^2} F\left(\frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2}\right) + (u_x-u) G\left(\frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2}\right),$$

$$v_t = \frac{(v_x-v)^2}{(u-v)^2} F\left(\frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2}\right) u_{xx} + \frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2} F\left(\frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2}\right) v_{xx} + \\ + \frac{(v_x-v)\Big(3\big(u_x v^2 - v_x u^2\big) - 5uv(u_x-v_x) + 2\big(u_x v_x^2 - 2v_x u_x^2 + 2v u_x^2 - 2u v_x^2\big)\Big)}{(u-v)^3} F\left(\frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2}\right) \\ + \frac{4(v_x-v)(uv+u_x v_x)}{(u-v)^2} F\left(\frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2}\right) + (v_x-v) G\left(\frac{(u_x-u)(v_x-v)}{(u-v)^2}\right).$$

Отметим, что построенная симметрия зависит от произвольных функций F, G; это указывает на то, что система (9), (10) является интегрируемой по Дарбу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адлер В. Э., Шабат А. Б., Ямилов Р. И.* Симметрийный подход к проблеме интегрируемости// Теор. мат. физ. — 2000. — *125*, № 3. — С. 355–424.
2. *Жибер А. В., Муртазина Р. Д., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б.* Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. — М.–Ижевск: Ин-т комп. технологий, 2012.
3. *Ферапонтов Е. В.* Преобразования Лапласа систем гидродинамического типа в инвариантах Римана// Теор. мат. физ. — 1997. — *110*, № 1. — С. 86–97.

4. *Хабибуллин И. Т., Попцова М. Н.* Интегрируемые двумерные решетки. Характеристические кольца Ли и их классификация// в кн.: Дифференциальные уравнения. Математическая физика/ Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — М.: ВИНИТИ РАН, 2017. — *140*. — С. 18–29.
5. *Хабибуллин И. Т., Попцова М. Н.* Алгебраические свойства квазилинейных двумеризованных цепочек, связанные с интегрируемостью// Уфим. мат. ж. — 2018. — *10*, № 3. — С. 89–109.
6. *Habibullin I. T., Poptsova M.N.* Classification of a subclass of two-dimensional lattices via characteristic Lie rings// SIGMA. — 2017. — *13*. — 073.
7. *Mikhailov A. V., Shabat A. B., Sokolov V. V.* The symmetry approach to classification of integrable equations// in: What Is Integrability? (*Zakharov V. E.*, ed.)/ Springer Ser. Nonlin. Dynamics. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. — P. 115–184.
8. *Shabat A. B., Yamilov R. I.* To a transformation theory of two-dimensional integrable systems// Phys. Lett. A. — 1997. — *227*, № 1–2. — P. 15–23.

Попцова Мария Николаевна
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия
E-mail: mnpoptsova@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 162 (2019). С. 85–92

УДК 517.957, 517.956.3, 514.763.8

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: ЛОКАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА ПРООБРАЗА ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2019 г. **С. Я. СТАРЦЕВ**

Аннотация. Предложен алгоритм, с помощью которого можно исключить потоки из законов сохранения для гиперболических уравнений, выразив частные производные этих потоков в терминах соответствующих плотностей. В частности, применение этого алгоритма позволяет доказать, что падение порядка хотя бы у одного из y-инвариантов Лапласа уравнения $u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$ является необходимым условием для того, чтобы функция F_{u_y} принадлежала образу полной производной D_x в силу этого уравнения. Тем самым получены конструктивные необходимые условия существования дифференциальных подстановок, переводящих гиперболическое уравнение в линейное уравнение, либо в уравнение Клейна—Гордона.

Ключевые слова: нелинейное гиперболическое уравнение, интегрируемость, высшая симметрия, закон сохранения, инвариант Лапласа, дифференциальная подстановка.

CONSERVATION LAWS FOR HYPERBOLIC EQUATIONS: SEARCH ALGORITHM FOR LOCAL PREIMAGE WITH RESPECT TO THE TOTAL DERIVATIVE

© 2019 **S. YA. STARTSEV**

Abstract. We propose an algorithm, which allows one to eliminate flows from conservation laws for hyperbolic equations by expressing partial derivatives of these flows in terms of the corresponding densities. In particular, the application of this algorithm allows one to prove that the decreasing of order of at least one of Laplace y-invariants of the equation $u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$ is a necessary condition for the function F_{u_y} belonged to the image of the total derivative D_x by virtue of this equation. Thus, we obtain constructive necessary conditions for the existence of differential substitutions that transform a hyperbolic equation into a linear equation or into the Klein–Gordon equation.

Keywords and phrases: nonlinear hyperbolic equation, integrability, higher symmetry, conservation law, Laplace invariant, differential substitution.

AMS Subject Classification: 35L70, 37K05, 37K10, 37K35

1. Введение.

При изучении эволюционных уравнений вида

$$u_t = f(u, u_1, \dots, u_k), \quad u_i := \frac{\partial^i u}{\partial x^i}, \tag{1}$$

обладающих высшими симметриями, важную роль играют так называемые канонические законы сохранения, т.е. соотношения вида $D_t(\rho) = d\psi/dx$, где «плотность» ρ закона сохранения некоторым наперед известным образом выражается через правую часть f и ее частные производные, «поток» ψ является функцией от u и конечного числа ее производных u_i, а через D_t обозначена полная производная по t в силу уравнения (1); дифференцирование d/dx здесь является обычной

ISSN 0233–6723

полной производной по x, образ которой, как известно, лежит в ядре вариационной производной

$$\frac{\delta}{\delta u} := \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^i \frac{d^i}{dx^i}\frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Это позволяет исключить поток ψ и перейти от закона сохранения к соотношению

$$\frac{\delta}{\delta u}\big(D_t(\rho)\big) = 0,$$

представляющему из себя конструктивное условие на правую часть f, необходимое для интегрируемости уравнения (1) в рамках симметрийного подхода. Симметрийный подход и канонические законы сохранения для уравнений вида (1) достаточно подробно рассматриваются, например, в [5].

Условия, имеющие вид законов сохранения $D_y(\rho) = D_x(\psi)$ с неизвестным ψ и однозначно выражающейся в терминах правой части соответствующего уравнения плотностью ρ, возникают и в случае гиперболических уравнений в частных производных

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{2}$$

как при рассмотрении высших симметрий этих уравнений, так и в некоторых других ситуациях. Однако теперь и D_y, и D_x являются полными производными (по x и y соответственно) *в силу уравнения* (2) и на функциях от переменных x, y, $u_0 := u$, $u_i := \partial^i u/\partial x^i$, $\bar{u}_j := \partial^j u/\partial y^j$ (каковыми являются в данном случае функции ρ и ψ) задаются формулами

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_1\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{+\infty}\left(u_{i+1}\frac{\partial}{\partial u_i} + D_y^{i-1}(F)\frac{\partial}{\partial \bar{u}_i}\right),$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u}_1\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\bar{u}_{i+1}\frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} + D_x^{i-1}(F)\frac{\partial}{\partial u_i}\right).$$

Поэтому в ситуации общего положения (когда ψ зависит хотя бы от одной из переменных $\bar{u}_j$) производная $D_x(\psi)$ не обращается в нуль. Таким образом, для исключения ψ из соотношения $D_y(\rho) = D_x(\psi)$ и получения из этого закона сохранения конструктивных условий на правую часть (2) требуется какой-то другой инструмент, отличный от вариационной производной. В настоящей статье предложен такой инструмент и рассмотрены некоторые его приложения.

А именно, для равенства вида $p = D_x(\gamma)$ предложен алгоритм, который в случае отличных от нуля инвариантов Лапласа уравнения (2) (т.е. в ситуации общего положения) позволяет однозначно выразить все частные производные γ в виде

$$\gamma_{u_i} = \Lambda_i(F, p), \quad \gamma_{\bar{u}_j} = \Lambda_{-j}(F, p), \tag{3}$$

где $\Lambda_q(F, p)$ — некоторые выражения, содержащие только частные производные правой части F и функции p. Поскольку γ зависит от конечного числа переменных, $\gamma_{\bar{u}_j} = 0$ для всех достаточно больших j, и соответствующие этим частным производным выражения $\Lambda_{-j}(F, p)$ также должны обращаться в нуль. Вместе с условиями совместности системы (3) это дает конструктивные необходимые условия того, что $p \in \operatorname{im} D_x$. При этом условия вида $\Lambda_{-j}(F, p) = 0$ (и некоторые другие тоже при дополнительных предположениях) можно переформулировать так, что они остаются верными и в том случае, когда какой-либо из инвариантов Лапласа обращается в нуль.

Применяя описанный алгоритм, можно, например, доказать, что необходимым (и, при некоторых дополнительных предположениях, достаточным) условием принадлежности F_{u_y} образу D_x является выполнение равенства $(H_k)_{\bar{u}_{k+1}} = 0$ для некоторого неотрицательного k. Через H_i здесь обозначены y-инварианты Лапласа уравнения (2), заданные рекуррентной формулой

$$H_{i+1} = 2H_i - D_x D_y(\ln H_i) - H_{i-1}$$

и первыми членами

$$H_0 = F_u + F_{u_x}F_{u_y} - D_x(F_{u_x}), \quad H_{-1} = F_u + F_{u_x}F_{u_y} - D_y(F_{u_y}).$$

Условие $F_{u_y} \in \operatorname{im} D_x$ возникает во многих ситуациях и, в частности, является необходимым для того, чтобы решения уравнения (2) переводились подстановкой $v = g$, где функция g зависит хотя бы от одной из производных u по y, в решения уравнения Клейна—Гордона $v_{xy} = \tilde{F}(x, y, v)$.

Естественно, совершенно аналогичные результаты получаются и при анализе соотношений вида $\bar{p} = D_y(\bar{\gamma})$; например, в терминах x-инвариантов Лапласа можно сформулировать необходимые условия связи между (2) и уравнением Клейна—Гордона посредством подстановки, зависящий от производных u по x. Пользуясь симметрией формулы (2) относительно перестановки $x \leftrightarrow y$, в настоящей статье мы рассматриваем только один из двух «симметричных» случаев.

2. Обозначения, определения и вспомогательные формулы. Смешанные частные производные u можно исключить в силу уравнения (2) и его дифференциальных следствий. Поэтому все связанные с уравнением объекты (такие как симметрии и законы сохранения) без потери общности можно считать зависящими лишь от независимых переменных x, y, функции u и ее частных производных u_i, $\bar{u}_j$ по x и y соответственно. Под функциями мы в дальнейшем будем понимать дифференциальные функции, т.е. они могут зависеть от конечного числа вышеупомянутых переменных. Если это не оговорено особо, то предполагается, что коэффициенты во всех нижеследующих соотношениях являются именно такими функциями (т.е. коэффициенты не являются константами, несмотря на то, что список их аргументов в выражениях для краткости опускается). Мы будем использовать обозначения $\operatorname{ord}_x(g) = k$ и $\operatorname{ord}_y(g) = m$, если k и m являются наибольшими целыми числами, для которых функция g существенно зависит от u_k и $\bar{u}_m$ соответственно. Если g не зависит от u_k или $\bar{u}_m$ для всех положительных k и m, то полагаем $\operatorname{ord}_x(g) = 0$ и $\operatorname{ord}_y(g) = 0$.

В дальнейшем потребуется *оператор линеаризации* уравнения (2), задаваемый формулой

$$L = D_x D_y - F_{u_x} D_x - F_{u_y} D_y - F_u. \tag{4}$$

Для любой функции g определим ее *линеаризацию* g_* по формуле

$$g_* = \frac{\partial g}{\partial u} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{u}_i} D_y^i + \frac{\partial g}{\partial u_i} D_x^i \right).$$

Нетрудно доказать (см., например, [1]), что для любой функции g выполняются соотношения

$$D_y \circ g_* - \big(D_y(g)\big)_* = \sum_{i=0}^{q} \mu_i D_x^i \circ L, \quad D_x \circ g_* - \big(D_x(g)\big)_* = \sum_{i=0}^{\bar{q}} \bar{\mu}_i D_y^i \circ L, \tag{5}$$

где μ_i и $\bar{\mu}_i$ — некоторые функции (для каждой g свои), а символ $\circ$ обозначает композицию операторов.

Оператор (4) можно записать как в виде

$$L = \big(D_x - F_{u_y}\big) \circ \big(D_y - F_{u_x}\big) - H_0, \quad H_0 = F_u + F_{u_x} F_{u_y} - D_x\big(F_{u_x}\big),$$

так и в виде

$$L = \big(D_y - F_{u_x}\big) \circ \big(D_x - F_{u_y}\big) - K_0, \quad K_0 = F_u + F_{u_x} F_{u_y} - D_y\big(F_{u_y}\big).$$

Начиная с $L_0 = L$, построим для $i > 0$ последовательность операторов

$$L_{-i} := (D_y + a_i) \circ \big(D_x - F_{u_y}\big) - H_{i-1} = \big(D_x - F_{u_y}\big) \circ \big(D_y + a_i\big) - H_i, \tag{6}$$

где функции a_i, H_i задаются рекуррентными формулами

$$a_0 := -F_{u_x}, \quad D_y\big(H_{i-1}\big) + \big(a_i - a_{i-1}\big) H_{i-1} = 0, \quad H_i = H_{i-1} + D_y\big(F_{u_y}\big) + D_x(a_i). \tag{7}$$

Функции H_i называются *y-инвариантами Лапласа* уравнения (2). Следует заметить, что a_i однозначно выражается через a_{i-1} и H_{i-1} из второго из равенств (7) лишь при условии $H_{i-1} \neq 0$. В противном случае a_i не определено и может быть выбрано произвольно (второе из равенств (7) специально записано в именно в таком виде, чтобы исключить возможность деления на нуль и продемонстрировать, что последовательность L_{-i} может быть продолжена далее и в случае обращения в нуль какого-то из инвариантов Лапласа).

Последовательности *x-инвариантов Лапласа* K_i и соответствующих им операторов L_i для $i > 0$ задаются аналогичными формулами:

$$L_i := (D_x + b_i) \circ \bigl(D_y - F_{u_x}\bigr) - K_{i-1} = \bigl(D_y - F_{u_x}\bigr) \circ \bigl(D_x + b_i\bigr) - K_i,$$

где

$$b_0 := -F_{u_y}, \quad D_x(K_{i-1}) + \bigl(b_i - b_{i-1}\bigr)K_{i-1} = 0, \quad K_i = K_{i-1} + D_x(F_{u_x}) + D_y(b_i).$$

Непосредственная проверка показывает, что выполняются тождества

$$(D_y + a_i) \circ L_{-(i-1)} = L_{-i} \circ (D_y + a_{i-1}), \quad (D_x + b_i) \circ L_{i-1} = L_i \circ (D_x + b_{i-1}). \tag{8}$$

Также нетрудно убедиться в том, что для всех $i > 1$ (если обозначить K_0 через H_{-1}, то и для $i = 1$) верна формула

$$H_i = 2H_{i-1} + D_x\bigl(a_i - a_{i-1}\bigr) - H_{i-2}.$$

С учетом второго из равенств (7), при условии $H_{i-1} \neq 0$ эта формула совпадает с упомянутой во введении цепочкой Тоды

$$H_i = 2H_{i-1} - D_x D_y\bigl(\ln H_{i-1}\bigr) - H_{i-2}. \tag{9}$$

Аналогичное верно и для y-инвариантов Лапласа K_i.

Введем операторы $\hat{A}_i$, A_i и B_i с помощью следующих рекуррентных формул:

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= 1, & \hat{A}_i &= (D_y + a_i) \circ \hat{A}_{i-1}, & i &> 0; \\ A_{-1} &= 1, & A_i &= (D_y + a_i) \circ A_{i-1}, & i &\geqslant 0, \\ B_{-1} &= 1, & B_i &= (D_x + b_i) \circ B_{i-1}, & i &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Многократно применяя первое из равенств (8), получим соотношения

$$\hat{A}_i \circ L = L_{-i} \circ A_{i-1}.$$

Поскольку

$$L_{-i} \circ A_{i-1} = \bigl(D_x - F_{u_y}\bigr) \circ A_i - H_i A_{i-1},$$

в силу формулы (6), для всех $i \geqslant 0$ получаем

$$D_x \circ A_i = F_{u_y} A_i + H_i A_{i-1} + \hat{A}_i \circ L. \tag{11}$$

В дальнейшем удобно использовать запись $Q \simeq R$ для обозначения того, что дифференциальные операторы Q и R совпадают между собой с точностью до слагаемых вида $\mu_{ij} D_x^i D_y^j \circ L$. С учетом этого из (11) вытекает

$$D_x \circ A_i \simeq F_{u_y} A_i + H_i A_{i-1},$$

а из формул (5) следует

$$\bigl(D_y(g)\bigr)_* \simeq D_y \circ g_*, \quad \bigl(D_x(g)\bigr)_* \simeq D_x \circ g_*.$$

3. Необходимые условия принадлежности функции образу полной производной. Рассмотрим соотношение вида

$$p = D_x(\gamma), \tag{12}$$

где p и γ являются функциями. Это равенство можно рассматривать как *тривиальный закон сохранения*, поскольку подействовав на обе части этого равенства оператором D_y, получим закон сохранения $D_y(p) = D_x(\psi)$ с $p = D_x(\gamma)$ и $\psi = D_y(\gamma)$.

Линеаризуя (12) и учитывая формулу (5), получаем

$$p_* \simeq D_x \circ \gamma_*. \tag{13}$$

Операторы p_* и γ_* запишем в виде

$$p_* = \xi_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \bigl(\xi_{-i} A_{i-1} + \xi_i B_{i-1}\bigr), \quad \gamma_* = \eta_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \bigl(\eta_{-i} A_{i-1} + \eta_i B_{i-1}\bigr). \tag{14}$$

Ясно, что в реальности правые части (14) содержат лишь конечное число слагаемых, и знак $+\infty$ используется только потому, что мы не делаем никаких предположений относительно $\operatorname{ord}_y(p)$ и $\operatorname{ord}_y(\gamma)$. Подставим (14) в (13), а затем воспользуемся очевидным соотношением

$$D_x \circ B_i = B_{i+1} - b_{i+1} B_i$$

и формулой (11). Собирая коэффициенты при B_{i-1} и A_{i-1}, получаем из (13) цепочку уравнений

$$\begin{aligned} \xi_q &= \eta_{q-1}, && \\ \xi_i &= \big(D_x - b_i\big)(\eta_i) + \eta_{i-1}, && 1 \leqslant i < q, \\ \xi_{-i} &= \big(D_x + F_{u_y}\big)(\eta_{-i}) + \eta_{-(i+1)} H_i, && i \geqslant 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где $q := \max(1, \operatorname{ord}_x(p))$ (в случае $\operatorname{ord}_x(p) = 0$ первое из соотношений означает просто $\eta_0 = \xi_1 = 0$, а второе из соотношений цепочки отсутствует).

Из (15) видно, что если ни один из y-инвариантов Лапласа H_i не обращается в нуль, то мы можем однозначным образом выразить все η_i через ξ_i. Таким образом, мы получаем алгоритм, который в некотором смысле можно считать алгоритмом обращения D_x: если известно p, то можем найти ξ_i, а затем по формуле (15) вычислить η_i, а по ним уже восстановить, используя вторую из формул (14), все частные производные γ. Естественно, гарантировать эффективность этой процедуры можно лишь в том случае, когда p действительно принадлежит $\operatorname{im} D_x$ (что верно не для любого p); в противном случае процесс вычисления η_i может продолжаться до бесконечности, либо выражения для частных производных γ окажутся несовместны между собой.

Перепишем цепочку (15) в другой форме. Для этого определим функции $\hat{b}_i$ с помощью рекуррентной формулы

$$D_x(H_{i-1}) + (\hat{b}_i - \hat{b}_{i-1}) H_{i-1} = 0, \quad \hat{b}_0 = F_{u_y}.$$

Эта формула означает, что

$$H_{i-1}\big(D_x + \hat{b}_{i-1}\big) = \big(D_x + \hat{b}_i\big) \circ H_{i-1} \quad \Longrightarrow \quad H_{i-1} \dots H_0 \big(D_x + F_{u_y}\big) = \big(D_x + \hat{b}_i\big) \circ H_{i-1} \dots H_0.$$

Учитывая последнее равенство, домножим уравнения, записанные в последней строке формулы (15), начиная с $i = 1$, на $H_{i-1} \dots H_0$; в результате получим

$$\eta_i = \delta_i(p), \quad i = \overline{0, q-1}; \qquad \eta_{-i} H_{i-1} \dots H_0 = \delta_{-i}(p), \quad i > 0, \tag{16}$$

где $\delta_i(p)$ находятся по формулам

$$\begin{aligned} \delta_{q-1}(p) &= \xi_q, && \\ \delta_i(p) &= \xi_{i+1} - \big(D_x - b_{i+1}\big)\big(\delta_{i+1}(p)\big), && i = \overline{-1, q-2}, \\ \delta_{-i}(p) &= H_{i-2} \dots H_0 \xi_{-i+1} - \big(D_x + \hat{b}_{i-1}\big)\big(\delta_{-i+1}(p)\big), && i \geqslant 2. \end{aligned} \tag{17}$$

Смысл перехода от (15) к (16)–(17) состоит в том, что таким образом удается выразить функции, обращающиеся в нуль одновременно с η_i, через функции $\delta_i(p)$, для вычисления которых не требуется делить на инварианты Лапласа (так как мы не предполагаем $H_i \neq 0$, то и не можем гарантировать возможность такого деления). Но поскольку $\eta_{-i} = 0$ для всех $i > \operatorname{ord}_y(\gamma)$, получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть для функции p найдется такая функция γ, что $p = D_x(\gamma)$. Тогда $\delta_{-i}(p) = 0$ для всех $i > \operatorname{ord}_y(\gamma)$.*

Из (16) нетрудно видеть, что если $H_j = 0$ для некоторого $j < \operatorname{ord}_y(\gamma)$, то $\delta_{-i}(p) = 0$ для всех $i > j$, т.е. члены последовательности $\delta_{-i}(p)$ могут обращаться в нуль и до того, как i превзойдет $\operatorname{ord}_y(\gamma)$.

В заключение этого раздела заметим, что условия, которые можно извлечь из (16), не ограничиваются условиями, сформулированными в утверждении 1. В случае неравенства нулю нескольких первых y-инвариантов Лапласа с помощью формул (16) можем выразить как минимум некоторые из частных производных γ через частные производные p, инварианты Лапласа и правую часть уравнения (2), и получить на γ переопределенную систему уравнений в частных производных первого порядка. Условия совместности этой системы дают дополнительные условия принадлежности p образу D_x.

Например, пусть выполнено (12) и $\operatorname{ord}_y(\gamma) = k > 1$, $\operatorname{ord}_x(p) = n$. Предположим дополнительно, что $H_i \neq 0$ для всех неотрицательных $i < k$. Из формулы (14) нетрудно получить, что

$$\gamma_{\bar u_k} = \eta_{-k}, \quad \gamma_{\bar u_{k-1}} = \eta_{1-k} + \eta_{-k} \sum_{i=0}^{k-1} a_i.$$

Подставляя в эту формулу значения η_{-k} и η_{1-k}, вычисленные с помощью (16), и учитывая очевидные соотношения

$$\operatorname{ord}_x(\gamma) < \max(1, n), \quad \gamma_{\bar u_k \bar u_{k-1}} = \gamma_{\bar u_{k-1} \bar u_k},$$

получаем, что для всех положительных $j \geqslant n$ верно

$$\left(\frac{\delta_{-k}(p)}{H_{k-1}\dots H_0}\right)_{u_j} = 0, \qquad \left(\frac{\delta_{1-k}(p)}{H_{k-2}\dots H_0}\right)_{u_j} + \frac{\delta_{-k}(p)}{H_{k-1}\dots H_0}\sum_{i=0}^{k-1}(a_i)_{u_j} = 0,$$

$$\left(\frac{\delta_{-k}(p)}{H_{k-1}\dots H_0}\right)_{\bar u_{k-1}} = \left(\frac{\delta_{1-k}(p)}{H_{k-2}\dots H_0} + \frac{\delta_{-k}(p)}{H_{k-1}\dots H_0}\sum_{i=0}^{k-1} a_i\right)_{\bar u_k}.$$

4. Простейший пример тривиального канонического закона сохранения. Для иллюстрации рассмотрим теперь случай $p = F_{u_y}$. В одной стороны, как будет показано ниже, этот случай интересен тем, что члены последовательности $\delta_{-i}(F_{u_y})$ довольно просто выражаются в терминах y-инвариантов Лапласа H_i уравнения (2). С другой стороны, условие $F_{u_y} \in \operatorname{im} D_x$ возникает во многих ситуациях, часть из которых можно рассматривать как частные случаи ситуации, описанной в следующем утверждении.

Лемма 1. *Пусть дифференциальная подстановка* $v = g$, *где* g — *некоторая функция, и* $\operatorname{ord}_y(g) = k > 0$, *переводит решения* (2) *в решения уравнения вида*

$$v_{xy} = \tilde F(x, y, v, v_x) + D_x(\phi(x, y, v))v_y. \tag{18}$$

Тогда $F_{u_y} = D_x(\phi(x, y, g) - \ln(g_{\bar u_k}))$.

Доказательство. Определением дифференциальной подстановки $v = g$ является равенство

$$D_x\big(D_y(g)\big) = \tilde F\big(x, y, g, D_x(g)\big) + D_x\big(\phi(x, y, g)\big)D_y(g).$$

Продифференцировав его по $\bar u_{k+1}$, получаем $D_x(g_{\bar u_k}) + F_{u_y} g_{\bar u_k} = D_x(\phi(x, y, g))g_{\bar u_k}$. □

Стоит пояснить, что слагаемое с v_y добавлено в правую часть (18) только для того, чтобы было ясно видно, что все линейные уравнения

$$v_{xy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v \tag{19}$$

входят как один из подклассов в описанную в лемме 1 ситуацию (хотя, как показано в [6], связь между (2) и (19) посредством дифференциальной подстановки накладывает на инварианты Лапласа уравнения (2) значительно более жесткие условия, чем полученные ниже исходя из леммы 1). Нетрудно видеть, что подходящей точечной заменой $v \to \theta(x, y, v)$ можно сделать β равным нулю. Таким образом, в реальности лемма 1 описывает случай, когда можно с помощью зависящей от $\bar u_j$ дифференциальной подстановки уничтожить производную по y в правой части (2), и условие $F_{u_y} \in \operatorname{im} D_x$ является необходимым для этого. Ситуация леммы 1, как минимум отчасти, уже рассматривалась другими исследователями. Например, в [4, 8] приведены списки уравнений (2), связанных подстановками первого порядка с уравнением Клейна—Гордона $v_{xy} = \tilde F(v)$, являющимся частным случаем уравнения (18).

Лемма 2. *Обозначим через* h_i *частную производную* y*-инварианта Лапласа* H_i *по* $\bar u_{i+1}$. *Тогда*

$$\delta_{-1}(F_{u_y}) = h_0, \quad \delta_{-i}(F_{u_y}) = h_{i-1}H_{i-2}\dots H_0$$

для всех $i > 1$, *для которых* $H_{i-2}\dots H_0 \neq 0$.

Доказательство. Непосредственным вычислением нетрудно установить, что $\delta_{-1}(F_{u_y}) = (H_0)_{u_y}$. В случае если $H_0 \neq 0$, также можно вычислить, что $\delta_{-2}(F_{u_y}) = (H_1)_{\bar{u}_2} H_0$.

Из формулы (9) следует, что $\operatorname{ord}_y(H_i) \leqslant i + 1$, если все предшествующие y-инварианты Лапласа отличны от нуля. Поэтому если $H_{i-1} \dots H_0 \neq 0$, то, дифференцируя формулу (9) по $\bar{u}_{i+1}$, получаем

$$h_i = -\big(D_x + F_{u_y}\big)\left(\frac{h_{i-1}}{H_{i-1}}\right), \quad i > 1. \tag{20}$$

Домножая это соотношение на $H_{i-1} \dots H_0$, получим

$$h_i H_{i-1} \dots H_0 = -\big(D_x + \hat{b}_i\big)\big(h_{i-1} H_{i-2} \dots H_0\big).$$

Сравнивая эту формулу с формулой (17), а также учитывая указанные выше значения $\delta_{-1}(F_{u_y})$, $\delta_{-2}(F_{u_y})$ и тот факт, что $\xi_i = 0$ для всех $i > 1$, получаем утверждение леммы. □

Утверждение 2. *Пусть существует такая функция γ, что $F_{u_y} = D_x(\gamma)$. Тогда $h_i = 0$ для некоторого неотрицательного $i \leqslant \operatorname{ord}_y(\gamma)$, где $h_i := (H_i)_{\bar{u}_{i+1}}$. Если $\operatorname{ord}_y(\gamma) = 1$ и $H_0 \neq 0$, то h_0/H_0 не зависит от производных u по x и*

$$\gamma_{u_y} = \frac{h_0}{H_0}, \quad \gamma_u = F_{u_y u_x} - F_{u_x}\frac{h_0}{H_0}. \tag{21}$$

Обозначим через n минимальное отличное от нуля число, для которого $h_n = 0$. Если $n > 1$ и $H_0 \neq 0$, то

$$F_{u_y} = D_x\big(\ln(H_{n-1}) - \ln(h_{n-1})\big), \tag{22}$$

и для всех $j > 0$ выполнено равенство

$$\left(\frac{h_{n-1}}{H_{n-1}}\right)_{u_j} = 0.$$

Таким образом, условие $h_i = 0$ является не только необходимым, но и почти достаточным для того, чтобы $F_{u_y} \in \operatorname{im} D_x$.

Доказательство. Условие $h_i = 0$ является прямым следствием утверждения 1 и леммы 2.

Поскольку $\xi_1 = F_{u_y u_x}$ в случае $p = F_{u_y}$, первая из формул (17) дает $\delta_0(F_{u_y}) = F_{u_y u_x}$. Из (16) и леммы 2 получаем, что $\eta_{-i} = h_{i-1}/H_{i-1}$ для всех положительных i, для которых $H_{i-1} \dots H_0 = 0$. Подставляя это во вторую из формул (14) в случае $\operatorname{ord}_y(\gamma) = 1$ получаем

$$\gamma_* = F_{u_y u_x} + \frac{h_0}{H_0}(D_y - F_{u_x}),$$

что эквивалентно (21).

Равенство (22) вытекает из (20), а оставшиеся части утверждения следуют из того легко проверяемого факта, что $F_{u_y} = D_x(\gamma)$ только тогда, когда $\operatorname{ord}_x(\gamma) = 0$. □

Напомним, что функция F_{u_y} принадлежит образу D_x в любой из ситуаций, удовлетворяющих условиям леммы 1, и, соответственно, в любой из этих ситуаций применимо утверждение 2. Наличие у уравнения (2) нетривиального y-интеграла (т.е. такой функции g, что $\operatorname{ord}_y(g) = k > 0$ и $D_x(g) = 0$) также удовлетворяет условиям леммы 1 (так как тогда подстановка $v = g$ переводит (2) в уравнение $v_{xy} = 0$). Снова (ср. с комментарием после уравнения (19)) наличие y-интегралов накладывает на инварианты Лапласа значительно более жесткие условия, чем получены в утверждении 2; согласно [7], в этом случае $H_j = 0$ при некотором неотрицательном $j < k$. Но рассмотренные выше условия, вытекающее из $F_{u_y} = D_x(\gamma)$, могут быть полезны для построения интегралов, поскольку, как замечено в [3], во всех известных примерах y-интеграл w минимального порядка $\operatorname{ord}_y(w) = k$ удовлетворяет соотношению $w_* = e^{-\gamma} A_{k-1}$, из которого можно восстановить w и в котором требуется найти лишь γ (так как A_{k-1} конструктивным образом вычисляется по формуле (10)). Поскольку во всех известных примерах $H_i \neq 0$ для $i < k-1$ и, согласно [2], $\operatorname{ord}_y(\gamma) \leqslant \max(1, k-1)$, в этой ситуации утверждение 2 позволяет либо просто явным образом найти γ по формуле (22) (в случае $\operatorname{ord}_y(\gamma) > 1$), либо, учитывая формулы (16), (20) и лемму 2, получить оценку $\operatorname{ord}_y(\gamma) \leqslant 1$. В последнем случае функцию γ сравнительно легко найти, например, воспользовавшись формулами (21), если $H_0 \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демской Д. К., Старцев С. Я.* О построении симметрий по интегралам гиперболических систем уравнений// Фундам. прикл. мат. — 2004. — *10*, № 1. — С. 29–37.
2. *Жибер А. В.* Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечномерной алгеброй симметрии// Изв. РАН. Сер. мат. — 1994. — *58*, № 4. — С. 33–54.
3. *Жибер А. В., Соколов В. В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа// Усп. мат. наук. — 2001. — *56*, № 1 (337). — С. 63–106.
4. *Кузнецова М. Н.* О нелинейных гиперболических уравнениях, связанных дифференциальными подстановками с уравнением Клейна—Гордона// Уфим. мат. ж. — 2012. — *4*, № 3. — С. 86–103.
5. *Михайлов А. В., Шабат А. Б., Ямилов Р. И.* Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем// Усп. мат. наук. — 1987. — *42*, № 4 (256). — С. 3–53.
6. *Старцев С. Я.* Об инвариантах Лапласа гиперболических уравнений, линеаризуемых дифференциальной подстановкой// Теор. мат. физ. — 1999. — *120*, № 2. — С. 237–247.
7. *Anderson I. M., Kamran N.* The variational bicomplex for hyperbolic second-order scalar partial differential equations in the plane// Duke Math. J. — 1997. — *87*, № 2. — P. 265–319.
8. *Kuznetsova M. N., Pekcan A., Zhiber A. V.* The Klein—Gordon equation and differential substitutions of the form $v = f(u, u_x, u_y)$// SIGMA — 2012. — *8*. — 090.

Старцев Сергей Яковлевич
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия
E-mail: `startsev@anrb.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 162 (2019). С. 93–135

УДК 517.982, 517.5

ПОРЯДКОВЫЕ ВЕРСИИ ТЕОРЕМЫ ХАНА—БАНАХА И ОГИБАЮЩИЕ. II. ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

© 2019 г. **Б. Н. ХАБИБУЛЛИН, А. П. РОЗИТ, Э. Б. ХАБИБУЛЛИНА**

Аннотация. В работе рассматривается проблема существования верхней (нижней) огибающей из выпуклого конуса или, более общó, выпуклого множества для функций на проективном пределе векторных решеток со значениями в пополнении пространства Канторовича или на расширенной вещественной прямой. Даны векторные, порядковые и топологические двойственные трактовки условий существования такой огибающей и метода ее построения. Рассмотрены применения к проблеме существования нетривиальной (плюри)субгармонической и/или (плюри)гармонической миноранты для функций в областях из конечномерного вещественного или комплексного пространства. Указаны общие подходы к задачам о нетривиальности весовых классов голоморфных функций, к описанию нулевых (под)множеств для таких классов голоморфных функций, к задаче представления мероморфной функции как частного голоморфных функций из заданного весового класса.

Ключевые слова: векторная решетка, теорема Хана—Банаха, проективный предел, (плюри)субгармоническая функция, голоморфная функция, нулевое (под)множество.

ORDER VERSIONS OF THE HAHN–BANACH THEOREM AND ENVELOPES. II. APPLICATIONS TO THE FUNCTION THEORY

© 2019 **B. N. KHABIBULLIN, A. P. ROZIT, E. B. KHABIBULLINA**

Abstract. In this paper, we consider the problem on the existence of the upper (lower) envelope of a convex cone or, more generally, a convex set for functions on the projective limit of vector lattices with values in the completion of the Kantorovich space or on the extended real line. We propose vectorial, ordinal, and topological dual interpretations of the existence conditions for such envelopes and a method of constructing it. Applications to the problem on the existence of a nontrivial (pluri)subharmonic and/or (pluri)harmonic minorant for functions in domains of a finite-dimensional real or complex space are considered. We also propose general approaches to problems on the nontriviality of weight classes of holomorphic functions, to describing zero (sub)sets for such classes of holomorphic functions, and to the problem of representing a meromorphic function as a ratio of holomorphic function from a given weight class.

Keywords and phrases: vector lattice, Hahn–Banach theorem, projective limit, (pluri)subharmonic function, holomorphic function, zero (sub)set.

AMS Subject Classification: 46A40, 46E05, 31C05

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-11-00002) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00024а).

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Огибающая . . . 94
1. Введение. Истоки . . . 94
2. Основные определения и постановки задач . . . 97
3. Проективный предел упорядоченных векторных пространств . . . 99
4. Верхняя огибающая функции на проективном пределе . . . 104
5. Супремальные функции и выметание . . . 109
6. Представление верхней огибающей на проективном пределе . . . 112
Глава 2. Применения в теории функций . . . 119
7. Введение. Где возникают огибающие? . . . 119
8. Существование (плюри)субгармонической нижней огибающей . . . 123
9. Применения к голоморфным функциям . . . 130
Список литературы . . . 133

Глава 1

ОГИБАЮЩАЯ

1. Введение. Истоки

1.1. Алгебраические версии. Одна из основ функционального анализа — следующая теорема.

Теорема (теорема Хана—Банаха об огибающей; см. [1, II.1.3–4]; [42, 45, 57, 58, 64])**.** *Пусть X — векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ и $f : X \to \mathbb{R}$ — функция, т. е. $f \in \mathbb{R}^X$.*

I. *Следующие три утверждения попарно эквивалентны.*

1. *Функция f сублинейная* (пишем $f \in \operatorname{sbl}\mathbb{R}^X$)*, что здесь означает одновременно*

(ph) *положительную однородность* (пишем $f \in \operatorname{plsbh}\mathbb{R}^X$):

$$f(tx) = tf(x) \quad \textit{для всех } x \in X \textit{ и } t \in \mathbb{R}^+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}, \tag{1.1}$$

где $\mathbb{R}^+$ можно заменить на $\mathbb{R}^+_* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и

(sa) *субаддитивность* (пишем $f \in \operatorname{sba}\mathbb{R}^X$):

$$f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2) \quad \textit{для всех } x_1, x_2 \in X. \tag{1.2}$$

2. *Для векторного пространства $\operatorname{lin}\mathbb{R}^X$ над $\mathbb{R}$ всех линейных функций $l \in \mathbb{R}^X$:*

$$l(t_1x_1 + t_2x_2) = t_1l(x_1) + t_2l(x_2) \quad \textit{для всех } x_1, x_2 \in X \textit{ и } t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

функция f совпадает со своей нижней огибающей по $\operatorname{lin}\mathbb{R}^X$:

$$f(x) = \sup\left\{l(x) : \ l \in \operatorname{lin}\mathbb{R}^X, \ l\big|_X \leqslant f\big|_X\right\} =: \operatorname{lenv}^f_{\operatorname{lin}\mathbb{R}^X}(x) \quad \textit{для всех } x \in X, \tag{1.4}$$

где $l\big|_X \leqslant f\big|_X$ означает, что $l(x') \leqslant f(x')$ для всех $x' \in X$.

3. *Значения $f(x)$ тождественно равны*

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^n t_kf(x_k) : \ \sum_{k=1}^n t_kx_k = x, \ x_k \in X, \ t_k \in \mathbb{R}^+, \ n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}\right\} \quad \textit{при всех } x \in X. \tag{1.5}$$

II. *Следующие три утверждения попарно эквивалентны.*

1. *Функция f выпукла* (пишем $f \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^X$)*, т.е. удовлетворяет неравенству Йенсена:*

$$f\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \textit{для всех } x_1, x_2 \in X \textit{ и } t \in (0,1), \tag{1.6}$$

где в данном случае интервал $(0,1) \subset \mathbb{R}^+_*$ можно заменить на отрезок $[0,1] \subset \mathbb{R}^+$.

2. *Для векторного пространства* $\operatorname{aff}\mathbb{R}^X$ *над* $\mathbb{R}$ *всех аффинных функций* $a \in \mathbb{R}^X$ *имеем*

$$a\bigl(tx_1+(1-t)x_2\bigr) = ta(x_1)+(1-t)a(x_2) \quad \textit{для всех } x_1,x_2\in X \textit{ и } t\in(0,1), \tag{1.7}$$

где $(0,1)$ *можно заменить на* $\mathbb{R}$, f *совпадает со своей нижней огибающей по* $\operatorname{aff}\mathbb{R}^X$:

$$f(x) = \sup\bigl\{a(x):\ a\in\operatorname{aff}\mathbb{R}^X,\ a\big|_X \leqslant f\big|_X\bigr\} =: \operatorname{lenv}^f_{\operatorname{aff}\mathbb{R}^X}(x) \quad \textit{для всех } x\in X. \tag{1.8}$$

3. *Значения* $f(x)$ *тождественно равны*

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^n t_kf(x_k):\ \sum_{k=1}^n t_kx_k = x,\ x_k\in X,\ t_k\in\mathbb{R}^+,\ \sum_{k=1}^n t_k=1,\ n\in\mathbb{N}\right\} \quad \textit{при всех } x\in X. \tag{1.9}$$

III. *Если формально дополнить выпуклые конусы* $\operatorname{sbl}\mathbb{R}^X\subset\operatorname{conv}\mathbb{R}^X$ *функцией* $-\boldsymbol{\infty}: x\mapsto-\infty$, $x\in X$ *(тождественная* $-\infty$*), то точные нижние границы* $\inf$ *из* (1.5) *и* (1.9) *тождественно равны соответственно,*

(1) *наибольшей сублинейной миноранте функции* f:

$$\operatorname{lenv}^f_{\operatorname{sbl}\mathbb{R}^X}(x) := \sup\bigl\{p(x): p\in\operatorname{sbl}\mathbb{R}^X,\ p\big|_X\leqslant f\big|_X\bigr\} = (1.5), \quad x\in X, \tag{1.10}$$

где для пустого подмножества $\varnothing\subset\mathbb{R}^X$ *полагаем* $\sup\varnothing := -\boldsymbol{\infty}$*, и*

(2) *наибольшей выпуклой миноранте функции* $f\in\mathbb{R}^X$:

$$\operatorname{lenv}^f_{\operatorname{conv}\mathbb{R}^X}(x) := \sup\bigl\{v(x): v\in\operatorname{conv}\mathbb{R}^X,\ v\big|_X\leqslant f\big|_X\bigr\} = (1.9), \quad x\in X. \tag{1.11}$$

Чаще всего формулируют только часть I и только импликацию I1⇒I2, но обратная I2⇒I1 — элементарное следствие определений линейной (1.3) и сублинейной **(ph)**+**(sa)** функций. Часть II достаточно просто следует из части I (см., например, [65], [36, основная теорема, часть (2)]).

Эквивалентности I1⇔I3 и III1⇔III3 элементарны и в неявной форме содержатся, например, в [14, доказательство теоремы 1]. По схеме из [14] и определению сублинейности (1.1)–(1.2) без труда выводится III1. По аналогии с этим выводом по определению выпуклости (1.6) легко устанавливается наверняка известная и сформулированная где-нибудь ранее часть III2.

В «Математической энциклопедии» (см. [12, Хана—Банаха теорема]) формулировка теоремы Хана—Банаха для векторного пространства некорректна: *«В случае действительного пространства* X *полунорму можно заменить положительно однородным функционалом, ...»*, т.е. опущено требование субаддитивности **(sa)**. Тем не менее, основной ориентир в выборе терминологии и обозначений, где это возможно, — именно [12], а также монография [1] и первая часть [34] настоящей работы, в которой рассмотрен простой модельный случай лишь однородных функций **(ph)**+(1.1) и их обобщений. В различных источниках и у разных авторов терминология зачастую существенно разнится, поэтому в нашем изложении по возможности все, даже элементарные, определения, понятия и утверждения, встречавшиеся нам в литературе хотя бы раз в различных смыслах и трактовках, приводятся полностью во избежание разночтений. Нас в первом приближении будет интересовать актуальный в теории оптимизации (см. [43]) и в теории функций (см. [24–31]) случай

(sbl) $\bigl(f: X\to\mathbb{R}_{+\infty} := \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *— сублинейная функция*$\bigr) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ *(выполнено* **(ph)** *с* $\mathbb{R}^+_*$ *и* **(sa)***),*
где $+\infty := \sup\mathbb{R}$, $t+(+\infty) := +\infty =: (+\infty)+t$ *при* $t\in\mathbb{R}_{+\infty}$, $t\cdot(+\infty) := +\infty$ *при* $t\in\mathbb{R}^+_*$.

Такие функции называют ещё *гиполинейными* (hypolinear, см. [40, 43]) или *расширенными сублинейными* (extended sublinear, (см. [63], [64, замечание 1.4]) функционалами при одном из трёх соглашений

$$f(0)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad f(0)\in\mathbb{R} \quad\Longleftrightarrow\quad \bigl(\textbf{(ph)} \text{ с } \mathbb{R}^+ \text{ и } 0\cdot(+\infty) := 0\bigr). \tag{1.12}$$

Примеры функций

$$+\boldsymbol{\infty}: x\mapsto+\infty, \qquad x\mapsto\begin{cases}+\infty, & x\in\mathbb{R}^+,\\ 0, & x\notin\mathbb{R}^+,\end{cases} \quad x\in X,$$

показывают, что **(sbl)** $\not\Rightarrow$ (1.12).

В такой постановке задача описания нижней огибающей существенно усложняется и далеко не тривиальна. Представляется уместной пространная цитата из [43]: “A surprising fact occurs when, as requested in many constraint optimization problem, p is allowed to take the value $+\infty$. When the dimension of the underlying space X is infinite, S. Simons provided (see[1] the paragraph of the article [63] entitled ‘Counterexample to 4,’ at p. 114) a highly counterintuitive example: a hypolinear function (that is a convex ph-function) $p : X \to \mathbb{R}_{+\infty}$ such that the inequality $g \leqslant p$ is false for all the linear mappings $g : X \to \mathbb{R}$. Arguably, the better illustration of the difficulty to address this case is the unusually large number of flawed Hahn–Banach type theorems for hypolinear functions which can be found in the mathematical literature; in the articles [40, 66, 67] the reader can find examples and criticism of as much as seven such incorrect results published between 1969 and 2005.” Эту цитату можно дополнить еще одним более поздним восьмым некорректным результатом 2013 года (см. [47, теорема 2.4]), где вместо сублинейных **(sbl)**+(1.12) рассматриваются противоположные им суперлинейные функционалы со значениями в $\mathbb{R}_{-\infty} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Этот результат по существу используется для доказательства [47, теоремы 2.7, 2.8, следствия 2.5, 2.9], но опровергается контрпримерами [63, Counterexample to (3), p. 113], [64, замечание 2.3], [40, пример (1.6)].

1.2. Топологические версии. По-видимому, первая *топологическая версия* теоремы Хана—Банаха об огибающей для расширенных сублинейных **(sbl)**+(1.12) функционалов была дана Л. Хёрмандером ещё в 1955 г. (см. [48]), хотя, как отмечено в [18, 0.1, теорема 8 и далее], как минимум, в конечномерном случае $X = \mathbb{R}^n$ для расширенных выпуклых функционалов она была известна и Г. Минковскому.

Теорема (теорема Хёрмандера об огибающей; см. [48], [40, (3.6), (4.8)], [9, **2**°], [8, 4.7.3(3)])**.** *Пусть X — локально выпуклое пространстве, $f : X \to \mathbb{R}_{+\infty}$ или $f = -\infty$ — тождественная $-\infty$ на X; $C(X) \subset \mathbb{R}^X$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$ непрерывных функций.*

I. *Следующие два утверждения эквивалентны.*
 1. *Функция f сублинейна в смысле **(sbl)** и полунепрерывна снизу на X или $f = -\infty$;*
 2. *f совпадает со своей нижней огибающей по выпуклому конусу $C(X) \cap \operatorname{lin} \mathbb{R}^X$:*

$$f(x) = \sup\bigl\{l(x) :\ l \in C(X) \cap \operatorname{lin}\mathbb{R}^X,\ l\big|_X \leqslant f\big|_X\bigr\} =: \operatorname{lenv}^f_{C(X)\cap \operatorname{lin}\mathbb{R}^X} \quad \text{для всех } x \in X. \tag{1.13}$$

II. *Следующие два утверждения эквивалентны.*
 1. *$f \in (\mathbb{R}_{+\infty})^X$ — выпуклая в смысле (1.6) полунепрерывная снизу или $f = -\infty$ на X;*
 2. *f совпадает со своей нижней огибающей по выпуклому конусу $C(X) \cap \operatorname{lin} \mathbb{R}^X$:*

$$f(x) = \sup\bigl\{a(x) :\ a \in C(X) \cap \operatorname{aff}\mathbb{R}^X,\ a\big|_X \leqslant f\big|_X\bigr\} =: \operatorname{lenv}^f_{C(X)\cap \operatorname{aff}\mathbb{R}^X} \quad \text{для всех } x \in X. \tag{1.14}$$

«Индивидульное» развитие теоремы Хёрмандера для отдельных x даёт следующее утверждение.

Теорема (теорема Энгера—Лембке об огибающей; см. [40, теоремы (3.4), (4.7)])**.** *Пусть X — локально выпуклое пространство и $P \subset X$ — выпуклый конус, $K \subset X$ — выпуклое множество.*

I. *Пусть $f : P \to \mathbb{R}_{+\infty}$ — гиполинейный функционал на P, полунепрерывный снизу в нуле. Тогда следующие два утверждения эквивалентны.*
 1. *f — полунепрерывная снизу в $x \in P$;*
 2. *$f(x) = \sup\bigl\{l(x) :\ l \in C(X) \cap \operatorname{lin}\mathbb{R}^X,\ l\big|_P \leqslant f\big|_P\bigr\}$.*

II. *Пусть $f : K \to \mathbb{R}_{+\infty}$ — расширенная выпуклая функция, локально ограниченная снизу. Тогда следующие два утверждения эквивалентны.*
 1. *f — полунепрерывная снизу в $x \in P$;*
 2. *$f(x) = \sup\bigl\{a(x) :\ a \in C(X) \cap \operatorname{aff}\mathbb{R}^X,\ a\big|_K \leqslant f\big|_K\bigr\}$.*

Введение топологии позволяет дать и законченную векторную версию теоремы Хана—Банаха о мажорируемом продолжении линейных функционалов (см. [40, введение, с. 127-128]): *для гиполинейного функционала f на векторном пространстве X и для $l_0 \in \operatorname{lin}\mathbb{R}^{X_0}$, удовлетворяющего ограничению $l_0 \leqslant f$ на векторном подпространстве $X_0 \subset X$, линейное продолжение $l \in \operatorname{lin}\mathbb{R}^X$,*

[1] Наше дополнение к цитате — см. также [64, замечание 1.4], [40, (1.6)].

удовлетворяющее условиям $l = l_0$ *на* X_0 *и* $l \leqslant f$ *на* X, *возможно тогда и только тогда, когда функция* $x \mapsto \inf\limits_{x' \in X_0} \bigl(f(x+x') - l_0(x')\bigr)$, $x \in X$, *ограничена снизу в некоторой окрестности нуля в сильнейшей локально выпуклой топологии на* X, *в которой непрерывны все функции из* $\operatorname{lin} \mathbb{R}^X$.

Теорема Хана—Банаха—Канторовича (см. [8, 1.4.13-14] в *порядковой версии* в духе предыдущих теорем об огибающей формулируется в п. 6.1, где она непосредственно потребуется.

Ниже, в п. 2.2, даются возможные общие постановки рассматриваемых в работе задач, мотивированные для нас прежде всего предшествующими применениями в теории функций (см. [19–31, 51]). При этом мы вынуждены повторить часть основных определений и соглашений из [34].

2. Основные определения и постановки задач

2.1. Упорядоченные множества. Пополнение. Пусть S — (частично) упорядоченное множество (см. [1]) с отношением порядка (рефлексивным, транзитивным, антисимметричным) $\leqslant$, т.е. пара $(\mathrm{S}, \leqslant)$; $\geqslant$ и $>$ — соответственно, *обратные* к $\leqslant$ и *строгому порядку* $< := \leqslant \cap \neq$.

Пара $(\mathrm{S}, \leqslant)$ или множество S называется *полным снизу* (соответственно, *сверху*), если для каждого непустого подмножества $\mathrm{S}_0 \subset \mathrm{S}$ существует *точная нижняя* (соответственно, *верхняя*) *граница* $\inf \mathrm{S}_0$ (соответственно, $\sup \mathrm{S}_0$). Множество S называется *полным*, если оно полно и снизу, и сверху. Подмножество $\mathrm{S}_0 \subset \mathrm{S}$ называется *ограниченным снизу* (соответственно, *сверху*), если существует элемент $s_0 \in \mathrm{S}$, для которого $s_0 \leqslant s$ (соответственно, $s \leqslant s_0$) для всех $s \in \mathrm{S}_0$. Множество S называется *порядково полным снизу* (соответственно, *сверху*, см. [1, 8, 9, 41], если для каждого непустого ограниченного снизу (соответственно, сверху) подмножества $\mathrm{S}_0 \subset \mathrm{S}$ существует $\inf \mathrm{S}_0 \in \mathrm{S}$ (соответственно, $\sup \mathrm{S}_0 \in \mathrm{S}$). Множество S называется *порядково полным*, если S порядково полное и снизу, и сверху.

Пусть S — *порядково полное* множество. Если $\inf \mathrm{S}$ и/или $\sup \mathrm{S}$ не существуют, то часто удобна и полезна операция (*полу-*)*пополнения* порядково полного S до полного путем добавления *символов* $\inf \mathrm{S}$ и/или $\sup \mathrm{S}$, если таких элементов первоначально в S нет. Конкретнее[1],

[$\downarrow$] $\mathrm{S}_\downarrow := \{\inf \mathrm{S}\} \cup \mathrm{S}$ — *полупополнение*, или полурасширение, множества S *вниз*, или влево;
[$\uparrow$] $\mathrm{S}^\uparrow := \mathrm{S} \cup \{\sup \mathrm{S}\}$ — *полупополнение*, или полурасширение, множества S *вверх*, или вправо;
[$\updownarrow$] $\mathrm{S}_\downarrow^\uparrow := \mathrm{S}_\downarrow \cup \mathrm{S}^\uparrow$ — *пополнение*, или расширение, множества S в порядковом смысле,

где порядок $\leqslant$ продолжен естественным путём на эти пополнения, т.е. $\inf \mathrm{S} \leqslant s \leqslant \sup \mathrm{S}$ *для всех элементов* $s \in \mathrm{S}_\downarrow^\uparrow$. Очевидно, пополнения $\mathrm{S}_\downarrow^\uparrow$, $\mathrm{S}_\downarrow$, $\mathrm{S}^\uparrow$ с таким отношением порядка — соответственно, полное, полное снизу, полное сверху упорядоченные множества. Для пустого множества $\varnothing$ полагаем

$$\sup \varnothing := \inf \mathrm{S} \quad \text{для } \varnothing \subset \mathrm{S}_\downarrow \subset \mathrm{S}_\downarrow^\uparrow; \quad \inf \varnothing := \sup \mathrm{S} \quad \text{для } \varnothing \subset \mathrm{S}^\uparrow \subset \mathrm{S}_\downarrow^\uparrow. \tag{2.1}$$

2.2. Верхняя и нижняя огибающие. Для множеств X, Y традиционно через Y^X обозначаем множество всех *функций* (отображений, операторов, функционалов, форм и проч.)[2] $f : X \to Y$, $f : x \mapsto f(x)$ или $x \mapsto f(x)$, $x \in X$, определённых на X.

Для $X_0 \subset X$ через $f\big|_{X_0}$ обозначаем *сужение* f *на* X_0. Пишем $\varphi\big|_{X_0} = f\big|_{X_0}$ и говорим, что «$\varphi = f$ *на* X_0», если $\varphi(x) = f(x)$ *для всех* $x \in X_0$. В противном случае $\varphi\big|_{X_0} \neq f\big|_{X_0}$. Пишем $\varphi\big|_{X_0} \leqslant f\big|_{X_0}$ и говорим, что «$\varphi \leqslant f$ *на* X_0», или φ *минорирует* f, или f *мажорирует* φ, *на* X_0, если $\varphi(x) \leqslant f(x)$ *для всех* $x \in X_0$. Пусть $Y = \mathrm{S}_\downarrow^\uparrow$ — пополнение порядково полного множества $(\mathrm{S}, \leqslant$). Отношение $f\big|_X \leqslant \varphi\big|_X$ определяет *отношение поточечного порядка на множестве функций* $\bigl(\mathrm{S}_\downarrow^\uparrow\bigr)^X$. Очевидно, множество $\bigl(\mathrm{S}_\downarrow^\uparrow\bigr)^X$ с отношением поточечного порядка, обозначаемого тем же символом $\leqslant$, является *полным*, а именно, *для произвольного* $F \subset \bigl(\mathrm{S}_\downarrow^\uparrow\bigr)^X$ *всегда существуют*

[1] В [8, 1.3.3] использованы иные обозначения, например, $\mathrm{S}^\bullet$ вместо $\mathrm{S}^\uparrow$.

[2] В основном будем использовать термин *функция*, индифферентный к природе множеств X,Y (см. [12, Функция]).

функции

$$\sup F : x \mapsto \sup_{f\in F} f(x) \in \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad \inf F : x \mapsto \inf_{f\in F} f(x) \in \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad x \in X,$$

когда на X рассматриваются и постоянные функции

$$\inf \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X : x \mapsto \inf S \in \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad \sup \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X : x \mapsto \sup S \in \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad x \in X, \tag{2.2}$$

а для $\varnothing \subset \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$ в соответствии с соглашением (2.1) определены точные границы

$$\sup \varnothing := \inf \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X, \quad \inf \varnothing := \sup \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X. \tag{2.3}$$

Определение 2.1. Пусть $(\mathrm{S}, \leqslant)$ — порядково полное множество, $f \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$, $X_0 \subset X$, $L \subset \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^{X_0}$. *Нижнюю* (соответственно, *верхнюю*) *L-огибающую*, или *огибающую по L для f на X_0* определим как функцию

$$\operatorname{lenv}_L^f : x \mapsto \sup \left\{ l(x) : L \ni l\big|_{X_0} \leqslant f\big|_{X_0} \right\} \in \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad x \in X_0, \tag{2.4l}$$

соответственно,

$$\operatorname{uenv}_f^L : x \mapsto \inf \left\{ l(x) : f\big|_{X_0} \leqslant l\big|_{X_0} \in L \right\} \in \mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad x \in X_0. \tag{2.4u}$$

Очевидно, всегда

$$\operatorname{lenv}_L^f\big|_{X_0} \leqslant f\big|_{X_0} \leqslant \operatorname{uenv}_f^L\big|_{X_0}. \tag{2.5}$$

Функция $f : X \to Y$ с упорядоченными $(X, \leqslant)$, $(Y, \leqslant)$ называется *возрастающей на X*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \leqslant x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Если при этом $F \subset Y^X$, то множество всех возрастающих функций $f \in F$ обозначаем $\operatorname{incr} F$. Функция $f \in Y^X$ называется *строго возрастающей на X*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогичные определения формулируются для убывающих функций. Функции (строго) возрастающие или убывающие называют (*строго*) *монотонными*. Функции $f \mapsto \operatorname{lenv}_L^f$ и $f \mapsto \operatorname{uenv}_f^L$, $f \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$, являются возрастающими на $\left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$, но, вообще говоря, не строго возрастающими.

2.3. Общие постановки задач. В приложениях роль X из определения 2.1 часто играет некоторый класс функций и $\mathrm{S} = \mathbb{R}$ (см. [25–29]). Основные проблемы, диктуемые определением 2.1 в свете теорем Хана—Банаха, Хёрмандера, Энгера—Лембке, формулируются следующим образом.

Задача 1. Описать функции $f \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$, равные своей нижней (верхней) L-огибающей на X_0.

Задача 2. Указать метод(ы) конструктивного построения L-огибающих для $f \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$.

Именно эти задачи 1, 2 изучаются для определенных классов L и функций f в п. 1.1 (см. и ср. (1.4), (1.8), (1.10), (1.11), (1.13), (1.14) и пп. I2 и II2 теоремы Энгера—Лембке).

В связи с приложениями не меньший, а для некоторых применений (см., например, [23–31]) даже бо́льший интерес, чем задача 1, представляет собой следующая, менее требовательная задача.

Задача 3. Описать те $f \in \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$, для которых $\operatorname{lenv}_L^f \neq \inf \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$ или $\operatorname{uenv}_f^L \neq \sup \left(\mathrm{S}_{\downarrow}^{\uparrow}\right)^X$.

Если порядково полное множество S изначально дополнительно снабжено какими-либо алгебраическими операциями, согласованными с отношением порядка $\leqslant$, то продолжения этих операций на пополнения или (полу)расширения (вообще говоря, с ограничениями) могут определяться в каждом конкретном случае в зависимости от проблематики (см. и ср. [10, § 4], [8, 1.3.1]).

Для пары добавляемых символов $\inf \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$ и/или $\sup \mathrm{S} \notin \mathrm{S}$ часто (в особенности, если на S используется бинарная операция в аддитивной форме как основная) по аналогии с расширениями вещественной прямой $\mathbb{R}$ (с операцией сложения) вверх и/или вниз, используются соответственно, обозначения $-\infty := \inf \mathrm{S}$ и/или $+\infty := \sup \mathrm{S}$, а также ряд других в иных ситуациях (см. [34, 1.2]).

Для множества S через $\operatorname{card} S$ обозначаем число элементов в S или мощность множества S.

Векторные пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$, если не оговорено противное. Нулевой вектор различных векторных пространств обозначаем одним и тем же символом 0. Задачи 1–3 будем решать на проективных пределах векторных решёток по аналогии с [6, 23–29] для функций (функционалов) со значениями в пространстве Канторовича $\mathbb{K}$ и в $\mathbb{K}_{\pm\infty}$.

Пусть X, Y — упорядоченные векторные пространства. Через X^+ обозначим множество всех положительных векторов в X. В частности, для подмножества $F \subset Y^X$ тогда F^+ — подмножество всех *положительных* функций f из F, для которых по определению $f(X^+) \subset Y^+$. Порядково полная векторная решётка $\mathbb{K}$, $\operatorname{card}\mathbb{K} > 1$, — *пространство Канторовича* (см. [1, 8, 9]). При этом $\mathbb{K}$ не является полным ни снизу, ни сверху и[1]

$$\begin{gathered}
\inf\mathbb{K} := -\infty, \quad \sup\mathbb{K} := +\infty, \quad \sup\varnothing \overset{(2.1)}{:=} -\infty, \quad \inf\varnothing \overset{(2.1)}{:=} +\infty \quad \text{для } \varnothing\subset\mathbb{K};\\
-(-\infty) := +\infty, \quad -(+\infty) := -\infty, \quad -\infty \leqslant k \leqslant +\infty \quad \text{для всех } k\in\mathbb{K}_{\pm\infty};\\
\mathbb{K}_{-\infty} := \mathbb{K}_{\downarrow}, \quad \mathbb{K}_{+\infty} := \mathbb{K}^{\uparrow}, \quad \mathbb{K}_{\pm\infty} := \mathbb{K}^{\uparrow}_{\downarrow};\\
(-\infty)+k =: k+(-\infty) := -\infty \quad \text{для всех } k\in\mathbb{K}_{-\infty},\\
(+\infty)+k =: k+(+\infty) := +\infty \quad \text{для всех } k\in\mathbb{K}_{+\infty};\\
t(-\infty) =: (-t)(+\infty) := -\infty, \quad t(+\infty) =: (-t)(-\infty) := +\infty \quad \text{для всех } t\in\mathbb{R}^+_*;\\
\mathbb{K}^S_{-\infty} := (\mathbb{K}_{-\infty})^S, \quad \mathbb{K}^S_{+\infty} := (\mathbb{K}_{+\infty})^S, \quad \mathbb{K}^S_{\pm\infty} := (\mathbb{K}_{\pm\infty})^S;\\
\inf\mathbb{K}^S_{\pm\infty} =: \inf\mathbb{K}^S_{-\infty} \overset{(2.2)}{:=} \boldsymbol{-\infty}, \quad \sup\mathbb{K}^S_{\pm\infty} =: \sup\mathbb{K}^S_{+\infty} \overset{(2.2)}{:=} \boldsymbol{+\infty} \quad \text{при } S\neq\varnothing;\\
\sup\varnothing \overset{(2.3)}{:=} \boldsymbol{-\infty}, \quad \inf\varnothing \overset{(2.3)}{:=} \boldsymbol{+\infty} \quad \text{для пустого подмножества } \varnothing\subset\mathbb{K}^S\subset(\mathbb{K}_{\pm\infty})^S.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

3. Проективный предел упорядоченных векторных пространств

Для векторных пространств X, Y через $\operatorname{lin} Y^X$ обозначаем векторное пространство всех линейных функций l из Y^X, удовлетворяющих (1.3). В случае упорядоченных векторных пространств X, Y полагаем $\operatorname{lin}^+ Y^X := (\operatorname{lin} Y^X)^+$. Очевидно, в этом случае $\operatorname{lin}^+ Y^X = \operatorname{incr}\operatorname{lin} Y^X$.

Пусть $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность упорядоченных векторных пространств над $\mathbb{R}$ и $\leqslant_n$ — отношение порядка на X_n. Проекцию вектора $x=(x_n)$ из векторного пространства-произведения $\prod\limits_n X_n$ на пространство X_n обозначаем через $\operatorname{pr}_n x = x_n$. На $\prod\limits_n X_n$ вводится естественный порядок $\leqslant$, а именно: $x=(x_n)\leqslant x'=(x'_n)$ в $\prod\limits_n X_n$, если и только если $x_n \leqslant_n x'_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

Определение 3.1. Пусть $p_n \in \operatorname{lin}^+ X_n^{X_{n+1}}$. Векторное подпространство X в $\prod\limits_n X_n$, определенное условием

$$(x\in X) \overset{\text{def}}{\iff} \bigl(\operatorname{pr}_n x = p_n(\operatorname{pr}_{n+1} x) \text{ для всех } n\in\mathbb{N}\bigr), \tag{3.1}$$

снабженное индуцированным с $\prod\limits_n X_n$ отношением порядка $\leqslant$, будем называть *проективным пределом последовательности* (X_n) *относительно* (p_n) и обозначать $X = \operatorname{proj}\lim\limits_n X_n p_n$.

В записи $\operatorname{proj}\lim\limits_n$ нижний индекс n часто опускают. Из (3.1) сразу следует, что

$$p_n(\operatorname{pr}_{n+1} B) = \operatorname{pr}_n B \quad \text{для любого подмножества } B\subset X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n. \tag{3.2}$$

3.1. Проективный предел векторных решёток. Упорядоченное векторное пространство называют *векторной решёткой*, если для всякой пары векторов в нём существует точная верхняя граница sup, а значит, и точная нижняя граница inf. Операцию sup в упорядоченном множестве S для её идентификации обозначаем как S-sup. В частности, для $(X_n, \leqslant_n)$ наряду с обозначением X_n-sup иногда для краткости используют обозначение n-sup; для inf аналогично. Проективный

[1]Здесь и далее ссылки над знаками бинарных отношений означают, что эти соотношения как-то связаны с приведёнными ссылками, например, вытекают из них.

предел $X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ векторных решёток X_n называют *правильным проективным пределом*, если p_n *сохраняют* $\sup$ *для конечных множеств*, т.е.

$$X_n\text{-}\sup p_n(B_{n+1}) = p_n(X_{n+1}\text{-}\sup B_{n+1}) \quad \text{при всех } n\in\mathbb{N} \text{ и } B_{n+1}\subset X_{n+1},\ \operatorname{card} B_{n+1}<\infty. \tag{3.3}$$

Предложение 3.1. *Для правильного предела* $X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ *векторных решёток* X_n *справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если* $B\subset X$ *и* $\operatorname{card}\operatorname{pr}_n B<\infty$ *для каждого* $n\in\mathbb{N}$, *то существует*

$$v = X\text{-}\sup B = \Big(\prod_n X_n\Big)\text{-}\sup B, \quad \operatorname{pr}_n v = X_n\text{-}\sup\operatorname{pr}_n B; \tag{3.4}$$

(ii) X *и все* $\operatorname{pr}_n X$ *с индуцированным с* X_n *отношением порядка* $\leqslant_n$ — *векторные решётки;*

(iii) *для любого* $n\in\mathbb{N}$ *сужения* $p_n\big|_{\operatorname{pr}_{n+1}X}$ *сохраняют* $\sup$ *для конечных множеств.*

Доказательство.

(i). Положим $v=(v_n)\in\prod_n X_n$, где $v_n = X_n\text{-}\sup\operatorname{pr}_n B$. Очевидно, $v = \Big(\prod_n X_n\Big)\text{-}\sup B$. Поскольку p_n сохраняют sup, используя (3.3) и (3.2), получаем

$$p_n(v_{n+1}) = p_n\big(X_{n+1}\text{-}\sup\operatorname{pr}_{n+1}B\big) \overset{(3.3)}{=} X_n\text{-}\sup p_n(\operatorname{pr}_{n+1}B) \overset{(3.2)}{=} X_n\text{-}\sup\operatorname{pr}_n B = v_n.$$

Значит для $x=v$ имеет место правая часть (3.1) и $v\in X$ согласно определению 3.1. Так как порядок на X индуцирован с $\prod_n X_n$, то $v = X\text{-}\sup B\in X$ и (i) доказано.

(ii). Пространство-произведение векторных решёток — векторная решётка (см. [1], [5, гл. II, § 1]). Согласно п. (i) ввиду (3.4) с $\operatorname{card} B=2$ его векторное подпространство X — тоже векторная решётка. Пусть теперь $x_n, x_n'\in\operatorname{pr}_n X$, т.е. существуют $x,x'\in X$, для которых $\operatorname{pr}_n x = x_n$, $\operatorname{pr}_n x' = x_n'$. Поскольку X — векторная решётка, существует вектор $v = X\text{-}\sup\{x,x'\}\in X$, для которого $X_n\text{-}\sup\{x_n,x_n'\} = \operatorname{pr}_n v\in\operatorname{pr}_n X$. Таким образом,

$$\operatorname{pr}_n v = (\operatorname{pr}_n X)\text{-}\sup\{x_n,x_n'\} = X_n\text{-}\sup\{x_n,x_n'\} \tag{3.5}$$

и $\operatorname{pr}_n X$ — векторная решётка, что завершает доказательство п. (ii).

(iii). Из (3.5) для $x_n,x_n'\in\operatorname{pr}_n X$ при $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ имеем

$$p_{n-1}\big|_{\operatorname{pr}_n X}\big((\operatorname{pr}_n X)\text{-}\sup\{x_n,x_n'\}\big) \overset{(3.5)}{=} p_{n-1}\big(X_n\text{-}\sup\{x_n,x_n'\}\big) \overset{(3.3)}{=}$$
$$= X_{n-1}\text{-}\sup\big\{p_{n-1}(x_n),\ p_{n-1}(x_n')\big\} \overset{(3.5)}{=} (\operatorname{pr}_{n-1}X)\text{-}\sup\Big\{p_{n-1}\big|_{\operatorname{pr}_n X}(x_n),\ p_{n-1}\big|_{\operatorname{pr}_n X}(x_n')\Big\}.$$

Отсюда все $p_{n-1}\big|_{\operatorname{pr}_n X}$ при $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ сохраняют sup для конечных множеств из $\operatorname{pr}_n X$. □

Предел $X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ называем *приведённым*, если $\operatorname{pr}_n X = X_n$ для каждого $n\in\mathbb{N}$ (ср. [38, гл. IV, § 4]). Не умаляя общности общности, любой проективный предел можно считать приведённым, поскольку

$$X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n \overset{(3.2)}{=} \operatorname{proj}\lim(\operatorname{pr}_n X)\,\big(p_n\big|_{X_{n+1}}\big).$$

При этом все отображения $p_n\big|_{X_{n+1}}\colon \operatorname{pr}_{n+1}X\to\operatorname{pr}_n X$ в силу (3.2) сюръективны. Более того, если первоначально рассматривался правильный проективный предел векторных решёток, то согласно предложению 3.1 после перехода к приведённому проективному пределу мы по-прежнему имеем дело с правильным проективным пределом векторных решёток $\operatorname{pr}_n X$ относительно $p_n\big|_{X_{n+1}}$.

Замечание 3.1. Векторные решётки X и Y решёточно изоморфны, если существует линейная биекция из X на Y, сохраняющая порядок. Каждый приведённый правильный проективный предел $X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ векторных решёток для произвольной возрастающей подпоследовательности $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ решёточно изоморфен такому же пределу $X = \operatorname{proj}\lim_k X_{n_k} q_k$ относительно

$$q_k = p_{n_k}\circ p_{n_k+1}\circ\dots\circ p_{n_{k+1}-1}\colon\ X_{n_{k+1}}\to X_{n_k},$$

где $\circ$ — операция суперпозиции.

3.2. Примеры.

3.2.1. Векторные решётки-произведения и решётки из последовательностей. Рассмотрим последовательность $(X_k, \leqslant'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ векторных решеток с отношением порядка $\leqslant'_k$. Тогда каждое конечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ — векторная решетка при естественном отношении порядка $(x_1, \dots, x_n) \leqslant_n (x'_1, \dots, x'_n)$, $x_k \in X_k$, при $x_k \leqslant'_k x'_k$ для всех $k = 1, \dots, n$. Для

$$p_n : \prod_{k=1}^{n+1} X_k \to \prod_{k=1}^{n} X_k, \quad p_n : (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n), \tag{3.6}$$

пространство-произведение $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k$ векторных решеток решёточно изоморфно приведённому правильному проективному пределу $\operatorname{proj}\lim \Big(\prod\limits_{k=1}^{n} X_n\Big) p_n$ векторных решёток $\prod\limits_{k=1}^{n} X_n$ относительно p_n. Таким образом, каждое пространство-произведение счетного числа векторных решёток можно рассматривать как приведённый правильный проективный предел.

В частном случае совпадающих при всех k векторных решёток $(X_k, \leqslant'_k) = (X, \leqslant')$, $k \in \mathbb{N}$, пространство-произведение $X^{\mathbb{N}}$ — это векторная решётка всех последовательностей $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ с векторами $x_k \in X$, которую можно решёточно изоморфно отождествить с приведённым правильным проективным пределом $\operatorname{proj}\lim(X^n)p_n$ относительно p_n из (3.6).

3.2.2. Векторные решётки функций и мер. Пусть D — топологическое хаусдорфово пространство. Для $S \subset D$ через $\operatorname{clos} S$, $\operatorname{int} S$ и ∂S обозначаем, соответственно, *замыкание, внутренность* и *границу* S в D. Подмножество S *предкомпактно* в D (пишем $S \Subset D$), если $\operatorname{clos} S$ — компакт в D.

Предполагаем, что для D *существует исчерпание последовательностью* $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *предкомпактных открытых подмножеств из* D:

$$\operatorname{int} D_n = D_n \Subset D_{n+1}, \ n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = D. \tag{3.7}$$

Различные *достаточные условия для существования исчерпания* (3.7) давно известны и не раз отмечались и использовались (см. [24, § 1, перед (1.3)], [47, лемма 2.1]):

(a) D локально компактное и представимо в виде объединения счётного числа компактных подмножеств, т.е. σ-компактно (см. [39, следствие 2.77]);

(b) D удовлетворяет первой аксиоме счётности и полукомпактно (hemicompact), т.е. существует последовательность компактных подмножеств со следующим свойством: каждое компактное подмножество содержится в некотором компактном подмножестве из этой последовательности.

Согласно каждому из условий (a)$\Leftarrow$(b) пространство D нормально, в силу чего любая непрерывная функция из $\mathbb{R}^{\operatorname{clos} D_n}$ представляет собой сужение какой-либо непрерывной функции из $\mathbb{R}^D$ на $\operatorname{clos} D_n$.

3.2.3. Векторная решётка $C(D)$. Для $S \subset D$ через $C(S) \subset \mathbb{R}^S$ обозначим векторную решётку непрерывных на S функций с отношением поточечного порядка на S. При исчерпании (3.7) для $p_n : f \mapsto f\big|_{\operatorname{clos} D_n}$, $f \in C(\operatorname{clos} D_{n+1})$, определён проективный предел векторных решеток $\operatorname{proj}\lim_n C(\operatorname{clos} D_n)p_n$, который для нормального D является приведённым и правильным, и его можно решёточно изоморфно отождествить с $C(D)$.

3.2.4. Векторная решётка $L^p_{\mathrm{loc}}(D, \mu)$. Пусть $p \in \mathbb{R}^+_*$, D — локально компактное пространство с исчерпанием (3.7), μ — вещественная мера Радона на D; $L^p\big(\operatorname{clos} D_n, \mu\big|_{\operatorname{clos} D_n}\big)$ — векторная решётка над $\mathbb{R}$ функций-классов эквивалентности на $\operatorname{clos} D_n$ по отношению равенства μ-почти всюду и отношением порядка $\leqslant$ поточечно μ-почти всюду (см. [5, гл. IV, §§ 2, 6]). Тогда определён приведённый правильный проективный предел

$$L^p_{\mathrm{loc}}(D,\mu)=\operatorname*{proj\,lim}_n L^p\bigl(\operatorname{clos} D_n,\mu\bigr|_{\operatorname{clos} D_n}\bigr)p_n$$

над пространством $\mathbb{R}$ локально интегрируемых (по мере Радона μ) p-х степеней модулей функций-классов эквивалентности, где $p_n: f\mapsto f\bigr|_{\operatorname{clos} D_n}$, $f\in L^p\bigl(\operatorname{clos} D_{n+1},\mu\bigr|_{\operatorname{clos} D_{n+1}}\bigr)$.

3.2.5. Векторная решётка мер $\operatorname{Meas}(D)$. Пусть D — локально компактное пространство с исчерпанием (3.7), $\operatorname{Meas}(\operatorname{clos} D_n)$, $n\in\mathbb{N}$, — векторные решётки вещественных мер Радона на компактах $\operatorname{clos} D_n$, $p_n:\mu\mapsto\mu\bigr|_{D_n}$ — сужение на $\operatorname{clos} D_n$ меры $\mu\in\operatorname{Meas}(\operatorname{clos} D_{n+1})$ (см. [5, гл. III]). Тогда векторную решетку всех вещественных мер Радона $\operatorname{Meas}(D)$ на D (см. [5, гл. III, § 2]) можно рассматривать как приведённый проективный предел $\operatorname*{proj\,lim}_n \operatorname{Meas}(\operatorname{clos} D_n)p_n$.

3.3. Положительные аддитивные функции на проективном пределе.

Определение 3.2. Пусть $(X,+)$ и $(Y,+)$ — полугруппы по сложению. Функция $a: X\to Y$ называется *аддитивной*, если $a(x_1+x_2)=a(x_1)+a(x_2)$ для любых $x_1,x_2\in X$. Множество всех таких аддитивных функций обозначается $\operatorname{add} Y^X$. Если X, Y — упорядоченные векторные пространства, то положим

$$\operatorname{add}^+ Y^X:=(\operatorname{add} Y^X)^+,\quad \operatorname{add}^{\mathrm{reg}} Y^X:=\operatorname{add}^+ Y^X-\operatorname{add}^+ Y^X$$

(ср. [1, I.1.4.III]).

Элементарно устанавливается следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Пусть $(X,+)$ и $(Y,+)$ — аддитивные упорядоченные группы. Тогда для любой функции $a\in\operatorname{add} Y^X$ имеем $a(0)=0\in Y$, $a(-x)=-a(x)$. Если X, Y — упорядоченные векторные пространства, то $\operatorname{add}^+ Y^X:=(\operatorname{add} Y^X)^+=\operatorname{incr}\operatorname{add} Y^X$.*

Предложение 3.3 (ср. [24, предложение 2.1])**.** *Пусть $X=\operatorname{proj\,lim} X_np_n$ — приведённый правильный проективный предел векторных решёток $(X_n,\leqslant_n)$. Для любой функции $a\in\operatorname{add}^+\mathbb{R}^X$ существуют номер $n_a\in\mathbb{N}$ и последовательность функций $a_n\in\operatorname{add}^+\mathbb{R}^{X_n}$, $n\geqslant n_a$, для которых*

$$a(x)=a_n(\operatorname{pr}_n x)\quad \textit{для всех } x\in X \tag{3.8}$$

при всех $n\geqslant n_a$. Обратно, если $a_n\in\operatorname{add}^+\mathbb{R}^{X_n}$, то (3.8) определяет $a\in\operatorname{add}^+\mathbb{R}^X$.

Очевидно, $\operatorname{add}^+\mathbb{R}^X$, $\operatorname{add}^+\mathbb{R}^{X_n}$ здесь можно заменить соответственно, на $\operatorname{add}^{\mathrm{reg}}\mathbb{R}^X$, $\operatorname{add}^{\mathrm{reg}}\mathbb{R}^{X_n}$.

Доказательство. Часть *«Обратно, …»* очевидна, поскольку суперпозиция $a\circ\operatorname{pr}_n$ аддитивной положительной функции a с линейной положительной функцией pr_n аддитивна и положительна.

Покажем сначала, что найдётся номер $n\in\mathbb{N}$, для которого $a_n(x)=a_n(x')$, как только $\operatorname{pr}_n x=\operatorname{pr}_n x'$, т.е. $a(x-x')=0$ при $\operatorname{pr}_n(x-x')=0$. Предположим, что такого номера n не существует. Тогда согласно предложению 3.2 для каждого $m\in\mathbb{N}$ найдётся элемент $x^{(m)}\in X$, для которого

$$\operatorname{pr}_m x^{(m)}=0,\quad a(x^{(m)})>0\quad \text{при всех } m\in\mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Из последнего строгого неравенства, переходя от $x^{(m)}$ к $k_mx^{(m)}$ с достаточно быстро растущей последовательностью $(k_m)\subset\mathbb{N}$, по аксиоме Архимеда можно добиться того, что последовательность $\bigl(a(k_mx^{(m)})\bigr)_{m\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$, где $a(k_mx^{(m)})=k_ma(x^{(m)})$, *не ограничена сверху* в $\mathbb{R}$ и

$$\operatorname{pr}_m(k_mx^{(m)})=k_m\operatorname{pr}_m x^{(m)}\overset{(3.9)}{=}0.$$

В силу этих равенств и линейности $p_1,p_2,\dots,p_{m-1}$ для каждого $k_mx^{(m)}$ имеем $\operatorname{pr}_n(k_mx^{(m)})=0$ при $n\leqslant m$, т.е. при фиксированном n лишь конечное число элементов последовательности $(\operatorname{pr}_n k_mx^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ отлично от нуля в векторной решётке X_n. Следовательно, согласно предложению 3.1(i) последовательность $(k_mx^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ *ограничена сверху* в X. Согласно предложению 3.2

функция $a \in \operatorname{add}^+ \mathbb{R}^X$ возрастающая. Поэтому и последовательность $\bigl(a(k_m x^{(m)})\bigr)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *ограничена сверху* в $\mathbb{K}$; противоречие.

Пусть n — номер, для которого $a(x) = a(x')$, как только $\operatorname{pr}_n x = \operatorname{pr}_n x'$. Тогда a_n однозначно определяется по (3.8). Аддитивность a_n следует из линейности pr_n и аддитивности a. Кроме того, если $x_n \in \operatorname{pr}_n X$, $0 \leqslant_n x_n$, то существует $x \in X$, для которого $\operatorname{pr}_n x = x_n$. Согласно предложению 3.1(i) имеем

$$x_n \overset{(3.4)}{=} \operatorname{pr}_n x^+, \quad a_n(x_n) = a_n(\operatorname{pr}_n x^+) = a(x^+) \geqslant 0 \quad \text{где } x^+ = \sup\{x, 0\} \geqslant 0 \text{ в } X.$$

Установлена положительность a_n. Теперь можно положить $n_a = n$. Остальные $a_m \in \operatorname{add}^+(\mathbb{R}^{X_m})$ однозначно определяются при $m \geqslant n$ по правилу

$$a_m(x_m) := a_n\bigl(p_n \circ p_{n+1} \circ \dots \circ p_{m-1}(x_m)\bigr), \quad m \geqslant n \geqslant n_a.$$

Предложение 3.3 доказано. □

Замечание 3.2. Предложение 3.3 обобщает тот известный факт, что линейные (положительные) функционалы на $C(D)$ и $L^p_{\mathrm{loc}}(D,\mu)$ (см. п. 3.2) имеют компактный носитель.

Замечание 3.3. Предложение 3.3 остается в силе и для $a \in \operatorname{add}^+ \mathbb{G}^X$, когда $(\mathbb{G}, +)$ — аддитивная линейно упорядоченная архимедова группа. Доказательство почти дословно такое же.

Следствие 3.1 (см. [24, предложение 2.1]). *В условиях предложения 3.3 для каждой функции $l \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X$ существуют $n_l \in \mathbb{N}$ и последовательность $l_n \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_n}$, $n \geqslant n_l$, для которых*

$$l(x) = l_n(\operatorname{pr}_n x) \quad \text{для всех } x \in X \tag{3.10}$$

при всех $n \geqslant n_l$. Обратно, если $l_n \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_n}$, то (3.10) определяет $l \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X$.

Здесь $\operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X$, $\operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_n}$ можно заменить соответственно, на $\operatorname{lin}^{\mathrm{reg}} \mathbb{R}^X := \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X - \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X$, $\operatorname{lin}^{\mathrm{reg}} \mathbb{R}^{X_n}$.

Доказательство. В дополнение к предложению 3.3 достаточно добавить, что суперпозиция двух линейных функций линейна. □

Определение 3.3. Пусть X, Y — векторные пространства. Функция $a : X \to Y$ называется *аффинной*, если имеет место (1.7). Множество всех аффинных функций из Y^X обозначаем как $\operatorname{aff} Y^X$. Если X, Y — упорядоченные векторные пространства, то $\operatorname{aff}^+ Y^X := (\operatorname{aff} Y^X)^+$.

Предложение 3.4. *$a \in \operatorname{aff} X^Y$ если и только если имеем единственное представление*

$$a = l_a + \mathbf{1}a(0), \quad \text{где } l_a \in \operatorname{lin} Y^X \text{ и } \mathbf{1} : x \mapsto 1 \in \mathbb{R} \text{ — тождественная единица на } X. \tag{3.11}$$

Пусть X, Y — упорядоченные векторные пространства. Тогда

(i) *$a \in \operatorname{incr} \operatorname{aff} Y^X$, если и только если в представлении (3.11) $l_a \in \operatorname{lin}^+ Y^X$;*
(ii) *если в (3.11) одновременно $l_a \in \operatorname{lin}^+ Y^X$ и $a(0) \in Y^+$, то $a \in \operatorname{aff}^+ Y^X$;*
(iii) *если $a \in \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X$, то одновременно $a(0) \in \mathbb{R}^+$ и $l_a \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X$.*

Нам не удалось найти доказательства этого тривиального предложения. Поэтому даём полное доказательство.

Доказательство. Достаточность очевидна. Единственность представления (3.11) следует из того факта, что $l_a(0) = 0 \in Y$. Для доказательства необходимости положим $l_a := a - \mathbf{1}a(0)$. Тогда $l_a(0) = 0 \in Y$ и l_a — аффинная функция. Следовательно, при любом $t \in [0,1]$ имеем

$$l_a(tx) = a\bigl(tx + (1-t)0\bigr) - a(0) = ta(x) + (1-t)a(0) - a(0) = t\bigl(a(x) - a(0)\bigr) = tl_a(x).$$

При $\mathbb{R} \ni t > 1$ имеем

$$\frac{1}{t} \in (0,1), \quad l_a(x) = l_a\left(\frac{1}{t} \cdot tx\right) = \frac{1}{t} l_a(tx),$$

откуда $l_a(tx) = tl_a(x)$ при $t \in \mathbb{R}^+$, т.е. l_a — положительно однородная функция. При этом

$$l_a(x) + l_a(-x) = \frac{1}{2} l_a(2x) + \frac{1}{2} l_a(-2x) = l_a(0) = 0, \quad l_a(x) = -l_a(-x)$$

для любого $x \in X$. Это доказывает однородность l_a на X. Аддитивность l_a следует из цепочки равенств

$$l_a(x_1+x_2)=l_a\left(\frac{1}{2}2x_1+\frac{1}{2}2x_2\right)=\frac{1}{2}l_a(2x_1)+\frac{1}{2}l_a(2x_2)=\frac{1}{2}2l_a(x_1)+\frac{1}{2}2l_a(x_2)=l_a(x_1)+l_a(x_2).$$

Утверждения (i) и (ii) очевидны. Если $a \in \operatorname{aff}^+ Y^X$, то, очевидно, $a(0) \in Y^+$.

(iii). Пусть теперь $Y = \mathbb{R}$ и $a \in \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X$. Тогда $a(0) \in \mathbb{R}^+$. Предположим, что $l_a(x) < 0$ для некоторого $x \in X^+$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$0 \leqslant a(nx) = l_a(nx) + a(0) = nl_a(x) + a(0), \quad 0 > nl_a(x) > -a(0),$$

что невозможно по аксиоме Архимеда для $\mathbb{R}$. □

Следствие 3.2. *В условиях предложения 3.3 для любых $a \in \operatorname{incr}\operatorname{aff}\mathbb{R}^X$ или $a \in \operatorname{aff}^+\mathbb{R}^X$ существуют $n_l \in \mathbb{N}$ и последовательность $l_n \in \operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{X_n}$, $n \geqslant n_l$, для которых*

$$a(x) = l_n(\operatorname{pr}_n x) + a_0 \quad \text{для всех } x \in X, \tag{3.12}$$

при всех $n \geqslant n_l$, где $a_0 = a(0) \in \mathbb{R}$, а при $a \in \operatorname{aff}^+\mathbb{R}^X$ ещё и $a_0 \in \mathbb{R}^+$. Обратно, если $l_n \in \operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{X_n}$, то (3.12) при $a_0 \in \mathbb{R}$ определяет $a \in \operatorname{incr}\operatorname{aff}\mathbb{R}^X$, а при $a_0 \in \mathbb{R}^+$ определяет $a \in \operatorname{aff}^+\mathbb{R}^X$.

Очевидно, здесь множества $\operatorname{incr}\operatorname{aff}\mathbb{R}^X$, $\operatorname{aff}^+\mathbb{R}^X$, $\operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{X_n}$ можно заменить соответственно, на множества $\operatorname{incr}^{\mathrm{reg}}\operatorname{aff}\mathbb{R}^X := \operatorname{incr}\operatorname{aff}\mathbb{R}^X - \operatorname{incr}\operatorname{aff}\mathbb{R}^X$, $\operatorname{aff}^{\mathrm{reg}}\mathbb{R}^X := \operatorname{aff}^+\mathbb{R}^X - \operatorname{aff}^+\mathbb{R}^X$, $\operatorname{lin}^{\mathrm{reg}}\mathbb{R}^{X_n}$, но без каких-либо дополнительных ограничений на $a_0 \in \mathbb{R}$.

Доказательство следует из предложений 3.4 и 3.3. □

Замечание 3.4. По общей схеме из [4, гл. 3] можно определить проективный предел несчётного семейства упорядоченных векторных пространств, как это сделано в [56]. В то же время нам не известно естественное обобщение утверждений п. 3.3, в частности, следствия 3.1, в таком варианте, хотя ранее в [56, § 2] и была предпринята такая попытка, оказавшаяся неудачной, поскольку некорректна [56, лемма 2].

Замечание 3.5. Если X — векторная решётка, то по теореме Рисса—Канторовича $\operatorname{lin}^{\mathrm{reg}}\mathbb{R}^X$ — векторная решётка и даже пространство Канторовича с положительным конусом $\operatorname{lin}^+\mathbb{R}^X$ (см. [1, теорема 6(3.1)]). Следствие 3.1 означает, что упорядоченное векторное пространство $\operatorname{lin}^{\mathrm{reg}}\mathbb{R}^X$, где $X = \operatorname{proj}\lim\limits_n X_n p_n$ — приведённый правильный проективный предел векторных решёток X_n, решёточно изоморфно индуктивному пределу $\operatorname{inj}\lim\limits_n i_n(\operatorname{lin}^{\mathrm{reg}}\mathbb{R}^{X_n})$ относительно положительных линейных функций $i_n : \operatorname{lin}^{\mathrm{reg}}\mathbb{R}^{X_n} \to \operatorname{lin}^{\mathrm{reg}}\mathbb{R}^{X_{n+1}}$, сопряжённых к линейным отображениям p_n. Не останавливаясь подробно на соответствующих определениях, отметим, что они легко конструируются по общей схеме (см. [4, гл. 3, § 2]) и по аналогии с индуктивными пределами топологических векторных пространств (см. [17], [38, гл. II и гл. IV, § 4]).

4. Верхняя огибающая функции на проективном пределе

Всюду далее $\mathbb{K}$ — пространство Канторовича с отношением порядка $\leqslant$. При этом отношения порядка и на иных упорядоченных множествах могут обозначаться тем же символом $\leqslant$.

4.1. Случай произвольной функции. Неравенство из правой части (2.5) влечет следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Пусть $f \overset{(2.6)}{\in} \mathbb{K}^X_{\pm\infty}$. Тогда*

$$f(x) \leqslant \operatorname{uenv}^L_f(x) \overset{(2.4u)}{=} \inf\Bigl\{l(x):\ l\in L,\ f\big|_{X_0} \leqslant l\big|_{X_0}\Bigr\} \quad \text{для любых } x \in X_0 \subset X \text{ и } L \subset \mathbb{K}^{X_0}. \tag{4.1}$$

Если правая часть (4.1) равна $-\infty$, то в (4.1) имеет место равенство.

В свете предложения 4.1 и в связи с задачами 1–3 будем исследовать условия, при которых правая часть в неравенстве из (4.1) принадлежит $\mathbb{K}$ и в (4.1) возможно равенство, или противоположное неравенство, в случае проективного предела векторных решёток X.

Определение 4.1. Пусть $X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ — приведённый правильный проективный предел векторных решёток X_n, $f \in \mathbb{K}^X_{\pm\infty}$. Функцию

$$\sup\text{-}\operatorname{pr}_n f : x_n \mapsto \sup\bigl\{f(x) :\ x \in X,\ \operatorname{pr}_n x = x_n\bigr\}, \quad x_n \in X_n, \tag{4.2}$$

называют sup-*проекцией* f *на* X_n. Функции $\sup\text{-}\operatorname{pr}_n f$ могут принимать значения $\pm\infty$.

Предложение 4.2. *В обозначениях определения 4.1 при* $f_n := \sup\text{-}\operatorname{pr}_n f : X_n \to \mathbb{K}_{\pm\infty}$

(i) $f_n(\operatorname{pr}_n x) \geqslant f_{n+1}(\operatorname{pr}_{n+1} x) \geqslant f(x)$ *для любых* $x \in X$ *и* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) *для любых* $X_0 \subset X$, $L \subset \mathbb{K}^{X_0}$, $n \in \mathbb{N}$, $L_n \subset \mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}$ *при условии включения*

$$L_n \circ \operatorname{pr}_n := \bigl\{l_n \circ \operatorname{pr}_n :\ l_n \in L_n\bigr\} \subset L \tag{4.3}$$

имеет место неравенство

$$\operatorname{uenv}^L_f(x) \overset{(2.4\mathrm{u})}{=} \inf\Bigl\{l(x) :\ l \in L,\ f\big|_{X_0} \leqslant l\big|_{X_0}\Bigr\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf\Bigl\{l_n(\operatorname{pr}_n x) :\ l_n \in L_n,\ f_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0} \leqslant l_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0}\Bigr\} \overset{(2.4\mathrm{u})}{=} \operatorname{uenv}^{L_n}_{f_n}(\operatorname{pr}_n x) \quad \textit{для всех } x \in X_0. \tag{4.4}$$

Доказательство. (i). Последнее неравенство сразу следует из определения 4.1, а первое — из (4.2) и соотношения (3.1) определения 3.1 элементов проективного предела.

(ii). Пусть правая часть (4.3) $< +\infty$ и

$$f_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0} \leqslant l_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0}, \quad l_n \in L_n.$$

Для $l := l_n \circ \operatorname{pr}_n \overset{(4.3)}{\in} L$ согласно определению 4.1 при всех $x \in X_0$ имеем

$$f(x) \overset{(4.2)}{\leqslant} f_n(\operatorname{pr}_n x) \leqslant l_n(\operatorname{pr}_n x) = l(x).$$

Отсюда $f\big|_{X_0} \leqslant l\big|_{X_0}$, и $l_n(\operatorname{pr}_n x)$ не меньше левой части (4.4). Переходя к inf по всем $l_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0} \geqslant f_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0}$, получаем требуемое неравенство (4.4). □

Определение 4.2. Пусть $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность элементов упорядоченного множества X. Её *верхний предел* определяется следующим образом:

$$\limsup_{k\to\infty} x^{(k)} := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} x^{(k)}, \tag{4.5}$$

если все sup и inf в правой части существуют. Последовательность $(x^{(k)})$ из $X = \operatorname{proj}\lim\limits_n X_n p_n$ *стабилизируется* к $x \in X$, если $\operatorname{pr}_n x^{(k)} = \operatorname{pr}_n x$ при всех $k \geqslant n$.

Предложение 4.3. *Пусть* $(x^{(k)})$ *— последовательность из* $X = \operatorname{proj}\lim\limits_n X_n p_n$. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *если* $\operatorname{pr}_k x^{(k)} = \operatorname{pr}_k x$ *для бесконечной последовательности номеров* k, *то последовательность* $(x^{(k)})$ *стабилизируется к* $x \in X$;

(ii) *если* X *— приведённый правильный проективный предел векторных решёток и* $(x^{(k)})$ *стабилизируется к* $x \in X$, *то она ограничена и существует* $\limsup\limits_{k\to\infty} x^{(k)} \overset{(4.5)}{=} x$.

Доказательство. Утверждение (i) сразу следует из (3.1)–(3.2).

(ii). Пусть $x = (x_n)$. При фиксированном n среди $\operatorname{pr}_n x^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, лишь конечное число проекций отличается от x_n. Согласно предложению 3.1(i) и определению (4.5) получаем требуемое. □

Теорема 1. *Пусть* $X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ *— приведённый правильный проективный предел векторных решёток* X_n, $f \in \mathbb{K}^X_{\pm\infty}$, $f_n \overset{(4.2)}{:=} \sup\text{-}\operatorname{pr}_n f$, $n \in \mathbb{N}$, *а также при некотором* $n \in \mathbb{N}$ *имеем* $f_n(X_n) \subset \mathbb{K}_{-\infty}$, $X_0 \subset X$, $L \subset \mathbb{K}^{X_0}$, $L_n \subset \mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}$, $n \in \mathbb{N}$, *существует* $n_f(X_0) \in \mathbb{N}$, *для которого*

$$f_n(\operatorname{pr}_n x) \overset{(4.4)}{=} \operatorname{uenv}^{L_n}_{f_n}(\operatorname{pr}_n x) \quad \text{для всех } x \in X_0 \text{ и } n \geqslant n_f(X_0). \tag{4.6}$$

Предположим, что для некоторого $x \in X_0$ *выполнено одно из следующих двух условий*:

(i) *для любой стабилизирующейся к* x *последовательности* $(x^{(k)})$ *из* X *выполнено неравенство*

$$\limsup_{k\to\infty} f\bigl(x^{(k)}\bigr) \leqslant f\Bigl(\limsup_{k\to\infty} x^{(k)}\Bigr); \tag{4.7}$$

(ii) f *— возрастающая функция на* X, *и для любой убывающей и стабилизирующейся к* $x \in X_0$ *последовательности* $(x^{(k)})$ *из* X *имеет место неравенство*

$$\inf_k f\bigl(x^{(k)}\bigr) \leqslant f\Bigl(\inf_k x^{(k)}\Bigr). \tag{4.8}$$

Если для L *и* L_n *включение* (4.3) *выполнено при всех* $n \geqslant n_f(X_0)$, *то*

$$f(x) \overset{(4.4)}{=} \operatorname{uenv}^{L}_{f}(x) \quad \text{для этого } x \in X_0. \tag{4.9}$$

Доказательство. Пусть для некоторого $c \in \mathbb{K}$ выполнено неравенство

$$c < \inf\Bigl\{l(x) :\ l \in L = \operatorname{lin}\mathbb{K}^{X_0},\ f\big|_{X_0} \leqslant l\big|_{X_0}\Bigr\} \overset{(2.4u)}{=} \operatorname{uenv}^{L}_{f}(x). \tag{4.10}$$

Ввиду (4.3) согласно предложению 4.2(ii), (4.4) и (4.6) при $n \geqslant n_f(X_0) \geqslant n_f$ имеем

$$c \overset{(4.4)}{<} \inf\Bigl\{l_n(x_n) :\ l_n \in L_n,\ f_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0} \leqslant l_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0}\Bigr\} \overset{(2.4u)}{=} \operatorname{uenv}^{L_n}_{f_n}(x_n) \overset{(4.6)}{=} f_n(x_n).$$

Отсюда по определению 4.1 для f_n при любом $n \geqslant n_f(X_0)$ найдётся $x^{(n)} \in X$, для которого

$$c < f\bigl(x^{(n)}\bigr), \quad \operatorname{pr}_n x^{(n)} = x_n. \tag{4.11}$$

Ввиду последнего равенства последовательность $(x^{(n)})$ согласно предложению 4.3 стабилизируется к x и $\limsup\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$. Из (4.11) согласно условию (4.7) из п. (i) получаем

$$c \overset{(4.11)}{\leqslant} \limsup_{k\to\infty} f\bigl(x^{(k)}\bigr) \overset{(4.7)}{\leqslant} f\Bigl(\limsup_{k\to\infty} x^{(k)}\Bigr) = f(x).$$

Отсюда и из (4.10) следует неравенство, противоположное (4.1), т.е. имеем (4.9).

Покажем, что из (ii) следует (i), т.е. (4.8) влечёт за собой (4.7). Последовательность $(x^{(k)})$, стабилизирующаяся к x, согласно предложению 4.3(ii) ограничена. Значит существуют $\hat{x}^{(k)} = \sup\limits_{n\geqslant k} x^{(n)}$. По построению $(\hat{x}^{(k)})$ — убывающая последовательность, которая по построению и предложению (3.1) также стабилизируется к x и $\inf \hat{x}^{(k)} = x$. Если выполнено условие (4.8), то в силу возрастания f по определению верхнего предела (4.5) имеем

$$f\Bigl(\limsup_{n\to\infty} x^{(n)}\Bigr) = f\Bigl(\inf_k \hat{x}^{(k)}\Bigr) \overset{(4.8)}{\geqslant} \inf_k f\bigl(\hat{x}^{(k)}\bigr) = \inf_k f\Bigl(\sup_{n\geqslant k} x^{(n)}\Bigr) \geqslant \inf_k \sup_{n\geqslant k} f\bigl(x^{(n)}\bigr) = \limsup_{n\to\infty} f\bigl(x^{(n)}\bigr).$$

Таким образом, выполнено (4.7) и доказательство завершено. □

Замечание 4.1. Согласно замечанию 3.1 в теореме 1 достаточно требовать выполнения условий (4.6) и (4.3) не при всех $n \geqslant n_f(X_0)$, а только для какой-либо бесконечной последовательности номеров $n \geqslant n_f(X_0)$.

4.2. Случай суперлинейной функции. Множество C называется *конусом* в векторном пространстве X, если для любого $t\in\mathbb{R}$ имеем $tC:=\{tc : c\in C\}\subset C$ при любом $t\in\mathbb{R}^+_*$. Конус C называется *выпуклым*, если для любых $x_1,x_2\in X$ имеем $x_1+x_2\in C$. Говорят, что конус C имеет *вершину* 0, если $0\in C$.

Определение 4.3. Функция $f: C\to\mathbb{K}_{-\infty}$ на выпуклом конусе C векторного пространства X называется *суперлинейной*, если она *супераддитивная*, т.е. $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$ для всех $x_1,x_2\in C$, и *строго положительно однородная*: $f(tx)=tf(x)$ для всех $x\in C$ и $t\in\mathbb{R}^+_*$. Если, кроме того, конус C имеет вершину 0, то требуем $f(0)\in\mathbb{K}$, откуда $f(0)\overset{(1.12)}{=}0$. Множество всех таких суперлинейных функций обозначим $\operatorname{spl}\mathbb{K}^C_{-\infty}$, $\mathbb{K}^C_{-\infty}:=(\mathbb{K}_{-\infty})^C$, $\operatorname{spl}^{\uparrow}\mathbb{K}^C_{-\infty}:=\operatorname{spl}\mathbb{K}^C_{-\infty}\cup\{\boldsymbol{+\infty}\}$, где функция $\boldsymbol{+\infty}$ — тождественная $+\infty\in\mathbb{K}_{+\infty}$ из (2.6). Каждая функция $f\in\operatorname{spl}\mathbb{K}^C_{-\infty}$ может быть канонически продолжена на всё пространство X как функция из $f\in\operatorname{spl}\mathbb{K}^X_{-\infty}$ значениями $-\infty$ вне C, но функция $\boldsymbol{+\infty}\in\operatorname{spl}^{\uparrow}\mathbb{K}^C_{-\infty}$ канонически продолжается на X как функция $\boldsymbol{+\infty}\in\operatorname{spl}^{\uparrow}\mathbb{K}^X_{-\infty}$. Аналогично определяются множества всех сублинейных функций $\operatorname{sbl}\mathbb{K}^C_{+\infty}:=-\operatorname{spl}\mathbb{K}^C_{-\infty}$, $\operatorname{sbl}_{\downarrow}\mathbb{K}^C_{+\infty}:=-\operatorname{spl}^{\uparrow}\mathbb{K}^C_{-\infty}\ni\boldsymbol{-\infty}$ и их канонические продолжения на X: значением $+\infty$ на $X\setminus C$ для функций из $\operatorname{sbl}\mathbb{K}^X_{+\infty}$, но $\boldsymbol{-\infty}\in\operatorname{sbl}_{\downarrow}\mathbb{K}^X_{+\infty}$ для $\boldsymbol{-\infty}\in\operatorname{sbl}_{\downarrow}\mathbb{K}^C_{+\infty}$.

В связи с приложениями к теории функций здесь и далее, в отличие от п. 1.1 из введения, нам удобнее иметь дело не с сублинейными, а с «противоположными» им суперлинейными функциями и их верхними огибающими по пространству линейных функций.

Предложение 4.4. *В обозначениях определений 4.1–4.3 пусть $f\in\operatorname{spl}\mathbb{K}^X_{-\infty}$, а также $f_n\overset{(4.2)}{:=}\sup\text{-}\operatorname{pr}_n f$. Если $f_n(X_n)\subset\mathbb{K}_{-\infty}$, то $f_n\in\operatorname{spl}\mathbb{K}^{X_n}_{-\infty}$.*

Доказательство. Пусть $x_n,x'_n\in X_n$. Супераддитивность следует из цепочки (не)равенств

$$\begin{aligned}f_n(x_n+x'_n)=\sup\Bigl\{f(x''):\ \operatorname{pr}_n x''=x_n+x'_n\Bigr\}\geqslant&\\ \geqslant\sup\Bigl\{f(x+x'):\ \operatorname{pr}_n x=x_n,\ \operatorname{pr}_n x'=x'_n\Bigr\}&\\ \geqslant\sup\Bigl\{f(x)+f(x'):\ \operatorname{pr}_n x=x_n,\ \operatorname{pr}_n x'=x'_n\Bigr\}&\\ =\sup\Bigl\{f(x):\ \operatorname{pr}_n x=x_n\Bigr\}+\sup\Bigl\{f(x):\ \operatorname{pr}_n x'=x'_n\Bigr\}&=f_n(x_n)+f_n(x'_n).\end{aligned}$$

Из определения 4.1 в силу положительной однородности проекции pr_n легко следует строго положительная однородность f_n. Кроме того, по определению 4.1 и условию $f_n(X_n)\subset\mathbb{K}_{-\infty}$ имеем $0=f(0)\leqslant f_n(0)<+\infty$, т.е. $f_n(0)\in\mathbb{K}$. Таким образом, $f_n\in\operatorname{spl}\mathbb{K}^{X_n}_{-\infty}$. □

Предложение 4.5. *Пусть $X:=\operatorname{proj}\lim X_n p_n$ — приведённый правильный проективный предел векторных решёток, X_0 — векторное подпространство в X. Тогда $\operatorname{pr}_n X_0$ — векторное подпространство в X_n, и для $L:=\operatorname{lin}\mathbb{K}^{X_0}$ и $L_n:=\operatorname{lin}\mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}$ при всех $n\in\mathbb{N}$ выполнено включение (4.3).*

Доказательство. Из линейности проекции pr_n следует, что образ $\operatorname{pr}_n X_0$ векторного подпространства X_0 — векторное подпространство в X_n, а для любой функции $l_n\in\operatorname{lin}\mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}$ суперпозиция двух линейных функций $l:=l_n\circ\operatorname{pr}_n\in\operatorname{lin}\mathbb{K}^{X_0}$, что означает $L_n\circ\operatorname{pr}_n\overset{(4.3)}{\subset}L$. □

Из теоремы 1 и предложения 4.5 получаем следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 до п. (ii) включительно, а также дополнительно $f\in\operatorname{spl}^{\uparrow}\mathbb{K}^X_{-\infty}$, и L, L_n выбраны как в предложении 4.5. Тогда имеет место равенство (4.9).*

Доказательство. При $f\in\operatorname{spl}\mathbb{K}^X_{-\infty}$ достаточное для (4.9) условие (4.3) содержится в предложении 4.5. При $f=\boldsymbol{+\infty}$ равенство (4.9) ввиду соглашений (2.6) очевидно. □

Замечание 4.2. Замечание 4.1 остаётся в силе и для следствия 4.1.

4.3. Случай вогнутой функции.

Определение 4.4. Функция $f : K \to \mathbb{K}_{-\infty}$ называется *вогнутой* на выпуклом подмножестве K векторного пространства X, если «противоположная» функция $-f : K \to \mathbb{K}_{+\infty}$, $(-f)(x) = -f(x)$ при $x \in K$ является выпуклой в смысле (1.6) с заменой X на K. Множество всех таких вогнутых функция будем обозначать $\operatorname{conc}\mathbb{K}^K_{-\infty}$, $\operatorname{conc}^{\uparrow}\mathbb{K}^K_{-\infty} \overset{(2.6)}{:=} (\operatorname{conc}\mathbb{K}^K_{-\infty}) \cup \{+\boldsymbol{\infty}\}$. Каждая функция $f \in \operatorname{conc}\mathbb{K}^K_{-\infty}$ может быть канонически продолжена на всё X как функция из $\operatorname{conc}\mathbb{K}^X_{-\infty}$ значениями $-\infty$ вне K, но функция $+\boldsymbol{\infty} \in \operatorname{conc}^{\uparrow}\mathbb{K}^K_{-\infty}$ канонически продолжается на X как функция $+\boldsymbol{\infty} \in \operatorname{conc}^{\uparrow}\mathbb{K}^X_{-\infty}$. Аналогично, $\operatorname{conv}\mathbb{K}^K_{+\infty}$ — множество всех выпуклых функций на K с каноническими выпуклыми продолжениями значением $+\infty$ на $X \setminus K$, но функция $-\boldsymbol{\infty} \overset{(2.6)}{\in} \operatorname{conv}_{\downarrow}\mathbb{K}^K_{+\infty} := (\operatorname{conv}\mathbb{K}^K_{+\infty}) \cup \{-\boldsymbol{\infty}\}$ канонически продолжается на X как $-\boldsymbol{\infty} \in \operatorname{conv}_{\downarrow}\mathbb{K}^X_{+\infty}$. В частности, $\operatorname{aff}\mathbb{K}^X = \operatorname{conc}\mathbb{K}^X \cap \operatorname{conv}\mathbb{K}^X$.

Также в связи с приложениями к теории функций здесь, в отличие от п. 1.1 из введения, нам удобнее иметь дело не с выпуклыми, а с вогнутыми функциями и их верхними огибающими по пространству аффинных функций.

Предложение 4.6. *В обозначениях определений 4.1, 4.2 и 4.3 пусть* $f \in \operatorname{conc}\mathbb{K}^X_{-\infty}$, *а также* $f_n \overset{(4.2)}{:=} \sup\text{-}\operatorname{pr}_n f$. *Если* $f_n(X_n) \subset \mathbb{K}_{-\infty}$, *то* $f_n \in \operatorname{conc}\mathbb{K}^{X_n}_{-\infty}$.

Доказательство. Пусть $x_n, x_n' \in X_n$, $t \in (0,1)$. Выпуклость следует из цепочки (не)равенств

$$\begin{aligned}
f_n\bigl(tx_n + (1-t)x_n'\bigr) &= \sup\Bigl\{f(x'') :\ \operatorname{pr}_n x'' = tx_n + (1-t)x_n'\Bigr\} \geqslant \\
&\geqslant \sup\Bigl\{f\bigl(x_t + x_t'\bigr) :\ \operatorname{pr}_n x_t = tx_n,\ \operatorname{pr}_n x_t' = (1-t)x_n'\Bigr\} = \\
&= \sup\Bigl\{f\bigl(tx + (1-t)x'\bigr) :\ \operatorname{pr}_n x = x_n,\ \operatorname{pr}_n x' = x_n'\Bigr\} \geqslant \\
&\geqslant \sup\Bigl\{tf(x) + (1-t)f(x') :\ \operatorname{pr}_n x = x_n,\ \operatorname{pr}_n x' = x_n'\Bigr\} = \\
&= t\sup\Bigl\{f(x) :\ \operatorname{pr}_n x = x_n\Bigr\} + (1-t)\sup\Bigl\{f(x) :\ \operatorname{pr}_n x' = x_n'\Bigr\} = \\
&= tf_n(x_n) + (1-t)f_n(x_n'),
\end{aligned}$$

использующей линейность проекции $\operatorname{pr}_n : X \to X_n$. □

Предложение 4.7. *Пусть выполнены условия предложения 4.5. Тогда для* $L := \operatorname{aff}\mathbb{K}^{X_0}$ *и* $L_n := \operatorname{aff}\mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* (4.3).

Доказательство. В предложении 4.5 уже отмечалось, что $\operatorname{pr}_n X_0$ — векторное подпространство в $\operatorname{pr}_n X_0$; следовательно, L_n корректно определено. Для любой функции $a_n \in \operatorname{aff}\mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}$ суперпозиция её с линейной функцией pr_n даёт $a := a_n \circ \operatorname{pr}_n \in \operatorname{aff}\mathbb{K}^{X_0}$, что означает $L_n \circ \operatorname{pr}_n \overset{(4.3)}{\subset} L$. □

Из теоремы 1 и предложения 4.7 получаем следующее утверждение.

Следствие 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 до п.* (ii) *включительно, а также дополнительно* $f \in \operatorname{conc}^{\uparrow}\mathbb{K}^X_{-\infty}$; *Пусть* L, L_n *выбраны как в предложении 4.7. Тогда имеем* (4.9).

Доказательство. При $f \in \operatorname{conc}\mathbb{K}^X_{-\infty}$ достаточное для (4.9) условие (4.3) содержится в предложении 4.7. При $f = +\boldsymbol{\infty}$ равенство (4.9) ввиду соглашений (2.6) очевидно. □

Замечание 4.3. Замечание 4.1 остаётся в силе и для следствия 4.2.

5. Супремальные функции и выметание

5.1. Супремальная функция.

Определение 5.1. *Супремальной функцией, порождённой функцией $q \in \mathbb{K}^H$ относительно* $H \subset X$ на упорядоченном множестве X с отношением порядка $\leqslant$, называют функцию

$$\operatorname{spf}_{H,q} : x \mapsto \sup\bigl\{q(h) : H \ni h \leqslant x\bigr\} \overset{(2.6)}{\in} \mathbb{K}_{\pm\infty}, \quad x \in X. \tag{5.1}$$

Предложение 5.1. *Супремальная функция* (5.1) *обладает следующими свойствами.*

1. $\operatorname{spf}_{H,q}(x) \in \mathbb{K}_{+\infty}$ *если и только если существует такой элемент $h \in H$, что $h \leqslant x$.*
2. $\operatorname{spf}_{H,q}$ *является возрастающей на X по H относительно отношения включения и по q в том смысле, что при $x \leqslant x' \in X$, $H \subset H' \subset X$ и для $q' \in \mathbb{K}^{H'}$ при $q\big|_H \leqslant q'\big|_H$ имеем $\operatorname{spf}_{H,q}(x) \leqslant \operatorname{spf}_{H',q'}(x')$.*
3. *Пусть X — упорядоченное векторное пространство.*
   (i) *Если $0 \in H$ и $q(0) \geqslant 0$, то $\operatorname{spf}_{H,q}$ — положительная функция;*
   (ii) *если H — конус в X и q — строго положительно однородная функция на H, то $\operatorname{spf}_{H,q}$ — строго положительно однородная функция на X; если, кроме того, H содержит отрицательный вектор, т.е. $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$, то $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = +\infty$ или $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = 0$, а также $\operatorname{spf}_{H,q}$ — положительная функция (пишем $\operatorname{spf}_{H,q} \in (\mathbb{K}^X_{-\infty})^+$);*
   (iii) *если H — выпуклое множество, $\operatorname{spf}_{H,q}(X) \subset \mathbb{K}_{-\infty}$ и $q \in \operatorname{conc} \mathbb{K}^H$, то $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc} \mathbb{K}^X_{-\infty}$;*
   (iv) *если H — выпуклый конус, $\operatorname{spf}_{H,q}(X) \subset \mathbb{K}_{-\infty}$ и q — суперлинейная функция из $\operatorname{spl} \mathbb{K}^H$, то $\operatorname{spf}_{H,q}$ — супераддитивная строго положительно однородная функция на X; если, кроме того, $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$, то $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{K}^X_{-\infty} := (\mathbb{K}^X_{-\infty})^+ \cap \operatorname{spl} \mathbb{K}^X_{-\infty}$.*

Доказательство. Пункты 1, 2 и 3i очевидным образом следуют из определения 5.1, (5.1).

3ii. Пусть $t \in \mathbb{R}^+_*$. Первая часть о строгой положительной однородности следует из равенств

$$\operatorname{spf}_{H,q}(tx) = \sup\bigl\{q(h) : H \ni h \leqslant tx\bigr\} = \sup\left\{tq\Bigl(\frac{1}{t}h\Bigr) : \ H \ni \frac{1}{t}h \leqslant x\right\} = t \operatorname{spf}_{H,q}(x).$$

Если при этом H содержит отрицательный вектор, то $-\infty \overset{(5.1)}{<} \operatorname{spf}_{H,q}(0)$, откуда либо $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = +\infty$, либо, в противном случае, ввиду равенства $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = 2\operatorname{spf}_{H,q}(0)$, имеем $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = 0$. В любом из случаев по п. 2 возрастающая на X функция $\operatorname{spf}_{H,q}$ положительна.

3iii. Пусть $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+_*$ и $t_1 + t_2 = 1$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in X$ имеет место цепочка (не)равенств

$$\begin{aligned}\operatorname{spf}_{H,q}(t_1x_1 + t_2x_2) &\overset{(5.1)}{=} \sup\bigl\{q(h) : H \ni h \leqslant t_1x_1 + t_2x_2\bigr\} \geqslant \\ &\geqslant \sup\Bigl\{q(t_1h_1 + t_2h_2) : \ H \ni h_1 \leqslant x_1, \ H \ni h_2 \leqslant x_2\Bigr\} \geqslant \\ &\geqslant \sup\Bigl\{t_1q(h_1) + t_2q(h_2) : \ H \ni h_1 \leqslant x_1, \ H \ni h_2 \leqslant x_2\Bigr\} = \\ &= \sup\bigl\{t_1q(h_1) : H \ni h_1 \leqslant x_1\bigr\} + \sup\bigl\{t_2q(h_2) : H \ni h_2 \leqslant x_2\bigr\} \overset{(5.1)}{=} \\ &= t_1 \operatorname{spf}_{H,q}(x_1) + t_2 \operatorname{spf}_{H,q}(x_2). \end{aligned} \tag{5.2}$$

3iv. Ввиду условий $+\infty \notin \operatorname{spf}_{H,q}(X)$ и $q \in \operatorname{spl} \mathbb{K}^H$ по-прежнему имеет место цепочка (не)равенств (5.2), но уже для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+_*$ и $x_1, x_2 \in X$, что доказывает супераддитивность и строго положительную однородность $\operatorname{spf}_{H,q}$ на X. При выполнении условий $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$ и $+\infty \notin \operatorname{spf}_{H,q}(X)$ согласно п. 3ii получаем $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = 0$ и $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{K}^X_{-\infty}$. □

Предложение 5.2 (ср. [24, предложение 4.2])**.** *Пусть $X = \operatorname{proj}\lim\limits_n X_n p_n$ — приведённый правильный проективный предел векторных решёток, $n \in \mathbb{N}$, $H \subset X$ и $H_n := \operatorname{pr}_n H$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$q_1 \in \mathbb{K}^{H_1}, \quad q := q_1 \circ \operatorname{pr}_1 : H \to \mathbb{K}, \quad q_n := q_1 \circ p_1 \circ \dots \circ p_{n-1} : H_n \to \mathbb{K}. \tag{5.3}$$

Тогда в обозначении (5.1) *определения* 5.1 *супремальная функция* $\operatorname{spf}_{H,q}$, *порождённая функцией* q *относительно* H, *через её* $\sup$*-проекцию* $\sup\text{-}\mathrm{pr}_n$ *из определения* 4.1 *в обозначении* (4.2) *на* X_n *связана с супремальными функциями* $\operatorname{spf}_{H_n,q_n}$ *равенствами*

$$\sup\text{-}\mathrm{pr}_n \operatorname{spf}_{H,q} = \operatorname{spf}_{H_n,q_n} \quad \text{на } X_n \text{ при любых } n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Доказательство. При $x_n \in X_n$ согласно определениям 4.1 и 5.1 для левой части (5.4) имеем

$$\begin{gathered}\bigl(\sup\text{-}\mathrm{pr}_n \operatorname{spf}_{H,q}\bigr)(x_n) \overset{(4.2)}{=} \sup\Bigl\{\operatorname{spf}_{H,q}(x):\ x\in X,\ \mathrm{pr}_n x = x_n\Bigr\} =\\ \overset{(5.1)}{=} \sup\Bigl\{\sup\bigl\{q(h):\ H\ni h\leqslant x\bigr\}:\ x\in X,\ \mathrm{pr}_n x = x_n\Bigr\} =\\ = \sup\Bigl\{q(h):\ H\ni h\leqslant x,\ \mathrm{pr}_n x = x_n\Bigr\} \overset{(5.3)}{=} \sup\Bigl\{q_n(\mathrm{pr}_n h):\ H\ni h\leqslant x,\ \mathrm{pr}_n x = x_n\Bigr\}\\ = \sup\Bigl\{q_n(h_n):\ h\in H,\ h\leqslant x,\ h_n=\mathrm{pr}_n h,\ \mathrm{pr}_n x = x_n\Bigr\}.\end{gathered} \tag{5.5}$$

В то же время для правой части (5.4) согласно определению 5.1 имеем

$$\operatorname{spf}_{H_n,q_n}(x_n) \overset{(5.1)}{=} \sup\Bigl\{q_n(h_n): h_n\in H_n,\ h_n \leqslant_n x_n\Bigr\}, \tag{5.6}$$

где $\leqslant_n$ — отношение порядка на X_n. Если покажем, что множество

$$\Bigl\{h_n:\ h\in H,\ h\leqslant x,\ h_n=\mathrm{pr}_n h,\ \mathrm{pr}_n x = x_n\Bigr\}, \tag{5.7}$$

по которому берётся $\sup$ в правой части (5.5), совпадает с множеством

$$\Bigl\{h_n:\ h_n\in H_n,\ h_n\leqslant_n x_n\Bigr\}, \tag{5.8}$$

по которому берётся $\sup$ в правой части (5.6), то (5.5) совпадает с (5.6) при всех $x_n \in X_n$, и равенство (5.4) будет доказано.

Если h_n — элемент множества (5.7), то $h_n \leqslant_n x_n$; следовательно, множество (5.7) включается в (5.8).

Обратно, пусть h_n — элемент множества (5.8). Существуют элементы $h \in H$ и $x' \in X$, для которых $h_n = \mathrm{pr}_n h$, $\mathrm{pr}_n x' = x_n$. Полагаем $x = \sup\{h, x'\}$. Тогда $\mathrm{pr}_n x = x_n$ и, очевидно, $h \leqslant x$. Следовательно, множество (5.8) содержится в (5.7), что и требовалось. □

5.2. Выметание и росток функции.

Определение 5.2 (обобщение [26, определение 1], [1, III.1.3], [13, гл. XI, § 3, O41])**.** Пусть X — упорядоченное множество с отношением порядка $\leqslant$, $H \subset X$, $q \in \mathbb{K}^H$, $X_0 \subset X$. Функцию $b : X_0 \to \mathbb{K}_{\pm\infty}$ называют *выметанием функции* q *относительно пары* (H, X_0) и пишем $q \prec_H^{X_0} b$, если для любых $h \in H$ и $x \in X_0$ при $h \leqslant x$ имеем $q(h) \leqslant b(x)$. Пусть $L \subset \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$. Следуя [1, III.1.3] и [24, § 4], будем называть «луч»

$$\operatorname{spr}(q; H, X_0, L) := \bigl\{b \in L:\ q \prec_H^{X_0} b\bigr\}, \tag{5.9}$$

ростком функции q *относительно тройки* (H, X_0, L).

Элементарную взаимосвязь между супремальной функцией и выметанием даёт следующее утверждение.

Предложение 5.3 (ср. [26, предложение 1])**.** *В обозначениях определений* 5.1 *и* 5.2

$$\begin{gathered}\operatorname{spf}_{H,q}(x) \overset{(5.1)}{=} \sup\Bigl\{q(h) : H\ni h\leqslant x\Bigr\} \leqslant \inf\Bigl\{b(x) : q\prec_H^{X_0} b\Bigr\} \leqslant\\ \overset{(5.9)}{\leqslant} \inf\Bigl\{b(x):\ b\in \operatorname{spr}(q;H,X_0,L)\Bigr\} = \inf\Bigl(\operatorname{spr}(q;H,X_0,L)(x)\Bigr) \quad \text{для всех } x\in X_0.\end{gathered} \tag{5.10}$$

Так, для $x \in X_0$ *существование элемента* $h \in H$, *удовлетворяющего неравенству* $h \leqslant x$, *влечёт за собой строгое неравенство* $-\infty < \inf\bigl\{b(x) : q\prec_H^{X_0} b \in L\bigr\}$, *т.е.* $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q;H,X_0,L)(x)\bigr) \neq -\infty$.

Доказательство. Если в (5.10) левая часть равна $-\infty$ или правая часть равна $+\infty$, то неравенство (5.10) очевидно. Если левая часть $\neq -\infty$, то существует элемент $h \in H$, удовлетворяющий неравенству $h \leqslant x$. Для любых $H \ni h \leqslant x \in x_0$ при $q \prec_H^{X_0} b$ имеем $q(h) \leqslant b(x)$, откуда $\sup\limits_{h \leqslant x} q(h) \leqslant b(x)$. Применяя к правой части операцию inf по всем выметаниям b функции q относительно пары (H, X_0), получаем первое неравенство в (5.10). Следующее неравенство в (5.10) и заключительное утверждение — очевидное следствие из (5.10) ввиду соотношения $L \subset \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$. □

Замечание 5.1. В свете предложения 5.3 ключевой интерес представляют условия на $(X, \leqslant)$, H, q, X_0, L, при которых в (5.10) имеет место равенство левой и правой частей — задачи 1 и 2 из п. 2.3 введения. Для менее требовательной задачи 3 — условия на те же объекты и на x, при которых из $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \neq -\infty$ следует $\operatorname{spf}_{H,q}(x) \neq -\infty$.

Предложение 5.4. *В обозначениях определения 5.2 имеют место следующие свойства.*

1. *При $L \subset L' \subset \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$ для всех $x \in X_0$ справедливы соотношения*
$$\begin{gathered} \operatorname{spr}(q; H, X_0, L) \subset \operatorname{spr}(q; H, X_0, L'), \\ \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \geqslant \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L')(x)\bigr). \end{gathered} \tag{5.11}$$
2. *Если $L \subset \operatorname{incr} \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$, то функция $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(\cdot)\bigr)$ возрастающая на X_0.*
3. *Если $H \subset H' \subset X$, то для всех $x \in X_0$ справедливы соотношения*
$$\begin{gathered} \operatorname{spr}(q; H, X_0, L) \supset \operatorname{spr}(q; H', X_0, L), \\ \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \leqslant \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H', X_0, L)(x)\bigr). \end{gathered} \tag{5.12}$$
4. *Если $q' \in \mathbb{K}^H$ и $q\big|_H \leqslant q'\big|_H$, то для всех $x \in X_0$ справедливы соотношения*
$$\begin{gathered} \operatorname{spr}(q; H, X_0, L) \supset \operatorname{spr}(q'; H, X_0, L), \\ \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \leqslant \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H', X_0, L)(x)\bigr). \end{gathered} \tag{5.13}$$
5. *Если $X_0 \subset X_0' \subset X$ и для множества функций $L' \subset \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0'}$ множество их сужений $L'\big|_{X_0}$ на X_0 включено в L, то для $x \in X_0$*
$$\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \leqslant \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0', L')(x)\bigr).$$
6. *Пусть X — упорядоченное векторное пространство.*
   (i) *Если $0 \in H$ и $q(0) \geqslant 0$, то $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(\cdot)\bigr)$ — положительная функция на X_0;*
   (ii) *если X_0 — конус в X, а все функции из $L \subset \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$ строго положительно однородны, то $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)\bigr) \subset \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$ — строго положительно однородная функция на X_0; если, кроме того, $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$ и $0 \in X_0$, то $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(0)\bigr) = +\infty$ или $= 0$, а при $L \subset \operatorname{incr} \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$ имеем $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(\cdot)\bigr) \in (\mathbb{K}_{-\infty}^{X_0})^+$;*
   (iii) *если подмножество $X_0 \subset X$ —* полугруппа по сложению *(соответственно,* выпуклое множество *или* выпуклый конус с вершиной и $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$*) и все функции из $L \subset \mathbb{K}_{-\infty}$* супераддитивны *(соответственно,* вогнуты *или* суперлинейны*) и $\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(X_0) \subset \mathbb{K}_{-\infty}^{X_0}$, то функция $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)\bigr)$* супераддитивна *(соответственно,* вогнута *или* суперлинейна*) на X_0.*

Доказательство. Свойства из пп. 1–5 и 6i легко следуют из определения 5.2.

6ii. Первая часть утверждения следует из равенств с $t \in \mathbb{R}_*^+$:
$$\inf\Bigl\{b(tx):\ b \in \operatorname{spr}(q; H, X_0, L)\Bigr\} = t \inf\Bigl\{b(x):\ b \in \operatorname{spr}(q; H, X_0, L)\Bigr\}. \tag{5.14}$$
Если $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$, то $\operatorname{spf}_{H,q}(0) > -\infty$. Согласно предложению 5.3 $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(0)\bigr) > -\infty$. При $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(0)\bigr) \neq +\infty$ имеем $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(0)\bigr) \in \mathbb{K}$, откуда в силу строгой положительной однородности $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(0)\bigr) = 0$. Согласно п. 2 при $L \subset \operatorname{incr} \mathbb{K}_{\pm\infty}^{X_0}$ это даёт положительность функции $\inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(\cdot)\bigr)$ на X_0.

6iii. Для краткости положим $S := \operatorname{spr}(q; H, X_0, L)$. Для $t_1 = t_2 = 1$ (соответственно, для $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+_*$, $t_1 + t_2 = 1$, или для $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+_*$) имеем

$$\inf\Bigl\{b(t_1x_1 + t_2x_2) : b \in S\Bigr\} \geqslant \inf\Bigl\{b(t_1x_1) + b(t_2x_2) : b \in S\Bigr\} \geqslant \\ \geqslant \inf\Bigl\{t_1b(x_1) + t_2b(x_2) : b \in S\Bigr\} \geqslant t_1 \inf\Bigl\{b_1(x_1) : b_1 \in S\Bigr\} + t_2 \inf\Bigl\{b_2(x_2) : b_2 \in S\Bigr\}.$$

Для доказательства суперлинейности осталось отметить, что согласно п. 6ii имеем $(\inf S)(0) = 0$. □

Предложение 5.5 (обобщение [24, предложение 4.1], [1, III.1.3.VI])**.** *В обозначениях определений* 5.1 *и* 5.2 *имеет место равенство*

$$\operatorname{spr}(q; H, X_0, L) = \Bigl\{b \in L : \ \operatorname{spf}_{H,q}\big|_{X_0} \leqslant b\big|_{X_0}\Bigr\}. \tag{5.15}$$

Доказательство. Покажем, что правая часть (5.15) включена в левую. Пусть

$$\operatorname{spf}_{H,q}\big|_{X_0} \leqslant b\big|_{X_0}, \quad \text{где } b \in L. \tag{5.16}$$

Допустим, что $h \in H$ и $h \leqslant x \in X_0$. Тогда по определению 5.1(5.1) супремальной функции, в силу её возрастания на X согласно предложению 5.1, п. 2, имеем

$$q(h) = \operatorname{spf}_{H,q}(h) \leqslant \operatorname{spf}_{H,q}(x) \overset{(5.16)}{\leqslant} b(x). \tag{5.17}$$

Согласно определению 5.2 это означает, что b — выметание q относительно пары (H, X_0), т.е. $q \prec_H^{X_0} b$, и $b \overset{(5.9)}{\in} \operatorname{spr}(q; H, X_0, L)$. Таким образом, правая часть (5.15) включена в левую.

Обратно, пусть $b \in \operatorname{spr}(q; H, X_0, L)$. Тогда по определениям супремальной функции (5.1) и ростка функции q относительно тройки (H, X_0, L) в определении 5.2 при $x \in X_0$ имеем

$$\operatorname{spf}_{H,q}(x) \overset{(5.1)}{:=} \sup\Bigl\{q(h) : \ H \ni h \leqslant x\Bigr\} \overset{(5.9)}{\leqslant} b(x) \quad \text{при всех } x \in X_0.$$

Таким образом, левая часть (5.15) включена в правую. □

6. Представление верхней огибающей на проективном пределе

6.1. Порядково-линейная версия для выпуклого конуса H. В этом подразделе $\mathbb{K}$ — пространство Канторовича. Нам потребуется (ср. с теоремами об огибающей из введения) следующая теорема.

Теорема (теорема Хана—Банаха—Канторовича об огибающей; [8, 1.4.14(2)])**.** *Пусть X — векторное пространство и $f \in \mathbb{K}^X$. Следующие три утверждения попарно эквивалентны.*

1. *f — суперлинейная функция на X, т.е. $f \in \operatorname{spl}\mathbb{K}^X$.*

2. *$f(x) \overset{(2.4u)}{=} \operatorname{uenv}_f^{\operatorname{lin}\mathbb{K}^X}(x)$ для всех $x \in X$.*

3. *Значения $f(x)$ тождественно равны*

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^n t_k f(x_k) : \ \sum_{k=1}^n t_k x_k = x, \ x_k \in X, \ t_k \in \mathbb{R}^+, \ n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{при всех } x \in X. \tag{6.1}$$

Определение 6.1. Пусть $(X, \leqslant)$ — упорядоченное множество, $X_0 \subset X$. Подмножество $H \subset X$ называется *минорирующим* для X_0, если для любого $x \in X_0$ существует такой элемент $h \in H$, что $h \leqslant x$.

Теорема 2. *Пусть $X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ — приведённый правильный проективный предел векторных решёток X_n, $n \in \mathbb{N}$, $q_1 \in \operatorname{incr}\operatorname{spl}\mathbb{K}^{X_1}$ и $q \overset{(5.3)}{:=} q_1 \circ \operatorname{pr}_1$, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство, $H \subset X$ — выпуклый конус, $H_n := \operatorname{pr}_n H \subset X_n$. Пусть выполнены следующие условия:*

(i) *каждая проекция H_n содержит отрицательный элемент из X_n, т.е. $H_n \cap (-X_n^+) \neq \varnothing$;*

(ii) *для каждого $n \in \mathbb{N}$ проекция H_n является минорирующая для $\operatorname{pr}_n X_0$;*

(iii) *для любого ограниченного сверху подмножества* $H' \subset H$ *имеем* $\sup H' \in H$;

(iv) *если последовательность*

$$(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset H \tag{6.2}$$

является убывающей и ограниченной снизу в X, *то* $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \in H$;

(v) *если последовательность* (6.2) *является убывающей в* X *и*

$$q(h^{(1)}) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \in \mathbb{K}, \tag{6.3}$$

то последовательность (6.2) *ограничена снизу в* X, *а также*[1]

$$q\bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\bigr) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}), \quad \inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \overset{\text{(iv)}}{\in} H. \tag{6.4}$$

Тогда для $L := \operatorname{lin}\mathbb{K}^{X_0}$ *супремальная функция* $\operatorname{spf}_{H,q}$ *со значениями в* $\mathbb{K}_{-\infty}$ *является супераддитивной и положительно однородной, а также допускает представление*

$$\begin{aligned}
\operatorname{spf}_{H,q}(x) &\overset{(5.1)}{:=} \sup\Bigl\{q(h):\ H \ni h \leqslant x\Bigr\} = \\
&= \inf\Bigl\{l(x):\ l \in L;\ q(h) \leqslant l(x') \text{ при всех } h \in H,\ h \leqslant x',\ x' \in X_0\Bigr\} = \\
&= \inf\Bigl\{l(x):\ l \in L,\ q \prec_H^{X_0} l\Bigr\} \overset{(5.9)}{=:} \inf\bigl(\operatorname{spr}(q; H, X_0, L)(x)\bigr) \quad \text{для всех } x \in X_0.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Если усилить (i) *до* $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$, *то* $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{K}^X_{-\infty}$.

Доказательство. Будет использовано следствие 4.1 из теоремы 1.

Положим $f := \operatorname{spf}_{H,q}$, $f_n = \sup\text{-}\operatorname{pr}_n f$, $L := \operatorname{lin}\mathbb{K}^{X_0}$ и $L_n := \operatorname{lin}\mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}$. Тогда согласно предложению 4.5 выполнено (4.3) и по предложению 5.2 в обозначениях (5.3) имеет место равенство

$$f_n = \sup\text{-}\operatorname{pr}_n \operatorname{spf}_{H,q} \overset{(5.4)}{=} \operatorname{spf}_{H_n,q_n} \quad \text{на } X_n \text{ при любых } n \in \mathbb{N}, \tag{6.6}$$

где согласно предложению 5.1, п. 3iv, с учётом условия (i), $\operatorname{spf}_{H_n,q_n} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{K}^{X_n}_{-\infty}$, т.е. $f_n \overset{(6.6)}{\in} \operatorname{spl}^+ \mathbb{K}^{X_n}_{-\infty}$. Кроме того, по предложению 5.1, п. 3iv, функция $\operatorname{spf}_{H,q}$ супераддитивна и строго положительно однородна, а при $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$ ещё и $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = 0$, $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{K}^X_{-\infty}$.

Напомним, что $\operatorname{pr}_n X_0$ — векторное подпространство в X_n согласно предложению 4.5. Рассмотрим сужения $f_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0} = \operatorname{spf}_{H_n,q_n}\big|_{\operatorname{pr}_n X_0}$. В правой части здесь — суперлинейная функция на $\operatorname{pr}_n X_0$ со значениями только в $\mathbb{K}$ по определению 5.1 (см. равенство (5.1)) супремальной функции $\operatorname{spf}_{H_n,q_n}\big|_{\operatorname{pr}_n X_0}$ и по условию (ii) о минорировании. Таким образом,

$$f_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}.$$

Тогда по теореме Хана—Банаха—Канторовича об огибающей, применённой в части импликации 1⇒2 в векторном пространстве $\operatorname{pr}_n X_0$, имеем

$$f_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0} \overset{(2.4u)}{=} \operatorname{uenv}^{\operatorname{lin}\mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}}_{f_n|_{\operatorname{pr}_n X_0}}$$

на $\operatorname{pr}_n X_0$. Последнее равенство означает, что выполнено условие (4.6) теоремы 1.

Функция $f = \operatorname{spf}_{H,q}$ является возрастающей на X согласно п. 2 предложения 5.1. Проверим выполнение условия (ii) теоремы 1. Для этого требуется, чтобы для любой убывающей и стабилизирующейся к $x \in X_0$ последовательности $(x^{(k)})$ из X было выполнено неравенство (4.8). Согласно определению 4.2

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} x^{(k)} = x \in X_0, \quad x^{(k+1)} \leqslant x^{(k)}, \quad x^{(k)} = \sup_{m\geqslant k} x^{(m)}, \quad \operatorname{pr}_n x^{(k)} = \operatorname{pr}_n x^{(n)} \quad \text{при всех } k \geqslant n \geqslant 1. \tag{6.7}$$

[1] Из неравенства в (6.4) следует равенство, поскольку противоположное неравенство для $q \in \operatorname{incr}\mathbb{K}^X$ очевидно.

По определению 5.1 супремальной функции

$$f(x^{(k)}) = \operatorname{spf}_{H,q}(x^{(k)}) \overset{(5.1)}{=} \sup\Bigl\{q(h) :\ h \leqslant x^{(k)},\ h\in H\Bigr\} =$$
$$= \sup\Bigl\{q_1(\operatorname{pr}_1 h) :\ h \leqslant x^{(k)},\ h\in H\Bigr\} =: a_k \in \mathbb{K}_{-\infty}. \quad (6.8)$$

Последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — убывающая. При $\inf_{k\in\mathbb{N}} a_k = -\infty$ условие (4.8) выполнено автоматически. Поэтому далее убывающая последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена в $\mathbb{K}$ и

$$a_0 \overset{(6.7)}{:=} \inf_{k\in\mathbb{N}} a_k \overset{(6.8)}{=} \inf f(x^{(k)}) \in \mathbb{K}, \quad a_0 \leqslant a_k \leqslant a_1 \quad \text{для всех } k\in\mathbb{N}. \tag{6.9}$$

По условию (iii) существует убывающая в X последовательность

$$h^{(k)} := \sup\Bigl\{h\in H : h \leqslant x^{(k)}\Bigr\} \in H, \quad k\in\mathbb{N}, \quad h^{(k)} \leqslant x^{(k)}, \tag{6.10}$$

для которой в силу возрастания q_1 и $q = q_1 \circ \operatorname{pr}_1$ имеем равенства

$$a_k \overset{(6.8)}{=} q(h^{(k)}) = q_1(\operatorname{pr}_1 h^{(k)}), \quad k\in\mathbb{N}. \tag{6.11}$$

Пусть сначала выполнено (6.3), т.е. $\inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \in \mathbb{K}$. Тогда по условию (v) последовательность (6.2) ограничена снизу в X и по условию (iv) существует

$$h = \inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \in H, \tag{6.12}$$

а из (6.10) и стабилизации последовательности $(x^{(k)})$ к $x\in X_0$ следует

$$h \leqslant x. \tag{6.13}$$

Из условия (v) доказываемой теоремы и из (6.10) по построению (6.12) вектора $h\in H$ вытекает

$$q(h) = q\Bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\Bigr) \overset{(\mathrm{v})}{\geqslant} \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \overset{(6.11)}{=} \inf_{k\in\mathbb{N}} a_k \overset{(6.9)}{=} a_0.$$

Следовательно, согласно (6.8) и (6.13), для некоторого $h\in H$, $h \overset{(6.13)}{\leqslant} x$, выполнено

$$q(h) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{spf}_{H,q}(x^{(k)}).$$

По определению 5.1 супремального функционала $\operatorname{spf}_{H,q}$ и ввиду (6.8) это означает, что

$$\inf f(x^{(k)}) = \inf_k \operatorname{spf}_{H,q}(x^{(k)}) \leqslant \operatorname{spf}_{H,q}\Bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} x^{(k)}\Bigr) = f\Bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} x^{(k)}\Bigr). \tag{6.14}$$

Таким образом, в случае ограниченной снизу последовательности $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ выполнено (4.8).

Если же (6.3) не выполнено, т.е. $q(h^{(1)}) \geqslant \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) = -\infty$ и по условию (iv) последовательность (6.2) не ограничена снизу, то согласно (6.11) имеем $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k = -\infty$. Как уже отмечалось выше, при $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k = -\infty$ условие (4.8), или (6.14), выполнено автоматически.

По теореме 1 в виде следствия 4.1 заключаем, что суперлинейная функция $f = \operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl} \mathbb{K}_{-\infty}^X$ допускает описание через верхнюю огибающую на X_0:

$$\operatorname{spf}_{H,q}(x) = \inf\Bigl\{l(x) :\ l\in L,\ \operatorname{spf}_{H,q} \leqslant l \text{ на } X_0\Bigr\}, \quad x\in X_0.$$

Согласно равенству (5.15) предложения 5.5 правая часть здесь совпадает с правой частью (6.5). □

Следствие 6.1 (развитие [24, теорема]). *Пусть $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ и выполнены все условия теоремы 2 за исключением условий* (iii) *и* (iv)*, которые заменим на одно условие*

(iii–iv) *для любой ограниченной в X последовательности* (6.2) *существует верхний предел*

$$\limsup_{k\to\infty} h^{(k)} \overset{(4.5)}{:=} \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} h^{(k)} \in H \quad (\text{см. определение } 4.2). \tag{6.15}$$

Тогда функция $\operatorname{spf}_{H,q}$ *такая же, как в теореме* 2*, и выполнено заключение* (6.5)*, где* $L := \operatorname{lin}\mathbb{R}^{X_0}$ *можно заменить на* $\operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{X_0}$*, если в* H *есть отрицательный вектор, т.е.* $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$*.*

Доказательство. Для доказательства потребуется следующая лемма.

Лемма 6.1. *Для каких бы то ни было условий на подмножество* $H \subset X$ *условие* (iii–iv) *эквивалентно сочетанию условий* (iv) *теоремы* 2 *и*

(iii′) *для любой ограниченной сверху в* X *последовательности* (6.2) *имеем* $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \in H$*.*

Доказательство леммы 6.1. Достаточность условий (iv) теоремы 2 и (iii′) для выполнения условия (iii–iv) очевидна по определению верхнего предела в (6.15), или в (4.5).

Обратно, пусть выполнено условие (iii–iv). Если $h, h' \in H$, то для счётной последовательности $b := (h, h', h, h', \dots)$ чередующихся пар h, h' по условию (iii–iv) имеем

$$\sup\{h, h'\} = \sup b \overset{(4.5)}{=} \limsup b \overset{(6.15)}{\in} H.$$

Таким образом, точная верхняя граница любого конечного подмножества из H принадлежит H. Отсюда, если последовательность (6.2) ограничена сверху, то новая последовательность $\bigl(\sup_{k\leqslant n} h^{(k)}\bigr)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ ограничена и по условию (iii–iv)

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Bigl\{ \sup_{k\leqslant n} h^{(k)} \Bigr\} \overset{(4.5)}{=} \limsup_{n\to\infty} \Bigl(\sup_{k\leqslant n} h^{(k)} \Bigr) \overset{(6.15)}{\in} H.$$

Это означает, что выполнено условие (iii′). Кроме того, для любой убывающей ограниченной снизу, а значит и ограниченной, последовательности (6.2) её верхний предел, если он существует, равен точной нижней границе этой последовательности. Таким образом, из условия (iii–iv) следует условие (iv) теоремы 2. ☐

Условие (iii′) слабее условия (iii) теоремы 2, поэтому нам придётся изменить часть доказательства теоремы 2. Далее приведём лишь те этапы доказательства, которые для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ отличаются от соответствующих частей доказательства теоремы 2. Изменения начинаем сразу после (6.9).

Пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$. Ввиду (6.9) и (6.8) найдётся вектор $h^{(k)}_\varepsilon \in H$, для которого

$$q(h^{(k)}_\varepsilon) \geqslant a_k - \varepsilon, \quad h^{(k)}_\varepsilon \leqslant x^{(k)} \leqslant x^{(1)}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.16}$$

Так как последовательность $(h^{(k)}_\varepsilon)_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена сверху, по условию (iii′) существуют векторы

$$h^{(k)} := \sup_{n\geqslant k} h^{(n)}_\varepsilon \in H, \quad h^{(k)}_\varepsilon \leqslant h^{(k)} \overset{(6.16)}{\leqslant} x^{(k)} \leqslant x^{(1)}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{6.17}$$

которые образуют убывающую последовательность (6.2). При этом согласно (6.16) ввиду стабилизации $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ из (6.7) к $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_0$, $x_n := \operatorname{pr}_n x \in X_n$, имеем

$$\operatorname{pr}_n h^{(k)} \leqslant_n \operatorname{pr}_n x^{(k)} = x_n \quad \text{при } k \geqslant n \in \mathbb{N}, \quad q(h^{(k)}) \geqslant q(h^{(k)}_\varepsilon) \overset{(6.16)}{\geqslant} a_k - \varepsilon. \tag{6.18}$$

Пусть сначала выполнено (6.3), т.е. $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \in \mathbb{R}$. Тогда по условию (v) последовательность (6.2) ограничена снизу в X, и по условию (iv) имеем (6.12), а из (6.17) и стабилизации последовательности $(x^{(k)})$ к $x \in X_0$ следует (6.13), т.е. $h \leqslant x$. Из условия (v) доказываемой теоремы и из (6.16) по построению (6.12) вектора $h \in H$ вытекает

$$q(h) \overset{(6.12)}{=} q\Bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \Bigr) \overset{(\text{v})}{\geqslant} \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \overset{(6.17)}{\geqslant} \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}_\varepsilon) \overset{(6.16)}{\geqslant} \inf_{k\in\mathbb{N}} a_k - \varepsilon \overset{(6.9)}{=} a_0 - \varepsilon.$$

Отсюда для произвольного $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$ при некотором, зависящем от ε, $h \in H$, $h \overset{(6.13)}{\leqslant} x$, выполнено

$$q(h) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{spf}_{H,q}(x^{(k)}) - \varepsilon.$$

По определению 5.1 супремального функционала $\operatorname{spf}_{H,q}$ согласно (6.8) это означает, что

$$\inf f(x^{(k)}) = \inf_k \operatorname{spf}_{H,q}(x^{(k)}) \leqslant \operatorname{spf}_{H,q}\Bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} x^{(k)}\Bigr) + \varepsilon = f\Bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} x^{(k)}\Bigr) + \varepsilon. \tag{6.19}$$

Это, ввиду произвола в выборе $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$, даёт (6.14). Теперь повторяем рассуждения и выкладки после (6.14) до конца доказательства теоремы 2. Осталось в (6.5) заменить $\operatorname{lin} \mathbb{K}^{X_0}$ на $\operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_0}$.

Лемма 6.2. *Пусть в условиях и обозначениях теоремы 2 до п. (i) включительно $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, $l \in \operatorname{lin} \mathbb{R}^{X_0}$ и $q \prec^{X_0}_H l$, $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$. Тогда $l \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_0}$, т.е. функция l положительна наX_0.*

Доказательство леммы 6.2. Поскольку в H существует отрицательный вектор, из строго положительной однородности $\operatorname{spf}_{H,q}$ согласно предложению 5.1, п. 3ii, имеем $\operatorname{spf}_{H,q}(0) = 0$. Из равенства (5.15) предложения 5.5 и определения 5.2 ростка в (5.9) имеем $\operatorname{spf}_{H,q} \leqslant l$ на X_0. Согласно предложению 5.1, п. 3iv, ввиду условия $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$ имеем $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{R}^X_{-\infty}$. Пусть $x \in X_0^+$. Тогда

$$0 = \operatorname{spf}_{H,q}(0) \leqslant \operatorname{spf}_{H,q}(x) \leqslant l(x),$$

что доказывает положительность l на X_0. □

Применение леммы 6.2 завершает доказательство следствия 6.1. □

6.2. Векторно-аффинная версия для выпуклого множества H.

Теорема 3. *Пусть X и $X_0 \subset X$ те же, что и в теореме 2, но $q_1 \in \operatorname{incr} \operatorname{conc} \mathbb{R}^{X_1}$ и $q \overset{(5.3)}{:=} q_1 \circ \operatorname{pr}_1$, $H \subset X$ — выпуклое множество, $H_n = \operatorname{pr}_n H \subset X_n$, $\mathbb{K} := \mathbb{R}$. Пусть выполнены условия (ii) и (v) теоремы 2, а также условие* (iii–iv) *следствия 6.1. Тогда для $L := \operatorname{aff} \mathbb{R}^{X_0}$ вогнутая функция $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc} \mathbb{R}^X_{-\infty}$ допускает представление (6.5).*

Если $0 \in H$ и $q_1(0) \geqslant 0$, то $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc}^+ \mathbb{R}^X_{-\infty}$, а $L = \operatorname{aff} \mathbb{R}^{X_0}$ в (6.5) можно заменить на

$$L := \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^{X_0} \overset{(3.11)}{=} \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_0} + \mathbb{R}^+ \cdot \mathbf{1}. \tag{6.20}$$

Доказательство. Для доказательства Будет использована теорема 1 в виде следствия 4.2 из неё.

Положим $f := \operatorname{spf}_{H,q}$ и $f_n = \sup\text{-}\operatorname{pr}_n f$, $L := \operatorname{aff} \mathbb{K}^{X_0}$ и $L_n := \operatorname{aff} \mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}$. Тогда согласно предложению 4.7 выполнено (4.3) и согласно предложению 5.2 в обозначениях (5.3) имеет место равенство (6.6), где по предложению 5.1, п. 3iii, имеем $\operatorname{spf}_{H_n,q_n} \in \operatorname{conc} \mathbb{K}^{X_n}_{-\infty}$, т.е. $f_n \overset{(6.6)}{\in} \operatorname{conc} \mathbb{K}^{X_n}_{-\infty}$, а также $f = \operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc} \mathbb{R}^X_{-\infty}$. Напомним, что $\operatorname{pr}_n X_0$ — векторное подпространство в X_n согласно предложению 4.5. Рассмотрим сужения $f_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0} = \operatorname{spf}_{H_n,q_n}\big|_{\operatorname{pr}_n X_0}$. В правой части здесь — вогнутая функция на $\operatorname{pr}_n X_0$ со значениями исключительно в $\mathbb{R}$ по определению 5.1 (см. равенство (5.1)) супремальной функции $\operatorname{spf}_{H_n,q_n}\big|_{\operatorname{pr}_n X_0}$ и по условию (ii) из теоремы 2 о минорировании. Таким образом, $f_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0} \in \operatorname{conc} \mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}$. Тогда по теореме Хана—Банаха об огибающей из введения, применённой в части импликации II1⇒II2 в «вогнутой форме» в векторном пространстве $\operatorname{pr}_n X_0$, имеем

$$f_n\big|_{\operatorname{pr}_n X_0} \overset{(2.4u)}{=} \operatorname{uenv}^{\operatorname{aff} \mathbb{K}^{\operatorname{pr}_n X_0}}_{f_n|_{\operatorname{pr}_n X_0}}$$

на $\operatorname{pr}_n X_0$, так что выполнено условие (4.6) теоремы 1.

Функция $f = \operatorname{spf}_{H,q}$ — возрастающая на X согласно п. 2 предложения 5.1. Проверим выполнение условия (ii) теоремы 1. Для этого требуется, чтобы для любой убывающей и стабилизирующейся к $x \in X_0$ последовательности $(x^{(k)})$ из X было выполнено неравенство (4.8). По определению 4.2 имеем (6.7). По определению 5.1 супремальной функции также выполнено (6.8).

Последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — убывающая. При $\inf_{k\in\mathbb{N}} a_k = -\infty$ условие (4.8) выполнено автоматически. Поэтому далее считаем, что убывающая последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена в $\mathbb{R}$ и выполнено (6.9) с $\mathbb{K} := \mathbb{R}$. Из условия (iii–iv) согласно лемме 6.1 следуют условия (iv) теоремы 2 и (iii′) леммы 6.1.

Пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$. Ввиду (6.9) и (6.8) найдётся вектор $h^{(k)}_\varepsilon \in H$, для которого выполнено (6.16). Далее дословно повторяем рассуждения и выкладки из доказательства следствия от (6.16) до (6.19) включительно. Последнее ввиду произвола в выборе $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$ даёт (6.14). Теперь остаётся лишь повторить рассуждения и выкладки после (6.14) до конца доказательства теоремы 2, но с вогнутой функцией $f = \operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc} \mathbb{R}_{-\infty}^X$, что даёт (6.5) для $L := \operatorname{aff} \mathbb{R}^{X_0}$.

При $0 \in H$ и $q_1(0) \geqslant 0$, т.е. $q(0) \geqslant 0$, согласно предложению 5.1, п. 3i, $\operatorname{spf}_{H,q}$ — положительная функция. Тогда по предложению 5.5 из равенства (5.15) следует, что для $l \in \operatorname{spr}(q; H, X_0, \operatorname{aff} \mathbb{R}^{X_0})$ имеем $l \geqslant \operatorname{spf}_{H,q}$ на X_0, откуда $l \in (\mathbb{R}^{X_0})^+$. Таким образом, $\operatorname{aff} \mathbb{R}^{X_0}$ можно заменить на $\operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^{X_0}$. Последнее равенство в (6.20) составляет содержание пп. (ii) и (iii) предложения 3.4. □

6.3. Топологические версии для выпуклого H. Для топологических вариантов теорем о представлении супремальных функций потребуется понятие решётки Фреше (см. [38]).

Пусть X — векторная решётка. Для $x \in X$, как обычно, полагаем $|x| = \sup\{-x, x\}$ — абсолютная величина вектора x. Если к тому же X — полное метризуемое локально выпуклое пространство, т.е. пространство Фреше, и обладает таким базисом окрестностей нуля, что для любой окрестности нуля V из этого базиса при любом $x \in V$ неравенство $|x'| \leqslant |x|$ влечёт за собой $x' \in V$, то X называется *решёткой Фреше.* Решётка Фреше — упорядоченное локально выпуклое пространство, т.е. конус положительных векторов в нём замкнут (см. [38, гл. V, 7.2]).

Кроме того, если p — линейное отображение решётки Фреше в решётку Фреше, то p непрерывно (см. [38, гл.V, 6.4, 6.1]). В частности, непрерывны линейные положительные функционалы на решётке Фреше. Таким образом, если $X = \operatorname{proj}\lim\limits_n X_n p_n$ — приведённый правильный проективный предел решёток Фреше как упорядоченных векторных пространств, то отображения p_n непрерывны и порождают на X топологию проективного предела (см. [38, гл. II], [17]). Топология на X определяется как индуцированная с топологического произведения $\prod\limits_n X_n$. Если проекции pr_n рассматривать как определённые на X отображения, то pr_n — линейные непрерывные отображения, и в качестве базиса окрестностей нуля в X можно взять прообразы $\operatorname{pr}_n^{-1}(V_n)$ всевозможных окрестностей нуля V_n пространств X_n. Пространство X как топологический проективный предел локально выпуклых хаусдорфовых пространств также будет локально выпуклым и хаусдорфовым.

Конус положительных элементов в X замкнут в X. Действительно, если K_n — конусы положительных векторов в решётках Фреше X_n, то они замкнуты в X_n. Конус положительных элементов K в X — это пересечение $\bigcap\limits_n \operatorname{pr}_n^{-1}(K_n)$, замкнутых в силу непрерывности отображений pr_n множеств $\operatorname{pr}_n^{-1}(K_n)$, т.е. конус K замкнут в X. Следовательно, X — упорядоченное локально выпуклое пространство. Всюду далее проективный предел решёток Фреше рассматривается одновременно и как упорядоченное локально выпуклое пространство с топологией проективного предела, описанной выше.

Подмножество S в локально выпуклом пространстве называется *секвенциально замкнутым,* если для любой сходящейся последовательности векторов из S предел этой последовательности принадлежит S. Подмножество S называется *секвенциально предкомпактным,* если любая последовательность векторов из S содержит сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 4 (вариация [24, теорема 6.1])**.** *Пусть $X = \operatorname{proj}\lim\limits_n X_n p_n$ — приведённый правильный проективный предел решёток Фреше X_n, $n \in \mathbb{N}$, и X_0 — векторное подпространство в X, $q_1 \in \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_1}$ и $q \overset{(5.3)}{:=} q_1 \circ \operatorname{pr}_1$, выпуклый конус $H \subset X$ секвенциально замкнут в X и $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$. Допустим, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполнено одно из двух условий:*

(i) *$H_n = \operatorname{pr}_n H$ — минорирующее множество для $\operatorname{pr}_n X_0$,*

(ii) *$\sup$-проекция $f_n \overset{(4.2)}{:=} \sup\text{-}\operatorname{pr}_n \operatorname{spf}_{H,q}$ полунепрерывна сверху на $\operatorname{pr}_n X_0$,*

а также выполнено ещё и условие

(iii) *для любого не более чем счётного подмножества $B \subset H$, ограниченного сверху и удовлетворяющего условию $\inf q(B) > -\infty$, найдётся $n_q \in \mathbb{N}$, для которого при каждом $n \geqslant n_q$ проекция $\operatorname{pr}_n B \subset X_n$ секвенциально предкомпактна в X_n.*

Тогда для $L := \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_0}$ *и супремальной функции* $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{R}^X_{-\infty}$ *справедливо заключение теоремы* 2 *вместе с представлением* (6.5) *на* X_0.

Доказательство. В обозначениях $L := \operatorname{lin} \mathbb{R}^{X_0}$ и $L_n := \operatorname{lin} \mathbb{R}^{\operatorname{pr}_n X_0}$ так же, как и при доказательстве теоремы (2), убеждаемся, что выполнено (4.3), функция $f := \operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{R}^X_{-\infty}$ возрастающая и для f_n из (6.6), или из условия (ii), имеем $f_n \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{R}^{X_n}_{-\infty}$. Если выполнено условие минорирования (i), то $f_n \in \operatorname{spl}^+ \mathbb{R}^{X_n}$, и по теореме Хана—Банаха об огибающей из введения, применённой в части импликации I1⇒I2, получаем условие (4.6) теоремы 1 на векторном подпространстве $\operatorname{pr}_n X_0$ при $n \in \mathbb{N}$. В случае же выполнения условия (ii) по теореме Хёрмандера об огибающей из введения, применённой в части импликации I1⇒I2, по-прежнему получаем условие (4.6) теоремы 1 при $n \in \mathbb{N}$. Остаётся проверить условие (ii) теоремы 1 для убывающей стабилизирующейся к $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_0$ последовательности (6.7). При этом согласно замечанию 3.1 можем в условии (iii) положить $n_q = 1$.

Если для последовательности (a_k), определённой в (6.8), $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k = -\infty$, то условие (4.8) выполнено очевидным образом. Пусть

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} a_k \overset{(6.9)}{=:} a_0 > -\infty. \tag{6.21}$$

Тогда согласно (6.8) найдётся последовательность $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset H$, для которой выполнено (6.16). При этом ввиду (6.21) для ограниченного сверху множества $B = \{h^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ выполнено условие (iii); значит, все проекции $\operatorname{pr}_n B$ секвенциально предкомпактны в X_n. Следовательно, в множестве B можно выбрать последовательность $(h^{(1,n)})$, сходящуюся в X_1; из последовательности $(h^{(1,n)})$ можно выбрать подпоследовательность $(h^{(2,n)})$, сходящуюся в X_2 и т. д. Диагональный процесс даёт последовательность $(h^{(n,n)})$, сходящуюся в каждом X_n, $n \in \mathbb{N}$. Из этого по определению топологии проективного предела вытекает сходимость последовательности $(h^{(n,n)})$ в X. Так как по построению $(h^{(n,n)}) \subset H$, то в силу секвенциальной замкнутости H в X предел h последовательности $(h^{(n,n)})$ лежит в H. Из включения

$$(h^{(n,n)}) \subset (h^{(k)}) \tag{6.22}$$

и неравенств $h^{(k)} \leqslant x^{(k)}$ из (6.16) ввиду стабилизации $(x^{(k)})$ к $x = (x_n)$ имеем

$$\operatorname{pr}_k h^{(n,n)} \leqslant_k \operatorname{pr}_k x^{(k)} = x_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда ввиду замкнутости конуса положительных векторов в каждом X_k и непрерывности проекций pr_k получаем $\operatorname{pr}_k h \leqslant_k \operatorname{pr}_k x$, $k \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что $h \leqslant x$ в X.

Пусть q_k — функция, определённая в (5.3) на решётке Фреше X_k. Так как q_k — линейный положительный функционал на решётке Фреше, то q_k — непрерывный функционал. Отсюда

$$q(h) = q_k\bigl(\operatorname{pr}_k h\bigr) = q_k\bigl(\operatorname{pr}_k \lim_n h^{(n,n)}\bigr) = \lim_n q_k\bigl(\operatorname{pr}_k h^{(n,n)}\bigr) = \lim_n q\bigl(h^{(n,n)}\bigr).$$

Таким образом, в силу включения (6.22) и выполнения первого неравенства из (6.16) имеем $q(h) \geqslant a_0 - \varepsilon$, и как показано выше, $h \in H$, $h \leqslant x$. Следовательно, $\operatorname{spf}_{H,q}(x) \geqslant a_0$. Вспоминая определение величины a_0 из (6.21) и (6.8), а также (6.7), видим, что выполнено (6.14). Согласно теореме 1 и предложению 5.5 функция $\operatorname{spf}_{H,q}$ допускает представление вида (6.5), где $L := \operatorname{lin} \mathbb{R}^{X_0}$. Возможность замены здесь $L := \operatorname{lin} \mathbb{R}^{X_0}$ на $L := \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^{X_0}$ следует из леммы 6.2. □

Приведённая ниже версия теоремы 4 для выпуклого множества H ранее не отмечалась.

Теорема 5 (вариация [24, теорема 6.1]). *Пусть* $X = \operatorname{proj}\lim\limits_n X_n p_n$ — *приведённый правильный проективный предел решёток Фреше* X_n, $n \in \mathbb{N}$, *и* X_0 — *векторное подпространство в* X, $q_1 \in \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^{X_1}$ *и* $q \overset{(5.3)}{:=} q_1 \circ \operatorname{pr}_1$, *выпуклое подмножество* $H \subset X$ *секвенциально замкнуто в* X. *Допустим, что при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено одно из двух условий* (i) *или* (ii) *теоремы* 4, *а также выполнено ещё и условие* (iii) *теоремы* 4. *Тогда для* $L := \operatorname{aff} \mathbb{R}^{X_0}$ *вогнутая функция* $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc} \mathbb{R}^X_{-\infty}$ *допускает представление* (6.5). *Если дополнительно* $0 \in H$ *и* $q_1(0) \geqslant 0$, *то* $\operatorname{spf}_{H,q} \in \operatorname{conc}^+ \mathbb{R}^X_{-\infty}$, *а* $L = \operatorname{aff} \mathbb{R}^{X_0}$ *в* (6.5) *можно заменить на* $L := \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^{X_0}$ *из* (6.20).

Доказательство теоремы 5 опускаем, поскольку оно представляет из себя симбиоз доказательств теорем 3 и 4. Отметим лишь, что при доказательстве условия (4.6) теоремы 1 на векторных подпространствах $\mathrm{pr}_n X_0$ при $n \in \mathbb{N}$ в случае выполнения условия (ii) нужно использовать теорему Хёрмандера об огибающей из введения в части импликации II1⇒II2.

Замечание 6.1. Это замечание относится ко всем четырём теоремам 2–5. Заключение этих теорем о возможности представления (6.5) для векторов x из векторного подпространства X_0 с помощью утверждений типа теорем о минимаксе можно распространить на векторы $x \in X$, представимые в виде точных верхних границ возрастающих последовательностей векторов из X_0 (см. [6], [29, 2.5]). Доказательство этого перехода довольно объёмно. Полное изложение возможности такого распространения представления (6.5) намечается обосновать в другой публикации.

Глава 2

ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

7. Введение. Где возникают огибающие?

Кратко остановимся на схемах применения двойственных описаний верхних огибающих из гл. 1 в комплексном анализе. В основном следуем изложению таких схем в [24–29].

Всюду во этом разделе D — *область* (открытое связное подмножество) в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ или n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартной евклидовой топологией, $n \in \mathbb{N}$. Через $\mathrm{Hol}(D)$, $\mathrm{Mer}(D)$, $\mathrm{har}(D)$, $\mathrm{plhar}(D)$, $\mathrm{sbh}(D)$ и $\mathrm{plsbh}(D)$ обозначаем классы соответственно, голоморфных, мероморфных, гармонических, плюригармонических, субгармонических и плюрисубгармонических функций на D; последние два класса по определению содержат функцию $\boldsymbol{-\infty}$ — тождественную $-\infty$; $\mathrm{sbh}(D) = \mathrm{plsbh}(D)$ и $\mathrm{har}(D) = \mathrm{plhar}(D)$ при $n = 1$.

Для $S \subset \mathbb{C}^n$ различаем $C_{\mathbb{R}}(S)$ и $C_{\mathbb{C}}(S)$ — классы непрерывных вещественнозначных и соответственно, комплекснозначных функций.

Всюду во введении Z — главное аналитическое множество в D, т.е. нулевое множество некоторой ненулевой функции $g_{\mathsf{Z}} \in \mathrm{Hol}(D)$, заданное вместе с функцией кратности нулей, или с дивизором нулей, функции g_{Z}. При этом и дивизор нулей обозначаем тем же символом Z.

В случае $n = 1$ часто удобно мыслить Z как последовательность, вообще говоря, повторяющихся точек $\{\mathsf{z}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, для которой порядок нумерации не важен, а имеет значение только число повторений точки в ней. Если Z — последовательность всех нулей (корней) функции $f \in \mathrm{Hol}(D)$, то каждая точка $\mathsf{z} \in D$ повторяется Z в столько раз, какова кратность нуля (корня) функции f в точке z. При этом полагаем $\mathrm{Zero}_f := \mathsf{Z}$. Отношения и операции для множеств (последовательностей) нулей понимаются как в [24–30].

Различные задачи комплексного анализа сводятся к построению или доказательству существования (точной) огибающей — верхней или нижней — из определенного класса функций на D или на подмножестве $S \subset D$. Отметим некоторые из них в подходящей трактовке.

7.1. Нетривиальность весового класса (см. [25, § 10], [29, 1.1])**.** При каких условиях на *функцию-мажоранту* (*весовую функцию, вес*) $M : D \to \mathbb{R}_{\pm\infty}$ найдется ненулевая функция $f \in \mathrm{Hol}(D)$ с ограничением $\log|f| \leqslant M$ на D? Другими словами, вопрос состоит в исследовании условий нетривиальности класса функций $\mathrm{Hol}(D, M) := \bigl\{f \in \mathrm{Hol}(D) : \log|f| \leqslant M + \mathrm{const}$ на $D\bigr\}$, т.е. условий, при которых $\mathrm{Hol}(D, M) \neq \{0\}$. Зачастую достаточно убедиться в нетривиальности выпуклого множества

$$\bigl\{h \in \mathrm{plsbh}(D) :\ h \leqslant M \text{ на } D\bigr\}, \tag{7.1}$$

т.е. доказать существование функции $h \neq \boldsymbol{-\infty}$ из этого класса, а затем для такой функции $h \leqslant M$ попытаться построить голоморфную функцию $f \not\equiv 0$, удовлетворяющую оценке $\log|f| \leqslant \check{h} \leqslant \check{M}$, где $\check{h}$ и $\check{M}$ — некоторые незначительные увеличения соответственно, функций h и M. При этом существование такой функции f можно доказать при помощи решений $\overline{\partial}$- или $\partial\overline{\partial}$-задачи с оценками (см. [25, § 9], [55, IIIA], [2, теорема 1], [32, теорема 3, следствия 1–3]) в духе

Л. Хёрмандера (см. [49, гл. IV]) или же путем аппроксимации функции h логарифмом модуля голоморфной функции. Правда, последний аппроксимационный способ представляется нам не соответствующим постановке задачи и в данной тематике излишним, поскольку здесь требуется только минорирование функции h, а не ее аппроксимация.

7.2. Описание нулевых множеств (см. [25, § 8], [27], [35], [29, 1.2]). Пусть Z — нулевое множество некоторой функции $g_{\mathsf{Z}} \in \operatorname{Hol}(D)$. Если D — односвязная при $n = 1$ или звёздная относительно точки при $n > 1$ область, то Z — *нулевое множество для класса* $\operatorname{Hol}(D, M)$ тогда и только тогда, когда найдется функция $h \in \operatorname{plsbh}(D)$, для которой выполнено неравенство $\log |g_{\mathsf{Z}}| + h \leqslant M$. Это связано с тем, что для односвязной при $n = 1$ или звёздной относительно точки при $n > 1$ области D условие $h \in \operatorname{plsbh}(D)$ выполнено в том и только том случае, когда имеет место представление $h = \operatorname{Re} f$ для некоторой $f \in \operatorname{Hol}(D)$, или $h = \log |e^f|$ (см. [54, предложение 2.2.13]). Другими словами, Z — нулевое множество для $\operatorname{Hol}(D, M)$, если и только если непуст класс

$$\Bigl\{h \in \operatorname{plsbh}(D) : \ h \leqslant M - \log \bigl|g_{\mathsf{Z}}\bigr| \text{ на } D\Bigr\}. \tag{7.2}$$

Некоторые подходы подобного рода возможны и для конечносвязных областей $D \subset \mathbb{C}$ (см. [27, 53]), но при этом приходится заменить функции h и M на их весьма малые изменения $\check{h}$ и $\check{M}$.

7.3. Описание нулевых подмножеств (см. [25, § 11], [6, 26–30, 35]). В обозначениях предыдущего подраздела задача состоит в нахождении голоморфной функции $f \neq 0$, для которой $g_{\mathsf{Z}} f \in \operatorname{Hol}(D, M)$, т.е. справедливо ограничение $\log |g_{\mathsf{Z}} f| \leqslant M$, или $\log |f| \leqslant M - \log |g_{\mathsf{Z}}|$. Аналогично предыдущим пунктам, вопрос вновь сводится к нетривиальности класса

$$\Bigl\{h \in \operatorname{plsbh}(D) : \ h \leqslant M - \log \bigl|g_{\mathsf{Z}}\bigr| \text{ на } D\Bigr\}. \tag{7.3}$$

Эта постановка имеет двойственные выходы на проблемы аппроксимации в пространствах функций, прежде всего экспоненциальными системами, на существование для голоморфных функций голоморфных функций-мультипликаторов, «погашающих» их рост и др. (см. [30, 55], [25, § 10]).

7.4. Представление мероморфных функций (см. [25, § 12], [29, 1.4], [27, 52]). Пусть $Q = q_1/q_2$ — мероморфная функция в области D и $q_1, q_2 \in \operatorname{Hol}(D)$, $q_1, q_2 \not\equiv 0$. Задача состоит в возможности представления функции $Q \in \operatorname{Mer}(D)$ в виде отношения двух функций из класса $\operatorname{Hol}(D, M)$, возможно, *без общих нулей*. При этом решение ее наиболее естественно искать в терминах функций M и $U_Q := \max\bigl\{\log |q_1|, \log |q_2|\bigr\}$ или $U_Q := \log \sqrt{|q_1|^2 + |q_2|^2}$ в связи с известными определениями различных вариантов характеристики Неванлинны функции Q именно через U_Q. При этом задачу можно в несколько ослабленной форме переформулировать как поиск условий, при которых класс

$$\Bigl\{h \in \operatorname{plsbh}(D) : \ h \leqslant M - U_Q \text{ на } D\Bigr\} \tag{7.4}$$

или класс (при дополнительном требовании «без общих нулей»)

$$\Bigl\{h \in \operatorname{plhar}(D) : \ h \leqslant M - U_Q \text{ на } D\Bigr\} \tag{7.5}$$

нетривиален.

7.5. Комплексная теория потенциала (см. [54, 59–61]). Основные объекты, такие, как (плюри)гармонические меры, функции Грина и им подобные, (максимальные) решения задачи Дирихле и пр., на которые опираются применения этой теории, строятся как верхняя огибающая специальных, чаще всего выпуклых и ограниченных сверху некоторой функцией-мажорантой M, семейств (плюри)субгармонических функций.

7.6. Теория равномерных алгебр. Многочисленные применения в этой теории нашла теорема двойственности Эдвардса (см. [44], [46, 1.2]). Конкретнее, пусть H — некоторый выпуклый конус вещественнозначных полунепрерывных сверху функций на некотором компактном топологическом пространстве K со значениями в $\mathbb{R}_{-\infty}$ и H содержит все константы. Через $J_a(H)$ обозначим класс *мер Йенсена* в точке $a \in K$ относительно H, а именно, положительных мер Радона μ на K, удовлетворяющих условию

$$h(a) \leqslant \int h\,d\mu \quad \text{для всех } h \in H. \tag{7.6}$$

По одной из теорем Эдвардса (см. [44]) *для любой полунепрерывной снизу функции* $x \in \mathbb{R}^K_{+\infty}$

$$\sup\Bigl\{h(a) : \ h \in H,\ h \leqslant x\Bigr\} = \inf\biggl\{\int x\,d\mu : \ \mu \in J_a(H)\biggr\}. \tag{7.7}$$

Отсюда, в частности, следует, что *множество* $\{h : \ h \in H,\ h \leqslant x\}$ *непусто тогда и только тогда, когда хотя бы для одной точки* $a \in K$ *конечна правая часть в* (7.7).

7.7. Связь с задачами 1–3 из п. 2.3. Трактовки проблем из пп. 7.1–7.4, касающиеся условий нетривиальности классов (7.1)–(7.5), можно сформулировать в следующей общей форме. Пусть H — выпуклый конус или, более общó, выпуклое множество в векторной решетке X с отношением порядка $\leqslant$. *Для каких* $X_0 \subset X$ *при всех* $x \in X_0$ *множество* $\{h \in H : \ h \leqslant x\}$ *непусто*? Если $q : X \to \mathbb{R}$ — некоторая функция на X, то *это множество непустое тогда и только тогда, когда выполнено соотношение*[1]

$$-\infty < \sup\bigl\{q(h) : h \in H,\ h \leqslant x\bigr\} \overset{(5.1)}{=} \operatorname{spf}_{H,q}(x). \tag{7.8}$$

Собственно, это и есть частный случай задачи 3 из п. 2.3. Если удается получить равенство вида (7.7), где в роли q выступает мера Дирака $\delta_a(h) = h(a)$ в точке a, то это решает в определённом смысле частные случаи задач 1 и 2. В частности, в таком случае соотношение (7.8) с $q := \delta_a$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$-\infty < \inf\biggl\{\int x\,d\mu : \ \mu \in J_a(H)\biggr\},$$

где inf в правой части берётся по действиям на $x \in X_0$ всевозможных выметаний меры Дирака в точке a, т.е. ростка $\operatorname{spr}(\delta_a; H, X_0, \operatorname{lin}^+ \mathbb{R}^X)$, определённого в п. 5.2 (см. определение 5.2).

7.8. Некоторые дополнения к предшествующим определениям и обозначениям.

7.8.1. Множества, топология, порядок. Для $n, m \in \mathbb{N}$ аффинные пространства $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^m$, соответственно, над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ наделяются стандартной евклидовой нормой-модулем $|\cdot|$. Рассмотрим одноточечные компактификации Александрова $\mathbb{R}^m_\infty := (\mathbb{R}^m)_\infty$, $\mathbb{C}^n_\infty := (\mathbb{C}^n)_\infty$, $\mathbb{C}_\infty := (\mathbb{C}^1)_\infty$; $|\infty| := +\infty$. При необходимости $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^n_\infty$ отождествим, соответственно, с $\mathbb{R}^{2n}$ и $\mathbb{R}^{2n}_\infty$ (над $\mathbb{R}$). Далее, когда возможно, обозначения вводятся и определения даются только для $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^m_\infty$. Для подмножества $S \subset \mathbb{R}^m_\infty$ через $\operatorname{clos} S$, $\operatorname{int} S$ и ∂S обозначаем соответственно, *замыкание, внутренность* и *границу* S в $\mathbb{R}^m_\infty$. (Под)область в $\mathbb{R}^m_\infty$ — это открытое связное подмножество в $\mathbb{R}^m_\infty$. Для $S_0 \subset S \subset \mathbb{R}^m_\infty$ пишем $S_0 \Subset S$, если $\operatorname{clos} S_0$ — *компактное подмножество* в S в топологии, индуцированной с $\mathbb{R}^m_\infty$ на S. Для $r \in \mathbb{R}^+_{+\infty}$ и $x \in \mathbb{R}^m$ определим открытый шар $B(x,r) := \{x' \in \mathbb{R}^m : |x' - x| < r\}$ радиуса r с центром x, положим $B(r) := B(0,r)$ и $B(x,+\infty) = \mathbb{R}^m$; $B(\infty, r) := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| > 1/r\}$ и $B(\infty,+\infty) := \mathbb{R}^m_\infty \setminus \{0\}$. При $r \leqslant 0$, естественно, $B(0,r) := \varnothing$. При $r > 0$ полагаем $\overline{B}(\cdot,r) := \operatorname{clos} B(\cdot,r)$ — замкнутые шары, но $\overline{B}(x,0) := \{x\}$ и при $r < 0$, естественно, $\overline{B}(\cdot,r) := \varnothing$. *Положительность* всюду понимается, в соответствии с контекстом, как $\geqslant 0$; > 0 — *строгая положительность*; аналогично для *отрицательности*. Открытые (замкнутые с непустой внутренностью) шары строго положительного радиуса с центром $x \in \mathbb{R}^m_\infty$ образуют открытую (соответственно, замкнутую) базу окрестностей точки $x \in \mathbb{R}^m_\infty$.

[1]Напомним, что $\sup\varnothing := -\infty$ и $\inf\varnothing := +\infty$ для пустого множества $\varnothing$.

7.8.2. Функции. Для произвольной функции $f : X \to Y$ допускаем, что не для всех $x \in X$ определено значение $f(x) \in Y$. Функцию f называют *расширенной числовой функцией*, если ее образ — подмножество в $\mathbb{R}_{\pm\infty}$.

Для открытого подмножества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ через $\operatorname{har}(\mathcal{O})$ обозначаем векторное пространство над $\mathbb{R}$ *гармонических* (аффинных при $m = 1$) в $\mathcal{O}$ функций; $\operatorname{sbh}(\mathcal{O})$ — выпуклый конус над $\mathbb{R}^+$ *субгармонических* (выпуклых при $m = 1$) в $\mathcal{O}$ функций. Функцию, *тождественно равную* $-\infty$ на $\mathcal{O}$, обозначаем символом $\boldsymbol{-\infty} \in \operatorname{sbh}(\mathcal{O})$; $\operatorname{sbh}_*(\mathcal{O}) := \operatorname{sbh}(\mathcal{O}) \setminus \{\boldsymbol{-\infty}\}$. Для $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^n$ через $\operatorname{Hol}(\mathcal{O})$ обозначаем векторное пространство над $\mathbb{C}$ *голоморфных* функций на $\mathcal{O}$.

При $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ класс C^p состоит из числовых функций на открытых подмножествах с непрерывными (частными) производными до порядка p включительно.

Через $\operatorname{dist}(\cdot, \cdot)$ обозначаем *функции евклидова расстояния* между парами точек, между точкой и множеством, между множествами в $\mathbb{R}^m_\infty$. По определению

$$\operatorname{dist}(\cdot, \varnothing) :=: \operatorname{dist}(\varnothing, \cdot) := \inf \varnothing := +\infty =: \operatorname{dist}(x, \infty) :=: \operatorname{dist}(\infty, x)$$

при $x \in \mathbb{R}^m_\infty$.

7.8.3. Меры. Далее $\operatorname{Meas}(S)$ — класс *борелевских вещественных мер* на подмножествах из $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m_\infty)$ со значениями в $\mathbb{R}_{\pm\infty}$, иначе называемых *зарядами*; $\operatorname{Meas}_{\mathrm{cmp}}(S)$ — подкласс мер в $\operatorname{Meas}(S)$ *с компактным носителем* $\operatorname{supp} \nu \Subset S$, $\operatorname{Meas}^+(S) := \bigl(\operatorname{Meas}(S)\bigr)^+$. Для $x \in \mathbb{R}^m_\infty$ и $0 < r \in \mathbb{R}_+$ полагаем $\mu(x, r) := \mu\bigl(B(x, r)\bigr)$. Меру Рисса функции $u \in \operatorname{sbh}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$, чаще всего обозначаем

$$\nu_u := \frac{1}{s_{m-1}} \Delta u \in \operatorname{Meas}^+(\mathcal{O}), \quad \text{где} \quad s_{m-1} := \frac{2\pi^{m/2} \max\bigl\{1, (m-2)\bigr\}}{\Gamma(m/2)} \tag{7.9}$$

— площадь $(m-1)$-мерной единичной сферы $\partial B(1)$ в $\mathbb{R}^m$, Δ — *оператор Лапласа*, действующий в смысле теории распределений, или обобщённых функций, а Γ — гамма-функция. Такие меры ν_u — меры Радона, т.е. определяют линейный положительный непрерывный и ограниченный функционал на пространстве $C_0(\mathcal{O})$ непрерывных финитных функций на $\mathcal{O}$. В частности, $\nu_u(S) < +\infty$ для каждого измеримого по ν_u подмножества $S \Subset \mathcal{O}$. При $u = \boldsymbol{-\infty} \in \operatorname{sbh}(\mathcal{O})$ по определению $\nu_{\boldsymbol{-\infty}}(S) := +\infty$ для всех $S \subset \mathcal{O}$.

Через $\lambda_m \in \mathcal{M}^+(S)$ обозначаем сужения *меры Лебега* на собственные борелевские подмножества $S \subset \mathbb{R}^m$; $\delta_x \in \mathcal{M}^+(S)$ — *мера Дирака в точке* $x \in S$, т.е. $\operatorname{supp} \delta_x = \{x\}$ и $\delta_x\bigl(\{x\}\bigr) = 1$. В обозначении меры Лебега индекс m часто будем опускать. Во включении $\operatorname{Meas}_\infty(\mathcal{O}) \subset \operatorname{Meas}(\mathcal{O})$ с открытым множеством $\mathcal{O}$, первое множество $\operatorname{Meas}_\infty(S)$ состоит из всех мер μ с бесконечно дифференцируемой плотностью, т.е. $d\mu = f\, d\lambda$, где f из класса C^∞ на $\mathcal{O}$.

Определение 7.1 (вариация определения 5.2)**.** Пусть D — подобласть в $\mathbb{R}^m$, $H \subset \operatorname{sbh}(D)$, $\nu \in \operatorname{Meas}^+(D)$, $\mathcal{M} \subset \operatorname{Meas}^+(D)$. Будем говорить, что мера $\mu \in \mathcal{M}$ — *линейное выметание меры* ν *относительно* H *в* $\mathcal{M}$, и писать $\nu \prec_{H,\mathcal{M}} \mu$, если

$$\int h\, d\nu \leqslant \int h\, d\mu \quad \text{для всех функций } h \in H. \tag{7.10}$$

При $\nu = \delta_x$, $x \in D$, линейные выметания $\mu \in \mathcal{M}$ меры Дирака δ_x относительно H в $\mathcal{M}$ называют *мерами Йенсена для точки* $x \in D$, если выбрано $H := \operatorname{sbh}_*(D)$ и $\mathcal{M} = \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$ (см. и (7.6)).

Будем говорить, что аффинная функция $\mu + c := \mu + c \cdot \mathbf{1} \in \mathcal{M} + \mathbb{R}\mathbf{1}$ — *аффинное выметание меры* ν *относительно* H *в* $\mathcal{M} + \mathbb{R}\mathbf{1}$, и писать $\nu \curlyeqprec_{H,\mathcal{M}} \mu + c$, если

$$\int h\, d\nu \leqslant \int h\, d\mu + c \quad \text{для всех функций } h \in H. \tag{7.11}$$

Если из контекста ясно, какие H и $\mathcal{M}$ подразумеваются, то будем опускать нижние индексы $H, \mathcal{M}$ в обозначениях $\prec_{H,\mathcal{M}}$ и $\curlyeqprec_{H,\mathcal{M}}$ и писать, соответственно, $\prec$ и $\curlyeqprec$. Очевидно, если $\nu \prec \mu$, то $\nu \curlyeqprec \mu + c$ для любого $c \in \mathbb{R}^+$ в (7.11).

7.8.4. Нули голоморфных функций (см. [15, § 11], [37, гл. 1], [11,16,30,62]). Пусть D — подобласть в $\mathbb{C}^n_\infty$, $0 \neq f \in \operatorname{Hol}(D)$. *Дивизором нулей* функции f называем функцию $\operatorname{Zero}_f : D \to \mathbb{N}_0$, равную кратности нуля функции f в каждой точке $z \in D$. Для $f = 0 \in \operatorname{Hol}(D)$ по определению $\operatorname{Zero}_0 \equiv +\infty$ на D. В гл. 2 далее всюду $D \neq \varnothing$ — область в $\mathbb{R}^m$ или в $\mathbb{C}^n$.

8. Существование (плюри)субгармонической нижней огибающей

8.1. Основной результат для выпуклых подмножеств субгармонических функций.

Предложение 8.1 (частный случай предложения 8.1; см. [25, предложение 7.1]). *Пусть H — непустое подмножество в $\operatorname{sbh}_*(D)$ и пусть ненулевая мера $\nu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$ такова, что*

$$-\infty < \int h\, d\nu \quad \text{для всех функций } h \in H. \tag{8.1}$$

Пусть $\mathcal{M} \subset \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$, а расширенная числовая функция F на D — локально универсально измеримая для $\mathcal{M}$, т.е. для любого компакта $K \subset D$ сужение $F\big|_K$ является $\mu\big|_K$-измеримой функцией для всех $\mu \in \mathcal{M}$. Если существует функция $h \in H$, для которой $h \leqslant F$ на D, то

$$-\infty \overset{(7.10)}{<} \inf\left\{ \int F\, d\mu : \ \nu \prec \mu \right\}, \tag{8.2l}$$

$$-\infty \overset{(7.11)}{<} \inf\left\{ \int F\, d\mu + c : \ \nu \preccurlyeq \mu + c \right\}. \tag{8.2a}$$

Приведённая ниже теорема 6, в определенной степени обратная к предложению 8.1, и является основным результатом раздела 8.

Пусть $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность субгармонических в D функций, (равномерно по k) локально ограниченных сверху (т.е. на компактах) в D. Через $\limsup_k^* u_k$ будем обозначать полунепрерывную сверху регуляризацию (поточечного) верхнего предела последовательности (u_k), которая также является субгармонической функцией. При этом $\limsup_k^* u_k \in \operatorname{sbh}_*(D)$, если $\limsup_n u_n(x) \not\equiv -\infty$ на D, и λ_m-п.в. совпадает с $\limsup_k u_k$ (см. [11, приложение I]). Поэтому $\limsup_k u_k$ и $\limsup_k^* u_k$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(D, \lambda_m)$ для последовательностей $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{sbh}_*(D)$, локально ограниченных сверху, можно не различать.

Функция f называется *строго положительной* (соответственно, *строго отрицательной*) на D, если $f(x) > 0$ (соответственно, $f(x) < 0$) для всех $x \in D$. Положительная функция $f : D \to \mathbb{R}^+$ называется *локально отделенной от нуля,* если $\inf\limits_{x\in K} f(x) > 0$ для любого компакта $K \Subset D$. Очевидно, полунепрерывная снизу строго положительная функция на D локально отделена от нуля.

Для сглаживания функций и мер операцией свертки $*$ и её «скользящей» версией будет использована аппроксимационная единица $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$, зависящая только от $|x|$, со следующими свойствами:

$$a(x) \equiv 0 \text{ при } |x| \geqslant 1, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^m} a(x)\, d\lambda_m(x) = 1, \quad a \in C^\infty. \tag{8.3}$$

В шаре $B(r)$, $r > 0$, эта функция задаётся следующим образом:

$$a_r(x) \overset{(8.3)}{:=} c_r a\Big(\frac{1}{r}\, x\Big), \quad c_r \in \mathbb{R}^+, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^m} a_r\, d\lambda_m = 1, \tag{8.4}$$

а соответствующая ей мера $\alpha^{(r)} \in \operatorname{Meas}^+(\mathbb{R}^m)$ — через её плотность:

$$d\alpha^{(r)} \overset{(8.4)}{:=} a_r\, d\lambda_m, \quad \operatorname{supp} \alpha_r \subset \overline{B}(r). \tag{8.5}$$

Рассмотрим строго положительную отделенную от нуля функцию

$$r : D \to \mathbb{R}^+, \quad r(x) < \operatorname{dist}(x, \partial D) \quad \text{при всех } x \in D. \tag{8.6}$$

Тогда для каждой точки $x \in D$ определена мера $\alpha_x^{(r(x))} \in \operatorname{Meas}^+\bigl(B(x,r(x))\bigr)$ с носителем $\operatorname{supp}\alpha_x^{(r(x))} \subset D$, полученная сдвигом меры $\alpha^{(r(x))}$ в точку x: $\alpha_x^{(r(x))}(S) := \alpha^{(r(x))}(S-x)$.

Теорема 6. *Пусть $\varnothing \neq H \subset \operatorname{sbh}_*(D)$, $0 \neq \nu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$, F — расширенная числовая функция из $L^1_{\mathrm{loc}}(D) := L^1_{\mathrm{loc}}(D,\lambda)$. Допустим, что*

(c) *для любого компакта $K \subset D$ и любой постоянной c существует функция $h \in H$, удовлетворяющая неравенству $h \leqslant c$ на K,*

и выполнено одно из следующих двух условий:

(a) *для любой локально ограниченной сверху последовательности функций $(h_k) \subset H$ имеем $\limsup^*_k h_k \in H$, если только $\limsup_k h_k(x) \not\equiv -\infty$ на D;*

(b) *множество H секвенциально замкнуто в $L^1_{\mathrm{loc}}(D)$.*

Положим

$$\mathcal{M} := \operatorname{Meas}^+_{\infty}(D) \cap \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D \setminus U_0), \tag{8.7}$$

где область U_0 такова, что

$$\operatorname{supp}\nu \subset U_0 \Subset D. \tag{8.8}$$

I. *Если H — выпуклый конус, содержащий отрицательную функцию, и*

$$-\infty \overset{(7.10)}{<} \inf\left\{\int F\,d\mu :\ \nu \prec \mu,\ \mu \in \mathcal{M}\right\}, \tag{8.9}$$

то для любой положительной локально отделённой от нуля функции (8.6) найдутся строго положительная функция $\widehat{r} \leqslant r$ класса C^∞ на D, постоянная $C \in \mathbb{R}$ и функция $h \in H$, для которых

$$h(x) \leqslant F^{*\widehat{r}}(x) + C \quad \text{при всех } x \in D, \text{ где} \quad F^{*\widehat{r}}(x) := \int\limits_{B(\widehat{r}(x))} F(x+y)\,d\alpha^{(\widehat{r}(x))}(y). \tag{8.10}$$

II. *Если H — выпуклое множество и $0 \in H$, то при условии*

$$-\infty \overset{(7.11)}{<} \inf\left\{\int F\,d\mu + c :\ \nu \preccurlyeq \mu + c,\ \mu \in \mathcal{M},\ c \in \mathbb{R}^+\right\} \tag{8.11}$$

для любой положительной локально отделённой от нуля функции (8.6) найдутся такая же, как в п. I, функция $\widehat{r} \leqslant r$ на D, постоянная $C \in \mathbb{R}$ и функция $h \in H$, для которых выполнено (8.10).

Доказательство. По условию (8.8) согласно выбору U_0 всегда найдутся «промежуточная» регулярная для задачи Дирихле область U_1 в D с кусочно гладкой границей ∂U_1, для которой

$$\varnothing \neq \operatorname{supp}\nu \subset U_0 \Subset U_1 \Subset D. \tag{8.12}$$

Ранее мы уже отмечали частном случае следующее утверждение.

Лемма 8.1. *Для положительной локально отделённой от нуля функции (8.6) найдётся строго положительная класса C^∞ (а значит, и отделённая от нуля) функция $\widehat{r} \leqslant r$ на D, удовлетворяющая условиям*

$$\bigcup_{x\in S} B\bigl(x,\widehat{r}(x)\bigr) \Subset D \quad \text{для любого } S \Subset D, \quad \left(\bigcup_{x\in D\setminus U_1} B\bigl(x,\widehat{r}(x)\bigr)\right) \cap U_0 = \varnothing. \tag{8.13}$$

Элементарное, но довольно трудоемкое доказательство этой леммы опускаем. Согласно лемме 8.1 сразу можем считать, что уже изначально функция r обладает свойствами функции $\widehat{r}$, указанными в лемме 8.1 и теореме 6, п. I. При этом соглашении для любой меры

$$\mu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D), \quad \operatorname{supp}\mu \subset D \setminus U_1, \tag{8.14}$$

определён интеграл семейства мер $\bigl\{\alpha_x^{(r(x))}\bigr\}_{x\in D}$ по мере μ (см. [5]), записываемый далее как

$$\mu^{*r} := \int \alpha_x^{(r(x))}\,d\mu(x) \in \operatorname{Meas}_\infty^+(D)\cap \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D\setminus U_0)\subset \mathcal{M}, \tag{8.15}$$

где принадлежность классу $\operatorname{Meas}_\infty^+(D)$ обеспечивается построением мер $\alpha_x^{(r(x))}$ после (8.4)–(8.5) через аппроксимативную единицу из (8.3), а также ввиду соглашения о принадлежности функции r классу C^∞, а принадлежность классу $\operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D\setminus U_0)$ основана на (8.12) и соотношениях (8.13) леммы 8.1. При этом мера μ^{*r} по её определению (8.15) действует на $F\in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ по правилу

$$\int F\,d\mu^{*r} = \int \int\limits_{|y|<r(x)} F(x+y)\,d\alpha^{(r(x))}(y)\,d\mu(x) \overset{(8.9)}{=} \int F^{*r}\,d\mu. \tag{8.16}$$

Лемма 8.2. *Пусть $\mu\in\mathcal{M}_1=\operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D\setminus U_1)$ — линейное (соответственно, $\mu+c\in\mathcal{M}_1+c\mathbf{1}$ — аффинное) выметание меры ν относительно $H\subset \operatorname{sbh}_*(D)$ в $\mathcal{M}_1$ (соответственно, в $\mathcal{M}+\mathbb{R}^+\mathbf{1}$) в смысле определения 7.1 и соотношения (7.10) (соответственно, (7.11)), т.е. $\nu\prec\mu$ (соответственно, $\nu\preccurlyeq\mu+c$) в $\mathcal{M}_1$ (соответственно, в $\mathcal{M}_1+\mathbb{R}^+\mathbf{1}$). Тогда в обозначении (8.15) имеем $\nu\prec\mu^{*r}$ (соответственно, $\nu\preccurlyeq\mu^{*r}+c$) в $\mathcal{M}$ (соответственно, в $\mathcal{M}+\mathbb{R}^+\mathbf{1}$), где $\mathcal{M}$ — такое же, как в (8.7).*

Доказательство леммы 8.2. Каждая мера $\alpha^{(r)}$ из (8.5) — это мера Йенсена для 0 в $\operatorname{sbh}_*\bigl(\overline{B}(r')\bigr)$ при любом $r'>r$. Отсюда при условии $\nu\prec\mu$ из леммы имеем

$$\int h\,d\nu \leqslant \int h(x)\,d\mu(x) \leqslant \int \int\limits_{|y|<r(x)} h(x+y)\,d\alpha^{(r(x))}(x)\,d\mu(x) \overset{(8.16)}{=} \int h\,d\mu^{*r},$$

что даёт $\nu\prec\mu^{*r}$ в $\mathcal{M}$ ввиду (8.14)–(8.15). При условии $\nu\preccurlyeq\mu+c$ для меры Йенсена $\alpha^{(r(x))}$ для нуля имеем

$$\int h\,d\nu \leqslant \int h(x)\,d\mu(x)+c \leqslant \int \int\limits_{|y|<r(x)} h(x+y)\,d\alpha^{(r(x))}(x)\,d\mu(x)+c \overset{(8.16)}{=} \int h\,d\mu^{*r}+c,$$

что даёт $\nu\preccurlyeq\mu^{*r}+c$ в $\mathcal{M}+\mathbb{R}^+\mathbf{1}$ ввиду (8.14)–(8.15). □

В условиях п. I из (8.9) ввиду (8.16) согласно лемме 8.2 получаем

$$\begin{gathered} -\infty < \inf\Bigl\{\int F\,d\mu:\ \nu\prec\mu,\ \mu\in\mathcal{M}\Bigr\} \leqslant \inf\Bigl\{\int F\,d\mu^{*r}:\ \nu\prec\mu,\ \mu\in\mathcal{M}_1\Bigr\} = \\ \overset{(8.16)}{=} \inf\Bigl\{\int F^{*r}\,d\mu:\ \nu\prec\mu,\ \mu\in\mathcal{M}_1\Bigr\},\quad \text{где } \mathcal{M}_1=\operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D\setminus U_1). \end{gathered} \tag{8.17}$$

В условиях п. II из (8.11) ввиду (8.16) согласно лемме 8.2 получаем

$$\begin{gathered} -\infty < \inf\Bigl\{\int F\,d\mu+c:\ \nu\preccurlyeq\mu+c,\ \mu\in\mathcal{M},\ c\in\mathbb{R}^+\Bigr\} \leqslant \\ \leqslant \inf\Bigl\{\int F\,d\mu^{*r}+c:\ \nu\preccurlyeq\mu+c,\ \mu\in\mathcal{M}_1,\ c\in\mathbb{R}^+\Bigr\} = \\ \overset{(8.16)}{=} \inf\Bigl\{\int F^{*r}\,d\mu+c:\ \nu\preccurlyeq\mu+c,\ \mu\in\mathcal{M}_1,\ c\in\mathbb{R}^+\Bigr\},\quad \text{где } \mathcal{M}_1=\operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D\setminus U_1). \end{gathered} \tag{8.18}$$

Функция F^{*r} в правых частях (8.17) и (8.18) непрерывна (и даже принадлежит классу C^∞), поскольку $F\in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ и по соглашению r из класса C^∞. Временно заменим функцию F^{*r} на функцию

$$F^{*r}_{\mathrm{bal}} := \begin{cases} F^{*r} & \text{на } D\setminus U_1,\\ \text{гармоническое продолжение } F^{*r} \text{ с } \partial U_1 \text{ внутрь } U_1 \text{ на } U_1. \end{cases} \tag{8.19}$$

При выполнении (8.17) или (8.18) ввиду $\mu \in \mathcal{M}_1 = \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D\setminus U_1)$ имеем соответственно,

$$-\infty < \inf\left\{ \int F^{*r}_{\mathrm{bal}}\, d\mu :\ \nu \prec \mu,\ \mu \in \mathcal{M}_1 \right\} \tag{8.20l}$$

или

$$-\infty < \inf\left\{ \int F^{*r}_{\mathrm{bal}}\, d\mu + c :\ \nu \preccurlyeq \mu + c,\ \mu \in \mathcal{M}_1,\ c \in \mathbb{R}^+ \right\}. \tag{8.20a}$$

Пусть теперь $\mu \in \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$. Рассмотрим классическое выметание μ^{bal} меры μ из U_1 (см. [10]):

$$\mu^{\mathrm{bal}} := \begin{cases} \mu\big|_{D\setminus \operatorname{clos} U_1} & \text{на } D\setminus \operatorname{clos} U_1,\\ \text{выметание из } \operatorname{clos} U_1 \text{ меры } \mu\big|_{\operatorname{clos} U_1} & \text{на границу } \partial U_1 \text{ на } \operatorname{clos} U_1. \end{cases} \tag{8.21}$$

Из определения (8.21) следует $\operatorname{supp} \mu^{\mathrm{bal}} \Subset D\setminus U_1$ и для непрерывной функции F^{*r}_{bal} из (8.19) в силу её гармоничности в U_1 по определению классического выметания меры из [10] имеем

$$\int F^{*r}_{\mathrm{bal}}\, d\mu = \int F^{*r}\, d\mu^{\mathrm{bal}}. \tag{8.22}$$

Если при этом $\nu \prec \mu$ (соотв., $\nu \preccurlyeq \mu + c$) в $\mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$ (соотв., в $\mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D) + \mathbb{R}^+\mathbf{1}$), то $\nu \prec \mu^{\mathrm{bal}}$ (соотв., $\nu \preccurlyeq \mu^{\mathrm{bal}} + c$) в $\mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D\setminus U_1)$ (соотв., в $\mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D\setminus U_1) + \mathbb{R}^+\mathbf{1}$). Отсюда и из (8.20) в силу (8.22) имеем, соответственно,

$$-\infty \overset{(8.20l)}{<} \inf\left\{ \int F^{*r}_{\mathrm{bal}}\, d\mu :\ \nu \prec \mu,\ \mu \in \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D) \right\} \tag{8.23l}$$

или

$$-\infty \overset{(8.20a)}{<} \inf\left\{ \int F^{*r}_{\mathrm{bal}}\, d\mu + c :\ \nu \preccurlyeq \mu + c,\ \mu \in \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D),\ c \in \mathbb{R}^+ \right\}. \tag{8.23a}$$

Положим теперь

$$X := L^1_{\mathrm{loc}}(D), \quad X_0 := C_{\mathbb{R}}(D) \subset X, \quad q_1 = q := \nu \tag{8.24}$$

и, соответственно,

$$H \subset \mathrm{sbh}_*(D) \text{ — выпуклые конус или множество;} \quad L = \mathrm{lin}^+ \mathbb{R}^X \text{ или } L = \mathrm{aff}^+ \mathbb{R}^X. \tag{8.25}$$

При этом X можно трактовать как приведённый правильный проективный предел векторных решёток (Фреше) $L^1(D_n)$ с естественным отношением порядка $\leqslant$ поточечно п.в. (см. п. 3.2, пример 3.2.4). Здесь исчерпание области D областями D_n можно начинать с области $D_1 \supset \operatorname{supp} \nu$ (см. замечание 3.1).

Для удобства ссылок случаи выпуклых конуса H и множества H рассмотрим раздельно.

I. H **— выпуклый конус.** При условии (a) теоремы 6 используем следствие 6.1 из теоремы 2, а при условии (b) — топологическую теорему 4. Условие (iii–iv) следствия 6.1 составляет содержание условия (a) теоремы 6, а условие (b) теоремы 6 требуется в теореме 4. Условие (c) теоремы 6 влечёт за собой выполнение как условия (ii) теоремы 2, так и условия (i) теоремы 4. В рамках условия (a) теоремы 6 для $H \subset \mathrm{sbh}_*(D)$ как условие (v) теоремы 2, так и условие (iii) теоремы 4 входят в перечень основных свойств субгармонических функций. Тот факт, что H содержит отрицательную функцию, означает, что $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$. В частности, выполнено условие (i) теоремы 2. Таким образом, при выборе условия (a) в рамках теоремы 6 выполнены все условия следствия 6.1 из теоремы 2, а при выборе условия (b) в рамках теоремы 6 выполнены все условия топологической теоремы 4 в дополненной усиленной версии с $H \cap (-X^+) \neq \varnothing$. Следовательно, выполнено заключение (6.5), которое в рассматриваемой конкретной ситуации может быть записано для любой непрерывной функции $f\in X_0 \overset{(8.24)}{=} C_{\mathbb R}(D)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\operatorname{spf}_{H,q}(f) &\overset{(5.1)}{:=} \sup\Bigl\{\int h\,d\nu:\ H\ni h\leqslant f\Bigr\}=\\ &= \inf\Bigl\{l(f):\ l\in \operatorname{lin}^+\mathbb R^X;\ \int h\,d\nu\leqslant l(g) \text{ при всех } h\in H,\ h\leqslant g,\ g\in C_{\mathbb R}(D)\Bigr\}=\\ &= \inf\Bigl\{l(f):\ l\in \operatorname{lin}^+\mathbb R^X,\ q\prec_H^{X_0} l\Bigr\} \overset{(5.9)}{=:} \inf\Bigl(\operatorname{spr}\bigl(\nu;H,X_0,\operatorname{lin}^+\mathbb R^X\bigr)(f)\Bigr)\quad \text{для всех } f\in C_{\mathbb R}(D).\end{aligned}\tag{8.26}$$

Но по следствию 3.1 можем $\operatorname{lin}^+\mathbb R^X$ отождествить с $\operatorname{Meas}^+_{\rm cmp}(D)$, что, впрочем, в рамках (8.24) и (8.25) давно известно и ранее. Кроме того, отметим, что по определению 7.1 линейного выметания меры и определению 5.2 абстрактного выметания и ростка в (5.9) в данной конкретной ситуации

$$\operatorname{spr}\bigl(\nu;H,X_0,\operatorname{lin}^+\mathbb R^X\bigr)=\Bigl\{\mu\in \operatorname{Meas}^+_{\rm cmp}(D):\nu\prec\mu\Bigr\}.$$

Отсюда и из (8.26) получаем

$$\sup\Bigl\{\int h\,d\nu:\ H\ni h\leqslant f\Bigr\}=\inf\Bigl\{\int f\,d\mu:\ \nu\prec\mu\in \operatorname{Meas}^+_{\rm cmp}(D)\Bigr\}\quad \text{для любой } f\in C_{\mathbb R}(D).\tag{8.27}$$

Применяя (8.27) к непрерывной функции $F^{*r}_{\rm bal}$ из (8.19) согласно (8.23l) получаем

$$\sup\Bigl\{\int h\,d\nu:\ H\ni h\leqslant F^{*r}_{\rm bal}\Bigr\}=\inf\Bigl\{\int F^{*r}_{\rm bal}\,d\mu:\ \nu\prec\mu\in \operatorname{Meas}^+_{\rm cmp}(D)\Bigr\}\overset{(8.23l)}{>}-\infty.$$

Следовательно, существует функция $h\in H$, которая удовлетворяет неравенству $h\leqslant F^{*r}_{\rm bal}$ на D. Так как функции $F^{*r}_{\rm bal}\in C_{\mathbb R}(D)$ и $F^{*r}\in C_{\mathbb R}(D)$ совпадают в $D\setminus U_1$, то для некоторой достаточно большой постоянной $C\in\mathbb R$ имеем

$$F^{*r}_{\rm bal}\leqslant F^{*r}+C\quad \text{на } D.\tag{8.28}$$

Это завершает доказательство для п. I.

II. H **— выпуклое множество.** При условии (a) теоремы 6 используем теорему 3, а при условии (b) — топологическую теорему 5. Условие (iii–iv) следствия 6.1, требуемое в теореме 3, составляет содержание условия (a) теоремы 6, а условие (b) теоремы 6 требуется в теореме 5. Условие (c) теоремы 6 влечёт за собой выполнение как условия (ii) теоремы 2, требуемое в теореме 3, так и условия (i) теоремы 4, требуемое в теореме 5. В рамках условия (a) теоремы 6 для $H\subset \operatorname{sbh}_*(D)$ как условие (v) теоремы 2, требуемое в теореме 3, так и условие (iii) теоремы 4, требуемое в теореме 5, входят в перечень основных свойств субгармонических функций. При всём этом $0\in H$. Таким образом, при выборе условия (a) в рамках теоремы 6 выполнены все условия теоремы 3, а при выборе условия (b) в рамках теоремы 6 выполнены все условия топологической теоремы 5 в дополненной усиленной версии с $0\in H$ и $q_1(0)=\int 0\,d\nu=0$. Следовательно, выполнено заключение (6.5), которое в рассматриваемой конкретной ситуации может быть записано для любой непрерывной функции $f\in X_0 \overset{(8.24)}{=} C_{\mathbb R}(D)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\operatorname{spf}_{H,q}(f) &\overset{(5.1)}{:=} \sup\Bigl\{\int h\,d\nu:\ H\ni h\leqslant f\Bigr\}=\\ &= \inf\Bigl\{a(f):\ a\in \operatorname{aff}^+\mathbb R^X;\ \int h\,d\nu\leqslant a(g) \text{ при всех } h\in H,\ h\leqslant g,\ g\in C_{\mathbb R}(D)\Bigr\}=\\ &= \inf\Bigl\{a(f):\ a\in \operatorname{aff}^+\mathbb R^X,\ q\prec_H^{X_0} a\Bigr\} \overset{(5.9)}{=:} \inf\bigl(\operatorname{spr}(\nu;H,X_0,\operatorname{aff}^+\mathbb R^X)(f)\bigr)\end{aligned}\tag{8.29}$$

для всех $f \in C_{\mathbb{R}}(D)$. Но согласно следствию 3.2 можем $\operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X$ отождествить с $\operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D) + \mathbf{1} \cdot \mathbb{R}^+$ в рамках (8.24) и (8.25). Кроме того, отметим, что по определению 7.1 аффинного выметания меры и определению 5.2 абстрактного выметания и ростка в (5.9) в данной конкретной ситуации

$$\operatorname{spr}(\nu; H, X_0, \operatorname{aff}^+ \mathbb{R}^X) \overset{(6.20)}{=} \Bigl\{\mu + c \cdot \mathbf{1} \colon\ \mu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D),\ c \in \mathbb{R}^+,\ \nu \preccurlyeq \mu + c\Bigr\}.$$

Отсюда и из (8.29) для всех $f \in C_{\mathbb{R}}(D)$

$$\sup\left\{\int h\, d\nu \colon\ H \ni h \leqslant f\right\} = \inf\left\{\int f\, d\mu + c \colon\ \nu \preccurlyeq \mu + c,\ \mu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D),\ c \in \mathbb{R}^+\right\}. \tag{8.30}$$

Применяя (8.30) к непрерывной функции F^{*r}_{bal}, из (8.19) согласно (8.23a) получаем

$$\sup\left\{\int h\, d\nu \colon\ H \ni h \leqslant F^{*r}_{\mathrm{bal}}\right\} =$$
$$= \inf\left\{\int F^{*r}_{\mathrm{bal}}\, d\mu + c \colon\ \nu \preccurlyeq \mu + c,\ \mu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D),\ c \in \mathbb{R}^+\right\} \overset{(8.23a)}{>} -\infty.$$

Следовательно, существует функция $h \in H$, которая удовлетворяет неравенству $h \leqslant F^{*r}_{\mathrm{bal}}$ на D. Так как для некоторого $C \in \mathbb{R}$ имеем (8.28), это завершает доказательство для п. II. □

Замечание 8.1. Если H из теоремы 6 — *конус*, содержащий строго отрицательную полунепрерывную сверху функцию на D, то условие (c) теоремы 6 выполнено автоматически.

В заключение подраздела приведём простые примеры выпуклых конусов и множеств в $\operatorname{sbh}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^m$ или $D \subset \mathbb{C}^n$, удовлетворяющие всем условиям теоремы 6. Эти примеры легко получаются на основе известных свойств выпуклых, (плюри)субгармонических и (плюри)гармонических функций (см. также [25, примеры 7.1–7.4]).

Примеры. 1. Для произвольной области $D \subset \mathbb{R}^m$ — это выпуклые конусы H, равные $\operatorname{sbh}_*(D)$, $\operatorname{har}(D)$, $\operatorname{conv} \mathbb{R}^D$ в случае выпуклости D.

2. Для области $D \subset \mathbb{C}^n$ — это выпуклые конусы H, равные $\operatorname{plsbh}_*(D) := \operatorname{plsbh}(D) \setminus \{-\boldsymbol{\infty}\}$, $\operatorname{plhar}(D)$.

3. Пусть C — некоторый выпуклый конус непрерывных положительных функций на $D \subset \mathbb{R}^m$ или на $D \subset \mathbb{C}^n$. Тогда для любого конуса H из предыдущих пп. 1 и 2 их подмножества

$$\bigl\{h \in H \colon\ \exists f \in C,\ h \leqslant f \text{ на } D\bigr\} \tag{8.31}$$

— выпуклые конусы, удовлетворяющие условиям части I теоремы 6.

4. Пусть C — некоторое выпуклое множество непрерывных положительных функций на $D \subset \mathbb{R}^m$ или на $D \subset \mathbb{C}^n$. Тогда (8.31) — выпуклые подмножества, удовлетворяющие условиям части II теоремы 6.

Замечание 8.2. Отметим, что как в примере 4, так и в примере 3 можно рассматривать классы функций C, определённых только на части $S \subset D$, с изменениями «$h \leqslant f$ *на* S» в определениях классов (8.31), но при этом придётся накладывать на S некоторые условия, связанные, например, с принципом максимума, чтобы верхние регуляризации верхних пределов последовательностей функций из H, ограниченных сверху на S функциями из C, не принимали значений $+\infty$ и принадлежали H. Такого рода выпуклые конусы использовались, например, в [50].

Кроме того, многие инвариантные относительно определённых преобразований области D выпуклые подконусы и выпуклые подмножества конусов H из примеров 1 и 2 могут удовлетворять условиям теоремы 6 (чётные, периодические, инвариантные относительно конформных и биголоморфных автоморфизмов псевдовыпуклой области $D \subset \mathbb{C}^n$ и т. п.). Это тема отдельного исследования, которую авторы предполагают рассмотреть в отдельной публикации.

8.2. Одна версия теоремы 6 для применений. Для применений к проблемам 7.1–7.4 из раздела 7 будет отдельно рассмотрен случай функции вида $F := M - u$, где u — некоторая (плюри)субгармоническая функция. Следующее следствие несколько уточняет и обобщает результаты с подобной функцией $F = M - u$ из наших работ [7, 21–30, 51].

Следствие 8.1. *Пусть $H \subset \mathrm{sbh}_*(D)$, $u \in \mathrm{sbh}_*(D)$, $M \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, $M(D) \subset \mathbb{R}_{\pm\infty}$ и фиксированы*

$$0 \neq \nu \in \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D), \quad \operatorname{supp} \nu \overset{(8.8)}{\subset} U_0 \Subset D, \quad \text{где } U_0 \text{ — область}. \tag{8.32}$$

I. *Пусть выполнено условие (8.1), функция M локально универсально измерима для множества мер*[1] $\mathcal{M} \subset \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$. *Если существует функция $h \in H$, удовлетворяющая неравенству*

$$u + h \leqslant M \text{ на } D, \tag{8.33}$$

то найдется постоянная $C \in \mathbb{R}$, для которой

$$\int u\,d\mu \leqslant \int M\,d\mu + C \qquad \text{при всех } \nu \prec \mu \in \mathcal{M}, \tag{8.34l}$$

$$\int u\,d\mu \leqslant \int M\,d\mu + c + C \quad \text{при всех } \nu \preccurlyeq \mu + c,\ \mu \in \mathcal{M},\ c \in \mathbb{R}^+. \tag{8.34a}$$

II. *Пусть выполнено условие* (c) *и одно из условий* (a) *или* (b) *из теоремы 6,*

$$\mathcal{M} \overset{(8.7)}{:=} \mathrm{Meas}^+_{\infty}(D) \cap \mathrm{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D \setminus U_0),$$

$r \geqslant 0$ — локально отделённая от нуля функция из (8.6).

1. *Пусть H — выпуклый конус, содержащий отрицательную функцию, и пусть для некоторой постоянной $C \in \mathbb{R}$ имеет место (8.34l). Тогда найдутся строго положительная функция $\widehat{r} \leqslant r$ класса C^∞ на D, постоянная* const $\in \mathbb{R}$ *и функция $h \in H$, для которых*

$$u + h \leqslant M^{*\widehat{r}} + \mathrm{const} \quad \text{на } D \qquad (\text{ср. } (8.33)). \tag{8.35}$$

Кроме того, часто можно избавиться от участия функции $\widehat{r}$ в правой части (8.35):

(i) *если $M \in C(D)$, то в (8.35) можно заменить $M^{*\widehat{r}}$ на M, что отличается от (8.33) лишь дополнительным слагаемым* $+\mathrm{const}$ *в правой части;*

(ii) *если $M \in \mathrm{sbh}_*(D)$, то в (8.35) можно заменить $M^{*\widehat{r}}$ на усреднение M по сферам*

$$S_M\bigl(x, r(x)\bigr) := \frac{1}{s_{m-1} r^{m-1}(x)} \int\limits_{\partial B(x, r(x))} M(y)\,d\sigma(y), \quad x \in D, \tag{8.36}$$

где s_{m-1} из (7.9), а $d\sigma$ — элемент площади поверхности сферы $\partial B\bigl(x, r(x)\bigr)$.

2. *Пусть H — выпуклое множество, $0 \in H$, и для некоторой постоянной $C \in \mathbb{R}$ имеет место (8.34a). Тогда найдутся строго положительная функция $\widehat{r} \leqslant r$ класса C^∞ на D, постоянная* const $\in \mathbb{R}$ *и функция $h \in H$, для которых выполнено (8.35). Кроме того, можно избавиться от участия функции $\widehat{r}$ в правой части (8.35) как в* II(1)i *и* II(1)ii.

Доказательство. В доказательстве полагаем $F := M - u$.

I. Функция F локально универсально измерима для $\mathcal{M}$, поскольку функция $u \in \mathrm{sbh}_*(D)$ полунепрерывна сверху. Согласно предложению 8.1 из (8.2l) и (8.2a) получаем, соответственно, (8.34l) и (8.34a).

II1. Выполнены все условия теоремы 6 в части I, откуда ввиду $F^{*\widehat{r}} = M^{*\widehat{r}} - u^{*\widehat{r}}$ получаем

$$u^{*\widehat{r}} + h \overset{(8.10)}{\leqslant} M^{*\widehat{r}} + \mathrm{const} \quad \text{на } D \text{ для некоторой функции } h \in H. \tag{8.37}$$

Мера $\alpha^{(r(x))}$ — это мера Йенсена, вследствие чего $u \leqslant u^{*\widehat{r}}$ на D, и получаем неравенство (8.35).

[1] Для этого достаточно, например, полунепрерывности (сверху или снизу) функции M.

Если $M \in C(D)$, то M равномерно непрерывна на компактах из D. Поэтому изначально можно выбрать локально отделённую от нуля функцию $r > 0$ из (8.6) столь малой, что

$$\sup_{|y-x| \leqslant r(x)} M(y) \leqslant M(x) + 1$$

для всех $x \in D$. Отсюда $M^{*\widehat{r}} \leqslant M + 1$ на D и имеет место усиление II(1)i.

Если $M \in \operatorname{sbh}_*(D)$, то значение усреднения $M^{*\widehat{r}}(x)$ не превышает[1] (см. [3, предложение 3]) усреднения $S_M\bigl(x, \widehat{r}(x)\bigr) \leqslant S_M\bigl(x, r(x)\bigr)$ ввиду возрастания по радиусу усреднений (8.36).

II2. Выполнены все условия теоремы 6 в части II, откуда получаем (8.37). Дальнейшие рассуждения дословно те же, что и при доказательстве II1 после (8.37). □

9. Применения к голоморфным функциям

Для области $D \subset \mathbb{C}^n$ и *расширенной числовой функции* M на D рассмотрим весовые классы

$$\operatorname{Hol}(D, M) := \left\{ f \in \operatorname{Hol}(D) : \sup_{z \in D} \frac{|f(z)|}{\exp M(z)} < +\infty \right\}. \tag{9.1}$$

Далее всюду $\mathcal{M} \overset{(8.7)}{:=} \operatorname{Meas}^+_\infty(D) \cap \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D \setminus U_0)$, $r \geqslant 0$ — произвольная локально отделённая от нуля функция из (8.6), а *фиксированные* $\nu \in \operatorname{Meas}^+_{\mathrm{cmp}}(D)$ и U_0 удовлетворяют (8.32), $M \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$.

9.1. К нетривиальности весовых классов голоморфных функций.

Теорема 7. *Пусть D — псевдовыпуклая область, $H = \operatorname{plsbh}_*(D)$. Если*

$$-\infty \overset{(8.34\mathrm{l})}{<} \inf \left\{ \int M \, d\mu : \ \nu \prec \mu \in \mathcal{M} \right\}, \tag{9.2}$$

то найдётся строго положительная функция $\widehat{r} \leqslant r$ класса C^∞ на D, для которой при любом значении числа $a > 0$ для весовой функции

$$\widetilde{M}(z) := \inf_{0 < d < \min\{1, \operatorname{dist}(z, \partial D)\}} \left(B_{M^{*\widehat{r}}}(z, d) + n \log \frac{1}{d} \right) + (n + a) \log \bigl(2 + |z|\bigr), \tag{9.3}$$

зависящей только от M, $\widehat{r}$ и a, где

$$B_M(z, d) := \frac{n!}{\pi^n d^{2n}} \int\limits_{B(z,d)} M \, d\lambda \quad \text{— усреднение функции } M \text{ по шару } B(z, d), \tag{9.4}$$

класс $\operatorname{Hol}\bigl(D, \widetilde{M}\bigr)$ не тривиален, т.е. содержит ненулевую функцию.

Если $M \in C(D)$, то функцию $\widehat{r}$ можно убрать, заменив $M^{*\widehat{r}}$ в правой части (9.3) на M.

Если $M \in \operatorname{sbh}_*(D)$, то для любой локально отделённой от нуля функции $d \colon D \to \mathbb{R}^+_*$, удовлетворяющей условию

$$d(z) < \min\bigl\{1, \operatorname{dist}(z, \partial D)\bigr\}, \ z \in D, \quad \sup_{z \in D} \left(\frac{1}{d(z)} \sup \bigl\{ d(z') : \ |z - z'| \leqslant d(z) \bigr\} \right) \leqslant A < +\infty \tag{9.5}$$

вместо функции $\widetilde{M}$ из (9.3) можно использовать функцию

$$\widetilde{M}(z) := B_M\bigl(z, d(z)\bigr) + n \log \frac{1}{d(z)} + (n + a) \log \bigl(2 + |z|\bigr), \quad z \in D. \tag{9.6}$$

Доказательство. Согласно следствию 8.1, часть II1, для $u = 0$ из условия (9.2), соответствующего (8.34l), найдется функция $h \in \operatorname{plsbh}_*(D)$, для которой выполнено (8.35), т.е.

$$h \leqslant M^{*\widehat{r}} + \mathrm{const} \quad \text{на } D. \tag{9.7}$$

[1] Это утверждение доказано для субгармонических функция на $\mathbb{C}$, но доказательство без труда переносится на субгармонические функции в окрестности $\overline{B}\bigl(x, \widehat{r}(x)\bigr) \subset \mathbb{R}^m$.

Теорема A (см. [2, теорема 1]). *Для псевдовыпуклой области $D \subset \mathbb{C}^n$ и $h \in \operatorname{plsbh}_*(D)$, для любого числа $a > 0$ найдется ненулевая функция $f \in \operatorname{Hol}(D)$, удовлетворяющая оценке*

$$\log\bigl|f(z)\bigr| \leqslant B_h(z,d) + n\log\frac{1}{d} + (n+a)\log\bigl(1+|z|+d\bigr) \tag{9.8}$$

для всех $z \in D$ и $d \in \bigl(0, \operatorname{dist}(z,\partial D)\bigr)$.

Применим усреднение по шарам $B(z,d)$ к обеим частям неравенства (9.7) с добавками двух последних слагаемых из правой части (9.8) при дополнительном ограничении $d < 1$. Тогда по теореме A существует ненулевая функция $f \in \operatorname{Hol}(D, \widetilde{M})$ с функцией $\widetilde{M}$ из (9.3). Вариация теоремы 7 для $M \in C(D)$ следует из части II(1)i следствия 8.1. В случае $M \in \operatorname{sbh}_*(D)$ следует воспользоваться частью II(1)ii следствия 8.1 при $r = 1/Ad$ для функции d из (9.5). При таком выборе некоторые технические выкладки позволяют выбрать $\widetilde{M}$, как в (9.6). $\square$

9.2. К описанию нулевых множеств.

Теорема 8. *Пусть область $D \subset \mathbb{C}^n$ — односвязная при $n = 1$ или звёздная относительно некоторой точки $z_0 \in D$ при $n > 1$, т.е. для любой точки $z \in D$ отрезок $[z_0, z]$ лежит в D. Пусть $H = \operatorname{plhar}(D)$, $\nu := \delta_{z_0}$ — мера Дирака в точке $z_0 \in D$, Z — дивизор нулей некоторой ненулевой функции $f_{\mathsf{Z}} \in \operatorname{Hol}(D)$, т.е. $\operatorname{Zero}_{f_{\mathsf{Z}}} = \mathsf{Z}$. Если для некоторой постоянной $C \in \mathbb{R}$ имеем*

$$\int \log|f_{\mathsf{Z}}|\,d\mu \leqslant \int M\,d\mu + C \quad \text{при всех } \delta_{z_0} \prec \mu \in \mathcal{M}, \tag{9.9}$$

то найдутся строго положительная функция $\widehat{r} \leqslant r$ класса C^∞ на D и функция $f \in \operatorname{Hol}(D, M^{*\widehat{r}})$ с дивизором нулей $\operatorname{Zero}_f = \mathsf{Z}$. Если дополнительно $M \in C(D)$, то можно выбрать такую функцию f, что $\operatorname{Zero}_f = \mathsf{Z}$, из $\operatorname{Hol}(D, M)$. Если $M \in \operatorname{sbh}_*(D)$, то такую f можно выбрать из $\operatorname{Hol}(D, M^{*r})$.

Доказательство. Согласно следствию 8.1, ч. III1, для $u = \log|f_{\mathsf{Z}}|$ из условия (9.9), соответствующего (8.34l), найдется функция $h \in \operatorname{plhar}_*(D)$, с которой выполнено (8.35), т.е.

$$\log|f_{\mathsf{Z}}| + h \leqslant M^{*\widehat{r}} + \text{const} \quad \text{на } D. \tag{9.10}$$

Для плюригармонической функции h в D найдётся функция $g \in \operatorname{Hol}(D)$ (см. [54, предложение 2.2.13]), для которой $\operatorname{Re} g = h$. Тогда функция $f := f_{\mathsf{Z}} e^g$ ввиду (9.10) искомая. Уточнения/упрощения для $M \in C(D)$ и $M \in \operatorname{sbh}_*(D)$ следуют соответственно, из ч. II(1)i следствия 8.1 и из неравенства $M^{*\widehat{r}} \leqslant M^{*r}$. $\square$

9.3. К описанию нулевых подмножеств.

Теорема 9. *Пусть область $D \subset \mathbb{C}^n$ псевдовыпуклая, $H = \operatorname{plsbh}_*(D)$, положительная функция $\mathsf{Z} \leqslant \operatorname{Zero}_{f_0}$ на D, где $\operatorname{Zero}_{f_0}$ — дивизор нулей некоторой ненулевой функции $f_0 \in \operatorname{Hol}(D)$. Если для некоторой постоянной $C \in \mathbb{R}$ имеем*

$$\int \log|f_0|\,d\mu \leqslant \int M\,d\mu + C \quad \text{при всех } \nu \prec \mu \in \mathcal{M}, \tag{9.11}$$

то найдутся строго положительная функция $\widehat{r} \leqslant r$ класса C^∞ на D и ненулевая $g \in \operatorname{Hol}\bigl(D, \widetilde{M}\bigr)$, где $\widetilde{M}$ из (9.3), с дивизором нулей $\operatorname{Zero}_g \geqslant \mathsf{Z}$ на D. Если дополнительно $M \in C(D)$, то можно выбрать такую функцию $g \neq 0$ с $\operatorname{Zero}_g \geqslant \mathsf{Z}$ из $\operatorname{Hol}(D, M)$. Если $M \in \operatorname{sbh}_*(D)$, то для любой локально отделённой от нуля функции $d : D \to \mathbb{R}_*^+$, удовлетворяющей условиям (9.5), можно выбрать такую ненулевую $g \in \operatorname{Hol}\bigl(D, \widetilde{M}\bigr)$ с $\widetilde{M}$ из (9.6) и $\operatorname{Zero}_g \geqslant \mathsf{Z}$.

Доказательство. Согласно следствию 8.1, ч. III1, для субгармонической $u := \log|f_0|$ из условия (9.11), соответствующего (8.34l), найдется функция $h \in \operatorname{plsbh}_*(D)$, для которой выполнено (8.35):

$$\log|f_0| + h \leqslant M^{*\widehat{r}} + \text{const} \quad \text{на } D. \tag{9.12}$$

По теореме A существует ненулевая функция $f \in \mathrm{Hol}(D)$, удовлетворяющая (9.8). Применим усреднение по шарам $B(z,d)$ к обеим частям неравенства (9.12) с добавками двух последних слагаемых из правой части (9.8) при дополнительном ограничении $d<1$. Тогда ввиду субгармоничности $\log\bigl|f_0(z)\bigr| \leqslant B_{\log|f_0|}(z,d)$ при всех $z\in D$ и функция $g:=f_0f$ — требуемая. Вариация теоремы 9 для $M\in C(D)$ следует из ч. II(1)i следствия 8.1. В случае $M\in \mathrm{sbh}_*(D)$ следует воспользоваться ч. II(1)ii следствия 8.1 при $r=1/Ad$ для функции d из (9.5). При таком выборе некоторые технические выкладки позволяют выбрать $\widetilde{M}$, как в (9.6). □

9.4. К представлению мероморфных функций.

Теорема 10. *Пусть область $D\subset \mathbb{C}^n$ псевдовыпуклая, $H=\mathrm{plsbh}_*(D)$,*

$$Q=\frac{q_1}{q_2}\in \mathrm{Mer}(D), \quad q_1,q_2\in \mathrm{Hol}(D)\setminus\{0\}, \quad U_Q:=\left[\begin{array}{l}\max\bigl\{\log|q_1|,\log|q_2|\bigr\},\\ \log\sqrt{|q_1|^2+|q_2|^2}.\end{array}\right. \tag{9.13}$$

Если для некоторой постоянной $C\in\mathbb{R}$ имеем

$$\int U_Q\,d\mu \leqslant \int M\,d\mu + C \quad \textit{при всех } \nu\prec\mu\in\mathcal{M}, \tag{9.14}$$

то найдутся строго положительная функция $\widehat{r}\leqslant r$ класса C^∞ на D и ненулевые функции $g_1,g_2\in \mathrm{Hol}\bigl(D,\widetilde{M}\bigr)$, где $\widetilde{M}$ из (9.3), представляющие $Q=g_1/g_2$. Если $M\in C(D)$, то можно выбрать эти голоморфные функции $g_1,g_2\neq 0$, представляющие $Q=g_1/g_2$, из $\mathrm{Hol}(D,M)$. Если $M\in\mathrm{sbh}_*(D)$, то для любой локально отделённой от нуля $d\colon D\to\mathbb{R}^+_*$, удовлетворяющей (9.5), можно выбрать такую пару ненулевых функций $g_1,g_2\in\mathrm{Hol}\bigl(D,\widetilde{M}\bigr)$ с $\widetilde{M}$ из (9.6) и $Q=g_1/g_2$.

Доказательство. Согласно следствию 8.1, ч. II1, для субгармонической функции $u:=U_Q$ из условия (9.14), соответствующего (8.34l), найдется функция $h\in\mathrm{plsbh}_*(D)$, с которой выполнено (8.35):

$$U_Q+h\leqslant M^{*\widehat{r}}+\mathrm{const} \quad \text{на } D. \tag{9.15}$$

По теореме A существует ненулевая функция $f\in\mathrm{Hol}(D)$, удовлетворяющая (9.8). Применим усреднение по шарам $B(z,d)$ к обеим частям неравенства (9.15) с добавками двух последних слагаемых из правой части (9.8) при дополнительном ограничении $d<1$. Тогда ввиду субгармоничности $U_Q(z)\leqslant B_{U_Q}(z,d)$ при всех $z\in D$ получаем неравенство $U_Q+\log|f|\leqslant \widetilde{M}+\mathrm{const}$ на D для функции $\widetilde{M}$ из (9.3). Отсюда при любом из двух выборов функции U_Q в (9.13) имеем

$$\left.\begin{array}{r}\max\bigl\{\log|q_1|,\log|q_2|\bigr\}+\log|f|\\ \log\sqrt{|q_1|^2+|q_2|^2}+\log|f|\end{array}\right]\leqslant \widetilde{M}+\mathrm{const} \quad \text{на } D,$$

и функции

$$\begin{cases} g_1 &:= q_1f,\\ g_2 &:= q_2f,\end{cases} \qquad \frac{g_1}{g_2}=\frac{q_1f}{q_2f}=\frac{q_1}{q_2}=Q, \tag{9.16}$$

— искомые. Вариация теоремы 7 для $M\in C(D)$ следует из ч. II(1)i следствия 8.1. В случае $M\in\mathrm{sbh}_*(D)$ следует воспользоваться ч. II(1)ii следствия 8.1 при $r=1/Ad$ для функции d из (9.5). При таком выборе некоторые технические выкладки позволяют выбрать $\widetilde{M}$, как в (9.6). □

Теорема 11. *Пусть область $D\subset\mathbb{C}^n$ — односвязная при $n=1$ и звёздная относительно некоторой точки $z_0\in D$ при $n>1$. Пусть $H=\mathrm{plhar}(D)$, $\nu:=\delta_{z_0}$, Q и U_Q — функции из (9.13). Если для некоторой постоянной $C\in\mathbb{R}$ имеем*

$$\int U_Q\,d\mu\leqslant\int M\,d\mu+C \quad \textit{при всех } \delta_{z_0}\prec\mu\in\mathcal{M}, \tag{9.17}$$

то найдутся строго положительная функция $\widehat{r}\leqslant r$ класса C^∞ на D и функция $f\in\mathrm{Hol}(D)$, не обращающаяся в нуль на D, для которой выполнено (9.16), $g_1,g_2\in\mathrm{Hol}(D,M^{*\widehat{r}})$ и, в частности,

$\mathrm{Zero}_{g_1} = \mathrm{Zero}_{q_1}$, $\mathrm{Zero}_{g_2} = \mathrm{Zero}_{q_2}$. *Если дополнительно* $M \in C(D)$, *то можно выбрать такую пару функций* g_1, g_2 *из* $\mathrm{Hol}(D, M)$. *Если* $M \in \mathrm{sbh}_*(D)$, *то такие* g_1, g_2 *можно выбрать из* $\mathrm{Hol}(D, M^{*r})$.

Доказательство. Согласно следствию 8.1, ч. II1, для субгармонической $u = U_Q$ из условия (9.17), соответствующего (8.34l), найдется функция $h \in \mathrm{plhar}_*(D)$, для которой выполнено (8.35), т.е. (9.15). Для плюригармонической функции h в D найдётся функция $g \in \mathrm{Hol}(D)$ (см. [54, предложение 2.2.13]), для которой $\mathrm{Re}\, g = h$. Тогда для функции $f := e^g$ функции g_1, g_2 вида (9.16), согласно (9.15), искомые. Уточнения/упрощения для $M \in C(D)$ и $M \in \mathrm{sbh}_*(D)$ следуют соответственно, из ч. II(1)i следствия 8.1 и из неравенства $M^{*\widehat{r}} \leqslant M^{*r}$. □

9.5. Заключительные замечания. Мы не использовали здесь применительно к голоморфным функциям следствие 8.1 в части II2 для выпуклого множества H, а также его часть I. Содержательное применение последней части дано нами в [30, 33] (см. также библиографию в этих работах). Здесь мы также не применяли аппарат потенциалов Йенсена, двойственных к мерам Йенсена, теории голоморфных потоков Е. М. Полецкого вкупе с голоморфными и полиномиальными дисками. Эти и другие подходы будут рассмотрены в последующих работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства. — Новосибирск: Наука, 1978.
2. *Байгускаров Т. Ю., Хабибуллин Б. Н.* Голоморфные миноранты плюрисубгармонических функций// Функц. анал. прилож. — 2016. — *50*, № 1. — С. 76–79.
3. *Байгускаров Т. Ю., Талипова Г. Р., Хабибуллин Б. Н.* Подпоследовательности нулей для классов целых функций экспоненциального типа, выделяемых ограничениями на их рост вдоль вещественной оси// Алгебра и анализ. — 2016. — *28*, № 2. — С. 1–33.
4. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
6. *Картак В. В., Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление функционалов на проективных пределах векторных решеток// в кн.: Теория функций, ее приложения и смежные вопросы/ Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — Казань: Казан. мат. об-во, 2009. — *38*. — С. 146–148.
7. *Кудашева Е. Г., Хабибуллин Б. Н.* Распределение нулей голоморфных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций// Мат. сб. — 2009. — *200*, № 9. — С. 95–126.
8. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения. — М.: Наука, 2007.
9. *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и её приложения. — Новосибирск: Наука, 1976.
10. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. — М.: Наука, 1966.
11. *Лелон Л., Груман Л.* Целые функции многих комплексных переменных. — М.: Мир, 1989.
12. Математическая энциклопедия. — М.: «Советская энциклопедия», 1977–1985.
13. *Мейер П.-А.* Вероятность и потенциалы. — М.: Мир, 1973.
14. *Ревенко А. В.* О продолжении линейных функционалов// Укр. мат. вісн. — 2009. — *6*, № 1. — С. 113–125.
15. *Ронкин Л. И.* Элементы теории аналитических функций многих переменных. — Киев: Наукова думка, 1977.
16. *Ронкин Л. И.* Целые функции// в кн.: Комплексный анализ. Многие переменные–3/ Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1986. — *9*. — С. 5–36.
17. *Себаштьян-и-Силва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях// Математика. — 1957. — *I*, № 1. — С. 60–77.
18. *Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ// в кн.: Анализ–2/ Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1987. — *14*. — Т. 2. — С. 5–101.
19. *Хабибуллин Б. Н.* Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций. I// Сиб. мат. ж. — 1992. — *33*, № 1. — С. 173–178.

20. *Хабибуллин Б. Н.* Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций. II. Алгебры функций конечного λ-типа// Сиб. мат. ж. — 1992. — *33*, № 3. — С. 186–191.
21. *Хабибуллин Б. Н.* Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. I. Целые и мероморфные функции// Изв. РАН. Сер. мат. — 1993. — *57*, № 1. — С. 129–146.
22. *Хабибуллин Б. Н.* Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. II. Целые и мероморфные функции конечного порядка// Изв. РАН. Сер. мат. — 1993. — *57*, № 3. — С. 70–91.
23. *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов// в кн.: Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. I. Комплексный анализ. — Уфа: Ин-т мат. с ВЦ УНЦ РАН, 1996. — С. 122–131.
24. *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I// Изв. РАН, сер. мат. — 2001. — *65*, № 4. — С. 205–224.
25. *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II// Изв. РАН, сер. мат. — 2001. — *65*, № 5. — С. 167–190.
26. *Хабибуллин Б. Н.* Теоремы единственности для голоморфных функций и выметание// в кн.: Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование. — Владикавказ: ИПМИ ВНЦ РАН, 2006. — С. 118–132.
27. *Хабибуллин Б. Н.* Последовательности нулей голомофных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты// Мат. сб. — 2007. — *198*, № 2. — С. 121–160.
28. *Хабибуллин Б. Н.* Нули голоморфных функций с ограничениями на рост в области// в кн.: Математический форум. Исследования по математическому анализу/ Итоги науки. — Владикавказ, 2009. — *3*. — С. 282–291.
29. *Хабибуллин Б. Н.* Применения в комплексном анализе двойственного представления функционалов на векторных решетках// в кн.: Математический форум. Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям/ Итоги науки. Юг России. — Владикавказ, 2010. — *4*. — С. 102–116.
30. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012.
31. *Хабибуллин Б. Н.* Аналоги теоремы Хана—Банаха для (полу)групп: построение нижней огибающей// Мат. Междунар. конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», Казань, 2–6 июня 2014 г. — 2014. — С. 75–76.
32. *Хабибуллин Б. Н., Байгускаров Т. Ю.* Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции// Мат. заметки. — 2016. — *99*, № 4. — С. 588–602.
33. *Хабибуллин Б. Н,, Розит А. П.* К распределению нулевых множеств голоморфных функций// Функц. анал. прилож. — 2018. — *52*, № 1. — С. 26–42.
34. *Хабибуллин Б. Н., Розит А. П., Хабибуллин Ф. Б.* Порядковые версии теоремы Хана—Банаха и огибающие. I. Однородные функции// в кн.: Математический форум. Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и математическому моделированию/ Итоги науки. Юг России. — Владикавказ. — *10*. — С. 226–243.
35. *Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю.* Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I, II// Алгебра и анализ. — 2008. — *20*, № 1. — С. 146–236.
36. *Хабибуллин Ф. Б., Хабибуллина Э. Б.* К теореме Хана—Банаха// VI Междунар. школа-конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и её приложения в естествознании» — 2013. — *1*. — С. 101–106.
37. *Чирка Е. М.* Комплексные аналитические множества. — М.: Наука, 1985.
38. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971.
39. *Aliprantis C. D., Border K. C.* Infinite-Dimensional Analysis. — Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
40. *Anger B., Lembcke J.* Hahn–Banach-type theorems for hypolinear functionals// Math. Ann. — 1974. — *209*. — P. 127–151.
41. *Borwein J. M., Vanderwerff J. D.* Convex Functions: Constructions, Characterizations, and Counterexamples. — N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2010.
42. *Buskes G.* Hahn–Banach theorem surveyed// Diss. Math. — 1993. — *327*. — P. 1–49.
43. *Dinha N., Ernst E., Lópezc M. A., Volled M.* An approximate Hahn–Banach theorem for positively homogeneous functions// Optimization. — 2013. — *64*, № 5. — P. 1321–1328.
44. *Edwards D. A.* Choquet boundary theory for certain spaces of lower semicontinuous functions// in: Proc. Int. Symp. on Function Algebras. — Chicago: Scott, Foresman and Company, 1966. — P. 300–309.

45. *Fuchssteiner B., Lusky W.* Convex Cones. — Amsterdam: North-Holland, 1981.
46. *Gamelin T. W.* Uniform Algebras and Jensen Measures. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978.
47. *Gogus N. G., Perkins T. L., Poletsky E. A.* Noncompact versions of Edwards' theorem// Positivity. — 2013. — *17.* — P. 459–473.
48. *Hörmander L.* Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans une espace lokalement convexe// Ark. Math. — 1955. — *3*, № 2. — P. 180–186.
49. *Hörmander L.* Notions of convexity. — Boston, Massachusetts: Birkhäuser, 1994.
50. *Khabibullin B. N.* Variant of a problem on the representation of a meromorphic function as a quotient of entire functions// Complex Var. Ellipt. Equ. — 1998. — *37*, № 1. — P. 371–384.
51. *Khabibullin B. N.* Dual approach to certain questions for weighted spaces of holomorphic functions// in: Entire Functions in Modern Analysis. — Tel-Aviv: Bar-Ilan Univ., 2001. — *15.* — P. 207–219.
52. *Khabibullin B. N.* The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results// Мат. физ., анал., геом. — 2002. — *9*, № 2. — С. 146–167.
53. *Khabibullin B. N.* Generalizations of Nevanlinna's theorems// Mat. Stud. Lviv. — 2010. — *34*, № 2. — P. 197–206.
54. *Klimek M.* Pluripotential Theory. — N.Y.: Clarendon Press, 1991.
55. *Koosis P.* Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. — Montreal, 1996.
56. *Lubyshev V. F.* On dual representation of a mapping on a projective limit of vector lattice// в кн.: Сб. тр. Междунар. уфимск. зимней школы-конференции по математике и физике для студентов, аспирантов и молодых ученых. Уфа, 30 ноября—6 декабря 2005. — Уфа, 2005. — *3.* — С. 64–70.
57. *Narici L.* On the Hahn–Banach theorem// in: Proc. II Int. School "Advanced Courses of Mathematical Analysis II," Spain, 20–24 September 2004. — Granada, 2004. — P. 87–122.
58. *Narici L., Beckenstein L.* The Hahn–Banach theorem: the life and times// Topology Appl. — 1997. — *2–3.* — P. 193–217.
59. *Poletsky E. A.* Plurisubharmonic functions as solutions of variational problems// Proc. Symp. Pure Math. — 1991. — *52*, № 1. — P. 163–171.
60. *Poletsky E. A.* Holomorphic currents// Indiana Univ. Math. J. — 1993. — *42*, № 1. — P. 85–144.
61. *Poletsky E. A., Sigurdsson R.* Dirichlet problems for plurisubharmonic functions on compact sets// Math. Z. — 2012. — *271*, № 3–4. — P. 877–892.
62. *Ronkin L. I.* Functions of Completely Regular Growth. — Dordrecht–Boston–London: Kluver Acad. Publ., 1992.
63. *Simons S.* Extended and sandwich versions of the Hahn–Banach theorem// J. Math. Anal. Appl. — 1968. — *21.* — P. 112–122.
64. *Simons S.* From Hahn–Banach to Monotonicity. — Berlin: Springer-Verlag, 2008.
65. *Weston J. D.* A note on the extension of linear functionals// Am. Math. Monthly. — 1960. — *67*, № 5. — P. 444–445.
66. *Zălinesku C.* On zero duality gap and the Farkas lemma for conic programming// Math. Oper. Res. — 2008. — *33.* — P. 991–1001.
67. *Zălinesku C.* Hahn–Banach extension theorems for multifunctions revisited// Math. Meth. Oper. Res. — 2008. — *68.* — P. 493–508.

Хабибуллин Булат Нурмиевич
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: `khabib-bulat@mail.ru`

Розит Алексей Петрович
МБОУ «Лицей № 60», Уфа, Россия
E-mail: `rozit@mail.ru`

Хабибуллина Энже Булатовна
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: `khabibullinae@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 162 (2019). С. 136–150

УДК 517.962.9

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2019 г. **И. Т. ХАБИБУЛЛИН, А. Р. ХАКИМОВА**

Аннотация. В данной статье мы ставим в соответствие данному интегрируемому уравнению с частными производными (или его дискретному или полудискретному аналогу) некоторое инвариантное многообразие. Сначала рассматривается линеаризация уравнения вблизи его произвольного решения u. Затем мы строим дифференциальное (соответственно, разностное) уравнение, совместное с линеаризованным уравнением при любом выборе u. Это уравнение определяет поверхность, называемую обобщенным инвариантным многообразием. В некотором смысле это многообразие является обобщением симметрии, которая также является решением линеаризованного уравнения. В работе рассматриваются непрерывные и дискретные модели гиперболического типа. Известно, что уравнения такого типа обладают двумя иерархиями симметрий, соответствующих характеристическим направлениям. Доказано, что надлежащим образом выбранное обобщенное инвариантное многообразие позволяет построить операторы рекурсии, порождающие эти симметрии. Неожиданным является тот факт, что оба эти оператора рекурсии связаны с различными параметризациями одного и того же инвариантного многообразия. Следовательно, зная один из операторов рекурсии для интегрируемого уравнения гиперболического типа (не имеющего псевдоконстант), можно найти и второй из них.

Ключевые слова: интегрируемость, пара Лакса, инвариантное многообразие, оператор рекурсии; quad-уравнение.

INVARIANT MANIFOLDS OF HYPERBOLIC INTEGRABLE EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

© 2019 **I. T. HABIBULLIN, A. R. KHAKIMOVA**

Abstract. We assign some kind of invariant manifolds to a given integrable PDE (its discrete or semi-discrete variant). First, we linearize the equation around its arbitrary solution u. Then we construct a differential (respectively, difference) equation compatible with the linearized equation for any choice of u. This equation defines a surface called a generalized invariant manifold. In a sense, the manifold generalizes the symmetry, which is also a solution to the linearized equation. In this paper, we concentrate on continuous and discrete models of hyperbolic type. It is known that such kind equations have two hierarchies of symmetries, corresponding to the characteristic directions. We have shown that properly chosen generalized invariant manifold allows one to construct recursion operators that generate these symmetries. It is surprising that both recursion operators are related to different parametrizations of the same invariant manifold. Therefore, knowing one of the recursion operators for the hyperbolic type integrable equation (having no pseudo-constants) we can immediately find the second one.

Keywords and phrases: integrability, Lax pair, invariant manifold, recursion operator, quad equation.

AMS Subject Classification: 35L10, 39A14

ISSN 0233–6723

1. Введение. В работах [7, 11, 12] авторами был предложен прямой метод поиска пар Лакса и операторов рекурсии для интегрируемых моделей, основанный на построении инвариантных многообразий для линеаризации рассматриваемого нелинейного интегрируемого уравнения в окрестности его произвольного решения.

Естественно ожидать, что инвариантные многообразия линейного дифференциального уравнения также линейны. Однако в [7, 11, 12] было показано, что инвариантные многообразия могут быть и нелинейными; точнее, мы использовали линейные обобщенные инвариантные многообразия для построения операторов рекурсии и получили пары Лакса из многообразий, определенных нелинейными функциями. Отметим, что требование существования инвариантных многообразий высших порядков, совместных с линеаризованным уравнением, накладывает серьезное ограничение на само нелинейное уравнение. Действительно, только интегрируемые уравнения обладают этим свойством.

Обширная литература посвящена обсуждению методов построения пар Лакса и операторов рекурсии (см., например, [2–4, 8, 10, 14, 16, 19, 20]).

Отметим, что предложенный авторами метод основан на идее, близкой к известному методу псевдопотенциалов Уолквиста–Эстабрука (см. [19]), в котором оба уравнения Лакса получаются одновременно. Напротив, для данного интегрируемого уравнения мы рассматриваем его линеаризацию как одно из уравнений Лакса и находим второе, не предполагая, что оно линейно. Действительно, на первом шаге мы находим нелинейную пару Лакса и затем линеаризуем ее при помощи соответствующего точечного преобразования. Поскольку мы ищем только одно из двух уравнений, наш метод достаточно эффективен. Приложения алгоритма проиллюстрированы ниже примерами уравнений (21) и (68).

Хорошо известно, что интегрируемые гиперболические уравнения с частными производными допускают две иерархии симметрий, соответствующие двум характеристическим направлениям. В этой работе мы обсуждаем связь операторов рекурсии, описывающих эти иерархии. В частности, обнаружено, что для уравнения (21) (а также для дискретного уравнения (68)) эти два оператора рекурсии порождаются различными параметризациями одного и того же обобщенного инвариантного многообразия.

2. Обобщенные инвариантные многообразия для гиперболических уравнений. Работы авторов [7, 11, 12] были в основном посвящены интегрируемым эволюционным моделям. В данной работе будут рассмотрены дискретные и непрерывные уравнения гиперболического типа. Отметим, что в данном случае инвариантные многообразия определяются несколько иначе. Начнем с гиперболического уравнения

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y). \tag{1}$$

Напомним сначала некоторые важные определения. Рассмотрим уравнение

$$g\Big(u_k, u_{k-1}, \dots, u, \bar u_1, \bar u_2, \dots, \bar u_m\Big) = 0, \tag{2}$$

которое определяет некоторую поверхность в пространстве динамических переменных u, u_1, $\bar u_1$, u_2, $\bar u_2, \dots$ уравнения (1); мы используем обозначения

$$u_j = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}, \quad \bar u_j = \frac{\partial^j u}{\partial y^j}.$$

Рассмотрим дифференциальные следствия уравнения (2):

$$g_1\Big(u_{k+1}, u_k, \dots, u, \bar u_1, \bar u_2, \dots, \bar u_{m-1}\Big) = 0, \tag{3}$$

$$g_2\Big(u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u, \bar u_1, \bar u_2, \dots, \bar u_m, \bar u_{m+1}\Big) = 0, \tag{4}$$

полученные применением операторов полного дифференцирования D_x и D_y по x и y, соответственно: $g_1 = D_x g$ и $g_2 = D_y g$, и исключением всех смешанных производных функции u при помощи уравнения (1). Также исключим $\bar u_m$ из $D_x g$ и u_k из $D_y g$ при помощи уравнения (2).

Поверхность (2) называется *инвариантным многообразием* уравнения (1), если выполнены следующие условия:

$$D_x D_y g\Big|_{(1)\text{-}(4)} = 0. \tag{5}$$

Предположим, что ни одна из функций g_1 и g_2 не равна тождественно нулю. Тогда, очевидно, инвариантная поверхность конечномерна.

В дальнейшем будем использовать линеаризацию уравнения (1) в окрестности его произвольного решения $u = u(x,y)$:

$$U_{xy} = aU_x + bU_y + cU, \tag{6}$$

где

$$a = \frac{\partial f}{\partial u_x}, \quad b = \frac{\partial f}{\partial u_y}, \quad c = \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Рассмотрим поверхность, определенную уравнением

$$G\Big(U_k, U_{k-1}, \dots, U, \bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_m; u, u_1, \dots, u_{k_1}; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{m_1}\Big) = 0, \quad k, m \geqslant 0, \tag{7}$$

где

$$U_s = \frac{\partial^s}{\partial x^s} U, \quad \bar{U}_s = \frac{\partial^s}{\partial y^s} U$$

— динамические переменные уравнения (6); здесь динамические переменные u, u_1, $\bar{u}_1, \dots$ уравнения (1) рассматриваются как параметры. Найдем дифференциальные следствия уравнения (7):

$$G_1\Big(U_{k+1}, U_k, \dots, U, \bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_{m-1}; u, u_1, \dots, u_{k_1+1}; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{m_1}\Big) = 0, \quad m > 0, \tag{8}$$

и

$$G_2\Big(U_{k-1}, U_{k-2}, \dots, U, \bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_{m+1}; u, u_1, \dots, u_{k_1}; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{m_1+1}\Big) = 0, \quad k > 0, \tag{9}$$

полученные применением операторов D_x и D_y к функции G, так что $G_1 = D_x G$ и $G_2 = D_y G$, и исключим все смешанные производные функций u и U при помощи уравнений (1) и (6), соответственно. Также исключим $\bar{U}_m$ из $D_x G$ и U_k из $D_y G$ при помощи уравнения (7).

Определение 1. *Поверхность, определенная уравнением* (7)*, называется обобщенным инвариантным многообразием уравнения* (1) *если условие*

$$D_x D_y G\Big|_{(1),\ (6)\text{-}(9)} = 0 \tag{10}$$

выполнено тождественно для всех значений переменных u*,* u_1*,* $\bar{u}_1, \dots$*.*

Число $k + m$ называется *порядком* многообразия (7). Заметим, что если (7) определяет обобщенное инвариантное многообразие уравнения (1), то G_1 не зависит от $\bar{u}_{m_1}$ и, аналогично, G_2 не зависит от u_{k_1}.

Основная идея состоит в том, чтобы провести подобные рассуждения в одратном порядке. Попытаемся выяснить, образуют ли три уравнения (6)–(8) тройку Лакса для уравнения (1). Точнее, мы ожидаем, что условие совместности

$$D_y G_1\Big|_{(6),\ (8)} = 0 \tag{11}$$

позволяет восстановить уравнение (1). Ниже в разделе 3 будет показано, что эта точка зрения имеет смысл, и ее можно использовать для построения пар Лакса для интегрируемых уравнений вида (1).

Действительно, уравнения (8) и (9) представляют альтернативные параметризации обобщенного инвариантного многообразия, определенного уравнением (7). Они получены применением операторов D_x и D_y к (7) и последующими элементарными преобразованиями. Очевидно, итерируя эту процедуру, можнонайти специальный тип параметризации, которая задается обыкновенными дифференциальными уравнениями для функции $U(x,y)$, следующего вида:

$$G_3\Big(U_{k+m}, U_{k+m-1}, \dots, U; u, u_1, u_2, \dots\Big) = 0, \tag{12}$$

$$G_4\Big(\bar{U}_{k+m}, \bar{U}_{k+m-1} \dots, U; u, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots\Big) = 0. \tag{13}$$

Отметим, что G_3 зависит только от U, u и их производных по x, тогда как G_4 зависит от U, u и их производных по y. Переход от уравнения (12) к (13) обсуждается в разделе 4.

В некоторых случаях условие $D_xG = 0$ (или $D_yG = 0$) выполняется тождественно и, следовательно, не определяет никакой параметризации многообразия. Действительно, это означает, что G является x-интегралом (или y-интегралом) линеаризованного уравнения (6). Следовательно, соглсно известной теореме (см., например, [1]), уравнение (1) также допускает нетривиальный x-интеграл (соответственно, нетривиальный y-интеграл). В дальнейшем будем предполагать, что уравнение (1) не допускает нетривиальных x- и y-интегралов. Интегралы такого типа называются *псевдоконстантами*.

Инвариантные многообразия специального вида (12) и (13) тесно связаны с симметриями уравнения (1).

3. Инвариантные многообразия и симметрии. В этом разделе мы установим важную связь между инвариантными многообразиями уравнений гиперболического типа и их симметриями эволюционного типа.

Напомним, что эволюционное уравнение вида

$$u_t = g\big(u, u_1, u_2, \dots, u_l\big) \tag{14}$$

называется *симметрией* уравнения (1) в направлении x если равенство

$$D_xD_yg - D_tf\Big|_{(1),\ (14)} = 0 \tag{15}$$

удовлетворяется тождественно для всех значений динамических переменных u, u_1, $\bar{u}_1, \dots$. Аналогично определяются симметрии в направлении y.

Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$s\big(u, u_1, u_2, \dots, u_n\big) = 0 \tag{16}$$

определяет инвариантное многообразие уравнения (14), если выполнено следующее условие:

$$D_ts\Big|_{(14),\ (16)} = 0. \tag{17}$$

Здесь D_ts вычисляется в силу (14) и все производные u_n, $u_{n+1}, \dots$ выражаются при помощи уравнения (16).

В дальнейшем будем использовать следующую линеаризацию уравнения (14):

$$U_t = a_lU_l + a_{l-1}U_{l-1} + \dots + a_0U, \tag{18}$$

где

$$a_j = \frac{\partial g}{\partial u_j}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Введем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$U_k = H\Big(U_{k-1}, U_{k-2}, \dots, U; u, u_1, u_2, \dots\Big), \tag{19}$$

где $U = U(x,t)$ — неизвестная функция, а динамические переменные u, u_1, $u_2, \dots$ уравнения (14) рассматриваются как параметры.

Скажем, что уравнение (19) определяет *обобщенное инвариантное многообразие* уравнения (14), если уравнение

$$D_tH - D_x^kU_t\Big|_{(14),\ (18),\ (19)} = 0 \tag{20}$$

выполняется тождественно для всех значений переменных U, $U_1, \dots U_{k-1}$, $u, u_1, u_2, \dots$.

Следующая гипотеза о взаимосвязи обобщенных инвариантных многообразий уравнения (1) и его симметрий кажется правдоподобным.

Гипотеза 1. Предположим, что уравнение (14) является симметрией уравнения (1). Уравнение (19) определяет обобщенное инвариантное многообразие уравнения (14) тогда и только тогда, когда оно определяет обобщенное инвариантное многообразие уравнения (1).

4. Инвариантные многообразия и операторы рекурсии для гиперболических интегрируемых уравнений. Рассмотрим интегрируемое гиперболическое уравнение (см. [5])

$$u_{xy} = \sqrt{1+u_x^2}\sin u. \tag{21}$$

Нас будут интересовать свойства обобщенных инвариантных многообразий этого уравнения. По определению, эти многообразия совместны с линеаризованным уравнением

$$U_{xy} = \sqrt{1+u_x^2}(\cos u)U + \frac{u_x \sin u}{\sqrt{1+u_x^2}}U_x. \tag{22}$$

Уравнение (21) допускает две иерархии высших симметрий (см. [5]), соответствующих характеристическим направлениям x и y. Можно показать, что линейное инвариантное многообразие является мостом между этими иерархиями. Более точно, операторы рекурсии, соответствующие этим иерархиям, выводятся из двух различных параметризаций одного и того же линейного инвариантного многообразия. Обсудим эту схему более подробно. В [12] было доказано следующее утверждение.

Предложение 1. *Уравнение*

$$U_{xxx} - \left(\frac{u_{xx}}{u_x} + \frac{2u_x u_{xx}}{1+u_x^2}\right)U_{xx} + \left(u_x^2 - \frac{u_x u_{xxx}}{1+u_x^2} + \frac{3u_x^2 u_{xx}^2}{(1+u_x^2)^2}\right)U_x = \lambda^{-1}\left(U_x - \frac{u_{xx}}{u_x}U\right) \tag{23}$$

определяет обобщенное инвариантное многообразие уравнения (21), *где* λ *— параметр.*

Применяя оператор $u_x D_x^{-1}\dfrac{1}{u_x}$ к (23), получим

$$R_{(x)}U = \lambda^{-1}U, \tag{24}$$

где оператор

$$R_{(x)} = D_x^2 - \frac{2u_x u_{xx}}{1+u_x^2}D_x + u_x D_x^{-1}\left(\frac{u_{xxx}}{1+u_x^2} - \frac{u_x u_{xx}^2}{(1+u_x^2)^2} + u_x\right)D_x$$

— оператор рекурсии для уравнения (21) в направлении x. Применяя R к правой части классической симметрии $u_{\tau_1} = u_x$, получим следующую высшую симметрию для (21) (ср. [5,6]):

$$u_\tau = u_{xxx} - \frac{3u_x u_{xx}^2}{2(1+u_x^2)} + \frac{1}{2}u_x^3. \tag{25}$$

Итак, получаем следующее представление оператора рекурсии $R_{(x)}$:

$$R_{(x)} = L_1^{-1}L_2, \tag{26}$$

где L_1 и L_2 — дифференциальные операторы

$$L_1 = u_x D_x \frac{1}{u_x}, \qquad L_2 = D_x^3 - \left(\frac{u_{xx}}{u_x} + \frac{2u_x u_{xx}}{1+u_x^2}\right)D_x^2 + \left(u_x^2 - \frac{u_x u_{xxx}}{1+u_x^2} + \frac{3u_x^2 u_{xx}^2}{(1+u_x^2)^2}\right)D_x,$$

которые позволяют переписать инвариантные многообразия (23) в краткой форме:

$$L_2U - \lambda^{-1}L_1U = 0.$$

Уменьшим последовательно порядок производных функции U по x в формуле (23) при помощи следующих дифференциальных следствий уравнения (22):

1. $(D_y - a)U_x = bU$;
2. $(D_y - a)U_{xx} = (a_x + b)U_x + b_x U$;
3. $(D_y - a)U_{xxx} = (2a_x + b)U_{xx} + (a_{xx} + 2b_x)U_x + b_{xx}U$;

где $a = \dfrac{u_x \sin u}{\sqrt{1+u_x^2}}$, $b = \sqrt{1+u_x^2}\cos u$. Применяя оператор $K_1 = \dfrac{u_x^3}{au_{xx}}(D_y - a)$ к обеим сторонам (23), получим уравнение

$$U_{xx} - \left(\cot u + \frac{u_{xx}}{1+u_x^2}\right) u_x U_x + \frac{u_x\sqrt{1+u_x^2}}{\lambda \sin u} U_y - \frac{(1+u_x^2)}{\lambda} U = 0. \qquad (27)$$

которое представляет собой новую параметризацию инвариантного многообразия. Далее, применив оператор $K_2 = \dfrac{\sin^2 u}{u_x u_y}(D_y - a)$ к полученному уравнению, найдем другую параметризацию инвариантного многообразия:

$$U_x + \frac{\sqrt{1+u_x^2}\sin u}{\lambda u_y} U_{yy} - \frac{\sqrt{1+u_x^2}\cos u}{\lambda} U_y - \left(\lambda + \sin^2 u\right)\frac{\sqrt{1+u_x^2}\sin u}{\lambda u_y} U = 0. \qquad (28)$$

Применив теперь оператор $K_3 = \dfrac{\lambda u_y}{\sqrt{1+u_x^2}\sin u}(D_y - a)$ к последнему уравнению, получим требуемую параметризацию инвариантного многообразия:

$$U_{yyy} - \frac{u_{yy}}{u_y} U_{yy} + (u_y^2 - \sin^2 u) U_y + \left(\frac{u_{yy}}{u_y}\sin^2 u - 3u_y \sin u \cos u\right) U = \lambda \left(U_y - \frac{u_{yy}}{u_y} U\right), \qquad (29)$$

которую можно записать в следующей форме, удобной для вывода оператора рекурсии $R_{(y)}$ в направлении y:

$$\overline{L}_2 U = \lambda \overline{L}_1 U \qquad (30)$$

где

$$\overline{L}_1 = u_y D_y \frac{1}{u_y}, \qquad \overline{L}_2 = D_y^3 - \frac{u_{yy}}{u_y} D_y^2 + \left(u_y^2 - \sin^2 u\right) D_y + \left(\frac{u_{yy}}{u_y}\sin^2 u - 3u_y \sin u \cos u\right).$$

Окончательно находим $R_{(y)} = \overline{L}_1^{-1}\overline{L}_2$:

$$R_{(y)} = D_y^2 + u_y^2 - \sin^2 u - u_y D_y^{-1}(u_{yy} + \sin u \cos u). \qquad (31)$$

Применяя оператор $R_{(y)}$ к классической симметрии $u_\tau = u_y$, найдем следующую высшую симметрию уравнения (21) (см. также [5, 6]):

$$u_t = u_{yyy} + \frac{1}{2}u_y^3 - \frac{3}{2}u_y \sin^2 u. \qquad (32)$$

5. Применение схемы к поиску пары Лакса. В этом разделе будет продемонстрировано применение обобщенных инвариантных многообразий для построения пар Лакса для интегрируемых гиперболических уравнений. В [12] было доказано следующее утверждение.

Предложение 2. *Уравнение*

$$U_y - \frac{\lambda \cos u}{\sqrt{1+u_x^2}} U_x - \frac{\sin u}{\sqrt{1+u_x^2}}\sqrt{(\lambda+1)\left((1+u_x^2)U^2 - \lambda U_x^2\right) + c(1+u_x^2)} = 0 \qquad (33)$$

определяет обобщенное инвариантное многообразие of уравнения (21). *Соответствующее уравнение* (8) *имеет вид*

$$U_{xx} - \frac{u_x u_{xx}}{1+u_x^2} U_x - (1+u_x^2)\lambda^{-1} U + \lambda^{-1} u_x \sqrt{(\lambda+1)\left((1+u_x^2)U^2 - \lambda U_x^2\right) + c(1+u_x^2)} = 0. \qquad (34)$$

Действительно, (34) получается из (33) применением оператора D_x и последующим исключением U_y при помощи (33). Предложение 2 легко доказать, проверив условие совместности для уравнений (22), (33) и (34). Нелинейное многообразие (33) получается из известного линейного инвариантного многообразия (28) путем наложения дополнительной связи, понижающей порядок. Фактически мы ищем ограничение вида

$$U_y = F(U, U_x, u, u_x), \qquad (35)$$

совместное с уравнением (28) для всех значений динамических переменных u, u_x, $u_y, \dots$. Удобно записать уравнение (28) в виде

$$U_{yy} = -\frac{\lambda u_y}{\sqrt{1+u_x^2}\sin u}U_x + \frac{u_y \cos u}{\sin u}U_y + (\lambda + \sin^2 u)U. \tag{36}$$

Тогда, очевидно, функция F должна удовлетворять уравнению

$$D_y(F) - U_{yy}\Big|_{(21),\ (22),\ (35),\ (36)} = 0, \tag{37}$$

которое можно записать в следующем развернутом виде:

$$F_{U_x}U_{xy} + F_U U_y + F_{u_x}u_{xy} + F_u u_y + \frac{\lambda u_y}{\sqrt{1+u_x^2}\sin u}U_x - \\ - \frac{u_y\cos u}{\sin u}U_y - (\lambda + \sin^2 u)U\Big|_{(21),\ (22),\ (35)} = 0.$$

В последнем уравнении мы заменили переменные u_{xy}, U_{xy} и U_y при помощи уравнений (21), (22) и (35), соответственно. После несложных преобразований получаем

$$-\frac{u_y}{\sin u}\Big(F(U,U_x,u,u_x)\sqrt{1+u_x^2}\cos u - F_u(U,U_x,u,u_x)\sqrt{1+u_x^2}\sin u - \lambda U_x\Big) + \\ + F_{U_x}(U,U_x,u,u_x)\Big((\cos u)U(1+u_x^2) + u_x(\sin u)U_x\Big) + F_{u_x}(U,U_x,u,u_x)\sin u(1+u_x^2) + \\ + F(U,U_x,u,u_x)F_U(U,U_x,u,u_x)\sqrt{1+u_x^2} - (\sin^2 u + \lambda)\sqrt{1+u_x^2}U = 0. \tag{38}$$

Сравнивая коэффициенты при независимой переменной u_y в (38), приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению для F:

$$F\big(U,U_x,u,u_x\big)\sqrt{1+u_x^2}\cos u - F_u(U,U_x,u,u_x)\sqrt{1+u_x^2}\sin u - \lambda U_x = 0,$$

которое легко решается:

$$F\big(U,U_x,u,u_x\big) = \frac{\lambda\cos u}{\sqrt{1+u_x^2}}U_x + F_1(U,U_x,u_x)\sin u.$$

Подставляя это решение в (38), получим уравнение, которое расщепляется на следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} &1.\quad \frac{\sin u}{\cos u}\Bigg(\Big(F_1(U,U_x,u_x)F_{1,U}(U,U_x,u_x) - U(\lambda+1)\Big)(u_x^2+1)^2 + \\ &\qquad + F_{1,u_x}(U,U_x,u_x)(1+u_x^2)^{5/2} + u_xU_xF_{1,U_x}(U,U_x,u_x)(1+u_x^2)^{3/2}\Bigg) = 0, \\ &2.\quad (1+u_x^2)^{3/2}\Big(F_{1,U_x}(U,U_x,u_x)U(1+u_x^2) + \lambda F_{1,U}(U,U_x,u_x)U_x\Big) = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Из последнего получаем

$$F_1(U,U_x,u_x) = F_2\left(u_x, \frac{(1+u_x^2)U^2 - \lambda U_x^2}{1+u_x^2}\right). \tag{40}$$

Введя обозначение

$$\theta = U^2 - \frac{\lambda}{1+u_x^2}U_x^2,$$

заменим F_1 в первом уравнении в (39) при помощи формулы (40). В результате получим

$$\Big(2F_{2,\theta}(u_x,\theta)F_2(u_x,\theta) - \lambda - 1\Big)U + \sqrt{1+u_x^2}F_{2,u_x}(u_x,\theta) = 0.$$

Так как U является независимой переменной, имеем два уравнения, которые дают

$$F_2(u_x,\theta) = F_2(\theta), \quad F_2(\theta) = \sqrt{(\lambda+1)\theta + c}.$$

Теперь мы можем записать окончательный вид функции F. Очевидно, (35) превращается в уравнение

$$U_y = \frac{\lambda \cos u}{\sqrt{1+u_x^2}} U_x + \frac{\sqrt{\lambda+1}\sin u}{\sqrt{1+u_x^2}} \sqrt{(1+u_x^2)U^2 - \lambda U_x^2 + c\frac{1+u_x^2}{\lambda+1}}, \tag{41}$$

которое совпадает с (33). Очевидно также, что при наличии связи (41) уравнение (28) превращается в (34).

Теперь построим линейную пару Лакса для уравнения (21), используя уравнения (33), (34) и (22), в которых положим $c = 0$. С этой целью введем новые переменные φ и ψ вместо U и U_x при помощи квадратичных форм

$$U = \varphi^2 + \psi^2, \tag{42}$$

$$U_x = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{1+u_x^2}\varphi\psi. \tag{43}$$

Условия совместности для (42) и (43) дают уравнение

$$\varphi_x\varphi + \psi_x\psi - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1+u_x^2}\varphi\psi = 0. \tag{44}$$

Аналогично, совместность (43) и (34) при условии $c = 0$ дает

$$\varphi_x\psi + \psi_x\varphi + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(u_x\sqrt{\lambda+1}\sqrt{(\varphi-\psi)^2(\varphi+\psi)^2} - \sqrt{u_x^2+1}(\varphi^2+\psi^2)\right) = 0. \tag{45}$$

Неожиданным образом оказывается, что система уравнений (44) и (45) линейна:

$$\begin{cases} \varphi_x = \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{1+u_x^2} - \sqrt{\lambda+1}u_x\right)\psi, \\ \psi_x = \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{1+u_x^2} + \sqrt{\lambda+1}u_x\right)\varphi. \end{cases} \tag{46}$$

Она определяет x-часть пары Лакса. Чтобы получить y-часть, применим оператор D_y к обеим частям уравнений (42) и (43) и упростим их, учитывая уравнения (22) и (41). В результате получим снова линейные уравнения:

$$\begin{cases} \varphi_y = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\lambda+1}\sin u\varphi + \dfrac{1}{2}\sqrt{\lambda}\cos u\psi, \\ \psi_y = \dfrac{1}{2}\sqrt{\lambda}\cos u\varphi + \dfrac{1}{2}\sqrt{\lambda+1}\sin u\psi. \end{cases} \tag{47}$$

Уравнения (46) и (47) образуют пару Лакса для уравнения (21).

Вводя новый спектральный параметр ξ, благодаря соотношению $\lambda = (\xi - \xi^{-1})^2/4$, получаем пару Лакса, зависящую от ξ рациональным образом:

$$\Phi_x = \frac{1}{\xi - \xi^{-1}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1+u_x^2} - \dfrac{u_x}{2}(\xi+\xi^{-1}) \\ \sqrt{1+u_x^2} + \dfrac{u_x}{2}(\xi+\xi^{-1}) & 0 \end{pmatrix} \Phi, \tag{48}$$

$$\Phi_y = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -(\xi+\xi^{-1})\sin u & (\xi-\xi^{-1})\cos u \\ (\xi-\xi^{-1})\cos u & (\xi+\xi^{-1})\sin u \end{pmatrix} \Psi. \tag{49}$$

Она имеет сингулярности в точкых $\xi = \infty$, 0 и ± 1.

5.1. Сравнение с другими парами Лакса. Как было отмечено в [1], уравнение (21) связано с уравнением синус-Гордонв

$$v_{xy} = \sin v \tag{50}$$

дифференциальной постановкой

$$v = u + i\,\mathrm{Arsh}(u_x), \quad i^2 = -1 \tag{51}$$

где функция $y = \mathrm{Arsh}(x)$ определяется уравнением $x = \sinh y$.

Следовательно, можно вывести пару Лакса для уравнения (21), заменяя v и v_y в силу (51) в паре Лакса для уравнения синус-Гордона (см. [9]):

$$\Psi_x = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ \sin v & -\cos v \end{pmatrix}\Psi, \qquad \Psi_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda & -v_y \\ v_y & -\lambda \end{pmatrix}\Psi. \tag{52}$$

В результате получим

$$\Psi_x = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \sqrt{1+u_x^2}\cos u - iu_x\sin u & \sqrt{1+u_x^2}\sin u + iu_x\cos u \\ \sqrt{1+u_x^2}\sin u + iu_x\cos u & -\sqrt{1+u_x^2}\cos u + iu_x\sin u \end{pmatrix}\Psi, \tag{53}$$

$$\Psi_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda & -u_y - i\sin u \\ u_y + i\sin u & -\lambda \end{pmatrix}\Psi. \tag{54}$$

Легко проверить, что условие совместности системы (53), (54) эквивалентно уравнению (21).

Пары Лакса (48)–(49) и (53)–(54) связаны калибровочным преобразованием $\Psi = S\Phi$, где

$$S = \begin{pmatrix} \xi p + iq & \xi q + ip \\ \xi q - ip & -\xi p + iq \end{pmatrix}, \qquad p = \cos\frac{u}{2} - \sin\frac{u}{2}, \quad q = \cos\frac{u}{2} + \sin\frac{u}{2}. \tag{55}$$

Спектральные параметры ξ и λ связаны уравнением

$$\lambda = \frac{1}{2}(\xi - \xi^{-1}).$$

6. Обобщенные инвариантные многообразия для quad-уравнений. Схема, описанная в предыдущем разделе, применима также и в дискретном случае. Рассмотрим дискретное уравнение вида

$$u_{n+1,m+1} = f(u_{n+1,m}, u_{n,m+1}, u_{n,m}), \tag{56}$$

определенное на квадратном графе, в котором неизвестная функция зависит от двух целочисленных переменных n и m. Каждому такому уравнению можно поставить в соответствие инвариантное многообразие по аналогии со случаем гиперболического уравнения с частными производными. Ниже мы используем стандартный набор динамических переменных для уравнения (56), состоящий из переменных $\{u_{n+i,m}\}_{-\infty}^{\infty} \cup \{u_{n,m+j}\}_{-\infty}^{\infty}$.

Рассмотрим поверхность в пространстве динамических переменных, определенную уравнением

$$g\Big(u_{n+s,m}, \dots, u_{n+1,m}, u_{n,m}, u_{n,m+1}, \dots, u_{n,m+k}\Big) = 0. \tag{57}$$

Для определенности будем считать, что целочисленные переменные s и k неотрицательны и хотя бы одна из них положительна. Рассмотрим операторы сдвига D_n и D_m, действующие по правилам $D_n y(n,m) = y(n+1,m)$ и $D_m y(n,m) = y(n,m+1)$. Применяя их к уравнению (57), получим два дополнительных уравнения

$$g_1\Big(u_{n+s+1,m}, \dots, u_{n+1,m}, u_{n,m}, u_{n,m+1}, \dots, u_{n,m+k-1}\Big) = 0, \tag{58}$$

$$g_2\Big(u_{n+s-1,m}, \dots, u_{n+1,m}, u_{n,m}, u_{n,m+1}, \dots, u_{n,m+k+1}\Big) = 0 \tag{59}$$

где $g_1 = D_n g$ и $g_2 = D_m g$.

Определение 2. *Говорят, что уравнение* (57) *задает инвариантное многообразие уравнения* (56)*, если выполняется следующее условие:*

$$D_n D_m g Big|_{(56)-(59)} = 0. \tag{60}$$

Теперь проанализируем другую ситуацию. Определим инвариантное многообразие не для самого уравнения (56), а для его линеаризации

$$U_{n+1,m+1} = AU_{n+1,m} + BU_{n,m+1} + CU_{n,m} \tag{61}$$

с коэффициентами

$$A = \frac{\partial f}{\partial u_{n+1,m}}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u_{n,m+1}}, \quad C = \frac{\partial f}{\partial u_{n,m}}.$$

Определение инвариантного многообразия, обсуждавшееся выше, можно также применить к линеаризованному уравнению (61). Однако здесь возникает особенность, связанная с тем, что коэффициенты A, B и C уравнения зависят от динамических переменных $u_{n+i,m}$ и $u_{n,m+j}$ уравнения (56). Следовательно, линеаризованное уравнение (61) в действительности является семейством уравнений, индексированных с помощью $u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}, \dots$.

Уравнениям (56) и (61) поставим в соответствие дискретное уравнение

$$G\Big(U_{n+s,m}, \dots, U_{n+1,m}, U_{n,m}, U_{n,m+1}, \dots, U_{n,m+k}; u_{n,m}, u_{n\pm1,m}, u_{n,m\pm1}, \dots\Big) = 0, \tag{62}$$

которое зависит от функции $u_{n,m}$ и ее сдвигов, рассматриваемых как параметры, в то время как $U_{n,m}$ интерпретируется как неизвестная функция.

Определим следствия уравнения (62) вида

$$G_1\Big(U_{n+s+1,m}, \dots, U_{n+1,m}, U_{n,m}, U_{n,m+1}, \dots, U_{n,m+k-1}; u_{n,m}, u_{n\pm1,m}, u_{n,m\pm1}, \dots\Big) = 0, \tag{63}$$

$$G_2\Big(U_{n+s-1,m}, \dots, U_{n+1,m}, U_{n,m}, U_{n,m+1}, \dots, U_{n,m+k+1}; u_{n,m}, u_{n\pm1,m}, u_{n,m\pm1}, \dots\Big) = 0, \tag{64}$$

где функции G_1 и G_2 получены применением операторов сдвига D_n и D_m и последующим исключением смешанных сдвигов $u_{n+i,m+j}$ и $U_{n+i,m+j}$ при помощи уравнений (56) and (60). Кроме того, мы исключим переменную $U_{n,m+k}$ из $G_1 = D_nG$ и переменную $U_{n+s,m}$ из $G_2 = D_mG$ при помощи уравнения (62).

Говорят, что уравнение (62) определяет *обобщенное инвариантное многообразие* уравнения (62), если следующее уравнение выполняется тождественно:

$$D_nD_mG\Big|_{(56),\ (61);\ (62)\text{–}(64)} = 0. \tag{65}$$

Выше мы определили два преобразования, одно из которых превращает уравнение вида (62) в уравнение (63), а другое — то же самое уравнение в (64). Итерируя первое преобразование, можно вывести параметризацию вида

$$G_3\Big(U_{n+s_1,m}, U_{n+s_1-1,m}, \dots, U_{n,m}; u_{n,m}, u_{n+1,m}, \dots, u_{n+s_2,m}\Big) = 0, \tag{66}$$

где G_3 зависит только от переменных $U_{n,m}$ и $u_{n,m}$ и их сдвигов по n. Аналогично, итерируя второе преобразование, найдем параметризацию

$$G_4\Big(U_{n,m+k_1}, U_{n,m+k_1-1}, \dots, U_{n,m}; u_{n,m}, u_{n,m+1}, \dots, u_{n,m+k_2}\Big) = 0, \tag{67}$$

где G_4 зависит только от переменных $U_{n,m}$ и $u_{n,m}$ и их сдвигов по m.

В разделе 7 будет показано, что параметризации (66) и (67) связаны с операторами рекурсии уравнения (56). Отметим, что обобщенное инвариантное многообразие можно эффективно использовать для построения пары Лакса для уравнения (56).

Напомним, что для интегрируемых моделей вида (56), удовлетворяющих условию совместности, алгоритмы построения пар Лакса были предложены в [10, 16] (см. также [20]).

7. Пример вычисления пары Лакса и операторов рекурсии для quad-уравнений при помощи инвариантных многообразий. Проиллюстрируем примером применение метода обобщенных инвариантных многообразий для построения операторов рекурсии и пар Лакса в дискретном случае. Рассмотрим дискретную версию уравнения Кортевега—де Фриза (см. [13, 15])

$$u_{n+1,m+1} = u_{n,m} + \left(\frac{1}{u_{n+1,m} - u_{n,m+1}}\right). \tag{68}$$

В дальнейшем будем использовать сокращенное обозначение $u_{i,j}$ вместо $u_{n+i,m+j}$; тогда уравнение (68) примет вид

$$u_{11} = u + \frac{1}{u_{10} - u_{01}}.$$

Запишем линеаризацию уравнения (68) в силу (61):

$$U_{11} = U - \frac{1}{(u_{10}-u_{01})^2}(U_{10}-U_{01}). \tag{69}$$

В [12] доказано следующее утверждение.

Предложение 3. *Уравнение*

$$U_{30} - \left(\lambda(u_{30}-u_{10})^2 - \frac{u_{30}-u_{10}}{u_{20}-u}\right)U_{20} - \Big(1-\lambda(u_{20}-u)(u_{30}-u_{10})\Big)U_{10} - \frac{u_{30}-u_{10}}{u_{20}-u}U = 0 \tag{70}$$

определяет обобщенное инвариантное многообразие уравнения (68); *здесь* λ — *произвольная константа.*

Покажем, что уравнение (70) позволяет получить оператор рекурсии в направлении n для уравнения (68). Сначала выполним сдвиг аргумента n в (70) назад и разделим полученное уравнение на $u_{20}-u$. В результате получим уравнение

$$\frac{1}{u_{20}-u}U_{20} + \frac{1}{u_{10}-u_{-10}}U_{10} - \frac{1}{u_{20}-u}U - \frac{1}{u_{10}-u_{-10}}U_{-10} = \\ = \lambda\Big((u_{20}-u)U_{10} - (u_{10}-u_{-10})U\Big). \tag{71}$$

Теперь применим оператор $\dfrac{1}{u_{10}-u_{-10}}(D_n-1)^{-1}$ к (71) и представим результат в виде

$$R_{(n)}U = \lambda U, \tag{72}$$

где оператор

$$R_{(n)} = \frac{1}{(u_{10}-u_{-10})^2}\left(D_n + D_n^{-1}\right) + \frac{2}{(u_{10}-u_{-10})(u-u_{-20})} + \\ + \frac{2}{u_{10}-u_{-10}}(D_n-1)^{-1}\left(\frac{1}{u-u_{-20}} - \frac{1}{u_{20}-u}\right) \tag{73}$$

является оператором рекурсии для уравнения (68) в направлении n. Очевидно, уравнение $u_\tau = 0$ определяет симметрию уравнения (68). Имеем соотношение

$$R_{(n)}(0) = \frac{c}{u_{10}-u_{-10}},$$

определяющее хорошо известную симметрию уравнения (68):

$$u_t = \frac{1}{u_{10}-u_{-10}}. \tag{74}$$

По поводу симметрий quad-уравнения (68), см. [17, 18].

Поскольку уравнение (68) инвариантно относительно преобразования $n \leftrightarrow m$, легко найти оператор рекурсии $R_{(m)}$ в направлении m. Однако наша цель — показать, как вывести $R_{(m)}$ из известного $R_{(n)}$ при помощи некоторых манипуляций, применимых и в общем случае quad-уравнения.

Применим оператор $D_m + \dfrac{1}{(u_{30}-u_{21})^2}$ к (70) и в полученном уравнении заменим смешанные сдвиги переменных u и U при помощи уравнений (68) и (69). После несложных преобразований получим

$$U_{20} - \frac{(u_{20}-u)\big((u_{10}-u_{01})(u_{20}-u)\lambda - 1\big)}{u_{10}-u_{01}}U_{10} + \\ + \Big((u_{10}-u_{01})(u_{20}-u)\lambda - 1\Big)U + \frac{(u_{20}-u)(\lambda-1)}{u_{10}-u_{01}}U_{01} = 0. \tag{75}$$

Повторим эту выкладку еще раз, т.е. применим оператор $D_m + \dfrac{1}{(u_{20}-u_{11})^2}$ к (75) и, принимая во внимание (68) и (69), после преобразований получим

$$U_{10} - \frac{(\lambda-1)(u_{10}-u_{01})}{u_{02}-u}U_{02} - \Big((u_{10}-u_{01})(u_{02}-u)\lambda - \lambda + 1\Big)U_{01} - \\ - \frac{\Big((u_{10}-u_{01})(u_{02}-u)\lambda-\lambda+1\Big)(u_{10}-u_{01})}{u_{02}-u}U = 0. \quad (76)$$

Наконец, применим оператор $D_m + \dfrac{1}{(u_{10}-u_{01})^2}$ к (76) и заменим переменные u_{11} и U_{11} на (68) и (69). В результате получим

$$U_{03} - \frac{(u_{03}-u_{01})\big(1-\lambda-\lambda(u_{03}-u_{01})(u_{02}-u)\big)}{(\lambda-1)(u_{02}-u)}U_{02} + \\ + \frac{\big(1-\lambda-\lambda(u_{03}-u_{01})(u_{02}-u)\big)}{\lambda-1}U_{01} - \frac{u_{03}-u_{01}}{u_{02}-u}U = 0. \quad (77)$$

Покажем, что обобщенное инвариантное многообразие (77) позволяет построить оператор рекурсии для уравнения (68) в направлении m. Действительно, осуществляя сдвиг аргумента m назад, приведем (77) к виду

$$\left(D_m^2 + \left((u_{02}-u)^2 + \frac{u_{02}-u}{u_{01}-u_{0,-1}}\right)D_m - \right.\\ \left. - \Big((u_{02}-u)(u_{01}-u_{0,-1})+1\Big) - \frac{u_{02}-u}{u_{01}-u_{0,-1}}D_m^{-1}\right)U = \\ = -\frac{u_{02}-u}{\lambda-1}(D_m-1)(u_{01}-u_{0,-1})U. \quad (78)$$

Применим оператор $\dfrac{1}{u_{01}-u_{0,-1}}(D_m-1)^{-1}\dfrac{1}{u-u_{02}}$ к (78) и запишем

$$R_{(m)}U = \frac{2-\lambda}{\lambda-1}U, \quad (79)$$

где

$$R_{(m)} = \frac{1}{(u_{01}-u_{0,-1})^2}(D_m + D_m^{-1}) + \frac{2}{(u-u_{0,-2})(u_{01}-u_{0,-1})} + \\ + \frac{2}{u_{01}-u_{0,-1}}(D_m-1)^{-1}\left(\frac{1}{u-u_{0,-2}} - \frac{1}{u_{02}-u}\right) \quad (80)$$

— искомый оператор рекурсии уравнения (68) в направлении m.

Теперь построим пару Лакса для уравнения (68) при помощи обобщенных инвариантных многообразий. В [11] доказано следующее утверждение.

Предложение 4. *Уравнение (70) допускает первый интеграл, позволяющий снизить порядок, имеющий вид*

$$U_{20} - U - (u_{20}-u)^2\lambda U_{10} - (u_{20}-u)\sqrt{4\lambda U_{10}U + c} = 0. \quad (81)$$

Положим $c = 0$ в (81). Исключая U_{20} из (81) и (75), получим

$$(1-\lambda)U_{01} - U_{10} - \lambda(u_{10}-u_{01})^2U - 2(u_{10}-u_{01})\sqrt{\lambda U_{10}U} = 0. \quad (82)$$

Далее, из линеаризованного уравнения (69) и уравнения (82) находим

$$U_{11} = \frac{\lambda}{(1-\lambda)(u_{10}-u_{01})^2}U_{10} + \frac{1}{(1-\lambda)}U + \frac{2\sqrt{\lambda U_{10}U}}{(u_{10}-u_{01})(1-\lambda)}. \quad (83)$$

Выполним в уравнениях (81), (82) и (83) замену переменных $U = \hat{\varphi}^2$. После элементарных преобразований получим следующую систему линейных уравнений:

$$\hat{\varphi}_{20} = \sqrt{\lambda}(u_{20} - u)\hat{\varphi}_{10} - \hat{\varphi}, \tag{84}$$

$$\hat{\varphi}_{01} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}\left(\hat{\varphi}_{10} - \sqrt{\lambda}(u_{10} - u_{01})\hat{\varphi}\right), \tag{85}$$

$$\hat{\varphi}_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{u_{10} - u_{01}}\hat{\varphi}_{10} - \hat{\varphi}\right). \tag{86}$$

Упростим уравнения (84)–(86) при помощи замены $\hat{\varphi} = (1-\lambda)^{-m/2}\varphi$; в результате получим

$$\varphi_{20} = \sqrt{\lambda}(u_{20} - u)\varphi_{10} - \varphi, \tag{87}$$

$$\varphi_{01} = \varphi_{10} - \sqrt{\lambda}(u_{10} - u_{01})\varphi, \tag{88}$$

$$\varphi_{11} = \frac{\sqrt{\lambda}}{u_{10} - u_{01}}\varphi_{10} - \varphi. \tag{89}$$

Для того чтобы исключить переменную u_{20} из уравнения (87), введем новую переменную ψ:

$$\psi = \varphi_{10} - \sqrt{\lambda}u_{10}\varphi. \tag{90}$$

Применим оператор D_n к последнему уравнению:

$$\psi_{10} = \varphi_{20} - \sqrt{\lambda}u_{20}\varphi_{10} \tag{91}$$

и в полученном уравнении заменим переменные φ_{10} и φ_{20}, пользуясь уравнениями (90) и (87), соответственно:

$$\psi_{10} = -(\lambda u_{10}u + 1)\varphi - \sqrt{\lambda}u\psi. \tag{92}$$

В силу (90) перепишем уравнение (88) следующим образом:

$$\varphi_{01} = \sqrt{\lambda}u_{01}\varphi + \psi. \tag{93}$$

Теперь применим оператор D_m к обеим частям уравнения (90) и упростим его, пользуясь уравнениями (68), (89), (90) и (93):

$$\psi_{01} = (\lambda - \lambda u u_{01} - 1)\,\varphi - \sqrt{\lambda}u\psi. \tag{94}$$

Таким образом, получаем две системы

$$\begin{cases} \varphi_{10} = \sqrt{\lambda}u_{10}\varphi + \psi, \\ \psi_{10} = -\big(\lambda u_{10}u + 1\big)\varphi - \sqrt{\lambda}u\psi, \end{cases} \tag{95}$$

$$\begin{cases} \varphi_{01} = \sqrt{\lambda}u_{01}\varphi + \psi, \\ \psi_{01} = \big(\lambda - \lambda u u_{01} - 1\big)\varphi - \sqrt{\lambda}u\psi, \end{cases} \tag{96}$$

которые образуют пару Лакса для уравнения (68). Покажем, что эта пара может быть сведена к известной паре Лакса (см. [13, 15]). Положим

$$\varphi = (-1)^{n+m}\lambda^{(n+m)/2}\tilde{\varphi}, \quad \psi = (-1)^{n+m}\lambda^{(n+m+1)/2}\tilde{\psi}.$$

Тогда пара (95), (96) записывается в нужной форме:

$$\begin{cases} \Phi_{10} = A\Phi, \\ \Phi_{01} = B\Phi, \end{cases} \tag{97}$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -u_{10} & -1 \\ uu_{10} + \lambda^{-1} & u \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -u_{01} & -1 \\ uu_{01} + \lambda^{-1} - 1 & u \end{pmatrix}.$$

8. Заключение. Линеаризованные уравнения играют важную роль в теории интегрируемых систем. Например, и классические, и высшие симметрии нелинейных уравнениий являются решениями линеаризованных уравнений. Мы вводим обобщенное инвариантное многообразие нелинейного интегрируемого уравнения как инвариантное многообразие его линеаризации. Обобщенное инвариантное многообразие, выбранное надлежащим образом, эффективно порождает оператор рекурсии и пару Лакса для данного уравнения. В самом деле, оператор рекурсии соответствует линейному обобщенному инвариантному многообразию. Интегрируемые гиперболические уравнения допускают две иерархии симметрий и, следовательно, два оператора рекурсии, которые соответствуют одному и тому же линейному обобщенному инвариантному многообразию. На основе этого наблюдения мы выдвигаем гипотезу, что интегрируемое гиперболическое уравнение, не имеющее нетривиальных интегралов в обоих характеристических направлениях, обладает следующим свойством: если оно допускает иерархию высших симметрий в одном характеристическом направлении, то оно допускает также иерархию высших симметрий и в другом направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жибер А. В., Соколов В. В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа// Усп. мат. наук. — 2001. — *56*, № 1 (337). — С. 63–106.
2. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I// Функц. анал. прилож. — 1974. — *8*, № 3. — С. 43–53.
3. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II// Функц. анал. прилож. — 1979. — *13*, № 3. — С. 13–22.
4. *Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б.* Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли—Беклунда// Функц. анал. прилож. — 1980. — *14*, № 1. — С. 25–36.
5. *Мешков А. Г., Соколов В. В.* Гиперболические уравнения с симметриями третьего порядка// Теор. мат. физ. — 2011. — *166*, № 1. — С. 51–67.
6. *Свинолупов С. И., Соколов В. В.* Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения// Функц. анал. прилож. — 1982. — *16*, № 4. — С. 86–87.
7. *Хабибуллин И. Т., Хакимова А. Р.* Инвариантные многообразия и пары Лакса для интегрируемых нелинейных цепочек// Теор. мат. физ. — 2017. — *191*, № 3. — С. 369–388.
8. *Ямилов Р. И.* О классификации дискретных уравнений// в кн.: Интегрируемые системы. — Уфа, 1982. — С. 95–114.
9. *Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H.* Method for solving the sine-Gordon equation// Phys. Rev. Lett. — 1973. — *30*, № 25. — P. 1262–1264.
10. *Bobenko A. I., Suris Yu. B.* Integrable systems on quad-graphs// Int. Math. Res. Notices. — 2002. — № 11. — P. 573–611.
11. *Habibullin I. T., Khakimova A. R.* On a method for constructing the Lax pairs for integrable models via a quadratic ansatz// J. Phys. A: Math. Theor. — 2017. — *50*, № 30. — P. 1–19. — 305206.
12. *Habibullin I. T., Khakimova A. R., Poptsova M. N.* On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations// J. Phys. A: Math. Theor. — 2016. — *49*, № 3. — P. 1–35. — 035202.
13. *Hirota R., Tsujimoto S.* Conserved quantities of a class of nonlinear difference-difference equations// J. Phys. Soc. Jpn. — 1995. — *64*, № 9. — P. 3125–3127.
14. *Lax P. D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves// Commun. Pure Appl. Math. — 1968. — *21*, № 5. — P. 467–90.
15. *Nijhoff F., Capel H.* The discrete Korteweg–de Vries equation// Acta Appl. Math. — 1995. — *39*, № 1–3. — P. 133–158.
16. *Nijhoff F. W., Walker A. J.* The discrete and continuous Painlevé VI hierarchy and the Garnier system// Glasgow Math. J. — 2001. — *43A*. — P. 109–123.
17. *Svinin A. K.* On some integrable lattice related by the Miura-type transformation to the Itoh–Narita–Bogoyavlenskii lattice// J. Phys. A: Math. Theor. — 2011. — *44*, № 46. — 465210.
18. *Tongas A., Tsoubelis D., Papageorgiou V.* Symmetries and group invariant reductions of integrable partial difference equations// Proc. 10th Int. Conf. in Modern Group Analysis. — 2005. — P. 222–230.
19. *Wahlquist H. D., Estabrook F. B.* Prolongation structures of nonlinear evolution equations// J. Math. Phys. — 1975. — *16*, № 1. — P. 1–7.

20. *Xenitidis P.* Integrability and symmetries of difference equations: the Adler–Bobenko–Suris case// Proc. 4th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” — 2009. — P. 226–42.

Хабибуллин Исмагил Талгатович
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия;
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: habibullinismagil@gmail.com

Хакимова Айгуль Ринатовна
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: aigulya.khakimova@mail.ru