ISSN 0233-6723

ВИНИТИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 161

Москва 2019

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 161

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ. ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Москва 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 161 (2019). С. 3–64

УДК 517.5

ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2019 г. **К. П. ИСАЕВ**

Аннотация. Статья посвящена представляющим системам экспонент в различных подпространствах пространства $H(D)$ функций, аналитических в ограниченной выпуклой области D. Рассматриваются два вида таких подпространств: равномерно весовые пространства $H(D,\varphi)$ и пространства типа классов Карлемана $H(D,\mathcal{M})$.

Ключевые слова: аналитическая функция, целая функция, ряд экспонент, достаточное множество.

REPRESENTING EXPONENTIAL SYSTEMS IN SPACES OF ANALYTICAL FUNCTIONS

© 2019 **K. P. ISAEV**

Abstract. This paper is devoted to representing exponential systems in various subspaces of the space $H(D)$ of functions that are analytical in a bounded convex domain D. We consider two kinds of such subspaces: uniformly weighted spaces $H(D,\varphi)$ and spaces of the type of Carleman classes $H(D,\mathcal{M})$.

Keywords and phrases: analytical function, entire function, exponential series, sufficient set.

AMS Subject Classification: 30B50, 30H05, 30D15, 42A38, 46E10

СОДЕРЖАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00095-а).

ISSN 0233–6723

Введение

Статья посвящена представляющим системам экспонент в различных подпространствах пространства $H(D)$ функций, аналитических в ограниченной выпуклой области D. Рассматриваются два вида таких подпространств: равномерно весовые пространства $H(D,\varphi)$ и пространства типа классов Карлемана $H(D,\mathcal{M})$. В разделе 1 построены целые функции со свойствами, необходимыми для конструкции достаточных множеств. В разделе 2 получены описания сильно сопряженных к ним пространств в терминах преобразования Фурье—Лапласа. Соответствующие пространства целых функций имеют весовое описание. В разделе 3 для нормированных пространств $H(D,\varphi)$ и $H(D,\mathcal{M})$ построены специальные локально выпуклые пространства: наибольшее линейное пространство, содержащееся в данном нормированном пространстве и инвариантное относительно дифференцирования, которое мы называем инвариантным ядром, и наименьшее линейное пространство, содержащее данное нормированное пространство и инвариантное относительно дифференцирования, которое мы называем инвариантной оболочкой. Эти пространства наделяются естественными топологиями индуктивного и проективного пределов соответственно. В разделе 4 построены достаточные множества для пространств целых функций, сопряженных к инвариантным оболочке и ядру пространств $H(D,\varphi)$ и $H(D,\mathcal{M})$. В разделе 5, используя схему Л. Эйренпрайса, мы доказываем теоремы о представляющих системах экспонент в инвариантной оболочке и ядре нормированных пространств $H(D,\varphi)$ и $H(D,\mathcal{M})$.

Через $B(z,t)$ мы обозначаем открытый круг с центром в точке z радиуса t.

Запись $A(x) \asymp B(x)$, $x \in X$, означает, что для всех $x \in X$ выполняются оценки $c \leqslant A(x)/B(x) \leqslant C$, где $C, c > 0$ — некоторые константы. Аналогичный смысл имеют символы $A(x) \prec B(x)$, $x \in X$, $A(x) \succ B(x)$, $x \in X$.

Для целой функции L через $N(L)$ будем обозначать множество нулей функции L.

Основной темой данной работы является представление рядами экспонент в различных подпространствах A пространства $H(D)$ функций, аналитических в ограниченной выпуклой области D, т.е. представление в виде ряда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n z},$$

сходящегося в топологии подпространства A. В классической теории рядов экспонент, подробно изложенной в монографии [14] А. Ф. Леонтьева, одной из основных теорем является теорема о представлении рядами экспонент в $H(D)$ с топологией равномерной сходимости на компактах из D (см. [14, теорема 5.3.2, с. 382]).

Теорема A. *Пусть D — ограниченная выпуклая область. Тогда имеется такая последовательность $\{\lambda_n\}$, зависящая только от области D, что любую функцию $F(z)$, аналитическую в области D, можно в D разложить в ряд Дирихле*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D.$$

Ряды сходятся равномерно на компактах из области D.

Отметим, что топология равномерной сходимости на компактах — самая слабая топология из естественных топологий, обычно рассматриваемых на пространствах аналитических функций. Основным инструментом в конструкции систем экспонент служат целые функции с заданным асимптотическим поведением. Например, в доказательстве теоремы A показатели $\{\lambda_n\}$ выбираются как простые нули целой функции $L(\lambda)$ экспоненциального типа и вполне регулярного роста со следующими свойствами:

(1) при любом $\varepsilon > 0$

$$|L'(\lambda_n)| \succ e^{H_D(\lambda_n) - \varepsilon|\lambda_n|}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

(2) имеет место оценка сверху

$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda) - \mu \ln |\lambda|}, \quad \mu > 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}; \tag{2}$$

здесь $H_D(\lambda) = \max\limits_{z\in\overline{D}} \operatorname{Re}\lambda\overline{z}$ — опорная функция областиD.

В связи с этим обстоятельством в теории представления рядами экспонент обособленное место занимали выпуклые многоугольники. Дело в том, что характеристическую целую функцию L в этом случае можно взять в виде квазиполинома

$$L(\lambda) = \sum_j a_j e^{\gamma_j \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где γ_j — вершины многоугольника, и требуемые свойства (1), (2) будут выполняться в существенно более точном виде

$$|L'(\lambda_n)| \succ e^{H_D(\lambda_n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

С помощью таких целых функций в [14, теорема 4.7.4, с. 328] доказано, что функция, аналитическая в выпуклом многоугольнике D и непрерывная вместе со своей первой производной в $\overline{D}$, может быть представлена в виде ряда по системе $e^{\lambda_n z}$, причем этот ряд сходится всюду в $\overline{D}$ и равномерно сходится в $\overline{D} \setminus \bigcup\limits_j B(\gamma_j, \varepsilon)$, где γ_j — вершины многоугольника и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. В [13] доказано, что эта система образует (безусловный) базис в пространстве Смирнова $E_2(D)$.

Теорема B. *Пусть функция $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_n удовлетворяет следующим условиям:*

$$|L(\lambda)| \succ e^{H_D(\lambda)}, \quad \lambda \notin \bigcup_n B(\lambda_n, \delta),$$
$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

причем круги $B(\lambda_n, \delta)$ попарно не пересекаются. Тогда любая функция $f \in E_2(D)$ единственным образом представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_n f_n e^{\lambda_n z},$$

и при этом выполняется соотношение

$$\|f\|^2 \asymp \sum_n |f_n|^2 e^{-2H_D(\lambda_n)}, \quad f \in E_2(D).$$

Пространство Смирнова на ограниченной области $G \subset \mathbb{C}$ с измеримой по Лебегу границей можно определить как пополнение пространства комплексных полиномов по гильбертовой норме

$$\|p\|^2 = \int\limits_{\partial G} |p(z)|^2 ds(z),$$

где $ds(z)$ — элемент дуги границы G; таким образом, пространство Смирнова — гильбертово пространство. Этот значительный результат удалось перенести в [17] на случай пространств Смирнова на областях с гладкой границей, но с ослаблением нормы. А именно, в [17] построены базисы в пространстве Смирнова на выпуклой области с гладкой границей, ряд по этому базису суммируется по норме большего гильбертова пространства. В [7] построены безусловные базисы из экспонент в пространстве Бергмана на выпуклом многоугольнике, а в [10] доказано, что в пространстве Бергмана на выпуклой области, граница которой имеет конечную отличную от нуля кривизну хотя бы в одной точке, безусловных базисов из экспонент не существует. Задача о базисах из экспонент в гильбертовых пространствах равносильным образом может быть сформулирована как задача о базисах из воспроизводящих ядер. В такой модели задача рассмотрена во многих работах. Из результатов работы [11] видно, что существование базисов из экспонент или воспроизводящих ядер — явление исключительное. В силу этого обстоятельства больше внимания уделяется задаче конструирования представляющих систем экспонент в локально выпуклых (ненормированных) подпространствах $H(D)$.

Понятие представляющих систем введено в [12]. Система элементов e_n, $n \in \mathbb{N}$, в локально выпуклом пространстве X называется *представляющей*, если любой элемент этого пространства представляется в виде ряда

$$x = \sum_n x_n e_n,$$

сходящегося в топологии пространства X. Если для каждого элемента это представление единственно, то представляющая система становится базисом.

Показатели представляющих систем, как правило, выбираются в виде множества нулей целой функции с определенными асимптотическими свойствами. В дальнейшем эти целые функции будем называть порождающими. Общим образом, порождающие функции L, имеющие более точные асимптотические оценки, позволяют представлять аналитические функции посредством ряда из экспонент в пространствах с более тонкой топологией.

Задача о существовании и конструировании целых функций с заданными асимптотическими свойствами возникла как внутренняя задача теории целых функций. В наиболее общем виде такая задача решена в [4]:

Теорема C. *Для любой субгармонической функции u на плоскости, имеющей конечный тип при порядке $\rho > 0$, существует целая функция f, удовлетворяющая соотношению*

$$\bigl|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|\bigr| = o\bigl(|\lambda|^\rho\bigr), \quad \lambda \notin E, \quad |\lambda| \to \infty.$$

Исключительное множество E является C_0-множеством, т.е. оно может быть покрыто кругами $B(w_k, r_k)$ так, что

$$\sum_{|w_k| \leqslant R} r_k = o(R), \quad R \to \infty.$$

В [26] эта теорема уточнена в смысле оценок разности и размеров исключительного множества.

Теорема D. *Для любой субгармонической функции u на плоскости, имеющей конечный порядок роста, существует целая функция f, удовлетворяющая соотношению*

$$\bigl|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|\bigr| = O\bigl(\ln(|\lambda| + 1)\bigr), \quad \lambda \notin E, \quad |\lambda| \to \infty.$$

Для любого $\beta < 0$ исключительное множество E может быть покрыто системой кругов $B(w_k, r_k)$ так, что

$$\sum_{|w_k| \geqslant R} r_k = O(R^\beta), \quad R \to \infty.$$

Теоремы C и D не могут быть непосредственно применены в вопросах разложения в ряды экспонент. Дополнительно нужно получить нижние оценки для $|L'(\lambda_k)|$, а для этого нужно иметь не только оценки размеров исключительного множества, но в большей степени нужна информация о структуре этого множества.

В семидесятых годах прошлого века вследствие систематического применения методов функционального анализа в проблеме представления рядами экспонент выяснилось, что эта задача распадается на две аналитические задачи:

(1) конструкция целых функций с заданными асимптотическими свойствами;
(2) описание сопряженных пространств в терминах преобразований Фурье—Лапласа.

Этот метод основан на понятии достаточного множества для локально выпуклого пространства целых функций, введенного в [28].

Опишем коротко схему этого метода применительно к локально выпуклым подпространствам $X \subset H(D)$.

Предположим, что сильно сопряженное пространство X^* описано в терминах преобразования Фурье—Лапласа. Это значит, что

(1) система экспонент $e^{\lambda z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, полна в пространстве X;

(2) для каждого линейного непрерывного функционала $S \subset X^*$ функция

$$\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z}), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

является целой функцией;

(3) топология в пространстве

$$\widehat{X} = \{\widehat{S},\ S \in X^*\},$$

наведенная из X^*, описана в весовых терминах.

Если существует семейство $\mathcal{K}$ таких положительных непрерывных функций k на плоскости, что семейство полунорм

$$p_k(F) = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{|F(\lambda)|}{|k(\lambda)|}, \quad F \in \widehat{X}, \quad k \in \mathcal{K},$$

определяет топологию в пространстве $\widehat{X}$, совпадающую с топологией, наведенной из X^*, то пространство X называется *равномерно аналитическим.*

Пусть $S \subset \mathbb{C}$ — некоторое подмножество плоскости. Если семейство полунорм

$$p_{k,S}(F) = \sup_{\lambda \in S} \frac{|F(\lambda)|}{|k(\lambda)|}, \quad F \in \widehat{X}, \quad k \in \mathcal{K},$$

определяет ту же топологию в пространстве $\widehat{X}$, то это множество называется *достаточным* для пространства $\widehat{X}$.

Если дискретное множество S является достаточным для пространства $\widehat{X}$, то согласно [28, теорема 1.6, с. 12] каждая функция $f \in X$ представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{\lambda \in S} f_n e^{\lambda z},$$

сходящегося в топологии пространства X.

Если топология пространства $\widehat{X}$ описана нужным образом и доказано, что пространство X равномерно аналитическое, то дискретное достаточное множество S как правило удается сконструировать в виде множества нулей целой функции с подходящим асимптотическим поведением.

Представление рядами экспонент в локально выпуклом ненормированном пространстве впервые рассмотрено, видимо, в [15] для пространства функций, аналитических в выпуклом многоугольнике и имеющих определенный рост вблизи границы. В [24] доказаны аналитические факты для обобщения результатов работы [15] на случай произвольной выпуклой области.

В достаточно общем виде для весовых пространств с наиболее тонкой ненормированной топологией эта схема реализована в [20]. В этой работе рассматриваются нормированные весовые пространства

$$H(D, \varphi) = \Big\{ f(z) \in H(D) :\ \|f\| := \sup_{z \in D} |f(z)| e^{-\varphi(z)} < \infty \Big\},$$

где D — ограниченная выпуклая область плоскости и φ — неотрицательная выпуклая функция в этой области. Дается описание сопряженного пространства к проективному пределу пространств $H(D, \varphi_j)$ в случае, когда $\varphi_j(z) = h_j(-\ln d(z))$, где $d(z)$ — расстояние от точки z до границы D, а последовательность неотрицательных выпуклых монотонно возрастающих функций h_j удовлетворяет следующим условиям:

(a) $h_j(t) \geqslant h_{j+1}(t) + t$, $j \in \mathbb{N}$, $t \geqslant t_0$;

(b) для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$ найдется такое $s = s(j, \alpha)$, что $h_{j+1}(t + \alpha) \leqslant h_j(t) + s$, $t \geqslant t_0$.

При этих условиях оператор дифференцирования непрерывно действует в проективном пределе.

Доказано, что преобразование Фурье—Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством к проективному пределу пространств $H(D, \varphi_j)$ и индуктивным пределом пространств $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_j)$, где

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \sup_{z \in D} \big(\operatorname{Re} \lambda z - \varphi(z) \big)$$

— преобразование Юнга функции φ. Далее в статье автор показывает, что множество нулей целой функции $\mathcal{L}$, удовлетворяющей следующим условиям:

(1) все нули $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ функции $\mathcal{L}$ — простые и круги $\Omega_j = \{|\lambda - \lambda_j| \leqslant \delta\}$ при некотором $\delta > 0$ не пересекаются;

(2) вне множества $\Omega = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$ функция $\mathcal{L}$ удовлетворяет неравенству

$$\big|\ln|\mathcal{L}(\lambda) - H_D(\lambda)\big| \leqslant C_0 \ln|\lambda| + C_1,$$

где C_0, C_1 — постоянные, будет достаточным для индуктивного предела пространств $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_j)$.

Существование таких целых функций вытекает из [25, теорема 4]. По упомянутой выше теореме Л. Эйренпрайса любая функция $f \in \bigcap\limits_j H(D, \varphi_j)$ будет представляться в виде ряда

$$f(z) = \sum_j f_n e^{\lambda_j z},$$

сходящегося в топологии проективного предела. В [12] отмечено, что представляющие системы экспонент в локально выпуклых ненормированных пространствах не могут образовывать базис. Эти системы будут иметь некоторую избыточность, т.е. из них можно удалить некоторое подмножество элементов так, что оставшаяся часть системы тоже будет представляющей. В изложенном выше результате система показателей конструируется как множество нулей целой функции, свойства которой связаны только с опорной функцией области и никак не связаны с весовыми функциями φ_j. Тем самым, с одной стороны, полученная представляющая система универсальна; с другой стороны, она имеет большую степень избыточности. Точнее говоря, система имеет тем большую избыточность, чем меньший рост имеют весовые функции φ_j вблизи границы области. Степень избыточности технически зависит от точности асимптотики порождающей функции $\mathcal{L}$ и принципиально зависит от свойств топологий. А именно, если топология определяется полунормами с весовыми функциями φ_j, то чем больший рост имеют разности $|\varphi_j - \varphi_m|$, тем больше будет избыточность представляющих систем.

Так, например, из представляющей системы $\{e^{\lambda_k z}\}$ в теореме А. Ф. Леонтьева можно удалить подсистему $\{e^{\mu_k z}\} \subset \{e^{\lambda_k z}\}$, если последовательность μ_k имеет регулярное распределение (см. [14, с. 30, 100]) и нулевую линейную плотность

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \sum_{|\mu_k|\leqslant r} 1 = 0.$$

В частном случае, когда

$$\varphi_j(z) = \left(\frac{1}{d(z)}\right)^{p+\frac{1}{j}}, \quad z \in D, \quad p > 0,$$

из системы, построенной в [20], можно удалять подсистему $e^{\mu_k z}$, если система показателей μ_k имеет регулярное распределение и является множеством простых нулей целой функции минимального типа при порядке $q = p/(p+1)$, т.е.

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r^q} \sum_{|\mu_k|\leqslant r} 1 = 0.$$

В [1] рассмотрены пространства с последовательностью весов вида

$$\varphi_j(z) = \left(1 + \frac{1}{j}\right) \varphi(-\ln d(z)), \quad z \in D,$$

и указаны ростовые характеристики целых функций, множество нулей которых могут послужить в качестве множества показателей представляющей системы экспонент. Полученные представляющие системы оказываются минимальными в определенном смысле. В [2] подобные результаты получены для проективных пределов равномерно весовых пространств более общего вида.

В [3] дано описание сопряженного пространства к проективному пределу весовых пространств:

Теорема E. *Пусть*
$$v_n(\lambda)=\sup_{z\in D}\big(\operatorname{Re}\lambda z-u_n(z)\big),\quad \lambda\in\mathbb{C},\quad n\in\mathbb{N},$$
и для некоторого $b_0>0$
$$\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2 v_n(y)}{\partial y_j\partial y_k}a_ja_k\geqslant\frac{12+b_0}{1+|y|^2}|a|^2,\quad a,y\in\mathbb{R}^2,\quad |y|\geqslant R.$$
Если
$$v_{n+1}(\lambda)\geqslant v_n(\lambda)+\ln(1+|\lambda|)+c_n,\quad \lambda\in\mathbb{C},\quad n\in\mathbb{N},$$
то преобразование Фурье—Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством к проективному пределу пространств $H(D,u_n)$ *и индуктивным пределом пространств* $H(\mathbb{C},v_n)$*, а также изоморфизм пространства сильно сопряженного к индуктивному пределу пространств* $H(\mathbb{C},v_n)$ *и проективного предела пространств* $H(D,u_n)$*.*

Подход к конструированию представляющих систем в весовых пространствах, реализуемый в данной работе, отличается от предыдущих результатов тем, что исходным объектом мы берем нормированное подпространство в $H(D)$. Из результатов, упомянутых выше, видно, что существование представляющих систем (базисов) в нормированных пространствах — редкое явление. Наша идея состоит в том, чтобы наименьшим образом ослабить нормированную топологию настолько, чтобы существование представляющих систем стало возможным. В работах многих авторов было замечено (например, в [20]), что существование представляющих систем связано с инвариантностью относительно дифференцирования.

В [5] по каждому равномерно весовому нормированному пространству
$$H(D,\varphi)=\Big\{f\in H(D):\ \sup_z|f(z)|e^{-\varphi(z)}<\infty\Big\},$$
где D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости и φ — выпуклая функция на D, конструируются специальный индуктивный предел $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ нормированных пространств и специальный проективный предел $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ нормированных пространств. В этой же работе сконструирована такая представляющая система экспонент в пространстве $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$, что если из нее удалить бесконечную систему элементов, то оставшаяся часть уже не будет представляющей в этом пространстве.

Пусть E — некоторое нормированное подпространство в $H(D)$. *Инвариантной оболочкой* $\mathcal{E}_i$ этого пространства будем называть наименьшее линейное пространство, инвариантное относительно дифференцирования и содержащее пространство E. *Инвариантным ядром* $\mathcal{E}_p$ будем называть наибольшее линейное пространство, инвариантное относительно дифференцирования и содержащееся в пространстве E.

В данной работе будет дано внутреннее описание пространств $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_p$ для случаев, когда $E=H(D,\varphi)$ и $E=H(D,\mathcal{M})$, где для последовательности $\mathcal{M}=(M_k)_{k=0}^{\infty}$ через $H(D,\mathcal{M})$ обозначено пространство типа классов Карлемана, состоящее из аналитических в D функций f, для которых
$$\|f\|=\sup_{n\geqslant0}\sup_{z\in D}\frac{|f^{(n)}(z)|}{M_n}<\infty.$$
Пусть
$$\widetilde{\varphi}(\lambda)=\sup_{z\in D}\big(\operatorname{Re}\lambda z-\varphi(z)\big),\quad \lambda\in\mathbb{C},$$
— сопряженная по Юнгу к функции φ.

В разделе 3 доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z=0$. Для выпуклой в D функции φ и $a\in\mathbb{R}$ положим*
$$\widetilde{\varphi}_a(\lambda)=\widetilde{\varphi}(\lambda)-a\ln(1+|\lambda|),\qquad \lambda\in\mathbb{C},$$
$$\varphi_a(z)=\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\big(\operatorname{Re}\lambda z-\widetilde{\varphi}_a(\lambda)\big),\quad z\in D.$$

Предположим, что для некоторых $b_n > 12$ выполняются условия

$$\sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_n(y)}{\partial y_j \partial y_k} a_j a_k \geqslant \frac{b_n}{1+|y|^2}|a|^2, \quad a, y \in \mathbb{R}^2, \quad |y| \geqslant R, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) *инвариантная оболочка $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ пространства $H(D,\varphi)$ совпадает с $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H(D,\varphi_n)$. Если в этом объединении рассматривать топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве*;

(2) *инвариантное ядро $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ пространства $H(D,\varphi)$ совпадает с $\bigcap\limits_{-n\in\mathbb{N}} H(D,\varphi_n)$. Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

Если весовая функция φ имеет конечный порядок роста в смысле выполнения соотношения

$$\varlimsup_{d(z)\to 0} \frac{\ln \varphi(z)}{-\ln d(z)} < \infty,$$

где $d(z)$ — расстояние от точки z до границы области D, то инвариантные оболочка и ядро могут быть описаны более непосредственным образом.

Теорема 3.3. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, φ — такая положительная выпуклая функция на D, имеющая конечный порядок роста, что для некоторых $b_n > 12$ выполняются условия*

$$\sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_n(y)}{\partial y_j \partial y_k} a_j a_k \geqslant \frac{b_n}{1+|y|^2}|a|^2, \quad a, y \in \mathbb{R}^2, \quad |y| \geqslant R, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Положим для $a \in \mathbb{R}$

$$\psi_a(z) = \varphi(z) - a \ln d(z), \quad z \in D.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Инвариантная оболочка $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ пространства $H(D,\varphi)$ совпадает с $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H(D,\psi_n)$. Если в этом объединении ввести топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*
2. *Инвариантное ядро $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ пространства $H(D,\varphi)$ совпадает с $\bigcap\limits_{-n\in\mathbb{N}} H(D,\psi_n)$. Если в этом пересечении ввести топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

Для пространств $H(D,\mathcal{M})$ инвариантные оболочка и ядро описываются более естественным образом.

Пусть $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность. Положим $M_n = M_0$ для $-n \in \mathbb{N}$; и для $k \in \mathbb{Z}$ через $\mathcal{M}_k$ будем обозначать последовательность со сдвигом $(M_{n+k})_{n=0}^{\infty}$.

Теорема 3.4. *Предположим, что последовательность $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию неквазианалитичности*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Инвариантная оболочка $\mathcal{H}_i(D,\mathcal{M})$ пространства $H(D,\mathcal{M})$ совпадает с объединением пространств $H(D,\mathcal{M}_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Если в этом объединении рассматривать топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

2. *инвариантное ядро* $\mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})$ *пространства* $H(D,\mathcal{M})$ *совпадает с пересечением пространств* $H(D,\mathcal{M}_k)$, $-k\in\mathbb{N}$. *Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

В разделе 2.1 на основании идей работы [3] получено более подробное утверждение о преобразовании Фурье—Лапласа функционалов на пространствах $H(D,\varphi)$.

Теорема 2.1. *Пусть* φ *— выпуклая функция на ограниченной выпуклой области комплексной плоскости* D, $0\in D$.

1. *Пусть* S *— линейный непрерывный функционал на пространстве* $H(D,\varphi)$ *и* $\widehat{S}(\lambda)$ *— преобразование Фурье—Лапласа этого функционала:*

$$\widehat{S}(\lambda)=S_z(e^{\lambda z}),\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Тогда

$$\big|\widehat{S}(\lambda)\big|\leqslant\|S\|_{H^*(D,\varphi)}e^{\widetilde{\varphi}(\lambda)},\quad \lambda\in D;$$

тем самым,

$$\big\|\widehat{S}\big\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})}\leqslant\|S\|_{H^*(D,\varphi)}.$$

2. *Если функция* $\widetilde{\varphi}$ *удовлетворяют условию*

$$\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(y)}{\partial y_j\partial y_k}a_ja_k\geqslant\frac{b}{1+|y|^2}|a|^2,\qquad a,y\in\mathbb{R}^2,\quad |y|\geqslant R,\tag{3}$$

для некоторой константы $b>12$, *а целая функция* F *такова, что*

$$\big|F(\lambda)\big|\leqslant Ce^{\widetilde{\varphi}(\lambda)}(1+|\lambda|)^{-10},\quad \lambda\in\mathbb{C},$$

то функция F *является преобразованием Фурье—Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала* S *на пространстве* $H(D,\varphi)$, *причем*

$$\|S\|_{(H(D,\varphi))^*}\leqslant M\|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})},$$

где $\widetilde{\varphi}_a(\lambda)=\widetilde{\varphi}(\lambda)-a\ln(1+|\lambda|)$, *и константа* M *зависит только от постоянной* b *в* (3).

В разделе 2.2 получено описание сопряженных пространств для пространств типа $H(D,\mathcal{M})$. Функция

$$T(r)=\sup_{n\geqslant0}\frac{r^n}{M_n},\quad r\geqslant0,$$

называется *функцией следа* последовательности $\mathcal{M}$, а $H_D(\lambda)=\sup\limits_{z\in D}\operatorname{Re}\lambda z$ — опорная функция области D. Для $a\in\mathbb{R}$ обозначим

$$\psi_a(\lambda)=H_D(\lambda)+\ln T(|\lambda|)-a\ln(1+|\lambda|)).$$

Теорема 2.4. *Пусть* D *— ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку* 0, $\mathcal{M}=(M_n)_{n=0}^{\infty}$ *— неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M_k}{M_{k+1}}<\infty.$$

1. *Если* S *— линейный непрерывный функционал на* $H(D,\mathcal{M})$ *и* $\widehat{S}(\lambda)$ *— преобразование Фурье-Лапласа этого функционала*:

$$\widehat{S}(\lambda)=S_z(e^{\lambda z}),\quad \lambda\in\mathbb{C},$$

то $\widehat{S}\in H(\mathbb{C},\psi_0)$ *и*

$$\|\widehat{S}\|_{H(\mathbb{C},\psi_0)}\leqslant\|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})}.$$

2. *Существует такое* $\alpha \in \mathbb{R}$, *зависящее только от области* D, *что для любой целой функции* $F \in H(\mathbb{C}, \psi_\alpha)$ *найдется единственный линейный непрерывный функционал* S *на* $H(D, \mathcal{M})$, *для которого функция* F *является его преобразованием Фурье—Лапласа, и*
$$\|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})} \leqslant C\|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_\alpha)},$$
где константа $C > 0$ *зависит только от области* D *и последовательности* $\mathcal{M}$.

Последние две теоремы позволяют описать в весовых терминах сопряженные пространства к инвариантным оболочке и ядру пространств $H(D, \varphi)$ и $H(D, \mathcal{M})$.

В разделе 1 на основе результатов работы [26] построены целые функции со свойствами, необходимыми для конструкции достаточных множеств.

Теорема 1.2. *Пусть* u_j *— субгармонические функции на плоскости, имеющие конечный тип при порядке роста* ρ, $j = 1, 2, \ldots, k$, μ_j *— меры, ассоциированные с ними по Риссу, удовлетворяющие условиям*
$$\mu_j(B(z, t)) \leqslant a(|z| + 1)^\alpha t, \quad t \in \bigl(0; (|z| + 1)^{-\alpha}\bigr).$$
Тогда существуют такие целые функции f_j, *что все нули произведения* $f = f_1 f_2 \ldots f_k$ *простые, и при некоторых* $\delta > 0$, $\beta \geqslant 0$ *круги* $B_n(\delta) = B\bigl(\lambda, \delta(|\lambda| + 1)^{-\beta}\bigr)$, $\lambda \in N(f)$, *попарно не пересекаются. Функции для некоторых постоянных* A, B *удовлетворяют соотношениям*
$$\begin{aligned} \ln\bigl|f_j(\lambda)\bigr| &\leqslant u_j(\lambda), & &\lambda \in \mathbb{C}, \\ \ln|f_j(\lambda)| &\geqslant u_j(\lambda) - A\ln(|\lambda| + e), & &\lambda \notin \bigcup_n B_n(\delta), \\ \ln|f_j'(\lambda)| &\geqslant u_j(\lambda) - B\ln(|\lambda| + e), & &n \in N(f_j). \end{aligned}$$
Постоянные A, B *зависят от* ρ, α, a *и не зависят от конкретного вида функций* u_j.

Наконец, используя описанную выше схему Л. Эйренпрайса, в разделе 5 мы доказываем теоремы 5.1–5.4 о представляющих системах экспонент.

Бесконечно возрастающую неотрицательную функцию $m(t)$, $t > 0$ $(m(0) = 0)$, удовлетворяющую условию
$$\sup_t (m(2t) - m(t)) \leqslant 1,$$
будем называть *медленно растущей.* С каждой медленно растущей функцией свяжем ассоциированную функцию скачков. А именно, определим последовательности R_n, r_n по формулам
$$m(R_0) = 1, \quad m(R_{n+1}) - m(R_n) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\int\limits_{R_n}^{R_{n+1}} \ln t\, dm(t) = \ln r_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$
Ассоциированной с $m(t)$ *функцией скачков* назовем функцию $m_0(t)$, $t > 0$ $(m_0(0) = 0)$ с единичными скачками в точках r_n, $n = 1, 2, \ldots$. Из определения следует соотношение
$$\bigl|m(t) - m_0(t)\bigr| \leqslant 1, \quad t \geqslant 0.$$

Множество будем называть *регулярным*, если его считающая функция $\mu(t)$ удовлетворяет условию
$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \int\limits_1^r \ln t\, d\mu(t) = \infty.$$

Теорема 5.1. *Пусть* D *— ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку* $z = 0$, φ *— выпуклая функция в этой области. Положим*
$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_n(\lambda) &= \widetilde{\varphi}(\lambda) + n\ln(1 + |\lambda|), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \varphi_n(z) &= \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \bigl(\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}_n(\lambda)\bigr), \quad z \in D. \end{aligned}$$

Предположим, что для некоторых $b_n > 12$ *выполнены следующие условия:*

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_n(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geqslant \frac{b_n}{1+|x|^2}|y|^2,\ y = (y_1, y_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Далее, пусть положительная функция $m(t)$, $t > 0$, *является медленно растущей,* $m_0(t)$ — *ассоциированная с ней функция скачков. Тогда существует такая система показателей* $\Lambda = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, *что система экспонент* $\{e^{z\lambda_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ *является представляющей в инвариантном ядре* $\mathcal{H}_p(D, \varphi) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H(D, \varphi_n)$ *пространства* $H(D, \varphi)$, *т.е. любая функция* $f \in \mathcal{H}_p(D, \varphi)$ *может быть представлена в виде суммы ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{z\lambda_k},$$

сходящегося в топологии проективного предела пространств $H(D, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$. *При этом ряды из всех определяющих топологию* $\mathcal{H}_p(D, \varphi)$ *норм сходится:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| f_k e^{z\lambda_k} \right\|_{H(D,\varphi_m)} < \infty, \quad m \in \mathbb{N},$$

а ряд из абсолютных величин сходится в топологии проективного предела пространств $H(D, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{z\in D} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k e^{z\lambda_k} \right| e^{-\varphi_n(z)} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если из системы показателей Λ *удалить подмножество* $\{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, *считающая функция* $\eta(t)$ *которого удовлетворяет условию*

$$m_0(t) - \eta(t) \nearrow +\infty,$$

то система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ \lambda_k \in \widetilde{S} = S \setminus \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}\}$ *остается представляющей. Если же* $m_0(t) - \eta(t) \leqslant C < \infty$, $t \geqslant 0$, *то оставшаяся система экспонент уже не будет представляющей.*

Теорема 5.2. *Пусть* D — *ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку* $z = 0$, φ — *выпуклая функция в этой области. Положим*

$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda) - n\ln(1 + |\lambda|), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$\varphi_n(z) = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \big(\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}_n(\lambda)\big), \quad z \in D.$$

Предположим, что для некоторых $b_n > 12$ *выполнены условия*

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_n(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geqslant \frac{b_n}{1+|x|^2}|y|^2, \quad y = (y_1, y_2),\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда в инвариантной оболочке

$$\mathcal{H}_i(D, \varphi) = \bigcup_{k=1}^{\infty} H(D, \varphi_k)$$

пространства $H(D, \varphi)$ *существует представляющая система* $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$, *т.е. любая функция* $f \in \mathcal{H}_i(D, \varphi)$ *представляется в виде ряда по данной системе экспонент:*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n z};$$

этот ряд сходится в топологии индуктивного предела пространств $H(D, \varphi_k)$, $k \in \mathbb{N}$. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *множество показателей представляющей системы* $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$. *Если удалить из*

Λ любое конечное подмножество, то соответствующая система экспонент останется представляющей, а если удалить из Λ любое регулярное подмножество, то соответствующая система экспонент перестанет быть представляющей.

Теорема 5.3. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию «неквазианалитичности»*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty,$$

и пусть $M_{-n} = M_0,\ n \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{M}^{(k)} = \{M_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, — «сдвинутые» последовательности. Тогда для положительной медленно растущей функции $m(t)$, $t > 0$, существует такая система показателей $\Lambda = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, что система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ является представляющей в инвариантном ядре $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M}) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H(D, \mathcal{M}^{(k)})$ пространства $H(D, \mathcal{M})$, т.е. любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$ может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{z\lambda_k},$$

сходящегося в топологии проективного предела пространств $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$. Если из системы показателей Λ удалить подмножество $\{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, считающая функция $\eta(t)$ которого удовлетворяет условию

$$m_0(t) - \eta(t) \nearrow +\infty,$$

то система экспонент $\left\{e^{z\lambda_k},\ \lambda_k \in \widetilde{S} = S \setminus \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}\right\}$ остается представляющей. Здесь $m_0(t)$ — ассоциированная с $m(t)$ функция скачков. Если же $m_0(t) - \eta(t) \leqslant C < \infty$, $t \geqslant 0$, то оставшаяся система экспонент уже не будет представляющей.

Теорема 5.4. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию «неквазианалитичности»*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty,$$

и $\mathcal{M}^{(k)} = \{M_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, — «сдвинутые» последовательности. Тогда в инвариантной оболочке $\mathcal{H}_i(D, \mathcal{M}) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H(D, \mathcal{M}^{(k)})$ пространства $H(D, \mathcal{M})$ существует представляющая система экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. любая функция $f \in \mathcal{H}_i(D, \mathcal{M})$ представляется в виде ряда по данной системе экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n z};$$

ряд сходится в топологии индуктивного предела пространств $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество показателей представляющей системы $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$. Если удалить из Λ любое конечное подмножество, то соответствующая система экспонент останется представляющей, а если удалить из Λ любое регулярное подмножество, то соответствующая система экспонент перестанет быть представляющей.

1. Целые функции с заданными асимптотическими свойствами

В этом разделе будут доказаны теоремы о существовании целых функций с заданными асимптотическими свойствами. Такие целые функции являются инструментом для построения дискретных достаточных множеств. Кроме того, в этой статье они будут использованы для описания сопряженных пространств в терминах преобразований Фурье—Лапласа.

Следующая теорема доказана в [8] на основе идей работы [26].

Теорема 1.1 (см. [8, теорема 1, с. 52]). *Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный тип при порядке роста ρ, μ — мера, ассоциированная с ней по Риссу. Если для некоторых $a, \alpha > 0$ для всех точек $z \in \mathbb{C}$ выполняется условие*

$$\mu(B(z,t)) \leqslant a(|z|+1)^{\alpha} t, \quad t \in (0; (|z|+1)^{-\alpha}), \tag{1.1}$$

то существует целая функция f с простыми нулями λ_n, удовлетворяющими следующему условию: при некоторых $\delta > 0$, $\beta \geqslant 0$ круги $B_n(\delta) = B(\lambda_n, \delta(|\lambda_n|+1)^{-\beta})$ попарно не пересекаются и сама функция для некоторых постоянных A, B удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} &\ln|f(\lambda)| \leqslant u(\lambda), && \lambda \in \mathbb{C}, \\ &\ln|f(\lambda)| \geqslant u(\lambda) - A\ln(|\lambda|+e), && \lambda \notin \bigcup_n B_n(\delta), \\ &\ln|f'(\lambda)| \geqslant u(\lambda) - B\ln(|\lambda|+e), && n \in N(f). \end{aligned}$$

Постоянные A, B зависят от ρ, α, a и не зависят от конкретного вида функции u.

В применениях подобных теорем нередко требуется «раздельная» аппроксимация нескольких субгармонических функций.

Теорема 1.2. *Пусть u_j — субгармонические функции на плоскости, имеющие конечный тип при порядке роста ρ, $j = 1, 2, \ldots, k$, μ_j — меры, ассоциированные с ними по Риссу, удовлетворяющие условию (1.1). Тогда существуют такие целые функции f_j, что все нули произведения $f = f_1 f_2 \ldots f_k$ простые и при некоторых $\delta > 0$, $\beta \geqslant 0$ круги $B_n(\delta) = B\big(\lambda, \delta(|\lambda|+1)^{-\beta}\big)$, $\lambda \in N(f)$, попарно не пересекаются. Функции для некоторых постоянных A, B удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} &\ln|f_j(\lambda)| \leqslant u_j(\lambda), && \lambda \in \mathbb{C}, \\ &\ln|f_j(\lambda)| \geqslant u_j(\lambda) - A\ln(|\lambda|+e), && \lambda \notin \bigcup_n B_n(\delta), \\ &\ln|f_j'(\lambda)| \geqslant u_j(\lambda) - B\ln(|\lambda|+e), && n \in N(f_j). \end{aligned}$$

Постоянные A, B зависят от ρ, α, a и не зависят от конкретного вида функций u_j.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть целая функция f построена по субгармонической функции u как в теореме 1.1 и

$$E(\delta, \beta) = \bigcup_n B\big(\lambda_n, \delta(1+|\lambda_n|)^{-\beta}\big)$$

— исключительное множество. Тогда оценки, утверждаемые в теореме, выполняются и вне множества $E_1 = E(\delta_1, \beta_1)$ для любых $0 < \delta_1 \leqslant \delta$ и $\beta_1 \geqslant \beta$, возможно с другими постоянными A_1, B_1. В самом деле, возьмем произвольное $\lambda \notin E_1$. Если при этом $\lambda \notin E$, то оценки выполняются по утверждению теоремы. Если $\lambda \in E$, то найдется такой номер n, что

$$r_1 := \delta_1\big(1+|\lambda_n|\big)^{-\beta_1} < |\lambda - \lambda_n| \leqslant r := \delta\big(1+|\lambda_n|\big)^{-\beta}.$$

Пусть $G(\lambda, w)$ — функция Грина круга $B(\lambda_n, r)$; тогда имеют место представления

$$u(\lambda) = h(\lambda) + \int\limits_{B(\lambda_n, r)} G(\lambda, w)d\mu(w), \quad \ln|f(\lambda)| = h_f(\lambda) + G(\lambda, \lambda_n),$$

где функции h, h_f — гармонические мажоранты u и $\ln|f|$ в круге $B(\lambda_n, r)$. Разность $|h(\lambda) - h_f(\lambda)|$ оценивается по принципу максимума для гармонических функций, потенциал меры μ оценим на основании условия (1.1) и, наконец,

$$\big|G(\lambda, \lambda_n)\big| = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r}{|\lambda_n - \lambda|} \leqslant \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r}{r_1} = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\delta}{\delta_1}\big(1+|\lambda_n|\big)^{\beta_1-\beta}\right).$$

По теореме 1.1 для каждой из заданных субгармонических функций u_j можем построить целые функции f_j, удовлетворяющие требуемым оценкам. Разобьем плоскость на попарно непересекающиеся квадраты Q_n с условием на размеры

$$\operatorname{diam} Q_n \asymp \Big(\max_{w\in Q_n}|w|\Big)^{-\rho-1},$$

и каждый из этих квадратов разобьем на квадраты $Q_{n,k}$ так, чтобы

$$\operatorname{diam} Q_{n,k} \asymp \Big(\max_{w\in Q_n}|w|\Big)^{-2\rho-1}.$$

Значит, число мелких квадратов для каждого n сравнимо с $\Big(\max\limits_{w\in Q_n}|w|\Big)^{2\rho}$. Поскольку порядок роста целых функций f_j равен ρ, то количество нулей в каждом квадрате Q_n сравнимо с $\Big(\max\limits_{w\in Q_n}|w|\Big)^{\rho}$. Таким образом, нули функций f_j, лежащие в Q_n, можно переместить в центры квадратов $Q_{n,k}$ так, что в каждом центре окажется не более одного нуля. Целую функцию, полученную перемещением нулей функции f_j, обозначим $\widetilde{f}_j$. Из [25, теорема 2] следует, что функции $\widetilde{f}_j$ удовлетворяют требуемым оценкам вне непересекающихся (при достаточно малых $\delta>0$) кругов $B\big(z_{n,k},\delta(1+|z_{n,k}|)^{-2\rho-1}\big)$, где $z_{n,k}$ — центры квадратов $Q_{n,k}$. Теорема 1.2 доказана. □

Для субгармонических функций медленного роста аппроксимирующие целые функции можно конструировать с более свободным расположением нулей.

Теорема 1.3. *Пусть $u(\lambda)$ — субгармоническая на плоскости функция, а ее ассоциированная мера удовлетворяет условию (1.1) и*

$$l\sup_{t>0}\big(\mu(2t)-\mu(t)\big)\leqslant 1. \tag{1.2}$$

Определим последовательность R_n из соотношений

$$\mu(R_0)=1,\quad \mu(R_n)-\mu(R_{n-1})=1,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Возьмем произвольные $r_n\in(R_{n-1};R_n)$, $n\in\mathbb{N}$, и $r_0\in(0;R_0)$. Тогда целая функция

$$f(\lambda)=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{r_ne^{i\varphi_n}}\right),\quad \lambda\in\mathbb{C},$$

где $\varphi_n\in[-\pi;\pi)$, $\varphi_{n-1}\cdot\varphi_n<0$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяет оценкам теоремы 1.1. Для непрерывных радиальных субгармонических функций и условие (1.1) вытекает из условия (1.2).

Доказательство теоремы 1.3. Можно считать, что функция u имеет представление

$$u(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{C}}\ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right|d\mu(w),\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

В силу (1.2) имеем $R_n\geqslant 2R_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть $|\lambda|\in(R_n;R_{n+1}]$. Поскольку $\big|\ln|1-w|\big|\leqslant 2|w|$ при $|w|\leqslant 1/2$, то

$$l\left|\int\limits_{|w|\geqslant R_{n+2}}\ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right|d\mu(w)\right|\leqslant 2|\lambda|\int\limits_{R_{n+2}}^{\infty}\frac{d\mu(t)}{t}\leqslant 2|\lambda|\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{R_k}\leqslant\frac{2|\lambda|}{R_{n+2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\leqslant 2. \tag{1.3}$$

Аналогичным образом получим оценку

$$l\left|\int\limits_{|w|\leqslant R_{n-1}}\ln\left|1-\frac{w}{\lambda}\right|d\mu(w)\right|\leqslant 2. \tag{1.4}$$

Пусть $\lambda_n = r_n e^{i\varphi_n}$ и $\delta(w)$ — единичная точечная мера в точке w. Положим $\widetilde{\mu} = \sum\limits_j \delta(\lambda_j)$. Тогда в силу (1.2)

$$\widetilde{\mu}(2t) - \widetilde{\mu}(t) \leqslant 2, \quad t > 0,$$

и так же, как в (1.3), (1.4), получим оценки

$$\left| \int\limits_{|w|\geqslant R_{n+2}} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| d\widetilde{\mu}(w) \right| \leqslant 2, \tag{1.5}$$

$$\left| \int\limits_{|w|\leqslant R_{n-1}} \ln\left|1 - \frac{w}{\lambda}\right| d\widetilde{\mu}(w) \right| \leqslant 2. \tag{1.6}$$

По построению имеют место соотношения

$$\big|\mu(t) - \widetilde{\mu}(t)\big| \leqslant 1, \quad t > 0, \quad \mu(R_k) - \widetilde{\mu}(R_k) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Интегрированием по частям получим

$$\left| \int\limits_{R_0}^{R_{n-1}} \ln \frac{|\lambda|}{t} d(\mu(t) - \widetilde{\mu}(t)) \right| = \left| \int\limits_{R_0}^{R_{n-1}} \frac{\mu(t) - \widetilde{\mu}(t)}{t} dt \right| \leqslant \ln \frac{|\lambda|}{R_0}. \tag{1.7}$$

Очевидно, в силу условия (1.1) выполняется соотношение

$$\left| \int\limits_{|w|\leqslant R_0} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| d(\mu(w) - \widetilde{\mu}(w)) \right| \leqslant \mathrm{const} \cdot \ln(|\lambda| + e). \tag{1.8}$$

Через S обозначим кольцо $\{w : \ |\lambda|/2 \leqslant |w| \leqslant 2|\lambda|\}$ и через S_1 — кольцо $\{w : \ R_{n-1} \leqslant |w| \leqslant R_{n+2}\}$. На множестве $S_1 \setminus S$ имеет место простая оценка

$$\left| \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| \right| \leqslant \mathrm{const} \cdot \ln(|\lambda| + e), \tag{1.9}$$

и по построению μ-мера этого множества не больше 3. Поэтому

$$\left| \int\limits_{S_1\setminus S} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| d(\mu(w) - \widetilde{\mu}(w)) \right| \leqslant \mathrm{const} \cdot \ln(|\lambda| + e). \tag{1.10}$$

Возьмем произвольные положительные δ, β и пусть

$$B_n(\delta, \beta) = B\big(\lambda_n, \delta(1 + |\lambda_n|)^{-\beta}\big), \quad E(\delta, \beta) = \bigcup_n B_n(\delta, \beta).$$

Тогда для $\lambda \notin E(\delta, \beta)$ и $w \in S$ выполняется оценка (1.9), поэтому

$$\left| \int\limits_S \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| d\big(\mu(w) - \widetilde{\mu}(w)\big) \right| \leqslant \mathrm{const} \cdot \ln(e + |\lambda|), \quad \lambda \notin E(\delta, \beta). \tag{1.11}$$

Из оценок (1.3)–(1.8), (1.10)–(1.11) следует, что целая функция

$$f(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

вне множества $E(\delta, \beta)$ удовлетворяет соотношению

$$\big|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|\big| \leqslant \mathrm{const} \cdot \ln(e + |\lambda|), \quad \lambda \notin E(\delta, \beta).$$

Выбирая $\beta = 0$ и δ достаточно малым, можем добиться чтобы круги $B_n(\delta, \beta)$ попарно не пересекались. Тогда из формулы Коши

$$\frac{1}{f'(\lambda_n)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_n} \frac{dw}{f(w)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

будет следовать оценка производной

$$\ln |f'(\lambda_n)| \geqslant u(\lambda_n) - \mathrm{const} \cdot \ln(|\lambda_n| + e), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Чтобы закончить доказательство теоремы 1.3, покажем, что для радиальных субгармонических функций условие типа (1.1) всегда выполняется.

Лемма 1.1. *Если σ — некоторая радиальная неотрицательная борелевская мера, удовлетворяющая условию (1.2), то для любого $z \neq 0$ и $t \in [0; |z|/2]$ выполняется неравенство*

$$\sigma(z, t) \leqslant \frac{2t}{\pi |z|}.$$

Доказательство леммы 1.1. Через $Q(z, t)$ обозначим криволинейный четырехугольник, ограниченный двумя касательными к окружности $C(z, t)$, проведенными из начала координат, и окружностями $C(0, |z| - t)$, $C(0, |z| + t)$. Радиальную меру в полярных координатах можно представить в виде $d\sigma(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} d\sigma(r) d\varphi$. Следовательно, учитывая, что

$$\frac{|z| + t}{|z| - t} \leqslant 2$$

при $t \in [0; |z|/3]$, имеем

$$\sigma(z, t) \leqslant \sigma(Q(z, t)) = \frac{1}{\pi}(\sigma(|z| + t) - \sigma(|z| - t)) \arcsin \frac{t}{|z|} \leqslant \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{t}{|z|} \leqslant \frac{2t}{\pi |z|}.$$

Лемма 1.1 доказана. □

Теорема 1.3 доказана. □

Теорема 1.4. *Пусть ассоциированная мера μ субгармонической на плоскости функции u удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *для некоторого положительного $\delta > 0$*

$$\delta \leqslant \mu(2t) - \mu(t), \tag{1.12}$$

$$\mu(2t) - \mu(t) \leqslant 1, \quad t > 0; \tag{1.13}$$

(2) *для любого $z \in \mathbb{C}$ и некоторых $A > 0$, $\beta \in (0; 1)$*

$$\int\limits_0^{\beta|\lambda|} \frac{\mu(\lambda, t) dt}{t} \leqslant A. \tag{1.14}$$

Определим последовательность R_n из соотношений

$$\mu(R_0) = 1, \quad \mu(R_n) - \mu(R_{n-1}) = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

а последовательность r_n — из равенств

$$\int\limits_{R_{n-1}}^{R_n} \ln t \, d\mu(t) = \ln r_n, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \int\limits_0^{R_0} \ln t \, d\mu(t) = \ln r_0.$$

Тогда для любой последовательности $\varphi_n \in [0; \pi/2]$ целая функция

$$L(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - (-1)^n \frac{\lambda}{r_n e^{i\varphi_n}}\right)$$

с простыми нулями в точках $\lambda_n = (-1)^n r_n e^{i\varphi_n}$ *удовлетворяет условию*

$$|L(\lambda)| \asymp \frac{\operatorname{dist}(\lambda,\Lambda)}{1+|\lambda|} e^{u(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $\Lambda = \{\lambda_n\}$. *При этом для достаточно малых* $\sigma > 0$ *круги* $B_n(\sigma) := \{\lambda : \ |\lambda - \lambda_n| \leqslant \sigma|\lambda_n|\}$, $n = 0, 1, 2, \dots,$ *попарно не пересекаются.*

Доказательство теоремы 1.4. Пусть $|\lambda| \in (R_n; R_{n+1}]$. Условие (1.13) совпадает с условием (1.2) в теореме 1.3, поэтому оценки (1.3)–(1.6) сохраняют силу. Вместо соотношения (1.7) по выбору r_n получим

$$\int\limits_0^{R_{n-1}} \ln\frac{|\lambda|}{t} d(\mu(t) - \widetilde{\mu}(t)) = 0.$$

Через μ_k обозначим сужение меры μ на кольцо $S_k := \{w : |w| \in [R_k; R_{k+1}]\}$. Тогда по определению r_n имеем

$$\left| \int\limits_{R_{n-1}<|w|<R_{n+2}} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| d\big(\mu(w) - \widetilde{\mu}(w)\big) \right| = \left| \sum_{k=n-1}^{n+1} \int\limits_{S_k} \ln\left|\frac{\lambda - w}{\lambda - \lambda_k}\right| d\mu_k(w) \right|.$$

При фиксированном $\lambda \notin E(\sigma) = \bigcup\limits_k B_k(\lambda_k, \sigma|\lambda_k|)$ введем обозначение $T_k = |\lambda - \lambda_k|$; тогда

$$\left| \int\limits_{B(\lambda,\beta|\lambda|)} \ln\left|\frac{\lambda - w}{\lambda - \lambda_k}\right| d\mu_k(w) \right| \leqslant \left| \int\limits_{B(\lambda,\beta|\lambda|)} \ln\left|\frac{\lambda - w}{\beta|\lambda|}\right| d\mu_k(w) \right| +$$
$$+ \left| \int\limits_{B(\lambda,\beta|\lambda|)} \ln\left|\frac{\beta|\lambda|}{T_k}\right| d\mu_k(w) \right| \leqslant -\int\limits_0^{\beta|\lambda|} \ln\frac{t}{\beta|\lambda|} d\mu_k(\lambda,t) + \left|\ln\left|\frac{\beta|\lambda|}{T_k}\right|\right|.$$

Интегрируя по частям по условию (1.14) теоремы получим

$$-\int\limits_0^{\beta|\lambda|} \ln\frac{t}{\beta|\lambda|} d\mu_k(\lambda,t) = \int\limits_0^{\beta|\lambda|} \frac{\mu_k(\lambda,t)dt}{t} \leqslant A.$$

Из условий (1.12), (1.13) следует, что $2R_k \leqslant R_{k+1} \prec R_k$, поэтому

$$|w| \asymp |\lambda|, \quad |\lambda - \lambda_k| \asymp |\lambda|, \quad \lambda \in S_n \setminus E(\sigma), \quad w \in \bigcup_{k=n-1}^{n+1} S_k, \quad \left|\frac{\beta\lambda}{T_k}\right| \asymp 1,$$

поэтому

$$\left| \int\limits_{B(\lambda,\beta|\lambda|)} \ln\left|\frac{\lambda - w}{\lambda - \lambda_k}\right| d\mu_k(w) \right| \prec 1.$$

Очевидно,

$$\left|\frac{\lambda - w}{\lambda - \lambda_k}\right| \asymp 1, \quad \lambda \in S_n \setminus E(\sigma), \quad w \in \bigcup_{k=n-1}^{n+1} S_k.$$

Следовательно,

$$\left| \int\limits_{\mathbb{C}\setminus B(\lambda,\beta|\lambda|)} \ln\left|\frac{\lambda - w}{\lambda - \lambda_k}\right| d\mu_k(w) \right| \prec 1.$$

Из последних двух неравенств вытекает
$$\left| \int\limits_{R_{n-1}<|w|<R_{n+2}} \ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right| d\big(\mu(w)-\widetilde{\mu}(w)\big)\right| \prec 1.$$
Таким образом,
$$\Big|\ln|L(\lambda)|-u(\lambda)\Big| = O(1), \quad \lambda\notin E(\sigma).$$
Докажем, что круги $B_n(\sigma)$ при $\sigma=2^{-[1/\delta]-2}$ попарно не пересекаются. Пусть $N=[1/\delta]+1$; тогда по условию (1.12)
$$\mu(2^N R_n)-\mu(R_n)=\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\mu(2^{k+1}R_n)-\mu(2^kR_n)\Big)\geqslant N\delta>1;$$
значит, $2^NR_n>R_{n+1}$. Мы предполагаем, что $\varphi_n\in[0;\pi/2]$, поэтому
$$\big|\lambda_n-\lambda_{n+1}\big|=\big|r_ne^{i\varphi_n}+r_{n+1}e^{i\varphi_{n+1}}\big|\geqslant\sqrt{r_n^2+r_{n+1}^2}>r_{n+1}\geqslant R_n>2^{-N}R_{n+1}\geqslant 2^{-N}r_{n+1}=2\sigma r_{n+1}.$$
Внутри кругов $B_n(\sigma)$ оценки проведем с помощью следующей леммы.

Лемма 1.2. *Пусть ассоциированная мера μ удовлетворяет условию (1.14). Тогда для любого $z\in\mathbb{C}$ гармоническая мажоранта $H(w)$ функции u в круге $B(z,\beta|z|/3)$ удовлетворяет соотношениям*
$$u(w)\leqslant H(w)\leqslant u(w)+A, \quad w\in B(z,\beta|z|/3).$$

Доказательство леммы 1.2. Возьмем произвольную точку $w\in B:=B(z,\beta|z|/3)$ и через $H_1(\zeta)$ обозначим гармоническую мажоранту функции u в круге $B_1:=B(w,\frac{2\beta}{3}|z|)$. Поскольку $B\subset B_1$, то
$$u(w)\leqslant H(w)\leqslant H_1(w).$$
По формуле Иенсена
$$H_1(w)=u(w)+\int\limits_0^{2\beta|z|/3}\frac{\mu(w,t)dt}{t}.$$
Точка w лежит в круге B, значит,
$$|w-z|\leqslant\frac{\beta}{3}|z|, \quad |z|\leqslant\frac{3}{3-\beta}|w|.$$
Поэтому $2\beta|z|/3<\beta|w|$ и по условию на меру μ
$$\int\limits_0^{2\beta|z|/3}\frac{\mu(w,t)dt}{t}\leqslant\int\limits_0^{\beta|w|}\frac{\mu(w,t)dt}{t}\leqslant A.$$
Лемма 1.2 доказана. □

Возьмем $\sigma\leqslant\beta/3$. По оценке функции вне $E(\sigma)$ и по лемме 1.2 имеем
$$\ln|L(\lambda)|-u(\lambda)-\ln|\lambda-\lambda_k|+\ln|\sigma\lambda_k|=O(1), \quad \lambda\in\partial B(\lambda_k,\sigma|\lambda_k|), \quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$
По гармоничности эта оценка продолжается внутрь круга
$$|L(\lambda)|\asymp\frac{|\lambda-\lambda_k|}{\sigma|\lambda_k|}e^{u(\lambda)}\asymp\frac{\operatorname{dist}(\lambda,\Lambda)}{1+|\lambda|}e^{u(\lambda)}, \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$
Теорема 1.4 доказана. □

В завершении раздела теорему 1.1 докажем в одном частном, но важном для применений случае, с более конкретными выводами.

Теорема 1.5. *Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, μ — мера, ассоциированная с ней по Риссу. Если для некоторого $M>0$ для всех точек $z\in\mathbb{C}$ выполняется условие*
$$\mu(B(z,t))\leqslant Mt,\quad t\in(0;1),\tag{1.15}$$
то существует целая функция f с простыми нулями λ_n, удовлетворяющими следующему условию: при некотором $\delta\in(0;1)$ круги $B_n(\delta)=B\big(\lambda_n,\delta(|\lambda_n|+1)^{-1}\big)$ попарно не пересекаются и сама функция удовлетворяет соотношению
$$\big|\ln|f(\lambda)|-u(\lambda)\big|\leqslant A\ln(|\lambda|+1)+C,\quad \lambda\notin\bigcup_n B_n(\delta),$$
а производная — оценке
$$|\ln|f'(\lambda)|-u(\lambda)|\leqslant A\ln(|\lambda|+1)+C',\quad \lambda\in N(f);$$
при этом постоянная $A>0$ не зависит от M и функции u, а постоянные C, C', δ зависят от M, но не зависят от функции u.

Доказательство теоремы 1.5. Докажем несколько предварительных лемм.

Лемма 1.3. *Пусть u — субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция, $u(0)=0$, и ее ассоциированная мера μ удовлетворяет условию* (1.15). *Пусть $\alpha(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$ — такая неотрицательная финитная функция с носителем в $[-1;1]$, что*
$$\int\limits_{\mathbb{C}}\alpha(|\lambda|)dm(\lambda)=1,$$
где dm — плоская мера Лебега. Тогда субгармоническая и бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{C}$ функция
$$v(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{C}}\alpha(\lambda-w)u(w)dm(w),\quad \lambda\in\mathbb{C},$$
удовлетворяет условиям
$$\begin{aligned}&u(\lambda)\leqslant v(\lambda)\leqslant u(\lambda)+M, && \lambda\in\mathbb{C},\\ &\Delta v(\lambda)\leqslant\pi\alpha M, && \lambda\in\mathbb{C},\end{aligned}$$
где $\alpha=\max\alpha(t)$, а ее ассоциированная мера удовлетворяет условию (1.15).

Доказательство леммы 1.3. Пусть $\alpha(\lambda)=\alpha(|\lambda|)$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Очевидно,
$$v(\lambda)\geqslant u(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$
По определению
$$v(\lambda)-u(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{C}}\big(u(w)-u(\lambda)\big)\alpha(\lambda-w)dm(w).$$
Переходя к полярным координатам и пользуясь формулой Йенсена, получим
$$v(\lambda)-u(\lambda)=2\pi\int\limits_0^1\alpha(t)\left(\int\limits_0^t\frac{\mu(\lambda,s)}{s}\,ds\right)t\,dt.$$
Отсюда по условию (1.15) имеем
$$v(\lambda)-u(\lambda)\leqslant M\int\limits_{\mathbb{C}}\alpha(\lambda)dm(\lambda)=M.$$
Первое утверждение леммы доказано. Оценим Δv. Рассматривая u как обобщенную функцию, получим
$$\Delta v(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{C}}\Delta_\lambda\alpha(\lambda-w)u(w)\,dm(w)=\int\limits_{\mathbb{C}}\Delta_w\alpha(\lambda-w)u(w)\,dm(w)=\pi\int\limits_{\mathbb{C}}\alpha(\lambda-w)d\mu(w).$$

Если $\alpha = \max_t \alpha(t)$, то с учетом (1.15) имеем

$$\Delta v(\lambda) \leqslant \pi\alpha\mu(\lambda,1) \leqslant \pi\alpha M.$$

Лемма 1.3 доказана. □

Таким образом, теорему 1.5 можем доказывать, считая, что функция u удовлетворяет условию

$$\Delta u(\lambda) \leqslant M, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.16}$$

Покажем, что теорему 1.5 достаточно доказать для $M = 1$. В самом деле, пусть доказана следующая теорема.

Теорема 1.5′. *Пусть $v \in C^\infty$, $v(0) = 0$, — субгармоническая функция на плоскости, причем*

$$\Delta v(\lambda) \leqslant 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда существует целая функция g с простыми нулями w_n, удовлетворяющими следующему условию: при некотором $\delta_0 \in (0;1)$ круги $B(w_n, \delta_0(|w_n|+1)^{-1})$ попарно не пересекаются и сама функция удовлетворяет соотношению

$$\big|\ln|g(w)| - v(w)\big| \leqslant A_0 \ln(|w|+1) + C_0, \quad \lambda \notin \bigcup_n B\big(w_n, \delta_0(|w_n|+1)^{-1}\big),$$

а производная — оценке

$$\big|\ln|g'(\lambda)| - v(\lambda)\big| \leqslant A_0 \ln(|\lambda|+1) + C_0', \quad \lambda \in N(g);$$

при этом постоянные A_0, C_0, $C_0' > 0$ не зависят функции v.

Пусть функция u удовлетворяет условию (1.16). Если $M > 1$, то рассмотрим функцию $v(w) = u(w/M)$. Поскольку $\mu_v(z,t) = \mu(z/M, t/M)$, то при $t < 1$

$$\mu_v(z,t) \leqslant M \cdot \frac{t}{M} = t.$$

По теореме 1.5′ найдется функция g с соответствующими оценками. Возьмем функцию $f(\lambda) = g(M\lambda)$ с простыми нулями в точках $\lambda_n = w_n/M$. При отображении $w \to w/M$ попарно не пересекающиеся круги $B\big(w_n, \delta_0(|w_n|+1)^{-1}\big)$ отображаются в непересекающиеся круги $B\big(\lambda_n, \delta_0/(M(M|\lambda_n|+1))\big)$ и вне этих кругов выполняется оценка

$$l\big|\ln|f(\lambda)| - u(\lambda)\big| \leqslant A_0 \ln(|\lambda|+1) + A_0 \ln M + C_0. \tag{1.17}$$

Поскольку

$$\frac{\delta_0}{M^2}\big(|\lambda_n|+1\big)^{-1} \leqslant r_n := \frac{\delta_0}{M}\big(M|\lambda_n|+1\big)^{-1} \leqslant \frac{\delta_0}{M}\big(|\lambda_n|+1\big)^{-1},$$

то круги $B_n\big(\lambda_n, \delta_0/(M^2(|\lambda_n|+1))\big)$ также попарно не пересекаются. Продолжим оценку на функцию f на внешность этих кругов. Пусть H — гармоническая мажоранта функции u в круге $B(\lambda_n, r_n)$; тогда по формуле Грина и по условию (1.15)

$$0 \leqslant H(\lambda) - u(\lambda) = \int\limits_{B(\lambda_n,r_n)} G(\lambda,z)\,d\mu(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{B(\lambda_n,r_n)} G(\lambda,z)\Delta u(z)\,dm(z) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{\pi}\int\limits_{B(\lambda_n,r_n)} G(\lambda,z)\,dm(z), \quad \lambda \in B(\lambda_n, r_n).$$

Учитывая, что для функции $A(\lambda) = |\lambda - \lambda_n|^2$ имеем $\Delta A(\lambda) \equiv 2/\pi$, и гармоническая мажоранта функции A тождественно равна r_n^2, получим оценку

$$l0 \leqslant H(\lambda) - u(\lambda) = \frac{M}{2}\max_{z\in B(\lambda_n,r_n)}\big(r_n^2 - |\lambda_n - z|^2\big) \leqslant \frac{M}{2}, \quad \lambda \in B(\lambda_n, r_n). \tag{1.18}$$

По принципу максимума и в силу (1.17) имеем

$$\begin{aligned}\Big|H(\lambda) - \Big(\ln|f(\lambda)| - \ln\frac{|\lambda-\lambda_n|}{r_n}\Big)\Big| &\leqslant \\ \leqslant \max_{|z-\lambda_n|=r_n} \big|u(z) - \ln|f(z)|\big| &\leqslant A_0\ln(|\lambda_n|+r_n+1) + A_0\ln M + C_0 \leqslant \\ &\leqslant A_0\ln(|\lambda_n|+1) + A_0\ln(2M) + C_0, \quad \lambda\in B(\lambda_n, r_n). \quad (1.19)\end{aligned}$$

Если

$$\frac{\delta_0}{M^2}(|\lambda_n|+1)^{-1} \leqslant |\lambda-\lambda_n| \leqslant r_n \leqslant \frac{\delta_0}{M}(M|\lambda_n|+1)^{-1},$$

то

$$\Big|\ln\Big|\frac{\lambda-\lambda_n}{r_n}\Big|\Big| \leqslant \ln M;$$

поэтому

$$\big|H(\lambda) - \ln|f(\lambda)|\big| \leqslant A_0\ln(|\lambda|+1) + (A_0+1)\ln(2M) + C_0,$$

где $\lambda\in B(\lambda_n, r_n)\setminus B\big(\lambda_n, \delta_0/(M^2(|\lambda_n|+1))\big)$. Отсюда вместе с (1.18) следует требуемая оценка для самой функции f

$$\big|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|\big| \leqslant A_0\ln(|\lambda|+1) + (A_0+1)\ln(2M) + C_0 + \frac{M}{2},$$

где $\lambda\notin B(\lambda_n, \delta_0/(M^2(|\lambda_n|+1)))$. Полагая в (1.19) $\lambda=\lambda_n$ и применяя оценку (1.18), получим требуемую оценку для $f'(\lambda_n)$:

$$\big|u(\lambda_n) - \ln|f'(\lambda_n)|\big| \leqslant A_0\ln(|\lambda_n|+1) + C_0' + \frac{M}{2} + \ln M, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Для доказательства теоремы 1.5′ потребуется еще одна лемма.

Лемма 1.4. *Пусть u — гладкая субгармоническая функция, Δu удовлетворяет условию (1.16) с $M=1$. Через Q_n, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, обозначим квадрат с центром в начале координат, сторонами, параллельными осям координат, и с длиной стороны 3^n. Тогда*

$$Q_{n+1}\setminus Q_n = \bigcup_1^8 Q_{nj}, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

где Q_{nj} — квадраты, полученные сдвигом квадрата Q_n на векторы $(\pm3^n, 0)$, $(0,\pm3^n)$, $(\pm3^n,\pm3^n)$. Существует такая субгармоническая функция $\widetilde{u}$ с ассоциированной мерой $\widetilde{\mu}$, что

(1) *в квадратах Q_{nj} функция $\widetilde{u}$ гладкая и выполняется условие (1.16);*
(2) *$\widetilde{\mu}(Q_{nj})$ — неотрицательное целое число;*
(3) *имеет место оценка*

$$|u(\lambda) - \widetilde{u}(\lambda)| \leqslant 45\ln(|\lambda|+e) + 142, \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Доказательство леммы 1.4. Положим

$$\mu(Q_{nj}) := m_{nj} + q_{nj}, \quad j=1,2,\dots,8, \quad n\in\mathbb{N},$$

где $q_{nj} = \{\mu(Q_{nj})\}\in[0;1)$ — дробная часть $\mu(Q_{nj})$. Положим

$$q_n^+ = \sum_j q_{nj}\in[0;8), \quad q_n^- = \sum_j (q_{nj}-1)\in[-8;0).$$

Определим последовательность q_n следующим образом: положим $q_0 = \{\mu(Q_0)\}$, если q_j для $j\leqslant k-1$ определены, то при $\sum\limits_{j\leqslant k-1} q_j \geqslant 0$, положим $q_k := q_k^-$; в противном случае $q_k := q_k^+$. Таким образом,

$$\sum_{k=0}^n q_k \in (-8;8), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Далее определим последовательность натуральных чисел N_0, N_{nj}, $j=1,\dots,8$, $n\in\mathbb{N}$. Положим $N_0=[\mu(Q_0)]$; если $q_n=q_n^-$, то $N_{n_j}=\mu(Q_{nj})-(q_{nj}-1)$, а если $q_n=q_n^+$, то $N_{nj}=\mu(Q_{nj})-q_{nj}$. Таким образом, либо $N_{nj}=m_{nj}+1$, либо $N_{nj}=m_{nj}$. Сужение меры μ на квадрат Q_{nj} обозначим через μ_{nj}, $\mu_0=\mu\big|_{Q_0}$, и положим

$$\widetilde{\mu}_0=\frac{N_0}{\mu(Q_0)}\mu_0,\qquad \nu_0=\mu_0-\widetilde{\mu}_0,$$
$$\widetilde{\mu}_{nj}=\frac{N_{nj}}{\mu(Q_{nj})}\mu_{nj},\quad j=1,\dots,8,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Если $\mu(Q_{nj})=0$, то $\widetilde{\mu}_{nj}=0$. Тогда $\widetilde{\mu}_{nj}(\mathbb{C})=N_{nj}$ — целые неотрицательные числа и, если положим $\nu_{nj}=\mu_{nj}-\widetilde{\mu}_{nj}$, то

$$\nu_{nj}(\mathbb{C})\in(-1;1),\qquad \left(\sum_{j=1}^{8}\nu_{nj}\right)(\mathbb{C})\in(-8;8).\tag{1.20}$$

Пусть

$$\nu=\nu_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{8}\nu_{nj},\quad \nu^+=\nu_0+\sum_{q_n=q_n^+}\sum_{j=1}^{8}\nu_{nj},\quad \nu^-=-\sum_{q_n=q_n^-}\sum_{j=1}^{8}\nu_{nj};$$

тогда $\nu^\pm$ — неотрицательные меры и $\nu=\nu^+-\nu^-$. При этом

$$\nu^\pm\left(\bigcup_{j=1}^{8}Q_{nj}\right)=q_n^\pm\in(-8;8).$$

Утверждение 1.1. *Верно соотношение*

$$\pi(\lambda):=\int\limits_{\mathbb{C}}\ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right|d\nu(w)\leqslant 45\ln(|\lambda|+e)+142,\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Доказательство утверждения 1.1. Возьмем $\lambda\in Q_{n+1}\setminus Q_n$. Если $w\in Q_{m+1}\setminus Q_m$, то

$$\frac{3^m}{2}\leqslant|w|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}3^{m+1},\quad \big|\ln(|\zeta|+1)\big|\leqslant 2|\zeta|$$

при $|\zeta|\leqslant 1/2$, поэтому

$$\left|\int\limits_{\mathbb{C}\setminus Q_{n+2}}\ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right|d\nu(w)\right|\leqslant\sum_{m=2}^{\infty}\left|\int\limits_{Q_{n+m+1}\setminus Q_{n+m}}\ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right|d\nu(w)\right|\leqslant\frac{32|\lambda|}{3^n}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{3^m}\leqslant 8\sqrt{2}.\tag{1.21}$$

Аналогично,

$$\left|\int\limits_{Q_{n-1}}\ln\left|1-\frac{w}{\lambda}\right|d\nu(w)\right|\leqslant\frac{2}{|\lambda|}\left(8\sum_{m=1}^{n-1}\frac{3^{n-m}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\leqslant 10\sqrt{2}.\tag{1.22}$$

Докажем, что

$$|\nu(t)|=|\nu(B(0,t))|\leqslant 17,\quad t\geqslant 0.\tag{1.23}$$

В самом деле, если $t<3/\sqrt{2}$, то $B(0,t)\subset Q_2$, поэтому

$$|\nu(t)|\leqslant|\nu(Q_1)|+\sum_{j=1}^{8}|\nu_{1j}(\mathbb{C})|\leqslant 9.$$

Для $t\geqslant 3/\sqrt{2}$ через n обозначим наибольшее натуральное число, для которого $3^n/\sqrt{2}\leqslant t$; тогда $Q_n\subset B(0,t)$ и

$$\frac{3^{n+2}}{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{3^{n+1}}{\sqrt{2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{2}}t>t;$$

значит, $Q_{n+2} \supset B(0,t)$. Таким образом, с учетом (1.20) получим

$$|\nu(t)| \leqslant |\nu(Q_n)| + \sum_{i=n}^{n+1} |\sum_{j=1}^{8} \nu_{ij}(\mathbb{C})| \leqslant 17.$$

Пусть $\widetilde{\nu}_n$ — сужение меры ν на квадрат Q_n. Тогда

$$\left| \int\limits_{Q_{n-1}} \ln \frac{|\lambda|}{|w|} d\nu(w) \right| = \left| \int\limits_0^{3^n} \ln \frac{|\lambda|}{t}\, d\widetilde{\nu}_{n-1}(t) \right| \leqslant \ln \frac{|\lambda|}{3^n} |\nu(Q_{n-1})| + \left| \int\limits_0^{3^n} \frac{\widetilde{\nu}_{n-1}(t)}{t}\, dt \right|.$$

По условию (1.16) с $M = 1$, учитывая (1.23), имеем

$$\left| \int\limits_0^{3^n} \frac{\widetilde{\nu}_{n-1}(t)}{t}\, dt \right| \leqslant \int\limits_0^1 \frac{\mu(t)}{t}\, dt + \int\limits_1^{3^n} \frac{17dt}{t} \leqslant 1 + 17 \ln(|\lambda| + e).$$

Следовательно,

$$\left| \int\limits_{Q_{n-1}} \ln \frac{|\lambda|}{|w|} d\nu(w) \right| \leqslant 18 + 17 \ln(|\lambda| + e),$$

и вместе с (1.22) получим

$$\left| \int\limits_{Q_{n-1}} \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{w} \right| d\nu(w) \right| \leqslant 17 \ln(|\lambda| + e) + 33. \tag{1.24}$$

Если $w \in Q_{n+2} \setminus Q_{n-1}$, то

$$|w| \in \left[\frac{3^{n-1}}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} 3^{n+2} \right], |\lambda| \in \left[\frac{3^n}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} 3^{n+1} \right],$$

поэтому для $w \notin B(\lambda, 1)$ верна оценка

$$\frac{\sqrt{2}}{9} \cdot 3^{-n} \leqslant \left| \frac{\lambda - w}{w} \right| \leqslant 51;$$

значит,

$$\left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{w} \right| \right| \leqslant \ln(|\lambda| + e) + 4.$$

Отсюда

$$l \left| \int\limits_{(Q_{n+2} \setminus Q_{n-1}) \setminus B(\lambda,1)} \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{w} \right| d\nu(w) \right| \leqslant 24 \ln(|\lambda| + e) + 96. \tag{1.25}$$

Остается оценить интеграл по кругу $B(\lambda, 1)$. Мера ν по построению является частью меры μ, поэтому для нее выполняется условие (1.15) с $M = 1$. Учитывая это обстоятельство и интегрируя по частям, получим

$$\left| \int\limits_{B(\lambda,1)} \ln |\lambda - w| d\nu(w) \right| \leqslant 1, \quad \left| \int\limits_{B(\lambda,1)} \ln |w| d\nu(w) \right| \leqslant \pi \ln(|\lambda| + e).$$

Тем самым,

$$\int\limits_{B(\lambda,1)} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{w} \right| \right| d\nu(w) \leqslant \pi \ln(|\lambda| + e) + 1.$$

Отсюда и из (1.21), (1.24) и (1.25) получим оценку из утверждения 1.1. □

Согласно утверждению 1.1 для функции $\widetilde{u}(\lambda) = u(\lambda) - \pi(\lambda)$ выполняются утверждения леммы 1.4. Лемма 1.4 доказана. $\square$

Утверждение 1.2. *Существуют такие меры μ_n, $\mu_n(\mathbb{C}) = 1$, и прямоугольники P_n, $n \in \mathbb{N}$, что*

(1) $\sum\limits_n \mu_n = \widetilde{\mu}$;
(2) *внутренности выпуклых оболочек носителей мер μ_n попарно не пересекаются*;
(3) *носитель меры μ_n лежит в P_n, $n \in \mathbb{N}$*;
(4) *стороны прямоугольников параллельны осям координат и отношение длин сторон прямоугольника P_n лежит в интервале $[3^{-1}; 3]$*;
(5) *каждая точка плоскости попадает не более чем в четыре прямоугольника P_n*;
(6) *если F_n — выпуклая оболочка носителя меры μ_n, то*

$$\operatorname{diam} F_n \leqslant 2\sqrt{2} \min_{\lambda \in F_n} |\lambda| + \sqrt{2}.$$

Доказательство утверждения 1.2. К сужениям меры $\widetilde{\mu}$ на квадраты Q_{nj} применим [26, теорема 1]. После перенумерации получим множество единичных мер, удовлетворяющих свойствам (1)–(5) утверждения 1.2. Свойство (6) следует из соответствующего свойства квадратов Q_{nj}. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 1.5′. Центр тяжести единичных мер μ_n, построенных в утверждении 1.2, обозначим через λ_n:

$$\int\limits_{\mathbb{C}} w d\mu_n(w) = \lambda_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Через $\widetilde{\mu}_n$ обозначим сужение меры $\widetilde{\mu}$ на квадрат Q_n и через π_n — потенциал этой меры:

$$\pi_n(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| d\widetilde{\mu}_n(\lambda).$$

Тогда мера $\widetilde{\mu}_n$ удовлетворяет условиям [26, теорема 3]. По терминологии этой работы в силу условия (1.16) каждая точка $\lambda \in \mathbb{C}$ для любого $s = s(\lambda) \in (0; 1]$ является (π, s)-нормальной по мере $\widetilde{\mu}$. Значит, согласно указанной теореме получим, что для полинома

$$P_n(\lambda) = \prod_{\lambda_k \in Q_n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)$$

вне множества кругов $B_k(s) = B(\lambda_k, s(\lambda_k))$, $\lambda_k \in Q_n$, выполняется соотношение

$$\big|\pi_n(\lambda) - \ln|P_n(\lambda)|\big| \leqslant A \ln\big(|\lambda| + 1\big) + B \ln\big(s(\lambda) + 1\big) + C,$$

где постоянные A, B, C не зависят от μ и n.

В силу независимости постоянной A от n обычным образом обосновывается предельный переход. В результате получим, что существует целая функция f с простыми нулями в точках λ_n, удовлетворяющая условию

$$\big|\widetilde{u}(\lambda) - \ln|f(\lambda)|\big| \leqslant A \ln(|\lambda| + 1) + B \ln(s(\lambda) + 1) + C, \quad \lambda \notin \bigcup_n B_n(s). \tag{1.26}$$

Покажем, что при достаточно малом $\delta > 0$ круги $B_n = B_n(\lambda_n, \delta(|\lambda_n| + 1)^{-1})$ попарно не пересекаются. Оценим расстояние d_n от точки λ_n до границы выпуклой оболочки F_n носителя меры μ_n. Пусть w_n — одна из точек достижения этого расстояния:

$$|\lambda_n - w_n| = \inf\big\{|\lambda_n - w|,\ w \notin F_n\big\}.$$

Пусть $w_n - \lambda_n = e^{i\varphi_n}|\lambda_n - w_n|$ и $z = Tw = e^{-\varphi_n}(\lambda_n - w)$. При таком преобразовании образ F^* оболочки F_n расположится в полуплоскости $\{\operatorname{Re} z \leqslant d_n\}$ и для образа меры $d\mu^*(z) = d\mu_n(\lambda_n - e^{i\varphi_n} z)$

будут выполняться условия

$$\int\limits_{\mathbb{C}} d\mu^*(z) = 1, \quad \int\limits_{\mathbb{C}} z d\mu^*(z) = 0, \quad d\mu^*(z) = \frac{1}{\pi}\chi_n(z)\Delta\widetilde{u}(\lambda_n - e^{i\varphi_n}z)dm(z),$$

где $\chi_n(z)$ — характеристическая функция множества F^*. Пусть

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(x+iy)\Delta\widetilde{u}(\lambda_n - e^{i\varphi_n}(x+iy))dy.$$

Тогда $\delta(x)$ — финитная функция с носителем на отрезке $[a;d_n]$ и по условию (6) утверждения 1.2

$$0 \leqslant \delta(x) \leqslant 3\pi(|\lambda_n|+1) := M_n.$$

Кроме того, из свойств μ^* следует, что

$$\int\limits_a^{d_n} \delta(x)dx = 1, \quad \int\limits_a^{d_n} x\delta(x)dx = 0.$$

Лемма 1.5. *Пусть $\delta(x)$ — неотрицательная, непрерывная и финитная функция, удовлетворяющая условиям*

$$(1) \quad \operatorname{conv}\operatorname{supp}\delta = [a;d], \qquad (2) \quad \sup_x \delta(x) \leqslant M_0 < \infty,$$

$$(3) \quad \int\limits_a^d \delta(x)dx = 1, \qquad (4) \quad \int\limits_a^d x\delta(x)\,dx = 0.$$

Тогда

$$d \geqslant \frac{1}{6M_0}.$$

Доказательство леммы 1.5. Определим число $c>0$ из равенства

$$\int\limits_{-c}^{c} \delta(x)dx = \frac{1}{3}.$$

Из условия (2) следует, что $c \geqslant 1/(6M_0)$. Допустим, что $d<c$. Тогда, учитывая (3), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{-c} \delta(x)dx = 1 - \int\limits_{-c}^{d} \delta(x)dx \geqslant 1 - \int\limits_{-c}^{c} \delta(x)dx = \frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{0} |x|\delta(x)dx \geqslant \frac{2c}{3} + \int\limits_{-c}^{0} |x|\delta(x)dx \geqslant \frac{2c}{3}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_0^d |x|\delta(x)dx \leqslant \int\limits_0^c |x|\delta(x)dx \leqslant c\int\limits_{-c}^{c} \delta(x)dx = \frac{c}{3}.$$

По условию (4)

$$\frac{2c}{3} \leqslant \int\limits_{-\infty}^{0} |x|\delta(x)dx = \int\limits_0^d |x|\delta(x)dx \leqslant \frac{c}{3}.$$

Из полученного противоречия имеем

$$d \geqslant c \geqslant \frac{1}{6M_0}.$$

Лемма 1.5 доказана. □

Из этой леммы следует, что

$$d_n \geqslant \frac{1}{18\pi}(1+|\lambda_n|)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По свойству (2) в утверждении 1.2 круги $B_n = B(\lambda_n, \delta(1+|\lambda_n|)^{-1})$, где $\delta < 1/(18\pi)$, попарно не пересекаются. В частности, любая точка λ вне этих кругов является $\pi(1+|\lambda_n|)^{-1}$-нормальной по мерам $\widetilde{\mu}$ и $\nu = \sum\limits_k \delta(\lambda_k)$, где $\delta(w)$ — единичная точечная мера в точке w. В силу соотношения (1.26) вне кругов B_n выполняется оценка

$$\big|\widetilde{u}(\lambda) - \ln|f(\lambda)|\big| \leqslant A\ln(|\lambda|+1) + C, \quad \lambda \notin \bigcup_n B_n.$$

Обычными приемами с помощью формулы Коши

$$\frac{1}{f'(\lambda_n)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_n} \frac{dz}{f(z)},$$

можем получить необходимые оценки для производной в точках λ_n. Теорема 1.5 доказана. □

2. Преобразование Фурье—Лапласа функционалов на нормированных пространствах аналитических функций

Пусть E — линейное топологическое подпространство пространства $H(D)$ на некоторой ограниченной выпуклой области плоскости, E^* — сильно сопряженное к нему пространство. Если система экспонент $e^{\lambda z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, полна в пространстве E, то преобразование Фурье—Лапласа $\mathcal{L} : S \to \widehat{S}$, определяемое как $\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z})$, $S \in E^*$, линейно и взаимно однозначно отображает пространство E^* в некоторое линейное подпространство $\widehat{E}$ пространства целых функций $H(\mathbb{C})$. Рассматривая в пространстве $\widehat{E}$ наведенную топологию, будем считать, что $\mathcal{L}$ является линейным топологическим изоморфизмом. Результаты об описании пространства $\widehat{E}$ с помощью весовых полунорм оказываются полезными во многих вопросах комплексного анализа. Такого рода теорем для случая, когда E — нормированное пространство, мало. Например, описаны сопряженные для пространства Смирнова (см. [13,16,18]), для пространств Бергмана (см. [9]). Локально выпуклые пространства, являющиеся проективным пределом нормированных пространств, исследовались чаще. Пространства с весами, зависящими только от расстояния до границы, изучены в [20], случай общих весов — в [3]. Индуктивные пределы нормированных подпространств пространства $A^\infty(D)$ рассмотрены в [27].

В разделе 2.1 мы рассмотрим канонические проективные и индуктивные пределы равномерно весовых нормированных пространств аналитических функций с наиболее тонкими топологиями. Раздел 2.2 посвящен локально выпуклым подпространствам $A^\infty(D)$.

2.1. Преобразование Фурье—Лапласа функционалов на весовых нормированных подпространствах $H(D)$. Пусть D — выпуклая область комплексной плоскости, содержащая точку $z=0$, и $\varphi(z)$ — выпуклая функция в D, стремящаяся к $+\infty$ вблизи границы. Через $H(D,\varphi)$ обозначим пространство аналитических в D функций f, для которых

$$\lim_{z\to\partial D} |f(z)|e^{-\varphi(z)} = 0,$$

с нормой

$$\|f\| = \sup_{z\in D} |f(z)|e^{-\varphi(z)}.$$

Тогда $H(D,\varphi)$ — банахово пространство, в котором система экспонент $e^{\lambda z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, полна. Через $H_2(D,\varphi)$ обозначим интегрально весовое пространство с нормой

$$\|f\|^2 = \int\limits_{z\in D} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\,dm(z),$$

где $dm(z)$ — плоская мера Лебега. Пусть $\widetilde{\varphi}(\lambda)$ — преобразование Юнга функции φ:

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \sup_{z\in D} \big(\operatorname{Re}\lambda z - \varphi(z)\big), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Как известно, $\widetilde{\varphi}$ — выпуклая функция; если же φ выпукла, то $\widetilde{(\widetilde{\varphi})} = \varphi$. Пусть

$$K_s(\varphi, z) = \int\limits_{\mathbb{C}} e^{\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda)}(1+|\lambda|)^s dm(\lambda), \quad z \in D.$$

Функции $\ln K_s(\varphi, z)$ выпуклы в области D. Пространство $H(D, \ln K_0(\varphi, z))$ для краткости будем обозначать через $H^-(D,\varphi)$.

Утверждение 2.1. *Если φ — некоторая функция в ограниченной области D, содержащей 0, то справедливы следующие уптверждения*:

(1) *преобразование Юнга $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяет условию Липщица*

$$\big|\widetilde{\varphi}(\lambda_1) - \widetilde{\varphi}(\lambda_2)\big| \leqslant \sup_{z\in D}|z|\,|\lambda_1-\lambda_2| \quad \forall \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C};$$

(2) *для любого $q \in (0;1)$*

$$qH_D(\lambda) - C'_q \leqslant \widetilde{\varphi}(\lambda) \leqslant H_D(\lambda) + C''_q, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $H_D(\lambda) = \sup\limits_{z\in D}\operatorname{Re}\lambda z$ — опорная функция области D, C'_q, $C''_q > 0$ — некоторые постоянные;

(3) *выполняются оценки*

$$\frac{1}{2\pi}K_{-3}(\varphi,z) \leqslant e^{\varphi(z)} \leqslant \pi^{-1}e^{2\sup_{\lambda\in D}|\lambda|}K_0(\varphi,z), \quad z \in D.$$

Доказательство утверждения 2.1. Пусть

$$\widetilde{\varphi}(\lambda_1) = \operatorname{Re}\lambda_1 z_1 - \varphi(z_1).$$

Тогда

$$\widetilde{\varphi}(\lambda_1) - \widetilde{\varphi}(\lambda_2) = \big(\operatorname{Re}\lambda_1 z_1 - \varphi(z_1)\big) - \widetilde{\varphi}(\lambda_2) \leqslant \ \leqslant \operatorname{Re} z_1(\lambda_1-\lambda_2) \leqslant \sup_{z\in D}|z|\,|\lambda_1-\lambda_2| \quad \forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}.$$

Поменяв местами λ_1, λ_2, получим требуемое неравенство.

Второе утверждение следует из ограниченности снизу выпуклой функции в ограниченной области и ограниченности сверху на компактах.

Левое неравенство в третьем утверждении тривиальное. Правое неравенство следует из п. (1). Утверждение 2.1 доказано. □

Несколько свойств выпуклых функций и преобразования Юнга (в вещественном смысле) сведем в одно утверждение.

Утверждение 2.2. *Пусть $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ — выпуклая функция и*

$$\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_j\partial y_k}a_j a_k \geqslant \frac{b}{1+|y|^2}|a|^2, \quad a, y \in \mathbb{R}^2, \quad |y| \geqslant R, \tag{2.1.1}$$

с постоянной $b > 12$ и $D = \big\{t \in \mathbb{R}^2:\ \widetilde{v}(t) = \sup_y((t,y)-v(y)) < \infty\big\}$. Положим

$$K_s(v,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{(t,y)-v(y)}(1+|y|)^s dm(y), \quad s\in[-6;6], \quad t \in D^\circ,$$

где (t,y) обозначает евклидово скалярное произведение, а D° — внутренность выпуклого множества D. Пусть y_t — точка достижения супремума

$$\sup_y((t,y)-v(y)) := \widetilde{v}(t): \quad (t,y_t) - v(y_t) = \widetilde{v}(t).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) *существуют такие постоянные* M_s, *зависящие только от постоянных* b, R *в условии* (2.1.1), *что*

$$K_s(v,t) \leqslant M_s \int\limits_{B\left(y_t,\frac{1}{2}(1+|y_t|)\right)} e^{(t,y)-v(y)}(1+|y|)^s\,dm(y), \quad t\in D^\circ, \quad s\in[-6;6];$$

(2) *если*

$$|t-\tau| \leqslant \frac{b}{(1+|y_t|)},$$

то верна оценка

$$\left|\widetilde{v}(t)-\widetilde{v}(\tau)\right| \leqslant 2b;$$

в частности, $\tau\in D$.

Доказательство утверждения 2.2. Из теории выпуклых функций известно, что

$$v(y)=\sup_{t\in D}((t,y)-\widetilde{v}(t)), \quad y\in\mathbb{R}^2.$$

Если $D^\circ=\emptyset$, то D — некоторый отрезок, и на прямых, перпендикулярных этому отрезку, $v(y)\equiv\mathrm{const}$, а это противоречит условию (2.1.1). Пусть $v(t,y)=\widetilde{v}(t)+v(y)-(t,y)$; тогда при фиксированном t функция $v(t,y)$ выпукла, неотрицательна и $v(t,y_t)=0$, $\nabla v(y_t)=t$. Положим для $s\geqslant 0$

$$D_t(s)=\left\{y\in\mathbb{R}^2:\ v(t,y)<s\right\}, \quad p_t(s)=V(D_t(s)),$$

где $V(A)$ — площадь области $A\subset\mathbb{R}^2$.

Одно из следствий теоремы Брунна—Минковского утверждает, что для выпуклых областей A,B на плоскости

$$(V(A+B))^{1/2}\geqslant (V(A))^{1/2}+(V(B))^{1/2}$$

(см. [6, с. 148]). Из выпуклости функции $v(t,y)$ следует выпуклость областей $D_t(s)$ и включение

$$\alpha D_t(s_1)+(1-\alpha)D_t(s_2)\subset D_t(\alpha s_1+(1-\alpha)s_2)$$

для всех $\alpha\in[0;1]$, $s_1,s_2\geqslant 0$. Поэтому

$$\sqrt{V(D_t(\alpha s_1+(1-\alpha)s_2))}\geqslant\sqrt{V(\alpha D_t(s_1)+(1-\alpha)D_t(s_2))}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{V(\alpha D_t(s_1))}+\sqrt{V((1-\alpha)D_t(s_2))}=\alpha\sqrt{V(D_t(s_1))}+(1-\alpha)\sqrt{V(D_t(s_2))}.$$

Таким образом, функция $\sqrt{p_t(s)}$ вогнута на $(0;\infty)$. Если $a\in(0;s)$, то

$$\sqrt{p_t(a)}=\sqrt{p_t\left(\left(1-\frac{a}{s}\right)\cdot 0+\frac{a}{s}s\right)}\geqslant\frac{a}{s}\sqrt{p_t(s)},$$

т.е.

$$lp_t(s)\leqslant p_t(a)\frac{s^2}{a^2}, \quad s\geqslant a>0. \tag{2.1.2}$$

Функцию $K_0(v,t)e^{-\widetilde{v}(t)}$ запишем в виде одномерного интеграла Стилтьеса

$$K_0(v,t)e^{-\widetilde{v}(t)}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{-v(t,y)}dm(y)=\int\limits_0^\infty e^{-s}dp_t(s).$$

Интегрируя последний интеграл по частям и пользуясь монотонностью функции $p_t(s)$ и неравенством (2.1.2), для любого положительного числа a получим

$$K_0(v,t)e^{-\widetilde{v}(t)} = \int\limits_0^a p_t(s)e^{-s}ds + \int\limits_a^\infty p(s)e^{-s}ds \leqslant$$

$$\leqslant p_t(a)\left[\int\limits_0^a e^{-s}ds + \int\limits_a^\infty \frac{s^2}{a^2}e^{-s}ds\right] \leqslant \frac{a^2+2a+2}{a^2}p_t(a).$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{D_t(a)} e^{-v(t,y)}dm(y) \geqslant e^{-a}p_t(a), \quad a \geqslant 0;$$

следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-v(t,y)}dm(y) \leqslant \frac{a^2+2a+2}{a^2}e^a \int\limits_{D_t(a)} e^{-v(t,y)}dm(y), \quad a \geqslant 0. \tag{2.1.3}$$

Докажем, что для $a = \dfrac{b\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)^2}$ при выполнении условия (2.1.1) область $D_t(a) \subset B(y_t, \varepsilon(1+|y_t|))$. По формуле Тейлора

$$v(y) = v(y_t) + (\nabla v(y_t), y-y_t) + \frac{1}{2}(D^2v(y^*)(y-y_t), y-y_t),$$

где y^* — некоторая точка на отрезке, соединяющем y, y_t, а D^2v — матрица вторых производных. Поскольку y_t — стационарная точка достижения супремума, то $\nabla v(y_t) = t$, поэтому по условию (2.1.1)

$$v(t,y) = \frac{1}{2}(D^2v(y^*)(y-y_t), y-y_t) \geqslant \frac{b|y-y_t|^2}{2(1+|y^*|^2)}.$$

Для точек на окружности $|y-y_t| = \varepsilon(1+|y_t|)$ имеем

$$1+|y^*| \leqslant 1+|y_t|+|y^*-y_t| \leqslant (1+\varepsilon)(1+|y_t|);$$

значит, на этой окружности

$$v(t,y) \geqslant \frac{b\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)^2}.$$

Тем самым,

$$D_t\left(\frac{b\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)^2}\right) \subset B(y_t, \varepsilon(1+|y_t|))$$

и по неравенству (2.1.3) оценка для $K_0(v,t)$ доказана.

Элементарными вычислениями убедимся в выполнении оценки

$$\left|\sum_{k,j=1}^2 \frac{\partial^2 \ln(1+|y|^2)}{\partial y_j \partial y_k}a_k a_j\right| \leqslant \frac{4|a|^2}{1+|y|^2}, \quad y, a \in \mathbb{R}^2. \tag{2.1.4}$$

Значит, если $s \in [-3;3]$, то для функции

$$(y) = v(y) - s\ln(1+|y|^2)$$

по условию (2.1.1) выполняется оценка

$$\sum_{k,j=1}^2 \frac{\partial^2 w(y)}{\partial y_j \partial y_k}a_k a_j \geqslant \frac{b-12}{1+|y|^2}|a|^2, \quad y, a \in \mathbb{R}^2.$$

Таким образом, учитывая, что $b > 12$, можем локализовать интеграл $K_0(w,t)$ в круге $B\big(y_t', \varepsilon(1+|y_t'|)\big)$, где y_t' — точка достижения супремума $\sup_t \big((y,t) - \widetilde{w}(y)\big)$. Для получения локализации в круге с центром в точке y_t оценим $|y_t' - y_t|$. Для функции $u(r) = v(y_t + r(y_t' - y_t))$ имеем

$$u'(1) = \big(\nabla v(y_t'), y_t' - y_t\big) = \left(t + s\nabla \ln(1+|y|^2)\big|_{y=y_t'}, y_t' - y_t\right),$$
$$u'(0) = \big(\nabla v(y_t), y_t' - y_t\big) = (t, y_t' - y_t),$$

и по условию (2.1.1)

$$u''(r) = \big(D^2 v(y)(y_t' - y_t), y_t' - y_t\big) \geqslant \frac{b}{1+|y|^2}|y_t' - y_t|^2, \quad y = y_t + r(y_t' - y_t).$$

Положим $|y_t' - y_t| = p$, $1 + |y_t| = q$, тогда по формуле Ньютона

$$u'(1) - u'(0) = \int_0^1 u''(r)dr$$

получим

$$\frac{2|s|p}{bq} \geqslant p^2 \int_0^1 \frac{dr}{p^2r^2 + q^2},$$

или, учитывая, что $2|s|/b < 1/2$

$$\operatorname{arctg} \frac{p}{q} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$|y_t' - y_t| \leqslant \frac{1}{2}(1 + |y_t|).$$

Отсюда можно заключить, что

$$B\big(y_t', \varepsilon(1+|y_t'|)\big) \subset B\left(y_t, \frac{3\varepsilon+1}{2}(1+|y_t|)\right)$$

и, тем самым, доказана возможность локализации.

Из очевидного соотношения $K_{2s}(v,t) \asymp K_0(w,t)$ вытекает требуемое неравенство для функций $K_s(v,t)$ для $|s| \leqslant 6$.

Перейдем к доказательству второго утверждения леммы. Возьмем такую точку $\tau \in D^\circ$, что

$$|t - \tau| \leqslant \frac{b}{(1+|y_t|)}.$$

Пусть $R(s) = v\big((y_\tau - y_t)s + y_t\big)$; тогда

$$R'(1) = \big(\nabla v(y_\tau), y_\tau - y_t\big) = \big(\tau, y_\tau - y_t\big), \quad R'(0) = \big(\nabla v(y_t), y_\tau - y_t\big) = \big(t, y_\tau - y_t\big).$$

Полагая $|y_\tau - y_t| = p$, $1 + |y_t| = q$, по условию (2.1.1) получим

$$R''(s) = \Big(D^2 v\big((y_\tau - y_t)s + y_t\big)\big(y_\tau - y_t\big),\ y_\tau - y_t\Big) \geqslant \frac{bp^2}{2(p^2s^2 + q^2)}.$$

Отсюда и из формулы Ньютона

$$R'(1) - R'(0) = \int_0^1 R''(s)ds$$

для $|\tau - t| < b/q$ имеем

$$\frac{bp}{q} \geqslant \frac{bp^2}{2}\int_0^1 \frac{ds}{p^2s^2+q^2} = \frac{bp}{q}\int_0^{p/q} \frac{ds}{1+s^2},$$

т.е.

$$\int\limits_0^{p/q} \frac{ds}{1+s^2} \leqslant 1;$$

значит, $p/q \leqslant \pi/4$ и

$$|y_\tau - y_t| \leqslant (1+|y_t|).$$

По теореме о среднем

$$\widetilde{v}(t) - \widetilde{v}(\tau) = (\nabla\widetilde{v}(\tau^*), t-\tau),$$

где τ^* — точка на отрезке, соединяющем точки t и τ. По доказанному

$$|y_{\tau^*} - y_t| \leqslant (1+|y_t|);$$

значит,

$$\bigl|\nabla\widetilde{v}(\tau^*)\bigr| = |y_{\tau^*}| \leqslant 2(1+|y_t|).$$

Таким образом,

$$\bigl|\widetilde{v}(t) - \widetilde{v}(\tau)\bigr| \leqslant 2b.$$

Оценку, требуемую в п. (2), мы доказали для точек из $D^\circ \cap B\bigl(t, b/(1+|y_t|)\bigr)$. Если круг $B\bigl(t, b/(1+|y_t|)\bigr)$ не лежит в области D°, то какая-то граничная точка $\tau_0 \in \partial D$ лежит в данном круге. Пусть ω — направление внешней нормали к границе области D в этой точке. Тогда $(\tau, s\omega) \leqslant 0$ для $s > 0$, $\tau \in D$, и

$$v(\omega s) = \sup_{\tau\in D}\bigl((t,\omega s) - \widetilde{v}(t)\bigr) \leqslant \sup_{t\in D}(-\widetilde{v}(t)) := v_0.$$

С другой стороны, для любого $\tau \in D^\circ \cap B\bigl(t, b/(1+|y_t|)\bigr)$ мы доказали оценку

$$\widetilde{v}(\tau) \leqslant \widetilde{v}(t) + 2b;$$

поэтому, устремив τ из этого пересечения к τ_0, получим оценку снизу

$$v(\omega s) \geqslant (\tau, \omega s) - \widetilde{v}(\tau) \geqslant -\widetilde{v}(t) - 2b.$$

Из последних двух оценок следует ограниченность выпуклой на $(0; +\infty)$ функции $v(s\omega)$:

$$|v(\omega s)| \leqslant |v_0| + 2b.$$

Но из условия (2.1.1) вытекает оценка

$$\frac{d^2 v(s\omega)}{d^2 s} \geqslant \frac{b}{1+s^2}, \quad s > R,$$

которая не допускает ограниченности функции $v(s\omega)$. Утверждение 2.2 доказано. □

Теорема 2.1. *Пусть φ — выпуклая функция на ограниченной выпуклой области комплексной плоскости D, $0 \in D$.*

1. *Пусть S — линейный непрерывный функционал на пространстве $H(D,\varphi)$ и $\widehat{S}(\lambda)$ — преобразование Фурье—Лапласа этого функционала:*

$$\widehat{S}(\lambda) = S_z(e^{\lambda z}), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$|\widehat{S}(\lambda)| \leqslant \|S\|_{H^*(D,\varphi)} e^{\widetilde{\varphi}(\lambda)}, \quad \lambda \in D;$$

тем самым,

$$\|\widehat{S}\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})} \leqslant \|S\|_{H^*(D,\varphi)}.$$

2. *Если функция* $\widetilde{\varphi}$ *удовлетворяют условию* (2.1.1) *с постоянной* $b > 12$ *и целая функция* F *такова, что*
$$|F(\lambda)| \leqslant Ce^{\widetilde{\varphi}(\lambda)}(1+|\lambda|)^{-10}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$
то функция F *является преобразованием Фурье—Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала* S *на пространстве* $H(D,\varphi)$. *Причем*
$$\|S\|_{(H(D,\varphi))^*} \leqslant M\|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})},$$
где $\widetilde{\varphi}_a(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda) - a\ln(1+|\lambda|)$, *и константа* M *зависит только от постоянной* b *в* (2.1.1).

Доказательство теоремы 2.1. Первое утверждение теоремы очевидно.

Для доказательства второго утверждения нам потребуются две леммы.

Лемма 2.1. *Пусть* $\varphi(x_1+ix_2)$ — *выпуклая функция в ограниченной выпуклой области* D, *а функция* $\widetilde{\varphi}(y_1+iy_2)$ *удовлетворяет условию* (2.1.1) *с постоянной* $b > 12$. *Тогда для любой функции* $f \in H(D,\varphi)$ *верна оценка*
$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant C_s\|f\|_{H(D,\varphi)}K_s(\varphi,z), \quad z \in D, \quad s \in \{1,2,3\},$$
где постоянная C_s *зависит только от постоянной* b. *В частности,*
$$\left|f^{(s)}(z)\right|\frac{1}{K_{s+1}(\varphi,z)} \to 0, \quad \operatorname{dist}(z,\partial D) \to 0.$$

Доказательство леммы 2.1. Для точки $z \in D$ через λ_z обозначим точку достижения супремума
$$\sup_{\lambda}\bigl(\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda)\bigr).$$
Пусть $r = r_z = b/(1+|\lambda_z|)$. Из формулы Коши следует
$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant \frac{(s-1)!}{r^s}\sup_{w\in B(z,r)}|f(w)| \leqslant \frac{(s-1)!}{r^s}e^{\varphi(z)}\sup_{w\in B(z,r)}|f(w)|e^{-\varphi(w)}\sup_{w\in B(z,r)}e^{\varphi(w)-\varphi(z)}.$$
В силу п. (2) утверждения 2.2 отсюда вытекает
$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant \frac{(s-1)!}{b^s}e^{2b}\|f\|_{H(D,\varphi)}(1+|\lambda_z|)^s e^{\varphi(z)}.$$
Согласно п. (3) утверждения 2.1 имеем
$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant \frac{(s-1)!}{b^s}e^{2b+d}\|f\|_{H(D,\varphi)}(1+|\lambda_z|)^s K_0(\varphi,z),$$
где $d = \max\limits_{z\in\overline{D}}|z|$. Пункт (1) утверждения 2.2 позволяет локализовать интеграл, определяющий функцию K_0:
$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant \frac{(s-1)!}{b^s}e^{2b+d}\|f\|_{H(D,\varphi)}M_0(1+|\lambda_z|)^s\int\limits_{B\left(\lambda_z,(1+|\lambda_z|)/2\right)}e^{\operatorname{Re}\lambda z-\widetilde{\varphi}(\lambda)}dm(\lambda) \leqslant C_s\|f\|_{H(D,\varphi)}K_s(z),$$
где
$$C_s = \frac{(s-1)!}{b^s}e^{2b+d}M_0\max\left\{\frac{(1+|\lambda_z|)^s}{(1+|\lambda|)^s} : \lambda \in B\left(\lambda_z,\frac{1}{2}(1+|\lambda_z|)\right)\right\}.$$
Лемма 2.1 доказана. □

Лемма 2.2. *Пусть* φ — *выпуклая функция на ограниченной выпуклой области* D, *функция* $\widetilde{\varphi}$ *удовлетворяет условию* (2.1.1) *с постоянной* $b > 12$. *Тогда для любой функции* $g(z)$, *аналитической в области* D *и удовлетворяющей условию*
$$\sup_{\zeta\in D}\frac{|g(\zeta)|}{K_0(\varphi,\zeta)} < \infty,$$

функция $G(z) = \dfrac{g(z)}{K_0(\varphi_3, z)}$, *где*

$$\varphi_a(\zeta) = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \big(\operatorname{Re}\lambda\zeta - \widetilde{\varphi}_a(\lambda)\big),$$

продолженная нулем на $\mathbb{C}\setminus D$, *принадлежит* $W_2^3(\mathbb{C})$. *При этом*

$$\|G(z)\|_{W_2^3(\mathbb{C})} \leqslant M_1 \sup_{\zeta\in D} \frac{|g(\zeta)|}{K_0(\varphi,\zeta)} \leqslant M\|g\|_{H(D,\varphi)}.$$

Доказательство леммы 2.2. Очевидно,

$$|G(z)| \leqslant \left(\sup_{\zeta\in D} \frac{|g(\zeta)|}{K_0(\varphi,\zeta)}\right) \frac{K_0(\varphi,z)}{K_0(\varphi_3,z)}.$$

Поскольку по п. 1 утверждения 2.2, примененному к $K_0(\varphi, z)$,

$$K_0(\varphi_3, z) = \int\limits_{\mathbb{C}^2} e^{\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda)}(1+|\lambda|)^3 dm(\lambda) \geqslant \frac{C^3}{M_0}(1+|\lambda_z|)^3 K_0(\varphi,z),$$

где λ_z — точка достижения $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{C}}\big(\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda)\big)$ и

$$C = \min_{|\lambda-\lambda_z|\leqslant(1+|\lambda_z|)/2} \frac{1+|\lambda|}{1+|\lambda_z|},$$

то

$$|G(z)| \prec (1+|\lambda_z|)^{-3} \to 0$$

при $\operatorname{dist}(z,\partial D)\to 0$; тем самым, $G(z)\in C(\mathbb{C})$ и

$$\|G\|_{C(\mathbb{C})} \leqslant M_3 \left(\sup_{\zeta\in D} \frac{|g(\zeta)|}{K_0(\varphi_3,\zeta)}\right).$$

Также по утверждению 2.2 имеем

$$\left|\frac{\partial G(z)}{\partial \overline{z}}\right| = \left| g(z)\frac{\partial K_0(\varphi_3,z)}{\partial\overline{z}} \frac{1}{K_0^2(\varphi_3,z)}\right| \leqslant \sup_{z\in D}\frac{|g(z)|}{K_0(\varphi,z)} \frac{K_0(\varphi,z)K_1(\varphi_3,z)}{K_0^2(\varphi_3,z)} \prec$$
$$\prec \|g\|_{H(D,\varphi)} \frac{K_4(\varphi,z)K_0(\varphi,z)}{K_3^2(\varphi,z)} \prec (1+|\lambda_z|)^{-2} \to 0.$$

Дополнительно, учитывая лемму 2.1, получим при $\operatorname{dist}(z,\partial D)\to 0$

$$\left|\frac{\partial G(z)}{\partial z}\right| = \left| g(z)\frac{\partial K_0(\varphi_3,z)}{\partial z} \frac{1}{K_0^2(\varphi_3,z)}\right| + \left| g'(z)\frac{1}{K_0(\varphi_3,z)}\right| \prec$$
$$\prec \|g\|_{H(D,\varphi)} \left| \frac{K_0(\varphi,z)K_1(\varphi_3,z)}{K_0^2(\varphi_3,z)} + \frac{K_1(\varphi,z)}{K_0(\varphi_3,z)}\right| \prec$$
$$\prec \|g\|_{H(D,\varphi)} \left(\frac{K_4(\varphi,z)K_0(\varphi,z)}{K_3^2(\varphi,z)} + \frac{K_1(\varphi,z)}{K_3(\varphi,z)}\right) \prec \|g\|_{H(D,\varphi)}(1+|\lambda_z|)^{-2} \to 0.$$

Производные второго и третьего порядка оцениваются такими же прямыми вычислениями. Лемма 2.2 доказана. □

Докажем второй пункт теоремы 2.1.

По условию (2.1.1) и соотношению (2.1.4) для всех a, $|a|\leqslant b/4$, функции $\widetilde{\varphi}_a(\lambda)$ выпуклые. Возьмем произвольную функцию $F\in H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_8)$, очевидно

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |F(\lambda)|^2 e^{-2\widetilde{\varphi}_8(\lambda)} dm(\lambda) < \pi\|F\|^2_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})} < \infty.$$

В пространстве $\mathbb{C}^2$ рассмотрим одномерное подпространство

$$\Sigma = \{w = (w_1, w_2): \ w_1 = i\lambda, \ w_2 = -\lambda, \ \lambda \in \mathbb{C}\}$$

и функцию на этом подпространстве

$$g(w) = F(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad w \in \Sigma.$$

Выпуклые функции

$$\Phi_a(w) = \sup_{z \in D} \Big(b\big(\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} w_1 + \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w_2\big) - \varphi_a(z) \Big), \quad w \in \mathbb{C}^2,$$

обладают свойствами

$$\Phi_a(w) = \Phi_a(i \operatorname{Im} w), \quad w \in \mathbb{C}^2, \tag{2.1.5}$$

$$\Phi_a(w) = \widetilde{\varphi}_a(\lambda), \quad w \in \Sigma, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\Phi_a(iy) = \widetilde{\varphi}_a(y_1 - iy_2), \quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.1.6}$$

Из утверждения 2.1 и соотношений (2.1.5), (2.1.6) следует, что выполняется условие Липшица

$$\big|\Phi_a(w') - \Phi_a(w'')\big| \leqslant \sup_{z \in D} |z| |w' - w''|, \quad w', w'' \in \mathbb{C}^2. \tag{2.1.7}$$

Применим [23, теорема 15.1.3, с. 317]. Существует целая функция $f(w)$ на $\mathbb{C}^2$, которая совпадает с g на подпространстве Σ и удовлетворяет оценке

$$\int\limits_{\mathbb{C}^2} |f(w)|^2 e^{-2\Phi_8(w)} (1 + |w|^2)^{-3} dm(w) \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \int\limits_{\Sigma} |g(w)|^2 e^{-2\widetilde{\varphi}_8(w)} dm(w) \leqslant C_0 \pi \|F\|_{H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})}, \tag{2.1.8}$$

где $C_0 = 6\pi \exp\Big(\max\limits_{z \in \overline{D}} |z|\Big)$. Функция $|f(w)|^2$ субгармонична в $\mathbb{C}^2$, поэтому для любого $w \in \mathbb{C}^2$ имеем

$$|f(w)|^2 \leqslant \frac{1}{V} \int\limits_{B} |f(w + \zeta)|^2 dm(\zeta) \leqslant \frac{1}{V} \int\limits_{Q} |f(w + \zeta)|^2 dm(\zeta),$$

где B — единичный шар в $\mathbb{C}^2$ и V — объем этого шара, Q — единичный куб $\big\{|\operatorname{Re} \zeta_j|, \ |\operatorname{Im} \zeta_j| \leqslant 1, \ j = 1, 2\big\}$. Учитывая свойство (2.1.7), получим

$$|f(w)|^2 e^{-2\Phi_8(w)} (1 + |w|^2)^{-3} \leqslant C \int\limits_{Q} |f(w + \zeta)|^2 e^{-2\Phi_8(w+\zeta)} (1 + |w + \zeta|^2)^{-3} dm(\zeta), \tag{2.1.9}$$

где

$$C = \frac{C_0}{V} \sup \left\{ \left(\frac{1 + |w + \zeta|^2}{1 + |w|^2} \right)^3 e^{2(\Phi_{10}(w+\zeta) - \Phi_{10}(w))}, \quad w \in \mathbb{C}^2, \quad \zeta \in Q \right\}.$$

В частности, для $x \in \mathbb{R}^2$

$$|f(x)|^2 e^{-2\Phi_8(x)} (1 + |x|^2)^{-3} \leqslant C \int\limits_{Q} |f(x + \zeta)|^2 e^{-2\Phi_8(x+\zeta)} (1 + |x + \zeta|^2)^{-3} dm(\zeta).$$

Проинтегрировав полученное неравенство по $x \in \mathbb{R}^2$ и учитывая свойство (2.1.5) и оценку (2.1.8), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 (1 + |x|^2)^{-3} dx \leqslant 2C e^{2\widetilde{\varphi}_8(0)} \int\limits_{\mathbb{C}^2} |f(w)|^2 e^{-2\Phi_8(w)} (1 + |w|^2)^{-3} dm(w) \leqslant C_1 \|F\|_{H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})},$$

где $C_1 = 2e^{2\widetilde{\varphi}_8(0)} C$.

По терминологии [22, с. 288] функция f является элементом пространства L^2_{-3}. Другими словами, f является преобразованием Фурье некоторого линейного непрерывного функционала S_0 на пространстве Соболева W^2_3, состоящего из функций $u(x)$ на $\mathbb{R}^2$, для которых

$$\frac{\partial^{(k)} u}{\partial^{(j)} x_1 \partial^{(k-j)} x_2} \in L_2, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, \ldots, k.$$

В этом пространстве рассматривается норма

$$\|u\|^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant 3} c_\alpha \|D^\alpha\|^2,$$

где c_α — полиномиальные коэффициенты и $\alpha = (j, i)$ — мультииндекс. Из оценок (2.1.8), (2.1.9) и равенства (2.1.5) получим равномерную оценку

$$|f(w)|^2 \prec (1 + |w|^2)^3 e^{2\Phi_8(w)} = (1 + |w|^2)^3 e^{2\Phi_8(i \operatorname{Im} w)}.$$

Если $H(y) = \sup\limits_{x_1 + ix_2 \in D} (y_1 x_1 + y_2 x_2)$ — опорная функция области D (в смысле $\mathbb{R}^2$), то согласно п. (2) утверждения 2.1 и по соотношениям (2.1.5), (2.1.6)

$$|f(w)|^2 \prec (1 + |w|^2)^3 e^{2\Phi_8(w)} = (1 + |w|^2)^3 e^{2\widetilde{\varphi}_8(y_1 - iy_2)} \prec (1 + |w|^2)^3 e^{2H(\operatorname{Im} w)}.$$

По теореме Пэли—Винера—Шварца (см. [22, с. 220]) из этой оценки следует, что носитель распределения S_0 лежит в $\overline{D}$. Из этого, в частности, следует, что функционал S_0 определен на $W^2_3(G)$ для любой области $G \supset \overline{D}$. Кроме того, для любого $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$S_y(u) = S_0(u(t) e^{(t,y)}), \quad u \in W^3_2,$$

будет линейным непрерывным функционалом на W^3_2. При этом имеем

$$S_y(e^{-i(t,x)}) = S_0(e^{-i(t,x+iy)}) = f(x + iy), \quad (x + iy) \in \mathbb{C}^2,$$

и по формуле Парсеваля

$$\|S_y\|^2_{W^3_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |f(x + iy)|^2 (1 + |x|^2)^{-3} dx.$$

Разделим это равенство на $(1 + |y|^2)^3 e^{2\Phi_6(iy)}$ и проинтегрируем по $y \in \mathbb{R}^2$. Учитывая неравенство (2.1.8), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \|S_y\|^2 e^{-2\Phi_8(iy)} (1 + |y|^2)^{-3} dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |f(x + iy)|^2 e^{-2\Phi_6(iy)} (1 + |x|^2)^{-3} (1 + |y|^2)^{-3}\, dy\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{C}^2} |f(w)|^2 e^{-2\Phi_8(w)} (1 + |w|^2)^{-3} dm(w) \leqslant C_0 \pi \|F\|_{H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})}.$$

Отсюда по неравенству Коши—Буняковского имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \|S_y\| e^{-\Phi_3(iy)} dy = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \|S_y\| e^{-\Phi_8(iy)} (1 + |y|)^{-5} dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \|S_y\|^2 e^{-2\Phi_8(iy)} (1 + |y|^2)^{-3} dy \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} (1 + |y|^2)^{-2} dy \right)^{1/2} \leqslant C_0 \pi \|F\|_{H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})}. \quad (2.1.10)$$

По лемме 2.2 для любой функции g, аналитической в области D и удовлетворяющей условию

$$\sup_{z \in D} \frac{|g(z)|}{K_0(\varphi, z)} < \infty,$$

функция $\dfrac{|g(z)|}{K_0(\varphi_3,z)}$, продолженная нулем на $\mathbb{C}\setminus D$, принадлежит $W_2^3(\mathbb{C})$ и, в частности, на этой функции определено значение функционала S_y. Пусть

$$S(g)=\int\limits_{\mathbb{R}^2} S_y\left(\frac{g(z)}{K_0(\varphi_3,z)}\right)e^{-\Phi_3(iy)}dy.$$

Из (2.1.10) следует оценка

$$|S(g)|\leqslant\left\|\frac{g(z)}{K_0(\varphi_3,z)}\right\|_{W_2^3}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\|S_y\|e^{-\Phi_3(iy)}dy\leqslant C_0\pi\left\|\frac{g(z)}{K_0(\varphi_3,z)}\right\|_{W_2^3}\|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})}.$$

По лемме 2.2

$$\left\|\frac{g(z)}{K_0(\varphi_3,z)}\right\|_{W_2^3}\leqslant C(D)\left\|\frac{g(z)}{K_0(\varphi_3,z)}\right\|_{C^3(\mathbb{C})}\leqslant C_1(D)\|g\|_{H(D,\varphi)},$$

где $C(D)$, $C_1(D)$ — постоянные, зависящие только от размеров области D. Таким образом,

$$|S(g)|\leqslant C_1(D)\|g\|_{H(D,\varphi)}\|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})}$$

и S — линейный непрерывный функционал на $H(D,\varphi)$, и

$$\|S\|\leqslant C_1(D)\|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})}.$$

Докажем, что преобразование Фурье—Лапласа этого функционала равна функции F. В начале будем предполагать, что носитель $K=\operatorname{supp}S$ функционала S — компакт в D. Поскольку мы считаем, что $0\in D$, то найдется $q\in(0;1)$, такое что выпуклая оболочка носителя K лежит в области qD. Возьмем $q'\in(q;1)$. По равенству (2.1.6) и п. (2) утверждения 2.1 имеем для $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$\Phi_3(iy)=\widetilde{\varphi}_3(y_1-iy_2)\geqslant q'H_D(y_1-iy_2)-C'_{q'}=q'H(y)-C'_{q'},$$

где H — опорная функция области D в вещественном смысле. Поэтому

$$\sup_{t\in K}((y,t)-\Phi_3(iy))\leqslant\sup_{t\in qD}(y,t)-q'H(y)+C'_{q'}=(q-q')H(y)+C'_{q'}.$$

Таким образом, при $s\in[0;3]$ имеет место равномерная по $t\in q\overline{D}$ сходимость интегралов

$$\int\limits_{|y|\leqslant R}e^{(t,y)-\Phi_3(iy)}|y|^s\,dy\to\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{(t,y)-\Phi_3(iy)}|y|^s\,dy.$$

Это значит, что имеет место сходимость в норме пространства $C^3(q\overline{D})$ функций

$$A_R(t)=\int\limits_{|y|\leqslant R}e^{(t,y)-\Phi_3(iy)}dy\to\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{(t,y)-\Phi_3(iy)}dy,\quad R\to\infty.$$

Положим $z=t_1+it_2$, $\lambda=y_1-iy_2$; тогда последнее соотношение с учетом (2.1.6) имеет вид

$$A_R(t)\to\int e^{\operatorname{Re}\lambda z-\widetilde{\varphi}_3(\lambda)}dm(\lambda)=K_0(\varphi_3,z),\quad R\to\infty.$$

Таким образом, для любой функции $g\in H(D,\varphi)$ имеет место сходимость в норме пространства W_3^2

$$\frac{g(z)}{K_0(\varphi_3,z)}A_R(t)\to g(z),\quad R\to\infty$$

(здесь $z = t_1 + it_2$). Следовательно,

$$S(g) = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|y|\leqslant R} S_y\left(\frac{g(z)}{K_0(\varphi_3, z)}\right) e^{-\Phi_3(iy)} dy = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|y|\leqslant R} S_0\left(\frac{g(z)e^{(t,y)-\Phi_3(iy))}}{K_0(\varphi_3, z)}\right) dy =$$
$$= \lim_{R\to\infty} S_0\left(\frac{g(z)}{K_0(\varphi_3, z)} A_R(t)\right) = S_0\left(\lim_{R\to\infty} \frac{g(z)}{K_0(\varphi_3, z)} A_R(t)\right) = S_0(g(z)).$$

В частности,

$$S(e^{\lambda z}) = S_0(e^{\lambda z}).$$

Целая функция $S_0(e^{-i(t,w)})$ по построению совпадает с целой функцией $f(w)$ на мнимом подпространстве, а $S_0(e^{\lambda z})$ — сужение этой функции на подпространство Σ. Значит, $S(e^{\lambda z}) = F(\lambda)$.

Пусть теперь F — произвольная функция из $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})$, S — функционал на $H(D, \varphi)$, построенный выше. Если

$$\widetilde{\varphi}_{10}(\lambda_0) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \widetilde{\varphi}_{10}(\lambda),$$

то функция $\widetilde{\varphi}_{10}(\lambda_0 + \alpha(\lambda - \lambda_0))$ возрастающая по $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Для $\alpha \in (1/2; 1)$ положим $F_\alpha(\lambda) = F(\lambda_0 + \alpha(\lambda - \lambda_0))$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть $R_\varepsilon > 0$ таково, что

$$\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|\geqslant R_\varepsilon/2} |F(\lambda)|^2 e^{-2\widetilde{\varphi}_{10}(\lambda)} dm(\lambda) < \varepsilon.$$

Тогда

$$\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|\geqslant R_\varepsilon/2} |F_\alpha(\lambda)|^2 e^{-2\widetilde{\varphi}_{10}(\lambda)} dm(\lambda) =$$
$$= \frac{1}{\alpha^2} \int\limits_{|w-\lambda_0|\geqslant \alpha R_\varepsilon/2} |F(w)|^2 \exp\left(-2\widetilde{\varphi}_{10}\left(\lambda_0 + \frac{1}{\alpha}(w - \lambda_0)\right)\right) dm(w) \leqslant$$
$$\leqslant 4 \int\limits_{|w-\lambda_0|\geqslant R_\varepsilon} |F(w)|^2 e^{-2\widetilde{\varphi}_{10}(w)} dm(w) < 4\varepsilon.$$

Следовательно, интегралы, определяющие норму $\|F_\alpha\|$, сходятся равномерно по $\alpha \in (1/2; 1)$. Поскольку при $\alpha \to 1$ функции F_α равномерно на компактах стремятся к F, то $F_\alpha \to F$ при $\alpha \to 1$ в норме пространства $H_2(\widetilde{\varphi})$. Очевидно,

$$|F_\alpha(\lambda)| \prec e^{\alpha H_D(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

и по доказанному выше каждая функция F_α является преобразованием Фурье—Лапласа функционала S_α:

$$S_\alpha(e^{\lambda z}) = F_\alpha(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

и при этом

$$\|S - S_\alpha\| \leqslant C\|F - F_\alpha\|,$$

поэтому

$$S(e^{\lambda z}) = \lim_{\alpha\to 1} S_\alpha(e^{\lambda z}) = \lim_{\alpha\to 1} F_\alpha(\lambda) = F(\lambda).$$

Теорема 2.1 доказана. □

Теорема 2.2. *Пусть φ_n, $n \in \mathbb{N}$, — возрастающая последовательность выпуклых функций на ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$, содержащей точку $z = 0$. Предположим, что сопряженные по Юнгу функции $\widetilde{\varphi}_n$ удовлетворяют условию (2.1.1) с постоянной $b > 12$ и для некоторых постоянных c_n выполняются соотношения*

$$\widetilde{\varphi}_{n+1}(\lambda) + \ln(1 + |\lambda|) + c_n \leqslant \widetilde{\varphi}_n(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. *Преобразование Фурье—Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространством, сильно сопряженным к индуктивному пределу нормированных пространств $H(D, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и проективным пределом пространств $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n)$, $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Преобразование Фурье—Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространством, сильно сопряженным к проективному пределу нормированных пространств* $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *и индуктивным пределом пространств* $H(D, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство теоремы 2.2. Введем обозначения

$$\mathcal{H} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(D, \varphi_n), \quad \mathcal{P} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n).$$

Как известно (см. [21, предложение 5, с. 66]),

$$\mathcal{H}^* = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(D, \varphi_n)\right)^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H^*(D, \varphi_n),$$

и это алгебраическое равенство есть топологический изоморфизм, если на пространстве справа рассматривать топологию канонического проективного предела. Поэтому утверждение первого пункта теоремы вытекает из теоремы 2.1.

Утверждение второго пункта следует из первого. В самом деле, если S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{P}$, то S продолжается до линейного непрерывного функционала на одном из составляющих пространств $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n)$; тогда

$$|\widehat{S}(z)| \leqslant \|S\|\|e^{\lambda z}\| = \|S\| \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} e^{\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}_n(\lambda)} = \|S\| e^{\varphi_n(z)},$$

т.е. $\widehat{S} \in H(D, \varphi_n)$ и отображение $L : \mathcal{P}^* \to \mathcal{H}$ непрерывно. Инъективность этого отображения следует из полноты системы экспонент в пространстве $\mathcal{P}$. Докажем сюръективность. Для произвольной функции $f \in \mathcal{H}$ определим линейный функционал S_f на $\mathcal{P}$ по формуле

$$S_f(F) = L^{-1}(F)(f), \quad F \in \mathcal{P}.$$

Из непрерывности L^{-1} следует, что S_f — непрерывный функционал. Поскольку $L^{-1}(e^{\lambda z}) = \delta_z$ при фиксированном $z \in D$, то

$$\widehat{S}_f(w) = L^{-1}(e^{\lambda w})(f) = \delta_w(f) = f(w), \quad w \in D.$$

Теорема 2.2 доказана. □

Теорема 2.3. *Пусть* φ_n, $n \in \mathbb{N}$, — *убывающая последовательность выпуклых функций на ограниченной выпуклой области* $D \subset \mathbb{C}$, *содержащей точку* $z = 0$. *Предположим, что сопряженные по Юнгу функции* $\widetilde{\varphi}_n$ *удовлетворяют условию* (2.1.1) *с постоянной* $b > 12$ *и для некоторых постоянных* c_n *выполняются соотношения*

$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda) + \ln(1 + |\lambda|) + c_n \leqslant \widetilde{\varphi}_{n+1}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. *Преобразование Фурье—Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространством, сильно сопряженным к проективному пределу нормированных пространств* $H(D, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *и индуктивным пределом пространств* $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
2. *Преобразование Фурье—Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространством, сильно сопряженным к индуктивному пределу нормированных пространств* $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *и проективным пределом пространств* $H(D, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство теоремы 2.3. Согласно [21, предложение 6, с. 66]

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H(D, \varphi_n)\right)^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H^*(D, \varphi_n),$$

и это алгебраическое равенство есть топологический изоморфизм, если на пространстве справа рассматривать топологию канонического индуктивного предела. Поэтому утверждение теоремы снова вытекает из теоремы 2.1. Теорема 2.3 доказана. □

2.2. Преобразование Фурье—Лапласа функционалов на весовых нормированных подпространствах $A^\infty(D)$. Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z=0$, и пусть $\mathcal{M}=(M_n)_{n=0}^\infty$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел. Обозначим через $H(D,\mathcal{M})$ пространство типа классов Карлемана, состоящее из аналитических в D функций f, для которых

$$\|f\|=\sup_{n\geqslant 0}\sup_{z\in D}\frac{|f^{(n)}(z)|}{M_n}<\infty.$$

Тогда $H(D,\mathcal{M})$ — банахово пространство, в котором система $\{e^{\lambda z}\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ полна. Функция

$$T(r)=\sup_{n\geqslant 0}\frac{r^n}{M_n},\quad r\geqslant 0,$$

называется функцией следа последовательности $\mathcal{M}$. $H_D(\lambda)=\sup\limits_{z\in D}\operatorname{Re}\lambda z$ — опорная функция области D. Для $a\in\mathbb{R}$ обозначим

$$\psi_a(\lambda)=H_D(\lambda)+\ln T(|\lambda|)-a\ln(1+|\lambda|)).$$

Теорема 2.4. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку 0, $\mathcal{M}=(M_n)_{n=0}^\infty$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=0}^\infty\frac{M_k}{M_{k+1}}<\infty. \tag{2.2.1}$$

1. *Если S — линейный непрерывный функционал на $H(D,\mathcal{M})$ и $\widehat{S}(\lambda)$ — преобразование Фурье—Лапласа этого функционала:*
$$\widehat{S}(\lambda)=S_z(e^{\lambda z}),\quad \lambda\in\mathbb{C},$$
то $\widehat{S}\in H(\mathbb{C},\psi_0)$ и
$$\|\widehat{S}\|_{H(\mathbb{C},\psi_0)}\leqslant\|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})}.$$
2. *Существует такое $\alpha\in\mathbb{R}$, зависящее только от области D, что для любой целой функции $F\in H(\mathbb{C},\psi_\alpha)$ существует единственный линейный непрерывный функционал S на $H(D,\mathcal{M})$, для которого функция F является его преобразованием Фурье—Лапласа, и*
$$\|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})}\leqslant C\|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_\alpha)},$$
где константа $C>0$ зависит только от области D и последовательности $\mathcal{M}$.

Для доказательства теоремы 2.4 нам понадобятся несколько предварительных утверждений.

Для целой функции экспоненциального типа

$$F(\lambda)=\sum_{k=0}^\infty\frac{a_k}{k!}\lambda^k,\quad\lambda\in\mathbb{C},$$

через γ_F обозначим функцию, ассоциированную с ней по Борелю:

$$\gamma_F(z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{a_k}{z^{k+1}}.$$

Для $q\in(1/2;1)$, $a\in\mathbb{R}$ введем билинейную форму на $H(D,\mathcal{M})\times H(\mathbb{C},\psi_a)$:

$$l\mathcal{A}_q(f,F)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial(\frac{1}{q}D)}f(qz)\gamma_F(z)dz, \tag{2.2.2}$$

где $\frac{1}{q}D=\{\frac{z}{q},\ z\in D\}$.

Лемма 2.3. *Для целой функции F, имеющей вид $F = Gg$, где целые функции G, g при некотором $M > 0$ удовлетворяют оценкам*

$$|G(\lambda)| \leqslant M e^{H_D(\lambda) - 2\ln(1+|\lambda|)}, \quad |g(\lambda)| \leqslant M \frac{T(|\lambda|)}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

найдется такая константа $C > 0$, что имеет место оценка

$$|\mathcal{A}_q(f, F)| \leqslant CM^2 \|f\|, \quad f \in H(D, \mathcal{M}), \quad q \in (1/2; 1),$$

и существует предел $\lim\limits_{q \nearrow 1} \mathcal{A}_q(f, F)$.

Доказательство леммы 2.3. Функция γ_G будет непрерывной на множестве $\mathbb{C} \setminus D$ и, кроме того,

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{C} \setminus D} |\gamma_G(\zeta)| \leqslant C_1 M. \tag{2.2.3}$$

Если

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \lambda^n, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

то по формулам Коши благодаря логарифмической выпуклости последовательности $\mathcal{M}$ имеем

$$|g_n| \leqslant \inf_{r>0} \frac{1}{r^n} \max_{|\lambda|=r} |g(\lambda)| \leqslant M \inf_{r>0} \frac{T(r)}{r^{n+1}} = \frac{M}{M_{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.2.4}$$

В частности,

$$\gamma_F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n \gamma_G^{(n)}(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}.$$

Интегрированием по частям получим

$$\mathcal{A}_q(f, F) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\left(\frac{1}{q}D\right)} \gamma_G(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} g_n q^n f^{(n)}(q\zeta) d\zeta.$$

Функции $f_n(q, z) = g_n q^n f^{(n)}(qz)$ равномерно непрерывны на компакте $[1/2; 1] \times \overline{D}$, а ряд

$$f(q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n q^n f^{(n)}(qz)$$

в силу оценок (2.2.4) равномерно на этом компакте сходится, поэтому существует

$$f(1, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(1, z) = \sum_n g_n f^{(n)}(z),$$

причем, так как последовательность $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию (2.2.1), то

$$|f(q, z)| \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} \frac{|f^{(n)}(z)|}{M_n} \leqslant C_2 M \|f\|.$$

Таким образом, учитывая (2.2.3), получим существование предела $\lim\limits_{q \nearrow 1} \mathcal{A}_q(f, F)$, и

$$|\mathcal{A}_q(f, F)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\left(\frac{1}{q}D\right)} |\gamma_G(\zeta)| \cdot |f(q, \zeta)| \, |d\zeta| \leqslant CM^2 \|f\|.$$

Лемма 2.3 доказана. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть D — ограниченная выпуклая область, содержащая точку $z = 0$, и пусть неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию (2.2.1). Тогда существует такое неотрицательное число α, что для билинейных форм, определенных в (2.2.2), существует предел*

$$\mathcal{A}(f,F) = \lim_{q\nearrow 1} \mathcal{A}_q(f,F),$$

и форма $\mathcal{A}(f,F)$ непрерывна, т.е. для некоторой постоянной $C > 0$

$$|\mathcal{A}(f,F)| \leqslant C\|f\|\|F\|, \quad f \in H(D,\mathcal{M}), \quad F \in H(\mathbb{C},\psi_\alpha).$$

Доказательство леммы 2.5. Из теоремы 1.2 следует существование таких целых функций $L_0(\lambda)$ и $l_0(\lambda)$, что все нули функции $L_0 l_0$ простые, круги $B(\zeta,\delta(1+|\zeta|)^{-1}) = \{\lambda: \ |\lambda-\zeta| \leqslant (1+|\zeta|)^{-1}\}$, $\zeta \in N(L_0 l_0)$, при некотором $\delta > 0$ попарно не пересекаются (объединение этих кругов обозначим через $E(L_0 l_0)$)и для некоторых констант $a > 0$, $b > 0$ выполняются соотношения

$$H_D(\lambda) - a\ln(e+|\lambda|) \leqslant \ln|L_0(\lambda)| \leqslant H_D(\lambda), \qquad \lambda \notin E(L_0)(\delta), \tag{L_0I}$$

$$H_D(\zeta) - a\ln(e+|\zeta|) \leqslant \ln|L_0'(\zeta)| \leqslant H_D(\zeta), \qquad \zeta \in N(L_0), \tag{L_0II}$$

$$\ln T(|\lambda|) - b\ln(e+|\lambda|) \leqslant \ln|l_0(\lambda)| \leqslant \ln T(|\lambda|), \quad \lambda \notin E(l_0)(\delta), \tag{l_0I}$$

$$\ln T(|\zeta|) - b\ln(e+|\zeta|) \leqslant \ln|l_0'(\zeta)| \leqslant \ln T(|\zeta|), \quad \zeta \in N(l_0). \tag{l_0II}$$

Пусть ζ_n, $n \in \mathbb{N}$, — нули функции l_0 и

$$l_1(\lambda) = \frac{l_0(\lambda)}{(\lambda-\zeta_1)(\lambda-\zeta_2)(\lambda-\zeta_3)}.$$

Тогда в силу соотношений (l_0I), (l_0II) функция l_1 при некотором $c > 0$ удовлетворяет оценкам

$$\ln T(|\lambda|) - (b+3)\ln(e+|\lambda|) - c \leqslant \ln|l_1(\lambda)| \leqslant \ln T(|\lambda|) - 3\ln(e+|\lambda|) + c, \quad \lambda \notin E(l_0)(\delta), \tag{l_1I}$$

$$\ln T(|\zeta|) - (b+3)\ln(e+|\zeta|) - c \leqslant \ln|l_1'(\zeta)| \leqslant \ln T(|\zeta|) - 3\ln(e+|\zeta|) + c, \quad \zeta \in N(l_1). \tag{l_1II}$$

Целая функция $L = L_0 l_1$ удовлетворяет соответственно оценкам

$$H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|) - (a+b+3)\ln(e+|\lambda|) - c \leqslant \ln|L(\lambda)|, \quad \lambda \notin E(l_0 L_0)(\delta), \tag{LI}$$

$$H_D(\zeta) + \ln T(|\zeta|) - (a+b+3)\ln(e+|\zeta|) - c \leqslant \ln|L'(\zeta)|, \quad \zeta \in N(L). \tag{LII}$$

Исключительное множество $E(L)(\delta)$ состоит из непересекающихся кругов, поэтому можно найти такие замкнутые спрямляемые кривые Γ_m, $m \in \mathbb{N}$, что $|\Gamma_m| = O(\min_{z\in\Gamma_m}|z|) \to \infty$, $m \to \infty$, не пересекающиеся с $E(l_0 L_0)(\delta)$. Положим $\alpha = a+b+5$. Возьмем функцию $F \in H(\mathbb{C},\psi_\alpha)$. В силу оценки (LI) выполняется соотношение

$$\left|\frac{F(\lambda)}{L(\lambda)}\right| \leqslant c_1(e+|\lambda|)^{a+b+3-\alpha}, \quad \lambda \in \Gamma_m.$$

Отсюда по по выбору числа α

$$\left|\frac{F(\lambda)}{L(\lambda)}\right| \leqslant c_1\frac{1}{(e+|\lambda|)^2}, \quad \lambda \in \Gamma_m.$$

Значит,

$$\left|\int\limits_{\Gamma_m} \frac{F(\lambda)d\lambda}{(\lambda-z)L(\lambda)}\right| \to 0, \quad m \to \infty.$$

Тем самым, ряд Лагранжа функции F по функции L сходится к самой функции F:

$$F(\lambda) = \sum_{\zeta\in N(L)} \frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)(\lambda-\zeta)} L(\lambda). \tag{2.2.5}$$

Оценим $|F(\zeta)/L'(\zeta)|$ на основании соотношения (LII):

$$\left|\frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)}\right| \leqslant c_2\|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_\alpha)}(e+|\zeta|)^{a+b+3-\alpha}, \quad \zeta \in N(L).$$

Отсюда, учитывая выбор числа α, имеем

$$\left|\frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)}\right| \leqslant c_2 \frac{\|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_\alpha)}}{(1+|\zeta|)^2}, \quad \zeta \in N(L). \tag{2.2.6}$$

Функции $L(\lambda)/(\lambda-\zeta)$ удовлетворяют условиям леммы 2.3.

В самом деле, если $L_0(\zeta)=0$ и ζ', ζ'' — нули функции L_0, отличные от ζ, например, наименьшие по модулю, то положим

$$G(\lambda) = \frac{L_0(\lambda)}{(\lambda-\zeta)(\lambda-\zeta')(\lambda-\zeta'')}, \quad g(\lambda) = (\lambda-\zeta'')(\lambda-\zeta')l_1(\lambda).$$

Тогда согласно соотношениям (L_0I), (l_1I) имеем оценки

$$|G(\lambda)| \leqslant Me^{H_D(\lambda)-2\ln(1+|\lambda|)}, \quad |g(\lambda)| \leqslant M\frac{T(|\lambda|)}{1+|\lambda|}, \quad \lambda\in\mathbb{C},$$

причем с постоянной M, не зависящей от точки $\zeta \in N(L)$. Аналогично, если $l_1(\zeta)=0$, то положим

$$G(\lambda) = \frac{L_0(\lambda)}{(\lambda-\zeta')(\lambda-\zeta'')}, \quad g(\lambda) = \frac{(\lambda-\zeta'')(\lambda-\zeta')l_1(\lambda)}{(\lambda-\zeta)}.$$

Согласно утверждению этой леммы

$$\left|\mathcal{A}_q\left(f, \frac{L(\zeta)}{\lambda-\zeta}\right)\right| \leqslant CM^2\|f\|, \quad f\in H(D,\mathcal{M}), \quad q\in(1/2;1), \quad \zeta\in N(L).$$

Из представления (2.2.5) следует

$$\mathcal{A}_q(f,F) = \sum_{\zeta\in N(L)} \frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)}\mathcal{A}_q\left(f, \frac{L(\lambda)}{(\lambda-\zeta)}\right),$$

сходимость этого ряда получим из (2.2.6) и последней оценки:

$$|\mathcal{A}_q(f,F)| \leqslant \sum_{\zeta\in N(L)}\left|\frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)}\right|\left|\mathcal{A}_q\left(f,\frac{L(\lambda)}{(\lambda-\zeta)}\right)\right| \leqslant c_3M^2\|f\|\,\|F\|\sum_{\zeta\in N(L)}\frac{1}{(1+|\zeta|)^2},$$
$$f\in H(D,\mathcal{M}), \quad q\in(1/2;1), \quad F\in H(\mathbb{C},\psi_\alpha).$$

Переходя к пределу при $q\to 1$, получим утверждение леммы 2.4. □

Доказательство теоремы 2.4.

1. Пусть $S\in H^*(D,\mathcal{M})$, $f\in H(D,\mathcal{M})$. Тогда

$$|S(f)| \leqslant \|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})}\cdot\|f\|_{H(D,\mathcal{M})}.$$

Применив последнее неравенство к $f(z)=e^{\lambda z}$, получим

$$|\widehat{S}(\lambda)| \leqslant \|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})}\cdot e^{H_D(\lambda)}T(|\lambda|) = \|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})}\cdot e^{\psi_0(\lambda)}.$$

Следовательно,

$$\|\widehat{S}\|_{H(\mathbb{C},\psi_0)} \leqslant \|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})}.$$

2. Пусть $F\in H(\mathbb{C},\psi_\alpha)$, где α выбрано как в лемме 2.4. Тогда по этой лемме выражение $S(f)=\mathcal{A}(f,F)$ — линейный непрерывный функционал на $H(D,\mathcal{M})$, причем

$$\mathcal{A}(e^{\lambda z},F) = \lim_{q\nearrow 1}\mathcal{A}_q(e^{\lambda z},F) = \lim_{q\nearrow 1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial(\frac{1}{q}D)} e^{q\lambda z}\gamma_F(z)dz = F(\lambda).$$

Из леммы 2.4 также следует оценка нормы этого функционала. Теорема 2.4 доказана. □

Из теоремы 2.4 выведем теоремы об описании сопряженных для индуктивных и проективных пределов.

Теорема 2.5. *Пусть $\mathcal{M}^{(k)} = \{M_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, — неубывающие логарифмически выпуклые последовательности положительных чисел, удовлетворяющие условию*

$$M_n^{(k+1)} \geqslant M_{n+1}^{(k)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через

$$T_k(r) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{M_n^{(k)}}, \quad r \geqslant 0,$$

функцию следа последовательности $\mathcal{M}^{(k)}$, и пусть

$$\psi_k(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T_k(|\lambda|), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Предположим, что каждая из последовательностей удовлетворяет условию (2.2.1).

1. *Преобразование Фурье—Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространством, сильно сопряженным к индуктивному пределу пространств $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$, и проективным пределом пространств $H(\mathbb{C}, \psi_k)$, $k \in \mathbb{N}$.*
2. *Преобразование Фурье—Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространством, сильно сопряженным к проективному пределу пространств $H(\mathbb{C}, \psi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, и индуктивным пределом пространств $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство теоремы 2.5. Согласно [21, предложение 5, с. 66]

$$\left(\bigcup_k H(D, \mathcal{M}^{(k)}) \right)^* = \bigcap H^*(D, \mathcal{M}^{(k)}),$$

причем это алгебраическое равенство можно понимать как топологический изоморфизм. Тот факт, что преобразование Фурье—Лапласа непрерывно отображает сопряженное пространство в проективный предел пространств $H(\mathbb{C}, \psi_k)$, следует из первого пункта теоремы 2.4. Сюръективность преобразования Фурье—Лапласа как отображения из сопряженного пространства вытекает из второго пункта теоремы 2.4.

Вторую часть данной теоремы получим из леммы 2.4. Теорема 2.5 доказана. □

Теорема 2.6. *Пусть $\mathcal{M}^{(k)} = \{M_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, — неубывающие логарифмически выпуклые последовательности положительных чисел, удовлетворяющие условию*

$$M_n^{(k+1)} \leqslant M_{n-1}^{(k)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Предположим, что каждая из последовательностей удовлетворяет условию (2.2.1).

1. *Преобразование Фурье—Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространством, сильно сопряженным к проективному пределу пространств $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$, и индуктивным пределом пространств $H(\mathbb{C}, \psi_k)$, $k \in \mathbb{N}$.*
2. *Преобразование Фурье—Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространством, сильно сопряженным к индуктивному пределу пространств $H(\mathbb{C}, \psi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, и проективным пределом пространств $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$.*

Эта теорема, как и теорема 2.5, также следует из теоремы 2.4.

3. Инвариантная оболочка и инвариантное ядро нормированных пространств аналитических функций

Пусть E — некоторое нормированное подпространство в $H(D)$. Инвариантной оболочкой $\mathcal{E}_i$ этого пространства будем называть наименьшее линейное пространство, инвариантное относительно дифференцирования и содержащее пространство E. Инвариантным ядром $\mathcal{E}_p$ будем называть наибольшее линейное пространство, инвариантное относительно дифференцирования и содержащееся в пространстве E.

В данном разделе мы дадим весовое описание инвариантных оболочки и ядра для пространств $H(D, \varphi)$ и $H(D, \mathcal{M})$.

Сначала докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть $u(\lambda)$ — непрерывная субгармоническая функция на плоскости и*

$$\varlimsup_{|\lambda|\to\infty} \frac{u(\lambda)}{|\lambda|} < \infty.$$

Положим

$$u_n(\lambda) = u(\lambda) + n\ln(1+|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1. *Наименьший модуль над кольцом многочленов, содержащий пространство $H(\mathbb{C},u)$, совпадает с $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H(\mathbb{C},u_n)$. Если в этом объединении рассматривать топологию индуктивного предела, то оператор умножения на многочлен действует непрерывно в этом пространстве.*
2. *Наибольший модуль над кольцом многочленов, содержащийся в $H(\mathbb{C},u)$, совпадает с $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H(\mathbb{C},u_{-n})$. Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то оператор умножения на многочлен действует непрерывно в этом пространстве.*

Доказательство теоремы 3.1. Пусть X — некоторый модуль над кольцом многочленов, $H(\mathbb{C},u) \subset X$ и $F \in H(\mathbb{C},u_n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Если эта функция имеет n нулей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то функция

$$g(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_n)}$$

принадлежит $H(\mathbb{C},u) \subset X$, и, следовательно,

$$F(\lambda) = g(\lambda)(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_n)$$

принадлежит X. В противном случае $F(\lambda) \equiv P(\lambda)e^{\lambda_0\lambda}$, где P — многочлен степени $k < n$, $m = n-k > 0$. Следовательно, $e^{\lambda_0\lambda} \in H(\mathbb{C},u_m)$. Возьмем произвольную функцию $f \in H(\mathbb{C},u)$. Если функция $e^{\lambda_0\lambda} - f(\lambda)$ имеет m нулей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, то функция

$$g(\lambda) = \frac{e^{\lambda_0\lambda} - f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_m)}$$

принадлежит $H(\mathbb{C},u) \subset X$; значит, $e^{\lambda_0\lambda} = f(\lambda) + g(\lambda)(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_m)$ принадлежит X, так что и $F(\lambda) \equiv P(\lambda)e^{\lambda_0\lambda}$ принадлежит X. Если же нулей функции $e^{\lambda_0\lambda} - f(\lambda)$ меньше m, то $e^{\lambda_0\lambda} - f(\lambda) = P_1e^{\lambda_1\lambda}$, где P_1 — некоторый многочлен степени меньше m. Повторяя рассуждения с функцией $2f$, получим

$$f(\lambda) = e^{\lambda_0\lambda} - P_1e^{\lambda_1\lambda}, \quad 2f(\lambda) = e^{\lambda_0\lambda} - P_2e^{\lambda_2\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где P_2 — некоторый многочлен степени меньше m. Тогда

$$e^{\lambda_0\lambda} - 2P_1(\lambda)e^{\lambda_1\lambda} + P_2(\lambda)e^{\lambda_2\lambda} \equiv 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Система квазиполиномов $e^{\lambda_0\lambda}$, $P_1(\lambda)e^{\lambda_1\lambda}$, $P_2(\lambda)e^{\lambda_2\lambda}$ линейно независима, если среди показателей λ_0, λ_1, λ_2 есть хотя бы два различных. Таким образом, $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ и

$$H(\mathbb{C},u) = \left\{e^{\lambda_0\lambda}P(\lambda),\ \deg P < m\right\}.$$

Отсюда

$$u(\lambda) \geqslant \operatorname{Re}\lambda_0\lambda + (m-1)\ln(1+|\lambda|)$$

и $e^{\lambda_0\lambda} \in H(\mathbb{C},u)$, поэтому $F(\lambda) \equiv P(\lambda)e^{\lambda_0\lambda}$ принадлежит X. Первое утверждение леммы доказано.

Пусть $Y \subset H(\mathbb{C},u)$ — модуль над кольцом многочленов и $F \in Y$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $\lambda^nF(\lambda) \in Y \subset H(\mathbb{C},u)$; значит,

$$|\lambda|^n|F(\lambda)| \leqslant C_ne^{u(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда $F \in \bigcap\limits_n H(\mathbb{C},u_{-n})$. Теорема 3.1 доказана. □

Теорема 3.2. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$. Для выпуклой в D функции φ и $a \in \mathbb{R}$ положим*

$$\widetilde{\varphi}_a(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda) - a\ln(1+|\lambda|), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$
$$\varphi_a(z) = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \big(\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}_a(\lambda)\big), \quad z \in D.$$

Предположим, что для некоторых $b_n > 12$ выполняются условия

$$l\sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_n(y)}{\partial y_j \partial y_k} a_j a_k \geqslant \frac{b_n}{1+|y|^2}|a|^2, \quad a, y \in \mathbb{R}^2, \quad |y| \geqslant R, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

1. *Инвариантная оболочка $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ пространства $H(D,\varphi)$ совпадает с $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H(D,\varphi_n)$. Если в этом объединении рассматривать топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*
2. *Инвариантное ядро $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ пространства $H(D,\varphi)$ совпадает с $\bigcap\limits_{-n\in\mathbb{N}} H(D,\varphi_n)$. Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

Доказательство теоремы 3.2. Для $m \in \mathbb{N}$ определим оператор

$$A_m(F) = \frac{1}{\lambda^m}\left(F(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}\lambda^k\right), \quad F \in H(\mathbb{C}).$$

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3.1. *Пусть $u(\lambda)$ — такая субгармоническая функция на плоскости, что любой многочлен принадлежит пространству $H(\mathbb{C},u)$, и*

$$u_n(\lambda) = u(\lambda) + n\ln(1+|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оператор A_m непрерывно действует из пространства $H(\mathbb{C},u_n)$ в пространство $H(\mathbb{C},u_{n-m})$.

Доказательство леммы 3.1. Очевидно, что точечные функционалы $\delta_\lambda : F \to F(\lambda)$ являются линейными и непрерывными на каждом пространстве $H(\mathbb{C},u_k)$ с оценкой нормы

$$\|\delta_\lambda\|_{H^*(\mathbb{C},u_k)} \leqslant e^{u_k(\lambda)}.$$

По формуле Коши для $|\lambda| \leqslant 1$, $s \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ имеем

$$\left|\frac{F^{(s)}(\lambda)}{s!}\right| \leqslant 2\max_{|w|\leqslant 2}|F(w)| \leqslant 2\max_{|w|\leqslant 2}\|\delta_w\|_{H^*(\mathbb{C},u_k)}\|F\|_{H(\mathbb{C},u_k)} \leqslant$$
$$\leqslant 2\exp(\max_{|w|\leqslant 2}u_k(w))\|F\|_{H(\mathbb{C},u_k)} := 2\sigma_k\|F\|_{H(\mathbb{C},u_k)}. \tag{3.2}$$

Значит, для функции $F_m = A_m(F)$ при $|\lambda| = 1$ верна оценка

$$\big|F_m(\lambda)\big| \leqslant \max_{|w|\leqslant 1}|F(w)| + \sum_{s=0}^{m-1}\frac{|F^{(s)}(0)|}{s!} \leqslant 2(m+1)\sigma_k\|F\|_{H(\mathbb{C},u_k)},$$

которая по принципу максимума продолжается на единичный круг; следовательно,

$$l\sup_{|\lambda|\leqslant 1}|F_m(\lambda)|e^{-u_{n-m}(\lambda)} \leqslant \sup_{|\lambda|\leqslant 1}e^{-u_{n-m}(\lambda)}\cdot 2(m+1)\sigma_n\|F\|_{H(\mathbb{C},u_n)}. \tag{3.3}$$

Для $|\lambda| \geqslant 1$ из (3.2) следует (при $k = n$)

$$|F_m(\lambda)| \leqslant \frac{2^m}{(1+|\lambda|)^m}\Big(|F(\lambda)| + 2m\sigma_n\|F\|_{H(\mathbb{C},u_n)}|\lambda|^{m-1}\Big).$$

Поэтому

$$\sup_{|\lambda|\geqslant 1}|F_m(\lambda)|e^{-u_{n-m}(\lambda)}\leqslant$$
$$\leqslant 2^m\sup_{|\lambda|\geqslant 1}|F(\lambda)|e^{-u_n(\lambda)}+2^{m+1}m\sigma_n\|F\|_{H(\mathbb{C},u_n)}\sup_{|\lambda|\geqslant 1}|\lambda|^{m-1}e^{-u_n(\lambda)}\leqslant$$
$$\leqslant 2^m\left(1+2m\sigma_n\|\lambda^{m-1}\|_{H(\mathbb{C},u_n)}\right)\|F\|_{H(\mathbb{C},u_n)}.$$

Отсюда и из (3.3) следует непрерывность оператора

$$A_m : H(\mathbb{C},u_n)\to H(\mathbb{C},u_{n-m}).$$

Лемма 3.1 доказана. □

Система $\{e^{\lambda z}\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ полна в пространстве $H(D,\varphi)$; следовательно, преобразование Фурье—Лапласа, которое каждому функционалу $S\in H^*(D,\varphi)$ ставит в соответствие функцию $\widehat{S}(\lambda)=S(e^{\lambda z})$, инъективно отображает $H^*(D,\varphi)$ в пространство целых функций. Образ этого отображения обозначим через $\widehat{H}(D,\varphi)$ и введем в нем наведенную структуру нормированного пространства:

$$\|\widehat{S}\|_{\widehat{H}(D,\varphi)}=\|S\|_{H^*(D,\varphi)}.$$

По теореме 2.1 любая функция $F\in H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})$ является преобразованием Фурье—Лапласа некоторого функционала $S\in H^*(D,\varphi)$ и

$$\|S\|_{H^*(D,\varphi)}\leqslant M\|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})}.$$

Следовательно, пространство $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})$ непрерывно вложено в пространство $\widehat{H}(D,\varphi)$. Из леммы 3.1 следует, что оператор A_m непрерывно действует из пространства $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10-m})$ в пространство $\widehat{H}(D,\varphi)$.

1. Докажем первый пункт теоремы 3.2.

1а. Докажем, что любое инвариантное пространство $Y\supset H(D,\varphi)$ содержит и пространство $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}H(D,\varphi_n)$. Пусть $f\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}H(D,\varphi_n)$. Тогда для некоторого $n\in\mathbb{N}$ имеем $f\in H(D,\varphi_n)$. Через $\widehat{H}(D,\varphi_n)$ обозначим пространство преобразований Фурье—Лапласа с наведенной структурой гильбертового пространства. По свойствам преобразования Фурье—Лапласа $f(z)=\widehat{S}(z)$ для некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $\widehat{H}(D,\varphi_n)$. Вложение

$$H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10+n})\subset\widehat{H}(D,\varphi_n)$$

непрерывно. Оператор A_{10+n} непрерывно действует из пространства $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})$ в пространство $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10+n})$. Поэтому функционал

$$S_1(F)=S(A_{10+n}(F)),\quad F\in H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}),$$

является линейным и непрерывным функционалом на $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})$. Если $g(z):=S_1(e^{\lambda z})$, то

$$|g(z)|\leqslant\|S_1\|_{H^*(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})}\|e^{\lambda z}\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})}=\|S_1\|_{H^*(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})}e^{\varphi(z)},\quad z\in D,$$

т.е. $g\in H(D,\varphi)\subset Y$. Поскольку

$$g^{(10+n)}(z)=\frac{\partial^{10+n}}{\partial z^{10+n}}S\left(\frac{1}{\lambda^{10+n}}\left(e^{\lambda z}-\sum_{s=0}^{n+9}\frac{z^s}{s!}\lambda^s\right)\right)=S(e^{\lambda z})=f(z),$$

то $f\in Y$. Значит, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}H(D,\varphi_n)\subset Y$.

1b. Докажем, что пространство $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$ инвариантно относительно дифференцирования. Пусть $f \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$. По теореме 2.2 (п. 2) функция f является преобразованием Фурье—Лапласа некоторого функционала S на проективном пределе пространств $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_n)$. В силу непрерывности оператора умножения на λ на этом проективном пределе функционал

$$S_1(F) = S(\lambda^n F), \quad F \in \bigcap_n H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_n),$$

будет линейным и непрерывным. При этом $\widehat{S}_1(z) = f^{(n)}(z)$. Снова по теореме 2.2

$$f^{(n)} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n).$$

2. Докажем второй пункт теоремы 3.2.

2a. Пусть $X \subset H(D,\varphi)$ — пространство, инвариантное относительно дифференцирования и $f \in X$. Тогда $f^{(m)} \in X \subset H(D,\varphi)$ для любого $m \in \mathbb{N}$. По свойствам преобразования Фурье—Лапласа $f^{(m)}(z) = \widehat{S}(z)$ для некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $\widehat{H}(D,\varphi)$. Пусть

$$S_1(F) = S(A_m(F)) = A^*(S)(F), \quad F \in H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10-m}),$$

— линейный непрерывный функционал на $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10-m})$, являющийся образом функционала S при сопряженном операторе A^*_m. Положим $g(z) = \widehat{S}_1(z) = S_1(e^{\lambda z})$. Тогда

$$g^{(m)}(z) = \frac{\partial^m}{\partial z^m} S\left(\frac{1}{\lambda^m}\left(e^{\lambda z} - \sum_{s=0}^{m-1}\frac{z^s}{s!}\lambda^s\right)\right) = S(e^{\lambda z}) = f^{(m)}(z).$$

Следовательно,

$$f(z) = g(z) + p(z), \quad z \in D,$$

для некоторого многочлена $p(z)$ степени не выше $m-1$. По определению для всех $z \in D$

$$|g(z)| = |\widehat{S}_1(z)| \leqslant \|S_1\|_{H^*(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10-m})}\|e^{\lambda z}\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10-m})} = \|S_1\|_{H^*(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10-m})} e^{\varphi_{10-m}(z)}.$$

Это значит, что $g \in H(D,\varphi_{10-m})$ при любом m. Так как многочлены лежат во всех пространствах $H(D,\varphi_k)$, то $f \in H(D,\varphi_{10-m})$ при любом m и $f \in \bigcap\limits_{-n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$.

2b. Тот факт, что пространство $\bigcap\limits_{-n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$ инвариантно относительно дифференцирования, доказывается так же, как в п. 1b. Теорема 3.2 доказана. □

Пусть $d(z)$ — расстояние от точки $z \in D$ до границы D. Если весовая функция φ имеет конечный порядок роста в смысле выполнения соотношения

$$\varlimsup_{d(z)\to 0} \frac{\ln\varphi(z)}{-\ln d(z)} < \infty,$$

то инвариантные оболочка и ядро могут быть описаны более непосредственным образом.

Теорема 3.3. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z=0$, φ — положительная выпуклая функция на D, имеющая конечный порядок роста, для которой выполняются условия (3.1). Положим для $a \in \mathbb{R}$*

$$\psi_a(z) = \varphi(z) - a\ln d(z), \quad z \in D.$$

1. *Инвариантная оболочка $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ пространства $H(D,\varphi)$ совпадает с $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H(D,\psi_n)$. Если в этом объединении ввести топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

2. *Инвариантное ядро* $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ *пространства* $H(D,\varphi)$ *совпадает с* $\bigcap\limits_{-n\in\mathbb{N}} H(D,\psi_n)$. *Если в этом пересечении ввести топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

Доказательство теоремы 3.3. Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.2. *Пусть выпуклая область* D *содержит* 0. *Введем обозначения*

$$h(\varphi) = H_D(re^{i\varphi})r^{-1}, \quad h_0 = \min_{\varphi} h(\varphi), \quad H_0 = \max_{\varphi} h(\varphi), \quad r_0 = \min_{z\in D}|z|, \quad R_0 = \max_{z\in D}|z|.$$

Для $q\in(0;1)$ *и* $t>0$ *положим*

$$qD = \{qz : z\in D\}, \quad D_t = \{z : d(z) > t\}.$$

Тогда

$$(1-q)r_0 \leqslant d(z), \quad z\in qD, \tag{3.4}$$

$$\frac{h_0}{R_0}t \leqslant h(\varphi) - h_t(\varphi) \leqslant \frac{H_0}{r_0}t, \quad 0<t<r_0, \quad \varphi\in\mathbb{R}, \tag{3.5}$$

где $h_t(\varphi)$ — *опорная функция области* D_t.

Доказательство леммы 3.2. Пусть

$$\inf_{z\in qD} d(z) = |z_0 - w_0|,$$

где $z_0\in\partial qD$, $w_0\in\partial D$. Через точку w_0 проходит опорная к области D прямая l, перпендикулярная к отрезку $[z_0;w_0]$. Если d — расстояние от начала координат до прямой l, то $|z_0-w_0| = (1-q)d$ с одной стороны, и $\inf\limits_{z\in D}|z| \leqslant d$ с другой стороны; тем самым выполняется неравенство (3.4).

Предположим, что D — выпуклый n-угольник с вершинами в точках $r_je^{i\varphi_j}$, ограниченный прямыми l_j, отстоящими от начала координат на расстояние d_j. Обозначим через ψ_j направление нормалей к прямым l_j. Опорная функция представляет собой кусочно тригонометрическую функцию

$$h(\varphi) = r_j\cos(\varphi-\varphi_j), \quad \varphi\in(\psi_j;\psi_{j+1}).$$

Для $0<t<r_0$ область D_t — многоугольник, ограниченный прямыми $l_j - te^{i\psi_j}$, с вершинами в точках $\dfrac{d_j-t}{d_j}r_je^{i\varphi_j}$. Опорная функция области D_t вычисляется по формуле

$$h_t(\varphi) = \frac{d_j-t}{d_j}r_j\cos(\varphi-\varphi_j), \quad \varphi\in(\psi_j;\psi_{j+1}).$$

Значит,

$$h(\varphi) - h_t(\varphi) = \frac{t}{d_j}r_j\cos(\varphi-\varphi_j), \quad \varphi\in(\psi_j;\psi_{j+1}).$$

Отсюда следует соотношение (3.5) для произвольных выпуклых многоугольников. В общем случае это соотношение получается предельным переходом с использованием таких описанных выпуклых n-угольников D_n, что $\bigcap\limits_n D_n = \overline{D}$. Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *Пусть выпуклая область* D *содержит* 0 *и выпуклая функция* φ *на* D *неотрицательна. Тогда функция* φ *имеет конечный порядок роста, т.е.*

$$\varphi(z) \leqslant \frac{A}{(d(z))^{\alpha}}, \quad z\in D, \tag{3.6}$$

тогда и только тогда, когда сопряженная по Юнгу функция удовлетворяет условию

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) \geqslant H(\lambda) - B|\lambda|^{\beta}, \quad \lambda\in\mathbb{C},$$

где $H(\lambda)$ — *опорная функция области,* $\beta = \alpha/(1+\alpha)$ *и* $B>0$ — *некоторая постоянная.*

Доказательство леммы 3.3. Докажем достаточность. Воспользуемся известным неравенством

$$\operatorname{Re}\lambda z \leqslant H(\lambda) - |\lambda| d(z), \quad z \in D, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$\varphi(z) = \sup_{\lambda} \big(\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda) \big) \leqslant \sup_{\lambda} \big(-d(z)|\lambda| + B|\lambda|^{\beta} \big).$$

Вычислив супремум прямым подсчетом, получим

$$\varphi(z) \leqslant A \left(\frac{1}{d(z)} \right)^{\alpha}, \quad z \in D,$$

где

$$A = \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) (B\beta)^{1/(1-\beta)}.$$

Докажем необходимость. Пусть выполняется неравенство (3.6). Тогда

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \sup_{z} \big(\operatorname{Re}\lambda z - \varphi(z) \big) \geqslant \sup_{z} \left(\operatorname{Re}\lambda z - A \left(\frac{1}{d(z)} \right)^{\alpha} \right) = \sup_{q \in (0;1)} \sup_{z \in qD} \left(\operatorname{Re}\lambda z - A \left(\frac{1}{d(z)} \right)^{\alpha} \right).$$

Следовательно, в силу неравенства (3.4)

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) \geqslant \sup_{q \in (0;1)} \sup_{z \in qD} \left(\operatorname{Re}\lambda z - A \left(\frac{1}{(1-q) r_0} \right)^{\alpha} \right) \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{q \in (0;1)} \left(qH(\lambda) - A \left(\frac{1}{(1-q) r_0} \right)^{\alpha} \right) = H(\lambda) - \inf_{q \in (0;1)} \left(qH(\lambda) + \frac{A r_0^{-\alpha}}{q^{\alpha}} \right),$$

где $r_0 = \min_{z \in D} |z|$. Вычисляя инфимум, получим

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) \geqslant H(\lambda) - B|\lambda|^{\beta}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где

$$B = \max \frac{H(\lambda)}{\alpha|\lambda|} \big(A\alpha r_0^{-\alpha} \big)^{1/(\alpha+1)} (\alpha + 1).$$

Лемма 3.3 доказана. □

Пусть функция φ имеет конечный порядок роста, и пусть $z \in D$, λ_z — точка достижения супремума $\sup\limits_{\lambda} \big(\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda) \big)$. Если

$$|\lambda| \geqslant \left(\frac{B}{d(z)} \right)^{1/(1-\beta)},$$

то согласно неравенствам (3.5), (3.6)

$$\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda) \leqslant -d(z)|\lambda| + B|\lambda|^{\beta} \leqslant 0.$$

Поскольку мы предполагаем неотрицательность функции φ, то отсюда следует, что

$$|\lambda_z| \leqslant \left(\frac{B}{d(z)} \right)^{1/(1-\beta)} = \left(\frac{B}{d(z)} \right)^{\alpha+1}.$$

Воспользуемся вторым пунктом в утверждении 2.2. Можем считать, что $|\lambda_z| \geqslant 1$; тогда для $\varepsilon = \dfrac{b}{2B^{\alpha+1}}$ круг $B\big(z, \varepsilon d(z)^{\alpha+1}\big)$ лежит в D и

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| \leqslant 2b, \quad z \in D, \quad w \in B\big(z, \varepsilon (d(z))^{\alpha+1}\big). \tag{3.7}$$

Функция расстояния удовлетворяет условию Липшица

$$|d(z_1) - d(z_2)| \leqslant |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in D;$$

поэтому если $\varepsilon (d(z))^{\alpha} < 1/2$, то

$$l \big| \ln d(w) - \ln d(z) \big| \leqslant 2, \quad z \in D, \quad w \in B\big(z, \varepsilon (d(z))^{\alpha+1}\big). \tag{3.8}$$

Пусть
$$\mathcal{E}_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(D,\psi_n), \quad \mathcal{E}_p = \bigcap_{-n\in\mathbb{N}} H(D,\psi_n)$$
и $f \in H(D,\psi_m)$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. По формуле Коши имеем
$$|f'(z)| \leqslant \|f\|_n \frac{1}{\varepsilon} e^{\varphi_n(z)} (d(z))^{-(\alpha+1)} \exp\left(\max_{w\in B(z)} \big(\varphi(w)-\varphi(z)\big)\right),$$
где через $\|f\|_n$ обозначена норма в $H(D,\varphi_n)$ и $B(z) = B\big(z, \varepsilon(d(z))^{\alpha+1}\big)$. Из (3.7) и (3.8) вытекает оценка
$$\|f'\|_{n+\alpha+1} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} e^{2(b+|n|)} \|f\|_n, \quad f \in H(D,\psi_n).$$
Таким образом, пространства $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_p$ инвариантны относительно дифференцирования и оператор дифференцирования действует непрерывно в этих пространствах в индуктивной и проективной соответственно топологиях. Пусть точка ζ_z — точка достижения супремума $\sup\limits_{\lambda}\big(\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda)\big)$. Тогда по п. 2 утверждения 2.2
$$d(z) \geqslant \frac{b}{1+|\zeta_z|}, \quad z \in D.$$
Таким образом, при $d(z) \leqslant 1$
$$|\zeta_z| \geqslant \frac{b}{2d(z)}, \quad z \in D, \quad d(z) \leqslant 1.$$
Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$
$$\varphi_n(z) = \sup_{\lambda}\Big(\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda) + n\ln(1+|\lambda|)\Big) \geqslant \varphi(z) + n\ln(1+|\zeta_z|) \geqslant \psi_n(z) + n\ln\frac{b}{2}.$$
Таким образом, $H(D,\psi_n) \subset H(D,\varphi_n)$, и пространство $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ совпадает с пространством $\mathcal{E}_i$. Аналогично доказывается равенство линейных пространств $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ и $\mathcal{E}_p$. Теорема 3.3 доказана. □

Пусть $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность. Положим $M_n = M_0$ для $-n \in \mathbb{N}$ и для $k \in \mathbb{Z}$ будем обозначать через $\mathcal{M}_k$ последовательность со сдвигом $(M_{n+k})_{n=0}^{\infty}$.

Теорема 3.4. *Предположим, что последовательность $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию неквазианалитичности (2.2.1).*

1. *Инвариантная оболочка $\mathcal{H}_i(D,\mathcal{M})$ пространства $H(D,\mathcal{M})$ совпадает с объединением пространств $H(D,\mathcal{M}_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Если в этом объединении рассматривать топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*
2. *Инвариантное ядро $\mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})$ пространства $H(D,\mathcal{M})$ совпадает с пересечением пространств $H(D,\mathcal{M}_k)$, $-k \in \mathbb{N}$. Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

Доказательство теоремы 3.4. Система $\{e^{\lambda z}\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ полна в пространстве $H(D,\mathcal{M})$; следовательно, преобразование Фурье—Лапласа, которое каждому функционалу $S \in H^*(D,\mathcal{M})$ ставит в соответствие функцию $\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z})$, инъективно отображает $H^*(D,\mathcal{M})$ в пространство целых функций. Образ этого отображения обозначим через $\widehat{H}(D,\mathcal{M})$ и введем в нем наведенную структуру гильбертового пространства:
$$\|\widehat{S}\|_{\widehat{H}(D,\mathcal{M})} = \|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})}.$$
По теореме 2.4 существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что любая функция $F \in H(\mathbb{C},\psi_{k_0})$, где
$$\psi_\alpha(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|) - \alpha\ln(1+|\lambda|),$$

является преобразованием Фурье—Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала $S \in H^*(D, \mathcal{M})$ и

$$\|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})} \leqslant C\|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_{k_0})}.$$

Следовательно, пространство $H(\mathbb{C}, \psi_{k_0})$ непрерывно вложено в пространство $\widehat{H}(D, \mathcal{M})$. Из леммы 3.1 следует, что оператор A_m непрерывно действует из пространства $H(\mathbb{C}, \psi_{k_0-m})$ в пространство $\widehat{H}(D, \mathcal{M})$.

Докажем первый пункт теоремы 3.4. Пусть $Y \supset H(D, \mathcal{M})$ — инвариантное относительно дифференцирования пространство и $f \in \bigcup_{k=1}^{\infty} H(D, \mathcal{M}_k)$. Тогда для некоторого $n \in \mathbb{N}$ функция $f \in H(D, \mathcal{M}_n)$. По свойствам преобразования Фурье—Лапласа $f(z) = \widehat{S}(z)$ для некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $\widehat{H}(D, \mathcal{M}_n)$. Вложение

$$H(\mathbb{C}, \psi_{k_0+n}) \subset \widehat{H}(D, \mathcal{M}_n)$$

непрерывно. Оператор A_{k_0+n} непрерывно действует из пространства $H(\mathbb{C}, \psi_0)$ в пространство $H(\mathbb{C}, \psi_{k_0+n})$. Поэтому функционал

$$S_1(F) = S(A_{k_0+n}(F)), \quad F \in H(\mathbb{C}, \psi_0),$$

является линейным и непрерывным функционалом на $H(\mathbb{C}, \psi_0)$. Если $g(z) := S_1(e^{\lambda z})$, то

$$|g^{(k)}(z)| \leqslant \|S_1\|_{H^*(\mathbb{C},\psi_0)} \cdot M_k, \quad z \in D, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е. $g \in H(D, \mathcal{M}) \subset Y$. Поскольку

$$g^{(k_0+n)}(z) = \frac{\partial^{k_0+n}}{\partial z^{k_0+n}} S\left(\frac{1}{\lambda^{k_0+n}}\left(e^{\lambda z} - \sum_{s=0}^{k_0+n-1} \frac{z^s}{s!}\lambda^s\right)\right) = S(e^{\lambda z}) = f(z),$$

то $f \in Y$. Значит, $\bigcup_{k=1}^{\infty} H(D, \mathcal{M}_k) \subset Y$.

Второй пункт теоремы 3.4 непосредственно следует из определения пространств $H(D, \mathcal{M}_k)$. Теорема 3.4 доказана. □

4. Достаточные множества в индуктивных и проективных пределах весовых пространств целых функций

Пусть $\Psi = (\psi_\alpha)$ — семейство субгармонических функций на плоскости. В пространстве целых функций F, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{\lambda} |F(\lambda)| e^{-\psi(\lambda)} < \infty, \quad \psi \in \Psi,$$

для любого замкнутого подмножества $S \subset \mathbb{C}$ рассмотрим топологию $\tau(S)$, определяемую полунормами

$$p_{S,\psi}(F) = \sup_{\lambda \in S} |F(\lambda)| e^{-\psi(\lambda)}, \quad \psi \in \Psi.$$

Если $\tau(S) = \tau(\mathbb{C})$, то множество S называется *достаточным* для этого пространства.

В этом разделе мы конструируем дискретные достаточные множества для некоторых пространств. А также будет дана оценка меры «избыточности» построенных достаточных множеств.

Через $\mu(t)$ обозначим считающую функцию множества S:

$$\mu(t) = \sum_{\substack{\lambda \in S \\ |\lambda| \leqslant t}} 1, \quad t > 0.$$

Множество будем называть *регулярным*, если его считающая функция удовлетворяет условию

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \ln t \, d\mu(t) = \infty.$$

Через $B(z,t)$ будем обозначать круг с центром в точке z радиуса t. Для целой функции L через $N(L)$ будем обозначать множество её нулей и для $\delta > 0$ положим

$$E_L(\delta) = \bigcup_{\lambda \in N(L)} B(\lambda, \delta(1+|\lambda|)^{-1}).$$

Теорема 4.1. *Пусть ψ — субгармоническая функция на плоскости, удовлетворяющая условию Липшица и*

$$\psi_n(\lambda) = \psi(\lambda) - n\ln(1+|\lambda|) + c_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для проективного предела $\mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi)$ пространств $H(\mathbb{C},\psi_n)$ существует такое дискретное достаточное множество S, что из него можно удалить любое конечное подмножество сохраняя свойство достаточности, а после удаления любого регулярного подмножества оно перестает быть достаточным.

Доказательство теоремы 4.1. Поскольку ψ — субгармоническая функция, удовлетворяющая условию Липшица, то по теореме 1.5 существует целая функция L с простыми нулями λ_n, удовлетворяющими следующему условию: круги $B_n(\delta) = B\big(\lambda_n, \delta(|\lambda_n|+1)^{-1}\big)$ для некоторого $\delta > 0$ попарно не пересекаются, а сама функция для некоторых постоянных A, B удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \ln|L(\lambda)| &\leqslant \psi(\lambda), && \lambda \in \mathbb{C},\\ \ln|L(\lambda)| &\geqslant \psi(\lambda) - A\ln(|\lambda|+e), && \lambda \notin \bigcup_n B_n(\delta),\\ \ln|L'(\lambda)| &\geqslant \psi(\lambda) - B\ln(|\lambda|+e), && \lambda \in N(L). \end{aligned}$$

Докажем, что множество $S = N(L)$ является достаточным для пространства $\mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi)$.

Нужно показать, что для любого натурального числа $m \in \mathbb{N}$ найдутся такие числа $n \in \mathbb{N}$ и $M > 0$, что для любой функции $F \in \mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi)$

$$|F(\lambda)|e^{-\psi_m(\lambda)} \leqslant M \sup_{\lambda \in S} |F(\lambda)|e^{-\psi_n(\lambda)} := M\|F\|_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Итак, зафиксируем натуральное число m и выберем натуральные числа $N \geqslant m$ и $n \geqslant N + A + B + 2$. Пусть $F \in \mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi)$; тогда

$$|F(\lambda)| \leqslant \|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_n)} e^{\psi_n(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Значит,

$$|\lambda^N F(\lambda)| \leqslant \|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_n)} e^{\psi(\lambda)} (1+|\lambda|)^{-A-2} e^{c_n}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Отсюда и в силу нижних оценок на функцию L получим, что на некоторых окружностях $|\lambda| = R_k$, $R_k \to \infty$, $k \to \infty$, имеет место оценка

$$\frac{|\lambda^N F(\lambda)|}{|L(\lambda)|} \prec (1+|\lambda|)^{-2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, равномерно на компактах сходится ряд Лагранжа

$$\lambda^N F(\lambda) = \sum_k \frac{\lambda_k^N F(\lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)} L(\lambda).$$

В силу нижней оценки на $L'(\lambda_k)$ имеем

$$\frac{|\lambda_k^N F(\lambda_k)|}{|L'(\lambda_k)|} \prec \|F\|_n (1+|\lambda_k|)^{-n+B+N}.$$

Отсюда и из представления в виде ряда Лагранжа в силу выбора n следует оценка для $|\lambda - \lambda_k| \geqslant 1$:

$$|F(\lambda)| \leqslant \mathrm{const} \cdot \|F\|_n |L(\lambda)|\,|\lambda|^{-N},$$

которая продолжается на все λ по принципу максимума. Отсюда, учитывая оценки сверху на функцию L и выбор числа N, получим

$$|F(\lambda)|e^{-\psi(\lambda)+m\ln(1+|\lambda|)} \leqslant \mathrm{const}\cdot\|F\|_n,$$

или

$$\|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_m)} \leqslant \mathrm{const}\cdot\|F\|_n, \quad F\in\mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi).$$

Таким образом, множество S является достаточным для $\mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi)$. Очевидно, что если удалить из него любое конечное подмножество, оно останется достаточным.

Пусть $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — регулярное подмножество S. Тогда функция

$$g(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_n}\right), \quad \lambda\in\mathbb{C},$$

является целой функцией, и выполняется соотношение

$$\ln|\lambda| = ob\big(\ln|g(\lambda)|\big), \quad |\lambda-\mu_n|\geqslant 1, \quad n\in\mathbb{N}, \quad |\lambda|\to\infty.$$

Таким образом, функция

$$L_1(\lambda)=\frac{L(\lambda)}{g(\lambda)}$$

принадлежит пространству $\mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi)$ и, тем самым, множество $S\setminus\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не является даже множеством единственности для этого пространства. Теорема 4.1 доказана. □

Теорема 4.2. *Пусть ψ — субгармоническая функция на плоскости, удовлетворяющая условию Липшица и*

$$\psi_n(\lambda)=\psi(\lambda)+n\ln(1+|\lambda|)+c_n, \quad \lambda\in\mathbb{C}, \quad n\in\mathbb{N},$$

и пусть неотрицательная функция $m(t)$, $t>0$, является функцией медленного роста, $m_0(t)$ — ассоциированная с ней функция скачков. Тогда для индуктивного предела $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi)$ пространств $H(\mathbb{C},\psi_n)$ существует такое дискретное достаточное множество $S=\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, что если из него удалить подмножество $\{\eta_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, считающая функция $\eta(t)$ которого удовлетворяет условию

$$m_0(t)-\eta(t)\nearrow+\infty, \tag{4.1}$$

то множество $\widetilde{S}=S\setminus\{\eta_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ остается достаточным. Если же $m_0(t)-\eta(t)\leqslant C<\infty$, $t\geqslant 0$, то множество $S\setminus\{\eta_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ не будет достаточным.

Доказательство теоремы 4.2. В пространстве $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi)$ введем топологию с помощью весовых полунорм. Через $\mathcal{K}$ обозначим совокупность всех непрерывных функций $x(\lambda)$ на $\mathbb{C}$, удовлетворяющих при любом $n\in\mathbb{N}$ соотношению

$$x(\lambda)\succ e^{\psi_n(\lambda)}, \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Для подмножества $S\subset\mathbb{C}$ обозначим через $\tau(S)$ топологию в пространстве $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi)$, определяемую полунормами

$$p_x(F)=\sup_{\lambda\in S}\frac{|F(\lambda)|}{x(\lambda)}, \quad x\in\mathcal{K}.$$

Заметим, что исходная топология индуктивного предела в $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi)$ совпадает с топологией $\tau(\mathbb{C})$ (см. [19]). Докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение 4.1. *Пусть $\mathcal{K}_0$ — семейство функций вида $x(\lambda)=e^{\psi(\lambda)+v(\lambda)}$, где $v(\lambda)$ — радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющие условию*

$$l\lim_{r\to\infty}\frac{v(r)}{\ln r}=\infty. \tag{4.2}$$

Для замкнутого множества $S\subset\mathbb{C}$ определим топологию $\tau_0(S)$ в пространстве $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi)$ с помощью полунорм p_x, где $x\in\mathcal{K}_0$. Тогда топологии $\tau_0(S)$ и $\tau(S)$ равносильны.

Доказательство утверждения 4.1. Очевидно, $\tau_0(S) \leqslant \tau(S)$. Докажем обратное неравенство. Пусть $x \in \mathcal{K}$, функция

$$y(r) = \min_{|\lambda|=r} (\ln x(\lambda) - \psi(\lambda)), \quad r \geqslant 0,$$

радиальна и удовлетворяет условию $y(r) \geqslant n \ln r + C_n$, $r > 0$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда функция $y(e^t)$, $t \in \mathbb{R}$, обладает свойством $y(e^t) \geqslant nt + C_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$v(e^t) = \sup\left\{h(t),\ h(t) \leqslant y(e^t),\ t \in \mathbb{R},\ h\text{ — выпуклая}\right\}.$$

Тогда $v(|\lambda|)$ — радиальная субгармоническая функция на плоскости, удовлетворяющая условию (4.2) и

$$e^{\psi(\lambda)+v(|\lambda|)} \leqslant x(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Утверждение 4.1 доказано. □

Искомое достаточное множество будем конструировать в виде множества нулей некоторой целой функции с определенными асимптотическими оценками. Поскольку ψ — субгармоническая функция, удовлетворяющая условию Липшица, то по теореме 1.5 существует целая функция L_1 с такими простыми нулями λ_n, что круги $B_n(\delta) = B(\lambda_n, (\delta)(|\lambda_n| + 1)^{-1})$ при некотором $\delta > 0$ попарно не пересекаются и для некоторой постоянной $c > 0$ выполняются соотношения

$$\psi(\lambda) - c\ln(e + |\lambda|) \leqslant \ln|L_1(\lambda)| \leqslant \psi(\lambda), \quad \lambda \notin E(L_1)(\delta), \tag{L_1I}$$

$$\psi(\zeta) - c\ln(e + |\zeta|) \leqslant \ln|L_1'(\zeta)| \leqslant \psi(\zeta), \quad \zeta \in N(L_1), \tag{L_1II}$$

Пусть

$$u(\lambda) = \int_0^{|\lambda|} \frac{m(t)\,dt}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда u — радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющая условию (4.3).

Определим последовательность R_n по формулам

$$m(R_0) = 1, \quad m(R_{n+1}) - m(R_n) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и возьмем $r_n \in (R_n, R_{n+1})$. Так как выполняется условие (4.1), то по теореме 1.3 целая функция

$$g(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{r_n e^{i\theta_n}}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $\theta_n \in [0, 2\pi]$ — произвольные числа, обладает следующими свойствами: если $\xi_k = r_k e^{i\theta_k}$, то круги $B(\xi_k, \delta(1+|\xi_k|)^{-1})$ попарно не пересекаются и для некоторой постоянной $d > 0$ выполняются оценки

$$u(\lambda) - d\ln(e + |\lambda|) \leqslant \ln|g(\lambda)| \leqslant u(\lambda), \quad \lambda \notin E(g)(\delta), \tag{gI}$$

$$u(\xi) - d\ln(e + |\xi|) \leqslant \ln|g'(\xi)| \leqslant u(\xi), \quad \xi \in N(g). \tag{gII}$$

Докажем, что множество нулей S целой функции $L = L_1 g$ является достаточным множеством для пространства $\mathcal{H}_p(\mathbb{C}, \psi)$, удовлетворяющим условиям теоремы. Заметим, что поскольку θ_k произвольны, то можем считать круги $\{\lambda : |\lambda - z| \leqslant \delta(1 + |z|)^{-1}\}$, $z \in S$, непересекающимися. Возьмем подмножество $S' = \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ множества S, удовлетворяющее условию теоремы, и докажем, что $\widetilde{S} = S \setminus S'$ — достаточное множество для $\mathcal{H}_p(\mathbb{C}, \psi)$. Пусть

$$v(\lambda) = \int_0^{|\lambda|} \frac{\eta(t)dt}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда v — радиальная субгармоническая функция, и по теореме 1.3 целая функция

$$h(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\eta_k}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

для некоторого $p > 0$ удовлетворяет соотношениям

$$v(\lambda) - p\ln(e + |\lambda|) \leqslant \ln|h(\lambda)| \leqslant v(\lambda), \quad \lambda \notin E(h)(\delta), \tag{hI}$$

$$v(\eta_n) - p\ln(e + |\eta_n|) \leqslant \ln|h'(\eta_n)| \leqslant v(\eta_n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{hII}$$

Пусть $\widetilde{m}(t) = m_0(t) - \eta(t)$; тогда по условию (4.1) $\widetilde{m}(t)$ возрастает до бесконечности. Пусть

$$l\widetilde{u}(\lambda) = \int\limits_0^{|\lambda|} \frac{\widetilde{m}(t)\,dt}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.3}$$

Тогда $\widetilde{u}(\lambda)$ — радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющая условию (4.3), и целая функция $\widetilde{L} = L/h$ с множеством нулей $\widetilde{S}$ в силу соотношений (L_1I)–(L_1II), (gI)–(gII), (hI)–(hII) удовлетворяет условиям

$$\psi(\lambda) + \widetilde{u}(\lambda) - \widetilde{a}\ln(e + |\lambda|) \leqslant \ln|\widetilde{L}(\lambda)| \leqslant \psi(\lambda) + \widetilde{u}(\lambda) + \widetilde{a}\ln(e + |\lambda|), \quad \lambda \notin E(\widetilde{L})(\delta), \tag{$\widetilde{L}I$}$$

$$\psi(\lambda) + \widetilde{u}(\lambda) - \widetilde{a}\ln(e + |\lambda|) \leqslant \ln|\widetilde{L}'(\lambda)| \leqslant \psi(\lambda) + \widetilde{u}(\lambda) + \widetilde{a}\ln(e + |\lambda|), \quad \lambda \in \widetilde{S}, \tag{$\widetilde{L}II$}$$

где $\widetilde{a} = \max(c + d, p)$.

Для доказательства достаточности множества $\widetilde{S}$ согласно утверждению 4.1 нам нужно показать, что для любой радиальной субгармонической функции $\alpha(\lambda)$, удовлетворяющей условию (4.3), найдутся такие радиальная субгармоническая функция $\beta(\lambda)$ и число $\varepsilon > 0$, что если функция $F \in \mathcal{H}_p(\mathbb{C}, \psi)$ удовлетворяет оценке

$$|F(\lambda)| \leqslant \varepsilon e^{\psi(\lambda)+\beta(\lambda)}, \quad \lambda \in \widetilde{S}, \tag{4.4}$$

то эта функция будет удовлетворять оценке

$$|F(\lambda)| \leqslant e^{\psi(\lambda)+\alpha(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.5}$$

Пусть $w(\lambda)$ — некоторая радиальная субгармоническая функция на плоскости и ν — мера, ассоциированная с ней по Риссу. В полярных координатах мера ν имеет вид

$$d\nu(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} d(w'(r)r)d\varphi;$$

в частности, функция $w'(r)r$ — неубывающая. Через $\nu(t)$ будем обозначать ν-меру круга $B(0, t)$; тогда

$$\nu(t) = w'(t)t, \quad t \geqslant 0.$$

Применительно к функции $\widetilde{u}$ в формуле (4.4) имеем $\widetilde{\mu}(t) \equiv \widetilde{m}(t)$ ($\widetilde{\mu}$ — мера, ассоциированная по Риссу с $\widetilde{u}$). Пусть $\alpha(\lambda)$ — субгармоническая функция в (4.6) и $d\nu(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}d(\alpha'(r)r)d\varphi$ — ее ассоциированная мера. Положим

$$\nu_1(t) = \min(\widetilde{m}(t), \alpha'(t)t), \quad t \geqslant 0, \qquad \alpha_1(\lambda) = \int\limits_1^{|\lambda|} \frac{\nu_1(t)dt}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда $\nu_1(t)$ — возрастающая до бесконечности функция и α_1 — радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющая условиям

$$\alpha_1(\lambda) \leqslant \min\big(\widetilde{u}(\lambda), \alpha(\lambda)\big), \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha_1(t)}{\ln t} = \infty.$$

По теореме 1.3 построим последовательность $\widetilde{R}_n$, $n \in \mathbb{N}$, и целую функцию $\widetilde{g}(\lambda)$, удовлетворяющую условиям

$$\widetilde{u}(\lambda) - \widetilde{d}\ln(e + |\lambda|) \leqslant \ln|\widetilde{g}(\lambda)| \leqslant \widetilde{u}(\lambda), \quad \lambda \notin E(\widetilde{g})(\delta), \tag{$\widetilde{g}I$}$$

$$\widetilde{u}(\lambda) - \widetilde{d}\ln(e + |\lambda|) \leqslant \ln|\widetilde{g}'(\lambda)| \leqslant \widetilde{u}(\lambda), \quad \lambda \in N(\widetilde{g}). \tag{$\widetilde{g}II$}$$

Сужение ассоциированной меры функции $\widetilde{u}$ на кольцо $Q_n = \left\{\widetilde{R}_n \leqslant |\lambda| < \widetilde{R}_{n+1}\right\}$ обозначим через γ_n, $n \in \mathbb{N}$. По определению последовательности $\widetilde{R}_n$ имеем $\gamma_n(\mathbb{C}) = 1$. Выберем подпоследовательность натуральных чисел n_j так, чтобы для меры $\nu_0 = \sum\limits_j \gamma_{n_j}$ выполнялось условие $\nu_0(t) \leqslant \nu_1(t)$, $t \geqslant 0$. Такую подпоследовательность можно выбрать потому, что $\nu_1(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Пусть n — наибольший номер, для которого $\nu_1(\widetilde{R}_n) < 1$, т.е. $\nu_1(\widetilde{R}_j) \geqslant 1$ для $j \geqslant n+1$. Можно положить $n_1 = n+1$. Далее, исходя из того, что $\nu_1(t) - 1 \to \infty$ при $t \to \infty$ можно выбрать n_2 и т. д. Функция

$$\alpha_0(\lambda) = \int\limits_0^{|\lambda|} \frac{\nu_0(t)dt}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

радиальна, субгармонична и

$$\alpha_0(r) \leqslant \int\limits_1^r \frac{\nu_1(t)dt}{t} = \alpha_1(r) \leqslant \alpha(r), \quad r \geqslant 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha_0(t)}{\ln t} = \infty.$$

Определим еще меры

$$\chi_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{n_{2j+1}}, \quad \chi_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{n_{2j}},$$

и соответствующие радиальные субгармонические функции

$$\beta_1(\lambda) = \int\limits_0^{|\lambda|} \frac{\chi_1(t)dt}{t}, \quad \beta_2(\lambda) = \int\limits_0^{|\lambda|} \frac{\chi_2(t)dt}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

По построению $0 \leqslant \chi_1(t) - \chi_2(t) \leqslant 1$, поэтому эти функции удовлетворяют условию1 (4.3), и

$$\beta_1(t) + \beta_2(t) = \alpha_0(t), \quad \alpha_0(t) \leqslant 2\beta_1(t) \leqslant \alpha_0(t) + \ln(1+t), \quad t \geqslant 0. \tag{4.6}$$

По теореме 1.3 целая функция

$$\widetilde{g}_1(\lambda) = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\widetilde{r}_{n_{2j+1}} e^{i\widetilde{\theta}_{n_{2j+1}}}}\right)$$

удовлетворяет условиям

$$\beta_1(\lambda) - \widetilde{b}\ln(e+|\lambda|) \leqslant \ln|\widetilde{g}_1(\lambda)| \leqslant \beta_1(\lambda), \quad \lambda \notin E(\widetilde{g}_1)(\delta), \tag{$\widetilde{g}_1 I$}$$

$$\beta_1(\zeta) - \widetilde{b}\ln(e+|\zeta|)) \leqslant \ln|\widetilde{g}_1'(\zeta)| \leqslant \beta_1(\zeta), \quad \zeta \in N(\widetilde{g}_1). \tag{$\widetilde{g}_1 II$}$$

Возьмем натуральное число $N = [\widetilde{a} + \widetilde{b} + \widetilde{d}] + 4 \geqslant (\widetilde{a} + \widetilde{b} + \widetilde{d}) + 3$, где $[a]$ обозначает целую часть числа a, и положим

$$\chi = \sum_{j=N+1}^{\infty} \gamma_{n_{2j+1}}, \quad \beta(\lambda) = \int\limits_0^{|\lambda|} \frac{\chi(t)\,dt}{t}.$$

Тогда $\beta(\lambda)$ — радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющая условию (4.3), и для некоторой константы C

$$\beta(t) \leqslant \beta_1(t) - N\ln(1+t) + C, \quad t \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Пусть функция $F \in \mathcal{H}_i(\mathbb{C}, \psi)$ удовлетворяет оценке (4.5) с некоторым положительным числом ε, которое определим позже.

По определению пространства $\mathcal{H}_i(\mathbb{C}, \psi)$ функция F принадлежит пространству $H(\mathbb{C}, \psi_m)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, т.е.

$$|F(\lambda)| \leqslant C_0 e^{\psi(\lambda) + m\ln(1+|\lambda|)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Функция

$$\widetilde{F}(\lambda) = \frac{F(\lambda)\widetilde{g}(\lambda)}{\widetilde{g}_1(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

по соотношениям $(\widetilde{g}_1I)$, $(\widetilde{g}I)$, $(\widetilde{L}I)$ удовлетворяет оценке

$$\left|\frac{\widetilde{F}(\lambda)}{\widetilde{L}(\lambda)}\right| \leqslant C_0 e^{(m+\widetilde{b}+\widetilde{a})\ln(e+|\lambda|)-\beta_1(\lambda)}, \quad \lambda \notin E(\widetilde{L}\widetilde{g}). \tag{4.8}$$

Поскольку исключительное множество $E(\widetilde{L}\widetilde{g})(\delta)$ есть объединение попарно не пересекающихся кругов, то найдется последовательность таких замкнутых жордановых кривых Γ_n, что

$$\rho_n = \min_{\zeta\in\Gamma_n}|\zeta| \to \infty, \quad |\Gamma_n| = O(\rho_n), \quad n \to \infty, \quad \Gamma_n \cap E(\widetilde{L}\widetilde{g})(\delta) = \emptyset.$$

Функция β_1 удовлетворяет условию (4.3), поэтому

$$\max_{\lambda\in\Gamma_n}\left|\frac{\widetilde{F}(\lambda)}{\widetilde{L}(\lambda)}\right| \to 0, \quad n\to\infty.$$

Таким образом, ряд Лагранжа функции $\widetilde{F}$ по функции $\widetilde{L}$ сходится (поточечно) к самой функции $\widetilde{F}$:

$$\widetilde{F}(\lambda) = \sum_{\zeta\in N(\widetilde{L})}\frac{\widetilde{F}(\zeta)}{\widetilde{L}'(\zeta)(\lambda-\zeta)}\widetilde{L}(\lambda), \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Из $(\widetilde{g}I)$, $(\widetilde{g}_1I)$, $(\widetilde{L}II)$, (4.5) следует

$$\left|\frac{\widetilde{F}(\zeta)}{\widetilde{L}'(\zeta)}\right| \leqslant \varepsilon e^{\beta(\zeta)-\beta_1(\zeta)+(\widetilde{b}+\widetilde{a})\ln(e+|\zeta|)}, \quad \zeta\in N(\widetilde{L}),$$

и, учитывая соотношение (4.8) и выбор числа N, получаем

$$\left|\frac{\widetilde{F}(\zeta)}{L'(\zeta)}\right| \leqslant \varepsilon e^{C}(e+|\zeta|)^{-3}, \quad \zeta\in N(\widetilde{L}).$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда Лагранжа и оценка

$$|\widetilde{F}(\lambda)| \leqslant \sum_{\zeta\in\widetilde{S}}\left|\frac{\widetilde{F}(\zeta)}{\widetilde{L}'(\zeta)}\right| |\widetilde{L}(\lambda)| \leqslant \varepsilon e^{C}\sum_{\zeta\in\widetilde{S}}(e+|\zeta|)^{-2}|\widetilde{L}(\lambda)|, \quad \lambda\notin E(\widetilde{L})(\delta).$$

Учитывая определение функции $\widetilde{F}$, получим

$$|F(\lambda)| \leqslant \varepsilon e^{C}\sigma|\widetilde{L}(\lambda)|\frac{|\widetilde{g}_1(\lambda)|}{|\widetilde{g}(\lambda)|}, \quad \lambda\notin E(\widetilde{L})(\delta), \quad \sigma = \sum_{\zeta\in\widetilde{S}}(e+|\zeta|)^{-2}.$$

Теперь из $(\widetilde{L}I)$, $(\widetilde{g}_1I)$, $(\widetilde{g}I)$ вытекает оценка

$$|F(\lambda)| \leqslant \varepsilon e^{C}\sigma e^{\psi(\lambda)+\beta_1(\lambda)+(\widetilde{a}+\widetilde{d})\ln(e+|\lambda|)}, \quad \lambda\notin E(\widetilde{L}\widetilde{g}),$$

которую можно продолжить на всю плоскость по принципу максимума. Из соотношения (4.7) имеем

$$\beta_1(t) \leqslant \frac{1}{2}\alpha_0(t) + \frac{1}{2}\ln(1+t) \leqslant \alpha(t) - \frac{1}{2}\alpha_0(t) + \frac{1}{2}\ln(1+t), \quad t\geqslant 0.$$

Так как функция α_0 удовлетворяет условию (4.3), то для некоторой постоянной C_1

$$\beta_1(t) + (\widetilde{a}+\widetilde{d})\ln(1+t) \leqslant \alpha(t) + C_1, \quad t\geqslant 0,$$

и, если положить $\varepsilon = \frac{1}{\sigma}e^{-C-C_1-\widetilde{a}-\widetilde{d}}$, то

$$|F(\lambda)| \leqslant e^{\psi(\lambda)+\alpha(\lambda)}, \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Таким образом, из оценки (4.5) следует оценка (4.6). Достаточность множества $\widetilde{S}$ доказана.

Если же считающая функция $\eta(t)$ удаляемого подмножества $\{\eta_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию $m_0(t)-\eta(t)\leqslant C<\infty$, $t\geqslant 0$, то $\widetilde{L}\in\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi)$, и множество $\widetilde{S}$ не будет даже множеством единственности для $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi)$. Теорема 4.2 доказана. □

5. Представляющие системы экспонент в инвариантной оболочке и инвариантном ядре нормированных пространств аналитических функций

Теорема 5.1. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z=0$, φ — выпуклая функция в этой области. Положим*

$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda)=\widetilde{\varphi}(\lambda)+n\ln(1+|\lambda|),\qquad \lambda\in\mathbb{C},\quad n\in\mathbb{N},$$
$$\varphi_n(z)=\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\big(\operatorname{Re}\lambda z-\widetilde{\varphi}_n(\lambda)\big),\quad z\in D.$$

Предположим, что для некоторых $b_n>12$ выполнены условия

$$\sum_{k,j=1}^{2}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}_n(x_1+ix_2)}{\partial x_j\partial x_k}y_jy_k\geqslant\frac{b_n}{1+|x|^2}|y|^2,\quad y=(y_1,y_2),\ x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Далее, пусть положительная функция $m(t)$, $t>0$, является медленно растущей, $m_0(t)$ — ассоциированная с ней функция скачков. Тогда существует такая система показателей $\Lambda=\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, что система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ k\in\mathbb{N}\}$ является представляющей в инвариантном ядре $\mathcal{H}_p(D,\varphi)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}H(D,\varphi_n)$ пространства $H(D,\varphi)$, т.е. любая функция $f\in\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f_ke^{z\lambda_k},$$

сходящегося в топологии проективного предела пространств $H(D,\varphi_n)$, $n\in\mathbb{N}$. При этом ряды из всех определяющих топологию $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ норм сходятся

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_ke^{z\lambda_k}\|_{H(D,\varphi_m)}<\infty,\quad m\in\mathbb{N},$$

а ряд из абсолютных величин сходится в топологии проективного предела пространств $H(D,\varphi_n)$, $n\in\mathbb{N}$:

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{z\in D}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}f_ke^{z\lambda_k}\right|e^{-\varphi_n(z)}=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Если из системы показателей Λ удалить подмножество $\{\eta_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, считающая функция $\eta(t)$ которого удовлетворяет условию

$$m_0(t)-\eta(t)\nearrow+\infty,$$

то система экспонент $\big\{e^{z\lambda_k},\ \lambda_k\in\widetilde{S}=S\setminus\{\eta_k,\ k\in\mathbb{N}\}\big\}$ остается представляющей. Если же $m_0(t)-\eta(t)\leqslant C<\infty$, $t\geqslant0$, то оставшаяся система экспонент уже не будет представляющей.

Доказательство теоремы 5.1. Субгармонические на плоскости функции $\widetilde{\varphi}_n$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2. Возьмем достаточное для $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_n)$ множество $S=\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, построенное как в теореме 4.2. Учитывая теорему 2.3, согласно [28, теорема 1.6, с. 12] любая функция $f\in\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ может быть представлена в виде интеграла

$$f(z)=\int\limits_S\frac{e^{z\lambda}}{k(\lambda)}d\mu(\lambda),\quad z\in D,$$

где μ — мера ограниченной вариации, сосредоточенная на множестве S, $k(\lambda)=e^{\widetilde{\varphi}(\lambda)+v(\lambda)}$ с радиальной субгармонической функцией v, удовлетворяющей условию

$$\lim_{r\to\infty}\frac{v(r)}{\ln r}=\infty.$$

Множество S — дискретное, значит, любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D,\varphi)$ может быть представлена в виде суммы ряда
$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} M_k e^{-\widetilde{\varphi}(\lambda_k)-v(\lambda_k)} e^{z\lambda_k}, \quad z\in D,$$
где $M_k=\mu(\{\lambda_k\})$, $\sup\limits_k M_k = M<\infty$, и ряд сходится в топологии пространства $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$. Поскольку
$$\|e^{z\lambda_k}\|_{H(D,\varphi_n)}=\sup_{z\in D} e^{\operatorname{Re} z\lambda_k-\varphi_n(z)}=e^{\widetilde{\varphi}_n(\lambda_k)}=e^{v_n(\lambda_k)},$$
то
$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} M_k e^{-\widetilde{\varphi}(\lambda_k)-v(\lambda_k)} e^{z\lambda_k}\right\|_{H(D,\varphi_n)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|M_k| e^{-\widetilde{\varphi}(\lambda_k)-v(\lambda_k)}\left\|e^{z\lambda_k}\right\|_{H(D,\varphi_n)}=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}|M_k| e^{-\widetilde{\varphi}(\lambda_k)-v(\lambda_k)} e^{v_n(\lambda_k)}=M\sum_{k=1}^{\infty} e^{n\ln(1+|\lambda_k|^2)-v(\lambda_k)}.$$
По построению последовательность λ_k, $k\in\mathbb{N}$, имеет конечную линейную плотность; значит, по свойствам функции v последний числовой ряд сходится. Пользуясь очевидным неравенством
$$|f(z)|\leqslant e^{\varphi_n(z)}\|f\|_{H(D,\varphi_n)}, \quad z\in D, \quad n\in\mathbb{N},$$
получим
$$\lim_{N\to\infty}\sup_{z\in D}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} M_k e^{-\widetilde{\varphi}(\lambda_k)-v(\lambda_k)} e^{z\lambda_k}\right| e^{-\varphi_n(z)} \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty}|M_k| e^{-\widetilde{\varphi}(\lambda_k)-v(\lambda_k)}\|e^{z\lambda_k}\|_{H(D,\varphi_n)}\to 0.$$
Последние утверждения теоремы 5.1 непосредственно следуют из теоремы 4.2. Теорема 5.1 доказана. □

Теорема 5.2. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z=0$, φ — выпуклая функция в этой области. Положим*
$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda)=\widetilde{\varphi}(\lambda)-n\ln(1+|\lambda|), \qquad \lambda\in\mathbb{C}, \quad n\in\mathbb{N},$$
$$\varphi_n(z)=\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\big(\operatorname{Re}\lambda z-\widetilde{\varphi}_n(\lambda)\big), \quad z\in D.$$
Предположим, что для некоторых $b_n>12$ выполнены условия
$$\sum_{k,j=1}^{2}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}_n(x_1+ix_2)}{\partial x_j\partial x_k} y_j y_k \geqslant \frac{b_n}{1+|x|^2}|y|^2, \quad y=(y_1,y_2),\ x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$
Тогда в инвариантной оболочке
$$\mathcal{H}_i(D,\varphi)=\bigcup_{k=1}^{\infty} H(D,\varphi_k)$$
пространства $H(D,\varphi)$ существует представляющая система $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. любая функция $f\in\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ представляется в виде ряда по данной системе экспонент:
$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n z}.$$
Этот ряд сходится в топологии индуктивного предела пространств $H(D,\varphi_k)$, $k\in\mathbb{N}$. Пусть $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество показателей представляющей системы $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда, если удалить из Λ любое конечное подмножество, то соответствующая система экспонент останется представляющей, а если удалить из Λ любое регулярное подмножество, то соответствующая система экспонент перестанет быть представляющей.

Теорема 5.2 доказывается так же, как теорема 5.1 на основе теорем 2.2 и 4.1.

Теорема 5.3. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию «неквазианалитичности»*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty,$$

и пусть $M_{-n} = M_0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{M}^{(k)} = \{M_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, — «сдвинутые» последовательности. Тогда для положительной медленно растущей функции $m(t)$, $t > 0$, существует такая система показателей $\Lambda = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, что система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ является представляющей в инвариантном ядре $\mathcal{H}_p(D,\mathcal{M}) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H(D,\mathcal{M}^{(k)})$ пространства $H(D,\mathcal{M})$, т.е. любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})$ может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{z\lambda_k},$$

сходящегося в топологии проективного предела пространств $H(D,\mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$. Если из системы показателей Λ удалить подмножество $\{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, считающая функция $\eta(t)$ которого удовлетворяет условию

$$m_0(t) - \eta(t) \nearrow +\infty,$$

то система экспонент $\left\{e^{z\lambda_k},\ \lambda_k \in \widetilde{S} = S \setminus \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}\right\}$ остается представляющей. Здесь $m_0(t)$ — ассоциированная с $m(t)$ функция скачков. Если же $m_0(t) - \eta(t) \leqslant C < \infty$, $t \geqslant 0$, то оставшаяся система экспонент уже не будет представляющей.

Доказательство теоремы 5.3. Обозначим через

$$T_k(r) = \sup_{n\geqslant 0} \frac{r^n}{M_n^{(k)}}, \quad r \geqslant 0,$$

функцию следа последовательности $\mathcal{M}^{(k)}$, через $T(r)$ — функцию следа последовательности $\mathcal{M}$, через $H_D(\lambda)$ — опорную функцию области D, и пусть

$$\psi(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|), \quad \psi_k(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T_k(|\lambda|), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Субгармонические на плоскости функции ψ_k удовлетворяют условиям теоремы 4.2. Возьмем достаточное для $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H(\mathbb{C},\psi_k)$ множество $S = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, построенное в теореме 4.2, и редкое подмножество $\{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, считающая функция которого удовлетворяет условию (4.2). По теореме 4.2 множество $\widetilde{S} = S \setminus \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ остается достаточным для $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi)$. Учитывая теорему 2.6, согласно [28, теорема 1.6, с. 12] любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})$ может быть представлена в виде интеграла

$$f(z) = \int\limits_S \frac{e^{z\lambda}}{k(\lambda)} d\mu(\lambda), \quad z \in D,$$

где μ — мера ограниченной вариации, сосредоточенная на множестве $\widetilde{S}$, $k(\lambda) = e^{\psi(\lambda)+v(\lambda)}$ с радиальной субгармонической функцией v, удовлетворяющей условию (4.3). Множество $\widetilde{S} = \{\zeta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ — дискретное, значит, любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})$ может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k e^{-\psi(\zeta_k)-v(\zeta_k)} e^{z\zeta_k}, \quad z \in D,$$

где $M_k = \mu(\{\zeta_k\})$, $\sup\limits_k M_k = M < \infty$, и ряд сходится в топологии пространства $\mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})$.

Последнее утверждение теоремы 5.3 непосредственно следует из теоремы 4.2. Теорема 5.3 доказана. □

Теорема 5.4. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию «неквазианалитичности»*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty,$$

и $\mathcal{M}^{(k)} = \{M_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, — «сдвинутые» последовательности. Тогда в инвариантной оболочке $\mathcal{H}_i(D, \mathcal{M}) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H(D, \mathcal{M}^{(k)})$ пространства $H(D, \mathcal{M})$ существует представляющая система экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. любая функция $f \in \mathcal{H}_i(D, \mathcal{M})$ представляется в виде ряда по данной системе экспонент:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n z}.$$

Ряд сходится в топологии индуктивного предела пространств $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество показателей представляющей системы $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$. Если удалить из Λ любое конечное подмножество, то соответствующая система экспонент останется представляющей, а если удалить из Λ любое регулярное подмножество, то соответствующая система экспонент перестанет быть представляющей.

Теорема 5.4 доказывается так же, как теорема 5.3, на основе теорем 2.5 и 4.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абанин А. В., Налбандян Ю. С.* Абсолютно представляющие системы экспонент минимального типа в пространствах функций с заданным ростом вблизи границы// Изв. вузов. Мат. — 1993. — № 10. — С. 73–76.
2. *Абанин А. В., Варзиев В. А.* Достаточные множества в весовых пространствах Фреше целых функций// Сиб. мат. ж. — 2013. — *54*, № 4. — С. 725–741.
3. *Абузярова Н. Ф., Юлмухаметов Р. С.* Сопряженные пространства к весовым пространствам аналитических функций// Сиб. мат. ж. — 2001. — *42*, № 1. — С. 3–17.
4. *Азарин В. С.* О лучах вполне регулярного роста целой функции// Мат. сб. — 1969. — *79 (121)*, № 4 (8). — С. 464–476.
5. *Башмаков Р. А., Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.* Представляющие системы экспонент в весовых подпространствах $H(D)$// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *153*. — С. 13–28.
6. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. — Л.: Наука, 1980.
7. *Исаев К. П.* Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках// Уфим. мат. ж. — 2010. — *2*, № 1. — С. 71–86.
8. *Исаев К. П., Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С.* Представление рядами экспонент функций в локально выпуклых подпространствах $A^{\infty}(D)$// Уфим. мат. ж. — 2017. — *9*, № 3. — С. 50–62.
9. *Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.* Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана// Изв. РАН. Сер. мат. — 2004. — *68*, № 1. — С. 5–42.
10. *Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.* Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками// Изв. РАН. Сер. мат. — 2007. — *71*, № 6. — С. 69–90.
11. *Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.* Безусловные базисы из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций// Уфим. мат. ж. — 2013. — *5*, № 3. — С. 67–77.
12. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 1 (217). — С. 73–126.
13. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1975. — *39*, № 3. — С. 657–702.
14. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
15. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 6. — С. 1308–1328.

16. *Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С.* Обобщение теоремы Винера—Пэли на функционалы в пространствах Смирнова// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1993. — *200*. — С. 271–280.
17. *Любарский Ю. И.* Ряды экспонент в пространстве Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — *52*, № 3. — С. 559–580.
18. *Любарский Ю. И.* Теорема Винера—Пэли для выпуклых множеств// Изв. АН АрмССР. Мат. — 1988. — *23*, № 2. — С. 162–172.
19. *Напалков В. В.* О сравнении топологии в некоторых пространствах целых функций// Докл. АН СССР. — 1982. — *264*, № 4. — С. 827–830.
20. *Напалков В. В.* Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1987. — *51*, № 2. — С. 287–305.
21. *Себаштьян-и-Силва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях// Математика. — 1957. — *1*, № 1. — С. 60–77.
22. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье. — М.: Мир, 1986.
23. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — М.: Мир, 1986.
24. *Юлмухаметов Р. С.* Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы// Мат. заметки. — 1982. — *32*, № 1. — С. 41–57.
25. *Юлмухаметов Р. С.* Приближение субгармонических функций// Мат. сб. — 1984. — *124 (166)*, № 3 (7). — С. 393–415.
26. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций// Anal. Math. — 1985. — *11*, № 3. — С. 257–282.
27. *Юлмухаметов Р. С.* Квазианалитические классы функций в выпуклых областях// Мат. сб. — 1986. — *130 (172)*, № 4 (8). — С. 500–519.
28. *Ehrenpreis L.* Fourier Analysis. Several Complex Variables. — New York: Wiley, 1970.

Исаев Константин Петрович
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия;
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: orbit81@list.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 161 (2019). С. 65–103

УДК 517.9

КОЭФФИЦИЕНТЫ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ОПЕРАТОР ПОММЬЕ

© 2019 г. С. Н. МЕЛИХОВ

Аннотация. Излагаются результаты о существовании линейного непрерывного правого обратного к оператору представления функций, аналитических в ограниченной выпуклой области комплексной плоскости, рядами из квазиполиномов и экспонент. Приводятся тесно связанные с ними результаты об интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева и, более общим образом, интерполирующем функционале, а также об операторе Поммье, с помощью которого они определяются. Исследуются циклические векторы и собственные замкнутые инвариантные подпространства оператора Поммье в весовых пространствах целых функций.

Ключевые слова: ряд экспонент, аналитическая функция, интерполирующий функционал, оператор Поммье, весовое пространство целых функций, циклический вектор, инвариантное подпространство.

COEFFICIENTS OF EXPONENTIAL SERIES FOR ANALYTIC FUNCTIONS AND THE POMMIEZ OPERATOR

© 2019 S. N. MELIKHOV

Abstract. In this paper, we present results of the existence of a linear continuous right inverse operator for the operator of the representation of analytic functions in a bounded convex domain of the complex plane by series of quasi-polynomials and exponents. We also present closely related results on the A. F. Leontiev interpolating function and, more generally, on the the interpolating functional and the corresponding Pommiez operator. We examine cyclic vectors and closed invariant subspaces of the Pommiez operator in weighted spaces of entire functions.

Keywords and phrases: exponential series, analytic function, interpolating functional, Pommiez operator, weighted space of entire functions, cyclic vector, invariant subspace.

AMS Subject Classification: 30B50, 47B37, 47B38, 47A15, 47A16

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Пусть G — ограниченная выпуклая область в комплексной плоскости, $H(G)$ — пространство Фреше всех аналитических в G функций. В середине 1960-х гг. А. Ф. Леонтьев показал (см.

ISSN 0233–6723

[33]), что существует такая последовательность показателей $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, что любую функцию $f \in H(G)$ можно разложить в абсолютно сходящийся в $H(G)$ ряд экспонент:

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(f) e^{\lambda_j z}, \quad z \in G.$$

При этом λ_j являются нулями некоторой целой функции экспоненциального типа, сопряженная диаграмма которой совпадает с замыканием $\overline{G}$ области G. Коэффициенты $c_j(f)$ в этом разложении не могут быть определены однозначно, так как существует бесконечное число линейно независимых последовательностей $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ коэффициентов разложений нулевой функции. Для функций f из собственных подпространств $H(G)$, например, для аналитических в некоторой области, содержащей $\overline{G}$, можно вычислять коэффициенты $c_j(f)$ однозначно с помощью биортогональной системы или интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева. Однако эти способы не могут быть применены к любой функции, аналитической в G. В связи с этим возникает задача о существовании способа нахождения коэффициентов $c_j(f)$ разложений всех функций из $H(G)$ в ряд экспонент, линейно и непрерывно (в некотором смысле) зависящих от f. В операторной постановке данная проблема является проблемой существования линейного непрерывного правого обратного к соответствующему оператору представления, обладающему бесконечномерным ядром. Первая часть настоящего обзора посвящена этой проблеме. Сначала приведены результаты о возможности представления всех аналитических в ограниченной выпуклой области $G \subset \mathbb{C}$ функций рядами из квазиполиномов с показателями в нулях фиксированной целой функции L экспоненциального типа, т.е. идет речь о сюръективности рассматриваемого оператора представления. Автор счел целесообразным привести с доказательством некоторые результаты подобного рода (учитывая при этом и относительную труднодоступность статьи [90], в которой они получены). Для рядов экспонент такие результаты можно найти в монографиях А. Ф. Леонтьева [33, 35] и в обзоре Ю. Ф. Коробейника [20]. Затем мы переходим к проблеме существования линейного непрерывного правого обратного к сюръективному оператору представления рядами из квазиполиномов с показателями в нулях L. Важную роль при этом играет интерполирующий функционал. Он аналогичен интерполирующей функции, только зависит уже от двух комплексных переменных. При этом для его существования необходим определенный избыток роста исходной функции L, контролируемый дополнительным выпуклым компактом. Если этот компакт совпадает с точкой, то такой функционал не существует. И интерполирующая функция, и интерполирующий функционал могут быть определены с помощью операторов Поммье, действующих в пространствах целых функций, реализующих сопряженные к пространствам, в которых производятся разложения. В связи с этим во второй части обзора приведены также результаты, связанные с операторами Поммье. В ней выявлена не только взаимосвязь интерполирующей функции и оператора Поммье. Помимо общих свойств оператора Поммье здесь идет речь и о проблемах, связанных с его динамикой: его коммутантом, циклическими векторами, собственными замкнутыми инвариантными подпространствами.

Всюду в обзоре локально выпуклые пространства рассматриваются над полем комплексных чисел.

2. О представлениях рядами из квазиполиномов и экспонент

Далее изложение будет вестись в терминах теории абсолютно представляющих систем (см. [20]). При этом последовательность $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ элементов локально выпуклого пространства X называется *абсолютно представляющей системой в* X, если любой элемент $x \in X$ можно разложить в абсолютно сходящийся в X (к x) ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j x_j$, $c_j \in \mathbb{C}$.

Ниже G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех аналитических в G функций с топологией компактной сходимости. А. Ф. Леонтьев доказал (см. [33]), что любую функцию $f \in H(G)$, можно разложить в ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j e^{\lambda_j z}$, сходящийся к f в $H(G)$. При этом λ_j, $j \in \mathbb{N}$, — все нули некоторой, не зависящей от f, функции L, сопряженная диаграмма которой совпадает с замыканием G, и каждый из них простой. При этом на L накладывались два ограничения: вполне регулярность роста и «хорошие» оценки снизу модулей производных L в ее нулях. Ю. Ф. Коробейник (см. [23]) доказал, что только при предположении вполне регулярности роста L всякую функцию $f \in H(G)$ можно представить в виде ряда по квазиполиномам с показателями в нулях L, расположенных в кольцах, ограниченных окружностями, на которых $|L|$ имеет «хорошие» оценки снизу. В [23] был использован следующий метод. Сначала с помощью результатов А. Ф. Леонтьева производился выбор такой абсолютно представляющей системы $\{e^{\nu_m z})_{m\in\mathbb{N}}$ в $H(G)$, что ее показатели находились вне объединения колец, пересечение которых с вещественной прямой имеет относительную меру нуль. Далее с помощью вычетов осуществлялось разложение функций $e^{\nu_m z}$ в ряды по квазиполиномам с показателями в нулях L и построение целой функции R типа 0 при порядке 1 с оценками ее модуля в точках ν_m, близкими к верхним. Для произвольной функции $f \in H(G)$, представляемой в $H(G)$ в виде $f(z) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} d_m e^{\nu_m z}$, и соответствующей ей функции $f_1(z) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{R(\nu_m)} e^{\nu_m z}$ для дифференциального оператора $R(D)$ бесконечного порядка с характеристической функцией R выполняется равенство $f = R(D)(f_1)$, что и дает, с учетом разложений функций $e^{\nu_m z}$, представление для f. В. В. Напалков и А. В. Комаров (см. [50]) доказали аналогичный результат для рядов из квазиполиномов с нулями в исключительных кругах для L, содержащих ее нули. При этом существенно использовались результаты В. В. Напалкова (см. [48]) о базисе в ядре оператора свертки с характеристической функцией L, отображающего $H(G+\mathbb{D})$ на $H(G)$ (здесь $\mathbb{D}$ — единичный круг). В этом разделе будут приведены результаты о разложениях в ряды из квазиполиномов (в частности, в ряды экспонент) функций, аналитических в G, полученные в [90]. Метод, примененный здесь, содержит элементы и упомянутых выше методов. Существенным моментом при этом является использование результатов о представительных подпространствах из [41].

Абсолютно представляющие системы подпространств как в общих классах локально выпуклых пространств, так и в конкретных функциональных пространствах исследовались также в работах А. В. Абанина и К. А. Михайлова [2, 4, 5].

2.1. Основные и вспомогательные пространства. Для множества M в $\mathbb{C}$ символами $\operatorname{int} M$ и $\overline{M}$ обозначим, соответственно, внутренность и замыкание M в $\mathbb{C}$. Пусть H_M — опорная функция множества M:

$$H_M(z) := \sup_{w\in M} \operatorname{Re}(zw), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Для области M в $\mathbb{C}$ через $H(M)$ обозначим пространство всех аналитических в M функций с топологией равномерной сходимости на компактах M. С этой топологией $H(M)$ является пространством Фреше, т.е. полным метризуемым локально выпуклым пространством. Если M — компакт в $\mathbb{C}$, то $H(M)$ — пространство всех ростков аналитических на M функций с естественной топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств (см. по поводу пространств аналитических функций обзор В. П. Хавина [61]).

Существенным в дальнейшем будет использование двойственности между пространствами аналитических функций и весовыми пространствами целых функций экспоненциального типа. Пусть M — ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью. Для $n \in \mathbb{N}$ введем банахово пространство

$$[1, H_M)_n := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \;\middle|\; |f|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp(-H_M(z) + |z|/n) < +\infty \right\}.$$

Тогда $[1, H_M)_n \subset [1, H_M)_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и эти вложения непрерывны. Положим

$$[1, H_M) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [1, H_M)_n$$

и введем в $[1, H_M)$ топологию индуктивного предела последовательности пространств $[1, H_M)_n$, $n \in \mathbb{N}$, относительно вложений $[1, H_M)_n$ в $[1, H_M)$. Пусть также

$$[1, H_M]_n := \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) \;\Big|\; \widetilde{|f|}_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp(-H_M(z) - |z|/n) < +\infty \Big\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$[1, H_M] := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [1, H_M]_n.$$

Локально выпуклая топология в $[1, H_M]$ задается последовательностью норм $\widetilde{|\cdot|}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Положим $e_{\mu,p}(z) := z^p \exp(\mu z)$, $e_\mu := e_{\mu,0}$, $\mu, z \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для локально выпуклого пространства X символ X' обозначает топологическое сопряженное к X, а X'_b — сильное сопряженное к X.

Преобразование Лапласа

$$\mathcal{F}(\nu)(z) := \nu(e_z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \nu \in H(\mathbb{C})',$$

является линейным топологическим изоморфизмом $H(\operatorname{int} M)'_b$ на $[1, H_M)$ и $H(\overline{M})'_b$ на $[1, H_M]$ (см., например, [63, теорема 4.5.3]). Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначим индуцированную этим изоморфизмом билинейную форму, устанавливающую двойственность между $H(M)$ и $[1, H_M)$, если M — выпуклая область, и между $H(M)$ и $[1, H_M]$, если M — выпуклый компакт:

$$\langle f, g \rangle := \mathcal{F}^{-1}(g)(f).$$

Для любых $\nu \in H(\mathbb{C})'$, $\mu \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется равенство

$$\langle e_{\mu,p}, \mathcal{F}(\nu) \rangle = \mathcal{F}(\nu)^{(p)}(\mu).$$

Вернемся к ограниченной выпуклой области G, о которой шла речь ранее. Зафиксируем такую последовательность $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ выпуклых компактов в G (с непустой внутренностью), что

$$G_n \subset \operatorname{int} G_{n+1}, \; n \in \mathbb{N}, \quad G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n;$$

введем обозначение $H_n := H_{G_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность норм $p_n(f) := \sup_{z\in G_n} |f(z)|$, $f \in H(G)$, $n \in \mathbb{N}$, задает топологию пространства $H(G)$. Отметим, что $p_n(e_z) = \exp(H_n(z))$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Положим $P := [1, H_G)$. Так как $H(G)$ — пространство Фреше—Шварца (см. [89]), то его топология τ_G задается также последовательностью преднорм

$$|f|_n^* := \sup_{\substack{v\in P,\\ |v|_n\leqslant 1}} \big|\langle f, v\rangle\big|, \quad f \in H(G), \quad n \in \mathbb{N}$$

(мы используем введенные выше обозначения для $M := G$).

Введем пространство векторнозначных последовательностей

$$l_1(H(G)) := \Big\{ X = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \;\Big|\; X \text{ абсолютно суммируемо в } H(G) \Big\}.$$

Локально выпуклую топологию в $l_1(H(G))$ зададим преднормами

$$\widetilde{p}_n(X) := \sum_{j\in\mathbb{N}} p_n(x_j), \quad X = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_1(H(G)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

С этой топологией пространство $l_1(A(G))$ является пространством Фреше (см. [52, предложение 1.4.3]).

Пусть $\mathbb{E} := (E_j)_{j\in\mathbb{N}}$, где E_j — подпространства $H(G)$. Положим

$$l_1(\mathbb{E}) := \Big\{ X = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \prod_{j\in\mathbb{N}} E_j \;\Big|\; X \in l_1(H(G)) \Big\}$$

и снабдим $l_1(\mathbb{E})$ топологией, индуцированной из $l_1(H(G))$. Если подпространства E_j, $j \in \mathbb{N}$, замкнуты в $H(G)$, то $l_1(\mathbb{E})$ — пространство Фреше.

Далее нам понадобятся пространства Кете векторнозначных последовательностей. Пусть $A = (a_{jn})_{j,n\in\mathbb{N}}$ — матрица Кете, т.е. $0 < a_{jn} \leqslant a_{j,n+1}$, $j,n\in\mathbb{N}$, и пусть $\mathbb{B} = ((B_j, \|\cdot\|_j))_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность конечномерных нормированных пространств. Положим

$$\Lambda_1(A,\mathbb{B}) := \left\{ X = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \prod_{j\in\mathbb{N}} B_j \;\middle|\; \pi_n(X) := \sum_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\|_j a_{jn} < +\infty \ \forall n\in\mathbb{N} \right\};$$

$$K_{\infty,n}(A,\mathbb{B}) := \left\{ X = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \prod_{j\in\mathbb{N}} B_j \;\middle|\; \pi_{\infty,n}(X) := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\|_j / a_{jn} < +\infty \right\}, \quad n\in\mathbb{N};$$

$$K_\infty(A,\mathbb{B}) := \operatorname{ind}_{n\to} \Big(K_{\infty,n}(A,\mathbb{B}), \pi_{\infty,n} \Big).$$

Если каждое пространство B_j совпадает с $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, то вместо $\Lambda_1(A,\mathbb{B})$ будем писать $\Lambda_1(A)$. Топология пространства $\Lambda_1(A,\mathbb{B})$ задается последовательностью норм π_n, $n\in\mathbb{N}$; пространство $\Lambda_1(A,\mathbb{B})$, наделенное этой топологией, является пространством Фреше. Если для любого $n\in\mathbb{N}$ существует такое $m\in\mathbb{N}$, что $\lim\limits_{j\to\infty} a_{jn}/a_{jm} = 0$, то $\Lambda_1(A,\mathbb{B})$ является пространством Фреше—Шварца, а $\Lambda_1(A,\mathbb{B})'_b$ можно отождествить с $K_\infty(A,\mathbb{B}')$, где $\mathbb{B}' := (B'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность сильных сопряженных к B_j пространств B'_j (см. [87, лемма 1.2(a)]). При этом двойственность между $\Lambda_1(A,\mathbb{B})$ и $K_\infty(A,\mathbb{B}')$ задается билинейной формой

$$\langle X, Y\rangle := \sum_{j\in\mathbb{N}} y_j(x_j), \quad X = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Lambda_1(A,\mathbb{B}), \quad Y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in K_\infty(A,\mathbb{B}').$$

Далее $(\Lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность непустых попарно непересекающихся подмножеств $\mathbb{C}$. Пусть $\widetilde{\Lambda} := \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \Lambda_j$; предположим, что множество $\widetilde{\Lambda}$ дискретно в $\mathbb{C}$, т.е. не имеет предельных точек в $\mathbb{C}$. Пусть $m : \widetilde{\Lambda} \to \mathbb{N}$ — некоторая функция; $m_j := \sum\limits_{\lambda\in\Lambda_j} m(\lambda)$, $j\in\mathbb{N}$.

Определим конечномерные подпространства квазиполиномов в $H(G)$ с показателями в Λ_j:

$$E_j := \operatorname{span}\left\{ e_{\lambda,p} \;\middle|\; 0 \leqslant p < m(\lambda),\ \lambda\in\Lambda_j \right\}, \quad j\in\mathbb{N}.$$

Заметим, что $\dim E_j = m_j$ для любого $j\in\mathbb{N}$ и $l_1(\mathbb{E})$ — пространство Фреше. Известно (см. [68, гл. IV, 4]), что $(E_j, \tau_G|_{E_j})'$ можно алгебраически отождествить с $P/E_j^\perp$, где $E_j^\perp$ — полярное к E_j множество в P. Известно, что для $j\in\mathbb{N}$

$$E_j^\perp = \left\{ f\in P \;\middle|\; f^{(p)}(\lambda) = 0,\ 0\leqslant p < m(\lambda),\ \lambda\in\Lambda_j \right\}.$$

Двойственность между E_j и $P/E_j^\perp$ задается билинейной формой $\langle\cdot,\cdot\rangle_j$:

$$\langle f, \widetilde{v}\rangle_j := \langle f, v\rangle = \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \sum_{p=0}^{m(\lambda)-1} c_{\lambda,p} v^{(p)}(\lambda), \quad f = \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \sum_{p=0}^{m(\lambda)-1} c_{\lambda,p} e_{\lambda,p} \in E_j, \quad \widetilde{v} = v + E_j^\perp \in P/E_j^\perp.$$

Сопряженное к $l_1(H(G))$ пространство можно алгебраически отождествить с

$$\widetilde{l}_1 := \left\{ V = (v_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset P \;\middle|\; V \text{ равностепенно непрерывно в } P \right\}$$

(см. [68, гл. IV, 10.3]). Так как $H(G)$ является пространством Фреше—Шварца, то

$$\widetilde{l}_1 = \left\{ V = (v_j)_{j\in\mathbb{N}} \;\middle|\; V \text{ ограничено в } P \right\}.$$

При этом двойственность между $l_1(H(G))$ и $\widetilde{l}_1$ задается билинейной формой

$$\langle\langle X, V\rangle\rangle := \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle x_j, v_j\rangle, \quad X\in l_1(H(G)), \quad V\in\widetilde{l}_1.$$

Сопряженное к $l_1(\mathbb{E})$ пространство можно алгебраически отождествить с $\widetilde{l}_1/R$, где $R := l_1(\mathbb{E})^\perp$ — полярное к $l_1(\mathbb{E})$ множество в $\widetilde{l}_1$. Note that

$$R = \Big\{ V = (v_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \prod_{j\in\mathbb{N}} E_j^\perp \;\Big|\; V \text{ не ограничено в } P \Big\}.$$

2.2. Реализация пространства абсолютно суммируемых последовательностей в виде векторнозначного пространства Кете. Существенным для дальнейшего является представление $l_1(\mathbb{E})$ в виде векторнозначного пространства Кете. Оно позволит для некоторых операторов $M_j : H(\overline{G}) \to E_j$ доказать абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} M_j(f)$, а также (с помощью одного результата Р. Майзе [87]) реализовать $l_1(\mathbb{E})$ как пространство Кете числовых последовательностей. Для $\mu \in \mathbb{C}$, $r > 0$ положим

$$S(\mu, r) := \big\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - \mu| < r \big\}, \quad \overline{S}(\mu, r) := \big\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - \mu| \leqslant r \big\}.$$

Через $P(S(\mu, r))$ обозначим пространство P с нормированной топологией, заданной нормой $\sup\limits_{z\in S(\mu,r)} |f(z)|$, $f \in P$.

Пусть $(S(\mu_j, r_j'))_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность таких кругов, что

$$\lim_{j\to\infty} |\mu_j| = \infty, \quad \lim_{j\to\infty} \frac{r_j'}{|\mu_j|} = 0.$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $D_n > 0$, что

$$\sup_{z\in S(\mu_j, r_j')} H_n(z) < H_{n+1}(\mu_j) + D_n, \quad H_n(\mu_j) < \inf_{z\in S(\mu_j, r_j')} H_{n+1}(z) + D_n, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Для пространств E_j положим $\widetilde{E}_j := P(S(\mu_j, r_j'))/E_j^\perp$, $j \in \mathbb{N}$. Пусть $\widetilde{\|\cdot\|}_j$ — факторнорма в $\widetilde{E}_j$. Сопряженное к $\widetilde{E}_j$ пространство можно алгебраически отождествить с E_j. Пусть $(E_j, \widehat{\|\cdot\|}_j)$ — сильное сопряженное к $(\widetilde{E}_j, \widetilde{\|\cdot\|}_j)$ пространство. Из неравенств (1) вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $A = (a_{jn})_{(j,n)\in\mathbb{N}^2}$, где $a_{jn} := \exp H_n(\mu_j)$, $n, j \in \mathbb{N}$. Тогда для*

$$\widehat{\mathbb{E}} := ((E_j, \widehat{\|\cdot\|}_j))_{j\in\mathbb{N}}$$

ЛВП $\Lambda_1(A, \widehat{\mathbb{E}})$ непрерывно вложено в $l_1(\mathbb{E})$.

Согласно [30] последовательность кругов $(S(\nu_j, r_j))_{j\in\mathbb{N}}$, $|\nu_j| \to +\infty$, имеет нулевую линейную плотность, если

$$\frac{1}{r} \sum_{|\nu_j|<r} r_j \to 0 \quad xr \to +\infty.$$

Теорема 2.1. *Пусть $(S(\mu_j, r_j))_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность кругов, обладающая следующими свойствами:*

(i) *$\Lambda_j \subset S(\mu_j, r_j)$ для любого $j \in \mathbb{N}$;*
(ii) *$\lim\limits_{j\to\infty} m_j/|\mu_j| = 0$;*
(iii) *$\lim\limits_{j\to\infty} r_j/|\mu_j| = 0$.*

Существует такая последовательность $(r_j')_{j\in\mathbb{N}}$, что

(iv) *$r_j' > r_j$, $j \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{j\to\infty} r_j'/|\mu_j| = 0$;*
(v) *локально выпуклые пространства $l_1(\mathbb{E})$ и $\Lambda_1(A, \widehat{\mathbb{E}})$ совпадают, если $A = \big(\exp H_n(\mu_j)\big)_{(j,n)\in\mathbb{N}^2}$ и $\widehat{\mathbb{E}} = (E_j, \widehat{\|\cdot\|}_j)$, $(E_j, \widehat{\|\cdot\|}_j)$ — сильное сопряженное к $P(S(\mu_j, r_j'))/E_j^\perp$ пространство.*

Если исходная последовательность $(S(\mu_j, r_j))_{j\in\mathbb{N}}$ имеет нулевую линейную плотность и

(vi) $\limsup\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sum\limits_{|\mu_j|<r} m_j < \infty$,

то r'_j можно выбрать так, что последовательность $(S(\mu_j, r'_j))_{j\in\mathbb{N}}$ также имеет нулевую линейную плотность.

Доказательство. Определим вначале числа $t_j > 0$, $\delta_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, для которых

$$\lim_{j\to\infty} \frac{t_j}{m_j} = 0, \quad \lim_{j\to\infty} \delta_j = \infty, \quad \lim_{j\to\infty} \frac{m_j^2 \delta_j}{|\mu_j| t_j} = 0. \tag{2}$$

Например, можно взять

$$t_j := m_j \left(\frac{m_j}{|\mu_j|}\right)^{1/2}, \quad \delta_j := l \left(\frac{|\mu_j|}{m_j}\right)^{1/4}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$\gamma_j := \delta_j m_j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Вследствие (2)

$$\lim_{j\to\infty} \frac{m_j}{\gamma_j} = 0. \tag{4}$$

Пусть

$$r'_j := \max\{2r_j, t_j\}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Тогда

$$\lim_{j\to\infty} \frac{r'_j}{|\mu_j|} = 0, \qquad r'_j > r_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$r'_j \leqslant \frac{|\mu_j|}{2}, \quad \mu_j \neq 0, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Пусть $S_j := S(\mu_j, r'_j)$, $\widetilde{E}_j := P(S_j)/E_j^{\perp}$, $\widetilde{\|\cdot\|}_j$ — факторнорма в $\widetilde{E}_j$ и $(E_j, \widehat{\|\cdot\|}_j)$ — сильное сопряженное к $(\widetilde{E}_j, \widetilde{\|\cdot\|}_j)$ пространство. Положим

$$\widehat{\mathbb{E}} := \big((E_j, \widehat{\|\cdot\|}_j)\big)_{j\in\mathbb{N}}.$$

По лемме 2.1 вложение $I : \Lambda_1(A, \widehat{\mathbb{E}}) \to l_1(\mathbb{E}))$ непрерывно.

Так как пространства E_j и $\widetilde{E}_j$ конечномерны, то $(\widetilde{E}_j, \widetilde{\|\cdot\|}_j)$ является сильным сопряженным к $(E_j, \widehat{\|\cdot\|}_j)$, $j \in \mathbb{N}$. В силу соотношения

$$\lim_{j\to\infty} a_{jn}/a_{j,n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

сильное сопряженное к $\Lambda_1(A, \widehat{\mathbb{E}})$ пространство можно отождествить с $K_\infty(A, \widetilde{\mathbb{E}})$, где

$$\widetilde{\mathbb{E}} := \big((\widetilde{E}_j, \widetilde{\|\cdot\|}_j)\big)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Сопряженное к $l_1(\mathbb{E})$ пространство можно отождествить с $\widetilde{l}_1/R$, где $\widetilde{l}_1$ — пространство, сопряженное к $l_1(H(G))$, и R — полярное к $l_1(\mathbb{E})$ множество в $\widetilde{l}_1$. При этом двойственность между $l_1(\mathbb{E})$ и $\widetilde{l}_1/R$ задается билинейной формой

$$\langle\langle X, \widetilde{V}\rangle\rangle_0 := \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle x_j, v_j\rangle, \quad X \in \Lambda_1(A, \widehat{\mathbb{E}}), \quad \widetilde{V} = (v_j)_{j\in\mathbb{N}} + R \in \widetilde{l}_1/R,$$

а между $\Lambda_1(A, \widehat{\mathbb{E}})$ и $K_\infty(A, \widetilde{\mathbb{E}})$ — билинейной формой

$$\langle\langle X, \widetilde{V}\rangle\rangle_1 := \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle x_j, \widetilde{v}_j\rangle_j = \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle x_j, v_j\rangle,$$

$$X \in \Lambda_1(A, \widehat{\mathbb{E}}), \quad \widetilde{V} = (\widetilde{v}_j)_{j\in\mathbb{N}} = (v_j + E_j^{\perp})_{j\in\mathbb{N}} \in K_\infty(A, \widetilde{\mathbb{E}}).$$

Если отождествить пространство, сопряженное к $\Lambda_1(A,\widehat{\mathbb{E}})$, с $K_\infty(A,\widetilde{\mathbb{E}})$, а пространство, сопряженное к $l_1(\mathbb{E})$ — с $\widetilde{l}_1/R$, то сопряженное к I отображение I' определяется следующим образом:

$$\langle\langle X, I'(\widetilde{V})\rangle\rangle_1 = \langle\langle I(X), \widetilde{V}\rangle\rangle_0 = \sum_{j\in\mathbb{N}}\langle x_j, v_j\rangle,$$
$$X\in\Lambda_1(A,\widehat{\mathbb{E}}), \quad \widetilde{V} = (v_j)_{j\in\mathbb{N}} + R \in \widetilde{l}_1/R.$$

Значит, $I'(\widetilde{V}) = (v_j + E_j^\perp)_{j\in\mathbb{N}}$, $\widetilde{V}\in\widetilde{l}_1/R$.

Покажем теперь, что отображение $I' : \widetilde{l}_1/R \to K_\infty(A,\widetilde{\mathbb{E}})$ сюръективно. Возьмем $\widetilde{V}\in\widetilde{l}_1/R$. В силу (1) существует n, для которого

$$C := \sup_{j\in\mathbb{N}}\inf_{w_j\in\widetilde{v}_j}\sup_{z\in S_j}|w_j(z)|\exp(-H_n(z)) < \infty.$$

Поэтому найдутся такие $v_j\in\widetilde{v}_j$, $j\in\mathbb{N}$, что

$$|v_j(z)| \leqslant 2C\exp H_n(z), \quad z\in S_j. \tag{7}$$

Далее построим $x_j\in P$, $j\in\mathbb{N}$, удовлетворяющие оценке вида (7) уже на всем $\mathbb{C}$ и такие, что

$$x_j^{(p)}(\lambda) = v_j^{(p)}(\lambda), \quad 0\leqslant p < m(\lambda), \quad \lambda\in\Lambda_j. \tag{8}$$

Возьмем функции $\Theta_j\in C^\infty(\mathbb{C})$, для которых $0\leqslant\Theta_j\leqslant 1$ и

$$\Theta_j(z) := \begin{cases} 1, & \text{если } z\in S(\mu_j,(r_j+r_j')/2),\\ 0, & \text{если } z\notin S_j.\end{cases}$$

Так как $|z-t|\geqslant(r_j-r_j')/2$ для всех $z\notin S_j$, $t\in S(\mu_j,(r_j+r_j')/2)$, то функции Θ_j можно определить так, что найдется константа $C_1>0$, для которой

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}|\overline{\partial}\Theta_j(z)| \leqslant \frac{C_1}{r_j'-r_j}, \quad j\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

Функции x_j будем искать в виде $x_j = \Theta_j v_j - f_j g_j$, где

$$f_j(z) := \left(\frac{z}{\gamma_j}\right)^{m_j}\prod_{\lambda\in\Lambda_j}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)^{m(\lambda)}, \quad z\in\mathbb{C}, \tag{10}$$

и $g_j\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$, $j\in\mathbb{N}$. Уравнение $\overline{\partial}x_j = 0$ равносильно $\overline{\partial}g_j = f_j^{-1}\overline{\partial}\Theta_j v_j =: \alpha_j$. Заметим, что в силу (5), (6) для $\lambda\in\Lambda_j$, $j\in\mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$|\lambda - z| \geqslant \frac{r_j'-r_j}{2}, \quad z\notin S\left(\mu_j, \frac{r_j'+r_j}{2}\right), \tag{11}$$

$$\frac{|\lambda|}{|z|}\leqslant 3, \quad \frac{1}{|z|}\leqslant 2/|\mu_j|, \quad z\in S_j. \tag{12}$$

Вследствие (7), (9)–(12) для всех $j\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}$ получим:

$$|\alpha_j(z)| \leqslant \frac{2CC_1}{r_j'-r_j}\left(\frac{2\gamma_j}{|\mu_j|}\right)^{m_j}\prod_{\lambda\in\Lambda_j}\left(\frac{6|z|}{r_j'-r_j}\right)^{m(\lambda)}\exp H_n(z) =$$
$$= \frac{2CC_1}{r_j'-r_j}\left(\frac{12\gamma_j}{|\mu_j|(r_j'-r_j)}|z|\right)^{m_j}\exp H_n(z) \leqslant \frac{C_2}{r_j'-r_j}\big(1+\beta_j|z|\big)^{m_j}\exp H_n(z),$$

где $C_2 := 2CC_1$ и

$$\beta_j := \frac{12\gamma_j}{|\mu_j|(r_j'-r_j)}. \tag{13}$$

В силу (13), (5)

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \left|\alpha_j(z)\right|^2 \exp\big(-2H_n(z) - 2m_j\log(1+\beta_j|z|)\big)d\omega(z) \leqslant \left(\frac{C_2}{r'_j - r_j}\right)^2 \pi(r'_j)^2 \leqslant 4\pi C_2^2 =: C_3 < \infty$$

(ω — мера Лебега в $\mathbb{C}$).

Так как $\overline{\partial}\alpha_j = 0$ в $\mathbb{C}$ и $H_n(z) + m_j\log(1+\beta_j|z|)$ — субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция, то (см. [63, теорема 4.4.2]) существует такая функция $g_j \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$, что $\overline{\partial} g_j = \alpha_j$ и

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |g_j(z)|^2 \exp\big(-2H_n(z) - 2m_j\log(1+\beta_j|z|) - 2\log(1+|z|^2)\big)d\omega(z) \leqslant C_3. \tag{14}$$

Вследствие выбора g_j функция x_j — целая в $\mathbb{C}$ и удовлетворяет равенствам (8). Оценим $|x_j|$.

Положим для $j \in \mathbb{N}$

$$\zeta_j := \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \frac{m(\lambda)}{|\lambda|}, \quad b_j(z) := \left(m_j\beta_j + \frac{m_j}{\gamma_j} + \zeta_j\right)|z| + \log(1+|z|^2).$$

В силу (7), (14) и неравенств $\log t < \log(1+t) < t$ для всех $t > 0$ имеем

$$\left(\int\limits_{\mathbb{C}} |x_j(z)|^2 \exp\big(-2H_n(z) - 2b_j(z)\big)d\omega(z)\right)^{1/2} \leqslant 2C\left(\int\limits_{\mathbb{C}} (1+|z|^2)^{-2}d\omega(z)\right)^{1/2} + C_3, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Так как $|x_j|$ — субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция, то существует константа C_4, для которой

$$|x_j(z)| \leqslant C_4\exp(H_n^0(z) + b_j^0(z)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Здесь для функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ запишем $f^0(z) := \sup\limits_{|t-z|\leqslant 1} f(t)$. Поскольку функция H_n выпукла и положительно однородна степени 1, то для $C_5 := \sup\limits_{|t|\leqslant 1} H_n(t) < \infty$ выполняется неравенство $H_n^0 \leqslant C_5 + H_n$. Таким образом, найдется такая постоянная C_6, что

$$|x_j(z)| \leqslant C_6\exp(H_n(z) + b_j(z) + m_j\beta_j + \frac{m_j}{\gamma_j} + \zeta_j), \quad j \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{15}$$

Вследствие (6)

$$\zeta_j \leqslant \frac{2m_j}{|\mu_j|}, \quad j \in \mathbb{N},$$

и, с учетом (ii),

$$\lim_{j\to\infty} \zeta_j = 0.$$

Согласно (4) имеем

$$\lim_{j\to\infty} \frac{m_j}{\gamma_j} = 0.$$

Из (13), (3) и (5) следуют неравенства

$$m_j\beta_j \leqslant \frac{24(m_j)^2\delta_j}{|\mu_j|t_j}, \quad j \in \mathbb{N},$$

а из (2) — равенство

$$\lim_{j\to\infty} m_j\beta_j = 0.$$

Возьмем $\tau_n > 0$, для которого $H_{n+1}(z) - H_n(z) \geqslant \tau_n|z|$, $z \in \mathbb{C}$. Существует такое $j_0 \in \mathbb{N}$, что

$$m_j\beta_j + \frac{m_j}{\gamma_j} + \zeta_j < \frac{\tau_n}{2}, \quad j > j_0.$$

Из (15) получаем:

$$\sup_{j>j_0}\sup_{z\in\mathbb{C}}|x_j(z)|\exp(-H_{n+1}(z))\leqslant C_6\sup_{j>j_0}\sup_{z\in\mathbb{C}}\exp\left(\left(m_j\beta_j+\frac{m_j}{\beta_j}+\zeta_j-\frac{\tau_n}{2}\right)|z|\right)\times$$
$$\times\sup_{z\in\mathbb{C}}\exp\left(\log(1+|z|^2)-\frac{\tau_n}{2}|z|\right)\sup_{j>j_0}\exp\left(m_j\beta_j+\frac{m_j}{\gamma_j}+\zeta_j\right)<\infty. \quad (16)$$

Возвращаясь к отображению $I':\widetilde{l}_1/R\to K_\infty(A,\widetilde{\mathbb{E}})$, положим $y_j:=v_j$, $1\leqslant j\leqslant j_0$, и $y_j:=x_j$, $j>j_0$. Из (16) и того факта, что $v_j\in P$, $1\leqslant j\leqslant j_0$, вытекает, что

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\sup_{z\in\mathbb{C}}|y_j(z)|\exp(-H_{n_1}(z))<\infty \quad (17)$$

для некоторого $n_1>n$. Пусть $\widetilde{Y}:=(y_j)_{j\in\mathbb{N}}+R$. Вследствие (17) имеем $\widetilde{Y}\in\widetilde{l}_1/R$, а в силу (8) — $I'(\widetilde{Y})=(y_j+E_j^\perp)_{j\in\mathbb{N}}=\widetilde{V}$. Таким образом, I' отображает $\widetilde{l}_1/R$ на $K_\infty(A,\widetilde{\mathbb{E}})$. Поэтому $I'(\widetilde{l}_1/R)$ замкнуто в $K_\infty(A,\widetilde{\mathbb{E}})$. Так как $\Lambda_1(A,\widehat{\mathbb{E}})$ — пространство Фреше—Шварца, то согласно [68, гл. IV, 7.7] $\Lambda_1(A,\widehat{\mathbb{E}})$ замкнуто в $l_1(\mathbb{E})$. Кроме того, $\Lambda_1(A,\widehat{\mathbb{E}})$ плотно в $l_1(\mathbb{E})$. Значит, отображение $I:\Lambda_1(A,\widehat{\mathbb{E}})\to l_1(\mathbb{E})$ биективно. По теореме об открытом отображении I — топологический изоморфизм $\Lambda_1(A,\widehat{\mathbb{E}})$ на $l_1(\mathbb{E})$.

Пусть исходная последовательность кругов $(B(\mu_j,r_j))_{j\in\mathbb{N}}$ имеет нулевую линейную плотность и выполняется условие (vi). Тогда

$$\lim_{r\to\infty}r^{-1}\sum_{|\mu_j|<r}r_j=0.$$

В силу (2) и (vi) (см. (5)) имеем

$$\lim_{r\to\infty}r^{-1}\sum_{|\mu_j|<r}r'_j=0,$$

т.е. последовательность $S_j=S(\mu_j,r'_j)$, $j\in\mathbb{N}$, имеет нулевую линейную плотность. □

Из теоремы 2.1 и доказательства предложения 1.4 в [87] вытекает и реализация $l_1(\mathbb{E})$ в виде пространства Кете числовых последовательностей. При этом существенно используются базисы Ауэрбаха в $(E_j,\widehat{\|\cdot\|}_j)$ (см. [79, с. 291]), позволяющие заменять элементы конечномерных пространств E_j их коэффициентами разложения по таким базисам («рассыпать» E_j).

Следствие 2.1. *Пусть последовательность кругов* $(S(\mu_j,r_j))_{j\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяет условиям* (i)–(iii) *теоремы* 2.1 *и условию*

(vii) $\lim\limits_{j\to\infty}(\log j)/|\mu_j|=0.$

Тогда имеют место следующие утверждения:

(a) *Существуют такие нормы $|\cdot|_j$ на пространствах E_j, что локально выпуклые пространства $l_1(\mathbb{E})$ и $\Lambda_2(A,\mathcal{E})$ совпадают, если $A:=(\exp H_n(\mu_j))_{(j,n)\in\mathbb{N}^2}$ и $\mathcal{E}:=((E_j,|\cdot|_j))_{j\in\mathbb{N}}$.*

(b) *$l_1(\mathbb{E})$ топологически изоморфно $\Lambda_1(B)$ для «растянутой» матрицы $B=(b_{ln})_{(l,n)\in\mathbb{N}^2}$, $b_{ln}:=\exp H_n(\mu_j)$, $n\in\mathbb{N}$,*

$$\sum_{s=0}^{j-1}m_s<l\leqslant\sum_{s=0}^{j}m_s,\quad m_0=0,\quad j\in\mathbb{N}.$$

Как известно (см. [19, § 2]), для любой абсолютно представляющей системы $(e_{\lambda_j})_{j\in\mathbb{N}}$ (с различными λ_j) в $H(G)$ существует абсолютно сходящееся нетривиальное разложение нуля по системе $(e_{\lambda_j})_{j\in\mathbb{N}}$. (Например, если $z=\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}c_je^{\lambda_jz}$ и ряд сходится абсолютно в $H(G)$, то $0=\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}c_j\lambda_j^2e^{\lambda_jz}$, и не все коэффициенты $c_j\lambda_j^2$ равны 0.) Наличие абсолютно сходящегося нетривиального разложения нуля по системе экспонент в $H(G)$ не влечет того факта, что она является абсолютно представляющей в $H(G)$ (см. [19, с. 1071]). Но если λ_j являются нулями целой функции экспоненциального типа с индикатором, не превосходящим H_G, то это действительно так (см. [19]). Равносильности этих свойств посвящено довольно много работ (см. [1, 19, 42]). Привлекательность условия *«существует нетривиальное разложение нуля по системе* $(e_{\lambda_j})_{j\in\mathbb{N}}$*»* заключается в его простоте. Именно, вычисляя интегралы

$$\int\limits_{\Gamma_j} \frac{e^{\lambda z}}{L(\lambda)} d\lambda$$

с помощью вычетов, легко показать, что оно выполняется, если $|L|$ имеет «хорошие» оценки снизу на некоторой расширяющейся последовательности контуров Γ_j, $j \in \mathbb{N}$. Ниже мы приведем результаты об этой взаимосвязи при представлениях рядами из квазиполиномов.

Обозначим через $H_c(Q_n)$ банахово пространство всех аналитических в $Q_n := G + S(0, 1/n)$ и непрерывных на $\overline{Q}_n$ функций с нормой

$$s_n(f) := \sup_{z\in\overline{Q}_n} |f(z)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $H(\overline{G}) := \mathrm{ind}_{n\to} H_c(Q_n)$.

Лемма 2.2. *Пусть последовательность кругов* $(B^j)_{j\in\mathbb{N}}$ *имеет нулевую линейную плотность. Существует такая абсолютно представляющая система* $(e_{\nu_m})_{m\in\mathbb{N}}$ *в* $H(\overline{G})$, *что все показатели* ν_m *не принадлежат* $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} B^j$.

Доказательство. Согласно [33, гл. I, § 3.5; гл. V, § 3.1] найдется такая последовательность $(\nu_m)_{m\in\mathbb{N}}$, что $\nu_m \notin \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} S^j$ и $(e_{\nu_m})_{m\in\mathbb{N}}$ — абсолютно представляющая система в $H(G + S(0, 1))$. Согласно [26] $(e_{\nu_m})_{m\in\mathbb{N}}$ — абсолютно представляющая система в каждом пространстве $H(G + S(0, 1/n))$, $n \in \mathbb{N}$, а, значит, и в $H(\overline{G})$. □

2.3. Условия представимости аналитических функций рядами из квазиполиномов. Следующий результат, по сути, вытекает из факторизационной теоремы Гротендика (см. [69, теорема 6.5.1]).

Лемма 2.3. *Пусть* $(e_{\nu_m})_{m\in\mathbb{N}}$ — *абсолютно представляющая система в* $H(\overline{G})$. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существуют такие* $n_1 \in \mathbb{N}$ *и постоянная* B_n, *что для каждого* $f \in H_c(Q_n)$ *найдется последовательность* $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *в* $\mathbb{C}$, *для которой* $f = \sum\limits_{m\in\mathbb{N}} c_m e_{\nu_m}$ *(ряд абсолютно сходится в* $H(\overline{G})$*) и*

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} |c_m| s_{n_1}(e_{\nu_m}) \leqslant B_n s_n(f).$$

При доказательстве этой леммы существенно используется ретрактивность свойства абсолютной сходимости ряда в счетном каноническом индуктивном пределе нормированных пространств (см. [40, теорема 5]) и инвариантность факторпространства относительно индуктивных пределов (последнее отмечено К. Флоретом, см. [76, с. 183]).

В дальнейшем L — целая функция из $[1, H_G]\setminus\{0\}$, нулевое множество $V(L)$ которой бесконечно. Через $p(\lambda)$ обозначаем кратность нуля $\lambda \in V(L)$.

Пусть a — целая (в $\mathbb{C}$) функция экспоненциального типа, сопряженная диаграмма которой содержится в выпуклом компакте $K \subset \mathbb{C}$. Символ $a(D)$ обозначает оператор свертки с характеристической функцией a:

$$a(D)(g)(z) := \mathcal{F}^{-1}(a)(g(\cdot + z)), \quad z \in G, \quad g \in H(G + K).$$

Оператор $a(D)$ линейно и непрерывно отображает $H(G+K)$ в $H(G)$ (см. [18, 22]). Отметим, что для любых $p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mu \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$a(D)(e_{\mu,p}) = \sum_{k=0}^{p} C_p^k a^{(p-k)}(\mu) e_{\mu,k}.$$

Отсюда следует, что для произвольных $f \in E_j$, $j \in \mathbb{N}$ также имеем $a(D)(f) \in E_j$ (E_j такие же, как в п. 2.1). Ниже D — оператор дифференцирования.

Теорема 2.2. *Пусть Λ_j, $j \in \mathbb{N}$, — непустые попарно непересекающиеся подмножества $V(L)$; $\widetilde{\Lambda} := \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \Lambda_j$ (не обязательно $\widetilde{\Lambda} = \Lambda$). Пусть $m(\lambda) \in \mathbb{N}$, $m(\lambda) \leqslant p(\lambda)$ для любого $\lambda \in \widetilde{\Lambda}$,*

$$E_j := \operatorname{span}\left\{e_{\lambda,p} \;\middle|\; 0 \leqslant p < m(\lambda),\ \lambda \in \Lambda_j\right\}, \quad j \in \mathbb{N};$$

$(B(\mu_j, r_j))_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность кругов нулевой линейной плотности, для которой

$$\Lambda_j \subset S(\mu_j, r_j) \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N} \text{ и } \quad \lim_{j\to\infty} \frac{m_j}{|\mu_j|} = 0,$$

где $m_j := \sum\limits_{\lambda\in\Lambda_j} m(\lambda)$, $j \in \mathbb{N}$. Следующие утверждения равносильны:

(i) *в $H(G)$ существует абсолютно представляющая система, состоящая из квазиполиномов $(w_{jq})_{0\leqslant q<m_j, j\in\mathbb{N}}$, где $w_{jq} \in E_j$, $f_j \in E_j$, $j \in \mathbb{N}$;*

(ii) *$(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — абсолютно представляющая система из подпространств в $H(G)$;*

(iii) *существует такое $\mu \notin \widetilde{\Lambda}$, что $e_\mu = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} f_j$, $j \in \mathbb{N}$, где ряд абсолютно сходится в $H(G)$;*

(iv) *в $H(G)$ существует абсолютно сходящееся нетривиальное разложение нуля по системе $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$.*

Доказательство. Приведем доказательство справедливости импликации (iv)⇒(i). Пусть существует абсолютно сходящееся в $H(G)$ разложение

$$0 = \sum_{j\in\mathbb{N}} y_j, \quad y_j = \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \sum_{p=0}^{m(\lambda_j)-1} a_{\lambda,p} e_{\lambda,p}, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

в котором не все квазиполиномы y_j нулевые.

Для $\lambda \in \widetilde{\Lambda}$ выберем круги $S(\lambda, d(\lambda))$ так, чтобы для $\gamma(\lambda) := \partial S(\lambda, d(\lambda))$ выполнялось условие $\gamma(\lambda) \cap \gamma(\mu) = \emptyset$, если $\lambda \neq \mu$, и $S(\lambda, d(\lambda)) \cap (\Lambda \setminus \{\lambda\}) = \emptyset$. Введем составные контуры $\gamma_j := \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda_j} \gamma(\lambda)$, $j \in \mathbb{N}$.

Покажем сначала, что существуют полиномы a_j, для которых

$$y_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_j} \frac{a_j(t) e_t(\cdot)}{L_j(t)} dt, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

где

$$L_j(z) := \frac{L(z)}{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda_j} (z-\lambda)^{p(\lambda)-m(\lambda)}}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. По теореме о вычетах для произвольного многочлена a_j и любого $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_j} \frac{a_j(t) e_t(z)}{L_j(t)} dt = \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \frac{1}{(m(\lambda)-1)!} \sum_{p=0}^{m(\lambda)-1} C^p_{m(\lambda)-1} \left(l_\lambda a_j\right)^{(m(\lambda)-p-1)}(\lambda) e_{\lambda,p}(z).$$

При этом

$$l_\lambda(t) := \frac{(t-\lambda)^{m(\lambda)}}{L_j(t)}, \quad \lambda \in \Lambda_j.$$

Поэтому (19) эквивалентно равенствам

$$\sum_{s=0}^{p} C^s_p l_\lambda^{(p-s)}(\lambda) a_j^{(s)}(\lambda) = a_{\lambda, m(\lambda)-p-1} p! (m(\lambda)-p-1)!, \quad 0 \leqslant p < m(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda_j. \tag{20}$$

Для каждого $\lambda \in \Lambda_j$ получим из (20) линейную систему с $m(\lambda)$ уравнениями, $m(\lambda)$ неизвестными $a_j^{(p)}(\lambda)$, $0 \leqslant p < m(\lambda)$, и с определителем $\Delta(\lambda) = (l_\lambda(\lambda))^{m(\lambda)} \neq 0$. Таким образом, найдутся числа $a_j^{(p)}(\lambda)$, $0 \leqslant p < m(\lambda)$ (причем единственные), которые удовлетворяют (20). Поэтому в качестве

a_j можно взять соответствующие полиномы Эрмита. Заметим, что радиусы $d(\lambda)$ окружностей $\gamma(\lambda)$ в равенствах (19) можно выбирать как угодно малыми.

Пусть $j_0 \in \mathbb{N}$ и $\lambda_0 \in \Lambda_{j_0}$ таковы, что $y_{j_0} \neq 0$ и $\sum\limits_{p=0}^{m(\lambda_0)-1} a_{\lambda_0,p} e_{\lambda_0,p} \neq 0$. Пусть p_0 — максимальный индекс p, для которого $a_{\lambda_0,p} \neq 0$. Положим

$$L_0(z) := \frac{L(z)}{(z-\lambda)^{p(\lambda_0)-p_0-1}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Так как $L \in [1, H_G]$, то также $L_0 \in [1, H_G]$. Аналогично [33, гл. IV, § 1.2] введем функции

$$L_{\lambda,p}(z) := \frac{1}{p!(m(\lambda)-p-1)!} \sum_{s=0}^{m(\lambda)-p-1} s! C^s_{m(\lambda)-p-1} (l_\lambda a_j)^{(m(\lambda)-p-s-1)}(\lambda) \frac{L_0(z)}{(z-\lambda)^{s+1}}, \tag{21}$$
$$z \in \mathbb{C}, \quad 0 \leqslant p < m(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

При $\lambda = \lambda_0$, $0 \leqslant p < m(\lambda_0)$ из (20) следует, что

$$(l_{\lambda_0} a_{j_0})^{(m(\lambda_0)-p-s-1)}(\lambda_0) = 0, \quad \text{если} \quad s + p > p_0.$$

Поэтому в (21) при $s > p_0$ слагаемое для $L_{\lambda_0,p}$, содержащее $(z-\lambda_0)^{-s-1}$, равно 0. Отсюда следует, что для всех $0 \leqslant p < m(\lambda)$ функция $L_{\lambda,p}$, $\lambda \in \widetilde{\Lambda}$ корректно определена равенством (21). Вследствие $L_0 \in [1, H_G]$ также имеем $L_{\lambda,p} \in [1, H_G]$, $0 \leqslant p < m(\lambda)$, $\lambda \in \widetilde{\Lambda}$. Пусть функционалы $\varphi_{\lambda,p} \in H(\overline{G})'$ таковы, что $\mathcal{F}(\varphi_{\lambda,p}) = L_{\lambda,p}$, $0 \leqslant p < m(\lambda)$, $\lambda \in \widetilde{\Lambda}$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ определим оператор $M_j : H(\overline{G}) \to E_j$ равенством

$$M_j(f) := \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \sum_{p=0}^{m(\lambda)-1} \varphi_{\lambda,p}(f) e_{\lambda,p}, \quad f \in H(\overline{G}).$$

Так как $\varphi_{\lambda,p} \in H(\overline{G})'$, то линейный оператор M_j непрерывен из $H(\overline{G})$ в $H(G)$.

Покажем, что для любой функции $f \in H(\overline{G})$ ряд $\sum\limits_{j \in \mathbb{N}} M_j(f)$ абсолютно сходится в $H(G)$ и, следовательно, определяет линейный непрерывный оператор $M := \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} M_j : H(\overline{G}) \to H(G)$.

По теореме о вычетах

$$M_j(e_\mu)(z) = \frac{L_0(\mu)}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_j} \frac{a_j(t) e_t(z)}{(\mu - t) L_j(t)} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mu \notin \Lambda_j, q \quad j \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

При этом для любых $j \in \mathbb{N}$, $\mu \notin \Lambda_j$ радиусы $d(\lambda)$ окружностей $\gamma(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_j$, выбираем столь малыми, чтобы μ не лежало в $S(\lambda, 2d(\lambda))$. Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$, где последовательность $(|\lambda_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ не убывает; $k_j := \max\{k \mid \lambda_k \in \Lambda_j\}$, $j \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности можно предположить, что μ_j (и r_j) перенумерованы так, что последовательность $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ возрастает. Имеем

$$\lim_{j \to \infty} \frac{r_j}{|\mu_j|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{j \to \infty} \frac{|\lambda_{k_j}|}{|\mu_j|} = 1.$$

Поскольку

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\log k_j}{|\lambda_{k_j}|} = 0 \quad \text{и} \quad j \leqslant k_j, j \in \mathbb{N},$$

то

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\log j}{|\mu_j|} = \lim_{j \to \infty} \frac{\log j}{|\lambda_{k_j}|} \lim_{j \to \infty} \frac{|\lambda_{k_j}|}{|\mu_j|} = 0.$$

Так как верхняя плотность последовательности $\widetilde{\Lambda}$ конечна, то

$$\limsup_{r \to \infty} r^{-1} \sum_{|\mu_j| < r} m_j < \infty.$$

Поэтому Λ_j, $S(\mu_j, r_j)$, m_j удовлетворяют условиям теоремы 2.1 и следствия 2.1. Пусть $S_j := S(\mu_j, r'_j)$, $j \in \mathbb{N}$, — последовательность кругов нулевой линейной плотности, существующая согласно теореме 2.1; $(E_j, \widehat{\|\cdot\|}_j)$ — сильное сопряженное к $(\widetilde{E}_j, \widetilde{\|\cdot\|}_j) := P(S_j)/E_j^{\perp}$; $\widehat{\mathbb{E}} := ((E_j, \widehat{\|\cdot\|}_j))_{j\in\mathbb{N}}$ и $A := (a_{jn})_{(j,n)\in\mathbb{N}^2}$, $a_{jn} := \exp H_n(\mu_j)$, $j, n \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. Выберем окружности $\gamma(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_j$, так, чтобы $\gamma_j := \bigcup_{\lambda\in\Lambda_j} \gamma(\lambda) \subset S_j$. Заметим, что

$$\frac{a_j(t)e_t(z)}{(\mu - t)L_j(t)} = \sum_{s\geqslant 0} \frac{(t-\mu_j)^s}{(\mu-\mu_j)^{s+1}} \frac{a_j(t)e_t(z)}{L_j(t)}, \quad t \in \gamma_j, \quad z \in G,$$

для любого $\mu \notin S(\mu_j, 2r'_j)$, причем последний ряд сходится равномерно (по t) на γ_j. Таким образом, вследствие (22) для всех $\mu \notin S(\mu_j, 2r'_j)$, $z \in G$ получим:

$$M_j(e_\mu)(z) = \frac{L_0(\mu)}{2\pi i} \sum_{s\geqslant 0} \frac{1}{(\mu-\mu_j)^{s+1}} \int_{\gamma_j} \frac{(t-\mu_j)^s a_j(t) e_t(z)}{L_j(t)} dt = L_0(\mu) \sum_{s\geqslant 0} \frac{(D-\mu_j I)^s (y_j)(z)}{(\mu-\mu_j)^{s+1}} \tag{23}$$

(здесь I — тождественное отображение в $H(G)$).

Оценим нормы $|||D - \mu_j I|||_j$ операторов $D - \mu_j I$ в $(E_j, \widehat{\|\cdot\|}_j)$. Пусть $(D - \mu_j I)'$ — сопряженный к $D - \mu_j I$ оператор в $\widetilde{E}_j$; U_j — оператор умножения на функцию $z - \mu_j$ в P: $U_j(v)(z) := (z - \mu_j)v(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $v \in P$. Так как $\langle (D - \mu_j I)(f), v\rangle = \langle f, U_j(v)\rangle$ для любых $v \in P$, $f \in A(G)$, то для любых $f \in E_j$, $\widetilde{v} = v + E_j^{\perp} \in \widetilde{E}_j$ выполняются равенства

$$\bigl\langle f, (D-\mu_j I)'(\widetilde{v})\bigr\rangle_j = \bigl\langle (D-\mu_j I)(f), \widetilde{v}\bigr\rangle_j = \bigl\langle (D-\mu_j I)(f), v\bigr\rangle = \bigl\langle f, U_j(v)\bigr\rangle = \bigl\langle f, U_j(v) + E_j^{\perp}\bigr\rangle_j.$$

Отсюда следует, что

$$(D-\mu_j I)'(\widetilde{v}) = U_j(v) + E_j^{\perp} \quad \text{для всех} \quad \widetilde{v} = v + E_j^{\perp} \in \widetilde{E}_j.$$

Пусть $|||\cdot|||'_j$ — операторная норма в пространстве линейных непрерывных операторов в $\widetilde{E}_j$. Тогда

$$|||(D-\mu_j I)'|||'_j = \sup_{\|\widetilde{v+E_j^{\perp}}\|_j \leqslant 1} \|\widetilde{U_j(v) + E_j^{\perp}}\|_j = \sup_{\|\widetilde{v+E_j^{\perp}}\|_j \leqslant 1} \inf_{w\in E_j^{\perp}} \sup_{z\in S_j} \bigl|(z-\mu_j)v(z) + w(z)\bigr| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|\widetilde{v+E_j^{\perp}}\|_j \leqslant 1} \inf_{w\in E_j^{\perp}} \sup_{z\in S_j} \bigl|(z-\mu_j)v(z) + (z-\mu_j)w(z)\bigr| \leqslant \sup_{z\in S_j} |z-\mu_j| = r'_j.$$

Таким образом, $|||D - \mu_j I|||_j = |||(D-\mu_j I)'|||'_j \leqslant r'_j$. Поэтому для всех целых $s \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$|||(D-\mu_j I)^s|||_j \leqslant (r'_j)^s.$$

Положим

$$\widetilde{r}_j := \max(r'_j, |\mu_j|^{-2}), \quad \widetilde{S}_j := S(\mu_j, 2\widetilde{r}_j).$$

Тогда для любых $\mu \notin \widetilde{S}_j$ и $j \in \mathbb{N}$

$$\|\widehat{M_j(e_\mu)}\|_j \leqslant |L_0(\mu)| \sum_{s\geqslant 0} \frac{(r'_j)^s}{(2\widetilde{r}_j)^{s+1}} \|\widehat{y_j}\|_j \leqslant |\mu_j|^2 |L_0(\mu)| \|\widehat{y_j}\|_j. \tag{24}$$

Поскольку $\lim_{j\to\infty} |\lambda_{k_j}|/|\mu_j| = 1$ и показатель сходимости последовательности $\widetilde{\Lambda}$ не больше 1, то

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} (1 + |\mu_j|)^{-2} < \infty.$$

Поэтому последовательность кругов $(\widetilde{S}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ имеет нулевую линейную плотность. Согласно лемме 2.2 в $H(\overline{G})$ существует такая абсолютно представляющая система $(e_{\nu_m})_{m\in\mathbb{N}}$, что

$$\{\nu_m \mid m\in\mathbb{N}\}\cap\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\widetilde{S}_j\Big)=\emptyset.$$

Зафиксируем $n\in\mathbb{N}$. Согласно лемме 2.3 существуют такие $n_1\in\mathbb{N}$ и постоянная B_n, что для любой функции $f\in H_c(Q_n)$ найдется последовательность $(c_m(f))_{m\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{C}$, для которой

$$f=\sum_{m\in\mathbb{N}}c_m(f)e_{\nu_m}$$

(ряд абсолютно сходится в $H(\overline{G})$) и

$$\sum_{m\in\mathbb{N}}|c_m(f)|s_{n_1}(e_{\nu_m})\leqslant B_n s_n(f).$$

Зафиксируем $f\in H_c(Q_n)$. Поскольку M_j, $j\in\mathbb{N}$, — линейный непрерывный оператор из $H(\overline{G})$ в $H(G)$, то

$$M_j(f)=\sum_{m\in\mathbb{N}}c_m(f)M_j(e_{\nu_m})$$

для любого $j\in\mathbb{N}$ (ряд абсолютно сходится в $A(G)$). По (24) имеем

$$\|\widehat{M_j(f)}\|_j\leqslant\sum_{m\in\mathbb{N}}\big|c_m(f)\big|\|\widehat{M_j(e_{\nu_m})}\|_j\leqslant|\mu_j|^2\|\widehat{y_j}\|_j\sum_{m\in\mathbb{N}}\big|c_m(f)\big|\,\big|L_0(\nu_m)\big|.$$

Так как $L_0\in[1,H_G]$, то найдется константа $\widetilde{A}_{n_1}$, для которой

$$|L_0(\mu)|\leqslant\widetilde{A}_{n_1}\exp(H_G(\mu)+|\mu|/n_1),\quad \mu\in\mathbb{C}.$$

Поэтому для любого $j\in\mathbb{N}$

$$\|\widehat{M_j(f)}\|_j\leqslant\widetilde{A}_{n_1}|\mu_j|^2\|\widehat{y_j}\|_j\sum_{m\in\mathbb{N}}|c_m(f)|\exp\left(H_G(\nu_m)+\frac{|\nu_m|}{n_1}\right)=$$
$$=\widetilde{A}_{n_1}|\mu_j|^2\|\widehat{y_j}\|_j\sum_{m\in\mathbb{N}}|c_m(f)|s_{n_1}(e_{\nu_m})\leqslant\widetilde{A}_{n_1}|\mu_j|^2\|\widehat{y_j}\|_j s_n(f).$$

Заметим, что для любого $k\in\mathbb{N}$ существует такая постоянная $\widetilde{D}_k$, что

$$a_{jk}|\mu_j|^2\leqslant\widetilde{D}_k a_{j,k+1}\quad\text{для всех } j\in\mathbb{N}.$$

Согласно лемме 2.1 для каждого $k\in\mathbb{N}$ найдутся $k_1\in\mathbb{N}$ и константа C_k, для которых

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}p_k(f_j)\leqslant C_k\sum_{j\in\mathbb{N}}a_{j,k_1}\|\widehat{f_j}\|_j,\quad (f_j)_{j\in\mathbb{N}}\in l_1(\mathbb{E}).$$

Так как $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}\in l_1(\mathbb{E})$, то по теореме 2.1 $\sum_{j\in\mathbb{N}}\|\widehat{y_j}\|_j a_{jk}<\infty$ для любого $k\in\mathbb{N}$. Таким образом, для любых $n,k\in\mathbb{N}$ найдется такая постоянная $\widetilde{B}=\widetilde{B}(n,k)$, что для каждой функции $f\in H_c(Q_n)$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}p_k(M_j(f))\leqslant\widetilde{B}s_n(f).\tag{25}$$

Отсюда следует, что для любого $f\in H(\overline{G})$ ряд $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}M_j(f)$ абсолютно сходится в $H(G)$. Поэтому корректно определен линейный оператор

$$M: H(\overline{G})\to H(G),\quad M(f):=\sum_{j\in\mathbb{N}}M_j(f).$$

В силу (25) и теоремы Банаха—Штейнгауза функционал M непрерывен из $H(\overline{G})$ в $H(G)$.

Теперь покажем, что M — оператор свертки с характеристической функцией $a_0 \not\equiv 0$. Из (22) следует, что для $\mu \notin \widetilde{\Lambda}$

$$\mu M(e_\mu) - D(L(e_\mu)) = L_0(\mu) \sum_{j\in\mathbb{N}} y_j = 0.$$

Если $\mu \in \Lambda_j$, $j \in \mathbb{N}$ и $\mu \neq \lambda_0$, то

$$M(e_\mu) = \frac{L_0(t)}{L_j(t)}\bigg|_{t=\lambda_0} a_j(\mu) e_{\lambda_0}.$$

Если $\mu = \lambda_0$, то

$$M(e_{\lambda_0}) = p! a_{\lambda_0, p_0} \frac{L(t)}{(t-\lambda_0)^{p(\lambda_0)}}\bigg|_{t=\lambda_0} e_{\lambda_0}. \tag{26}$$

Таким образом, для каждого $\mu \in \mathbb{C}$ найдется $a_0(\mu) \in \mathbb{C}$, для которого $L(e_\mu) = a_0(\mu)e_\mu$. При этом $a_0(\lambda_0) \neq 0$ в силу (26) и, следовательно, $a_0 \not\equiv 0$.

Сопряженным к M оператором M' из $P \cong H(G)'$ в $[1, H_G] \cong H(\overline{G})'$ является оператор умножения на функцию a_0: $M'(f)(z) = a_0(z) f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $f \in P$. Согласно [24, предложение 7] функция a_0 принадлежит множеству

$$\left\{ v \in A(\mathbb{C}) \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}: \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|v(z)| \exp H_n(z)}{\exp(H_G(z) + |z|/m)} < \infty \right\}.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $A(\varepsilon) > 0$, для которой $|a_0(z)| \leqslant A(\varepsilon)\exp(\varepsilon|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Значит, $a_0 \in [1, 0]$. Так как $M(e_\mu) = a_0(D)(e_\mu)$ для каждого $\mu \in \mathbb{C}$ и множество $\{e_\mu \mid \mu \in \mathbb{C}\}$ полно в $H(\overline{G})$, то $M = a_0(D)$ на $H(\overline{G})$.

Поскольку $a_0 \in [1, 0] \setminus \{0\}$, то согласно [18] оператор $M = a_0(D) : H(Q) \to H(Q)$ сюръективен для любой выпуклой области Q в $\mathbb{C}$. Значит, M отображает $H(\overline{G})$ на $H(\overline{G})$. Поэтому для каждого $f \in H(\overline{G})$ существует такое $g \in H(\overline{G})$, что $f = M(g) = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} M_j(g)$. При этом $M_j(g) \in E_j$, $j \in \mathbb{N}$, и ряд абсолютно сходится в $H(G)$. В силу [41, теорема A] $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — абсолютно представляющая система подпространств в $H(G)$. Используя следствие 2.1, получим утверждение (i). □

Отметим, что при $a_j \equiv 1$ для любого $j \in \mathbb{N}$ и $m(\lambda) = p(\lambda)$ для каждого $\lambda \in V(L)$ функции $L_{\lambda,p}$ введены А. Ф. Леонтьевым (см. [33]). В этом случае (см. [33, гл. 4, § 1.2]) система $(\varphi_{\lambda,p})_{0\leqslant p<p(\lambda),\lambda\in V(L)}$ биортогональна к $(e_{\lambda,p})_{0\leqslant p<p(\lambda),\lambda\in V(L)}$.

Обратимся теперь к целым функциям вполне регулярного роста. Согласно [30, гл. 3] целая в $\mathbb{C}$ функция f экспоненциального типа с индикатором

$$h_f(z) := \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log|f(rz)|}{r}$$

называется *функцией вполне регулярного роста* (при порядке 1), если существует такая последовательность $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ кругов нулевой линейной плотности, что вне $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} S_j$ имеет место асимптотическое равенство

$$\log|f(z)| = h_f(z) + o(|z|), \quad |z| \to \infty.$$

Согласно [30, гл. III], [29] исключительное множество кругов $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ для функции f вполне регулярного роста можно выбрать так, что они попарно не пересекаются, $S_j \cap V(f) \neq \emptyset$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $V(L) \subset \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} S_j$ ($V(f)$ — нулевое множество f).

Из равенств $M(e_\mu) = a_0(\nu)e_\mu$, $\mu \in \mathbb{C}$ (см. доказательство теоремы 2.2), вполне регулярности роста функции $a_0 \in [1, 0]$ вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются предположения теоремы* 2.2. *Каждое из утверждений* (i)–(iv) *теоремы* 2.2 *влечет следующее*:

(v) *L является функцией вполне регулярного роста с индикатором H_G.*

В заключение этого раздела приведем результат о существовании абсолютно представляющей системы из квазиполиномов в $H(G)$, показатели которой суть нули целой функции экспоненциального типа с сопряженной диаграммой, равной $G+K$, где K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$.

Теорема 2.4. *Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, L — целая функция вполне регулярного роста с индикатором H_G+H_K и с нулевым множеством $V(L)$, $p(\lambda)$ — порядок нуля $\lambda\in V(L)$; $S(\mu_j,r_j), j\in\mathbb{N}$, — такое исключительное множество кругов нулевой линейной плотности, что $V(L)\subset\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}S(\mu_j,r_j)$, $\Lambda_j:=V(L)\cap S(\mu_j,r_j)\neq\emptyset$ для любого $j\in\mathbb{N}$ и*

$$\log|L(z)|=H_G(z)+H_K(z)+o(|z|),\quad |z|\to\infty, z\notin\bigcup_{j\in\mathbb{N}}S(\mu_j,r_j).$$

Тогда в $H(G)$ существует абсолютно представляющая система из квазиполиномов $(w_{jq})_{0\leqslant q<q_j,j\in\mathbb{N}}$, где

$$w_{jq}\in E_j:=\operatorname{span}\left\{e_{\lambda,p}\mid 0\leqslant p<p(\lambda),\ \lambda\in\Lambda_j\right\},\quad 0\leqslant q<q_j,\quad q_j:=\sum_{\lambda\in\Lambda_j}p(\lambda),\quad j\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Положим

$$\widetilde{y}_j(z):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(\mu_j,r_j)}\frac{e_t(z)}{L(t)}dt,\quad z\in\mathbb{C},\quad j\in\mathbb{N}.$$

Из теоремы о вычетах следует, что $\widetilde{y}_j\in E_j$ и $y_j\neq 0$ для любого $j\in\mathbb{N}$. Стандартным образом показывается, что ряд $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}\widetilde{y}_j$ абсолютно сходится в $H(G+K)$ к 0. Значит, в $H(G+K)$ существует абсолютно сходящееся нетривиальное разложение нуля по системе $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Пусть $n_L(S(\mu,r))$ — число нулей L (с учетом кратности) в круге $S(\mu,r)$. Согласно [30, гл. 3, § 3, теорема 4] существует конечный предел $\lim\limits_{r\to+\infty}n_L(S(0,r))/r$. Поэтому

$$\lim_{j\to\infty}\frac{n_L(S(\mu_j,r_j))}{|\mu_j|}=\lim_{j\to\infty}\frac{q_j}{|\mu_j|}=0.$$

По теореме 2.2 (при $m(\lambda)=p(\lambda)$, $\lambda\in V(L)$) в $H(G+K)$ существует абсолютно представляющая система из квазиполиномов $v_{jq}\in E_j$, $0\leqslant q<q_j$, $j\in\mathbb{N}$. Следуя [26], возьмем какую-либо целую в $\mathbb{C}$ функцию a вполне регулярного роста (при порядке 1) с индикатором H_K. Согласно [18] оператор свертки $a(D):H(G+K)\to H(G)$ сюръективен. Значит, система $w_{jq}:=a(D)(w_{jq})\in E_j$, $0\leqslant q<q_j$, $j\in\mathbb{N}$, является абсолютно представляющей в $H(G)$. □

3. Линейный непрерывный правый обратный оператор для оператора представления

В этом разделе речь пойдет о проблеме существования линейного непрерывного правого обратного оператора (ЛНПО) для оператора представления $R:l_1(\mathbb{E})\to H(G)$, как в предыдущем разделе. Отметим два подхода к решению этой задачи. Один использует структурную теорию пространств Фреше. Данная задача — это проблема расщепляемости короткой точной последовательности

$$0\xrightarrow{\operatorname{Ker}}R\hookrightarrow l_1(\mathbb{E})\xrightarrow{R}H(G)\xrightarrow{0}$$

(вторая стрелка слева обозначает вложение). Если реализовать участвующие в ней пространства в виде степенных рядов конечного или бесконечного типов, то удается использовать условия расщепляемости коротких точных последовательностей соответствующих пространств степенных рядов (см., например, [102]). Возможность конформно (биголоморфно) отобразить единичный круг на G позволяет получить удобную реализацию $H(G)$ в виде пространства Кете числовых последовательностей. Наличие дополнительного выпуклого компакта K дает возможность удобно реализовать (также в терминах конформного отображения, если K не является точкой) и ядро оператора представления R. Это проясняет также, почему условия существования ЛНПО для оператора представления формулируются с помощью выпуклых конформных отображений. Описанный подход использовался в [27].

Второй подход более конструктивен. Он сводит данную задачу к условиям существования некоторой целой функции двух комплексных переменных, а по сути, к наличию интерполирующего функционала, задаваемого этой функцией. В данном обзоре идет речь о результатах, полученных вторым методом. При его использовании условия существования ЛНПО для оператора представления формулируются в терминах конформных отображений. При применении первого метода условия на конформные отображения возникают вследствие реализации ограничений на фундаментальные системы преднорм, задающие топологии пространств степенных рядов, а второго — при реализации абстрактных условий существования специальных семейств субгармонических функций (происходящих тоже из условий непрерывности соответствующих операторов). В этом параграфе приводятся в основном результаты работы [43].

Далее, по-прежнему, G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$; L — целая (в $\mathbb{C}$) функция экспоненциального типа вполне регулярного роста с сопряженной диаграммой $\overline{G}+K$ и с нулевым множеством $V(L)$. Зафиксируем множество попарно непересекающихся кругов $S_j := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z-\mu_j| < r_j\right\}$, $j \in \mathbb{N}$, нулевой линейной плотности, обладающее следующими свойствами: $\Lambda_j := S_j \cap V(L) \neq \emptyset$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $V(L) \subset \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} S_j$ и вне $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} S_j$ имеет место асимптотическое равенство

$$\log|L(z)| = H_G(z) + H_K(z) + o(|z|), \quad z \to \infty.$$

Считаем, что последовательность $(|\mu_j|)_{j\in\mathbb{N}}$ не убывает. Тогда

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\log j}{|\mu_j} = 0.$$

Обозначим через $p(\lambda)$ порядок нуля $\lambda \in V(L)$. Положим

$$E_j := \operatorname{span}\left\{e_{\lambda,p} \;\middle|\; 0 \leqslant p < p(\lambda),\ \lambda \in \Lambda_j\right\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Оператор представления $R(F) := \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j$, $F = (f_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_1(\mathbb{E})$, линейно и непрерывно отображает $l_1(\mathbb{E})$ в $H(G)$ и по теореме 2.4 он сюръективен. Далее речь пойдет об условиях, при которых $R : l_1(\mathbb{E}) \to H(G)$ имеет линейный непрерывный правый обратный.

3.1. Интерполирующий функционал, задаваемый целой функцией двух комплексных переменных. В [33, гл. IV, § 2] А. Ф. Леонтьев ввел интерполирующую функцию, задаваемую некоторой целой функцией экспоненциального типа.

Пусть U — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, $0 \in U$; f — целая функция экспоненциального типа, сопряженная диаграмма которой совпадает с U. Интерполирующая функция $\omega_f : \mathbb{C} \times H(U) \to \mathbb{C}$ определяется равенством

$$\omega_f(z,x) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \left(\int\limits_0^t x(t-\xi) e^{z\xi}\, d\xi \right) \gamma_f(t)\, dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad x \in H(U).$$

Здесь C — замкнутая выпуклая кривая, содержащая в своей внутренности U, функция x аналитична на замыкании внутренности C, γ_f — преобразование Бореля функции f. Внутренний интеграл берется по отрезку $[0,t]$. Функция $\omega_f(z,x)$ — целая по переменной z.

Отметим следующую теорему единственности (см. [33, теорема 1]), которая будет применена в разделе 4.

Теорема 3.1. *Если f имеет бесконечно много нулей и для $x \in H(U)$ функция $\omega_f(z,x)/f(z)$ является целой по z, то $x = 0$.*

Определим аналог интерполирующей функции, который задается уже целой функцией двух комплексных переменных.

Определение 3.1. Пусть целая в $\mathbb{C}^2$ функция $\mathcal{Q}$ такова, что $\mathcal{Q}(\cdot,z)\in[1,H_G)$ для любого $z\in\mathbb{C}$. Зафиксируем какую-либо точку $t_0\in G$. *$\mathcal{Q}$-Интерполирующим функционалом* назовем отображение $\Omega_{\mathcal{Q}}:\mathbb{C}^2\times H(G)\to\mathbb{C}$, задаваемое равенством

$$\Omega_{\mathcal{Q}}(\mu,z,f):=e^{-zt_0}\mathcal{F}^{-1}\big(\mathcal{Q}(\cdot,z)\big)_t\left(\int\limits_{t_0}^{t}f(t_0+t-\xi)e^{\mu\xi}d\xi\right),\quad \mu,z\in\mathbb{C},\quad f\in H(G).$$

Отметим некоторые свойства $\Omega_{\mathcal{Q}}$.

Лемма 3.1.

(i) *Для любых $\mu,z\in\mathbb{C}$ имеем $\Omega_{\mathcal{Q}}(z,z,e_\mu)=q(\mu,z)$, где q — целая в $\mathbb{C}^2$ функция, для которой*

$$\mathcal{Q}(\mu,z)-\exp((\mu-z)t_0)\mathcal{Q}(z,z)=q(\mu,z)(\mu-z).$$

(ii) *$\Omega_{\mathcal{Q}}(\mu,z,\cdot)\in H(G)'$ для любых $\mu,z\in\mathbb{C}$.*

(iii) *Пусть функция $\mathcal{Q}\in H(\mathbb{C}^2)$ такова, что отображение $z\mapsto\mathcal{Q}(\cdot,z)$ из $\mathbb{C}$ в $[1,H_G)$ ограничено на каждом компакте в $\mathbb{C}$ (т.е. для всякого компакта $D\subset\mathbb{C}$ найдется $n\in\mathbb{N}$, для которого $\sup\limits_{z\in D}\sup\limits_{\mu\in\mathbb{C}}\big|\mathcal{Q}(\mu,z)\big|\exp\big(-H_G(\mu)+|\mu|/n\big)<+\infty$). Тогда $\Omega_{\mathcal{Q}}(\cdot,\cdot,f)\in H(\mathbb{C}^2)$ для любого $f\in H(G)$.*

Для функции $\mathcal{Q}$, удовлетворяющей предположениям предыдущей леммы, введем операторы

$$\Pi_j(f):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_j}\frac{\Omega_{\mathcal{Q}}(t,t,f)e_t(\cdot)}{L(t)}dt,\quad f\in H(G),\quad j\in\mathbb{N}.$$

Согласно теории вычетов $\Pi_j(f)\in E_j$ для $j\in\mathbb{N}$, $f\in H(G)$.

Из непосредственных оценок сверху для $|\Pi_j(f)|$ следует, что линейные операторы Π_j непрерывны в $H(G)$. Следующая лемма показывает, что при некоторых дополнительных ограничениях на $\mathcal{Q}$ последовательность операторов Π_j, $j\in\mathbb{N}$, обладает более сильным свойством, чем равностепенная непрерывность.

Лемма 3.2. *Предположим, что функция $\mathcal{Q}$ такова, что $\mathcal{Q}(\cdot,z)\in[1,H_G)$ для любого $z\in\mathbb{C}$ и удовлетворяет следующим условиям: $\mathcal{Q}(z,z)=L(z)$, $z\in\mathbb{C}$, и для любого $n\in\mathbb{N}$ найдутся такие $m\in\mathbb{N}$ и $C<\infty$, что*

$$\big|\mathcal{Q}(\mu,z)\big|\leqslant C\exp\left(H_G(\mu)-\frac{|\mu|}{m}+H_K(z)+\frac{|z|}{n}\right),\quad \mu,z\in\mathbb{C}.$$

Тогда для любого $s\in\mathbb{N}$ существуют такие $k\in\mathbb{N}$ и $B<\infty$, что

$$p_s(\Pi_j(f))\leqslant Bp_k(f)\exp\left(-\frac{|\mu_j|}{k}\right),\quad f\in H(G),\quad j\in\mathbb{N}.$$

Заметим, что если функция $\mathcal{Q}$ удовлетворяет предположениям предыдущей леммы, то

$$\Pi_j(e_\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_j}\frac{\mathcal{Q}(\mu,t)e_t(\cdot)}{(\mu-t)L(t)}dt,\quad j\in\mathbb{N},\quad \mu\notin\bigcup_{l\in\mathbb{N}}\overline{S_l}.$$

Поскольку линейные операторы Π_j непрерывны в $H(G)$ и множество

$$\left\{e_\mu\;\Big|\;\mu\in\mathbb{C}\setminus\Big(\bigcup_{l\in\mathbb{N}}\overline{S_l}\Big)\right\}$$

полно в $H(G)$, операторы Π_j не зависят от выбора точки $t_0\in G$ в определении интерполирующего функционала.

3.2. Характеристики граничного поведения выпуклых конформных отображений. Приведем некоторые вспомогательные сведения о характеристиках граничного поведения конформных (биголоморфных) отображений выпуклых областей и дополнений выпуклых компактов в $\mathbb{C}$ на единичный круг $\mathbb{D} := \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\big\}$.

Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}$, отличная от $\mathbb{C}$, φ — конформное отображение единичного круга $\big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\big\}$ на Ω, $\Omega_r = \varphi\big(\big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\big\}\big)$, $0 < r < 1$. Из леммы Шварца вытекает, что все компакты Ω_r выпуклы. Как показано в [94, 1.4], для любого $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{H_\Omega(a) - H_{\Omega_r}(a)}{1-r} =: d_\Omega(a).$$

Пусть теперь Ω — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, отличный от точки, ψ — такое конформное отображение $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ на $\mathbb{C} \setminus \Omega$, что $\psi(\infty) = \infty$. Положим $\Omega_r = \mathbb{C} \setminus \psi\big(\big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geqslant r\big\}\big)$, $0 < r < +\infty$. Все компакты Ω_r выпуклы. В [45] показано, для любого $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, существует конечный предел

$$\lim_{r\to 1+0} \frac{H_{\Omega_r}(\theta) - H_\Omega(a)}{1-r} =: d_\Omega(a).$$

Лемма 3.3 (см. [94]). *Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}$, отличная от $\mathbb{C}$, и φ — конформное отображение $\mathbb{D}$ на Ω. Следующие утверждения равносильны*:

(i) *функция d_Ω ограничена на единичной окружности $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$;*
(ii) $\sup\limits_{|z|<1} |\varphi'(z)| < \infty$.

Для выпуклых компактов имеет место аналогичный результат (см. [45, лемма 8]).

Лемма 3.4. *l Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, отличный от точки, а ψ — такое конформное отображение $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ на $\mathbb{C} \setminus \Omega$, что $\psi(\infty) = \infty$. Следующие условия равносильны*:

(i) *функция $1/d_\Omega$ ограничена на единичной окружности $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$;*
(ii) $\inf\limits_{|z|>1} |\psi'(z)| > 0$.

Отметим также локальные свойства функций d_Ω, связанные с их реакцией на угловые точки.

Замечание 3.1. (i) Пусть $\Omega \neq \mathbb{C}$ — выпуклая область, содержащая 0. В [94, пример 4.3] был отмечен следующий факт.

Предположим, что $\zeta \in \partial G$ — угловая точка ∂G, т.е. существуют такие $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, что $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$, $\mathrm{Re}(\zeta e^{i\theta_j}) = H_G(e^{i\theta_j})$, $j = 1, 2$, и

$$\Omega \subset W(\theta_1, \theta_2) := \Big\{ w \in \mathbb{C} \;\Big|\; \mathrm{Re}(we^{i\theta_j}) < H_G(e^{i\theta_j}),\ j = 1, 2 \Big\},$$

и угол $W(\theta_1, \theta_2)$ — наименьший с такими свойствами. Тогда $d_\Omega(e^{i\theta}) = \infty$ для любого $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$.

(ii) Пусть Ω — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью и ψ — конформное отображение $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ на $\mathbb{C} \setminus \Omega$, для которого $\psi(\infty) = \infty$. Пусть $\zeta \in \partial K$ — угловая точка $\partial\Omega$, т.е. существуют такие $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, что $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$, $\mathrm{Re}(\zeta e^{i\theta_j}) = H_K(e^{i\theta_j})$, $j = 1, 2$, и

$$\Omega \subset \overline{W}(\theta_1, \theta_2) := \Big\{ w \in \mathbb{C} \;\Big|\; \mathrm{Re}(we^{i\theta_j}) \leqslant H_K(e^{i\theta_j}),\ j = 1, 2 \Big\},$$

и угол $\overline{W}(\theta_1, \theta_2)$ — наименьший с такими свойствами. Согласно [45, замечание 7] $d_\Omega(e^{i\theta}) = 0$ для любого $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$.

(iii) Если $\Omega := [-1, 1]$ и $\psi(z) := (z + 1/z)/2$, то $d_\Omega(a) = 0$, если $a \notin \{-i, i\}$, и $d_\Omega(-i) = d_\Omega(i) = 1$.

3.3. Критерии существования и формулы для правого обратного оператора к оператору представления.

Теорема 3.2.

I. *Если компакт K совпадает с точкой, то оператор представления $R : l_1(\mathbb{E}) \to H(G)$ не имеет ЛНПО.*

II. *Пусть* $0 \in G$, *компакт* K *отличен от точки,* φ — *конформное отображение единичного круга* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ *на* G, ψ — *конформное отображение* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ *на* $\mathbb{C} \setminus K$, *обладающее свойством* $\psi(\infty) = \infty$. *Следующие утверждения равносильны*:

(i) *оператор представления* $R : l_1(\mathbb{E}) \to H(G)$ *имеет ЛНПО*;

(ii) *существует такая функция* $\mathcal{Q} \in H(\mathbb{C}^2)$, *что* $\mathcal{Q}(z, z) = L(z)$ *и для любого* $n \in \mathbb{N}$ *найдутся такие* $m \in \mathbb{N}$ *и* $C > 0$, *что*

$$\left|\mathcal{Q}(\mu, z)\right| \leqslant C \exp\left(H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} + H_K(z) + \frac{|z|}{n}\right), \quad \mu, z \in \mathbb{C}.$$

(iii) *существует позитивно однородная плюрисубгармоническая в* $\mathbb{C}^2$ *функция* $\mathcal{P}$, *для которой* $H_G(z) + H_K(z) = \mathcal{P}(z, z)$ *и для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *найдется такое* $m \in \mathbb{N}$, *что*

$$\mathcal{P}(\mu, z) \leqslant H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} + H_K(z) + \frac{|z|}{n}, \quad \mu, z \in \mathbb{C}.$$

(iv) $\sup\limits_{|z|<1} |\varphi'(z)| < \infty$, $\inf\limits_{|z|>1} |\psi'(z)| > 0$.

(v) $\sup\limits_{|z|=1} d_G(z) < \infty$, $\inf\limits_{|z|=1} d_K(z) > 0$.

III. *Справедливы следующие утверждения*:

(vi) *если функция* $\mathcal{Q}$ *такая, как в* II(ii), *то оператор*

$$f \mapsto \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_j} \frac{\Omega_{\mathcal{Q}}(t, t, f) e_t(\cdot)}{L(t)} dt\right)_{j \in \mathbb{N}}$$

является ЛНПО к $R : l_1(\mathbb{E}) \to H(G)$.

(vii) *если* $\Pi : A(G) \to l_1(\mathbb{E})$ — *правый обратный к оператору* $R : l_1(\mathbb{E}) \to A(G)$, *то существует единственная функция* $\mathcal{Q}$, *как в* II(ii), *для которой*

$$\Pi(f) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_j} \frac{\Omega_{\mathcal{Q}}(t, t, f) e_t(\cdot)}{L(t)} dt\right)_{j \in \mathbb{N}}, \quad f \in H(G).$$

Роль плюрисубгармонической функции $\mathcal{P}$, как в условии (iii), и (относительную) эффективность ее использования, проясняет, например, следующее доказательство утверждения I (при условии, что мы уже доказали равносильность утверждений (i) и (iii)).

Без ограничения общности можно считать, что $K = \{0\}$. В этом случае $H_K \equiv 0$. Предположим, что оператор $R : l_1(\mathbb{E}) \to H(G)$ имеет ЛНПО. Тогда существует плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^2$ функция $\mathcal{P}$, удовлетворяющая условиям (iii). Положим $v_1(z) := \mathcal{P}(1, z) - H_G(1)$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда $v_1(1) \geqslant 0$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $m \geqslant n$, что $v_1(z) \leqslant |z|/n - 1/m$, $z \in \mathbb{C}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что $v_1 \leqslant 0$ на $\mathbb{C}$. Кроме того, $v_1(0) < 0$ и $v_1(1) \geqslant 0$, что противоречит принципу максимума для субгармонических функций.

При доказательстве импликации (iii)⇒(ii) применяется следующая модификация теоремы о продолжении (см. [63, теорема 4.4.3], [31, теорема 7.1]; [101, лемма 1.4.4]).

Теорема 3.3. *Пусть* v — *плюрисубгармоническая функция в* $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *и* Σ — *комплексное линейное подпространство в* $\mathbb{C}^n$ *коразмерности* k. *Для любой аналитической функции* f *на* Σ, *для которой*

$$\int\limits_{\Sigma} |f|^2 \exp(-v)\, d\sigma < \infty$$

($d\sigma$ *обозначает меру Лебега на* Σ), *существует такая аналитическая функция* F *на* $\mathbb{C}^n$, *что* $F = f$ *на* Σ *и*

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n} |F(z)|^2 (1 + |z|^2)^{-3k} \exp(-v_1(z)) d\omega(z) \leqslant C \int\limits_{\Sigma} |f|^2 \exp(-v) d\sigma,$$

где $v_1(z) := \sup\limits_{|t|\leqslant 1} v(z+t)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $d\omega$ — *мера Лебега в* $\mathbb{C}^n$,

$$|z| := \left(\sum_{s=1}^{n} |z_s|^2\right)^{1/2}, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

а константа C *не зависит от* f.

По поводу результатов, связанных с приведенной теоремой о продолжении, см. также [70].

Отметим следующую очевидную связь функции $\mathcal{P}$, как в (iii), с существованием специальных семейств субгармонических функций.

Лемма 3.5. *Утверждение* (iii) *теоремы* 3.2 *равносильно следующему*: *существуют такие субгармонические в* $\mathbb{C}$ *функции* u_t, $t \in \mathbb{C}$, *и* v_t, $t \in \mathbb{C}$, *что* $u_t(t) \geqslant 0$, $v_t(t) \geqslant 0$, *и для любого* $n \in \mathbb{N}$ *найдется* $m \in \mathbb{N}$, *для которого*

$$u_t(z) \leqslant H_G(z) - \frac{|z|}{m} - H_G(t) + \frac{|t|}{n}, \quad z, t \in \mathbb{C},$$
$$v_t(z) \leqslant H_K(z) + \frac{|z|}{n} - H_K(t) - \frac{|t|}{m}, \quad z, t \in \mathbb{C}.$$

Семейства субгармонических функций подобного рода стали широко применяться в связи с использованием $\overline{\partial}$-техники при решении задач о существовании ЛНПО к $\overline{\partial}$-оператору, к операторам свертки в пространствах аналитических функций (см. [82, 88, 92, 95]).

При доказательстве теоремы 3.2 существенно используется следующее описание ядра оператора представления.

Теорема 3.4. *Следующие утверждения равносильны*:

(i) $Y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Ker} R$;

(ii) *существует такая функция* $a \in [1, H_K]$, *что*

$$y_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_j} \frac{a(t) e_t(\cdot)}{L(t)} dt, \quad j \in \mathbb{N}.$$

При этом отображение $T(a) := \big(a(D)(\widetilde{y}_j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ *является линейным топологическим изоморфизмом* $[1, H_K]$ *на* $\operatorname{Ker} R$ (*если топологию в* $\operatorname{Ker} R$ *индуцировать из* $l_1(\mathbb{E})$).

Отметим также равенства

$$e_z = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{L(z)}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_j} \frac{e_t(\cdot)}{(z-t)L(t)} dt, \quad z \notin V(L), \quad \gamma_j := \bigcup_{\lambda\in\Lambda_j} \gamma(\lambda),$$

где окружность $\gamma(\lambda) := \big\{t \in \mathbb{C} \mid |t-\lambda| = r(\lambda)\big\}$ лежит во внешности окружности $\gamma(\nu)$, если $\lambda \neq \nu$, а z лежит во внешности всех окружностей $\gamma(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_j$, $j \in \mathbb{N}$. При этом ряд абсолютно сходится в $H(G+K)$ (см. [23, доказательство теоремы 1]).

Приведенное описание $\operatorname{Ker} R$ объясняет появление функции $\mathcal{Q}$, как в условии (ii) теоремы 3.2 (в частности, оно существенно используется при доказательстве импликации (i)$\Rightarrow$(ii)). Поясним это в случае, когда все нули функции L простые. Обозначим их через λ_j, $j \in \mathbb{N}$. Предположим, что оператор $R : l_1 \to H(G)$ имеет ЛНПО. Тогда сопряженный к нему оператор $R' : [1, H_G) \to K_\infty(A, \widetilde{E})$ имеет линейный непрерывный левый обратный T. Если $e_{(j)} := (\delta_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}$, — орты в $K_\infty(A, \widetilde{E})$ (в данном случае это пространство числовых последовательностей), то для функций $f_j := T(e_{(j)})$ выполняются равенства $e_\mu = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} f_j(\mu) e_{\lambda_j}$ (ряд сходится абсолютно в $H(G)$). Отсюда вытекает, что $0 = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} f_j(\mu)(\mu - \lambda_j) e_{\lambda_j}$ для любого $\mu \in \mathbb{C}$ (ряд сходится абсолютно в $H(G)$). Значит, вследствие теоремы 3.4 для любого $\mu \in \mathbb{C}$ найдется целая функция $a_\mu \in [1, H_K]$, для которой выполняется равенство $a_\mu(\lambda_j) = L'(\lambda_j)(\mu - \lambda_j)f_j(\mu)$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Поэтому для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$ имеем

$$a_\mu(z)e_z = a(D)(e_z) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{L(z)}{(z-\lambda_j)L'(\lambda_j)} a_\mu(\lambda_j)e_{\lambda_j} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{L(z)}{z-\lambda_j}(\mu-\lambda_j)f_j(\mu)e_{\lambda_j}$$

(ряд сходится абсолютно в $H(G)$). Функция $\mathcal{Q}(\mu, z) := a_\mu(z)$ удовлетворяет условиям (ii) теоремы 3.2.

Замечание 3.2. Пусть компакт K отличен от точки. Оператор представления $R : l_1(\mathbb{E}) \to H(G)$ не обладает ЛНПО, если ∂G или ∂K имеет угловую точку.

Согласно [96, пример 2.8] условия (v) теоремы 3.2 выполняются, а значит, R имеет ЛНПО, если ∂G и ∂K принадлежат классу $C^{1,\lambda}$ для некоторого $\lambda > 0$.

Результаты о существовании ЛНПО к оператору представления рядами экспонент были получены также для пространства ростков всех функций, аналитических на выпуклом локально замкнутом множестве в $\mathbb{C}$ и на выпуклом локально замкнутом множестве в $\mathbb{C}^N$ $(N > 1)$, опорная функция которого является логарифмическим потенциалом (см. [93]), на выпуклом ограниченном множестве в $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью, обладающем счетным базисом окрестностей из выпуклых областей (см. [46]). Доказательства в указанных работах используют метод, описанный выше: проблема наличия ЛНПО к оператору представления сводится к условию существования продолжения исходной функции с нулями — показателями рассматриваемых рядов экспонент до функции двух комплексных переменных с нужными оценками ее модуля сверху, что равносильно наличию специальной плюрисубгармонической в $\mathbb{C}^2$ функции и, в свою очередь, существованию двух специальных семейств (плюри)субгармонических функций с локальными оценками снизу и глобальными — сверху. Одно из этих семейств связано с множеством, на котором аналитичны функции из рассматриваемого пространства, а второе — с дополнительным компактом. Продолжающая целая функция дает возможность с помощью соответствующего интерполирующего функционала выписать формулы для коэффициентов разложений, линейно и непрерывно зависящих от разлагаемой функции. Аналитическая реализация условий существования указанных семейств (плюри)субгармонических функций также осуществляется посредством изучения граничного поведения соответствующих выпуклых конформных отображений (для многих переменных — (плюри)комплексных функций Грина), определямых рассматриваемыми выпуклыми множествами. Описанный метод был применен также к представлениям распределений и ультрараспределений типа Берлинга на многомерном параллелепипеде в $\mathbb{R}^N$ (см. [91]). Для пространства функций, аналитических на ограниченной выпуклой области и полиномиального роста вблизи ее границы, аналогичная проблема исследована в [7]. В [44] решена задача о существовании линейного непрерывного левого обратного к оператору сужения на счетных индуктивных пределах весовых банаховых пространств целых функций, двойственная к задаче о наличии ЛНПО к оператору представления. В [3] аналогичная проблема решена для оператора сужения на весовых пространствах Фреше целых функций. В [9] (см. также [10]) с помощью описанного метода были получены критерии существования ЛНПО к оператору представления рядами из квазимономов функций, аналитических в ограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}$.

Задача о наличии ЛНПО к оператору представления рядами экспонент нашла приложения в проблеме существования ЛНПО к оператору свертки в пространствах аналитических функций (см. [27, 83]), в задаче Коши для уравнений в частных производных (см. [25]), в проблеме продолжения бесконечно дифференцируемых функций (см. [81]).

4. Оператор Поммье и его динамические свойства

4.1. Свойства оператора Поммье. В предыдущем разделе, в частности, шла речь о роли интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева и интерполирующего функционала в представлениях аналитических функций рядами по квазиполиномам, в частности, рядами экспонент. Далее будет показано, что интерполирующие функция и функционал могут быть определены посредством некоторого разностного отношения, называемого *оператором Поммье*, заданного в двойственном пространстве. Соответствующий подход к такому определению будет описан в п. 4.2. Предварительно изучим оператор Поммье в счетных индуктивных пределах весовых пространств Фреше целых функций. Пространства такого рода часто возникают в комплексном анализе как реализации различных функциональных пространств; они интересны и сами по себе. Результаты, приведенные в пп. 4.1–4.2, получены в [11].

Для непрерывной функции $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ и функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ положим

$$p_v(f) := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(v(z))}.$$

Пусть непрерывные функции $v_{n,k} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ таковы, что $v_{n,k+1} \leqslant v_{n,k} \leqslant v_{n+1,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$. Определим весовые пространства

$$E_n := \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) \;\Big|\; p_{v_{n,k}}(f) < +\infty \ \forall k \in \mathbb{N} \Big\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Топология пространства E_n задается последовательностью норм $p_{v_{n,k}}$, $k \in \mathbb{N}$; пространство E_n, снабженное этой топологией, является пространством Фреше. Отметим, что E_n непрерывно вложено в E_{n+1} для любого $n \in \mathbb{N}$. Положим $E := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ и введем в E топологию индуктивного предела последовательности пространств E_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в E. Для любой функции $f \in E$ и любой точки $z \in \mathbb{C}$, для которой $f(z) = 0$, функция $f(t)/(t - z)$ также принадлежит E.

Введем следующие условия для последовательности $v_{n,k}$:

$$\forall n \ \exists m \ \forall k \ \exists s \ \exists C \geqslant 0 : \ \sup_{|t-z|\leqslant 1} v_{n,s}(t) \leqslant \inf_{|t-z|\leqslant 1} v_{m,k}(t) + C, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{27}$$

$$\forall n \ \exists m \ \forall k \ \exists s : \ \lim_{z\to\infty} (v_{m,k}(z) - v_{n,s}(z)) = +\infty. \tag{28}$$

Условие (27) обеспечивает инвариантность E относительно дифференцирования и сдвигов. Если выполняется условие (28), то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что всякое ограниченное в E_n множество относительно компактно в E_m.

Для $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C}$, положим $\tau_h(f)(z) := f(z + h)$, $z \in \mathbb{C}$.

Будем предполагать, что пространство E содержит функцию, отличную от тождественного нуля. Тогда существует функция $g_0 \in E$, для которой $g_0(0) = 1$. Зафиксируем такую функцию g_0. Для $z \in \mathbb{C}$ оператор $D_{z,g_0} : E \to H(\mathbb{C})$ определяется следующими равенствами: для $f \in E$

$$D_{z,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \dfrac{f(t) - g_0(t - z)f(z)}{t - z}, & t \neq z, \\ f'(z) - g_0'(0)f(z), & t = z. \end{cases}$$

Оператор D_{z,g_0} в пространствах аналитических функций обычно исследовался и применялся в случае $g_0 \equiv 1$ (см., например, работы М. Поммье [97–100], Ю. Ф. Коробейника [21], Н. Е. Линчук [38], С. С. Линчука и Н. И. Нагнибиды [39], И. Димовского и В. Христова [74], В. Б. Шерстюкова [67], Ю. С. Линчука [85] и библиографию в них). В этом случае он называется *оператором Поммье*. Мы будем использовать это название и для оператора D_{z,g_0}, введенного выше.

Отметим некоторые свойства D_{z,g_0}.

Лемма 4.1. *Для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$D_{\mu,g_0}(f) - D_{z,g_0}(f) = (\mu - z)D_{\mu,g_0}(D_{z,g_0}(f)) + f(z)D_{\mu,g_0}(\tau_{-z}(g_0)), \quad f \in E.$$

При $g_0 \equiv 1$ последнее равенство аналогично тождеству Гильберта для резольвент:

$$D_{\mu,g_0} - D_{z,g_0} = (\mu - z)D_{\mu,g_0}D_{z,g_0}.$$

Лемма 4.2. *Предположим, что выполняется условие* (27). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Для любых $n \in \mathbb{N}$ и ограниченного в $\mathbb{C}$ множества M существует такое $m \in \mathbb{N}$, что для любого $z \in M$ оператор D_{z,g_0} линейно и непрерывно отображает E_n в E_m.*

(ii) *Для любых* $n \in \mathbb{N}$, *ограниченного в* E_n *множества* B *и ограниченного в* $\mathbb{C}$ *множества* M *существует такое* $m \in \mathbb{N}$, *что множество* $\{D_{z,g_0}(f) \mid z \in M,\ f \in B\}$ *ограничено в* E_m.

Лемма 4.3. *Пусть выполняются условия* (27) *и* (28). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(iii) *Для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и ограниченного в* E_n *множества* B *существует такое* $m \in \mathbb{N}$, *что*
$$\lim_{\mu \to z} D_{\mu,g_0}(f) = D_{z,g_0}(f) \quad \text{в } E_m \text{ равномерно (по } f\text{) на } B.$$

(iv) *Для любых* $f \in E$, $z \in \mathbb{C}$ *найдется такое* $r \in \mathbb{N}$, *что в* E_r *существует*
$$\lim_{\mu \to z} \frac{D_{\mu,g_0}(\tau_{-z}(f))}{\mu - z} = D_{z,g_0}(\tau_{-z}(f')).$$

(v) *Для любых* $f \in E$, $z \in \mathbb{C}$ *найдется такое* $r \in \mathbb{N}$, *что в* E_r
$$\lim_{\mu \to z} \frac{D_{\mu,g_0}(f) - D_{z,g_0}(f)}{\mu - z} = D^2_{z,g_0}(f) + f(z) D_{z,g_0}(\tau_{-z}(g_0')).$$

Приведем еще один результат об оценке роста $D_{\mu,g_0}(f)(t)$ по t и μ для $f \in E$.

Лемма 4.4. *Пусть выполняются условия* (27) *и* (28) *и пусть* $g_0 \equiv 1$. *Тогда для любой* $f \in E$ *существует такое* m, *что для всех* k, l *найдется* $A \geqslant 0$, *для которого*
$$\left|D_{\mu,g_0}(f)(t)\right| \leqslant A \exp(v_{m,k}(\mu) + v_{m,l}(t)), \quad t, \mu \in \mathbb{C}.$$

4.2. Абстрактный вариант интерполирующей функции. Далее E — такое же пространство целых функций, как в п. 4.1, причем задающее его семейство функций $(v_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (27) и (28). Предположим, что F — некоторое комплексное локально выпуклое пространство, обладающее следующими свойствами:

(F1) (F, E) — дуальная пара относительно билинейной формы $\langle x, f \rangle$, $x \in F$, $f \in E$;
(F2) топологии F и E мажорируют слабые топологии $\sigma(F, E)$ и $\sigma(E, F)$ соответственно;
(F3) существуют такие элементы $e_\lambda \in F$, $\lambda \in \mathbb{C}$, что
$$\langle e_\lambda, g \rangle = g(\lambda), \quad g \in E, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Естественным примером пространства F, удовлетворяющего условиям (F1)–(F3), является топологическое сопряженное пространство E' к E с топологией, мажорирующей слабую топологию $\sigma(E', E)$. В этом случае e_λ — дельта-функции:
$$\langle e_\lambda, f \rangle = e_\lambda(f) = f(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad f \in E.$$

Пусть $\mathcal{Q}$ — такая целая функция в $\mathbb{C}^2$, что $\mathcal{Q}(\cdot, z) \in E$ для любого $z \in \mathbb{C}$. $\mathcal{Q}$-*Интерполирующим функционалом* назовем отображение $\Omega_{\mathcal{Q}} : \mathbb{C}^2 \times F \to \mathbb{C}$, задаваемое равенством
$$\Omega_{\mathcal{Q}}(\mu, z, x) := \langle x, D_{\mu,g_0}(\mathcal{Q}(\cdot, z)) \rangle, \quad \mu, z \in \mathbb{C}, \quad x \in F.$$

Отметим некоторые свойства функционала $\Omega_{\mathcal{Q}}$.

Теорема 4.1.

(i) *Для любых* $\mu, z, \lambda \in \mathbb{C}$
$$(\lambda - \mu)\Omega_{\mathcal{Q}}(\mu, z, e_\lambda) = \mathcal{Q}(\lambda, z) - g_0(\lambda - \mu)\mathcal{Q}(\mu, z).$$

(ii) $\Omega_{\mathcal{Q}}(\mu, z, \cdot) \in F'$ *для любых* $\mu, z \in \mathbb{C}$.

(iii) *Предположим, что отображение* $z \mapsto \mathcal{Q}(\cdot, z)$ *обладает следующим свойством: для любого компакта* M *в* $\mathbb{C}$ *существует такое* $n \in \mathbb{N}$, *что для любого* $s \in \mathbb{N}$
$$\sup_{z \in M} p_{v_{n,s}}(\mathcal{Q}(\cdot, z)) < +\infty.$$
Тогда $\Omega_{\mathcal{Q}}(\cdot, \cdot, x) \in H(\mathbb{C}^2)$ *для любого* $x \in F$.

(iv) *Если* $g_0 \equiv 1$, *то* $\Omega_{\mathcal{Q}}(\cdot, z, x) \in E$ *для любых* $z \in \mathbb{C}$ *и* $x \in F$.

Приведем примеры интерполирующего функционала.

Пример 4.1. Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, содержащий 0, $g_0 \equiv 1$, f — целая функция экспоненциального типа, сопряженная диаграмма которой содержится в K. Интерполирующая функция $\omega_f(z, x)$, введенная А. Ф. Леонтьевым (см. п. 3.2), — частный случай функционала $\Omega_{\mathcal{Q}}$. В данном случае $F = H(K)$, $E = [1, H_K]$, $v_{nk}(z) = H_K(z) + |z|/k$, $z \in \mathbb{C}$, $n, k \in \mathbb{N}$ (функции v_{nk} не зависят от n; см. п. 2.1). Билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$, задающая двойственность между F и E, имеет следующий вид (см. п. 2.1):

$$\langle x, f \rangle := \mathcal{F}^{-1}(f)(x), \quad x \in F, \quad f \in E.$$

Здесь $\mathcal{F}$ — преобразование Лапласа. Элементами e_λ в данном случае являются обычные экспоненты: $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$. Кроме того, $\mathcal{Q}(\mu, z) = f(z)$ для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$.

Пример 4.2. Интерполирущий функционал, введенный в п. 3.2, — тоже частный случай функционала $\Omega_{\mathcal{Q}}$. При этом $F = H(G)$, где G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, $E = [1, H_G)$, $v_{n,k}(z) = H_G(z) - |z|/n$, $z \in \mathbb{C}$, $n, k \in \mathbb{N}$ (функции $v_{n,k}$ не зависят от k), $g_0 \equiv 1$. Билинейная форма, элементы e_λ — такие же, как в примере 4.1. Функция $\mathcal{Q}$ такова, что $\mathcal{Q}(\cdot, z) \in E$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

Пример 4.3. Пусть теперь G — ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{C}$, содержащее 0. Предположим, что G локально замкнуто, т.е. имеет счетную фундаментальную систему компактных подмножеств $G_n \subset G$, $n \in \mathbb{N}$. Можно считать, что все компакты G_n выпуклы и $G_n \subset G_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (см., например, [47, 92]). Здесь $F = H(G)$ — пространство ростков всех аналитических на G функций с топологией проективного предела пространств $H(G_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Возьмем $v_{n,k}(z) = H_{G_n}(z) + |z|/k$, $z \in \mathbb{C}$, $n, k \in \mathbb{N}$. В этом случае $E = \operatorname{ind}_{n\to}[1, H_{G_n})$ (индуктивная топология вводится относительно вложений $[1, H_{G_n})$ в E). Преобразование Лапласа $\varphi \mapsto \big(\varphi(e_\lambda), \lambda \in \mathbb{C}\big)$, где $e_\lambda(z) = \exp(\lambda z)$, устанавливает топологический изоморфизм $H(G)$ на E. Билинейная форма, задающая двойственность между F и E, аналогична билинейной форме в примере 4.1. Функция $\mathcal{Q} \in H(\mathbb{C}^2)$ выбирается так, чтобы $\mathcal{Q}(\cdot, z) \in E$ для любого $z \in \mathbb{C}$. (По поводу локально замкнутых множеств см. также п. 4.5.)

В заключение этого пункта отметим, что интерполирующая функция, ее аналоги, обобщения в различных ситуациях изучалась и использовалась А. Ф. Леонтьевым (см. [33–36]), А. Ф. Леонтьевым и Ю. Н. Фроловым (см. [37]), Ю. Н. Фроловым (см. [60]), А. П. Хромовым (см. [64]), В. П. Громовым (см. [8]), Ю. А. Тимофеевым (см. [55]), В. И. Шевцовым (см. [65, 66]), И. В. Тихоновым (см. [56, 57]).

4.3. Коммутант оператора Поммье. Далее пространство E такое, как в п. 4.1. Считаем, что веса $v_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условию

$$\forall n\ \exists m\ \forall k\ \exists s\ \exists C \geqslant 0: \sup_{|t-z|\leqslant 1} v_{n,s}(t) + \ln(1+|z|) \leqslant \inf_{|t-z|\leqslant 1} v_{m,k}(t) + C, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда выполняются условия (27), (28). Оно обеспечивает также инвариантность E относительно умножения на независимую переменную.

Зафиксируем такую функцию $g_0 \in E$, что $g_0(0) = 1$. Следуя [71, 74], для $z \in \mathbb{C}$ введем для оператора Поммье оператор сдвига, линейно и непрерывно действующий в E:

$$T_z(f)(t) := \begin{cases} \dfrac{tf(t)g_0(z) - zf(z)g_0(t)}{t - z}, & t \neq z, \\ zg_0(z)f'(z) - zf(z)g_0'(z) + f(z)g_0(z), & t = z, \end{cases} \quad f \in E.$$

Заметим, что И. Ф. Красичков-Терновский (см. [28, § 10]) использовал конструкции подобного рода в некоторых пространствах целых функций экспоненциального типа для решения проблемы распространения спектрального синтеза. Кроме того, В. А. Ткаченко (см. [58, 59]) использовал оператор T_z в случае $g_0 = e^P$, где P — некоторый многочлен. Рассмотренный в [58, 59] оператор T_z действует в (LB)-пространстве целых функций, рост которых определяется ρ-тригонометрически выпуклой ($\rho > 0$) функцией со значениями в $(-\infty, +\infty]$. Сопряженный оператор к D_{0,g_0} назван в [58] *оператором обобщенного интегрирования*.

Обозначим через $\mathcal{L}(E)$ пространство всех линейных непрерывных операторов в E.

Теорема 4.2 (см. [14]). *Следующие утверждения равносильны*:

(i) $B \in \mathcal{L}(E)$ *и* $BD_{0,g_0} = D_{0,g_0}B$ *на* E;

(ii) *существует такое* $\varphi \in E'$, *что*

$$B(f)(z) = \varphi(T_z(f)), \quad f \in E, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Операторы, перестановочные с оператором, являющимся линейным непрерывным левым обратным к оператору умножения на независимую переменную, в пространстве функций $H(G)$, голоморфных в односвязной области $G \subset \mathbb{C}$, описаны Ю. С. Линчуком (см. [84]). Каждый такой оператор является оператором D_{0,g_0} для некоторой функции g_0. При доказательстве соответствующего результата Ю. С. Линчук существенно использовал теорию Кете характеристических функций линейных непрерывных операторов в пространствах голоморфных функций. Ранее для обычного оператора Поммье $D_0 := D_{0,g_0}$, задаваемого функцией $g_0 \equiv 1$, аналогичный результат (также с помощью характеристических функций, но для конечносвязной области G) получен Н. Е. Линчук в [38]. Коммутанты оператора Поммье D_0 в $H(G)$ для односвязной области $G \subset \mathbb{C}$ методом, отличным от использованного Н. Е. Линчук и Ю. С. Линчуком, описаны И. Димовским и В. Христовым (см. [74]). В [74] существенно используется плотность множества многочленов в $H(G)$ и простота действия соответствующих D_0 операторов сдвига T_z на многочленах. При переходе к данной ситуации возникли трудности, связанные с отказом от предположений, выполняющихся автоматически для пространства $H(G)$ и для $g_0 \equiv 1$. В теореме 4.2 не предполагается, что многочлены плотны в E и даже то, что они содержатся в E. Это позволяет расширить спектр пространств, к которым применимы излагаемые здесь результаты. В частности, они могут быть использованы и для пространств, изучаемых в теории распределений и ультрараспределений. Упомянутые трудности преодолены с помощью аналитической природы пространства E. Именно, используется полнота множества функционалов $f \mapsto f^{(n)}(0)$, $n \geqslant 0$, $f \in E$, в топологическом сопряженном E' к E в топологии Макки $\tau(E', E)$ и, как следствие, возможность соответствующей весовой аппроксимации операторов сдвига T_z и коммутантов D_{0,g_0} многочленами от оператора D_{0,g_0}.

4.4. Алгебры аналитических функционалов. Введем в E' бинарную операцию. Для φ, $\psi \in E'$, $f \in E$ положим

$$(\varphi \otimes \psi)(f) = \varphi_t(\psi(T_t(f))).$$

Операция $\otimes$ корректно определена, ассоциативна и коммутативна. Пространство E' с операцией $\otimes$ в качестве умножения является унитальной алгеброй с единицей (дельта-функцией) $\delta_0(f) := f(0)$.

Обозначим через $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ множество всех линейных непрерывных в E операторов, перестановочных в E с D_{0,g_0}. Заметим, что $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ — подпространство пространства $\mathcal{L}(E)$, являющееся алгеброй, умножение в которой — композиция операторов. Пусть $\mathcal{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ — пространство $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ с топологией поточечной (простой) сходимости, если E снабжено слабой топологией $\sigma(E, E')$ (см. [68, гл. III, § 3, с. 104, пример 4 (a)]).

Для $\varphi \in E'$ положим

$$\kappa(\varphi)(f)(z) := \varphi(T_z(f)), \quad f \in E, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Согласно теореме 4.2 κ отображает E' на $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$. Вследствие равенств $\varphi(f) = B(f)(0)$, $f \in E$ (B и φ такие же, как в теореме 4.2), $\kappa : E' \to \mathcal{K}(D_{0,g_0})$ биективно. Кроме того, κ сохраняет и алгебраическую структуру. Приведем два результата из [13, 14].

Теорема 4.3.

(i) *Отображение* $\kappa : (E', \otimes) \to \mathcal{K}(D_{0,g_0})$ *является изоморфизмом алгебр.*

(ii) *Отображение* $\kappa : (E', \sigma(E, E')) \to \mathcal{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ *является топологическим изоморфизмом.*

Пусть $\mathcal{P}(D_{0,g_0})$ — множество всех многочленов от оператора D_{0,g_0}, т.е. операторов вида $P(D_{0,g_0}) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j D^j_{0,g_0}$, $a_j \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $n \geqslant 0$. Ясно, что $\mathcal{P}(D_{0,g_0})$ — подпространство $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$.

Следствие 4.1. *Пространство* $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ *совпадает с замыканием* $\mathcal{P}(D_{0,g_0})$ *в* $\mathcal{L}(E)$ *с топологией поточечной сходимости.*

4.5. Циклические векторы. Результаты в пп. 4.5, 4.6 получены в [15,78]. Зафиксируем такую целую функцию $g_0 \in E$, что $g_0(0) = 1$. Функция $f \in E$ называется *циклическим вектором* оператора D_{0,g_0} в E, если система $\{D_{0,g_0}^n(f) \mid n \geqslant 0\}$ (орбита f) полна в E.

Приведем вначале абстрактные условия цикличности $f \in E$ относительно оператора D_{0,g_0}. Символом $\mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})$ обозначим множество всех циклических векторов D_{0,g_0} в E.

Заметим, что множество $\mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})$ является D_{0,g_0}-инвариантным, т.е. $D_{0,g_0}\big(\mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})\big) \subset \mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})$.

Определим «сокращения» операторов сдвига T_z: для $f \in E$

$$\widetilde{T}_z(f)(t) := \begin{cases} \dfrac{f(t)g_0(z) - f(z)g_0(t)}{t-z}, & t \neq z, \\ f'(z)g_0(z) - f(z)g_0'(z), & t = z. \end{cases}$$

Важное значение имеет следующее утверждение.

Теорема 4.4. *Следующие утверждения равносильны для* $f \in E$:

(i) $f \in \mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})$;
(ii) *система* $\{T_z(f) \mid z \in \mathbb{C}\}$ *полна в* E;
(iii) $f \notin \mathrm{Ker}\, B$ *для любого ненулевого оператора* $B \in \mathcal{K}(D_{0,g_0})$;
(iv) *система* $\{\widetilde{T}_z(f) \mid z \in \mathbb{C}\}$ *полна в* E.

Обозначим через M оператор умножения на независимую переменную:

$$M(f)(z) := zf(z), \quad f \in E, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ясно, что $M \in \mathcal{L}(E)$. Символом I обозначим тождественное отображение.

Лемма 4.5. *Предположим, что* $g_0(\alpha) \neq 0$ *для некоторого* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Пусть* $f \in E$. *Для следующих двух утверждений имеет место импликация* (i)$\Rightarrow$(ii):

(i) *система* $\{T_z(f) \mid z \in \mathbb{C}\}$ *полна в* E;
(ii) *система* $\{T_z((M - \alpha I)(f)) \mid z \in \mathbb{C}\}$ *полна в* E.

Отметим следующее свойство «наследования нуля» оператора $D_{0,g_0}(f)$.

Замечание 4.1.

(i) Если $g_0(\alpha) = 0$ и $f(\alpha) = 0$ для некоторых $\alpha \in \mathbb{C}$ и $f \in E$, то $D_{0,g_0}^n(f)(\alpha) = 0$ для любого $n \geqslant 0$.
(ii) Пусть $f \in \mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})$ и P — полиномы. Тогда $Pf \in \mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})$ тогда и только тогда, когда P не имеет общих нулей с g_0.
(iii) Предположим, что функция g_0 не имеет нулей в $\mathbb{C}$. Тогда $Pf \in \mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})$ для любых $f \in \mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})$ и ненулевого многочлена P.

Если $g_0 \equiv 1$, то будем писать D_z вместо D_{z,g_0}. Из теоремы 4.4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.2. *Пусть* $g_0 \equiv 1$, $f \in E$. *Следующие утверждения равносильны*:

(i) $f \in \mathrm{Cycl}(D_0)$;
(ii) *система* $\{T_z(f) \mid z \in \mathbb{C}\}$ *полна в* E;
(iii) *система* $\{D_z(f) \mid z \in \mathbb{C}\}$ *полна в* E.

Отметим равенство, связывающее операторы $\widetilde{T}_z$ и D_z.

Лемма 4.6. *Для любых* $f \in E$, $z \in \mathbb{C}$

$$\widetilde{T}_z(f) = g_0(z)D_z(f) - f(z)D_z(g_0).$$

(При этом $\widetilde{T}_z(f) \in E$, но $g_0(z)D_z(f)$ и $f(z)D_z(g_0)$ могут и не принадлежать E.)

Перейдем далее к конкретному пространству E. Пусть Q — выпуклое множество в $\mathbb{C}$. Предполагается, что Q локально замкнуто, т.е. Q имеет фундаментальную последовательность компактных подмножеств. Класс таких множеств введен в [86]; они подробно изучены в [72, 73, 92]. Согласно [92, лемма 1.2] Q является объединением его относительной внутренности и (относительно) открытого подмножества его относительной границы. Семейство таких множеств содержит все выпуклые открытые и замкнутые множества в $\mathbb{C}$, все связные подмножества вещественных прямых в $\mathbb{C}$. Будем предполагать, что $0 \in Q$. Пусть $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая фундаментальная последовательность компактных подмножеств Q. Без ограничения общности можно считать, что все компакты Q_n выпуклы. Далее, $H(Q_n)$ — пространство всех функций, голоморфных на Q_n, т.е. голоморфных в некоторой открытой окрестности Q_n. В $H(Q_n)$ вводится естественная топология индуктивного предела последовательности банаховых пространств. Пусть $H(Q)$ — векторное пространство всех функций, голоморфных на Q. Справедливо алгебраическое равенство $H(Q) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} H(Q_n)$, и в $H(Q)$ вводится топология проективного предела пространств $H(Q_n)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно естественных вложений $H(Q)$ в $H(Q_n)$ (она совпадает с другой естественной топологией в $H(Q)$, индуктивной). Если $Q \subset \mathbb{R}$, то $H(Q)$ является пространством вещественно аналитических функций.

Для функций $v_{n,k}(z) := \exp(-H_{Q_n}(z) - |z|/k)$ определим пространства Фреше E_n, $n \in \mathbb{N}$, и $E = \mathrm{ind}_{n\to} E_n$, как в п. 4.1.

Пусть $e_z(t) := \exp(zt)$, $t, z \in \mathbb{C}$. Согласно [92, лемма 1.10] преобразование Лапласа

$$\mathcal{F}(\varphi)(z) := \varphi(e_z), \quad \varphi \in H(Q)', \quad z \in \mathbb{C},$$

является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к $H(Q)$ на (LF)-пространство E.

Положим $E_Q := E$. Приведем описание циклических векторов оператора D_{0,g_0} для произвольной функции $g_0 \in E_Q$, удовлетворяющей условию $g_0(0) = 1$ (см. теорему 4.5 ниже).

Замечание 4.2.

(i) Для любого $n \in \mathbb{N}$ целая функция h экспоненциального типа принадлежит E_n в том и только в том случае, когда сопряженная диаграмма h содержится в Q_n.

(ii) Пусть
$$\langle x, h\rangle := \mathcal{F}^{-1}(h)(x), \quad x \in H(K), \quad h \in E_K.$$
Тогда (см. п. 3.1)
$$\langle x, D_z(f)\rangle = \omega_f(z,x), \quad x \in H(K), \quad f \in E_K, q \quad z \in \mathbb{C}.$$

(iii) Для любых $\nu \in K$, $j \geqslant 0$, для функции $h(z) := z^j e^{\nu z}$, для преобразования Бореля γ_h функции h выполняется равенство
$$\gamma_h(t) = j!(t-\nu)^{-j-1}.$$

(iv) Функция e_ν принадлежит E_Q тогда и только тогда, когда $\nu \in Q$.

(v) Для любых $\nu \in Q$, $x \in H(Q)$, $z \in \mathbb{C}$ имеем
$$\omega_{e_\nu}(z,x) = \int\limits_0^\nu x(\nu-\xi)e^{z\xi}d\xi = e^{\nu z}\int\limits_0^\nu x(\eta)e^{-z\eta}d\eta.$$

Будем предполагать, что $0 \in Q$. Тогда функция $h \equiv 1$ принадлежит E_Q и $D_z \in \mathcal{L}(E_Q)$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

Отметим следующий вспомогательный результат.

Лемма 4.7. *Пусть функция y непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$ ($\alpha \neq \beta$) и (целая) функция*
$$e^{\alpha z}\int\limits_\alpha^\beta y(\eta)e^{-z\eta}d\eta$$
является многочленом переменной z. Тогда $y = 0$ на $[\alpha,\beta]$.

Теорема 4.5.

I. *Предположим, что функция g_0 имеет бесконечно много нулей. Следующие утверждения равносильны*:
   (i) $f \in \mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})$;
   (ii) *функции f и g_0 не имеют общих нулей.*

II. *Предположим, что $g_0 = Pe_\lambda$ для некоторого $\lambda \in Q$ и многочлена P, удовлетворяющего условию $P(0) = 1$. Следующие утверждения равносильны*:
   (i) $f \in \mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})$;
   (ii) *функции f и g_0 не имеют общих нулей и f не является функцией вида Re_λ для некоторых $\lambda \in Q$ и многочлена R.*

Доказательство. I. (i)$\Rightarrow$(ii): Предположим, что f и g_0 имеют общий нуль $\alpha \in \mathbb{C}$. Согласно замечанию 4.2 каждая функция из E также обращается в нуль в точке α; противоречие.

(ii)$\Rightarrow$(i): Возьмем такое $n \in \mathbb{N}$, что $g_0 \in E_n$. Тогда сопряженная диаграмма g_0 содержится в Q_n. Пусть для $x \in H(Q) \subset H(Q_n)$ выполняются равенства $\langle x, \widetilde{T}_z(f)\rangle = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$. По лемме 4.7 для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$g_0(z)\langle x, D_z(f)\rangle = f(z)\langle x, D_z(g_0)\rangle,$$

т.е. $g_0(z)\omega_f(z,x) = f(z)\omega_{g_0}(z,x)$. Поскольку функции g_0 и f не имеют общих нулей, $\omega_{g_0}(z,x)/g_0(z)$ является целой функцией переменной z. По теореме единственности А. Ф. Леонтьева (теорема 3.1) получаем $x = 0$. Значит, система $\{\widetilde{T}_z(f) \mid z \in \mathbb{C}\}$ полна в E_Q, и $f \in \mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})$.

II. (iii)$\Rightarrow$(i): Предположим, что f имеет бесконечно много нулей. Тогда, как и выше, получим, что $f \in \ Cycl(D_{0,g_0})$.

Предположим теперь, что f не имеет нулей или имеет конечное число нулей. Тогда найдутся $\mu \in Q$ и многочлен S, для которых $f = Se_\mu$. Выберем такое $n \in \mathbb{N}$, что $\lambda, \mu \in Q_n$.

Предположим вначале, что S — многочлен степени 0, т.е. $S \equiv \mathrm{const} = C_0 \neq 0$. Без ограничения общности можем положить $C_0 = 1$. Пусть $P(z) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j z^j$, $m \in \mathbb{N}$, где $a_0 = 1$. Возьмем $x \in H(Q)$, для которого $\langle x, \widetilde{T}_z(f)\rangle = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Тогда согласно лемме 4.7 и замечанию 4.2

$$g_0(z)\omega_f(z,x) = f(z)\omega_{g_0}(z,x), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим вначале случай, когда $m = 1$. Согласно замечанию 4.2(iv) $\omega_f(z,x) = e^{\mu z}Y(\mu, z)$, где

$$Y(t,z) := \int\limits_0^t x(\eta)e^{-z\eta}d\eta.$$

Поэтому

$$g_0(z)Y(\mu,z) = \omega_{g_0}(z,x), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{29}$$

Согласно замечанию 4.2(ii) для $K := Q_n$, для некоторой кривой C имеем

$$\omega_{g_0}(z,x) = e^{z\lambda}Y(\lambda,z) + a_1\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{1}{(t-\lambda)^2}\left(\int\limits_0^t x(t-\xi)e^{z\xi}d\xi\right)dt.$$

Так как

$$\int\limits_0^t x(t-\xi)e^{z\xi}d\xi = e^{zt}\int\limits_0^t x(\eta)e^{-z\eta}d\eta,$$

то по интегральной формуле Коши

$$\omega_{g_0}(z,x) = e^{z\lambda}Y(\lambda,z) + a_1\frac{d}{dt}\left(e^{zt}\int\limits_0^t x(\eta)e^{-z\eta}\,d\eta\right)\Big|_{t=\lambda} = e^{z\lambda}Y(\lambda,z) + a_1\Big(ze^{\lambda z}Y(\lambda,z) + x(\lambda)\Big).$$

Учитывая (29), получим:

$$e^{\lambda z}(1+a_1z)Y(\mu,z)=e^{z\lambda}Y(\lambda,z)+a_1(ze^{\lambda z}Y(\lambda,z)+x(\lambda)).$$

Отсюда следует, что для любого $z\in\mathbb{C}$

$$e^{\lambda z}(1+a_1z)\int\limits_{\lambda}^{\mu}x(\eta)e^{-z\eta}d\eta=a_1x(\lambda).$$

Имеем $x=0$ на $[\lambda,\mu]$, а значит, $x=0$ как элемент $H(Q)$.

Пусть теперь $m\geqslant 2$. Тогда

$$\omega_{g_0}(z,x)=e^{\lambda z}Y(\lambda,z)+\sum_{j=1}^{m}a_j\frac{j!}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{dt}{(t-\lambda)^{j+1}}\int\limits_{0}^{t}x(t-\xi)e^{z\xi}d\xi=$$

$$=e^{\lambda z}Y(\lambda,z)+\sum_{j=1}^{m}a_j\frac{d^j}{dt^j}\left(e^{zt}\int\limits_{0}^{t}x(\eta)e^{-z\eta}d\eta\right)\Bigg|_{t=\lambda}=$$

$$=e^{\lambda z}Y(\lambda,z)+a_1(ze^{\lambda z}Y(\lambda,z)+x(\lambda))+\sum_{j=2}^{m}a_j\frac{d^j}{dt^j}\left(e^{zt}\int\limits_{0}^{t}x(\eta)e^{-z\eta}d\eta\right)\Bigg|_{t=\lambda}.$$

Если $j\geqslant 2$, то

$$\frac{d^j}{dt^j}\left(e^{zt}\int\limits_{0}^{t}x(\eta)e^{-z\eta}d\eta\right)=\sum_{s=0}^{j}C_j^s z^{j-s}e^{zt}\frac{d^s}{dt^s}\left(Y(t,z)\right)=$$

$$=z^je^{zt}Y(t,z)+C_j^1z^{j-1}e^{zt}x(t)e^{-zt}+\sum_{s=2}^{j}C_j^sz^{j-s}e^{zt}\sum_{r=0}^{s-1}C_{s-1}^r(-1)^rz^re^{-zt}x^{(s-1-r)}(t).$$

Значит,

$$\omega_{g_0}(z,x)=e^{\lambda z}Y(\lambda,z)+a_1(ze^{\lambda z}Y(\lambda,z)+x(\lambda))+$$
$$+\sum_{j=2}^{m}a_j\left(z^je^{\lambda z}Y(\lambda,z)+C_j^1z^{j-1}x(\lambda)+\sum_{s=2}^{j}C_j^sz^{j-s}e^{\lambda z}\sum_{r=0}^{s-1}C_{s-1}^r(-1)^rz^re^{-\lambda z}x^{(s-1-r)}(\lambda)\right)=$$
$$=e^{\lambda z}Y(\lambda,z)+a_1ze^{\lambda z}Y(\lambda,z)+\sum_{j=2}^{m}a_jz^je^{\lambda z}Y(\lambda,z)+W(z)=e^{\lambda z}Y(\lambda,z)g_0(z)+W(z),$$

где W — многочлен переменной z, имеющий вид

$$W(z)=\sum_{p=0}^{m-1}w_p(z)x^{(p)}(\lambda)$$

для некоторых многочленов w_p, не зависящих от $x\in H(Q)$. Поэтому согласно (29) для любого $z\in\mathbb{C}$ имеем

$$e^{\lambda z}\left(1+\sum_{j=1}^{m}a_jz^j\right)\int\limits_{\lambda}^{\mu}x(\eta)e^{-z\eta}d\eta=W(z).$$

Отсюда следует, что целая (по z) функция

$$e^{\lambda z}\int\limits_{\lambda}^{\mu}x(\eta)e^{-z\eta}d\eta$$

является многочленом. Следовательно, $x = 0$. Таким образом, система $\{\widetilde{T}_z \mid z \in \mathbb{C}\}$ полна в E_Q, и $f \in \mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})$.

Наконец, для произвольного многочлена S, не имеющего общих нулей с P, утверждение (i) имеет место согласно замечанию 4.2(ii).

(i)$\Rightarrow$(iii) Из замечания 4.2(i) следует, что функции f и g_0 не имеют общих нулей. Предположим, что существует такой многочлен R степени не выше $s \in \mathbb{N}$, что $f = Re_\lambda$. Положим $P(z) := \sum\limits_{j=0}^{m} a_j z^j$, $m \in \mathbb{N}$. Как и при доказательстве импликации (iii)$\Rightarrow$(i), получим, что найдутся многочлены w_p, v_q, для которых для любого $x \in H(Q)$

$$\omega_{g_0}(z, x) = P(z)e^{\lambda z}Y(\lambda, z) + W(z)$$

и

$$\omega_f(z, x) = R(z)e^{\lambda z}Y(\lambda, z) + V(z),$$

где

$$W(z) = \sum_{p=0}^{m-1} x^{(p)}(\lambda)w_p(z), \quad V(z) = \sum_{q=0}^{s-1} x^{(q)}(\lambda)v_q(z).$$

Существует такая ненулевая функция $x \in H(Q)$, что $x^{(r)}(\lambda) = 0$, если $0 \leqslant r \leqslant \max(m, s)$. Тогда $W = V = 0$ и для любого $z \in \mathbb{C}$

$$P(z)e^{\lambda z}(R(z)e^{\lambda z}Y(\lambda, z) + V(z)) = R(z)e^{\lambda z}(P(z)e^{\lambda z}Y(\lambda, z) + W(z)),$$

т.е. $g_0(z)\omega_f(z, x) = f(z)\omega_{g_0}(z, x)$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Согласно замечанию 4.2(i)

$$g_0(z)\langle x, D_z(f)\rangle = f(z)\langle x, D_z(g_0)\rangle$$

и $\langle x, \widetilde{T}_z(f)\rangle = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Поэтому система $\{\widetilde{T}_z(f) \,|\, z \in \mathbb{C}\}$ не является полной в E, а значит, $f \notin \mathrm{Cycl}(D_{0,g_0})$; противоречие. □

По поводу более ранних результатов, описывающих циклические элементы и инвариантные подпространства оператора Поммье, отметим следующие. М. Г. Хапланов (см. [62]) получил достаточные условия полноты системы последовательных остатков $f_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k+n}t^k$, $n \geqslant 0$ (т.е. последовательности $(D_0^n(f))_{n\geqslant 0})$, ряда Тейлора функции $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ в круге $|z| < R$. Ю. А. Казьмин (см. [16]) установил критерии полноты системы $(D_0^n(f))_{n\geqslant 0}$ в односвязной области $G \subseteq \mathbb{C}$, содержащей 0, и исследовал полноту систем вида $(D_{\alpha_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ и других систем. Циклические элементы оператора D_0 в пространстве $H(G)$ для конечносвязной области $G \subset \mathbb{C}$ изучены Н. Е. Линчук (см. [38]); Ю. С. Линчук (см. [84]) исследовал их для оператора D_{0,g_0} в $H(G)$ для односвязной области G. При этом в [84] делалось предположение о том, что функция g_0 не имеет нулей в G. В [12] соответствующее описание циклических векторов D_{0,g_0} в $H(G)$ было получено уже без этого предположения. Р. Дуглас, Г. Шапиро и А. Шилдс (см. [75]) исследовали циклические элементы и инвариантные подпространства оператора D_0 в пространстве Харди H^2 в единичном круге (в [75] D_0 назван оператором сдвига влево). Дж. Годефро, Ж. Шапиро (см. [77]) ввели *обобщенный оператор сдвига влево* в банаховом пространстве, исследовали его коммутанты и изучили общие свойства его циклических элементов.

4.6. Инвариантные подпространства и идеалы в пространствах ростков аналитических функций. Теорему 4.5 естественным образом можно применить к описанию замкнутых D_{0,g_0}-инвариантных подпространств E_Q. Именно, используется следующее: f из E_Q является циклическим вектором оператора D_{0,g_0} тогда и только тогда, когда f не принадлежит ни одному собственному замкнутому D_{0,g_0}-инвариантному подпространству E_Q. Ниже собственные замкнутые D_{0,g_0}-инвариантные подпространства E_Q описаны для функции $g_0(z) = P(z)e^{\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$, где λ — некоторая точка из Q, а P — многочлен. Если степень многочлена P не меньше 1, то оператор D_{0,g_0}, в отличие от случая $g_0(z) := e^{\lambda z}$, не является одноклеточным, т.е. его собственные замкнутые инвариантные подпространства не образуют цепь (см. [6], [51, § 2]). Их совокупность состоит уже из множеств двух видов: первое (конечное) содержит пространства конечной коразмерности, а второе (счетное) — пространства конечной размерности. С помощью упомянутых результатов и принципа двойственности мы изучаем собственные замкнутые идеалы в алгебре $(H(Q), *)$, изоморфной $(E', \otimes)$. Если g_0 не имеет нулей, то $*$ — произведение Дюамеля.

Сначала приведем результат для случая, когда g_0 не имеет нулей.

Через $\mathbb{C}[z]$ (соответственно, $\mathbb{C}[z]_n$ для целого $n \geqslant 0$) обозначим множество всех многочленов (соответственно, степени не выше n) над полем $\mathbb{C}$. Положим для целого $n \geqslant 0$ и $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{P}_n(e_\lambda) := e_\lambda \cdot \mathbb{C}[z]_n := \big\{ e_\lambda P \mid P \in \mathbb{C}[z]_n \big\}.$$

Следствие 4.3. *Пусть $g_0 = e_\lambda$ для некоторого $\lambda \in Q$.*

(i) *Для любого целого $n \geqslant 0$ пространство $\mathcal{P}_n(e_\lambda)$ является собственным замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством E_Q.*

(ii) *Для любого собственного замкнутого D_{0,g_0}-инвариантного подпространства $\mathcal{P}$ пространства E_Q существует такое $n \geqslant 0$, что $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n(e_\lambda)$.*

Отметим, что в (ii) число n определяется следующим образом:

$$n(\mathcal{P}) := \sup \big\{ \deg(P) \mid Pe_\lambda \in \mathcal{P} \big\}.$$

(Если $n(\mathcal{P}) = +\infty$, то $e_\lambda \cdot \mathbb{C}[z] \subset \mathcal{P}$ и $\mathcal{P} = E_Q$.)

Применим предыдущее следствие к описанию замкнутых идеалов в алгебре $(H(Q), *)$ (умножение $*$ определено ниже). При этом воспользуемся следующим ниже принципом двойственности. Обозначим через $T^\perp$ поляру множества $T \subset E$ в E'. Введем в E' топологию Макки $\tau(E', E)$, т.е. топологию равномерной сходимости на семействе всех абсолютно выпуклых $\sigma(E, E')$-компактных подмножеств E.

Теорема 4.6. *Следующие утверждения равносильны*:

(i) *множество $L \subset E'$ является собственным замкнутым идеалом в $(E', \otimes)$;*

(ii) *существует такое собственное замкнутое D_{0,g_0}-инвариантное подпространство H пространства E, что $L = H^\perp$.*

Согласно [86, утверждение 1.9] проективная топология в $H(Q)$ совпадает с топологией пространства $\operatorname{ind}_\Omega H(\Omega)$, где Ω пробегает семейство всех открытых окрестностей Ω множества Q, а $H(\Omega)$ — пространство Фреше всех аналитических в Ω функций. Согласно [86, § 3, с. 65] $H(Q)$ является монтелевским пространством. Поэтому (см. [89, замечание 24.24(a)]) пространство $H(Q)$ рефлексивно, и E'_Q можно отождествить с пространством $H(Q)$. При этом топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к E на $H(Q)$ является линейное отображение

$$\mathcal{J} : E' \to H(Q), \quad \varphi \mapsto \varphi(e_z).$$

Здесь для любого $\varphi \in E'$ и любого $n \in \mathbb{N}$ существует такая выпуклая область G_n, содержащая Q_n, что $z \in G_n$. Билинейная форма $\langle f, h \rangle := \mathcal{J}^{-1}(h)(f)$, $f \in E$, $h \in H(Q)$, задает двойственность между E и $H(Q)$. Заметим, что для любых $h \in H(Q)$, $f \in E$, $\mu \in Q$, $\nu \in \mathbb{C}$, $n \geqslant 0$ выполняются равенства

$$\langle z^n e^{\mu z}, h_z \rangle = h^{(n)}(\mu), \quad \langle f_z, z^n e^{\nu z} \rangle = f^{(n)}(\nu). \tag{30}$$

Положим $\widehat{\varphi} := \mathcal{J}(\varphi)$, $\varphi \in E'_Q$. Умножение $\otimes$ в E'_Q реализуется следующим образом. Для $\varphi, \psi \in E'_Q$

$$\mathcal{J}(\varphi \otimes \psi)(z) = \widehat{\psi}(0)\widehat{\varphi}(z) + \int\limits_\lambda^z \widehat{\varphi}(\xi)(\widehat{\psi})'(z - \xi + \lambda)\,d\xi,$$

где интеграл берется по отрезку $[\lambda, z]$, z принадлежит объединению таких выпуклых областей G_n, $n \in \mathbb{N}$, что $Q_n \subset G_n$, функции $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi}$ аналитичны в каждой области G_n. Таким образом, при $g_0 = e_\lambda$ операция $\otimes$ реализуется как произведение Дюамеля $*$ в пространстве $H(Q)$:

$$v * w(z) = w(0)v(z) + \int\limits_0^z v(\xi)w'(z - \xi)\,d\xi, \quad v, w \in H(Q).$$

Пространство $H(Q)$ является алгеброй с умножением $*$. Учитывая равенства

$$\mathcal{J}^{-1}(h)_z(z^n e^{\lambda z}) = h^{(n)}(\lambda), \quad h \in H(Q), \quad n \geqslant 0,$$

получим следующее утверждение.

Следствие 4.4. *Пусть $g_0 = e_\lambda$ для некоторого $\lambda \in Q$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *T является собственным замкнутым идеалом в $(H(Q), *)$;*

(ii) *существует такое целое $n \geqslant 0$, что*

$$T = \{h \in H(Q) \mid h^{(j)}(\lambda) = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Изучение произведения Дюамеля в пространствах аналитических функций начато в [103]. Интерес к нему вызван не в последнюю очередь его очевидной связью с классическим оператором Вольтерра. По поводу результатов, связанных с произведением Дюамеля, его различных приложений см. статьи М. Т. Караева [17, 80].

Перейдем к более сложному случаю, когда $g_0 = Pe_\lambda$, где $\lambda \in Q$, а P — такой многочлен степени не меньше 1, что $P(0) = 1$. Для функции $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, множества A, функций $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ положим $hA := \{hf \mid f \in A\}$.

Пусть $\mathcal{D}(P)$ — множество всех многочленов q, на которые делится P, удовлетворяющих условию $q(0) = 1$.

Теорема 4.7. *Пусть $g_0 = Pe_\lambda$, где $\lambda \in Q$, а P — такой многочлен степени $\geqslant 1$, что $P(0) = 1$.*

(i) *Множество qE является собственным замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством E для любого многочлена $q \in \mathcal{D}(P)$ степени $\geqslant 1$.*

(ii) *Множества $qe_\lambda\mathbb{C}[z]_n$ являются собственными замкнутыми D_{0,g_0}-инвариантными подпространствами E для любого многочлена $q \in \mathcal{D}(P)$ и любого $n \geqslant 0$, для которого $n \geqslant \deg(P) - \deg(q) - 1$.*

(iii) *Для любого собственного замкнутого D_{0,g_0}-инвариантного подпространства H пространства E существует такой многочлен $q \in \mathcal{D}(P)$ степени $\geqslant 1$, что $H = qE$, либо найдутся многочлен $q \in \mathcal{D}(P)$ и $n \geqslant \max(0, \deg(P) - \deg(q) - 1)$, для которых $H = qe_\lambda\mathbb{C}[z]_n$.*

Введем многочлен

$$\widetilde{P}(t, z) := \frac{P(t) - P(z)}{t - z}$$

переменных t, z. Пусть $\deg(P) = m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\widetilde{P}(t, z) = \sum_{j=0}^{m-1} p_j(t) z^j, \quad t, z \in \mathbb{C},$$

где p_j — многочлены степени не выше $m - 1$.

Для многочлена $p(t) = \sum\limits_{j=0}^{l} a_j t^j$ положим

$$p(D)(f) := \sum_{j=0}^{l} a_j f^{(j)}.$$

Пусть $\widetilde{p}_j(t) := tp_j(t)$, $0 \leqslant j \leqslant m - 1$, $t \in \mathbb{C}$. Для $f, h \in H(Q)$ положим

$$(f * h)(z) = h(\lambda)P(D)(f)(z) + \int\limits_{\lambda}^{z} P(D)(f)(\xi)h'\big(z + \lambda - \xi\big)d\xi - \sum_{j=0}^{m-1} \widetilde{p}_j(D)(f)(z)h^{(j)}(\lambda).$$

Тогда $\mathcal{J}(\varphi \otimes \psi) = \mathcal{J}(\varphi) * \mathcal{J}(\psi)$ для любых $\varphi, \psi \in E'$. Таким образом, операция $*$ является реализацией умножения $\otimes$ в E', а $(H(G), *)$ — коммутативная и ассоциативная унитальная алгебра (единицей в ней является функция, тождественно равная 1). Пусть μ_j, $1 \leqslant j \leqslant s$, — все попарно различные нули P, m_j — кратность нуля μ_j. Для любого набора целых чисел $l = (l_j)_{j=1}^s$, для которого $0 \leqslant l_j \leqslant m_j$, положим

$$q_l(z) := \prod_{j=1}^{s} (z - \mu_j)^{l_j}.$$

Если $l_j = 0$ для $1 \leqslant j \leqslant s$, то $q_l \equiv 1$.

Для конечного множества $\Delta \subset \mathbb{N}$, множеств $M_j \subset H(Q)$ обозначим сумму множеств M_j, $j \in \Delta$, символом $\bigoplus\limits_{j\in\Delta} M_j$. Учитывая теорему 4.7 и равенства (30), получим следующий результат.

Теорема 4.8.

(i) *Для любого непустого подмножества* Δ *множества* $\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant j \leqslant s\}$, *любых* l_j, *удовлетворяющих условиям* $0 \leqslant l_j \leqslant m_j - 1$, $j \in \Delta$, *множества*

$$I_{\Delta,l} := \bigoplus_{j\in\Delta} \left(e_{\mu_j} \mathbb{C}[z]_{l_j}\right)$$

являются собственными замкнутыми идеалами в $(H(Q), *)$.

(ii) *Для любых* l_j, $1 \leqslant j \leqslant s$, *и* $n \geqslant 0$, *удовлетворяющих условиям*

$$0 \leqslant l_j \leqslant m_j, \quad n \geqslant m - \sum_{j=1}^{s} l_j - 1,$$

множества

$$I_{q_l,n} := \left\{ h \in H(Q) \;\middle|\; q_l(D)(h^{(k)})(\lambda) = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant n \right\}$$

являются собственными замкнутыми идеалами в $(H(Q), *)$.

(iii) *Для любого собственного замкнутого идеала* L *выполняется следующая альтернатива: либо существуют непустое подмножество* Δ *множества* $\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant j \leqslant s\}$ *и такие* l_j, $j \in \Delta$, *что* $0 \leqslant l_j \leqslant m_j - 1$, *для которых* $L = I_{\Delta,l}$, *либо найдутся такие* l_j, $1 \leqslant j \leqslant s$, *и* $n \geqslant 0$, *что* $0 \leqslant l_j \leqslant m_j$ *и* $n \geqslant m - \sum\limits_{j=1}^{s} l_j - 1$, *для которых* $L = I_{q_l,n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абанин А. В.* Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы// Мат. заметки. — 1995. — *57*, № 4. — С. 483–497.
2. *Абанин А. В.* Индуктивные абсолютно представляющие системы подпространств// в кн.: Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2006. — С. 27–34.
3. *Абанин А. В., Варзиев В. А.* О существовании линейного непрерывного левого обратного у оператора сужения на пространствах Фреше целых функций// Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. — 2013. — № 4. — С. 5–10.
4. *Абанин А. В., Михайлов К. А.* Абсолютно представляющие системы подпространств в пределах проективных спектров (LB)-пространств// в кн.: Математический форум. Итоги науки. Юг России. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2008. — Т. 1. — С. 7–15.
5. *Абанин А. В., Михайлов К. А.* Достаточные условия для абсолютно представляющих систем подпространств в (DFS)-спектрах// в кн.: Математический форум. Итоги науки. Юг России. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2009. — Т. 3. — С. 9–21.
6. *Бродский М. С.* О жордановых клетках бесконечномерных операторов// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 5. — С. 926–929.
7. *Варзиев В. А., Мелихов С. Н.* О коэффициентах рядов экспонент для аналитических функций полиномиального роста// Владикавказ. мат. ж. — 2011. — *13*, № 4. — С. 18–27.
8. *Громов В. П.* О представлении функций двойными последовательностями Дирихле// Мат. заметки. — 1970. — *7*, № 1. — С. 53–61.
9. *Иванова О. А.* Непрерывные линейные обратные к операторам сужения аналитических функций и их производных/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2013.

10. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* О представлении аналитических функций рядами из квазимономов// в кн.: Исследования по современному анализу и математическому моделированию. — Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2008. — С. 30–37.
11. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева// Уфим. мат. ж. — 2014. — *6*, № 3. — С. 17–27.
12. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об орбитах аналитических функций относительно оператора типа Поммье// Уфим. мат. ж. — 2015. — *7*, № 4. — С. 75–79.
13. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об алгебре аналитических функционалов, связанной с оператором Поммье// Владикавказ. мат. ж. — 2016. — *18*, № 4. — С. 34–40.
14. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций// Алгебра и анализ. — 2016. — *28*, № 2. — С. 114–137.
15. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об инвариантных подпространствах оператора Поммье в пространствах целых функций экспоненциального типа// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — 2017. — *142*. — С. 111–120.
16. *Казьмин Ю. А.* О последовательных остатках ряда Тейлора// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1963. — № 5. — С. 35–46.
17. *Караев М. Т.* Алгебры Дюамеля и их приложения// Функц. анал. прилож. — 2018. — *52*, № 1. — С. 3–12.
18. *Коробейник Ю. Ф.* О решениях некоторых функциональных уравнений в классах функций, аналитических в выпуклых областях// Мат. сб. — 1968. — *75 (117)*, № 2. — С. 225–234.
19. *Коробейник Ю. Ф.* Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1066–1114.
20. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 1. — С. 73–126.
21. *Коробейник Ю. Ф.* К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям// Мат. заметки. — 1982. — *31*, № 5. — С. 723–737.
22. *Коробейник Ю. Ф.* Операторы свертки в комплексной области// Мат. сб. — 1985. — *127*, № 2. — С. 173–197.
23. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы подпространств// Мат. заметки. — 1985. — *38*, № 5. — С. 741–755.
24. *Коробейник Ю. Ф.* О мультипликаторах весовых функциональных пространств// Anal. Math. — 1989. — *15*. — С. 105–114.
25. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы экспонент и задача Коши для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами// Изв. РАН. Сер. мат. — 1997. — *61*, № 3. — С. 91–132.
26. *Коробейник Ю. Ф., Леонтьев А. Ф.* О свойстве внутрь-продолжаемости представляющих систем экспонент// Мат. заметки. — 1980. — *28*, № 28. — С. 243–253.
27. *Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н.* Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки// Сиб. мат. ж. — 1993. — *34*, № 1. — С. 70–84.
28. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза// Мат. сб. — 1972. — *88 (130)*, № 3(7). — С. 331–352.
29. *Красичков-Терновский И. Ф.* Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона// Мат. заметки. — 1978. — *24*, № 4. — С. 531–546.
30. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
31. *Лелон П., Груман Л.* Целые функции многих комплексных переменных. — М.: Мир, 1989.
32. *Леонтьев А. Ф.* Об эквивалентных условиях представления аналитических функций рядами экспонент// Мат. заметки. — 1976. — *20*, № 1. — С. 91–104.
33. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
34. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. — М.: Наука, 1980.
35. *Леонтьев А. Ф.* Представление функций рядами экспонент. — Уфа: Диалог, 2017.
36. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент. — М.: Наука, 1981.
37. *Леонтьев А. Ф., Фролов Ю. И.* Об условиях представимости целых функций некоторыми общими рядами// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1978. — *42*, № 4. — С. 763–772.
38. *Линчук Н. Е.* Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения// Мат. заметки. — 1988. — *44*, № 6. — С. 794–802.

39. *Линчук С. С., Нагнибида Н. И.* Об эквивалентности операторов Поммье в пространстве аналитических в круге функций// Сиб. мат. ж. — 1990. — *31*, № 3. — С. 507–513.
40. *Мелихов С. Н.* Абсолютно сходящиеся ряды в канонических индуктивных пределах// Мат. заметки. — 1986. — *39*, № 6. — С. 877–886.
41. *Мелихов С. Н.* О разложениях аналитических функций в ряды экспонент// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — *52*, № 5. — С. 991–1004.
42. *Мелихов С. Н.* Нетривиальные разложения нуля и представительные подпространства// Изв. вузов. Мат. — 1990. — № 8. — С. 53–65.
43. *Мелихов С. Н.* Продолжение целых функций вполне регулярного роста и правый обратный для оператора представления аналитических функций рядами квазиполиномов// Мат. сб. — 2000. — *191*, № 7. — С. 105–128.
44. *Мелихов С. Н.* О левом обратном к оператору сужения на весовых пространствах целых функций// Алгебра и анализ. — 2002. — *14*, № 1. — С. 99–133.
45. *Мелихов С. Н., Момм З.* О линейном непрерывном правом обратном для оператора свертки на пространствах ростков аналитических функций на выпуклых компактах в $\mathbb{C}$// Изв. вузов. Мат. — 1997. — № 5. — С. 38–48.
46. *Мелихов С. Н.* Выпуклые конформные отображения и правые обратные к оператору представления рядами экспонент// в кн.: Материалы международной научной конференции (Казань, 18-24 марта 2002)/ Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — Казань: Казан. мат. об-во, 2002. — С. 213–227.
47. *Мелихов С. Н., Момм З.* О свойстве внутрь-продолжаемости представляющих систем экспонент на выпуклых локально замкнутых множествах// Владикавказ. мат. ж. — 2008. — *10*, № 2. — С. 36–45.
48. *Напалков В. В.* О базисе в пространстве решений уравнения свертки// Мат. заметки. — 1988. — *40*, № 1. — С. 44–55.
49. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. — М.: Наука, 1982.
50. *Напалков В. В., Комаров А. В.* О разложении аналитических функций в ряд по элементарным решениям уравнения свертки// Мат. сб. — 1990. — *181*, № 4. — С. 556–563.
51. *Никольский Н. К.* Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций// Мат. анализ. Итоги науки и техн. — 1974. — *12*. — С. 199–412.
52. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства. — М.: Мир, 1967.
53. *Робертсон А. П., Робертсон В. Д.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967.
54. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. — М.: Наука, 1971.
55. *Тимофеев А. Ю.* О представлении решения уравнения бесконечного порядка в виде суммы двух решений// Мат. заметки. — 1982. — *31*, № 2. — С. 245–256.
56. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений// Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — *67*, № 2. — С. 133–166.
57. *Тихонов И. В.* Простое доказательство теоремы единственности для общих негармонических рядов Фурье на отрезке вещественной оси// в кн.: Наука в вузах: математика, информатика, физика, образование. — М.: МПГУ, 2010. — С. 183–189.
58. *Ткаченко В. А.* Инвариантные подпространства и одноклеточность операторов обобщенного интегрирования в пространствах аналитических функционалов// Мат. заметки. — 1977. — *22*, № 2. — С. 613–618.
59. *Ткаченко В. А.* Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов// Мат. заметки. — 1979. — *25*, № 2. — С. 271–282.
60. *Фролов Ю. Н.* О представлении целых функций рядами по решениям дифференциальных уравнений// Мат. заметки. — 1974. — *15*, № 2. — С. 229–234.
61. *Хавин В. П.* Пространства аналитических функций// в кн.: Итоги науки. Математика. Математический анализ. 1964. — М.: ВИНИТИ, 1966. — С. 76–164.
62. *Хапланов М. Г.* О полноте некоторых систем аналитических функций// Уч. зап. Ростов. гос. пед. ин-та. — 1955. — *3*. — С. 53–58.
63. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. — М.: Мир, 1968.
64. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов// Совр. мат. Фундам. напр. — 2004. — *10*. — С. 3–163.
65. *Шевцов В. И.* Представление целых функций уточненных порядков обобщенными рядами экспонент// в кн.: Механика. Математика/ Сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. — С. 157–160.

66. *Шевцов В. И.* О рядах экспонент, ограниченных на вещественной оси// в кн.: Механика. Математика/ Сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2009. — С. 97–99.
67. *Шерстюков В. Б.* Нетривиальные разложения нуля и представление аналитических функций рядами простых дробей// Сиб. мат. ж. — 2007. — *48*, № 2. — С. 458–473.
68. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971.
69. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.
70. *Abanin A. V., Tien P. T.* Continuation of holomorphic functions with growth conditions and some of its applications// Stud. Math. — 2010. — *200*, № 3. — P. 279–295.
71. *Binderman Z.* Functional shifts induced by right invertible operators// Math. Nachr. — 1992. — *157.* — P. 211–224.
72. *Bonet J., Meise R., Melikhov S. N.* Holomorphic functions on locally closed convex sets and projective descriptions// Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2003. — *10.* — P. 491–503.
73. *Bonet J., Meise R., Melikhov S. N.* The dual of the space of holomorphic functions on locally closed convex sets// Publ. Math. — 2005. — *49.* — P. 487–509.
74. *Dimovski I. N., Hristov V. Z.* Commutants of the Pommiez operator// Int. J. Math. Math. Sci. — 2005. — *8.* — P. 1239–1251.
75. *Douglas R. G., Shapiro H. S., Shields A. I.* Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1970. — *20*, № 1. — P. 37–76.
76. *Floret K.* Lokalkonvexe Sequenzen mit kompakten Abbildungen// J. Reine Angew. Math. — 1971. — *247.* — P. 155–195.
77. *Godefroy G., Shapiro J. H.* Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds// J. Funct. Anal. — 1991. — *98.* — P. 229–269.
78. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On the completeness of orbits of a Pommiez operator in weighted (LF)-spaces of entire functions// Compl. Anal. Operator Theory. — 2017. — *11*, № 6. — P. 1407–1424.
79. *Jarchow H.* Locally convex spaces. — Stuttgart: Teubner, 1981.
80. *Karaev M. T.* Invariant subspaces, cyclic vectors, commutant and extended eigenvectors of some convolution operators// Meth. Funct. Anal. Topology. — 2005. — *11.* — P. 48–59.
81. *Korobeinik Yu. F.* On absolutely representing sestems in spaces of infunitely diifferentiable functions// Stud. Math. — 2000. — *139*, № 2. — P. 175–188.
82. *Langenbruch M., Momm S.* Complemented submodules in weighted spaces of analytic functions// Math. Nachr. — 1992. — *157.* — P. 263–276.
83. *Lê Hai Hoi.* Convolution operators on holomorphic Dirichlet series// Tokyo J. Math. — 1997. — *20*, № 2. — P. 389–402.
84. *Linchuk Yu. S.* Cyclical elements of operators which are left-inverses to multiplication by an independent variable// Meth. Funct. Anal. Topology. — 2006. — *12*, № 4. — P. 384–388.
85. *Linchuk Yu. S.* Description of the generalized eigenvalues and eigenvectors of some classical operators// Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauk. — 2013. — № 2. — P. 25–29.
86. *Martineau A.* Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes// Math. Ann. — 1966. — *163.* — P. 62–88.
87. *Meise R.* Sequence space representations for (DFN)-algebras of entire functions modulo closed ideals// J. Reine Angew. Math. — 1985. — *363.* — P. 59–95.
88. *Meise R., Momm S., Taylor B. A.* Splitting of slowly decreasing ideals in weighted algebras of entire functions// Lect. Notes Math. — 1987. — *1276.* — P. 229–252.
89. *Meise R., Vogt D.* Introduction to Functional Analysis. — New York: Oxford Univ. Press, 1997.
90. *Melichow S. N.* Über absolut repräsentierende Systeme aus Quasipolynomen in Räumen analytischer Funktionen// Math. Nachr. — 1992. — *158.* — P. 349–379.
91. *Melikhov S. N.* Generalized Fourier expansions for distributions and ultradistributions// Rev. Mat. Conepl. — 1999. — *12*, № 2. — P. 349–379.
92. *Melikhov S. N., Momm S.* Analytic solutions of convolution equations on convex sets with an obstacle in the boundary// Math. Scand. — 2000. — *86*, № 4. — P. 293–319.
93. *Melikhov S. N., Momm S.* On the expansions of analytic functions on convex locally closed sets in exponential series// Владикавказ. мат. ж. — 2011. — *13*, № 1. — P. 45–59.
94. *Momm S.* Convex univalent functions and continuous linear right inverses// J. Funct. Anal. — 1992. — *103.* — P. 85–103.

95. *Momm S.* Convolution equations on the analytic functions on convex domains in the plane// Bull. Sci. Math. — 1994. — *118.* — P. 259–270.
96. *Momm S.* Extremal plurisubharmonic functions for convex bodies in $\mathbb{C}^N$// in: Complex Analysis, Harmonic Analysis, and Applications (*R. Deville*, ed.). — Bordeaux, France, Harlow: Longman, Pitman Res., 1996. — P. 87–103.
97. *Pommiez M.* Sur les restes successifs des séries de Taylor// Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse. — 1960. — *24*, № 4. — P. 77–165.
98. *Pommiez M.* Sur les zéros des reste successifs des séries de Taylor// Acad. Fac. Sci. Univ. Toulouse. — 1960. — *250*, № 7. — P. 1168–1170.
99. *Pommiez M.* Sur les restes successifs des séries de Taylor// C. R. Acad. Sci. — 1960. — *250*, № 15. — P. 2669–2671.
100. *Pommiez M.* Sur les restes et les dérivées des séries de Taylor// C. R. Acad. Sci. — 1960. — *251*, № 17. — P. 1707–1709.
101. *Sigurdsson R.* Growth properties of analytic and plurisubharmonic functions of finite order/ Doctoral thesis. — Lund Univ., 1984.
102. *Vogt D.* Operators between Fréchet spaces/ Preprint. — Wuppertal, 1989.
103. *Wigley N. M.* The Duhamel product of analytic functions// Duke Math. J. — 1974. — *41.* — P. 211–217.

Мелихов Сергей Николаевич
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону;
Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН
и Правительства Республики Северная Осетия-Алания, Владикавказ
E-mail: `melih@math.rsu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 161 (2019). С. 104–129

УДК 517.547

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ

© 2019 г. **В. Б. ШЕРСТЮКОВ**

Аннотация. Обзор составлен на основе докторской диссертации автора, защищенной в МГУ им. М. В. Ломоносова в феврале 2017 года. Систематизированы и кратко изложены результаты автора, полученные в последнее десятилетие. Исследования относятся к классическому направлению теории целых функций одной переменной, изучающему связь между асимптотическим поведением целой функции и распределением ее корней на комплексной плоскости. Результаты применяются к теории полных и представляющих систем экспонент в пространствах аналитических функций.

***Ключевые слова*:** каноническое произведение, индекс конденсации, целая функция, тип, индикатор, верхняя и нижняя плотности нулей, система экспонент, радиус полноты, представляющая система, разложение на простые дроби.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF ENTIRE FUNCTIONS WITH GIVEN LAWS OF DISTRIBUTION OF ZEROS

© 2019 **V. B. SHERSTYUKOV**

Abstract. This review was compiled from the author's doctoral dissertation defended at the M. V. Lomonosov Moscow State University in February 2017. The author's results obtained in the last decade are systematized and summarized. The research relates to the classical direction of the theory of entire functions of one variable devoted to the connection between the asymptotic behavior of an entire function and the distribution of its zeros on the complex plane. The results presented are applied to the theory of complete and representing systems of exponents in spaces of analytic functions.

***Keywords and phrases*:** canonical product, condensation index, entire function, type, indicator, upper and lower zero density, system of exponents, radius of completeness, representing system, decomposition into simple fractions.

***AMS Subject Classification*:** 30D15, 30D20

СОДЕРЖАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00236).

ISSN 0233–6723

1. Введение

В работах классиков теории целых функций особое внимание традиционно уделялось изучению функций с «асимптотически правильным» поведением. Решающий вклад в построение соответствующей теории целых функций *вполне регулярного роста* был сделан Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером во второй четверти XX в. В дальнейшем эта теория развивалась А. А. Гольдбергом, И. В. Островским, В. С. Азариным, А. А. Кондратюком, М. Н. Шереметой и другими авторами. Целые функции вполне регулярного роста изучены наиболее полно, встречаются в большом количестве работ и имеют разнообразные применения. Однако исследования вопросов полноты и представления рядами в функциональных пространствах, проблем теории аналитического продолжения, задач теории дифференциальных операторов бесконечного порядка и операторов типа свертки требуют систематического изучения целых функций, не обладающих сколь-нибудь правильным поведением. Поэтому актуальной является разработка методов решения задач, связанных с нахождением экстремальных значений тех или иных асимптотических характеристик роста целых функций из весьма общих и естественных классов. Существенный вклад в эту тематику внесли основополагающие исследования Ж. Валирона, А. Данжуа, Б. Я. Левина, А. А. Гольдберга, А. А. Кондратюка. В последнее время благодаря, в основном, работам Б. Н. Хабибуллина, А. Ю. Попова, Г. Г. Брайчева и их учеников вновь наметился устойчивый интерес к экстремальным задачам для индикаторов и типов целых функций конечного порядка с заданными асимптотическими характеристиками распределения нулей.

С другой стороны, как показывают исследования В. Бернштейна, С. Мандельбройта, А. Ф. Леонтьева, В. В. Напалкова, А. Ф. Гришина, Ю. Ф. Коробейника, А. В. Братищева, А. М. Гайсина, К. Г. Малютина и других математиков, в теории интерполяции и рядов Дирихле типичной является ситуация, когда в качестве узлов интерполяции или показателей системы экспонент выбираются нули целой функции с предписанным поведением в нулях ее производных. Такой выбор, обусловленный существом дела, выдвигает на повестку дня следующие естественные вопросы. Насколько сильно поведение производных целой функции $L(\lambda)$ на нулевом множестве самой функции влияет на регулярность роста последней? Возможно ли, учитывая степень этого влияния, раскладывать обратную величину $1/L(\lambda)$ в ряд простых дробей специальной структуры? (Такие разложения являются важным аналитическим инструментом наряду с представлением целой функции бесконечным произведением, также составленным по ее нулям.) В каких случаях можно описывать полные и представляющие системы экспонент с показателями в нулях «порождающей» функции в терминах, связанных только с поведением последовательности значений ее производных? Этот круг вопросов тесно связан с такими классическими и современными результатами, а также нерешенными задачами теории целых функций, как известная проблема А. Ф. Леонтьева о целых функциях вполне регулярного роста; теорема М. Г. Крейна о представлении обратной величины целой функции рядом простых дробей; серия результатов А. Ф. Леонтьева, Ю. Ф. Коробейника, А. В. Абанина, С. Н. Мелихова о разложении аналитических в выпуклой области функций в ряды экспонент и знаменитая теорема Берлинга—Мальявена о радиусе полноты. Сюда же примыкают избранные вопросы теории негармонических рядов Фурье и абстрактных дифференциальных уравнений (Ж.-П. Кахан, Л. Шварц, А. Ф. Леонтьев, А. М. Седлецкий, И. В. Тихонов, Ю. С. Эйдельман). В той или иной степени эти связи нашли отражение в настоящем обзоре.

Особо подчеркнем, что, несмотря на более чем столетнее развитие теории целых функций как самостоятельной дисциплины, не все ее разделы разработаны достаточно полно. Так, еще мало изучены асимптотические свойства целых функций, не отличающихся «правильным» поведением. При этом значительный интерес представляют задачи с ограничениями на расположение нулей, часто возникающие как в самой теории, так и в ее приложениях. Объединяющей чертой обсуждаемого в обзоре цикла задач является требование, чтобы нули рассматриваемых целых функций располагались на заданном множестве и имели предписанные границы асимптотического распределения. Отметим, что никаких исходных дополнительных предположений о регулярности роста функций не делается. Тем самым достигается необходимая общность постановок и расширяется сфера применения результатов.

2. Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации

В этом разделе речь идет о следующей общей задаче: исследовать регулярность роста целой функции экспоненциального типа с простыми нулями в зависимости от поведения в нулях ее производной. Остановимся более подробно на канонических произведениях с вещественными симметричными нулями. Рассматриваются бесконечные произведения

$$L(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),\quad \lambda\in\mathbb{C},\tag{1}$$

где $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность положительных чисел

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n<\dots,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty,\tag{2}$$

имеющая конечную *верхнюю плотность*

$$\overline{\Delta}(\Lambda)\equiv\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n},\quad 0<\overline{\Delta}(\Lambda)<+\infty.\tag{3}$$

Нижняя плотность последовательности Λ, т.е. число

$$\underline{\Delta}(\Lambda)\equiv\varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n},\tag{4}$$

может не совпадать с верхней плотностью, и в этом случае последовательность называют *неизмеримой*. Если же выполнено равенство $\overline{\Delta}(\Lambda)=\underline{\Delta}(\Lambda)$, то существует обычный предел $\lim\limits_{n\to\infty}(n/\lambda_n)$, который называют *плотностью* последовательности Λ и обозначают $\Delta(\Lambda)$. В таком случае последовательность Λ считается *измеримой*.

Справедливы следующие факты (см. [51, гл. I, §§ 2, 4; гл. II, § 4]). Каноническое произведение (1) при условиях (2), (3) задает целую функцию экспоненциального типа

$$\sigma(\Lambda)\equiv\varlimsup_{r\to+\infty}r^{-1}\max_{|z|\leqslant r}\ln|L(z)|=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln L(ir)}{r},$$

где $0<\sigma(\Lambda)\leqslant\pi\overline{\Delta}(\Lambda)$. Для *индикатора* функции $L(\lambda)$ верна оценка

$$h_L(\theta)\equiv\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln|L(re^{i\theta})|}{r}\geqslant\sigma(\Lambda)|\sin\theta|.$$

Функция $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост тогда и только тогда, когда

$$\overline{\Delta}(\Lambda)=\underline{\Delta}(\Lambda)=\Delta(\Lambda),$$

т.е. когда последовательность Λ измерима. В этом случае тип и индикатор вычисляются точно:

$$\sigma(\Lambda)=\pi\Delta(\Lambda),\quad h_L(\theta)=\sigma(\Lambda)|\sin\theta|=\pi\Delta(\Lambda)|\sin\theta|.$$

Поскольку функции вполне регулярного роста представляют значительный интерес для приложений (см., например, [8,29,41,48,51,53,71,106]), то при работе с каноническим произведением (1) важно учитывать наличие или отсутствие плотности у последовательности Λ.

Будем изучать связь между измеримостью последовательности нулей канонического произведения (1) и поведением в нулях его производной $L'(\lambda)$. Для этого используем важную характеристику — *весовой индекс конденсации*. Напомним основные сведения, связанные с данным понятием.

В известной монографии [97, гл. I, §§ 7, 8] В. Бернштейн исследовал различные характеристики типа «разреженности» и «сгущаемости» для числовых последовательностей. В связи с этим он использовал некое (нетривиальное) понятие *индекса конденсации* и показал (см. [97, приложение II]), что для измеримой последовательности Λ вида (2), состоящей из положительных нулей канонического произведения (1), индекс конденсации вычисляется по правилу

$$\delta(\Lambda)\equiv\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}=-\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\neq n}\ln\left|1-\frac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2}\right|.\tag{5}$$

Через некоторое время А. Ф. Леонтьев обратил внимание на универсальный характер величины (5), перенеся на нее название «индекс конденсации». Поэтому всюду далее *стандартным индексом конденсации* будем называть именно величину (5), вычисленную для числовой последовательности (2) конечной верхней плотности (3).

Характеристики, подобные индексу конденсации $\delta(\Lambda)$, встречались во многих работах, посвященных теории рядов Дирихле, вопросам интерполяции и аналитического продолжения, оценкам роста целых функций и инвариантным подпространствам аналитических функций (см., например, [18–20, 42, 46, 47, 55, 64–66]). В частности, в [64, 66] показано, что величина (5) всегда неотрицательна, и найден диапазон изменения $\delta(\Lambda)$, если заданы плотности (3), (4) и *шаг*

$$h(\Lambda) \equiv \varliminf_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0 \tag{6}$$

последовательности Λ.

Заметим, кстати, что еще В. Бернштейн установил (см. [97, приложение II]), что у измеримой последовательности Λ вида (2) с положительным шагом $h(\Lambda)$ индекс конденсации $\delta(\Lambda)$ равен нулю. Затем, в связи с работами А. Ф. Леонтьева [50, с. 1291], [52, задача 2], возник обратный вопрос, будет ли измеримой всякая последовательность (2) с конечной верхней плотностью $\overline{\Delta}(\Lambda)$ при условии, что $\delta(\Lambda) = 0$. Напомним, что в случае измеримости Λ автоматически выполняется равенство

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln|L(re^{i\theta})|}{r} = \pi\Delta(\Lambda)|\sin\theta|, \quad \theta \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi),$$

означающее полную регулярность роста функции (1). Ответ на вопрос оказался отрицательным: в [17] А. В. Братищев указал конструкцию примера неизмеримой последовательности (2) с конечной верхней плотностью $\overline{\Delta}(\Lambda)$. положительным шагом $h(\Lambda)$ и нулевым индексом конденсации:

$$\delta(\Lambda) = 0. \tag{7}$$

Эта конструкция не является явной: она содержит элементы, трудно воплощаемые на практике, однако после работы [17] стало ясно, что даже при дополнительном ограничении (6) нельзя охарактеризовать наличие плотности у последовательности Λ в терминах стандартного индекса конденсации $\delta(\Lambda)$. Потребовалось модифицировать понятие индекса конденсации так, чтобы с помощью новой характеристики можно было твердо гарантировать измеримость последовательности Λ.

Итак, пусть Λ — последовательность положительных чисел, подчиненная условиям (2), (3), и $L(\lambda)$ — каноническое произведение (1). Пусть $\omega(r)$ — положительная функция, определенная при $r \geqslant a$ с фиксированным $a > 0$. *Индексом ω-конденсации* (или *весовым индексом конденсации*) последовательности Λ назовем значение

$$\delta(\omega,\Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}. \tag{8}$$

Похожие характеристики встречались и ранее. Так, А. Ф. Леонтьев (см. [51]) использовал величину

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n \ln\lambda_n} \ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}.$$

Затем в работах А. М. Гайсина [21, 22], посвященных решению некоторых проблем Пойа, вводилось специальное понятие весовой конденсации, фактически эквивалентное определению (8).

В нашей задаче применение весового индекса конденсации выглядит весьма естественным. Поясним на примере простого перехода от стандартного индекса (5) к чуть более общему индексу

$$\delta_p(\Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^p} \ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|} \tag{9}$$

с фиксированным $p > 0$. Индекс (9) есть частный случай основного определения (8) с весовой функцией $\omega(r) = r^p$. При $p = 1$, согласно утверждению А. В. Братищева (см. [17]), существуют неизмеримые последовательности Λ, у которых величина $\delta_1(\Lambda) = \delta(\Lambda)$ конечна и даже равна нулю. Нетрудно убедиться, что при $p > 1$ индекс (9) равен нулю всякий раз, когда стандартный индекс конечен, и, в частности, конструкция А. В. Братищева снова дает неизмеримые последовательности Λ с $\delta_p(\Lambda) = 0$. Но, оказывается, при $0 < p < 1$ картина принципиально меняется: любая последовательность Λ с индексом $\delta_p(\Lambda) < +\infty$ уже будет измеримой. Этот результат есть проявление общего правила, действующего для индексов ω-конденсации с вогнутыми функциями $\omega(r)$.

Точнее, рассматриваем *весовые функции* $\omega(r)$ со следующими свойствами:

(i) $\omega(r)$ определена, непрерывна и строго возрастает при $r \geqslant a > 0$;

(ii) $\omega(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$;

(iii) $\omega(r)$ вогнута (не обязательно строго) при $r \geqslant a$, т.е.

$$\omega\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \geqslant \frac{\omega(r_1) + \omega(r_2)}{2} \quad \text{для любых } r_1, r_2 \geqslant a.$$

Значение $a > 0$ может быть своим для каждой функции $\omega(r)$.

При выполнении (i)–(iii) вопрос о том, будет ли более «гибкое» по сравнению с (7) условие

$$\delta(\omega, \Lambda) < +\infty \tag{10}$$

достаточным для измеримости последовательности Λ, решается в терминах сходимости интеграла от $\omega(r)$, напоминающего интеграл из теории квазианалитических функций.

Теорема 2.1. *Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами* (i)–(iii) *подчинена требованию*

$$\int_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2}\, dr < +\infty. \tag{11}$$

Тогда всякая последовательность Λ вида (2)*, имеющая конечную верхнюю плотность* (3) *и удовлетворяющая условию* (10)*, будет измеримой.*

Подчеркнем, что теорема 2.1 не требует ограничения (6) на шаг последовательности Λ. Стоит оговориться также, что условие (11) фигурирует в теореме как *достаточное*; его *необходимость* отнюдь не утверждается: в отличие от классического случая не исключено существование измеримых последовательностей Λ с шагом $h(\Lambda) > 0$, у которых $\delta(\omega, \Lambda) = +\infty$. Например, для канонического произведения

$$L(\lambda) = \frac{\sin\lambda}{\lambda} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{(n\pi)^2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

с последовательностью положительных нулей

$$\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \lambda_n = n\pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

имеем

$$\Delta(\Lambda) = \frac{1}{\pi}, \quad h(\Lambda) = \pi, \quad \delta(\Lambda) = 0,$$

однако

$$\delta(\omega, \Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\ln(n\pi)} \ln(n\pi) = +\infty$$

при выборе весовой функции $\omega(r) = \ln\ln r$.

Наконец, из теоремы 2.1 вытекает, что для неизмеримой последовательности Λ вида (2) с конечной верхней плотность (3) и любой функции $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii), подчиненной требованию (11), имеем $\delta(\omega, \Lambda) = +\infty$ (в частности, $\delta_p(\Lambda) = +\infty$ для индекса (9) с $0 < p < 1$).

Требование (11), предъявляемое к весовой функции $\omega(r)$, является ключевым для теоремы 2.1. Его точность установлена при дополнительном предположении о правильном изменении $\omega(r)$. Напомним, что положительная измеримая при $r \geqslant a$ функция $\omega(r)$ называется *правильно меняющейся* (на бесконечности) (см. [72]), если для каждого значения $t > 0$ существует предел

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} = t^p. \tag{12}$$

Число p не зависит от t и называется *порядком* правильно меняющейся функции $\omega(r)$.

Точность требования (11) на весовую функцию $\omega(r)$ в теореме 2.1 подтверждает следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть функция $\omega(r)$, обладающая свойствами* (i)–(iii) *правильно меняется на бесконечности и подчинена требованию*

$$\int_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2}\,dr = +\infty. \tag{13}$$

Тогда найдется неизмеримая последовательность Λ вида (2) *с положительным шагом* (6)*, имеющая конечную верхнюю плотность* (3) *и удовлетворяющая условию* (10)*. Более того, для любых чисел α, β, связанных соотношением $0 \leqslant \alpha < \beta$, означенную неизмеримую последовательность Λ можно конструктивно построить так, чтобы*

$$\underline{\Delta}(\Lambda) = \alpha < \beta = \overline{\Delta}(\Lambda) \tag{14}$$

и при этом

$$\delta(\omega, \Lambda) = \delta(\Lambda) = 0.$$

Отметим типичные примеры допустимых весовых функций. Так, ясно, что $\omega(r) = \ln r$ и такие функции, как $\omega(r) = r^p$ при $0 < p < 1$ или

$$\omega(r) = \frac{r}{(\ln r)^q} \tag{15}$$

при $q > 1$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Если же $0 < q \leqslant 1$, то весовая функция (15) дает расходящийся интеграл (13) и подпадает под требования теоремы 2.2. Кроме того, простейшая весовая функция $\omega(r) = r$, определяющая стандартный индекс кондесации (5), также принадлежит случаю теоремы 2.2, и вместо неявной конструкции А. В. Братищева (см. [17]) возникает целая серия конкретных примеров с дополнительной информацией (14). Например, зафиксируем $\beta > 0$ и зададим последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ соотношениями

$$\lambda_1 \geqslant e^e, \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{1}{\beta} + \sqrt{\ln\ln\ln\lambda_n}\,\sin^2\left(\sqrt{\ln\ln\ln\lambda_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\overline{\Delta}(\Lambda) = \beta, \quad \underline{\Delta}(\Lambda) = 0.$$

Для канонического произведения $L(\lambda)$, построенного по этой последовательности, при любом $0 < q \leqslant 1$ выполнена асимптотика

$$\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = o\left(\frac{\lambda_n}{(\ln\lambda_n)^q}\right), \quad n \to \infty,$$

показывающая, что

$$\delta(\omega, \Lambda) = \delta(\Lambda) = 0,$$

где $\omega(r)$ — весовая функция (15) с $0 < q \leqslant 1$. Такое каноническое произведение имеет индикатор

$$h_L(\theta) = \pi\beta\,|\sin\theta|,$$

но не является функцией вполне регулярного роста (подробности см. в [87, гл. I, § 7]).

Конечно, большинство встречающихся на практике весовых функций обладает правильным изменением. Тем не менее, стоит иметь в виду, что из (i)–(iii), вообще говоря, не вытекает свойство правильного изменения функции $\omega(r)$, независимо от того, какому из требований (11) или (13) она подчинена. Подробный разбор соответствующих примеров дан в диссертации автора [87]. Сейчас отметим только, что можно построить функцию $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii), подчиненную требованию (13), так, чтобы при любом $t > 1$ выполнялось соотношение

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\omega(tr)}{\omega(r)} = 1 < t = \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\omega(tr)}{\omega(r)}.$$

Такая функция ведет себя весьма нерегулярно, хотя и удовлетворяет всем предположениям теоремы 2.2, кроме (12). Для подобных «нерегулярных» весов вопрос о существовании неизмеримых последовательностей Λ вида (2), имеющих конечную верхнюю плотность (3) и удовлетворяющих условию (10), остается открытым. Отметим, наконец, что если весовая функция $\omega(r)$ удовлетворяет всем без исключения предположениям теоремы 2.2, то она является правильно меняющейся функцией первого порядка, т.е. соотношение (12) выполняется с $p = 1$.

Таким образом, обе теоремы являются «рабочими» и имеют свои области применения. Полные доказательства теорем 2.1, 2.2 даны в [85].

Переходя от специальных канонических произведений (1) к произвольным целым функциям экспоненциального типа, расскажем кратко о проблеме, послужившей для нас отправной точкой. Будем всюду далее считать, не оговаривая особо, что множество нулей целой функции упорядочено по возрастанию модулей.

Изучая вопросы, связанные с представлением аналитических функций рядами экспонент, А. Ф. Леонтьев в 1972 г. поставил следующую задачу [50, замечание на с. 1291], [52, задача 2]. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с последовательностью простых (всех) нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и индикатором

$$h_L(\theta) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln\left|L'(\lambda_n)\right| - h_L(\arg\lambda_n) \right\} = 0. \tag{16}$$

Нужно выяснить, является ли $L(\lambda)$ функцией *вполне регулярного роста*. Последнее свойство в соответствие с общим определением [48, гл. III] равносильно существованию равномерного по аргументу $\theta \in [0, 2\pi]$ предела

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r} = h_L(\theta). \tag{17}$$

Здесь E — некоторое общее для всех θ множество положительных чисел *нулевой относительной меры*, т.е. такое, что пересечение $E \cap (0, r)$ измеримо по Лебегу при каждом $r > 0$, и его мера есть $o(r)$ при $r \to +\infty$.

Если равенство (17) имеет место при фиксированном $\theta \in [0, 2\pi]$, то $L(\lambda)$ называется функцией *вполне регулярного роста на луче* $\arg\lambda = \theta$. Как известно, множество лучей вполне регулярного роста замкнуто, т.е. замкнутым в $[0, 2\pi]$ является множество всех таких направлений θ, что функция имеет вполне регулярный рост на луче $\arg\lambda = \theta$. Наоборот, всякое замкнутое в $[0, 2\pi]$ множество совпадает с совокупностью лучей вполне регулярного роста некоторой целой функции экспоненциального типа (см. [5, теорема 1]).

Несложно видеть, что условие (16) равносильно неравенству

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} + h_L(\arg\lambda_n) \right\} \leqslant 0. \tag{18}$$

Для проверки этого утверждения убедимся в том, что (18) влечет (16). Хорошо известно, что производная $L'(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа с индикатором $\leqslant h_L(\theta)$. Отсюда вытекает оценка

$$\left|L'(\lambda_n)\right| \leqslant \exp\left\{(h_L(\arg\lambda_n) + \varepsilon)|\lambda_n|\right\}, \quad n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

справедливая при любом $\varepsilon > 0$. Но тогда

$$\frac{1}{|\lambda_n|} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} \geqslant -h_L(\arg\lambda_n) - \varepsilon, \quad n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

и, следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} + h_L(\arg\lambda_n) \right\} \geqslant 0.$$

Последнее соотношение показывает эквивалентность условий (16) и (18).

Для произвольной целой функции экспоненциального типа с простыми нулями λ_n величина, стоящая в левой части (18) и характеризующая поведение в этих нулях производной $L'(\lambda)$, является аналогом индекса конденсации (5) положительных нулей канонического произведения (1).

Условие (18) и близкие ему по характеру играют ключевую роль при установлении критериев представимости аналитических функций рядами экспонент или обобщенных экспонент (см., например, [36, 51]) и используются в смежных вопросах: интерполяции, слабой достаточности, γ-достаточности, максимальности множеств в различных классах целых функций. Из большого количества соответствующих работ отметим еще [1–4, 20, 39, 40, 77], имеющие непосредственное отношение к описанной проблематике.

Интересующая нас задача исследовалась А. Ф. Леонтьевым, Ю. И. Мельником, А. В. Братищевым как в приведенной выше, так и в более общей постановке: для целой функции с кратными нулями и индикатором $H_L(\theta)$ при уточненном порядке $\rho(r) \to \rho \in [0, \infty)$ (при этом, надо очевидным образом подправлять условие (16)). Такая обобщенная задача имеет положительное решение для значений $\rho \in [0, 1/2)$. Тот же результат получен в [17] для $\rho \in [1/2, 1)$ при дополнительных предположениях

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} H_L(\theta) > 0, \qquad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \min\limits_{|\lambda|=r} |L(\lambda)|}{\ln r} = +\infty.$$

Отметим, что при $\rho(r) \equiv \rho$ из теоремы 1 работы Ю. И. Мельника [59] и теоремы 3 обзорной статьи Ю. Ф. Коробейника [36, с. 106-107] вытекает справедливость цитированных результатов А. В. Братищева уже при любом $\rho > 0$. Если условие положительности индикатора нарушено, то при $\rho \geqslant 1/2$ соотношение (16) (в случае $\rho = 1$) или его естественное обобщение (в случае $\rho \neq 1$) не влекут, вообще говоря, полной регулярности роста функции. Соответствующий пример описан в [17]. Неявная конструкция статьи [17] содержит, в частности, обсуждавшийся выше пример целой функции вида (1). Заметим, что если $L(\lambda)$ есть функция (1), то условие (16) в терминах индекса конденсации (5) принимает вид

$$\delta(\Lambda) = -h_L(0).$$

Последнее соотношение означает, что

$$\delta(\Lambda) = h_L(0) = 0,$$

так как всегда $\delta(\Lambda) \geqslant 0$ и $h_L(0) \geqslant 0$. Таким образом, теоремы 2.1, 2.2 дают для канонических произведений (1) развернутый ответ на первоначальный вопрос А. Ф. Леонтьева. К тому же, конструкция, предложенная при доказательстве теоремы 2.2 (см. [85], [87]), предоставляет целую серию явных контрпримеров к задаче А. Ф. Леонтьева, в которых геометрический образ индикатора — *индикаторная диаграмма* $D(L)$ — есть отрезок мнимой оси.

Разумеется, условие (16) естественным образом возникает в тех вопросах комплексного анализа, где индикаторная диаграмма функции $L(\lambda)$ имеет непустую внутренность. Несмотря на усилия ряда авторов, вопрос о полной регулярности роста целой функции экспоненциального типа с условием (16), индикаторная диаграмма которой имеет внутренние точки, в общей ситуации остается открытым. Результаты Ю. И. Мельника позволяют дать положительный ответ на него в случае наличия особой симметрии в расположении корней функции $L(\lambda)$ (см. [60]) или определенной оценки снизу роста модуля $|L(\lambda)|$ на некоторой системе расширяющихся до бесконечности окружностей $|\lambda| = R_n$ (см. [61]). Например, если Λ инвариантно относительно поворота вокруг начала на фиксированный угол раствора $2\pi/s$, где $s \geqslant 3$, или если

$$\min_{|\lambda|=R_n} |L(\lambda)| > R_n^{-p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

при каком-либо $p > 0$. Так что, неизвестно даже, имеет ли вполне регулярный рост четная функция $L(\lambda)$, подчиненная (16). В теореме 2.6 мы ответим на этот частный вопрос, налагая некоторые ограничения на локализацию корней. В основе лежит результат (см. ниже теорему 2.5), положительно решающий задачу А. Ф. Леонтьева при дополнительном условии на рост функции лишь вдоль одной прямой.

В связи с приложениями интерес представляет следующий близкий вопрос. Будет ли обладать полной регулярностью роста целая функция экспоненциального типа $L(\lambda)$ с последовательностью простых нулей $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и положительным индикатором $h_L(\theta)$, удовлетворяющая более слабому, чем (16), условию

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\left|L'(\lambda_n)\right| - \gamma\, h_L(\arg\lambda_n)\right\} \geqslant 0, \tag{19}$$

где $\gamma\in(0,1)$ — фиксированное число? (Подобные функции рассматривались в [39, 40] в более общей ситуации уточненного порядка.) На этот вопрос будет дан отрицательный ответ.

Исторические сведения и точные формулировки отдельных результатов можно найти в диссертации А. В. Братищева (см. [20, введение, с. 34-35; гл. 2, § 2.5]).

Приведем теперь несколько утверждений, принадлежащих автору. Первое из них служит дополнением к теоремам 2.1, 2.2.

Теорема 2.3. *Пусть $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — неизмеримая последовательность положительных чисел вида (2) с конечной верхней плотностью (3). Пусть, далее, $L(\lambda)$ — каноническое произведение (1), построенное по последовательности Λ, и выполнено условие*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|} + h_L(0)\right\} \leqslant 0,$$

где $h_L(\theta)$ — индикатор $L(\lambda)$. Тогда справедливы соотношения

$$\delta(\Lambda)=h_L(0)=0,$$
$$h_L(\theta)=\sigma\,|\sin\theta|,\quad \sigma>0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

При этом $L(\lambda)$ является функцией вполне регулярного роста на лучах $\arg\lambda=0$, $\arg\lambda=\pi$ и не является функцией вполне регулярного роста ни на каком другом луче

$$\arg\lambda=\theta,\quad \theta\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)\,.$$

Следующий результат касается функций, подчиненных оценке (19), и показывает, что в ослабленной постановке проблема А. Ф. Леонтьева решается отрицательно.

Теорема 2.4. *Для любого фиксированного числа $\gamma\in(0,1)$ существует целая функция экспоненциального типа $L(\lambda)$ с положительным индикатором $h_L(\theta)$ и простыми нулями $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющая условию (19), но не являющаяся функцией вполне регулярного роста.*

Напомним, что множество S, расположенное на некоторой прямой, называется *относительно плотным по мере* на ней, если существуют такие положительные числа l и δ, что для любого отрезка длины l на этой прямой лебегова мера пересечения S с означенным отрезком не меньше, чем δ.

Теорема 2.5. *Пусть целая функция экспоненциального типа $L(\lambda)$ с множеством простых нулей $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и положительным индикатором $h_L(\theta)$ удовлетворяет условию (16). Пусть на некоторой прямой, проходящей через точку $\lambda=0$, для функции $L(\lambda)$ выполнена оценка*

$$\inf\{\,|L(\lambda)|\exp\omega(|\lambda|):\ \lambda\in S\,\}>0. \tag{20}$$

Здесь S — относительно плотное по мере множество на этой прямой, а $\omega(r)$ — положительная неубывающая при $r\geqslant a$ функция, подчиненная требованию (11). Тогда $L(\lambda)$ является функцией вполне регулярного роста.

Оценка вида (20) заведомо выполнена для функции, модуль которой отделен от нуля на соответствующей прямой. Такие целые функции фигурируют в следующем утверждении.

Теорема 2.6. *Пусть четная или нечетная целая функция экспоненциального типа $L(\lambda)$ с множеством простых нулей $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и положительным индикатором $h_L(\theta)$ удовлетворяет условию (16). Пусть при каких-либо $\theta_0\in[0,2\pi]$ и $D>0$ множество Λ содержится в «гиперболической полосе»*

$$\Gamma(\theta_0,D)\equiv\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}\left(\lambda e^{-i\theta_0}\right)^2\leqslant D\right\}.$$

Тогда $L(\lambda)$ является функцией вполне регулярного роста.

Как следствие, получаем, что если четная (нечетная) целая функция экспоненциального типа $L(\lambda)$ с множеством простых нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и положительным индикатором $h_L(\theta)$ удовлетворяет условию (16), причем для некоторого $\theta_0 \in [-\pi/4, \pi/4]$ множество Λ содержится в вертикальных углах

$$\theta_0 + \frac{\pi}{4} \leqslant \arg\lambda \leqslant \theta_0 + \frac{3\pi}{4}, \quad \theta_0 + \frac{5\pi}{4} \leqslant \arg\lambda \leqslant \theta_0 + \frac{7\pi}{4},$$

то $L(\lambda)$ является функцией вполне регулярного роста. Отметим также, что в условиях теоремы 2.5 оценке вида (20) будет удовлетворять целая функция, обратная величина которой раскладывается на простые дроби. Представления функций рядами простых дробей обсуждаются в разделе 3 обзора. Сейчас же мы дадим одно следствие теоремы 2.5, связанное с разложением на простые дроби.

Теорема 2.7. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с множеством простых нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и положительным индикатором $h_L(\theta)$, удовлетворяющая условию (18) и допускающая разложение*

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda-\lambda_n)}, \quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda.$$

Тогда $L(\lambda)$ является функцией вполне регулярного роста.

Приведенные результаты по проблеме А. Ф. Леонтьева применяются к вопросам представления аналитических в ограниченной выпуклой области функций рядами экспонент. Автором установлена серия фактов, в некотором смысле усиливающих известные ранее результаты А. Ф. Леонтьева [51], Ю. Ф. Коробейника [36], А. В. Абанина [2]. Отличительной особенностью доказательств новых теорем является привлечение разложений на простые дроби соответствующих мероморфных функций. Приведем один типичный результат.

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ с *опорной функцией*

$$h(-\theta) \equiv \sup_{z\in G} \mathrm{Re}(ze^{i\theta}).$$

Возьмем какую-либо последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности и составим систему экспонент

$$E_\Lambda \equiv \left\{e^{\lambda_n z}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad z\in G. \tag{21}$$

Построим, следуя А. Ф. Леонтьеву, целую функцию экспоненциального типа $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_n, $n\in\mathbb{N}$, индикатором $h_L(\theta) = h(\theta)$, и образуем систему функций

$$\psi_n(t) = \frac{1}{L'(\lambda_n)} \int_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\, e^{-\lambda t}\, d\lambda, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{22}$$

где интегрирование происходит по лучу $\arg\lambda = \theta$ (подробные разъяснения к конструкции (22) см. в [51, гл. IV, § 1]). Как доказано в [51], функции $\psi_n(t)$ регулярны вне $\overline{G}$, и (22) — биортогональная к (21) система. Далее, каждой функции $f(z)$, аналитической на $\overline{G}$ (т.е. аналитической в некоторой окрестности этого компакта), ставится в соответствие ряд

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{\lambda_n z}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(t)\,\psi_n(t)\,dt, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{23}$$

где Γ — контур, охватывающий $\overline{G}$, на котором и внутри которого $f(z)$ является аналитической функцией.

В монографии [51, часть теоремы из Дополнения] установлен следующий критерий. Для того чтобы ряд экспонент (23) сходился в области G к своей функции $f(z)$, какова бы ни была аналитическая на $\overline{G}$ функция $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы любая целая функция экспоненциального типа $\Phi(\lambda)$ с индикатором $< h(\theta)$ допускала разложение в ряд Лагранжа

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{24}$$

Оказывается, можно обеспечить сходимость ряда (23) в области G к своей функции $f(z)$, проверив выполнение условия (24) только для одной функции $\Phi(\lambda) \equiv 1$.

Теорема 2.8. *Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, $0 \in G$, и $h(-\theta)$ — ее опорная функция. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с индикатором $h(\theta)$ и множеством простых нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Следующие утверждения равносильны.*

1. *Ряд (23), составленный по произвольной аналитической на $\overline{G}$ функции $f(z)$, сходится абсолютно и равномерно на компактах области G к своей функции $f(z)$.*
2. *Справедливо разложение*

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию (18).

Другие теоремы из [87, § 9] в близком ключе дополняют некоторые результаты работ [2, 36] и связаны с разложением в ряды по системе (21) функций, аналитических в области G. Отправной точкой для рассматриваемых здесь задач являются фундаментальные результаты А. Ф. Леонтьева (см. [51]) о разложении аналитических функций в ряды экспонент. Исследования А. Ф. Леонтьева способствовали созданию в работах Ю. Ф. Коробейника и его учеников теории представляющих систем. Состояние этой теории (на начало 1980-х годов) изложено в обстоятельном обзоре Ю. Ф. Коробейника (см. [36]). Общее представление о последующем развитии тематики в направлении, связанном с системами экспонент, можно составить по диссертациям А. В. Абанина [4] и С. Н. Мелихова [58]. С теоремой 2.8 соприкасаются также результаты С. Н. Мелихова [57] о разложении аналитических на $\overline{G}$ функций в ряды экспонент, сходящиеся на компактах выпуклой ограниченной области G. Представляющие системы экспонент в пространствах локально аналитических функций с естественной топологией индуктивного предела изучены гораздо хуже. Ограничимся здесь ссылкой на статью автора [82], в которой обсуждаются проблемы двойственного описания представляющих систем в пространствах с индуктивной топологией. Дополнительную информацию, относящуюся к текущей части обзора, см. в [78–81, 84, 85].

3. Экстремальная задача для типа целой функции с нулями в угле

В этом резделе обсуждается решение следующей задачи. Пусть все нули целой функции расположены в некотором угле фиксированного раствора $\leqslant \pi$ и имеют заданные (верхнюю и нижнюю) плотности при некотором показателе $\rho \in (0, 1)$. Какое наименьшее значение может принимать тип при порядке ρ такой функции?

Экстремальным задачам для индикаторов и типов целых функций, нули которых расположены произвольно или на одном луче и имеют заданный диапазон изменения верхней и нижней плотностей (обычных, усредненных, максимальных и т. д.), посвящена обширная литература, начиная с классического мемуара Ж. Валирона [114]. Тематика активно развивалась во второй половине прошлого века в исследованиях Б. Я. Левина [48, 49], Р. Редхеффера [110], М. И. Андрашко [6], А. А. Гольдберга [24–27], Н. В. Говорова [23], А. А. Кондратюка [31–35], Б. Н. Хабибуллина [74]. Новые результаты разными методами получены в последнее время Б. Н. Хабибуллиным [75, 76], А. Ю. Поповым [67–70], А. Э. Еременко и П. М. Юдицким [101], Г. Г. Брайчевым [11–14], Ф. С. Мышаковым [62], О. В. Шерстюковой [16, 90–92].

Дадим формализованную постановку задачи и приведем основные результаты по ней. Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — стремящаяся к бесконечности последовательность комплексных чисел, расположенная в угле

$$\Gamma_\theta \equiv \Big\{\lambda \in \mathbb{C}: \ |\arg\lambda| \leqslant \theta\Big\}$$

фиксированного раствора $2\theta \in [0,\pi]$ (имеет значение лишь раствор угла, но не его конфигурация на плоскости). Пусть заданы числа

$$\rho \in (0,1), \quad \beta > 0, \quad \alpha \in [0,\beta].$$

Предполагаем, что Λ имеет *верхнюю ρ-плотность*

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \beta$$

и *нижнюю ρ-плотность*

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} \geqslant \alpha.$$

Рассматриваются всевозможные канонические произведения

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{25}$$

построенные по таким последовательностям Λ. Бесконечное произведение (25) определяет целую функцию *нормального ρ-типа*

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\rho}\ln\max_{|\lambda|=r}|L(\lambda)|.$$

При заданных условиях требуется указать наименьшее возможное значение для величины σ_ρ. Таким образом, ставится экстремальная задача отыскания точной нижней грани

$$s_\theta(\alpha,\beta;\rho) \equiv \inf\Big\{\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda): \ \Lambda \subset \Gamma_\theta, \ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta, \ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha\Big\}. \tag{26}$$

В «базовом» случае $\theta = 0$ (нули расположены на одном луче) значение экстремальной величины (26) дает следующий результат (см. [15], [87, гл. I, § 10]).

Теорема 3.1. *Для произвольного $\rho \in (0,1)$ и любых чисел $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$ справедливо равенство*

$$s(\alpha,\beta;\rho) \equiv s_0(\alpha,\beta;\rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0}\int\limits_{a\,(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta\,a^{-\rho} - \alpha\,x^{-\rho}}{x+1}\,dx. \tag{27}$$

Нижняя грань $s(\alpha,\beta;\rho)$ достигается на некоторой строго возрастающей к $+\infty$ последовательности $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ с плотностными характеристиками $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$.

Заметим, что при $\alpha = 0$, когда в постановке задачи отсутствует ограничение на нижнюю ρ-плотность нулей функций (25), из теоремы 3.1 получаем доказанное А. Ю. Поповым [67] соотношение

$$s(\beta;\rho) \equiv s(0,\beta;\rho) \equiv \inf\Big\{\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda): \ \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\Big\} = \beta\,C(\rho) \equiv \beta\,\max_{a>0} a^{-\rho}\ln(1+a). \tag{28}$$

С другой стороны, при $\alpha = \beta$ равенство (27) дает известный со времен Валирона результат о ρ-типе целой функции $L(\lambda)$ вида (25) с измеримой относительно показателя $\rho \in (0,1)$ последовательностью положительных нулей:

$$s(\beta,\beta;\rho) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}.$$

Теорема 3.1 доказана оригинальным методом, отличным от примененного в [67].

Систематическое изучение поведения экстремальной величины $s(\alpha,\beta;\rho)$ как функции параметров α,β,ρ проводилось совместно с Г. Г. Брайчевым. Соавторами для $s(\alpha,\beta;\rho)$ получены весьма точные двусторонние оценки и найдена асимптотическая формула при $\rho \to +0$, описаны также особенности случая $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ по сравнению с общим случаем расположения нулей $\Lambda \subset \mathbb{C}$ (подробности см. в [15]).

Результаты [87, гл. II, § 14] относятся к целым функциям экспоненциального типа (полным в круге системам экспонент) с нулями (показателями), одинаково расположенными на нескольких лучах. В частности, показано, что наименьшее значение экспоненциального типа канонических произведений (1) с вещественными нулями $\pm\Lambda = (\pm\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty, \tag{29}$$

$$\overline{\Delta}(\Lambda) = \beta, \quad \underline{\Delta}(\Lambda) \geqslant \alpha, \tag{30}$$

дается формулой

$$\max_{a>0} \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{a}} \ln \frac{1+a}{1+a(\alpha/\beta)^2} + 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{\beta + a\alpha}{(\beta-\alpha)\sqrt{a}} \right\}. \tag{31}$$

Это утверждение обобщает предшествующие результаты Р. М. Редхеффера [110] и А. Ю. Попова [63], полученные без учета нижней плотности нулей. Наличие точной формулы (31) для экстремального экспоненциального типа позволяет записать новую оценку сверху радиуса полноты систем экспонент с вещественными симметричными показателями, подчиненными ограничениям (30). Оценка снизу для радиуса полноты получена с применением недавнего результата Б. Н. Хабибуллина [76]. Для того чтобы сформулировать соответствующее утверждение, зафиксируем два числа $\beta > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ и рассмотрим класс $P(\alpha, \beta)$, состоящий по определению из всевозможных последовательностей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ вида (29) с характеристиками (30). Пусть $\Lambda \in P(\alpha, \beta)$ и $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Свяжем с выбранной последовательностью $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ новую последовательность

$$\Lambda^{(m)} \equiv \bigcup_{j=0}^{m-1} \left(\lambda_n e^{\frac{2\pi j}{m} i} \right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Рассмотрим систему (кратных) экспонент

$$E_{\Lambda^{(m)}} \equiv \left\{ z^{n-1} e^{\lambda z} : \ \lambda \in \Lambda^{(m)}, \ n = 1, 2, \ldots, \Lambda^{(m)}(\lambda) \right\}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где через $\Lambda^{(m)}(\lambda)$ обозначено число вхождений точки λ в последовательность $\Lambda^{(m)}$. Говорят, что система $E_{\Lambda^{(m)}}$ *полна в круге*

$$K_R \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}, \quad R > 0,$$

если она полна в пространстве $A(K_R)$ функций, аналитических в этом круге, наделенном топологией равномерной сходимости на компактах из K_R. Символ $R(\Lambda^{(m)})$ обозначает *радиус круга полноты* последовательности $\Lambda^{(m)}$, т.е. точную верхнюю грань радиусов кругов K_R, в которых полна система $E_{\Lambda^{(m)}}$. Положим

$$R(\alpha, \beta; m) \equiv \inf_{\Lambda \in P(\alpha,\beta)} R(\Lambda^{(m)}).$$

Требуется оценить величину $R(\alpha, \beta; m)$, т.е. с приемлемой точностью найти радиус наибольшего из кругов, в которых заведомо полна любая система экспонент, множество показателей которой порождено какой-либо последовательностью Λ из класса $P(\alpha, \beta)$ посредством поворотов на углы $2\pi j/m$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, относительно точки нуль.

Теорема 3.2. *При любых $\beta > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ и целом $m \geqslant 2$ справедливы оценки*

$$R(\alpha, \beta; m) \leqslant s\left(\alpha, \beta; \frac{1}{m}\right),$$

$$R(\alpha, \beta; m) \geqslant \max\left\{ \beta m \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right), \ \mu_m s\left(\alpha, \beta; \frac{1}{m}\right) \right\},$$

где величина $s\left(\alpha,\beta;\dfrac{1}{m}\right)$ *дается формулой* (27) *при* $\rho=1/m$, *а множитель* μ_m — *формулой*

$$\mu_m \equiv \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{2m}\right)\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{m}.$$

В частности,

$$\frac{\beta m}{e} \leqslant R(\beta;m) \equiv R(0,\beta;m) \leqslant \beta C\left(\frac{1}{m}\right),$$

где в соответствие с (28) *введено обозначение*

$$C\left(\frac{1}{m}\right) = \max_{a>0}\frac{\ln(1+a)}{\sqrt[m]{a}}.$$

Численные иллюстрации к теореме 3.2 приведены в [87, гл. II, § 14]. Укажем на связь наших результатов с исследованиями Л. А. Рубела [112], П. Мальявена и Л. А. Рубела [109], Р. М. Редхеффера [111] (см. также обзор Б. Н. Хабибуллина [75]).

В [86] (см. также [87, гл. II, § 15]) величина (26) вычислена и исследована для значений параметра $\theta\in(0,\pi/2]$. Сформулируем центральный результат.

Теорема 3.3. *Пусть заданы четыре числа* $\rho\in(0,1)$, $\beta>0$, $\alpha\in[0,\beta]$, $\theta\in[0,\pi/2]$. *Справедлива формула*

$$s_\theta(\alpha,\beta;\rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta + \max_{a>0}\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a}\left(\beta a^{-\rho}-\alpha x^{-\rho}\right)\frac{x+\cos\theta}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx.$$

Точная нижняя грань (26) *достигается для некоторой целой функции* (25) *с последовательностью нулей* Λ, *расположенной на лучах* $\arg\lambda=\pm\theta$, *причем* $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)=\beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)=\alpha$.

Задачу о вычислении $s_\theta(\alpha,\beta;\rho)$ поставил при $\alpha=0$ (т.е. без учета нижней ρ-плотности нулей) и решил А. Ю. Попов (см. [69]), отыскав величину

$$s_\theta(\beta;\rho)\equiv s_\theta(0,\beta;\rho) = \frac{\beta}{2}\max_{a>0} a^{-\rho}\ln(a^2+2a\cos\theta+1),\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Метод, использованный в [69], не применим при $\alpha>0$.

Для канонических произведений вида (25), последовательности нулей $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ которых *измеримы*, т.е. имеют *ρ-плотность*

$$\Delta_\rho(\Lambda)\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|^\rho}=\beta,$$

из теоремы 3.3 получаем соотношение

$$s_\theta(\beta,\beta;\rho)=\frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta.$$

Отметим, что экстремальная величина $s_\theta(\beta,\beta;\rho)$ достигается, если все нули функции (25) расположены на лучах $\arg\lambda=\pm\theta$ и на каждом из них образуют измеримые последовательности с равными ρ-плотностями ($=\beta/2$). При этом, $s_\theta(\beta,\beta;\rho)$ заведомо не достигается, если указанные ρ-плотности различны.

Основной результат этого раздела — теорема 3.3 — позволяет получать новые теоремы единственности для целых функций и теоремы о полноте систем экспонент. Так, естественным развитием одного результата Б. Н. Хабибуллина [76] является следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Пусть* $\rho\in(0,1)$, *и пусть* $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — *последовательность комплексных чисел конечной верхней* ρ-*плотности* $\beta>0$ *и нижней* ρ-*плотности* $\geqslant\alpha\in[0,\beta]$, *расположенная в некотором угле раствора* $2\theta\leqslant\pi$. *Если тип при порядке* ρ *целой функции* f, *обращающейся в нуль на* Λ, *меньше величины*

$$\frac{2^\rho\sqrt{\pi}\Gamma(1-\rho/2)}{\Gamma((1-\rho)/2)}s_\theta(\alpha,\beta;\,\rho)=\frac{\sin\pi\rho}{\pi}\Gamma(\rho)\Gamma^2(1-\rho/2)s_\theta(\alpha,\beta;\rho),$$

где $s_\theta(\alpha, \beta; \rho)$ *выписана в теореме* 3.3, *то* $f \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}$.

Отметим, что результаты в духе теоремы 3.2 о полноте систем экспонент, порождаемых последовательностями $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$, без труда переносятся на случай $\Lambda \subset \Gamma_\theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$. Укажем еще одно из следствий теоремы 3.3, относящееся к четным целым функциям экспоненциального типа, которые играют важную роль в различных разделах комплексного анализа, например, в теории рядов Дирихле.

Теорема 3.5. *Пусть* $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$, $\theta \in [0, \pi/4]$, *и пусть*

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \quad |\arg \lambda_n| \leqslant \theta, \tag{32}$$

причем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} = \beta, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} \geqslant \alpha.$$

Тогда экспоненциальный тип

$$\sigma(\Lambda) \equiv \overline{\lim_{r\to+\infty}} r^{-1} \ln \max_{|\lambda|=r} |L(\lambda)|$$

функции (32) *удовлетворяет точному неравенству*

$$\sigma(\Lambda) \geqslant \pi\alpha\cos\theta + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^2}^{a} \left(\frac{\beta}{\sqrt{a}} - \frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right) \frac{x + \cos 2\theta}{x^2 + 2x\cos 2\theta + 1}\, dx. \tag{33}$$

Без учета нижней плотности нулей ($\alpha = 0$) оценка (33) принимает более простой вид

$$\sigma(\Lambda) \geqslant \frac{\beta}{2} \max_{a>0} \frac{\ln\left(a^2 + 2a\cos 2\theta + 1\right)}{\sqrt{a}}.$$

Если же последовательность нулей канонического произведения (32) имеет плотность ($\alpha = \beta$), то оценка (33) превращается в неравенство

$$\sigma(\Lambda) \geqslant \pi\beta\cos\theta.$$

Все оценки точны. Очевидно, интеграл в (33) вычисляется через элементарные функции при любом $\alpha \in [0, \beta]$, но итоговое выражение громоздко, и поэтому мы его не приводим.

На этом закончим обсуждение экстремальных задач и перейдем к новому вопросу.

4. Разложение на простые дроби величины, обратной к целой функции

Разложение на простые дроби является удобным и часто применяемым инструментом для представления мероморфных функций. Классические результаты Миттаг-Леффлера (см., например, [56, гл. 7]) имеют слишком общий характер и требуют дополнительных уточнений в разных специальных ситуациях. Особый подкласс мероморфных функций составляют функции вида

$$F(\lambda) = \frac{1}{L(\lambda)}, \tag{34}$$

где $L(\lambda)$ — целая функция, имеющая лишь простые нули λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Множество всех нулей обозначим через $\Lambda(L)$, т.е. $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Последовательность нулей λ_n, составляющих $\Lambda(L)$, записывается, как обычно, в порядке неубывания модулей.

Вопрос о представлении величины, обратной $L(\lambda)$, рядом простых дробей имеет богатую историю. Основополагающей в тематике является работа М. Г. Крейна [44]. Важную стимулирующую роль в появлении этапной статьи [44] сыграли исследования по теории эрмитовых операторов и проблеме моментов (см. [43, 103]). Работа [44] породила проблему описания тех мероморфных функций вида (34), которые при фиксированном $p \in \mathbb{Z}_+$ допускают представление

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\, \lambda_n^p\, (\lambda - \lambda_n)} \tag{35}$$

в предположении, что

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}} < +\infty. \tag{36}$$

Здесь $P(\lambda)$ — некоторый полином; коэффициент a_0 вычисляется по правилу

$$a_0 = \begin{cases} 1/L'(0), & 0 \in \Lambda(L), \\ 0, & 0 \notin \Lambda(L). \end{cases} \tag{37}$$

Вид формулы (37) объясняется очень просто: выражение для a_0 — это вычет функции (34) в точке $\lambda = 0$. Коэффициенты $1/\,(L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p)$ ряда простых дробей в (35) суть вычеты функции $1/\,(\lambda^p\,L(\lambda))$ в точках $\lambda_n \neq 0$. Тем самым, разность

$$\Delta_L^p(\lambda) \equiv \frac{1}{L(\lambda)} - \frac{a_0}{\lambda} - \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda - \lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

всегда является целой функцией. Смысл разложения (35) состоит в требовании, чтобы эта разность была полиномом. Именно такие разложения играют особую роль в теории и приложениях. Вопрос о нахождении коэффициентов полинома $P(\lambda)$ из представления (35) не тривиален и обсуждается в [87, гл. III]. Условие (36) равносильно абсолютной и равномерной сходимости ряда в (35) на компактах области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$. Представление (35) при условии (36) будем называть разложением мероморфной функции (34) в *ряд Крейна фиксированного порядка p.*

Один из основных результатов работы [44, теорема 4] утверждает: если целая функция $L(\lambda)$ с множеством простых вещественных нулей $\Lambda(L)$ допускает разложение в ряд Крейна какого-либо порядка $p \in \mathbb{Z}_+$, то она имеет экспоненциальный тип и подчинена условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |L(r)|}{1 + r^2}\, dr < +\infty. \tag{38}$$

Как обычно, для $a \geqslant 0$ обозначено

$$\ln^+ a \equiv \begin{cases} \ln a, & a > 1, \\ 0, & 0 \leqslant a \leqslant 1. \end{cases}$$

Целые функции экспоненциального типа, удовлетворяющие условию (38), образуют известный *класс Картрайт*. Всякая функция класса Картрайт имеет вполне регулярный рост и индикаторную диаграмму в виде отрезка мнимой оси (см. [44], [48, гл. V, § 6]).

Условие вещественности нулей λ_n в цитированной теореме М. Г. Крейна является существенным. Продемонстрируем это на простом примере, приведенном в [44, § 4] (см. также недавний препринт [93, Theorem 1.2, Example 4.1]). Пусть некоторая целая функция $L(\lambda)$ положительного экспоненциального типа допускает разложение в ряд Крейна порядка $p = 0$, причем $P(\lambda) \equiv 0$, $0 \notin \Lambda(L)$, т.е.

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|} < +\infty. \tag{39}$$

Тогда (при фиксированном выборе ветви корня $\sqrt{\lambda}$) для целой функции $L(\lambda^2)$ также имеет место разложение

$$\frac{1}{L(\lambda^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}\,L'(\lambda_n)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \sqrt{\lambda_n}} - \frac{1}{\lambda + \sqrt{\lambda_n}} \right\}$$

в ряд Крейна порядка $p = 0$, но $L(\lambda^2)$ уже не будет функцией экспоненциального типа.

Напомним, что *классом* $\mathbb{A}$ (обозначение Б. Я. Левина) принято называть введенное в 1946 г. Н. И. Ахиезером (см. [7]) множество всех целых функций, нули которых удовлетворяют условию

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda_n} \right| < +\infty.$$

Класс $\mathbb{A}$ служит естественным обобщением множества всех целых функций с вещественными нулями и играет в теории заметную роль. В свете цитированного примера интересен следующий установленный в [44, теорема 5] факт о представлении функций класса $\mathbb{A}$, усиливающий теорему 4 из [44]. Другое доказательство приведенного ниже результата дано в книге [48, гл. V, § 6, теорема 13]. Наша формулировка несколько отличается от оригинальной.

Теорема 4.1. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция класса $\mathbb{A}$, имеющая лишь простые нули. Пусть величина $1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд Крейна порядка $p = 0$ с полиномом $P(\lambda) \equiv 0$. Тогда функция $L(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип, и выполняется* (38). *Другими словами, $L(\lambda)$ принадлежит классу Картрайт.*

Теорема М. Г. Крейна, разумеется, справедлива и для функций, раскладывающихся в ряд вида (35), поскольку этот более общий случай сводится к разложению из теоремы 4.1 умножением $L(\lambda)$ на подходящий многочлен (подробности см. в [44]).

Различные свойства функций, допускающих разложение в ряд Крейна фиксированного порядка, изучались и использовались в ряде работ по теории функций и негармоническому анализу, теории операторов и дифференциальных уравнений. Кроме статей [43, 45, 103] и книги [48] отметим еще исследования М. В. Келдыша, И. В. Островского [30, гл. V, § 6, гл. VI, § 2], Л. де Бранжа [100], Ю. Ф. Коробейника [37,38], А. А. Боричева и М. Л. Содина [98], Л. С. Маергойза [54,107,108, § 6], Е. В. Абакумова, А. Д. Баранова, Ю. С. Белова [93]. Так, в [37] изучались свойства решений дифференциального уравнения бесконечного порядка с символом $a(\lambda) \in [1, 0]$, допускающим разложение типа (39). В [98] выявлена роль разложений в ряд Крейна при изучении множеств ограниченного типа и множеств Ахиезера—Левина, связанных с проблемой С. Н. Бернштейна о весовой аппроксимации на вещественной прямой. Результаты [54, § 6] касаются представления рядом простых дробей обратной величины целой функции специального вида, возникающей в теории аналитических уточненных порядков.

В работе А. А. Гольдберга [28] в терминах специальных конформных отображений дано описание множеств вещественных чисел, которые могут служить множествами корней вещественных целых функций, допускающих разложение в ряд Крейна. Надо сказать, это описание весьма сложно и в силу своей специфики вряд ли может быть использовано при установлении обозримых критериев представимости обратной величины целой функции рядом Крейна. Нахождение же такого рода критериев является важной задачей, возникшей в результате как внутренних потребностей теории целых функций, так и выявленных многочисленных приложений. Этой задачей интересовались многие математики: Л. де Бранж, П. Кусис, Г. Педерсен, А. Г. Бакан и др. Мы приведем в этом пункте некоторые из известных результатов. Так, в 1959 г. Луи де Бранж установил (см. [99, лемма 2 при $G \equiv 1$]), что если целая функция экспоненциального типа $L(\lambda)$ с множеством простых вещественных нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, принадлежит классу Картрайт и удовлетворяет условиям

$$|L(i\mu)| \to +\infty, \quad \mu \to \pm\infty,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|} < +\infty, \tag{40}$$

то справедливо разложение

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda(L). \tag{41}$$

П. Кусис [104, Remark, p. 204-205] показал, что в лемме де Бранжа нельзя отбросить (сохраняя остальные условия и ее заключение) требование принадлежности функции $L(\lambda)$ классу Картрайт. В [96, Theorem 6.6] Г. Педерсеном было установлено, что функция минимального экспоненциального типа с простыми вещественными нулями, удовлетворяющая (40), допускает разложение (41). Наиболее полные результаты по обращению теоремы Крейна до последнего времени принадлежали А. Г. Бакану [9, 94, 95] и получены в последнее десятилетие. Для того чтобы их сформулировать, воспользуемся некоторыми обозначениями из этих работ, опуская при этом тривиальную ситуацию, когда множество $\Lambda(L)$ не более чем конечно.

Для целой функции $L(\lambda)$ с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ введем обозначение

$$d_L \equiv \inf\left\{ q \in \mathbb{Z}: \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{q+1}} < +\infty \right\}. \tag{42}$$

Если $d_L < +\infty$, то для всякого целого числа $p \geqslant \max\{0, d_L\}$ можно ввести целую функцию

$$\Delta_L^p(\lambda) \equiv \frac{1}{L(\lambda)} - \frac{a_0}{\lambda} - \lambda^p \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

с коэффициентом a_0, вычисляемым по правилу (37).

В [94, Theorem 3.1] и [95, Theorem 3.1] А. Г. Бакан получил следующую новую версию теоремы Крейна для вещественной целой функции с вещественными нулями.

Теорема 4.2. *Пусть $L(\lambda)$ — вещественная целая функция с множеством простых вещественных нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, подчиненная условию $d_L < +\infty$. Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Существует такое целое неотрицательное число $p \geqslant d_L$, что целая функция $\Delta_L^p(\lambda)$ есть многочлен.*

(2) *$L(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа, удовлетворяющей условию (38). Другими словами, функция $L(\lambda)$ входит в класс Картрайт.*

(3) *Если $\Lambda(L)$ — полуограниченное множество на вещественной оси, то $L(\lambda)$ имеет нулевой экспоненциальный тип; если же множество $\Lambda(L)$ не является ограниченным ни сверху, ни снизу, то $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа.*

Ясно, что импликация 1) $\Rightarrow$ 2) совпадает для вещественнозначных на вещественной оси функций с теоремой Крейна. Доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (1) фактически сводится к ссылке на лемму де Бранжа. Импликация же (3) $\Rightarrow$ (1) для функции минимального экспоненциального типа доказана в цитированной выше теореме Педерсена. Таким образом, новыми в теореме А. Г. Бакана по сравнению с предшествующими результатами являются два момента. Во-первых, это дополнение к теореме Крейна в виде импликации (1) $\Rightarrow$ (3) в части, где речь идет о функции минимального экспоненциального типа. Во-вторых, это утверждение о том, что обратная величина вещественной целой функции экспоненциального типа $L(\lambda)$ с $\Lambda(L) \subset \mathbb{R}$ и $d_L < +\infty$ раскладывается в ряд Крейна. Последнее утверждение, на наш взгляд, наиболее интересно. Оно доказано на основании [94, теорема 3.2] и [95], нашедшей применение в актуальных вопросах компактности семейств целых функций (см. [9]). Условие вещественности целой функции $L(\lambda)$ в этом утверждении существенно. В связи с указанным обстоятельством приведем анонсированный в [10, теорема 1] результат, свободный от ограничения вещественнозначности $L(\lambda)$ на $\mathbb{R}$. Для этого потребуется следующее определение.

Пусть $q \in \mathbb{Z}$ и пусть $L(\lambda)$ — такая целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что $d_L < +\infty$. Следуя [10], говорим, что $L(\lambda)$ принадлежит *классу* $\mathbb{K}^q$, если при $q \leqslant 0$ имеет место равенство (41), а при $q \geqslant 1$ существует такой полином $P(\lambda)$ степени q с множеством простых нулей

$$\Lambda(P) = (\mu_j)_{j=1}^q \subset \mathbb{C} \setminus \Lambda(L),$$

что при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\Lambda(L) \cup \Lambda(P))$ справедливо разложение

$$\frac{1}{L(\lambda)P(\lambda)} = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{P'(\mu_j)\,L(\mu_j)\,(\lambda-\mu_j)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(\lambda_n)\,L'(\lambda_n)\,(\lambda-\lambda_n)}.$$

Дадим теперь формулировку теоремы А. Г. Бакана из [10].

Теорема 4.3. *Пусть $q \in \mathbb{Z}$ и пусть $L(\lambda)$ — такая целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что $d_L < +\infty$. Функция $L(\lambda)$ принадлежит классу $\mathbb{A}\cap\mathbb{K}^q$ тогда и только тогда, когда $L(\lambda)$ принадлежит классу Картрайт, и существуют такое множество E нулевой относительной меры и такое число $s \in \mathbb{Z}_+$, что справедливо соотношение*

$$|\mu|^s|L(i\mu)| \to +\infty, \quad \mu \to \pm\infty, \quad |\mu| \in \mathbb{R}_+ \setminus E.$$

Основополагающие теоремы М. Г. Крейна и последовавшие за ними результаты Л. де Бранжа, П. Кусиса и А. Г. Бакана вызывают ощущение, что при описании характеристических свойств целой функции (не обязательно вещественной) с вещественными нулями, обратная величина которой раскладывается в ряд простых дробей, не удастся обойтись без использования класса Картрайт и каких-либо оценок снизу, налагаемых на рост функции, например, на мнимой оси. Однако исследование, проведеное автором, показало, что для функции с вещественными нулями (и даже с нулями, расположенными в некоторой полосе) в изучаемом круге вопросов ключевую роль играют лишь наличие экспоненциальной оценки сверху на рост модуля функции и неотрицательность ее индикатора. Другие ограничения не нужны. Таким образом, для целой функции $L(\lambda)$ с простыми нулями, лежащими в полосе, в самых естественных терминах получен критерий разложимости обратной величины $1/L(\lambda)$ в ряд Крейна фиксированного порядка. Результат опубликован в [83, теорема 2.1]. Пользуясь случаем, укажем на досадный просмотр, допущенный в [83]. Именно, в формулировки теорем 2.1–2.3 и следствий 2.2–2.4 статьи [83] нужно добавить условие, что целая функция имеет конечный порядок, поскольку предложенное в [83] доказательство теоремы 2.1 корректно проходит только при указанном ограничении. На это обстоятельство внимание автора обратил А. Д. Баранов в связи с недавним исследованием [93]. Вопрос о справедливости результатов [83] без ограничения на порядок функции остается открытым. Правильная формулировка доказанного утверждения выглядит следующим образом.

Теорема 4.4. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция конечного порядка с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, расположенным в некоторой полосе Π комплексной плоскости. Пусть коэффициент a_0 определен формулой (37), и $p \in \mathbb{Z}_+$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ допускает разложение*
$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^p \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}\setminus\Lambda(L), \tag{43}$$
где $P(\lambda)$ — некоторый полином, а ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, то выполнены условия:
   (i) *$L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с неотрицательным индикатором $h_L(\theta)$;*
   (ii) *сходится ряд*
$$\sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}}.$$
Если при этом $p = 0$, то $P(\lambda) \equiv 0$, а если $p \in \mathbb{N}$, то $P(\lambda)$ вычисляется по формуле
$$P(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{p-1} \frac{F^{(m)}(0)}{m!}\lambda^m, & 0 \notin \Lambda(L), \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{p-1} \frac{(\lambda\,F(\lambda))^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\lambda^m, & 0 \in \Lambda(L). \end{cases} \tag{44}$$
2. *Если выполнены условия* (i), (ii), *то величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд* (43), *сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, где $P(\lambda)\equiv 0$ при $p = 0$ и $P(\lambda)$ определен формулой* (44) *при $p \in \mathbb{N}$.*

По поводу первой части теоремы 4.4 см. также [93, Theorem 1.1]. Поскольку каждый из случаев $0 \notin \Lambda(L)$ и $0 \in \Lambda(L)$ обладает своей спецификой, полезно привести формулировки соответствующих результатов отдельно, заодно придав им форму критериев. Для ясности различаем разложения на простые дроби, получающиеся при $p = 0$ и при $p \in \mathbb{N}$.

Следствие 4.1. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция конечного порядка с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \notin \Lambda(L)$, расположенным в некоторой полосе Π комплексной плоскости.*

Для того чтобы величина, обратная к $L(\lambda)$, раскладывалась в ряд

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda-\lambda_n)},$$

сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие (i) *из теоремы* 4.4 *и условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|} < +\infty.$$

Следствие 4.2. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция конечного порядка с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \notin \Lambda(L)$, расположенным в некоторой полосе Π комплексной плоскости, и пусть $p \in \mathbb{N}$. Для того чтобы величина, обратная к $L(\lambda)$, раскладывалась в ряд*

$$F(\lambda) \equiv \frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{F^{(m)}(0)}{m!}\,\lambda^m + \lambda^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)},$$

сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (i), (ii) *из теоремы* 4.4.

Следствие 4.3. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция конечного порядка с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \in \Lambda(L)$, расположенным в некоторой полосе Π комплексной плоскости. Для того чтобы величина, обратная к $L(\lambda)$, раскладывалась в ряд*

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \frac{1}{L'(0)\,\lambda} + \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda-\lambda_n)},$$

сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие (i) *из теоремы* 4.4 *и условие*

$$\sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|} < +\infty.$$

Следствие 4.4. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция конечного порядка с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \in \Lambda(L)$, расположенным в некоторой полосе Π комплексной плоскости, и пусть $p \in \mathbb{N}$. Для того чтобы обратная величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ раскладывалась в ряд*

$$F(\lambda) = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(\lambda\,F(\lambda))^{(m+1)}\,(0)}{(m+1)!}\,\lambda^m + \frac{1}{L'(0)\,\lambda} + \lambda^p \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)},$$

сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (i), (ii) *из теоремы* 4.4.

Ввиду исключительной практической важности выделим из основной теоремы 4.4 случай целой функции с простыми вещественными нулями. Здесь благодаря теореме Крейна (см. [44, теорема 4]) не нужно требовать конечности порядка целой функции.

Теорема 4.5. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с множеством простых вещественных нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Пусть коэффициент a_0 определен формулой* (37) *и пусть $p \in \mathbb{Z}_+$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ допускает разложение* (43), *где $P(\lambda)$ — некоторый полином, а ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, то выполнены условия:*
   (i) *$L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с неотрицательным индикатором $h_L(\theta)$;*

(ii) *сходится ряд*

$$\sum_{\lambda_n\neq 0}\frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}}.$$

Если при этом $p=0$, то $P(\lambda)\equiv 0$, а если $p\in\mathbb{N}$, то $P(\lambda)$ вычисляется по формуле (44).

2. *Если выполнены условия* (i), (ii), *то величина $F(\lambda)=1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд* (43), *сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, где полином $P(\lambda)\equiv 0$ при $p=0$, и $P(\lambda)$ определен формулой* (44) *при $p\in\mathbb{N}$.*

Для целой функции нулевого экспоненциального типа из теоремы 4.4 извлекаем результат, обобщающий теорему Педерсена [96, Theorem 6.6].

Теорема 4.6. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция нулевого экспоненциального типа с множеством простых нулей $\Lambda(L)=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, расположенным в некоторой полосе Π комплексной плоскости. Пусть коэффициент a_0 определен формулой* (37) *и пусть $p\in\mathbb{Z}_+$. Для того чтобы величина, обратная к $L(\lambda)$, раскладывалась в ряд* (43), *сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, где $P(\lambda)\equiv 0$, если $p=0$, и полином $P(\lambda)$ определен формулой* (44), *если $p\in\mathbb{N}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{\lambda_n\neq 0}\frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}}<+\infty.$$

В [10, теорема 2] утверждается, что аналогичный теореме 4.6 результат справедлив и без ограничения на расположение нулей $\Lambda(L)$ целой функции нулевого экспоненциального типа $L(\lambda)$. Схема доказательства такого утверждения, как сообщается в цитированной работе, принадлежит М. Л. Содину и основывается на формуле выпуклости Карлемана—Цуи—Хейнса. Развернутое доказательство, по-видимому, нигде не опубликовано.

Отметим, что в предположениях теоремы 4.4 при выполнении условий (i), (ii) имеют место суммационные соотношения

$$\sum_{\lambda_n\neq 0}\frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^m}=\begin{cases}-\dfrac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}, & 0\notin\Lambda(L),\\[2ex] -\dfrac{(\lambda F(\lambda))^{(m)}(0)}{m!}, & 0\in\Lambda(L),\end{cases}\tag{45}$$

с произвольным $m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant p+1$.

Затронем вкратце вопрос о разложении в ряд типа Крейна величины, обратной к функции Бесселя произвольного индекса $\nu>-1$, и применении универсальных соотношений (45) к вычислению сумм, составленных по нулям этой функции (подробнее см. [73]). Интерес к подобным суммам восходит к Эйлеру и Рэлею. Из недавних работ по близким вопросам отметим [88,89,105].

Благодаря теореме 4.4 справедливо утверждение, которое обобщает или уточняет известные результаты А. Р. Форсайта [102] и И. Н. Снеддона [113].

Теорема 4.7. *Пусть $J_\nu(\lambda)$ — функция Бесселя первого рода:*

$$J_\nu(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\nu+2n},\quad \lambda\in\mathbb{C},\quad \nu>-1,$$

и $\gamma_{\nu,n}$ — ее положительные нули, образующие последовательность

$$0<\gamma_{\nu,1}<\gamma_{\nu,2}<\ldots<\gamma_{\nu,n}<\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}\gamma_{\nu,n}=+\infty.$$

Определим величины

$$a_{\nu,2m}=\left(\frac{\lambda^\nu}{J_\nu(\lambda)}\right)^{(2m)}(0),\quad m=0,1,\ldots.\tag{46}$$

Зададим число p формулой

$$p=\left[\frac{2\nu+1}{4}\right]+1,\tag{47}$$

где квадратные скобки означают целую часть. Определим полином $P(\lambda)$ *по правилу*

$$P(\lambda) \equiv 0, \qquad -1 < \nu < -\frac{1}{2},$$

$$P(\lambda) = \sum_{m=0}^{p-1} a_{\nu,2m} \frac{\lambda^{2m}}{(2m)!}, \quad \nu \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Тогда справедливо разложение

$$\frac{1}{J_\nu(\lambda)} = \lambda^{-\nu} P(\lambda) - 2\lambda^{2p-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\gamma_{\nu,n}^{2p-\nu-1}(\lambda^2 - \gamma_{\nu,n}^2)},$$

сходящееся абсолютно и равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$*, не содержащем точек* $\lambda = 0$ *и* $\lambda = \pm\gamma_{\nu,n}$*. При этом для любого* $\nu > -1$ *выполняются суммационные соотношения*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\gamma_{\nu,n}^{2m-\nu+1}} = \frac{a_{\nu,2m}}{2(2m)!}, \quad m = p, p+1, \ldots,$$

где величины $a_{\nu,2m}$ *и число* p *определены в* (46) *и* (47) *соответственно.*

Укажем, что методы, разработанные для доказательства основных результатов разделов 1 и 3 настоящего обзора, идейно близки и основаны на свойствах разложений мероморфных функций в ряды простых дробей.

В заключение наметим в самых общих чертах дальнейшие перспективные направления исследований по данной тематике, обусловленные, в первую очередь, связями с теорией интерполяции, аналитического продолжения, представления функций рядами.

1. Нахождение точного условия регулярности роста целых функций произвольного конечного порядка (в частности, целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями на луче), выраженного в терминах обобщенного индекса конденсации нулей.

2. Развитие теории экстремальных задач для асимптотических характеристик роста целых функций с ограничениями на нулевое множество. В частности, решение задачи о наименьшем возможном типе для целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями, расположенными в угле раствора $> \pi$, и для целых функций порядка $\rho > 1$ с нулями на луче.

3. Всестороннее изучение проблемы представления обратной величины целой функции с произвольно расположенными нулями рядом типа Крейна. Применение полученных результатов в теории дифференциальных уравнений и задачах математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абанин А. В.* Характеризация минимальных систем показателей представляющих систем обобщенных экспонент// Изв. вузов. Мат. — 1991. — № 2. — С. 3–12.
2. *Абанин А. В.* Геометрические критерии представления аналитических функций рядами обобщенных экспонент// Докл. РАН. — 1992. — *323*, № 5. — С. 807–810.
3. *Абанин А. В.* Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы// Мат. заметки. — 1995. — *57*, № 4. — С. 483–497.
4. *Абанин А. В.* Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы/ Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-мат. наук. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1995.
5. *Азарин В. С.* О лучах вполне регулярного роста целой функции// Мат. сб. — 1969. — *79 (121)*, № 4 (8). — С. 463–476.
6. *Андрашко М. I.* Екстремальний індикатор цілої функції порядку меньше одиниці з додатними нулями// Доповіді АН УРСР. — 1960. — № 7. — С. 869–872.
7. *Ахиезер Н. И* О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — *10*, № 5. — С. 411–428.
8. *Ахиезер Н. И* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965.
9. *Бакан А. Г.* Полиномиальный вид условий Луи де Бранжа плотности алгебраических многочленов в пространстве C_w^0// Укр. мат. ж. — 2005. — *57*, № 3. — С. 305–319.

10. *Бакан А. Г.* Разложение обратной величины целой функции на простые дроби// Докл. НАН Украины. — 2009. — № 2. — С. 11–13.
11. *Брайчев Г. Г.* Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей// Мат. сб. — 2012. — *203*, № 7. — С. 31–56.
12. *Брайчев Г. Г.* Точные оценки типа целой функции порядка меньше единицы с нулями на луче заданных усредненных плотностей// Докл. РАН. — 2012. — *445*, № 6. — С. 615–617.
13. *Брайчев Г. Г.* Точные оценки типов целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями на луче// Уфим. мат. ж. — 2012. — *4*, № 1. — С. 29–37.
14. *Брайчев Г. Г.* Точные оценки типов целых функций с нулями на лучах// Мат. заметки. — 2015. — *97*, № 4. — С. 503–515.
15. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными нулями// Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — *75*, № 1. — С. 3–28.
16. *Брайчев Г. Г., Шерстюкова О. В.* Наибольший возможный нижний тип целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями фиксированных ρ-плотностей// Мат. заметки. — 2011. — *90*, № 2. — С. 199–215.
17. *Братищев А. В.* К одной задаче А. Ф. Леонтьева// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 2. — С. 265–267.
18. *Братищев А. В.* Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — *48*, № 3. — С. 451–475.
19. *Братищев А. В.* Возникновение и развитие понятия индекса конденсации// в кн.: Актуальные вопросы теории функций. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1986. — С. 50–55.
20. *Братищев А. В.* Базисы Кете, целые функции и их приложения/ Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-мат. наук. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1998.
21. *Гайсин А. М.* Об одной гипотезе Полиа// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1994. — *58*, № 2. — С. 73–92.
22. *Гайсин А. М.* Решение проблемы Пойа// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 6. — С. 39–60.
23. *Говоров Н. В.* Екстремальний індикатор цілої функції з додатними нулями заданої верхньої та нижньої густини// Доповіді АН УРСР. — 1966. — № 2. — С. 148–150.
24. *Гольдберг А. А.* Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций, I// Мат. сб. — 1962. — *58 (100)*, № 3. — С. 289–334.
25. *Гольдберг А. А.* Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций, II// Мат. сб. — 1963. — *61 (103)*, № 3. — С. 334–349.
26. *Гольдберг А. А.* Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций, III// Мат. сб. — 1964. — *65 (107)*, № 3. — С. 414–453.
27. *Гольдберг А. А.* Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций, IV// Мат. сб. — 1965. — *66 (108)*, № 3. — С. 411–457.
28. *Гольдберг А. А.* Об одном классе целых функций// Докл. АН СССР. — 1976. — *229*, № 1. — С. 39–41.
29. *Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В.* Целые и мероморфные функции// в кн.: Комплексный анализ. Одна переменная–1/ Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1991. — *85*. — С. 5–186.
30. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970.
31. *Кондратюк А. А.* Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями// Лит. мат. сб. — 1967. — *7*, № 1. — С. 79–117.
32. *Кондратюк А. А.* Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями, II// Лит. мат. сб. — 1968. — *8*, № 1. — С. 65–85.
33. *Кондратюк А. А.* Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность// в кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения/ Республ. науч. сборник. — Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1968. — *7*. — С. 37–52.
34. *Кондратюк А. А.* Целые функции с конечной максимальной плотностью нулей// в кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения/ Республ. науч. сборник. — Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1970. — *10*. — С. 57–70.
35. *Кондратюк А. А.* Об экстремальном индикаторе целых функций с положительными нулями// Сиб. мат. ж. — 1970. — *11*, № 5. — С. 1084–1092.
36. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 1. — С. 73–126.
37. *Коробейник Ю. Ф.* Граничные свойства аналитических решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка// Мат. сб. — 1981. — *115*, № 3. — С. 364–390.

38. *Коробейник Ю. Ф.* Уравнения свертки в комплексной области// Мат. сб. — 1985. — *127*, № 2. — С. 173–197.
39. *Коробейник Ю. Ф.* Максимальные и γ-достаточные множества. Приложения к целым функциям. I// в кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения/ Республ. науч. сборник. — Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1990. — *54*. — С. 42–49.
40. *Коробейник Ю. Ф.* Максимальные и γ-достаточные множества. Приложения к целым функциям. II// в кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения/ Республ. науч. сборник. — Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1991. — *55*. — С. 23–34.
41. *Коробейник Ю. Ф.* О разрешимости в комплексной области некоторых общих классов линейных операторных уравнений. — Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2005.
42. *Красичков И. Ф.* Оценки снизу для целых функций конечного порядка// Сиб. мат. ж. — 1965. — *6*, № 4. — С. 840–861.
43. *Крейн М. Г.* Об одном замечательном классе эрмитовых операторов// Докл. АН СССР. — 1944. — *44*, № 5. — С. 191–195.
44. *Крейн М. Г.* К теории целых функций экспоненциального типа// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1947. — *11*, № 4. — С. 309–326.
45. *Крейн М. Г.* О неопределенном случае краевой задачи Штурма—Лиувилля в интервале $(0,\infty)$// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1952. — *16*, № 4. — С. 293–324.
46. *Кривошеев А. С.* Критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексной плоскости// Изв. РАН. Сер. мат. — 2004. — *68*, № 1. — С. 43–78.
47. *Кривошеева О. А.* Особые точки ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости// Алгебра и анализ. — 2011. — *23*, № 2. — С. 162–205.
48. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
49. *Левин Б. Я.* Дополнения и исправления к книге «Распределение корней целых функций». — Харьков: Препринт ФТИНТ АН УССР, 1978.
50. *Леонтьев А. Ф.* Об условиях разложимости аналитических функций в ряды Дирихле// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1972. — *36*, № 6. — С. 1282–1295.
51. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
52. *Леонтьев А. Ф.* Представление функций рядами экспонент// Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1978. — *81*. — С. 255–257.
53. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1983.
54. *Маергойз Л. С.* Индикаторная диаграмма целой функции уточненного порядка и ее обобщенные преобразования Бореля—Лапласа// Алгебра и анализ. — 2000. — *12*, № 2. — С. 1–63.
55. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. — М.: ИЛ, 1955.
56. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. II. Дальнейшее построение теории. — М.: Наука, 1968.
57. *Мелихов С. Н.* О разложении аналитических функций в ряды экспонент// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — *52*, № 5. — С. 991–1004.
58. *Мелихов С. Н.* Правые обратные к операторам представления рядами экспонент и свертки/ Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-мат. наук. — Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2003.
59. *Мельник Ю. И.* О представлении регулярных функций рядами типа рядов Дирихле// в кн.: Исследование по теории приближений функций и их приложения. — Киев: Наукова Думка, 1978. — С. 132–141.
60. *Мельник Ю. И.* Об условиях сходимости рядов Дирихле, представляющих регулярные функции// в кн.: Математический анализ и теория вероятностей. — Киев: Наукова Думка, 1978. — С. 120–123.
61. *Мельник Ю. И.* Об условиях разложимости регулярных функций в ряды экспонент// в кн.: Всесоюз. симп. по теории аппроксимации функций в комплексной области/ Тез. докл. — Уфа: БФ АН СССР, 1980. — С. 94.
62. *Мышаков Ф. С.* Аналог теоремы Валирона—Гольдберга при ограничении на усредненную считающую функцию множества корней// Мат. заметки. — 2014. — *96*, № 5. — С. 794–798.
63. *Попов А. Ю.* О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1999. — № 5. — С. 48–52.
64. *Попов А. Ю.* Точная оценка индекса конденсации// Math. Montisnigri. — 1999. — *11*. — С. 67–103.

65. *Попов А. Ю.* Экстремальные задачи в теории аналитического продолжения// Мат. сб. — 1999. — *190*, № 5. — С. 113–138.
66. *Попов А. Ю.* Экстремальные задачи в теории целых функций/ Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2005.
67. *Попов А. Ю.* Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2005. — № 1. — С. 31–36.
68. *Попов А. Ю.* О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ-плотности, лежащими на одном луче// Мат. заметки. — 2009. — *85*, № 2. — С. 246–260.
69. *Попов А. Ю.* Развитие теоремы Валирона—Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ-плотностью корней// Совр. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 132–164.
70. *Попов А. Ю.* Наибольший возможный рост максимума модуля канонического произведения нецелого порядка с заданной мажорантой считающей функции корней// Мат. сб. — 2013. — *204*, № 5. — С. 67–108.
71. *Седлецкий А. М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. — М.: Физматлит, 2005.
72. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985.
73. *Сумин Е. В., Шерстюков В. Б.* Применение рядов Крейна к вычислению сумм, содержащих нули функций Бесселя// Ж. выч. мат. мат. физ. — 2015. — *55*, № 4. — С. 47–54.
74. *Хабибуллин Б. Н.* О типе целых и мероморфных функций// Мат. сб. — 1992. — *183*, № 11. — С. 35–44.
75. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2006.
76. *Хабибуллин Б. Н.* Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции// Мат. сб. — 2009. — *200*, № 2. — С. 129–158.
77. *Шерстюков В. Б.* К вопросу о γ-достаточных множествах// Сиб. мат. ж. — 2000. — *41*, № 4. — С. 935–943.
78. *Шерстюков В. Б.* Об одной задаче Леонтьева и представляющих системах экспонент// Мат. заметки. — 2003. — *74*, № 2. — С. 301–313.
79. *Шерстюков В. Б.* О некоторых признаках полной регулярности роста целых функций экспоненциального типа// Мат. заметки. — 2006. — *80*, № 1. — С. 119–130.
80. *Шерстюков В. Б.* О регулярности роста канонических произведений с вещественными нулями// Мат. заметки. — 2007. — *82*, № 4. — С. 621–630.
81. *Шерстюков В. Б.* Представление обратной величины целой функции рядом простейших дробей и экспоненциальная аппроксимация// Мат. сб. — 2009. — *200*, № 3. — С. 147–160.
82. *Шерстюков В. Б.* Двойственная характеризация абсолютно представляющих систем в индуктивных пределах банаховых пространств// Сиб. мат. ж. — 2010. — *51*, № 4. — С. 930–943.
83. *Шерстюков В. Б.* Разложение обратной величины целой функции с нулями в полосе в ряд Крейна// Мат. сб. — 2011. — *202*, № 12. — С. 137–156.
84. *Шерстюков В. Б.* К проблеме Леонтьева о целых функциях вполне регулярного роста// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2013. — *13*, № 2. — С. 30–35.
85. *Шерстюков В. Б.* Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 9. — С. 140–182.
86. *Шерстюков В. Б.* Минимальное значение типа целой функции порядка $\rho \in (0,1)$, все нули которой лежат в угле и имеют заданные плотности// Уфим. мат. ж. — 2016. — *8*, № 1. — С. 113–126.
87. *Шерстюков В. Б.* Асимптотические свойства целых функций, корни которых лежат в некотором угле/ Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2017.
88. *Шерстюков В. Б., Сумин Е. В., Тищенко М. М.* Разложение обратной величины целой функции с нулями в полуплоскости в ряд простейших дробей// Вестн. МГОУ. Сер. Физ. Мат. — 2011. — № 3. — С. 43–49.
89. *Шерстюков В. Б., Сумин Е. В., Тищенко М. М.* Вычисление «регуляризованных» сумм, составленных по нулям интеграла ошибок// Вестн. НИЯУ МИФИ. Сер. Прикл. мат. мат. физ. — 2014. — *3*, № 1. — С. 24–26.
90. *Шерстюкова О. В.* Об экстремальном типе целой функции порядка меньше единицы с нулями фиксированных плотностей и шага// Уфим. мат. ж. — 2012. — *4*, № 1. — С. 161–165.

91. *Шерстюкова О. В.* О наименьшем типе целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями на луче// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2015. — *15*, № 4. — С. 433–441.
92. *Шерстюкова О. В.* Задача о наименьшем типе целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными нулями заданных плотностей и шага// Уфим. мат. ж. — 2015. — *7*, № 4. — С. 146–154.
93. *Abakumov E., Baranov A., Belov Y.* Krein-type theorems and ordered structure for Cauchy–De Branges spaces/ arXiv: 1802.03385v1 [math.CV].
94. *Bakan A. G.* Polynomial approximation in $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$/ Preprint. — Kiev: Natl. Acad. Sci. of Ukraine, Inst. of Math., 1998.
95. *Bakan A. G.* Polynomial density in $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ and representation of all measures which generate a determinate Hamburger moment problem// in: Approximation, Optimization, and Mathematical Economics (*Lassonde M.*, ed.). — Heidelberg–New York: Physica-Verlag, 2001. — P. 37–46.
96. *Berg C., Pedersen H.* Nevanlinna matrices of entire functions// Math. Nachr. — 1995. — *171*, № 1. — P. 29–52.
97. *Bernstein V.* Leçons sur les progrès récents de la théorie séries de Dirichlet. — Paris: Gauthier-Villars, 1933.
98. *Borichev A., Sodin M.* Krein's entire functions and the Bernstein approximation problem// Ill. J. Math. — 2001. — *45*, № 1. — P. 167–185.
99. *De Branges L.* The Bernstein problem// Proc. Am. Math. Soc. — 1959. — *10.* — P. 825–832.
100. *De Branges L.* Hilbert spaces of entire functions. — Englewood Cliffs, New York: Prentice Hall, 1968.
101. *Eremenko A., Yuditskii P.* An extremal problem for a class of entire functions of exponential type/ arXiv: 0807.2054 [math. CV].
102. *Forsyth A. R.* The expression of Bessel functions of positive order as products, and of their inverse powers as sums of rational fractions// in: Messenger of Mathematics (Glaisher J. W. L., eds.), 1920–1921. — *50.* — P. 129–149.
103. *Hamburger H. L.* Hermitian transformation of defficiency index $(1,1)$, Jacobi matrices and undetermined moment problems// Am. J. Math. — 1944. — *66*, № 4. — P. 489–522.
104. *Koosis P.* The Logarithmic Integral. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
105. *Kostin A. B., Sherstyukov V. B.* Calculation of Rayleigh type sums for zeros of the equation arising in spectral problem// J. Phys. Conf. Ser. — 2017. — *937.* — 012022.
106. *Levin B., Lyubarskii Yu., Sodin M., Tkachenko V.* Lectures on Entire Functions. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1996.
107. *Maergoiz L. S.* On partial fraction expansion for meromorphic functions// Ж. мат. физ. анал., геом. — 2002. — *9*, № 3. — С. 487–492.
108. *Maergoiz L. S.* On the expansion of a meromorphic function in partial fractions// Уфим. мат. ж. — 2016. — *8*, № 2. — С. 106–113.
109. *Malliavin P., Rubel L. A.* On small entire functions of exponential type with given zeros// Bull. Soc. Math. France. — 1961. — *89.* — С. 175–206.
110. *Redheffer R. M.* On even entire functions with zeros having a density// Trans. Am. Math. Soc. — 1954. — *77.* — С. 32–61.
111. *Redheffer R. M.* Completeness of sets of complex exponentials// Adv. Math. — 1977. — *24*, № 1. — С. 1–62.
112. *Rubel L. A.* Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions// Trans. Am. Math. Soc. — 1956. — *83*, № 2. — С. 417–429.
113. *Sneddon I. N.* On some infinite series involving the zeros of Bessel functions of the first kind// Proc. Glasgow Math. Ass. — 1960. — *4*, № 3. — С. 144–156.
114. *Valiron G.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière// Ann. Fac. Sci. Toulouse. Ser. 3. — 1913. — *5.* — С. 117–257.

Шерстюков Владимир Борисович
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ
E-mail: `shervb73@gmail.com`