ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 159

Москва 2019

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 159

АЛГЕБРА

Москва 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Модули, инвариантные относительно автоморфизмов и идемпотентных эндоморфизмов своих оболочек и накрытий
(*А. Н. Абызов, Ч. К. Куинь, А. А. Туганбаев*) 3
Вокруг Теоремы Бэра—Капланского
(*П. А. Крылов, А. А. Туганбаев, А. В. Царев*) 46
sp-Группы и их кольца эндоморфизмов
(*П. А. Крылов, А. А. Туганбаев, А. В. Царев*) 68
E-Группы и E-кольца
(*П. А. Крылов, А. А. Туганбаев, А. В. Царев*) 111

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 159 (2019). С. 3–45

УДК 512.55

МОДУЛИ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО АВТОМОРФИЗМОВ И ИДЕМПОТЕНТНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ СВОИХ ОБОЛОЧЕК И НАКРЫТИЙ

© 2019 г. **А. Н. АБЫЗОВ, Ч. К. КУИНЬ, А. А. ТУГАНБАЕВ**

Аннотация. Статья содержит как известные, так и новые результаты об автоморфизм-инвариантных модулях, автоморфизм-коинвариантных модулях, а также модулях, инвариантных и коинвариантных относительно идемпотентных эндоморфизмов соответственно своей оболочки и своего накрытия. Основные результаты приведены с доказательствами.

Ключевые слова: квазиинъективный модуль, квазипроективный модуль, автоморфизм-инвариантный модуль, автоморфизм-поднимаемый модуль, автоморфизм-коинвариантный модуль, оболочка, накрытие.

MODULES THAT ARE INVARIANT WITH RESPECT TO AUTOMORPHISMS AND IDEMPOTENT ENDOMORPHISMS OF THEIR HULLS AND COVERS

© 2019 **A. N. ABYZOV, T. C. QUYNH, A. A. TUGANBAEV**

Abstract. The paper contains both previously known and new results on automorphism-invariant modules, automorphism-coinvariant modules, and modules that are invariant or coinvariant with respect to idempotent endomorphisms of their hulls and their covers, respectively. The main results are given with proofs.

Keywords and phrases: quasi-injective module, quasi-projective module, automorphism-invariant module, automorphism-liftable module, automorphism-coinvariant module, hull, cover.

AMS Subject Classification: 16D40, 16D50, 16W20

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 4
2. Автоморфизм-инвариантные и автоморфизм-коинвариантные модули 5
3. $\mathcal{X}$-Идемпотентно коинвариантные и $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантные модули 24
Список литературы 43

Работа А. Н. Абызова выполнена при поддержке субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 1.1515.2017/4.6). Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10013).

1. Введение

Инъективные и проективные объекты играют очень важную роль во многих математических категориях. В данной статье изучаются модули, близкие к проективным и инъективным. Все изучаемые в настоящей работе модули, близкие к инъективным, являются расширением понятия квазиинъективного модуля. Впервые квазиинъективные модули были введены в [46] как модули, инвариантные относительно эндоморфизмов своих инъективных оболочек. В этой же работе было показано, что модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда каждый гомоморфизм из подмодуля модуля M в модуль M продолжается до некоторого эндоморфизма M. Квазиинъективные модули и их различные обобщения изучались во многих работах. В [42] было введено понятие псевдоинъективного модуля, т.е. модуля, в котором каждый мономорфизм из подмодуля модуля M в модуль M продолжается до некоторого эндоморфизма M. Модуль, инвариантный относительно автоморфизмов своей инъективной оболочки, называется автоморфизм-инвариантным. Впервые автоморфизм-инвариантные модули над конечномерными алгебрами были изучены С. Диксоном и К. Фуллером в [27]. В последние годы был получен ряд важных результатов об автоморфизм-инвариантных модулях над произвольными кольцами. В [31] было показано, что модуль M является псевдоинъективным в точности тогда, когда M — автоморфизм-инвариантный модуль. Условия, при которых автоморфизм-инвариантные модули являются квазиинъективными, были рассмотрены в [38, 50]. Двойственное понятие к автоморфизм-инвариантным модулям под названием автоморфизм-коинвариантные (или дуально автоморфизм-инвариантные) модули было недавно изучено в [1, 35, 60]. Общая теория модулей инвариантных и коинвариантных относительно автоморфизмов соответственно своей оболочки и своего накрытия была в последнее время развита в [34, 38, 39].

В серии работ [55–57] Дж. фон Нейман развил теорию непрерывных геометрий и их реализации с помощью решеток главных правых идеалов непрерывных регулярных колец. Непрерывные регулярные кольца продолжил изучать Утуми в [68, 69, 71]. Им было показано, что регулярное кольцо R является непрерывным в точности тогда, когда каждый замкнутый правый подмодуль модуля R_R является прямым слагаемым R_R. Непрерывные модули и их обобщения — квазинепрерывные модули — были введены в [44, 45, 52, 61] как модульные аналоги непрерывных и квазинепрерывных колец, изученных Утуми в [70]. В [33] было показано, что модуль M является квазинепрерывным в точности тогда, когда модуль M инвариантен относительно идемпотентных эндоморфизмов своей инъективной оболочки. Многие важные свойства непрерывных, квазинепрерывных модулей и их дуальных аналогов были отражены в монографиях [15,24,26,29,41,51,54].

В настоящей работе представлены известные и новые результаты об автоморфизм-коинвариантных модулях и модулях, инвариантных и коинвариантных относительно идемпотентных эндоморфизмов соответственно своей оболочки и своего накрытия. В первой части дан обзор результатов, связанных с автоморфизм-инвариантными модулями, изучены автоморфизм-коинвариантные модули, рассмотрены условия, при которых автоморфизм-коинвариантные модули являются квазипроективными. Во второй части работы изложена общая теория модулей инвариантных и коинвариантных относительно идемпотентных эндоморфизмов соответственно своей оболочки и своего накрытия. Из полученных результатов в качестве следствий следуют известные важные свойства квазидискретных и квазинепрерывных модулей.

Радикал Джекобсона кольца R обозначается через $J(R)$. Тот факт, что N является подмодулем (соответственно, малым подмодулем, существенным подмодулем) модуля M будем обозначать $N \leqslant M$ (соответственно, $N \ll M$, $N \leqslant_e M$). Радикал Джекобсона правого R-модуля M обозначается через $J(M)$.

2. Автоморфизм-инвариантные и автоморфизм-коинвариантные модули

2.1. Автоморфизм-инвариантные модули. Модуль M называется *квазиинъективным* (соответственно, *псевдоинъективным*), если для каждого подмодуля N модуля M каждый гомоморфизм (соответственно, мономорфизм) $f : N \to M$ продолжается до некоторого гомоморфизма $f' : M \to M$.

Модуль M называется *автоморфизм-инвариантным*, если он удовлетворяет одному из эквивалентных условий следующей теоремы.

Теорема 2.1 (см. [50, теорема 2]). *Пусть M — правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) $f(M) \subseteq M$ *для каждого* $f \in \operatorname{Aut} E(M)$;
(2) *каждый изоморфизм между существенными подмодулями модуля M продолжается до эндоморфизма модуля M*;
(3) *каждый изоморфизм между существенными подмодулями модуля M продолжается до изоморфизма модуля M.*

Теорема 2.2 (см. [31, теорема 16]). *Модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M — псевдоинъективный модуль.*

С. Диксон и К. Фуллер в [27] впервые изучили автоморфизм-инвариантные модули над конечномерными P-алгебрами, у которых поле P состоит из более чем двух элементов. В частности, ими было доказано следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть R — конечномерная алгебра над полем P. Если $|P| > 2$, то для неразложимого правого R-модуля следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-инвариантный модуль*;
(2) *M — квазиинъективный модуль.*

Автоморфизм-инвариантные модули над произвольными кольцами были изучены в [31, 36–39, 48, 50, 59]. Следующие результаты показывают, что ряд хорошо известных и важных свойств квазиинъективных модулей выполнен также и для автоморфизм-инвариантных модулей.

Теорема 2.4 (см. [37, предложение 1]). *Пусть M — автоморфизм-инвариантный модуль и $S = \operatorname{End} M$. Тогда $J(S) = \{f \in S \mid \operatorname{Ker}(f) \leqslant_e M\}$ и S — полурегулярное кольцо.*

Теорема 2.5 (см. [37, следствие 4]). *Если M — автоморфизм-инвариантный модуль, то $\operatorname{End} M$ — чистое кольцо.*

Теорема 2.6 (см. [37, теорема 3]). *Если M — автоморфизм-инвариантный модуль, то M — заменяемый модуль.*

В следующих утверждениях рассматриваются условия, при которых автоморфизм-инвариантный модуль является квазиинъективным.

Теорема 2.7 (см. [50, предложение 3]). *Если 2 — обратимый элемент в кольце R, то всякий автоморфизм-инвариантный правый R-модуль является квазиинъективным.*

Теорема 2.8 (см. [50, следствие 13]). *Модуль M является квазиинъективным в точности тогда, когда модуль M является одновременно автоморфизм-инвариантным модулем и CS-модулем.*

Теорема 2.9 (см. [38, теорема 4.9]). *Пусть R — коммутативное нетерово кольцо. Конечно порожденный R-модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M — квазиинъективный модуль.*

Теорема 2.10 (см. [38, теорема 4.13]). *Пусть R — коммутативное артиново кольцо. R-Модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M — квазиинъективный модуль.*

Модуль M называется *автоморфизм-продолжаемым* (соответственно, *эндоморфизм-продолжаемым*), если для любого подмодуля X модуля M каждый автоморфизм (соответственно, эндоморфизм) модуля X продолжается до эндоморфизма модуля M. Если для любого подмодуля X модуля M каждый автоморфизм модуля X продолжается до автоморфизма модуля M, то модуль M называется *строго автоморфизм-продолжаемым*. Автоморфизм-продолжаемые и эндоморфизм-продолжаемые модули были изучены в [4–14, 16–22, 63–67].

Теорема 2.11 (см. [63, предложение 10.22(1)]). *Для полуартинового модуля следующие условия равносильны*:

(1) M — *эндоморфизм-продолжаемый модуль*;
(2) M — *квазиинъективный модуль.*

Доказательство. Пусть Q — инъективная оболочка модуля M, S — цоколь модуля Q и f — эндоморфизм модуля Q. Достаточно доказать, что $f(M) \subseteq M$. Заметим, что $f(S) \subseteq S$. Кроме того, $S \subseteq M$, поскольку M — существенный подмодуль в Q.

Обозначим через X сумму всех таких подмодулей X' в M, что $f(X') \subseteq X'$. Тогда $f(X) \subseteq X$, $S \subseteq X$ и X — существенный подмодуль в M. Если $X = M$, то $f(M) \subseteq M$. Допустим, что $X \neq M$. Тогда ненулевой полуартинов модуль M/X является существенным расширением своего ненулевого цоколя Y/X, где $X \subsetneq Y \subseteq M$. Так как $f(X) \subseteq X$ и M — эндоморфизм-продолжаемый модуль, то существует такой эндоморфизм g модуля M, что $(f-g)(X) = 0$. Кроме того, Y/X — полупростой модуль. Поэтому $(f-g)(Y) \subseteq S \subseteq X$. Так как $g(X) \subseteq X$, то g индуцирует эндоморфизм $\overline{g}$ модуля M/X с ненулевым цоколем Y/X. Поскольку Y/X — цоколь модуля M/X, то $\overline{g}(Y/X) \subseteq Y/X$. Поэтому $g(Y) \subseteq Y$. Следовательно, $f(Y) \subseteq (f-g)(Y) + g(Y) \subseteq Y$. Кроме того, Y строго содержит X, что противоречит выбору X. □

Теорема 2.12 (см. [66, теорема 1]). *Для полуартинова модуля M равносильны условия*:

(1) M — *автоморфизм-инвариантный модуль*;
(2) M — *строго автоморфизм-продолжаемый модуль*;
(3) M — *автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. Импликация (1)⇒(3) вытекает из теоремы 2.1.

(3)⇒(2). Пусть X_1 — подмодуль в M и f_1 — его автоморфизм. Надо доказать, что f_1 продолжается до автоморфизма модуля M. Можно считать, что X_1 — существенный подмодуль в M.

Обозначим через W множество всех таких пар (X', f'), что X' — подмодуль в M, $X_1 \subseteq X'$, f' — автоморфизм модуля X' и f' совпадает с f_1 на X_1. Определим такой частичный порядок на W, что $(X', f') \leqslant (X'', f'') \Leftrightarrow X' \subseteq X''$ и f'' совпадает с f' на X'. Непосредственно проверяется, что объединение любой возрастающей цепи пар из W принадлежит W. По лемме Цорна существует максимальная пара (X, f). Тогда $X = X_2$ для любой такой пары $(X_2, f_2) \in W$, что $X \subseteq X_2$ и f_2 совпадает с f на X.

Если $X = M$, то f — автоморфизм модуля M, что и требовалось. Допустим, что $X \neq M$. Тогда ненулевой полуартинов модуль M/X является существенным расширением своего ненулевого цоколя Y/X, где X — собственный подмодуль модуля $Y \subseteq M$. Так как M — автоморфизм-продолжаемый модуль, то автоморфизмы f и f^{-1} модуля X продолжаются до эндоморфизмов g и h модуля M соответственно. Тогда

$$(1-gh)(X) = 0 = (1-hg)(X).$$

Так как $X \cap \operatorname{Ker} g = X \cap \operatorname{Ker} f = 0$ и X — существенный подмодуль в M, то g — мономорфизм. Кроме того, сужение g на X является автоморфизмом модуля X. Поэтому g индуцирует мономорфизм $\overline{g} : M/X \to M/X$. Так как цоколь Y/X модуля M/X является вполне инвариантным

подмодулем в M/X, то $\overline{g}(Y/X) \subseteq Y/X$. Поэтому $g(Y) \subseteq Y$, причем $X = g(X) \subsetneq g(Y)$. Аналогично получаем, что $h(Y) \subseteq Y$, причем $X = h(X) \subsetneq h(Y)$.

Так как M — полуартинов модуль, то M — существенное расширение своего ненулевого цоколя S. Тогда $S \subseteq X$, поскольку X — существенный подмодуль в M и S — полупростой подмодуль в M. Кроме того,

$$(1 - gh)(X) = (1 - ff^{-1})(X) = 0$$

и Y/X — полупростой модуль. Поэтому $(1 - gh)(Y) \subseteq S \subseteq X$. Тогда

$$Y \subseteq (1 - gh)(Y) + gh(Y) \subseteq X + g(Y) = g(Y).$$

Поэтому сужение g_Y мономорфизма g на Y является автоморфизмом модуля Y и g_Y — продолжение автоморфизма f модуля X. Это противоречит выбору X.

(2)⇒(1). Пусть Q — инъективная оболочка модуля M, u — автоморфизм модуля Q и S — цоколь модуля Q. Надо доказать, что $u(M) \subseteq M$.

Так как M — существенный полуартинов подмодуль в Q, то S содержится в M и является существенным подмодулем в M. Так как S — цоколь модуля Q, то $u(S) = S = u^{-1}(S)$. Обозначим через X сумму всех таких подмодулей X' в M, что $u(X') = X' = u^{-1}(X')$. Тогда $u(X) = X = u^{-1}(X)$, $S \subseteq X$, X — существенный подмодуль в M.

Если $X = M$, то $u(M) = M$, что и требовалось. Допустим, что $X \neq M$. Тогда ненулевой полуартинов модуль M/X является существенным расширением своего ненулевого цоколя Y/X, где $X \subsetneq Y \subseteq M$. Так как $u(X) = X = u^{-1}(X)$ и M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль, то существуют такие автоморфизмы f и g модуля M, что $(u - f)(X) = 0$ и $(u^{-1} - g)(X) = 0$. Кроме того, Y/X — полупростой модуль. Поэтому

$$(u - f)(Y) \subseteq S \subseteq X, \quad (u^{-1} - g)(Y) \subseteq S \subseteq X.$$

Так как f и g — автоморфизмы модуля M и $f(X) = X = g(X)$, то f и g индуцируют автоморфизмы $\overline{f}$ и $\overline{g}$ модуля M/X с ненулевым цоколем Y/X. Так как Y/X — цоколь модуля M/X, то $\overline{f}(Y/X) = Y/X = \overline{g}(Y/X)$, причем $f(X) = X = g(X)$. Поэтому $f(Y) = Y = g(Y)$. Кроме того, $(u - f)(Y) \subseteq Y$ и $(u^{-1} - g)(Y) \subseteq Y$. Тогда

$$u(Y) \subseteq (u - f)(Y) + f(Y) \subseteq Y, \quad u^{-1}(Y) \subseteq (u^{-1} - g)(Y) + g(Y) \subseteq Y.$$

Поэтому $u(Y) = Y = u^{-1}(Y)$ и Y строго содержит X, что противоречит выбору X. □

Следствие 2.13 (см. [16, 21]). *Пусть A — кольцо и M — A-модуль. Если M — артинов модуль или A — полупримарное кольцо, то следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-инвариантный модуль*;
(2) *M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль*;
(3) *M — автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Теорема 2.14 (см. [10, теорема 2]). *Для регулярного кольца R следующие условия равносильны*:

(1) *R_R — эндоморфизм-продолжаемый модуль*;
(2) *R — самоинъективное справа кольцо.*

Теорема 2.15 (см. [2, теорема 3]). *Для кольца R без делителей нуля следующие условия равносильны*:

(1) *R_R — эндоморфизм-продолжаемый модуль*;
(2) *кольцо R обладает классическим двусторонним кольцом частных T и вполне целозамкнуто справа в T.*

Пример 2.16. Каждый квазиинъективный модуль является эндоморфизм-продолжаемым. Непосредственно проверяется, что $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}$ является эндоморфизм-продолжаемым. Инъективной оболочкой $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}$ является аддитивная группа рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Так как отображение $\alpha : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, действующее по правилу $q \to q/2$, является автоморфизмом $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Q}$ и $\alpha\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$, то $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}$ не является квазиинъективным.

Пример 2.17. Пусть $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное множество экземпляров поля $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и R — подкольцо прямого произведения всех F_i, состоящее из всех последовательностей, стабилизирующихся на конечном шаге. Ясно, что R — регулярное полуартиново кольцо, которое не является самоинъективным. Тогда согласно теореме 2.12 модуль R_R не является эндоморфизм-продолжаемым. Так как $E = \prod_{i=1}^{\infty} F_i$ — инъективная оболочка модуля $R_R, U(R) = \{1\}$ и $\mathrm{End}_R E = \{1\}$, то R_R — автоморфизм-продолжаемый и автоморфизм-инвариантный модуль.

Пример 2.18. Пусть F — поле нулевой характеристики и A — алгебра Вейля над F с двумя образующими x, y и одним определяющим соотношением $xy - yx = 1$. Докажем, что A_A и ${}_AA$ — автоморфизм-продолжаемые модули, причем модули A_A и ${}_AA$ не являются эндоморфизм-продолжаемыми. Хорошо известно, что A — простая область главных правых (левых) идеалов, A — не тело, и группа обратимых элементов $U(A)$ области A совпадает с $F \setminus 0$. В частности, $U(A)$ лежит в центре области A.

Пусть a — ненулевой необратимый элемент области A. Достаточно доказать следующие два утверждения:

(a) для каждого автоморфизма α модуля aA_A существует такой обратимый элемент $u \in U(A)$, что $\alpha(ab) = uab$ для всех $b \in A$;
(b) существует эндоморфизм f модуля aA, который не продолжается до эндоморфизма модуля A_A.

(a) Так как $\alpha(aA) = aA$, то $\alpha(a) = au$ и $a = auv$ для некоторых элементов $u, v \in A$. Тогда $uv = 1$. Поскольку A — область, то $vu = 1$ и $u \in U(A) \subset F$. Тогда $uab = aub = \alpha(ab)$ для всех $b \in A$.

(b) Так как A — простая область и a — ненулевой необратимый элемент, то $AaA = A \neq Aa$. Поэтому $ab \not\subseteq Aa$ для некоторого элемента $b \in A$. Так как A — нетерова область, то A имеет классическое тело частных, содержащее элемент a^{-1}. Тогда $aba^{-1}aA \subseteq aA$ и соотношение $f(ac) = aba^{-1}c$ задает эндоморфизм f подмодуля aA_A в A_A. Допустим, что f продолжается до эндоморфизма φ модуля A_A. Обозначим $d = \varphi(a)$. Тогда

$$ab = aba^{-1}a = f(a)a = \varphi(a)a = da \in Aa,$$

Противоречие.

Открытый вопрос 2.19. Пусть M — автоморфизм-продолжаемый правый R-модуль. Верно ли, что в этом случае модуль M является строго автоморфизм-продолжаемым?

Открытый вопрос 2.20. Является ли эндоморфизм-продолжаемый модуль с существенным цоколем квазиинъективным?

Открытый вопрос 2.21. Описать эндоморфизм-продолжаемые справа и автоморфизм-продолжаемые справа групповые кольца. Пример групповой алгебры бесконечной циклической группы над полем показывает, что в таком случае, в отличие от инъективного случая, группа не обязана быть периодической.

2.2. Автоморфизм-коинвариантные модули. Модуль M называется *квазипроективным* (соответственно, *псевдопроективным*), если для каждого подмодуля N модуля M каждый гомоморфизм (соответственно, эпиморфизм) $f : M \to M/N$ поднимается до некоторого гомоморфизма $f' : M \to M$.

Модуль M называется *автоморфизм-коинвариантным,* если для каждых малых подмодулей K_1, K_2 модуля M всякий малый эпиморфизм $\nu : M/K_1 \to M/K_2$ поднимается до эндоморфизма θ модуля M:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta} & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M/K_1 & \xrightarrow{\nu} & M/K_2 \end{array}$$

Очевидно, что каждый квазипроективный модуль является псевдопроективным и каждый псевдопроективый модуль является автоморфизм-коинвариантным.

Теорема 2.22 (см. [60, теорема 27]). *Пусть $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Тогда M — автоморфизм-коинвариантный модуль в точности тогда, когда $f(\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi)$ для каждого $f \in \mathrm{Aut}\, P$.*

Следующее утверждение является двойственным аналогом теоремы 2.2.

Теорема 2.23 (см. [35, теорема 2.3]). *Пусть R — совершенное справа кольцо. Тогда правый R-модуль M является автоморфизм-коинвариантным в точности тогда, когда M — псевдопроективный модуль.*

Модуль M называется *строго автоморфизм-поднимаемым*, если для каждого подмодуля N модуля M каждый автоморфизм f модуля M/N может быть поднят до автоморфизма f' модуля M. Если для каждого подмодуля N модуля M каждый автоморфизм (соответственно, эндоморфизм) f модуля M/N может быть поднят до эндоморфизма f' модуля M, то M называется *автоморфизм-поднимаемым* (соответственно, *эндоморфизм-поднимаемым*) модулем.

Теорема 2.24 (см. [5]). *Если R — совершенное справа кольцо, то для правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

(1) *M — эндоморфизм-поднимаемый модуль*;
(2) *M — квазипроективный модуль.*

Доказательство. Пусть $\alpha : P \to M$ — проективная оболочка модуля M. Без ограничения общности можно считать, что $M = P/\mathrm{Ker}(\alpha)$. Пусть f — произвольный эндоморфизм модуля P. Пусть

$$X = \mathrm{Ker}(\alpha) + \sum_{i=1}^{\infty} f^i(\mathrm{Ker}(\alpha))$$

и $\alpha' : P/\mathrm{Ker}(\alpha) \to P/X$ — канонический гомоморфизм. Так как, очевидно, $f(X) \leqslant X$, то для некоторого гомоморфизма $f' : P/X \to P/X$ выполнено равенство $\alpha'\alpha f = f'\alpha'\alpha$. Так как модуль M является эндоморфизм-поднимаемым, то для некоторого гомоморфизма $f'' : P/\mathrm{Ker}(\alpha) \to P/\mathrm{Ker}(\alpha)$ имеем $f'\alpha' = \alpha' f''$. Поскольку модуль P проективен, то для некоторого эндоморфизма $g : P \to P$ выполнено равенство $\alpha g = f''\alpha$. Так как

$$\alpha'\alpha f = f'\alpha'\alpha, \quad \alpha'\alpha g = f'\alpha'\alpha,$$

то $(f - g)(P) \leqslant X$. Для любого натурального числа n введем обозначения

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} f^{i-1}(f - g)(\mathrm{Ker}(\alpha)), \quad Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

Докажем по индукции, что $X_n = \mathrm{Ker}(\alpha) + Y_n$. Пусть $n = 1$. Так как $g(\mathrm{Ker}(\alpha)) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha)$, то

$$\begin{aligned} X_1 = \mathrm{Ker}(\alpha) + f(\mathrm{Ker}(\alpha)) + g(\mathrm{Ker}(\alpha)) \supseteq \mathrm{Ker}(\alpha) + (f - g)(\mathrm{Ker}(\alpha)) = \\ = \mathrm{Ker}(\alpha) + Y_1 \supseteq \mathrm{Ker}(\alpha) + g(\mathrm{Ker}(\alpha)) + (f - g)(\mathrm{Ker}(\alpha)) \supseteq X_1. \end{aligned}$$

Теперь допустим, что $X_n = \mathrm{Ker}(\alpha) + Y_n$. Тогда

$$X_{n+1} = X_n + f^{n+1}(\mathrm{Ker}(\alpha)) = X_n + f^n(f(\mathrm{Ker}(\alpha))) + f^n(g(\mathrm{Ker}(\alpha))) \supseteq$$
$$\supseteq \mathrm{Ker}(\alpha) + Y_n + f^n(f-g)(\mathrm{Ker}(\alpha)) = \mathrm{Ker}(\alpha) + Y_{n+1} \supseteq$$
$$\supseteq X_n + f^n g(\mathrm{Ker}(\alpha)) + f^n(f-g)(\mathrm{Ker}(\alpha)) \supseteq X_{n+1}.$$

Так как $(f-g)(P) \subseteq X$ и $\mathrm{Ker}(\alpha)$ — малый подмодуль в P, то $(f-g)(\mathrm{Ker}(\alpha))$ — малый подмодуль в X. Поэтому $f^n(f-g)(\mathrm{Ker}(\alpha))$ — малый подмодуль в X для всех n, так как $f^n(X) \subseteq X$. Поэтому Y_n — малый подмодуль в X для всех n и $Y \subseteq J(X)$. Так как $X = \mathrm{Ker}(\alpha) + Y$ и $Y \subseteq J(X)$, то $X = \mathrm{Ker}(\alpha) + J(X)$. Поскольку кольцо R совершенно справа, то $X = \mathrm{Ker}(\alpha)$. Следовательно, $\mathrm{Ker}(\alpha)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P и согласно [72, 18.2] M — квазипроективный модуль. □

Пример 2.25. Легко видеть, что прюферова группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ является автоморфизм-продолжаемой, но не является квазипроективной.

Пример 2.26. Пусть $M = \mathbb{Z} \oplus C$, где C — конечная циклическая группа порядка 2. Тогда непосредственно проверяется, что M — автоморфизм-коинвариантный и неквазипроективный модуль.

Пример 2.27. Пусть R — кольцо из п. (2) замечания **??**. Так как R — V-кольцо, то над кольцом R каждый модуль является автоморфизм-коинвариантным. Из предложения 2.50 следует, что модуль $R \oplus R/\operatorname{Soc}(R)$ не является автоморфизм-поднимаемым.

В теоремах 2.3, 2.8 и 2.9 приведены условия для автоморфизм-инвариантного модуля M, при которых модуль M является квазиинъективным. Естественно возникает задача о нахождении условий для автоморфизм-коинвариантного модуля M, при которых модуль M является квазипроективным. В настоящем разделе иэта задача изучается для автоморфизм-коинвариантных модулей над совершенными справа кольцами.

Следующее утверждение непосредственно следует из теоремы 2.22 и [72, 41.15].

Предложение 2.28. *Пусть R — совершенное справа кольцо и M — правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — модуль со свойством подъема, который является автоморфизм-коинвариантным*;
(2) *M — квазидискретный модуль и автоморфизм-коинвариантный модуль*;
(3) *M — π-проективный модуль и автоморфизм-коинвариантный модуль*;
(4) *M — автоморфизм-коинвариантный модуль и для каждых подмодулей A, B модуля M из равенства $A + B = M$ следует существование идемпотента $\pi \in \operatorname{End} M$, для которого выполнены условия $\pi(M) \subseteq A$, $(1-\pi)(M) \subseteq B$*;
(5) *M — квазипроективный модуль.*

Лемма 2.29. *Пусть $M_1 \oplus M_2$ — автоморфизм-коинвариантный модуль и $p_1 : P_1 \to M_1$, $p_2 : P_2 \to M_2$ — проективные оболочки. Если $P_1 \simeq P_2$, то $M_1 \simeq M_2$.*

Доказательство. По предположению существуют такие подмодули K_1, K_2 модуля P_1, что

$$K_1, K_2 \ll P_1, \quad M_1 \simeq P_1/K_1, \quad M_2 \simeq P_1/K_2.$$

Тогда гомоморфизм

$$\pi : P_1 \times P_1 \to P_1/K_1 \times P_1/K_2, \quad \pi(x,y) = (x + K_1, y + K_2), \quad x, y \in P_1,$$

является проективной оболочкой модуля $P_1/K_1 \times P_1/K_2$. Рассмотрим автоморфизм φ модуля $P_1 \times P_1$, действующий по правилу $\varphi(x,y) = (y,x)$ для каждых $x, y \in P_1$. Так как $P_1/K_1 \times P_1/K_2 \simeq M_1 \oplus M_2$ — автоморфизм-коинвариантный модуль, то из теоремы 2.22 следует равенство $\varphi(K_1 \times K_2) = K_1 \times K_2$. Таким образом, $K_1 = K_2$. □

Лемма 2.30. *Пусть $\pi : P \to M$ — проективное накрытие автоморфизм-коинвариантного модуля M и $P = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$. Если $P_1 \simeq P_2$, то*
(1) $\operatorname{Ker}(\pi) = (P_1 \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus (P_2 \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus (P_3 \cap \operatorname{Ker}(\pi))$;
(2) $M \simeq M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$, *где*

$$M_1 = \frac{P_1 + \operatorname{Ker}(\pi)}{\operatorname{Ker}(\pi)} \simeq \frac{P_2 + \operatorname{Ker}(\pi)}{\operatorname{Ker}(\pi)} = M_2, \quad M_3 = \frac{P_3 + \operatorname{Ker}(\pi)}{\operatorname{Ker}(\pi)}.$$

Доказательство. Согласно условию леммы существует изоморфизм $f : P_1 \to P_2$. Пусть $\pi_i : P \to P_i$, $i = 1, 2, 3$, — канонические проекции. Рассмотрим отображения

$$\phi_1 : P \to P, \quad x_1 + x_2 + x_3 \mapsto x_1 + (x_2 + f(x_1)) + x_3, \qquad \forall x_1 \in P_1,\ x_2 \in P_2,\ x_3 \in P_3,$$
$$\phi_2 : P \to P, \quad x_1 + x_2 + x_3 \mapsto (x_1 + f^{-1}(x_2)) + x_2 + x_3, \quad \forall x_1 \in P_1,\ x_2 \in P_2,\ x_3 \in P_3.$$

Очевидно, ϕ_1 и ϕ_2 — автоморфизмы модуля P. Так как M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то из теоремы 2.22 следует, что

$$\phi_1(\operatorname{Ker}(\pi)) = \operatorname{Ker}(\pi), \quad \phi_2(\operatorname{Ker}(\pi)) = \operatorname{Ker}(\pi).$$

Пусть $m \in \operatorname{Ker}(\pi)$. Для некоторых элементов $x_1 \in P_1$, $x_2 \in P_2$ и $x_3 \in P_3$ имеет место равенство $m = x_1 + x_2 + x_3$. Так как

$$f(x_1) = \phi_1(m) - m, \quad f^{-1}(x_2) = \phi_2(m) - m \in \operatorname{Ker}(\pi),$$

то

$$x_1 = \phi_2(f(x_1)) - f(x_1), \quad x_2 = \phi_1(f^{-1}(x_2)) - f^{-1}(x_2) \in \operatorname{Ker}(\pi).$$

Следовательно, $x_3 \in \operatorname{Ker}(\pi)$. Таким образом,

$$\operatorname{Ker}(\pi) = (P_1 \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus (P_2 \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus (P_3 \cap \operatorname{Ker}(\pi)),$$

и

$$M \simeq \frac{P}{\operatorname{Ker}(\pi)} \simeq \frac{P_1 \oplus P_2 \oplus P_3}{(P_1 \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus (P_2 \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus (P_3 \cap \operatorname{Ker}(\pi))} \simeq$$
$$\simeq \frac{P_1}{P_1 \cap \operatorname{Ker}(\pi)} \oplus \frac{P_2}{P_2 \cap \operatorname{Ker}(\pi)} \oplus \frac{P_3}{P_3 \cap \operatorname{Ker}(\pi)} \simeq M_1 \oplus M_2 \oplus M_3,$$

где

$$M_1 = \frac{P_1 + \operatorname{Ker}(\pi)}{\operatorname{Ker}(\pi)}, \quad M_2 = \frac{P_2 + \operatorname{Ker}(\pi)}{\operatorname{Ker}(\pi)}, \quad M_3 = \frac{P_3 + \operatorname{Ker}(\pi)}{\operatorname{Ker}(\pi)}.$$

Поскольку M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то согласно [60, предложение 11] $M_1 \oplus M_2$ также является автоморфизм-коинвариантным модулем. Так как P_1 — проективная оболочка модуля M_1 и P_2 — проективное накрытие модуля M_2, то из леммы 2.29 следует изоморфизм $M_1 \simeq M_2$. □

Предложение 2.31. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Если P — прямая сумма попарно изоморфных локальных модулей, то M — квазипроективный модуль.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный эндоморфизм f модуля P. Согласно [25, следствие 5.3] имеет место равенство $f = e + g$, где $e \in \operatorname{End}_R(P)$ — идемпотент и $g \in \operatorname{Aut} P$. Согласно [32, теорема 3.10] имеют место равенства

$$eP = \bigoplus_{i \in I} A_i, \quad (1 - e)P = \bigoplus_{i \in I'} B_i,$$

где A_i, B_j — локальные проективные модули для каждых $i \in I$, $j \in I'$. Пусть

$$\pi_i : \Big(\bigoplus_{i \in I} A_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \in I'} B_i\Big) \to A_i, \quad \pi'_j : \Big(\bigoplus_{i \in I} A_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \in I'} B_i\Big) \to B_j$$

— естественные проекции для каждых $i \in I$, $j \in I'$. Так как модули из множества $\{A_i\}_{i\in I} \cup \{B_i\}_{i\in I'}$ попарно изоморфны, то из леммы 2.30 следует, что

$$\pi_i(\mathrm{Ker}(\pi)) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi), \quad \pi'_j(\mathrm{Ker}(\pi)) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi)$$

для каждых $i \in I$, $j \in I'$. Следовательно, $e(\mathrm{Ker}(\pi)) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi)$. Так как M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то согласно теореме 2.22 $g(\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi)$. Таким образом, $\mathrm{Ker}(\pi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P и, следовательно, согласно [72, 18.2] M — квазипроективный модуль. □

Кольцо R называется *примарным*, если $R/J(R)$ — кольцо матриц над некоторым телом.

Следствие 2.32. *Пусть R — совершенное справа кольцо. Если R — прямое произведение примарных колец, то каждый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.*

Кольцо, в котором каждый идемпотентный элемент является центральным, называется *нормальным*.

Следствие 2.33. *Пусть R — нормальное совершенное справа кольцо. Тогда каждый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.*

Лемма 2.34. *Пусть M — автоморфизм-коинвариантный модуль и $\pi : P \to M$ — его проективное накрытие. Если $P = P_1 \oplus P_2$ — разложение модуля P и α, $1-\alpha$ — автоморфизмы модуля P_1 для некоторого $\alpha \in \mathrm{End}\, P_1$, то $\mathrm{Ker}(\pi) = (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_1) \oplus (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_2)$.*

Доказательство. Пусть $P = P_1 \oplus P_2$ и существует такой автоморфизм α модуля P_1, что $1-\alpha$ также является автоморфизмом модуля P_1. Тогда $\alpha \oplus 1_{P_2}$, $(1-\alpha) \oplus 1_{P_2}$ — автоморфизмы модуля P. Так как M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то из теоремы 2.22 следуют равенства

$$(\alpha \oplus 1_{P_2})(\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi), \quad [(1-\alpha) \oplus 1_{P_2}](\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi).$$

Пусть m — произвольный элемент из подмодуля $\mathrm{Ker}(\pi)$ и $m = p_1 + p_2 \in \mathrm{Ker}(\pi)$, где $p_1 \in P_1$ и $p_2 \in P_2$. Тогда

$$\alpha(p_1) + p_2 \in \mathrm{Ker}(\pi), \quad p_1 - \alpha(p_1) + p_2 \in \mathrm{Ker}(\pi).$$

Следовательно, $p_1 + 2p_2 \in \mathrm{Ker}(\pi)$. Тогда $p_1 = 2m - (p_1 + 2p_2) \in \mathrm{Ker}(\pi)$ и $p_2 \in \mathrm{Ker}(\pi)$. Таким образом,

$$m = p_1 + p_2 \in (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_1) \oplus (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_2).$$

Лемма доказана. □

Предложение 2.35. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Если для каждого прямого слагаемого P' модуля P существует такой гомоморфизм $\alpha \in \mathrm{End}\, P'$, что $\alpha, 1-\alpha \in \mathrm{Aut}\, P'$, то M — квазипроективный модуль.*

Доказательство. Пусть M — автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Покажем, что $\mathrm{Ker}(\pi)$ является вполне инвариантным подмодулем модуля P. Рассмотрим произвольный эндоморфизм f модуля P. Согласно [25, следствие 5.3] имеет место равенство $f = e + g$, где $e \in \mathrm{End}_R P$ — идемпотент и $g \in \mathrm{End}_R P$ — автоморфизм. Предположим, что $e \neq 0$. Из условия исходного предложения следует, что $\alpha, 1-\alpha \in \mathrm{Aut}\, eP$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{End}_R P$. Тогда из леммы 2.34 следует равенство

$$\mathrm{Ker}(\pi) = [e(P) \cap \mathrm{Ker}(\pi)] \oplus [(1-e)(P) \cap \mathrm{Ker}(\pi)].$$

Следовательно, $e(\mathrm{Ker}(\pi)) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi)$. Если $e = 0$, то включение $e(\mathrm{Ker}(\pi)) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi)$ очевидно. Так как M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то согласно теореме 2.22 $g(\mathrm{Ker}(\pi)) = \mathrm{Ker}(\pi)$. Таким образом, $\mathrm{Ker}(\pi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P и, следовательно, согласно [72, 18.2], M — квазипроективный модуль. □

Следствие 2.36. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. В таком случае если $\mathrm{Aut}(eP/eJ(P))$ — неединичная группа для каждого локального идемпотента $e \in \mathrm{End}_R P$, то M — квазипроективный модуль.*

Доказательство. Пусть P' — ненулевое прямое слагаемое модуля P. Согласно [32, теорема 3.10] имеет место изоморфизм

$$P' \cong e_1 R^{(A_1)} \oplus \ldots \oplus e_n R^{(A_n)},$$

где $e_1, \ldots, e_n$ — ортогональные примитивные идемпотенты кольца R, в сумме дающие единицу. Из [72, 22.2] следуют изоморфизмы

$$\mathrm{End}_R P'/J(\mathrm{End}_R P') \cong \mathrm{End}_R(P'/J(P')) \cong \mathrm{End}_R((e_1 R/e_1 J(R))^{(A_1)} \oplus \ldots \oplus (e_n R/e_n J(R)^{(A_n)}).$$

Следовательно, для некоторого целого числа $k \geqslant 1$ имеет место изоморфизм

$$\mathrm{End}_R P'/J(\mathrm{End}_R P') \cong \mathrm{End}_{T_1}(V_1) \times \ldots \times \mathrm{End}_{T_k}(V_k),$$

где $V_1, \ldots, V_k$ — ненулевые векторные пространства соответственно над телами $T_1, \ldots, T_k$. Из условия следствия 2.36 вытекает, что $|T_i| > 2$ для каждого i. Тогда, очевидно, существует такой элемент

$$\overline{\alpha} = \alpha + J(\mathrm{End}_R P') \in \mathrm{End}_R P'/J(\mathrm{End}_R P'),$$

что $1 - \overline{\alpha}$, $\overline{\alpha}$ обратимы в кольце $\mathrm{End}_R P'/J(\mathrm{End}_R P')$. Следовательно, $\alpha, 1 - \alpha \in Aut(P')$ и по предложению 2.35 M — квазипроективный модуль. □

Следствие 2.37. *Пусть R — совершенное справа кольцо, у которого каждый гомоморфный образ не изоморфен кольцу вида $M_n(\mathbb{Z}_2)$. Тогда каждый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.*

Доказательство. Если кольцо R удовлетворяет условию следствия 2.37, то $\mathrm{End}_R(eR/eJ(R)) \ncong \mathbb{Z}_2$ для каждого локального идемпотента e из кольца R. Тогда из следствия 2.36 следует, что каждый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным. □

Следствие 2.38. *Пусть R — совершенное справа кольцо, у которого двойка обратима. Тогда каждый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.*

Следствие 2.39. *Пусть R — полусовершенное кольцо, у которого каждый гомоморфный образ не изоморфен кольцу вида $M_n(\mathbb{Z}_2)$. Тогда каждый конечно порожденный автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 2.37.

Предложение 2.40. *Пусть M — автоморфизм-коинвариантный неразложимый модуль. Предположим, что модуль M и каждый его простой фактор-модуль обладают проективной оболочкой. Тогда либо M — локальный квазипроективный модуль, либо для каждого максимального подмодуля N модуля M группа $\mathrm{Aut}(M/N)$ является единичной.*

Доказательство. Предположим, что существует такой максимальный подмодуль N модуля M, что группа $\mathrm{Aut}(M/N)$ не является единичной. Пусть $S = M/N$ и $\pi : P \to M$ и $\pi_1 : P_1 \to S$ — проективные оболочки. Так как модуль P_1 изоморфен прямому слагаемому модуля P, то без ограничения общности можно считать, что P_1 — прямое слагаемое модуля P и $P = P_1 \oplus P_2$, где $P_2 \leqslant P$. Заметим, что согласно [47, 11.4.1], P_1 — локальный модуль. Так как $|\mathrm{End}_R S| > 2$, то существует такой гомоморфизм $\sigma \in \mathrm{End}_R S$, что $\sigma \neq 0$ и $\sigma \neq 1$. Тогда σ и $1 - \sigma$ — автоморфизмы модуля S. Так как P_1 — проективный локальный модуль, то существует автоморфизм σ_1 модуля P_1, для которого выполнено равенство $\sigma \circ \pi_1 = \pi_1 \circ \sigma_1$. Тогда $(1 - \sigma) \circ \pi_1 = \pi_1 \circ (1 - \sigma_1)$ и, следовательно, $1 - \sigma_1$ — автоморфизм модуля P_1. По лемме 2.34 имеет место равенство

$$\mathrm{Ker}(\pi) = (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_1) \oplus (\mathrm{Ker}(\pi) \cap P_2).$$

Тогда

$$M \simeq \frac{P}{\operatorname{Ker}(\pi)} \simeq \frac{P_1}{\operatorname{Ker}(\pi) \cap P_1} \oplus \frac{P_2}{\operatorname{Ker}(\pi) \cap P_2}.$$

Так как M — неразложимый модуль и $\operatorname{Ker}(\pi) \cap P_1 \ll P_1$, то $P_2 = \operatorname{Ker}(\pi) \cap P_2$. Поскольку $\operatorname{Ker}(\pi) \cap P_2 \ll P_2$, то $P_2 = 0$. Таким образом, $P = P_1$. Покажем, что $\operatorname{Ker}(\pi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P. Пусть α — произвольный эндоморфизм модуля P. Так как $\operatorname{End} P$ — локальное кольцо, то $\alpha = e + \beta$, где β — автоморфизм модуля P и либо $e = 0$, либо $e = 1$. Так как M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то согласно теореме 2.22 $\beta(\operatorname{Ker}(\pi)) = \operatorname{Ker}(\pi)$. Следовательно, $\alpha(\operatorname{Ker}(\pi)) \leqslant \operatorname{Ker}(\pi)$. Таким образом, $\operatorname{Ker}(\pi)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P. Следовательно, согласно [72, 18.2], $M \cong P/\operatorname{Ker}(\pi)$ — квазипроективный модуль. □

Теорема 2.41. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — неразложимый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Если модуль M не является квазипроективным, то $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$, где $\{P_i\}_{i\in I}$ — попарно неизоморфные неразложимые проективные модули и $\operatorname{End} P_i/J(\operatorname{End} P_i) \cong \mathbb{Z}_2$ для каждого $i \in I$.*

Теорема 2.41 вытекает из леммы 2.30 и предложения 2.40.

Следствие 2.42. *Пусть R — конечномерная алгебра над полем P. Если $\mid P \mid > 2$, то для неразложимого правого R-модуля следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-коинвариантный модуль*;
(2) *M — квазипроективный модуль.*

Следующее утверждение было установлено в [35]. Приведенное ниже доказательство этого утверждения отлично от доказательства, приведенного в [35].

Теорема 2.43. *Пусть R — полусовершенное кольцо. Тогда каждый конечно порожденный автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является псевдопроективным.*

Доказательство. Пусть M — автоморфизм-коинвариантный конечно порожденный правый R-модуль, N — подмодуль модуля M, $\pi : M \to M/N$ — естественный гомоморфизм и $f : M \to M/N$ — эпиморфизм правых R-модулей. Согласно [72, 42.6], модуль M обладает проективной оболочкой $\alpha : P \to M$. Из [72, 41.15, 42.6] следует, что для некоторых подмодулей P_1, P_2, P_1', P_2' модуля P выполнены условия

$$P = P_1 \oplus P_2, \quad P_1 \leqslant \operatorname{Ker}(\pi\alpha), \quad P_2 \cap \operatorname{Ker}(\pi\alpha) \ll P_2,$$
$$P = P_1' \oplus P_2', \quad P_1' \leqslant \operatorname{Ker}(f\alpha), \quad P_2' \cap \operatorname{Ker}(f\alpha) \ll P_2'.$$

Ясно, что $\pi\alpha_{|P_2}$, $f\alpha_{|P_2'}$ — проективные оболочки модуля M/N. Следовательно, существует изоморфизм $h_1 : P_2' \to P_2$, для которого выполнено равенство $\pi\alpha_{|P_2}h_1 = f\alpha_{|P_2'}$. Так как согласно [47, 11.4.2], P — конечная прямая сумма модулей, у которых кольца эндоморфизмов являются локальными, то из теоремы Крулля—Ремака—Шмидта следует существование изоморфизма $h_2 : P_1' \to P_1$. Тогда $h_1 \oplus h_2$ — автоморфизм модуля P, и из теоремы 2.22 следует равенство

$$h_1 \oplus h_2(\operatorname{Ker}(\alpha)) = \operatorname{Ker}(\alpha).$$

Следовательно, для некоторого гомоморфизма $h : M \to M$ имеет место равенство $\alpha(h_1 \oplus h_2) = h\alpha$. Так как $\pi\alpha_{|P_2}h_1 = f\alpha_{|P_2'}$ и $0 = \pi\alpha h_2(P_1') = f\alpha(P_1')$, то $\pi\alpha(h_1 \oplus h_2) = f\alpha$. Тогда

$$f\alpha = \pi\alpha(h_1 \oplus h_2) = \pi h\alpha.$$

Поскольку α — сюръективный гомоморфизм, то $f = \pi h$. □

Замечание 2.44. Изложение настоящего раздела основывается на [1, 5].

2.3. Автоморфизм-поднимаемые модули. Напомним некоторые понятия, которые будут использованы в дальнейшем. Подмодуль B модуля M называется аддитивным дополнением для A в M, если $A+B=M$ и B — наименьший элемент в множестве всех подмодулей $X \leqslant M$, для которых выполнено равенство $A+X=M$.

Модуль M называется *дополняемым*, если каждый его подмодуль обладает аддитивным дополнением в M. Если для каждых подмодулей A, B модуля M, для которых выполнено равенство $A+B=M$, существует такое аддитивное дополнение C для A в M, что $C \subseteq B$, то модуль M называется *строго дополняемым*. Модуль M называется *слабо дополняемым*, если для каждого его подмодуля A существует такой подмодуль B модуля M, что $A+B=M$ и $A \cap B \ll M$.

Следующее утверждение проверяется непосредственно.

Лемма 2.45. *Пусть M — автоморфизм-поднимаемый модуль. Если подмодуль X модуля M является вполне инвариантным, то фактор-модуль M/X является автоморфизм-поднимаемым.*

Пример 2.46. Для каждого простого числа p и каждого собственного подмодуля A $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ фактор-модуль $\mathbb{Z}_{p^\infty}/A$ является автоморфизм-поднимаемым.

Лемма 2.47. *Каждое прямое слагаемое автоморфизм-поднимаемого модуля является автоморфизм-поднимаемым.*

Доказательство. Пусть $M=N\oplus H$ — автоморфизм-поднимаемый модуль. Покажем, что модуль N является автоморфизм-поднимаемым. Пусть K — произвольный подмодуль модуля N и θ — автоморфизм модуля N/K. Существует естественный изоморфизм $\phi : N/K \to M/(K+H)$. Тогда $\theta' = \phi\circ\theta\circ\phi^{-1}$ — автоморфизм модуля $M/(K+H)$. Так как модуль M автоморфизм-поднимаем, то существует эндоморфизм α' модуля M, для которого выполнено равенство $p_2\circ\alpha' = \theta'\circ p_2$, где $p_2 : M \to M/(K+N')$ — естественный гомоморфизм. Пусть $p_1 : N \to N/K$ — естественный гомоморфизм, $\iota : N \to M$ — включение и $\pi : M \to N$ — каноническая проекция. Таким образом, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc}
N & \xrightarrow{\iota} & M & \xrightarrow{\alpha'} & M & \xrightarrow{\pi} & N \\
\downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\
N/K & \xrightarrow{\phi} & M/(K+N') & \xrightarrow{\theta'} & M/(K+N') & \xrightarrow{\phi^{-1}} & N/K
\end{array}$$

Пусть $\alpha = \pi\circ\alpha'\circ\iota : N \to N$. Тогда $\theta\circ p_1 = p_1\circ\alpha$. Таким образом, модуль N является автоморфизм-поднимаемым. □

Лемма 2.48. *Для дополняемого модуля M следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-поднимаемый модуль*;

(2) *для каждого малого подмодуля X модуля M каждый автоморфизм фактор-модуля M/X поднимается до сюръективного эндоморфизма M.*

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) очевидна.

(2)⇒(1). Пусть X — произвольный подмодуль модуля M. По предположению существует такой подмодуль Y модуля M, что $M=X+Y$ и $X\cap Y \ll M$. Тогда

$$M/X \simeq Y/(X\cap Y), \quad M/(X\cap Y) = X/(X\cap Y)\oplus Y/(X\cap Y).$$

Покажем, что каждый автоморфизм модуля M/X поднимается до эндоморфизма M. Так как модули M/X и $Y/(X\cap Y)$ естественно изоморфны, то достаточно показать, что для каждого автоморфизма α модуля $Y/(X\cap Y)$ существует эндоморфизм $\bar\alpha$ модуля M, для которого выполнено равенство $\alpha\circ\pi = \pi\circ\bar\alpha$, где эпиморфизм $\pi : M \to Y/(X\cap Y)$ задан согласно правилу $\pi(x+y) = y+(X\cap Y)$ для всех $x\in X, y\in Y$. Пусть φ — произвольный автоморфизм модуля

$Y/(X\cap Y)$. Положим $\phi = 1_{X/(X\cap Y)} \oplus \varphi : M/(X\cap Y) \to M/(X\cap Y)$. Согласно предположению существует такой эндоморфизм $\psi : M \to M$, что $\phi\circ p = p\circ\psi$, где $p : M \to M/(X\cap Y)$ — естественная проекция. Тогда $\varphi\circ\pi = \pi\circ\psi$. □

Следствие 2.49. *Пусть M — дополняемый модуль и для каждого эндоморфизма φ модуля M, у которого $\mathrm{Ker}(\varphi) \ll M$, $1-\varphi$ — автоморфизм M. Тогда для модуля M следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-поднимаемый модуль*;
(2) *для каждого малого подмодуля X модуля M каждый автоморфизм фактор-модуля M/X поднимается до автоморфизма M.*

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) следует из леммы 2.48.

(2)⇒(1). Пусть M — автоморфизм-поднимаемый модуль, $X \ll M$ и $\alpha : M/X \to M/X$ — изоморфизм. Тогда для некоторых гомоморфизмов $h_1, h_2 : M \to M$ выполнены равенства

$$\alpha\circ p = p\circ h_1, \quad \alpha^{-1}\circ p = p\circ h_2,$$

где $p : M \to M/X$ — естественный гомоморфизм. Так как $X \ll M$, то h_1, h_2 — эпиморфизмы, у которых ядра являются малыми подмодулями модуля M. Несложно заметить, что

$$\mathrm{Ker}(h_1\circ h_2) \ll M, \quad \mathrm{Ker}(h_2\circ h_1) \ll M.$$

Если либо $h_1\circ h_2 \neq 1$, либо $h_2\circ h_1 \neq 1$, то соответственно либо $1 - h_1\circ h_2$, либо $1 - h_2\circ h_1$ изоморфизм. Поскольку

$$p\circ(1 - h_1\circ h_2) = 0, \quad p\circ(1 - h_2\circ h_1) = 0,$$

то $p = 0$. Получили противоречие. Таким образом, $h_1\circ h_2 = 1$ и $h_2\circ h_1 = 1$. □

Модуль M называется *нильпотентно-поднимаемым*, если для каждого подмодуля N модуля M каждый нильпотентный эндоморфизм f модуля M/N может быть поднят до некоторого эндоморфизма f' модуля M. Ясно, что каждый автоморфизм-поднимаемый модуль является нильпотентно-поднимаемым.

Предложение 2.50. *Если $M = X\oplus Y$ — нильпотентно-поднимаемый модуль, то X является Y-проективным и Y является X-проективным.*

Доказательство. Пусть N — подмодуль модуля M, для которого выполнено равенство $N + Y = M$, и $A = N\cap Y$. Тогда для некоторого гомоморфизма $f : X \to Y/A$ имеем

$$N = \{x + y \mid x\in X,\ y\in f(x) + A\}.$$

Пусть $\pi : M \to M/A$ — естественный гомоморфизм, $\overline{M} = M/A$ и $\overline{S} = (S + A)/A$ для каждого $S \leqslant M$. Тогда $\overline{M} = \overline{X}\oplus\overline{Y}$. Пусть $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$ — гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом f. Тогда отображение $g : \overline{M} \to \overline{M}$, действующее по правилу $g(x + y) = \overline{f}(x)$ $(x\in\overline{X},\ y\in\overline{Y})$, является нильпотентным эндоморфизмом модуля $\overline{M}$, который согласно условию поднимается до некоторого эндоморфизма h модуля M. Тогда $h(x) + A = f(x)$ $(x\in X)$. Следовательно, $\langle h\rangle \subseteq N$ и $\langle h\rangle\oplus Y = M$. Таким образом, согласно [26, 4.12] модуль X проективен относительно модуля Y. X-Проективность модуля Y доказывается аналогично. □

Следствие 2.51. *Каждый нильпотентно-поднимаемый модуль является $D3$-модулем. В частности, каждый автоморфизм-поднимаемый модуль является $D3$-модулем.*

Пример 2.52. $\mathbb{Z}$-Модули $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}$ являются автоморфизм-поднимаемыми. Согласно предложению 2.50, $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}$ не является автоморфизм-поднимаемым.

Следствие 2.53. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

(1) *R — классически полупростое кольцо*;
(2) *каждый конечно порожденный правый R-модуль является автоморфизм-поднимаемым*;

(3) *всякая прямая сумма двух автоморфизм-поднимаемых правых R-модулей является автоморфизм-поднимаемым модулем.*

Если модуль M обладает проективным накрытием $p : P \to M$ и для каждого нильпотентного эндоморфизма $f \in \operatorname{End} P$ выполнено условие $f(\operatorname{Ker}(\alpha)) \subseteq \operatorname{Ker}(\alpha)$, то модуль M называется *нильпотентно-коинвариантным.*

Теорема 2.54. *Пусть M — нильпотентно-поднимаемый модуль, обладающий проективной оболочкой. Тогда модуль M является нильпотентно-коинвариантным.*

Доказательство. Пусть $\alpha : P \to M$ — проективная оболочка модуля M. Без ограничения общности можно считать, что $M = P/\operatorname{Ker}(\alpha)$. Пусть f — нильпотентный эндоморфизм модуля P. Покажем, что $f(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha)$. Так как эндоморфизм f нильпотентен, то для некоторого натурального числа n имеем $f^n = 0$.

Тот факт, что $f(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha)$, докажем с помощью индукции по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что доказываемое утверждение верно для $n-1$. Так как $(f^2)^{n-1} = 0$, то по предположению индукции $f^2(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha)$. Пусть $N = \operatorname{Ker}(\alpha) + f(\operatorname{Ker}(\alpha))$ и $\alpha' : P/\operatorname{Ker}(\alpha) \to P/N$ — канонический гомоморфизм. Согласно предположению индукции имеем

$$f(\operatorname{Ker}(\alpha) + f(\operatorname{Ker}(\alpha))) = f(\operatorname{Ker}(\alpha)) + f^2(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha) + f(\operatorname{Ker}(\alpha)).$$

Тогда для некоторого гомоморфизма $f' : P/N \to P/N$ выполнено равенство $\alpha'\alpha f = f'\alpha'\alpha$. Так как модуль M является нильпотентно-поднимаемым, то для некоторого гомоморфизма $f'' : P/\operatorname{Ker}(\alpha) \to P/\operatorname{Ker}(\alpha)$ имеем $f'\alpha' = \alpha' f''$. Поскольку модуль P проективен, то для некоторого эндоморфизма $g : P \to P$ выполнено равенство $\alpha g = f''\alpha$. Так как $\alpha'\alpha f = f'\alpha'\alpha$ и $\alpha'\alpha g = f'\alpha'\alpha$, то $(f-g)(P) \leqslant N$. Для произвольного элемента $p \in P$ существуют такие элементы $p_1, p_2 \in \operatorname{Ker}(\alpha)$, что $f(p) - g(p) = f(p_1) + p_2$. Так как

$$\alpha(f-g)(p-p_1) = \alpha(p_2 + g(p_1)) = 0,$$

то $p \in \operatorname{Ker}(\alpha(f-g)) + \operatorname{Ker}(\alpha)$. Тогда

$$P = \operatorname{Ker}(\alpha(f-g)) + \operatorname{Ker}(\alpha) = \operatorname{Ker}(\alpha(f-g))$$

и, следовательно, $(f-g)(P) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha)$. Поскольку $g(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha)$, то

$$f(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant (f-g)(\operatorname{Ker}(\alpha)) + g(\operatorname{Ker}(\alpha)) \leqslant \operatorname{Ker}(\alpha).$$

Теорема 2.54 доказана. □

Теорема 2.55. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — конечно порожденный нильпотентно-коинвариантный правый R-модуль. Если $M/J(M) = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$, где $S_1, \ldots, S_n$ — попарно изоморфные простые правые R-модули и $n > 1$, то модуль M квазипроективен.*

Доказательство. Пусть $\pi : P \to M$ — проективная оболочка модуля M и $e = e^2 \in \operatorname{End} P$. Для некоторого $1 \leqslant n_0 \leqslant n$ имеют место разложения

$$eP = P_1 \oplus \ldots \oplus P_{n_0}, \quad (1-e)P = P_{n_0+1} \oplus \ldots \oplus P_n,$$

где P_i — локальные модули для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ и $P_i \cong P_j$ для каждых $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Пусть $\pi_i : P_1 \oplus \ldots \oplus P_n \to P_i$ — естественная проекция для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. Рассмотрим произвольные различные индексы i, j из множества $\{1, \ldots, n\}$. С помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям из доказательства леммы 2.30, можно показать, что имеет место равенство

$$\operatorname{Ker}(\pi) = (P_i \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus (P_j \cap \operatorname{Ker}(\pi)) \oplus \Big(\Big(\bigoplus_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i,j\}} P_k\Big) \cap \operatorname{Ker}(\pi)\Big).$$

Следовательно, $\pi_i(\operatorname{Ker}\pi) \subseteq \operatorname{Ker}\pi$, $\pi_j(\operatorname{Ker}\pi) \subseteq \operatorname{Ker}\pi$. Таким образом, $\pi_i(\operatorname{Ker}\pi) \subseteq \operatorname{Ker}\pi$ для каждого $i \in \{1, \ldots n\}$. Следовательно, $e(\operatorname{Ker}\pi) \subseteq \operatorname{Ker}\pi$.

Рассмотрим произвольный эндоморфизм f модуля P. Поскольку

$$\operatorname{End} P/J(\operatorname{End} P) \cong \operatorname{End}(P/J(P)) \cong M_n(\operatorname{End}(S_1))$$

и $n > 1$, то согласно [40, следствие 1.5]

$$f + J(\operatorname{End} P) = F(e_1, \dots, e_m),$$

где $e_1, \dots, e_m \in \operatorname{End} P/J(\operatorname{End} P)$ — идемпотенты и $F \in \mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_m\rangle$. Поскольку $J(\operatorname{End} P)$ — ниль-идеал, то

$$e_1 = f_1 + J(\operatorname{End} P), \quad \dots, \quad e_m = f_m + J(\operatorname{End} P)$$

для некоторых идемпотентов $f_1, \dots, f_m \in \operatorname{End} P$. Тогда

$$f = F(f_1, \dots, f_m) + n,$$

где $n \in \operatorname{End} P$ — нильпотентный элемент. Поскольку M — нильпотентно-коинвариантный модуль и $F(f_1, \dots, f_m)(\operatorname{Ker} \pi) \subseteq \operatorname{Ker} \pi$, то $f(\operatorname{Ker} \pi) \subseteq \operatorname{Ker} \pi$. Таким образом, $\operatorname{Ker} \pi$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P и, следовательно, согласно [**?**][18.2]W91 модуль M квазипроективен. □

Модуль M называется *бесквадратным*, если M не имеет таких ненулевых подмодулей $X \oplus Y$, что $X \cong Y$. Следующее утверждение непосредственно следует из доказательства предыдущей теоремы.

Теорема 2.56. *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — нильпотентно-коинвариантный неразложимый правый R-модуль. Тогда фактор-модуль $M/J(M)$ является бесквадратным.*

Теорема 2.57 (см. [60, теорема 20])**.** *Следующие условия равносильны для абелевой группы G:*

(1) *группа G автоморфизм-инвариантна*;
(2) *группа G квазипроективна*;
(3) *группа G дискретна.*

В качестве приложения результатов, изложенных выше, докажем следующую теорему, описывающую периодические автоморфизм-поднимаемые абелевы группы, которая впервые была установлена в [3].

Теорема 2.58 (см. [3])**.** *Пусть M — периодическая абелева группа. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — эндоморфизм-поднимаемая абелева группа*;
(2) *M — автоморфизм-поднимаемая абелева группа*;
(3) *имеет место разложение*

$$M = \Big(\bigoplus_{p\in I} \mathbb{Z}_{p^\infty}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in I'} \Big(\bigoplus \mathbb{Z}_{p^{m_p}}\Big)\Big),$$

где I, I' — множества простых чисел, пересечение которых пусто.

Доказательство. Импликации (1)⇒(2) и (3)⇒(1) проверяются непосредственно.

(2)⇒(3). Предположим, что M — автоморфизм-поднимаемая периодическая абелева группа. Абелева группа M представима в виде прямой суммы делимой группы и редуцированной группы. Из предложения 2.50 следует, что $M = (\bigoplus_{p\in I} \mathbb{Z}_{p^\infty}) \oplus K$, где K — редуцированная группа и I — некоторое множество простых чисел. Покажем, что каждая p-компонента K_p группы K является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^n. Пусть B — базисная подгруппа p-компоненты K_p группы K. Для некоторого подмножества L группы K_p имеет место разложение $B = \bigoplus_{x\in L} x\,\mathbb{Z}$. Если элементы $x, y \in L (x \neq y)$ имеют различные порядки p^{k_1} и p^{k_2} соответственно, то $\mathbb{Z}_{p^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_2}}$ — автоморфизм-поднимаемая группа. Тогда группы $\mathbb{Z}_{p^{k_1}}$ и $\mathbb{Z}_{p^{k_2}}$ взаимно проективны, что невозможно. Таким образом, все элементы L имеют один и тот же порядок p^n. Следовательно, поскольку группа K редуцированна, то $B = K_p$. В результате получаем

разложение $K = \bigoplus_{p\in I'}(\oplus\mathbb{Z}_{p^{m_i}})$, где I' — некоторое множество простых чисел. Поскольку группа $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^n}$ не является автоморфизм-поднимаемой для каждого простого p, то $I \cap I' = \varnothing$. □

Следующее утверждение является широким обобщением предыдущей теоремы.

Теорема 2.59 (см. [14, теорема 2.1])**.** *Пусть M — периодический модуль над ограниченным наследственным нетеровым первичным кольцом R. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — π-проективный модуль*;
(2) *M — эндоморфизм-поднимаемый модуль*;
(3) *каждая примарная компонента модуля M является либо неразложимым инъективным модулем, либо проективным модулем над фактор-кольцом кольца R по аннулятору этой примарной компоненты.*

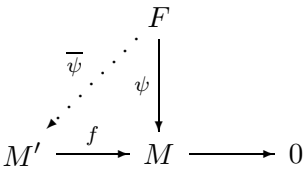
Теорема 2.60. *Следующие условия равносильны для кольца R*:

(1) *R — совершенное справа кольцо*;
(2) *для каждого правого R-модуля M существует такой эпиморфизм $f : N \to M$, что N — автоморфизм-поднимаемый модуль и $\mathrm{Ker}(f) \ll N$*;
(3) *каждый плоский правый R-модуль является автоморфизм-поднимаемым.*

Доказательство. Импликации (1)⇒(2) и (1)⇒(3) очевидны.

(2)⇒(1). Пусть M — правый R-модуль. Для некоторого свободного модуля F имеет место эпиморфизм $\psi : F \to M$. Согласно условию (2) существует такой эпиморфизм $\phi : S \to F \oplus M$, что S — автоморфизм-поднимаемый модуль и $\mathrm{Ker}(\phi) \ll S$. Пусть $p_1 : F \oplus M \to F$ — естественная проекция. Тогда $S = \mathrm{Ker}(p_1 \circ \phi) \oplus T$, где $T \leqslant S$. Пусть $M' = \mathrm{Ker}(p_1\phi)$. Несложно заметить, что $f = \phi|_{M'} : M' \to M$ — эпиморфизм и $\mathrm{Ker}(f) \ll M'$.

Существует гомоморфизм $\overline{\psi} : F \to M'$, для которого коммутативна следующая диаграмма:



Поскольку $\mathrm{Ker}(f) \ll M'$, то $\overline{\psi}$ — эпиморфизм. Так как модуль $M' \oplus F$ автоморфизм-поднимаем, то согласно предложению 2.50, M' является F-проективным модулем. Таким образом, эпиморфизм $\overline{\psi}$ является расщепляющимся и, следовательно, модуль M' проективен.

(3)⇒(1). Пусть M — плоский правый R-модуль и $\varphi : F \to M$ — эпиморфизм, где F — свободный модуль. Так как согласно условию (3) модуль $F \oplus M$ автоморфизм-поднимаем, то модуль M F-проективен. Следовательно, эпиморфизм φ является расщепляющимся. Таким образом, модуль M проективен. □

Доказательство следующих двух утверждений аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 2.61. *Следующие условия равносильны для кольца R*:

(1) *R — полусовершенное кольцо*;
(2) *для каждого конечно порожденного правого R-модуля M существует такой эпиморфизм $f : N \to M$, что N — автоморфизм-поднимаемый модуль и $\mathrm{Ker}(f) \ll N$.*

Теорема 2.62. *Следующие условия равносильны для кольца R*:

(1) *R — полурегулярное кольцо*;
(2) *для каждого конечно представимого правого R-модуля M существует такой эпиморфизм $f : N \to M$, что N — автоморфизм-поднимаемый модуль и $\mathrm{Ker}(f) \ll N$.*

Предложение 2.63. *Каждый автоморфизм-коинвариантный слабо дополняемый модуль является строго автоморфизм-поднимаемым.*

Доказательство. Пусть X — подмодуль модуля M и $f : M/X \to M/X$ — автоморфизм. Согласно условию существует такой подмодуль Y модуля M, что $X + Y = M$ и $X \cap Y \ll M$. Ясно, что

$$M/Y \cap X = X/X \cap Y \oplus Y/X \cap Y.$$

Пусть

$$\pi : X/X \cap Y \oplus Y/X \cap Y \to Y/X \cap Y$$

— каноническая проекция и $g : M/X \cap Y \to M/X$ — естественный гомоморфизм. Так как $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Ker}(g)$, то существует изоморфизм $\phi : Y/X \cap Y \to M/X$, для которого выполнено равенство $\phi\pi = g$. Рассмотрим отображение

$$h : X/X \cap Y \oplus Y/X \cap Y \to X/X \cap Y \oplus Y/X \cap Y, \quad h(a + b) = a + \phi^{-1} f \phi(b),$$

где $a \in X/X \cap Y$, $b \in Y/X \cap Y$. Несложно заметить, что h — изоморфизм модулей и $\phi^{-1} f \phi \pi = \pi h$. Таким образом, $fg = gh$. Так как M — автоморфизм-коинвариантный модуль, то согласно [60, следствие 2] существует автоморфизм $h' : M \to M$, для которого выполнено равенство $hg' = g'h'$, где $g' : M \to M/X \cap Y$ — естественный гомоморфизм. Таким образом, $fgg' = gg'h'$. □

Радикальным рядом модуля M называется убывающая цепочка

$$M \supseteq J^1(M) = J(M) \supseteq \ldots \supseteq J^\alpha(M) \supseteq J^{\alpha+1}(M) \supseteq \ldots,$$

где $J^\alpha(M) = J(J^{\alpha-1}(M))$ для каждого непредельного ординального числа α и $J^\alpha(M) = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} J^\beta(M)$ для каждого предельного ординального числа α.

Теорема 2.64. *Пусть R — совершенное справа кольцо и M — правый R-модуль. Тогда имеют место следующие утверждения*:

(1) *если M — модуль Хопфа, то следующие условия равносильны*:
   (a) *M — автоморфизм-поднимаемый модуль*;
   (b) *M — автоморфизм-коинвариантный модуль*;

(2) *для модуля M следующие условия равносильны*:
   (a) *M — строго автоморфизм-поднимаемый модуль*;
   (b) *M — автоморфизм-коинвариантный модуль*;

(3) *для модуля M следующие условия равносильны*:
   (a) *M — автоморфизм-коинвариантный модуль*;
   (b) *для всяких малых подмодулей K_1 и K_2 модуля M каждый автоморфизм $\phi : M/K_1 \to M/K_2$ поднимается до автоморфизма модуля M*;
   (c) *для каждого малого подмодуля K модуля M каждый автоморфизм $\phi : M/K \to M/K$ поднимается до автоморфизма модуля M.*

Доказательство. (1) Импликация (b)⇒(a) следует из предложения 2.63 и того факта, что каждый правый модуль над совершенным справа кольцом является строго дополняемым.

(a)⇒(b). Пусть P — проективный модуль, $K \ll P$ и $M = P/K$. Предположим, что $f : P \to P$ — автоморфизм. Покажем, что $f(K) = K$. Обозначим через $\varphi : P \to P/K$ естественный гомоморфизм. С помощью трансфинитной индукции покажем, что

$$f(\varphi^{-1}(J^\alpha(P/K))) = \varphi^{-1}(J^\alpha(P/K)) \quad \text{для каждого ординала } \alpha.$$

Поскольку $K \ll P$ и f — автоморфизм, то

$$f(\varphi^{-1}(J(P/K))) = f(J(P)) = J(P) = \varphi^{-1}(J(P/K)).$$

Предположим, что для каждого ординала $\beta < \alpha$ выполнено равенство

$$f(\varphi^{-1}(J^\beta(P/K))) = \varphi^{-1}(J^\beta(P/K)).$$

Если α — предельный ординал, то, очевидно,

$$f(\varphi^{-1}(J^\alpha(P/K))) = \varphi^{-1}(J^\alpha(P/K)).$$

Предположим, что α — непредельный ординал. Обозначим через $\varphi' : P/K \to P/\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))$ естественный гомоморфизм. Согласно индуктивному предположению

$$f(\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))) = \varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)).$$

Следовательно, существует изоморфизм

$$f' : P/\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)) \to P/\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)),$$

для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad f \quad} & P \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ P/K & & P/K \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'} \\ P/\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)) & \xrightarrow{\quad f' \quad} & P/\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)) \end{array}$$

Тогда

$$f' \circ \varphi' \circ \varphi = \varphi' \circ \varphi \circ f.$$

Поскольку P/K — автоморфизм-поднимаемый модуль, то существует эндоморфизм $g : P/K \to P/K$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P/K & \xrightarrow{\quad g \quad} & P/K \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'} \\ P/\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)) & \xrightarrow{\quad f' \quad} & P/\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)) \end{array} .$$

Из проективности модуля P следует существование гомоморфизма $g' : P \to P$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad g' \quad} & P \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ P/K & \xrightarrow{\quad g \quad} & P/K \end{array}$$

Из коммутативности последних двух диаграмм следует, что

$$(f - g')(P) \leqslant \varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)) \leqslant J(P) \ll P.$$

Так как модуль P проективен, то $f - g' \in J(\operatorname{End} P)$. Тогда g' — автоморфизм модуля P. Следовательно, g является эпиморфизмом. Так как P/K — модуль Хопфа, то g является автоморфизмом модуля P/K. Тогда $g'(\operatorname{Ker}(\varphi)) = \operatorname{Ker}(\varphi)$. Поскольку для каждого ординала γ выполнено равенство

$$g(J^{\gamma}(P/K)) = J^{\gamma}(P/K),$$

то

$$g'(\varphi^{-1}(J^{\gamma}(P/K))) = \varphi^{-1}(J^{\gamma}(P/K)).$$

Так как

$$(f-g')(\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))) \leqslant (f-g')(J(P)) \leqslant J(\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))),$$
$$\varphi(J(\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)))) \leqslant J(J^{\alpha-1}(P/K)) = J^{\alpha}(P/K),$$

то

$$(f-g')(\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))) \leqslant \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)).$$

Следовательно,

$$f(\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))) \leqslant (f-g')(\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))) + g'(\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))) \leqslant \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)).$$

Предположим, что

$$f(\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))) \neq \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)).$$

Так как

$$f(\varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))) = \varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K)),$$

то существует такой элемент $m \in \varphi^{-1}(J^{\alpha-1}(P/K))$, что

$$m \notin \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)), \quad f(m) \in \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)).$$

Поскольку $f(m) = (f-g')(m) + g'(m)$ и $f(m), (f-g')(m) \in \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))$, то

$$g'(m) \in \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)).$$

С другой стороны, g' является автоморфизмом и

$$g'(\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))) = \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K));$$

следовательно, $m \in \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))$. Получили противоречие. Таким образом,

$$f(\varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K))) = \varphi^{-1}(J^{\alpha}(P/K)).$$

Так как R — совершенное справа кольцо, то $K = \varphi^{-1}(J^{\alpha_0}(P/K))$ для некоторого ординала α_0. Следовательно, $f(K) = K$ и модуль M является автоморфизм-коинвариантным.

(2) Импликация (b)⇒(a) следует из предложения 2.63. Доказательство импликации (a)⇒(b) аналогично доказательству импликации (a)⇒(b) из п. (1).

(3) Импликация (a)⇒(b) следует из [60, следствие 2]. Импликация (b)⇒(c) очевидна. Доказательство импликации (c)⇒(a) аналогично доказательству импликации (a)⇒(b) из п. (1). □

Следствие 2.65. *Пусть R — артиново справа кольцо и M — конечно порожденный правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *модуль M является автоморфизм-коинвариантным*;
(2) *модуль M является автоморфизм-поднимаемым*;
(3) *модуль M является строго автоморфизм-поднимаемым.*

Кольцо R называется *инвариантным справа*, если каждый правый идеал кольца R является идеалом.

Предложение 2.66. *Пусть R — нормальное артиново справа кольцо. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *каждый циклический правый R-модуль является автоморфизм-коинвариантным*;
(2) *каждый циклический правый R-модуль является автоморфизм-поднимаемым*;
(3) *каждый циклический правый R-модуль является квазипроективным*;
(4) *R — инвариантное справа кольцо.*

Доказательство. Эквивалентность (1)⇔(2) вытекает следует из следствия 2.65. Импликация (4)⇒(3) следует из [41, теорема 10.13]. Импликация (3)⇒(2) очевидна.

(1)⇒(4). Без ограничения общности можно считать, что кольцо R является локальным. Пусть A — собственный правый идеал кольца R. Поскольку кольцо R локально, то либо r, либо $1-r$ обратимый элемент кольца R. Тогда согласно [60, теорема 27], либо $rA \subseteq A$, либо $(1-r)A \subseteq A$. Следовательно, $rA \subseteq A$ и A левый идеал кольца R. Таким образом, R — инвариантное справа кольцо. □

Согласно теореме 2.24 каждый эндоморфизм-поднимаемый правый R-модуль над совершенным справа кольцом R является квазипроективным. В связи с этим результатом естественной является задача о нахождение условий, при которых автоморфизм-поднимаемый правый R-модуль M является квазипроективным.

Теорема 2.67. *Пусть R — артиново справа кольцо и M — правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — квазипроективный модуль*;
(2) *M — автоморфизм-поднимаемый модуль, для которого выполнено равенство $M = \bigoplus_I M_i$, где M_i — полый модуль для каждого $i \in I$.*

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) следует из [49, теорема 3.4].

(2)⇒(1). Предположим, что $M = \bigoplus_I M_i$ — автоморфизм-поднимаемый модуль и M_i — полый модуль для каждого $i \in I$. Из леммы 2.47 следует, что для каждого $i \in I$ модуль M_i является полым и автоморфизм-поднимаемым. Несложно заметить, что для каждого $i \in I$ M_i — локальный модуль. Из следствия 2.65 следует, что для каждого $i \in I$ модуль M_i является автоморфизм-коинвариантным. Тогда из [60, теорема 30] следует, что для каждого $i \in I$ модуль M_i квазипроективен. Из предложения 2.50 следует, что модули M_i и M_j взаимно проективны для каждых $i \neq j$ из I. Тогда согласно [51, предложение 4.35] модуль M_j является M-проективным для каждого $j \in I$. Таким образом, согласно [51, предложение 4.32] модуль M квазипроективен. □

Замечание 2.68. Заметим, что условие артиновости справа для кольца R из предыдущей теоремы не может быть опущено. Действительно, например, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ является неквазипроективным, полым и автоморфизм-поднимаемым $\mathbb{Z}$-модулем.

Следующее утверждение непосредственно следует из теоремы 2.67 и [49, теорема 3.4].

Следствие 2.69. *Пусть R — артиново справа кольцо и M — правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-поднимаемый модуль, который является модулем со свойством подъема*;
(2) *M — квазипроективный модуль.*

Следствие 2.70. *Пусть R — артиново полуцепное кольцо и M — правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — автоморфизм-поднимаемый модуль*;
(2) *M — квазипроективный модуль*;
(3) *M — автоморфизм-коинвариантный модуль.*

Теорема 2.71. *Пусть R — артиново справа кольцо и M — конечно порожденный автоморфизм-поднимаемый правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Если P — прямая сумма попарно изоморфных локальных модулей, то модуль M является квазипроективным.*

Доказательство. Согласно следствию 2.65 модуль M является автоморфизм-коинвариантным. Тогда квазипроективность модуля M следует из предложения 2.31. □

Следствие 2.72. *Пусть R — нормальное артиново справа кольцо и M — конечно порожденный правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) M — *автоморфизм-поднимаемый модуль*;
(2) M — *квазипроективный модуль*;
(3) M — *автоморфизм-коинвариантный модуль.*

Открытый вопрос 2.73. Пусть M — автоморфизм-поднимаемый правый R-модуль и R — совершенное справа кольцо. Верно ли, что в этом случае модуль M является строго автоморфизм-поднимаемым?

Открытый вопрос 2.74. Описать кольца, над которыми каждый циклический правый R-модуль является автоморфизм-коинвариантным (автоморфизм-поднимаемым).

Замечание 2.75. Этот раздел основан на результатах, полученных совместно А. Н. Абызовым и Ч. К. Куинем.

3. $\mathcal{X}$-Идемпотентно коинвариантные и $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантные модули

3.1. Относительно инъективные и относительно проективные модули. Пусть A, B — правые R-модули. Модуль A называется *B-инъективным* (или *инъективным относительно B*), если всякая диаграмма в Mod-R с точной строкой

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\ & & A & & \end{array}$$

может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow{\scriptstyle g} & \swarrow{\scriptstyle \overline{g}} & \\ & & A & & \end{array}$$

Как показывает следующее утверждение, относительную инъективность модулей можно определить с помощью инъективных оболочек.

Теорема 3.1. *Пусть R — кольцо, M, N — правые R-модули и $\iota_1 : M \to E(M)$, $\iota_2 : N \to E(N)$ — инъективные оболочки соответственно модулей M и N. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *модуль M — N-инъективен*;
(2) *для каждого гомоморфизма $f : E(N) \to E(M)$ существует гомоморфизм $g : N \to M$, для которого коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\iota_2} & E(N) \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ M & \xrightarrow{\iota_1} & E(M) \end{array}$$

В частности, модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда M является вполне инвариантным подмодулем в своей инъективной оболочке.

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть $f : E(N) \to E(M)$ — гомоморфизм модулей и

$$N_0 = \{n \in N \mid f(n) \in M\}.$$

Согласно условию п. (1) существует такой гомоморфизм $f' : N \to M$, что $f'(n) = f(n)$ для каждого $n \in N_0$. Предположим, что $(f - f')N \neq 0$. Тогда для некоторых $n \in N$ и $r \in R$ имеем

$$(f - f')(nr) \in M, \quad (f - f')(nr) \neq 0.$$

Следовательно, $nr \in N_0$ и $f(nr) \neq f'(nr)$, что невозможно. Таким образом, $(f - f')N = 0$.

(2)⇒(1). Пусть $N_0 \leqslant N$ и $f : N_0 \to M$ — гомоморфизм модулей. Так как $E(M)$ — инъективный модуль, то гомоморфизм f продолжается до некоторого гомоморфизма $f' : E(N) \to E(M)$. Согласно условию п. (2) $f'(N) \subseteq M$. Таким образом, гомоморфизм f продолжается до гомоморфизма $f'_{|N} : N \to M$. □

Пусть A, B — правые R-модули. Модуль A называется *B-проективным* (или *проективным относительно B*), если всякая диаграмма в Mod-R с точной строкой

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{f} & B' & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle g} & & \\ & & A & & \end{array}$$

может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{f} & B' & \longrightarrow & 0 \\ & \nwarrow^{\overline{g}} & \uparrow{\scriptstyle g} & & \\ & & A & & \end{array}$$

Как показывает следующее утверждение, если правые R-модули M и N обладают проективными накрытиями, то проективность модуля M относительно модуля N можно определить с помощью проективных накрытий.

Теорема 3.2. *Пусть R — кольцо, M, N — правые R-модули и $\pi_1 : P \to M$, $\pi_2 : P' \to N$ — проективные накрытия модулей M и N соответственно. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *модуль M — N-проективен*;

(2) *для каждого гомоморфизма $f : P \to P'$ существует гомоморфизм $g : M \to N$, для которого коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_1} & M \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ P' & \xrightarrow{\pi_2} & N \end{array}$$

В частности, если $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M, то модуль M квазипроективен в точности тогда, когда $\mathrm{Ker}(\phi)$ *является вполне инвариантным подмодулем модуля P.*

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть $f : P \to P'$ — гомоморфизм. Без ограничения общности можно считать, что $N = P'/\mathrm{Ker}(\pi_2)$ и $\pi_2 : P' \to P'/\mathrm{Ker}(\pi_2)$ — естественный гомоморфизм. Положим

$$N_0 = \mathrm{Ker}(\pi_2) + f(\mathrm{Ker}(\pi_1)).$$

Так как $f(\mathrm{Ker}(\pi_1)) \subseteq N_0$, то для некоторого гомоморфизма $f_1 : M \to P'/N_0$ имеет место равенство

$$\pi\pi_2 f = f_1\pi_1,$$

где $\pi : P'/\mathrm{Ker}(\pi_2) \to P'/N_0$ — естественный гомоморфизм. Согласно условию п. (1) для некоторого гомоморфизма $f_2 : M \to N$ имеем $\pi f_2 = f_1$. Поскольку модуль P проективен, то для некоторого гомоморфизма $g : P \to P'$ выполнено равенство

$$\pi_2 g = f_2\pi_1.$$

Тогда для произвольного элемента $p \in P$ существуют такие элементы $p_1 \in \mathrm{Ker}(\pi_1)$, $p_2 \in \mathrm{Ker}(\pi_2)$, что

$$(f-g)(p) = p_2 + f(p_1).$$

Поскольку

$$\pi_2(f-g)(p-p_1) = \pi_2(p_2 + f(p_1)) - \pi_2 f(p_1) = 0,$$

то $p \in \mathrm{Ker}(\pi_1) + \mathrm{Ker}(\pi_2(f-g))$. Таким образом,

$$P = \mathrm{Ker}(\pi_1) + \mathrm{Ker}(\pi_2(f-g)) = \mathrm{Ker}(\pi_2(f-g)).$$

Следовательно,

$$(f-g)(P) \subseteq \mathrm{Ker}(p_2)$$

и поскольку $g(\mathrm{Ker}(p_1)) \leqslant \mathrm{Ker}(p_2)$, то $f(\mathrm{Ker}(p_1)) \leqslant \mathrm{Ker}(p_2)$. Тогда для некоторого гомоморфизма $f' : M \to N$ выполнено равенство $\pi_2 f = f'\pi_1$.

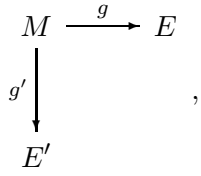
(2)⇒(1). Пусть $N_0 \leqslant N$ и $h : M \to N/N_0$ — гомоморфизм модулей. Так как модуль P проективен, то для некоторого гомоморфизма $f : P \to P'$ имеет место равенство $\pi\pi_2 f = h\pi_1$, где $\pi : N \to N/N_0$ — естественный гомоморфизм. Согласно условию п. (2) для некоторого гомоморфизма g выполнено равенство $\pi_2 f = g\pi_1$. Тогда

$$h\pi_1 = \pi\pi_2 f = \pi g \pi_1.$$

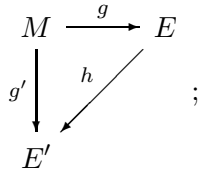
Поскольку π_1 — эпиморфизм, то $\pi g = h$. □

Пусть R — кольцо и Ω — некоторый класс правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Гомоморфизм $g : M \to E$ правых R-модулей называется Ω-*оболочкой* правого R-модуля M, если

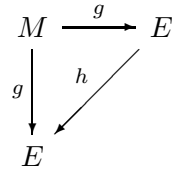
1) $E \in \Omega$ и любая диаграмма



где $E' \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы



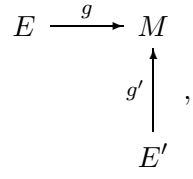
2) из коммутативности диаграммы



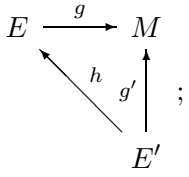
следует, что h — автоморфизм.

Гомоморфизм $g : M \to E$ правых R-модулей называется Ω-*накрытием* правого R-модуля M, если

(1) $E \in \Omega$ и любая диаграмма

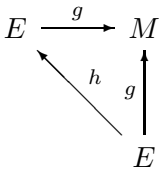


где $E' \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы



;

(2) из коммутативности диаграммы

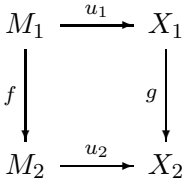


следует, что h — автоморфизм.

Если Ω — класс проективных (соответственно, инъективных) правых R-модулей, то Ω-накрытие (соответственно, Ω-оболочка) правого R-модуля M называется *проективным накрытием* (соответственно, *инъективной оболочкой*) модуля M.

Модуль M называется $\mathcal{X}$*-эндоморфизм-инвариантным*, если существует $\mathcal{X}$-оболочка $u : M \to X$ и для любого эндоморфизма g модуля X существует эндоморфизм $f : M \to M$, для которого выполнено равенство $uf = gu$.

Пусть M_1, M_2 — правые R-модули. Модуль M_2 называется $\mathcal{X}$-M_1-инъективным, если существуют $\mathcal{X}$-оболочки $u_1 : M_1 \to X_1$, $u_2 : M_2 \to X_2$ и для любого гомоморфизма $g : X_1 \to X_2$ существует гомоморфизм $f : M_1 \to M_2$, для которого выполнено равенство $gu_1 = u_2 f$:



Ясно, что модуль M является $\mathcal{X}$-эндоморфизм инвариантным в точности тогда, когда M — $\mathcal{X}$-M-инъективный модуль. Два модуля M_1, M_2 называются *взаимно* $\mathcal{X}$*-инъективными*, если M_1 является $\mathcal{X}$-M_2-инъективным, аM_2 — $\mathcal{X}$-M_1-инъективным.

Лемма 3.3. *Пусть M_1, M_2 — взаимно $\mathcal{X}$-инъективные модули, $u_1 : M_1 \to X_1$, $u_2 : M_2 \to X_2$ — $\mathcal{X}$-оболочки. Если $X_1 \simeq X_2$, то $M_1 \simeq M_2$.*

Доказательство. Предположим, что $g : X_1 \to X_2$ — изоморфизм модулей. Существуют гомоморфизмы $f_1 : M_1 \to M_2$ и $f_2 : M_2 \to M_1$, для которых выполнены равенства

$$u_2 f_1 = g u_1, \quad u_1 f_2 = g^{-1} u_2.$$

Тогда $u_1 f_2 f_1 = u_1$ и $u_2 f_1 f_2 = u_2$. Следовательно, $f_1 f_2 = id_{M_2}$ и $f_2 f_1 = id_{M_1}$. □

Теорема 3.4 (см. [62])**.** *Пусть $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ — правый R-модуль и $u_i : M_i \to X_i$ — $\mathcal{X}$-оболочка для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ — $\mathcal{X}$-эндоморфизм инвариантный модуль*;
(2) *модуль M_i является $\mathcal{X}$-M_j-инъективным для каждых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Докажем в случае, когда $n = 2$. Общий случай доказывается аналогично.

(1)⇒(2). Пусть $g : X_i \to X_j$ — гомоморфизм. Обозначим через

$$\pi_i : X_1 \oplus X_2 \to X_i, \quad \iota_j : X_j \to X_1 \oplus X_2$$

соответственно проекцию и вложение. Согласно п. (1) существует гомоморфизм

$$f : M_1 \oplus M_2 \to M_1 \oplus M_2,$$

для которого выполнено равенство

$$(u_1 \oplus u_2)f = \iota_j g \pi_i (u_1 \oplus u_2).$$

Пусть $k = q_j f v_i$, где $q_j : M_1 \oplus M_2 \to M_j$ — проекция и $v_i : M_i \to M_1 \oplus M_2$ — вложение. Тогда $u_j k = g u_i$.

(2)⇒(1). Предположим, что модуль M_i является $\mathcal{X}$-M_j-инъективным для каждых $i, j \in \{1, 2\}$ и

$$u_1 \oplus u_2 : M_1 \oplus M_2 \to X_1 \oplus X_2$$

— $\mathcal{X}$-оболочка. Пусть g — эндоморфизм модуля $X_1 \oplus X_2$,

$$\iota_1 : X_1 \to X_1 \oplus X_2, \quad \iota_2 : X_2 \to X_1 \oplus X_2$$

— вложения и

$$\pi_1 : X_1 \oplus X_2 \to X_1, \quad \pi_2 : X_1 \oplus X_2 \to X_2$$

— проекции. Для каждых $i, j \in \{1, 2\}$ существует такой гомоморфизм $f_{ij} : M_i \to M_j$, что

$$\pi_j g \iota_i u_i = u_j f_{ij}.$$

Пусть $f : M_1 \oplus M_2 \to M_1 \oplus M_2$ — эндоморфизм, действующий согласно правилу

$$f(m_1 + m_2) = f_{11}(m_1) + f_{21}(m_1) + f_{12}(m_2) + f_{22}(m_2).$$

Тогда $g(u_1 \oplus u_2) = (u_1 \oplus u_2)f$. Таким образом, модуль $M = M_1 \oplus M_2$ является $\mathcal{X}$-эндоморфизм-инвариантным. □

Следствие 3.5. *Модуль M является $\mathcal{X}$-эндоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M^n — $\mathcal{X}$-эндоморфизм-инвариантный модуль.*

Следствие 3.6 (см. [24, предложение 2.2.2])**.** *Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — правые R-модули. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ — *квазиинъективный модуль*;
(2) M_i — M_j-*инъективный модуль для каждых* $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Следствие 3.7 (см. [24, предложение 2.2.3])**.** *Пусть M — модуль и $n \in \mathbb{N}$. Тогда модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда M^n — квазиинъективный модуль.*

Пусть M_1, M_2 — правые R-модули. Модуль M_1 называется $\mathcal{X}$-M_2-*проективным*, если существуют такие $\mathcal{X}$-накрытия $p_1 : X_1 \to M_1$, $p_2 : X_2 \to M_2$, что для любого гомоморфизма $g : X_1 \to X_2$ существует гомоморфизм $f : M_1 \to M_2$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{p_1} & M_1 \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X_2 & \xrightarrow{p_2} & M_2 \end{array}$$

Если модуль M $\mathcal{X}$-M-проективен, то M называется $\mathcal{X}$-*эндоморфизм-коинвариантным*. Два правых R-модуля M_1 и M_2 называются *взаимно* $\mathcal{X}$-*проективными*, если M_1 — $\mathcal{X}$-M_2-проективен и M_2 — $\mathcal{X}$-M_1-проективен.

Лемма 3.8. *Пусть $p_1 : X_1 \to M_1$, $p_2 : X_2 \to M_2$ — $\mathcal{X}$-эпиморфные накрытия правых R-модулей. Следующие условия равносильны*:

(1) M_1 — M_2-$\mathcal{X}$-*проективный модуль*;
(2) $g(\operatorname{Ker} p_1) \leqslant \operatorname{Ker} p_2$ *для каждого* $g \in \operatorname{Hom}(X_1, X_2)$.

Доказательство. (1)⇒(2). Предположим, что M_1 является M_2-$\mathcal{X}$-проективным модулем и $g \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$. Существует такой гомоморфизм $f : M_1 \to M_2$, что $p_2 g = f p_1$. Для любого $x \in \mathrm{Ker}(p_1)$ имеет место равенство $p_1(x) = 0$ и, следовательно, $p_2 g(x) = f p_1(x) = 0$. Тогда $g(x) \in \mathrm{Ker}(p_2)$. Таким образом, $g(\mathrm{Ker}(p_1)) \leqslant \mathrm{Ker}(p_2)$.

(2)⇒(1). Пусть $g : X_1 \to X_2$ — гомоморфизм правых R-модулей. Тогда $g(\mathrm{Ker}(p_1)) \leqslant \mathrm{Ker}(p_2)$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\psi : X_2/g(\mathrm{Ker}(p_1)) \to M_2, \quad \psi(x + g(\mathrm{Ker}(p_1)) = p_2(x) \text{ для всех } x \in X_2.$$

Так как p_1 — эпиморфизм, то для каждого $m \in M_1$ существует такой элемент $x \in X_1$, что $m = p_1(x)$. Рассмотрим следующее отображение:

$$\phi : M_1 \to X_2/g(\mathrm{Ker}(p_1)), \quad m \mapsto g(x) + g(\mathrm{Ker}(p_1)).$$

Ясно, что ϕ — гомоморфизм правых R-модулей. Пусть $f = \psi \circ \phi : M_1 \to M_2$. Для каждого $x \in X_1$ имеем

$$f p_1(x) = \psi \circ \phi(p_1(x)) = \psi(g(x) + g(\mathrm{Ker}\, p_1)) = p_2 g(x).$$

Тогда $f p_1 = p_2 g$. Следовательно, модуль M_1 является M_2-$\mathcal{X}$-проективным. □

Лемма 3.9. *Пусть M_1, M_2 — взаимно $\mathcal{X}$-проективные правые R-модули и $p_i : X_i \to M_i$ — эпиморфные $\mathcal{X}$-накрытия. Если $X_1 \simeq X_2$, то $M_1 \simeq M_2$.*

Доказательство. Пусть $g : X_1 \to X_2$ — изоморфизм. По предположению существуют такие гомоморфизмы $f_1 : M_1 \to M_2$ и $f_2 : M_2 \to M_1$, что

$$f_1 \circ p_1 = p_2 \circ g, \quad f_2 \circ p_2 = p_1 \circ g^{-1}.$$

Тогда $f_1 \circ f_2 \circ p_2 = p_2$ и $f_2 \circ f_1 \circ p_1 = p_1$. Следовательно, $f_1 \circ f_2 = id_{M_2}$ и $f_2 \circ f_1 = id_{M_1}$. □

Следующее утверждения является двойственным аналогом теоремы 3.4.

Теорема 3.10. *Пусть $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ — модуль и для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ модуль M_i обладает $\mathcal{X}$-накрытием. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ — $\mathcal{X}$-эндоморфизм коинвариантный модуль*;
(2) *модули M_i и M_j взаимно $\mathcal{X}$-проективны для каждых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Следствие 3.11. *Если модуль M обладает $\mathcal{X}$-накрытием, то M является $\mathcal{X}$-эндоморфизм-коинвариантным в точности тогда, когда $M \oplus M$ — $\mathcal{X}$-эндоморфизм-коинвариантный модуль.*

Следствие 3.12. *Пусть $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ — правый модуль над совершенным справа кольцом. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ — квазипроективный модуль*;
(2) *модули M_i и M_j взаимно проективны для каждых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Следствие 3.13. *Если M — правый модуль над совершенным справа кольцом, то M является квазипроективным модулем в точности тогда, когда $M \oplus M$ — квазипроективный модуль.*

3.2. $\mathcal{X}$-Идемпотентно-инвариантные модули.

Лемма 3.14. *Пусть Q — инъективная оболочка модуля M, α — эндоморфизм модуля Q, $X = \{m \in M \mid \alpha(m) \in M\}$ и $f = \alpha|_X : X \to M$ — сужение эндоморфизма α на модуль X. Тогда имеют место следующие утверждения*:

(1) *если гомоморфизм $f : X \to M$ продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M, то $\alpha(M) \subseteq M$;*
(2) *если $f(X) \subseteq X$ и эндоморфизм f модуля X продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M, то $\alpha(M) \subseteq M$;*

(3) *если* $\alpha = \alpha^2$ *и каждый идемпотентный эндоморфизм модуля* X *продолжается до некоторого эндоморфизма модуля* M*, то* $\alpha(M) \subseteq M$.

Доказательство. (1). Так как Q — инъективный модуль, то эндоморфизм g модуля M продолжается до некоторого эндоморфизма β модуля Q.

Допустим, что $(\alpha - \beta)(M) = 0$. Тогда $\alpha(M) = \beta(M) \subseteq M$, что и требовалось доказать.

Допустим, что $(\alpha - \beta)(M) \neq 0$. Так как Q — существенное расширение модуля M и $X = \{m \in M \mid \alpha(m) \in M\}$, то X — существенный подмодуль в Q. Тогда $X \cap (\alpha - \beta)(M)$ — ненулевой подмодуль в M, поскольку Q — существенное расширение модуля X. Пусть

$$0 \neq x = (\alpha - \beta)(m) \in X \cap (\alpha - \beta)(M),$$

где $m \in M$. Так как

$$\alpha(m) = (\alpha - \beta)(m) + \beta(m) = x + \beta(m) \in M,$$

то $m \in X$. Поэтому $(\alpha - \beta)(m) = 0$ и $x = 0$. Получено противоречие.

(2) вытекает из (1).

(3). Так как $\alpha = \alpha^2$, то $f = f^2$ и $f^2(x) = f(x) \in X$ для любого элемента $x \in X$. Поэтому f — идемпотентный эндоморфизм модуля X. По условию f продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M. Согласно (2) имеем $\alpha(M) \subseteq M$. □

Модуль M называется *CS-модулем* или *$C1$-модулем*, если каждый подмодуль в M является существенным подмодулем некоторого прямого слагаемого модуля M.

Модуль M называется *$C3$-модулем*, если $X \oplus Y$ — прямое слагаемое в M для любых таких прямых слагаемых X и Y в M, что $X \cap Y = 0$.

Модуль M называется *квазинепрерывным* (см. [44]) или *π-инъективным*, если выполнены эквивалентные условия следующего утверждения.

Предложение 3.15. *Для модуля* M *следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля в* M *продолжается до эндоморфизма модуля* M;

(2) *каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля в* M *продолжается до идемпотентного эндоморфизма модуля* M;

(3) M *— идемпотент-инвариантный модуль, т.е.* $\alpha(M) \subseteq M$ *для каждого идемпотентного эндоморфизма* α *инъективной оболочки модуля* M;

(4) M *—* CS*-модуль и* C_3*-модуль*;

(5) $M = \bigoplus_{i \in I}(M \cap Q_i)$ *для любого прямого разложения* $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ *инъективной оболочки* Q *модуля* M;

(6) *для любого подмодуля* $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n$ *модуля* M *существует такое прямое разложение* $M = M_1 \oplus M_2 \ldots \oplus M_n \oplus Y$ *модуля* M*, что* M_i *— существенное расширение модуля* X_i*,* $i = 1, 2, \ldots n$.

Доказательство. Эквивалентности (2)⇔(3)⇔(4) доказаны в [44] (см. также [63]). Эквивалентности (3)⇔(5) и (4)⇔(6) проверяются непосредственно (см. также [63]). Импликация (2)⇒(1) очевидна. Импликация (1)⇒(3) вытекает из леммы 3.14. □

Пусть M — правый R-модуль. Модуль M называется *$\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантным*, если существует такая $\mathcal{X}$-оболочка $u : M \to X$, что для каждого идемпотента $g \in \mathrm{End}(X)$ существует эндоморфизм $f : M \to M$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ M & \xrightarrow{u} & X \end{array}.$$

В настоящем пункте излагается общая теория $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантных модулей. Изложение основано на [62].

Лемма 3.16. *Пусть $M = M_1 \oplus M_2$ — модуль и $u_1 : M_1 \to X_1$, $u_2 : M_2 \to X_2$, $u_1 \oplus u_2 : M \to X_1 \oplus X_2$ — $\mathcal{X}$-оболочки. Если модуль M является $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантным, то M_i — $\mathcal{X}$-M_j-инъективный модуль для всех $i \neq j$.*

Доказательство. Пусть $g' : X_1 \oplus X_2 \to X_1 \oplus X_2$ — гомоморфизм, заданный согласно правилу $g'(x_1 + x_2) = x_1 + g(x_1)$. Так как $g'^2 = g'$ и модуль M $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантен, то для некоторого гомоморфизма $f' : M \to M$ имеет место равенство $uf' = g'u$. Для каждого $m_1 \in M_1$ существуют такие элементы $m_1' \in M_1$, $m_2 \in M_2$, что $f'(m_1) = m_1' + m_2$. Определим гомоморфизм $f : M_1 \to M_2$ согласно правилу $f(m_1) = m_2$. Тогда для каждого $m_1 \in M_1$ имеют место равенства

$$g'u(m_1) = g'(u_1(m_1)) = u_1(m_1) + gu_1(m_1),$$
$$uf'(m_1) = u(m_1' + m_2) = u_1(m_1') + u_2(m_2) = u_1(m_1') + u_2f(m_1).$$

Следовательно, $gu_1(m_1) = u_2f(m_1)$ и $gu_1 = u_2f$. □

Следствие 3.17. *Модуль M является $\mathcal{X}$-эндоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда $M \oplus M$ — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль.*

Следствие 3.17 вытекает из леммы 3.16 и следствия 3.11.

Следствие 3.18. *Модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда $M \oplus M$ — квазинепрерывный модуль.*

Пусть M — правый R-модуль. Модуль M называется *$\mathcal{X}$-CS-модулем*, если существует такая $\mathcal{X}$-оболочка $u : M \to X$, что для любого идемпотента $g \in \mathrm{End}(X)$ существует идемпотент $f \in \mathrm{End}\, M$, для которого выполнено равенство $g(X) \cap u(M) = uf(M)$. В этом случае, очевидно, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{uf} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ M & \xrightarrow{u} & X \end{array}.$$

Предложение 3.19. *Пусть $u : M \to X$ — мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка. Если M — $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантный модуль, то M — $\mathcal{X}$-CS-модуль.*

Доказательство. Пусть $u : M \to X$ — мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка и $g^2 = g \in \mathrm{End}(X)$. Поскольку M — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль, то для некоторых эндоморфизмов $f, f' \in \mathrm{End}\, M$ выполнены равенства $uf = gu$, $uf' = (1 - g)u$. Тогда $uf'f = 0$ и, следовательно, $f'f = 0$. Так как $u = gu + (1 - g)u = uf + uf' = u(f + f')$, то $f + f' = id$. Таким образом, $f^2 = f$ и $g(X) \cap u(M) = uf(M)$. □

Лемма 3.20. *Пусть M — модуль и N — прямое слагаемое M. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если M — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль и N имеет $\mathcal{X}$-оболочку, то модуль N является $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантным.*
(2) *Если M — $\mathcal{X}$-CS-модуль, модуль N имеет $\mathcal{X}$-оболочку и инвариантен относительно всех идемпотентов из кольца $\mathrm{End}\, M$, то N — $\mathcal{X}$-CS-модуль.*

Доказательство. (1). Пусть $u : M \to X$ и $u_1 : N \to X_1$ — $\mathcal{X}$-оболочки, $\pi : M \to N$ — проекция и $\iota : N \to M$ — вложение. Рассмотрим идемпотентный эндоморфизм g_2 модуля X_1. Покажем, что для некоторого гомоморфизма $f_2 : N \to N$ имеет место равенство $u_1f_2 = g_2u_1$.

Существуют такие гомоморфизмы $h_1 : X \to X_1$ и $h_2 : X_1 \to X$, что $h_1 u = u_1 \pi$ и $h_2 u_1 = u\iota$. Тогда $h_1 h_2 u_1 = u_1$ и, следовательно, $h_1 h_2$ — изоморфизм. Существует такой гомоморфизм $h : X_1 \to X_1$, что $(h_1 h_2)h = id_{X_1}$. Пусть $g_1 = h_2(hg_2)h_1 : X \to X$. Несложно заметить, что g_1 — идемпотентный эндоморфизм модуля X. Так как модуль M является $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантным, то существует такой гомоморфизм $f_1 : M \to M$, что $uf_1 = g_1 u$. Пусть $f_2 = \pi f_1 \iota$. Тогда

$$u_1 f_2 = u_1 \pi f_1 \iota = h_1 u f_1 \iota = h_1 g_1 u\iota = h_1 h_2 h g_2 h_1 u\iota = g_2 h_1 u\iota = g_2 u_1 \pi\iota = g_2 u_1$$

Таким образом, N — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль.

(2) Пусть $u : M \to X$, $u_1 : N \to X_1$ — $\mathcal{X}$-оболочки, $\pi : M \to N$ — проекция и $\iota : N \to M$ — включение. Рассмотрим идемпотентный эндоморфизм g_2 модуля X_1. Покажем, что существует идемпотент $f_2 \in \mathrm{End}(N)$, для которого выполнено равенство $g_2(X_1) \cap u_1(N) = u_1 f_2(M)$. Существуют такие гомоморфизмы $h_1 : X \to X_1$ и $h_2 : X_1 \to X$, что $h_1 u = u_1 \pi$ и $h_2 u_1 = u\iota$. Тогда $h_1 h_2 u_1 = u_1$ и, следовательно, $h_1 h_2$ — изоморфизм. Для некоторого гомоморфизма $h : X_1 \to X_1$ имеет место равенство $h(h_1 h_2) = id_{X_1}$. Тогда мономорфизм h_2 является расщепляющимся. Следовательно, X_1 изоморфен прямому слагаемому модуля X. Поэтому без ограничения общности можно считать, что X_1 является прямым слагаемым модуля X и $u_1 = u\iota$. Рассмотрим гомоморфизм $g_1 = \iota_0 g_2 \pi_0 : X \to X$, где $\pi_0 : X \to X_1$ — каноническая проекция и $\iota_0 : X_1 \to X$ — вложение. Тогда g_1 — идемпотент кольца $\mathrm{End}(X)$. Так как M является $\mathcal{X}$-CS-модулем, то существует идемпотент $f_1 \in \mathrm{End}\, M$, для которого выполнено равенство $g_1(X) \cap u(M) = uf_1(M)$. Поскольку N инвариантен относительно всех идемпотентов из кольца эндоморфизмов модуля M, то $f_1(N) \leqslant N$. Пусть $f_2 = f_1|_N : N \to N$. Тогда f_2 — идемпотентный эндоморфизм модуля N и $g_2(X_1) \cap u_1(N) = u_1 f_2(N)$. Таким образом, N — $\mathcal{X}$-CS-модуль. □

Теорема 3.21. *Пусть $u : M \to X$ — мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантный модуль*;
(2) *если $X = \bigoplus_I X_i$, то $M = \bigoplus_I (u^{-1}(X_i) \cap M)$*;
(3) *если $X = X_1 \oplus X_2$, то $M = (u^{-1}(X_1) \cap M) \oplus (u^{-1}(X_2) \cap M)$.*

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть $X = \bigoplus_I X_i$. Для каждого $m \in M$ существуют такие конечное подмножество $F \subseteq I$ и семейство ортогональных идемпотентов $\{g_k : k \in F\}$ из кольца $\mathrm{End}(X)$, что $u(m) \in \bigoplus_F X_k$ и $g_k(X) = X_k$. Так как M — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль, то для некоторого семейства идемпотентов $\{f_k : k \in F\} \subseteq \mathrm{End}\, M$ выполнено равенство $uf_k = g_k u$ для каждого $k \in F$. Так как

$$u(m) = \sum_F g_k u(m) = \sum_F u f_k(m),$$

то

$$m = \sum_F f_k(m).$$

Поскольку $f_k(m) \in M \cap u^{-1}(X_k)$ для каждого $k \in F$, то

$$m \in \sum_F (M \cap u^{-1}(X_i)).$$

Таким образом,

$$M = \bigoplus_I (u^{-1}(X_i) \cap M).$$

(2)⇒(3) очевидно.

(3)⇒(1). Пусть g — идемпотентный эндоморфизм модуля X. Так как $X = g(X) \oplus (1-g)(X)$, то согласно условию п. (3)

$$M = (M \cap u^{-1}(g(X)) \oplus u^{-1}((1-g)(X)).$$

Пусть $f : M \to M \cap u^{-1}(g(X))$ — проекция. Тогда для каждого

$$m = x + y \in M, \quad x \in M \cap u^{-1}(g(X)), \quad y \in M \cap u^{-1}((1-g)(X)),$$

имеет место равенство $uf(m) = u(x)$. Поскольку $x \in M \cap u^{-1}(g(X))$, то $u(x) = g(m_0)$ для некоторого $m_0 \in M$. Имеют место равенства

$$gu(m) = gu(x+y) = gu(x) + gu(y) = g(g(m_0)) + gu(y) = g(m_0) + gu(y).$$

Так как $y \in M \cap u^{-1}((1-g)(X))$, то $gu(y) = 0$. Следовательно, $uf(m) = gu(m)$. Таким образом, $uf = gu$. □

Предложение 3.22. *Пусть $u : M \to X$ — мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка и $u(M)$ — существенный подмодуль в X. Рассмотрим следующие условия*:

(1) *если U — д.п. V в M и V — д.п. U в M, то $M = U \oplus V$;*

(2) *M — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль.*

Тогда имеет место импликация (1) ⇒ (2). *Если X является квазинепрерывным модулем, то верна импликация* (2) ⇒ (1).

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть g — идемпотентный эндоморфизм модуля X,

$$A_1 = M \cap u^{-1}(g(X)), \quad A_2 = M \cap u^{-1}((1-g)(X)).$$

Рассмотрим дополнение по пересечению B_1 для A_2 в M, которое содержит A_1. Пусть B_2 — дополнение по пересечению для B_1 в M, которое содержит A_2. Тогда B_1 — д.п. B_2 в M и B_2 — д.п. B_1 в M. По предположению п. (1) имеет место равенство $M = B_1 \oplus B_2$. Пусть $\pi : B_1 \oplus B_2 \to B_1$ — проекция. Покажем, что имеет место равенство $u\pi = gu$. Предположим, что $u\pi \neq gu$. Так как $u(M) \leqslant^e X$, то для некоторых элементов $m = b_1 + b_2 \in M$, где $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2$, и $m_0 \in M$, имеет место равенство $u(m_0) = (u\pi - gu)(m) \neq 0$. Следовательно,

$$u(-m_0 + \pi(m)) = gu(m), \quad -m_0 + \pi(m) \in A_1.$$

Так как $gu(-m_0 + \pi(m)) = gu(m)$, то $-m_0 + \pi(m) - m \in A_2$. Тогда

$$-m_0 + \pi(m) - b_1 - b_2 \in A_2, \quad m_0 + \pi(m) - b_1 \in B_1 \cap B_2 = 0.$$

Поскольку $\pi(m) - b_1 = 0$, то $m_0 = 0$. Получили противоречие. Таким образом, $u\pi = gu$.

(2)⇒(1). Предположим, что X является квазинепрерывным модулем. Пусть $A \leqslant M$. Существует такой подмодуль $H \leqslant X$, что $X = H \oplus K$ и $u(A) \leqslant^e H$. Тогда $A \leqslant^e u^{-1}(H) \cap M$. Согласно п. (3)

$$M = (u^{-1}(H) \cap M) \oplus (u^{-1}(K) \cap M).$$

Таким образом, M — $C1$-модуль.

Покажем, что M — $C3$-модуль. Пусть U, V — прямые слагаемые модуля M, для которых выполнено равенство $U \cap V = 0$. Существуют такие разложения $X = X_1 \oplus Y_1 = X_2 \oplus Y_2$, что $u(U) \leqslant^e X_1$ и $u(V) \leqslant^e X_2$. Так как $U \cap V = 0$, то $X_1 \cap X_2 = 0$. Поскольку X — $C3$-модуль, то $X = (X_1 \oplus X_2) \oplus X_3$ для некоторого подмодуля X_3 модуля X. Тогда

$$M = (u^{-1}(X_1) \cap M) \oplus (u^{-1}(X_2) \cap M) \oplus (u^{-1}(X_3) \cap M).$$

Так как U, V — прямые слагаемые модуля M, $U \leqslant^e u^{-1}(X_1) \cap M$ и $V \leqslant^e u^{-1}(X_2) \cap M$, то

$$U = u^{-1}(X_1) \cap M, V = u^{-1}(X_2) \cap M.$$

Таким образом,

$$M = (U \oplus V) \oplus (u^{-1}(X_3) \cap M).$$

Предложение 3.22 доказано. □

Несложно заметить, что всякий замкнутый подмодуль X модуля M имеет вид $X' \cap M$, где X' — некоторое прямое слагаемое модуля $E(M)$. Это наблюдение мотивирует следующие определение. Пусть $u : M \to X$ — $\mathcal{X}$-оболочка. Подмодуль A модуля M называется *$\mathcal{X}$-замкнутым* в M, если для некоторого идемпотентного гомоморфизма g модуля X выполнено равенство $A = u^{-1}(g(X)) \cap M$.

Теорема 3.23. *Пусть $u : M \to X$ — мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — $\mathcal{X}$-CS-модуль*;
(2) *каждый $\mathcal{X}$-замкнутый подмодуль модуля M является прямым слагаемым M.*

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть $U = g(X)$, где $g = g^2 \in \mathrm{End}(X)$. Существует такой идемпотент $f \in \mathrm{End}\, M$, что $g(X) \cap u(M) = uf(M)$. Тогда $u^{-1}(U) \cap M = f(M)$ — прямое слагаемое модуля M.

(2)⇒(1). Пусть $g = g^2 \in \mathrm{End}(X)$. Согласно п. (2), $u^{-1}(g(X)) \cap M$ — прямое слагаемое модуля M. Пусть $\pi : M \to u^{-1}(g(X)) \cap M$ — проекция. Тогда $g(X) \cap u(M) = u\pi(M)$. Таким образом, M — $\mathcal{X}$-CS-модуль. □

Модуль M называется *чисто бесконечным*, если $M = M \oplus M$. Если модуль M не изоморфен собственному прямому слагаемому, то он называется *прямо конечным*.

Предложение 3.24. *Пусть M — $\mathcal{X}$-идемпотентно инвариантный модуль и каждое прямое слагаемое модуля M обладает $\mathcal{X}$-оболочкой. Если $u : M \to X$ мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка, то*

(1) *модуль M чисто бесконечен в точности тогда, когда X — чисто бесконечный модуль*;
(2) *модуль M прямо конечен в точности тогда, когда X — прямо конечный модуль.*

Доказательство. (1). Предположим, что M — чисто бесконечный модуль. Тогда существует такое разложение $M = M_1 \oplus M_2$, что $M_1 \simeq M_2 \simeq M$. Пусть $u_1 : M_1 \to X_1$ и $u_2 : M_2 \to X_2$ — $\mathcal{X}$-оболочки. Тогда $X \simeq X_1 \oplus X_2$ и $X \simeq X_1 \simeq X_2$. Таким образом, X — чисто бесконечный модуль.

Предположим, что $X = X_1 \oplus X_2$ и $X_1 \simeq X_2 \simeq X$. По теореме 3.21 имеет место разложение

$$M = [M \cap u^{-1}(X_1)] \oplus [M \cap u^{-1}(X_2)].$$

Тогда модули $M \cap u^{-1}(X_1)$ и $M \cap u^{-1}(X_2)$ взаимно $\mathcal{X}$-инъективны. Пусть $M_1 = M \cap u^{-1}(X_1)$ и $M_2 = M \cap u^{-1}(X_2)$. Тогда $M = M_1 \oplus M_2$ и

$$u_1 = u|_{M_1} : M \cap u^{-1}(X_1) \to X_1, \quad u_2 = u|_{X_2} : M \cap u^{-1}(X_2) \to X_2$$

— $\mathcal{X}$-оболочки. Действительно, $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$. Пусть $f : M_1 \to U$ — гомоморфизм и $U \in \mathcal{X}$. Существует гомоморфизм $h : X \to U$, для которого выполнено равенство $hu = f\pi_1$, где $\pi_1 : M \to M_1$ — каноническая проекция. Пусть $\pi_{X_1} : X \to X_1$ — каноническая проекция, $\iota_1 : X_1 \to X$ — каноническое вложение и $k = h\iota_1$. Тогда $ku_1 = f$. С другой стороны, предположим, что имеет место равенство $\alpha u_1 = u_1$, где $\alpha : X_1 \to X_1$. Положим

$$\beta = \alpha \oplus id_{X_2} : X \to X.$$

Тогда $\beta u = u$ и, следовательно, β — изоморфизм. Тогда α является изоморфизмом. Таким образом, $u_1 : M_1 \to X_1$ — $\mathcal{X}$-оболочка. Аналогично показывается, что $u_2 : M_2 \to X_2$ является $\mathcal{X}$-оболочкой. Несложно заметить, что M_i — $\mathcal{X}$-M-инъективный модуль. Тогда, согласно лемме 3.3, $M_1 \simeq M_2 \simeq M$. Таким образом, модуль M чисто бесконечен.

(2). Предположим, что модуль M не является прямо конечным. Тогда $M = M_1 \oplus M_2$ и $M_1 \simeq M$. Тогда $X \simeq X_1 \oplus X_2$ и $X_1 \simeq X$. Таким образом, модуль X не является прямо конечным.

Предположим, что модуль X не является прямо конечным. Тогда существуют такие подмодули X_1 и X_2 модуля X, что $X = X_1 \oplus X_2$ и $X \simeq X_1$. Следовательно,

$$M = (M \cap u^{-1}(X_1)) \oplus (M \cap u^{-1}(X_2)).$$

Из доказательства п. (1) следует, что $u_1 = u|_{M_1} : M \cap u^{-1}(X_1) \to X_1$ — $\mathcal{X}$-оболочка и $M \simeq M_1$. Тогда модуль M не является прямо конечным. □

Следствие 3.25. *Пусть M — $\mathcal{X}$-идемпотентно-инвариантный модуль и каждое прямое слагаемое модуля M обладает $\mathcal{X}$-оболочкой. Если $u : M \to X$ — мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка и X является прямой суммой чисто бесконечного модуля и прямо конечного модуля, то модуль M обладает разложением $M = M_1 \oplus M_2$, где M_1 — прямо конечный модуль, M_2 — чисто бесконечный модуль, и модули M_1, M_2 взаимно $\mathcal{X}$-инъективны.*

Лемма 3.26. *Пусть $\mathcal{X}$ — класс правых R-модулей, замкнутый относительно изоморфных образов, M — правый R-модуль, $A \leqslant M$, $u_A : A \to X_A$ и $u : M \to X$ — мономорфные $\mathcal{X}$-оболочки. Если $u_A(A) \leqslant^e X_A$, то существует такая мономорфная $\mathcal{X}$-оболочка $v : A \to Y$, что $u|_A = v$.*

Доказательство. Так как u_A — $\mathcal{X}$-оболочка, то существует гомоморфизм $h : X_A \to X$, для которого выполнено равенство $hu_A = u|_A$. Гомоморфизм h может быть представлен в виде $h = w \circ p$, где $p : X_A \to Y$ — эпиморфизм и $w : Y \to X$ — мономорфизм. Так как u_A — существенный мономорфизм, то $p : X_A \to Y$ является изоморфизмом. Таким образом, $v = pu_A : A \to Y$ — $\mathcal{X}$-оболочка. □

До конца настоящего пункта будем предполагать, что все рассматриваемые модули M обладают $\mathcal{C}$-оболочками $p : M \to X$, где $\mathcal{C}$ — некоторый класс модулей, удовлетворяющий следующим условиям:

(1) класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно изоморфизмов и конечных прямых сумм;
(2) каждый подмодуль A модуля M обладает $\mathcal{C}$-оболочкой $u_A : A \to X_A$, где u_A — существенный мономорфизм;
(3) если $A \leqslant B \leqslant M$ и $u_1 : A \to X_1$, $u_2 : B \to X_2$ — $\mathcal{C}$-оболочки, то X_1 является прямым слагаемым модуля X_2.

Теорема 3.27. *Следующие условия для модуля M равносильны:*

(1) *M — $\mathcal{C}$-идемпотентно-инвариантный модуль;*
(2) *M — $\mathcal{C}$-CS-модуль и для каждого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ модуля M подмодули M_1 и M_2 взаимно $\mathcal{C}$-инъективны.*

Доказательство. (1)⇒(2). Следует из лемм 3.20(1) и 3.16.

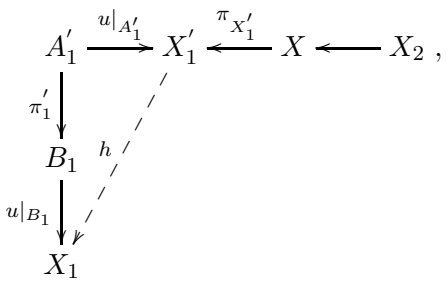
(2)⇒(1). Пусть $u : M \to X$ — $\mathcal{C}$-оболочка и $g \in I(X)$. Поскольку модуль M является $\mathcal{C}$-CS-модулем, то, по теореме 3.23, $u^{-1}((1-g)(X)) \cap M$ — прямое слагаемое M. Пусть

$$A_1 = u^{-1}(g(X)) \cap M, \quad B_1 = u^{-1}((1-g)(X)) \cap M.$$

Тогда $A_1 \cap B_1 = 0$ и $M = B_1 \oplus B_2$ для некоторого $B_2 \leqslant M$.

Покажем, что существует такой подмодуль M' модуля M, что $M = B_1 \oplus M'$ и $A_1 \leqslant M'$.

Пусть $\pi_1 : M \to B_1$, $\pi_2 : M \to B_2$ — проекции. Тогда $A_1' := \pi_2(A_1) \simeq A_1$ и отображение $\pi_1' : \pi_2(A_1) \to B_1$, действующее по правилу $\pi_1'(\pi_2(a_1)) = \pi_1(a_1)$ для каждого $a_1 \in A_1$, является гомоморфизмом. Пусть $u|_{A_1'} : A_1' \to X_1'$ — $\mathcal{C}$-оболочка и $X = X_1' \oplus X_2'$. Обозначим через $\pi_{X_1'} : X_1' \oplus X_2' \to X_1'$ естественную проекцию. Тогда для некоторого гомоморфизма $h : X_1' \to X_1$ имеет место коммутативная диаграмма



где $u|_{B_1} : B_1 \to X_1$, $u|_{B_2} : B_2 \to X_2$ — $\mathcal{C}$-оболочки и X_1, X_2 — прямые слагаемые модуля X.

Пусть $k = (h\pi_{X_1'})|_{X_2}$. Поскольку модуль B_2 — $\mathcal{C}$-B_1-инъективен, то для некоторого гомоморфизма $v : B_2 \to B_1$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B_2 & \xrightarrow{u|_{B_2}} & X_2 \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ B_1 & \xrightarrow{u|_{B_1}} & X_1 \end{array}.$$

Пусть $M' = \{b_2 + v(b_2) \mid b_2 \in B_2\}$. Для каждого $a_1 \in A_1$ имеют место равенства

$$a_1 = \pi_1(a_1) + \pi_2(a_1),$$
$$uv(\pi_2(a_1)) = ku(\pi_2(a_1)) = h\pi_{X_1'}u(\pi_2(a_1)) = hu(\pi_2(a_1)) = u\pi_1'(\pi_2(a_1)) = u(\pi_1(a_1)).$$

Тогда $v(\pi_2(a_1)) = \pi_1(a_1)$ и, следовательно, $a_1 \in M'$. Таким образом, $A_1 \leqslant M'$ и $M = B_1 \oplus M'$.

Покажем, что для некоторого гомоморфизма $f^2 = f \in \operatorname{End} M$ имеет место равенство $uf = gu$. Существует такой гомоморфизм $\pi : M \to M$, что $\pi = \pi^2$, $\pi(B_1) = 0$ и $\pi(M) = M'$. Пусть $u(m_1) = u\pi(m_2) - gu(m_2) \in u(M) \cap (u\pi - gu)(M)$, где $m_1, m_2 \in M$. Тогда

$$\pi(m_2) - m_1 \in A_1 \leqslant M' \qquad (*)$$
$$u(m_1 - \pi(m_2) + m_2) = (1 - g)u(m_2).$$

Следовательно,

$$m_1 - \pi(m_2) + m_2 \in B_1.$$

Тогда

$$0 = \pi(m_1 - \pi(m_2) + m_2) = \pi(m_1) - \pi(m_2) + \pi(m_2) = \pi(m_1).$$

Поэтому

$$m_1 \in B_1. \qquad (**)$$

Из $(*)$ и $(**)$ следует равенство $m_1 = 0$. Следовательно, $u(M) \cap (u\pi - gu)(M) = 0$. Так как $u(M) \leqslant^e X$, то $u\pi = gu$. Таким образом, модуль M является $\mathcal{C}$-идемпотентно инвариантным. □

Следствие 3.28. *Следующие условия равносильны для правого R-модуля M:*

(1) *M — квазинепрерывный модуль;*
(2) *M — CS-модуль и для всякого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ модуля M подмодули M_1 и M_2 взаимно инъективны.*

Доказательство. Следствие 3.28 вытекает из теоремы 3.27, если в ней в качестве $\mathcal{C}$ взять класс всех инъективных правых R-модулей. □

3.3. $\mathcal{X}$-Идемпотентно коинвариантные модули. Модуль M называется *модулем со свойством подъема,* если для каждого подмодуля N модуля M существуют такие подмодули M_1, M_2 модуля M, что выполнены условия

$$M = M_1 \oplus M_2, \quad M_1 \leqslant N, \quad M_2 \cap N \ll M_2.$$

Модуль M называется $D3$-*модулем*, если $X \cap Y$ — прямое слагаемое в M для любых таких прямых слагаемых X и Y в M, что $X + Y = M$. Модуль M называется *квазидискретным*, если он является одновременно модулем со свойством подъема и $D3$-модулем.

Предложение 3.29 (см. [51, предложение 4.45])**.** *Пусть R — совершенное справа кольцо, M — правый R-модуль и $\pi : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *M — квазидискретный модуль;*

(2) *M — идемпотентно-коинвариантный модуль, т.е. $e(\mathrm{Ker}(\pi)) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi)$ для каждого идемпотентного эндоморфизма e модуля P.*

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть e — идемпотентный эндоморфизм модуля P. Тогда

$$P = e(P) + (1-e)(P), \quad M = \pi e(P) + \pi(1-e)(P).$$

Так как модуль M является квазидискретным, то для некоторого идемпотентного эндоморфизма $f \in \mathrm{End}\, M$ имеем

$$f(M) \leqslant \pi e(P), \quad (1-f)(M) \leqslant \pi(1-e)(P).$$

Тогда

$$\pi^{-1}(f(M)) = e(P) \cap \pi^{-1}(f(M)) + \mathrm{Ker}(\pi),$$
$$\pi^{-1}((1-f)(M)) = (1-e)(P) \cap \pi^{-1}((1-f)(M)) + \mathrm{Ker}(\pi),$$

$$\begin{aligned} P = \pi^{-1}(f(M)) + \pi^{-1}((1-f)(M)) = \\ = e(P) \cap \pi^{-1}(f(M)) + (1-e)(P) \cap \pi^{-1}((1-f)(M)) + \mathrm{Ker}(\pi) = \\ = e(P) \cap \pi^{-1}(f(M)) + (1-e)(P) \cap \pi^{-1}((1-f)(M)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$e(P) \cap \pi^{-1}(f(M)) = e(P),$$
$$(1-e)(P) \cap \pi^{-1}((1-f)(M)) = (1-e)(P).$$

Тогда

$$f(M) = \pi e(P), \quad (1-f)(M) = \pi(1-e)(P)$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Ker}(\pi) = e(P) \cap \mathrm{Ker}(\pi) + (1-e)(P) \cap \mathrm{Ker}(\pi).$$

(2)⇒(1). Пусть M_0 — подмодуль модуля M. Хорошо известно, что всякий проективный модуль над совершенным справа кольцом является квазидискретным модулем. Следовательно, для некоторого идемпотента $e \in \mathrm{End}\, P$ имеем

$$e(P) \leqslant \pi^{-1}(M_0), \quad (1-e)(P) \cap \pi^{-1}(M_0) \ll P.$$

Так как

$$\mathrm{Ker}(\pi) = e(P) \cap \mathrm{Ker}(\pi) + (1-e)(P) \cap \mathrm{Ker}(\pi),$$

то $M = \pi e(P) \oplus \pi(1-e)(P)$. Несложно заметить, что

$$\pi e(P) \leqslant M_0, \quad \pi((1-e)(P) \cap \pi^{-1}(M_0)) \ll M$$

и имеет место равенство

$$M_0 = \pi e(P) + \pi((1-e)(P) \cap \pi^{-1}(M_0)).$$

Таким образом, модуль M является модулем со свойством подъема.

Пусть M_1, M_2 — прямые слагаемые модуля M, для которых имеет место равенство $M = M_1 + M_2$. Из приведенных выше рассуждений следует, что каждое прямое слагаемое модуля M является образом некоторого прямого слагаемого модуля P. Следовательно, для некоторых прямых слагаемых P_1 и P_2 модуля P имеют место равенства $\pi(P_1) = M_1$, $\pi(P_2) = M_2$. Так как P — квазидискретный модуль, то для некоторых подмодулей P_1' и P_2' модуля P имеют место равенства

$$P_1 = P_1' \oplus P_1 \cap P_2, P_2 = P_2' \oplus P_1 \cap P_2.$$

Тогда

$$P = P_1 + P_2 = P_1' \oplus P_2' \oplus P_1 \cap P_2.$$

Из п. (2) следует равенство

$$M = \pi(P) = \pi(P_1') \oplus \pi(P_2') \oplus \pi(P_1 \cap P_2).$$

Поскольку

$$M_1 = \pi(P_1) = \pi(P_1') \oplus \pi(P_1 \cap P_2), \quad M_2 = \pi(P_2) = \pi(P_2') \oplus \pi(P_1 \cap P_2),$$

то $M_1 \cap M_2 = \pi(P_1 \cap P_2)$. Таким образом, модуль M является $D3$-модулем и, следовательно, M — квазидискретный модуль. □

Пусть M — правый R-модуль. Модуль M называется *$\mathcal{X}$-идемпотентно-коинвариантным*, если существует такое $\mathcal{X}$-накрытие $u : X \to M$, что для каждого идемпотента $g \in \mathrm{End}(X)$ существует эндоморфизм $f : M \to M$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & M \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow{p} & M \end{array}$$

Лемма 3.30. *Пусть $\mathcal{X}$ — некоторый класс правых R-модулей, M — правый R-модуль и $p : X \to M$ — эпиморфное $\mathcal{X}$-накрытие модуля M. Тогда для каждого идемпотента $g \in \mathrm{End}(X)$ существует такой однозначно определенный гомоморфизм $f \in \mathrm{End}\, M$, что $fp = pg$ и $f^2 = f$.*

Доказательство. Существуют гомоморфизмы $f, f' \in \mathrm{End}\, M$, для которых выполнены равенства

$$fp = pg, \quad f'p = p(1 - g).$$

Тогда $f'fp = f'pg = 0$. Поскольку p — эпиморфизм, то $f'f = 0$. Так как

$$p = pg + p(1 - g) = f'p + fp = (f' + f)p,$$

то $id = f' + f$. Таким образом, $f = f^2 \in \mathrm{End}\, M$. Причем, поскольку p — эпиморфизм, то гомоморфизм f однозначно определен. □

Лемма 3.31. *Пусть $p : X \to M$ — эпиморфное $\mathcal{X}$-накрытие модуля M. Тогда M — $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантный модуль в точности тогда, когда $g(\mathrm{Ker}(p)) \leqslant \mathrm{Ker}(p)$ для каждого идемпотентного эндоморфизма модуля X.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть M — $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантный модуль и g — идемпотентный эндоморфизм модуля X. Существует такой эндоморфизм $f \in \mathrm{End}(M)$, что $p \circ g = f \circ p$. Для каждого элемента $x \in \mathrm{Ker}\, p$ имеем $p(x) = 0$ и $pg(x) = fp(x) = 0$. Следовательно, $g(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. Таким образом, $g(\mathrm{Ker}(p)) \leqslant \mathrm{Ker}(p)$.

($\Leftarrow$) Предположим, что $g = g^2 \in \mathrm{End}(X)$. Тогда $g(\mathrm{Ker}(p)) \leqslant \mathrm{Ker}(p)$. Рассмотрим гомоморфизм $\psi : X/g(\mathrm{Ker}(p)) \to M$, определенный согласно правилу $\psi(x + g(\mathrm{Ker}(p)) = p(x)$ для всех $x \in X$. Поскольку p — эпиморфизм, то для каждого $m \in M$ существует такой элемент $x \in X$, что $m = p(x)$. Рассмотрим отображение

$$\phi : M \to X/g(\mathrm{Ker}(p)), \quad m \mapsto g(x) + g(\mathrm{Ker}(p)).$$

Легко видеть, что ϕ — гомоморфизм. Пусть $f = \psi \circ \phi : M \to M$. Тогда для каждого $x \in X$ имеем

$$fp(x) = \psi \circ \phi(p(x)) = \psi(g(x) + g(\mathrm{Ker}(p)) = pg(x).$$

Следовательно, $f \circ p = p \circ g$. □

Следствие 3.32. *Пусть $p : X \to M$ — эпиморфное $\mathcal{X}$-накрытие модуля M. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантный модуль*;
(2) *если $X = \oplus_I X_i$, то* $\mathrm{Ker}(p) = \oplus_I (X_i \cap \mathrm{Ker}(p))$;

(3) *если* $X = X_1 \oplus X_2$, *то* $\mathrm{Ker}(p) = (X_1 \cap \mathrm{Ker}(p)) \oplus (X_2 \cap \mathrm{Ker}(p))$;
(4) *если* $e \in \mathrm{End}(X)$ — *идемпотент, то* $\mathrm{Ker}(p) = e(\mathrm{Ker}(p)) \oplus (1-e)(\mathrm{Ker}(p))$.

Теорема 3.33. *Пусть* $M = M_1 \oplus M_2$ — *модуль и модули* M_1, M_2 *и* M *обладают* $\mathcal{X}$*-накрытиями. Если модуль* M *является* $\mathcal{X}$*-идемпотентно коинвариантным, то* M_i — $\mathcal{X}$*-*M_j*-проективен для каждого* $i \neq j$.

Следствие 3.34. *Пусть* $M = M_1 \oplus M_2$ — *правый модуль над совершенным справа кольцом. Если модуль* M *является квазидискретным, то модули* M_1 *и* M_2 *взаимно проективны.*

Теорема 3.35. *Пусть* M — $\mathcal{X}$*-идемпотентно коинвариантный модуль и* $p : X \to M$ — *эпиморфное* $\mathcal{X}$*-накрытие модуля* M. *Следующие условия равносильны*:
(1) *модуль* M *чисто бесконечен в точности тогда, когда* X — *чисто бесконечный модуль*;
(2) *если* X — *прямо конечный модуль, то модуль* M *является прямо конечным*;
(3) *если* $\mathcal{X}$ — *класс проективных модулей и модуль* M *не является прямо конечным, то для модуля* M *имеет место разложение* $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$, *где* $M_1 \cong M_2 \neq 0$.

Пусть M — правый R-модуль. Модуль M называется $\mathcal{X}$*-модулем со свойством подъема*, если существует такое $\mathcal{X}$-накрытие $p : X \to M$ модуля M, что для любого идемпотента $g \in \mathrm{End}(X)$ найдется идемпотент $f : M \to M$, для которого выполнено равенство $g(X) + \mathrm{Ker}(p) = p^{-1}(f(M))$.

Следующее утверждение проверяется непосредственно.

Предложение 3.36. *Пусть* $p : X \to M$ — *эпиморфное* $\mathcal{X}$*-накрытие. Если* M — $\mathcal{X}$*-идемпотентно коинвариантный модуль, то* M — $\mathcal{X}$*-модуль со свойством подъема.*

Предложение 3.37. *Пусть* N — *прямое слагаемое модуля* M. *Если модуль* M *является* $\mathcal{X}$*-модулем со свойством подъема, обладающим эпиморфным* $\mathcal{X}$*-накрытием, и модуль* N *обладает* $\mathcal{X}$*-накрытием, то* N*--* $\mathcal{X}$*-модуль со свойством подъема.*

Доказательство. Пусть $p_1 : X_1 \to N$ — $\mathcal{X}$-накрытие. Легко видеть, что X_1 изоморфно такому прямому слагаемому K модуля X, что $p|_K : K \to N$ — $\mathcal{X}$-накрытие N. Таким образом, мы можем предполагать, что $p_1 = p|_{X_1} : X_1 \to N$ — $\mathcal{X}$-накрытие N и X_1 — прямое слагаемое модуля X. Пусть $g : X_1 \to X_1$ — идемпотентный эндоморфизм модуля X_1. Рассмотрим гомоморфизм $g' = \iota \circ g \circ \pi : X \to X$, где $\iota : X_1 \to X$ — вложение и $\pi : X \to X_1$ — вложение. Тогда $g'^2 = g'$. Так как модуль M является $\mathcal{X}$-модулем со свойством подъема, то существует такой гомоморфизм $f'^2 = f' : M \to M$, что

$$g'(X) + \mathrm{Ker}(p) = p^{-1}(f'(M)).$$

Тогда $f'(M) = p(g(X_1)) = p_1(g(X_1)) \leqslant N$ и, следовательно, $f'(M)$ — прямое слагаемое модуля N. Существует такой идемпотентный гомоморфизм $f : N \to N$, что $p_1(g(X_1)) = f'(M) = f(N)$. Тогда

$$g(X_1) + \mathrm{Ker}(p_1) = p_1^{-1}(f(N)).$$

Таким образом, модуль N является $\mathcal{X}$-модулем со свойством подъема. □

Пусть $p : X \to M$ — $\mathcal{X}$-накрытие модуля M и A — подмодуль модуля M. Подмодуль A называется $\mathcal{X}$*-козамкнутым* в M, если для некоторого идемпотентного эндоморфизма $g \in \mathrm{End}(X)$ выполнено равенство $A = p(g(X))$.

Теорема 3.38. *Пусть* $p : X \to M$ — *эпиморфное* $\mathcal{X}$*-накрытие. Следующие условия равносильны*:
(1) M — $\mathcal{X}$*-модуль со свойством подъема*;
(2) *каждый* $\mathcal{X}$*-козамкнутый подмодуль модуля* M *является прямым слагаемым* M.

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть $U = p(g(X))$, где $g^2 = g \in \mathrm{End}(X)$. Тогда существует такой эндоморфизм $f^2 = f \in \mathrm{End}\, M$, что

$$g(X) + \mathrm{Ker}(p) = p^{-1}(f(M)).$$

Следовательно, $U = p(g(X)) = f(M)$ — прямое слагаемое M.

(2)⇒(1). Пусть g — идемпотентный элемент из кольца $\mathrm{End}(X)$. Согласно предположению $U = p(g(X))$ — прямое слагаемое модуля M. Существует гомоморфизм $f^2 = f \in \operatorname{End} M$, для которого выполнено равенство $p(g(X)) = f(M)$. Тогда

$$g(X) + \mathrm{Ker}(p) = p^{-1}(f(M)).$$

Таким образом, модуль M является $\mathcal{X}$-модулем со свойством подъема. □

До конца настоящего пункта будем предполагать, что все рассматриваемые модули M обладают $\mathcal{C}$-накрытиями $p : X \to M$, где $\mathcal{C}$ — некоторый класс модулей, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) класс модулей $\mathcal{C}$ замкнут относительно изоморфизмов;
(2) каждый фактор-модуль M/A модуля M обладает эпиморфным $\mathcal{C}$-накрытием $p_{M/A} : X_{M/A} \to M/A$, у которого $\mathrm{Ker}(p_{M/A}) \ll X_{M/A}$;
(3) для каждого прямого слагаемого N модуля M и каждого естественного гомоморфизма $\pi : N \to N/A$ существует расщепляющийся эпиморфизм $\psi : X_N \to X_{N/A}$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_N & \xrightarrow{\psi} & X_{N/A} \\ \downarrow{\scriptstyle p_N} & & \downarrow{\scriptstyle p_{N/A}} \\ N & \xrightarrow{\pi} & N/A \end{array}$$

Предложение 3.39. *Пусть $M = M_1 \oplus M_2$ — модуль. Если модуль M_2 является M_1-$\mathcal{C}$-проективным, то M_2 является M_1-проективным.*

Теорема 3.40. *Следующие условия эквивалентны для модуля M:*

(1) *M — $\mathcal{C}$-идемпотентно коинвариантный модуль;*
(2) *M — $\mathcal{C}$-модуль со свойством подъема и для каждого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ модули M_1 и M_2 взаимно $\mathcal{C}$-проективны;*
(3) *M — $\mathcal{C}$-модуль со свойством подъема и для каждого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ модули M_1 и M_2 взаимно проективны.*

Следствие 3.41. *Пусть R — совершенное справа кольцо. Для правого R-модуля M следующие условия равносильны:*

(1) *M — квазидискретный модуль;*
(2) *M — модуль со свойством подъема и для каждого разложения $M = M_1 \oplus M_2$ модули M_1 и M_2 взаимно проективны.*

3.4. $\mathcal{X}$-Дискретные и $\mathcal{X}$-непрерывные модули. Пусть M — правый R-модуль, $p : X \to M$ — $\mathcal{X}$-накрытие модуля M, $S = \mathrm{End}(X)$ и f — произвольный элемент из S. Если для некоторых гомоморфизмов $g_1, g_2 \in S$, $f \in \operatorname{End} M$ имеет место равенство $pg_1 = fp = pg_2$, то для каждого $h \in S$ имеем $p(g_1 - g_2)h = 0$ и, следовательно, $p = p(1 - (g_1 - g_2)h)$. Тогда из определения накрытия следует, что $1 - (g_1 - g_2)h$ — автоморфизм. Таким образом, $g_1 - g_2 \in J(S)$ и, следовательно, определен кольцевой гомоморфизм $\Phi : \operatorname{End} M \to S/J(S)$, действующий по правилу $\Phi(f) = f' + J(S)$, где $f' : X \to X$ — гомоморфизм, для которого выполнено равенство $p \circ f' = f \circ p$. Пусть $\nabla(M) = \mathrm{Ker}(\Phi)$. Тогда имеет место вложение $\bar{\Phi} : M/\nabla(M) \to S/J(S)$. Отождествляя кольцо $\operatorname{End} M/\nabla(M)$ с кольцом $\mathrm{Im}(\Phi)$, мы можем считать, что $\operatorname{End} M/\nabla(M)$ является подкольцом кольца $S/J(S)$.

Модуль M называется *дискретным*, если M — квазидискретный модуль и каждый подмодуль X модуля M, для которого фактор-модуль M/X изоморфен прямому слагаемому модуля M, — прямое слагаемое в M.

Лемма 3.42. *Пусть M — квазидискретный модуль и $p : P \to M$ — проективное накрытие модуля M. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — дискретный модуль*;
(2) *всякий малый эпиморфизм $f : M \to M$ является изоморфизмом*;
(3) *если для идемпотентов $e_1, e_2 \in \operatorname{End} P$, $e'_1, e'_2 \in \operatorname{End} M$ выполнены равенства $pe_i = e'_i p$ $(i = 1, 2)$, для гомоморфизмов α, α' коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} e_1(P) & \xrightarrow{\alpha} & e_2(P) \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ e'_1(M) & \xrightarrow{\alpha'} & e'_2(M) \end{array}$$

и α является изоморфизмом, то α' — изоморфизм.

Доказательство. Эквивалентность (1)⇔(3) проверяется непосредственно. Эквивалентность (1)⇔(2) следует из [51, лемма 5.1]. □

Пусть $p : X \to M$ — $\mathcal{X}$-накрытие модуля M. Модуль M называется *$\mathcal{X}$-дискретным*, если выполнены следующие условия:

(1) M — $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантный модуль;
(2) если для идемпотентов $e_1, e_2 \in \operatorname{End} P$, $e'_1, e'_2 \in \operatorname{End} M$ выполнены равенства $pe_i = e'_i p$ $(i = 1, 2)$, для гомоморфизмов α, α' коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} e_1(P) & \xrightarrow{\alpha} & e_2(P) \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ e'_1(M) & \xrightarrow{\alpha'} & e'_2(M) \end{array}$$

и α является изоморфизмом, то α' — изоморфизм.

Далее будем предполагать, что $\mathcal{X}$ — класс правых R-модулей, замкнутый относительно изоморфных образов и прямых слагаемых, $p : X \to M$ — эпиморфное $\mathcal{X}$-накрытие правого R-модуля M и $\operatorname{End}(X)$ — полурегулярное кольцо.

Теорема 3.43. *Если M — $\mathcal{X}$-дискретный модуль, то кольцо $\operatorname{End} M$ является полурегулярным и $J(\operatorname{End} M) = \nabla(M)$.*

Следствие 3.44. *У каждого неразложимого $\mathcal{X}$-дискретного модуля кольцо эндоморфизмов является локальным.*

Следствие 3.44 непосредственно вытекает из теоремы 3.43.

Теорема 3.45. *Если M — $\mathcal{X}$-дискретный модуль, то M является конечно заменяемым модулем.*

Теорема 3.45 непосредственно следует из теоремы 3.43 и [53, предложение 1.6].

Теорема 3.46. *Если M — $\mathcal{X}$-идемпотентно-коинвариантный модуль, то модуль M является $\mathcal{X}$-дискретным в точности тогда, когда $\nabla(M) = J(\operatorname{End} M)$ и $\operatorname{End} M/\nabla(M)$ — регулярное кольцо.*

Кольцо R называется *чистым*, если каждый элемент r из R представим в виде $r = e + u$, где $e^2 = e \in R$ и u — обратимый элемент из R. Модуль M называется *чистым*, если $\operatorname{End} M$ — чистое кольцо.

Теорема 3.47. *Если M — $\mathcal{X}$-дискретный модуль и $\mathrm{End}(X)$ — чистое кольцо, то кольцо $\mathrm{End}\, M$ является чистым.*

Лемма 3.48. *Пусть M — квазинепрерывный модуль и $u : M \to E(M)$ — инъективная оболочка модуля M. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *M — непрерывный модуль*;
(2) *каждый существенный мономорфизм $M \to M$ является изоморфизмом*;
(3) *если для идемпотентов $e_1, e_2 \in \mathrm{End}(E)$, $e_1', e_2' \in \mathrm{End}\, M$ выполнены равенства $e_i u = u e_i'$ $(i = 1, 2)$, для гомоморфизмов α, α' коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} e_1'(M) & \xrightarrow{\alpha'} & e_2'(M) \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ e_1(E) & \xrightarrow{\alpha} & e_2(E) \end{array}$$

и α — изоморфизм, то α' — изоморфизм.

Доказательство. Эквивалентность (1)⇔(3) проверяется непосредственно. Эквивалентность (1)⇔(2) следует из [51, лемма 3.14]. □

Модуль M называется *непрерывным*, если M — квазинепрерывный модуль и каждый подмодуль модуля M, изоморфный замкнутому подмодулю в M, — прямое слагаемое в M.

Пусть $u : M \to Y$ — $\mathcal{Y}$-оболочка модуля M. Модуль M называется *$\mathcal{Y}$-непрерывным*, если выполнены следующие условия:

(1) M — $\mathcal{Y}$-идемпотентно-инвариантный модуль;
(2) если для идемпотентов $e_1, e_2 \in \mathrm{End}(E)$, $e_1', e_2' \in \mathrm{End}\, M$ выполнены равенства $e_i u = u e_i'$ $(i = 1, 2)$, для гомоморфизмов α, α' коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} e_1'(M) & \xrightarrow{\alpha'} & e_2'(M) \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ e_1(E) & \xrightarrow{\alpha} & e_2(E) \end{array}$$

и α — изоморфизм, то α' — изоморфизм.

До конца настоящего пункта будем предполагать, что $\mathcal{Y}$ — класс правых R-модулей, замкнутый относительно изоморфных образов и прямых слагаемых, $u : M \to Y$ — мономорфная $\mathcal{Y}$-оболочка правого R-модуля M и $\mathrm{End}_R Y$ — полурегулярное кольцо. Имеет место кольцевой гомоморфизм $\Phi : \mathrm{End}\, M \to S/J(S)$, определенный согласно правилу $\Phi(f) = \bar{f} + J(S)$, где $\bar{f} : Y \to Y$ — гомоморфизм, для которого выполнено равенство $\bar{f} \circ u = u \circ f$. Пусть $\Delta(M) = \mathrm{Ker}(\Phi)$. Тогда имеем мономорфизм колец $\bar{\Phi} : M/\Delta(M) \to S/J(S)$.

Следующие четыре утверждения являются двойственными аналогами соответственно теорем 3.43, 3.45, 3.46 и 3.47.

Теорема 3.49. *Пусть M — $\mathcal{Y}$-непрерывный модуль. Тогда кольцо $\mathrm{End}\, M$ является полурегулярным и $J(\mathrm{End}\, M) = \Delta(M)$.*

Теорема 3.50. *Если M — $\mathcal{Y}$-непрерывный модуль, то модуль M является конечно заменяемым.*

Теорема 3.51. *Пусть M — $\mathcal{Y}$-идемпотентно-инвариантный модуль. Модуль M является $\mathcal{Y}$-непрерывным в точности тогда, когда $\Delta(M) = J(\mathrm{End}\, M)$ и кольцо $\mathrm{End}\, M/\Delta(M)$ регулярно.*

Теорема 3.52. *Если M — $\mathcal{Y}$-непрерывный модуль и $\operatorname{End}(Y)$ — чистое кольцо, то кольцо $\operatorname{End} M$ является чистым.*

Из приведенных выше результатов следуют следующие хорошо известные свойства дискретных и непрерывных модулей.

Следствие 3.53. *Пусть M — правый R-модуль. Имеют место следующие утверждения*:

(1) *если M — непрерывный модуль, то*
   (a) $\operatorname{End} M$ — *полурегулярное кольцо*;
   (b) M — *конечно заменяемый модуль*;
   (c) $\operatorname{End} M$ — *чистое кольцо*;
(2) *если M — дискретный модуль и R — совершенное справа кольцо, то*
   (a) $\operatorname{End} M$ — *полурегулярное кольцо*;
   (b) M — *конечно заменяемый модуль*;
   (c) $\operatorname{End} M$ — *чистое кольцо*;
(3) *если M — конечно порожденный дискретный модуль и R — полусовершенное кольцо, то*
   (a) $\operatorname{End} M$ — *полурегулярное кольцо*;
   (b) M — *конечно заменяемый модуль*;
   (c) $\operatorname{End} M$ — *чистое кольцо.*

Доказательство. (1) следует из теорем 3.49, 3.50 и 3.52, если в этих теоремах положить $\mathcal{Y}$ равным классу всех инъективных правых R-модулей.

Пункты (2) и (3) следуют из теорем 3.43, 3.45 и 3.47, если в этих теоремах положить $\mathcal{X}$ равным классу всех проективных правых R-модулей. □

Замечание 3.54. Изложение последних двух пунктов основано на неопубликованных результатах, полученых А. Н. Абызовым, П. А. Гиль Асенсио, Ч. К. Куинем и Р. Х. Тином.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абызов А. Н., Куинь Ч. К., Тай Д. Д.* Дуально автоморфизм-инвариантные модули над совершенными кольцами// Сиб. мат. ж., **58**, № 5. — 2017. — С. 959–971.
2. *Говоров В. Е.* Малоинъективные модули// Алгебра и логика, **2**, № 6. — 1963. — С. 21–49.
3. *Мишина А. П.* Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп// Вестн. МГУ. Сер. мат. мех., № 1. — С. 62–66.
4. *Туганбаев А. А.* Строение модулей, близких к инъективным// Сиб. мат. ж., **18**, № 4. — 1977. — С. 890–898.
5. *Туганбаев А. А.* Характеризации колец, использующие малоинъективные и малопроективные модули// Вестн. МГУ. Сер. мат. мех., № 3. — С. 48–51.
6. *Туганбаев А. А.* О самоинъективных кольцах// Изв. вузов. Мат., № 12. — С. 71–74.
7. *Туганбаев А. А.* Кольца, над которыми все циклические модули малоинъективны// Тр. семин. им. И. Г. Петровского, **6**. — 1981. — С. 257–262.
8. *Туганбаев А. А.* Целозамкнутые кольца// Мат. сб., **115 (157)**, № 4 (8). — 1981. — С. 544–559.
9. *Туганбаев А. А.* Малоинъективные кольца// Изв. вузов. Мат., № 9. — С. 50–53.
10. *Туганбаев А. А.* Малоинъективные кольца// Усп. мат. наук, **37**, № 5. — 1982. — С. 201–202.
11. *Туганбаев А. А.* Малоинъективные модули// Мат. заметки, **31**, № 3. — 1982. — С. 447–456.
12. *Туганбаев А. А.* Кольца с малоинъективными циклическими модулями// в сб.: Абелевы группы и модули. — Томск: ТГУ, 1986. — С. 151–158.
13. *Туганбаев А. А.* Кольца с малоинъективными фактор-кольцами// Изв. вузов. Мат., № 1. — С. 80–88.
14. *Туганбаев А. А.* Строение модулей над наследственными кольцами// Мат. заметки, **68**, № 5. — 2000. — С. 739–755.
15. *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.
16. *Туганбаев А. А.* Автоморфизмы подмодулей и их продолжение// Дискр. мат., **25**, № 1. — 2013. — С. 144–151.

17. *Туганбаев А. А.* Характеристические подмодули инъективных модулей// Дискр. мат., **25**, № 2. — 2013. — С. 85–90.
18. *Туганбаев А. А.* Продолжения автоморфизмов подмодулей// Фундам. прикл. мат., **18**, № 3. — 2013. — С. 179–198.
19. *Туганбаев А. А.* Автоморфизм-инвариантные модули// Фундам. прикл. мат., **18**, № 4. — 2013. — С. 129–135.
20. *Туганбаев А. А.* Характеристические подмодули инъективных модулей над строго первичными кольцами// Дискр. мат., **26**, № 3. — 2014. — С. 121–126.
21. *Туганбаев А. А.* Автоморфизм-продолжаемые модули// Дискр. мат., **27**, № 2. — 2015. — С. 106–111.
22. *Туганбаев А. А.* Автоморфизм-продолжаемые и эндоморфизм-продолжаемые модули// Фундам. прикл. мат., **21**, № 4. — 2016. — С. 175–246.
23. *Alahmadi A., Er N., Jain S. K.* Modules which are invariant under monomorphisms of their injective hulls// J. Austr. Math. Soc., **79**, № 3. — 2005. — P. 349–360.
24. *Birkenmeier G. F. Park J. K., Rizvi S. T.* Extensions of Rings and Modules. — New York: Birkhäuser, Springer, 2013.
25. *Camillo V. P., Khurana D., Lam T. Y., Nicholson W. K., Zhou Y.* Continuous modules are clean// J. Algebra, **304**, № 1. — 2006. — P. 94–111.
26. *Clark J., Lomp C., Vanaj N., Wisbauer R.* Lifting Modules: Supplements and Projectivity in Module Theory. — Basel: Birkhäuser, 2006.
27. *Dickson S. E., Fuller K. R.* Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope// Pac. J. Math., **31**, № 3. — 1969. — P. 655–658.
28. *Dinh H. Q.* A note on pseudo-injective modules// Commun. Algebra, **33**. — 2005. — P. 361–369.
29. *Dung N. V., Huynh D. V., Smith P. F., Wisbauer R.* Extending Modules/ Pitman Res. Notes Math, **313**. — Longman, 1994.
30. *Enochs E. E., Jenda O. M. G.* Relative Homological Algebra. — Berlin: Walter de Gruyter, 2011.
31. *Er N., Singh S., Srivastava A.* Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls// J. Algebra, **379**. — 2013. — P. 223–229.
32. *Facchini A.* Module Theory. Endomorphism Rings and Direct Sum Decompositions in Some Classes of Modules. — Basel: Birkhäuser, 1998.
33. *Goel V. K., Jain S. K.* π-Injective modules and rings whose cyclics are π-injective// Commun. Algebra, **6**. — 1978. — P. 59–72.
34. *Guil Asensio P. A., Kalebogaz B., Srivastava A. K.* The Schroeder–Bernstein problem for modules// J. Algebra, **498**. — 2018. — P. 153–164.
35. *Guil Asensio P. A., Keskin D. T., Kalebogaz B., Srivastava A. K.* Modules which are coinvariant under automorphisms of their projective covers// J. Algebra, **466**, № 15. — 2016. — P. 147–152.
36. *Guil Asensio P. A., Srivastava A. K.* Automorphism-invariant modules, noncommutative rings and their applications// Contemp. Math., **634**. — 2015. — P. 19–30.
37. *Guil Asensio P. A., Srivastava A. K.* Automorphism-invariant modules satisfy the exchange property// J. Algebra, **388**. — 2013. — P. 101–106.
38. *Guil Asensio P. A., Srivastava A. K., Quynh T. C.* Additive unit structure of endomorphism rings and invariance of modules// Bull. Math. Sci., **7**, № 2. — 2017. — P. 229–246.
39. *Guil Asensio P. A., Keskin Tütüncü D., Srivastava A. K.* Modules invariant under automorphisms of their covers and envelopes// Isr. J. Math., **206**, № 1. — 2015. — P. 457–482.
40. *Hannah J., Meara K. C. O.* Products of idempotents in regular rings, II// J. Algebra, **123**. — 1989. — P. 223–239.
41. *Jain S. K., Srivastava A. K., Tuganbaev A. A.* Cyclic modules and the structures of rings. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2012.
42. *Jain S. K., Singh S.* On pseudo-injective modules and self pseudo injective rings// J. Math. Sci., **2**. — 1967. — P. 23–31.
43. *Jain S. K., Singh S.* Quasi-injective and pseudo-injective modules// Can. Math. Bull., **18**, № 3. — 1975. — P. 359–365.
44. *Jeremy L.* Sur les modules et anneaux quasi-continus// C. R. Acad. Sci. Paris, **273**. — 1971. — P. 80–83.
45. *Jeremy L.* Modules et anneaux quasi-continus// Can. Math. Bull., **17**. — 1974. — P. 217–228.
46. *Johnson R. E., Wong E. T.* Quasi-injective modules and irreducible rings// J. London Math. Soc., **36**. — 1961. — P. 260–268.

47. *Kasch F.* Modules and Rings. — London: Academic Press, 1982.
48. *Koşan M. T., Quynh T. C., Srivastava A. K.* Rings with each right ideal automorphism-invariant// J. Pure Appl. Algebra, **220**, № 4. — 2016. — P. 1525–1537.
49. *Kuratomi K., Chang C.* Lifting modules over right perfect rings// Commun. Algebra, **35**, № 10. — 2007. — P. 3103–3109.
50. *Lee T. K., Zhou Y.* Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls// J. Algebra Appl., **12**, № 2. — 2013. — 1250159..
51. *Mohammed S. H., Müller B. J.* Continuous and Discrete Modules. — Cambridge Univ. Press, 1990.
52. *Mohammed S., Bouhy T.* Continuous modules// Arab. J. Sci. Eng., **2**. — 1977. — P. 107–122.
53. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings// Trans. Am. Math. Soc., **229**. — 1977. — P. 269–278.
54. *Nicholson W. K., Yousif M. F.* Quasi-Frobenius Rings//.
55. *von Neumann J.* Continuous geometry// Proc. Natl. Acad. Sci., **22**. — 1936. — P. 92–100.
56. *von Neumann J.* Examples of continuous geometries// Proc. Natl. Acad. Sci., **22**. — 1936. — P. 101–108.
57. *von Neumann J.* On regular rings// Proc. Natl. Acad. Sci., **22**. — 1936. — P. 707–713.
58. *Quynh T. C., Koşan M. T.* On automorphism-invariant modules// J. Algebra Appl., **14**, № 5. — 2015. — 1550074..
59. *Singh S., Srivastava A. K.* Rings of invariant module type and automorphism-invariant modules// Contemp. Math., **609**. — 2014. — P. 299–311.
60. *Singh S., Srivastava A. K.* Dual automorphism-invariant modules// J. Algebra, **371**. — 2012. — P. 262–275.
61. *Takeuchi T.* On direct modules// Hokkaido Math. J., **1**. — 1972. — P. 168–177.
62. *Thuyet L. V., Dan P., Quynh T. C.* Modules which are invariant under idempotents of their envelopes// Colloq. Math., **143**, № 2. — 2016. — P. 237–250.
63. *Tuganbaev A. A.* Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 1998.
64. *Tuganbaev A. A.* Rings over which all cyclic modules are completely integrally closed// Discrete Math. Appl., **23**, № 3. — 2011. — P. 477–497.
65. *Tuganbaev A. A.* Modules over strongly prime rings// J. Algebra Appl., **14**, № 5. — 2015. — 1550076.
66. *Tuganbaev A. A.* Automorphism-invariant semi-Artinian modules// J. Algebra Appl., **16**, № 1. — 2017. — 1750029.
67. *Tuganbaev A. A.* Automorphism-invariant non-singular rings and modules// J. Algebra, **485**. — 2017. — P. 247–253.
68. *Utumi Y.* On continuous regular rings and semisimple self-injective rings// Can. J. Math., **12**. — 1960. — P. 597–605.
69. *Utumi Y.* On continuous regular rings// Can. Math. Bull., **4**. — 1961. — P. 63–69.
70. *Utumi Y.* On continuous rings and self-injective rings// Trans. Am. Math. Soc., **118**. — 1965. — P. 158–173.
71. *Utumi Y.* On the continuity and self injectivity of a complete regular ring// Can. J. Math., **18**. — 1966. — P. 404–412.
72. *Wisbauer R.* Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.

Абызов Адель Наилевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: aabyzov@kpfu.ru

Куинь Чюонг Конг
Данангский университет, Вьетнам
E-mail: tcquynh@dce.udn.vn

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: tuganbaev@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 159 (2019). С. 46–67

УДК 512.541

ВОКРУГ ТЕОРЕМЫ БЭРА—КАПЛАНСКОГО

© 2019 г. П. А. КРЫЛОВ, А. А. ТУГАНБАЕВ, А. В. ЦАРЕВ

Аннотация. На примере модулей и ряда известных абелевых групп демонстрируется метод Капланского доказательства теорем изоморфизма для колец эндоморфизмов.

Ключевые слова: абелева группа, кольцо эндоморфизмов, теорема изоморфизма для колец эндоморфизмов, теорема Бэра—Капланского, метод Капланского.

AROUND BAER–KAPLANSKY THEOREM

© 2019 P. A. KRYLOV, A. A. TUGANBAEV, A. V. TSAREV

Abstract. Using the example of modules and a number of familiar Abelian groups, we demonstrate the Kaplansky method of proving isomorphism theorems for endomorphism rings.

Keywords and phrases: Abelian group, endomorphism ring, isomorphism theorem for endomorphism rings, Baer–Kaplansky theorem, Kaplansky method.

AMS Subject Classification: 16D10, 16D70, 20K30

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 46
1. Некоторые определения и обозначения в теории абелевых групп 47
2. Первичные свойства эндоморфизмов абелевых групп 50
3. Конечная топология 52
4. Случай векторных пространств 54
5. Теорема Бэра—Капланского 56
6. Топологические изоморфизмы колец эндоморфизмов 58
7. Определяемость p-группы радикалом кольца эндоморфизмов 61
Список литературы 66

Введение

Одной из центральных проблем о кольцах эндоморфизмов является вопрос о том, насколько кольцо эндоморфизмов определяет абелеву группу или модуль. В самой простой формулировке результаты, положительно решающие эту проблему (их обычно называют *теоремами изоморфизма для колец эндоморфизмов*), имеют следующий вид: если $\operatorname{End} A \cong \operatorname{End} B$, то $A \cong B$. Более сильная формулировка теоремы об изоморфизме выглядит так: данный кольцевой изоморфизм $\psi : \operatorname{End} A \to \operatorname{End} B$ индуцируется некоторым групповым или модульным изоморфизмом

Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10013).

$\varphi : A \to B$, т.е. $\psi(h) = \varphi h \varphi^{-1}$, $h \in \operatorname{End} A$. (В случае модулей, как правило, возникают полулинейные изоморфизмы модулей.) Теоремы подобного рода связаны со следующей задачей: для каких модулей все автоморфизмы их колец эндоморфизмов являются внутренними автоморфизмами?

На кольце эндоморфизмов можно задать конечную топологию и рассматривать непрерывные изоморфизмы колец эндоморфизмов. Они несут больше информации об исходных модулях. В таком случае говорят о *теоремах топологического изоморфизма.*

Данная статья носит обзорный характер. Ее цель — дать подробное изложение нескольких характерных теорем изоморфизма для колец эндоморфизмов модулей и абелевых групп. Что примечательно, для доказательства этих теорем применяется та или иная модификация метода Капланского.

Разделы 1 и 2 содержат некоторые необходимые сведения об абелевых группах и их кольцах эндоморфизмов. Здесь же принимаются соглашения об обозначениях и терминах.

В разделе 3 рассматривается конечная топология на кольце эндоморфизмов. Оставшиеся разделы 4–7 посвящены теоремам изоморфизма для колец эндоморфизмов, причем в разделе 4 рассматривается классический случай векторных пространств над телами и полями. Здесь возникает наиболее прозрачная ситуация для данной проблемы. В разделе 5 доказана теорема Бэра—Капланского для p-групп. Она может служить эталоном для теорем подобного рода. В разделе 6 доказана одна теорема топологического изоморфизма. В последнем разделе показано, что для p-групп с неограниченными базисными подгруппами в теореме Бэра—Капланского можно ограничиться изоморфизмом между радикалами Джекобсона колец эндоморфизмов.

1. Некоторые определения и обозначения в теории абелевых групп

Под словом «группа» будем понимать аддитивно записанную абелеву группу, за исключением случая группы автоморфизмов. Чаще всего обозначаем группу буквой A или G.

В теории абелевых групп исключительно важная роль принадлежит прямым суммам и прямым произведениям. Прямую сумму групп $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначаем $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ или $\bigoplus_{i=1}^{n} A_i$. Символ $\bigoplus_{i \in I} A_i$ обозначает прямую сумму множества групп A_i, $i \in I$.

Порядком $o(a)$ элемента a группы A называется наименьшее число $n \in \mathbb{N}$, для которого $na = 0$. Если такого n не существует, то полагают $o(a) = \infty$ и говорят, что элемент a *имеет бесконечный порядок.*

Каждая абелева группа относится к одному из следующих трех классов групп: периодические группы, группы без кручения и смешанные группы. В периодической группе всякий элемент имеет конечный порядок, в группе без кручения, напротив, все ненулевые элементы имеют бесконечный порядок. Смешанная группа содержит как ненулевые элементы конечного порядка, так и элементы бесконечного порядка. В смешанной группе A подгруппа $t(A)$, состоящая из всех элементов конечного порядка, называется *периодической частью* или *периодической подгруппой* группы A.

Примарной группой или *p-группой* называется группа, порядки элементов которой являются степенями фиксированного простого числа p. Периодическая группа A равна прямой сумме p-групп $t_p(A)$ для различных p, называемых *p-компонентами* группы A. Если A — смешанная группа, то ее p-компонентой называется p-компонента ее периодической части $t(A)$.

Существует несколько известных классов групп, являющихся прямыми суммами циклических групп. Группа называется *ограниченной*, если порядки всех ее элементов ограничены некоторым натуральным числом. Ограниченная группа есть прямая сумма циклических p-групп. Если всякий элемент периодической группы A имеет порядок, не делящийся на квадрат, то A называется *элементарной* группой. Элементарная группа является прямой суммой циклических групп простых порядков.

Подгруппа H группы A называется *вполне инвариантной*, если $\alpha H \subseteq H$ для каждого эндоморфизма α группы A. Периодическая часть группы, ее p-компоненты суть вполне инвариантные подгруппы. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$nA = \{na \mid a \in A\}, \quad A[n] = \{a \in A \mid na = 0\}.$$

Подгруппы nA и $A[n]$ вполне инвариантны в A.

Пусть p — некоторое простое число, A — группа и $a \in A$. Наибольшее неотрицательное целое число k, для которого уравнение $p^k x = a$ имеет решение в A, называется *p-высотой* $h_p^A(a)$ элемента a в группе A. Если уравнение $p^k x = a$ разрешимо при любом натуральном k, то a называется элементом бесконечной p-высоты, $h_p^A(a) = \infty$. Если ясно, о каких A и p идет речь, то пишем $h_p(a)$ и $h(a)$ и называем $h(a)$ высотой элемента a.

Говорят, что подгруппа B группы A *чиста* (в A), если уравнение $nx = b \in B$, имеющее решение в группе A, имеет решение и в подгруппе B. Подгруппа B будет чистой в точности тогда, когда $B \cap nA = nB$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Приведем некоторые факты о свободных и делимых группах. Свободная группа является прямой суммой некоторого числа копий группы $\mathbb{Z}$. Делимая группа D есть прямая сумма квазициклических групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для различных p и копий группы $\mathbb{Q}$,

$$D = \bigoplus_{p} \bigoplus_{\mathfrak{m}_p} \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{m}_0} \mathbb{Q}.$$

Кардинальные числа $\mathfrak{m}_0$ и $\mathfrak{m}_p$ по всем p составляют полную и независимую систему инвариантов делимой группы D. Группа называется редуцированной, если она не имеет делимых подгрупп, отличных от нуля. Любая группа представима в виде $A = D \oplus V$, где D — делимая, а V — редуцированная группы. Подгруппа D определяется однозначно; ее называют *делимой частью* группы A. Подгруппа V называется *редуцированной частью* группы A. Она определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Всякую группу A можно вложить в качестве подгруппы в делимую группу E, причем в E нет собственных делимых подгрупп, содержащих A. Такая группа E называется *делимой оболочкой* группы A. Любые две делимые оболочки E_1 и E_2 изоморфны над A, т.е. существует изоморфизм $E_1 \to E_2$, оставляющий элементы из A на месте.

Подгруппа B p-группы A называется *базисной*, если выполнены следующие три условия:

1) B — прямая сумма циклических групп;
2) B есть чистая подгруппа группы A;
3) фактор-группа A/B является делимой группой.

Всякая p-группа содержит базисные подгруппы. Любые две базисные подгруппы изоморфны между собой.

Пусть B — базисная подгруппа группы A. Запишем

$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus \ldots, \quad \text{где} \quad B_n = \bigoplus_{\mathfrak{m}_n} \mathbb{Z}_{p^n}.$$

Имеют место прямые разложения

$$A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n \quad \text{и} \quad A_n = B_{n+1} \oplus A_{n+1}$$

для каждого n. При этом группа A_n не содержит циклических прямых слагаемых порядков $\leqslant p^n$.

Для p-групп большое значение имеют следующие классические результаты Куликова.

Теорема 1.1 (см. [7, теорема 27.5, следствие 27.2]). *Всякая ограниченная чистая подгруппа является прямым слагаемым. Каждый элемент порядка p и конечной высоты некоторой p-группы можно вложить в ее циклическое прямое слагаемое.*

Отсюда можно вывести, что если элемент x p-группы A имеет конечную высоту, то существует такое разложение $A = \langle y \rangle \oplus Y$, что элемент x имеет ненулевую компоненту в $\langle y \rangle$.

В теории абелевых групп часто используются $\mathbb{Z}$-адическая и p-адическая топологии. Базис окрестностей нуля группы A в $\mathbb{Z}$-адической топологии образуют подгруппы nA, $n \in \mathbb{N}$. В p-адической топологии в качестве базиса берут подгруппы $p^k A$, $k \geqslant 0$. Строение полных в этих топологиях групп известно (см. [7, гл. 7], [3, секция 11]). Они обладают полной и независимой системой инвариантов, состоящей из кардинальных чисел. Класс полных в $\mathbb{Z}$-адической топологии групп совпадает с классом редуцированных алгебраически компактных групп.

Рангом $r(A)$ группы без кручения A называется мощность некоторой максимальной линейно независимой системы элементов группы A, а *p-рангом* $r_p(A)$ группы A называется размерность векторного пространства A/pA над полем $\mathbb{Z}_p$:

$$r_p(A) = \dim_{\mathbb{Z}_p}(A/pA).$$

Справедливо неравенство

$$r_p(A) \leqslant r(A).$$

Рангом без кручения смешанной группы A называют ранг фактор-группы $A/t(A)$. Обычно вместо «ранг без кручения» говорят просто «ранг». Группа без кручения имеет ранг 1 в точности тогда, когда она изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathbb{Q}$.

Тензорное произведение групп без кручения — снова группа без кручения. Для группы без кручения A тензорное произведение $A \otimes \mathbb{Q}$ есть $\mathbb{Q}$-пространство, причем

$$r(A) = \dim_{\mathbb{Q}}(A \otimes \mathbb{Q}).$$

Имеется вложение групп $A \to A \otimes \mathbb{Q}$, $a \mapsto a \otimes 1$, $a \in A$. Группа $A \otimes \mathbb{Q}$ является делимой оболочкой группы A.

Для групп без кручения исключительно полезны понятия, связанные с делимостью элементов на простые числа. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность всех простых чисел, упорядоченных по возрастанию. Последовательность p-высот

$$\chi(a) = \Big(h_{p_1}(a), h_{p_2}(a), \ldots, h_{p_n}(a), \ldots\Big)$$

называется *характеристикой элемента* a группы без кручения A. Пишут $\chi_A(a)$, если нужно указать группу, в которой вычисляются p-высоты и характеристики.

Под *характеристикой* $(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$ подразумеваем любую упорядоченную последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞. Характеристики можно сравнивать. Именно, считаем

$$\big(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots\big) \leqslant \big(l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots\big),$$

если $k_n \leqslant l_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это отношение $\leqslant$ превращает множество всех характеристик в полную решетку.

Введем теперь отношение эквивалентности на множестве всех характеристик, что приведет к основному понятию для групп без кручения — понятию типа. Две характеристики $(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$ и $(l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots)$ считаем эквивалентными, если $k_n \neq l_n$ лишь для конечного числа номеров n, причем для таких n символы k_n и l_n конечны.

Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом*. Если $\chi(a) \in \mathbf{t}$ для некоторого типа $\mathbf{t}$, то говорят, что элемент a имеет тип $\mathbf{t}$ и пишут $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}$ или $\mathbf{t}_A(a) = \mathbf{t}$. Если $\chi(a) = (k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$, то пишут

$$\mathbf{t}(a) = \big[(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)\big] = \big[(k_i)\big],$$

т.е. тип представляется характеристикой, принадлежащей этому типу. Порядок на множестве характеристик индуцирует порядок на множестве типов.

Группа без кручения A, в которой все ненулевые элементы имеют один и тот же тип $\mathbf{t}$, называется *однородной типа* $\mathbf{t}$. При этом пишут $\mathbf{t}(A) = \mathbf{t}$. Группа ранга 1 является однородной. По одной из теорем Бэра группы без кручения A и B ранга 1 изоморфны в том и только в том случае, когда $\mathbf{t}(A) = \mathbf{t}(B)$.

Группа без кручения A называется *вполне разложимой*, если она является прямой суммой групп ранга 1. Любые два разложения вполне разложимой группы в прямую сумму групп ранга 1 изоморфны. Пусть $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ — вполне разложимая группа без кручения, $r(A_i) = 1$, $i \in I$. Для всякого типа $\mathbf{t}$ обозначим через $A_{\mathbf{t}}$ прямую сумму всех групп A_i типа $\mathbf{t}$ (если таких нет, то $A_{\mathbf{t}} = 0$). Ранги $r(A_{\mathbf{t}})$, где $\mathbf{t}$ пробегает множество всех типов, образуют полную и независимую систему инвариантов группы A. Введем обозначение $\Omega(A) = \{\mathbf{t}(A_i) \mid i \in I\}$. Разложение

$$A = \bigoplus_{\mathbf{t}\in\Omega(A)} A_{\mathbf{t}}$$

называется *каноническим разложением* группы A.

Более широкий класс по сравнению с вполне разложимыми группами составляют сепарабельные группы. Группа без кручения A называется *сепарабельной*, если каждое конечное подмножество элементов из A содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы A.

Абелевы группы и модули над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ можно не различать, это суть одни и те же объекты. Теорию абелевых групп можно считать ветвью теории модулей, в которой используется специфика кольца $\mathbb{Z}$. Все понятия и конструкции теории модулей применимы к абелевым группам.

В теории абелевых групп встречаются и различные другие кольца, кроме кольца $\mathbb{Z}$. Взгляд на абелевы группы как на модули над какими-то кольцами иногда бывает полезным. Так, делимые группы без кручения — это в точности векторные пространства над полем $\mathbb{Q}$. Модули над кольцом классов вычетов $\mathbb{Z}_{p^n}$ — это такие ограниченные p-группы, порядки элементов которых не превосходят p^n.

Важнейшим с точки зрения теории абелевых групп кольцом является кольцо целых p-адических чисел $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Известно, что p-группы и примарные $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модули совпадают. Полные в p-адической топологии группы естественным образом являются $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модулями. Кольцо $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ является примером полной области дискретного нормирования. Теории абелевых групп и модулей над областями дискретного нормирования — родственные теории. Последняя довольно подробно изложена в книге [3].

2. Первичные свойства эндоморфизмов абелевых групп

Если A и B — абелевы группы, то $\operatorname{Hom}(A, B)$ — группа всех гомоморфизмов из A в B, $\operatorname{End} A$ (иногда $\operatorname{End}(A)$) — кольцо эндоморфизмов группы A.

Приведем некоторые элементарные свойства колец эндоморфизмов. Все они справедливы для колец эндоморфизмов произвольных модулей.

Пусть $A = B \oplus C$ — некоторое прямое разложение группы A. *Проекцией* группы A на прямое слагаемое B с ядром C называется гомоморфизм $\pi : A \to B$, определяемый следующим образом. Если $a \in A$ и $a = b+c$, где $b \in B$ и $c \in C$, то $\pi(a) = b$. Обозначим через $i : B \to A$ вложение группы B в группу A. Тогда $i\pi \in \operatorname{End} A$ и $(i\pi)^2 = i\pi$, т.е. $i\pi$ — идемпотент кольца $\operatorname{End} A$. Он называется *идемпотентным эндоморфизмом* группы A. Введем обозначение $\varepsilon = i\pi$. Будем отождествлять ε с π. Таким образом, считаем проекцию π эндоморфизмом группы A, действующим на B тождественно и аннулирующим C. Понятно, что $1 - \varepsilon$ — тоже идемпотент, ортогональный к ε. Кроме того, $B = \varepsilon A$, $C = (1 - \varepsilon)A = \ker \varepsilon$; таким образом, $A = \varepsilon A \oplus (1 - \varepsilon)A$. Полученное разложение справедливо для любого идемпотента ε кольца $\operatorname{End} A$.

Более общим образом, если $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ — некоторое прямое разложение группы A, то, обозначив через ε_i проекцию $A \to A_i$ с ядром $\bigoplus\limits_{j\neq i} A_j$, получим $A_i = \varepsilon_i A$ $((i = 1, 2, \ldots, n)$, а $\{\varepsilon_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ — полная ортогональная система идемпотентных эндоморфизмов группы A.

Предложение 2.1. *Соответствие*

$$A = \varepsilon_1 A \oplus \ldots \oplus \varepsilon_n A \mapsto \operatorname{End} A = (\operatorname{End} A)\varepsilon_1 \oplus \ldots \oplus (\operatorname{End} A)\varepsilon_n,$$

где $\{\varepsilon_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ *— полная ортогональная система идемпотентов кольца* $\operatorname{End} A$*, между конечными прямыми разложениями группы* A *и разложениями кольца* $\operatorname{End} A$ *в прямые суммы левых идеалов является взаимно однозначным.*

Доказательство. Мы уже показали, что для данного прямого разложения $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ существует такая полная система $\{\varepsilon_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ ортогональных идемпотентов кольца $\operatorname{End} A$, что $A_i = \varepsilon_i A$ при всех i. Эта система дает разложение $\operatorname{End} A = (\operatorname{End} A)\varepsilon_1 \oplus (\operatorname{End} A)\varepsilon_2 \oplus \ldots \oplus (\operatorname{End} A)\varepsilon_n$ кольца $\operatorname{End} A$ в прямую сумму левых идеалов.

Обратно, если $\operatorname{End} A = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$, где L_i — левые идеалы кольца $\operatorname{End} A$, то, записав $1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$, $\varepsilon_i \in L_i$, получим полную ортогональную систему $\{\varepsilon_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ идемпотентов кольца $\operatorname{End} A$. Нетрудно убедиться, что имеет место разложение $A = \varepsilon_1 A \oplus \varepsilon_2 A \oplus \ldots \oplus \varepsilon_n A$. Построенное соответствие является взаимно однозначным. □

Рассмотрим несколько стандартных соотношений между группой и ее кольцом эндоморфизмов, связанных с идемпотентными эндоморфизмами. Из предложения 2.1 непосредственно вытекают следующие свойства.

(a) *Если* ε *— идемпотент кольца* $\operatorname{End} A$*, то* εA *будет неразложимым прямым слагаемым группы* A *тогда и только тогда, когда* ε *— примитивный идемпотент.*

(b) *Пусть* ε, ω *— идемпотенты кольца* $\operatorname{End} A$*. Существуют канонические изоморфизмы групп* $\operatorname{Hom}(\omega A, \varepsilon A) \cong \varepsilon(\operatorname{End} A)\omega$ *и колец* $\operatorname{End}(\varepsilon A) \cong \varepsilon(\operatorname{End} A)\varepsilon$*.*

Действительно, пусть $\varphi : \omega A \to \varepsilon A$ — некоторый гомоморфизм. Продолжим φ до эндоморфизма $\overline{\varphi}$ группы A, считая, что $\overline{\varphi}$ аннулирует дополнительное слагаемое $(1 - \omega)A$ к ωA. Искомый изоморфизм $f : \operatorname{Hom}(\omega A, \varepsilon A) \to \varepsilon(\operatorname{End} A)\omega$ получается сопоставлением $\varphi \overset{f}{\longmapsto} \varepsilon\overline{\varphi}\omega$. В самом деле, если $\varepsilon\psi\omega \in \varepsilon(\operatorname{End} A)\omega$ для некоторого $\psi \in \operatorname{End} A$, то $\varepsilon\psi\omega|_{\omega A}$ есть гомоморфизм $\omega A \to \varepsilon A$ и $f : \varepsilon\psi\omega|_{\omega A} \mapsto \varepsilon\psi\omega$. При $\varepsilon = \omega$ имеем изоморфизм $\operatorname{End}(\varepsilon A) \cong \varepsilon(\operatorname{End} A)\varepsilon$, причем это кольцевой изоморфизм.

Пусть $A = B \oplus C$ и $\varepsilon : A \to B$ — проекция с ядром C. Можно считать $\operatorname{End} B$ подкольцом кольца $\operatorname{End} A$, если отождествить $\operatorname{End} B$ с $\varepsilon(\operatorname{End} A)\varepsilon$ при помощи построенного в свойстве (b) изоморфизма.

Рассмотрим два первичных факта о соотношении между изоморфизмами групп и изоморфизмами их колец эндоморфизмов.

(c) *Если группы* A *и* C *изоморфны, то их кольца эндоморфизмов изоморфны. Более точно, всякий групповой изоморфизм* $\varphi : A \to C$ *индуцирует кольцевой изоморфизм* $\psi : \operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$*, действующий по закону* $\psi : \eta \mapsto \varphi\eta\varphi^{-1}$, $\eta \in \operatorname{End} A$*.*

Для $\eta_1, \eta_2 \in \operatorname{End} A$ имеем равенства

$$\psi(\eta_1 + \eta_2) = \psi(\eta_1) + \psi(\eta_2), \quad \psi(\eta_1\eta_2) = \psi(\eta_1)\psi(\eta_2), \quad \psi(id_A) = id_C.$$

Следовательно, ψ — гомоморфизм колец. Далее, если $0 \neq \eta \in \operatorname{End} A$, то ясно, что $\varphi\eta\varphi^{-1} \neq 0$, т.е. $\ker\psi = 0$. Пусть теперь $\xi \in \operatorname{End} C$; тогда $\psi(\varphi^{-1}\xi\varphi) = \xi$, а значит, ψ — кольцевой изоморфизм.

(d) *Пусть даны группы* $A = A_1 \oplus A_2$ *и* C*. Если* $\psi : \operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$ *— изоморфизм колец, то группа* C *обладает разложением* $C = C_1 \oplus C_2$*, причем* ψ *индуцирует изоморфизмы* $\operatorname{End} A_i \to \operatorname{End} C_i$*,* $i = 1, 2$*.*

Обозначим через ε проекцию $A \to A_1$ с ядром A_2. Тогда $\omega = \psi(\varepsilon)$ — идемпотент кольца $\operatorname{End} C$. Получаем равенство $C = C_1 \oplus C_2$, где $C_1 = \omega C$ и $C_2 = \ker\omega$. Изоморфизм ψ индуцирует изоморфизм колец $\varepsilon(\operatorname{End} A)\varepsilon \to \omega(\operatorname{End} C)\omega$ и, значит, изоморфизм колец $\operatorname{End} A_1 \to \operatorname{End} C_1$ (см. свойство (b)). Второй изоморфизм $\operatorname{End} A_2 \to \operatorname{End} C_2$ устанавливается аналогично.

В ряде случаев кольцо эндоморфизмов можно легко вычислить. Например, $\operatorname{End}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, $\operatorname{End}\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_n$, $\operatorname{End}\mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Q}_p$, где $\mathbb{Q}_p = \{s/t \in \mathbb{Q} \mid (t, p) = 1\}$, $\operatorname{End}\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$, $\operatorname{End}\mathbb{Z}_{p^\infty} \cong \operatorname{End}\widehat{\mathbb{Z}}_p \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Рассматривая прямые суммы групп, можно получать примеры колец эндоморфизмов в матричной форме. Прежде рассмотрим соответствующую конструкцию.

Пусть дана прямая сумма групп $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$. Составим квадратную матрицу

$$(\alpha_{ji}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

с элементами $\alpha_{ji} \in \operatorname{Hom}(A_i, A_j)$. Для таких матриц можно определить обычные матричные операции сложения и умножения. Нетрудно убедиться, что сложение и умножение матриц всегда выполнимы и приводят к матрицам этого же вида. В результате получаем кольцо матриц указанного вида (такие кольца называют кольцами формальных или обобщенных матриц, см. [4–6]). Стандартный изоморфизм кольца операторов конечномерного векторного пространства кольцу матриц в случае абелевых групп (и модулей) принимает следующий вид.

Предложение 2.2. *Кольцо эндоморфизмов группы* $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$ *изоморфно кольцу всех матриц* (α_{ji}) *порядка* n, *где* $\alpha_{ji} \in \operatorname{Hom}(A_i, A_j)$.

Теперь можно продолжить список колец эндоморфизмов. Именно, справедливы изоморфизмы:

$$\operatorname{End}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{End}(\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_n & \mathbb{Z}_n \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{End}(\mathbb{Z}_{p^n} \oplus \mathbb{Z}_{p^m}) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^m} \end{pmatrix} \ (n < m), \quad \operatorname{End}(\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Q}) \cong \begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{Z}}_p & \widehat{\mathbb{Q}}_p \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix},$$

где $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ — поле p-адических чисел.

Область, изучающую кольца эндоморфизмов абелевых групп, можно отнести и к теории абелевых групп и к теории колец эндоморфизмов произвольных модулей. Книга [2] целиком посвящена различным аспектам теории колец эндоморфизмов абелевых групп.

3. Конечная топология

На кольце эндоморфизмов любого модуля можно задать одну весьма полезную топологию. Это так называемая конечная топология, являющаяся примером линейной топологии. *Линейная топология* на модуле (кольце) — это такая топология, при которой имеется базис окрестностей нуля, состоящий из подмодулей (левых идеалов), причем соответствующие смежные классы образуют базис открытых множеств. Примерами линейных топологий также являются $\mathbb{Z}$-адическая и p-адическая топологии на абелевых группах.

Пусть M — правый модуль над некоторым кольцом, $\operatorname{End} M$ — его кольцо эндоморфизмов. *Конечная топология* на кольце $\operatorname{End} M$ задается с помощью следующего подбазиса окрестностей нуля:

$$U_x = \{\alpha \in \operatorname{End} M \mid \alpha(x) = 0\},$$

где x пробегает все элементы модуля M. Понятно, что U_x — левые идеалы кольца $\operatorname{End} M$. Базис окрестностей нуля составляют идеалы

$$U_X = \{\alpha \in \operatorname{End} M \mid \alpha X = 0\},$$

где X пробегает все конечные подмножества модуля M. Поскольку верно равенство $U_X = \bigcap\limits_{x \in X} U_x$, то базис окрестностей элемента $\alpha \in \operatorname{End} M$ составляют смежные классы $\alpha + U_X$ для всех конечных подмножеств X модуля M. Конечная топология всегда хаусдорфова. Сформулируем основную теорему о конечной топологии.

Теорема 3.1. *Кольцо эндоморфизмов любого модуля M является полным топологическим кольцом в конечной топологии.*

Доказательство. Поскольку U_x — левые идеалы, непрерывность сложения и вычитания в кольце $\operatorname{End} M$ очевидна. Проверим непрерывность умножения. Возьмем произвольные эндоморфизмы $\alpha, \beta \in \operatorname{End} M$, и пусть $\alpha\beta + U_x$ — окрестность элемента $\alpha\beta$. Так как $U_{\beta(x)}\beta \subseteq U_x$, то справедливо включение

$$(\alpha + U_{\beta(x)})(\beta + U_x) \subseteq \alpha\beta + U_x,$$

что дает требуемую непрерывность.

Итак, $\operatorname{End} M$ — топологическое кольцо. Покажем его полноту. Предположим, что $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ — последовательность Коши в кольце $\operatorname{End} M$. Согласно определениям конечной топологии и последовательности Коши, множество индексов I упорядочено с помощью порядка, двойственного к порядку на конечных подмножествах модуля M. Тогда для данного $x \in M$ существует такой $i_0 \in I$, что $\alpha_i - \alpha_j \in U_x$ при всех $i, j > i_0$. Это означает, что $\alpha_i(x) = \alpha_j(x)$ при достаточно больших индексах i и j. Определим эндоморфизм α модуля M, взяв в качестве $\alpha(x)$ общее значение всех таких $\alpha_i(x)$. Тогда $\alpha - \alpha_i \in U_x$ при $i > i_0$. Таким образом, α является пределом данной последовательности Коши $\{\alpha_i\}_{i\in I}$. Получили, что всякая последовательность Коши сходится в кольце $\operatorname{End} M$, что означает его полноту. □

При применении конечной топологии наиболее важны полнота кольца эндоморфизмов и непрерывные изоморфизмы между кольцами эндоморфизмов.

Иногда конечную топологию можно определить в терминах самого кольца эндоморфизмов.

Предложение 3.2. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Пусть V — векторное пространство над некоторым телом. Конечная топология кольца операторов $\operatorname{End} V$ пространства V будет определена, если в качестве подбазиса окрестностей нуля взять совокупность левых аннуляторов примитивных идемпотентов.*
2. *Пусть G — редуцированная p-группа. Конечную топологию кольца $\operatorname{End} G$ можно задать, взяв в качестве подбазиса окрестностей нуля совокупность левых аннуляторов элементов $\alpha\varepsilon$, где $\alpha \in \operatorname{End} G$ и ε — примитивный идемпотент. Если группа G не имеет элементов бесконечной высоты, то достаточно взять лишь левые аннуляторы примитивных идемпотентов.*
3. *Если G — сепарабельная группа без кручения, то конечную топологию кольца $\operatorname{End} G$ можно аналогично задать, взяв в качестве подбазиса окрестностей нуля совокупность левых аннуляторов примитивных идемпотентов.*

Доказательство. 1. Пусть x — произвольный вектор пространства V, X — подпространство, порожденное вектором x, и $\varepsilon : V \to X$ — проекция. Равенство $U_x = (\operatorname{End} V)(1 - \varepsilon)$ означает, что U_x — левый аннулятор примитивного идемпотента ε.

2. Для каждого элемента $x \in G$ существует такое циклическое прямое слагаемое $\langle y\rangle$ группы G, что $o(x) \leqslant o(y)$. Следовательно, существует $\alpha \in \operatorname{End} G$, переводящий y в x. Пусть $\varepsilon : G \to \langle y\rangle$ — проекция. Тогда U_x — это в точности левый аннулятор элемента $\alpha\varepsilon$, причем ε — примитивный идемпотент. Если группа G не имеет элементов бесконечной высоты, то подбазисом окрестностей нуля для конечной топологии является совокупность левых идеалов U_x, где элемент x пробегает только такие элементы, что $\langle x\rangle$ — прямое слагаемое группы G. Если $\varepsilon : G \to \langle x\rangle$ — проекция, то, как и в п. 1, $U_x = (\operatorname{End} V)(1 - \varepsilon)$.

3. Как и в п. 2, подбазис окрестностей нуля может быть задан как совокупность левых идеалов U_x, где x пробегает только такие элементы, что $\langle x\rangle_*$ — прямое слагаемое группы G (где $\langle x\rangle_*$ — чистая подгруппа, порожденная элементом x). □

4. Случай векторных пространств

Изоморфные группы, конечно, имеют изоморфные кольца эндоморфизмов. Обратная задача, в общем случае, намного более трудна. В самом общем виде ее можно сформулировать следующим образом: как связаны две группы, если их кольца эндоморфизмов изоморфны? Будут ли, например, эти группы изоморфны? Естественную формулировку этой проблемы подсказывает свойство (c) из раздела 2. Будет ли данный кольцевой изоморфизм $\psi : \operatorname{End} A \to \operatorname{End} B$ индуцироваться некоторым групповым изоморфизмов $\varphi : A \to B$, т.е. верна ли формула $\psi(\eta) = \varphi\eta\varphi^{-1}$ для всех $\eta \in \operatorname{End} A$?

При переходе к модулям возникают новые варианты формулировки указанной проблемы. Так, можно рассматривать модули над разными кольцами. В этой ситуации используются полулинейные изоморфизмы модулей. Пусть R и S — некоторые кольца, A — правый R-модуль, а B — правый S-модуль. Аддитивный изоморфизм $\varphi : A \to B$ называется *полулинейным изоморфизмом* модулей A и B, если имеется такой кольцевой изоморфизм $\tau : R \to S$, что $\varphi(ar) = \varphi(a)\tau(r)$ для всех $a \in A$ и $r \in R$. При этом говорят, что изоморфизм колец (или алгебр) эндоморфизмов $\psi : \operatorname{End}_R A \to \operatorname{End}_S B$ индуцируется полулинейным изоморфизмом $\varphi : A \to B$, если $\psi(\eta) = \varphi\eta\varphi^{-1}$, $\eta \in \operatorname{End}_R A$.

Этот и следующие два раздела непосредственно связаны с проблемой определяемости группы (модуля) ее кольцом эндоморфизмов. Прежде всего мы обратимся к случаю векторных пространств и их колец операторов. В силу простого (с точки зрения теории модулей) строения векторных пространств ряд идей и методов, которые мы будем далее применять, предстают здесь в довольно простом и непосредственном виде.

Будем рассматривать правые векторные пространства над телами.

Теорема 4.1 (Бэр [9]). *Пусть V и W — векторные пространства над телами D и F соответственно. Тогда всякий кольцевой изоморфизм между кольцами операторов $\operatorname{End}_D V$ и $\operatorname{End}_F W$ индуцируется некоторым полулинейным изоморфизмом между V и W.*

Доказательство. Пусть $\psi : \operatorname{End}_D V \to \operatorname{End}_F W$ — некоторый кольцевой изоморфизм. Далее для удобства будем писать α^* вместо $\psi(\alpha)$, где $\alpha \in \operatorname{End}_D V$. Зафиксируем ненулевой вектор $a \in V$. Пусть $\varepsilon : V \to aD$ — проекция, где aD — одномерное подпространство, порожденное вектором a. Тогда $aD = \varepsilon V$. Так как ε — идемпотент кольца $\operatorname{End}_D V$, то ε^* — идемпотент кольца $\operatorname{End}_F W$. Следовательно, $\varepsilon^* W$ — одномерное прямое слагаемое пространства W. Пусть b — некоторый ненулевой вектор из $\varepsilon^* W$. Тогда $bF = \varepsilon^* W$. Согласно свойству (b) из раздела 2 отождествляем кольца $\operatorname{End}_D(aD)$ и $\varepsilon(\operatorname{End}_D V)\varepsilon$, а также $\operatorname{End}_F(bF)$ и $\varepsilon^*(\operatorname{End}_F W)\varepsilon^*$. Следовательно, ψ индуцирует изоморфизм колец $\operatorname{End}_D(aD) \to \operatorname{End}_F(bF)$.

Теперь заметим следующее. Для фиксированного элемента $d \in D$ существует единственный оператор $\sigma_d \in \operatorname{End}_D(aD)$, действующий по правилу $\sigma_d(ad') = add'$, где $d' \in D$. В частности, $\sigma_d(a) = ad$. Соответствие $d \mapsto \sigma_d$ задает кольцевой изоморфизм $D \to \operatorname{End}_D(aD)$. Существует аналогичный изоморфизм $F \to \operatorname{End}_F(bF)$. Композицию изоморфизмов

$$D \to \operatorname{End}_D(aD) \xrightarrow{\psi} \operatorname{End}_F(bF) \to F$$

обозначим через τ. При этом верно равенство $\sigma_d^*(b) = b\tau(d)$.

Построим искомый полулинейный изоморфизм между V и W. Для произвольного вектора $x \in V$ выберем такой оператор α пространства V, что $x = \alpha(a)$. Определим отображение $\varphi : V \to W$, полагая $\varphi(x) = \alpha^*(b)$. Отображение φ задано корректно, т.е. не зависит от выбора оператора α. Действительно, если $x = \alpha_1(a)$ ($\alpha_1 \in \operatorname{End}_D(V)$), то $(\alpha - \alpha_1)(a) = 0$ и $(\alpha - \alpha_1)\varepsilon = 0$. Отсюда

$$\big((\alpha - \alpha_1)\varepsilon\big)^* = (\alpha^* - \alpha_1^*)\varepsilon^* = 0;$$

следовательно, $(\alpha^* - \alpha_1^*)(b) = 0$ и $\alpha^*(b) = \alpha_1^*(b)$.

Возьмем еще один вектор $y \in V$ и выберем $\beta \in \operatorname{End}_D V$ со свойством $y = \beta(a)$. Тогда $x + y = (\alpha + \beta)(a)$; значит,

$$\varphi(x + y) = (\alpha + \beta)^*(b) = \alpha^*(b) + \beta^*(b) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Итак, φ — аддитивный гомоморфизм.

Покажем, что φ — полулинейное отображение, т.е. убедимся в справедливости равенства $\varphi(xd) = \varphi(x)\tau(d)$ для любых $x \in V$ и $d \in D$. Пусть как и выше $x = \alpha(a)$. Тогда $xd = \alpha(a)d = \alpha(ad)$. Поскольку $\varphi(x) = \alpha^*(b)$, то

$$\varphi(x)\tau(d) = \alpha^*(b)\tau(d) = \alpha^*\big(b\tau(d)\big).$$

С другой стороны, из $xd = \alpha(ad) = \alpha\sigma_d(a)$ находим

$$\varphi(xd) = (\alpha\sigma_d)^*(b) = \alpha^*(\sigma_d^*(b)) = \alpha^*\big(b\tau(d)\big).$$

Таким образом, $\varphi(xd) = \varphi(x)\tau(d)$.

Если $\varphi(x) = \alpha^*(b) = 0$ для какого-то $x \in V$, то $(\alpha\varepsilon)^* = \alpha^*\varepsilon^* = 0$. Отсюда следует, что $\alpha\varepsilon = 0$ и $x = \alpha\varepsilon(a) = 0$, т.е. $\ker\varphi = 0$. Для каждого вектора $z \in W$ существует такой оператор $\gamma \in \operatorname{End}_F W$, что $z = \gamma(b)$. Пусть $\gamma = \alpha^*$ для какого-то $\alpha \in \operatorname{End}_D V$; тогда $z = \gamma(b) = \alpha^*(b) = \varphi(x)$, где $x = \alpha(a)$. Получили, что φ — биекция, иными словами, φ — полулинейный изоморфизм.

Возьмем произвольный оператор $\mu \in \operatorname{End}_D V$ и вектор $z \in W$. Выберем далее вектор $x \in V$ со свойством $z = \varphi(x)$ и оператор $\alpha \in \operatorname{End}_D V$, для которого $x = \alpha(a)$. Тогда $z = \varphi(x) = \alpha^*(b)$. Теперь можно записать равенства

$$\mu^*(z) = (\mu\alpha)^*(b) = \varphi\big(\mu\alpha(a)\big) = \varphi\mu(x) = (\varphi\mu\varphi^{-1})(z).$$

Таким образом, $\psi(\mu) = \mu^* = \varphi\mu\varphi^{-1}$, т.е. изоморфизм ψ индуцируется изоморфизмом φ. □

Если пространство V имеет конечную размерность m, то кольцо $\operatorname{End}_D V$ изоморфно кольцу матриц $M_m(D)$ порядка m над телом D. Тогда можно записать следующий частный случай теоремы 4.1.

Следствие 4.2. *Если кольца $M_m(D)$ и $M_n(F)$ изоморфны, то $m = n$ и изоморфны тела D и F.*

Рассмотрим ситуацию, когда D и F являются полями. Отождествим любой элемент $d \in D$ с его действием на V. Говоря короче, будем считать, что D — это центр кольца $\operatorname{End}_D V$. Аналогичным образом отождествляем поле F с центром кольца $\operatorname{End}_F W$. При изоморфизме колец центр переходит в центр, поэтому в условиях теоремы 4.1 можно считать, что V и W — пространства над одним и тем же полем, скажем, F. Однако и в этом случае удается лишь доказать, что изоморфизм колец $\psi : \operatorname{End}_F V \to \operatorname{End}_F W$ индуцируется некоторым полулинейным изоморфизмом F-пространств $V \to W$.

Поскольку кольца $\operatorname{End}_F V$ и $\operatorname{End}_F W$ являются F-алгебрами, то естественно пойти дальше и считать, что ψ — изоморфизм F-алгебр, т.е. $\psi(s\alpha) = s\psi(\alpha)$ для всех $s \in F$ и $\alpha \in \operatorname{End}_F V$. При таком предположении, учитывая равенства $\psi(s \cdot id_V) = s\psi(id_V) = s \cdot id_W$, получаем, что изоморфизм F-алгебр $\operatorname{End}_F V$ и $\operatorname{End}_F W$ действует на F тождественно. И вообще, изоморфизмы между алгебрами эндоморфизмов $\operatorname{End}_F V$ и $\operatorname{End}_F W$ — это в точности кольцевые изоморфизмы, оставляющие элементы из центра на месте. Учитывая это, можно записать следующий результат.

Следствие 4.3. *Пусть V и W — векторные пространства над полем F. Тогда всякий изоморфизм алгебр эндоморфизмов $\operatorname{End}_F V$ и $\operatorname{End}_F W$ индуцируется некоторым изоморфизмом пространств V и W.*

Теоремы изоморфизма имеют одно важное применение. Пусть ψ — автоморфизм F-алгебры $\operatorname{End}_F V$. Согласно следствию 4.3 найдется такой автоморфизм (обратимый оператор) φ пространства V, что $\psi(\alpha) = \varphi\alpha\varphi^{-1}$ для всякого $\alpha \in \operatorname{End}_F V$. Поскольку автоморфизмы пространства V — это в точности обратимые элементы алгебры $\operatorname{End}_F V$, то последнее равенство означает, что ψ является внутренним автоморфизмом алгебры $\operatorname{End}_F V$.

Следствие 4.4. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Всякий автоморфизм алгебры эндоморфизмов векторного пространства над полем является внутренним.*
2 (Сколем, Нетер). *Всякий автоморфизм алгебры матриц $M_n(F)$ является внутренним.*

Доказательство Бэра теоремы 4.1 в [9] носит, можно сказать, геометрический характер. Метод, использованный нами в доказательстве теоремы 4.1, будем называть методом Капланского. Соответствующие рассуждения впервые появились в его книге [21]. Суть метода Капланского в следующем. Примитивные идемпотенты кольца операторов соответствуют неразложимым (т.е. в этом случае одномерным) подпространствам. Чтобы построить изоморфизм пространства V на пространство W, используется перенос свойств таких слагаемых при помощи операторов с целью получить нужные элементы пространства W. В том или ином виде метод Капланского мы применим еще несколько раз в оставшихся разделах этой статьи.

5. Теорема Бэра—Капланского

Сформулируем и докажем, пожалуй, самый известный результат на тему определяемости абелевой группы или модуля своим кольцом эндоморфизмов. Речь идет о следующей замечательной теореме.

Теорема 5.1 (Бэр [8], Капланский [21])**.** *Если A и C — периодические группы с изоморфными кольцами эндоморфизмов, то всякий кольцевой изоморфизм $\operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$ индуцируется некоторым изоморфизмом групп $A \to C$.*

Доказательство. Можно ограничиться случаем p-групп. В самом деле, запишем

$$A = \bigoplus_{p\in P} t_p(A), \quad C = \bigoplus_{p\in P} t_p(C),$$

где $t_p(A)$ и $t_p(C)$ — p-компоненты групп A и C соответственно. Тогда

$$\operatorname{End} A = \prod_{p\in P} \operatorname{End} t_p(A), \quad \operatorname{End} C = \prod_{p\in P} \operatorname{End} t_p(C).$$

Так как

$$\operatorname{End} t_p(A) = \bigcap_{(n,\,p)=1} n \operatorname{End} A, \quad \operatorname{End} t_p(C) = \bigcap_{(n,\,p)=1} n \operatorname{End} C,$$

то всякий кольцевой изоморфизм $\operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$ должен переводить $\operatorname{End} t_p(A)$ в $\operatorname{End} t_p(C)$. Поэтому достаточно предполагать, что A и C являются p-группами, что и будем делать.

Работаем далее с фиксированным кольцевым изоморфизмом $\psi : \operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$. Для всякого $\eta \in \operatorname{End} A$ пишем $\psi(\eta) = \eta^*$.

Если A — циклическая или квазициклическая p-группа, то нетрудно понять, что $A \cong C$ (см. в разделе 2 о строении колец эндоморфизмов таких групп). Далее разобьем доказательство на три случая.

Случай 1: A — ограниченная группа. Тогда A является прямой суммой циклических p-групп. Пусть g — один из образующих элементов некоторого циклического прямого слагаемого группы A наибольшего порядка p^k. Если $\varepsilon : A \to \langle g\rangle$ — проекция, то ε — идемпотент кольца $\operatorname{End} A$, а ε^* — идемпотент кольца $\operatorname{End} C$. Следовательно, $\varepsilon^* C$ — прямое слагаемое группы C. Ввиду свойства (d) из раздела 2 изоморфизм ψ индуцирует изоморфизм колец $\operatorname{End}\langle g\rangle \to \operatorname{End}(\varepsilon^* C)$. Значит, $\varepsilon^* C$ — циклическая группа $\langle h\rangle$ порядка p^k. Теперь можем построить искомый изоморфизм $\varphi : A \to C$. Для произвольного элемента $a \in A$ выберем эндоморфизм $\eta \in \operatorname{End} A$, при котором $a = \eta(g)$, и определим отображение $\varphi : A \to C$ так, что $\varphi(a) = \eta^*(h)$. Проверка корректности задания отображения φ, того, что φ — изоморфизм и, наконец, того, что φ индуцирует ψ, аналогична тому, как это делалось в доказательстве теоремы 4.1.

Случай 2: $A = B \oplus D$, где B — ограниченная, а D — ненулевая делимая группы. Пусть $\langle g\rangle$ — циклическое прямое слагаемое максимального порядка p^k в группе B, E — прямое слагаемое группы D, изоморфное группе $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, и пусть

$$E = \langle d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots\rangle, \quad pd_1 = 0, \quad pd_{n+1} = d_n \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Обозначим соответствующие проекции через $\varepsilon : A \to \langle g\rangle$ и $\pi : A \to E$. Так же, как и в первом случае, получаем, что ε^*C — циклическое прямое слагаемое группы C, а π^*C — прямое слагаемое группы C, изоморфное группе $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Зададим группы ε^*C и π^*C через их образующие:

$$\varepsilon^*C = \langle h\rangle, \quad \pi^*C = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\rangle, \quad pe_1 = 0, \quad pe_{n+1} = e_n \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Произвольный элемент $a \in A$ запишем в виде $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in B$, $a_2 \in D$, и возьмем такой эндоморфизм $\eta \in \operatorname{End} A$, что $\eta(g) = a_1$, $\eta(d_n) = a_2$ при некотором n. Построим отображение $\varphi : A \to C$, положив $\varphi(a) = \eta^*(h + e_n)$. Покажем сначала, что φ не зависит от выбора η и n. Возьмем такой $\eta_1 \in \operatorname{End} A$, что $\eta_1(g) = a_1$ и $\eta_1(d_m) = a_2$, причем можно считать, что $m \geqslant n$. Тогда получаем равенства

$$(\eta - \eta_1)(g) = 0, \quad (p^{m-n}\eta - \eta_1)(d_m) = 0.$$

Значит, $(\eta - \eta_1)\varepsilon = 0$, а эндоморфизм $(p^{m-n}\eta - \eta_1)\pi$ аннулирует $E[p^m]$. Последнее означает, что эндоморфизм $(p^{m-n}\eta - \eta_1)\pi$ делится на p^m. Тогда эндоморфизм $\big((p^{m-n}\eta - \eta_1)\pi\big)^*$ также делится на p^m, следовательно, он аннулирует элемент e_m. Таким образом, получаем, что $\eta^*(h) = \eta_1^*(h)$ и $\eta^*(e_n) = p^{m-n}\eta^*(e_m) = \eta_1^*(e_m)$, откуда $\eta^*(h + e_n) = \eta_1^*(h + e_m)$.

Относительно проверки того, что φ — изоморфизм, индуцирующий изоморфизм ψ, как и в первом случае, отсылаем к доказательству теоремы 4.1.

Случай 3: A имеет неограниченную базисную подгруппу. По свойствам базисных подгрупп (см. раздел 1) существуют такие разложения

$$A = \langle a_1\rangle \oplus \langle a_2\rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_k\rangle \oplus A_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

что $A_k = \langle a_{k+1}\rangle \oplus A_{k+1}$ и $o(a_k) = p^{n_k}$, где $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Пусть $\varepsilon_k : A \to \langle a_k\rangle$ — проекция. Для несовпадающих индексов j и k определим эндоморфизм γ_{jk} группы A следующим образом. Эндоморфизм γ_{jk} отображает прямое слагаемое в указанном выше разложении группы A дополнительное к $\langle a_k\rangle$ в 0. Кроме того, он переводит a_k в a_j (соответственно, в $p^{n_j - n_k}a_j$), если $j < k$ (соответственно, $j > k$). Тогда

(1) $\gamma_{jk}\varepsilon_k = \gamma_{jk} = \varepsilon_j\gamma_{jk}$ при всех $j \neq k$;
(2) $\gamma_{kj}\gamma_{jk} = p^{|n_j - n_k|}\varepsilon_k$ при всех $j \neq k$;
(3) $\gamma_{ij}\gamma_{jk} = \gamma_{ik}$, если $i < j < k$ или $i > j > k$.

Эндоморфизмы ε_k^* и γ_{jk}^* группы C также удовлетворяют условиям (1)–(3). Подгруппы ε_k^*C — циклические прямые слагаемые группы C тех же порядков, что и группы $\varepsilon_k A$ (по свойству (d) из раздела 2). Ввиду условия (2) эндоморфизм $\gamma_{k,k+1}^*$ отображает ε_{k+1}^*C в ε_k^*C. Положим $\varepsilon_k^*C = \langle c_k\rangle$ и покажем, что образующие c_k можно выбрать таким образом, чтобы $\gamma_{k,k+1}^*(c_{k+1}) = c_k$ при всех k. Действительно, если элементы $c_1, c_2, \ldots, c_k$ уже выбраны и элемент c'_{k+1} порождает подгруппу ε_{k+1}^*C, то $\gamma_{k,k+1}^*(c'_{k+1}) = tc_k$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}$. Далее из (2) находим $\gamma_{k+1,k}^*(tc_k) = p^{n_{k+1} - n_k}c'_{k+1}$, и рассмотрение порядков элементов показывает, что $(p, t) = 1$. Возьмем элемент $c_{k+1} = sc'_{k+1}$, где $st \equiv 1 (\mathrm{mod} p^{n_k})$. Тогда $\gamma_{k,k+1}^*(c_{k+1}) = c_k$. Более того, по свойству (3) имеем $\gamma_{jk}^*(c_k) = c_j$ для всех $j < k$.

Для произвольного элемента $a \in A$ выберем такой эндоморфизм $\eta \in \operatorname{End} A$, что $\eta(a_k) = a$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Определим отображение $\varphi : A \to C$, полагая $\varphi(a) = \eta^*(c_k)$. Убедимся, что отображение φ задано корректно. Пусть $\eta_1(a_j) = a$, где $\eta_1 \in \operatorname{End} A$ и $j \geqslant k$. Тогда $(\eta\gamma_{kj} - \eta_1)\varepsilon_j = 0$, откуда $(\eta^*\gamma_{kj}^* - \eta_1^*)\varepsilon_j^* = 0$, что означает $\eta^*(c_k) = \eta_1^*(c_j)$.

Наконец, как и в теореме 4.1 проверяется, что построенное отображение φ является изоморфизмом, индуцирующим изоморфизм ψ. □

Как и в случае векторных пространств получаем следствие об автоморфизмах периодических групп.

Следствие 5.2. *Всякий автоморфизм кольца эндоморфизмов периодической группы является внутренним.*

6. Топологические изоморфизмы колец эндоморфизмов

На кольце эндоморфизмов существует конечная топология, поэтому естественно рассмотреть непрерывные в обе стороны изоморфизмы колец эндоморфизмов. Они более точно определяют строение исходного модуля. Такие изоморфизмы будем называть *топологическими* и говорить о *теоремах топологического изоморфизма*. Итак, под топологическим изоморфизмом $\psi : \operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$ понимаем такой кольцевой изоморфизм ψ, что ψ и ψ^{-1} непрерывны относительно конечной топологии. Непосредственно проверяется, что всякий групповой изоморфизм $A \to C$ индуцирует топологический кольцевой изоморфизм $\operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$. Обратим еще внимание на то, что кольцевые изоморфизмы, фигурирующие в теоремах 4.1 и 5.1, являются топологическими. Это вытекает из предложения 3.2.

В этом разделе все группы не имеют кручения. Большинство встречающихся здесь понятий, связанных с группами без кручения, определяются в разделе 1. Дополнительно напомним, что тип называется идемпотентным, если он содержит характеристику, состоящую из символов 0 и ∞. Идемпотентность типа группы без кручения A ранга 1 равносильна тому, что A изоморфна аддитивной группе некоторого подкольца поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Каждая абелева группа A естественным образом является левым модулем над своим кольцом эндоморфизмов. Пусть A не имеет кручения. В таком случае $\mathbb{Q}$-алгебра $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}$ называется кольцом квазиэндоморфизмов или алгеброй квазиэндоморфизмов группы A. Действие кольца $\operatorname{End} A$ на группе A продолжается до действия кольца $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}$ на делимой оболочке $A \otimes \mathbb{Q}$ группы A. Таким образом получаем левый $(\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q})$-модуль $A \otimes \mathbb{Q}$.

Считаем группу A вложенной в $\mathbb{Q}$-пространство $A \otimes \mathbb{Q}$, отождествляя элемент $a \in A$ с элементом $a \otimes 1$. Такое же соглашение принимаем и относительно $\operatorname{End} A$ и $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}$.

Чистые вполне инвариантные подгруппы группы A кратко будем называть *pfi-подгруппами*. Нетрудно проверить, что соответствия

$$H \mapsto H \otimes \mathbb{Q}, \quad W \mapsto W \cap A$$

являются взаимно обратными изоморфизмами между решеткой pfi-подгрупп группы A и решеткой подмодулей $(\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q})$-модуля $A \otimes \mathbb{Q}$.

Напомним, что группа A называется *неприводимой*, если она не имеет собственных pfi-подгрупп. Неприводимость группы A равносильна неприводимости $(\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q})$-модуля $A \otimes \mathbb{Q}$.

Определение 6.1. Группа без кручения G называется *вполне транзитивной*, если для любых ее элементов $a, b \neq 0$, удовлетворяющих условию $\chi(a) \leqslant \chi(b)$, существует такой эндоморфизм $\alpha \in \operatorname{End} G$, что $\alpha(a) = b$.

Простейшими примерами вполне транзитивных групп являются однородные сепарабельные группы и алгебраически компактные группы.

Лемма 6.2. *Однородная вполне транзитивная группа без кручения G является неприводимой. Если дополнительно G имеет идемпотентный тип, то всякая ее чистая подгруппа содержит образующий элемент $\operatorname{End} G$-модуля G.*

Доказательство. Предположим, что H — ненулевая pfi-подгруппа группы G. Пусть $a \in H$ и $b \in G$ — некоторые ненулевые элементы. Выберем натуральное число n так, что $\chi(a) \leqslant \chi(nb)$. Тогда $\alpha(a) = nb$ для некоторого $\alpha \in \operatorname{End} G$. Отсюда в силу вполне инвариантности подгруппы H получаем, что $nb \in H$, а в силу ее чистоты — что $b \in H$. Следовательно, $H = G$ и, значит, G не содержит собственных pfi-подгрупп.

Если группа G имеет идемпотентный тип, то всякая ее ненулевая чистая подгруппа содержит элемент $a \neq 0$ с характеристикой $\chi(a)$, состоящей из 0 и ∞. Тогда $\chi(a) \leqslant \chi(b)$ для любого ненулевого элемента $b \in G$. Отсюда $b \in (\operatorname{End} G)a$ и $(\operatorname{End} G)a = G$, т.е. элемент a порождает $\operatorname{End} G$-модуль G. □

Теорема 6.3 (см. [1]). *Пусть G и H — однородные вполне транзитивные группы без кручения, типы которых идемпотентны. Тогда всякий топологический кольцевой изоморфизм между $\operatorname{End} G$ и $\operatorname{End} H$ индуцируется некоторым групповым изоморфизмом между G и H.*

Доказательство. Пусть $\psi : \operatorname{End} G \to \operatorname{End} H$ — некоторый топологический кольцевой изоморфизм. Для удобства введем следующие обозначения:

$$V = G \otimes \mathbb{Q}, \quad W = H \otimes \mathbb{Q}, \quad R = \operatorname{End} G \otimes \mathbb{Q}, \quad S = \operatorname{End} H \otimes \mathbb{Q}.$$

Тогда V — точный неприводимый R-модуль, W — точный неприводимый S-модуль (по лемме 6.2). Положим далее

$$D = \operatorname{End}_R V, \quad F = \operatorname{End}_S W, \quad K = \operatorname{End}_D V, \quad L = \operatorname{End}_F W.$$

Здесь D и F — тела согласно лемме Шура. По известной теореме плотности Джекобсона—Шевалле для неприводимых модулей кольцо R плотно в конечной топологии кольца K, а кольцо S плотно в конечной топологии кольца L.

Кольцо $\operatorname{End} G$ (соответственно, $\operatorname{End} H$) отождествляем с его образом при каноническом вложении $\operatorname{End} G \to R$ (соответственно, $\operatorname{End} H \to S$). Тогда конечная топология кольца $\operatorname{End} G$ (соответственно, $\operatorname{End} H$) совпадает с топологией, индуцированной конечной топологией кольца K (соответственно, L). Поэтому $\psi \otimes id_{\mathbb{Q}}$ будет топологическим изоморфизмом колец R и S, который также будем обозначать ψ. Так как R (соответственно, S) плотно в полном кольце K (соответственно, L), то ψ однозначно продолжается до изоморфизма колец $K \to L$, который снова обозначим через ψ. Как и ранее, условимся писать η^* вместо $\psi(\eta)$.

Пусть g — некоторый фиксированный образующий элемент $\operatorname{End} G$-модуля G (существующий по лемме 6.2). Обозначим через A подпространство D-пространства V, порожденное элементом g, и рассмотрим проекцию $\pi : V \to A$. Тогда $\pi \in K$ и $\pi^2 = \pi$. Отсюда $(\pi^*)^2 = \pi^*$ и $\pi^* : W \to \pi^* W$ — проекция. Кроме того,

$$D \cong \operatorname{End}_D A \cong \pi K \pi \cong \pi^* L \pi^* \cong \operatorname{End}_F(\pi^* W)$$

и, следовательно, $\dim_F(\pi^* W) = 1$ (по поводу изоморфизма $\operatorname{End}_D A \cong \pi K \pi$ и аналогичного изоморфизма для кольца L см. свойство (b) из раздела 2). Выберем в $\pi^* W \cap H$ некоторый элемент h, порождающий $\operatorname{End} H$-модуль H.

Определим отображение $\varphi : G \to H$ следующим образом. Для произвольного элемента $a \in G$ возьмем эндоморфизм $\eta \in \operatorname{End} G$ со свойством $a = \eta(g)$. Положим $\varphi(a) = \eta^*(h)$. Проверим, что действие φ не зависит от выбора эндоморфизма η. Если $a = \eta_1(g)$, где $\eta_1 \in \operatorname{End} G$, то $(\eta - \eta_1)(g) = 0$. Следовательно, $(\eta - \eta_1)\pi = 0$ ввиду одномерности D-пространства A. Отсюда $(\eta^* - \eta_1^*)\pi^* = 0$ и $(\eta^* - \eta_1^*)(h) = 0$, т.е. $\eta^*(h) = \eta_1^*(h)$. Таким образом, отображение φ задано корректно.

Осталось проверить, что φ — изоморфизм, индуцирующий изоморфизм ψ. В целом она повторяет соответствующие места в доказательстве теоремы 4.1. □

Конечно, в опосредованном виде доказательство теоремы 6.3 опирается на метод Капланского.

Применение теоремы 6.3 к самой однородной вполне транзитивной группе дает результат, подобный следствиям 4.4 и 5.2.

Следствие 6.4. *Всякий топологический автоморфизм кольца эндоморфизмов однородной вполне транзитивной группы без кручения идемпотентного типа является внутренним.*

Применим теорему 6.3 к однородным сепарабельным группам без кручения (определенным в разделе 1). В качестве легкого упражнения читателю предлагается доказать, что такая группа

вполне транзитивна. Кроме того, из п. 3 предложения 3.2 получается, что всякий изоморфизм между кольцами эндоморфизмов двух сепарабельных групп без кручения является топологическим. Тогда получаем следующий результат.

Следствие 6.5. *Если G и H — однородные сепарабельные группы без кручения идемпотентных типов, то всякий изоморфизм* $\operatorname{End} G \to \operatorname{End} H$ *индуцируется некоторым изоморфизмом* $G \to H$.

Справедливо также следующее утверждение.

Следствие 6.6. *Пусть G и H — такие вполне разложимые группы без кручения, что типы всех однородных компонент этих групп идемпотентны. Тогда каждый изоморфизм* $\operatorname{End} G \to \operatorname{End} H$ *индуцируется некоторым изоморфизмом* $G \to H$.

Доказательство. Пусть канонические разложения групп G и H имеют вид

$$G = \bigoplus_{\mathbf{t}\in\Omega(G)} G_{\mathbf{t}}, \quad H = \bigoplus_{\mathbf{t}\in\Omega(H)} H_{\mathbf{t}},$$

где $G_{\mathbf{t}}$ и $H_{\mathbf{t}}$ — так называемые однородные компоненты групп G и H соответственно. Пусть $\psi : \operatorname{End} G \to \operatorname{End} H$ — некоторый кольцевой изоморфизм. Для каждого $\mathbf{t} \in \Omega(G)$ обозначим через $\varepsilon_{\mathbf{t}}$ проекцию $G \to G_{\mathbf{t}}$. Имеют место изоморфизмы

$$\operatorname{End} G_{\mathbf{t}} \cong \varepsilon_{\mathbf{t}}(\operatorname{End} G)\varepsilon_{\mathbf{t}} \cong \psi(\varepsilon_{\mathbf{t}})(\operatorname{End} H)\psi(\varepsilon_{\mathbf{t}}) \cong \operatorname{End}\big(\psi(\varepsilon_{\mathbf{t}})H\big).$$

Так как $G_{\mathbf{t}}$ — однородная группа идемпотентного типа, то $\psi(\varepsilon_{\mathbf{t}})H$ — тоже однородная группа идемпотентного типа. По следствию 6.5 получаем изоморфизм $G_{\mathbf{t}} \cong \psi(\varepsilon_{\mathbf{t}})H$, поэтому $\Omega(G) \subseteq \Omega(H)$. По симметрии получаем обратное включение. Таким образом, $\Omega(G) = \Omega(H)$.

Теперь можно построить изоморфизм из группы G в группу H методом Капланского. Для каждого типа $\mathbf{t} \in \Omega(G)$ зафиксируем прямое слагаемое $A_{\mathbf{t}}$ ранга 1 группы $G_{\mathbf{t}}$. Возьмем ненулевой элемент $a_{\mathbf{t}} \in A_{\mathbf{t}}$, характеристика которого состоит из символов 0 и ∞. Пусть $\pi_{\mathbf{t}} : G \to A_{\mathbf{t}}$ — проекция; тогда $\psi(\pi_{\mathbf{t}})H$ — прямое слагаемое ранга 1 группы $H_{\mathbf{t}}$. Выберем в $\psi(\pi_{\mathbf{t}})H$ ненулевой элемент $b_{\mathbf{t}}$ с характеристикой, состоящей из символов 0 и ∞. Тогда $\{a_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\Omega(G)}$ — система образующих $\operatorname{End} G$-модуля G и $\{b_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\Omega(H)}$ — система образующих $\operatorname{End} H$-модуля H. Любой элемент a группы G может быть записан в виде

$$a = \alpha_{\mathbf{t}_1}(a_{\mathbf{t}_1}) + \alpha_{\mathbf{t}_2}(a_{\mathbf{t}_2}) + \ldots + \alpha_{\mathbf{t}_k}(a_{\mathbf{t}_k}),$$

где $\alpha_{\mathbf{t}_1}, \alpha_{\mathbf{t}_2}, \ldots, \alpha_{\mathbf{t}_k} \in \operatorname{End} G$. Тогда положим

$$\varphi(a) = \psi(\alpha_{\mathbf{t}_1})(b_{\mathbf{t}_1}) + \psi(\alpha_{\mathbf{t}_2})(b_{\mathbf{t}_2}) + \ldots + \psi(\alpha_{\mathbf{t}_k})(b_{\mathbf{t}_k}).$$

Как и в теоремах 4.1, 5.1 и 6.3, можно проверить, что отображение φ задано корректно и является изоморфизмом, индуцирующим изоморфизм ψ. □

В конце раздела, используя топологические изоморфизмы, распространим теорему Бэра—Капланского (теорему 5.1) на случай произвольных групп.

Отметим следующий полезный факт. Пусть A — группа, ε — некоторый идемпотент кольца $\operatorname{End} A$. Тогда канонический изоморфизм $\operatorname{End}(\varepsilon A) \cong \varepsilon(\operatorname{End} A)\varepsilon$, указанный в свойстве (b) раздела 2, является топологическим, если считать, что на $\operatorname{End}(\varepsilon A)$ задана конечная топология, а на $\varepsilon(\operatorname{End} A)\varepsilon$ — топология, индуцированная конечной топологией кольца $\operatorname{End} A$.

Напомним, что периодическая часть смешанной группы G (т.е. ее наибольшая периодическая подгруппа) обозначается $t(G)$. Кроме того, если G — периодическая группа, то $t(G) = G$; $t(G) = 0$ для группы без кручения G.

Теорема 6.7 (Мэй [23])**.** *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Пусть G и H — группы и $\psi : \operatorname{End} G \to \operatorname{End} H$ — топологический изоморфизм. Тогда существует такой изоморфизм $\varphi : t(G) \to t(H)$, что $\psi(\eta)$ и $\varphi\eta\varphi^{-1}$ совпадают на $t(H)$ для всякого $\eta \in \operatorname{End} G$.*

2. *Пусть T — периодическая, а H — произвольная группы. Тогда всякий топологический изоморфизм* $\operatorname{End} T \to \operatorname{End} H$ *индуцируется изоморфизмом* $T \to H$.

Доказательство. 1. Требуемый изоморфизм φ можно построить методом Капланского, ограничившись при этом периодическими частями групп G и H. Нужно лишь уточнить следующий момент. Если ε — идемпотент кольца $\operatorname{End} G$, причем $\varepsilon G \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ $(k \geqslant 1)$, то ясно, что $\psi(\varepsilon)H \cong \mathbb{Z}_{p^k}$. Пусть $\varepsilon G \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$; тогда $\operatorname{End}(\varepsilon G) \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$ ($\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо или группа целых p-адических чисел) и, следовательно, $\operatorname{End}\big(\psi(\varepsilon)H\big) \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$. Из этого вытекает, что $\psi(\varepsilon)H \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ или $\psi(\varepsilon)H \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$. Как замечено перед теоремой, кольца $\operatorname{End}(\varepsilon G)$ и $\operatorname{End}\big(\psi(\varepsilon)H\big)$ топологически изоморфны. Однако конечные топологии на кольцах $\operatorname{End}\mathbb{Z}_{p^\infty}$ и $\operatorname{End}\widehat{\mathbb{Z}}_p$ различны (первая — p-адическая, вторая — дискретная). Поэтому возможно лишь $\psi(\varepsilon)H \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Теперь путь к применению метода Капланского открыт.

2. Пусть $\psi : \operatorname{End} T \to \operatorname{End} H$ — некоторый топологический изоморфизм. В силу непрерывности ψ для произвольного элемента $y \in H$ найдутся такие элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in T$, что если $\alpha \in \operatorname{End} T$ и $\alpha(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то $\psi(\alpha)(y) = 0$. Существует такое натуральное число m, что $mx_i = 0$ для всех i. Отсюда получаем $\psi(m \cdot id_T)(y) = (m \cdot id_H)(y) = my = 0$. Следовательно, H — периодическая группа, и можно применить теорему 5.1. □

7. Определяемость p-группы радикалом кольца эндоморфизмов

Можно поставить вопрос об определяемости группы не всем кольцом эндоморфизмов, а какой-то его частью. Из теоремы 7.1 вытекает, что p-группа с неограниченной базисной подгруппой определяется радикалом Джекобсона своего кольца эндоморфизмов (как кольцом без единицы). Другие подобные результаты приводятся в замечаниях. Раздел основан на статье [20]. Различные факты о радикалах колец эндоморфизмов приводятся в [2, гл. 4].

Сделаем одно терминологическое замечание. Групповые термины, примененные к кольцу, идеалу или модулю, относятся к их аддитивным группам; то же касается и отдельных элементов этих объектов. Так, например, под порядком элемента кольца (идеала или модуля) подразумевается его порядок как элемента соответствующей аддитивной группы.

Пусть G — некоторая группа. Тогда $\mathrm{J}(\operatorname{End} G)$ — радикал Джекобсона ее кольца эндоморфизмов, $\mathrm{K}(G)$ — периодическая подгруппа идеала $\mathrm{J}(\operatorname{End} G)$. Ясно, что $\mathrm{K}(G)$ — идеал в $\operatorname{End} G$ и кольцо без единицы. Часто вместо $\mathrm{K}(G)$ будем просто писать K.

Теорема 7.1. *Пусть G — p-группа, базисная подгруппа которой является неограниченной группой, и G' — произвольная p-группа. Тогда всякий кольцевой изоморфизм $\psi : \mathrm{K}(G) \to \mathrm{K}(G')$ индуцируется некоторым групповым изоморфизмом $\varphi : G \to G'$, т.е. $\psi(\eta) = \varphi\eta\varphi^{-1}$ для любого $\eta \in \mathrm{K}(G)$.*

Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений. Сначала отметим, что любой кольцевой изоморфизм $\operatorname{End} G \to \operatorname{End} G'$, конечно, индуцирует кольцевой изоморфизм $\mathrm{K}(G) \to \mathrm{K}(G')$.

До конца раздела G — некоторая p-группа, $\mathrm{N}(\operatorname{End} G)$ — нильрадикал кольца $\operatorname{End} G$, т.е. сумма сумма всех его нильидеалов. Определим также идеал Пирса $\mathrm{P}(G)$ группы G, а именно, положим

$$\mathrm{P}(G) = \big\{\alpha \in \operatorname{End} G \mid x \in G[p],\ h(x) < \infty \ \Rightarrow\ h(x) < h\big(\alpha(x)\big)\big\}.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathrm{P}(G)$ — идеал кольца $\operatorname{End} G$. Также верно равенство

$$\mathrm{P}(G) = \big\{\alpha \in \operatorname{End} G \mid \alpha\big((p^nG)[p]\big) \subseteq \big(p^{n+1}G\big)[p] \text{ для всех } n \geqslant 0\big\}.$$

Различные факты о идеале Пирса можно найти в [2, § 20]. Самый важный из них — это включение $\mathrm{J}(\operatorname{End} G) \subseteq \mathrm{P}(G)$. Следовательно, имеют место вложения

$$\mathrm{N}(\operatorname{End} G) \subseteq \mathrm{J}(\operatorname{End} G) \subseteq \mathrm{P}(G). \qquad (*)$$

Далее мы докажем, что периодические части этих идеалов совпадают. Прежде заметим, что если I — идеал некоторого кольца, то $t(I)$ — также идеал. Кроме того, в нашем случае $t(\operatorname{End} G)$ есть p-группа.

Лемма 7.2. *Справедливы равенства*

$$t\big(\mathrm{N}(\operatorname{End} G)\big) = t\big(\mathrm{J}(\operatorname{End} G)\big) = t\big(\mathrm{P}(G)\big).$$

Доказательство. Ввиду $(*)$ достаточно показать, что каждый элемент из $t\big(\mathrm{P}(G)\big)$ нильпотентен. Пусть $\alpha \in t\big(\mathrm{P}(G)\big)$; тогда $p^n\alpha = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha G \subseteq G[p^n]$. Пусть $\alpha' = \alpha|_{G[p^{n+1}]}$. Так как $\alpha \in \mathrm{P}(G)$, то ясно, что $(\alpha')^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\alpha^{m+1} = 0$. □

Напомним, что идеал $\mathrm{K}(G)$ мы обозначаем одной буквой K.

Лемма 7.3. *Идеал* K *является неограниченным тогда и только тогда, когда группа G имеет неограниченную базисную подгруппу.*

Доказательство. Допустим, имеется разложение $G = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle \oplus H$, $o(a) < o(b)$. Определим эндоморфизм α группы G, полагая $\alpha(b) = a$ и $\alpha\big(\langle a\rangle \oplus H\big) = 0$. Тогда $\alpha \in \mathrm{K}$ и $o(\alpha) = o(a)$. Это доказывает, что K — неограниченный идеал, если G имеет неограниченную базисную подгруппу. Для доказательства обратного допустим, что $G = A \oplus D$, где $p^n A = 0$ для некоторого n и D — делимая группа. Пусть $\beta \in \mathrm{K}$. Тогда $p^n\beta = 0$, поскольку делимая группа не имеет ненулевых эндоморфизмов конечного порядка. Следовательно, $p^n\,\mathrm{K} = 0$. □

Будем использовать следующее обозначение. Для эндоморфизма $\eta \in \mathrm{K}$ и подмножества $L \subseteq \mathrm{K}$ под $L \cdot \eta$ понимаем множество $\{\lambda\eta \mid \lambda \in L\}$. Аналогично определяется $\eta \cdot L$.

Лемма 7.4. *Пусть группа G имеет неограниченную базисную подгруппу, t — положительное целое число и $\eta \in \mathrm{K}$. Равенство $\mathrm{K}[p^t] \cdot \eta = 0$ справедливо в точности тогда, когда $\eta G \subseteq p^t G$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{K}$. Ясно, что $p^t\alpha = 0 \Leftrightarrow (p^t\alpha)G = 0$. Поэтому, если $\eta G \subseteq p^t G$, то $\mathrm{K}[p^t] \cdot \eta = 0$. Для доказательства обратного предположим, что $\eta G \nsubseteq p^t G$. Построим такой эндоморфизм $\lambda \in \mathrm{K}[p^t]$, что $\lambda\eta \neq 0$. Выберем элемент $x \in \eta G$, обладающий свойством $x \notin p^t G$. Тогда $h(x) < t$ и, следовательно, существует разложение $G = \langle y\rangle \oplus Y$, причем $x = p^s y + u$, где $p^s y \neq 0$, $s < t$ и $u \in Y$ (см. раздел 1). Пусть $o(y) = p^n$ и пусть $m = \min\{n, t\}$; тогда $m > s$. Поскольку базисная подгруппа группы G неограниченная, то Y имеет прямое слагаемое $\langle z\rangle$ порядка p^k с $k > m$. Определим эндоморфизм λ, положив $\lambda(y) = p^{k-m}z$ и $\lambda Y = 0$. Тогда $\lambda \in \mathrm{K}[p^t]$ и $\lambda(x) = p^{k-(m-s)}z \neq 0$. Следовательно, $\lambda\eta \neq 0$, как и утверждалось. □

Предложение 7.5. *Пусть выполняются условия леммы 7.4 и $\eta \in \mathrm{K}[p^t]$. Тогда $\mathrm{K}[p^t]\cdot p^{t-1}\eta \neq 0$ в том и только том случае, когда группа G имеет такие разложения $G = \langle y\rangle \oplus Y = \langle \eta(y)\rangle \oplus X$, что $o(\eta(y)) = p^t$.*

Доказательство. Считаем сначала, что $\mathrm{K}[p^t] \cdot p^{t-1}\eta \neq 0$. Тогда по лемме 7.4 $(p^{t-1}\eta)G \nsubseteq p^t G$. Следовательно, существует прямое слагаемое $\langle y\rangle$ в G, для которого $\eta(p^{t-1}y) \notin p^t G$. Отсюда делаем вывод, что элемент $\eta(p^{t-1}y)$ имеет порядок p и высоту $t-1$. Можно заключить, что $\langle \eta(y)\rangle$ есть прямое слагаемое в G (см. раздел 1). Ясно также, что $o(\eta(y)) = p^t$.

Для доказательства обратного предположим, что группа G имеет указанные разложения. Тогда элемент $p^{t-1}\eta(y)$ имеет высоту меньшую, чем t, что влечет $(p^{t-1}\eta)G \nsubseteq p^t G$. Далее на основании леммы 7.4 получаем $\mathrm{K}[p^t] \cdot p^{t-1}\eta \neq 0$. □

Введем одно новое понятие.

Определение 7.6. Правый K-модуль T будем называть *сильно однородным*, если T — периодическая группа и для любых ненулевых $\sigma, \tau \in T$ пересечение $\sigma K \cap \tau K$ содержит такой элемент α, что $o(\alpha) = \min\{o(\sigma), o(\tau)\}$.

Предложение 7.7. *Пусть выполняются условия леммы 7.4 и* $\eta \in \mathrm{K}[p^t]$ *таков, что* $\mathrm{K}[p^t] \cdot p^{t-1}\eta \neq 0$. *Подгруппа* ηG *является циклической в точности тогда, когда* $\eta\,\mathrm{K}$ *— сильно однородный* K*-модуль.*

Доказательство. Согласно предложению 7.5 существуют разложения

$$G = \langle y \rangle \oplus Y = \langle x \rangle \oplus X$$

со свойствами $\eta(y) = x$ и $o(x) = o(\eta) = p^t$.

Предположим сначала, что ηG — циклическая группа. Тогда обязательно имеет место $\eta G = \langle x \rangle$. Пусть эндоморфизмы $\tau_i \in \mathrm{K}$ таковы, что $\eta\tau_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Далее, пусть $o(\eta\tau_i) = p^{n_i}$. Тогда $n_i \leqslant t$, $i = 1, 2$, и не уменьшая общности можно считать, что $n_1 \leqslant n_2$. Существуют элементы $g_i \in G$, $i = 1, 2$, для которых $\eta\tau_i(g_i) = p^{t-n_i}x$. Имеется такое разложение $G = \langle z \rangle \oplus Z$, что порядок элемента z превышает порядки элементов g_1 и g_2. Выберем эндоморфизмы $\sigma_i \in \mathrm{K}$, обладающие свойствами $\sigma_i(z) = g_i$ и $\sigma_i Z = 0$, $i = 1, 2$. Положим $\lambda_i = \eta\tau_i\sigma_i$, $i = 1, 2$. Тогда $\lambda_i Z = 0$ и $\lambda_i(z) = p^{t-n_i}x$, так что $o(\lambda_i) = p^{n_i} = o(\eta\tau_i)$, $i = 1, 2$. Далее находим, что $p^{n_2-n_1}\lambda_2 = \lambda_1$ и $\lambda_1 \in (\eta\tau_1)\,\mathrm{K} \cap (\eta\tau_2)\,\mathrm{K}$. Кроме того, порядок элемента λ_1 равен минимальному из порядков элементов $\eta\tau_1$ и $\eta\tau_2$.

Для доказательства обратного допустим, что $\eta G \neq \langle x \rangle$. Тогда существует такой элемент g, что $\eta(g) = w$ для некоторого $w \notin \langle x \rangle$. Если $o(w) = p^s$, то ясно, что $s \leqslant t$. Опять выберем разложение $G = \langle z \rangle \oplus Z$, обладающее тем свойством, что порядок элемента z строго превышает порядки элементов y и g. В такой ситуации найдутся эндоморфизмы $\sigma, \tau \in \mathrm{K}$, для которых $\sigma(z) = y$, $\tau(z) = g$ и $\sigma Z = 0 = \tau Z$. Далее получаем $\eta\sigma(z) = x$, $\eta\tau(z) = w$, $o(\eta\sigma) = p^t$ и $o(\eta\tau) = p^s$. Мы утверждаем, что пересечение $(\eta\sigma)\,\mathrm{K} \cap (\eta\tau)\,\mathrm{K}$ не содержит элементов порядка p^s. Допустим противное, т.е. предположим, что найдутся такие $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$, что элемент $\eta\sigma\alpha = \eta\tau\beta$ имеет порядок p^s. Пусть a — произвольный элемент группы G. Запишем $\alpha(a) = mz + z'$ и $\beta(z) = nz + z''$ для некоторых целых чисел m, n и элементов $z', z'' \in Z$. Теперь находим $\eta\sigma\alpha(a) = mx$, $\eta\tau\beta(a) = nw$ и $mx = nw$. Так как $w \notin \langle x \rangle$, то p делит n. Но тогда $p^{s-1}\eta\tau\beta(a) = 0$ и $p^{s-1}\eta\tau\beta = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Сформулируем основной вспомогательный результат.

Предложение 7.8. *p-Группа G имеет неограниченную базисную подгруппу в точности тогда, когда существуют такая последовательность* $1 < n_1 < n_2 < \ldots$ *натуральных чисел и такие элементы* $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *из* K*, что для каждого* $i \geqslant 1$ *выполняются следующие условия*:

(1) $o(\eta_i) = p^{n_i}$;
(2) $\mathrm{K}[p^{n_i}] \cdot p^{n_i-1}\eta_i \neq 0$;
(3) $\eta_i\,\mathrm{K}$ *— сильно однородный* K*-модуль*;
(4) *отображение* $f_i : \mathrm{K}\,\eta_i \to \mathrm{K}\,\eta_{i+1}$, $\alpha\eta_i \mapsto \alpha\eta_i\eta_{i+1}$, $\alpha \in \mathrm{K}$, *является мономорфизмом.*

Кроме того, для данной последовательности $1 < n_1 < n_2 < \ldots$ *и данных эндоморфизмов* $\eta_i \in \mathrm{K}$, *обладающих свойствами* (1)–(4), *существуют такие элементы* $d_1, d_2, \ldots$ *в* G, *что для каждого* $i \geqslant 1$ *верно следующее*:

$$o(d_i) = p^{n_i}, \quad \eta_i(d_{i+1}) = d_i, \quad \eta_i G = \langle d_i \rangle, \quad \langle d_i \rangle \text{ — прямое слагаемое группы } G.$$

Доказательство. Пусть G имеет неограниченную базисную подгруппу. Тогда для любого $i \geqslant 1$ существует элемент $a_i \in G$ порядка p^{n_i}, где $1 < n_1 < n_2 < \ldots$, и верны равенства

$$G = \langle a_i \rangle \oplus \langle a_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_t \rangle \oplus H_t, \quad H_t = \langle a_{t+1} \rangle \oplus H_{t+1}.$$

Определим эндоморфизмы η_i, положив $\eta_i(a_{i+1}) = a_i$ и считая, что η_i аннулирует все дополнительные слагаемые к $\langle a_{i+1} \rangle$. Ясно, что η_i имеет порядок p^{n_i}. Предложения 7.5 и 7.7 влекут справедливость условий (2) и (3). Условие (4) проверяется непосредственно.

Для доказательства обратного достаточно заметить, что по лемме 7.3 из условия (1) уже вытекает, что G имеет неограниченную базисную подгруппу.

Теперь предположим, что условия (1)–(4) выполняются, и убедимся в существовании элементов d_i с указанными свойствами. Согласно предложению 7.5 для каждого $i \geqslant 1$ существуют такие разложения $G = \langle y_i\rangle \oplus Y_i = \langle x_i\rangle \oplus X_i$, что $\eta_i(y_i) = x_i$ и $o(x_i) = p^{n_i}$. На основании предложения 7.7 имеем также $\eta_i G = \langle \eta_i(y_i)\rangle$. Это влечет равенство $G = \langle y_i\rangle \oplus \ker \eta_i$. Следовательно, можно записать $x_{i+1} = k_i y_i + z_i$, где k_i — целое число и $\eta_i(z_i) = 0$.

Допустим, что p делит k_i; тогда

$$p^{n_i-1}\eta_i\eta_{i+1}G = p^{n_i-1}\langle \eta_i(x_{i+1})\rangle = p^{n_i-1}\langle k_i x_i\rangle = 0.$$

С другой стороны, $p^{n_i-1}\eta_i\eta_{i+1} = f_i(p^{n_i-1}\eta_i)$ и f_i — инъекция. Получили противоречие. Таким образом, k_i взаимно просто с p.

Пусть $d_1 = x_1$; предположим, что t — такое положительное целое число, что для всех $i = 1, 2, \ldots, t$ элемент d_i уже определен, причем таким образом, что $d_i = m_i x_i$, где целое число m_i взаимно просто с p и $\eta_i(d_{i+1}) = d_i$ для каждого $i < t$. Из равенства $x_{t+1} = k_t y_t + z_t$ (см. выше) выводим, что $\eta_t(x_{t+1}) = k_t x_t$. Поскольку k_t и m_t взаимно просты с p, найдется целое число m_{t+1}, также взаимно простое с p, такое что справедливы равенства

$$\eta_t(m_{t+1}x_{t+1}) = m_{t+1}k_t x_t = m_t x_t = d_t.$$

Положим $d_{t+1} = m_{t+1}x_{t+1}$. Таким образом, для каждого i группа $\langle d_i\rangle = \langle x_i\rangle$ является прямым слагаемым группы G порядка p^{n_i}, как и утверждалось. Остальные свойства элементов d_i верны по их выбору. □

Доказательство теоремы 7.1. Договоримся, что символ K' будет обозначать идеал $\mathrm{K}(G')$, а K, как и раньше, обозначает $\mathrm{K}(G)$. Пусть $\psi : \mathrm{K} \to \mathrm{K}'$ — некоторый кольцевой изоморфизм (колец без единицы). Для эндоморфизма $\alpha \in \mathrm{K}$ полагаем $\alpha' = \psi(\alpha) \in \mathrm{K}'$. На основании предложения 7.8 существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots$ и эндоморфизмы $\eta_i \in \mathrm{K}$, удовлетворяющие условиям (1)–(4) из этого предложения. Соответствующие свойства сохраняются при кольцевых изоморфизмах, поэтому эндоморфизмы $\eta_i' \in \mathrm{K}'$ удовлетворяют аналогичным условиям (1′)–(4′). Применяя предложение 7.8, еще раз получаем, что существуют элементы $d_i \in G$ и $d_i' \in G'$, обладающие следующими свойствами: данные элементы порождают прямые слагаемые порядка p^{n_i} и $\eta_i(d_{i+1}) = d_i$, $\eta_i G = \langle d_i\rangle$, $\eta_i'(d_{i+1}') = d_i'$, $\eta_i' G' = \langle d_i'\rangle$.

Определим отображение $\varphi : G \to G'$ следующим образом. Для элемента $x \in G$ выберем такое натуральное число k, что $o(x) < p^{n_k}$. Пусть ε — такой эндоморфизм группы G, что $\varepsilon(d_k) = x$ и ε аннулирует дополнительное слагаемое к $\langle d_k\rangle$. Тогда $\varepsilon \in t\big(\mathrm{P}(G)\big) = \mathrm{K}$ (по лемме 7.2). Полагаем $\varphi(x) = \varepsilon'(d_k')$. Отображение φ задано корректно. Действительно, допустим, что $x = \omega(d_j)$ для некоторых $j \geqslant k$ и $\omega \in \mathrm{K}$. Тогда $d_k = (\eta_k\eta_{k+1}\cdot\ldots\cdot\eta_{j-2}\eta_{j-1})d_j$, что влечет $(\varepsilon\eta_k\cdot\ldots\cdot\eta_{j-2}\eta_{j-1} - \omega)d_j = 0$. Поэтому

$$(\varepsilon\eta_k\cdot\ldots\cdot\eta_{j-2}\eta_{j-1} - \omega)\eta_j\eta_{j+1}G = \langle(\varepsilon\eta_k\cdot\ldots\cdot\eta_{j-2}\eta_{j-1} - \omega)d_j\rangle = 0.$$

Условие (4) влечет $(\varepsilon\eta_k\cdot\ldots\cdot\eta_{j-2}\eta_{j-1} - \omega)\eta_j = 0$ и далее $\varepsilon'\eta_k'\cdot\ldots\cdot\eta_{j-1}'\eta_j' = \omega'\eta_j'$. В итоге приходим к равенству $\omega'(d_j') = \varepsilon'(d_k')$, которое означает, что действие φ не зависит от выбора элемента d_k и эндоморфизма ε.

Наконец, как и в теореме 4.1, прямо проверяется, что φ есть изоморфизм, индуцирующий изоморфизм ψ. □

Замечания 1. Примечательный факт: группа с достаточно богатой делимой подгруппой определяется своим топологическим кольцом эндоморфизмов в классе всех групп. Именно, Мэй доказал следующее утверждение (см. [22]). *Пусть группа G содержит копии групп $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для каждого простого p. Тогда для любой группы H всякий топологический изоморфизм* $\operatorname{End} G \to \operatorname{End} H$ *индуцируется некоторым изоморфизмом $G \to H$* (ср. с теоремой 6.7).

Не так много работ, посвященных определяемости групп без кручения кольцами эндоморфизмов. Очень содержательна работа Баззони и Метелли [10]. Они доказали, что *сепарабельная*

группа без кручения G определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе всех таких групп тогда и только тогда, когда каждое прямое слагаемое ранга 1 *группы G делится почти на все простые числа.* Следует отметить, что группы без кручения часто бедны эндоморфизмами, а кольцо эндоморфизмов, вообще говоря, слабо влияет на исходную группу. Для групп без кручения теоремы изоморфизма — весьма редкое явление.

Для смешанных групп, наоборот, имеется довольно богатая литература по теоремам изоморфизма. Но сразу укажем на то, что даже для таких смешанных групп G, что $G/t(G) \cong \mathbb{Q}$, два центральных вопроса имеют отрицательный ответ. Имеются в виду следующие вопросы:

(i) *Будет ли из изоморфизма* $\operatorname{End} G \cong \operatorname{End} H$ *вытекать изоморфизм* $G \cong H$*?*
(ii) *Является ли всякий автоморфизм кольца* $\operatorname{End} G$ *внутренним?*

Соответствующие примеры есть в статье Мэя и Тубасси [31].

Если теорема изоморфизма не верна для каких-то групп, то можно расширить проблему и пытаться для двух данных групп G и H найти условия изоморфизма их колец эндоморфизмов. Мэй и Тубасси [35] сделали это для смешанных групп ранга 1 с тотально проективными периодическими частями.

Различные другие результаты, связанные с определяемостью смешанных групп их кольцами эндоморфизмов, содержатся в статьях Мэя и Тубасси [23, 29, 30].

В конце раздела 1 указывалось на тесные связи абелевых групп с модулями над областями дискретного нормирования. Кольцо $\mathbb{Q}_p$ рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с p, дает пример такой области. $\mathbb{Q}_p$-Модули — это, собственно, такие группы G, что $nG = G$ для всех целых чисел n, обладающих свойством $(n, p) = 1$.

$\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — это полная область дискретного нормирования. Она является пополнением кольца $\mathbb{Q}_p$ в p-адической топологии. $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-Модули называют еще p-адическими модулями.

Значительное число работ посвящено теоремам изоморфизма для колец (или алгебр) эндоморфизмов смешанных модулей над областями дискретного нормирования. Понятно, что все получаемые при этом результаты применимы, в частности, к $\mathbb{Q}_p$-модулям и $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модулям. К сожалению, даже если принять самые сильные предположения, т.е. считать область дискретного нормирования R полной и рассматривать топологические изоморфизмы R-алгебр эндоморфизмов, то даже для смешанных модулей ранга 1 два сформулированных выше центральных вопроса имеют отрицательное решение (см., например, [28]).

Большинство результатов по проблеме изоморфизма в случае смешанных модулей относятся к модулям с тотально проективными периодическими подмодулями или же к модулям Уорфилда. Характерным здесь результатом является следующая теорема Мэя и Тубасси (см. [32]). *Пусть M — смешанный модуль ранга* 1 *над областью дискретного нормирования R с тотально проективным периодическим подмодулем. Если N — модуль ранга* 1*, то всякий изоморфизм* $\operatorname{End}_R M \to \operatorname{End}_R N$ *индуцируется некоторым изоморфизмом $M \to N$.* Из результатов работы Гёбеля и Мэя [18] следует, что указанный результат нельзя перенести на смешанные модули других конечных рангов, даже если предполагать делимость их фактор-модулей без кручения. Правда, это можно сделать, если считать область R полной (см. [24]).

Другие результаты по данной тематике можно найти в [11–13, 25–27]. Отметим, что в этих и других статьях построены весьма неожиданные примеры. В частности, они показывают, что существуют разного рода серьезные препятствия для поиска теорем изоморфизма для колец эндоморфизмов смешанных модулей над областями дискретного нормирования, в том числе и при условии их полноты.

Что касается теоремы 7.1, то в [19, 34] полностью выяснено, когда для двух p-групп G и H всякий изоморфизм колец $\mathrm{J}(\operatorname{End} G) \to \mathrm{J}(\operatorname{End} H)$ индуцируется некоторым изоморфизмом $G \to H$.

В работах М.Флэгг [14–17] исследуется определяемость модуля над областью дискретного нормирования радикалом своего кольца эндоморфизмов. В [16] ей удалось заменить кольцо эндоморфизмов на радикал кольца эндоморфизмов в известных теоремах об определяемости смешанных модулей с тотально проективными периодическими подмодулями и модулей Уорфилда.

С некоторыми результатами об изоморфизмах колец эндоморфизмов модулей можно познакомиться по обзору [33].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крылов П. А.* Сильно однородные абелевы группы без кручения// Сиб. мат. ж., **24**, № 2. — 1983. — С. 77–84.
2. *Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал Пресс, 2006.
3. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Модули над областями дискретного нормирования. — М.: Факториал Пресс, 2007.
4. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Модули над кольцами формальных матриц// Фундам. прикл. мат., **15**, № 8. — 2009. — С. 145–211.
5. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Формальные матрицы и их определители// Фундам. прикл. мат., **19**, № 1. — 2014. — С. 65–119.
6. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Кольца формальных матриц и модули над ними. — М.: МЦНМО, 2017.
7. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1973.
8. *Baer R.* Automorphism rings of primary Abelian operator groups// Ann. Math., **44**, № 2. — 1943. — P. 192–227.
9. *Baer R.* Linear Algebra and Projective Geometry. — New York: Academic Press, 1952.
10. *Bazzoni S., Metelli C.* On Abelian torsion-free separable groups and their endomorphism rings// Symp. Math., **23**. — 1979. — P. 259–285.
11. *Files S. T.* Endomorphisms of local Warfield groups// Contemp. Math., **171**. — 1994. — P. 99–107.
12. *Files S. T.* Outer automorphisms of endomorphism rings of Warfield groups// Arch. Math., **65**. — 1995. — P. 15–22.
13. *Files S. T.* Endomorphism algebras of modules with distinguished torsion-free elements// J. Algebra, **178**. — 1995. — P. 264–276.
14. *Flagg M.* A Jacobson radical isomorphism theorem for torsion-free modules// in: Models, Modules and Abelian Groups (Göbel R., Goldsmith B., eds.). — Berlin: Walter de Gruyter, 2008. — P. 309–314.
15. *Flagg M.* Jacobson radical isomorphism theorems for mixed modules. Part one: determining the torsion// Commun. Algebra, **37**, № 5. — 2009. — P. 1739–1747.
16. *Flagg M.* The role of the Jacobson radical in isomorphism theorems// Contemp. Math., **576**. — 2012. — P. 77–88.
17. *Flagg M.* The Jacobson radical's role in isomorphism theorems for p-adic modules extends to topogical isomorphism// in: Groups, Modules, and Model Theory—Surveys and Recent Developments (Droste M., Fuchs L., Goldsmith B., Strüngmann L., eds.). — Springer, 2017. — P. 285–300.
18. *Göbel R., May W.* The construction of mixed modules from torsion modules// Arch. Math., **48**. — 1987. — P. 476–490.
19. *Hausen J., Johnson J. A.* Determining Abelian p-groups by the Jacobson radical of their endomorphism rings// J. Algebra, **174**, № 1. — 1995. — P. 217–224.
20. *Hausen J., Praeger C. E., Schultz P.* Most Abelian p-groups are determined by the Jacobson radical of their endomorphism rings// Math. Z., **216**. — 1994. — P. 431–436.
21. *Kaplansky I.* Infinite Abelian Groups. — Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1954.
22. *May W.* Endomorphism rings of Abelian groups with ample divisible subgroups// Bull. London Math. Soc., **10**, № 3. — 1978. — P. 270–272.
23. *May W.* Endomorphism rings of mixed Abelian groups// Contemp. Math., **87**. — 1989. — P. 61–74.
24. *May W.* Isomorphisms of endomorphism algebras over complete discrete valuation rings// Math. Z., **204**, № 4. — 1990. — P. 485–499.
25. *May W.* Endomorphism algebras of not necessarily cotorsion-free modules// in: Abelian Groups and Noncommutative Rings (Fuchs L., Goodearl K. R., Stafford J. T., Vinsonhaler C., eds.). — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1992. — P. 257–264.

26. *May W.* Endomorphisms over incomplete discrete valuation domains// Contemp. Math., **171**. — 1994. — P. 277–285.
27. *May W.* The theorem of Baer and Kaplansky for mixed modules// J. Algebra, **177**. — 1995. — P. 255–263.
28. *May W.* The use of the finite topology on endomorphism rings// J. Pure Appl. Algebra, **163**. — 2001. — P. 107–117.
29. *May W., Toubassi E.* Endomorphisms of Abelian groups and the theorem of Baer and Kaplansky// J. Algebra, **43**, № 1. — 1976. — P. 1–13.
30. *May W., Toubassi E.* A result on problem 87 of L. Fuchs// Lect. Notes Math., **616**. — 1977. — P. 354–367.
31. *May W., Toubassi E.* Isomorphisms of endomorphism rings of rank one mixed groups// J. Algebra, **71**, № 2. — 1981. — P. 508–514.
32. *May W., Toubassi E.* Endomorphisms of rank one mixed modules over discrete valuation rings// Pac. J. Math., **108**, № 1. — 1983. — P. 155–163.
33. *Mikhalev A. V.* Isomorphisms and anti-isomorphisms of endomorphism rings of modules// in: Proc. First Int. Algebraic Workshop. — Berlin, 1996. — P. 69–122.
34. *Schultz P.* When is an Abelian p-group determined by the Jacobson radical of its endomorphism ring// Contemp. Math., **171**. — 1994. — P. 385–396.
35. *Toubassi E., May W.* Classifying endomorphism rings of rank one mixed groups// in: Abelian Groups and Modules/ Proc. Conf. Udine, 1984. — Vienna: Springer, 1984. — P. 253–263.

Крылов Петр Андреевич
Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск
E-mail: krylov@math.tsu.ru

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: tuganbaev@gmail.com

Царев Андрей Валерьевич
Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: an-tsarev@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 159 (2019). С. 68–110

УДК 512.541

SP-ГРУППЫ И ИХ КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ

© 2019 г. П. А. КРЫЛОВ, А. А. ТУГАНБАЕВ, А. В. ЦАРЕВ

Аннотация. Интересный и содержательный класс абелевых смешанных групп составляют *sp*-группы. Проведено систематическое изучение самомалых *sp*-групп конечного ранга и их колец эндоморфизмов.

Ключевые слова: абелева *sp*-группа, самомалая группа, кольцо эндоморфизмов, категория Уокера.

SP-GROUPS AND THEIR ENDOMORPHISM RINGS

© 2019 P. A. KRYLOV, A. A. TUGANBAEV, A. V. TSAREV

Abstract. *sp*-Groups form an interesting and informative class of Abelian mixed groups. In this paper, we systematically study self-small *sp*-groups of finite rank and their endomorphism rings.

Keywords and phrases: Abelian *sp*-group, self-small group, endomorphism ring, Walker category.

AMS Subject Classification: 20Kxx

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 68
1. Самомалые смешанные группы 69
2. Самомалые *sp*-группы конечного ранга 74
3. Кольца K_χ и модули над ними 77
4. Конечно порожденные K-модули 82
5. Аддитивные задачи в кольцах эндоморфизмов *sp*-групп 85
6. Идеалы колец эндоморфизмов ***sp***-групп 90
7. Регулярные и наследственные кольца эндоморфизмов *sp*-групп 93
8. *sp*-Группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов 99
Список литературы 107

Введение

Смешанные группы образуют один из трех важнейших классов абелевых групп вместе с периодическими группами и группами без кручения. Относительно простыми кажутся смешанные группы, которые естественным образом вкладываются в качестве чистых подгрупп в прямые произведения своих p-компонент. Так как такие группы лежат между прямыми суммами и прямыми произведениями своих p-компонент, мы называем их *sp*-группами; термин происходит от слов «sum» и «product». Самомалые *sp*-группы конечного ранга и их эндоморфизмы обладают разнообразными замечательными свойствами и допускают содержательное изучение.

Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10013).

Похожим образом определяются *sp*-кольца. Эти кольца обладают многими специфическими свойствами. Представляет интерес как изучение самих *sp*-колец, так и изучение модулей над *sp*-кольцами. Более того, эти кольца можно эффективно использовать для изучения *sp*-групп. При этом данная *sp*-группа обладает структурами модуля над различными *sp*-кольцами.

В разделах 1 и 2 вводятся и исследуются *sp*-группы и прежде всего — самомалые *sp*-группы. Разделы 3 и 4 посвящены кольцам K_χ и K_χ-модулям (здесь χ — некоторая характеристика). Кольца K_χ можно считать «наименьшими» среди *sp*-колец. Теорема 3.6 раскрывает соотношение между *sp*-группами и K_χ-модулями. В оставшихся разделах 5–8 решается ряд задач о кольцах эндоморфизмов самомалых *sp*-групп конечного ранга.

Как правило, мы используем стандартные обозначения и термины. Буква p обозначает некоторое простое число, а буква P — множество всех простых чисел. Символы $\mathbb{Z}_{p^k}$ и $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ обозначают циклическую группу порядка p^k и кольцо целых p-адических чисел соответственно. Далее, $\mathrm{J}(R)$ — радикал Джекобсона кольца R, $M_n(R)$ — кольцо всех матриц порядка n над кольцом R.

Слово «группа» всегда означает «абелева группа». *Элементарная p-группа* — это группа, у которой каждый ненулевой элемент имеет порядок p. Такая группа является прямой суммой циклических групп порядка p.

Пусть A — группа. Тогда $t(A)$ — ее периодическая часть, т.е. подгруппа, образованная всеми элементами конечного порядка, $t_p(A)$ — p-компонента группы A, т.е. $t_p(A)$ — наибольшая подгруппа в A, являющаяся p-группой. Имеет место равенство $t(A) = \bigoplus\limits_{p\in P} t_p(A)$. Наконец, $\mathrm{End}(A)$ и $\mathrm{Hom}(A,B)$ — это кольцо эндоморфизмов группы A и группа гомоморфизмов из группы A в группу B соответственно.

1. Самомалые смешанные группы

Рассмотрим несколько фактов общего характера о самомалых смешанных группах. Введем основной объект изучения этой статьи — *sp*-группы.

Напомним, что группа A называется *самомалой*, если образ каждого гомоморфизма $A \to \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, где все группы A_i изоморфны A и I — произвольное индексное множество, содержится в сумме конечного числа некоторых групп A_i.

Основные факты о самомалых группах содержатся в [59, раздел 31]. В частности, доказано следующее предложение.

Предложение 1.1. *Всякая периодическая самомалая группа конечна.*

Далее мы неоднократно встретимся со следующей стандартной ситуацией. Пусть для группы A существуют разложения

$$A = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_n \oplus A_n, \quad A_n = C_{n+1} \oplus A_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и $\varepsilon_i : A \to C_i$ — соответствующие проекции ($i \in \mathbb{N}$). Существует гомоморфизм $f : A \to \prod\limits_{i=1}^{\infty} C_i$, где $f(a) = \big(\varepsilon_i(a)\big)_{i\in\mathbb{N}}$, $a \in A$. При этом образ гомоморфизма f содержит $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} C_i$, а $\ker f = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Подгруппа B группы A называется *существенной*, если $B \cap C = 0$ для любой подгруппы $C \neq 0$ группы A. Подгруппу без кручения F смешанной группы A будем называть *квазисущественной*, если A/F — периодическая группа. Последнее равносильно тому, что образ F в фактор-группе $A/t(A)$ является существенной подгруппой.

Предложение 1.2. *Пусть A — самомалая смешанная группа.*

1. *Любая p-компонента $t_p(A)$ группы A конечна.*
2. *Если F — квазисущественная подгруппа без кручения группы A, то p-компонента группы A/F — делимая группа почти при всех простых p, удовлетворяющих условию $t_p(A) \neq 0$.*

3. *Образ всякого гомоморфизма* $A \to t(A)$ *содержится в сумме конечного числа* p*-компонент* $t_p(A)$.

Доказательство. Прежде заметим, что для любых редуцированных p-групп X и Y существуют ненулевые гомоморфизмы $X \to Y$.

1. Прямое слагаемое самомалой группы есть самомалая группа, поэтому на основании предложения 1.1 все p-компоненты $t_p(A)$ — редуцированные группы. Допустим, что нашлась бесконечная p-компонента $t_p(A)$ группы A. В таком случае существуют разложения

$$A = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_n \oplus A_n, \quad A_n = C_{n+1} \oplus A_{n+1}$$

для каждого $n \geqslant 1$, где C_n — циклические группы. Пусть $f : A \to \prod_{i=1}^{\infty} C_i$ — гомоморфизм, построенный в замечании перед предложением. С помощью факторгруппы $(fA)/p(fA)$ можно получить эпиморфизм g из A на бесконечную элементарную p-группу E. Понятно также, что имеется гомоморфизм

$$h : E \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i,$$

$A_i = A$, образ которого не содержится в сумме конечного числа групп A_i. Но существование гомоморфизма hg противоречит самомалости группы A. Итак, все $t_p(A)$ — конечные группы.

2. Предположим, что A/F содержит бесконечное число неделимых p-компонент, для которых $t_p(A) \neq 0$. Для каждой такой p-компоненты обозначим через G_p ее редуцированную часть. Тогда существует гомоморфизм

$$\bigoplus_p G_p \to \bigoplus_p t_p(A),$$

образ которого не содержится в сумме конечного числа p-компонент $t_p(A)$. Учитывая, что существует эпиморфизм

$$A \to \bigoplus_p G_p,$$

как и выше получаем, что существует гомоморфизм

$$A \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i,$$

$A_i = A$, образ которого не лежит в сумме конечного числа групп A_i. Получили противоречие.

3. Допустим существование такого $\alpha : A \to t(A)$, что группа αA не содержится в сумме конечного числа p-компонент $t_p(A)$. Возьмем композицию гомоморфизма

$$\alpha : A \to \bigoplus_p t_p(A)$$

с очевидным образом определенным мономорфизмом

$$\gamma : \bigoplus_p t_p(A) \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i,$$

$A_i = A$. Но существование гомоморфизма $\gamma\alpha$ невозможно ввиду самомалости группы A. □

Следствие 1.3 (см. [25]). *Пусть* A *— смешанная группа конечного ранга. Группа* A *является самомалой в точности тогда, когда каждая* p*-компонента* $t_p(A)$ *конечна и образ любого гомоморфизма* $A \to t(A)$ *содержится в сумме конечного числа* p*-компонент* $t_p(A)$.

Доказательство. Достаточно убедиться в самомалости группы A при условии, что все $t_p(A)$ конечны и образ любого гомоморфизма $A \to t(A)$ содержится в сумме конечного числа p-компонент $t_p(A)$.

Предположим, что существует гомоморфизм $\varphi : A \to \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i = A$, образ которого не содержится в сумме конечного числа слагаемых A_i. Удаляя «лишние» слагаемые A_i, можно добиться следующего. Для каждого $i \geqslant 1$ найдется элемент $a_i \in A$ такой, что $\varphi(a_i)$ имеет ненулевую проекцию в A_i. Гомоморфизм φ индуцирует гомоморфизм

$$A/t(A) \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i/t\Big(\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i\Big).$$

Группа $A/t(A)$ имеет конечный ранг, следовательно, является самомалой. Поэтому можно дополнительно считать, что элемент $\varphi(a_i)$ имеет ненулевую проекцию в какой-то p-компоненте группы A_i. При этом φA не лежит в подгруппе суммы копий группы A вида $t_{p_1}(A) \oplus t_{p_2}(A) \oplus \ldots \oplus t_{p_k}(A)$. Это связано с тем, что p-ранг группы A конечен. Теперь в каждой группе A_i возьмем одну p-компоненту $t_p(A)$, в которой элемент $\varphi(a_i)$ имеет ненулевую проекцию (причем в разных A_i берем разные p-компоненты). Пусть $\varepsilon : \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} A_i \to \bigoplus\limits_{p} t_p(A)$ — проекция. Таким образом, мы построили гомоморфизм $\varepsilon\varphi : A \to t(A)$, образ которого не содержится в сумме конечного числа слагаемых $t_p(A)$. Получили противоречие, следовательно, A — самомалая группа. □

Пусть A — такая смешанная группа, что для всякого простого p верно разложение $A = t_p(A) \oplus B_p$ для некоторой подгруппы B_p (в силу предложения 1.2 самомалые группы обладают этим свойством). Тогда имеет место канонический гомоморфизм

$$f : A \to \prod_p t_p(A),$$

образ которого содержит $\bigoplus\limits_p t_p(A)$ (см. замечание перед предложением 1.2). В дальнейшем, говоря о вложении $A \subseteq \prod\limits_p t_p(A)$, будем подразумевать, что f — мономорфизм и отождествлять A с $f(A)$.

Основным объектом нашего рассмотрения в настоящей статье являются такие самомалые смешанные группы A, что $A/t(A)$ — делимая группа конечного ранга. Причем будем считать, что A имеет бесконечное число p-компонент, отличных от нуля. Дело в том, что если $t_{p_1}(A)$, $t_{p_2}(A)$, …, $t_{p_k}(A)$ — все ненулевые p-компоненты группы A, то $A = t_{p_1}(A) \oplus t_{p_2}(A) \oplus \ldots \oplus t_{p_k}(A) \oplus D$, где D — делимая группа. Строение таких групп полностью известно, и нет нужды здесь в дополнительном их изучении.

В следующем предложении появляются смешанные группы, с которыми мы будем иметь дело до конца статьи.

Предложение 1.4. *Пусть A — редуцированная смешанная группа с бесконечным числом ненулевых p-компонент. Следующие свойства группы A равносильны*:

(1) *для каждого простого p имеет место прямое разложение $A = t_p(A) \oplus B_p$ для некоторой группы B_p с $pB_p = B_p$;*
(2) *справедливы вложения*

$$\bigoplus_p t_p(A) \subset A \subseteq \prod_p t_p(A),$$

причем A чиста в $\prod\limits_p t_p(A)$;
(3) *справедливы вложения из п. (2), причем $A/t(A)$ — делимая группа*;
(4) *p-компонента $t_p(A)$ есть прямое слагаемое группы A для каждого простого p и $A/t(A)$ — делимая группа.*

Доказательство. Заметим вначале, что при условии (1) любое уравнение вида $px = b$, $b \in B_p$, имеет единственное решение в B_p.

(1)⇒(2). Пусть $f : A \to \prod\limits_p t_p(A)$ — гомоморфизм, указанный выше. Если $a \in \ker f$ и $a \neq 0$, то $a \in B_p$ для каждого простого p. Значит, a — элемент бесконечного порядка и бесконечной p-высоты для каждого p. Поэтому a принадлежит делимой части группы A, что невозможно. Таким образом, $\ker f = 0$ и $A \subseteq \prod\limits_p t_p(A)$, причем A — чистая подгруппа. Действительно, возьмем произвольный ненулевой элемент $a \in A$ и зафиксируем такое простое p, что $t_p(A) \neq 0$. Запишем $a = c + b$, где $c \in t_p(A)$ и $b \in B_p$. Тогда $h_p(a) = h_p(c)$ как в группе A, так и в группе $\prod\limits_p t_p(A)$. Это и влечет нужную чистоту.

(2)⇒(3). Пусть имеют место вложения

$$\bigoplus_p t_p(A) \subset A \subseteq \prod_p t_p(A).$$

Нетрудно проверяется, что чистота A равносильна делимости факторгруппы $A/t(A)$.

Далее непосредственно проверяется, что (2)⇒(1) и (3)⇒(4).

(4)⇒(1). Выберем такое простое число p, что $t_p(A) \neq 0$. Имеем $A = t_p(A) \oplus B$ для некоторой группы B. Нужно показать, что $pB = B$. Пусть $b \in B$. Так как $A/t(A)$ — делимая группа, то найдется $c \in A$, для которого $b + t(A) = pc + t(A)$ или $b - pc = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, где $a_i \in t_{p_i}(A)$, причем $p_i \neq p$. Запишем разложение

$$A = t_{p_1}(A) \oplus t_{p_2}(A) \oplus \ldots \oplus t_{p_k}(A) \oplus G$$

для некоторой группы G. Можно считать выше, что $c, a_i \in B$. Тогда легко понять следующее. Если записать

$$b = b' + b'', \quad c = c' + c'',$$

где $b', c' \in t_{p_1}(A) \oplus t_{p_2}(A) \oplus \ldots \oplus t_{p_k}(A)$ и $b'', c'' \in G$, то $b'' = pc''$. А из этого следует, что b делится на p. □

Редуцированную группу A с бесконечным числом ненулевых p-компонент, удовлетворяющую эквивалентным условиям предложения 1.4, будем называть *sp-группой*.

В теории абелевых групп часто встречаются группы похожие на sp-группы. А именно, такие группы A, что имеются чистые вложения

$$\bigoplus_p A_p \subset A \subseteq \prod_p A_p,$$

где A_p — p-адический модуль, т.е. модуль над кольцом целых p-адических чисел $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Похожим образом определим *sp-кольцо* K, заменив выше p-адический модуль A_p на p-адическую алгебру K_p (т.е. K_p — $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-алгебра). Итак, если K — sp-кольцо, то справедливы чистые вложения колец

$$\bigoplus_p K_p \subset K \subseteq \prod_p K_p,$$

где K_p — p-адическая алгебра для каждого простого p.

Класс всех sp-групп необозрим. Мы сосредоточим внимание на самомалых sp-группах конечного ранга. Но прежде получим несколько характеризаций произвольной самомалой sp-группы.

Введем еще одно условие конечности для sp-групп. Будем говорить, что sp-группа A удовлетворяет *условию на проекции*, если для каждой квазисущественной свободной подгруппы F группы A ограничение проекции $\varepsilon_p : A \to t_p(A)$ на F совпадает с $t_p(A)$ для почти всех простых p (т.е. $\varepsilon_p F = t_p(A)$ почти при всех p). Если A имеет конечный ранг, то в условии на проекции вместо слова «каждой» можно писать «некоторой».

Договоримся для sp-группы A через ε_p всегда обозначать проекцию $A \to t_p(A)$ с ядром B_p относительно разложения $A = t_p(A) \oplus B_p$ из п. (1) предложения 1.4.

В связи с введенным условием на проекции окажется полезной следующая лемма.

Лемма 1.5. *Пусть F — квазисущественная свободная подгруппа sp-группы A. Тогда делимость p-компоненты факторгруппы A/F равносильна делимости факторгруппы $t_p(A)/\varepsilon_p F$.*

Доказательство. Делимость указанной p-компоненты равносильна справедливости равенства

$$p^n(A/F) = A/F \quad \text{или} \quad p^nA + F = A \quad \text{или} \quad p^nt_p(A) + B_p + F = t_p(A) + B_p$$

для любого n. Делимость же факторгруппы $t_p(A)/\varepsilon_p F$ равносильна выполнению равенства

$$p^nt_p(A) + \varepsilon_p F = t_p(A)$$

для всех n. Несложно проверить, что из каждого из этих равенств выводится другое. □

Отметим еще, что существует эпиморфизм

$$\pi : t_p(A/F) \to t_p(A)/\varepsilon_p F, \quad \pi(a + F) = \varepsilon_p(A) + \varepsilon_p F, \quad a \in A.$$

Запишем основной результат раздела. Он содержит различные характеризации самомалой *sp*-группы.

Теорема 1.6. *Следующие свойства sp-группы A равносильны*:

(1) *A — самомалая группа*;
(2) *идеал $\mathrm{Hom}(A, t(A))$ кольца $\mathrm{End}\, A$ состоит из эндоморфизмов, чьи образы содержатся в сумме конечного числа p-компонент $t_p(A)$, и каждая p-компонента $t_p(A)$ — конечная группа;*
(3) *если M — периодический эпиморфный образ группы A, то M есть прямая сумма делимой и конечной группы;*
(4) *если F — квазисущественная свободная подгруппа группы A, то A/F — прямая сумма делимой и конечной группы;*
(5) *A удовлетворяет условию на проекции и каждая $t_p(A)$ — конечная группа.*

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) вытекает из предложения 1.2.

(2)⇒(3). Пусть F — такая подгруппа без кручения группы A, что A/F — периодическая группа. Учитывая предложение 1.2, можно записать

$$A/F = D \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_k,$$

где D — делимая группа, $M_1, M_2, \ldots, M_k$ — редуцированные p-группы для различных p с $t_p(A) \neq 0$. Уточним, что если $t_p(A) = 0$, то A — p-делимая группа. Следовательно, A/F — также p-делимая группа, т.е. её p-компонента является делимой группой.

Имеют место изоморфизмы

$$(F \oplus t(A))/F \cong t(A), \quad (A/F)/(F \oplus t(A))/F \cong A/(F \oplus t(A)).$$

Последняя факторгруппа является периодической делимой группой. Так как все группы $t_p(A)$ конечны, то редуцированные части p-компонент группы A/F, т.е. группы $M_1, M_2, \ldots, M_k$, должны быть конечными.

Импликация (3)⇒(4) верна всегда.

(4)⇒(5). Для произвольного простого p с $t_p(A) \neq 0$ запишем $A = t_p(A) \oplus B_p$. Пусть F — некоторая квазисущественная свободная подгруппа, лежащая в B_p. Свойство (4), примененное к A/F, влечет конечность $t_p(A)$.

Пусть теперь F — произвольная квазисущественная свободная подгруппа группы A. Из п. (4) и леммы 1.5 следует, что почти все $t_p(A)/\varepsilon_p F$ делимы, т.е. в данной ситуации являются нулевыми группами. Таким образом, $t_p(A) = \varepsilon_p F$ для почти всех простых p, таких что $t_p(A) \neq 0$.

(5)⇒(2). Допустим, что существует такой гомоморфизм $\alpha : A \to t(A)$, что образ αA не содержится в сумме конечного числа p-компонент $t_p(A)$. То же верно и для $A/\ker\alpha$. Подгруппа $\ker\alpha$ содержит некоторую квазисущественную свободную подгруппу F группы A. Понятно, что факторгруппа A/F должна содержать бесконечное число ненулевых неделимых p-компонент. Но это противоречит лемме 1.5 и условию п. (5).

(2)⇒(1). Можно повторить рассуждения из доказательства следствия 1.3. Требует уточнения только факт, почему образ φA не лежит в сумме копий подгруппы группы A вида $t_{p_1}(A)\oplus t_{p_2}(A)\oplus \ldots \oplus t_{p_k}(A)$. Действительно, имеет место разложение

$$A = t_{p_1}(A) \oplus t_{p_2}(A) \oplus \ldots \oplus t_{p_k}(A) \oplus B,$$

где подгруппа B делится на все p_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Поэтому $\varphi B = 0$ и φA — конечная группа, что невозможно. □

Пусть A — sp-группа. Возьмем некоторое разложение $A = t_p(A) \oplus B_p$. Так как $pB_p = B_p$ (предложение 1.4), то $t_p(A)$ и B_p — вполне инвариантные подгруппы группы A. Следовательно, для кольца эндоморфизмов группы A имеет место разложение

$$\operatorname{End} A = \operatorname{End} t_p(A) \oplus \operatorname{End} B_p.$$

Условие самомалости оказалось не слишком ограничительным и в то же время весьма естественным условием конечности для групп. С тем, как оно используется в разных ситуациях, можно познакомиться, например, в [23, 26, 34–36, 41, 45].

2. Самомалые sp-группы конечного ранга

Сначала применим теорему 1.6 к sp-группам конечного ранга. Затем привлечем к их изучению так называемую категорию Уокера. Во всяком случае мы получим интерпретацию различных свойств самомалых sp-групп конечного ранга в привычных категорных терминах.

Из предложений 1.2 и 1.4 можно вывести «внешнюю» характеризацию самомалых sp-групп конечного ранга.

Следствие 2.1. *Группа A является самомалой sp-группой конечного ранга в точности тогда, когда A — самомалая смешанная группа с бесконечным числом ненулевых p-компонент и $A/t(A)$ — делимая группа конечного ранга.*

Теорема 2.2. *Пусть A — sp-группа конечного ранга. Следующие утверждения равносильны*:

(1) *A — самомалая группа*;
(2) *идеал $\operatorname{Hom}(A, t(A))$ кольца $\operatorname{End} A$ состоит из эндоморфизмов, образы которых содержатся в сумме конечного числа p-компонент $t_p(A)$, и каждая p-компонента $t_p(A)$ — конечная группа*;
(3) *A удовлетворяет условию на проекции и каждая $t_p(A)$ — конечная группа*;
(4) *кольцо $\operatorname{End} A$ дискретно в конечной топологии.*

Доказательство. Равносильность утверждений (1)–(3) показана в теореме 1.6.

(3)⇒(4). Пусть F — некоторая квазисущественная свободная подгруппа в A. Нужно найти такое конечное подмножество X в A, что из $\alpha X = 0$ следует, что $\alpha = 0$ для любого $\alpha \in \operatorname{End} A$. Из условия на проекции следует, что верно равенство $\varepsilon_p F = t_p(A)$ почти при всех простых p, где $\varepsilon_p : A \to t_p(A)$ — проекция. Пусть Y — сумма тех p-компонент, для которых записанное равенство не выполняется. Если Z — базис группы F, то $X = Y \cup Z$ — искомое множество.

(4)⇒(3). Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — такое множество элементов группы A, что $\alpha X = 0$ влечет $\alpha = 0$ для любого $\alpha \in \operatorname{End} A$. Можно считать, что все элементы в X имеют бесконечный порядок и что они линейно независимы (т.е. из равенства $m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n = 0$, $m_i \in \mathbb{Z}$, следует, что $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$). Пусть F — свободная группа, порожденная X. Тогда справедливо равенство $\varepsilon_p F = t_p(A)$ для почти всех простых p. □

Далее введем категорию Уокера Walk абелевых групп (см. [60]). Категория Walk отличается от «обычной» категории абелевых групп морфизмами и приспособлена для исследования смешанных групп «с точностью до периодических групп». Фактически, периодические группы в новой категории становятся нулевыми объектами.

Объектами категории Walk служат все абелевы группы. Для любых объектов $A, B \in \text{Walk}$ множество морфизмов $\operatorname{Hom}_W(A, B)$ совпадает с множеством $\operatorname{Hom}(A, B)/\operatorname{Hom}(A, t(B))$. Произвольный морфизм $\overline{f} : A \to B$ — это смежный класс $f + \operatorname{Hom}(A, t(B))$ с представителем $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$.

Композиция морфизмов в Walk индуцируется композицией представителей, т.е. $\overline{g}\overline{f} = \overline{gf}$ для $\overline{f} : A \to B$ и $\overline{g} : B \to C$. Понятно, что композиция ассоциативна и для всякого $A \in \mathrm{Walk}$ существует единичный морфизм $\overline{id}_A \in \mathrm{Hom}_W(A, A)$, $\overline{id}_A = id_A + \mathrm{Hom}(A, t(B))$, т.е. Walk действительно образует категорию. Более того, Walk является аддитивной категорией с ядрами и бесконечными суммами.

Изоморфизмы в Walk легко характеризуются. Если группы A и B изоморфны в категории Walk, то будем писать $A \cong_W B$.

Предложение 2.3. *Группы A и B изоморфны в* Walk *в точности тогда, когда существуют такие периодические группы T и S, что $A \oplus T \cong B \oplus S$.*

Доказательство. Пусть существуют такие T и S, что $A \oplus T \cong B \oplus S$. Вложение $A \to A \oplus T$ и проекция $A \oplus T \to A$ являются взаимно обратными изоморфизмами в Walk. То же верно и для $B \oplus S$. Поэтому получаем $A \cong_W A \oplus T$ и $B \cong_W B \oplus S$, а значит, $A \cong_W B$.

Предположим, что $A \cong_W B$ и $\overline{f} : A \to B$, $\overline{g} : B \to A$ — взаимно обратные изоморфизмы. Тогда для некоторых $e \in \mathrm{Hom}(A, t(A))$ и $h \in \mathrm{Hom}(B, t(B))$ можно написать $gf = id_A + e$ и $fg = id_B + h$. Положим $S = e(A)$ и $T = h(B)$. Далее зададим гомоморфизмы $\alpha : A \oplus T \to B \oplus S$ и $\beta : B \oplus S \to A \oplus T$ по формулам

$$\alpha(a, t) = \big(f(a) - t, e(a) - g(t)\big), \quad \beta(b, s) = \big(g(b) - s, h(b) - f(s)\big)$$

для любых $a \in A$, $t \in T$, $b \in B$ и $s \in S$. Несложные вычисления с использованием равенств $fe = hf$ и $gh = eg$ подтверждают, что α и β — взаимно обратные изоморфизмы. □

Пусть $\mathcal{W}$ — полная подкатегория категории Walk, состоящая из самомалых *sp*-групп конечного ранга. Из предложения 2.3 очевидным образом выводится равносильность следующих утверждений:

(1) $A \cong_W B$;
(2) $A \oplus Y \cong B \oplus X$, где X и Y — конечные группы;
(3) $A \cong C \oplus X$, $B \cong C \oplus Y$, где $C \in \mathcal{W}$, X и Y — конечные группы.

Можно сделать вывод о том, что работая в категории $\mathcal{W}$, мы фактически изучаем группы «с точностью до конечных прямых слагаемых». Смысл этого высказывания неоднократно проявится в дальнейшем.

На протяжении всей статьи для группы $A \in \mathcal{W}$ будем использовать следующие обозначения:

$$R = \mathrm{End}\, A, \quad R_p = \mathrm{End}\, t_p(A), \quad R_t = \mathrm{Hom}(A, t(A)), \quad S = R/R_t.$$

Из теоремы 2.2(2) следует, что $R_t = \bigoplus_{p \in P} R_p$.

Говорят, что идемпотенты *расщепляются* в аддитивной категории $\mathcal{C}$, если для всякого $e^2 = e \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}} A$ существуют такие объект $B \in \mathcal{C}$ и морфизмы $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, что $gh = e$ и $hg = id_B$.

Лемма 2.4. *В категории $\mathcal{W}$ расщепляются идемпотенты.*

Доказательство. Пусть дана группа $A \in \mathcal{W}$ и идемпотент $\overline{e} = e + R_t$ кольца S, где $e \in R$. Тогда $e^2 = e + r$, где $r \in R_t$. Можно записать $A = C \oplus X$, где $rC = 0$, X — конечная группа, причем ненулевые p-компоненты групп C и X соответствуют различным p. Определим $f \in R$, полагая $f(c) = e(c)$ при $c \in C$ и $fX = 0$. Тогда $f^2 = f$ и $A = B \oplus \ker f$, где $B = fA$. Если $g : B \to A$ — вложение, $h : A \to B$ — проекция, то $hg = id_B$, $gh = f$, откуда $\overline{h}\overline{g} = \overline{id}_B$, $\overline{g}\overline{h} = \overline{e} = \overline{f}$ (верхняя черта означает смежный класс относительно R_t). Итак, нашлись группа B и морфизмы $\overline{g}$, $\overline{h}$ с требуемыми свойствами. Значит, $\overline{e}$ расщепляется. □

Лемма 2.5. *Если $A \in \mathcal{W}$, то всякое полное ортогональное множество идемпотентов кольца S можно поднять до полного ортогонального множества идемпотентов кольца R.*

Доказательство. Как видно из доказательства леммы 2.4 множество идемпотентов кольца S можно представить в виде $e_1 + R_t$, $e_2 + R_t$, ..., $e_n + R_t$, где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — идемпотенты кольца R. Для любых различных индексов i, j имеем $e_i e_j \in R_t$. Поэтому существует такое разложение $A = C_{ij} \oplus X_{ij}$, что $e_i e_j C_{ij} = 0$ и X_{ij} — конечная группа. При этом ненулевые p-компоненты групп C_{ij} и X_{ij} соответствуют различным p. Пусть X — сумма всех X_{ij}, C — дополнительное слагаемое к X, т.е. $A = C \oplus X$. Считаем, что все e_i аннулируют X; тогда $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортогональная система идемпотентов кольца R. Полнота системы идемпотентов в S означает, что

$$(e_1 + R_t) + (e_2 + R_t) + \ldots + (e_n + R_t) = 1_S.$$

Так как X — конечная группа, то несложно добиться того, чтобы $e_1 + e_2 + \ldots + e_n = 1_R$. □

Зафиксируем группу $A \in \mathcal{W}$. Дополнительно к обозначениям, введенным перед леммой 2.4, договоримся через V обозначать факторгруппу $A/t(A)$. Тогда V — конечномерное $\mathbb{Q}$-пространство, $V = A \otimes \mathbb{Q}$, $\dim_{\mathbb{Q}} V = r(A)$, а S — $\mathbb{Q}$-алгебра. Кольцо S является кольцом эндоморфизмов группы A в категории $\mathcal{W}$, поэтому его также можно обозначать $\mathrm{End}_{\mathcal{W}} A$. Так как $S = R \otimes \mathbb{Q}$, то по аналогии с группами без кручения можно называть S кольцом или алгеброй квазиэндоморфизмов группы A. Далее, $\mathbb{Q}$-пространство V есть левый R-модуль, аннулятор которого равен R_t. Поэтому V является левым модулем над S с модульным умножением $sv = rv$, где $v \in V$, $r \in R$ и $s = r + R_t$. Кроме того, $\mathbb{Q}$-алгебра S вкладывается в $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V$, а значит, S — конечномерная $\mathbb{Q}$-алгебра.

Понятию прямой суммы в категории $\mathcal{W}$ можно дать теоретико-групповую интерпретацию, а также получить критерии неразложимости группы в $\mathcal{W}$.

Напомним, что кольцо K называется *локальным*, если все его необратимые элементы образуют идеал. Или, что равносильно, факторкольцо $K/\mathrm{J}(K)$ является телом.

Следствие 2.6. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Группа A является прямой суммой групп $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в категории $\mathcal{W}$ в точности тогда, когда $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n$, где $B_i \in \mathcal{W}$ и $A_i \cong_{\mathcal{W}} B_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*
2. *Следующие свойства группы $A \in \mathcal{W}$ равносильны*:
   (a) *A неразложима в категории $\mathcal{W}$;*
   (b) *в любом разложении $A = B \oplus C$ одно из слагаемых — конечная группа;*
   (c) *кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\mathcal{W}} A$ локально.*

Поскольку $\mathcal{W}$ — аддитивная категория с расщепляющимися идемпотентами, то в ней выполняется теорема Крулля—Шмидта о единственности разложения объекта в прямую сумму объектов с локальными кольцами эндоморфизмов. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.7. *Если $B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_m = A = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_n$ — два разложения группы $A \in \mathcal{W}$, где все B_i, C_j — неразложимые в $\mathcal{W}$ группы, то $m = n$ и после перенумерации $B_i \cong_{\mathcal{W}} C_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Выполняются также стандартные соотношения между группой A и ее кольцом эндоморфизмов S в категории $\mathcal{W}$. В частности, опираясь на известное строение артинова полупростого кольца, можно получить ряд результатов.

Сначала напомним, что кольцо называется *полупростым*, если его радикал Джекобсона равен нулю. *Вполне приводимый* модуль — это модуль, который порождается своими минимальными подмодулями, или, по другому, он равен прямой сумме неприводимых модулей. Так как V — точный S-модуль, то первые два утверждения в следствии 2.8 равносильны всегда.

Следствие 2.8. *Следующие утверждения о группе $A \in \mathcal{W}$ равносильны*:

(1) *V — вполне приводимый S-модуль;*
(2) *S — полупростая алгебра;*

(3) $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, *где* $\mathrm{Hom}(A_i, A_j) = \mathrm{Hom}(A_i, t(A_j))$ *для всех* $i \neq j$, $A_i = \bigoplus_{k=1}^{n_i} A_{ik}$, $A_{ik} \cong_{\mathcal{W}} A_{il}$ *и* $\mathrm{End}_{\mathcal{W}} A_{ik}$ *— тело* $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k, l = 1, 2, \ldots, n_i)$.

В связи со следствием 2.7 сделаем некоторые замечания о бесконечных прямых суммах неразложимых в категории $\mathcal{W}$ групп.

К категории $\mathcal{W}$ применимы некоторые известные теоремы об изоморфизме и уплотнении бесконечных прямых сумм в аддитивных категориях, например, теоремы 27.8 и 27.10 из книги [60]. Условия этих теорем выполняются поскольку неразложимые в категории $\mathcal{W}$ группы являются малыми объектами и имеют локальные кольца эндоморфизмов.

Теорема 2.9. *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in I} B_i$, *где* B_i *— неразложимая в* $\mathcal{W}$ *группа для каждого* $i \in I$.

1. *Если* $A = \bigoplus_{j \in J} C_j$, *где* C_j *— неразложимая в* $\mathcal{W}$ *группа для каждого* $j \in J$, *то существует такая биекция* $\theta : I \to J$, *что* $B_i \cong_{\mathcal{W}} C_{\theta(i)}$ *для всех* $i \in I$.
2. *Каждое прямое слагаемое группы* A *изоморфно в* $\mathcal{W}$ *прямой сумме* $\bigoplus_{j \in J} B_j$ *для некоторого подмножества* $J \subseteq I$. *Следовательно, любые два прямых разложения группы* A *имеют изоморфные в* $\mathcal{W}$ *уплотнения.*

В качестве групп B_i можно взять, в частности, группы ранга 1. Можно также оформить следствие 2.7 и теорему 2.9, учитывая предложение 2.3, без использования категории $\mathcal{W}$.

Переход от «обычной» категории абелевых групп к категории Walk иногда делает исследуемую задачу более прозрачной и допускающей понятную категорную формулировку. Категория Walk используется в [23, 26, 32].

Различные свойства прямых сумм *sp*-групп, а также свойства подстановки и сокращения исследуются в [21, 41].

3. Кольца K_χ и модули над ними

К изучению *sp*-групп можно привлечь модули. Именно, всякая *sp*-группа является модулем над различными *sp*-кольцами. Среди этих *sp*-колец можно выделить в определенном смысле «минимальные» *sp*-кольца K_χ. Здесь мы рассмотрим ряд свойств колец K_χ и модулей над ними. Теорема 3.6 иллюстрирует возможные связи свойств *sp*-групп с их свойствами как K_χ-модулями.

Пусть $\chi = (k_{p_1}, k_{p_2}, \ldots, k_{p_n}, \ldots) = (k_p)$ — некоторая характеристика, т.е. последовательность, состоящая из целых неотрицательных чисел и символа ∞. Считаем все время, что характеристика χ содержит бесконечно много ненулевых компонент k_p. Поставим χ в соответствие набор колец K_p, где $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ или $K_p = \mathbb{Z}_{p^{k_p}}$ соответственно при $k_p = \infty$ и $k_p < \infty$. Кольцо $\prod_{p \in P} K_p$ будем обозначать через $\mathbb{Z}_\chi$. Если $\chi = (\infty, \infty, \ldots)$, то кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p$ является пополнением в $\mathbb{Z}$-адической топологии кольца целых чисел $\mathbb{Z}$. Его обычно обозначают $\widehat{\mathbb{Z}}$ и называют *кольцом целых полиадических чисел*. Алгебраические свойства кольца $\widehat{\mathbb{Z}}$ и модулей над ним рассматриваются в книге А. А. Фомина [14].

Возьмем некоторое кольцо $\mathbb{Z}_\chi$, а в нем идеал $T_\chi = \bigoplus_{p \in P} K_p$. Пусть K_χ — такое подкольцо в $\mathbb{Z}_\chi$, что $T_\chi \subset K_\chi$ и $K_\chi / T_\chi \cong \mathbb{Q}$. Если $\chi = (\infty, \infty, \ldots)$, то кольцо K_χ называют *кольцом псевдорациональных чисел*. Кольцо K_χ можно также определить как подкольцо $\mathbb{Z}_\chi$ чисто порожденное идеалом T_χ и единицей этого кольца. Кольца K_χ дают простейшие примеры *sp*-колец, определенных в предыдущем разделе.

Различные кольца K_χ связаны между собой следующим образом. Если χ и φ — характеристики, то $\chi \leqslant \varphi$ в том и только том случае, когда существует сюръективный гомоморфизм колец $K_\varphi \to K_\chi$.

Остановимся на некоторых свойствах колец K_χ. В частности, найдем вид элементов и опишем строение идеалов. Для упрощения записи условимся, что буква K будет обозначать какое-то кольцо K_χ, а T — соответствующий идеал T_χ. Если нужно указать на конкретную характеристику χ, то пишем K_χ и T_χ.

Далее будем постоянно использовать следующее очевидное свойство. Если записать $K = K_{p_1} \oplus K_{p_2} \oplus \ldots \oplus K_{p_s} \oplus S$, то любой элемент дополнительного слагаемого S однозначно делится на каждое из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

Если $e^2 = e \in K$ и $e \neq 0, 1$, то один из идемпотентов e, $1 - e$ является суммой единичных элементов конечного числа некоторых колец K_p.

Пусть $r \in K$ и $r \neq 0$; тогда в факторкольце K/T имеем $m\bar{r} = n\bar{1}$, где m, n — ненулевые целые числа. Переходя к кольцу K, получаем $mr = t + n1$, $t \in T$. Запишем теперь $K = L \oplus S$, где L — сумма конечного числа колец K_p, причем $t \in L$ и $K_p \subseteq L$ для всех простых p, делящих m и n. Тогда $mS = S = nS$. Пусть далее $1 = e + (1 - e)$ и $r = x + y$, где $e, x \in L$ и $y \in S$. Тогда $y = (n/m)(1 - e)$ и, значит, $r = er + (n/m)(1 - e)$. Рациональное число $|r| = n/m$ определяется элементом r однозначно. При этом для любых $r, s \in K$ справедливы равенства

$$|r + s| = |r| + |s|, \quad |r \cdot s| = |r| \cdot |s|.$$

Если отождествить K/T с $\mathbb{Q}$, то, собственно, $|r|$ — это образ элемента r при каноническом гомоморфизме $K \to K/T$.

Выясним строение идеалов кольца K. Каждый ненулевой идеал кольца K_p является главным и имеет вид $p^{m_p} K_p$, где $m_p < k_p$. Пусть I — некоторый ненулевой идеал кольца K. Возможны два случая.

Случай 1: $I \subseteq T$. Тогда $I = \bigoplus\limits_{p \in P} (I \cap K_p)$, где $I \cap K_p$ — идеал в K_p.

Случай 2: $I \not\subseteq T$. Выберем элемент $r \in I \setminus T$. Пусть, как выше, $K = L \oplus S$ и $r = er + (n/m)(1 - e)$. Тогда $I = (I \cap L) \oplus (I \cap S)$ и $er \in I \cap L$, $(n/m)(1 - e) \in I \cap S$. Так как $nS = S$, то $(1 - e) \in I \cap S$, а значит, $I \cap S = S$. Итак, имеем $I = (I \cap L) \oplus S$, где $I \cap L$ — идеал из случая 1, причем он равен прямой сумме конечного числа идеалов колец K_p. В частности, получаем, что I — конечно порожденный идеал, а значит, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Любой конечно порожденный идеал кольца K является главным, т.е. K — кольцо Безу.*

Учитывая строение идеалов кольца K_χ, можно сделать вывод, что наследственность этого кольца равносильна тому, что характеристика χ состоит только из символов 0, 1 и ∞. Единственными регулярными будут кольца K_χ, где χ содержит только 0 и 1. (Регулярные и наследственные кольца определяются в разделах 6 и 7.)

Нетрудно найти строение гомоморфных образов кольца K, т.е. циклических K-модулей.

Мы убедимся позже, что *sp*-группы тесно связаны с модулями над кольцом K. Поэтому имеет смысл получить некоторую информацию о K-модулях. Уточним, что по прежнему K — это кольцо K_χ для какой-то характеристики χ.

Пусть M — такой K-модуль, что $TM = 0$. Тогда M есть K/T-модуль, т.е. $\mathbb{Q}$-пространство. При этом верно равенство $rm = |r|m$ для любых $r \in K$ и $m \in M$.

Предложение 3.2. *Всякий K-модуль D такой, что $TD = 0$ (т.е. являющийся $\mathbb{Q}$-пространством) инъективен.*

Доказательство. Воспользуемся известным критерием инъективности — леммой Бэра. Пусть I — некоторый идеал кольца K и $\varphi : I \to D$ — K-гомоморфизм. Нужно показать, что φ продолжается до гомоморфизма $K \to D$. Если $I \subseteq T$, то, очевидно, $\varphi = 0$, и доказывать нечего. Если же $I \not\subseteq T$, то $K = L \oplus S$ и $I = (I \cap L) \oplus S$. Опять $\varphi(I \cap L) = 0$ и, очевидно, φ имеет требуемое продолжение. □

Если D — K-модуль, являющийся $\mathbb{Q}$-пространством, причем $rm = |r|m$ для любых $r \in K$ и $m \in D$, то будем называть D *делимым K-модулем*. K-модуль, не содержащий ненулевых делимых подмодулей, будем называть *редуцированным*.

Следствие 3.3. *Всякий K-модуль M раскладывается в сумму $A \oplus D$, где A — редуцированный K-модуль, а D — делимый K-модуль.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $D = \{x \in M \mid Tx = 0\}$ — наибольший делимый подмодуль K-модуля M. □

Пусть M — редуцированный K-модуль. Для каждого простого p имеет место разложение $K = K_p \oplus L^{(p)}$, причем $pL^{(p)} = L^{(p)}$. Отсюда получаем модульное разложение $M = K_pM \oplus L^{(p)}M$, где K_pM — K_p-модуль. Обозначим K_pM через M_p и назовем по аналогии с группами *p-компонентой модуля M*. Тогда $TM = \bigoplus\limits_{p \in P} M_p$ и M/TM — $\mathbb{Q}$-пространство. Итак, $M = M_p \oplus N^{(p)}$ для каждого простого p, где $pN^{(p)} = N^{(p)}$. Поэтому имеет место канонический гомоморфизм $f : M \to \prod\limits_{p \in P} M_p$, аналогичный описанному перед предложением 1.4. Как и там, говоря о вложении $M \subseteq \prod\limits_{p \in P} M_p$, имеем в виду, что f — мономорфизм и мы отождествляем M с $f(M)$.

Предложение 3.4. *Пусть M — редуцированный K-модуль. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Существуют вложения K-модулей $\bigoplus\limits_{p \in P} M_p \subseteq M \subseteq \prod\limits_{p \in P} M_p$.*
2. *M — чистый подмодуль в $\prod\limits_{p \in P} M_p$ (чистота относится к аддитивным группам данных модулей).*

Доказательство. В п. 1 достаточно заметить, что модуль $\ker f = \bigcap\limits_{p \in P} N^{(p)}$ является $\mathbb{Q}$-пространством, следовательно, $\ker f = 0$. По поводу п. 2 скажем, что, как и в предложении 1.4, чистота модуля M равносильна тому, что M/TM — $\mathbb{Q}$-пространство. □

Каждая p-компонента M_p редуцированного K-модуля M является p-адическим модулем (т.е. $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модулем). Поэтому, если M имеет бесконечное число ненулевых p-компонент M_p, то как группа, M относится к тому классу групп (более широкому по отношению с sp-группами), указанному после доказательства предложения 1.4. Верно и обратное. В частности, на всякой sp-группе можно задать структуру модуля над различными кольцами K_χ.

Напомним, что любая p-группа C является $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модулем. Если C — ограниченная группа и p^m — точная верхняя грань порядков ее элементов, то C есть $\mathbb{Z}_{p^n}$-модуль для всякого $n \geqslant m$.

Пусть теперь дана sp-группа A. Составим характеристику $\chi_m = (k_p)$ следующим образом. Полагаем $k_p = 0$ при $t_p(A) = 0$ и $k_p = \infty$, если $t_p(A)$ — неограниченная p-группа, в противном случае пусть p^{k_p} — точная верхняя грань порядков элементов группы $t_p(A)$. Зафиксируем характеристику χ с $\chi \geqslant \chi_m$. Зададим на группе A структуру K_χ-модуля. Возьмем произвольный элемент $r \in K_\chi$ и запишем как ранее $K_\chi = L \oplus S$ и $r = er + (n/m)(1 - e)$. Можно также записать $A = LA \oplus SA$. Элемент er действует на LA обычным (т.е. единственным возможным) способом, а $(n/m)(1 - e)$ умножает SA на n/m. Итак, A — K_χ-модуль. Понятно, что это единственная структура модуля над K_χ, которая существует на A.

Задавая на sp-группе структуру модуля над некоторым кольцом K, мы на самом деле не слишком «удаляемся» от ее групповых свойств. Этому высказыванию можно придать строгий смысл, привлекая понятия E-модуля и T-модуля. Приведем определения этих объектов (подробнее см. [31, 71]).

Пусть R — коммутативное кольцо. R-модуль M называется E-модулем, если имеет место равенство $\mathrm{Hom}_R(R, M) = \mathrm{Hom}(R, M)$. Если R-модуль R является E-модулем, то R называется

E-кольцом. Говорят, что M — T-модуль, если каноническое отображение $R \otimes_R M \to R \otimes M$, $r \otimes m \mapsto r \otimes m$, $r \in R$ и $m \in M$, является изоморфизмом. Применяя это определение к R-модулю R, приходим к понятию T-кольца. Известно, что T-кольцо является E-кольцом, всякий модуль над T-кольцом является E-модулем и T-модулем (см. [61]).

Хорошо известно, что $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — E-кольцо, а $\mathbb{Z}_{p^n}$ — E-кольцо и T-кольцо.

Теорема 3.5. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Всякое кольцо K_χ является E-кольцом.*
2. *Если характеристика χ не содержит ∞, то K_χ — T-кольцо.*
3. *Если A — sp-группа, являющаяся K-модулем, то A — E-модуль и T-модуль.*

Доказательство. Начнем с доказательства п. 3. Пусть $f : K \to A$ — произвольный аддитивный гомоморфизм, где $K = K_\chi$. Нужно проверить, что f — K-модульный гомоморфизм, т.е. $f(rx) = rf(x)$ для любых $r, x \in K$. Запишем опять $K = L \oplus S$, $A = LA \oplus SA$ и $r = er + (n/m)(1 - e)$, $x = y + z$, где $y \in L$, $z \in S$. Гомоморфизм f отображает L в LA и S в SA. Кольцо L есть прямая сумма конечного числа колец вида $\mathbb{Z}_{p^n}$ и $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Поэтому LA как L-модуль будет E-модулем. Тогда, учитывая, что $rz = (n/m)(1 - e)z = (n/m)z$, получаем

$$f(rx) = f(ery) + f((n/m)(1 - e)z) = erf(y) + (n/m)(1 - e)f(z) = \\ = erf(x) + (n/m)(1 - e)f(x) = rf(x).$$

Следовательно, A — E-модуль.

Докажем, что A является T-модулем. Всегда имеет место эпиморфизм

$$K \otimes A \to K \otimes_K A, \quad x \otimes a \mapsto x \otimes a, \quad x \in K,\ a \in A.$$

Покажем, что это отображение обладает обратным. Достаточно убедиться, что в $K \otimes A$ справедливо равенство $xr \otimes a = x \otimes ra$ для всех $x, r \in K$, $a \in A$. Это сделать несложно, воспользовавшись еще раз разложениями $K = L \oplus S$ и $A = LA \oplus SA$, и учесть, что LA как L-модуль является T-модулем.

Утверждение 1 доказывается аналогично тому, что A есть E-модуль.

Утверждение 2 вытекает из 3 и [31, Proposition 1.10] или [61, Proposition 2.1]. □

По отношению к *sp*-группе будем употреблять параллельно как групповую, так и модульную терминологию. Конкретную *sp*-группу A будем считать модулем над некоторым кольцом K_χ. Для определенности можно, например, взять в качестве χ наименьшую возможную характеристику χ_m (см. выше). Либо, наоборот, в качестве χ взять характеристику $(\infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$ (и тогда $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ для всех простых p). В любом случае K будет обозначать, как и раньше, одно из таких колец K_χ.

Использование теории модулей дает дополнительные средства для изучения *sp*-групп. Характерным здесь результатом можно считать следующую теорему.

Теорема 3.6. *sp-Группа A является самомалой группой конечного ранга в точности тогда, когда A — конечно порожденный K-модуль.*

Доказательство. Воспользуемся равносильностью утверждений 1 и 3 теоремы 2.2. Как и ранее, через ε_p будем обозначать проекцию $A \to t_p(A)$. Будем учитывать также разложение $K = K_p \oplus L_p$.

Предположим сначала, что A — самомалая группа конечного ранга. Пусть F — такая квазисущественная свободная подгруппа в A, что $\varepsilon_p(F) = t_p(A)$ для почти всех простых p с $t_p(A) \neq 0$. Если $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — базис группы F, то $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ — базис $\mathbb{Q}$-пространства $A/t(A)$, где $\bar{x}_i = x_i + t(A)$. Теперь напомним, что $K/T = \mathbb{Q}$. Далее, $\{\varepsilon_p(x_1), \varepsilon_p(x_2), \ldots, \varepsilon_p(x_n)\}$ — система образующих группы $t_p(A)$ как $\mathbb{Z}$-модуля и как K_p-модуля. После всего сказанного ясно, что $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — система образующих K-модуля A, т.е. A — конечно порожденный K-модуль.

Считаем теперь, что A — конечно порожденный K-модуль. Из соотношений

$$K = K_p \oplus L_p, \quad A = K_p A \oplus L_p A = t_p(A) \oplus L_p A$$

вытекает конечная порожденность K_p-модуля $t_p(A)$. Это означает, что $t_p(A)$ — конечная p-группа. Возьмем некоторую систему образующих $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ K-модуля A. Можно считать, что все x_i имеют бесконечный порядок и что они линейно независимы. После чего ясно, что $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, где $\bar{x}_i = x_i + t(A)$, образуют базис $\mathbb{Q}$-пространства $A/t(A)$. В частности, A имеет конечный ранг. Пусть F — свободная подгруппа в A, порожденная множеством X. Тогда $t_p(A) = \varepsilon_p(F)$ для всех простых p. Итак, A удовлетворяет условию на проекции, значит, A — самомалая группа. □

В конце раздела получим исчерпывающее описание двух важных и взаимосвязанных классов K-модулей. Речь идет о плоских и инъективных модулях.

Правый модуль M над некоторым кольцом R называется *плоским*, если всякий мономорфизм левых R-модулей $\alpha : A \to B$ индуцирует мономорфизм групп

$$1 \otimes \alpha : M \otimes_R A \to M \otimes_R B, \quad x \otimes a \mapsto x \otimes \alpha(a), \quad x \in M,\ a \in A.$$

Плоскостность модуля M равносильна тому, что для любого [конечно порожденного] левого идеала I кольца R канонический эпиморфизм

$$M \otimes_R I \to MI, \quad x \otimes r \to xr, \quad x \in M,\ r \in R,$$

является изоморфизмом.

Пусть K — одно из колец K_χ. Нам известно строение идеалов кольца K, поэтому мы легко найдем строение плоских K-модулей. Но прежде напомним строение плоских K_p-модулей. $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — это кольцо главных идеалов и плоские модули над ним суть модули без кручения. Плоские модули над кольцом $\mathbb{Z}_{p^k}$ совпадают со свободными модулями.

Теорема 3.7. *K-Модуль M является плоским в точности тогда, когда p-компонента M_p — плоский K_p-модуль для каждого простого p.*

Доказательство. Плоскостность сохраняется при переходе к прямым слагаемым. Предположим теперь, что каждая p-компонента M_p — плоский K_p-модуль, и установим плоскостность K-модуля M. Конечно порожденный идеал I кольца K может иметь вид $I = \bigoplus\limits_{p \in P} (I \cap K_p)$, причем $I \cap K_p$ отлично от нуля лишь для конечного числа простых p. Запишем $K = L \oplus S$, где $I \subseteq L$ и L — сумма конечного числа колец K_p. Имеем равенство $M = LM \oplus SM$. Собственно, задача заключается в проверке того, что LM — плоский L-модуль. Но это, очевидно, так, если учесть абзац перед теоремой. Вторая возможность для идеала I состоит в том, что $I = (I \cap L) \oplus S$, где L и S имеют тот же смысл, что и выше. Поскольку S — прямое слагаемое кольца K, то все сводится к разобранному первому случаю. □

Перейдем к инъективным K-модулям. Инъективный $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модуль равен прямой сумме копий модулей $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ и $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ ($\widehat{\mathbb{Q}}_p$ — поле p-адических чисел; см. [60, раздел 6]). Инъективные $\mathbb{Z}_{p^k}$-модули совпадают со свободными модулями.

Теорема 3.8. *K-Модуль M инъективен в точности тогда, когда он имеет вид*

$$M = \prod_{p \in P} D_p \oplus D,$$

где D — делимый K-модуль и D_p — инъективный K_p-модуль для каждого простого p.

Доказательство. В предложении 3.2 установлено, что D является инъективным K-модулем. Прямое произведение инъективных модулей есть инъективный модуль. С учетом следствия 3.3 осталось убедиться, что инъективный редуцированный K-модуль M имеет вид $M = \prod\limits_{p \in P} D_p$, где D_p —

инъективный K_p-модуль. В силу предложения 3.4 можно считать, что $M \subseteq \prod\limits_{p\in P} M_p$, где M_p — p-компонента модуля M. Эта p-компонента как прямое слагаемое инъективного модуля есть инъективный K-модуль и, значит, инъективный K_p-модуль. Обозначим M_p через D_p, тогда M есть прямое слагаемое модуля $\prod\limits_{p\in P} D_p$. Поскольку $\prod\limits_{p\in P} D_p/M$ — делимый K-модуль (предложение 3.4), то модуль M должен совпасть с $\prod\limits_{p\in P} D_p$. □

4. Конечно порожденные K-модули

Рассмотрим строение нескольких классов конечно порожденных K-модулей. Как и в разделе 3, K обозначает одно из колец K_χ, а $T = T_\chi = \bigoplus\limits_{p\in P} K_p$.

Пусть M — некоторый конечно порожденный K-модуль. Согласно следствию 3.3 имеет место равенство $M = A \oplus D$, где A — редуцированный, а D — делимый K-модули. Для редуцированного модуля A согласно предложению 3.4 справедливы чистые вложения

$$\bigoplus_{p\in P} A_p \subseteq A \subseteq \prod_{p\in P} A_p,$$

где $A_p = K_pA$ — p-компонента модуля A (понятие p-компоненты K-модуля введено перед предложением 3.4). Каждая p-компонента A_p — конечно порожденный K_p-модуль. Следовательно, A_p — прямая сумма конечного числа циклических K_p-модулей. В связи с этим разумно исключить из рассмотрения модули A, совпадающие с $\bigoplus\limits_{p\in P} A_p$. Итак, считаем, что $A \neq \bigoplus\limits_{p\in P} A_p$ и A — чистый подмодуль в $\prod\limits_{p\in P} A_p$. Такие модули A будем по аналогии с sp-группами называть *sp-модулями*. В этом разделе, как правило, под K-модулем понимаем sp-модуль.

Пусть A — sp-модуль. Так как $K = K_p \oplus L^{(p)}$, то $A = K_pA \oplus L^{(p)}A = A_p \oplus A^{(p)}$ для каждого простого p. Проекцию $A \to A_p$ с ядром $A^{(p)}$ будем обозначать ε_p.

Итак, пусть A — конечно порожденный sp-модуль. Удобно иметь в распоряжении некоторую «хорошую» его систему образующих. K-Модуль A назовем *стандартным*, если он обладает такой системой образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ — базис $\mathbb{Q}$-пространства A/TA, где $\bar{x}_i = x_i + TA$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае систему $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем называть *стандартным базисом* модуля A. Стандартность модуля A на групповом языке равносильна тому, что имеется такая свободная подгруппа F в A, что $F \cap TA = 0$ и $\varepsilon_p(F) = A_p$ для всех простых p. Докажем один полезный критерий стандартности.

Лемма 4.1. *Пусть A — конечно порожденный sp-модуль, $\dim_{\mathbb{Q}}(A/TA) = n$. Стандартность модуля A эквивалентна существованию короткой точной последовательности $0 \to C \to K^n \to A \to 0$, в которой C — прямая сумма циклических K_p-модулей для некоторых p. Если модуль A стандартен, то в любой такой последовательности модуль C имеет указанное строение.*

Доказательство. Пусть A — стандартный модуль и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — его стандартный базис. Так как он является системой образующих для модуля A, то существует точная последовательность $0 \to C \to K^n \xrightarrow{g} A \to 0$. $\mathbb{Q}$-Пространства K^n/T^n и A/TA имеют одинаковую размерность, следовательно, g индуцирует изоморфизм этих пространств. Таким образом, $\ker g \subseteq T^n$ и, значит, $C = \ker g$ имеет требуемое строение. Справедливость всего оставшегося очевидна из проведенных выше рассуждений. □

Естественно теперь свести изучение конечно порожденных K-модулей к изучению стандартных K-модулей.

Предложение 4.2. *Произвольный конечно порожденный K-модуль A имеет вид $A = B \oplus C$, где B — стандартный K-модуль, а C — прямая сумма конечного числа циклических K_p-модулей для некоторых простых p.*

Доказательство. Существование указанного разложения можно вывести из доказательства теоремы 3.6. Нужно выбрать квазисущественную свободную подгруппу F с $F \cap TA = 0$, затем с помощью ее базиса определить модуль B.

Дадим немного иное доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — некоторая система образующих K-модуля A, т.е. $A = Ka_1 + Ka_2 + \ldots + Ka_k$. Понятно, что размерность $\mathbb{Q}$-пространства A/TA не превосходит k. Можно считать, что элементы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ образуют базис пространства A/TA, где $\bar{a}_i = a_i + TA$, $n \leqslant k$. Выразим элементы $\bar{a}_{n+1}, \ldots, \bar{a}_k$ через этот базис. Тогда, возвращаясь к элементам модуля A, получим равенства

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} a_j + c_i,$$

в которых $r_{ij} \in K$, $c_i \in TA$ и $i = n+1, \ldots, k$. Подмодуль $Kc_{n+1} + \ldots + Kc_k$ содержится в сумме конечного числа p-компонент A_p, которую обозначим через C. Тогда запишем $A = B \oplus C$, где B — дополнительное к C прямое слагаемое. Нетрудно видеть, что B и C — подмодули искомого вида. □

Следствие 4.3. *Если A — такой конечно порожденный K-модуль, что $\dim_{\mathbb{Q}}(A/TA) = 1$, то $A \cong K_\chi \oplus C$ для некоторой характеристики χ и модуля C такого как в предложении 4.2.*

Доказательство. Запишем $A = B \oplus C$ как в предложении 4.2. Получается, что B — стандартный циклический K-модуль. Такой модуль изоморфен K_χ, как следует из результатов раздела 3. □

Используя стандартные базисы, можно сформулировать некоторые условия разложимости конечно порожденного K-модуля в прямую сумму определенных модулей.

Если A — конечно порожденный K-модуль, то каждая p-компонента A_p есть прямая сумма конечного числа циклических K_p-модулей. Это число является инвариантом модуля A; будем его обозначать $r(A_p)$.

Предложение 4.4. *Конечно порожденный стандартный K-модуль A является прямой суммой циклических модулей в точности в том случае, когда A имеет такой стандартный базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что $\varepsilon_p(a_1), \varepsilon_p(a_2), \ldots, \varepsilon_p(a_n)$ — базис модуля A_p для каждого простого p (некоторые из $\varepsilon_p(a_i)$ могут равняться нулю).*

Доказательство. Предположим, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — такой стандартный базис модуля A, что $\varepsilon_p(a_1), \varepsilon_p(a_2), \ldots, \varepsilon_p(a_n)$ — базис модуля A_p для каждого простого p. Предполагая $C_i = Ka_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, убедимся, что

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} C_i.$$

Пусть $x \in C_k \cap \sum\limits_{i \neq k} C_i$ для некоторого k. Тогда

$$x = r_k a_k = \sum_{i \neq k} r_i a_i$$

для каких-то $r_k, r_i \in K$. Отсюда для любого простого p имеем

$$r_k \varepsilon_p(a_k) = \sum_{i \neq k} r_i \varepsilon_p(a_i).$$

Но тогда по предположению $\varepsilon_p(r_k a_k) = 0$ для всех p и $x = r_k a_k = 0$. □

Предложение 4.5. *Конечно порожденный K-модуль A свободен в точности тогда, когда он стандартен, $r(A_p) = \dim_{\mathbb{Q}}(A/TA)$ и A_p — свободный K_p-модуль для всех таких простых p, что $A_p \neq 0$.*

Доказательство. Нуждается в доказательстве только достаточность условия. Запишем точную последовательность из леммы 4.1:

$$0 \to C \to K^n \to A \to 0.$$

Тогда из предположений легко выводим, что $C = 0$ и $A \cong K^n$. □

Модуль M над произвольным кольцом S называется *конечно представимым*, если существует точная последовательность $0 \to N \to K^n \to M \to 0$, в которой N — конечно порожденный модуль. Хорошо известно, что если M конечно представим, то в любой такой последовательности модуль N будет конечно порожденным.

Предложение 4.6. *Стандартный K-модуль A с $\dim_{\mathbb{Q}}(A/TA) = n$ является конечно представимым в точности тогда, когда найдется такой идемпотент $e \in K$, являющийся суммой конечного числа единичных элементов колец K_p, что $(1-e)A \cong (1-e)K^n$.*

Доказательство. Если A — конечно представимый K-модуль, то в точной последовательности $0 \to C \to K^n \to A \to 0$ из леммы 4.1 модуль C является прямой суммой конечного числа циклических K_p-модулей для некоторых p. Тогда найдется такой идемпотент $e \in K$ (e есть сумма конечного числа единичных элементов колец K_p), что $K^n = (1-e)K^n \oplus eK^n$, $C \subseteq eK^n$ и $A = (1-e)A \oplus eA$. Теперь ясно, что $(1-e)A \cong (1-e)K^n$.

Обратно, пусть существует идемпотент $e \in K$, обладающий свойством $(1-e)A \cong (1-e)K^n$. Так как существует эпиморфизм $K^n \to A$, то имеется точная последовательность

$$0 \to C \to (1-e)K^n \oplus eK^n \to (1-e)A \oplus eA \to 0.$$

Поскольку $C \subseteq eK^n$, модуль C такой же, как и выше. Таким образом, A — конечно представимый K-модуль. □

Получается, что конечно представимый модуль имеет вид $P \oplus C$, где P — проективный модуль, а C — прямая сумма конечного числа циклических K_p-модулей для некоторых p.

Найдем строение конечно порожденных проективных модулей.

Предложение 4.7. *Конечно порожденный K-модуль P проективен в точности тогда, когда существуют такие проективные K-модули C и C_1, являющиеся прямыми суммами конечного числа циклических K_p-модулей для некоторых простых p, что $P \oplus C \cong K^n \oplus C_1$ для какого-либо $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть P — конечно порожденный проективный K-модуль. Запишем как в предложении 4.2, $P = P_1 \oplus C_1$, где P_1 — стандартный K-модуль, а C_1 — такой модуль, как указано в условии. Применяя к P_1 лемму 4.1, получаем $K^n \cong P_1 \oplus C$, где C — такой модуль, как в условии. Тогда имеет место изоморфизм $P \oplus C \cong K^n \oplus C_1$. Обратное утверждение очевидно. □

Обратим внимание на два равенства $P = P_1 \oplus C_1$ и $K^n = P_1 \oplus C$, полученные в доказательстве последнего предложения.

Следствие 4.8. *Пусть P — конечно порожденный проективный K-модуль.*

1. *$P \cong (1-e)K^n \oplus C$, где e — некоторый идемпотент, $n \in \mathbb{N}$, и C — прямая сумма конечного числа циклических K_p-модулей.*
2. *P разлагается в прямую сумму подмодулей, изоморфных идеалам кольца K.*

Доказательство. Заметим, что утверждение 2 вытекает из 1. Докажем утверждение 1. Согласно предложению 4.2, $P = P_1 \oplus C_1$, где P_1 — стандартный K-модуль, а C_1 — прямая сумма конечного числа циклических K_p-модулей для некоторых простых p. Модуль P_1 конечно представим, поэтому согласно предложению 4.6 имеем изоморфизм $(1-e)P_1 \cong (1-e)K^n$ для некоторого идемпотента e. Итак, получаем

$$P_1 = (1-e)P_1 \oplus eP_1 \cong (1-e)K^n \oplus eP_1, \quad P \cong (1-e)K^n \oplus eP_1 \oplus C_1.$$

Следствие 4.8 доказано. □

Утверждение 2 из следствия 4.8 справедливо для любых проективных модулей. Именно, Е. А. Тимошенко (см. [9, 10]) доказал следующее утверждение: *всякий проективный K-модуль разлагается в прямую сумму подмодулей, изоморфных идеалам кольца K.*

Известно, что указанная теорема верна для проективных модулей над любым наследственным кольцом. В связи с этим отметим, что если $K = K_\chi$, где характеристика χ состоит только из 0, 1 и ∞, то K — наследственное кольцо. В [9, 10] также найдена полная система инвариантов проективного K-модуля, состоящая из кардинальных чисел.

По аналогии с категорией Walk абелевых групп, определенной в разделе 2, можно рассмотреть похожую категорию K-модулей; обозначим ее тоже Walk. Эта новая категория Walk состоит из K-модулей, множество морфизмов $\mathrm{Hom}_W(A, B)$ есть $\mathrm{Hom}_K(A, B)/\mathrm{Hom}_K(A, TB)$. Введенная категория Walk — это аддитивная категория с ядрами и бесконечными суммами. В этой категории предложение 2.3 принимает следующий вид: *K-модули A и B изоморфны в* Walk *в точности тогда, когда существуют такие модули $M = TM$ и $N = TN$, что $A \oplus M \cong B \oplus N$.*

Пусть $\mathcal{W}$ — полная подкатегория категории Walk, состоящая из конечно порожденных K-модулей. Эта категория имеет те же свойства, что и категория $\mathcal{W}$ абелевых групп из раздела 2. Так, в новой категории $\mathcal{W}$ расщепляются идемпотенты. Неразложимость модуля A в категории $\mathcal{W}$ равносильна локальности его кольца эндоморфизмов $\mathrm{End}_W A$ в $\mathcal{W}$. Затем справедлива теорема Крулля—Шмидта о единственности разложения объекта в прямую сумму неразложимых объектов (т.е. верен аналог следствия 2.7). Имеет место также аналог теоремы 2.9 для прямых разложений вида $M = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, где A_i — неразложимый в $\mathcal{W}$ конечно порожденный K-модуль. Отметим, что циклические K-модули неразложимы в $\mathcal{W}$.

5. Аддитивные задачи в кольцах эндоморфизмов *sp*-групп

Начиная с этого раздела и до конца статьи основное внимание мы сосредоточим на кольцах эндоморфизмов самомалых *sp*-групп конечного ранга.

Пусть R — некоторое кольцо. Элемент $r \in R$ называется *чистым* (clean), если его можно представить в виде $r = u + e$, где u — обратимый элемент, а e — идемпотент кольца R. Кольцо R называется *чистым*, если всякий его элемент является чистым. Основные факты о чистых кольцах изложены в [13].

Как и раньше, радикал Джекобсона кольца R обозначаем $\mathrm{J}(R)$. Если $r \in \mathrm{J}(R)$, то $r = (r-1)+1$, где $r-1$ — обратимый элемент, следовательно, r — чистый элемент. Получаем, что локальное кольцо является чистым. Свойство быть чистым кольцом сохраняется при образовании матричных колец.

Лемма 5.1 (см. [54]). *Пусть e — такой идемпотент кольца R, что оба кольца eRe и $(1-e)R(1-e)$ являются чистыми. Тогда R — чистое кольцо.*

Доказательство. Уточним, что eRe (соответственно, $(1-e)R(1-e)$) является кольцом с единицей e (соответственно, $1-e$).

Кольцо R можно отождествить с кольцом формальных матриц

$$\begin{pmatrix} eRe & eR(1-e) \\ (1-e)Re & (1-e)R(1-e) \end{pmatrix}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} exe & ex(1-e) \\ (1-e)xe & (1-e)x(1-e) \end{pmatrix},$$

$x \in R$ (это известное пирсовское разложение кольца R).

Возьмем теперь матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in R.$$

Запишем $a = u + f$, где u — обратимый элемент в eRe и $f^2 = f \in eRe$. Тогда $b - yu^{-1}x \in (1-e)R(1-e)$, так что можно записать $b - yu^{-1}x = v + g$, где v — обратимый, g — идемпотентный

элемент в $(1-e)R(1-e)$. Имеем равенства

$$A = \begin{pmatrix} u+f & x \\ y & v+g+yu^{-1}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & x \\ y & v+yu^{-1}x \end{pmatrix}.$$

Достаточно убедиться в обратимости последней матрицы. Вычисления подтверждают справедливость равенств

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ -yu^{-1} & 1-e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & x \\ y & v+yu^{-1}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & -u^{-1}x \\ 0 & 1-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & x \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & -u^{-1}x \\ 0 & 1-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$

Поскольку в этих равенствах первая и две последних матрицы обратимы, то доказательство закончено. □

Доказанная лемма и несложная индукция немедленно дают следующий результат.

Предложение 5.2. *Если $e_1, e_2, \dots e_n$ — полная ортогональная система идемпотентов кольца R и каждое кольцо e_iRe_i чистое, то и R — чистое кольцо.*

С помощью предложения 5.2 получаются следующие утверждения.

Следствие 5.3. *Если R — чистое кольцо, то таким же будет и кольцо матриц $M_n(R)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Следствие 5.4. *Если $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ — прямое разложение модуля M и $\operatorname{End} M_i$ — чистое кольцо для каждого i, то $\operatorname{End} M$ — чистое кольцо.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_i : M \to M_i$ — проекция с ядром $\bigoplus\limits_{j\neq i} M_j$. Тогда элементы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ образуют полную ортогональную систему идемпотентов кольца $\operatorname{End} M$. Учитывая далее соотношения

$$\varepsilon_i(\operatorname{End} M)\varepsilon_i \cong \operatorname{End}(\varepsilon_i M) = \operatorname{End} M_i,$$

получаем справедливость доказываемого утверждения. □

Из следствия 5.3 вытекает, что артиново полупростое кольцо, т.е. конечное прямое произведение колец матриц над телами, является чистым. Известен следующий общий факт (см. [39, 65]): *кольцо R является чистым в точности в том случае, когда $R/\mathrm{J}(R)$ — чистое кольцо и идемпотенты можно поднимать по модулю радикала $\mathrm{J}(R)$*. Теперь заключаем, что артиново (слева или справа) кольцо R является чистым. Это можно вывести и из предложения 5.2. В самом деле, если записать $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$, причем все e_i — примитивные идемпотенты, то, как известно, кольца e_iRe_i являются локальными, а значит, чистыми.

Применяя изложенное к кольцам эндоморфизмов получаем, в частности, что кольцо эндоморфизмов конечной группы является чистым кольцом. Но основным применением является следующая теорема.

Будем использовать обозначения, принятые нами в разделе 2: $R = \operatorname{End} A$, $R_t = \operatorname{Hom}(A, t(A))$ и $S = R/R_t$.

Теорема 5.5. *Кольцо эндоморфизмов самомалой sp-группы A конечного ранга есть чистое кольцо.*

Доказательство. Напомним, что каждая p-компонента $t_p(A)$ — конечная p-группа, а S — конечномерная $\mathbb{Q}$-алгебра (это установлено в разделе 2). Поэтому S и все кольца $\operatorname{End} t_p(A)$ чистые.

Пусть $f \in R$. В кольце S имеет место равенство $\bar{f} = \bar{u} + \bar{e}$, где $\bar{u}$ — обратимый, $\bar{e}$ — идемпотентный элемент кольца S (черта означает смежный класс относительно идеала R_t). Переходя к элементам кольца R, получаем равенства

$$f = u + e + h_1, \quad uv = vu + h_2 = id_A + h_3, \quad e^2 - e = h_4,$$

где $h_i \in R_t$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, а $\bar{v}$ — обратный к $\bar{u}$ элемент. Возьмем такое разложение $A = B \oplus C$, что $h_i(B) = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ и C — сумма конечного числа p-компонент $t_p(A)$. Пусть f_1, u_1, e_1 —

ограничения эндоморфизмов f, u, e на слагаемое B, а f_2 — ограничение f на слагаемое C. Тогда $f = f_1 + f_2$ и $f_1 = u_1 + e_1$, где u_1 — обратимый, e_1 — идемпотентный элементы кольца $\operatorname{End} B$. Так как $\operatorname{End} C$ — чистое кольцо, то аналогично $f_2 = u_2 + e_2$, где u_2 — обратимый, e_2 — идемпотентный элементы кольца $\operatorname{End} C$. В итоге получаем искомое представление $f = (u_1 + u_2) + (e_1 + e_2)$. □

Проведенное доказательство демонстрирует технику работы с эндоморфизмами *sp*-группы A. Ее приблизительно можно разбить на следующие этапы. Сначала делаем переход к элементам $\mathbb{Q}$-алгебры S и используем свойства этой алгебры. Затем возвращаемся в кольцо R. При этом дополнительно появляются эндоморфизмы из идеала R_t. На последнем этапе работаем с этими эндоморфизмами, что фактически сводится к работе с эндоморфизмами p-компонент $t_p(A)$. Подобная техника будет неоднократно нами использоваться далее.

Пусть снова R — произвольное кольцо, k — натуральное число. Элемент $a \in R$ называется *k-хорошим* (k-good), если a есть сумма k обратимых элементов кольца R. Говорят, что кольцо R — *k-хорошее*, если каждый его элемент k-хороший. В основном, мы будем иметь дело с 2-хорошими кольцами.

Почти очевидно, что R — k-хорошее кольцо в точности тогда, когда $R/\mathrm{J}(R)$ — k-хорошее кольцо. Кроме того, если R — k-хорошее кольцо, то и кольцо матриц $M_n(R)$ k-хорошее. Теперь также без труда можно убедиться в справедливости следующих фактов:

(i) *конечномерная алгебра над полем характеристики* $\neq 2$ *является* 2*-хорошей*;
(ii) *кольцо эндоморфизмов конечной* p*-группы* ($p \neq 2$) — 2*-хорошее кольцо.*

Пусть A — самомалая *sp*-группа конечного ранга с нулевой 2-компонентой. Тогда кольца $\operatorname{End} t_p(A)$ для всех простых p и S будут 2-хорошими. Рассуждая по той же схеме, что и при доказательстве теоремы 5.5, можно показать, что $\operatorname{End} A$ — 2-хорошее кольцо. Но мы, используя интересную связь между чистыми и 2-хорошими кольцами, прямо выведем из теоремы 5.5 более сильный результат.

Напомним, что элемент $s \in R$ называется *инволюцией*, если $s^2 = 1$. Говоря, что 2 обратима в R, имеем в виду, что $2 \cdot 1_R$ — обратимый элемент кольца R. Вместо $r \cdot 2^{-1}$ будем писать $r/2$.

Предложение 5.6 (см. [39]). *Пусть* 2 *обратима в* R*. Тогда чистота кольца* R *равносильна тому, что каждый элемент из* R *представим в виде суммы обратимого элемента и инволюции.*

Доказательство. Предположим, что R — чистое кольцо и x — произвольный элемент из R. Тогда $(x+1)/2 = u + e$, где u — обратимый элемент и $e^2 = e$. Отсюда находим $x = 2u + (2e - 1)$, где элемент $2u$ обратим и $(2e-1)^2 = 1$.

Обратно, пусть каждый элемент из R представим в виде суммы обратимого элемента и инволюции. Для данного $x \in R$ запишем $2x - 1 = u + s$, где u обратим и $s^2 = 1$. Тогда $x = u/2 + (s+1)/2$, где $u/2$ — обратимый, а $(s+1)/2$ — идемпотентный элементы. □

Из теоремы 5.5 и предложения 5.6 вытекает следующий результат.

Теорема 5.7. *Пусть* A *— самомалая sp-группа конечного ранга с нулевой* 2*-компонентой. Тогда каждый эндоморфизм группы* A *есть сумма двух автоморфизмов, один из которых имеет мультипликативный порядок* 2*. Таким образом,* $\operatorname{End} A$ — 2*-хорошее кольцо.*

Распространим теоремы 5.5 и 5.7 еще на один класс *sp*-групп. Для этого сформулируем некоторое обобщение условия на проекции (последнее определено перед леммой 1.5).

Пусть A — *sp*-группа конечного ранга. Как и в разделе 1, через ε_p обозначим проекцию $A \to t_p(A)$ относительно разложения $A = t_p(A) \oplus B_p$. Будем говорить, что A удовлетворяет *слабому условию на проекции*, если найдется такая квазисущественная свободная подгруппа F в A, что $\varepsilon_p F$ — существенная подгруппа в $t_p(A)$ для почти всех простых p. Отметим, что здесь существенность подгруппы $\varepsilon_p F$ в $t_p(A)$ равносильна тому, что $A[p] \subseteq \varepsilon_p F$.

Пусть A — такая *sp*-группа конечного ранга, что все p-компоненты $t_p(A)$ — циклические группы. Тогда можно доказать, что A имеет вид $A = B \oplus C$, где B — *sp*-группа, удовлетворяющая

слабому условию на проекции, C — периодическая группа, причем B и C не имеют ненулевых p-компонент для одних и тех же простых p.

Теорема 5.8. *Пусть A — sp-группа конечного ранга, удовлетворяющая слабому условию на проекции. Для любого эндоморфизма $\alpha \in \operatorname{End} A$ верно следующее*:

1. *Если $\alpha A \subseteq t(A)$, то существует такое разложение $A = B \oplus t_{p_1}(A) \oplus \ldots \oplus t_{p_k}(A)$, что ограничение эндоморфизма $id_A - \alpha$ на B является автоморфизмом.*
2. *Если дополнительно R/R_t — тело и $\alpha A \nsubseteq t(A)$, то существует такое разложение, как в п. 1, для которого ограничение α на B является автоморфизмом.*

Доказательство. 1. Пусть F — квазисущественная свободная подгруппа группы A из определения слабого условия на проекции. Удаляя, если нужно, конечное число p-компонент $t_p(A)$, можно добиться того, что $\varepsilon_p F$ — существенная подгруппа в $t_p(A)$ для всякого простого p с $t_p(A) \neq 0$. Отсюда получается, что все $t_p(A)$ — конечные группы. Возьмем свободный базис $c_1, c_2, \ldots, c_n$ группы F. Учитывая, что $\alpha A \subseteq t(A)$, и опять отбрасывая некоторое число p-компонент $t_p(A)$, можно считать, что $\alpha(c_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. После чего, ввиду слабого условия на проекции заключаем, что $\alpha(A[p]) = 0$ для всех простых p. Из этого следует, что $id_A - \alpha$ имеет нулевое ядро. Более того, поскольку все $t_p(A)$ — конечные группы, то ограничение $id_A - \alpha$ на $t(A)$ есть автоморфизм.

Проверим, что $id_A - \alpha$ — эпиморфизм. Прежде заметим, что $\alpha F = 0$ и $F + t(A)$ — существенная подгруппа группы A. Пусть x — элемент бесконечного порядка в A. Выберем $m \in \mathbb{N}$ так, что $mx = c + y$, где $c \in F$ и $y \in t(A)$. Тогда $c = (id_A - \alpha)(c)$ и $y = (id_A - \alpha)(z)$ для некоторого $z \in t(A)$. И далее имеем

$$mx = (id_A - \alpha)(c + z) = (id_A - \alpha)(b), \quad b = c + z.$$

Возьмем прямое разложение $A = C \oplus D$, в котором C — сумма конечного числа p-компонент $t_p(A)$, D — дополнительное слагаемое, причем $mD = D$. Запишем $x = x_1 + x_2$ и $b = b_1 + b_2$, где $x_1, b_1 \in C$, $x_2, b_2 \in D$. Выберем элемент $c' \in C$, для которого $x_1 = (id_A - \alpha)(c')$, и еще запишем $b_2 = mc''$, $c'' \in D$. Теперь из $mx_2 = (id_A - \alpha)(b_2)$ находим $x_2 = (id_A - \alpha)(c'')$. В итоге получаем равенство

$$x = x_1 + x_2 = (id_A - \alpha)(c' + c'').$$

Таким образом, $id_A - \alpha$ — эпиморфизм и, значит, автоморфизм.

2. Элемент $\bar{\alpha} = \alpha + R_t$, очевидно, отличен от нуля в кольце R/R_t; следовательно,

$$\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha} = \bar{id}_A$$

для некоторого $\beta \in R$. В кольце R получаем равенство $\alpha\beta = id_A + \gamma$, где $\gamma \in R_t$. Удаляя несколько p-компонент $t_p(A)$, на основании п. 1 можно считать, что $id_A + \gamma$ — автоморфизм прямого слагаемого B. В таком случае α обратим справа на B. Аналогично рассуждая, можно показать, что α обратим слева на той же группе B. □

Следствие 5.9. *Пусть A — sp-группа конечного ранга, удовлетворяющая слабому условию на проекции, p-компонента $t_p(A)$ конечна для любого простого p и R/R_t — тело.*

1. $\operatorname{End} A$ — *чистое кольцо.*
2. *Если дополнительно 2-компонента группы A равна нулю, то каждый эндоморфизм группы A есть сумма двух автоморфизмов, один из которых имеет порядок 2.*

Доказательство. 1. Каждая группа $t_p(A)$ конечная, следовательно, все кольца $\operatorname{End} t_p(A)$ чистые. Поэтому опять можно рассуждать «с точностью до конечного числа p-компонент $t_p(A)$».

Пусть $\alpha \in \operatorname{End} A$, тогда реализуется либо п. 1, либо п. 2 из предыдущей теоремы. Допустим, что $\alpha A \subseteq t(A)$. Тогда $id_A - \alpha$ — автоморфизм группы B и $\alpha = (\alpha - id_A) + id_A$, что дает чистоту элемента α. Если же $\alpha A \nsubseteq t(A)$, то α — автоморфизм группы B и $\alpha = \alpha + 0$ и опять получаем чистоту элемента α.

Утверждение 2 вытекает из 1 и предложения 5.6. □

Следствие 5.10. *Пусть A — sp-группа ранга 1, все p-компоненты которой — циклические группы. Тогда для A верны утверждения из пп. 1 и 2 следствия 5.9.*

Доказательство. Для группы A имеем $R/R_t \cong \mathbb{Q}$. Осталось напомнить, что группу A можно представить в виде $A = B \oplus C$, где B и C — такие группы, как указано перед теоремой 5.8. □

Интерес к вопросу о том, каким образом обратимые элементы кольца могут порождать его аддитивно, восходит к середине XX в. К. Вольфсон [80] и Д. Зелинский [82] независимо доказали, что *всякий линейный оператор векторного пространства V над телом D есть сумма двух обратимых операторов, за исключением очевидного случая, когда* $\dim_D V = 1$ *и* $D = \mathbb{Z}_2$. В связи с этим результатом Скорняков сформулировал такой вопрос: «*Нельзя ли каждый элемент регулярного кольца с единицей представить в виде суммы обратимых элементов?*» (см. [72, проблема 31]). Регулярные (в смысле Неймана) кольца определяются ниже. Вопрос Скорнякова инициировал ряд статей. С историей соответствующих исследований можно познакомиться по обзору А. Сривастава [73], работам М. Хенриксена [56], Р. Рафаэля [69], П. Вамоша [76], Б. Голдсмита, С. Пабста и А. Скотта [52]. Имеются как различные классы регулярных колец, каждый элемент которых может быть записан в виде суммы обратимых элементов (т.е. k-хороших колец), так и такие классы, в которых это не верно.

Более детально остановимся на матричных кольцах. М. Хенриксен [56] доказал, что *всякая матрица над произвольным кольцом R есть 3-хорошая*. Более точно, любая матрица есть сумма диагональной и обратимой матрицы (лемма Капланского). Всякая диагональная матрица есть 2-хорошая. Отметим, что не всегда можно представить матрицу в виде суммы двух обратимых матриц. Так, пусть $R = F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $n > 1$, F — произвольное поле. Тогда кольцо $M_n(R)$ не является 2-хорошим.

Кольца R, для которых кольцо $M_n(R)$ есть 2-хорошее для любого $n > 1$, конечно, существуют. Кольцо R называется *кольцом с диагонализируемыми квадратными матрицами*, если для всякого n любая матрица $A \in M_n(R)$ эквивалентна некоторой диагональной матрице D, т.е. $UAV = D$ для каких-либо обратимых матриц $U, V \in M_n(R)$. Хенриксен доказал, что *если R — кольцо с диагонализируемыми квадратными матрицами, то $M_n(R)$ — 2-хорошее кольцо*. Кольца главных идеалов, кольца нормирования дают примеры колец с диагонализируемыми квадратными матрицами.

Представляет интерес выяснить, какие формальные матрицы будут 2-хорошими (о формальных матрицах см. [62]). Любая формальная матрица, как и обычная, представима в виде суммы диагональной и обратимой матриц. Но не верно, что всякая диагональная формальная матрица является 2-хорошей.

Другая и, по видимому, независимая линия исследования хороших колец появилась в 1963 г. после того, как Л. Фукс (см. [47]) сформулировал следующий вопрос: *когда автоморфизмы абелевой группы порождают* (*аддитивно*) *ее кольцо эндоморфизмов*? В настоящее время известно, что следующие группы имеют 2-хорошие кольца эндоморфизмов: периодически полные p-группы, $p \neq 2$, тотально проективные (в частности, счетные) p-группы, $p \neq 2$ (см. [57]), локальные группы Уорфилда (см. [50]). Прямые суммы абелевых групп и модулей с хорошими кольцами эндоморфизмов рассматривались в [2, 64, 76]. Ряд классов модулей с 2-хорошими кольцами эндоморфизмов указан в [58].

Понятие чистого кольца было предложено Николсоном в 1977 г., как пример кольца, в котором идемпотенты поднимаются по модулю любого правого (левого) идеала (см. [65]), т.е. каждое чистое кольцо является заменяемым кольцом. Николсон также доказал, что *заменяемое кольцо с центральными идемпотентами является чистым*.

Элемент r кольца R называется *регулярным*, если найдется такой элемент $x \in R$, что $r = rxr$; кольцо R называется *регулярным* (в смысле Неймана), если каждый его элемент регулярен. Элемент $r \in R$ называется *обратимо-регулярным*, если найдется такой обратимый элемент $v \in R$, что $r = rvr$, или, что равносильно, $r = ue$, где u — обратимый элемент кольца R,

e — идемпотент. Кольцо R называется *обратимо-регулярным*, если всякий его элемент является обратимо-регулярным. Таким образом, чистые кольца являются аддитивным аналогом обратимо-регулярных колец.

Доказано, что обратимо-регулярное кольцо является чистым (см. [37, 39]). В то же время существуют регулярные кольца, не являющиеся чистыми. Бергман (см. [55]) сконструировал регулярное кольцо с обратимой 2, в которых не всякий элемент представим в виде суммы обратимых элементов. В силу предложения 5.6 такое кольцо не может быть чистым. Поскольку регулярные кольца являются заменяемыми, из [65] следует, что класс чистых колец есть собственный подкласс класса заменяемых колец.

Камилло и Ю (см. [39]) доказали, что кольцо является полусовершенным в точности тогда, когда оно чистое и не содержит бесконечных семейств ортогональных идемпотентов. Еще раз получаем, что артиново кольцо является чистым.

Отдельное направление в изучение чистых колец составляют *строго чистые* (strongly clean) кольца: в этом случае каждый элемент кольца должен быть представим в виде суммы обратимого и идемпотентного элементов, которые коммутируют между собой (см. [66]).

Довольно много работ посвящено строгой чистоте колец формальных матриц и обычных матриц, например, [29, 30, 63, 81].

Вопрос о чистоте колец эндоморфизмов абелевых групп и модулей также привлекал к себе внимание. Мощный результат получен в [38]: *кольцо эндоморфизмов непрерывного модуля является чистым*. К непрерывным модулям, например, относятся квазиинъективные модули. В [38] также доказано, что кольцо эндоморфизмов плоского копериодического модуля (в частности, чисто инъективного модуля) есть чистое кольцо. Чистота колец эндоморфизмов абелевых групп исследовалась в [7, 53]. В [53] установлено, что кольцо эндоморфизмов периодически полной группы чистое, а кольцо эндоморфизмов тотально проективной группы A (например, счетной) чистое в точности тогда, когда A — ограниченная группа.

6. Идеалы колец эндоморфизмов *sp*-групп

Для произвольного кольца R, по-прежнему, $\mathrm{J}(R)$ — радикал Джекобсона кольца R, а $\mathrm{N}(R)$ — нильрадикал кольца R, т.е. сумма всех его нильидеалов.

Будем использовать идеал Пирса $\mathrm{P}(A)$ для p-группы A. Это идеал кольца $\operatorname{End} A$, состоящий из всех эндоморфизмов, повышающих высоту каждого элемента порядка p группы A. Справедливо включение $\mathrm{J}(\operatorname{End} A) \subseteq \mathrm{P}(A)$, которое превращается в равенство, если A — конечная группа (см. [59, раздел 20]).

Для sp-группы введем аналог идеала Пирса. Если A — sp-группа, то положим

$$\mathrm{P}(A) = \Big\{\alpha \in \operatorname{End} A \;\Big|\; \alpha\big|_{t_p(A)} \in \mathrm{P}(t_p(A)) \text{ для каждого } p\Big\},$$

где $\mathrm{P}(t_p(A))$ — идеал Пирса p-группы $t_p(A)$. Поскольку $\mathrm{J}(\operatorname{End} t_p(A)) \subseteq \mathrm{P}(t_p(A))$ для всякого простого p, то $\mathrm{J}(\operatorname{End} A) \subseteq \mathrm{P}(A)$. Если A — самомалая sp-группа, то $t_p(A)$ — конечная группа (предложение 1.2) и, значит, $\mathrm{J}(\operatorname{End} t_p(A)) = \mathrm{P}(t_p(A))$.

Для sp-группы A снова фиксируем обозначения (впервые мы их использовали в разделе 2): $R = \operatorname{End} A$, $R_p = \operatorname{End} t_p(A)$, $R_t = \operatorname{Hom}(A, t(A))$ и $S = R/R_t$. Если дополнительно A — самомалая группа, то справедливо равенство $R_t = \bigoplus\limits_{p\in P} R_p$.

Будем постоянно использовать приемы работы с sp-группами, о которых говорилось после доказательства теоремы 5.5.

Теорема 6.1. *Если A — самомалая sp-группа конечного ранга, то имеют место равенства*

$$\mathrm{J}(\operatorname{End} A) = \mathrm{N}(\operatorname{End} A) = \mathrm{P}(A).$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{J}(R)$; тогда $\alpha + R_t \in \mathrm{J}(S)$. Поскольку S — конечномерная $\mathbb{Q}$-алгебра, то $\alpha^k \in R_t$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Можно считать, что $A = B \oplus C$, где C — сумма конечного

числа p-компонент $t_p(A)$, B — дополнительное слагаемое, причем $\alpha^k(B) = 0$, а $\left(\alpha\big|_C\right)^k \in \mathrm{J}(\mathrm{End}\, C)$. Поскольку кольцо $\mathrm{End}\, C$ конечное, то $\alpha^{km} = 0$, где $m \in \mathbb{N}$, и, следовательно, α — нильпотентный элемент. Таким образом, $\mathrm{J}(\mathrm{End}\, A) = \mathrm{N}(\mathrm{End}\, A)$.

Уже замечено, что $\mathrm{J}(\mathrm{End}\, A) \subseteq \mathrm{P}(A)$. Чтобы доказать обратное включение, возьмем некоторый эндоморфизм $\alpha \in \mathrm{P}(A)$. Для каждого простого числа p имеем $\alpha_p \in \mathrm{P}(t_p(A)) = \mathrm{J}(R_p)$, где α_p — ограничение α на $t_p(A)$. Тогда $id_{t_p(A)} - \alpha_p$ является обратимым элементом кольца $\mathrm{End}\, t_p(A)$ и автоморфизмом группы $t_p(A)$. В таком случае $\beta = id_A - \alpha$ — мономорфизм группы A и левый неделитель нуля в $\mathrm{End}\, A$. Допустим, что $\bar{\beta}\bar{\delta} = 0$ для некоторого $\delta \in R$ (черта обозначает смежный класс относительно R_t). Тогда $\beta\delta \in R_t$. Запишем $A = B \oplus C$, где C — сумма конечного числа p-компонент $t_p(A)$, B — дополнительное слагаемое и $\beta\delta(B) = 0$. Можно выбрать δ так, чтобы $\delta C = 0$. Тогда $\beta\delta = 0$, откуда $\bar{\delta} = 0$. Следовательно, элемент $\bar{id}_A - \bar{\alpha}$ является левым неделителем нуля в S и, значит, обратимым элементом (поскольку алгебра S конечномерна).

Возьмем такой элемент $\gamma \in R$, что

$$(\bar{id}_A - \bar{\alpha})\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\bar{id}_A - \bar{\alpha}) = \bar{id}_A$$

в кольце S. Можно так подобрать разложение $A = B \oplus C$ (C — сумма конечного числа p-компонент $t_p(A)$), что выполняется равенство

$$(id_B - \alpha)\gamma = \gamma(id_B - \alpha) = id_B$$

на дополнительном слагаемом B. Тогда сужение $(id_A - \alpha)|_B$ является автоморфизмом группы B. Поскольку $id_{t_p(A)} - \alpha_p$ будет автоморфизмом группы $t_p(A)$ при любом простом p, то $id_A - \alpha$ — автоморфизм группы A и обратимый элемент кольца $\mathrm{End}\, A$. Так как $\mathrm{P}(A)$ — идеал в $\mathrm{End}\, A$, то $\mathrm{P}(A) \subseteq \mathrm{J}(\mathrm{End}\, A)$ и эти идеалы равны. □

Пусть A — конечная p-группа. Наименьшее натуральное число m со свойством $p^m A = 0$ называется *экспонентой* $e(A)$ группы A. Используя равенство $\mathrm{J}(\mathrm{End}\, A) = \mathrm{P}(A)$, можно показать, что индекс нильпотентности идеала $\mathrm{J}(\mathrm{End}\, A)$ не превосходит $2e(A) - 1$ (см. [67]). Опираясь на этот факт, из доказательства теоремы 6.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 6.2. *Радикал* $\mathrm{J}(\mathrm{End}\, A)$ *для группы* A *из теоремы* 6.1 *нильпотентен в точности тогда, когда множество экспонент* $e(t_p(A))$ *всех групп* $t_p(A)$ *имеет точную верхнюю грань.*

Иногда мы будем использовать *sp*-кольца, введенные в разделе 1. Повторим, что для данного *sp*-кольца K можно считать, что имеются чистые вложения колец

$$\bigoplus_{p\in P} K_p \subset K \subseteq \prod_{p\in P} K_p,$$

где K_p — $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-алгебра для каждого простого p. При этом предполагается, что $K_p \neq 0$ для бесконечного множества простых чисел p. В частности, K_p может быть p-кольцом (аддитивная группа которого — p-группа). Для каждого p имеем прямую сумму колец $K = K_p \oplus L^{(p)}$, причем $pL^{(p)} = L^{(p)}$ и деление на p в $L^{(p)}$ производится однозначно. Кольцо эндоморфизмов любой *sp*-группы и его центр являются *sp*-кольцами.

Будем называть *sp*-группу A *элементарной*, если каждая ее p-компонента $t_p(A)$ — элементарная группа (все ненулевые элементы элементарной p-группы имеют порядок p). Кольцо K назовем *элементарным sp-кольцом*, если его аддитивная группа является элементарной *sp*-группой. Определение регулярного кольца приводится в разделе 5.

Лемма 6.3. *Регулярность sp-кольца* K *эквивалентна регулярности колец* $K/t(K)$ *и* K_p *для всех простых* p.

Доказательство. Факторкольцо регулярного кольца является регулярным кольцом. Предположим поэтому, что все кольца $K/t(K)$ и K_p регулярны. Пусть $x \in K$. Найдутся такие элементы

$a \in K$ и $c \in t(K)$, что $xax = x + c$. Рассмотрим разложение $K = M \oplus L$, где M — сумма конечного числа p-компонент K_p, причем $c \in M$, L — дополнительное слагаемое. Запишем $x = x_1 + x_2$, $a = a_1 + a_2$, где $x_1, a_1 \in M$ и $x_2, a_2 \in L$. Тогда $x_2 a_2 x_2 = x_2$ (учитывая, что $LM = 0 = ML$). По условию M является регулярным кольцом; следовательно, $x_1 b x_1 = x_1$ для некоторого элемента $b \in M$. Легко видеть, что $x(a_2 + b)x = x$; значит, K — регулярное кольцо. □

Пусть A — некоторая sp-группа, J — такой идеал кольца $\operatorname{End} A$, что $R_t \subseteq J$ и $J/R_t = \mathrm{J}(R/R_t) = \mathrm{J}(S)$. Очевидно, $\mathrm{J}(R) \subseteq J$ и, значит, $\mathrm{J}(R) + R_t \subseteq J$.

Теорема 6.4. *Пусть A — произвольная самомалая sp-группа конечного ранга. Тогда* $\operatorname{End} A/\mathrm{J}(\operatorname{End} A)$ — *элементарное sp-кольцо*; *оно регулярно в точности тогда, когда* $\mathrm{J}(R) + R_t = J$.

Доказательство. Для каждого простого p имеем равенство $R = R_p \oplus L^{(p)}$, где R_p — конечное p-кольцо и $pL^{(p)} = L^{(p)}$. Следовательно,

$$\mathrm{J}(R) = \mathrm{J}(R_p) \oplus \mathrm{J}(L^{(p)}), \quad R/\mathrm{J}(R) = R_p/\mathrm{J}(R_p) \oplus L^{(p)}/\mathrm{J}(L^{(p)}),$$

причем

$$p(L^{(p)}/\mathrm{J}(L^{(p)})) = L^{(p)}/\mathrm{J}(L^{(p)}).$$

Из предложения 1.4 вытекает, что $R/\mathrm{J}(R)$ является sp-кольцом. Поскольку

$$p(t_p(A)) \subseteq \mathrm{P}(t_p(A)) = \mathrm{J}(R_p),$$

то $R_p/\mathrm{J}(R_p)$ — элементарное кольцо. Следовательно, $R/\mathrm{J}(R)$ — элементарное sp-кольцо.

Установим равенство

$$t(R/\mathrm{J}(R)) = (\mathrm{J}(R) + R_t)/\mathrm{J}(R).$$

Из $R_t = \bigoplus\limits_{p \in P} R_p$ следует, что правая часть рассматриваемого равенства лежит в левой. Пусть теперь $m\alpha \in \mathrm{J}(R)$, где $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in R$. Существует прямое разложение $A = B \oplus C$, в котором C — сумма конечного числа p-компонент $t_p(A)$, B — дополнительное слагаемое, причем $mB = B$. Для колец эндоморфизмов получаем $\operatorname{End} A = \operatorname{End} B \oplus \operatorname{End} C$. Если $\alpha = \beta + \gamma$ — представление относительно этого разложения, то $\delta = m\beta \in \mathrm{J}(\operatorname{End} A)$. Ввиду равенства $mB = B$ существует эндоморфизм $1/m \in \operatorname{End} B$. Отсюда получаем, что

$$\beta = (1/m)\delta \in \mathrm{J}(\operatorname{End} B) \subseteq \mathrm{J}(R).$$

Итак, имеем $\alpha = \beta + \gamma \in \mathrm{J}(R) + R_t$, и проверяемое равенство справедливо.

Все кольца R_p конечны, поэтому кольца $R_p/\mathrm{J}(R_p)$ регулярны. На основании первой части доказательства и леммы 6.3 кольца $R/\mathrm{J}(R)$ и $(R/\mathrm{J}(R))/t(R/\mathrm{J}(R))$ регулярны или нет одновременно. Второе из них, учитывая только что полученное равенство, изоморфно кольцу $R/(\mathrm{J}(R) + R_t)$. Это кольцо является конечномерной $\mathbb{Q}$-алгеброй, поэтому его регулярность равносильна его полупростоте. Радикал кольца $R/(\mathrm{J}(R) + R_t)$ равен $J/(\mathrm{J}(R) + R_t)$, и его полупростота равносильна тому, что $\mathrm{J}(R) + R_t = J$. □

Выделим два класса групп A, для которых $\operatorname{End} A/\mathrm{J}(\operatorname{End} A)$ — регулярное кольцо.

Предложение 6.5. *Пусть A — самомалая sp-группа конечного ранга. Равенство* $\mathrm{J}(R) + R_t = J$ *выполняется в каждом из следующих случаев*:

(1) *S — полупростая $\mathbb{Q}$-алгебра*;
(2) *p-компонента $t_p(A)$ — циклическая группа для любого простого p.*

Доказательство. (1) В этом случае $J = R_t$, откуда $\mathrm{J}(R) + R_t = J$. Отметим, что здесь

$$\mathrm{J}(R) = \bigoplus_{p \in P} \mathrm{J}(R_p).$$

(2) Кольцо R в данном случае коммутативно и радикал $\mathrm{J}(R)$ совпадает с множество всех нильпотентных элементов кольца R. Если $\alpha \in J$, то $\alpha^k \in R_t$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Пусть

$A = B \oplus C$, где C — сумма конечного числа p-компонент $t_p(A)$, B — дополнительное слагаемое и $\alpha^k \in \operatorname{End} C$. Пусть $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta \in \operatorname{End} B$ и $\gamma \in \operatorname{End} C$. Тогда $\beta^k = 0$ и $\beta \in \mathrm{J}(R)$. Значит, $\alpha = \beta + \gamma \in \mathrm{J}(R) + R_t$ и верно равенство $\mathrm{J}(R) + R_t = J$. □

Можно получить весьма содержательную информацию о строении односторонних идеалов колец эндоморфизмов рассматриваемых групп.

Теорема 6.6. *Пусть A — самомалая sp-группа конечного ранга и I — правый идеал кольца R. Тогда $I = eR \oplus P$, где $e^2 = e \in R$, P — правый идеал кольца R, лежащий в идеале J, и $P = I \cap (1-e)R$. Аналогичное утверждение справедливо для левых идеалов кольца R.*

Доказательство. Рассмотрим сначала некоторое артиново справа кольцо T и его правый идеал I. Убедимся, что $I = eT \oplus X$, где $e^2 = e \in T$, X — правый идеал, $X \subseteq \mathrm{J}(T)$ и $X = I \cap (1-e)T$. Можно считать, что $I \nsubseteq \mathrm{J}(T)$. Как хорошо известно, существует ненулевой идемпотент $e_1 \in I$. Следовательно,

$$T = e_1T \oplus (1-e_1)T = e_1T \oplus L_1, \quad I = e_1T \oplus (I \cap L_1) = e_1T \oplus X_1.$$

Если $X_1 \nsubseteq \mathrm{J}(T)$, то найдется идемпотент $0 \neq e_2 \in X_1$. Тогда

$$T = e_1T \oplus e_2T \oplus (1-e_1-e_2)T = e_1T \oplus e_2T \oplus L_2, \quad I = e_1T \oplus e_2T \oplus X_2,$$

где $X_2 = I \cap L_2$. В силу артиновости кольца T через несколько шагов придем к равенству

$$I = e_1T \oplus e_2T \oplus \ldots \oplus e_kT \oplus X,$$

в котором $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — ортогональная система идемпотентов, $X \subseteq \mathrm{J}(T)$ и

$$X = I \cap (1 - e_1 - \ldots - e_k)T.$$

Осталось положить $e = e_1 + e_2 + \ldots + e_k$ и заметить, что $e^2 = e$ и $I = eT \oplus X$.

Вернемся к кольцу R. Считаем, что $I \nsubseteq J$. По доказанному выше $\overline{I} = \bar{e}S \oplus X$, где $\overline{I} = (I+R_t)/R_t$, $\bar{e}^2 = \bar{e} \in S$, $X \subseteq J(S)$ и $X = \overline{I} \cap (1-\bar{e})S$. Согласно лемме 2.5 идемпотент $\bar{e}$ поднимается до некоторого идемпотента e кольца R. В частности, $e \in I + R_t$ и $e = f + x$, где $f \in I$, $x \in R_t$. Запишем разложение $R = R_1 \oplus R_2$, где R_2 — сумма конечного числа колец R_p и $x \in R_2$. Возьмем теперь представление $f = e_1 + y$ относительно разложения $I = (I \cap R_1) \oplus (I \cap R_2)$. Имеем $e = e_1 + z$, $z = y + x \in R_2$. Ясно, что e_1 — идемпотент, причем $e_1 \in I \cap R_1$. Достаточно проверить утверждение для идеала $I \cap R_1$. Считаем поэтому, что $e \in I$. В таком случае $I = eR \oplus P$, где $P = I \cap (1-e)R$. Из $X = \overline{I} \oplus (1-\bar{e})S$ следует, что $(P + R_t)/R_t = X$. Поскольку $X \subseteq \mathrm{J}(S) = J/R_t$, то $P \subseteq J$, что и требовалось. □

Если $\mathbb{Q}$-алгебра S является полупростой, то идеал J совпадает с R_t. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 6.7. *Пусть, дополнительно к условиям теоремы 6.6, S — полупростая $\mathbb{Q}$-алгебра. Тогда идеал P из равенства $I = eR \oplus P$ лежит в R_t.*

Теорема 6.6 и следствие 6.7 расширяют информацию о строении идеалов колец K_χ.

7. Регулярные и наследственные кольца эндоморфизмов *sp*-групп

Тематику этого раздела можно назвать «кольцевые свойства колец эндоморфизмов» или «кольца эндоморфизмов со специальными свойствами». Регулярность (в смысле Неймана) и наследственность являются важнейшими кольцевыми свойствами. Естественно исследовать абелевы группы с регулярными или наследственными кольцами эндоморфизмов. Они обладают разнообразными интересными свойствами.

Ниже мы увидим, что при изучении групп с регулярными кольцами эндоморфизмов можно ограничиться элементарными *sp*-группами (они, а также элементарные *sp*-кольца определены в предыдущем разделе).

Получим несколько полезных фактов об элементарных sp-группах. Мы вернемся здесь к точке зрения на sp-группы, как на модули над кольцами K_χ, изложенной в разделе 3. Пусть A — элементарная sp-группа и $\chi_m = (m_p)$ — характеристика, указанная в разделе 3. Именно, $m_p = 1$ либо $m_p = 0$ в зависимости от того, $t_p(A) \neq 0$ или $t_p(A) = 0$. Тогда A — K_{χ_m}-модуль, причем χ_m — наименьшая характеристика среди таких характеристик χ, что A есть K_χ-модуль. Устраним здесь зависимость от конкретных характеристик χ_m. Пусть $\chi = (k_p)$ — такая характеристика, что $k_p = 1$ для всех p. В таком случае любая элементарная sp-группа является K_χ-модулем. Будем без дополнительных пояснений считать все элементарные sp-группы модулями над кольцом K_χ и использовать для них модульную терминологию и методы. Так, согласно теореме 3.6 элементарная sp-группа A является самомалой группой конечного ранга в точности в том случае, когда A — конечно порожденный K_χ-модуль.

Заметим, что p-компонента кольца K_χ есть поле вычетов $\mathbb{Z}_p$. Отсюда ясно, что любая элементарная группа является проективным K_χ-модулем.

Предложение 7.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Элементарная sp-группа A является самомалой в точности тогда, когда она не имеет бесконечных периодических прямых слагаемых.*
2. *Пусть A — элементарная sp-группа конечного ранга. Тогда $A = C \oplus E$, где C — самомалая sp-группа, E — элементарная группа.*

Доказательство. 1. Прямое слагаемое самомалой группы является самомалой группой. Поэтому с учетом предложения 1.1 достаточно показать, что если группа A не имеет бесконечных периодических прямых слагаемых, то A — самомалая группа. Предположим противное. В силу теоремы 1.6 найдется гомоморфизм $\alpha : A \to t(A)$, образ которого является бесконечной группой. Так как $\operatorname{im}\alpha$ — проективный K_χ-модуль, то получаем прямое разложение $A = \ker\alpha \oplus G$, в котором $G \cong \operatorname{im}\alpha$. Полученное противоречие подтверждает, что A — самомалая группа.

2. Для каждого простого p запишем $A = t_p(A) \oplus B_p$, где $t_p(A)$ — p-компонента группы A, B_p — дополнительное прямое слагаемое. Обозначим через ε_p проекцию $A \to t_p(A)$ с ядром B_p. Выберем свободную подгруппу F группы A с базисными элементами $c_1, c_2, \ldots, c_n$, где n — ранг группы A. Любая подгруппа элементарной группы является прямым слагаемым. Следовательно, для каждого простого p имеем $t_p(A) = \varepsilon_p F \oplus E_p$ для некоторой подгруппы E_p. Положим

$$\overline{A} = \prod_{p\in P} t_p(A).$$

Группу A можно считать чистой подгруппой в $\overline{A}$. Тогда $\overline{A} = X \oplus Y$, где

$$X = \prod_{p\in P} \varepsilon_p F, \quad Y = \prod_{p\in P} E_p.$$

Положим $C = A \cap X$, $E = \bigoplus\limits_{p\in P} E_p$ и проверим, что $A = C \oplus E$. По построению $C \cap E = 0$ и $T = t(A) \subset C \oplus E$. Из $(C+E)/T = (X+T)/T \cap A/T$ заключаем, что подгруппа $(C+E)/T$ чиста в A/T. Кроме того, она содержит базис $c_1+T, c_2+T, \ldots, c_n+T$ $\mathbb{Q}$-пространства A/T. Следовательно, $A = C \oplus E$. Тогда верно равенство $t_p(A) = C_p \oplus E_p$. Поэтому ограничение проекции ε_p на C будет проекцией $C \to C_p$. Так как $C_p = \varepsilon_p F$, то C_p — конечная группа, а C удовлетворяет условию на проекции и, значит, C — самомалая группа (теорема 1.6).

Другой путь доказательства состоит в проверке равенства $A = K_\chi F \oplus E$, где $K_\chi F$ — K_χ-подмодуль, порожденный элементами $c_1, c_2, \ldots, c_n$. По теореме 3.6, $K_\chi F$ — самомалая sp-группа. На самом деле группы $K_\chi F$ и C совпадают. □

Перейдем к группам с регулярными кольцами эндоморфизмов. Хорошо известен следующий факт и несложно убедиться в его справедливости (см. [59, предложение 18.1]).

Лемма 7.2. *Кольцо эндоморфизмов модуля M над произвольным кольцом регулярно в точности тогда, когда образы и ядра всех эндоморфизмов модуля M служат прямыми слагаемыми для M.*

Сразу можно заключить, что кольца эндоморфизмов векторных пространств над телами, элементарных p-групп (т.е. $\mathbb{Z}_p$-пространств) и делимых групп без кручения (т.е. $\mathbb{Q}$-пространств) регулярны. Кольцо эндоморфизмов периодической группы A регулярно в точности тогда, когда A — элементарная группа.

Соберем вместе основную имеющуюся информацию о группах, кольца эндоморфизмов которых регулярны (см. [48, 68], а также [59, теорема 18.4]).

Теорема 7.3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если A — нередуцированная группа, то кольцо* $\operatorname{End} A$ *регулярно в точности тогда, когда A — прямая сумма делимой группы без кручения и элементарной группы.*
2. *Если A — редуцированная группа и* $\operatorname{End} A$ *— регулярное кольцо, то $t(A)$ — элементарная группа, $A/t(A)$ — делимая группа и выполняются включения*

$$\bigoplus_{p\in P} t_p(A) \subseteq A \subseteq \prod_{p\in P} t_p(A).$$

Итак, строение sp-группы A с регулярным кольцом $\operatorname{End} A$ остается неясным, если мы находимся в ситуации п. 2 и $A \neq t(A)$, т.е., говоря точнее, когда A — элементарная sp-группа. Наша ближайшая цель — выяснить это строение при условии конечности ранга группы A.

Пусть A — sp-группа. Напомним некоторые обозначения из раздела 2 (они употреблялись также в разделах 5 и 6). Именно,

$$R = \operatorname{End} A, \quad R_p = \operatorname{End} t_p(A), \quad R_t = \operatorname{Hom}(A, t(A)), \quad S = R/R_t = \operatorname{End}_{\mathcal{W}} A,$$

где $\operatorname{End}_{\mathcal{W}} A$ — кольцо эндоморфизмов объекта A в категории Уокера Walk (см. абзац после доказательства леммы 2.5). Если ранг группы A конечен, то S — конечномерная $\mathbb{Q}$-алгебра.

Следствие 7.4. *Если A — самомалая элементарная sp-группа, то справедливы следующие утверждения.*

1. *Регулярность кольца* $\operatorname{End} A$ *равносильна регулярности алгебры S.*
2. *Если ранг группы A конечен, то* $\operatorname{End} A$ *— регулярное кольцо тогда и только тогда, когда S — полупростая алгебра* (см. [49]) .

Доказательство. 1. Во-первых, заметим, что $\operatorname{End} A$ — элементарное sp-кольцо. Каждая p-компонента $t_p(A)$ является элементарной группой. Следовательно, кольцо $\operatorname{End} t_p(A)$ регулярно. Далее имеем $\operatorname{Hom}(A, t(A)) = t(\operatorname{End} A)$ ввиду самомалости группы A (предложение 1.2, теорема 1.6). Осталось сослаться на лемму 6.3.

2. Достаточно заметить, что регулярность конечномерной алгебры S равносильна ее полупростоте. □

Теорема 7.5. *Пусть A — элементарная sp-группа конечного ранга. Тогда следующие утверждения равносильны*:

(1) *кольцо* $\operatorname{End} A$ *регулярно*;
(2) *$A = C \oplus E$, где C — самомалая элементарная sp-группа с регулярным кольцом* $\operatorname{End} C$*, E — элементарная группа, причем C и E не имеют ненулевых p-компонент для одних и тех же p;*
(3) *S — конечномерная полупростая $\mathbb{Q}$-алгебра и $A = C \oplus E$, где C — самомалая элементарная sp-группа, E — элементарная группа, причем C и E не имеют ненулевых p-компонент для одних и тех же p.*

Доказательство. (1)⇒(2). Запишем $A = C \oplus E$ как в предложении 7.1. Допустим, что E имеет ненулевые p-компоненты $t_p(E)$ для таких p, что p-компонента $t_p(C)$ отлична от нуля. Если таких p-компонент конечное число, то, взяв соответствующие p-компоненты $t_p(C)$ и присоединив их к E, получим новые группы C и E с требуемым в (2) свойством. Пусть указанных p-компонент $t_p(E)$ имеется бесконечное множество. Построим эндоморфизм α группы A следующим образом. Полагаем $\alpha(C) = 0$. Затем для каждого простого p выбираем некоторый ненулевой гомоморфизм $t_p(E) \to t_p(C)$, если $t_p(E) \neq 0$ и $t_p(C) \neq 0$, и считаем, что $\alpha(t_p(E)) = 0$ при $t_p(C) = 0$. Поскольку кольцо $\operatorname{End} A$ регулярно, то образ αA должен быть прямым слагаемым группы C. Но это противоречит предложению 7.1. Итак, имеем равенства $\operatorname{Hom}(C, E) = 0 = \operatorname{Hom}(E, C)$. Следовательно, $\operatorname{End} A = \operatorname{End} C \oplus \operatorname{End} E$ и $\operatorname{End} C$ — регулярное кольцо.

(2)⇒(3). Согласно следствию 7.4, $\operatorname{End}_{\mathcal{W}} C$ — конечномерная полупростая $\mathbb{Q}$-алгебра. Алгебры $\operatorname{End}_{\mathcal{W}} A$ и $\operatorname{End}_{\mathcal{W}} C$ можно отождествить. Это становится понятным, если рассмотреть матричные представления кольца $\operatorname{End} A$ и идеала $\operatorname{Hom}(A, t(A))$:

$$\operatorname{End} A = \begin{pmatrix} \operatorname{End} C & \operatorname{Hom}(E, C) \\ \operatorname{Hom}(C, E) & \operatorname{End} E \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Hom}(A, t(A)) = \begin{pmatrix} \operatorname{Hom}(C, t(C)) & \operatorname{Hom}(E, C) \\ \operatorname{Hom}(C, E) & \operatorname{End} E \end{pmatrix}.$$

(3)⇒(1). Как только что было отмечено, $\operatorname{End}_{\mathcal{W}} A = \operatorname{End}_{\mathcal{W}} C$, поэтому $\operatorname{End}_{\mathcal{W}} C$ — конечномерная полупростая алгебра. Следовательно, $\operatorname{End} C$ — регулярное кольцо (следствие 7.4). Регулярно также кольцо $\operatorname{End} E$ на основании элементарности группы E. Так что $\operatorname{End} A = \operatorname{End} C \oplus \operatorname{End} E$ — регулярное кольцо. □

Ничего определенного о *sp*-группах бесконечного ранга, имеющих регулярные кольца эндоморфизмов, сказать нельзя. Подтвердим это высказывание одним примером.

Введем обозначения

$$J = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p, \quad T = \bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}_p.$$

Тогда J — регулярное E-кольцо (по поводу E-колец см. [59, раздел 6]). E-Кольцом будет и любое чистое кольцо R, лежащее между T и J. Действительно, пусть α — эндоморфизм группы R^+. Группа J^+ алгебраически компактна, поэтому α однозначно продолжается до эндоморфизма $\widehat{\alpha}$ группы J^+. Тогда найдется элемент $r \in J$ со свойством $\widehat{\alpha}(x) = rx$ для всех $x \in J$. Но $\alpha(1) = \widehat{\alpha}(1) = r \cdot 1 = r \in R$. Отсюда получаем, что $\alpha(x) = \widehat{\alpha}(x) = rx$ для всякого $x \in R$, а значит, R является E-кольцом.

Модуль называется *суперразложимым*, если каждое его ненулевое прямое слагаемое разложимо в нетривиальную прямую сумму. Некоторое кольцо R назовем *суперразложимым* (справа), если R_R — суперразложимый модуль.

Предложение 7.6. *Существует регулярное E-кольцо R такое, что $R/t(R)$ — суперразложимая $\mathbb{Q}$-алгебра.*

Доказательство. Сохраняем обозначения J и T, введенные выше. Искомое кольцо R построим как некоторое чистое подкольцо кольца J, содержащее T. Обозначим через $e_{00} = (\varepsilon_p)_{p \in P} \in J$, где ε_p — единичный элемент поля $\mathbb{Z}_p$. Запишем $e_{00} = e_{10} + e_{11}$, где e_{10}, e_{11} — некоторые ортогональные идемпотенты кольца J, каждый из которых содержит бесконечное число отличных от нуля компонент ε_p. Далее, если идемпотент e_{nm} уже определен, то выберем некоторые ортогональные идемпотенты $e_{n+1,2m}$ и $e_{n+1,2m+1}$ в J, содержащие бесконечное число отличных от нуля компонент, и такие, что $e_{nm} = e_{n+1,2m} + e_{n+1,2m+1}$. В результате получим ортогональные множества идемпотентов

$$E = \{e_{nm} \mid n = 0, 1, 2, \dots;\ 0 \leqslant m < 2^n\}, \quad \overline{E} = \{\overline{e}_{nm} \mid n = 0, 1, 2, \dots;\ 0 \leqslant m < 2^n\}.$$

Здесь и далее черта обозначает смежный класс относительно идеала $t(R)$.

Пусть B — подгруппа в J/T, порожденная множеством $\overline{E}$. Тогда B — подкольцо в J/T. Для проверки этого возьмем произвольные элементы $b, c \in B$,

$$b = \sum_{i=1}^{k} s_i \overline{e}_{n_i m_i}, \quad c = \sum_{j=1}^{l} t_j \overline{e}_{n'_j m'_j},$$

где $s_i, t_j \in \mathbb{Z}$. Можно считать, что все элементы $\overline{e}_{n_i m_i}$ и $\overline{e}_{n'_j m'_j}$ имеют одинаковый первый индекс. Если это не так, то выберем натуральное число

$$n \geqslant \max\{n_1, \ldots, n_k, n'_1, \ldots, n'_l\}.$$

Выразим все $e_{n_i m_i}$ и $e_{n'_j m'_j}$ через элементы e_{nm}, где $0 \leqslant m < 2^n$, и положим $q = 2^n$. Тогда можно записать

$$b = \sum_{m=0}^{q} s_m \overline{e}_{nm}, \quad c = \sum_{m=0}^{q} t_m \overline{e}_{nm}, \quad s_m, t_m \in \mathbb{Z}.$$

Значит, $bc \in B$, так как при фиксированном n множество $\{\overline{e}_{nm} \mid 0 \leqslant m < 2^n\}$ состоит из попарно ортогональных идемпотентов. Пусть $\overline{R}$ — $\mathbb{Q}$-алгебра в J/T, порожденная подкольцом B, или, что все равно, множеством $\overline{E}$. Для любого элемента $\overline{r} \in \overline{R}$ найдется число $k \in \mathbb{N}$ со свойством $k\overline{r} \in B$. Пусть R — такое чистое подкольцо кольца J, которое содержит T и $R/T = \overline{R}$.

Установим регулярность кольца R. В силу леммы 6.3 достаточно проверить регулярность $\mathbb{Q}$-алгебры $\overline{R}$. Для элемента $x \in \overline{R}$ выберем $k \in \mathbb{N}$ так, что $kx \in B$. Запишем далее

$$kx = \sum_{m=0}^{t} s_m \overline{e}_{nm}, \quad s_m \in \mathbb{Z}.$$

Регулярность любого элемента $s_m \overline{e}_{nm}$ сразу видна из равенства

$$(s_m \overline{e}_{nm})(s_m^{-1} \overline{e}_{nm})(s_m \overline{e}_{nm}) = s_m \overline{e}_{nm}.$$

Учитывая ортогональность системы идемпотентов e_{nm}, $0 \leqslant m < 2^n$, заключаем, что kx — регулярный элемент. Значит, существует $x' \in \overline{R}$ для которого $(kx)x'(kx) = kx$. Отсюда $x(kx')x = x$ и x — регулярный элемент.

Убедимся в суперразложимости алгебры $\overline{R}$. Покажем, что всякий ненулевой идемпотент $\overline{e} \in \overline{R}$ равен сумме каких-либо идемпотентов $\overline{e}_{nm}$, откуда получим требуемое. Выберем $n \in \mathbb{N}$ и $q_m \in \mathbb{Q}$, $0 \leqslant m < 2^n$, так, что

$$\overline{e} = \sum_{m=0}^{t} q_m \overline{e}_{nm}.$$

Поскольку $\overline{e}^2 = \overline{e}$, то $q_m^2 \overline{e}_{nm} = q_m \overline{e}_{nm}$ и $q_m^2 = q_m$ для всех m. Выводим, что $q_m = 0$ или $q_m = 1$. Следовательно, идемпотент $\overline{e}$ равен сумме некоторых $\overline{e}_{nm}$ при фиксированном n, что и утверждалось. □

Обращаясь к алгебре $\overline{R}$, получаем следующее утверждение.

Следствие 7.7. *Существует суперразложимая регулярная $\mathbb{Q}$-алгебра.*

Так как для E-кольца R можно считать, что $\operatorname{End} R^+ = R$, то имеем также следующий результат.

Следствие 7.8. *Существует sp-группа A такая, что $\operatorname{End} A$ — регулярное кольцо, а $\operatorname{End}_{\mathcal{W}} A$ — суперразложимое кольцо.*

Последнее следствие наводит на мысль о необозримости класса групп с регулярными кольцами эндоморфизмов.

Кольцо T называется *наследственным справа* (*слева*), если каждый его правый (левый) идеал является проективным правым (левым) T-модулем. Ограничившись конечно порожденными

идеалами, приходим к такому обобщению наследственных колец. Кольцо T называется *полунаследственным справа* (*слева*) при условии, что каждый его конечно порожденный правый (левый) идеал проективен. Заметим, что всякое регулярное кольцо является полунаследственным справа и слева.

Пусть T — наследственное справа кольцо. Хорошо известно, что кольцо матриц $M_n(T)$ наследственно справа. Наследственным справа является также кольцо eTe для любого идемпотента $e \in T$. Аналогичные свойства имеют наследственные слева кольца.

Для колец эндоморфизмов теперь можно вывести следующее. Во-первых, прямое слагаемое группы с наследственным справа (слева) кольцом эндоморфизмов имеет такое же кольцо эндоморфизмов. В самом деле, пусть группа A имеет наследственное справа (слева) кольцо эндоморфизмов и $A = B \oplus C$. Вспомним, что если $\varepsilon : A \to B$ — проекция, то $\operatorname{End} B \cong \varepsilon(\operatorname{End} A)\varepsilon$. Теперь заметим, что группа $\mathbb{Z}_{p^k}$ имеет наследственное кольцо эндоморфизмов только при $k = 1$. Заключаем, что p-компонента $t_p(A)$ редуцированной группы A, кольцо эндоморфизмов которой наследственно справа или слева, является элементарной группой. Следовательно, $A = t_p(A) \oplus B_p$ для некоторой группы B_p. При этом нельзя утверждать, что $pB_p = B_p$, т.е. редуцированная смешанная группа с наследственным кольцом эндоморфизмов не обязана быть sp-группой. В [59, гл. 6] представлены многие результаты о наследственных кольцах эндоморфизмов групп без кручения.

Кратко рассмотрим сейчас sp-группы, кольца эндоморфизмов которых наследственны. Если A — такая группа, то, как замечено выше, каждая ее p-компонента — элементарная группа. Значит, A — элементарная sp-группа. Ее p-компонента $t_p(A)$ является $\mathbb{Z}_p$-пространством. Кольцо операторов $\operatorname{End} t_p(A)$ будет наследственным справа и слева только тогда, когда $t_p(A)$ — конечномерное $\mathbb{Z}_p$-пространство, т.е. $t_p(A)$ — конечная группа.

Модуль M будем называть *элементарным*, если M как группа есть элементарная группа. Пусть A — элементарная самомалая sp-группа конечного ранга. Тогда любой элементарный R-модуль M (где, как обычно, $R = \operatorname{End} A$) проективен. Действительно, имеет место R-модульное разложение $M = \bigoplus\limits_{p \in P} M_p$. Проективность R-модуля M_p равносильна его проективности как R_p-модуля, где $R_p = \operatorname{End} t_p(A)$. Ввиду предложения 1.2 или теоремы 1.6 кольцо R_p является полным матричным кольцом над $\mathbb{Z}_p$. Следовательно, все модули M_p и модуль M проективны.

Дополним теорему 6.6 следующим результатом.

Предложение 7.9. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть A — элементарная самомалая sp-группа конечного ранга. Тогда всякий правый (левый) идеал I кольца R равен $L \oplus E$, где L — конечно порожденный, а E — элементарный правый (левый) идеалы.*
2. *Для идеала I из п. 1 найдется такой элементарный правый (левый) J такой, что $I \cap J = 0$ и $R_t \subseteq I \oplus J$.*

Доказательство. Рассмотрим правый случай.

1. Положим $X = I \cap R_t$, где $R_t = \operatorname{Hom}(A, t_p(A))$, и рассмотрим R-модуль I/X. Его можно считать S-модулем, учитывая, что $(I/X)R_t = 0$. Имеет место вложение

$$I/X \to S = R/R_t, \quad \text{где} \quad \alpha + X \mapsto \alpha + R_t, \quad \alpha \in I.$$

Следовательно, I/X — конечно порожденный S-модуль. Выберем некоторую его систему образующих $\alpha_1 + X$, $\alpha_2 + X$, …, $\alpha_k + X$. Тогда верно равенство $I = L + X$, где $L = \alpha_1 R + \alpha_2 R + \ldots + \alpha_k R$. Далее, из соотношений

$$I/L = (L + X)/L \cong X/(L \cap X)$$

делаем вывод, что I/L — элементарный и, значит, проективный R-модуль. Поэтому $I = L \oplus E$, где L — конечно порожденный, а E — элементарный правые идеалы.

2. Принимая во внимание, что R_p — простое артиново кольцо, для каждого простого p можно записать $R_p = (I \cap R_p) \oplus J_p$, где J_p — некоторый правый идеал кольца R_p. Положим $J = \bigoplus\limits_{p \in P} J_p$.

Ясно, что $R_t \subseteq I + J$. Пусть $\alpha \in I \cap J$ и 1_p — единица кольца R_p. Тогда $\alpha \cdot 1_p \in I \cap R_p \cap J = 0$ для всякого простого p, а значит, $\alpha = 0$. Таким образом, $I \cap J = 0$. □

Элементарные R-модули проективны; значит, справедлив следующий результат.

Следствие 7.10. *Правая (левая) наследственность кольца эндоморфизмов элементарной sp-группы конечного ранга равносильна его правой (левой) полунаследственности.*

Заключительный результат раздела содержит все основное, что нам известно о наследственных кольцах эндоморфизмов *sp*-групп.

Следствие 7.11. *Пусть A — элементарная самомалая sp-группа конечного ранга.*

1. *Если алгебра $S = R/R_t$ является полупростой, то R — наследственное справа и слева кольцо.*
2. *Если группа A неразложима в категории $\mathcal{W}$, то R наследственно справа или слева в точности тогда, когда S — тело.*

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольный правый идеал I кольца R. Согласно следствию 6.7 имеем $I = eR \oplus P$, где P — некоторый правый идеал, лежащий в R_t. Осталось заметить, что P — элементарный идеал; следовательно, он проективен.

2. Предположим, что кольцо R является наследственным справа (или слева). Пусть $\overline{I} = I/R_t$ — произвольный правый (или левый) идеал алгебры S. Если отождествить алгебру S с $R \otimes \mathbb{Q}$ (см. раздел 2), то получим также равенство $\overline{I} = I \otimes \mathbb{Q}$. Теперь ясно, что $\overline{I}$ — проективный S-модуль. В частности, радикал $\mathrm{J}(S)$ — проективный идеал и поэтому свободный идеал, если учесть локальность алгебры S (следствие 2.6). Из этого вытекает, что $\mathrm{J}(S) = 0$, т.е. S — тело. Обратное утверждение получается из 1. □

При дальнейшем исследовании элементарных самомалых *sp*-групп A конечного ранга с наследственными справа или слева кольцами эндоморфизмов можно считать, что $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_k$, где каждое слагаемое A_i неразложимо в $\mathcal{W}$ и $\mathrm{End}_{\mathcal{W}} A_i$ — тело.

8. *sp*-Группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов

Всякая группа A естественным образом является левым модулем над своим кольцом эндоморфизмов $\mathrm{End}\, A$. Изучение этого модуля помогает лучше понять строение конкретных групп. Обратим внимание на три важнейших класса модулей: плоские, проективные и образующие модули. Мы протестируем роль этих классов на примере самомалых *sp*-групп как модулей над своими кольцами эндоморфизмов. В [59] эти и другие модульные свойства рассмотрены для p-групп и групп без кручения.

Группу плоскую (соответственно, проективную, образующую) как модуль над своим кольцом эндоморфизмов будем называть *эндоплоской* (соответственно, *эндопроективной*, *эндообразующей*).

Будем неоднократно применять хорошо известный *критерий Чейза плоскостности* модуля. Для удобства приведем его.

Пусть R — кольцо и M — левый R-модуль. Следующие утверждения равносильны:

(a) *M — плоский R-модуль*;

(b) *если $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r a_r = 0$, где $a_k \in M$ и $\lambda_k \in R$, то существуют такие элементы $b_1, b_2, \ldots, b_n \in M$ и $\{\mu_{ik}\} \subseteq R$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, r$, что*

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ik} b_i, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mu_{ik} = 0.$$

Согласно теореме Ричмена—Уокера (см. [70], [59, теорема 10.2]) p-группа A является эндоплоской в точности тогда, когда, когда либо A — ограниченная группа, либо A имеет неограниченную базисную подгруппу.

Следующий результат обобщает теорему Ричмена—Уокера. Идея доказательства та же, что и в [70], но ее реализация проще. Как и выше R — кольцо эндоморфизмов некоторой группы A.

Теорема 8.1. *Пусть A — произвольная группа. Периодическая подгруппа $t(A)$ является плоским R-модулем тогда и только тогда, когда каждая p-компонента $t_p(A)$ либо является ограниченной группой, либо имеет неограниченную базисную подгруппу.*

Доказательство. Считаем, что $t(A)$ — плоский R-модуль. Тогда все p-компоненты $t_p(A)$ — плоские R-модули. Допустим, что какая-либо группа $t_p(A)$ равна $B \oplus D$, где B — ограниченная, а D — ненулевая делимая p-группа. Значит, $t_p(A)$ не является ограниченной группой и не обладает неограниченной базисной подгруппой. Если $p^m B = 0$, $m \in \mathbb{N}$, то выберем элемент $d \in D$ так, что $p^{m+1}d = 0$ и $p^m d \neq 0$. По критерию Чейза существуют элементы $b_i \in t_p(A)$ и $\alpha_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$, обладающие свойствами $d = \alpha_1(b_1) + \alpha_2(b_2) + \ldots + \alpha_n(b_n)$ и $p^{m+1}\alpha_i = 0$. Группа A обладает разложением $A = t_p(A) \oplus G$ для некоторой подгруппы G. Имеем $p^{m+1}\alpha_i = 0$ на $t_p(A)$. Но, как следует из строения $t_p(A)$, всякий эндоморфизм группы $t_p(A)$ конечного порядка аннулируется числом p^m. Таким образом, все $p^m\alpha_i$ действуют на $t_p(A)$ как нулевой эндоморфизм, откуда

$$p^m d = \sum_{i=1}^{n} p^m \alpha_i(b_i) = 0.$$

Получили противоречие с выбором элемента d. Следовательно, группа $t_p(A)$ либо ограниченная, либо $t_p(A) = C \oplus D$, где C — редуцированная неограниченная группа, а D — делимая группа. Вторая возможность равносильна наличию у группы $t_p(A)$ неограниченной базисной подгруппы.

Пусть теперь каждая p-компонента $t_p(A)$ либо ограниченная группа, либо имеет неограниченную базисную подгруппу. Достаточно доказать, что все p-компоненты — плоские R-модули. Предположим сначала, что $t_p(A)$ — ограниченная группа (в этом случае $A = t_p(A) \oplus G$). Запишем $A = \langle c \rangle \oplus X$, где образующий элемент c имеет наибольший порядок среди порядков всех элементов группы $t_p(A)$. Ясно, что $Rc = t_p(A)$. Возьмем проекцию $e : A \to \langle c \rangle$ с ядром X. Сопоставление $\alpha(c) \mapsto \alpha e$, $\alpha \in R$, задает изоморфизм R-модулей Rc и Re. Из равенства $R = Re \oplus R(1 - e)$ заключаем, что Re — проективный и, в частности, плоский R-модуль. Значит, и $t_p(A)$ — плоский (даже проективный) R-модуль.

Пусть группа $t_p(A)$ имеет неограниченную базисную подгруппу B. Запишем $B = \bigoplus\limits_{n \geqslant 1} B_n$, где B_n — прямая сумма циклических слагаемых одинакового порядка p^n (для некоторых n таких слагаемых может не быть, и тогда $B_n = 0$). По известному свойству базисных подгрупп для всякого n существуют разложения

$$A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n, \quad A_n = B_{n+1} \oplus A_{n+1}.$$

В каждой ненулевой группе B_n фиксируем некоторое циклическое прямое слагаемое $\langle c_n \rangle$, $B_n = \langle c_n \rangle \oplus X_n$. Обозначим через e_n проекцию группы A на $\langle c_n \rangle$, аннулирующую X_n, B_i, $i \neq n$, и A_n. По-прежнему, Re_n — проективный R-модуль и отображение $\alpha(c_n) \mapsto \alpha e_n$, $\alpha \in R$, является изоморфизмом R-модулей Rc_n и Re_n. Но $Rc_n = A[p^n]$, следовательно, $A[p^n]$ — проективный R-модуль. Поскольку $t_p(A)$ есть предел прямого спектра, состоящего из подмодулей $A[p^n]$, $n \geqslant 1$ (фактически $t_p(A)$ является их объединением), то $t_p(A)$ — плоский R-модуль. □

Следствие 8.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если A — редуцированная группа, то $t(A)$ — плоский R-модуль.*
2. *все p-компоненты $t_p(A)$ — ограниченные группы, то $t(A)$ — проективный R-модуль.*

Доказательство. 1. Все p-компоненты $t_p(A)$ являются редуцированными группами. Осталось заметить, что базисные подгруппы неограниченных групп сами являются неограниченными группами.

2. Если $t_p(A)$ — ограниченная группа, то, как установлено в доказательстве теоремы 8.1, $t_p(A)$ — проективный R-модуль. Тогда из равенства $t(A) = \bigoplus\limits_{p \in P} t_p(A)$ получаем проективность модуля $t(A)$.

□

Обратимся теперь к *sp*-группам. Как и раньше, для *sp*-группы A полагаем

$$R = \operatorname{End} A, \quad R_t = \operatorname{Hom}(A, t(A)), \quad S = R/R_t, \quad V = A/t(A).$$

Естественным образом V считаем левым S-модулем.

В [3] получены различные результаты о плоской и проективной размерностях R-модуля A. Если M — модуль над кольцом T, то $fd_T M$ и $pd_T M$ обозначают соответственно его плоскую и проективную размерности.

Теорема 8.3 (см. [3]). *Пусть A — самомалая sp-группа. Тогда*

(1) $fd_R A = fd_S V$;

(2) *справедливы неравенства* $pd_S V \leqslant pd_R A \leqslant pd_S V + 1$.

Сразу получаем, что эндоплоскостность самомалой *sp*-группы A равносильна плоскостности S-модуля V. Этот факт можно независимо доказать с помощью критерия Чейза. Прежде отметим, что теорема 8.3 и предложение 8.4 справедливы для такой *sp*-группы A, что образ всякого гомоморфизма $A \to t(A)$ содержится в сумме конечного числа p-компонент $t_p(A)$ (см. теорему 1.6).

Предложение 8.4. *Самомалая sp-группа A является эндоплоской в точности тогда, когда V — плоский S-модуль.*

Доказательство заключается в рутинном применении критерия Чейза. При этом используются хорошо знакомые нам приемы работы с эндоморфизмами *sp*-группы A, о которых говорится после теоремы 5.5. В данном случае нужно переходить от R-модуля A к S-модулю V и обратно. Причем на определенном этапе придется применять критерий Чейза к p-компонентам $t_p(A)$ (это можно делать в силу следствия 8.2). □

Следствие 8.5. *Самомалая sp-группа A конечного ранга с полупростой алгеброй S является эндоплоской.*

Важную роль в некоторых областях теории абелевых групп играют точные группы. Группа A называется *точной*, если для любого собственного правого идеала I кольца R справедливо $IA \neq A$. Особо важными свойствами обладают точные эндоплоские группы. Они применяются для отыскания эквивалентностей между категориями групп и категориями модулей над кольцами эндоморфизмов, для классификации различных свойств кольца $\operatorname{End} A$ в терминах групповой структуры группы A и для других вопросов (см. [59, раздел 34]).

Приведем два свойства точных групп.

Свойство 1. *Прямое слагаемое точной группы является точной группой.*

Доказательство. Пусть A — точная группа и $A = B \oplus C$. Обозначим через $\varepsilon : A \to B$ и $\pi : A \to C$ проекции относительно данного разложения. Допустим, что $JB = B$ для некоторого собственного правого идеала J кольца $\operatorname{End} B$. Тогда для правого идеала $I = JR + \pi R$ кольца $R = \operatorname{End} A$ верно $IA = A$ и $I \neq R$, что невозможно. □

Свойство 2. *Точная группа не может раскладываться в бесконечную прямую сумму ненулевых групп.*

Доказательство. Пусть A — точная группа и $A = \bigoplus\limits_{j \in J} B_j$, где $B_j \neq 0$ и множество J бесконечное. Обозначим через I правый идеал кольца $\operatorname{End} A$, порожденный всеми проекциями $A \to B_j$. Тогда $IA = A$ и $I \neq R$. □

Следствие 8.6. *Среди p-групп точными являются только конечные прямые суммы циклических групп одного порядка.*

Доказательство. Пусть A — точная p-группа. Так как группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ не является точной, то A — редуцированная группа. С учетом свойств 1 и 2 достаточно доказать, что группа $C = \mathbb{Z}_{p^m} \oplus \mathbb{Z}_{p^n}$, где $m < n$, не является точной. Пусть $\varepsilon : C \to \mathbb{Z}_{p^n}$ — проекция и $\gamma : \mathbb{Z}_{p^n} \to \mathbb{Z}_{p^m}$ — некоторый эпиморфизм. Возьмем теперь правый идеал J кольца $\operatorname{End} C$, порожденный ε и γ. Тогда $JC = C$ и $J \neq \operatorname{End} C$, что и требовалось. □

Для sp-группы A будем обозначать через J такой идеал кольца R, что $R_t \subseteq J$ и $J/R_t = \mathrm{J}(S)$ (идеал J уже встречался в разделе 6). Отметим, что требование смешанности слагаемого D в следующей теореме равносильно его нетривиальности в категории Walk.

Теорема 8.7. *Самомалая sp-группа A конечного ранга точна в точности тогда, когда каждая p-компонента $t_p(A)$ — прямая сумма циклических групп одного порядка, и A не имеет смешанных прямых слагаемых D со свойством $D \subseteq JA$.*

Доказательство. Пусть A — точная группа. Утверждение о p-компонентах $t_p(A)$ вытекает из свойства 1 и следствия 8.6. Перейдем к слагаемым группы A. Предположим, что группа A обладает прямым разложением $A = B \oplus D$, в котором $D \subseteq JA$ и D — смешанная группа. Рассмотрим проекцию $e : A \to B$ с ядром D. Для правого идеала $I = eR + J$ имеет место равенство $IA = eA + JA \supseteq B \oplus D = A$. Если $I = R$, то найдутся такие $\alpha \in R$ и $\gamma \in J$, что $e\alpha = 1 - \gamma$. Элемент $\gamma + R_t$ лежит в $\mathrm{J}(S)$, следовательно, элемент $(1-\gamma) + R_t$ обратим в S, откуда $(1-\gamma)\beta = 1 + \psi$ для некоторых $\beta \in R$ и $\psi \in R_t$. Итак, $e\alpha\beta = 1 + \psi$; значит, $(1-e)(1+\psi) = 0$ и $1 - e = -(1-e)\psi \in R_t$. Отсюда и из $D = (1-e)A$ вытекает периодичность группы D, что невозможно. Таким образом, $IA = A$ и $I \neq R$, что противоречит точности группы A. Следовательно, указанных в условиях теоремы слагаемых D не существует.

Предположим, что все p-компоненты группы A являются прямыми суммами циклических групп одного порядка, и A не имеет смешанных прямых слагаемых D со свойством $D \subseteq JA$. Если группа A не точна, то существует собственный правый идеал I кольца R, для которого $IA = A$.

Быстрее всего можно получить противоречие с помощью теоремы 6.6 о строении односторонних идеалов кольца R. По этой теореме существуют такие идемпотент $e \in R$ и правый идеал P кольца R, лежащий в J, что $I = eR \oplus P$ и $P \subseteq (1-e)R$. Тогда имеет место равенство $A = IA = eA \oplus PA$, которое влечет $(1-e)A = PA \subseteq JA$. Положим $D = PA$ и заметим, что $(1-e)A$ не является периодической группой. В противном случае из $PA = (1-e)A$ следовало бы, что $P = (1-e)R$ (ввиду условия и следствия 8.6) и затем $I = R$. Итак, получили $D = (1-e)A \subseteq JA$, и D — смешанная группа, что противоречит предположению. Следовательно, A — точная группа. □

Следствие 8.8. *Пусть A — самомалая sp-группа конечного ранга, причем каждая p-компонента $t_p(A)$ — прямая сумма циклических групп одного порядка. Группа A будет точной, если либо A неразложима в категории* Walk*, либо алгебра S полупроста.*

Доказательство. Случай неразложимой группы сразу вытекает из теоремы 8.7. Если же S — полупростая алгебра, то $J = R_t$ и включение $D \subseteq JA$ влечет $D \subseteq t(A)$. □

Введем один специальный класс sp-колец. Будем называть sp-кольцо K *моногенным*, если каждая ненулевая p-компонента K_p изоморфна либо некоторому кольцу вычетов $\mathbb{Z}_{p^n}$, либо кольцу целых p-адических чисел $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. У моногенного кольца K факторгруппа $K/\langle 1 \rangle$ делимая. Следовательно, K является E-кольцом. В разделе 3 определены E-модули над кольцом K или, кратко, $E(K)$-модули, как K-модули M, для которых отображение $\Phi : \operatorname{Hom}(K, M) \to M$, действующее по закону $\Phi(f) = f(1)$, является изоморфизмом. Иными словами справедливо равенство

$$\operatorname{Hom}(K, M) = \operatorname{Hom}_K(K, M).$$

Если K — моногенное sp-кольцо, то любой редуцированный K-модуль является E-модулем. Чтобы в этом убедиться, можно рассуждать примерно так же, как в доказательстве теоремы 3.5. Все

кольца K_χ, определенные в разделе 3, являются моногенными. Моногенное кольцо K содержит наибольшее подкольцо вида K_χ; оно чисто порождается единицей кольца и всеми p-компонентами K_p кольца K.

В дальнейшем центр кольца эндоморфизмов R *sp*-группы A будем обозначать через C, а центр произвольного кольца T — через $C(T)$.

Лемма 8.9. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Центр кольца эндоморфизмов ограниченной p-группы A изоморфен $\mathbb{Z}_{p^k}$, где p^k — точная верхняя грань порядков ее элементов.*
2. *Центр C кольца эндоморфизмов sp-группы A является моногенным кольцом, а A является $E(C)$-модулем.*
3. *Самомалая sp-группа A конечного ранга является конечно порожденным C-модулем.*

Доказательство. 1. Эндоморфизмы из центра $C(R)$ оставляют каждое прямое слагаемое группы A на месте, поскольку они перестановочны с проекциями. Группа A имеет прямое слагаемое $\langle a\rangle$ порядка p^k. Если $\gamma \in C(R)$, то $\gamma(a) = ma$, где $0 \leqslant m < p^k$. Для произвольного элемента $x \in A$ найдется такой $\eta \in \operatorname{End} A$, что $\eta(a) = x$. Следовательно, верно равенство

$$\gamma(x) = \gamma(\eta(a)) = \eta(\gamma(a)) = m(\eta(a)) = mx.$$

Таким образом, эндоморфизм γ действует на группе A как умножение на число m. Тогда соответствие $\gamma \mapsto \overline{m} = m + p^k\mathbb{Z}$ определяет изоморфизм между кольцами $C(R)$ и $\mathbb{Z}_{p^k}$.

2. Если $t_p(A) \neq 0$, то $A = t_p(A) \oplus B_p$, $pB_p = B_p$ и $C = C(\operatorname{End} t_p(A)) \oplus C(\operatorname{End} B_p)$. Здесь $C(\operatorname{End} t_p(A))$ — некоторое кольцо вычетов, как установлено в п. 1. Так как C есть *sp*-кольцо, то получаем, что C — моногенное кольцо. Выше замечено, что A — $E(C)$-модуль.

3. Группа A является конечно порожденным K_χ-модулем для некоторой характеристики χ (теорема 3.6) и, кроме того, A — $E(K_\chi)$-модуль (теорема 3.5). Следовательно, $R = \operatorname{End}_{K_\chi} A$. Отсюда и из равенства $C = \operatorname{End}_R A$ заключаем, что K_χ канонически вкладывается в кольцо C. Это влечет конечную порожденность C-модуля A. □

Приведем несколько известных определений и фактов. Пусть T — некоторое кольцо и M — правый T-модуль. Идеал кольца T, равный сумме образов всех T-гомоморфизмов $M \to T$, называется *идеалом следа* модуля M. Модуль M называется *образующим*, если его идеал следа совпадает с T. Модуль M является образующим в точности тогда, когда $M^n \cong T \oplus X$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и T-модуля X.

Будем также использовать следующий хорошо известный результат.

Теорема (теорема Мориты)**.** *Если M — образующий T-модуль, то M — конечно порожденный проективный левый L-модуль, где $L = \operatorname{End}_T M$, причем $T \cong \operatorname{End}_L M$ канонически. Верно и обратное утверждение.*

Применение этой теоремы возможно к группе A как R-модулю и как C-модулю (по прежнему, C — центр кольца эндоморфизмов $R = \operatorname{End} A$). В первом случае $\operatorname{End}_R A = C$, во втором $\operatorname{End}_C A = R$.

Полезен следующий более специальный результат.

Теорема. *Пусть T — коммутативное кольцо и P — конечно порожденный проективный T-модуль. Тогда $T = I \oplus \operatorname{Ann} P$, где I — идеал следа модуля P и $\operatorname{Ann} P$ — аннулятор модуля P. При этом P является образующим модулем в точности тогда, когда P — точный модуль.*

Из теоремы Мориты и равенств $R = \operatorname{End}_C A$, $C = \operatorname{End}_R A$ непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 8.10. *Группа A является конечно порожденным проективным R-модулем в точности в том случае, когда A — образующий C-модуль.*

Теорема 8.11. *Следующие утверждения о самомалой sp-группе A конечного ранга равносильны*:

(1) A — *эндопроективная группа*;
(2) $A \cong C \oplus M$, *где* M — *некоторый* C-*модуль*;
(3) R-*модуль* A *изоморфен прямому слагаемому модуля* ${}_RR$.

Доказательство. (1)⇒(2). На основании леммы 8.9 заключаем, что A — конечно порожденный R-модуль, а из леммы 8.10 следует, что A — образующий C-модуль. Следовательно, $A^n \cong C \oplus B$, где $n \in \mathbb{N}$, B — некоторый C-модуль. Кольцо C моногенно, а значит, оно является E-кольцом и $\operatorname{End} C \cong C$ (лемма 8.9). Записав теперь $C = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k$, где все C_i — неразложимые в категории $\mathcal{W}$ группы, получаем, что $\operatorname{Hom}(C_i, C_j) = 0$ при $i \neq j$. По следствию 2.7 каждая группа C_i изоморфна в категории $\mathcal{W}$ некоторому прямому слагаемому группы A, причем разным группам соответствуют разные прямые слагаемые. Таким образом, вся группа C изоморфна в категории $\mathcal{W}$ некоторому прямому слагаемому группы A. Поэтому $A \oplus Y \cong C \oplus M \oplus X$, где M — некоторая группа, X, Y — конечные группы. Убедимся, что любая p-компонента $t_p(Y)$ изоморфна какому-нибудь слагаемому группы $M \oplus X$; таким образом, ее можно вычеркнуть из записанного изоморфизма. Действительно, имеет место изоморфизм

$$t_p(A) \oplus t_p(Y) \cong t_p(C) \oplus t_p(M) \oplus t_p(X).$$

При $t_p(A) = 0$ также $t_p(C) = 0$, и доказывать нечего. Считаем, что $t_p(A) \neq 0$ и $t_p(C) \neq 0$. Кольцо $t_p(C)$ изоморфно некоторому прямому слагаемому G группы $t_p(A)$ как центр кольца $\operatorname{End} t_p(A)$ (ввиду леммы 8.9). Следовательно, группы G и $t_p(C)$ сокращаются в последнем изоморфизме, и группа $t_p(Y)$ оказывается изоморфной какому-либо прямому слагаемому H группы $t_p(M) \oplus t_p(X)$. Группы $t_p(Y)$ и H можно сократить в изоморфизме $t_p(A) \oplus t_p(Y) \cong t_p(C) \oplus t_p(M) \oplus t_p(X)$. В итоге группа Y вычеркивается из изоморфизма $A \oplus Y \cong C \oplus M \oplus X$. Переобозначая, если нужно, для некоторой группы M получаем, что $A \cong C \oplus M$. Группа $C \oplus M$ является C-модулем, причем это $E(C)$-модуль. Значит, разложение $C \oplus M$ модульное и M — C-модуль.

(2)⇒(3). Группы A и $C \oplus M$ изоморфны как C-модули, поскольку мы имеем дело с $E(C)$-модулями. Отсюда $R = \operatorname{End}_C A \cong \operatorname{Hom}_C(C, A) \oplus \operatorname{Hom}_C(M, A)$. Здесь $\operatorname{Hom}_C(C, A)$ и A изоморфны как R-модули.

Импликация (3)⇒(1) очевидна. □

Прежде чем описать эндообразующие *sp*-группы, сформулируем и докажем лемму 8.12 и предложение 8.13.

Лемма 8.12. *Пусть* P — *конечно порожденный проективный модуль над* E-*кольцом* T, L — *его идеал следа. Тогда* P *есть* $E(T)$-*модуль,* $E(L)$-*модуль и точный конечно порожденный проективный образующий* L-*модуль, а* L — E-*кольцо, канонически изоморфное центру кольца* $\operatorname{End} P$.

Доказательство. Сначала отметим, что E-кольцо всегда коммутативно (об этом см., например, в [59, раздел 6]).

Имеем $T = L \oplus M$, где $M = \operatorname{Ann} P$ (см. теорему перед леммой 8.10). Выберем $n \in \mathbb{N}$ и T-модуль X так, что $T^n = L^n \oplus M^n = P \oplus X$. В силу определения идеала следа $\operatorname{Hom}_T(P, M) = 0$. Поэтому ограничение проекции $T^n \to M^n$ на модуль P равно нулю. Это означает, что $P \subseteq L^n$ и $L^n = P \oplus (L^n \cap X)$. Отсюда находим, что P — точный конечно порожденный проективный L-модуль. Затем, P — образующий L-модуль.

Покажем, что L является E-кольцом. Пусть α — эндоморфизм группы L. Продолжим его на группу T, полагая $\alpha M = 0$. Так как T — E-кольцо, то найдется элемент $t \in T$, для которого $\alpha(x) = tx$ при всех $x \in T$. Записав $t = l + m$, где $l \in L$, $m \in M$, найдем $\alpha(x) = tx = lx + mx$. Для $x \in L$ имеем $mx = 0$ и $\alpha(x) = lx$, т.е. α действует на L как умножение на элемент $l \in L$. Следовательно, L — E-кольцо. Поскольку $L^n = P \oplus (L^n \cap X)$, то L^n и P являются $E(L)$-модулями.

Верно также равенство $\operatorname{End} P = \operatorname{End}_L P$. Подобным образом из $T^n = P \oplus X$ следует, что P — $E(T)$-модуль.

L-Модуль P является образующим, поэтому кольцо L канонически изоморфно кольцу $\operatorname{End}_K P$, где $K = \operatorname{End}_L P$. Так как $\operatorname{End} P = \operatorname{End}_L P$, то $\operatorname{End}_K P$ совпадает с центром кольца $\operatorname{End} P$. Таким образом, установленный изоморфизм $L \cong \operatorname{End}_K P$ является искомым. □

По-прежнему C обозначает центр кольца эндоморфизмов R группы A.

Предложение 8.13. *Следующие утверждения о произвольной группе A равносильны*:

(1) A — *эндообразующая группа*;
(2) A — *конечно порожденный проективный C-модуль*;
(3) A — *эндопроективная точная группа.*

Доказательство. Равносильность условий (1) и (2) вытекает из теоремы Мориты (см. лемму 8.10 и текст перед ней).

(1)⇒(3). В силу условия (2), A — точный конечно порожденный проективный модуль над коммутативным кольцом C. Следовательно, A — образующий C-модуль (по замечанию перед леммой 8.10) и проективный R-модуль (по лемме 8.10). Убедимся в точности группы A. Предположим, что $IA = A$ для некоторого правого идеала I кольца R. Поскольку A — образующий R-модуль, то существует $n \in \mathbb{N}$ и R-модуль M со свойством $A^n = R \oplus M$. Тогда $IA^n = IR \oplus IM = I \oplus IM$. С другой стороны, $IA^n = (IA)^n = A^n = R \oplus M$. Отсюда $R \oplus M = I \oplus IM$ и $I = R$, т.е. A — точная группа.

(3)⇒(1). Пусть I — идеал следа R-модуля A. Тогда $IA = A$ в силу проективности R-модуля A. Из точности группы A получаем, что $I = R$ и A — образующий R-модуль. □

Теорема 8.14. *Следующие утверждения о самомалой sp-группе A конечного ранга равносильны*:

(1) A — *эндообразующая группа*;
(2) $A \cong C \oplus J_2 \oplus \ldots \oplus J_n$, *где* $J_2, \ldots, J_n$ — *некоторые прямые слагаемые кольца* C;
(3) $A \cong J_1 \oplus J_2 \oplus \ldots \oplus J_n$, *где* $J_1, J_2, \ldots, J_n$ — *некоторые проективные идеалы кольца* C.

Доказательство. (1)⇒(2). На основании предложения 8.13, A — эндопроективная группа и конечно порожденный проективный образующий C-модуль. Мы имеем аддитивный изоморфизм $E(C)$-модулей $A \cong C \oplus M$ (теорема 8.11). Следовательно, он является C-модульным и M — конечно порожденный проективный C-модуль. Пусть T — его идеал следа. По лемме 8.12 кольцо T изоморфно центру кольца $\operatorname{End} M$, а M — конечно порожденный проективный образующий T-модуль. В силу леммы 8.10, M — эндопроективная группа. К M также возможно применение теоремы 8.11. В результате получим $M \cong J_2 \oplus M_1$, $A \cong C \oplus J_2 \oplus M_1$, где $J_2 = T$, M_1 — конечно порожденный проективный T-модуль. Для M_1 повторяем рассуждения, проведенные выше относительно M. Через несколько шагов получим $A \cong C \oplus J_2 \oplus \ldots \oplus J_n$, где $J_2, \ldots, J_n$ — некоторые прямые слагаемые кольца C.

Импликация (2)⇒(3) проверяется непосредственно.

(3)⇒(1). Изоморфизм в п. (3) является модульным. Следовательно, A — проективный C-модуль. Кроме того, модуль A конечно порожден (лемма 8.9). Тогда по предложению 8.13 A — эндообразующая группа. □

Замечание 8.15. За дополнительной информацией о *sp*-группах можно обратиться к статьям [3–6, 20, 21, 24, 25, 32, 40, 42, 44, 45, 49, 77, 78]. Попутно укажем, что есть работы, специально посвященные самомалым группам (в некоторых из них встречаются *sp*-группы), например, [23, 24, 33–36, 41].

Существуют более общие классы групп, чем класс всех *sp*-групп или какой-то его подкласс. Один такой класс состоит из групп, удовлетворяющих записанным ниже условиям (1)–(3).

Для редуцированной смешанной группы A с бесконечным числом p-компонент следующие условия эквивалентны:

(1) *для каждого простого p с $t_p(A) \neq 0$ имеет место прямое разложение $A = t_p(A) \oplus B_p$ для некоторой такой группы B_p, что $pB_p = B_p$;*
(2) *справедливы вложения*

$$\bigoplus_p t_p(A) \subset A \subseteq \prod_p t_p(A),$$

причем A является p-чистой в $\prod_p t_p(A)$ для каждого простого p с $t_p(A) \neq 0$;
(3) *справедливы вложения из п.* (2)*, причем $A/t(A)$ — p-делимая группа для каждого простого p, $t_p(A) \neq 0$.*

Данным условиям удовлетворяют аддитивные группы T-колец (см. [31]) и редуцированные смешанные группы G без ненулевых элементов бесконечной p-высоты для всех p с $t_p(G) \neq 0$ с коммутативным кольцом $\operatorname{End} G$ ([59, теорема 19.4]).

С *sp*-группами тесно связаны факторно делимые группы[1]. А именно, А. А. Фомин доказал (см. [43]), что всякая факторно делимая группа чисто вкладывается в некоторый конечно порожденный модуль над кольцом псевдорациональных чисел. В силу теоремы 3.6 здесь естественным образом появляются самомалые *sp*-группы конечного ранга. Более того, если редуцированная факторно делимая группа A такова, что $A/t(A)$ — делимая группа, то A — самомалая *sp*-группа конечного ранга. Факторно делимые группы изучаются в [19, 22, 26, 43, 46, 74, 75, 79].

Кольца K_χ (в частности, кольцо псевдорациональных чисел, см. раздел 3) ввели А. А. Фомин (см. [42, 43]) и П. А. Крылов (см. [3]). Эти же авторы стали рассматривать *sp*-группы как K_χ-модули. Уточним, что в случае, когда характеристика χ состоит только из символов 0 и 1, кольца K_χ ранее уже использовались в [48]. Модули над кольцами K_χ и, в частности, *sp*-группы как K_χ-модули исследуются в [1, 3–6, 9, 10, 42, 43]. Особенно систематическими в этом направлении были работы А. В. Царева [15–19, 74, 75].

sp-Кольца представляют интерес и как самостоятельные объекты. В разделе 8 определены моногенные *sp*-кольца. Моногенное *sp*-кольцо K называется *csp-кольцом*, если K/T — поле, где $T = \bigoplus_{p \in P} K_p$. Это поле называется *базовым полем csp*-кольца. Эти кольца можно охарактеризовать следующим образом.

Теорема 8.16 (Е. А. Тимошенко)**.** *Для кольца R следующие условия эквивалентны*:

(1) *кольцо R изоморфно некоторому csp-кольцу*;
(2) *кольцо R содержит такой идеал I, что R/I — поле, причем существует такая характеристика χ, что I и T_χ изоморфны как абелевы группы* (*об идеале T_χ см. начало раздела 3*).

Неожиданно сложным и интересным оказался вопрос о том, какие абстрактные поля могут быть изоморфны базовому полю некоторого *csp*-кольца. Этот вопрос можно отнести к проблеме реализации для колец эндоморфизмов. Говорят также о представлении колец кольцами эндоморфизмов или о теоремах реализации для колец эндоморфизмов. Это важное направление частично отражено в [59, 60]. Второй том книги Р. Гёбеля и Дж. Трлифая [51] целиком посвящен проблеме реализации для колец эндоморфизмов.

Проблема реализации заключается в нахождении критериев того, чтобы абстрактное кольцо было изоморфно кольцу эндоморфизмов некоторого модуля в подходящей категории. Например, исследовалось представление колец кольцами эндоморфизмов в категории Уокера Walk. Теоремы, позволяющие представить заданное поле F как базовое поле какого-нибудь *csp*-кольца K,

[1] Группа A называется *факторно делимой*, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F — периодическая делимая группа.

относятся к теоремам реализации. Действительно, так как всякое *csp*-кольцо является E-кольцом, то такие теоремы позволяют построить такое *csp*-кольцо K, что кольцо эндоморфизмов в категории Walk аддитивной группы K^+ будет изоморфно полю F.

Кратко изложим основные результаты Е. А. Тимошенко (см. [8, 11, 12]) о реализации полей базовыми полями *csp*-колец. Что характерно, в работах Е. А. Тимошенко применяются различные кардинальные характеристики континуума (подробнее см. [27, 28]).

Если L — бесконечное подмножество множества $\mathbb{N}$, то зададим на произведении $K_L = \prod\limits_{p\in L} \mathbb{Z}_p$ отношение $\approx$, полагая $(r_p)_{p\in L} \approx (d_p)_{p\in L}$ в том и только том случае, когда $r_p = d_p$ для бесконечного множества значений $p \in L$. Через $\mathfrak{ie}_L$ обозначается наименьшая мощность множества $B \subseteq K_L$, удовлетворяющего условию

$$\text{для всякого } r \in K_L \text{ существует такое } d \in B, \text{ что } r \approx d.$$

Зададим на множестве $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ всех функций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ строгий порядок $\prec$ следующим образом: $z' \prec z$ в точности тогда, когда соотношению $z'(i) < z(i)$ удовлетворяют почти все $i \in \mathbb{N}$.

Назовем множество E, входящее в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, *ограниченным*, если существует функция $z \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ с тем свойством, что $z' \prec z$ для произвольной функции $z' \in E$; в противном случае мы скажем, что E — *неограниченное* множество. Символом $\mathfrak{b}$ обозначим наименьшую возможную мощность неограниченного множества $E \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$.

В следующей теореме для характеристики $\chi = (k_p)$ через L_χ обозначается множество таких простых чисел p, что $k_p \neq 0$.

Теорема 8.17. *Для каждой характеристики χ и каждого кардинального числа $\mathfrak{m} \leqslant \max\{\mathfrak{ie}_{L_\chi}, \mathfrak{b}\}$ найдется такое подкольцо K кольца $\mathbb{Z}_\chi$, что $T_\chi \subset K$ и K/T_χ — чисто трансцендентное расширение $\mathbb{Q}(\mathfrak{m})$ поля $\mathbb{Q}$ степени трансцендентности $\mathfrak{m}$.*

Теорема 8.18. *Всякое поле F характеристики 0 и мощности $\leqslant \mathfrak{b}$ является базовым полем некоторого csp-кольца.*

Следствие 8.19. *Если $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, то для поля F равносильны условия*:

(1) $\operatorname{char} F = 0$ *и* $|F| \leqslant \mathfrak{c}$;

(2) F *служит базовым полем некоторого csp-кольца.*

Условия (1) и (2) следствия 8.19 будут равносильными, если мы принимаем обобщенную континуум-гипотезу (ОКГ), континуум-гипотезу (КГ) или аксиому Мартина; это следует из справедливости импликаций

$$\text{ОКГ} \Rightarrow \text{КГ} \Rightarrow \text{аксиома Мартина} \Rightarrow \mathfrak{b} = \mathfrak{c}.$$

Таким образом, существует достаточно много *csp*-колец.

В связи с записанными теоремами сообщим, что в [25] доказано, что каждое конечное алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}$ изоморфно алгебре квазиэндоморфизмов некоторой самомалой *sp*-группы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зиновьев Е. Г.* Кольца псевдоалгебраических чисел и модули над ними/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — М., 2009.
2. *Крылов П. А.* Суммы автоморфизмов абелевых групп и радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов// Изв. вузов. Мат., **4**. — 1976. — С. 56–66.
3. *Крылов П. А.* Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов// Фундам. прикл. мат., **6**, № 3. — 2000. — С. 793–812.
4. *Крылов П. А.* Наследственные кольца эндоморфизмов смешанных абелевых групп// Сиб. мат. ж., **43**, № 1. — 2002. — С. 108–119.
5. *Крылов П. А.* Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы// Алгебра и логика, **43**, № 1. — 2004. — С. 60–76.

6. *Крылов П. А., Пахомова Е. Г.* Абелевы группы и регулярные модули// Мат. заметки, **69**, № 3. — 2001. — С. 402–411.
7. *Сорокин К. С.* Абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Томск, 2014.
8. *Тимошенко Е. А.* О базовых полях *csp*-колец// Алгебра и логика, **49**, № 4. — 2010. — С. 555–565.
9. *Тимошенко Е. А.* Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел// Ж. СФУ. Сер. мат. физ., **4**, № 4. — 2011. — С. 541–550.
10. *Тимошенко Е. А.* Проективные модули над csp-кольцами// Ж. СФУ. Сер. мат. физ., **5**, № 4. — 2012. — С. 581–585.
11. *Тимошенко Е. А.* Чисто трансцендентные расширения поля рациональных чисел как базовые поля *csp*-колец// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех., № 5 (25). — С. 30–39.
12. *Тимошенко Е. А.* О базовых полях *csp*-колец, II// Фундам. прикл. мат., **20**, № 5. — 2015. — С. 149–156.
13. *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.
14. *Фомин А. А.* Числовые кольца и модули над ними. — М.: Прометей, 2013.
15. *Царев А. В.* Псевдорациональный ранг абелевой группы// Сиб. мат. ж., **46**, № 1. — 2005. — С. 217–229.
16. *Царев А. В.* Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел// Мат. заметки, **80**, № 3. — 2006. — С. 437–448.
17. *Царев А. В.* Некоторые морфизмы модулей над кольцом псевдорациональных чисел// Сиб. мат. ж., **49**, № 4. — 2008. — С. 945–953.
18. *Царев А. В.* Сервантные подкольца колец $\mathbb{Z}_\chi$// Мат. сб., **200**, № 10. — 2009. — С. 123–150.
19. *Царев А. В.* Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторно делимые группы/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — М., 2009.
20. *Albrecht U. F.* Mixed Abelian groups with Artinian quasi-endomorphism ring// Commun. Algebra, **25**, № 11. — 1997. — P. 497–511.
21. *Albrecht U. F.* A-projective resolutions and an Azumaya theorem for a class of mixed abelian groups// Czechoslovak. Math. J., **51**, № 1. — 2001. — P. 73–93.
22. *Albrecht U. F., Breaz S., Vinsonhaler C. Wickless W.* Cancellation properties for quotient divisible groups// J. Algebra, **317**, № 1. — 2007. — P. 424–434.
23. *Albrecht U. F., Breaz S., Wickless W.* Purity and self-small groups// Commun. Algebra, **35**, № 11. — 2007. — P. 3789–3807.
24. *Albrecht U. F., Breaz S., Wickless W.* Self-small abelian groups// Bull. Austr. Math. Soc., **80**, № 2. — 2009. — P. 205–216.
25. *Albrecht U. F., Goeters H. P., Wickless W.* The flat dimension of mixed abelian groups as E-modules// Rocky Mount. J. Math., **25**, № 2. — 1995. — P. 569–590.
26. *Albrecht U. F., Wickless W.* Homological properties of quotient divisible Abelian groups// Commun. Algebra, **32**, № 6. — 2004. — P. 2407–2423.
27. *Bartoszyński T., Judah H.* Set Theory. On the Structure of the Real Line. — Wellesley, MA: A. K. Peters, 1995.
28. *Blass A.* Combinatorial cardinal characteristics of the continuum// in: Handbook of Set Theory (Foreman M., Kanamori A., eds.), **1**. — Dordrecht: Springer, 2010. — P. 395–489.
29. *Borooah G., Diesl A. J., Dorsey T. J.* Strongly clean triangular matrix rings over local rings// J. Algebra, **312**, № 2. — 2007. — P. 773–797.
30. *Borooah G., Diesl A. J., Dorsey T. J.* Strongly clean matrix rings over commutative local rings// J. Pure Appl. Algebra, **212**, № 1. — 2008. — P. 281–296.
31. *Bowshell R. A., Schultz P.* Unital rings whose additive endomorphisms commute// Math. Ann., **228**, № 3. — 1977. — P. 197–214.
32. *Breaz S.* On a class of mixed groups with semi-local Walk-endomorphism ring// Commun. Algebra, **30**, № 9. — 2002. — P. 4473–4485.
33. *Breaz S.* Self-small Abelian groups as modules over their endomorphism rings// Commun. Algebra, **31**, № 10. — 2003. — P. 4911–4924.
34. *Breaz S.* Quasi-decompositions for self-small abelian groups// Commun. Algebra, **32**, № 4. — 2004. — P. 1373–1384.
35. *Breaz S.* Warfield dualities induced by self-small mixed groups// J. Group Theory, **13**, № 3. — 2010. — P. 391–409.
36. *Breaz S., Schultz P.* Dualities for self-small groups// Proc. Am. Math. Soc., **140**, № 1. — 2012. — P. 69–82.

37. *Camillo V. P., Khurana D.* A characterization of unit regular rings// Commun. Algebra, **29**, № 5. — 2001. — P. 2293–2295.
38. *Camillo V. P., Khurana D., Lam T. Y., Nicholson W. K., Zhou Y.* Continuous modules are clean// J. Algebra, **304**, № 1. — 2006. — P. 94–111.
39. *Camillo V. P., Yu H. P.* Exchange rings, units and idempotents// Commun. Algebra, **22**, № 12. — 1994. — P. 4737–4749.
40. *Files S. T., Wickless W.* The Baer—Kaplansky theorem for a class of global mixed groups// Rocky Mount. J. Math., **26**, № 2. — 1996. — P. 593–613.
41. *Files S. T., Wickless W.* Direct sums of self-small mixed groups// J. Algebra, **222**, № 1. — 1999. — P. 1–16.
42. *Fomin A. A.* Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers// in: Abelian Groups and Modules. — Basel: Birkhäuser, 1999. — P. 87–100.
43. *Fomin A. A.* Quotient divisible mixed groups// Contemp. Math., **273**. — 2001. — P. 117–128.
44. *Fomin A. A., Wickless W.* Categories of mixed and torsion-free finite rank Abelian groups// in: Abelian Groups and Modules. — Dordrecht: Springer, 1995. — P. 185–192.
45. *Fomin A. A., Wickless W.* Self-small mixed Abelian groups G with $G/T(G)$ finite rank divisible// Commun. Algebra, **26**, № 11. — 1998. — P. 3563–3580.
46. *Fomin A. A., Wickless W.* Quotient divisible Abelian groups// Proc. Am. Math. Soc., **126**, № 1. — 1998. — P. 45–52.
47. *Fuchs L.* Recent results and problems on abelian groups// in: Topics in Abelian Groups. — Chicago, 1963. — P. 9–40.
48. *Fuchs L., Rangaswamy K. M.* On generalized regular rings// Math. Z., **107**, № 1. — 1968. — P. 71–81.
49. *Glaz S., Wickless W.* Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups// Commun. Algebra, **22**, № 4. — 1994. — P. 1161–1176.
50. *Göbel R., Opdenhövel A.* Every endomorphism of a local Warfield module of finite torsion-free rank is the sum of two automorphisms// J. Algebra, **233**, № 2. — 2000. — P. 758–771.
51. *Göbel R., Trlifaj J.* Approximations and Endomorphism Algebras of Modules. — Berlin: Walter de Gruyter, 2012.
52. *Goldsmith B., Pabst S., Scott A.* Unit sum number of rings and modules// Quart. J. Math., **49**, № 3. — 1998. — P. 331–344.
53. *Goldsmith B., Vámos P.* A note on clean Abelian groups// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **117**. — 2007. — P. 181–191.
54. *Han J., Nicholson W. K.* Extensions of clean rings// Commun. Algebra, **29**, № 6. — 2001. — P. 2589–2595.
55. *Handelman D.* Perspectivity and cancellation in regular rings// J. Algebra, **48**, № 1. — 1977. — P. 1–16.
56. *Henriksen M.* Two classes of rings generated by their units// J. Algebra, **31**, № 1. — 1974. — P. 182–193.
57. *Hill P.* Endomorphism rings generated by units// Trans. Am. Math. Soc., **141**. — 1969. — P. 99–105.
58. *Khurana D., Srivastava A. K.* Right self-injective rings in which every element is a sum of two units// J. Algebra Appl., **6**, № 2. — 2007. — P. 281–286.
59. *Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht–Boston–London: Springer-Verlag, 2003.
60. *Krylov P. A., Tuganbaev A. A.* Modules over Discrete Valuation Domains//.
61. *Krylov P. A., Tuganbaev A. A.* Idempotent functors and localizations in the categories of modules and abelian groups// J. Math. Sci., **183**, № 3. — 2012. — P. 323-382.
62. *Krylov P. A., Tuganbaev A. A.* Formal Matrices. — Cham: Springer, 2017.
63. *Li Y.* Strongly clean matrix rings over local rings// J. Algebra, **312**, № 1. — 2007. — P. 397–404.
64. *Meehan C.* Sums of automorphisms of free abelian groups and modules// Math. Proc. Royal Irish Acad., **104**. — 2004. — P. 59–66.
65. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings// Trans. Am. Math. Soc., **229**. — 1977. — P. 269–278.
66. *Nicholson W. K.* Strongly clean rings and Fitting's lemma// Commun. Algebra, **27**, № 8. — 1999. — P. 3583–3592.
67. *Praeger C. E., Schultz P.* The Loewy length of the Jacobson radical of a bounded endomorphism ring// in: Abelian Groups and Noncommutative Rings/ A Collection of Papers in Memory of R. B. Warfield. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1992. — P. 349–360.
68. *Rangaswamy K. M.* Abelian groups with endomorphic images of special types// J. Algebra, **6**, № 3. — 1967. — P. 271–280.

69. *Raphael R. M.* Rings which are generated by their units// J. Algebra, **28**, № 1. — 1974. — P. 199–205.
70. *Richman F., Walker E. A.* Primary abelian groups as modules over their endomorphism rings// Math. Z., **89**, № 1. — 1965. — P. 77–81.
71. *Schultz P.* The endomorphism ring of the additive group of a ring// J. Austr. Math. Soc., **15**. — 1973. — P. 60–69.
72. *Skornyakov L. A.* Complemented Modular Lattices and Regular Rings. — Edinburgh: Oliver & Boyd, 1963.
73. *Srivastava A. K.* A survey of rings generated by units// Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., **6**, № 19. — 2010. — P. 203–213.
74. *Tsarev A. V.* The pseudo-rational rank of quotient divisible group// J. Math. Sci., **144**, № 2. — 2007. — P. 4013–4022.
75. *Tsarev A. V.* Modules over the ring of pseudo-rational numbers and quotient divisible groups// St. Petersburg Math. J., **18**. — 2007. — P. 657–669.
76. *Vámos P.* 2-Good rings// Quart. J. Math., **56**, № 3. — 2005. — P. 417–430.
77. *Wickless W.* A functor from mixed groups to torsion-free groups// Contemp. Math., **171**. — 1994. — P. 407–419.
78. *Wickless W.* The Baer–Kaplansky theorem for direct sums of self-small mixed groups// in: Abelian Groups and Modules. — Basel: Birkhäuser, 1999. — P. 101–106.
79. *Wickless W.* Direct sums of quotient divisible groups// Commun. Algebra, **31**, № 1. — 2003. — P. 79–96.
80. *Wolfson K. G.* An ideal-theoretic characterization of the ring of all linear transformations// Am. J. Math., **75**, № 2. — 1953. — P. 358–386.
81. *Yang X., Zhou Y.* Strong cleanness of the 2×2 matrix ring over a general local ring// J. Algebra, **320**, № 6. — 2008. — P. 2280–2290.
82. *Zelinsky D.* Every linear transformation is a sum of nonsingular ones// Proc. Am. Math. Soc., **5**, № 4. — 1954. — P. 627–630.

Крылов Петр Андреевич
Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск
E-mail: krylov@math.tsu.ru

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: tuganbaev@gmail.com

Царев Андрей Валерьевич
Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: an-tsarev@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 159 (2019). С. 111–132

УДК 512.541

E-ГРУППЫ И E-КОЛЬЦА

© 2019 г. П. А. КРЫЛОВ, А. А. ТУГАНБАЕВ, А. В. ЦАРЕВ

Аннотация. Ассоциативное кольцо R называется E-кольцом, если имеет место канонический изоморфизм $R \cong \mathsf{E}(R^+)$. Аддитивные группы E-колец называются E-группами. Другими словами, абелева группа A является E-группой в том и только в том случае, когда $A \cong \operatorname{End} A$ и кольцо эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ коммутативное. В работе приводится обзор основных результатов о E-группах и E-кольцах, а также рассматриваются некоторые их обобщения: $\mathcal{E}$-замкнутые группы, T-кольца, A-кольца, группы, допускающие только коммутативные умножения и др.

Ключевые слова: абелева группа, $\mathcal{E}$-замкнутая группа, E-группа, E-кольцо, T-кольцо, факторно делимая группа, A-кольцо, кольцо эндоморфизмов.

E-GROUPS AND E-RINGS

© 2019 P. A. KRYLOV, A. A. TUGANBAEV, A. V. TSAREV

Abstract. An associative ring R is called an *E-ring* if the canonical homomorphism $R \cong \mathsf{E}(R^+)$ is an isomorphism. Additive groups of E-rings are called *E-groups*. In other words, an Abelian group A is an E-group if and only if $A \cong \operatorname{End} A$ and the endomorphism ring $\mathsf{E}(A)$ is commutative. In this paper, we give a survey of the main results on E-groups and E-rings and also consider some of their generalizations: $\mathcal{E}$-closed groups, T-rings, A-rings, the groups admitting only commutative multiplications, etc.

Keywords and phrases: Abelian group, $\mathcal{E}$-closed group, E-group, E-ring, T-ring, quotient divisible group, A-ring, endomorphism ring.

AMS Subject Classification: 20Kxx

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 111
1. $\mathcal{E}$-Замкнутые группы 112
2. E-Кольца 116
3. T-Кольца и факторно делимые группы 118
4. A-Кольца 122
5. Умножения на группах 126
Список литературы 131

Введение

При решении ряда задач теории абелевых групп естественным образом возникают группы, изоморфные своим группам эндоморфизмов. Такие группы (ниже мы будем называть их $\mathcal{E}$-замкнутыми) в силу задания определяются своими кольцами эндоморфизмов (и даже группами

Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10013).

эндоморфизмов) внутри своего класса. Еще в 1973 г. П. Шультц обратил внимание на то, что изучение $\mathcal{E}$-замкнутых групп разбивается на два принципиально разных случая, в зависимости от того, коммутативны их кольца эндоморфизмов или нет. $\mathcal{E}$-Замкнутые группы с коммутативными кольцами эндоморфизмов он назвал E-группами, а ассоциативные кольца с единицей, аддитивные группы которых являются E-группами, он назвал E-кольцами.

Начальную историю изучения E-групп и E-колец проследить одновременно и легко, и сложно. С одной стороны, хорошо известно, что E-группы и E-кольца были введены П. Шультцем в [33]). С другой стороны, еще Коши в начале XIX в. знал, что кольца $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ являются E-кольцами. Он использовал этот факт при исследовании действительных функций, являющихся решениями функционального уравнения $f(x+y) = f(x) + f(y)$, которое в настоящее время известно как уравнение Коши. Кроме того, Коши умел доказывать, что над полем $\mathbb{R}$ всякое непрерывное решение уравнения Коши также имеет вид $f(x) = f(1) \cdot x$.

E-Группы и E-кольца не попали в знаковую монографию Л. Фукса «Бесконечные абелевы группы» (второй том которой вышел в 1973 г.), однако, почти во всех более поздних книгах по теории абелевых групп (в том числе и в последней редакции 2015 г. книги Фукса) E-группам и E-кольцам посвящены разделы и даже статьи. Кроме того, в 2002 г. Ч. Винсонхалер опубликовал солидный обзор [35] по E-кольцам и близким к ним алгебраическим структурам.

В этой статье мы познакомимся с уже ставшими классическими результатами о E-группах и E-кольцах и с современным развитием данной тематики. Мы почти целиком оставим вне поля нашего внимания модульное направление, ограничившись лишь определениями E-модулей и T-модулей и кратким литературным обзором (это направление достаточно обширно и заслуживает отдельного внимания).

В первом разделе статьи вводятся основные понятия и раскрывается соотношение между $\mathcal{E}$-замкнутыми группами и E-группами. В следующих двух разделах в основном приводятся классические результаты Р. Боушелла и П. Шультца о E-кольцах без кручения конечного ранга и о T-кольцах, дополненные некоторыми новыми результатами. Четвертый раздел посвящен обобщениям E-колец, введенным М. Дугасом и С. Фейгельштоком, — A-кольцам и AA-кольцам. В последнем разделе статьи применяется подход к изучению E-групп, основанный на рассмотрении свойств умножений, задаваемых на группе. При этом исследуется обобщение E-групп — группы, допускающие только коммутативные умножения.

Как правило, мы используем стандартные обозначения и термины. Буква p обозначает некоторое простое число, а буква P — множество всех простых чисел. Символы $\mathbb{Z}_{p^k}$ и $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ обозначают циклическую группу порядка p^k и кольцо целых p-адических чисел соответственно, а $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — квазициклическую группу (группу типа p^∞).

Слово «группа» всегда означает «абелева группа», под «кольцом» мы всегда понимаем «ассоциативное кольцо». Групповая терминология, применяемая к кольцам, относится к их аддитивным группам.

Пусть A — группа. Тогда $t(A)$ — ее периодическая часть, т.е. подгруппа, образованная всеми элементами конечного порядка, $t_p(A)$ — p-примарная компонента группы A, т.е. $t_p(A)$ — наибольшая подгруппа в A, являющаяся p-группой. Имеет место равенство

$$t(A) = \bigoplus_{p \in P} t_p(A).$$

Наконец, $\mathrm{End}(A)$ и $\mathrm{Hom}(A,B)$ — это группа эндоморфизмов группы A и группа гомоморфизмов из группы A в группу B соответственно, $\mathsf{E}(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A.

1. $\mathcal{E}$-Замкнутые группы

В известной монографии [25] Л. Фукса «Абелевы группы» сформулирована проблема 45 о характеризации колец R, удовлетворяющих условию $R \cong \mathsf{E}(R^+)$. Аналогом данной проблемы, сформулированной на языке абелевых групп, является следующая задача: описать абелевы группы A,

для которых имеет место изоморфизм $A \cong \operatorname{End} A$. Группы, удовлетворяющие данному условию, называются *$\mathcal{E}$-замкнутыми*; такие группы также называются *обобщенными E-группами*, *слабыми E-группами* и *E^+-группами*. Первой работой, посвященной систематическому исследованию $\mathcal{E}$-замкнутых групп, была статья П. Шультца [34].

Изоморфизм $A \cong \operatorname{End} A$ индуцирует на $\mathcal{E}$-замкнутой группе A структуру ассоциативного кольца с единицей $(A, \cdot)$. В связи с этим мы можем рассмотреть эндоморфизмы левого и правого умножения:

$$\lambda_a : A \to A, \quad x \mapsto ax; \qquad \rho_a : A \to A, \quad x \mapsto xa,$$

с помощью которых возможно получить некоторую информацию о строении группы $\operatorname{End} A$. Рассмотрим группы $A_\ell = \{\lambda_a \mid a \in A\}$ и $A_r = \{\rho_a \mid a \in A\}$.

Лемма 1.1. *Отображения $\theta_\ell : A \to A_\ell$, $a \mapsto \lambda_a$, и $\theta_r : A \to A_r$, $a \mapsto \rho_a$, являются изоморфизмами групп.*

Доказательство. Тот факт, что θ_ℓ и θ_r — сюръективные гомоморфизмы, очевиден. Инъективность следует из наличия единицы в кольце $(A, \cdot)$: $\theta_\ell(a) = 0$ влечет $a \cdot 1 = a = 0$; $\theta_r(a) = 0$ влечет $1 \cdot a = a = 0$. □

Лемма 1.2. *Для группы A (аддитивной группы ассоциативного кольца с единицей) имеют место прямые разложения*:

$$\operatorname{End} A = A_\ell \oplus U_1 = A_r \oplus U_1,$$

где $U_1 = \{\varphi \in \operatorname{End} A \mid \varphi(1) = 0\}$.

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{End} A = A_\ell \oplus U_1$. Пусть ψ — произвольный эндоморфизм группы A; тогда $\psi - \lambda_{\psi(1)} \in U_1$, а значит, $\operatorname{End} A = A_\ell + U_1$. Учитывая, что $A_\ell \cap U_1 = 0$, получаем, что $\operatorname{End} A = A_\ell \oplus U_1$. Аналогично показывается, что $\operatorname{End} A = A_r \oplus U_1$. □

Изучение $\mathcal{E}$-замкнутых групп разбивается на два принципиально различных случая, в зависимости от того равно нулю множество $U_1 = \{\varphi \in \operatorname{End} A \mid \varphi(1) = 0\}$, или нет.

Лемма 1.3. *Для $\mathcal{E}$-замкнутой группы A следующие утверждения равносильны*:

(1) $\mathsf{E}(A)$ — *коммутативное кольцо*;
(2) *отображение $a \mapsto \lambda_a$ задает изоморфизм групп A и* $\operatorname{End} A$;
(3) *если φ — произвольный эндоморфизм группы A и $\varphi(1) = 0$, то $\varphi = 0$.*

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть $\psi \in U_1$, тогда для любого $a \in A$ имеем

$$\psi(a) = \psi(\lambda_a(1)) = \lambda_a(\psi(1)) = \lambda_a(0) = 0,$$

т.е. $U_1 = 0$ и $\operatorname{End} A = A_\ell$.

Импликация (2)⇒(3) проверяется непосредственно.

(3)⇒(1). Поскольку $U_1 = 0$, то $\operatorname{End} A = A_\ell = A_r$. Тогда для любого a из A найдется такой b из A, что $\lambda_a = \rho_b$. Так как $a = \lambda_a(1) = \rho_b(1) = b$, то $\lambda_a = \rho_a$. Следовательно, кольцо $\mathsf{E}(A)$ коммутативное. □

Замечание. Нетрудно видеть, что в лемме 1.3 условие «A — $\mathcal{E}$-замкнутая группа» можно заменить на более слабое условие «A — аддитивная группа ассоциативного кольца с единицей».

Группы, удовлетворяющие равносильным условиям леммы 1.3, называются *E-группами*.

Теорема 1.4. *Пусть A — произвольная E-группа.*

1. *Если $(A, \cdot)$ — ассоциативное кольцо с единицей, то для всякого умножения $* \in \operatorname{Mult} A$ найдется такой элемент $a \in A$, что $x * y = a \cdot x \cdot y$ для всех $x, y \in A$.*
2. *На группе A существует единственное (с точностью до изоморфизма) ассоциативное кольцо с единицей.*

Доказательство. 1. Пусть 1 — единица кольца $(A,\cdot)$ и $1*1=a$; тогда

$$x*y=\lambda_x^*(\rho_y(1))=\rho_y(\lambda_x^*(1))=(x*1)y=(\rho_1^*(\rho_x(1)))y=(\rho_x(\rho_1^*(1)))y=(1*1)xy=axy.$$

2. Пусть изоморфизм $A\cong \operatorname{End} A$ индуцирует на группе A структуру ассоциативного кольца с единицей $(A,\cdot)$. Тогда из леммы 1.3 следует, что $(A,\cdot)$ — коммутативное кольцо. Рассмотрим на группе A произвольную мультипликативную операцию $*$ такую, что $(A,*)$ — ассоциативное кольцо с единицей. В соответствии с п. 1 найдется элемент $a\in A$, такой что $x*y=a\cdot x\cdot y$ для всех $x,y\in A$. Обозначим через 1 и $1'$ единицы колец $(A,\cdot)$ и $(A,*)$ соответственно. Тогда из равенства $1'*1=1$ вытекает равенство $a\cdot 1'\cdot 1=a\cdot 1'=1$, а значит, элемент a обратим в кольце $(A,\cdot)$. Покажем, что отображение $f:(A,\cdot)\to(A,*)$, действующее по закону $f(x)=a^{-1}\cdot x$, является изоморфизмом колец:

$$f(x+y)=a^{-1}(x+y)=a^{-1}x+a^{-1}y=f(x)+f(y),$$
$$f(x)*f(y)=(a^{-1}x)*(a^{-1}y)=a\cdot a^{-1}\cdot x\cdot a^{-1}\cdot y=a^{-1}(x\cdot y)=f(x\cdot y).$$

Наконец, поскольку $a^{-1}*x=a\cdot a^{-1}\cdot x=x$ для любого $x\in A$, то $a^{-1}=1'$, и следовательно, $f(1)=a^{-1}=1'$. □

Ассоциативные кольца с единицей, аддитивные группы которых являются E-группами, называются *E-кольцами.*

Из предыдущего определения и теоремы 1.4 следует, что для E-кольца R имеет место изоморфизм $R\cong \mathsf{E}(R^+)$, а значит, по лемме 1.3 все E-кольца коммутативны.

Приведем некоторые примеры $\mathcal{E}$-замкнутых групп, естественно возникающие в теории абелевых групп.

Пример 1.5 (см. [34])**.** Периодическая группа $\mathcal{E}$-замкнута в точности тогда, когда она циклическая.

Пример 1.6 (см. [34])**.** Группа с ненулевой делимой частью $\mathcal{E}$-замкнута в точности тогда, когда она имеет вид $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}_m$.

Пример 1.7. Пусть A — группа без кручения ранга 1. Хорошо известно (см., например, [12, § 1] или [27, § 85]), что условие $A\cong\operatorname{End}A$ выполняется в точности тогда, когда группа A имеет идемпотентный тип, т.е. в точности тогда, когда факторгруппа $A/\langle a\rangle$ при некотором (произвольном) $a\neq 0$ является прямой суммой делимой периодической группы и конечной группы.

Пример 1.8. Пусть $\chi=(m_p)$ — произвольная характеристика (т.е. последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞, занумерованная простыми индексами). Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_\chi=\prod\limits_{p\in P}R_p$, где $R_p=\mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ — кольцо классов вычетов по модулю p^{m_p} при $m_p<\infty$ и $R_p=\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел при $m_p=\infty$. Тогда для каждого сервантного подкольца R (содержащего единицу) кольца $\mathbb{Z}_\chi$ справедливо $\mathsf{E}(R^+)\cong R$, т.е. R^+ является $\mathcal{E}$-замкнутой группой.

Во всех приведенных выше примерах $\mathcal{E}$-замкнутые группы являются E-группами. Более того, проблема существования $\mathcal{E}$-замкнутых групп с некоммутативными кольцами эндоморфизмов (т.е. не являющихся E-группами) долгое время оставалась открытой, пока не была положительно решена Р. Гёбелем, С. Шелахом и Л. Штрюнгманном в 2003 г. В частности, они получили следующий результат.

Теорема 1.9 (см. [28])**.** *Пусть λ — бесконечное кардинальное число, удовлетворяющее условию $\lambda^{\aleph_0}=\lambda$. Тогда существует такое некоммутативное кольцо R мощности λ, что $\mathsf{E}(R^+)\cong R$.*

Вопрос соотношения $\mathcal{E}$-замкнутых групп и E-групп является одним из центральных при изучении $\mathcal{E}$-замкнутых групп. Во многих хороших классах групп эти понятия совпадают. Например, С. Фейгельшток, Дж. Хаусен и Р. Рафаэль доказали, что любая $\mathcal{E}$-замкнутая группа без кручения конечного ранга является E-группой (см. [23]). Рассмотрим обобщение этого результата.

Предложение 1.10. *Если для $\mathcal{E}$-замкнутой группы A выполняется хотя бы одно из следующих условий, то $\mathsf{E}(A)$ — коммутативное кольцо (т.е. A — E-группа).*

1. *A — неразложимая группа.*
2. *$r_p(A) < \infty$ для любого простого p.*

Доказательство. 1. Так как A — неразложимая группа, то из

$$A \cong \operatorname{End} A = A_\ell \oplus U_1 = A_r \oplus U_1$$

следует, что $U_1 = 0$ и $\operatorname{End} A = A_\ell = A_r$, а значит, кольцо $\mathsf{E}(A)$ коммутативно.

2. Так как $A \cong \operatorname{End} A = A_\ell \oplus U_1$, где $A_\ell \cong A$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеет место прямое разложение

$$A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n, \quad \text{где} \quad A_n = B_{n+1} \oplus A_{n+1},$$

причем $B_i \cong U_1$ и $A_i \cong A$ при всех i. Тогда из условия $r_p(A) < \infty$ при любом простом p вытекает, что $r_p(U_1) = 0$ при любом простом p. Следовательно, $U_1 = 0$ или U_1 — ненулевая делимая группа. В первом случае получаем, что $\operatorname{End} A = A_\ell = A_r$, а значит, кольцо $\mathsf{E}(A)$ коммутативно. Во втором же случае (если он возможен) получаем, что A — нередуцированная $\mathcal{E}$-замкнутая группа, следовательно, $A \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_m$ (см. пример 1.6). Очевидно, что тогда кольцо $\mathsf{E}(A)$ снова коммутативно. □

С $\mathcal{E}$-замкнутыми группами непосредственно связана проблема 18.3 из книги Л. Фукса [**?**].

Проблема. Для группы A определим последовательность групп (A_n) по следующему правилу: $A_0 = A$ и $A_{n+1} = \operatorname{End} A_n$. На каком шаге может стабилизироваться эта последовательность?

Используя лемму 1.2, для групп без кручения конечного ранга легко показать, что последовательность (A_n) из проблемы Фукса стабилизируется не позднее A_1, т.е. в случае стабилизации рассматриваемой последовательности всегда имеет место изоморфизм $\operatorname{End} A_1 \cong A_1$. Отметим без доказательства, что аналогичное утверждение будет справедливо и для более широкого класса групп, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.11 (см. [1])**.** *Пусть A — группа, все p-ранги которой конечны. Тогда для последовательности (A_n) следующие утверждения равносильны*:

(1) *$A_{i+1} \cong A_i$ хотя бы для одного i;*
(2) *A_i — E-группа хотя бы для одного i;*
(3) *$\mathsf{E}(A_i)$ — коммутативное кольцо хотя бы для одного i;*
(4) *$A_1 \cong A_2 \cong \ldots \cong A_i \cong \ldots$.*

$\mathcal{E}$-Замкнутые группы с некоммутативными кольцами эндоморфизмов в настоящее время слабо изучены. Нам известны только некоторые сложно устроенные примеры таких групп и ряд их свойств довольно общего характера. Продвижение в данной области может быть достигнуто привлечением теории ID-групп и использованием конечной топологии.

Напомним, что группа, содержащая собственное прямое слагаемое изоморфное самой группе, называется ID-группой. Р. Бьюмонт и Р. Пирс показали в [15], что A является ID-группой в точности тогда, когда существуют $\varphi, \psi \in \mathsf{E}(A)$, такие что $\psi\varphi = 1$ и $\varphi\psi \neq 1$. В силу этого для изучения ID-групп возможно использовать теорию модулей над кольцом $\mathbb{Z}\{x, y\}/(xy - 1)$, где $\mathbb{Z}\{x, y\}$ — кольцо целочисленных многочленов от двух неперестановочных переменных.

С другой стороны, на $\mathcal{E}$-замкнутой группе A с некоммутативным кольцом эндоморфизмов задается структура кольца, полного в недискретной топологии, индуцированной конечной топологией на кольце $\mathsf{E}(A)$.

В отличие от E-групп, классу $\mathcal{E}$-замкнутых групп в целом посвящено сравнительно мало работ. Отметим, прежде всего, статью Шультца [34], в которой отмечается принципиальное различие коммутативного и некоммутативного случаев. Имеется еще ряд работ, посвященных изучению EE-групп (используется также термин $\mathbb{E}$-группы), обобщающих $\mathcal{E}$-замкнутые группы. Группа A

называется *EE-группой*, если существует эпиморфизм из A на $\operatorname{End} A$. С. Фейгельшток, Дж. Хаусен и Р. Рафаэль в [23] показали, что в классе групп без кручения конечного ранга понятия EE-группа, $\mathcal{E}$-замкнутая группа и E-группа равнозначны. В [28] Р. Гёбель, С. Шелах и Л. Штрюнгманн показали существование EE-групп, не являющихся $\mathcal{E}$-замкнутыми группами.

2. E-Кольца

В соответствии с теоремой 1.4 на E-группе существует и притом единственная структура ассоциативного кольца с единицей, называемая E-кольцом. Верно и обратное: аддитивная группа E-кольца всегда является E-группой. В связи с этим теории E-групп и E-колец тесно переплетены. Например, нетрудно видеть, что любое прямое слагаемое E-группы A вполне инвариантно, а значит, является прямым слагаемым E-кольца $(A, \cdot)$.

Лемма 2.1. *Ассоциативное кольцо с единицей R является E-кольцом в точности тогда, когда любой эндоморфизм группы R^+ является R-модульным.*

Доказательство. Пусть R — E-кольцо и пусть $\varphi \in \operatorname{End} R^+$, $k, s \in R$. Тогда в силу коммутативности кольца $\mathsf{E}(R^+)$ имеем

$$\varphi(k \cdot s) = \varphi(\lambda_k(s)) = \lambda_k(\varphi(s)) = k \cdot \varphi(s).$$

Обратно, пусть $\operatorname{End} R^+ = \operatorname{End}_R R^+$. Рассмотрим произвольный эндоморфизм $\varphi \in \operatorname{End} R^+$. Для него справедливо

$$\varphi(k) = \varphi(k \cdot 1) = k \cdot \varphi(1)$$

при любом $k \in R$. Тогда из $\varphi(1) = 0$ следует, что $\varphi = 0$, а значит, R^+ — E-группа (согласно леммам 1.2 и 1.3), т.е. R — E-кольцо. □

В классе колец без кручения конечного ранга задача характеризации E-колец допускает приемлемое решение, основанное на структурных теоремах Бьюмонта—Пирса (см. [14]), которые можно сформулировать следующим образом:

(i) *если R — ассоциативное кольцо без кручения конечного ранга, то в R существует такое полупервичное подкольцо S, что $R \doteq S \oplus \mathrm{N}(R)$, где $\mathrm{N}(R)$ — нильрадикал кольца R;*
(ii) *полупервичное кольцо S квазиравно прямому произведению первичных колец $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$;*
(iii) *первичное кольцо S_i квазиизоморфно полному матричному кольцу $M_{n_i}(D_i)$, где D_i — некоторая область.*

Лемма 2.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Эндоморфный образ E-группы является E-группой; в частности, прямое слагаемое E-группы является E-группой.*
2. *Если R и S — квазиизоморфные ассоциативные кольца без кручения с единицей и R — E-кольцо, то S — тоже E-кольцо.*
3. *Нильрадикал E-кольца без кручения конечного ранга равен нулю.*

Доказательство. 1. Пусть A — E-группа и $(A, \cdot)$ — E-кольцо. Тогда эндоморфный образ группы A имеет вид aA. Определим умножение $*$ на группе aA по закону $ax * ay = axy$. Тогда $(aA, *)$ — коммутативное кольцо с единицей a. Если $\varphi \in \mathsf{E}(aA)$, то $\lambda_a \varphi \in \mathsf{E}(A)$, и значит, для любого $ax \in aA$ имеем

$$\varphi(ax) = (\lambda_a \varphi)(x) = \lambda_{(\lambda_a \varphi)(1)}(x) = \varphi(a)x = ayx,$$

где $ay = \varphi(a) \in aA$. Следовательно, $\varphi(ax) = ay * ax$, т.е. φ является умножением на элемент ay. Таким образом, по лемме 1.3 группа aA является E-группой.

2. Достаточно рассмотреть квазиравные кольца R и S, где R — E-кольцо, и показать, что S — тоже E-кольцо. Так как $R \doteq S$, то $mR \subseteq S$ и $nS \subseteq R$ при некоторых $m, n \in \mathbb{N}$. Пусть φ — произвольный эндоморфизм группы S^+; тогда по лемме 1.2 он имеет вид $\varphi = \lambda_{\varphi(1)} + \alpha$, где

$\alpha(1) = 0$. С другой стороны, $mn\varphi \in \mathsf{E}(R^+)$. Следовательно, $mn\varphi = \lambda_k$, причем $k \in R \cap S$. Таким образом,

$$mn\varphi = \lambda_k = mn\lambda_{\varphi(1)} + mn\alpha.$$

Поскольку $\operatorname{End} S^+ = S_\ell \oplus U_1$, то из последнего равенства получаем, что $mn\alpha = 0$. Следовательно, $\alpha = 0$ и $\varphi = \lambda_{\varphi(1)}$. Учитывая лемму 1.3, получаем, что S^+ — E-группа, а значит, S — E-кольцо.

3. Пусть R — E-кольцо без кручения конечного ранга. Тогда по первой теореме Бьюмонта—Пирса $R \doteq S \oplus N$, где S — полупервичное кольцо, а N — нильрадикал кольца R. По доказанному выше, $T = S \oplus N$ тоже является E-кольцом. Предположим, что $N \neq 0$. Поскольку в E-группе всякое прямое слагаемое является вполне инвариантной подгруппой, то S является идеалом кольца T, а значит, T/S — кольцо с единицей. Получили противоречие. □

Теорема 2.3 (см. [17]). *Кольцо без кручения R конечного ранга является E-кольцом в точности тогда, когда $R \doteq R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$, где каждое R_i является сильно неразложимым подкольцом некоторого поля алгебраических чисел и $\operatorname{Hom}(R_i, R_j) = 0$ при всех $i \neq j$.*

Доказательство. В силу леммы 2.2 кольцо R полупервично. Тогда из теорем Бьюмонта—Пирса и коммутативности кольца R получаем, что

$$R \doteq R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n,$$

где каждое R_i — область, а значит, является целым подкольцом некоторого поля алгебраических чисел.

Кольцо $R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$ является E-кольцом (по лемме 2.2); следовательно, все R_i тоже являются E-кольцами. Тогда каждое кольцо квазиэндоморфизмов

$$\mathcal{E}(R_i^+) = \mathbb{Q} \otimes \mathsf{E}(R_i^+) \cong \mathbb{Q} \otimes R_i$$

является полем, поэтому все R_i сильно неразложимы.

Наконец, поскольку все прямые слагаемые E-колец вполне инвариантны, то $\operatorname{Hom}(R_i, R_j) = 0$ при $i \neq j$.

Обратно, пусть R — сильно неразложимое подкольцо поля алгебраических чисел $F = \mathbb{Q} \otimes R$. Тогда, в соответствии с [13, Theorem 4.1], алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(R^+)$ изоморфна полной матричной алгебре $M_m(S)$, где S — подполе поля F и $[F : S] = m$. Поскольку R^+ — сильно неразложимая группа, то кольцо $\mathcal{E}(R^+)$ не содержит нетривиальных идемпотентов, а значит, $m = 1$ и $\mathcal{E}(R^+) \cong S$. Из этого следует, что $\mathsf{E}(R^+)$ — коммутативное кольцо (так как оно вкладывается в поле $\mathcal{E}(R^+) \cong S$). Тогда, учитывая лемму 1.3 и замечание после нее получаем, что R — E-кольцо.

Далее, пусть $R \doteq R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$, где $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — сильно неразложимые кольца, удовлетворяющие условиям доказываемой теоремы. Тогда для кольца $L = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$, очевидно, справедливо

$$\mathsf{E}(L^+) \cong \mathsf{E}(R_1^+) \times \mathsf{E}(R_2^+) \times \ldots \times \mathsf{E}(R_n^+),$$

причем по вышедоказанному все кольца $\mathsf{E}(R_i^+)$ коммутативны. Следовательно, L — E-кольцо, а значит, и R — E-кольцо (по лемме 2.2). □

Подкольца полей алгебраических чисел поддаются характеризации на языке простых идеалов колец целых алгебраических чисел (см. [13]). Пусть J — кольцо всех целых элементов поля алгебраических чисел F. Для простого идеала P кольца J рассмотрим локализацию $J_P = \{x/y \mid x, y \in J, y \notin P\}$. Далее, для некоторого множества Π простых идеалов кольца J определим кольцо $J_\Pi = \bigcap\limits_{P \in \Pi} J_P$. Тогда для всякого подкольца R поля алгебраических чисел F существует ровно одно такое множество простых идеалов Π кольца J, что R квазиравно J_Π. В связи с теоремой 2.3 заслуживает внимания вопрос об условиях на множество простых идеалов Π кольца J, при которых J_Π сильно неразложимо. Некоторые такие условия найдены в [13, 29].

Полезным обобщением E-колец являются E-модули, введенные Р. Боушеллом и П. Шультцем в [17, Sec. 2] под неприжившимся названием «R-группы». Модуль M над кольцом с единицей R называется *E-модулем* (или *$E(R)$-модулем*), если отображение $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R^+, M) \to M$, действующее по закону $\Phi(f) = f(1)$, является изоморфизмом. Начальные сведения о E-модулях можно найти в [30, Section 6]. Подробнее с теорией периодических E-модулей можно познакомиться по работе Р. Пирса [32], а с теорией E-модулей без кручения над кольцами без кручения конечного ранга — по работе А. Мадера и Ч. Винсонхалера [31].

Нетрудно проверить, что R-модуль M является $E(R)$-модулем в точности тогда, когда $\mathrm{Hom}_R(R^+, M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R^+, M)$. В связи с этим возникает еще более общая конструкция, введенная в работах П. А. Крылова и М. А. Приходовского. Пусть $e : S \to R$ — гомоморфизм колец, тогда R-модуль M называется *$E(e)$-модулем*, если $\mathrm{Hom}_R(R^+, M) = \mathrm{Hom}_S(R^+, M)$ (подробнее о $E(e)$-модулях см. [2, 6]).

3. T-Кольца и факторно делимые группы

Наряду с E-кольцами без кручения конечного ранга хорошему описанию поддаются и так называемые T-кольца, введенные Р. Боушеллом и П. Шультцем в [17].

Кольцо R называется *T-кольцом*, если отображение

$$m : R \otimes R \to R, \quad m(a \otimes b) = ab,$$

является изоморфизмом.

Рассмотрим другие эквивалентные формулировки для T-колец.

Теорема 3.1 (см. [17]). *Следующие утверждения равносильны*:

(1) R — *T-кольцо*;
(2) *отображение* $d : R \to R \otimes R$, *действующее по закону* $d(a) = 1 \otimes a$, *является изоморфизмом обратным к* m;
(3) R — *E-кольцо и* $R \otimes R = R \otimes_R R$;
(4) $a \otimes b = b \otimes a$ *для любых* $a, b \in R$.

Доказательство. (1)⇒(2). Очевидно, что md — тождественное отображение множества R. Поскольку m — инъекция, то d — изоморфизм, обратный к отображению m.

(2)⇒(3). Рассмотрим такой эндоморфизм $\varphi \in \mathsf{E}(R^+)$, что $\varphi(1) = 0$. Определим аддитивный гомоморфизм $\Phi : R \otimes R \to R$, действующий по закону $\Phi(r \otimes s) = \varphi(r)s$. Тогда $\Phi d = 0$. Следовательно, $\Phi = 0$, и значит, $\varphi = 0$. Учитывая лемму 1.3, получаем, что R — E-кольцо.

Пусть a, b и c — произвольные элементы кольца R. Тогда $m(ab \otimes c) = m(a \otimes bc)$. Следовательно,

$$ab \otimes c = a \otimes bc, \quad R \otimes R = R \otimes_R R.$$

(3)⇒(4). Так как R — коммутативное кольцо, то

$$a \otimes b = 1 \otimes ab = 1 \otimes ba = b \otimes a.$$

(4)⇒(1). Для произвольных элементов $a, b \in R$ справедливо

$$a \otimes b = (a \otimes 1)(1 \otimes b) = (1 \otimes a)(1 \otimes b) = 1 \otimes ab = 1 \otimes m(a \otimes b).$$

Следовательно, $x = 1 \otimes m(x)$ для всех $x \in R \otimes R$. Таким образом, m — инъективное отображение, а значит, m — изоморфизм, т.е. R — T-кольцо. □

Лемма 3.2. *Если* R *и* L — *T-кольца, то* $R \otimes L$ — *тоже T-кольцо.*

Доказательство. Пусть $k_1 \otimes l_1$ и $k_2 \otimes l_2$ — произвольные элементы кольца $R \otimes L$; тогда

$$(k_1 \otimes l_1) \otimes (k_2 \otimes l_2) \overset{\varepsilon}{\mapsto} (k_1 \otimes k_2) \otimes (l_1 \otimes l_2) = (k_2 \otimes k_1) \otimes (l_2 \otimes l_1) \overset{\varepsilon}{\mapsto} (k_2 \otimes l_2) \otimes (k_1 \otimes l_1),$$

где $\varepsilon : (R \otimes L) \otimes (R \otimes L) \to (R \otimes R) \otimes (L \otimes L)$ — естественный изоморфизм. Так как $\varepsilon^2 = id$ — тождественное отображение, то

$$(k_1 \otimes l_1) \otimes (k_2 \otimes l_2) = (k_2 \otimes l_2) \otimes (k_1 \otimes l_1).$$

Учитывая теорему 3.1(4), получаем, что $R \otimes L$ — T-кольцо. □

Теорема 3.3 (см. [17]). *Следующие утверждения равносильны*:

(1) R — *T-кольцо*;
(2) $R/t(R)$ *изоморфно подкольцу поля* $\mathbb{Q}$ *и если* $t_p(R) \neq 0$, *то* $t_p(R)$ — *циклическая группа и* $R/t(R)$ *делится на* p.

Доказательство. (1)⇒(2). Так как R и $\mathbb{Q}$ — T-кольца, то $R \otimes \mathbb{Q}$ — T-кольцо, а значит, и E-кольцо по теореме 3.1(3). Таким образом, $R \otimes \mathbb{Q}$ — делимое E-кольцо без кручения. Следовательно,

$$R \otimes \mathbb{Q} \cong (R/t(R)) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}.$$

Значит, $R/t(R)$ изоморфно некоторому подкольцу поля $\mathbb{Q}$.

Учитывая, что $\mathsf{E}(R^+)$ — коммутативное кольцо, получаем, что $t_p(R)$ — циклическая группа и $R/t(R)$ делится на p при $t_p(R) \neq 0$ (см., например, [30, Sec. 19]).

(2)⇒(1). Пусть S — множество таких простых p, что $t_p(R) \neq 0$, и пусть U — подкольцо поля $\mathbb{Q}$, изоморфное $R/t(R)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & t(R) & \longrightarrow & R & \longrightarrow & U & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle d'} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d^*} & & \\ 0 & \longrightarrow & R \otimes t(R) & \longrightarrow & R \otimes R & \longrightarrow & R \otimes U & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

где $d(a) = 1 \otimes a$ d', d^* индуцируются отображением d. Так как верхняя строка диаграммы сервантно точная, то и нижняя строка сервантно точная. Если $p \in S$, то $t_p(R)$ — циклическая группа, а $R/t_p(R)$ — p-делимая группа. Следовательно,

$$R \otimes t_p(R) \cong t_p(R) \otimes t_p(R) \cong t_p(R).$$

Таким образом, d' индуцирует изоморфизм $t_p(R) \to t_p(R) \otimes t_p(R)$ для каждого $p \in S$, и следовательно, d' — изоморфизм.

Так как U — подкольцо поля $\mathbb{Q}$, и U делится на все простые $p \in S$, то

$$R \otimes U \cong (R/t(R)) \otimes U \cong U \otimes U \cong U.$$

Следовательно, d^* — изоморфизм. Таким образом, d — изоморфизм, т.е. R — T-кольцо. □

Из доказанной теоремы следует, что примерами T-колец служат подкольца (с единицей) поля $\mathbb{Q}$ и кольца классов вычетов. Кольцо целых p-адических чисел $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ является E-кольцом, но не является T-кольцом (так как $r(\widehat{\mathbb{Z}}_p) > 1$).

Пусть R — T-кольцо, тогда учитывая теорему 3.3(2) получаем, что $r_p(R) \leqslant 1$ для любого простого p. Следовательно, $\mathbb{Z}$-адическое пополнение $\widehat{R}$ кольца R имеет следующий вид:

$$\widehat{R} \cong \mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} R_p, \quad \text{где} \quad R_p = \begin{cases} \mathbb{Z}_{p^{m_p}}, & \text{если } t_p(R) \cong \mathbb{Z}_{p^{m_p}}, \\ \widehat{\mathbb{Z}}_p, & \text{если } t_p(R) = 0 \text{ и } R \text{ — не } p\text{-делимая группа}, \\ 0, & \text{если } t_p(R) = 0 \text{ и } R \text{ — } p\text{-делимая группа}. \end{cases}$$

Поскольку все p-ранги T-кольца R конечны, то его первая ульмовская подгруппа $R^1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} nR$ — делимая группа без кручения. Таким образом, имеет место следующее предложение.

Предложение 3.4. *Всякое редуцированное T-кольцо плотно и сервантно вкладывается в некоторое кольцо* $\mathbb{Z}_\chi$.

В [11] было замечено, что для описания T-колец удобно использовать язык факторно делимых групп.

Группа A называется *факторно делимой*, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F — периодическая делимая группа. *Базисом* факторно делимой группы A будем называть всякий базис свободной группы F.

В случае групп без кручения факторно делимые группы были введены Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в [14]. Данная формулировка (включающая и смешанные группы) принадлежит А. А. Фомину и У.. Уиклессу [24].

В силу теоремы 3.3 нас прежде всего будут интересовать факторно делимые группы ранга 1.

Теорема 3.5. *Если R — бесконечное T-кольцо, то R^+ — факторно делимая группа ранга* 1.

Доказательство. Пусть R — бесконечное T-кольцо и пусть $\widehat{R} \cong \mathbb{Z}_\chi$. Нетрудно видеть, что если R^+ не является редуцированной группой, то $R \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_m$ (см., например, [34]), т.е. R^+ — факторно делимая группа ранга 1.

Пусть R^+ — редуцированная группа, т.е. R — подкольцо кольца

$$\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} R_p.$$

Рассмотрим факторгруппу $R^+/\langle 1 \rangle$, которая согласно теореме 3.3 является периодической. Покажем, что $R^+/\langle 1 \rangle$ — делимая группа. Возьмем элемент $a = (\alpha_p) \in R^+$, где $\alpha_p \in R_p$. Для каждого простого числа $q \neq p$ элемент α_p делится на q. Если $0 \leqslant m_p < \infty$, то $\alpha_p = a_0 + a_1 p + \ldots + a_{m_p - 1} p^{m_p - 1} \in \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$. Тогда $\alpha_p - a_0 \varepsilon_p$ делится на p, где ε_p — единица кольца $\mathbb{Z}_{p^{m_p}}$. Аналогично, если $m_p = \infty$, то $\alpha_p = a_0 + a_1 p + \cdots + a_s p^s + \ldots \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$, и тогда $\alpha_p - a_0 \varepsilon_p$ делится на p. Получаем, что $a = pb + a_0 1$, причем, поскольку R^+ — плотная сервантная подгруппа в $\mathbb{Z}_\chi$, то $b \in R$. Следовательно, $a + \langle 1 \rangle$ делится на любое простое число p в группе R^+, т.е. $R^+/\langle 1 \rangle$ — делимая группа.

Так как $R \subset \prod\limits_{p \in P} R_p$, то R не содержит делимых периодических подгрупп. Следовательно, R^+ является факторно делимой группой ранга 1. □

Лемма 3.6. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные элементы группы A и $F = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$. Следующие утверждения равносильны*:

(1) *факторгруппа A/F делимая*;

(2) *для каждого $m \in \mathbb{N}$ группа A/mA порождается элементами*

$$\overline{a}_1 = a_1 + mA, \quad \overline{a}_2 = a_2 + mA, \quad \ldots, \quad \overline{a}_n = a_n + mA \in A/mA,$$

т.е. $A/mA = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n \rangle$;

(3) *для каждого простого p группа A/pA порождается элементами*

$$\overline{a}_1 = a_1 + pA, \quad \overline{a}_2 = a_2 + pA, \quad \ldots, \quad \overline{a}_n = a_n + pA \in A/pA,$$

т.е. $A/pA = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n \rangle$.

Доказательство. (1)⇒(2). Так как A/F — делимая группа, то для любого $a \in A$ существует такой $b \in A$, что $a - mb \in F$, т.е. $a - mb = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n$ при некоторых $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Тогда $a - (k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n) = mb \in mA$. Следовательно, $\overline{a} \in A/mA$ представи́м в виде $\overline{a} = k_1 \overline{a}_1 + k_2 \overline{a}_2 + \ldots + k_n \overline{a}_n$. Это означает, что $A/mA = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n \rangle$.

Импликация (2)⇒(3) проверяется непосредственно.

(3)⇒(1). Так как $A/pA = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n \rangle$, то для каждого элемента $a \in A$ существуют такие целые коэффициенты $k_1, \ldots, k_n$, что $\overline{a} = k_1 \overline{a}_1 + k_2 \overline{a}_2 + \ldots + k_n \overline{a}_n$. Это равносильно тому, что $a - (k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n) = pc \in pA$ при некотором $c \in A$. Значит, $a - pc = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n \in F$. Таким образом, каждый элемент из группы A делится на p по модулю F, т.е. $A/F = p(A/F)$.

Получили, что A/F — p-делимая группа, причем это верно при любом простом p. Следовательно, A/F — делимая группа. □

Следствие 3.7. *Если A — факторно делимая группа ранга n, то $r_p(A) \leqslant n$ для всех простых p.*

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_\chi$. Если χ — характеристика ненулевого типа, то положим $R^\chi = \langle 1 \rangle_* \subseteq \mathbb{Z}_\chi$, т.е. R^χ — сервантная оболочка единицы в аддитивной группе кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Если же χ — характеристика нулевого типа, то определим $R^\chi = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_\chi$ — кольцо классов вычетов по модулю m.

Нетрудно видеть, что всякая группа R^χ является коммутативным кольцом относительно умножения, определенного в кольце $\mathbb{Z}_\chi$.

Предложение 3.8. *Каждая факторно делимая группа ранга* 1 *изоморфна группе R^χ при некоторой характеристике χ.*

Доказательство. Пусть A — факторно делимая группа ранга 1 и a — базисный элемент группы A. Рассмотрим $\mathbb{Z}$-адическое пополнение $\mu : A \to \widehat{A}$. Так как $r_p(A) \leqslant 1$ для каждого простого p (согласно следствию 3.7), то $\widehat{A} \cong \mathbb{Z}_\chi$ для некоторой характеристики χ. Более того, согласно лемме 3.6 справедливо равенство $\widehat{A} = a^\circ \mathbb{Z}_\chi$, где $a^\circ = \mu(a)$. Если χ — характеристика ненулевого типа, то μ — инъективное отображение, а значит, задает изоморфизм между группой A и ее образом $\mu(A) \subset \widehat{A}$. В силу плотности и сервантности подгруппы $\mu(A)$ в группе $\widehat{A}$ имеет место равенство $\mu(A) = \langle a^\circ \rangle_* \subseteq a^\circ \mathbb{Z}_\chi$. Следовательно, группа $\mu(A)$ изоморфна группе $R^\chi = \langle 1 \rangle_* \subseteq \mathbb{Z}_\chi$. Таким образом, $A \cong R^\chi$.

Если характеристика χ принадлежит нулевому типу, то $\mathbb{Z}_\chi = \mathbb{Z}_m$ для некоторого натурального m. Тогда $t(A) \cong \mathbb{Z}_m$ и $A \cong \mathbb{Z}_m \oplus B$, где B — такая группа без кручения ранга 1, что $\widehat{B} = 0$. Следовательно, $B \cong \mathbb{Q}$, и значит, $A \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_\chi = R^\chi$. □

Учитывая, что кольца R^χ удовлетворяют условиям п. 2 теоремы 3.3, получаем следующее утверждение.

Следствие 3.9. *На всякой факторно делимой группе ранга* 1 *существует (и единственная) структура T-кольца.*

Характеристика χ из предложения 3.8 называется *кохарактеристикой* факторно делимой группы ранга 1. Так как

$$R^\chi \cong R^\kappa \;\Leftrightarrow\; \chi = \kappa,$$

убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 3.10 (см. [4])**.** *Две факторно делимые группы ранга* 1 *изоморфны в точности тогда, когда равны их кохарактеристики. Каждая характеристика является кохарактеристикой некоторой факторно делимой группы ранга* 1*.*

Таким образом, мы показали (теорема 3.5 и следствие 3.9), что аддитивные группы бесконечных T-колец — это в точности факторно делимые группы ранга 1 (оставшиеся вне нашего внимания конечные T-кольца — это кольца классов вычетов). Иную характеризацию аддитивных групп T-колец получил в 1987 г. Дж. Вилсон (см. [36]). При этом он использовал широко применяемое при исследовании самомалых групп условие на проекции.

Отметим также, что, используя теорию T-колец, Р. Боушелл и П. Шультц в [17] доказали, что класс колец $\mathbb{Z}_\chi$ совпадает с классом редуцированных копериодических E-колец.

В работах П. А. Крылова и М. А. Приходовского понятие T-кольца было обобщенно на случай модулей. R-Модуль M называется *T-модулем* (или *$T(R)$-модулем*), если канонический эпиморфизм $R \otimes M \to M$ $(r \otimes m \mapsto rm)$ является изоморфизмом. Пусть $e : S \to R$ — гомоморфизм колец; тогда R-модуль M называется *$T(e)$-модулем*, если имеет место канонический изоморфизм $R \otimes_S M \cong R \otimes_R M$.

Отметим, что понятие T-модуля является частным случаем понятия $T(e)$-модуля, когда $S = \mathbb{Z}$ (при этом гомоморфизм $e : \mathbb{Z} \to R$ определяется единственным образом и имеет место канонический изоморфизм $R \otimes M \cong R \otimes_R M \cong M$). Более того, конструкция T-модуля является «абсолютной» в том смысле, что всякий T-модуль M является и $T(e)$-модулем для любого гомоморфизма $e : S \to R$.

Далее, пусть $e : S \to R$ — гомоморфизм колец, $R_0 = R/e(S)$ (если $S = \mathbb{Z}$, то $R_0 = R/\langle 1\rangle$) и M — произвольный R-модуль. Тогда имеет место канонический изоморфизм S-модулей

$$R \otimes_S M \cong (R \otimes_R M) \oplus (R_0 \otimes_S M).$$

В связи с этим M является $T(e)$-модулем тогда и только тогда, когда $R_0 \otimes_S M = 0$.

Наиболее полно теория $T(e)$-модулей отражена в [2, 6, 7].

4. A-Кольца

Интересным обобщением E-колец являются A-кольца и AA-кольца, введенные и исследованные М. Дугасом и С. Фейгельштоком в [18, 19].

Ассоциативное кольцо с единицей R называется *A-кольцом*, если для всякого автоморфизма $\alpha \in \operatorname{Aut} R^+$ найдется такой элемент $a \in R$, что $\alpha = \lambda_a$, т.е. $\alpha(x) = ax$ для любого $x \in R$.

Нетрудно видеть, что кольцо R является A-кольцом в том и только в том случае, когда $\operatorname{Aut} R^+ = \mathrm{U}(R_\ell)$, где $\mathrm{U}(R_\ell)$ — группа обратимых элементов кольца $R_\ell = \{\lambda_a \mid a \in R\}$. Из этого, в частности, следует, что всякое E-кольцо является A-кольцом.

Если ослабить равенство $\operatorname{Aut} R^+ = \mathrm{U}(R_\ell)$ до равенства $\operatorname{Aut} R^+ = \operatorname{Rad}(\mathrm{U}(R_\ell))$, то получим определение AA-кольца. Таким образом, ассоциативное кольцо с единицей R называется *AA-кольцом*, если для всякого автоморфизма $\alpha \in \operatorname{Aut} R^+$ найдутся такие элемент $a \in R$ и натуральное число n, что $\alpha^n = \lambda_a$.

Из приведенных ниже примеров следует, что классы E-колец, A-колец и AA-колец попарно различны.

Пример 4.1. Любое конечное кольцо является AA-кольцом. Действительно, если R — конечное кольцо, то $\operatorname{Aut} R^+$ — конечная группа, а значит, для любого $\alpha \in \operatorname{Aut} R^+$ существует такое натуральное n, что $\alpha^n = id_R = \lambda_1$.

Пример 4.2. Кольцо $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ не является A-кольцом при любом простом p. Это вытекает из сравнения количества элементов в множествах $\mathrm{U}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$ и $\mathrm{U}(M_2(\mathbb{Z}_p))$.

Пример 4.3 (см. [19])**.** На группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ зададим умножение по правилу

$$(\varepsilon, z)(\varepsilon', z') = ((\varepsilon z' + \varepsilon' z) \bmod 2zz'),$$

где $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{Z}_2$, $z, z' \in \mathbb{Z}$ и $\mathrm{mod}2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ — естественный эпиморфизм. Несложные выкладки (см. [19, пример 1.2]) показывают, что полученное таким образом кольцо является A-кольцом, но не является E-кольцом.

Предложение 4.4. *Пусть R — AA-кольцо. Для каждого $u \in \mathrm{U}(R)$ найдется такое натуральное число n, что $u^n \in \mathrm{C}(R)$, где $\mathrm{C}(R)$ — центр кольца R. Кроме того, если R^+ — группа без кручения и v — нильпотентный элемент кольца R, то $v \in \mathrm{C}(R)$.*

Доказательство. Рассмотрим правое умножение ρ_u на элемент $u \in \mathrm{U}(R)$. Так как $\rho_u \in \operatorname{Aut} R^+$, то найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\rho_u^n = \rho_{u^n} = \lambda_v$ для некоторого $v \in \mathrm{U}(R)$. Тогда $xu^n = vx$ при любом $x \in R$, а значит, взяв $x = 1$, получим $u^n = v \in \mathrm{C}(R)$.

Чтобы доказать второе утверждение, воспользуемся математической индукцией по индексу нильпотентности. Если $v^1 = 0$, то $v = 0 \in \mathrm{C}(R)$. Предположим, что все нильпотентные элементы индекса $\leqslant k$ лежат в центре кольца R. Рассмотрим произвольный элемент $v \in R$, для которого $v^{k+1} = 0$.

Поскольку v — нильпотентный элемент, то $1+v \in \mathrm{U}(R)$ и $(1+v)^m \in \mathrm{C}(R)$ при некотором натуральном m, т.е.

$$\sum_{j=0}^{m} C_j^m v^j \in \mathrm{C}(R).$$

Так как $jk \geqslant k+1$ при $j \geqslant 2$, то $(v^j)^k = v^{jk} = 0$ и, учитывая предположение индукции, получаем, что $v^2, v^3, \ldots, v^m \in \mathrm{C}(R)$. Тогда $C_1^m v \in \mathrm{C}(R)$, т.е. $xC_1^m v = C_1^m vx$ для любого элемента $x \in R$. Поскольку R^+ — группа без кручения, то из последнего равенства получаем, что $v \in \mathrm{C}(R)$. □

Для A-колец предложение 4.4 может быть усилено, а именно, если R — произвольное A-кольцо, то $\mathrm{U}(R) \subseteq \mathrm{C}(R)$ и $\mathrm{N}(R) \subseteq \mathrm{C}(R)$.

Предложение 4.5. *Пусть R — AA-кольцо без кручения конечного ранга. Тогда его нильрадикал $N = \mathrm{N}(R)$ состоит из всех нильпотентных элементов кольца R и $N^2 = 0$.*

Доказательство. В силу предложения 4.4 нильрадикал $N = \mathrm{N}(R)$ является множеством всех нильпотентных элементов кольца R.

Далее, в соответствии с первой теоремой Бьюмонта—Пирса в R найдется такое подкольцо S, что $mR \subseteq S \oplus N \subseteq R$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Пусть $u \in N$; построим отображение $\varphi : R \to R$ как композицию умножения на m, проекции с $S \oplus N$ на N и умножения на u:

$$R \xrightarrow{\lambda_m} S \oplus N \xrightarrow{\pi_N} N \xrightarrow{\lambda_u} N.$$

Так как φ — нильпотентное отображение (как и λ_u), то $\alpha = id_R + \varphi \in \operatorname{Aut} R^+$ и, следовательно, $\alpha^n = \lambda_v$ при некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $v \in R$. Тогда

$$v = v1 = \alpha^n(1) = \sum_{j=0}^{n} C_j^n \varphi^j(1) = id_R(1) = 1,$$

поскольку $1 \in S \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. Из этого следует, что $\alpha^n = id_R$ и

$$\sum_{j=1}^{n} C_j^n \varphi^j = 0 \quad \Rightarrow \quad n\varphi = -\sum_{j=2}^{n} C_j^n \varphi^j.$$

Если $\varphi \neq 0$, то найдется такое натуральное k, что $\varphi^{k+1} = 0 \neq \varphi^k$. Тогда

$$(n\varphi)^k = \Big(-\sum_{j=2}^{n} C_j^n \varphi^j\Big)^k = 0,$$

а значит, $\varphi^k = 0$; получили противоречие. Таким образом, $\varphi = 0$ и $0 = \varphi(N) = muN$. Поскольку R^+ — группа без кручения, то $uN = 0$ при любом $u \in N$, т.е. $N^2 = 0$. □

Пусть A и B — квазиравные группы без кручения конечного ранга. Тогда найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $mA \subseteq B \subseteq A$. Если $\alpha \in \operatorname{Aut} A$, то он индуцирует автоморфизм $\bar{\alpha}$ конечной группы A/mA. Следовательно, $\bar{\alpha}^k = id_{A/mA}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, а значит, найдутся такие $\varphi, \psi : A \to mA$, что $\alpha^k = id_A + \varphi$ и $\alpha^{-k} = id_A + \psi$. Пусть $\beta = id_B + \varphi \restriction_B$ и $\beta' = id_B + \psi \restriction_B$; тогда $\beta\beta' = id_B = \beta'\beta$. Таким образом, некоторая степень автоморфизма группы A индуцирует автоморфизм на квазиравной ей группе B.

Лемма 4.6. *Пусть R — AA-кольцо без кручения конечного ранга.*

1. *Если S — такое кольцо с единицей, что $S \doteq R$, то S — AA-кольцо.*
2. *Если A, B — такие кольца с единицей, что $R \doteq A \times B$, то A, B — AA-кольца и $\operatorname{Hom}(A^+, B^+) = 0 = \operatorname{Hom}(B^+, A^+)$.*

Доказательство. 1. Пусть $nS \subseteq R \subseteq S$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \operatorname{Aut} S^+$. Тогда найдутся такие $k, m \in \mathbb{N}$, что $\alpha^k \restriction_R \in \operatorname{Aut} R^+$ и $\alpha^{km} \restriction_R = \lambda_r \in R_\ell$. Если $s \in S$, то $n\alpha^{km}(s) = \alpha^{km}(ns) = \alpha^{km} \restriction_R$

$(ns) = \lambda_r(ns) = nrs$, следовательно, $\alpha^{km}(s) = rs$. Таким образом, $\alpha^{km} = \lambda_r \in S_\ell$, т.е. S — AA-кольцо.

2. Из п. 1 следует, что $A \times B$ — AA-кольцо. Пусть $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}(A^+, B^+)$; тогда рассмотрим отображение $\psi : A \times B \to A \times B$, действующее по закону $\psi(a, b) = (a, b + \varphi(a))$. Отображение ψ является автоморфизмом аддитивной группы кольца $A \times B$, причем $\psi^{-1}(a, b) = (a, b - \varphi(a))$. Заметим, что $\psi^k(a, b) = (a, b + k\varphi(a))$, а значит, $\psi^k \notin (A \times B)_\ell$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathrm{Hom}(A^+, B^+) = 0 = \mathrm{Hom}(B^+, A^+)$.

Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}\, A^+$l тогда $\gamma = \alpha \oplus id_B \in \mathrm{Aut}(A \times B)^+$. Следовательно, существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\gamma^m = \lambda_a \oplus \lambda_b \in (A \times B)_\ell$. Таким образом, $\alpha^m = \lambda_a \in A_\ell$, и значит, A — AA-кольцо. □

Предложение 4.7. *Пусть R — AA-кольцо без кручения конечного ранга, $N = \mathrm{N}(R)$ — нильрадикал кольца R и S — такое подкольцо кольца R, что $1 \in S$ и $R \doteq S \oplus N$.*

1. $\mathrm{Hom}(N^+, S^+) = 0$.
2. *Пусть* $\mathrm{Ann}_S(N) = \{x \in S \mid xN = 0\}$. *Если* $\mathrm{Ann}_S(N) = 0$, *то* $\mathrm{Aut}\, S^+$ — *периодическая группа.*
3. *Если* $\mathrm{Aut}\, S^+$ — *периодическая группа, то* $S \cong \mathbb{Z}$ *и* $R \cong \mathbb{Z} \oplus N$.

Доказательство. 1. Пусть γ — произвольный гомоморфизм из $\mathrm{Hom}(N^+, S^+)$. Построим такой эндоморфизм $\delta \in \mathrm{End}(S \oplus N)^+$, что $\delta \restriction_N = \gamma$ и $\delta \restriction_S = 0$. Тогда $\delta^2 = 0$ и $\alpha = id_{S\oplus N} + \delta \in \mathrm{Aut}(S \oplus N)^+$. Поскольку $R \doteq S \oplus N$, то по лемме 4.6 $S \oplus N$ является AA-кольцом. Следовательно, $\alpha^k = \lambda_v$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ и $v \in S \oplus N$, а тогда

$$\lambda_v = \alpha^k = \sum_{j=0}^{k} C_j^k \delta^j = id_{S\oplus N} + k\delta \quad \Rightarrow \quad k\delta = \lambda_{v-1}.$$

Учитывая, что N — идеал кольца R, получаем $k\delta(N) \subseteq S \cap (v-1)N \subseteq S \cap N = 0$, а значит, $\delta = 0$.

2. Ввиду предложений 4.4 и 4.5 имеет место включение $N \subset \mathrm{C}(R)$, N состоит из всех нильпотентных элементов кольца R и $N^2 = 0$. Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}\, S^+$; тогда $\gamma = \alpha \oplus id_N \in \mathrm{Aut}(S \oplus N)^+$. Так как $S \oplus N$ — AA-кольцо, то $\gamma^k = \lambda_v$, где $v = s + n$, $s \in S$ и $n \in N$, при некотором $k \in \mathbb{N}$. Пусть $t + x \in S \oplus N$; тогда

$$\gamma^k(t + x) = \alpha^k(t) + x = v(t + x) = (s + n)(t + x) = st + (sx + nt).$$

Из данного равенства следует, что $x = sx + nt$ при любых $x \in N$ и $t \in S$. В частности, при $t = 0$ получаем $x = sx$ и, поскольку $\mathrm{Ann}_S(N) = 0$, то $s = 1 \in S$. Таким образом, $\alpha^k = id_S$ и $\mathrm{Aut}\, S^+$ — периодическая группа.

3. Так как S не содержит нильпотентных элементов, то в соответствии с теоремами Бьюмонта—Пирса $S \doteq S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m$, где все S_i — области, причем можно считать, что все S_i — целозамкнутые подкольца полей алгебраических чисел (подробнее см. [14]). Из леммы 4.6 следует, что кольца S_i являются AA-кольцами, причем из периодичности группы $\mathrm{Aut}\, S^+$ следует периодичность всех групп $\mathrm{Aut}\, S_i^+$.

В соответствии с результатами Бьюмонта—Пирса (см. [13]) целозамкнутое кольцо S_i изоморфно локализации J_Π некоторого кольца целых алгебраических чисел J относительно множества простых идеалов Π. Так как $\mathrm{Aut}\, S_i^+$ — периодическая группа, то группа обратимых элементов $\mathrm{U}(J_\Pi)$ тоже периодическая. Предположим, что существует простой идеал P кольца J, не принадлежащий множеству Π. Тогда всякий ненулевой элемент $a \in P$ обратим в J_Π, причем a имеет бесконечный мультипликативный порядок (в противном случае $a^m = 1$ и $1 \in P$). Таким образом, группа $\mathrm{U}(J_\Pi)$ не является периодической; получили противоречие. Следовательно, Π — множество всех простых идеалов кольца J, а значит, $J_\Pi = J$ — свободная группа. Таким образом, получили, что S^+ — свободная группа. Но $\mathrm{Aut}\, \mathbb{Z}^m$ — периодическая группа в точности тогда, когда $m = 1$, следовательно, $S \cong \mathbb{Z}$.

Наконец, заметим, что N — сервантная подгруппа в R^+; следовательно, R/N — группа без кручения, квазиизоморфная группе $\mathbb{Z}$. Таким образом, $R \cong \mathbb{Z} \oplus N$. □

Лемма 4.8. *Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, R^+ — группа без кручения конечного ранга и $R \doteq S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$, где все $\mathbb{Q} \otimes S_i$ — тела. Если I — такой собственный идеал кольца R, что I^+ — сервантная подгруппа в R^+, то существует такое разбиение $E \cup E' = \{1, 2, \ldots, k\}$, что*

$$I \doteq \prod_{i \in E}^{\times} S_i.$$

Кроме того, существует такое сервантное подкольцо S кольца R, что

$$S \doteq \prod_{i \in E'}^{\times} S_i$$

и $R \doteq I \times S$. Более того, оба кольца I и S содержат единичные элементы.

Доказательство. Пусть $nR \subseteq S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k \subseteq R$ и пусть E — подмножество множества $\{1, 2, \ldots, k\}$, состоящее из всех таких i, что естественная проекция из I на $\mathbb{Q} \otimes S_i$ отлична от нуля. Возьмем некоторый индекс $i \in E$ и такой элемент $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in I$, что $a_i \neq 0$. Тогда $0 \neq na_i \in S_i$. Пусть e_i — единица кольца S_i. Так как $\mathbb{Q} \otimes S_i$ — тело, то $ma_i^{-1} \in S_i$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда $nae_ima_i^{-1} = nme_i \in I$ и $e_i \in I$ (учитывая сервантность подгруппы I^+ в группе R^+). В силу произвольности выбора $i \in E$ получаем, что

$$nI \subseteq \prod_{i \in E}^{\times} S_i \subseteq I$$

и $e = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ — единица кольца I.

Пусть

$$S = \left\langle \prod_{i \in E'}^{\times} S_i \right\rangle_* \subseteq R$$

— сервантное подкольцо в кольце R, порожденное подкольцом $\prod_{i \in E'}^{\times} S_i$. Тогда, очевидно, S — кольцо с единицей и

$$nS \subseteq \prod_{i \in E'}^{\times} S_i \subseteq S,$$

а значит, $nR \subseteq I \times S \subseteq R$. □

Теорема 4.9 (см. [18]). *Пусть R — AA-кольцо без кручения конечного ранга.*

1. *Если $N = \mathrm{N}(R) \neq 0$, то $R = \mathbb{Z} \oplus N$ и R не является A-кольцом.*
2. *Если $\mathrm{N}(R) = 0$, то R — E-кольцо.*
3. *Если R — A-кольцо, то R — E-кольцо.*

Доказательство. 1. В соответствии с первой теоремой Бьюмонта—Пирса существует такое подкольцо S кольца R, содержащее единицу из R, что $nR \subseteq S \oplus N \subseteq R$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда (по лемме 4.6) $S \oplus N$ является AA-кольцом. Нетрудно видеть, что S тоже является AA-кольцом. Предположим, что $N \neq 0$ и рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $I = \mathrm{Ann}_S(N) \neq 0$. В соответствии со второй теоремой Бьюмонта—Пирса $S \doteq S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$, где все $\mathbb{Q} \otimes S_i$ — простые $\mathbb{Q}$-алгебры без нильпотентных элементов, т.е. все S_i — области. Заметим, что I — сервантный идеал кольца S. Тогда по лемме 4.8 найдется такое подкольцо S' кольца S, что $1 \in S'$ и $S \doteq I \times S'$. Из леммы 4.6(2) следует, что S' — AA-кольцо, а значит, и $T = S' \oplus N$ — AA-кольцо, причем $\mathrm{Ann}_{S'}(N) = 0$. Тогда в соответствии с предложением 4.7 имеет место изоморфизм $S' \cong \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\mathrm{Hom}(S'^+, I^+) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, I^+) \cong I^+ = \mathrm{Ann}_S(N) \neq 0,$$

что противоречит лемме 4.6(2). Таким образом, данный случай невозможен.

Случай 2. Пусть $I = \mathrm{Ann}_S(N) = 0$; тогда из предложения 4.7 вытекает равенство $R = \mathbb{Z} \oplus N$. Далее рассмотрим автоморфизм $\alpha = id_{\mathbb{Z}} \oplus (-id_N) \in \mathrm{Aut}\, R^+$. Очевидно, что $\alpha \notin \mathrm{U}(R_\ell)$, а значит, R не является A-кольцом.

2. Так как $\mathrm{N}(R) = 0$, то $R \doteq S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$, где все $\mathbb{Q} \otimes S_i$ — простые $\mathbb{Q}$-алгебры без нильпотентных элементов, т.е. все S_i — области. Из леммы 4.6 следует, что $\mathrm{Hom}(S_i, S_j) = 0$ при всех $i \neq j$. Далее покажем, что каждая группа S_i^+ сильно неразложима. Предположим, что $n(A \oplus B) \subseteq S_i \subseteq A \oplus B$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ и пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Тогда

$$\alpha = id_A \oplus (id_B + \varphi) \in \mathrm{Aut}(A \oplus B),$$

а значит, некоторая натуральная степень α индуцирует автоморфизм на группе S_i^+, $\beta = \alpha^m \restriction_{S_i} \in \mathrm{Aut}\, S_i^+$. Так как S_i — AA-кольцо (по лемме 4.6), то $\beta^t = \lambda_s \in (S_i)_\ell$ при некотором $t \in \mathbb{N}$. Пусть $s = a + b \in S_i \subseteq A \oplus B$; тогда для любых $x \in A, y \in B$

$$\beta^t(nx + ny) = nx + (ny + tm\varphi(nx)) = (a + b)(nx + ny) = anx + any + bnx + bny.$$

При $x = 0$ получаем $ny = nay + nby = (na + nb)y$ при всех $y \in B$, т.е. $s = a + b = 1$. Следовательно, $\varphi(x) = 0$ при любом $x \in A$ и $\mathrm{Hom}(A, B) = 0$. Аналогично проверяется, что $\mathrm{Hom}(B, A) = 0$. Из этого вытекает, что $nA \cdot nB = 0$. Но S_i не содержит делителей нуля; следовательно, $A = 0$ или $B = 0$, т.е. S_i^+ — сильно неразложимая группа. Таким образом, в соответствии с теоремой 2.3 получаем, что R — E-кольцо. Справедливость последнего утверждения теоремы очевидным образом вытекает из пп. 1 и 2. □

Следствие 4.10 (см. [18]). *Пусть R — кольцо без кручения конечного ранга с ненулевым нильрадикалом N. R является AA-кольцом в том и только том случае, когда $R = \mathbb{Z} \oplus N$, где N^+ — абелева группа без кручения конечного ранга без свободных слагаемых, такая что $N \neq 0 = NN$ и $\mathrm{Aut}\, N^+$ — периодическая группа.*

Доказательство. Пусть R — AA-кольцо без кручения конечного ранга с ненулевым нильрадикалом, $\mathrm{N}(R) = N \neq 0$. Тогда по теореме 4.9 имеет место разложение $R = \mathbb{Z} \oplus N$, причем $N^2 = 0$ и $\mathrm{Hom}(N^+, \mathbb{Z}) = 0$ (согласно предложениям 4.5 и 4.7). Далее, $\mathrm{U}(R_\ell) \restriction_N = \{id_N, -id_N\}$, следовательно, $\mathrm{Aut}\, N^+$ — периодическая группа. Несложная проверка показывает, что справедливо и обратное утверждение. □

Помимо A-колец и AA-колец известны и другие обобщения E-колец. Например, двусторонние E-кольца (кольцо R называется *двусторонним E-кольцом*, если $\mathsf{E}(R^+)$ порождается как кольцо множеством $R_\ell \cup R_r$). Этим кольцам посвящена работа М. Дугаса и Ч. Винсонхалера [20]. Двусторонние E-кольца могут быть некоммутативными (например, полные матричные кольца над E-кольцами являются двусторонними E-кольцами). Более того, из определения следует, что коммутативные двусторонние E-кольца — это в точности E-кольца. Наиболее близки к E-кольцам введенные С. Фейгельштоком TE-кольца (см. [21]). Кольцо R называется TE-кольцом, если имеет место квазиравенство $R_\ell \doteq \mathsf{E}(R^+)$. TE-Кольца и E-кольца очень похожи; фактически их отличает только наличие единичного элемента (TE-кольцо с единицей является E-кольцом).

5. Умножения на группах

В силу определения E-групп ясно, что для их задания и исследования возможно использовать язык умножений на группах.

Пусть на группе A задано такое умножение μ, что (A, μ) — ассоциативное кольцо с единицей. Умножение ν, действующее на группе A по закону

$$\nu(x, y) = \mu(a, \mu(x, y))$$

для некоторого $a \in A$, будем называть *каноническим относительно умножения μ* и обозначать μ_a.

Введем для группы A следующие обозначения:

$$A_\mu = \{\mu_a \mid a \in A\}, \quad A_\mu^\perp = \{\nu \in \operatorname{Mult} A \mid \nu(1,1) = 0\},$$

где 1 — единица кольца (A, μ). Нетрудно видеть, что множества A_μ и $A_\mu^\perp$ являются подгруппами группы $\operatorname{Mult} A$.

Лемма 5.1. $\operatorname{Mult} A = A_\mu \oplus A_\mu^\perp$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \operatorname{Mult} A$ — произвольное умножение. Рассмотрим умножение

$$\nu(x,y) = \lambda(x,y) - \mu(\lambda(1,1), \mu(x,y)).$$

Для него имеем

$$\nu(1,1) = \lambda(1,1) - \mu(\lambda(1,1),1) = \lambda(1,1) - \lambda(1,1) = 0.$$

Следовательно, $\nu \in A_\mu^\perp$ и

$$\lambda(x,y) = \mu(\lambda(1,1), \mu(x,y)) + \nu(x,y),$$

т.е. $\lambda \in A_\mu + A_\mu^\perp$. Наконец, поскольку $A_\mu \cap A_\mu^\perp = 0$, то $\operatorname{Mult} A = A_\mu \oplus A_\mu^\perp$. □

Лемма 5.2. *Пусть A — группа, допускающая структуру ассоциативного кольца с единицей. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *A — E-группа*;
(2) *если $\nu \in \operatorname{Mult} A$ и $\nu(1,1) = 0$, то $\nu = 0$.*

Доказательство. (1)⇒(2). Предположим, что существует такое умножение $\nu \in \operatorname{Mult} A$, что $\nu(1,1) = 0$, и такие элементы $a, b \in A$, что $\nu(a,b) \neq 0$. Если для любого $y \in A$ имеет место равенство $\nu(1,y) = 0$, то рассмотрим эндоморфизм $\alpha \in \mathsf{E}(A)$, действующий по правилу $\alpha(x) = \nu(x,b)$. Заметим, что $\alpha(1) = 0$ и $\alpha(a) \neq 0$, а значит, по лемме 1.3 группа A не является E-группой.

Если же найдется такой элемент $c \in A$, что $\nu(1,c) \neq 0$, то рассмотрим эндоморфизм $\alpha \in E(A)$, действующий по закону $\alpha(x) = \nu(1,x)$. Тогда $\alpha(1) = 0$ и $\alpha(c) \neq 0$, т.е. A не является E-группой. В обоих случаях получаем противоречие с условием (1), а значит, из $\nu(1,1) = 0$ всегда следует, что $\nu = 0$.

(2)⇒(1). Предположим, что A не является E-группой; тогда по лемме 1.3 найдутся такие эндоморфизм $\alpha \in \mathsf{E}(A)$ и элемент $a \in A$, что $\alpha(1) = 0$ и $\alpha(a) \neq 0$. Рассмотрим умножение ν, заданное следующим образом:

$$\nu(x,y) = \mu(x, \alpha(y)).$$

Тогда $\nu(1,1) = 0$ и $\nu(1,a) \neq 0$; противоречие. □

Теорема 5.3. *Пусть группа A допускает структуру ассоциативного кольца с единицей (A, μ). Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *A — E-группа*;
(2) *все умножения на A ассоциативны*;
(3) *все умножения на A коммутативны.*

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) следует из теоремы 1.4 и коммутативности E-кольца (A, μ).

(2)⇒(1). Пусть A не является E-группой. Тогда по лемме 1.3 существует такой ненулевой эндоморфизм α, что $\alpha(1) = 0$. Возможны два случая.

Случай 1: существует такой элемент $a \in A$, что $\alpha^2(a) \neq 0$. Рассмотрим умножение ν, действующее по правилу $\nu(x,y) = \mu(x, \alpha(y))$. Тогда

$$\nu(\nu(1,1),a) = \nu(\mu(1,\alpha(1)),a) = \nu(0,a) = 0,$$

$$\nu(1,\nu(1,a)) = \nu(1,\mu(1,\alpha(a))) = \nu(1,\alpha(a)) = \mu(1,\alpha^2(a)) = \alpha^2(a) \neq 0,$$

т.е. умножение ν неассоциативно.

Случай 2: $\alpha^2(x) = 0$ для любого $x \in A$. Поскольку α — ненулевой эндоморфизм, существует такой элемент a, что $\alpha(a) \neq 0$. Рассмотрим эндоморфизм β, действующий по закону $\beta(x) = x+\alpha(x)$, и умножение ν, действующее по правилу $\nu(x, y) = \mu(x, \beta(y))$. Покажем, что ν — неассоциативное умножение:

$$\nu(\nu(1,1),a) = \nu(\mu(1,\beta(1)),a) = \nu(1+\alpha(1),a) = \nu(1,a) = \mu(1,\beta(a)) = \beta(a),$$
$$\nu(1,\nu(1,a)) = \nu(1,\mu(1,\beta(a))) = \nu(1,a+\alpha(a)) = \nu(1,a)+\nu(1,\alpha(a)) =$$
$$= \beta(a)+\beta(\alpha(a)) = \beta(a)+\alpha(a)+\alpha^2(a) = \beta(a)+\alpha(a) \neq \beta(a).$$

В обоих случаях получили противоречие с тем, что все умножения на A ассоциативны, а значит, A — E-группа.

Импликация (1)⇒(3) вытекает из теоремы 1.4.

(3)⇒(1) Предположим, что A не является E-группой. Тогда найдется такой эндоморфизм $\alpha \in \mathsf{E}(A)$, что $\alpha(1) = 0$ и $\alpha(a) \neq 0$ для некоторого $a \in A$. Рассмотрим умножение ν, действующее по правилу $\nu(x, y) = \mu(x, \alpha(y))$. Тогда $\nu(a, 1) = \mu(a, \alpha(1)) = 0$ и $\nu(1, a) = \alpha(a) \neq 0$, а значит, умножение ν некоммутативно. □

В связи с теоремой 5.3 естественным обобщением E-групп (но не $\mathcal{E}$-замкнутых групп) являются группы, допускающие только коммутативные умножения.

Пример 5.4 (см. [5])**.** Делимая группа A допускает только коммутативные умножения в точности тогда, когда $r_0(A) \leqslant 1$.

Пример 5.5 (см. [22])**.** Периодическая группа A допускает только коммутативные умножения в точности тогда, когда $r_p(A) \leqslant 1$ для любого простого p.

Пример 5.6. Любая группа без кручения A ранга 1 допускает только коммутативные умножения, так как A является либо E-группой, либо нуль-группой.

Пример 5.7. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_{p\in P} \mathbb{Z}_{p^3}$. Возьмем элемент $x = (p\varepsilon_p)$, где ε_p — единица кольца $\mathbb{Z}_{p^3}$, и построим группу $A = \langle x, x^2\rangle_* \subset \mathbb{Z}_\chi$. В силу [27, Theorem 119.3] всякое умножение на группе A единственным образом продолжается до умножения на группе $\mathbb{Z}_\chi^+$. Но $\mathbb{Z}_\chi$ — E-кольцо, следовательно, всякое умножение на $\mathbb{Z}_\chi$ и на A коммутативно.

Отметим некоторые свойства групп, допускающих только коммутативные умножения.

(a) Если группа допускает только коммутативные умножение, то для любого ее прямого слагаемого верно то же самое.

(b) Если A и B — квазиизоморфные группы без кручения, причем группа A допускает только коммутативные умножения, то B тоже допускает только коммутативные умножения.

(c) Если группа A допускает только коммутативные умножения, то для любого простого p

$$t_p(A) \cong \mathbb{Z}_{p^n} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{m}} \mathbb{Z}_{p^\infty},$$

где $n = n(p)$ — некоторое целое неотрицательное число, а $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(p)$ — некоторое кардинальное число.

Пример 5.8. Пусть A — TE-группа без кручения конечного ранга (т.е. для группы A имеет место квазиизоморфизм $A \dot{\cong} \operatorname{End} A$). Несложно показать, что $\mathsf{E}(A)$ является E-кольцом (см., например, [21]). Тогда группа A квазиизоморфна E-группе $\operatorname{End} A$, а значит, по свойству (b) группа A допускает только коммутативные умножения.

Заметим, что примеры TE-групп без кручения конечного ранга, не являющихся E-группами, приводятся в [16] (при рассмотрении жестких почти вполне разложимых групп кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором) и в [8, 9] (при рассмотрении групп со свободными сервантными подгруппами и при рассмотрении групп со свободными подгруппами бесконечного индекса).

Теорема 5.9 (см. [22]). *Пусть* $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$, *где все* A_i — *группы без кручения ранга* 1. *Тогда следующие утверждения равносильны*:

(1) *группа* A *допускает только коммутативные умножения*;
(2) $\operatorname{Hom}(A_i \otimes A_j, A_k) = 0$ *для всех* $i, j, k \in I$, *удовлетворяющих условию* $i \neq j$;
(3) $\operatorname{type}(A_i) + \operatorname{type}(A_j) \not\leqslant \operatorname{type}(A_k)$ *для всех* $i, j, k \in I$, *удовлетворяющих условию* $i \neq j$.

Доказательство. (1)⇒(2). Предположим, что для некоторых $i, j, k \in I$, удовлетворяющих условию $i \neq j$, существует ненулевой гомоморфизм $f \in \operatorname{Hom}(A_i \otimes A_j, A_k)$. Для произвольных $a, b \in A$ определим произведение $a \cdot b = f(a_i \otimes b_j)$, где a_i, b_j — компоненты элементов a, b в группах A_i и A_j соответственно. Выберем такие $a_i \in A_i$ и $a_j \in A_j$, что $a_i \cdot a_j = f(a_i \otimes a_j) \neq 0$. Но тогда $a_j \cdot a_i = f(0 \otimes 0) = 0$, что противоречит коммутативности кольца $(A, \cdot)$.

(2)⇒(3). Пусть $\operatorname{type}(A_i) + \operatorname{type}(A_j) \leqslant \operatorname{type}(A_k)$ для некоторых $i, j, k \in I$, удовлетворяющих условию $i \neq j$. Поскольку $A_i \otimes A_j$ — группа без кручения ранга 1 и $\operatorname{type}(A_i \otimes A_j) = \operatorname{type}(A_i) + \operatorname{type}(A_j)$, то $\operatorname{Hom}(A_i \otimes A_j, A_k) \neq 0$ — противоречие.

(3)⇒(1). Рассмотрим произвольное умножение $\cdot$ на группе A. Так как при $i \neq j$ имеем неравенство $\operatorname{type}(A_i) + \operatorname{type}(A_j) \not\leqslant \operatorname{type}(A_k)$, то $\operatorname{type}(\pi_k(a_i \cdot a_j)) \neq \operatorname{type}(A_k)$ для любых $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$ и проекции $\pi_k : A \to A_k$. Следовательно, $a_i \cdot a_j = 0$ при всех $i, j \in I$, удовлетворяющих условию $i \neq j$. Таким образом, умножение $\cdot$ задается умножениями $a_i \cdot b_i$, где $a_i, b_i \in A_i$ и $i \in I$. Выберем для каждого $i \in I$ произвольный ненулевой элемент $e_i \in A_i$. Так как A_i — группа без кручения ранга 1, то всякий элемент $a_i \in A_i$ представим в виде $q_i e_i$, где $q_i \in \mathbb{Q}$. Следовательно, умножение $\cdot$ на группе A вполне задается элементами e_i^2, $i \in I$, а значит, $(A, \cdot)$ — коммутативное кольцо. □

Пример 5.10 (см. [22]). Пусть $A = A_1 \oplus A_2$ — вполне разложимая группа без кручения ранга 2, $\operatorname{type}(A_1) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ и $\operatorname{type}(A_2) = (\infty, 0, \infty, 0, \ldots)$. Нетрудно проверить, что любое ассоциативное умножение на группе A коммутативно. Однако, по теореме 5.9 группа A допускает и некоммутативные умножения.

Предложение 5.11. *Если группа* A *допускает только коммутативные умножения и имеет ненулевую делимую часть, то* $r_0(A) \leqslant 1$.

Доказательство. Так как A имеет ненулевую делимую часть, то $A = D \oplus B$, где $D \cong \mathbb{Q}$ или $D \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Предположим, что $r_0(A) \geqslant 2$ и рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $D \cong \mathbb{Q}$; тогда $r_0(B) \geqslant 1$. Следовательно, существует ненулевой гомоморфизм $f : D \otimes B \to D$. Для произвольных элементов $a_1 = d_1 + b_1$ и $a_2 = d_2 + b_2$ ($d_1, d_2 \in D$ и $b_1, b_2 \in B$) определим произведение $a_1 \cdot a_2 = f(d_1 \otimes b_2)$. Так как f — ненулевой гомоморфизм, то $f(d \otimes b) \neq 0$ для некоторых $d \in D$, $b \in B$. Но тогда $d \cdot b = f(d \otimes b) \neq 0$, а $b \cdot d = f(0 \otimes 0) = 0$, что противоречит коммутативности кольца $(A, \cdot)$.

Случай 2. Пусть $D \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$; тогда $r_0(B) \geqslant 2$, и в группе B можно выбрать линейно независимые элементы a, b. Следовательно, $a \otimes b$ и $b \otimes a$ — линейно независимые элементы группы $B \otimes B$. Построим такой гомоморфизм

$$f : \langle a \otimes b \rangle \oplus \langle b \otimes a \rangle \to \mathbb{Z}_{p^\infty},$$

что

$$f(a \otimes b) = d \neq 0, \quad f(b \otimes a) = 0.$$

Так как $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — инъективная группа, то гомоморфизм f можно расширить до гомоморфизма $f : B \otimes B \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Теперь для произвольных элементов $a_1 = d_1 + b_1$ и $a_2 = d_2 + b_2$ ($d_1, d_2 \in D$ и $b_1, b_2 \in B$) группы A определим произведение $a_1 \cdot a_2 = f(b_1 \otimes b_2)$. При этом $a \cdot b = d \neq 0$ и $b \cdot a = 0$, что противоречит коммутативности кольца $(A, \cdot)$.

В обоих случаях мы получили противоречие, следовательно, $r_0(A) \leqslant 1$. □

В связи с доказанным утверждением интерес представляют группы без кручения ранга 1, допускающие только коммутативные умножения.

Теорема 5.12. *Пусть A — редуцированная нерасщепляющаяся смешанная группа без кручения ранга 1 и $S = s(A) = \{p \in P \mid t_p(A) \neq 0\}$. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *группа A допускает только коммутативные умножения*;
(2) *$t_p(A)$ — циклическая группа для каждого $p \in S$ и A вкладывается в группу $\prod\limits_{p\in S} t_p(A)$ в качестве S-сервантной подгруппы*;
(3) *$t_p(A)$ — циклическая группа для каждого $p \in S$ и A сервантно вкладывается в группу $\prod\limits_{p\in P} R_p$, где*

$$R_p = \begin{cases} t_p(A), & p \in S, \\ 0, & p \notin S \text{ и } A \text{ является } p\text{-делимой}, \\ \widehat{\mathbb{Z}}_p, & p \notin S \text{ и } A \text{ не является } p\text{-делимой}. \end{cases}$$

Доказательство. (1)⇒(2). Для произвольного простого числа $p \in S$ рассмотрим разложение $A = t_p(A) \oplus A_p$. Так как A — редуцированная группа, то $t_p(A)$ — циклическая группа. Покажем, что A_p — p-делимая группа. Предположим противное, $pA_p \neq A_p$. Пусть $t_p(A) = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^n}$; тогда $t_p(A) \otimes A_p \cong A_p/p^nA_p$ — нетривиальная прямая сумма циклических p-примарных групп порядка $\leqslant p^n$. Следовательно, существует ненулевой гомоморфизм $f : t_p(A) \otimes A_p \to t_p(A)$. Для элементов $a_1 = t_1 + b_1$ и $a_2 = t_2 + b_2$ ($t_1, t_2 \in t_p(A)$ и $b_1, b_2 \in A_p$) группы A определим произведение по закону $a_1 \cdot a_2 = f(t_1 \otimes b_2)$. Выберем произвольно такие элементы $t \in t_p(A)$ и $b \in A_p$, что $f(t \otimes b) \neq 0$. Тогда $t \cdot b = f(t \otimes b) \neq 0$ и $b \cdot t = f(0 \otimes 0) = 0$, что противоречит коммутативности кольца $(A, \cdot)$. Таким образом, A_p — p-делимая группа при любом $p \in S$.

Пусть a — произвольный элемент группы A; тогда для каждого $p \in S$ имеет место разложение $A = t_p(A) \oplus A_p$ и, следовательно, $a = a_p + b_p$, где $a_p \in t_p(A)$ и $b_p \in A_p$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi : A \to \prod_{p\in S} t_p(A), \quad \varphi : a \mapsto (a_p)_{p\in S}.$$

Очевидно, $\operatorname{Ker}\varphi = \bigcap\limits_{p\in S} A_p$ — группа без кручения ранга $\leqslant 1$. Если $r_0(\operatorname{Ker}\varphi) = 1$, то $\varphi(A) = t(A)$, и значит, $t(A)$ выделяется в A прямым слагаемым, что противоречит нерасщепляемости группы A. Следовательно, $r_0(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$ и $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, т.е. φ — мономорфизм.

Так как все группы A_p ($p \in S$) p-делимые, то факторгруппа $A/t(A)$ является p-делимой при любом $p \in S$. Из этого следует, что $\varphi(A)$ — p-сервантная подгруппа в $\prod\limits_{p\in S} t_p(A)$ для любого $p \in S$.

(2)⇒(3). Рассмотрим короткую сервантно точную последовательность

$$0 \to t(A) \to A \to A/t(A) \to 0.$$

Она индуцирует короткую последовательность

$$0 \to \widehat{t(A)} \to \widehat{A} \to \widehat{A/t(A)} \to 0,$$

где $\widehat{\ }$ — функтор взятия $\mathbb{Z}$-адического пополнения. Хорошо известно (см., например, [27, Theorem 39.8]), что вторая последовательность точна и расщепляется, т.е. $\widehat{A} \cong \widehat{t(A)} \oplus \widehat{A/t(A)}$. При этом

$$\widehat{t(A)} \cong \prod_{p\in S} t_p(A),$$

а поскольку $A/t(A)$ — группа без кручения ранга 1, то

$$\widehat{A/t(A)} \cong \prod_{p\in T} \widehat{\mathbb{Z}}_p,$$

где $T = \{p \in P \mid p(A/t(A)) \neq A/t(A)\}$. Учитывая, что $A/t(A)$ — p-делимая группа при любом $p \in S$, получаем, что $S \cap T = \varnothing$, и значит, $\widehat{A} = \prod\limits_{p\in P} R_p$, где группы R_p удовлетворяют условиям п. (3).

Если $\mu : A \to \widehat{A}$ — естественный гомоморфизм, то $\mu(A)$ — сервантная подгруппа в $\widehat{A} = \prod\limits_{p\in P} R_p$, причем

$$\operatorname{Ker}\mu = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} nA \subseteq \bigcap_{p\in S} A_p = 0.$$

Следовательно, группа A сервантно вкладывается в группу $\prod\limits_{p\in P} R_p$.

(3)⇒(1). Пусть $(A,\cdot)$ — произвольное кольцо на группе A. Так как пополнение $\mu : A \to \widehat{A}$ является вложением и, очевидно,

$$\widehat{A} \cong \prod_{p\in P} R_p,$$

то кольцевая структура на $(A,\cdot)$ единственным образом продолжается до кольцевой структуры на $\prod\limits_{p\in P} R_p$ (см. [27, Sec. 119]). Но $\prod\limits_{p\in P} R_p$ — E-группа, а значит, всякое умножение на ней коммутативное. Таким образом, $(A,\cdot)$ — коммутативное кольцо. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гришин А. В., Тимошенко Е. А., Царев А. В.* Последовательности групп эндоморфизмов абелевых групп// Мат. заметки (в печати).
2. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Идемпотентные функторы и локализации в категориях модулей и абелевых групп// Фундам. прикл. мат., **16**, № 7. — 2010. — С. 75–159.
3. *Гришин А. В., Царев А. В.* $\mathcal{E}$-Замкнутые группы и модули// Фундам. прикл. мат., **17**, № 2. — 2012. — С. 97–106.
4. *Давыдова О. И.* Факторно делимые абелевы группы ранга 1// Фунд. прикл. мат., **13**, № 3. — 2007. — С. 25–33.
5. *Карпов О. А.* Абелевы группы, допускающие только коммутативные умножения// в печати.
6. *Приходовский М. А.* Изоморфизмы тензорных произведений модулей и T-модули/ Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. — Томск, 2002.
7. *Е. А. Тимошенко* T-Радикалы и E-радикалы в категории модулей// Сиб. мат. ж., **45**, № 1. — 2004. — С. 201–210.
8. *Фомин А. А.* Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов// Мат. заметки, **36**, № 2. — 1984. — С. 179–187.
9. *Фомин А. А.* Сервантно свободные группы// в сб.: Абелевы группы и модули. — Томск, 1986. — С. 145–164.
10. *Фригер М. Д.* О жестких кольцах без кручения// Сиб. мат. ж., **27**, № 3. — 1986. — С. 217–219.
11. *Царев А. В.* T-Кольца и факторно делимые группы ранга 1// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех., № 4. — С. 50–53.
12. *Arnold D. M.* Finite rank torsion free abelian groups and rings/ Lect. Notes Math., **931**. — New York: Springer, 1982.
13. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Subrings of algebraic number fields// Acta Sci. Math. Szeged., **22**. — 1961. — P. 202–216.
14. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Torsion free rings// Ill. J. Math., **5**, № 1. — 1961. — P. 61–98.
15. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Isomorphic direct summands of abelian groups// Math. Ann., **153**, № 1. — 1964. — P. 21–37.
16. *Blagoveshchenskaya E., Ivanov G., Schultz P.* The Baer–Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups// Contemp. Math., **273**. — 2001. — P. 85–93.
17. *Bowshell R. A., Schultz P.* Unital rings whose additive endomorphisms commute// Math. Ann., **228**, № 3. — 1977. — P. 197–214.
18. *Dugas M. AA*-Rings// Commun. Algebra, **32**, № 10. — 2004. — P. 3853–3860.
19. *Dugas M., Feigelstock S. A*-Rings// Colloq. Math., **96**, № 2. — 2003. — P. 277–292.
20. *Dugas M., Vinsonhaler C.* Two-side E-rings// J. Pure Appl. Algebra, **185**. — 2003. — P. 87–102.
21. *Feigelstock S.* Full subrings of E-rings// Bull. Austr. Math. Soc., **54**. — 1996. — P. 275–280.

22. *Feigelstock S.* Additive groups of commutative rings// Quaest. Math., **23**, № 2. — 2000. — P. 241–245.
23. *Feigelstock S., Hausen J., Raphael R.* Groups which map onto their endomorphism rings// in: Proc. Dublin Conf., 1998. — Basel, 1999. — P. 231–241.
24. *Fomin A. A., Wickless W.* Quotient divisible Abelian groups// Proc. Am. Math. Soc., **126**, № 1. — 1998. — P. 45–52.
25. *Fuchs L.* Abelian Groups. — New York–Oxford–London–Paris: Pergamon Press, 1960.
26. *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups. Vol. I. — New York: Academic Press, 1970.
27. *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups. Vol. II. — New York: Academic Press, 1973.
28. *Göbel R., Shelah S., Strüngmann L.* Generalized E-Rings/ `arxiv.org/pdf/math/0404271` (2003).
29. *Grishin A. V.* Strongly indecomposable localizations of the ring of algebraic integers// Commun. Algebra, **43**, № 9. — 2015. — P. 3816-3822.
30. *Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht–Boston–London: Springer, 2003.
31. *Mader A., Vinsonhaler C.* Torsion-free E-modules// J. Algebra, **115**, № 2. — 1988. — P. 401–411.
32. *Pierce R. S.* E-Modules// in: Abelian Group Theory/ Contemp. Math., **87**. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1989. — P. 221–240.
33. *Schultz P.* Periodic homomorphism sequences of abelian groups// Arch. Math., **21**. — 1970. — P. 132–135.
34. *Schultz P.* The endomorphism ring of the additive group of a ring// J. Austr. Math. Soc., **15**. — 1973. — P. 60–69.
35. *Vinsonhaler C.* E-Rings and related structures// in: Non-Noetherian Commutative Ring Theory/ Math. Appl., **520**. — Dordrecht: Kluwer, 2002. — P. 387–402.
36. *Wilson G. V.* Additive groups of T-rings// Proc. Am. Math. Soc., **99**, № 2. — 1987. — P. 219–220.

Крылов Петр Андреевич
Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск
E-mail: `krylov@math.tsu.ru`

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: `tuganbaev@gmail.com`

Царев Андрей Валерьевич
Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: `an-tsarev@yandex.ru`