ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 158

Москва 2018

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 158

ТРУДЫ
СЕМИНАРА КАФЕДРЫ АЛГЕБРЫ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
КАЗАНСКОГО (ПРИВОЛЖСКОГО)
ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Москва 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 158 (2018). С. 3–22

УДК 512.558

О ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ПОЛУКОЛЕЦ

© 2018 г. **С. Н. ИЛЬИН**

Аннотация. В работе приведен обзор ряда результатов по гомологической классификации полуколец за последние десять лет, а также представлен ряд новых результатов в рамках данного направления.

***Ключевые слова*:** полукольцо, полумодуль, гомологическая классификация.

***AMS Subject Classification*:** 16Y60

СОДЕРЖАНИЕ

Одним из классических направлений теории колец и модулей традиционно является изучение вопросов, связанных с так называемой *гомологической классификацией колец*, т.е. описанием колец, характеризуемых различными свойствами (такими, как инъективность, проективность, плоскостность и т. п.) модулей, либо категорий модулей над ними. Результаты о гомологической классификации колец изложены во многих современных книгах по теории колец и модулей (см., например, [9,10,14,29] и др.) Весьма активное и успешное развитие этого направления послужило толчком для проведения аналогичных исследований в отношении других алгебраических систем. Так, например, большое количество результатов, характеризующих моноиды в терминах свойств полигонов над ними, приведено в книге [28]; обзор результатов по гомологической классификации дистрибутивных решеток дан в [15].

Полукольца и полумодули над ними в течение последних трех десятилетий также довольно глубоко и активно изучаются математиками, в особенности в связи с их практическими приложениями. Так, например, библиографический список изданной в 1999 г. монографии [16] содержит несколько сотен наименований статей, однако, лишь около десятка из них содержат результаты, имеющие отношение к гомологической классификации полуколец (в частности, упомянем [13, 23, 32–34]). По существу, отправной точкой и побудительным мотивом для активизации в последние годы исследований в этой области можно считать опубликованную в 2004 г. статью [25], в которой, собственно, впервые возник сам термин *гомологическая классификация/характеризация полуколец*, были представлены некоторые важные результаты, послужившие основой для дальнейших исследований, а также сформулированы некоторые открытые вопросы и проблемы в рамках данного направления. За прошедшее с тех пор время усилиями ряда математиков (в том числе автора настоящей статьи) гомологическая классификация полуколец получила значительное развитие как минимум в двух десятках публикаций в ведущих российских и зарубежных журналах; в том числе, были решены некоторые открытые вопросы из [25].

ISSN 0233–6723

Основная цель настоящей статьи — познакомить читателя с некоторыми интересными на наш взгляд результатами по гомологической классификации полуколец, изложенными в опубликованных ранее работах, представить ряд новых результатов, а также, возможно, привлечь внимание читателя к дальнейшему развитию и решению открытых проблем в этой области математики. Разумеется, перечень освещенных в данной работе тем и направлений, а также список цитированных работ далеко не являются полными и исчерпывающими, и изложенные ниже результаты отражают, в первую очередь, научные интересы и предпочтения автора статьи. Для более подробного и детального ознакомления с развитием гомологической классификации полуколец мы отсылаем читателя к списку литературы и статьям, цитируемым в указанных работах.

1. Предварительные сведения

В данном разделе кратко приводятся используемые в работе определения и факты о полукольцах и полумодулях (более подробное их изложение можно найти, например, в [16]).

Под *полукольцом* понимается такая алгебраическая система $(S, +, \cdot, 0)$, что

(1) $(S, +, 0)$ — коммутативный моноид;
(2) $(S, \cdot)$ — полугруппа;
(3) $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$ для всех $x, y, z \in S$;
(4) $0x = x0 = 0$ для всех $x \in S$.

В случае, когда $(S, \cdot, 1)$ — моноид, говорят, что S — *полукольцо с единицей.* Ниже все полукольца (если это не оговорено особо) предполагаются содержащими единицу, не исключая случай, когда $1 = 0$ и, следовательно, $S = \{0\}$.

Коммутативный моноид $(M, +, 0_M)$ называется *правым полумодулем* над полукольцом S (*правым S-полумодулем*), если для любых $m \in M$ и $s \in S$ определено произведение $ms \in M$, причем для всех $m, m' \in M$, $s, s' \in S$ верно следующее:

(1) $m(ss') = (ms)s'$;
(2) $(m + m')s = ms + m's$;
(3) $m(s + s') = ms + ms'$;
(4) $m1 = m$;
(5) $0_M\, s = 0_M = m0$.

Аналогично определяются *левые полумодули.* Ниже все полумодули (если это не оговорено особо) считаются правыми. Стандартным образом (см., например, [16, гл. 14–16]) вводятся понятия *подполумодуля, конгруэнции* на полумодуле, *фактор-полумодуля, гомоморфизма* полумодулей и т. д. Для всякого подполумодуля $A \subseteq M$ через $\equiv_A$ обозначается *конгруэнция Бёрна* на M, где $m \equiv_A m'$, если $m + a = m' + a'$ при подходящих $a, a' \in A$. Множество всех конгруэнций на полумодуле M обозначается через $\mathrm{Cong}(M)$; полумодуль M *прост*, если $\mathrm{Cong}(M)$ содержит ровно две конгруэнции — универсальную и отношение равенства. Всякий простой полумодуль либо аддитивно идемпотентен, либо является модулем (см. [4, предложение 1.2]). Полукольцо, рассматриваемое в качестве полумодуля над собой, называется *регулярным полумодулем.*

Для произвольного полумодуля M рассмотрим следующие подполумодули:

$$V(M) = \{m \in M : m + m' = 0 \text{ для некоторого } m' \in M\},$$
$$I^+(M) = \{m \in M : m + m = m\},$$
$$Z(M) = \{z \in M : z + m = m \text{ для некоторого } m \in M\},$$
$$A(M) = \{m \in M : m + m' + m = m \text{ для некоторого } m' \in M\}.$$

Полумодуль M есть *модуль*, если $V(M) = M$; M называется *антинегативным* (*зероидным, аддитивно-идемпотентным, аддитивно-регулярным*), если $V(M) = 0$ (соответственно, $Z(M) = M$, $I^+(M) = M$, $A(M) = M$); M называется *аддитивно π-регулярным*, если для всякого элемента $a \in M$ уравнение $na + x + na = na$ разрешимо в M при подходящем натуральном $n \geqslant 1$;

M *аддитивно сократим*, если $a+c=b+c$ влечет $a=b$ для всех $a,b,c\in M$; элемент $z\in M$ называется *бесконечным*, если $a+z=z$ для всех $a\in M$. В частности, полукольцо S *антинегативно* (*зероидно*, *аддитивно идемпотентно*, *аддитивно регулярно*, *аддитивно π-регулярно*, *аддитивно сократимо*), если регулярный полумодуль S_S является антинегативным (соответственно, зероидным, аддитивно идемпотентным, аддитивно регулярным, аддитивно π-регулярным, аддитивно сократимым). Антинегативные полукольца часто также называют *антикольцами*.

Как обычно, для S-полумодуля M и подмножества $X\subseteq M$ под выражением $\sum\limits_{i\in I}x_is_i$ понимается линейная комбинация элементов $x_i\in X$, $i\in I$, почти все коэффициенты $s_i\in S$ которой (за исключением не более чем конечного числа) равны нулю. Всякое подмножество $X\subseteq M$ порождает в M подполумодуль $\langle X\rangle$, состоящий из всевозможных линейных комбинаций элементов из X. Если $\langle X\rangle=M$, то говорят, что X — *система образующих* (*порождающих*) для M. Подмножество $X\subseteq M$ называется *свободным* (или *линейно независимым*), если равенство $\sum\limits_i x_is_i=\sum\limits_i x_is_i'$ влечет $s_i=s_i'$ для всех i. Система образующих, являющаяся свободным множеством, называется *базисом* полумодуля; полумодуль, обладающий базисом, называется *свободным*. Всякий свободный S-полумодуль изоморфен полумодулю $\bigoplus\limits_{i\in I}S_i$ для некоторого индексного множества I, где $S_i\cong S_S$ для всех $i\in I$.

2. Инъективность и проективность некоторых типов полумодулей

Поскольку всякое ассоциативное кольцо является полукольцом, а всякий модуль — полумодулем, вполне естественно, что многие задачи гомологической классификации полуколец возникают как обобщения аналогичных задач в кольцевом случае. В частности, можно попытаться описать полукольца, над которыми все полумодули некоторого выделенного типа являются инъективными, либо проективными. Данный раздел посвящен обзору полученных к настоящему времени результатов, дающих частичное, либо полное решение указанных задач.

Напомним, что полумодуль M над полукольцом S называется *инъективным*, если для любых S-полумодулей A, B и любого инъективного S-гомоморфизма $\alpha: A\to B$ для всякого S-гомоморфизма $\varphi: A\to M$ найдется такой S-гомоморфизм $\psi: B\to M$, что $\varphi=\psi\alpha$. Полумодуль M называется *проективным*, если для любых S-полумодулей A, B и любого сюръективного S-гомоморфизма $\alpha: A\to B$ для всякого S-гомоморфизма $\varphi: M\to B$ найдется такой S-гомоморфизм $\psi: M\to A$, что $\varphi=\alpha\psi$.

Говорят, что S-полумодуль A является *ретрактом* S-полумодуля M, если существуют такие инъективный S-гомоморфизм $\alpha: A\to M$ и сюръективный S-гомоморфизм $\beta: M\to A$, что $\beta\alpha=1_A$ — тождественный гомоморфизм. В силу [16, предложение 17.16] полумодуль проективен ровно тогда, когда он является ретрактом некоторого свободного полумодуля.

Как и в случае модулей над кольцами, легко доказывается, что ретракт инъективного (проективного) полумодуля инъективен (проективен) и что прямое произведение (прямая сумма) любого семейства инъективных (проективных) полумодулей есть инъективный (проективный) полумодуль (см. [16, предложения 17.17, 17.19, 17.23]). Таким образом, для произвольного полукольца S класс всех проективных S-полумодулей замкнут относительно любых прямых сумм, а класс всех инъективных S-полумодулей — относительно любых прямых произведений. В то же время бесконечная прямая сумма инъективных S-полумодулей в общем случае может не быть инъективным полумодулем, а бесконечное прямое произведение проективных S-полумодулей — проективным полумодулем, даже тогда, когда S — кольцо (см. [7, теорема 6.5.1], [10, следствие 20.22]). В связи с этим возникают естественные задачи об описании всех полуколец, для которых имеет место замкнутость класса инъективных полумодулей относительно произвольных прямых сумм или замкнутость класса проективных полумодулей относительно произвольных прямых произведений. Решение этих задач опирается на два следующих результата.

Теорема 2.1 (см. [3, теорема 1.2]). *Пусть S — полукольцо, $\{M_i\}_{i \in I}$ — семейство S-полумодулей и подмножество $J \subseteq I$ состоит в точности из тех индексов j, для которых M_j не является модулем. Если S-полумодуль $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ инъективен, то множество J конечно.*

В случае проективности прямого произведения полумодулей соответствующее утверждение принимает чуть более сложный вид.

Теорема 2.2 (см. [3, теорема 2.1]). *Пусть S — полукольцо, $\{M_i\}_{i \in I}$ — семейство S-полумодулей и подмножество $J \subseteq I$ состоит в точности из тех индексов j, для которых M_j не является модулем.*

(1) *Если S-полумодуль $\prod\limits_{i \in I} M_i$ проективен и множество S конечно, то множество J также конечно.*
(2) *Если S-полумодуль $\prod\limits_{i \in I} M_i$ проективен и множество S бесконечно, то $|J| < |S|$.*

Применение теорем 2.1 и 2.2 позволяет без особого труда (см. [3]) перенести на полукольцевой случай ряд классических результатов теории колец и модулей (ссылки на них приведены в скобках).

Теорема 2.3 (ср. [8, теорема 3]). *Следующие условия для полукольца S эквивалентны*:

(1) *любой S-полумодуль инъективен*;
(2) *любой S-полумодуль проективен*;
(3) *S — классически полупростое кольцо.*

Теорема 2.4 (ср. теорема Фейса—Уокера, [7, теорема 13.6.1]). *Следующие условия для полукольца S эквивалентны*:

(1) *все проективные S-полумодули инъективны*;
(2) *все инъективные S-полумодули проективны и фактор-полумодуль $S/{\equiv_{V(S)}}$ можно вложить в инъективный полумодуль*;
(3) *S — квазифробениусово кольцо.*

Теорема 2.5 (ср. [7, теорема 6.5.1]). *Следующие условия для полукольца S эквивалентны*:

(1) *прямая сумма любого семейства инъективных S-полумодулей — инъективный S-полумодуль и фактор-полумодуль $S/{\equiv_{V(S)}}$ можно вложить в инъективный полумодуль*;
(2) *S — нётерово справа кольцо.*

Теорема 2.6 (ср. теорема Чейза, [10, теорема 22.31B]). *Следующие условия для полукольца S эквивалентны*:

(1) *прямое произведение любого семейства проективных S-полумодулей — проективный S-полумодуль*;
(2) *S — совершенное справа и когерентное слева кольцо.*

Как видно из приведенных выше результатов, при переходе к полукольцам аналоги ряда свойств многообразий модулей над кольцами могут приводить к настолько жестким ограничениям, что они не выполняются ни для каких «чистых» (т.е. не являющихся кольцами) полуколец; такие свойства многообразий полумодулей естественно назвать «кольцевыми». В частности, в силу теоремы 2.3 инъективность (проективность) всех полумодулей над полукольцом является «кольцевым» свойством, присущим исключительно классически полупростым кольцам.

Заметим, что с учетом известных фактов о кольцах и модулях (см., например, [9, пп. 7.6, 7.62]) нетрудно также видеть, что в кольцевом случае те же самые классически полупростые кольца могут быть описаны формально более слабыми условиями инъективности, либо проективности всех циклических (или, эквивалентно, всех конечно порожденных) модулей. В связи с этим естественно задаться вопросом об описании полуколец, над которыми инъективны (проективны) все конечно порожденные, либо все циклические полумодули.

Для конечно порожденных полумодулей решение данного вопроса было фактически получено в [1]. А именно, рассуждения, приведенные в доказательствах теорем 2 и 4 из указанной статьи позволяют для всякого «чистого» полукольца S предъявить порожденный тремя элементами S-полумодуль, который не является ни инъективным, ни проективным. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.7. *Для полукольца S следующие условия эквивалентны*:

(1) *любой конечно порожденный S-полумодуль инъективен*;
(2) *любой конечно порожденный S-полумодуль проективен*;
(3) *S — классически полупростое кольцо.*

В случае инъективности (либо проективности) всех циклических полумодулей ситуация меняется кардинальным образом. Удовлетворяющие указанным условиям классы полуколец (названные в [12, 22] правыми CI- и правыми CP-полукольцами соответственно) являются гораздо более обширными, чем класс полупростых колец, и не совпадают друг с другом. Некоторую информацию о строении и свойствах CI- и CP-полуколец общего вида содержат два следующих результата.

Предложение 2.1 (см. [12, предложение 4.1]). *Полукольцо S является правым CI-полукольцом в точности тогда, когда $S = R \oplus T$, где R — полупростое кольцо, а T — регулярное правое CI-полукольцо, обладающее бесконечным элементом.*

Предложение 2.2 (см. [22, теорема 3.13]). *Полукольцо S является правым CP-полукольцом в точности тогда, когда $S = R \oplus T$, где R — полупростое кольцо, а T — зероидное аддитивно π-регулярное правое CP-полукольцо.*

Таким образом, и для правых CI-полуколец, и для правых CP-полуколец проблема их полного описания, фактически, сводится к описанию их «зероидной» части. В частности, в [12, 22] было установлено, что конечными булевыми алгебрами (либо полукольцами вида $R \oplus B$, где R — полупростое кольцо, а B — конечная булева алгебра) исчерпываются все CI- и все CP-полукольца внутри некоторых специальных классов полуколец, таких, как гельфандовы полукольца (см. [12, теорема 4.6], [22, теорема 4.9]) и вычитаемые справа полукольца (см. [12, теорема 4.7], [22, теорема 4.10]). Отметим также, что одновременно CI- и CP-полукольцом в силу [12, предложение 4.9] и [22, предложение 4.3] является полное матричное полукольцо $M_2(\mathbb{B}_2)$; вполне очевидно, что если в последнем примере заменить $\mathbb{B}_2$ на произвольную конечную булеву алгебру, то мы снова получим CI- и CP-полукольцо. Кроме того, нетрудно видеть, что оба указанных класса полуколец замкнуты относительно взятия гомоморфных образов и конечных прямых произведений. С учетом этих фактов можно предположить, что, по всей видимости, сравнительно хорошее описание CI- и CP-полуколец в общем случае вряд ли возможно получить, не накладывая каких-либо дополнительных ограничений на исследуемые полукольца. Ниже мы приводим описание довольно интересных на наш взгляд подклассов CI- и CP-полуколец внутри класса антиограниченных полуколец.

Согласно [12] полукольцо S называется *антиограниченным*, если $S = V(S) \cup \{1 + s,\ s \in S\}$. Нетрудно видеть, что класс антиограниченных полуколец, в частности, содержит в себе все ассоциативные кольца, а также зероидные полукольца, получаемые из колец с помощью следующей конструкции (см. [12, пример 4.16]): к произвольному ассоциативному кольцу R с единицей добавляются еще два элемента: «внешний» нуль $0 \notin R$ и «бесконечный» элемент ∞, затем на получившемся множестве $\mathrm{Ext}(R) = R \cup \{0, \infty\}$ операции сложения и умножения доопределяются равенствами $0 + x = x + 0 = x$, $0x = x0 = 0$, $x + \infty = \infty + x = \infty$ для всех $x \in \mathrm{Ext}(R)$, а также $x\infty = \infty x = \infty$ при любом ненулевом $x \in \mathrm{Ext}(R)$. Очевидно, антиограниченным полукольцом является двухэлементная булева алгебра $\mathbb{B}_2$. Кроме того, укажем еще два антиограниченных полукольца $\mathbf{B}_3$ и $B(3, 2)$, упоминаемых в приведенных ниже результатах: каждое из полуколец $\mathbf{B}_3$

и $B(3,2)$ состоит из элементов 0, 1 и 2, где $1+2=2$ и $2+2=2{\cdot}2=2$; отличие же заключается лишь в том, что в $\mathbf{B}_3$ верно $1+1=1$, а в $B(3,2)$ верно $1+1=2$.

Теорема 2.8 (см. [12, теорема 4.20]). *Антиограниченное полукольцо S является правым CI-полукольцом тогда и только тогда, когда $S=R\oplus T$, где R — полупростое кольцо, а T изоморфно либо $\mathbb{B}_2$, либо $\mathbf{B}_3$, либо полукольцу вида* $\operatorname{Ext}(R')$ *для некоторого полупростого кольца R'.*

Теорема 2.9 (см. [22, теорема 4.16]). *Антиограниченное полукольцо S является правым CP-полукольцом тогда и только тогда, когда $S=R\oplus T$, где R — полупростое кольцо, а T изоморфно либо $\mathbb{B}_2$, либо $\mathbf{B}_3$, либо $B(3,2)$, либо полукольцу вида* $\operatorname{Ext}(R')$ *для некоторого полупростого кольца R'.*

Отметим тот факт, что в силу теорем 2.8 и 2.9 уже внутри класса антиограниченных полуколец имеется различие (хотя и минимальное) между CI- и CP-полукольцами, поскольку полукольцо $B(3,2)$ является CP-полукольцом, но не CI-полукольцом.

Перейдем теперь к изучению полуколец, удовлетворяющих условию инъективности либо проективности всех простых полумодулей. При изучении таких полуколец весьма полезными оказываются некоторые свойства простых полумодулей над зероидными полукольцами.

Следует отметить, что в отличие от модулей над кольцами простые полумодули над зероидными полукольцами, вообще говоря, не обязаны быть циклическими и даже конечно порожденными (см. [6, пример 2.4]). Тем не менее справедлив следующий результат.

Предложение 2.3 (см. [6, предложение 2.8]). *Если все простые циклические правые полумодули над зероидным полукольцом S проективны* (*или инъективны*), *то каждый простой правый S-полумодуль порождается любым своим ненулевым элементом.*

Согласно принятой в [4] терминологии назовем полукольцо S *правым V-полукольцом*, если каждый простой правый S-полумодуль инъективен. Данное определение естественным образом обобщает известное в теории колец и модулей понятие правого V-кольца. Представленные ниже результаты показывают, что некоторые известные факты о V-кольцах можно обобщить на случай V-полуколец.

Прежде всего заметим, что из предложений 2.1 и 2.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Всякое правое CI-полукольцо является правым V-полукольцом.*

Следующий результат содержит ряд эквивалентных характеристик правых V-полуколец общего вида.

Теорема 2.10 (см. [4, теорема 2.10]). *Для полукольца S следующие условия эквивалентны*:

(1) *S является правым V-полукольцом*;
(2) *любое существенное расширение каждого простого правого S-полумодуля M совпадает с M*;
(3) *$S=R\oplus T$, где R — правое V-кольцо, T — зероидное правое V-полукольцо*;
(4) *каждое фактор-полукольцо полукольца S является правым V-полукольцом.*

Нетрудно заметить, что перечисленные в теореме 2.10 характеристики V-полуколец — за исключением п. (3) — не содержат какой-либо информации о строении таких полуколец, что неудивительно, поскольку, как известно, даже V-кольца в общем случае не имеют хорошего структурного описания. В связи с этим вполне естественно исследовать строение V-полуколец внутри некоторых важных классов полуколец.

Предварительно напомним некоторые понятия. Правый (левый, двусторонний) идеал I полукольца S называется *строгим*, если $a+b\in I$ влечет $a,b\in I$ для всех $a,b\in S$; двусторонний идеал $I\subset S$ *первичен*, если $JK\subseteq I$ влечет $J\subseteq I$ или $K\subseteq I$ для всех двусторонних идеалов $J,K\subseteq S$.

В силу теоремы 2.10 для того, чтобы антинегативное полукольцо S являлось V-полукольцом, необходимо, чтобы S было зероидным. Следующий результат показывает, что это условие является одновременно и достаточным в случае, когда в полукольце S есть только два тривиальных строгих правых идеала.

Предложение 2.4 (см. [12, предложение 3.3]). *Антинегативное полукольцо S, имеющее только два строгих правых идеала, является правым V-полукольцом в точности тогда, когда S зероидно.*

Напомним, что во всяком полукольце S множество $V(S)$ является строгим двусторонним идеалом, а всякое кольцо не имеет собственных строгих идеалов. Учитывая это, а также теорему 2.10 и предложение 2.4, непосредственно получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2 (см. [12, следствие 3.4]). *Полукольцо, имеющее не более двух тривиальных строгих правых идеалов, является правым V-полукольцом ровно тогда, когда оно либо является правым V-кольцом, либо зероидным полукольцом.*

Нетрудно также видеть, что всякое полутело имеет в точности два тривиальных строгих правых идеала, поэтому в силу следствия 2.2 верно следующее утверждение.

Следствие 2.3 (см. [12, следствие 3.5]). *Полукольцо с делением является правым V-полукольцом ровно тогда, когда оно является либо телом, либо зероидным полутелом.*

С учетом теоремы 2.10 любое коммутативное V-полукольцо является прямой суммой коммутативного V-кольца и коммутативного зероидного V-полукольца. Согласно теореме Капланского (см., например, [10, следствие 19.53]) коммутативное кольцо является V-кольцом в точности тогда, когда оно регулярно. Для коммутативных зероидных V-полуколец верна следующая теорема.

Теорема 2.11 (см. [4, теорема 3.1]). *Коммутативное зероидное полукольцо S является V-полукольцом в том и только том случае, когда оно обладает следующим свойством*:

$$\text{если } I \subset S \text{ — строгий первичный идеал и } x \in I, \text{ то } \operatorname{Ann}(x) \nsubseteq I. \tag{1}$$

Из теорем 2.11, 2.10 и упомянутой выше теоремы Капланского о коммутативных V-кольцах немедленно вытекает следующий результат, характеризующий коммутативные V-полукольца.

Теорема 2.12 (см. [4, теорема 3.7]). *Коммутативное полукольцо S является V-полукольцом в том и только том случае, когда $S = R \oplus T$, где R — регулярное кольцо, а T — зероидное полукольцо со свойством* (1).

От V-полуколец перейдем теперь к полукольцам с «двойственным» свойством. А именно, согласно [6] назовем полукольцо S *правым V^*-полукольцом*, если каждый простой правый S-полумодуль проективен.

Известно (см., например, [9, п. 7.6]), что в кольцевом случае указанное свойство характеризует классически полупростые кольца, в связи с чем естественный интерес представляют вопросы о том, насколько сильно различаются классы V^*-полуколец и полупростых колец, и в какой мере те или иные результаты о полупростых кольцах можно обобщить на случай V^*-полуколец.

Прежде всего заметим, что из предложений 2.2 и 2.3 вытекает следующий аналог следствия 2.1.

Следствие 2.4. *Всякое правое CP-полукольцо является правым V^*-полукольцом.*

Следующий результат устанавливает связь V^*-полуколец с V-полукольцами.

Теорема 2.13 (см. [6, теорема 2.10]). *Всякое правое V^*-полукольцо является правым V-полукольцом.*

Ввиду данной теоремы, а также п. (3) теоремы 2.10 легко видеть, что изучение V^*-полуколец, по существу, сводится к изучению их «зероидной» части. Как показывает приведенный ниже результат, в отличие от случая V-полуколец, «кольцевая» и «зероидная» части которых, вообще говоря, не имеют практически никаких общих структурных свойств, имеются определенные параллели между известными свойствами классически полупростых колец и свойствами зероидных V^*-полуколец. Напомним, что в любом полупростом кольце R имеется конечный набор таких взаимно ортогональных идемпотентов $e_1,\ldots, e_k$, что $e_1+\ldots+e_k=1$ и каждый из модулей $e_1R,\ldots, e_kR$ прост. Для зероидных V^*-полуколец справедлива следующая теорема.

Теорема 2.14 (см. [6, теорема 3.4]). *Зероидное полукольцо S является правым V^*-полукольцом ровно тогда, когда существуют такие взаимно ортогональные идемпотенты $z_1,\ldots,z_k$, что*

(1) *$z_1+\ldots+z_k$ — бесконечный элемент для S и*
(2) *все простые правые S-полумодули с точностью до изоморфизма исчерпываются попарно неизоморфными друг другу простыми полумодулями $z_1S,\ldots,z_kS$.*

Следует подчеркнуть, однако, что существование указанных параллелей совсем не влечет за собой наличие для зероидных V^*-полуколец каких-либо аналогов других свойств полупростых колец. Так, например, хорошо известно (см., например, [9, п. 7.6]), что свойство «*быть полупростым кольцом*» лево-право-симметрично, в то время как свойство «*быть зероидным V^*-полукольцом*» таковым, вообще говоря, не является (см. [6, пример 4.4]).

Отметим также, что ввиду теоремы 2.14 и следствия 2.4 справедлив следующий результат, полностью подтверждающий [22, предположение 6.1].

Следствие 2.5. *Всякое антинегативное правое CP-полукольцо содержит бесконечный элемент.*

В завершение данного раздела еще раз укажем соотношения между некоторыми рассмотренными выше классами полуколец:

(1) полупростые кольца $\subset$ правые CI-полукольца $\subset$ правые V-полукольца;
(2) полупростые кольца $\subset$ правые CP-полукольца $\subset$ правые V^*-полукольца $\subset$ правые V-полукольца;
(3) правые CP-полукольца $\not\subseteq$ правые CI-полукольца.

В связи с указанными соотношениями, а также упомянутым ранее отсутствием лево-правой симметричности свойства «*быть V^*-полукольцом*», сформулируем следующие открытые вопросы.

Вопрос 2.1. Верно ли, что всякое правое CI-полукольцо является правым CP-полукольцом? правым V^*-полукольцом?

Вопрос 2.2. Являются ли лево-право-симметричными свойства «*быть CI-полукольцом*»? «*быть CP-полукольцом*»?

3. Инъективные оболочки полумодулей и критерий Бэра

В теории колец и модулей хорошо известны следующие два классических результата (см., например, [7, теорема 5.6.4] и [7, теорема 5.7.1]):

(1) каждый модуль над кольцом обладает инъективной оболочкой и
(2) для инъективности модуля M над кольцом R необходимо и достаточно, чтобы M был инъективен относительно всех односторонних идеалов кольца R (критерий Бэра).

В данном разделе представлены некоторые результаты о возможности применения аналогичных утверждений к полумодулям над полукольцами.

Пусть S — полукольцо. Инъективный S-гомоморфизм $\alpha : A\to B$ называется *существенным*, если для всякого S-гомоморфизма $\beta : B\to C$ отображение $\beta\alpha$ инъективно только тогда, когда гомоморфизм β инъективен. Подполумодуль $A\subseteq B$, для которого вложение $\imath_A : A\to B$ есть существенный гомоморфизм, называется *существенным*; говорят также, что B — *существенное* *расширение* для A. Существенность подполумодуля A в B равносильна тому, что ограничение любой нетривиальной конгруэнции $\rho \in Cong(B)$ на A снова является нетривиальной конгруэнцией (см., например, [16, предложение 17.26]). Инъективный полумодуль B, являющийся существенным расширением полумодуля A, называется его *инъективной оболочкой.*

Как уже было упомянуто выше, всякий модуль над кольцом обладает инъективной оболочкой. Аналогичный результат для полумодулей над аддитивно идемпотентными полукольцами был получен в [34]. Несколькими годами позднее оба этих факта были существенно обобщены на случай полумодулей над аддитивно регулярными полукольцами (см. [23, следствие 12]). В то же время необходимо отметить, что инъективные оболочки полумодулей над произвольными полукольцами в общем случае существуют далеко не всегда. Так, например, если полукольцо S одновременно антинегативно и аддитивно сократимо, то согласно [3, предложение 1.12] любой ненулевой S-полумодуль не является инъективным, а значит, ни один из них не может обладать инъективной оболочкой. Поэтому вопрос о том, как устроены полукольца, над которыми все полумодули некоторого выделенного типа (в частности, все полумодули) обладают инъективными оболочками, представляет естественный интерес. В [21] ответ на данный вопрос удалось получить для некоторых важных типов полумодулей — простых полумодулей, модулей, аддитивно идемпотентных полумодулей и др.

Следуя принятой в [21] терминологии, назовем полукольцо S *полузероидным*, если уравнение $a + x + y = y$ разрешимо в S при любом $a \in S$. Нетрудно понять, что класс полузероидных полуколец весьма обширен и содержит, в частности, все зероидные и все аддитивно регулярные полукольца. Как оказалось, именно полузероидность полукольца является необходимым и достаточным условием существования инъективных оболочек для многих типов полумодулей. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1 (см. [21, теорема 3.3]). *Для полукольца S следующие условия эквивалентны*:

(1) *каждый простой S-полумодуль обладает инъективной оболочкой*;
(2) *каждый аддитивно идемпотентный простой S-полумодуль обладает инъективной оболочкой*;
(3) *каждый простой S-модуль обладает инъективной оболочкой*;
(4) *каждый S-модуль обладает инъективной оболочкой*;
(5) *S полузероидно.*

Нетрудно заметить, что теорема 3.1 не вполне симметрична в отношении модулей и аддитивно идемпотентных полумодулей. В самом деле, для полузероидных полуколец она, в частности, устанавливает существование инъективных оболочек для всех модулей, но аналогичное утверждение для аддитивно идемпотентных полумодулей в ее формулировке отсутствует. В действительности, такое утверждение в общем случае неверно, следовательно, оно неверно и для аддитивно регулярных полумодулей. Следующее утверждение содержит описание полуколец, характеризуемых условием существования инъективных оболочек для всех полумодулей указанных двух типов.

Теорема 3.2 (см. [21, теорема 4.3]). *Для полукольца S следующие условия эквивалентны*:

(1) *каждый аддитивно идемпотентный S-полумодуль обладает инъективной оболочкой*;
(2) *каждый аддитивно регулярный S-полумодуль обладает инъективной оболочкой*;
(3) *S аддитивно π-регулярно.*

Разумеется, в свете теорем 3.1 и 3.2 хотелось бы получить столь же полное и ясное описание класса всех полуколец, над которыми произвольный полумодуль обладает инъективной оболочкой. В силу уже упомянутого выше факта (см. [23, следствие 12]) этот класс содержит все аддитивно регулярные полукольца, и на данный момент неизвестно, существуют ли другие (т.е. не являющиеся аддитивно регулярными) полукольца с указанным свойством. В связи с этим в [21] было высказано следующее предположение.

Предположение 3.1. Каждый полумодуль над полукольцом S обладает инъективной оболочкой ровно тогда, когда S аддитивно регулярно.

Кроме того, вполне естественны вопросы об описании всех полуколец, над которыми каждый конечно порожденный (каждый циклический) полумодуль обладает инъективной оболочкой. На настоящий момент эти вопросы, а также вопрос о справедливости указанного предположения остаются открытыми.

Далее, рассмотрим возможность применения к полумодулям над полукольцами критерия Бэра. Назовем полумодуль M над полукольцом S *инъективным по Бэру*, если для любого правого идеала $I \subseteq S$ всякий S-гомоморфизм $\varphi : I \to M$ можно продолжить до S-гомоморфизма $\bar{\varphi} : S \to M$. Ясно, что каждый инъективный S-полумодуль инъективен по Бэру. Будем говорить, что полукольцо S *удовлетворяет критерию Бэра*, если верно и обратное, то есть если любой инъективный по Бэру S-полумодуль является инъективным. В частности, любое кольцо удовлетворяет критерию Бэра, однако, для полуколец, не являющихся кольцами, аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно. Примером может служить полуполе $(\mathbb{Q}_+, +, \cdot)$ неотрицательных рациональных чисел с обычными операциями сложения и умножения. В самом деле, $\mathbb{Q}_+$ имеет только два идеала — нулевой и само полуполе $\mathbb{Q}_+$, поэтому любой $\mathbb{Q}_+$-полумодуль тривиальным образом является инъективным по Бэру; при этом в силу антинегативности и аддитивной сократимости полуполя $\mathbb{Q}_+$ согласно уже упомянутому выше результату (см. [3, предложение 1.12]) инъективным среди $\mathbb{Q}_+$-полумодулей будет только нулевой полумодуль.

Тем не менее, среди полуколец, удовлетворяющих критерию Бэра, существуют полукольца, не являющиеся кольцами. В частности, таковым, очевидно, будет всякое ненулевое полукольцо, над которым инъективным по Бэру является только нулевой полумодуль; существование таких полуколец устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.3 (см. [2, теорема 1]). *Любую коммутативную полугруппу можно изоморфно вложить в аддитивный моноид полукольца, не имеющего ненулевых инъективных по Бэру полумодулей.*

В силу теоремы 3.3 существует сколь угодно много неизоморфных друг другу полуколец, которые не являются кольцами и удовлетворяют критерию Бэра ровно потому, что обладают одним единственным инъективным по Бэру полумодулем, а именно, нулевым. Нетрудно понять, что исключительную «бедность» класса инъективных по Бэру (и, следовательно, инъективных) полумодулей над такими полукольцами легко восполнить, например, добавив к полукольцу в качестве прямого слагаемого какое-либо ненулевое кольцо. В результате вновь получается удовлетворяющее критерию Бэра полукольцо, не являющееся кольцом, и при этом обладающее большим количеством инъективных полумодулей — инъективных модулей над добавленным кольцом. В связи с этим для произвольного полукольца S, удовлетворяющего критерию Бэра, возникают следующие вопросы:

(1) Верно ли, что всякий инъективный полумодуль над S является модулем?
(2) Верно ли, что всякий инъективный модуль над S является модулем над некоторым кольцом R, выделяющимся в S прямым слагаемым?

Представленные ниже результаты дают положительный ответ на первый вопрос и отрицательный ответ на второй.

Прежде всего укажем, что с помощью внесения небольших изменений в стандартное доказательство критерия Бэра в [5] доказан несколько более общий результат.

Теорема 3.4 (см. [5, теорема 1]). *Пусть M — модуль над полукольцом S, удовлетворяющий следующему условию:*

$$\forall\, m \in M \ (m \neq 0 \ \Rightarrow \ V(S) \nsubseteq \operatorname{Ann}(m)). \tag{2}$$

Модуль M инъективен тогда и только тогда, когда он инъективен по Бэру.

Следующая теорема дает положительный ответ на вопрос (1).

Теорема 3.5 (см. [5, теорема 2]). *Если полукольцо S удовлетворяет критерию Бэра, то любой инъективный S-полумодуль является модулем.*

Из теорем 3.4 и 3.5 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1 (см. [5, следствие]). *Для полукольца S следующие условия эквивалентны*:

(1) *каждый инъективный по Бэру S-полумодуль инъективен* (*т.е.* S *удовлетворяет критерию Бэра*);

(2) *каждый инъективный по Бэру S-полумодуль является модулем, удовлетворяющим условию* (2).

Как уже упоминалось выше, для модулей над кольцами справедливы и критерий Бэра, и теорема о существовании инъективных оболочек. Если же рассматривать полумодули над полукольцами, то каждый из указанных результатов по отдельности остается верным и для некоторых классов полуколец, не являющихся кольцами, однако, как показывает следующее утверждение, оба результата одновременно верны исключительно для колец.

Следствие 3.2 (см. [2, теорема 3]). *Для полукольца S следующие условия эквивалентны*:

(1) *S удовлетворяет критерию Бэра и каждый S-полумодуль обладает инъективной оболочкой*;

(2) *S — кольцо.*

Наконец, приведем утверждение, дополняющее теорему 3.3 и дающее отрицательный ответ на вопрос (2).

Теорема 3.6 (см. [5, теорема 3]). *Любую коммутативную полугруппу можно изоморфно вложить в аддитивный моноид такого полукольца S, что*

(1) *S удовлетворяет критерию Бэра,*

(2) *S неразложимо в прямую сумму ненулевых подполуколец,*

(3) *над S существуют ненулевые инъективные модули.*

4. Проективные оболочки полумодулей и совершенные полукольца

Как известно (см., например, [14, с. 315]), класс совершенных справа колец характеризуется тем, что все правые модули над ними обладают проективными оболочками, или, эквивалентно, все плоские правые модули являются проективными. Данный раздел параграф посвящен полумодульным аналогам этих двух свойств.

Напомним предварительно некоторые определения и факты. Пусть S — полукольцо. Сюръективный S-гомоморфизм $\alpha : A \to B$ называется *косущественным*, если для всякого S-гомоморфизма $\beta : C \to A$ отображение $\alpha\beta$ сюръективно только тогда, когда гомоморфизм β сюръективен.

По аналогии со соответствующим понятием для полигонов над моноидами (см. [28, с. 282]), если S-гомоморфизм $\alpha : P \to A$ полумодулей является косущественным и P проективен, то будем говорить, что P является *проективной оболочкой* для A. Легко видеть, что для модулей над кольцами данное определение эквивалентно общепринятому. Вполне естественно попытаться распространить понятие «совершенности» на случай полуколец, потребовав существование проективных оболочек для всех полумодулей над ними. Однако, как показывает следующий результат, такое требование оказывается слишком жестким и выполнено только для совершенных справа колец.

Теорема 4.1 (см. [20, теорема 3.2]). *Если каждый правый полумодуль над полукольцом S обладает проективной оболочкой, то S — совершенное справа кольцо.*

Другой подход к понятию «совершенности» для полуколец, основанный на требовании проективности всех плоских полумодулей, был предложен в [25]. Необходимо отметить, что для полумодулей над полукольцами имеется несколько неэквивалентных друг другу вариантов определений их тензорного произведения и, соответственно, плоского полумодуля (см., например, [16, гл. 16] и [11]). Для удобства читателя воспроизведем здесь определения, данные в [23–25].

Пусть даны гомоморфизмы полумодулей, для которых коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta} \\ M & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

Пара (φ, α) называется *коамальгамой* пары (ψ, β), если для каждой пары (φ', α') гомоморфизмов $\varphi' : Y \to M$, $\alpha' : Y \to B$, удовлетворяющей условию $\psi\varphi' = \beta\alpha'$, существует такой единственный гомоморфизм $\delta : Y \to A$, что $\varphi' = \varphi\delta$, $\alpha' = \alpha\delta$. Поскольку для любых полумодулей C и C' существует их прямое произведение, а для любых гомоморфизмов $f, g : C \to C'$ существует их уравнитель $\imath_D : D \to C$, где $D = \{c \in C : f(c) = g(c)\}$, с учетом утверждения, двойственного к [30, упражнение 2, с. 68], нетрудно убедиться в том, что для произвольной пары (ψ, β) существует их коамальгама.

Пусть теперь A и B — правый и левый S-полумодули соответственно. Согласно [23] их *тензорным произведением* $A \otimes_S B$ называется фактор-полумодуль свободного $\mathbb{N}$-полумодуля (или, эквивалентно, свободного коммутативного моноида) с базисным множеством $A \times B$ по конгруэнции τ, порожденной соотношениями $(a + a', b)\ \tau\ (a, b) + (a', b)$, $(a, b + b')\ \tau\ (a, b) + (a, b')$, $(as, b)\ \tau\ (a, sb)$ для всех $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ и $s \in S$. Описанная конструкция позволяет естественным образом определить бифунктор тензорного произведения $-\otimes_S- : \mathcal{M}_S \times {}_S\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ (см. [23, предложение 8]).

Правый S-полумодуль M называется *плоским*, если функтор $M \otimes_S -$ сохраняет коамальгамы или, эквивалентно, M есть прямой предел семейства конечно порожденных свободных правых S-полумодулей (см. [24, теорема 2.10]). Правый S-полумодуль M называется *моно-плоским*, если функтор $M \otimes_S -$ сохраняет инъективные гомоморфизмы. Согласно [24, предложение 2.1] любой плоский полумодуль является моно-плоским, однако, в отличие от модулей над кольцами; обратное утверждение, вообще говоря, неверно (см. [24, пример 3.7]). (Ряд результатов о связи понятий «плоскостности» и «моно-плоскостности» для полумодулей над полукольцами представлен также в [26].)

В соответствии с принятой в [25] терминологией полукольцо S назовем *совершенным справа по Бассу*, если все плоские правые S-полумодули проективны. В той же статье было установлено, что каждое аддитивно регулярное полукольцо с непустым множеством характеров (т.е. сюръективных полукольцевых гомоморфизмов на двухэлементную булеву алгебру $\mathbb{B}_2$) не является совершенным справа (см. [25, теорема 5.11]), а всякое коммутативное аддитивно регулярное полукольцо S совершенно справа в точности тогда, когда S — совершенное справа кольцо (см. [25, следствие 5.12]). В конце упомянутой статьи [25] было высказано предположение о том, что следствие 5.12 справедливо в классе всех аддитивно регулярных полуколец. Это предположение удалось полностью подтвердить в [20] для всех (не обязательно аддитивно регулярных) полуколец. Более того, с учетом теоремы 4.1 оказался верным следующий результат.

Теорема 4.2 (см. [20, теорема 4.2]). *Для полукольца S следующие условия эквивалентны*:

(1) *каждый правый S-полумодуль обладает проективной оболочкой*;
(2) *каждый плоский правый S-полумодуль проективен*;
(3) *каждый моно-плоский правый S-полумодуль проективен*;
(4) *S — совершенное справа кольцо.*

Следует отметить тот факт, что в доказательствах каждой из теорем 4.1 и 4.2 для того, чтобы свести задачу описания полуколец с заданными свойствами полумодулей к случаю колец, используются полумодули, не являющиеся конечно порожденными. Поэтому вполне естественно задаться вопросом о том, не сводится ли к случаю колец ситуация, когда соответствующие ограничения накладываются только на конечно порожденные полумодули. А именно, рассмотрим для произвольного полукольца S следующие свойства:

(A) каждый конечно порожденный правый (левый) S-полумодуль обладает проективной оболочкой;

(B) каждый конечно порожденный плоский правый (левый) S-полумодуль проективен.

Применительно к кольцам свойства (A) и (B) хорошо известны. В частности, кольца, обладающие свойством (A), называются полусовершенными; понятие полусовершенности является для колец лево-право-симметричным (см., например, [14, теорема 27.6]). Кроме того, всякое полусовершенное кольцо обладает свойством (B), поскольку для произвольного кольца R любой плоский R-модуль, обладающий проективной оболочкой, является проективным (см., например, [7, теорема 10.5.3]). Вопросы о справедливости аналогичных результатов для полуколец и полумодулей также представляют интерес и не сводятся к упомянутым выше фактам, поскольку свойствами (A) и (B) обладает, в частности, двухэлементная булева алгебра $\mathbb{B}_2$, а также всякое Морита-эквивалентное ей полукольцо, в том числе, полные матричные полукольца $M_n(\mathbb{B}_2)$ при любом натуральном n и всевозможные их конечные прямые произведения (см. [20, пример 4.1] и приведенные после него рассуждения). В связи с этим, завершая данный раздел, приведем несколько вопросов, сформулированных в [20] и остающихся на данный момент открытыми.

Вопрос 4.1. Описать класс полусовершенных полуколец (т.е. полуколец, удовлетворяющих условию (A)). Является ли полусовершенность лево-право-симметричным свойством для полуколец?

Вопрос 4.2. Описать класс полуколец, удовлетворяющих условию (B). Содержит ли этот класс все полусовершенные полукольца?

Вопрос 4.3. Верно ли для произвольного полукольца S, что всякий плоский S-полумодуль, обладающий проективной оболочкой, проективен?

5. Шрайеровы многообразия полумодулей

Как известно, каждая подгруппа свободной группы согласно классической теореме Нильсена—Шрайера сама является свободной. Многообразия алгебр с аналогичным свойством (т.е. свободность каждой подалгебры произвольной свободной алгебры) изучались достаточно интенсивно и получили название *шрайеровых многообразий* (см., например, [17]). Учитывая, что всякая проективная алгебра — как ретракт подходящей свободной алгебры — изоморфна некоторой подалгебре свободной алгебры, естественно рассматривать также более слабое свойство многообразий — свободность каждой проективной алгебры. Многообразия с данным свойством названы в [18] *p-шрайеровыми*. Очевидно, понятия шрайеровости и p-шрайеровости можно обобщить, например, накладывая соответствующие требования только на конечно порожденные полумодули. Данный раздел посвящен изучению обладающих указанными свойствами многообразий полумодулей над некоторыми важными классами полуколец.

Примеры шрайеровых многообразий модулей над кольцами хорошо известны; таковым, в частности, является всякое многообразие $\mathcal{M}_R$, где R — произвольное кольцо главных идеалов без делителей нуля (см., например, [7, упражнение 10d), с. 140]), в том числе многообразия модулей над телами, а также над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Вопрос о шрайеровости многообразий полумодулей над полукольцами изучался в [19]. В частности, было установлено, что многообразия $\mathcal{M}_S$ не являются шрайеровыми в случаях, когда S — «чистое» полутело (см. [19, предложение 2.1]) или $\mathbb{N}$-оцениваемое полукольцо (см. [19, теорема 2.4]). В действительности же, как будет показано ниже, шрайеровых многообразий вида $\mathcal{M}_S$ для «чистых» полуколец вообще не существует; иначе говоря, шрайеровость многообразия $\mathcal{M}_S$ является — в терминах раздела 2 — «кольцевым» свойством.

Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение. Пусть M — правый полумодуль над полукольцом S. Зададим на M отношение $\leqslant_A$, положив $m \leqslant_A m'$ для произвольных $m, m' \in M$, если $\mathrm{Ann}_r(m) \supseteq \mathrm{Ann}_r(m')$, где $\mathrm{Ann}_r(m) = \{s \in S : ms = 0_M\}$ — правый аннулятор элемента $m \in M$.

Лемма 5.1. *Если $V(M) = 0$, то $\leqslant_A$ — квазипорядок, стабильный относительно сложения и умножения на элементы из S.*

Доказательство. Рефлексивность и транзитивность отношения $\leqslant_A$ очевидны. Следовательно, $\leqslant_A$ есть квазипорядок.

Пусть $m \leqslant_A m'$. Если $s \in \mathrm{Ann}_r(m' + n)$ для некоторого $n \in M$, то $0 = (m' + n)s = m's + ns$, что ввиду антинегативности M влечет $m's = ns = 0$. Но тогда $s \in \mathrm{Ann}_r(m') \subseteq \mathrm{Ann}_r(m)$, так что $ms = 0$, откуда $(m + n)s = ms + ns = 0$, поэтому $s \in \mathrm{Ann}_r(m + n)$. Следовательно, верно включение $\mathrm{Ann}_r(m + n) \supseteq \mathrm{Ann}_r(m' + n)$, т.е. $(m + n) \leqslant_A (m' + n)$.

Если для некоторых $s, t \in S$ верно $t \in \mathrm{Ann}_r(m's)$, то $0 = (m's)t = m'(st)$, значит, $st \in \mathrm{Ann}_r(m') \subseteq \mathrm{Ann}_r(m)$. Учитывая последнее, получаем $0 = m(st) = (ms)t$, тем самым, $t \in \mathrm{Ann}_r(ms)$. Таким образом, выполнено включение $\mathrm{Ann}_r(ms) \supseteq \mathrm{Ann}_r(m's)$ и, значит, справедливо соотношение $(ms) \leqslant_A (m's)$. □

Теорема 5.1. *Пусть S — полукольцо, не являющееся кольцом. Тогда многообразие $\mathcal{M}_S$ не шрайерово.*

Доказательство. Предположим, от противного, что $\mathcal{M}_S$ — шрайерово многообразие. Заметим, что тогда полукольцо S должно быть антинегативным (иначе получаем, что $V(S) \neq 0$ — свободный S-модуль и, следовательно, S — кольцо).

Рассмотрим в свободном полумодуле $S^{(\mathbb{N})}$ со «стандартным» базисом $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ подмножество

$$M = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} e_i s_i : \ s_j \leqslant_A s_k \text{ при } k \leqslant j \right\}.$$

С учетом леммы 5.1 можно непосредственно проверить, что M является подполумодулем в $S^{(\mathbb{N})}$ и, значит, согласно предположению, в M существует базис $\{x_i,\ i \in I\}$, элементы которого, в частности, можно выразить через стандартный базис:

$$x_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} e_j s_j^{(i)} \quad \text{для всех } i \in I.$$

Заметим, что при любом натуральном $n \geqslant 1$ элемент $m_n = \sum\limits_{i \leqslant n} e_i$ лежит в M, откуда вытекает, что полумодуль M не является конечно порожденным (иначе M при подходящем $k \in \mathbb{N}$ содержался бы в порожденном множеством $\{e_i,\ i \leqslant k\}$ подполумодуле свободного полумодуля $S^{(\mathbb{N})}$ и тогда $m_{k+1} \notin M$ — противоречие). Следовательно, множество I бесконечно. В частности, $e_1 = m_1 \in M$; значит, найдутся такие конечное подмножество $J \subset I$ и элементы $p_j \in S$, $j \in J$, что $e_1 = \sum\limits_{j \in J} x_j p_j$.

Фиксируем произвольный индекс $k \in I \setminus J$. Ясно, что элемент $m' = e_1 s_1^{(k)}$ лежит в M; при этом $m' \neq 0$. В самом деле, предположив, что $s_1^{(k)} = 0$, для любого $i \geqslant 1$ ввиду соотношения $s_i^{(k)} \leqslant_A s_1^{(k)}$ получаем

$$S = \mathrm{Ann}_r(s_1^{(k)}) \subseteq \mathrm{Ann}_r(s_i^{(k)}) \subseteq S,$$

так что $\mathrm{Ann}_r(s_i^{(k)}) = S$ и, значит, $s_i^{(k)} = 0$. Но тогда $x_k = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} e_i s_i^{(k)} = 0$, что невозможно, так как x_k — элемент базиса $\{x_i,\ i \in I\}$.

Положим $t_1 = s_1^{(k)}$ и $t_i = 2s_i^{(k)}$ при $i \geqslant 2$. С учетом антинегативности полукольца S нетрудно убедиться в том, что $\mathrm{Ann}_r(s) = \mathrm{Ann}_r(2s)$ при любом $s \in S$, а поскольку $x_k \in M$ — и, следовательно, выполняются включения $\mathrm{Ann}_r(s_i^{(k)}) \subseteq \mathrm{Ann}_r(s_l^{(k)})$ при $i \leqslant l$ — то справедливы и включения

$\mathrm{Ann}_r(t_i) \subseteq \mathrm{Ann}_r(t_l)$, означающие, что элемент $m'' = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} e_i t_i$ лежит в M. Легко видеть, что

$$m' + m'' = \sum_{i\in\mathbb{N}} e_i(2s_i^{(k)}) = 2x_k.$$

Выражая $m', m'' \in M$ через элементы базиса $\{x_i,\ i \in I\}$, получаем

$$2x_k = m' + m'' = \sum_{i\in I} x_i q_i' + \sum_{i\in I} x_i q_i'' = \sum_{i\in I} x_i(q_i' + q_i'');$$

следовательно, $q_k' + q_k'' = 2$ и $q_i' + q_i'' = 0$ при $i \neq k$. Последнее, ввиду антинегативности S влечет $q_i' = 0$ при $i \neq k$, так что $m' = x_k q_k'$, где $q_k' \neq 0$ в силу того, что $m' \neq 0$.

С другой стороны, имеем

$$m' = e_1 s_1^{(k)} = \Big(\sum_{j\in J} x_j p_j\Big) s_1^{(k)} = \sum_{j\in J} x_j p_j s_1^{(k)};$$

следовательно,

$$x_k q_k' = m' = \sum_{j\in J} x_j p_j s_1^{(k)}.$$

Но поскольку $k \notin J$, полученное равенство $x_k q_k' = \sum\limits_{j\in J} x_j p_j s_1^{(k)}$ противоречит независимости элементов базиса $\{x_i,\ i \in I\}$.

Таким образом, подполумодуль M свободного полумодуля $S^{(\mathbb{N})}$ не является свободным; следовательно, многообразие $\mathcal{M}_S$ не шрайерово. $\square$

Итак, согласно доказательству теоремы 5.1 среди многообразий $\mathcal{M}_S$, где S — полукольцо, не являющееся кольцом, шрайеровых многообразий нет, поскольку в каждом из них имеется счетно порожденный свободный S-полумодуль, содержащий несвободный подполумодуль. Поэтому естественно рассмотреть следующее более слабое свойство многообразий.

Для произвольного натурального $n \geqslant 1$ многообразие $\mathcal{M}_S$ будем называть *n-шрайеровым*, если свободны все подполумодули любого свободного S-полумодуля с базисом, состоящим из не более чем n элементов. Например, для всякого полутела S многообразие $\mathcal{M}_S$ является, очевидно, 1-шрайеровым. Приведем несколько результатов, касающихся n-шрайеровости многообразий полумодулей применительно к некоторым классам полуколец.

Отметим, что с учетом рассуждений, приведенных в начале доказательства теоремы 5.1, говоря о n-шрайеровых многообразиях вида $\mathcal{M}_S$, где S — полукольцо, не являющееся кольцом, без ограничения общности можно считать, что S антинегативно.

Предложение 5.1. *Если S — полукольцо без делителей нуля, не являющееся кольцом, то многообразие $\mathcal{M}_S$ не является 2-шрайеровым.*

Доказательство. Предположим, от противного, что многообразие $\mathcal{M}_S$ является 2-шрайеровым, и рассмотрим в свободном S-полумодуле $S \times S$ подмножество $M = \{(s,t):\ t \neq 0 \Rightarrow s \neq 0\}$. Как уже было отмечено выше, можно считать, что полукольцо S антинегативно. С учетом этого, а также отсутствия вЁS делителей нуля, непосредственно проверяется, что M является подполумодулем и, следовательно, обладает базисом $\{x_i,\ i \in I\}$. Поскольку $(1,1) \in M$, в базисе должен содержаться хотя бы один элемент вида $x = (s,t)$, где $s,t \neq 0$. По аналогии с рассуждениями, приведенными в доказательстве теоремы 5.1, из равенства $2x = (s,0) + (s,2t)$ вытекает, что $(s,0) = xq$ для некоторого $q \in S$. Но тогда, с одной стороны, имеем $sq = s \neq 0$, так что $q \neq 0$, а с другой — $tq = 0$, что ввиду отсутствия в S делителей нуля влечет $q = 0$, поскольку $t \neq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Из доказанного предложения с учетом хорошо известного факта (см., например, [7, упражнение 4, стр. 104]) о том, что все модули над кольцом свободны ровно тогда, когда кольцо является телом, непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.1 (см. также [19, теорема 2.2]). *Для полутела S следующие условия эквивалентны*:

(1) *многообразие $\mathcal{M}_S$ является шрайеровым*;
(2) *многообразие $\mathcal{M}_S$ является 2-шрайеровым*;
(3) *S — тело.*

Следствие 5.2. *Для коммутативного полукольца S следующие условия эквивалентны*:

(1) *многообразие $\mathcal{M}_S$ является шрайеровым*;
(2) *многообразие $\mathcal{M}_S$ является 2-шрайеровым*;
(3) *S — кольцо главных идеалов без делителей нуля.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна, (3) $\Rightarrow$ 1) следует из [7, упражнение 10d, с. 140].

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть многообразие $\mathcal{M}_S$ является 2-шрайеровым. Тогда оно 1-шрайерово; в частности, любой ненулевой идеал $I \subseteq S$ является свободным полумодулем, т.е. для I существует базис $\{e_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$. Предположив, что в базисе есть хотя бы два различных элемента e_λ и e_μ, в силу коммутативности умножения имеем равенство $e_\lambda e_\mu = e_\mu e_\lambda$, противоречащее независимости элементов базиса. Следовательно, базис состоит ровно из одного элемента, так что идеал I является главным. Таким образом, все идеалы в S главные.

Фиксируем произвольный ненулевой элемент $a \in S$. Легко видеть, что его аннулятор $\mathrm{Ann}(a)$ есть идеал в S. Следовательно, либо $\mathrm{Ann}(a) = 0$, либо $\mathrm{Ann}(a)$ обладает базисом $\{b\}$, но последнее невозможно, поскольку $ba = 0 = b0$. Таким образом, $\mathrm{Ann}(a) = 0$ при любом $a \in S$, $a \neq 0$, так что S не содержит делителей нуля. Применяя теперь предложение 5.1, получаем, что полукольцо S является в действительности кольцом. □

В [31] было введено понятие $\mathbb{N}$-оцениваемого полукольца, т.е. полукольца S, для которого существует (правое) $\mathbb{N}$-оценивание — отображение $\nu : S \to \mathbb{N}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $\nu(s + s') > \nu(s')$ при $s \neq 0$,
(ii) $\nu(ss') > \nu(s)$ при $s, s' \neq 0$, $s' \notin U(S)$,
(iii) $\nu(ss') = \nu(s)$ при $s' \in U(S)$, где $U(S)$ — группа всех мультипликативно обратимых элементов полукольца S.

Как было показано в [31], класс $\mathbb{N}$-оцениваемых полуколец достаточно широк, и для всякого $\mathbb{N}$-оцениваемого полукольца S многообразие $\mathcal{M}_S$ является p-шрайеровым.

Понятие $\mathbb{N}$-оцениваемого полукольца можно довольно существенно обобщить. А именно, пусть $(P, \leqslant)$ — произвольное частично-упорядоченное множество. Полукольцо S назовем *P-оцениваемым*, если существует отображение $\nu : S \to P$, удовлетворяющее условиям (i) и (ii). Легко видеть, что всякое P-оцениваемое полукольцо S антинегативно и не содержит делителей нуля; кроме того, для любых натуральных чисел m и n равенство $m{\cdot}1 = n{\cdot}1$ в полукольце S влечет $m = n$, поэтому удобно отождествлять натуральные числа с соответствующими элементами полукольца S. Также будем далее предполагать, что P удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей (УУЦ). Как будет показано ниже, при сделанных предположениях относительно частично упорядоченного множества P многообразие $\mathcal{M}_S$ для любого P-оцениваемого полукольца S не является даже 1-шрайеровым.

Предварительно докажем несколько вспомогательных результатов.

Лемма 5.2. *Пусть S — P-оцениваемое полукольцо, $a, b, c \in S$, $b \neq 0$. Если $a = ab + c$, то $c = 0$.*

Доказательство. Предположим, от противного, что $c \neq 0$. Тогда при любом $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\nu(ab^k) = \nu(ab^{k+1} + cb^k) > \nu(ab^{k+1}).$$

Но в этом случае в P есть бесконечная строго убывающая цепь $\nu(a) > \nu(ab) > \nu(ab^2) > \ldots$, что противоречит УУЦ. □

Предложение 5.2 (см. также [19, предложение 2.3])**.** *Пусть S — P-оцениваемое полукольцо, $p, q \in \mathbb{N}$ — различные простые числа, $z_1, z_2 \in S$ — такие элементы, что $z_1z_2 = z_2z_1$, $p^{m_1} = q^{n_1}z_1$ и $q^{m_2} = p^{n_2}z_2$ при подходящих показателях $n_1, n_2 \geqslant 0$, $m_1, m_2 \geqslant 1$. Тогда, если полумодуль $z_1S + z_2S \in |\mathcal{M}_S|$ свободен и $p^{m_1+n_2} < q^{m_2+n_1}$, то $\nu(z_1) < \nu(z_2)$ и существует такой $z_3 \in S$, что $z_1z_3 = z_3z_1$, $\nu(z_3) < \nu(z_2)$ и $q^{m_3} = p^{n_3}z_3$ для подходящих $m_3 \geqslant 1$ и $n_3 \geqslant 0$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{B}$ базис свободного полумодуля $z_1S + z_2S$. Ясно, что каждый элемент $f \in \mathbf{B}$ имеет вид $f = z_1x + z_2y$ для некоторых $x, y \in S$ и входит с ненулевым коэффициентом в представление хотя бы одного из элементов z_1 и z_2. Следовательно, с учетом леммы 5.2 одновременное выполнение неравенств $x \neq 0$ и $y \neq 0$ невозможно, так что либо $f = z_1x$, либо $f = z_2y$.

Далее, заметим, что ни один базисный элемент вида z_2y не может входить с ненулевым коэффициентом в представление элемента z_1. В самом деле, предположив противное, с учетом леммы 5.2 получаем, что в данное представление z_1 не входят базисные элементы вида z_1x и, значит, $z_1 = z_2s$ для некоторого $s \in S$. Но тогда имеем

$$p^{m_1+n_2} = p^{n_2}q^{n_1}z_1 = p^{n_2}q^{n_1}z_2s = q^{m_2+n_1}s = p^{m_1+n_2}s + (q^{m_2+n_1} - p^{m_1+n_2})s,$$

что снова противоречит лемме 5.2.

Таким образом, в представление элемента z_1 входит с некоторым ненулевым коэффициентом $s \in S$ базисный элемент вида z_1x, откуда следует, что $x \in U(S)$, поскольку иначе $xs \notin U(S)$ и, следовательно, $\nu(z_1) \geqslant \nu(z_1xs) > \nu(z_1)$ — противоречие. Легко понять, что при $x \in U(S)$ базисный элемент z_1x можно заменить на z_1, поэтому без ограничения общности можно считать, что $z_1 \in \mathbf{B}$. Очевидно, что в $\mathbf{B}$ нет других элементов вида z_1x', а также элементов вида z_2y при $y \notin U(S)$. Если же предположить, что $z_2y \in \mathbf{B}$ при $y \in U(S)$, то z_2y можно было бы заменить на z_2, но в этом случае равенство $z_1z_2 = z_2z_1$ противоречило бы независимости элементов базиса. В итоге получаем, что $\mathbf{B} = \{z_1\}$ и, следовательно, $z_2 = z_1a$ для некоторого $a \in S$.

С учетом независимости базисного элемента z_1 из равенств $z_1z_1a = z_1z_2 = z_2z_1 = z_1az_1$ выводим $z_1a = az_1$. Заметим, что $a \notin U(S)$, поскольку в противном случае при $s = a^{-1}$ выполнялось бы равенство $z_1 = z_2s$, которое, как было показано выше, приводит к противоречию. Нетрудно также видеть, что $z_1 \notin U(S)$. В самом деле, положим $k = p^{m_1}$, $l = q^{n_1}$. Ясно, что $k \neq l$ и, значит, одно из этих чисел строго меньше другого. Случай $k < l$ невозможен, поскольку тогда данное в условии равенство $p^{m_1} = q^{n_1}z_1$ при $s = z_1$ можно переписать в виде $k = ls$, что приводит к равенству $l = k + (l - k) = ls + (l - k)$, противоречащему лемме 5.2. Если же допустить, что $z_1 \in U(S)$, то и в случае $l < k$, положив $s = z_1^{-1}$, получаем $l = ks$ и, следовательно, $k = ks + (k - l)$, что снова противоречит лемме 5.2. Итак, $z_1, a \notin U(S)$, откуда выводим $\nu(z_2) = \nu(z_1a) > \nu(z_1)$ и, аналогично, $\nu(z_2) = \nu(z_1a) = \nu(az_1) > \nu(a)$. Наконец, имеем $q^{m_2+n_1} = q^{n_1}p^{n_2}z_2 = q^{n_1}p^{n_2}z_1a = p^{m_1+n_2}a$, причем $m_2 + n_1 \geqslant m_2 \geqslant 1$. Таким образом, в качестве искомого элемента z_3 можно взять элемент a. □

Предложение 5.3 (см. также [19, теорема 2.4])**.** *Для любого P-оцениваемого полукольца S многообразие $\mathcal{M}_S$ не является 1-шрайеровым.*

Доказательство. Легко видеть, что элементы $z_1 = 2$ и $z_2 = 3$ удовлетворяют условиям предложения 5.2. Поэтому если подполумодуль $z_1S + z_2S \subseteq S$ является свободным, то $\nu(z_2) > \nu(z_1)$ и найдется такой элемент $z_3 \in S$, что $\nu(z_2) > \nu(z_3)$, причем элементы z_1 и z_3 снова удовлетворяют условиям предложения 5.2. Если подполумодуль $z_1S + z_3S \subseteq S$ свободен, то найдется элемент $z_4 \in S$, которым можно заменить один из элементов z_1 и z_3 и т. д. Пусть $z_{i_1} = z_2, z_{i_2}, z_{i_3}, \ldots$ — последовательность заменяемых в описанном процессе элементов. Заметим, что эта последовательность не может быть бесконечной, поскольку иначе частично упорядоченное множество P содержало бы бесконечную строго убывающую цепь $\nu(z_{i_1}) > \nu(z_{i_2}) > \nu(z_{i_3}) > \ldots$. Следовательно, на некотором шаге будет получен подполумодуль, не являющийся свободным. □

Как видно из приведенных выше результатов, в случае, когда S — «чистое» полукольцо, многообразие $\mathcal{M}_S$ не является не только шрайеровым, но даже — для некоторых весьма широких классов полуколец — 2-шрайеровым или 1-шрайеровым. Однако ситуация значительно меняется, если заменить шрайеровость многообразия $\mathcal{M}_S$ на более слабое свойство p-шрайеровости, означающей, напомним, свободность любого проективного S-полумодуля. Как будет показано ниже, многообразия полумодулей над многими антинегативными полукольцами без делителей нуля являются p-шрайеровыми, однако, в силу следующего результата, p-шрайеровость многообразий полумодулей над аддитивно π-регулярными полукольцами является — в терминах раздела 2 — «кольцевым» свойством.

Предложение 5.4 (см. [18, следствие 3.4]). *Пусть S — аддитивно π-регулярное полукольцо. Если многообразие $\mathcal{M}_S$ является p-шрайеровым, то S — кольцо.*

Напомним, что в силу следствия 5.1 для всякого «чистого» полутела S многообразие $\mathcal{M}_S$ не является даже 2-шрайеровым; в то же время (согласно [18, теорема 4.7]) оно p-шрайерово, если полутело аддитивно сократимо. Полное описание полутел, многообразия полумодулей над которыми p-шрайеровы, было дано в [19].

Назовем полутело S *слабо аддитивно сократимым*, если для всех $a, b \in S$ равенство $a+a = a+b$ влечет $a = b$.

Теорема 5.2 (см. [19, теорема 3.2]). *Многообразие полумодулей $\mathcal{M}_S$ над полутелом S является p-шрайеровым тогда и только тогда, когда S слабо аддитивно сократимо.*

В завершение данного раздела рассмотрим вопрос о свободности всех проективных полумодулей над некоторыми полиномиальными полукольцами. Напомним, что аналогичный вопрос для полиномиальных колец над телами хорошо известен как проблема Серра, изначально имевшая следующую формулировку: Верно ли, что всякий проективный модуль над кольцом $R[x_1, \dots, x_n]$ многочленов от коммутирующих переменных $x_1,\dots,x_n$, где R — тело, является свободным? Положительное решение проблемы Серра в случае, когда R — поле, получили в 1976 г. независимо друг от друга Д. Квиллен и А. Суслин. Известно также, что если тело R не является полем, а количество переменных больше или равно двум, то проблема Серра решается в общем случае отрицательно. Вопрос о решении полукольцевого аналога проблемы Серра был поставлен в [25, проблема 2]. Как показывают приведенные ниже результаты, для полиномиальных полуколец над многими антинегативными полукольцами без делителей нуля аналог проблемы Серра имеет положительное решение даже при отсутствии ограничений на конечность числа переменных и их коммутируемость.

Теорема 5.3 (см. [19, теорема 4.7]). *Пусть R — антинегативное полукольцо без делителей нуля, X — непустое множество и $S = R(X)$ — полукольцо многочленов над R от (не обязательно коммутирующих) переменных из X. Тогда p-шрайеровость многообразия $\mathcal{M}_S$ равносильна p-шрайеровости многообразия $\mathcal{M}_R$.*

Опираясь на данную теорему, а также учитывая теорему 5.2, непосредственно получаем критерий p-шрайеровости многообразий полумодулей для полиномиальных полуколец над «чистыми» полутелами.

Следствие 5.3 (см. [19, следствие 4.8]). *Пусть S — полутело, не являющееся телом. Многообразие $\mathcal{M}_{S(X)}$ является p-шрайеровым тогда и только тогда, когда S слабо аддитивно сократимо.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин С. Н.* Полукольца, над которыми любой полумодуль инъективен (проективен)// Мат. вестн. педвузов и ун-тов Волго-Вятск. рег. — Киров, 2006. — № 8. — С. 50–53.
2. *Ильин С. Н.* О применимости к полукольцам двух теорем теории колец и модулей// Мат. заметки. — 2008. — *83*, № 4. — С. 536–544.
3. *Ильин С. Н.* Прямые суммы инъективных и прямые произведения проективных полумодулей над полукольцами// Изв. вузов. Мат. — 2010. — №10. — С. 31–43.
4. *Ильин С. Н.* V-Полукольца// Сиб. мат. ж. — 2012. — *53*, № 2. — С. 277–290.
5. *Ильин С. Н.* О полукольцах, удовлетворяющих критерию Бэра// Изв. вузов. Мат. — 2013. — № 3. — С. 33–39.
6. *Ильин С. Н.* О полукольцах, над которыми все простые полумодули проективны// Сиб. мат. ж. — 2017. — *58*, № 2. — С. 281–297.
7. *Каш Ф.* Модули и кольца. — М.: Мир, 1981.
8. *Скорняков Л. А.* Элементы общей алгебры. — М: Наука, 1983.
9. *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.
10. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1977, 1979.
11. *Abuhlail J. Y.* Some remarks on tensor products and flatness of semimodules// Semigroup Forum. — 2014. — *88*, № 3. — С. 732–738.
12. *Abuhlail J. Y., Il'in S. N., Katsov Y., Nam T. G.* On V-semirings and semirings all of whose cyclic semimodules are injective// Commun. Algebra. — 2015. — *43*, № 11. — С. 4632–4654.
13. *Ahsan J., Shabir M., Weinert H. J.* Characterizations of semirings by P-injective and projective semimodules// Commun. Algebra. — 1998.— *26*, № 7. — С. 2199–2209.
14. *Anderson F. W., Fuller K. R.* Rings and Categories of Modules. — New York: Springer-Verlag, 1992.
15. *Fofanova T. S.* Polygons over distributive lattices// Universal Algebra/ Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. — Amsterdam: North-Holland, 1982. — *29*. — С. 289–292.
16. *Golan J. S.* Semirings and Their Applications. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 1999.
17. *Grätzer G.* Universal Algebra. — New York–Berlin: Springer-Verlag, 1979.
18. *Il'in S. N., Katsov Y.* On p-Schreier varieties of semimodules// Commun. Algebra. — 2011. — *39*, № 4. — С. 1491–1501.
19. *Il'in S. N., Katsov Y.* On Serre's problem on projective semimodules over polynomial semirings// Commun. Algebra. — 2014. — *42*, № 9. — С. 4021–4032.
20. *Il'in S. N.* On projective covers of semimodules and perfect semirings// J. Algebra Appl. — 2014. — *13*, № 6. — Article ID 1450014.
21. *Il'in S. N.* On injective envelopes of semimodules over semirings// J. Algebra Appl. — 2016. — *15*, № 7. — Article ID 1650122.
22. *Il'in S. N., Katsov Y., Nam T. G.* Toward homological structure theory of semimodules: On semirings all of whose cyclic semimodules are projective// J. Algebra. — 2017. — *476*. — С. 238–266.
23. *Katsov Y.* Tensor products and injective envelopes of semimodules over additive regular semirings// Algebra Colloq. — 1997. — *4*, № 2. — С. 121–131.
24. *Katsov Y.* On flat semimodules over semirings// Algebra Univers. — 2004. — *51*, № 2-3. — С. 287–299.
25. *Katsov Y.* Toward homological classification of semirings: Serre's conjecture and Bass's perfectness in a semiring context// Algebra Univers. — 2004. — *52*, № 2-3. — С. 197–214.
26. *Katsov Y., Nam T. G.* Morita equivalence and homological characterization of semirings// J. Algebra Appl. — 2011. — *10*, № 3. — С. 445–473.
27. *Katsov Y., Nam T. G., Tuyen N. X.* More on subtractive semirings: simpleness, perfectness, and related problems// Commun. Algebra. — 2011. — *39*, № 11. — С. 4342–4356.
28. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, Acts and Categories. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2000.
29. *Lam T. Y.* Lectures on Modules and Rings. — New York–Berlin: Springer-Verlag, 1999.
30. *Mac Lane S.* Categories for the Working Mathematician. — New York: Springer-Verlag, 1998.
31. *Patchkoria A.* Projective semimodules over semirings with valuations in nonnegative integers// Semigroup Forum. — 2009. — *79*, № 3. — С. 451–460.
32. *Sokratova O.* On semimodules over commutative additively idempotent semirings// Semigroup Forum. — 2002.— *64*, № 1. — С. 1–11.

33. *Sokratova O.* Projective semimodules// Algebra Univers. — 2002. — *48*, № 4. — C. 389–398.
34. *Wang H.* Injective hulls of semimodules over additively-idempotent semirings// Semigroup Forum. — 1994. — *48*, № 1. — C. 377–379.

С. Н. Ильин
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: Sergey.Ilyin@kpfu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 158 (2018). С. 23–39

УДК 510.5, 512.565.2

СПЕКТРЫ СТЕПЕНЕЙ СТРУКТУР

© 2018 г. И. Ш. КАЛИМУЛЛИН, В. Л. СЕЛИВАНОВ, А. Н. ФРОЛОВ

Аннотация. В обзоре обсуждаются спектры вычислимости счетных структур, дающие естественную меру сложности невычислимых структур. Понятие спектра структуры является основным инструментом исследования алгоритмических свойств счетных структур. Наряду с обзором имеющихся результатов приведем доказательства нескольких новых результатов, иллюстрирующих вариант метода интерпретаций, являющийся основным методом данного направления. Обсуждаются некоторые открытые вопросы.

Ключевые слова: структура, вычислимая структура, спектр структуры, интерпретация.

AMS Subject Classification: 03D45, 03C57

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Цель статьи — познакомить широкий круг математиков с программой исследования алгоритмических свойств счетных алгебраических структур из ряда естественных классов (таких как группы, поля, линейные порядки и т. д.), известной как теория спектров структур. Статья не является исчерпывающим обзором теории спектров, но мы надеемся дать адекватное представление о лежащих в основе этой теории идеях, методах и результатах. Предполагается знакомство читателя с основами теории вычислимости, мы используем без напоминания стандартную терминологию и обозначения из [18, 68]. Также предполагаем известными терминологию из логики и теории моделей (см. [3, 13]).

Изучение алгоритмических свойств структур оказалось очень богатым и глубоким. Оно представляет большой интерес как для теории вычислимости и ее приложений, так и для теории моделей и ее приложений. В данной работе все рассматриваемые сигнатуры конечны, а все структуры (за исключением особо оговариваемых случаев) — счетно бесконечны. Изучение счетных структур принципиально для логики первого порядка и теории моделей, в то время как изучение несчетных структур требует привлечения аксиоматической теории множеств.

Существует несколько естественных подходов к определению алгоритмической сложности структуры или класса структур (см., например, [62]). Фундаментальный и концептуально простой

Работа И. Ш. Калимуллина выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.451.2016/1.4). Работа А. Н. Фролова выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-60077).

способ состоит в сопоставлении каждой структуре множество тьюринговых степеней $\mathbf{d}$, относительно которых данная структура вычислимо представима (т.е. изоморфна некоторой $\mathbf{d}$-вычислимой структуре с основным множеством ω). Ясно, что спектры изоморфных структур одинаковы. Спектр структуры $\mathbb{A}$ обозначим $Sp(\mathbb{A})$. Структура $\mathbb{A}$ алгоритмически не сложнее структуры $\mathbb{B}$ (символически, $\mathbb{A} \leqslant_w \mathbb{B}$), если $Sp(\mathbb{A}) \supseteq Sp(\mathbb{B})$. Предпорядок $\leqslant_w$, известный как сводимость Мучника, играет заметную роль в теории вычислимости (см., например, [18, 66] и приведенные в этих работах ссылки).

Таким образом, простейшими с этой точки зрения структурами являются вычислимо представимые структуры, имеющие богатую теорию и многочисленные приложения (см. [5]). Однако наряду с вычислимыми структурами в математике имеется много примеров важных невычислимых (и даже не вычислимо представимых) структур, например, упорядоченное поле вычислимых действительных чисел или алгебра Линденбаума предложений богатой сигнатуры. Понятие спектра важно для понимания алгоритмической сложности структур, не являющихся вычислимо представимыми. Заметим, что в последнее время развиваются также и обобщения спектров на несчетные структуры (см., например, [36]), но в данной работе это направление не затрагивается.

Под спектром класса структур K одной и той же сигнатуры понимаем $Sp(K) = \{Sp(\mathbb{A}) \mid \mathbb{A} \in K\}$. Таким образом, осмысленно говорить о спектрах групп, полей, линейных порядков и т. д. Заметим, что понятие спектра структуры и класса структур впервые (в неявной форме) появилось, по-видимому, в статье [65], где основное внимание уделялось степеням структур (см. раздел 1.1). К настоящему времени накоплено большое количество информации о спектрах конкретных структур и естественных классов структур.

Второй автор данной статьи обратил внимание на то, что многие естественные классы структур K спектрально универсальны (т.е. $Sp(K)$ содержит спектр любой структуры) в точности тогда, когда их элементарная теория неразрешима. Поскольку разрешимость элементарных теорий хорошо изучена, имеет смысл проверить это наблюдение (которое, как нетрудно показать, в общей постановке неверно) на богатом списке элементарных теорий из обзора [8]. Это наблюдение объясняет центральную роль метода интерпретаций (являющегося основным методом изучения разрешимости элементарных теорий) в изучении спектров. Специфика изучения спектров в том, что они требуют специальных интерпретаций, в частности, интерпретаций формулами, эквивалентными одновременно универсальным формулам и экзистенциальным формулам. Поэтому интерпретации из [8] не всегда применимы при изучении спектров, а иногда доказательства требуют серьезных модификаций соответствующих доказательств из [8].

Класс структур K называется (*спектрально*) *универсальным*, если $Sp(K)$ совпадает с классом всех спектров счетных структур. В разделе 1 приведены результаты, направленные на описание степеней Мучника, являющихся спектрами структур. Хотя до полного описания еще далеко, много интересной информации в этом направлении уже известно. В разделе 2 обсудим универсальные классы структур. Важным шагом в понимании таких классов является статья [47], в которой доказана универсальность нескольких важных классов структур и разработан довольно общий метод доказательства универсальности; мы приведем примеры классов структур, универсальность которых установлена после работы [47], а также новые примеры, ранее в литературе не отраженные. В разделе 3 обсудим классы структур, для которых уже установлена неуниверсальность; для таких классов принципиален вопрос о включениях их спектров (т.е. об их сравнении по сводимости Мучника). В разделе 4 обсудим структуры, универсальность или не универсальность которых пока не установлена; попытка ответить на этот вопрос нередко приводит к глубоким вопросам о свойствах структур из этого класса. Наконец, в разделе **??** обсудим некоторые из упомянутых выше альтернативных подходов к алгоритмическим классификациям структур; таких подходов несколько, и они часто тесно связаны со спектрами структур. В заключительном параграфе подведем итоги нашего обсуждения и обсудим возможные направления дальнейших исследований.

1. Об описании спектров структур

1.1. Степени структур (конусы). Простейший возможный вид спектра структуры $\mathbb{A}$ — множество степеней вида $\check{\mathbf{d}} = \{\mathbf{c} \mid \mathbf{c} \geqslant \mathbf{d}\}$ для любой тьюринговой степени $\mathbf{d}$. Такая степень $\mathbf{d}$ (если она существует) называется степенью структуры $\mathbb{A}$. Множества степеней вида $\check{\mathbf{d}}$ для простоты иногда называются (верхними) конусами. Конус тривиален, если $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ (в этом случае $\check{\mathbf{0}}$ совпадает со множеством всех тьюринговых степеней). Отметим, что структуры, спектры которых суть конусы, имеют простое теоретико-модельное описание.

Теорема 1.1 (см. [30]). *Алгебраическая структура $\mathbb{A}$ имеет степень $\mathbf{d}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A}$ имеет $\mathbf{d}$-вычислимое представление, причем для множества $D \in \mathbf{d}$ существует конечный набор констант $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{A}$ и такие вычислимые последовательности экзистенциональных формул $\{\Phi_{n,m}\}_{n,m\in\omega}$ и $\{\Psi_{n,m}\}_{n,m\in\omega}$ со свободными переменными $a_1, \dots, a_k$, что для всех $n \in \omega$*

$$n \in D \iff \mathbb{A} \models \Phi_{n,m}(a_1, \dots, a_k) \text{ для некоторого } m;$$
$$n \notin D \iff \mathbb{A} \models \Psi_{n,m}(a_1, \dots, a_k) \text{ для некоторого } m.$$

Другими словами множество D, вычисляющее некоторое представление структуры $\mathbb{A}$, и его дополнение сводятся по перечислимости к некоторому экзистенциальному типу структуры $\mathbb{A}$.

Простейшей алгебраической структурой, имеющей спектр $\check{\mathbf{d}}$ (см. [65]), является структура $\langle \omega, s(x), D(x) \rangle$, определенная на множестве натуральных чисел ω, где $s(x) = x + 1$, а $D(x)$ — предикат, истинный тогда и только тогда, когда x принадлежит фиксированному множеству $D \in \mathbf{d}$. Для такой структуры мы можем положить $\Phi_{n,m}(a_1) = D(s^n(a_1))$ и $\Psi_{n,m}(a_1) = \neg D(s^n(a_1))$, где $a_1 = 0$. Другим подобным примером может служить унарная $\langle U_D, p \rangle$ алгебра (унар), определенная на множестве

$$U_D = \{2x \mid x \in \omega\} \cup \{4x + 1 \mid x \in D\} \cup \{4x + 3 \mid x \in D\},$$

на которой действует унарная функция $p(2x + 2) = p(2x + 1) = 2x$, $p(0) = 0$. Тогда можем положить

$$\Phi_{n,m} = (\exists a)(\exists b)(\exists c \neq b)[p^{2n+1}(a) = p^{2n}(a) \ \& \ a = p(b) \ \& \ a = p(c)];$$
$$\Psi_{n,m} = (\exists a)(\exists b)(\exists c \neq b)[p^{2n+2}(a) = p^{2n+1}(a) \ \& \ a = p(b) \ \& \ a = p(c)].$$

В данных примерах индекс m используется фиктивно, но в некоторых случаях он необходим.

Заметим, что $Sp(\mathbb{A}) = \check{\mathbf{0}}$ в точности тогда, когда структура $\mathbb{A}$ вычислимо представима. Из теоремы 1.1 легко следует, что $\check{\mathbf{0}}$ — единственный возможный спектр-конус линейного порядка (см. [65]), поскольку любой экзистенциальный тип линейного порядка вычислим.

Важным вопросом о спектре данного класса структур является вопрос о том, все ли конусы реализуются (т.е. принадлежат спектру этого класса). Если ответ положителен, требуется дополнительное исследование о том, является ли класс универсальным, в противном случае ясно, что класс не универсален.

1.2. Е-конусы, спектры перечислимости семейств и другие спектры, не являющиеся конусами. Если пример унарной алгебры $\langle U_D, p \rangle$ из предыдущего раздела модифицировать, убрав элементы $\{4x+3 \mid x \in D\}$ из универсума, получим пример унарной алгебры, определенной на множестве

$$V_D = \{2x \mid x \in \omega\} \cup \{4x + 1 \mid x \in D\},$$

на которой действует та же самая унарная функция $p(2x+2) = p(2x+1) = 2x$, $p(0) = 0$. Спектром этой алгебры будет так называемый е-конус степеней $\mathbf{E}_D = \{\mathbf{c} \mid D \text{ перечислимо относительно } \mathbf{c}\}$, что для специально подобранных множеств D (имеющих нетотальную степень по перечислимости) даст спектр, не являющийся конусом.

Для структур, спектр которых является е-конусом, справедлив аналог теоремы 1.1.

Теорема 1.2 (см. [30]). *Спектр алгебраической структуры $\mathbb{A}$ совпадает с классом $\mathbf{E}_D = \{\mathbf{c} \mid D$ перечислимо относительно $\mathbf{c}\}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A}$ имеет $\mathbf{c}$-вычислимое представление для любого $\mathbf{c} \in \mathbf{E}_D$, причем существуют такие конечный набор констант $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{A}$ и вычислимая последовательность экзистенциональных формул $\{\Phi_{n,m}\}_{n,m\in\omega}$ со свободными переменными $a_1, \dots, a_k$, что для всех $n \in \omega$*

$$n \in D \iff \mathbb{A} \models \Phi_{n,m}(a_1, \dots, a_k) \text{ для некоторого } m.$$

Другими словами, множество D эквивалентно по перечислимости некоторому экзистенциальному типу структуры $\mathbb{A}$.

Имеется ряд примеров естественных классов структур, спектром степеней которых являются в точности e-конусы:

(1) связные графы, степени вершин которых конечны (в частности, унарные алгебры, где прообраз каждого элемента относительно унарной функции конечен);
(2) алгебраические расширения поля рациональных чисел;
(3) подгруппы аддитивной группы рациональных чисел.

Приведенную выше конструкцию можно обобщить далее, закодировав в унарную алгебру сложность перечисления семейства множеств

$$\mathcal{F} = \{D_0, D_1, D_2, \dots\}.$$

А именно, рассмотрим алгебру $\langle W_{\mathcal{F}}, q\rangle$, где

$$W_{\mathcal{F}} = \{\langle i, j, 2x\rangle \mid i, j, x \in \omega\} \cup \{\langle i, j, 2x+1\rangle \mid i, j \in \omega \ \& \ x \in D_i\},$$

и $q(\langle i, j, 2x+2\rangle) = q(\langle i, j, 2x+1\rangle) = \langle i, j, 2x\rangle$, $q(\langle i, j, 0\rangle) = \langle i, j, 0\rangle$.

Нетрудно проверить, что тип изоморфизма $\langle W_{\mathcal{F}}, q\rangle$ не зависит от порядка нумерации $D_0, D_1, D_2, \dots$ элементов семейства $\mathcal{F}$, а также от количества повторений в этой нумерации (для этого в определении введен фиктивный параметр j, обеспечивающий повторение каждого D_i в алгебре бесконечное количество раз). Более того, $\langle W_{\mathcal{F}}, q\rangle$ имеет вычислимую копию тогда и только тогда, когда имеется существует $\mathbf{x}$-вычислимая нумерация семейства $\mathcal{F}$, т.е. для множества $X \in \mathbf{x}$ существует такая вычислимая функция f, что

$$\mathcal{F} = \{W^X_{f(0)}, W^X_{f(1)}, W^X_{f(2)}, \dots\},$$

где через W^X_k обозначено k-е X-перечислимое множество в геделевой нумерации. Таким образом,

$$Sp\langle W_{\mathcal{F}}, q\rangle = \{\mathbf{c} \mid \mathcal{F} \text{ имеет } \mathbf{c}\text{-вычислимую нумерацию.}\}.$$

Класс степеней в правой части последнего равенства называется спектром степеней семейства $\mathcal{F}$. Изучению спектров семейств и их обобщений посвящен отдельный обзор [12]. На основе такого кодирования семейств были получены следующие спектры степеней алгебраических структур:

(1) спектр $\{\mathbf{c} \mid \mathbf{c}' \geqslant \mathbf{0}''\}$, состоящий из всех высоких степеней (см. [48]);
(2) спектр $\{\mathbf{c} \mid \mathbf{c} > \mathbf{0}\}$, состоящий из всех невычислимых степеней (см. [67, 72]);
(3) спектр $\{\mathbf{c} \mid \mathbf{c} \nleqslant \mathbf{a}\}$, являющийся дополнением нижнего конуса
   (i) произвольной низкой степени $\mathbf{a}$ (см. [10]);
   (ii) произвольной перечислимой степени $\mathbf{a}$ (см. [11]);
   (iii) степени $\mathbf{a}$, для которой существует перечислимая степень $\mathbf{b} \leqslant \mathbf{a}$ такая, что $\mathbf{b}' = \mathbf{a}'$ (см. [27]; там же доказано, что структуры со спектром $\{\mathbf{c} \mid \mathbf{c} \nleqslant \mathbf{0}''\}$ не существует);
(4) спектр всех не супернизких степеней (см. [10]);
(5) спектр всех гиперимунных степеней (см. [33]);
(6) спектр всех степеней, не являющихся совокупно рекурсивными (см. [45]);
(7) спектр всех степеней без трассируемого скачка (см. [45]).

Другими методами, без прямого кодирования семейств, были получены перечисленные ниже спектры степеней:

(1) спектр $\{\mathbf{c} \mid \mathbf{c}^{(\alpha)} \geqslant \mathbf{a}\}$, где $\mathbf{a} > \mathbf{0}^{(\alpha)}$, а α — произвольный вычислимый последовательный ординал (см. [44]);
(2) спектр $\{\mathbf{c} \mid \mathbf{c}^{(\alpha)} > \mathbf{0}^{(\alpha)}\}$ всех не α-низких степеней для последовательных вычислимых ординалов α (см. [44]);
(3) спектр всех не гиперарифметических степеней (см. [34]).

И. Ш. Калимуллин и М. Х. Файзрахманов (см. [12]) дополнили этот ряд еще двумя примерами:

(4) спектр всех не K-тривиальных степеней;
(5) спектр $\{\mathbf{c} \mid \mathbf{c}^{(\alpha)} > \mathbf{0}^{(\alpha)}\}$ всех не α-низких степеней для предельных вычислимых ординалов α.

Из естественных замкнутых наверх классов степеней, не являющихся спектрами алгебраических структур, можно указать объединение двух конусов $\check{\mathbf{a}} \cup \check{\mathbf{b}}$ при несравнимых степенях $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (несложный фольклорный результат), а также вышеупомянутый класс $\{\mathbf{c} \mid \mathbf{c} \nleqslant \mathbf{0}''\}$.

2. Универсальные классы структур

2.1. Известные результаты. Понятие спектрально универсального класса структур было введено в связи со следующим результатом.

Теорема 2.1 (см. [47]). *Для каждой счетной структуры $\mathbb{A}$ существует такая счетная структура $\mathbb{B}$ из каждого из следующих классов*:

(1) *неориентированных графов*;
(2) *частичных порядков*;
(3) *решеток*;
(4) *целостных колец*;
(5) *коммутативных полугрупп*;
(6) 2-*ступенно нильпотентных групп,*

что $Sp(\mathbb{A}) = Sp(\mathbb{B})$.

Змаетим, что этот результат на самом деле утверждает сохранение структурой $\mathbb{B}$ многих других алгоритмических свойств, кроме спектра степеней (при сохранении всех этих свойств класс структур называется универсальным по Хиршфельдту—Хусаинову—Шору—Слинько). В контексте данной статьи мы будем говорить только о спектральной универсальности.

Недавно теорема 2.1 была распространена на класс полей и проективных плоскостей.

Теорема 2.2 (см. [60]). *Для каждой счетной структуры $\mathbb{A}$ существует такое счетное поле $\mathbb{F}$, что $Sp(\mathbb{A}) = Sp(\mathbb{F})$.*

Теорема 2.3 (см. [14]). *Для каждой счетной структуры $\mathbb{A}$ существует такая паппова проективная плоскость $\mathbb{P}$, что $Sp(\mathbb{A}) = Sp(\mathbb{P})$.*

Открыт вопрос об универсальности классов абелевых групп, дистрибутивных решеток и упорядоченных полей. Насколько нам известно, открыт также вопрос об универсальности класса всех полей фиксированной характеристики.

2.2. Новые результаты. Здесь приведем несколько новых примеров универсальных классов. Хотя вполне возможно, что некоторые из приводимых результатов были известны еще кому-то из специалистов, в литературе мы их не встречали, поэтому целесообразно соответствующие простые доказательства опубликовать, заодно проиллюстрировав применяемые в данной области методы доказательств.

Под структурой двух эквивалентностей понимаем структуру с двумя (независимыми друг от друга) отношениями эквивалентности. Известно (см., например, [7]), что теория всех (не только счетно бесконечных) таких структур наследственно неразрешима и, более того, класс конечных структур двух эквивалентностей часто применяется для доказательства наследственной неразрешимости других элементарных теорий. Следующее утверждение и приводимое доказательство получены совместно О. В. Кудиновым и В. Л. Селивановым. Доказательство является небольшой модификацией доказательства наследственной неразрешимости теории класса конечных структур двух эквивалентностей (см. [7]).

Предложение 2.4 (О. В. Кудинов, В. Л. Селиванов (не опубликовано))**.** *Класс всех структур двух эквивалентностей спектрально универсален.*

Доказательство. Достаточно по любому графу $\mathbb{M} = (\omega; P)$ (P — антирефлексивное симметричное отношение на ω) построить такую структуру двух эквивалентностей $\widetilde{\mathbb{M}} = (M; \eta, \zeta)$, что $Sp(\mathbb{M}) = Sp(\tilde{\mathbb{M}})$.

Множество $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$ есть дизъюнктное объединение множеств $M_i \subseteq \omega$, определенных следующим образом: $M_0 = \{0\} \times \omega$, $M_1 = \{\langle i, \langle a, b\rangle\rangle \mid 1 \leqslant i \leqslant 3 \wedge P(a, b)\}$ и $M_2 = \{\langle j, \langle a, b\rangle\rangle \mid 4 \leqslant j \leqslant 5 \wedge \neg P(a, b)\}$.

Отношение η зададим, определяя при любом $x \in M$ класс эквивалентности $[x]_\eta$ следующим образом:

$$[x]_\eta = \begin{cases} \{\langle 0, \langle a, c\rangle\rangle \mid c \in \omega\}, & \text{если } x = \langle 0, \langle a, b\rangle\rangle \in M_0, \\ \{x\}, & \text{если } x \in M_1, \\ \{\langle i, \langle a, b\rangle\rangle, \langle i, \langle b, a\rangle\rangle \mid 4 \leqslant i \leqslant 5\}, & \text{если } x = \langle j, \langle a, b\rangle\rangle \in M_2. \end{cases}$$

Заметим, что $x \in [x]_\eta$, $[x]_\eta \cap [y]_\eta \neq \emptyset \to [x]_\eta = [y]_\eta$, множество $[x]_\eta$ бесконечно для $x \in M_0$, одноэлементно для $x \in M_1$, двухэлементно при $x = \langle j, \langle a, b\rangle\rangle \in M_2$ и $a = b$ и четырехэлементно при $x = \langle j, \langle a, b\rangle\rangle \in M_2$ и $a \neq b$.

Для любого $x = \langle 0, \langle a, b\rangle\rangle \in M_0$ определим $[x]_\zeta$ соотношением

$$[x]_\zeta = \begin{cases} \{x, \langle 0, \langle b, a\rangle\rangle, \langle i, \langle a, b\rangle\rangle, \langle i, \langle b, a\rangle\rangle \mid 1 \leqslant i \leqslant 3\}, & \text{если } P(a, b), \\ \{x, \langle 0, \langle b, a\rangle\rangle, \langle i, \langle a, b\rangle\rangle, \langle i, \langle b, a\rangle\rangle \mid 4 \leqslant i \leqslant 5\}, & \text{если } \neg P(a, b). \end{cases}$$

Поскольку $x \in [x]_\zeta$, $[x]_\zeta \cap [y]_\zeta \neq \emptyset \to [x]_\zeta = [y]_\zeta$ и $\bigcup\{[x]_\zeta \mid x \in M_0\} = M$, эквивалентность ζ на M задана полностью. Заметим, что $[x]_\zeta$ восьмиэлементно в случае $P(a, b)$, трехэлементно в случае $\neg P(a, b) \wedge a = b$, и шестиэлементно в случае $\neg P(a, b) \wedge a \neq b$.

Ясно, что если структура $\mathbb{M}$ вычислима относительно оракула A, то структура $\widetilde{\mathbb{M}}$ также вычислима относительно A, поэтому $Sp(\mathbb{M}) \subseteq Sp(\widetilde{\mathbb{M}})$.

Для доказательства обратного включения достаточно проверить, что структуры $\mathbb{M} = (\omega; P)$ и $(\omega; \neg P)$ определимы в структуре $\widetilde{\mathbb{M}}$ посредством подходящих экзистенциальных формул сигнатуры $\{\eta, \zeta\}$.

Пусть $\mu_0(x)$ — экзистенциальная формула сигнатуры $\{\eta\}$, утверждающая, что $|[x]_\eta| \geqslant 8$. Тогда μ_0 определяет множество M_0 в структуре $\widetilde{\mathbb{M}}$, т.е. $M_0 = \mu_0^{\widetilde{\mathbb{M}}} = \{x \in M \mid \widetilde{\mathbb{M}} \models \mu_0(x)\}$. Пусть M_0/η — фактор-множество множества M_0 по отношению эквивалентности $\eta|_{M_0}$, индуцируемому отношением η на множестве M_0. Для отображения $a \mapsto \tilde{a} := \langle 0, \langle a, 0\rangle\rangle$ имеем $a = b \leftrightarrow \eta(\tilde{a}, \tilde{b})$, поэтому $a \mapsto [\tilde{a}]_\eta$ — биекция между ω и M_0/η.

Пусть $\pi(x, y)$ — экзистенциальная формула сигнатуры $\{\eta, \zeta\}$, утверждающая следующее:

$$\mu_0(x) \wedge \mu_0(y) \wedge \exists x' \in [x]_\eta \exists y' \in [y]_\eta (\zeta(x', y') \wedge |[x']_\zeta| \geqslant 8).$$

Проверим, что для любых $a, b \in \omega$ выполнено $\mathbb{M} \models P(a, b) \leftrightarrow \widetilde{\mathbb{M}} \models \pi(\tilde{a}, \tilde{b})$. Действительно, в случае $\mathbb{M} \models P(a, b)$ возьмем $x' = \langle 0, \langle a, b\rangle\rangle$ и $y' = \langle 0, \langle b, a\rangle\rangle$; тогда

$$[x']_\zeta = \{x', y', \langle i, \langle b, a\rangle\rangle, \langle i, \langle a, b\rangle\rangle \mid 1 \leqslant i \leqslant 3\}$$

и, следовательно, $\widetilde{\mathbb{M}} \models \pi(\tilde{a}, \tilde{b})$. Если $\mathbb{M} \models \neg P(a, b)$, то для любых $x' = \langle 0, \langle a, a'\rangle\rangle \in [\tilde{a}]_\eta$ и $y' = \langle 0, \langle b, b'\rangle\rangle \in [\tilde{b}]_\eta$ либо $\neg\zeta(x', y')$, либо $[x']_\zeta$ содержит не более 6 элементов и, следовательно, $\widetilde{\mathbb{M}} \models \neg\pi(\tilde{a}, \tilde{b})$.

Отметим также, что отношение $\eta|_{M_0}$ является конгруэнцией для отношения π и рассуждения предыдущего абзаца показывают, что $a \mapsto [\tilde{a}]_\eta$ есть изоморфизм структуры $\mathbb{M}$ на фактор-структуру структуры $(M_0; \pi^{\tilde{\mu}})$ по отношению η.

Пусть $\pi'(x, y)$ — экзистенциальная формула сигнатуры $\{\eta, \zeta\}$, утверждающая, что

$$\mu_0(x) \wedge \mu_0(y) \wedge \exists x' \in [x]_\eta \exists y' \in [y]_\eta \exists z \in [x']_\zeta (\eta(x', y') \wedge \neg\eta(z, x') \wedge \neg\eta(z, y') \wedge |[z]_\eta| \geqslant 2).$$

Тогда для любых $a, b \in \omega$ выполнено $\mathbb{M} \models \neg P(a, b) \leftrightarrow \widetilde{\mathbb{M}} \models \pi'(\tilde{a}, \tilde{b})$. Действительно, в случае $\mathbb{M} \models \neg P(a, b)$, определив x', y' как и выше, получим $\widetilde{\mathbb{M}} \models \pi'(\tilde{a}, \tilde{b})$. Обратно, пусть $\widetilde{\mathbb{M}} \models \pi'(\tilde{a}, \tilde{b})$ и предположим, рассуждая от противного, что $\mathbb{M} \models P(a, b)$, в частности $a \neq b$. Пусть x', y', z' — значения, делающие истинной формулу $\pi'(\tilde{a}, \tilde{b})$. Поскольку $\zeta(x', y')$, $x' = \langle 0, \langle a, b\rangle\rangle$, $y' = \langle 0, \langle b, a\rangle\rangle$, $\neg\zeta(z, x')$ и $\neg\zeta(z, y')$, то z совпадает с одним из $\langle i, \langle a, b\rangle\rangle$, $\langle i, \langle b, a\rangle\rangle$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant 3$. Пусть для определенности $z = \langle i, \langle a, b\rangle\rangle$. По определению η, $[z]_\eta = \{z\}$. Получили противоречие.

Как и выше, отношение $\eta|_{M_0}$ является конгруэнцией для отношения π', и рассуждения предыдущего абзаца показывают, что $a \mapsto [\tilde{a}]_\eta$ есть изоморфизм структуры $\mathbb{M}$ на фактор-структуру структуры $(M_0; \pi'^{\tilde{\mu}})$ по отношению η.

Остается проверить, что если структура $\widetilde{\mathbb{M}}$ вычислимо представима относительно оракула A, то структура $\mathbb{M}$ также вычислимо представима относительно A. Пусть $\mathbb{B} = (\omega; \eta^*, \zeta^*)$ — вычислимая относительно A структура, изоморфная $\widetilde{\mathbb{M}}$. Поскольку формула μ_0 экзистенциальна, бесконечное множество $\mu_0^{\mathbb{B}}$ вычислимо перечислимо относительно A. Пусть $g : \omega \to \mu_0^{\mathbb{B}}$ — A-вычислимая сюръекция. Определим отношение эквивалентности η_g на ω выражением $\eta_g(m, n) \leftrightarrow \eta^*(g(m), g(n))$, которое показывает, что η_g вычислимо относительно A. Значит, $T := \{min[x]_{\eta_g} \mid x < \omega\}$ — такое бесконечное A-вычислимое множество, что $\forall t, t' \in T(t = t' \leftrightarrow \eta_g(t, t'))$. Определим отношение P^* на T выражением $P^*(t, t') \leftrightarrow \mathbb{B} \models \pi^{\mathbb{B}}(t, t')$ (эквивалентно, $P^*(t, t') \leftrightarrow \mathbb{B} \models \pi'^{\mathbb{B}}(t, t')$). Поскольку формулы π и π' экзистенциальны и структура $\mathbb{B}$ вычислимо представима относительно A, структура $(T; P^*)$ вычислима относительно A. Согласно свойствам π и π^*, $(T; P^*)$ изоморфна структуре $\mathbb{M}$, т.е. $\mathbb{M}$ вычислимо представима относительно A. □

Пусть $\mathbb{M} = (M; \eta)$ — структура эквивалентности (т.е. η — отношение эквивалентности на M) и пусть $x \mapsto [x]_\eta$ — каноническая сюръекция из M на фактор-множество M/η. *Трансверсалью* структуры $\mathbb{M} = (M; \eta)$ называется любое подмножество $T \subseteq M$, пересечение которого с любым классом эквивалентности $[x]_\eta$ одноэлементно. Трансверсаль T задает единственную сюръекцию $t = t_T : M \to T$, обладающую свойством $\{t(x)\} = T \cap [x]_\eta$ для любого $x \in M$. Заметим, что $\forall x, y \in M(\eta(x, y) \leftrightarrow t(x) = t(y))$, $T = \{x \in M \mid t(x) = x\}$, и $\forall x, y \in T(\eta(x, y) \leftrightarrow x = y)$. В случае $M = \omega$ существует «каноническая» трансверсаль T_η, образованная наименьшими элементами классов эквивалентности. Соответствующую сюръекцию обозначим t_η, т.е. $t_\eta(x) = min[x]_\eta$, $x \in \omega$. Заметим, что $0 \in T_\eta$ и $t_\eta(0) = 0$. Если структура эквивалентности $(\omega; \eta)$ вычислима относительно A, то T_η и t_η также вычислимы относительно A.

Предложение 2.5 (О. В. Кудинов, В. Л. Селиванов (не опубликовано))**.** *Класс всех структур двух унарных функций спектрально универсален.*

Доказательство. По предыдущему предложению достаточно по любой структуре двух эквивалентностей $\mathbb{M} = (\omega; \eta, \zeta)$ построить такую структуру двух унарных функций $\widetilde{\mathbb{M}} = (M; f, g)$, что $Sp(\mathbb{M}) = Sp(\widetilde{\mathbb{M}})$.

Положим $M := (\{0\} \times \omega) \cup (\{1\} \times T_\eta) \cup (\{2\} \times T_\zeta)$ и определим $f, g : M \to M$ следующими соотношениями:

$$f(x) = \begin{cases} \langle 1, t_\eta(n)\rangle, & \text{если } x = \langle 0, n\rangle, \\ x, & \text{если } x \in \{1\} \times T_\eta, \\ \langle 0, 0\rangle, & \text{если } x \in \{2\} \times T_\zeta, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \langle 2, t_\zeta(n)\rangle, & \text{если } x = \langle 0, n\rangle, \\ x, & \text{если } x \in \{2\} \times T_\zeta, \\ \langle 0, 0\rangle, & \text{если } x \in \{1\} \times T_\eta. \end{cases}$$

Ясно, что если структура $\mathbb{M}$ вычислима относительно оракула A, то структура $\widetilde{\mathbb{M}}$ также вычислима относительно A, поэтому $Sp(\mathbb{M}) \subseteq Sp(\widetilde{\mathbb{M}})$. Для доказательства обратного включения заметим, что $\{x \in M \mid f(x) = x\} = \{1\} \times T_\eta$, $\{x \in M \mid g(x) = x\} = \{2\} \times T_\zeta$, и

$$\{x \in M \mid f(x) \neq x \wedge ff(x) = f(x)\} = \{0\} \times \omega = \{x \in M \mid g(x) \neq x \wedge gg(x) = g(x)\}.$$

Заметим также, что функция $n \mapsto \langle 0, n\rangle$ задает изоморфизм структуры $\mathbb{M}$ на структуру $(\{0\} \times \omega; H_f, H_g)$, где $H_f(\langle 0, m\rangle, \langle 0, n\rangle) \leftrightarrow f\langle 0, m\rangle = f\langle 0, n\rangle$ и $H_g(\langle 0, m\rangle, \langle 0, n\rangle) \leftrightarrow g\langle 0, m\rangle = g\langle 0, n\rangle$.

Далее, бескванторная формула $\mu(x) := f(x) \neq x \wedge ff(x) = f(x)$ определяет множество $\{0\} \times \omega$ в структуре $\widetilde{\mathbb{M}}$, а бескванторные формулы $\mu(x) \wedge \mu(y) \wedge f(x) = f(y)$ и $\mu(x) \wedge \mu(y) \wedge g(x) = g(y)$ определяют, соответственно, отношения H_f и H_g в структуре $\widetilde{\mathbb{M}}$. Таким образом, структура $\mathbb{M}$ определима бескванторными формулами в структуре $\widetilde{\mathbb{M}}$. Так же, как и в доказательстве предыдущего предложения, отсюда следует, что если $\widetilde{\mathbb{M}}$ вычислимо представима относительно A, то и $\mathbb{M}$ вычислимо представима относительно A. □

Отвечая в частной беседе на вопрос В. Л. Селиванова, П. Е. Алаев установил универсальность класса булевых алгебр с добавленным однометным предикатом. Приводимое доказательство также принадлежит П. Е. Алаеву и публикуется с его согласия.

Предложение 2.6 (П. Е. Алаев (не опубликовано))**.** *Класс всех булевых алгебр с добавленным одноместным предикатом спектрально универсален.*

Доказательство. Достаточно любому графу $\mathbb{G} = (\omega, E)$ без изолированных точек поставить в соответствие такие булеву алгебру $\mathbb{B}$ и одноместное отношение P на B, что $Sp(\mathbb{G}) = Sp(\mathbb{B}, P)$. Пусть $\mathbb{B}$ — «достаточно вычислимое» представление булевой алгебры $\mathfrak{B}_\omega$, порождённой порядком ω (см., например, [4]), в которой вычислимы множество атомов, идеал Фреше и функция, считающая число атомов под каждым элементом из идеала Фреше (для этого достаточно одной вычислимости атомов). Зафиксируем вычислимую биекцию $f : \mathrm{At}(\mathfrak{B}_\omega) \to \omega$ между множеством атомов $\mathfrak{B}_\omega$ и ω. Определим предикат P на B. Предикат $P(x)$ истинен тогда и только тогда, когда верно одно из следующих условий: x — атом; x — сумма двух атомов a, b и $E(f(a), f(b))$.

Из построения ясно, что $Sp(\mathbb{B}, P) \subseteq Sp(\mathbb{G})$. Для доказательства обратного включения опять достаточно определить структуру $\mathbb{G}$ в структуре $(\mathbb{B}, P)$ как экзистенциальными, так и универсальными формулами. В качестве отношения $D(x)$, определяющего носитель графа в $(\mathbb{B}, P)$, возьмем множество всех атомов $\mathrm{At}(\mathfrak{B}_\omega)$, а в качестве отношения $R(x, y)$, определяющего структуру графа, — множество $\{(x, y) \mid D(x), D(y), x \neq y \text{ и } P(x + y)\}$.

Остается заметить, что множество $D(x)$ определяется универсальной формулой $\forall y\ (y \leqslant x \to (y = 0 \vee y = x))$ и экзистенциальной формулой $P(x)\ \&\ \exists y\ (y > x\ \&\ P(y))$. □

Отметим, что если добавить к P нуль, то получим множество, замкнутое вниз. Это немного усиливает формулировку: класс булевых алгебр с добавленным замкнутым вниз подмножеством универсален. Отметим также, что класс булевых алгебр с конечным набором добавленных идеалов не универсален (П. Е. Алаев [25]), т.е. для обогащений булевых алгебр одноместными предикатами граница между универсальностью и неуниверсальностью спектра определена довольно точно.

3. Неуниверсальные классы структур

3.1. Линейные порядки. Несмотря на то, что алгоритмические свойства счетных линейных порядков исследованы достаточно подробно (см., например, обзорную работу [35]), примеров спектров и свойств спектров линейных порядков известно не много. Мы знаем, что линейные порядки не универсальны относительно спектра степеней. Это следует, например, из результатов Л. Рихтер [65], где показано, что спектр линейного порядка может образовывать верхний конус степеней только в тривиальном случае, когда спектр содержит вычислимую степень. Это, в частности, доказывает, что класс линейных порядков не является спектрально универсальным. Р. Доуни (см. [35]) поставил вопрос о существовании линейного порядка, спектр которого состоит в точности из всех ненулевых степеней. Это вопрос является основным вопросом в данной области и на данный момент времени остается открытым.

И. Ш. Калимуллин, О. В. Кудинов, Р. Миллер, А. Н. Фролов, В. С. Харизанова (см. [42]) построили для каждого $n \geqslant 2$ счетный линейный порядок, спектр которого состоит в точности из всех n-высоких степеней (на самом деле, показано, что для любого $n \geqslant 2$ и любой степени $\mathbf{x}$ существует линейный порядок, имеющий спектр $\{\mathbf{y} \mid \mathbf{y}^{(n)} \geqslant \mathbf{x}\}$). Из цитированной выше работы Л. Рихтер [65] следует, что не существует линейных порядков со спектром, состоящим в точности из всех 0-высоких степеней. Дж. Найт (см. [53]) показала, что также не существует линейного порядка со спектром, состоящим в точности из всех 1-высоких степеней. Таким образом, мы имеем исчерпывающий ответ на вопрос реализации для всех натуральных чисел n классов n-высоких степеней спектрами некоторых линейных порядков.

Также в [42] для каждого $n \geqslant 2$ построен счетный линейный порядок, спектр которого состоит в точности из всех степеней, не являющихся n-низкими (на самом деле, показано, что для любого $n \geqslant 2$ и любой степени $\mathbf{x}$ существует линейный порядок, имеющий спектр $\{\mathbf{y} \mid \mathbf{y}^{(n)} > \mathbf{x}\}$). Аналогичный результат при $n = 0$ дал бы положительный ответ на выше поставленный вопрос Р. Доуни. Однако нам даже не известен ответ для $n = 1$, именно, существует ли линейный порядок, спектр которого состоит в точности из всех не низких степеней.

Заметим, что линейный порядок, построенный в [42], является сильно η-схожим (т.е. размеры его блоков ограничены некоторым наперед заданным числом). Однако, как показал А. Н. Фролов (см. [20]; более простое доказательство позже было найдено М. В. Зубковым и А. Н. Фроловым [43]), каждый низкий сильно η-схожий линейный порядок имеет вычислимое представление и, следовательно, такие порядки не могут иметь спектр, содержащий в точности все не низкие степени, и, тем более, спектр, содержащий в точности все ненулевые степени. Естественно возникает вопрос об описании линейных порядков с аналогичным свойством. Этот вопрос (а по сути целая программа исследований) был поставлен Р. Доуни (см. [35]): описать порядковые свойства P такие, что для любого низкого линейного порядка L из выполнимости $P(L)$ следует существование вычислимого представления L.

Среди таких примеров линейных порядков, имеющих тривиальный спектр, можно выделить следующие. А. Н. Фролов (см. [21]) доказал, что каждый низкий линейный порядок, любой блок которого либо бесконечный, либо имеет мощность, не превосходящую некоторого наперед заданного числа k (такие порядки были названы k-квазидискретными), имеет вычислимое представление. Также А. Н. Фролов (см. [40]) показал, что если низкий линейный порядок, конденсация (т.е. фактор-порядок по отношению блока) которого есть η, не имеет сильно η-схожего интервала, то он имеет вычислимую копию. М. В. Зубков (см. [9]) доказал, что низкий η-схожий линейный порядок $\mathcal{L}$ имеет вычислимое представление, если размеры блоков $[x]_{\mathcal{L}}$ не превосходят некоторого наперед заданного числа, где x — такие элементы порядка (такие элементы называются левыми локальными максимумами), что

$$(\exists y)([y]_{\mathcal{L}} <_{\mathcal{L}} [x]_{\mathcal{L}} \ \& \ (\forall z)([y]_{\mathcal{L}} <_{\mathcal{L}} [z]_{\mathcal{L}} <_{\mathcal{L}} [x]_{\mathcal{L}} \Longrightarrow |[z]_{\mathcal{L}}| < |[x]_{\mathcal{L}}|)$$

и $[t]_{\mathcal{L}}$ обозначает максимальный блок, содержащий элемент t.

Из результатов для 2-низких порядков отметим работу П. Е. Алаева, Дж. Тёрбера и А. Н. Фролова [1], где показано, что каждый 2-низкий 1-квазидискретный линейный порядок вычислимо представим. А. Монталбан и А. Кэч (см. [50]) выдвинули гипотезу, что каждый 2-низкий разреженный линейный порядок имеет вычислимое представление (линейный порядок называется разреженным, если он не содержит плотного подпорядка). А. Н. Фролов (см. [41]) опроверг эту гипотезу, построив 2-низкий разреженный линейный порядок с нетривиальным спектром.

Первоначально, низкий линейный порядок с нетривиальным спектром был построен К. Джокушем и Р. Соаром (см. [49]). На самом деле, для любой ненулевой перечислимой степени $\mathbf{x}$ ими был построен $\mathbf{x}$-вычислимый линейный порядок, не имеющий вычислимого представления. Р. Доуни и Д. Ситапун (не опубликовано) заметили, что это же доказательство верно, если в качестве степени $\mathbf{x}$ взять произвольную ненулевую Δ^0_2-степень. В этом доказательстве строящийся $\mathbf{x}$-вычислимый линейный порядок зависит от степени $\mathbf{x}$. Р. Миллер (см. [59]) построил счетный линейный порядок с нетривиальным спектром, имеющий представления во всех ненулевых Δ^0_2-степенях. Дж. Чизхолм и Р. Доуни (не опубликовано) заметили, что этот порядок имеет представления во всех гипериммунных степенях.

Идеи теории спектров могут применяться в разных вариантах, что отражает богатые взаимосвязи между вычислимостью и теорией моделей. Упомянем один из таких вариантов, приводящий к новому типу результатов. В [59] Р. Миллер ввел понятие Δ^0_2-спектра, т.е. класса Δ^0_2-степеней представлений структуры. Другими словами, рассматривается класс $Sp^{\Delta^0_2}(L) = \{\deg_T(\widetilde{L}) \in \Delta^0_2 \mid \widetilde{L} \cong L\}$; здесь и ниже Δ^0_2 обозначает также класс Δ^0_2-степеней. Излагая в новых терминах, Р. Миллер (см. [59]) построил такой линейный порядок L, что $Sp^{\Delta^0_2}(L) = \Delta^0_2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Другими словами, существует линейный порядок, Δ^0_2-спектр которого состоит в точности из всех Δ^0_2-степеней, не являющихся 0-низкими.

Несмотря на то, что не известно, существует ли линейный порядок, спектр которого состоял бы в точности из всех степеней, не являющихся 1-низкими, и известно, что для $n = 0$ и $n = 1$ не существует линейного порядка, спектр которого состоял бы в точности из всех n-высоких степеней, А. Н. Фролов (см. [20]) показал, что существует линейный порядок, Δ^0_2-спектр которого состоит в точности из всех Δ^0_2-степеней, не являющихся 1-низкими; для $n = 0$ и $n = 1$ существует линейный порядок, Δ^0_2-спектр которого состоит в точности из всех n-высоких Δ^0_2-степеней.

3.2. Булевы алгебры. Несмотря на то, что каждая булева алгебра порождается некоторым линейным порядком, причем, если булева алгебра $\mathbf{x}$-вычислима, то линейный порядок можно выбрать также $\mathbf{x}$-вычислимым, свойства спектров булевых алгебр сильно отличаются от свойств линейных порядков. Однако, как будет показано ниже, класс булевых алгебр также, как и класс линейных порядков, не является спектрально универсальным.

В [38] Л. Фейнер построил Δ^0_2-вычислимую булеву алгебру, не имеющую вычислимой копии, т.е. с нетривиальным спектром. Анализ доказательства этого результата показал, что построенная Л. Фейнером булева алгебра не изоморфна никакой n-низкой булевой алгебре ни для какого натурального n. Естественно возникает вопрос, каждая ли n-низкая булева алгебра, для любого $n \in \omega$, имеет вычислимую копию. Постановку этого вопроса можно найти, например, в [54].

В общем случае ответ на этот вопрос пока неизвестен, однпко известны некоторые частичные ответы. В [37] Р. Доуни и К. Джокуш доказали, что каждая низкая булева алгебра имеет вычислимое представление, и, следовательно, класс булевых алгебр не является спектрально универсальным. Дж. Тербер (см. [70]) доказал то же самое для 2-низких булевых алгебр. Несмотря на правильность основной стратегии, в этой работе присутствовали некоторые неверные рассуждения, которые были корректно изложены в работе П. Е. Алаева, Дж. Тёрбера и А. Н. Фролова [1]. Лучший результат на данный момент получен Дж. Найт и М. Стобом (см. [54]). Они доказали, что не только любая 3-низкая, а даже любая 4-низкая булева алгебра имеет вычислимую копию и, следовательно, тривиальный спектр. В этой работе, в отличие от предыдущих, где конструкции строились на линейных порядках, порождающих булевы алгебры, авторы оперируют непосредственно с булевыми алгебрами и приводят некоторые общие рассуждения, которые, по мнению их авторов, могут привести к решению общей проблемы о вычислимой представимости произвольной n-низкой булевой алгебры для всех n, которая до сих пор остается открытой.

3.3. Другие классы структур. Как показано в [65], нетривиальные конусы степеней не реализуются как спектры линейных порядков и спектры деревьев. Рассмотрим обобщение этого свойства на так называемые размеченные леса.

Частичный порядок $(F; \leqslant)$ назовем *лесом*, если любой нижний конус $\hat{x} = \{y \mid y \leqslant x\}$, $x \in F$, линейно упорядочен отношением $\leqslant$. Для любого целого $k \geqslant 1$, под k-размеченным лесом понимаем тройку $\mathbb{F} = (F, \leqslant, c)$ где $(F, \leqslant)$ — лес, а $c : F \to \{0, \dots, k-1\}$ — разметка. Хотя формально такая тройка не выглядят как структура, ее легко переписать в виде структуры сигнатуры $\{\leqslant\}$, обогащенной несколькими одноместными предикатами. Пусть $\mathcal{F}_k$ — класс всех k-размеченных лесов, основные множества которых содержатся в ω.

Предложение 3.1. *Для любого целого $k \geqslant 1$ множество $Sp(\mathcal{F}_k)$ не содержит нетривиальных конусов степеней. Иными словами, если k-размеченный лес не является вычислимо представимыъм, то он не имеет степени.*

Доказательство. Поставим в соответствие любому $\mathbb{F} \in \mathcal{F}_k$ и любым $a_0, \ldots, a_n \in F$ множество $\mathcal{A}$ всех конечных k-размеченных лесов $\mathbb{H} \in \mathcal{F}_k$, расширяющих k-лес $\mathbb{A} = (\{a_0, \ldots, a_n\}, \leqslant, c|_A)$. Для $\mathbb{H}, \mathbb{H}' \in \mathcal{A}$ пусть запись $\mathbb{H} \preceq \mathbb{H}'$ означает, что существует вложение $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}'$, тождественное на A. Ясно, что предпорядок $(\mathcal{A}; \preceq)$ вычислимо представим. По теореме Крускала (см. [55]) этот предпорядок нётеров, т.е. не имеет бесконечных убывающих цепей и бесконечных антицепей.

Как известно (см., например, [65]), достаточно доказать, что существует алгоритм, определяющий по любому $\mathbb{H} \in \mathcal{A}$, существует ли вложение $\mathbb{H}$ в $\mathbb{F}$, тождественное на A. Иными словами, достаточно доказать, что множество $\mathcal{B} = \{\mathbb{H} \in \mathcal{A} \mid \mathbb{H} \npreceq \mathbb{F}\}$ вычислимо в структуре $(\mathcal{A}; \preceq)$. Если это множество пусто, доказывать нечего. Если оно не пусто, то по теореме Крускала существует такой конечный набор $\mathbb{H}_0, \ldots, \mathbb{H}_m \in \mathcal{B}$, что $\mathcal{B} = \{\mathbb{H} \in \mathcal{A} \mid \mathbb{H}_0 \preceq \mathbb{H} \vee \cdots \vee \mathbb{H}_m \preceq \mathbb{H}\}$. Последнее равенство показывает, что множество $\mathcal{B}$ вычислимо. $\square$

Открытый вопрос: какие из включений $Sp(\mathcal{F}_2) \subseteq Sp(\mathcal{F}_3) \subseteq \cdots$ являются собственными? Включение $Sp(\bigcup_k \mathcal{F}_k) \subset Sp(\mathcal{F}_\omega)$ — собственное, поскольку нетрудно доказать, что $Sp(\mathcal{F}_\omega)$ содержит все конусы степеней. Видимо, открытым является даже аналогичный вопрос о классах k-размеченных линейных порядков $\mathcal{L}_k$.

Интересный класс облазуют спектры структур эквивалентности. Методом работы [65] нетрудно показать, что нетривиальные конусы не реализуются как спектры структур эквивалентности, так что класс всех структур эквивалентности не универсален по спектру. По-видимому, спектры структур эквивалентности можно охарактеризовать в терминах предельных монотонно вычислимых функций (эта гипотеза возникла из обсуждений с О. В. Кудиновым).

4. Классы, универсальность которых не известна

4.1. Абелевы группы без кручения. Вопрос о спектральной универсальности класса абелевых групп без кручения является открытым. Если ограничиться лишь подгруппами аддидитвной группы рациональных чисел (в других терминах группы ранга 1), то из результата А. И. Мальцева (см. [17]) следует, что спектрами степеней таких подгрупп будут лишь е-конусы.

Теорема 4.1 (см. [17]). *Пусть $A \leqq \mathbb{Q}$ имеет характеристику $\chi = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$. В таком случае A имеет вычислимое представление относительно* **c** *тогда и только тогда, когда множество*

$$S_\chi = \{\langle i, k\rangle \mid \alpha_i \geqslant k \geqslant 0\}$$

перечислимо относительно **c**.

Здесь под характеристикой χ понимается такая последовательность $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$, состоящая из натуральных чисел и знаков бесконечности ∞, что для некоторого ненулевого элемента группы h

$$k \leqslant \alpha_i \iff p_i^k \text{ делит } h,$$

где p_i — i-е простое число.

Результат А. И. Мальцева был обобщен на абелевы группы без кручения конечного ранга (или, что эквивалентно, подгруппам конечных прямых степеней аддитивной группы рациональных чисел).

Теорема 4.2 (см. [32, 57]). *Абелева группа $\mathbb{G}$ без кручения ранга $n < \infty$ имеет вычислимое представление относительно* **c** *тогда и только тогда, когда относительно* **c** *перечислимо множество D элементов, принадлежащих фиксированной подгруппе $\mathbb{Q}^n$, изоморфной $\mathbb{G}$.*

Для случая групп бесконечного ранга, спектр степеней может быть более сложным.

Теорема 4.3 (см. [57]). *Существует абелева группа без кручения со спектром степеней, состоящим из всех не низких степеней.*

В дальнейшем данный результат был обобщен на низкие степени относительно других нечетных итераций скачка.

Теорема 4.4 (см. [26]). *Для любого вычислимого ординала β вида $\delta + 2n + 1 > 1$, где δ — предельный или нулевой ординал, существует абелева группа без кручения со спектром степеней, состоящим из всех не β-низких степеней.*

4.2. Периодические абелевы группы. Хорошо известно, что каждая периодическая абелева группа является прямой суммой своих максимальных p-подгрупп. В простых случаях данное разложение позволяет позволяет полностью описать спектр степеней исходной группы. В частности, в тех случаях, когда спектром служит e-конус, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.5 (см. [65]). *Группа $\bigoplus_{p\in D} \mathbb{Z}_p$ имеет $\mathbf{c}$-вычислимую копию тогда и только тогда, когда D перечислимо относительно $\mathbf{c}$.*

Используя данную техникуm можно также получить спектр вида $\{\mathbf{c} \mid D$ перечислимо в $\mathbf{c}^{(\alpha)}\}$ для вычислимого ординала α и множества D (см. [63]).

Однако в общем случае максимальные p-подгруппы могут быть устроены более сложно, даже если ограничиться случаем $\mathbb{G}_A = \bigoplus\limits_{n\in A} \mathbb{Z}_{p^n}$ при фиксированном простом p и произвольным множеством натуральных чисел A. Из результатов Н. Г. Хисамиева (см. [24]) следует, что спектр степеней $\mathbb{G}_A$ совпадает со спектром степеней структуры с одним отношением эквивалентности, образующим классы конечного размера $n \in A$. Такой спектр степеней связан с важным в теории вычислимых структур понятием предельной монотонности (см. [24, 29, 52]). В тривиальных случаях спектр группы $\mathbb{G}_A$ равен классу $\{\mathbf{c} \mid A$ перечислимо в $\mathbf{c}'\}$, но в одном нетривиальном случае спектр степеней группы $\mathbb{G}_A$ полностью не описан. Из частичных описаний можно привести следующий результат.

Теорема 4.6 (см. [51]). *Существует p-группа вида $G_A = \bigoplus\limits_{n\in A} \mathbb{Z}_{p^n}$, спектр степеней которой не содержит нулевую степень, но содержит все ненулевые степени $\mathbf{c} \leqslant \mathbf{0}'$.*

4.3. Дистрибутивные решетки. Мы рассматриваем решетки как структуры сигнатуры $L_0 = \{\vee^2, \wedge^2\}$. Согласно [47, теорема 3.3], класс решеток спектрально универсален. Однако построенные в доказательстве этой теоремы решетки не дистрибутивны. В настоящее время не известно, является ли класс дистрибутивных решеток спектрально универсальным, и об этом вопросе до недавнего времени было известно не много. В. Л. Селиванов (см. [19]) исследовал вычислимо перечислимые дистрибутивные решетки. А. Турлингтон (см. [71]) доказала, что для любой тьюринговой степени $\mathbf{d}$ существует счетная дистрибутивная решетка со спектром степеней $\{\mathbf{c} \mid \mathbf{c} \geqslant \mathbf{d}\}$.

Серьезный прогресс был достигнут в [2], где установлен, в частности, следующий результат.

Теорема 4.7 (см. [2]). *Существует счетная дистрибутивная решетка, спектр степеней которой состоит в точности из невычислимых тьюринговых степеней.*

На самом деле в [2] установлен более общий результат, позволяющий кодировать любое семейство конечных множеств в дистрибутивные решетки. Для доказательства теоремы 4.7 остается использовать упомянутый в разделе 1.2 результат С. Вехнера (см. [72]). Отметим, что вопрос о существовании линейного порядка с таким спектром степеней до сих пор открыт.

4.4. Частичные порядки ограниченной ширины. Из [47, теорема 3.3] следует, что класс всех частичных порядков универсален по спектру. Более того, доказательство автоматически дает универсальность класса всех частичных порядков высоты 3 (т.е. порядков, не имеющих цепей размера 4). Доказательство существенно испльзует наличие бесконечной антицепи в строящихся частичных порядках.

Соответственно, открыт вопрос об универсальности класса $\mathcal{P}_\omega$ всех частичных порядков, не имеющих бесконечных антицепей. Интересен также вопрос о классах $\mathcal{P}_k$, $k \geqslant 1$, частичных порядков ширины k, т.е. порядков, не имеющих антицепей размера $k+1$. Таким образом, $\mathcal{P}_1$ совпадает с классом линейных порядков, $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots$ и $\Big(\bigcup\limits_{k<\omega} \mathcal{P}_k\Big) \subset \mathcal{P}_\omega$. Насколько нам известно, уже для класса $\mathcal{P}_2$ вопрос об универсальности спектра открыт. Если этот класс не универсален, интересными и глубокими представляются вопросы о собственности включений $Sp(\mathcal{P}_2) \subseteq Sp(\mathcal{P}_3) \subseteq \cdots$ и $Sp\Big(\bigcup\limits_{k<\omega} \mathcal{P}_k\Big) \subseteq Sp(\mathcal{P}_\omega)$.

В качестве модельного результата в этом направлении приведем следующий факт, являющийся упрощенной версией соответствующего результата о дистрибутивных решетках ширины 2 (см. [19]).

Предложение 4.8. *Любой конус степеней является спектром подходящего частичного порядка ширины* 2.

Доказательство. Надо поставить в соответствие любому $D \subseteq \omega$ такой частичный порядок $\mathbb{P} = (P; \leqslant)$ ширины 2, что $Sp(\mathbb{P}) = \check{\mathbf{d}}$, где $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень множества D.

Пусть Q — дизъюнктное объединение таких бесконечных вычислимых множеств $A = \{a_0 < a_1 < \cdots\}$ и $B = \{b_0 < b_1 < \cdots\}$, что множество $\omega \setminus (A \cup B) = \{c_0 < c_1 < \cdots\}$ также бесконечно. Пусть $\preceq$ — наименьший частичный порядок на Q, совпадающий на A и B с естественным порядком $<$, и имеющий также следующие «перекрестные» отношения между элементами множеств A и B: $a_n \preceq b_{n+1}$ и $b_n \preceq a_{n+2}$, $n \geqslant 0$.

Легко видеть, что порядок $(Q; \preceq)$ вычислим и для элементов $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ справедливы следующие соотношения:

(i) a_1 — единственный элемент, больший a_0 и не сравнимый с b_0,
(ii) b_1 — единственный элемент, больший a_0, b_0 и не сравнимый с a_1,
(iii) a_2 — единственный элемент, больший a_1, b_0 и не сравнимый с b_1,
(iv) b_2 — единственный элемент, больший a_1, b_1 и не сравнимый с a_2, и т. д.

Отсюда по индукции легко строится такая вычислимая последовательность экзистенциальных формул $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots$ с параметрами a_0, b_0 и одной свободной переменной, что α_n, β_n определяют соответственно элементы a_n, b_n, $n \geqslant 1$, в структуре $(Q; \preceq)$.

Достроим теперь порядок $(Q; \preceq)$ до искомого порядка $\mathbb{P}$ следующим образом:

$$P = Q \cup \{c_{2n+1} \mid n \in D\} \cup \{c_{2n+2} \mid n \notin D\},$$

и пусть $\preceq$ — наименьший порядок на P, совпадающий с $\preceq$ на Q и такой, что $a_{2n+1} \preceq c_{2n+1} \preceq a_{2n+2}$ и $a_{2n+2} \preceq c_{2n+2} \preceq a_{2n+3}$.

Ясно, что $\mathbb{P}$ — вычислимый относительно D порядок ширины 2, т.е. $\check{\mathbf{d}} \subseteq Sp(\mathbb{P})$. Остается проверить, что $Sp(\mathbb{P}) \subseteq \check{\mathbf{d}}$. Пусть $\mathbf{e} \in Sp(\mathbb{P})$, т.е. $\mathbb{P}$ вычислим относительно $E \in \mathbf{e}$; надо доказать, что $D \leqslant_T E$, т.е. D и $\omega \setminus D$ вычислимо перечислимы относительно E. Пусть $f : \mathbb{P} \to \mathbb{S} = (\omega; \sqsubseteq)$ — изоморфизм между $\mathbb{P}$ и порядком $\sqsubseteq$ на ω, вычислимым относительно E. Пусть $\alpha_{2n+1}(\mathbb{S})$ — множество, определяемое в структуре $\mathbb{S}$ формулой α_{2n+1} с параметрами $f(a_0)$, $f(b_0)$. Поскольку эти формулы экзистенциальны и последовательность $\{\alpha_{n+1}\}$ вычислима, последовательность $\{\alpha_{n+1}(\mathbb{S})\}$ равномерно вычислимо перечислима относительно E. По построению $\mathbb{P}$, для любого n имеем: если $n \in D$, то $|\alpha_{2n+1}(\mathbb{S})| = 2$ и $|\alpha_{2n+1}(\mathbb{S})| = 1$, иначе $|\alpha_{2n+1}(\mathbb{S})| = 1$ и $|\alpha_{2n+1}(\mathbb{S})| = 2$. Итак, множества D, $\omega \setminus D$ вычислимо перечислимы относительно E. $\square$

4.5. Структуры двух линейных порядков. Следующее естественное обобщение линейных порядков — это структуры двух линейных порядков, т.е. структуры вида $\mathcal{L}(A) = (L; <_{L_1}, <_{L_2})$, где $(L; <_{L_1})$ и $(L; <_{L_2})$ — линейные порядки. Такие структуры впервые рассматривались в диссертации Х. Роджерса (см. также ссылки в [8]).

К сожалению, мы пока не можем установить спектральную универсальность таких структур. Однако, в такие структуры легко кодируются семейства множеств с сохранением спектра и, следовательно, существуют структуры двух линейных порядков, спектры которых образуют конусы или состоят в точности из всех ненулевых степеней.

Теорема 4.9. *Для любого семейства множеств существует структура двух линейных порядков, имеющая тот же спектр.*

Доказательство. Для начала построим по произвольному множеству A структуру с двумя линейными порядками $\mathcal{L}(A) = (L, <_{L_1}, <_{L_2})$ таким образом, чтобы спектр $\mathcal{L}(A)$ представлял собой верхний конус степеней с вершиной в $\deg_T(A)$. Строим два порядка L_1 и L_2 так, чтобы они были оба упорядочены по типу натуральных чисел ω, следующим образом:

$$L_1 : x_0 <_{L_1} a_0 <_{L_1} x_1 <_{L_1} b_0 <_{L_1} a_1 <_{L_1} x_2 <_{L_1} b_1 <_{L_1} \cdots ,$$
$$L_2 : a'_0 <_{L_2} b'_0 <_{L_2} x_0 <_{L_2} a'_1 <_{L_2} b'_1 <_{L_2} x_1 <_{L_2} \cdots ,$$

где $a'_n = a_n$, $b'_n = b_n$ при $n \notin A$, и $a'_n = b_n$, $b'_n = a_n$ при $n \in A$.

Очевидно, что структура $\mathcal{L}(A)$ является A-вычислимой и, следовательно, имеет представление в любой степени $\mathbf{x} \leqslant \deg_T(A)$. Докажем обратное: если существует X-вычислимое представление $\mathcal{R} \cong \mathcal{L}(A)$, то $A \leqslant_T X$. Пусть $\mathcal{R} = (R, <_{R_1}, <_{R_2})$. Зафиксируем оракул X.

Пусть для любого i элементы x'_i, a'_i и b'_i из $\mathcal{R}$ — образы элементов x_i, a_i и b_i из $L(A)$, соответственно. Зафиксируем элемент x'_0. Существует единственная тройка таких элементов $t_1 <_{R_1} t_2 <_{R_1} t_3$, лежащих правее элемента x'_0 в R_1, что t_1 и t_3 расположены левее элемента x'_0 в R_2 (могут быть переставлены в R_2, но оба расположены левее элемента x'_0) и элемент t_2 лежит между элементами t_1 и t_3 в R_1 (такой элемент t_2 единствен). Эта тройка элементов может быть только $t_1 = a'_0$, $t_2 = x'_1$ и $t_3 = b'_0$. Найдем эти элементы. Имеем, что $a'_0 <_{R_2} b'_0$ тогда и только тогда, когда $0 \notin A$.

Найденный элемент x'_1 используется для нахождения элементов a'_1, x'_2 и b'_1 аналогичным образом. А именно, существует единственная тройка таких элементов $t'_1 <_{R_1} t'_2 <_{R_1} t'_3$, лежащих правее элемента x'_1 в R_1, что t'_1 и t'_3 расположены левее элемента x'_1 в R_2 и элемент t'_2 лежит между элементами t'_1 и t'_3 в R_1. Эта тройка элементов может быть только $t'_1 = a'_1$, $t'_2 = x'_2$ и $t'_3 = b'_1$. Найдем эти элементы. Имеем, что $a'_1 <_{R_2} b'_1$ тогда и только тогда, когда $1 \notin A$.

Эту процедуру можно продолжить до бесконечности и, тем самым, зная элемент x'_0, эффективно определить все элементы a'_i, b'_i и x'_i для всех i. При этом для любого n имеем $a'_n <_{L_2} b'_n$ тогда и только тогда, когда $n \notin A$. Таким образом, $A \leqslant_T X$.

Заметим, что для любого фиксированного элемента t выполнено $|\{t' \mid t <_{L_1} t' \;\&\; t' <_{L_2} t\}| \leqslant 3$. Поэтому если изменить $\mathcal{L}(A)$, добавив единственный набор элементов $z_1 <_{L_1} z_2 <_{L_1} z_3 <_{L_1} z_4 <_{L_1} z_5$, обладающий свойством $z_5 <_{L_2} z_4 <_{L_2} z_3 <_{L_2} z_2 <_{L_2} z_1$, то, во-первых, этот набор можно в любом представлении $\mathcal{L}(A)$ эффективно найти и зафиксировать, а, во-вторых, это изменение никак не повлияет на описанную выше процедуру (ибо после того, как такие элементы найдены и зафиксированы, они могут быть исключены из рассмотрения и поиска в процедуре выше). Добавим эти элементы с описанным выше взаимным расположением следующим образом:

$$L_1 : z_1 <_{L_1} z_2 <_{L_1} z_3 <_{L_1} z_4 <_{L_1} t_0 <_{L_1} x_0 <_{L_1} z_5 <_{L_1} a_0 <_{L_1} x_1 <_{L_1} b_0 <_{L_1} a_1 <_{L_1} x_2 <_{L_1} \cdots ,$$
$$L_2 : z_5 <_{L_2} z_4 <_{L_2} z_3 <_{L_2} z_2 <_{L_2} t_0 <_{L_2} a'_0 <_{L_2} b'_0 <_{L_2} x_0 <_{L_2} z_1 <_{L_2} a'_1 <_{L_2} b'_1 <_{L_2} x_1 <_{L_2} \cdots ,$$

где так же, как и в описании выше, $a'_n = a_n$, $b'_n = b_n$, если $n \notin A$, и $a'_n = b_n$, $b'_n = a_n$, если $n \in A$. Теперь элемент x_0 не является заранее фиксированным, а может быть найден эффективно (об этом подробнее ниже). Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения выше. Пусть теперь $\mathcal{L}(A)$ обозначает новую структуру, расширенную элементами z_1, z_2, z_3, z_4 и z_5.

Далее, пусть дано некоторое X-перечисление семейство $\{A_i\}$ множеств и пусть $\mathcal{L} = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mathcal{L}(A_{f(q)})$ (здесь оба линейных порядка L_1 и L_2 одновременно суммируются по обычному правилу суммы линейных порядков), где $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ — такая вычислимая функция, что для всех $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ и $k \in \mathbb{N}$ из $q_1 <_{\mathbb{Q}} q_2$ следует $k = f(q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}$, что $q_1 <_{\mathbb{Q}} q <_{\mathbb{Q}} q_2$[1]. Ясно, что $\mathcal{L}$ является X-вычислимым.

Теперь пусть дано X-вычислимое представление $\mathcal{L}$. Найдем в нем каждую семерку элементов, удовлетворяющей следующим условиям:

$$f_1 <_{L_1} f_2 <_{L_1} f_3 <_{L_1} f_4 <_{L_1} r_1 <_{L_1} r_2 <_{L_1} f_5 \quad \text{такая, что}$$
$$f_5 <_{L_2} f_4 <_{L_2} f_3 <_{L_2} f_2 <_{L_2} r_1 <_{L_2} r_2 <_{L_2} f_1.$$

Это возможно, только если $f_i = z_i$ при $i \in \{1, \ldots, 5\}$ и $r_1 = t_0$ и $r_2 = x_0$, где z_i, r_1 и r_1 соответствуют некоторому $\mathcal{L}(A_i)$. Следовательно, элемент x_0 может быть найден эффективно. Повторяя рассуждения, мы можем вычислить множество A_i. Таким образом, зная оракул X, мы можем перечислить семейство $\{A_i\}$; следовательно, их спектры совпадают. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алаев П. Е., Тёрбер Дж., Фролов А. Н.* Вычислимость на линейных порядках, обогащённых предикатами// Алгебра и логика. — 2009. — *48.* — С. 549–563.
2. *Баженов Н. А., Фролов А. Н., Калимуллин И. Ш., Мельников А. Г.* Вычислимость дистрибутивных решеток// Сиб. мат. ж. — 2017. — *58.* — С. 1236–1251.
3. *Барвайс Дж.* Справочная книга по математической логике. Ч. I. Теория моделей. — М.: Наука, 1982.
4. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. — Новосибирск: Научная книга, 1996.
5. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
6. *Гончаров С. С., Дзгоев В. Д.* Автоустойчивость моделей// Алгебра и логика. — 1980. — *19*, № 1. — С. 45–58.
7. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980.
8. *Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А.* Элементарные теории// Усп. мат. наук. — 1965. — *20.* — С. 37–108.
9. *Зубков М. В.* Достаточные условия существования $\mathbf{0}'$-предельно монотонных функций для вычислимых η-схожих линейных порядков// Сиб. мат. ж. — 2017. — *58.* — С. 107–121.
10. *Калимуллин И. Ш.* Спектры степеней некоторых алгебраических структур// Алгебра и логика. — 2007. — *46.* — С. 729–744.
11. *Калимуллин И. Ш.* Почти вычислимо перечислимые семейства множеств// Мат. сб. — 2008. — *199.* — С. 33–40.
12. *Калимуллин И. Ш., Файзрахманов М. Х.* О степенях перечислений счетных семейств вехнеровского типа// Итоги науки техн. Совр. Мат. прилож. Тематич. обзоры. — 2018. — *157.* — С. 59–69.
13. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. — М.: Мир, 1977.
14. *Когабаев Н. Т.* Теория проективных плоскостей полна относительно спектров степеней и эффективных размерностей// Алгебра и логика. — 2015. — *54.* — С. 599–627.
15. *Коровина М. В., Кудинов О. В.* Спектр поля вычислимых действительных чисел// Алгебра и логика. — 2016. — *55.* — С. 738–759.
16. *Мак-Кой Ч. Ф. Д.* О Δ^0_3-категоричности для линейных порядков и булевых алгебр// Алгебра и логика. — 2002. — *41*, № 5. — С. 531–552.
17. *Мальцев А. И.* О рекурсивных абелевых группах// Докл. АН СССР. — 1962ю — *146.* — С. 1009–1012.
18. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972.
19. *Селиванов В. Л.* Об алгоритмической сложности алгебраических систем// Мат. заметки. — 1988. — *44*, № 6. — С. 823–832.
20. *Фролов А. Н.* Δ^0_2-копии линейных порядков// Алгебра и логика. — 2006. — *45*, № 3. — С. 354–370.
21. *Фролов А. Н.* Линейные порядки низкой степени// Сиб. мат. ж. — 2010. — *51*, № 5. — С. 1147–1162.
22. *Фролов А. Н.* Заметка о Δ^0_2-спектрах линейных порядков и спектрах отношения соседства на них// Изв. вузов. Мат. — 2013. — *57*, № 11. — С. 74–78.
23. *Фролов А. Н.* Эффективная категоричность вычислимых линейных порядков// Алгебра и логика. — 2015. — *54*, № 5. — С. 638–642.

[1]Такие суммы в литературе называются перемешанными.

24. *Хисамиев Н. Г.* Критерий конструктивизируемости прямой суммы циклических p-групп// Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-мат. — 1981. — № 1. — С. 51–55.
25. *Alaev P. E.* Computably categorical Boolean algebras enriched by ideals and atoms// Ann. Pure Appl. Logic. — 2012. — *163.* — С. 485–499.
26. *Andersen B., Kach A., Melnikov A., Solomon R.* Jump degrees of torsion-free abelian groups// J. Symb. Logic. — 2012. — *77.* — С. 1067–1100.
27. *Andrews U., Cai M., Kalimullin I., Lempp S., Miller J., Montalbán A.* The complements of lower cones of degrees and the degree spectra of structures// J. Symb. Logic. — 2016. — *81.* — С. 997–1006.
28. *Ash C. J.* Recursive labelling systems and stability of recursive structures in hyperarithmetical degrees// Trans. Am. Math. Soc. — 1986. — *298*, № 2. — С. 497–514.
29. *Ash C., Knight J., Oates S.* Recursive abelian p-groups of small length/ не опубликовано.
30. *Ash C., Knight J., Manasse M., Slaman T.* Generic copies of countable structures// Ann. Pure Appl. Logic. — 1989. — *42.* — С. 195–205.
31. *Bazhenov N. A.* Effective categoricity for distributive lattices and Heyting algebras// Lobachevskii J. Math. — 2017. — *38*, № 4. — С. 600–614.
32. *Calvert W., Harizanov V., Shlapentokh A.* Turing degrees of isomorphism types of algebraic objects// J. London Math. Soc. — 2017. — *75.* — С. 273–286.
33. *Csima B. F., Kalimullin I. S.* Degree spectra and immunity properties// Math. Log. Q. — 2010. — *56.* — С. 67–77.
34. *Greenberg N., Montalban A., Slaman T. A.* Relative to any non-hyperarithmetic set// J. Math. Log. — 2013. — *13*, № 1. — Article ID 1250007.
35. *Downey R. G.* Computability theory and linear orderings// в сб.: *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B.* (eds.). Handbook of Recursive Mathematics. Vol. 2/ Stud. Logic Found. Math. — Amsterdam: Elsevier, 1998. — *139.* — С. 823–976.
36. *Downey R., Greenberg N., Miller J. S.* Generic Muchnik reducibility and presentations of fields// Isr. J. Math. — 2016. — *216*, № 1. — С. 371–387.
37. *Downey R. G., Jockusch C. G.* Every low Boolean algebra is isomorphic to a recursive one// Proc. Am. Math. Soc. — 1994. — *122.* — С. 871–880.
38. *Feiner L. J.* Hierarchies of Boolean algebras// J. Symb. Logic. — 1970. — *35.* — С. 365–373.
39. *Fokina E. B., Friedman S. D.* Equivalence relations on classes of computable structures// в сб.: *Ambos-Spies K., Löwe B., Merkle W.* (eds.). Mathematical Theory and Computational Practice/ Lect. Notes Comp. Sci. — Berlin: Springer-Verlg, 2009. — *5635.* — С. 198–207.
40. *Frolov A. N.* Low linear orderings// J. Log. Comput. — 2012. — *22*, № 4. — С. 745–754.
41. *Frolov A.* Scattered linear orderings with no computable presentation// Lobachevskii J. Math. — 2014. — *35.* — С. 19–22.
42. *Frolov A., Harizanov V., Kalimullin I., Kudinov O., Miller R.* Spectra of high$_n$ and non-low$_n$ degrees// J. Log. Comput. — 2012. — *22*, № 4. — С. 755–777.
43. *Frolov A. N., Zubkov M. V.* Increasing η-representable degrees// Math. Log. Q. — 2009. — *55.* — С. 633–636.
44. *Goncharov S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R.* Enumerations in computable structure theory// Ann. Pure Appl. Logic. — 2005. — *136.* — С. 219–246.
45. *Diamondstone D., Greenberg N., Turetsky D.* Natural large degree spectra// Computability. — 2013. — *2.* — С. 1–8.
46. *Harrison-Trainor M., Melnikov A., Miller R., Montálban A.* Computable functors and effective interpretability// J. Symb. Logic. — 2017. — *82*, № 1. — С. 77–97.
47. *Hirschfeldt D. R., Khoussainov B., Shore R. A., Slinko A. M.* Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures// Ann. Pure Appl. Logic. — 2002. — *115.* — С. 71–113.
48. *Jockusch C. G.* Degrees in which the recursive sets are uniformly recursive// Can. J. Math. — 1972. — *24.* — С. 1092–1099.
49. *Jockusch C. G., Soare R. I.* Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings// Ann. Pure Appl. Logic. — 1991. — *52.* — С. 39–61.
50. *Kach A., Montalbán A.* Cuts of linear orders// Order. — 2011. — *28.* — С. 593–600.
51. *Kalimullin I., Khoussainov B., Melnikov A.* Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures// Proc. Am. Math. Soc. — 2013. — *141.* — С. 3275–3289.

52. *Khoussainov B., Nies A., Shore R.* Computable models of theories with few models// Notre Dame J. Formal Logic. — 1997. — *38*. — С. 165–178.
53. *Knight J. F.* Degrees coded in jumps of orderings// J. Symb. Logic. — 1986. — *51*, № 4. — С. 1034–1042.
54. *Knight J. F., Stob M.* Computable Boolean algebras// J. Symb. Logic. — 2000. — *65*, № 4. — С. 1605–1623.
55. *Kruskal J. B.* The theory of well-quasi-ordering: a frequently discovered concept// J. Comb. Theory. Ser. A. — 1972. — *13*. — С. 297–305.
56. *McCoy C. F. D.* Δ^0_2-Categoricity in Boolean algebras and linear orderings// Ann. Pure Appl. Logic. — 2003. — *119*. — С. 85–120.
57. *Melnikov A.* Enumerations and completely decomposable torsion-free abelian groups// Th. Comput. Syst. — 2009. — *45*. — С. 897–916.
58. *Melnikov A. G.* New degree spectra of abelian groups// Notre Dame J. Formal Logic. — 2017. — *58*, № 4. — С. 507–525.
59. *Miller R.* The Δ^0_2-spectrum of a linear order// J. Symb. Logic. — 2001. — *66*, № 2. — С. 470–486.
60. *Miller R., Poonen B., Schoutens H., Shlapentokh A.* A computable functor from graphs to fields// J. Symb. Logic. — 2018. — *83*, № 1. — С. 326–348.
61. *Miller R., Gonzalez V. O.* Degree spectra of real closed fields// в печати.
62. *Montálban A.* Computability theoretic classifications for classes of structures// Proc. Int. Congr. Math. (ICM 2014), Seoul, Korea, August 13–21, 2014. Vol. II. Seoul, 2014. — С. 79–101.
63. *Oates S.* Jump degrees of groups/ Ph.D. Thesis. — Univ. Notre Dame, 1989.
64. *Remmel J. B.* Recursively categorical linear orderings// Proc. Am. Math. Soc. — 1981. — *83*, № 2. — С. 387–391.
65. *Richter L. J.* Degrees of structures// J. Symb. Logic. — 1981. — *46*, № 4. — С. 723–731.
66. *Simpson S. G.* Degrees of unsolvability: a tutorial// Proc. CiE-2015/ Lect. Notes Comp. Sci. — Berlin: Springer-Verlag, 2015. — *9136*. — С. 83–94.
67. *Slaman T. A.* Relative to any nonrecursive set// Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — *126*, № 7. — С. 2117–2122.
68. *Soare R. I.* Recursively Enumerable Sets and Ddegrees. — Berlin: Springer-Verlag, 1987.
69. *Tarski A., Mostowski A., Robinson J.* Undecidable Theories. — Amsterdam: North-Holland, 1953.
70. *Thurber J. J.* Every low_2 Boolean algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1995. — *123*. — С. 3859–3866.
71. *Turlington A.* Computability of Heyting algebras and distributive lattices/ Ph.D. Thesis. — Univ. of Connecticut, 2010.
72. *Wehner S.* Enumerations, countable structures and Turing degrees// Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — *126*, № 7. — С. 2131–2139.

И. Ш. Калимуллин
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: `ikalimul@gmail.com`

В. Л. Селиванов
Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН, Новосибирск;
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: `vseliv@iis.nsk.su`

А. Н. Фролов
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: `a.frolov.kpfu@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 158 (2018). С. 40–80

УДК 512.5

ПОДКОЛЬЦА ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ ДЕЙСТВИЙ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР ХОПФА

© 2018 г. **С. М. СКРЯБИН**

Аннотация. Настоящая статья представляет собой обзор новых работ по инвариантам действий алгебр Хопфа. Наиболее яркими достижениями явились результаты о целой зависимости H-модульных PI алгебр над подкольцами инвариантных элементов, полученные П. Этингофом и М. Еряшкиным. Также дан обзор более старых результатов.

***Ключевые слова*:** алгебра Хопфа, H-модульная алгебра, инвариант.

***AMS Subject Classification*:** 16T05

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Классическая теория инвариантов в преддверии XX века рассматривала конечную порождаемость инвариантов как ключевую проблему. Первоначально в поле зрения были только действия групп на кольцах многочленов от нескольких переменных. В случае конечной группы конструктивный подход Эмми Нётер через резольвенты Галуа давал определённые заключения также в более абстрактной ситуации. Он показал, что любое коммутативное кольцо цело над подкольцом инвариантов относительно конечной группы автоморфизмов. Для конечно порождённой коммутативной алгебры над полем целая зависимость над подалгеброй эквивалентна конечности как модуля над этой подалгеброй, в то время как конечная порождённость подалгебры является следствием этих свойств. Это делает целую зависимость и конечную порождаемость как модуля особенно важными в изучении инвариантов.

Гротендик и его школа совершили переход от действий групп к действиям групповых схем. Как оказалось, имеются общие результаты об инвариантах, составляющие неотъемлемую часть конструкции факторов по конечным групповым схемам. Эти результаты могут интерпретироваться в терминах кодействий коммутативных алгебр Хопфа или, двойственным образом, в терминах действий кокоммутативных алгебр Хопфа.

В ином духе многие внесли вклад в изучение действий групп и алгебр Ли, а также градуировок группами, на некоммутативных кольцах. Работа над действиями алгебр Хопфа, начатая в 1980-е годы, имела целью объединить известные ранее результаты в тех областях. Несмотря на прогресс в этих исследованиях, в ряде вопросов обнаружились значительные трудности. Даже сейчас уровень знаний в общем случае действий алгебр Хопфа не достиг уровня, зафиксированного в манускрипте Сьюзен Монтгомери 1980 г. о кольцах неподвижных элементов конечных групп автоморфизмов ассоциативных колец (см. [39]).

Настоящая статья намечена, главным образом, как обзор новых работ по инвариантам действий алгебр Хопфа. Наиболее яркими достижениями явились результаты о целой зависимости H-модульных PI алгебр над центральными инвариантами, полученные независимо Этингофом (см. [27]) и Еряшкиным (см. [5]). Имеется другое понятие целой зависимости, пригодное для расширений некоммутативных колец, которое было введено Шельтером (см. [48]). Еряшкин также доказал, что произвольная H-модульная PI алгебра цела в смысле Шельтера над подкольцом всех инвариантов, когда алгебра Хопфа H полупроста и кополупроста (см. [6]), тем самым ответив на вопрос Монтгомери (см. [40]) в PI случае.

Другие недавние результаты об инвариантах представлены в двух статьях самого автора. В [54] было доказано, что для заданной полупростой алгебры Хопфа H все ненулевые устойчивые относительно действия H односторонние идеалы любой нётеровой H-полупервичной H-модульной алгебры A содержат ненулевые инварианты, и классическое кольцо частных алгебры A получается локализацией относительно множества Оре инвариантных регулярных элементов. Будет показано, что эти заключения верны, даже когда A не является нётеровой, при условии, что A имеет артиново классическое кольцо частных. Ещё одна статья [56] ответила на вопрос Бергена, Коэн и Фишман (см. [11]) о равенстве левой и правой размерностей тела над подтелом инвариантов. Будет также дан обзор более старых результатов.

В этой статье будут рассматриваться только конечномерные алгебры Хопфа над полем. Однако нужно отметить, что многие обсуждаемые здесь результаты могут быть сформулированы более общим образом, когда произвольное коммутативное кольцо взято в качестве базового кольца и алгебры Хопфа — конечно порождённые проективные модули. На самом деле такими были исходные данные для нескольких первоисточников.

1. Терминология и обозначения

Во всей статье под H понимается конечномерная алгебра Хопфа над полем $\Bbbk$. Обозначим через Δ, ε, S коумножение, коединицу и антипод либо в H, либо в двойственной алгебре Хопфа H^*, в зависимости от контекста. За общей информацией об алгебрах Хопфа и их действиях на кольцах читатель отсылается к [1, 40] и другим книгам.

Вспомним, что категории H-модулей и H-комодулей моноидальны. Если V и W — два (левых) H-модуля, то $V \otimes W$ является $H \otimes H$-модулем, и H действует на $V \otimes W$ через $\Delta : H \to H \otimes H$. Если V и W — два (правых) H-комодуля, то $V \otimes W$ является $H \otimes H$-комодулем, и кодействие H получается посредством отображения $H \otimes H \to H$, $a \otimes b \mapsto ab$. Здесь и в дальнейшем $\otimes$ подразумевает $\otimes_{\Bbbk}$, если базовое кольцо для тензорного произведения не указано явно.

Все алгебры и кольца предполагаются ассоциативными и с единицами. *H-Модульная алгебра* — это $\Bbbk$-алгебра A, наделённая такой структурой левого H-модуля, что отображение умножения $A \otimes A \to A$ является H-линейным, в предположении, что H действует на $A \otimes A$ через Δ. Если это условие удовлетворено, то H действует тривиально на образе поля $\Bbbk$ в A, так что $h1_A = \varepsilon(h)1_A$ для всех $h \in H$, где 1_A — единица алгебры A (см. [17, Lemma 1.9]).

H-Инвариантные элементы H-модульной алгебры A образуют подалгебру

$$A^H = \{a \in A \mid ha = \varepsilon(h)a \quad \text{для всех } h \in H\}.$$

H-Комодульная алгебра — это $\Bbbk$-алгебра A, наделённая такой структурой правого H-комодуля, что отображение умножения $A \otimes A \to A$ является гомоморфизмом комодулей. Это условие можно

переформулировать, сказав, что отображение $\rho : A \to A \otimes H$, задающее структуру комодуля, мультипликативно, т.е.

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b) \quad \text{для всех } a, b \in A.$$

Более того, ρ является тогда гомоморфизмом алгебр с единицей. Тот факт, что $\rho(1) = 1 \otimes 1$ и, следовательно, H кодействует тривиально на образе поля $\Bbbk$ в A, легко усматривается следующим образом. Ясно, что $\rho(1)\, x = x$ для всех x из правого идеала I алгебры $A \otimes H$, порождённого $\rho(A)$. Значит, достаточно проверить равенство $I = A \otimes H$; но оно действительно выполняется, поскольку линейное отображение

$$A \otimes H \to A \otimes H, \quad a \otimes h \mapsto \rho(a) \cdot (1 \otimes h)$$

биективно. В самом деле, соответствие $a \otimes h \mapsto (\mathrm{id} \otimes S)\big(\rho(a)\big) \cdot (1 \otimes h)$ определяет обратное отображение. Это рассуждение также показывает, что ρ — изоморфизм алгебры A на подалгебру в $A \otimes H$, и $A \otimes H$ является свободным $\rho(A)$-модулем относительно действия левыми умножениями. Аналогично, $A \otimes H$ является свободным $\rho(A)$-модулем справа.

С H-комодульной алгеброй связывается её подалгебра, состоящая из *инвариантов кодействия*

$$A^{\mathrm{co}\, H} = \{a \in A \mid \rho(a) = a \otimes 1\}.$$

Как хорошо известно, структуры левого H-модуля находятся в биективном соответствии со структурами правого H^*-комодуля. Это соответствие согласовано с тензорными произведениями модулей и комодулей. Следовательно, каждая H-модульная алгебра является H^*-комодульной алгеброй, и наоборот. При каноническом отождествлении $A \otimes H^*$ с $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, A)$ структура комодуля на H-модульной алгебре A задаётся отображением

$$\rho : A \to A \otimes H^* \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, A),$$
$$\rho(a)(h) = ha \quad \text{для } a \in A,\ h \in H.$$

В оставшейся части работы A предполагается H-модульной алгеброй. Однако иногда рассуждения формулируются более естественно в терминах комодульных структур. Заметим, в частности, что $A^H = A^{\mathrm{co}\, H^*}$.

Под *идеалом* понимается двусторонний идеал, если явно не оговорено противное. Особый интерес представляют H-инвариантные идеалы, т.е. идеалы, устойчивые относительно действия H. Несколько свойств H-модульной алгебры A определяются в терминах множества её устойчивых относительно действия H идеалов:

(i) A называется *H-простой*, если $A \neq 0$ и A не имеет устойчивых относительно действия H идеалов, за исключением нулевого идеала и всей алгебры A;

(ii) A называется *H-первичной*, если $A \neq 0$ и $IJ \neq 0$ для всех ненулевых устойчивых относительно действия H идеалов I и J алгебры A;

(iii) A называется *H-полупервичной*, если A не содержит ненулевых нильпотентных устойчивых относительно действия H идеалов.

Устойчивый относительно действия H идеал I алгебры A называется H-первичным (соответственно, H-полупервичным), если факторалгебра A/I является H-первичной (соответственно H-полупервичной). Для произвольного идеала I алгебры A обозначим через I_H наибольший устойчивый относительно действия H идеал алгебры A, содержащийся в I. Если I первичен (соответственно, полупервичен), то I_H является H-первичным (соответственно, H-полупервичным). В обратную сторону, если I является H-первичным, то $I = P_H$ для некоторого первичного идеала P алгебры A (см. [15, Lemma 1.5]). Устойчивый относительно действия H идеал H-полупервичен тогда и только тогда, когда он представляется в виде пересечения H-первичных идеалов (см. [41, Lemma 8.3]).

Если теоретико-кольцевое понятие не снабжено префиксом H-, то оно не принимает во внимание структуру H-модуля. Например, H-модульная алгебра A есть *PI алгебра*, если A удовлетворяет полиномиальному тождеству как обычная алгебра.

Говорят, что левый или правый A-модуль M *эквивариантен*, если M наделён такой структурой левого H-модуля, что действие алгебры A на M происходит, соответственно, из H-линейного отображения $A \otimes M \to M$ или $M \otimes A \to M$, в предположении, что H действует в тензорных произведениях через Δ. Обозначим через H-${}_A\mathcal{M}$ и H-$\mathcal{M}_A$ категории H-эквивариантных левых и правых A-модулей. Морфизмами в этих категориях являются отображения, которые A-линейны и H-линейны одновременно. Пусть ${}_A\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_A$ — это категории левых и правых A-модулей.

Аналогично, A-бимодуль M будет называться H-эквивариантным, если M наделён структурой левого H-модуля, относительно которой M является объектом как H-${}_A\mathcal{M}$, так и H-$\mathcal{M}_A$. Обозначим через H-${}_A\mathcal{M}_A$ категорию H-эквивариантных A-бимодулей. Заметим, что каждый устойчивый относительно действия H идеал алгебры A является объектом категории H-${}_A\mathcal{M}_A$, и любой гомоморфизм H-модульных алгебр $A \to B$ превращает B в объект этой категории.

Напомним, что смэш-произведение $A\#H$ — это алгебра, векторное пространство которой есть $A \otimes H$, канонические отображения $A \to A \otimes 1$ и $H \to 1 \otimes H$ — изоморфизмы алгебр A и H на подалгебры в $A\#H$, а

$$(1\#h)(a\#1) = \sum h_{(1)}a\#h_{(2)} \quad \text{для } a \in A,\ h \in H.$$

Согласованность структур A-модуля и H-модуля, потребованная в определении категории H-${}_A\mathcal{M}$, означает в точности, что две модульные структуры происходят из одной структуры $A\#H$-модуля. Таким образом, H-${}_A\mathcal{M}$ отождествляется с категорией левых $A\#H$-модулей.

Пусть A^{op} — это A с противоположным умножением, а H^{cop} — это H с противоположным коумножением. Тогда A^{op} есть H^{cop}-модульная алгебра, и H-$\mathcal{M}_A$ может быть отождествлена с категорией левых $A^{\mathrm{op}}\#H^{\mathrm{cop}}$-модулей.

Алгебры $A\#H$ и A^H связаны контекстом Мориты. Несколько работ (см. [11, 12, 18, 20]) выводят различную информацию о кольце инвариантов A^H, когда известно, что $A\#H$ проста, или первична, или полупервична. Эти результаты обсуждаются также в [40]. Однако для произвольной конечномерной алгебры Хопфа H чрезвычайно трудно понять строение $A\#H$ как кольца в терминах исходной алгебры A. По-прежнему остаётся большой разрыв между тем, что известно в общем случае и в случае конечной группы G, действующей на кольце R, где косое групповое кольцо $R * G$ достаточно хорошо понято как нормализующее расширение кольца R. В нашей статье теоретико-кольцевые свойства алгебры $A\#H$ редко используются напрямую. Однако эквивариантные модули важны для многих рассмотрений.

Вспомним, что *левый* (соответственно *правый*) *интеграл* в H — это такой элемент $0 \neq t \in H$, что $ht = \varepsilon(h)t$ (соответственно $th = \varepsilon(h)t$) для всех $h \in H$. Пусть t — это левый интеграл. Если V — левый H-модуль, то действие t задаёт отображение $\hat{t} : V \to V^H$, где V^H — подпространство H-инвариантных элементов из V. В [20] это отображение было названо *следом* по аналогии с терминологией, используемой в случае действий групп.

В силу теоремы Машке H полупроста тогда и только тогда, когда $\varepsilon(t) \neq 0$. В этом случае t действует на V^H как ненулевое скалярное умножение. В частности, имеем $tV = V^H$, т.е. след $\hat{t}$ всегда сюръективен.

2. Структурные свойства H-модульных алгебр

В этом разделе представлены несколько результатов, относящихся к строению H-модульных алгебр. На них основаны недавние работы по инвариантам хопфовых действий. На самом деле большинство этих результатов могут быть сформулированы для не обязательно конечномерной алгебры Хопфа H. Тем не менее, во всех утверждениях будет предполагаться, что $\dim H < \infty$. С этим предположением нет необходимости упоминать какие-либо дополнительные ограничения; кроме того, доказательства становятся значительно проще.

Ключевой аргумент, используемый для вывода этих результатов, доставляет следующая теорема.

Теорема 2.1 (см. [51]). *Предположим, что A — полулокальная H-простая H-модульная алгебра. Тогда каждый объект $M \in H\text{-}\mathcal{M}_A$ проективен в $\mathcal{M}_A$. Более того, прямая сумма нескольких экземпляров M является свободным A-модулем. Аналогичное заключение имеет место в $H\text{-}{}_A\mathcal{M}$.*

В одном из приложений свойств свободности H-эквивариантных модулей H-простота модульной алгебры заранее не известна. Для того чтобы справиться с этой ситуацией, необходима следующая лемма, формулируемая при более сильных технических предположениях об A и M, чем предшествующая теорема.

Обозначим через $\operatorname{Max} A$ множество максимальных идеалов алгебры A. Если A полулокальна, то её факторалгебра по радикалу Джекобсона — полупростая артинова алгебра. Это означает, что множество $\operatorname{Max} A$ конечно, а факторалгебра A/P — простая артинова алгебра для каждого $P \in \operatorname{Max} A$. Будем говорить, что объект M категории $H\text{-}\mathcal{M}_A$ является *A-конечным*, если M конечно порождён как A-модуль. Если M является A-конечным, то M/MP есть A-модуль конечной длины. *Ранг* M в P определяется как

$$r_P(M) = \frac{\operatorname{length}_A M/MP}{\operatorname{length}_A A/P} \in \mathbb{Q}.$$

Лемма 2.2. *Пусть A — полулокальная H-модульная алгебра. Предположим, что объект $M \in H\text{-}\mathcal{M}_A$ является A-конечным и существует такой $P \in \operatorname{Max} A$, что P не содержит ненулевых устойчивых относительно действия H идеалов алгебры A и $r_P(M) \geqslant r_Q(M)$ для всех $Q \in \operatorname{Max} A$. Тогда M^n является свободным A-модулем для некоторого целого $n > 0$.*

По поводу доказательства см. [51, Lemma 7.5]. Эта лемма справедлива даже в случае, когда H — бесконечномерная алгебра Хопфа. Однако предположение $\dim H < \infty$ нужно для вывода заключения теоремы 2.1 для объектов M, не являющихся A-конечными. Поскольку каждый элемент M содержится в A-конечном подобъекте, то базис M^n над A может быть построен при помощи леммы Цорна.

Оказывается, что лемма 2.2 и теорема 2.1 очень быстро приводят к нескольким фундаментальным фактам касательно артиновых H-модульных алгебр. Иногда первоначально имеется менее полная информация об H-модульной алгебре, но при этом левое и правое артиновы условия могут быть выведены. По этой причине приходится работать с полупримарными алгебрами. Полулокальное кольцо называется *полупримарным*, если его радикал Джекобсона нильпотентен.

Лемма 2.3. *Пусть A — полупримарная H-модульная алгебра и пусть $K \in \operatorname{Max} A$. Тогда наибольший устойчивый относительно действия H идеал K_H, содержащийся в K, является максимальным устойчивым относительно действия H идеалом алгебры A.*

Доказательство. Заменяя A факторалгеброй A/K_H, можно предполагать, что $K_H = 0$, и тогда нужно доказать, что A является H-простой. Сначала заметим, что A является H-первичной. Действительно, если I, J — два ненулевых устойчивых относительно действия H идеала алгебры A, то $I \not\subset K$ и $J \not\subset K$, откуда $IJ \not\subset K$ и, следовательно, $IJ \neq 0$.

Каждое полупримарное кольцо удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей конечно порождённых односторонних идеалов. Следовательно, A имеет минимальный ненулевой устойчивый относительно действия H конечно порождённый правый идеал M. Если $0 \neq x \in M$, то $M = (Hx)A$, поскольку $(Hx)A$ — ненулевой устойчивый относительно действия H конечно порождённый правый идеал алгебры A, содержащийся в M. Отсюда следует, что M минимален в множестве всех ненулевых устойчивых относительно действия H правых идеалов алгебры A. Если I — любой ненулевой устойчивый относительно действия H идеал алгебры A, то MI — устойчивый относительно действия H правый идеал. Поскольку $MI \subset M$ и $MI \neq 0$ в силу H-первичности алгебры A, то получаем $MI = M$.

Можно рассматривать M как A-конечный объект категории $H\text{-}\mathcal{M}_A$. Выберем $P \in \operatorname{Max} A$, для которого $r_P(M)$ достигает максимального значения. Поскольку $M \neq 0$, то имеем $r_P(M) > 0$. Это означает, что $M \neq MP$, но тогда также $M \neq MP_H$, что возможно только тогда, когда $P_H = 0$, в силу предшествующего рассуждения. Таким образом, предположения леммы 2.2 выполнены, и мы выводим, что M^n — свободный A-модуль для некоторого $n > 0$. Отсюда $MI \neq M$ для каждого идеала $I \neq A$. Если I устойчив относительно действия H и $I \neq A$, это влечёт $I = 0$. □

Теорема 2.4 (см. [57]). *Предположим, что A полупримарна и H-полупервична. Имеется изоморфизм H-модульных алгебр*

$$A \cong A_1 \times \ldots \times A_n,$$

где $A_1, \ldots, A_n$ — H-простые H-модульные алгебры. Если A имеет максимальный идеал, не содержащий ненулевых устойчивых относительно действия H идеалов алгебры A, то A является H-простой.

Доказательство. В силу леммы 2.3 максимальные устойчивые относительно действия H идеалы алгебры A — это в точности идеалы K_H с $K \in \operatorname{Max} A$. В частности, их конечное число. Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — все максимальные устойчивые относительно действия H идеалы. Тогда $I_1 \cap \ldots \cap I_n$ содержится в радикале Джекобсона J алгебры A. Поскольку J нильпотентен и A является H-полупервичной, то получаем $I_1 \cap \ldots \cap I_n = 0$. Но $I_k + I_l = A$ для каждой пары индексов $k \neq l$, откуда желаемое разложение A в прямое произведение выполняется с $A_k = A/I_k$ в силу китайской теоремы об остатках. □

Следствие 2.5. *Каждая право-коидеальная подалгебра B алгебры Хопфа H^* является H-простой H-модульной алгеброй, и H^* — свободный B-модуль справа и слева.*

Доказательство. Здесь B — это подалгебра и правый коидеал в H^*. Ограничение коумножения Δ в H^* даёт отображение $B \to B \otimes H^*$, которое превращает B в H^*-комодульную алгебру. Следовательно, B является также H-модульной алгеброй. Положим $B^+ = \operatorname{Ker} \varepsilon|_B$, где ε — коединица алгебры Хопфа H^*. Тогда $B^+ \in \operatorname{Max} B$, причём $B/B^+ \cong \Bbbk$. Предположим, что I — устойчивый относительно действия H идеал алгебры B. Тогда $\Delta(I) \subset I \otimes H^*$. Вспомним, что $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ является тождественным отображением в силу определения коединицы. Если $I \subset B^+$, то получаем $x = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta x) = 0$ для каждого $x \in I$, поскольку $\varepsilon(I) = 0$ и, таким образом, $I = 0$. Значит, B^+ не содержит ненулевых устойчивых относительно действия H идеалов алгебры B. По теореме 2.4 B является H-простой.

Теперь H^* — также H-модульная алгебра и B — её подалгебра, устойчивая относительно действия H. Следовательно, H^* может рассматриваться как объект категорий $H\text{-}{}_B\mathcal{M}$ и $H\text{-}\mathcal{M}_B$. Свободность H^* над B следует из теоремы 2.1. □

Следствие 2.6. *Предположим, что A полупримарна и H-полупервична. Тогда каждый объект $M \in H\text{-}\mathcal{M}_A$ проективен в $\mathcal{M}_A$.*

Доказательство. Из разложения A в прямое произведение, даваемого теоремой 2.4, следует, что $M \cong M_1 \times \ldots \times M_n$, где $M_i = M \otimes_A A_i \in H\text{-}\mathcal{M}_{A_i}$. По теореме 2.1 M_i проективен в $\mathcal{M}_{A_i}$ для каждого i, откуда вытекает требуемое заключение. □

Следствие 2.7. *Предположим, что A полупримарна и H-полупервична. Если I — устойчивый относительно действия H правый идеал алгебры A, то $I = eA$ для некоторого идемпотента $e \in A$.*

Доказательство. Можно рассматривать A/I как объект категории $H\text{-}\mathcal{M}_A$. Согласно следствию 2.6, A/I проективен в $\mathcal{M}_A$. Поэтому I есть прямое слагаемое A как правого A-модуля. □

Теорема 2.8 (см. [57]). *Любая полупримарная H-полупервичная алгебра A является квазифробениусовым кольцом. В частности, A артинова слева и справа.*

Доказательство. Ввиду теоремы 2.4 достаточно рассмотреть случай, когда алгебра A является H-простой. Мы собираемся применить общий факт, согласно которому полупримарное кольцо квазифробениусово, если только оно самоинъективно слева и справа (см. [33, Theorem 10]). Покажем, что A самоинъективно слева. Применяя это к H^{cop}-модульной алгебре A^{op}, сделаем вывод, что A также самоинъективно справа, откуда и вытекает заключение теоремы.

Возьмём любой ненулевой инъективный объект $M \in H\text{-}{}_A\mathcal{M}$. Тогда M остаётся инъективным в ${}_A\mathcal{M}$. Для того чтобы это увидеть, вспомним, что $H\text{-}{}_A\mathcal{M}$ отождествляется с категорией левых B-модулей для $B = A\#H$. Забывающий функтор $H\text{-}{}_A\mathcal{M} \to {}_A\mathcal{M}$ отождествляется с функтором ограничения ${}_B\mathcal{M} \to {}_A\mathcal{M}$, возникающим из канонического вложения алгебры A в B. Этот функтор сохраняет инъективные объекты, поскольку он имеет точный сопряжённый слева функтор $B \otimes_A ?$.

Но M^n — свободный A-модуль для некоторого $n > 0$ по теореме 2.1. Следовательно, A является прямым слагаемым M^n в категории ${}_A\mathcal{M}$. Поскольку M^n инъективен в ${}_A\mathcal{M}$, то таким же будет и A. □

Таким образом, H-полупервичная алгебра A полупримарна тогда и только тогда, когда A артинова слева, тогда и только тогда, когда A артинова справа. В этом случае будем говорить, что A *артинова.*

Теорема 2.9. *Пусть A — устойчивая относительно действия H подалгебра H-модульной алгебры B. Если A артинова и H-проста, то B является свободным A-модулем относительно действия правыми (или левыми) умножениями.*

Доказательство. Можно рассматривать B как объект категории $H\text{-}\mathcal{M}_A$. Значит, теорема 2.1 применима к B. Для каждого $P \in \operatorname{Max} A$ обозначим через F_P проективное накрытие в категории $\mathcal{M}_A$ простого правого A/P-модуля. Эти модули F_P неразложимы, и $A \cong \bigoplus\limits_{P \in \operatorname{Max} A} F_P^{m_P}$ для некоторых кратностей m_P. Положим

$$E = \bigoplus_{P \in \operatorname{Max} A} F_P^{m_P/d}, \quad \text{где } d = \gcd\{m_P \mid P \in \operatorname{Max} A\}.$$

Тогда $A \cong E^d$. Если M — такой правый A-модуль, что M^n свободен для некоторого $n > 0$, то по теореме Крулля—Шмидта M изоморфен прямой сумме семейства экземпляров модуля E. Более того, M сам свободен, если или M не конечно порождён, или $M \cong E^k$ с d, делящим k. Если M — на самом деле A-бимодуль, то $M \cong A \otimes_A M \cong N^d$, где $N = E \otimes_A M$. В этом случае N обязан быть изоморфен прямой сумме семейства экземпляров модуля E, а значит, M свободен над A справа в силу предыдущего наблюдения. Остаётся применить это к $M = B$. □

Теорема 2.10 (см. [57])**.** *Предположим, что H полупроста, A артинова и H-полупервична. Тогда $H\text{-}\mathcal{M}_A$ и $H\text{-}{}_A\mathcal{M}$ — полупростые категории. Другими словами, смэш-произведения $A^{op}\#H^{cop}$ и $A\#H$ — полупростые артиновы алгебры.*

Доказательство. Ключевой ингредиент в доказательстве — это факт, установленный Коэн и Фишман (см. [18]), согласно которому подмодуль W левого $A\#H$-модуля V является прямым слагаемым, если только W — прямое слагаемое V как A-модуля. Для этого требуется только полупростота H, но не нужны никакие предположения об H-модульной алгебре A.

В случае категории $H\text{-}\mathcal{M}_A$ подобное рассуждение выглядит следующим образом. Пусть M, N — два объекта категории $H\text{-}\mathcal{M}_A$. На $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(M, N)$ определена структура левого H-модуля правилом

$$(h \cdot f)(x) = \sum h_{(1)}\, f\bigl(S(h_{(2)})x\bigr)$$

для $h \in H$ с $\Delta h = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, $f \in \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(M, N)$, $x \in M$. Непосредственно проверяется, что $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ устойчиво относительно этого действия H и что линейное отображение $f \in \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(M, N)$ является H-инвариантным тогда и только тогда, когда оно H-линейно. Пусть

$t \in H$ — интеграл с условием $\varepsilon(t) = 1$. Если N — подобъект M, отщепляющийся в M как A-модульное прямое слагаемое, то существует такое A-линейное отображение $f : M \to N$, что $f|_N = \mathrm{id}$. Теперь отображение $f' = t \cdot f$ является A-линейным и H-линейным одновременно, и также $f'|_N = \mathrm{id}$. Отсюда $M = N \oplus \operatorname{Ker} f'$, разложение в прямую сумму в категории H-$\mathcal{M}_A$.

В предположении, что A артинова и H-полупервична, любой подобъект N в M является A-модульным прямым слагаемым, поскольку факторобъект $M/N \in H$-$\mathcal{M}_A$ проективен в $\mathcal{M}_A$ в силу следствия 2.6. Поэтому предыдущее заключение имеет место. $\square$

Результат Коэн и Фишман, упомянутый в доказательстве теоремы 2.10, означает, что $A\#H$ — полупростое расширение A, когда H полупроста. В [18] он использовался для того, чтобы показать, что алгебра $A\#H$ полупервичная артинова всякий раз, когда таковой является A. Если A не полупервична, а только H-полупервична, то же самое заключение требует использования теоремы 2.1, которая была доказана намного позже.

Пусть R — некоторое кольцо. Говорят, что кольцо Q есть *классическое правое кольцо частных* кольца R, если

(a) Q содержит R в качестве подкольца;
(b) все *регулярные* элементы, т.е. неделители нуля, кольца R обратимы в Q, и
(c) каждый элемент $q \in Q$ может быть записан в виде $q = as^{-1}$, где $a, s \in R$, s регулярен.

Такое кольцо Q существует тогда и только тогда, когда множество всех регулярных элементов кольца R удовлетворяет правому условию Оре. В этом случае Q единственно с точностью до изоморфизма, и $Q(R)$ будет обозначением для этого кольца.

Если H-модульная алгебра A не артинова, но A имеет артиново классическое правое кольцо частных, предыдущие результаты всё же могут использоваться для извлечения информации об A. Имеются два важных случая, когда это происходит.

Теорема 2.11 (см. [57]). *Если A нётерова справа и H-полупервична, то A имеет квазифробениусово классическое правое кольцо частных.*

Теорема 2.12 (см. [5]). *Если A — H-полупервичная PI алгебра с конечным числом минимальных H-первичных идеалов, то A имеет квазифробениусово классическое правое кольцо частных. В частности, это выполняется, если A — H-полупервичная конечно порождённая PI алгебра.*

В доказательстве теоремы 2.11 сначала строится обобщённое кольцо частных Q с использованием фильтра устойчивых относительно действия H существенных правых идеалов алгебры A. Это кольцо оказывается полупримарным. В доказательстве теоремы 2.12 начинают с H-эквивариантного кольца частных Мартиндейла Q. Как мы увидим в разделе 6, оно будет конечным модулем над центральным артиновым подкольцом. В обоих случаях H действует на Q, и H-полупервичность сохраняется при переходе к Q. Следовательно, Q квазифробениусово по теореме 2.8, и заключение, что Q — классическое правое кольцо частных, может быть выведено из следующего теоретико-кольцевого факта.

Предложение 2.13 (см. [53]). *Пусть R — подкольцо квазифробениусова кольца Q. Предположим, что $\mathcal{I}$ — топологизирующий фильтр правых идеалов кольца R со следующими свойствами*:

(a) *каждый правый идеал $I \in \mathcal{I}$ имеет нулевые левый и правый аннуляторы в Q*;
(b) *для каждого $q \in Q$ существует такой $I \in \mathcal{I}$, что $qI \subset R$.*

Тогда каждый правый идеал $I \in \mathcal{I}$ содержит регулярный элемент кольца R, и Q является классическим правым кольцом частных кольца R.

Мы говорим, что семейство $\mathcal{F}$ правых идеалов кольца R есть *фильтр*, если для каждой пары правых идеалов $I, J \in \mathcal{F}$ существует такой $K \in \mathcal{F}$, что $K \subset I \cap J$. Фильтр $\mathcal{F}$ *топологизирующий*, если для каждого $I \in \mathcal{F}$ и каждого $a \in R$ существует такой $I' \in \mathcal{F}$, что $aI' \subset I$. Условие, что с каждым $I \in \mathcal{F}$ все бо́льшие правые идеалы также принадлежат $\mathcal{F}$, часто включается в определение фильтра, но, опустив его, мы не причиним большого вреда.

На самом деле с небольшими улучшениями в доказательстве [53, Proposition 1.4] предположение о том, что фильтр $\mathcal{I}$ топологизирующий, может быть удалено. В случае, когда кольцо Q полупростое артиново (см. [54, Proposition 2.3]).

Теорема 2.14 (см. [57])**.** *Предположим, что A имеет артиново справа классическое правое кольцо частных Q. Тогда структура H-модуля на A имеет единственное расширение на Q, относительно которого Q становится H-модульной алгеброй.*

Доказательство. Рассуждаем в терминах комодульных структур. Поскольку отображение

$$A \otimes H^* \to A \otimes H^*, \quad a \otimes f \mapsto \rho(a) \cdot (1 \otimes f),$$

обратимо, то $A \otimes H^*$ является свободным A-модулем относительно действия алгебры A левыми умножениями элементами $\rho(a)$. Отсюда следует, что для каждого регулярного элемента s алгебры A элемент $\rho(s)$ регулярен справа в $A \otimes H^*$, т.е. $\rho(s)x = 0$ для $x \in A \otimes H^*$ влечёт $x = 0$. Тогда $\rho(s)$ остаётся регулярным справа в $Q \otimes H^*$, и следовательно $\rho(s)$ обязан быть обратимым в артиновом справа кольце $Q \otimes H^*$. Это свойство показывает, что $\rho : A \to A \otimes H^*$ продолжается до гомоморфизма алгебр $\rho' : Q \to Q \otimes H^*$. Теперь $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\rho'$ и $(\rho' \otimes \mathrm{id})\rho'$ — два гомоморфизма алгебр $Q \to Q \otimes H^* \otimes H^*$, совпадающие на A. Отсюда

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)\rho' = (\rho' \otimes \mathrm{id})\rho'.$$

Итак, ρ' — структура H^*-комодульной алгебры, расширяющая заданную структуру на A. $\square$

В ситуации теоремы 2.14 имеем два подкольца инвариантов A^H и Q^H. Ясно, что $A^H = A \cap Q^H$. Теорема 2.14 верна даже без предположения о том, что $\dim H < \infty$.

Заключения теорем 2.4, 2.8 и 2.11 также выполняются для некоторых классов бесконечномерных алгебр Хопфа. К сожалению, по-прежнему не известно, достаточно ли для их справедливости предположения о биективности антипода в H. Однако, если A артинова справа и H-полупервична, то A является квазифробениусовым кольцом, даже когда H — произвольная бесконечномерная алгебра Хопфа (см. [52]).

3. Конечность как модуля над инвариантами

В этом разделе исследуются те случаи, где известна конечность A как A^H-модуля. Многие обсуждаемые здесь результаты восходят к 1980-м гг. Структура комодуля $\rho : A \to A \otimes H^*$ даёт возможность определить $\Bbbk$-линейное отображение

$$\gamma : A \otimes_{A^H} A \to A \otimes H^*, \quad a \otimes b \mapsto (a \otimes 1) \cdot \rho(b)$$

(вспомним, что $A^H = \{a \in A \mid \rho(a) = a \otimes 1\}$). При каноническом отождествлении $A \otimes H^*$ с $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, A)$ имеем

$$\gamma(a \otimes b)(h) = a(hb) \quad \text{для } a, b \in A \text{ и } h \in H.$$

Понятие хопфовых расширений Галуа определяется в терминах комодульных структур (см. [40, Chap. 8]). В случае, когда алгебра Хопфа является конечно порождённым проективным модулем над базовым коммутативным кольцом, это понятие было введено Креймером и Такеучи (см. [34]).

Поскольку в наших соглашениях A — H-модульная алгебра, то скажем, что A есть *H^*-расширение Галуа* подалгебры A^H, если γ биективно. Поскольку $\dim H^* < \infty$, то достаточно потребовать сюръективности γ (см. [34]).

Теорема 3.1 (см. [34])**.** *Предположим, что A является H^*-расширением Галуа алгебры A^H. Тогда A — конечно порождённый проективный A^H-модуль слева и справа.*

Доказательство. Как объяснено в [40, 8.3.1], это заключение может быть доказано проверкой свойства дуального базиса, характеризующего проективные модули. Для того чтобы это сделать, возьмём такие левый интеграл $t \in H$ и правый интеграл $\lambda \in H^*$, что $\lambda(t) = 1$, и пусть $1 \otimes \lambda = \gamma\big(\sum a_i \otimes b_i\big)$ для некоторых элементов $a_i, b_i \in A$ $(i = 1, \ldots, n)$. Если $x \in A$, то

$$\gamma\Big(\sum a_i \otimes b_i x\Big) = (1 \otimes \lambda) \cdot \rho(x) = x \otimes \lambda,$$

а это означает, что

$$\sum a_i\big(h(b_i x)\big) = \lambda(h)x \quad \text{для всех } h \in H.$$

Для каждого i определим A^H-линейное справа отображение $f_i : A \to A^H$ по формуле $f_i(x) = t(b_i x)$. Взяв выше $h = t$, выводим, что

$$\sum a_i f_i(x) = \sum a_i\big(t(b_i x)\big) = \lambda(t)x = x$$

для всех $x \in A$. В доказательстве левостороннего варианта продвигаемся аналогично, заменив γ на отображение $a \otimes b \mapsto \rho(a) \cdot (b \otimes 1)$, которое также биективно в силу [34, Proposition 1.2]. □

Хопфовы расширения Галуа образуют важный специальный класс комодульных алгебр, для которых доступно больше информации по сравнению с общим случаем. Однако отображение γ чрезвычайно полезно, даже когда γ не биективно. Рассмотрим $A \otimes H^*$ как A-бимодуль относительно левого и правого действий, определяемых правилами

$$ax = (a \otimes 1) \cdot x, \quad xa = x \cdot \rho(a) \quad \text{для } a \in A \text{ и } x \in A \otimes H^*.$$

Тогда γ — гомоморфизм A-бимодулей. В частности, его образ является подбимодулем в $A \otimes H^*$. Также γ уважает некоторые H-модульные структуры. Вспомним два естественных левых действия алгебры H на H^*, определяемых формулами

$$(h \rightharpoonup \xi)(g) = \xi(gh), \quad (h \rightharpoondown \xi)(g) = \xi\big(S(h)g\big) \quad \text{для } g, h \in H \text{ и } \xi \in H^*.$$

Лемма 3.2. *Относительно H-модульных структур на $A \otimes_{A^H} A$ и $A \otimes H^*$, определяемых формулами*

$$h(a \otimes b) = ha \otimes b, \quad h(a \otimes \xi) = \sum h_{(1)}a \otimes (h_{(2)} \rightharpoondown \xi), \tag{$*$}$$

где $a, b \in A$, $h \in H$ и $\xi \in H^*$, отображение γ является морфизмом в категории H-${}_A\mathcal{M}$. С другой стороны, γ является морфизмом в категории H-$\mathcal{M}_A$ относительно другой пары H-модульных структур

$$h(a \otimes b) = a \otimes hb, \quad h(a \otimes \xi) = a \otimes (h \rightharpoonup \xi). \tag{$**$}$$

Доказательство. Ясно, что H-модульные структуры $(*)$ согласованы с левыми A-модульными структурами таким образом, что $A \otimes_{A^H} A$ и $A \otimes H^*$ становятся объектами категории H-${}_A\mathcal{M}$. Чтобы показать H-линейность γ относительно $(*)$, нужно только проверить H-инвариантность $\rho(b)$ для каждого $b \in A$. В моноидальной категории левых H-модулей H^* с действием $\rightharpoondown$ является левым двойственным к H с действием левыми умножениями. Следовательно,

$$\mathrm{Hom}_H(V, A \otimes H^*) \cong \mathrm{Hom}_H(V \otimes H, A)$$

для каждого левого H-модуля V. Взяв $V = \Bbbk$ с тривиальной модульной структурой, получаем $(A \otimes H^*)^H \cong \mathrm{Hom}_H(H, A)$. При этой биекции H-линейное отображение $H \to A$, $h \mapsto hb$, соответствует элементу $\rho(b) \in A \otimes H^*$. Другими словами, $(A \otimes H^*)^H = \rho(A)$.

Относительно действия $\rightharpoonup$ алгебра H^* является H-модульной. Поэтому таковой является и $A \otimes H^*$ относительно действия, заданного в $(**)$. При этом отображение $\rho : A \to A \otimes H^*$ является H-линейным, и значит ρ — гомоморфизм H-модульных алгебр. В частности, $A \otimes H^* \in H$-$\mathcal{M}_A$. Ясно, что также $A \otimes_{A^H} A \in H$-$\mathcal{M}_A$. Наконец, отображение γ является H-линейным относительно $(**)$ ввиду H-инвариантности элементов из $A \otimes 1$. □

Лемма 3.3. *Положим $M = \operatorname{Im}\gamma$. Предположим, что M свободен над A слева и существуют такие элементы $a_1, \dots, a_n \in A$, что $\rho(a_1), \dots, \rho(a_n)$ образуют базис M над $A \otimes 1$. Тогда $a_1, \dots, a_n$ — базис для A как A^H-модуля относительно действия левыми умножениями. В частности, слева A свободен конечного ранга над A^H.*

Доказательство. Для заданного элемента $a \in A$ существуют такие однозначно определённые элементы $c_1, \dots, c_n \in A$, что

$$\rho(a) = \sum (c_i \otimes 1)\rho(a_i) = \gamma\Big(\sum c_i \otimes a_i\Big).$$

Тогда $ha = \sum c_i(ha_i)$ для всех $h \in H$. Беря $h = 1$, получаем $a = \sum c_i a_i$. Пусть теперь $g \in H$. С учётом H-инвариантности $\rho(a)$ и H-линейности γ относительно H-модульных структур $(*)$, рассматриваемых в лемме 3.2, выводим, что

$$\sum (gc_i \otimes 1)\rho(a_i) = \gamma\Big(\sum gc_i \otimes a_i\Big) = \varepsilon(g)\rho(a) = \varepsilon(g)\sum (c_i \otimes 1)\rho(a_i).$$

Отсюда следует, что $gc_i = \varepsilon(g)c_i$, поскольку $\rho(a_1), \dots, \rho(a_n)$ линейно независимы над $A \otimes 1$ слева. Поэтому $c_i \in A^H$ для каждого i. С другой стороны, если $a = \sum c_i' a_i$ для другого набора элементов $c_1', \dots, c_n' \in A^H$, то $\rho(a) = \sum (c_i' \otimes 1)\rho(a_i)$, что влечёт $c_i' = c_i$ для каждого i. □

Если A артинова и H-проста, то A-бимодуль $M = \operatorname{Im}\gamma$ всегда свободен слева (и справа). Действительно, M может рассматриваться как объект категории H-${}_A\mathcal{M}$ ввиду леммы 3.2. Значит, M^n свободен слева для некоторого $n > 0$ по теореме 2.1. Более того, это заключение выполняется с $n = 1$, как было объяснено в доказательстве теоремы 2.9. Как левый A-модуль, M порождается $\rho(A)$, но это не означает, что базис может быть выбран в $\rho(A)$, и значит лемма 3.3 неприменима в общем случае. В этом кроется причина возможно плохого поведения подкольца A^H.

Пример Бьёрка (см. [14]) даёт простое артиново кольцо R характеристики 2, которое не конечно порождено как модуль над подкольцом R^G элементов, оставляемых неподвижными группой автоморфизмов порядка 4. В этом примере R^G не артиново ни слева, ни справа.

Ситуация становится намного приятнее, когда H-модульная алгебра A не имеет нетривиальных устойчивых относительно действия H односторонних идеалов.

Лемма 3.4. *Предположим, что A не имеет нетривиальных устойчивых относительно действия H левых (или правых) идеалов. Тогда A^H является телом, и γ инъективно.*

Доказательство. Условия, наложенные на A, означают, что A — простой объект категории H-${}_A\mathcal{M}$, т.е. простой левый $A\#H$-модуль. Тот факт, что A^H — тело, сформулирован в [11, Lemma 2.1]. Он вытекает из леммы Шура, поскольку $A^H \cong (\operatorname{End}_{A\#H} A)^{\mathrm{op}}$.

Как объяснено в лемме 3.2, $A \otimes_{A^H} A$ может рассматриваться как объект категории H-${}_A\mathcal{M}$. Он представляется в виде суммы своих простых подобъектов $A \otimes b$ с $0 \neq b \in A$, каждый из которых изоморфен A. Поэтому любой подобъект $A \otimes_{A^H} A$ в категории H-${}_A\mathcal{M}$ равен $A \otimes_{A^H} V$ для некоторого левого векторного подпространства V в A над A^H. В частности, это применимо к ядру отображения γ. Но $\gamma(1 \otimes b) = \rho(b)$ для каждого $b \in A$. Это показывает, что ограничение γ на $1 \otimes A$ инъективно и, следовательно $\operatorname{Ker}\gamma = 0$. □

В предположениях леммы 3.4 H-модульная алгебра A может рассматриваться либо как левое, либо как правое векторное пространство над телом A^H. Обозначим через $[A : A^H]_l$ и $[A : A^H]_r$ размерности этих двух векторных пространств.

Теорема 3.5 (см. [11]). *Предположим, что A не имеет нетривиальных устойчивых относительно действия H левых идеалов и что A имеет конечный левый ранг Голди (т.е. A удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей прямых сумм левых идеалов). Тогда $[A : A^H]_r \leqslant n$, где n — это размерность образа H в $\operatorname{End}_{\Bbbk} A$.*

Этот результат Бергена, Коэн и Фишман (см. [11, Theorem 2.2]) был сформулирован для необязательно конечномерной алгебры Хопфа H с конечномерным образом $\pi(H)$ в $\operatorname{End}_{\Bbbk} A$. В доказательстве, приведённом в [11], применение теоремы плотности Джекобсона показывает, что всякий раз, когда A содержит m линейно независимых над A^H справа элементов, в образе $\pi(A\#H)$ алгебры $A\#H$ в $\operatorname{End}_{\Bbbk} A$ существует свободный левый A-подмодуль ранга m. Выберем элементы $h_1, \ldots, h_n \in H$, образы которых дают базис $\pi(H)$. Тогда $\pi(A\#H) = \pi(T)$, где $T \subset A\#H$ — левый A-подмодуль, порождённый $1\#h_1, \ldots, 1\#h_n$. Отсюда следует, что T содержит свободный A-подмодуль ранга m. Поскольку T — свободный A-модуль ранга n, то это влечёт $m \leqslant n$ в силу конечности ранга Голди.

Используя отображение γ, можно усилить предыдущую теорему. Продолжим работать в предположении, что $\dim H < \infty$. Отметим, однако, что, заменяя $A \otimes H^*$ на $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(H, A)$ в предшествующем обсуждении и модифицируя все аргументы соответствующим образом, следующий результат может быть доказан для бесконечномерной алгебры Хопфа в предположении $\dim \pi(H) < \infty$, использованном в [11]. В полулокальном случае требуется также биективность антипода.

Теорема 3.6. *Предположим, что A не имеет нетривиальных устойчивых относительно действия H левых идеалов и что либо A имеет конечный левый ранг Голди, либо A полулокальна. Пусть $n = \dim \pi(H)$, где $\pi : H \to \operatorname{End}_{\Bbbk} A$ — представление, доставляемое действием H на A. Тогда*

$$[A : A^H]_l \leqslant n, \quad [A : A^H]_r \leqslant n.$$

В частности, A артинова слева и справа.

Доказательство. По лемме 3.4 отображение γ инъективно. Значит, A-бимодуль $M = \operatorname{Im} \gamma$ изоморфен $A \otimes_{A^H} A$. Поэтому M свободен слева с рангом, равным $[A : A^H]_l$ и M свободен справа с рангом, равным $[A : A^H]_r$. Заметим, что $\rho(A) \subset A \otimes C$, где C — подкоалгебра в H^*, двойственная факторалгебре $\pi(H)$ алгебры H. Отсюда также $M \subset A \otimes C$. Поскольку $\dim C = n$, то это показывает, что M, рассматриваемый как A-модуль относительно левого действия, вкладывается в свободный A-модуль ранга n. Если A имеет конечный левый ранг Голди, то получаем $[A : A^H]_l \leqslant n$, в то время как второе неравенство составляет содержание теоремы 3.5.

Предположим далее, что A полулокальна. Поскольку C устойчива относительно действия $\rightharpoonup$ алгебры H на H^*, то левый A-модуль $A \otimes C$ является объектом категории $H\text{-}{}_A\mathcal{M}$ относительно H-модульных структур, описанных в формулах $(*)$ леммы 3.2. Поэтому также $(A \otimes C)/M \in H\text{-}{}_A\mathcal{M}$. Поскольку A является H-простой, то теорема 2.1 показывает, что $(A \otimes C)/M$ проективен в ${}_A\mathcal{M}$. Тогда M есть прямое слагаемое $A \otimes C$ как объекта категории ${}_A\mathcal{M}$. Обозначая через J радикал Джекобсона алгебры A, выводим, что свободный A/J-модуль M/JM ранга равного $[A : A^H]_l$ вкладывается в свободный A/J-модуль $A/J \otimes C$ ранга n. Поскольку алгебра A/J полупростая артинова, то мы должны иметь $[A : A^H]_l \leqslant n$.

Для оставшейся части положим $N = \bigl(1 \otimes S^{-1}(C)\bigr) \cdot \rho(A)$. Тогда N — подобъект $A \otimes H^*$ в категории $H\text{-}\mathcal{M}_A$, и N свободен над A ранга n. Пусть $a \in A$. Записывая символически $\rho(a) = \sum a_{(0)} \otimes a_{(1)} \in A \otimes C$, имеем

$$a \otimes 1 = \sum a_{(0)} \otimes S^{-1}(a_{(2)}) a_{(1)} = \sum \bigl(1 \otimes S^{-1}(a_{(1)})\bigr) \cdot \rho(a_{(0)}) \in N.$$

Это показывает, что $A \otimes 1 \subset N$. Отсюда $M = (A \otimes 1)\, \rho(A) \subset N$. Применяя теорему 2.1 к объекту $N/M \in H\text{-}\mathcal{M}_A$, выводим, что M есть прямое слагаемое N в категории $\mathcal{M}_A$, и переходя к факторам по модулю J, получаем $[A : A^H]_r \leqslant n$. $\square$

Другой старый результат Коэн, Фишман и Монтгомери выясняет, когда расширение A/A^H есть H^*-расширение Галуа для H-модульной алгебры, удовлетворяющей предыдущим предположениям. Покажем, как отображение γ может быть использовано в доказательстве.

Теорема 3.7 (см. [20]). *Предположим, что A не имеет нетривиальных устойчивых относительно действия H левых идеалов и что A имеет конечный левый ранг Голди. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) $[A : A^H]_r = \dim H$;

(1′) $[A : A^H]_l = \dim H$;

(2) *A является точным левым $A\#H$-модулем*;

(3) *$A\#H$ — простая алгебра*;

(4) *A является H^*-расширением Галуа алгебры A^H.*

Доказательство. Отображение γ — инъективный гомоморфизм A-бимодулей. Как $A \otimes_{A^H} A$, так и $A \otimes H^*$ свободны конечного ранга как левые A-модули и как правые A-модули. Поскольку A артинова слева и справа по теореме 3.6, то все конечно порождённые A-модули имеют конечную длину. Следовательно, γ биективно тогда и только тогда, когда два рассматриваемых бимодуля имеют одинаковые левые ранги, и тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые правые ранги. Это показывает, что (4) $\Leftrightarrow$ (1′) $\Leftrightarrow$ (1).

Обозначим через E кольцо эндоморфизмов A как правого векторного пространства над телом A^H. Действие $A\#H$ на A даёт гомоморфизм колец $\pi : A\#H \to E$. Поскольку $[A : A^H]_r < \infty$, то кольцо E простое артиново. В силу одной из общих характеризаций расширений Галуа условие (4) выполняется тогда и только тогда, когда π — изоморфизм (см. [20, Theorem 1.2]). Но π сюръективен по теореме Джекобсона о плотности, поскольку A — простой левый $A\#H$-модуль. Следовательно, π — изоморфизм тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\pi = 0$. Если π — изоморфизм, то $A\#H \cong E$ — простое кольцо. С другой стороны, если $A\#H$ — простое кольцо, то $\operatorname{Ker}\pi = 0$. Таким образом, (4) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). □

Условие (1′) не было включено как одно из эквивалентных условий в [20, Theorem 3.3], но оно появляется в следствии [20, Corollary 3.10], сформулированном для случая, когда H-модульная алгебра есть кольцо с делением. Доказательство эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2), данное в [20], не вполне ясно, поскольку оно основано на равенствах

$$[A\#H/K : A^H] = [M_m(A^H) : A^H] = m^2,$$

где K — ядро представления $\pi : A\#H \to \operatorname{End}_{\Bbbk} A$, $m = [A : A^H]_r$ и $M_m(A^H)$ — кольцо матриц размера $m \times m$ с компонентами из A^H. Имеется изоморфизм колец $A\#H/K \cong M_m(A^H)$, но естественное вложение тела A^H в $A\#H/K$ может не соответствовать вложению A^H в $M_m(A^H)$ как подкольца диагональных матриц. Таким образом, приходится иметь дело с двумя различными образами D, D' тела A^H в $M_m(A^H)$. Хотя $D \cong D'$, это не обязательно влечёт, что

$$[M_m(A^H) : D] = [M_m(A^H) : D'].$$

Нами дано доказательство, которое обходит возникающие здесь трудности.

Если A полупримарна, то A не имеет нетривиальных устойчивых относительно действия H левых идеалов тогда и только тогда, когда A не имеет нетривиальных устойчивых относительно действия H правых идеалов. Действительно, каждое из этих двух условий влечёт, что A является H-простой, но тогда A — квазифробениусово кольцо по теореме 2.8. В силу стандартного свойства квазифробениусовых колец имеется биективное соответствие между левыми и правыми идеалами алгебры A, которое сопоставляет каждому левому идеалу его правый аннулятор в A и каждому правому идеалу его левый аннулятор в A. Легко видеть, что устойчивые относительно действия H левые идеалы соответствуют устойчивым относительно действия H правым идеалам.

Вопрос касательно равенства левой и правой размерностей алгебры A над A^H был разрешён только недавно. Этот вопрос был поднят в уже упомянутой статье Бергена, Коэн и Фишман для H-модульной алгебры, являющейся кольцом с делением, т.е. телом [11, Question 2.4]. Он был мотивирован классическим результатом, восходящим к Джекобсону, что такое равенство действительно верно в случае действий групп на телах.

Теорема 3.8 (см. [56]). *Предположим, что A — полупримарная H-модульная алгебра без нетривиальных устойчивых относительно действия H односторонних идеалов. Тогда $[A : A^H]_l = [A : A^H]_r$.*

Очертим план доказательства этой теоремы. Желаемое равенство выполняется в точности тогда, когда A-бимодуль $M = A \otimes_{A^H} A$ имеет равные левый и правый ранги над A. По лемме 3.4, γ вкладывает M в $N = A \otimes H^*$. Второй бимодуль также свободен с каждой стороны с левым и правым рангами равными $\dim H$. Заключение будет следовать, как только будет показано, что прямая сумма нескольких экземпляров M изоморфна прямой сумме нескольких экземпляров N.

Каждый A-бимодуль может рассматриваться как правый модуль над кольцом $\mathcal{A} = A^{\mathrm{op}} \otimes A$. Положим $\mathcal{H} = H^{\mathrm{cop}} \otimes H$ и рассмотрим M и N как левые $\mathcal{H}$-модули, используя две пары H-модульных структур, указанные в лемме 3.2. Заметим, что $\mathcal{H}$ — конечномерная алгебра Хопфа и $\mathcal{A}$ есть $\mathcal{H}$-модульная алгебра. Проверяется условие согласованности, которое превращает M и N в объекты категории $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

Положим $B = \operatorname{End}_{\mathcal{A}} M$, т.е. B — кольцо эндоморфизмов M как A-бимодуля. Тогда B является $\mathcal{H}$-модульной алгеброй, и B полупримарна, поскольку M — A-бимодуль конечной длины. Ввиду предположения об устойчивых относительно действия H односторонних идеалах алгебры A в M не могут существовать нетривиальные подбимодули, устойчивые относительно обеих H-модульных структур из леммы 3.2. Другими словами, M — простой объект категории $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Это влечёт H-полупервичность B, и применение теоремы 2.4 приводит далее к заключению об H-простоте алгебры B.

Как левый A-модуль и, следовательно, как бимодуль, N порождается $1 \otimes H^*$. Для каждого $\xi \in H^*$ имеется гомоморфизм A-бимодулей $\varphi_\xi : M \to N$, который переводит $a \otimes b \in A \otimes_{A^H} A$ в $(a \otimes \xi)\, \rho(b)$ (заметим, что $(1 \otimes \xi)\, \rho(c) = c \otimes \xi$ для всех $c \in A^H$), и $A \otimes \xi$ содержится в образе φ_ξ. Отсюда следует, что N, как A-бимодуль, является гомоморфным образом M^d, где $d = \dim H$. Это означает, что каноническое отображение

$$\alpha : \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \otimes_B M \to N$$

сюръективно. Наиболее замысловатая часть состоит в том, чтобы показать, что $\operatorname{Ker} \alpha = 0$. Читатель может почерпнуть детали из [56, Theorem 3.1].

Итак, $N \cong F \otimes_B M$, где $F = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$. Заметим, что F — это $\mathcal{H}$-эквивариантный правый B-модуль. Согласно теореме 2.1, F^n — свободный B-модуль для некоторого $n > 0$. Поскольку M и N конечно порождены в $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, то выводим, что F конечно порождён в $\mathcal{M}_B$. Отсюда $F^n \cong B^r$ в $\mathcal{M}_B$ для некоторого целого $r > 0$. Это влечёт $N^n \cong F^n \otimes_B M \cong B^r \otimes_B M \cong M^r$ в $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, завершая доказательство.

В некоторых случаях заключение теоремы 3.8 почти очевидно. Предположим, что A — тело. Если все композиционные факторы N как A-бимодуля имеют равные левую и правую размерности над A, равенство левой и правой размерностей над A будет выполнено для каждого подбимодуля в N. Это происходит, когда H точечна и, в большей общности, когда все простые H-комодули имеют размерность над основным полем $\Bbbk$, не превосходящую 2. Чтобы увидеть это, заметим, что $A \otimes I$ является подбимодулем в N для каждого правого идеала I алгебры H^*. Беря композиционный ряд алгебры H^* как правого модуля над собой, получаем ряд подбимодулей в $A \otimes H^*$ с факторами, изоморфными $A \otimes V$ для различных простых правых H^*-модулей V, где правое действие алгебры A на $A \otimes V$ происходит из ρ. Имеем $\dim V \leqslant 2$ для каждого V согласно предыдущим предположениям об H. Левая и правая размерности бимодуля $A \otimes V$ над A равны $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то $A \otimes V$ не может содержать нетривиальных подбимодулей. Если $\dim V = 2$, то A-бимодуль $A \otimes V$ либо прост, либо имеет в точности два композиционных фактора, левая и правая размерности над A каждого из которых равны 1.

Другой подход к результатам конечности использует след $\hat{t} : A \to A^H$, доставляемый действием на A левого интеграла $t \in H$. Заметим, что $\hat{t}$ — левосторонне и правосторонне A^H-линейное отображение. В частности, $\hat{t}$ сюръективен тогда и только тогда, когда $ta = 1$ для некоторого $a \in A$.

В терминах комодульной структуры на A сюръективность $\hat{t}$ равносильна существованию *тотального интеграла* $H^* \to A$, который представляет собой гомоморфизм правых H^*-комодулей, переводящий $1 \in H^*$ в $1 \in A$ (см. [19]). Тотальные интегралы были введены Доем (см. [26]) для комодульных алгебр над произвольными алгебрами Хопфа.

Теорема 3.9 (см. [40]). *Предположим, что A — нётерова справа алгебра с сюръективным следом $\hat{t}$. Тогда A — нётеров правый A^H-модуль. Другими словами, подалгебра A^H нётерова справа и A конечно порождена как правый модуль над A^H.*

Этот результат сформулирован в [40, Theorem 4.4.2]. Для доказательства теоремы Монтгомери показывает, что решётка A^H-подмодулей любого правого A-модуля V вкладывается в решётку подмодулей индуцированного правого $A\#H$-модуля. В частности, решётка правых A^H-подмодулей алгебры A вкладывается в решётку правых идеалов алгебры $A\#H$. В явном виде это вложение получается сопоставлением A^H-подмодулю U в A правого идеала алгебры $A\#H$, порождённого $(U\#1)e$, где $e \in A\#H$ — такой идемпотент, что алгебра A^H изоморфна $e(A\#H)e$.

То же самое рассуждение показывает, что A^H артинова справа, если такова A.

Приводимая ниже лемма описывает вложения решёток подмодулей с нашей точки зрения на эквивариантные модули.

Лемма 3.10. *Пусть $M \in H\text{-}\mathcal{M}_A$. Если след $\hat{t} : A \to A^H$ сюръективен, то*:

(i) *решётка A^H-подмодулей M^H вкладывается в решётку A-подмодулей M*;

(ii) *M^H — артинов A^H-модуль, если M — артинов A-модуль*;

(iii) *M^H — нётеров A^H-модуль, если M — нётеров A-модуль.*

Доказательство. Имеем $t(vA) = vA^H$ для любого $v \in M^H$, поскольку отображение $A \to M$, при котором $a \mapsto va$, является H-линейным. Отсюда $t(UA) = U$ для каждого A^H-подмодуля U в M^H. Следовательно, сопоставление $U \mapsto UA$ даёт желаемое вложение решёток. Утверждения (ii) и (iii) немедленно вытекают из (i). □

Если A нётерова справа, то каждый конечно порождённый правый A-модуль нётеров. Значит, если M — некоторый A-конечный объект категории $H\text{-}\mathcal{M}_A$, то M^H — нётеров правый A^H-модуль по лемме 3.10. Для того чтобы вывести теорему 3.9 из леммы 3.10, нужно найти такой A-конечный объект $M \in H\text{-}\mathcal{M}_A$, что $M^H \cong A$ как правые A^H-модули. Вспомним, что объекты категории $H\text{-}\mathcal{M}_A$ отождествляются с левыми $A^{\mathrm{op}}\#H^{\mathrm{cop}}$-модулями. Пусть M — циклический свободный $A^{\mathrm{op}}\#H^{\mathrm{cop}}$-модуль со свободной образующей v. Поскольку линейное отображение $H \otimes A \to M$, $h \otimes a \mapsto h(va)$, биективно, то получаем $M^H = tM = t(vA)$. Поэтому сопоставление $a \mapsto t(va)$ определяет желаемый A^H-линейный изоморфизм $A \to M^H$.

Предложение 3.11. *Предположим, что H полупроста и что A полупримарна и H-полупервична. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *каждый устойчивый относительно действия H односторонний идеал алгебры A порождается H-инвариантным идемпотентом*;

(ii) *подкольцо инвариантов A^H полупростое артиново*;

(iii) *A конечно порождена как A^H-модуль слева и справа.*

Доказательство. По теореме 2.8 A артинова, а по теореме 2.10 все объекты категории $H\text{-}\mathcal{M}_A$ полупросты. В частности, второе заключение применимо к A. Это означает, что если I — устойчивый относительно действия H правый идеал алгебры A, то существует такой устойчивый относительно действия H правый идеал J, что $A = I \oplus J$. Тогда $I = eA$ для некоторого идемпотента $e \in A$. Имеем $e = p(1)$, где p — проекция алгебры A на I с ядром J. Поскольку $1 \in A^H$ и p является H-линейным отображением, то получаем $e \in A^H$. Это доказывает утверждение (i) для правых идеалов. Рассматривая H^{cop}-модульную алгебру A^{op}, получаем (i) также для левых идеалов.

Пусть U — любой правый идеал алгебры A^H. Тогда UA — устойчивый относительно действия H правый идеал алгебры A. В силу (i), UA порождается идемпотентом $e \in A^H$. По лемме 3.10, применённой к $M = A$, решётка правых идеалов алгебры A^H вкладывается в решётку правых идеалов алгебры A. Поскольку правый идеал eA^H алгебры A^H имеет то же самое расширение в A, что и U, то выводим, что $U = eA^H$. Таким образом, каждый правый идеал алгебры A^H порождается идемпотентом. Это даёт (ii). Наконец, (iii) следует из теоремы 3.9. □

Нами дано самодостаточное доказательство. Давно было известно, что алгебра A^H полупростая артинова при условии, что такова $A\#H$ (см. [20, Theorem 3.13]). Тот факт, что в предположениях предложения 3.11 $A\#H$ полупростая артинова, был установлен в [57] (см. теорему 2.10).

4. Локализация в инвариантах и теорема типа Бергмана—Айзекса

В [54] было показано, что для полупростой алгебры Хопфа H все нётеровы справа H-модульные алгебры имеют, говоря неформально, «достаточно много» H-инвариантных элементов. Доказательства этих результатов обращались к нескольким утверждениям из [57], которые служили промежуточными шагами в процессе установления существования артиновых классических колец частных. Но на самом деле нужно только завершающее заключение из [57], и следовательно упомянутые результаты из [54] справедливы для большего класса H-модульных алгебр. Это будет объяснено ниже.

Предположим, что H-полупервичная H-модульная алгебра A имеет артиново справа классическое правое кольцо частных Q. По теореме 2.14 структура H-модуля распространяется на Q. Ясно, что Q обязана быть H-полупервичной алгеброй, поскольку $J \cap A \neq 0$ для каждого её ненулевого правого идеала J. Следовательно, все результаты, касающиеся артиновых H-полупервичных алгебр, применимы к Q.

Правый идеал I кольца R называется *существенным*, если I имеет ненулевое пересечение с каждым ненулевым правым идеалом кольца R.

Лемма 4.1. *Предположим, что A является H-полупервичной и A имеет артиново справа классическое правое кольцо частных Q. Для правого идеала I алгебры A обозначим через I_H наибольший устойчивый относительно действия H правый идеал алгебры A, содержащийся в I. Следующие условия эквивалентны*:

(a) *I_H — существенный правый идеал алгебры A*;
(b) *I содержит регулярный элемент алгебры A.*

Доказательство. Предположим, что I_H — существенный правый идеал алгебры A. Тогда I_HQ — существенный правый идеал кольца Q. Но I_HQ устойчив относительно действия H; следовательно, этот правый идеал порождается идемпотентом $e \in Q$ согласно следствию 2.7. Поскольку $eQ \cap (1-e)Q = 0$, то мы должны иметь $e = 1$, т.е. $I_HQ = Q$. Тогда $1 = as^{-1}$ для некоторого $a \in I_H$ и регулярного элемента $s \in A$. Таким образом, $s = a \in I_H$, а это доказывает, что (a)⇒(b).

Предположим теперь, что I содержит регулярный элемент s алгебры A. Заметим, что

$$I_H = \{a \in A \mid Ha \subset I\} = \{a \in A \mid \rho(a) \in I \otimes H^*\}.$$

Нужно доказать, что I_H — существенный правый идеал алгебры A. Предположим, что $I_H \cap bA = 0$ для некоторого $b \in A$, $b \neq 0$. Тогда $(I \otimes H^*) \cap \rho(bA) = 0$. В частности,

$$(sA \otimes H^*) \cap \rho(bA) = 0.$$

Поскольку $s \otimes 1$ — регулярный элемент кольца $A \otimes H^*$, то отсюда следует, что сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty} (s^n \otimes 1)\, \rho(bA)$$

прямая, причём каждое слагаемое — ненулевой правый $\rho(A)$-подмодуль в $A \otimes H^*$. Теперь рассмотрим $F = A \otimes H^*$ как правый A-модуль относительно действия алгебры A, задаваемого правыми умножениями на элементы $\rho(a)$, $a \in A$. Мы знаем, что этот A-модуль свободен с рангом, равным размерности H. Поэтому $F \otimes_A Q$ — конечно порождённый правый Q-модуль, содержащий бесконечную прямую сумму ненулевых подмодулей. Однако это невозможно, поскольку Q артиново справа. Итак, $I_H \cap bA \neq 0$ всякий раз, когда $b \neq 0$, и, значит, (b)⇒(a). □

Лемма 4.2. *Предположим, что H полупроста, A является H-полупервичной и A имеет артиново справа классическое правое кольцо частных Q. Пусть I — устойчивый относительно действия H правый идеал алгебры A, и пусть $I^H = I \cap A^H$.*

(i) *Если $I^H = 0$, то $I = 0$.*
(ii) *Если I — существенный правый идеал алгебры A, то $Q^H I^H = Q^H$ и $I^H Q^H = Q^H$.*

Доказательство. В силу предложения 3.11, Q^H — полупростое артиново кольцо и Q имеет конечную длину, и как левый, и как правый Q^H-модуль.

Рассмотрим (Q^H, A)-подбимодуль $Q^H I$ в Q. Для каждого регулярного элемента s алгебры A Q^H-подмодуль $Q^H Is$ изоморфен $Q^H I$. Поэтому эти два Q^H-модуля имеют одинаковую длину. Поскольку $Q^H Is \subset Q^H I$, то получаем $Q^H Is = Q^H I$, и следовательно $Q^H Is^{-1} = Q^H I$.

Отсюда следует, что $Q^H I$ — правый идеал кольца Q. Поскольку он устойчив относительно действия H, то предложение 3.11 даёт $Q^H I = eQ$ для некоторого $e \in Q^H$. Пусть $t \in H$ — интеграл. Действие t на Q коммутирует с левыми и правыми умножениями на H-инвариантные элементы. Поэтому
$$e \in eQ^H = t(eQ) = t(Q^H I) = Q^H I^H.$$
Если $I^H = 0$, то вышестоящее включение влечёт $e = 0$, т.е. $I = 0$. Это доказывает (i).

Предположим, что I — существенный правый идеал алгебры A. По лемме 4.1 $I = I_H$ содержит регулярный элемент алгебры A, так что $IQ = Q$. Поскольку $Q^H I$ — правый идеал кольца Q, содержащий I, то также получаем $Q^H I = Q$. Предыдущее рассуждение с $e = 1$ показывает, что $1 \in Q^H I^H$. Таким образом, $Q^H = Q^H I^H$.

Теперь рассмотрим устойчивый относительно действия H правый идеал $I^H Q$ кольца Q. По теореме 2.10 существует такой устойчивый относительно действия H правый идеал J кольца Q, что $Q = I^H Q \oplus J$. Тогда $I \cap J$ — устойчивый относительно действия H правый идеал алгебры A, обладающий свойством
$$(I \cap J)^H = I^H \cap J = 0.$$
Как уже было доказано в части (i), это влечёт $I \cap J = 0$. Поскольку $IQ = Q$, то любой элемент $y \in J$ может быть записан в виде $y = as^{-1}$, где $a \in I$ и s — регулярный элемент алгебры A; тогда $a \in I \cap J$, так что $a = 0$ и $y = 0$. Следовательно, $J = 0$ и $Q = I^H Q$. Отсюда
$$Q^H = tQ = t(I^H Q) = I^H Q^H,$$
и всё сделано. □

Теорема 4.3. *Предположим, что H полупроста, A является H-полупервичной и A имеет артиново справа классическое правое кольцо частных Q. Обозначим через Σ множество всех регулярных элементов алгебры A^H, а через $\mathcal{E}$ — множество всех правых идеалов алгебры A, удовлетворяющих эквивалентным условиям* (a) *и* (b) *леммы* 4.1. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *алгебра A^H — полупервичное правое кольцо Голди*;
(ii) *Σ — правое подмножество Оре регулярных элементов алгебры A*;
(iii) *Q канонически изоморфно правой локализации кольца A относительно множества Σ*;
(iv) *классическое правое кольцо частных алгебры A^H изоморфно Q^H*;
(v) *$I \cap \Sigma \neq \varnothing$ для каждого правого идеала $I \in \mathcal{E}$.*

Доказательство. Положим $I^H = I \cap A^H$ и $\mathcal{F} = \{I^H \mid I \in \mathcal{E}\}$. Если $I, J \in \mathcal{E}$, то $I \cap J \in \mathcal{E}$, откуда $I^H \cap J^H = (I \cap J)^H \in \mathcal{F}$. Следовательно, $\mathcal{F}$ есть фильтр правых идеалов алгебры A^H. Если $I \in \mathcal{E}$

и $a \in A^H$, то правый идеал $I_a = \{x \in A \mid ax \in I_H\}$ существенный и устойчивый относительно действия H; поэтому $I_a \in \mathcal{E}$ и $I_a^H \in \mathcal{F}$. Также $aI_a^H \subset I^H$, поскольку $aI_a \subset I_H \subset I$. Это показывает, что $\mathcal{F}$ — топологизирующий фильтр.

Более того, $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям (a) и (b) предложения 2.13, с заменой A на A^H и Q на Q^H. Действительно, если $I \in \mathcal{E}$, то I^H имеет нулевые левый и правый аннуляторы в Q, поскольку $I^H Q$ и QI^H содержат единицу 1 по лемме 4.2. Если $q \in Q^H$, то существует такой регулярный элемент s алгебры A, что $qs \in A$. Положим $K = sA$. Тогда $K \in \mathcal{E}$ по лемме 4.1 и $qK \subset A$. Отсюда $K^H \in \mathcal{F}$ и $qK^H \subset A^H$.

Уже было отмечено, что кольцо Q^H полупростое артиново. Теперь (iv) следует из предложения 2.13, а (i) есть его следствие, поскольку кольцо R является полупервичным правым кольцом Голди тогда и только тогда, когда R имеет полупростое артиново классическое правое кольцо частных.

При условии $I \in \mathcal{E}$, равенство $I^H Q^H = Q^H$ из леммы 4.2 означает, что $I^H \cap \Sigma \neq \varnothing$, а это сводится к (v). Для любого $q \in Q$ множество

$$I = \{x \in A \mid qx \in A\}$$

есть правый идеал алгебры A, содержащий регулярный элемент алгебры A. Согласно лемме 4.1, $I \in \mathcal{E}$. Поскольку $qI \subset A$, то утверждение (v) показывает, что $qs \in A$ для некоторого $s \in \Sigma$.

Все элементы из Σ обратимы в Q^H и, следовательно, в Q. Поэтому все элементы из Σ регулярны в A. Поскольку каждый элемент кольца Q может быть записан в виде as^{-1} для некоторых $a \in A$ и $s \in \Sigma$, то немедленно получаем (ii) и (iii) (см. [37, 2.2.4]). □

Во всех нижеследующих следствиях мы продолжаем предполагать, что H полупроста.

Следствие 4.4. *Пусть алгебра A удовлетворяет условиям теоремы* 4.3. *Если s — любой регулярный элемент алгебры A, то правый идеал sA содержит H-инвариантный регулярный элемент алгебры A.*

Доказательство. Поскольку $sA \in \mathcal{E}$ по лемме 4.1, то имеем $sA \cap \Sigma \neq \varnothing$ в силу теоремы 4.3. □

Следствие 4.5. *Пусть A и Q — такие же, как в теореме* 4.3 *и пусть I — любой устойчивый относительно действия H правый идеал алгебры A. Существует такой $x \in I^H$, что $IQ = xQ$.*

Доказательство. Поскольку IQ — устойчивый относительно действия H правый идеал кольца Q, то имеем $IQ = eQ$ для некоторого $e \in Q^H$ по предложению 3.11. Теперь $J = \{a \in A \mid ea \in I\}$ — устойчивый относительно действия H правый идеал алгебры A, содержащий регулярный элемент алгебры A. Поэтому $J \cap \Sigma \neq \varnothing$ по следствию 4.4. Выберем любой $s \in J \cap \Sigma$ и положим $x = es$. Тогда $x \in I \cap Q^H = I^H$. Поскольку s обратим в Q, то получаем $eQ = xQ$. □

Следствие 4.6. *Все заключения теоремы* 4.3, *а также следствия* 4.4, 4.5 *выполняются в каждом из следующих трёх случаев*:

(a) *A — полупервичное правое кольцо Голди*;
(b) *A нётерова справа и H-полупервична*;
(c) *A является H-полупервичной PI алгеброй с конечным числом минимальных H-первичных идеалов.*

Доказательство. Артиново справа классическое правое кольцо частных Q существует в случае (a) по теореме Голди, в других случаях по теоремам 2.11 и 2.12. □

В предположении, что алгебра $A\#H$ полупервична, короткое рассуждение, приведённое Бергеном и Монтгомери (см. [12, Proposition 2.4]) показывает, что A^H полупервична и что $\hat{t}(I) \neq 0$, где $\hat{t} : A \to A^H$ — отображение следа, (в частности, $I^H \neq 0$) для каждого ненулевого устойчивого относительно действия H одностороннего идеала I алгебры A. Из этого в [12, Lemma 3.4] было далее выведено, среди прочего, что регулярные элементы алгебры A^H регулярны в A и что A^H

есть кольцо Голди, когда таковым является A. Если A, Q, H — такие же, как в теореме 4.3, то $Q\#H$ — полупростое артиново кольцо по теореме 2.10; поскольку $Q\#H$ — классическое правое кольцо частных алгебры $A\#H$, то отсюда следует, что $A\#H$ полупервична. Этот факт не был известен в то время, когда работа [12] была написана.

Несколько более глубоких результатов из [12] используют предположение о том, что $A\#H$ не только полупервична, но обладает *свойством пересечения для идеалов* (IIP, для краткости), которое означает, что каждый ненулевой идеал алгебры $A\#H$ имеет ненулевое пересечение с A. На самом деле при наличии IIP алгебра $A\#H$ полупервична тогда и только тогда, когда A является H-полупервичной. Свойство IIP удовлетворяется для X-внешних действий групп на полупервичных кольцах и для X-внешних действий алгебр Ли на первичных кольцах. По всей видимости, однако, не существует подходов к аналогам таких результатов для действий произвольных конечномерных или даже полупростых алгебр Хопфа.

В [12] был задан вопрос, верно ли, что $Q(A)^H = Q(A^H)$, когда $A\#H$ полупервична со свойством IIP. Пункт (iv) теоремы 4.3 отвечает на этот вопрос, накладывая разумные условия на A и H, но не предполагая IIP. В случае конечной группы G, действующей на полупервичном кольце R без аддитивного $|G|$-кручения, тот факт, что R^G — правое кольцо Голди тогда и только тогда, когда R — правое кольцо Голди, и равенство $Q(R)^G = Q(R^G)$ были доказаны Харченко (см. [7]); также было отмечено Монтгомери (см. [38]), что $Q(R)$ — локализация кольца R относительно множества Оре регулярных G-инвариантных элементов. Аналоги этих результатов для колец, градуированных группой, принадлежат Коэн и Роуену (см. [21]).

Имеется несколько более слабый вариант леммы 4.2 для устойчивых относительно действия H левых идеалов. Равенство $Q^H I^H = Q^H$ в (ii) не может быть доказано, если только Q не является двусторонним кольцом частных.

Лемма 4.7. *Предположим, что H полупроста, A является H-полупервичной и A имеет артиново справа классическое правое кольцо частных Q. Пусть I — устойчивый относительно действия H левый идеал алгебры A, и пусть $I^H = I \cap A^H$.*

(i) *Если $I^H = 0$, то $I = 0$.*
(ii) *Если $QI = Q$, то $I^H Q^H = Q^H$.*

Доказательство. Повторим шаги доказательства леммы 4.2 с использованием двусторонних свойств кольца Q. Во-первых, (A, Q^H)-подбимодуль IQ^H есть левый идеал кольца Q, поскольку Q имеет конечную длину как правый Q^H-модуль. Далее, $IQ^H = Qe$ для некоторого $e \in Q^H$ по предложению 3.11. Применяя интеграл t, выводим, что $e \in I^H Q^H$.

Если $I^H = 0$, то $e = 0$, откуда $I = 0$. Если $QI = Q$, то $IQ^H = Q$ и, следовательно, $1 \in I^H Q^H$. □

Теорема 4.8. *Обозначим через N первичный радикал алгебры A и через N_H — наибольший устойчивый относительно действия H идеал алгебры A, содержащийся в N. Предположим, что H полупроста, N нильпотентен и A/N_H имеет артиново справа классическое правое кольцо частных. Если I — такой устойчивый относительно действия H односторонний идеал алгебры A, что I^H нильпотентен, то I нильпотентен.*

Доказательство. Обозначим через π канонический сюръективный гомоморфизм H-модульных алгебр $A \to A/N_H$. Тогда $\pi(I)$ — устойчивый относительно действия H односторонний идеал алгебры A/N_H и π отображает I^H на $\pi(I)^H$, поскольку H полупроста. Поэтому $\pi(I)^H$ нильпотентен. Факторалгебра A/N_H является H-полупервичной, поскольку N_H — H-полупервичный идеал алгебры A. Значит, её подкольцо инвариантов $(A/N_H)^H$ полупервично по теореме 4.3, что влечёт $\pi(I)^H = 0$. Применение лемм 4.2 и 4.7 даёт $\pi(I) = 0$, т.е. $I \subset N$. Таким образом, I нильпотентен. □

Следствие 4.9. *Предположим, что H полупроста. Заключение теоремы* 4.8 *выполняется в каждом из следующих трёх случаев*:

(a) *A нётерова слева;*
(b) *A нётерова справа;*
(c) *A — конечно порождённая PI алгебра.*

Доказательство. Во всех случаях известно, что N нильпотентен. В случаях (b) и (c) H-полупервичная факторалгебра A/N_H имеет артиново справа классическое правое кольцо частных по теоремам 2.11 и 2.12. В случае (a) применим теорему 4.8 к нётеровой справа H^{cop}-модульной алгебре A^{op}. □

Пусть R — кольцо без единицы и G — конечная группа его автоморфизмов, причем что R не имеет аддитивного $|G|$-кручения. Рассмотрим отображение следа

$$\hat{t} : R \to R^G, \quad \hat{t}(a) = \sum_{g \in G} ga.$$

Классический результат Бергмана и Айзекса (см. [13]) гласит, что R нильпотентно, если $\hat{t}(R)$ нильпотентно. Более того, если $\hat{t}(R) = 0$, то индекс нильпотентности кольца R ограничен числом, зависящим только от порядка $|G|$ группы G, но не от кольца R. Лёгкое следствие этого результата состоит в том, что R^G полупервично, когда таковым является R.

Подобный результат, доказанный Коэн и Роуеном (см. [21]), для колец, градуированных группой, даже проще: если $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ — кольцо без единицы, градуированное конечной группой, и если $R_1^d = 0$ для некоторого целого $d > 0$, то $R^{d|G|} = 0$. На самом деле требуется только градуировка с конечным носителем, в то время как группа G может быть бесконечной.

Теорема 4.8 отличается не только тем, что заключение сформулировано для односторонних идеалов H-модульных алгебр, удовлетворяющих некоторым условиям, но также потому, что она существенно опирается на H-полупервичный случай. Индекс нильпотентности идеала I может быть ограничен только индексом нильпотентности идеала N_H, даже когда $I^H = 0$.

Бахтурин и Линченко (см. [10]) исследовали условия, при которых можно заключить, что A является PI алгеброй, когда известно, что A^H есть PI алгебра. Они показали, что для фиксированной конечномерной алгебры Хопфа H, для того чтобы каждая H-модульная алгебра A удовлетворяла полиномиальному тождеству всякий раз, когда A^H есть PI алгебра, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое натуральное число n, что $A^n = 0$ для каждой H-модульной алгебры A без единицы с условием $A^H \cdot A^H = 0$, причём это может происходить только, если H полупроста. Несколько других эквивалентных условий приведены в [10]. Эта работа Бахтурина и Линченко выявляет необходимость более точного аналога результата Бергмана—Айзекса для действий алгебр Хопфа.

5. Хопфовы действия на коммутативных алгебрах

Во всём разделе предполагается, что A — *коммутативная* H-модульная алгебра. Сначала мы собираемся вспомнить алгебраическую интерпретацию классического результата о факторах аффинных схем по действиям конечных групповых схем.

Для заданной ассоциативной алгебры U над коммутативным кольцом R, такой, что U — свободный R-модуль конечного ранга, *норма* $\mathrm{Nm}_{U/R}(u) \in R$ элемента $u \in U$ вводится как определитель оператора $L_u \in \mathrm{End}_R U$ левого умножения на u в U. Рассматривая кольцо многочленов $U[t]$, где t — независимая переменная, как алгебру над $R[t]$, получаем также *характеристический многочлен*

$$P_{U/R}(u, t) = \mathrm{Nm}_{U[t]/R[t]}(t - u) = \det(t \cdot \mathrm{Id} - L_u) \in R[t].$$

В частности, $(-1)^r \mathrm{Nm}_{U/R}(u)$, где $r = \mathrm{rank}_R U$, — это коэффициент при t^0 в этом многочлене. Переходя к локализациям базового кольца R, эти определения распространяются на случай, где U не свободен как R-модуль, а только проективен конечного постоянного ранга.

По теореме Гамильтона—Кэли $P_{U/R}(u, L_u) = 0$ в $\operatorname{End}_R U$. Применяя этот оператор к единице $1 \in U$, получаем $P_{U/R}(u, u) = 0$ в U, что представляет собой соотношение целой зависимости элемента u над кольцом R. Целая зависимость U над R — это просто следствие конечности как модуля. Что важно для приложений к инвариантам — это обстоятельство, что характеристические многочлены обладают несколькими хорошими свойствами. В частности, они функториальны в том смысле, что для заданного гомоморфизма коммутативных колец $\zeta : R \to R'$, имеем

$$P_{R' \otimes_R U/R'}(1 \otimes u, t) = \zeta^t P_{U/R}(u, t),$$

где $\zeta^t : R[t] \to R'[t]$ — гомоморфизм, продолжающий ζ и переводящий t в t.

Поскольку A коммутативно, то отображение

$$\iota : A \to A \otimes H^*, \quad a \mapsto a \otimes 1,$$

есть изоморфизм A на центральную подалгебру в $A \otimes H^*$. Таким образом, можно рассматривать $A \otimes H^*$ как A-алгебру посредством ι. Ясно, что эта алгебра — свободный A-модуль ранга $d = \dim H$. Тем самым многочлен $P_{A \otimes H^*/A}(u, t)$ определён для каждого $u \in A \otimes H^*$. Используя комодульную структуру $\rho : A \to A \otimes H^*$, получаем многочлен

$$P_{A \otimes H^*/A}\bigl(\rho(a), t\bigr) \in A[t]$$

для $a \in A$. Предположим, что

$$P_{A \otimes H^*/A}\bigl(\rho(a), t\bigr) = t^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i t^i, \quad \text{где } c_0, \ldots, c_{d-1} \in A.$$

Тогда

$$\rho(a)^d + \sum_{i=0}^{d-1} (c_i \otimes 1) \rho(a)^i = 0 \quad \text{в } A \otimes H^*.$$

Применяя к левой части этого равенства гомоморфизм алгебр $\mathrm{id} \otimes \varepsilon : A \otimes H^* \to A$, получаем

$$a^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i a^i = 0.$$

Если $c_i \in A^H$ для всех i, вышестоящее соотношение показывает, что a цел над A^H. На этом наблюдении основано классическое рассуждение, воспроизводимое в следующей теореме.

Теорема 5.1. *Предположим, что H кокоммутативна. Тогда для каждого $a \in A$ характеристический многочлен $P_{A \otimes H^*/A}\bigl(\rho(a), t\bigr)$ имеет все коэффициенты в A^H. В частности, A цела над A^H.*

Доказательство. В силу условий, наложенных на H, двойственная алгебра Хопфа H^* коммутативна, откуда также $A \otimes H^*$ коммутативна. Поскольку A^H есть уравнитель двух гомоморфизмов алгебр $\iota, \rho : A \to A \otimes H^*$, то мы должны показать, что

$$\iota^t P_{A \otimes H^*/A}\bigl(\rho(a), t\bigr) = \rho^t P_{A \otimes H^*/A}\bigl(\rho(a), t\bigr). \tag{$*$}$$

Заметим, что коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & A \otimes H^* \\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\iota \otimes \mathrm{id}} \\ A \otimes H^* & \xrightarrow{\iota'} & A \otimes H^* \otimes H^* \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & A \otimes H^* \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho \otimes \mathrm{id}} \\ A \otimes H^* & \xrightarrow{\iota'} & A \otimes H^* \otimes H^* \end{array}$$

где $\iota'(x) = x \otimes 1$ для $x \in A \otimes H^*$, кодекартовы в категории коммутативных A-алгебр в том смысле, что каждая диаграмма превращает $A \otimes H^* \otimes H^*$ в тензорное произведение двух A-

алгебр, задаваемых соответствующими гомоморфизмами $A \to A \otimes H^*$. Поэтому $(*)$ может быть переписано в виде

$$P_{A\otimes H^*\otimes H^*/A\otimes H^*}\big((\iota\otimes \mathrm{id})\rho(a), t\big) = P_{A\otimes H^*\otimes H^*/A\otimes H^*}\big((\rho\otimes \mathrm{id})\rho(a), t\big) \qquad (**)$$

в силу функториальности характеристических многочленов. Здесь $A \otimes H^* \otimes H^*$ рассматривается как $A \otimes H^*$-алгебра посредством ι'. Далее, имеется автоморфизм φ алгебры $A \otimes H^* \otimes H^*$, определяемый правилом

$$\varphi(x \otimes \xi) = (x \otimes 1)(1 \otimes \Delta\xi) \quad \text{для } x \in A \otimes H^* \text{ и } \xi \in H^*.$$

Поскольку φ действует на $A \otimes H^* \otimes 1$ как тождественный оператор, то имеем

$$P_{A\otimes H^*\otimes H^*/A\otimes H^*}(y, t) = P_{A\otimes H^*\otimes H^*/A\otimes H^*}\big(\varphi(y), t\big)$$

для всех $y \in A \otimes H^* \otimes H^*$. Если $y = (\iota \otimes \mathrm{id})\rho(a)$, то $\varphi(y) = (\mathrm{id} \otimes\Delta)\rho(a) = (\rho \otimes \mathrm{id})\rho(a)$. Отсюда и следует $(**)$. $\square$

При помощи перехода от A к $A[t]$ заключение теоремы 5.1 может быть выведено из факта, что

$$\mathrm{Nm}_{A\otimes H^*/A}\big(\rho(a), t\big) \in A^H \quad \text{для всех } a \in A.$$

Обоснование этого включения в вышеизложенном доказательстве теоремы 5.1 тавтологично, если не принимать во внимание различные обозначения и использование правых комодульных структур вместо левых, приведённому в книге Мамфорда об абелевых многообразиях [43, Chap. III, Sec. 12]. Демазюр и Габриэль описывают факторы по действиям конечных групповых схем в [25, Chap. III, Sec. 2, Corollary 6.1] как специальный случай более общего результата о факторах группоидных схем [25, Chap. III, Sec. 2, Theorem 3.2].

Таким образом, теорема 5.1 — очень давний результат. Так или иначе, в течение некоторого времени в прошлом он не был хорошо известен специалистам по теории алгебр Хопфа. Целая зависимость над инвариантами коммутативных комодульных алгебр над коммутативными алгебрами Хопфа была переоткрыта Феррер Сантосом в [31]. На языке модульных алгебр, этот подход был переформулирован Монтгомери (см. [40, Sec. 4.2]). Он использует характеристические многочлены эндоморфизмов эквивариантных A-модулей.

В [40] Монтгомери подняла вопрос о том, будет ли A всегда цела над A^H в случае произвольной конечномерной алгебры Хопфа H. Для точечных алгебр Хопфа вскоре был дан положительный ответ на этот вопрос Артамоновым (см. [2]), когда A — область целостности, и без каких-либо ограничений на A Тотоком (см. [8]) и Жу (см. [58]), когда $\mathrm{char}\,\Bbbk > 0$. В [8, 58] приведены контрпримеры к целой зависимости в характеристике 0. Жу также доказал, что A цела над A^H, когда H инволютивна, т.е. $S^2 = \mathrm{id}$, и $\mathrm{char}\,\Bbbk$ не делит размерность алгебры H. В то время осталось не известным, что же в действительности необходимо для выполнения свойства целой зависимости.

Характеристические многочлены вновь появились в дальнейшем развитии событий.

Теорема 5.2 (см. [50])**.** *Если A является H-полупервичной или, в большей общности, если существует такой гомоморфизм коммутативных H-модульных алгебр $\varphi : A' \to A$, что $A = \varphi(A')A^H$ и A' является H-полупервичной, то для каждого $a \in A$ многочлен $P_{A\otimes H^*/A}\big(\rho(a), t\big)$ имеет все коэффициенты в A^H. В частности, A цела над A^H.*

Случай, когда A является H-полупервичной, представляющий здесь основной шаг, был поглощён недавней работой Еряшкина [5] об инвариантах H-модульных PI алгебр. Эти результаты будут обсуждаться в разделе 7. Первоначальное доказательство теоремы 5.2 имело общие элементы с доказательством теоремы 7.5, но оно не использовало колец частных Мартиндейла.

Если A содержит ненулевой устойчивый относительно действия H нильпотентный идеал, то целая зависимость над инвариантами может оказаться потерянной ввиду уже упомянутых примеров Тотока и Жу. Всё же имеются два важных случая, когда H-полупервичность не требуется.

Следствие 5.3. *Алгебра A цела над A^H в каждом из следующих двух случаев*:

(a) *отображение следа* $A \to A^H$ *сюръективно*;
(b) $\operatorname{char} \Bbbk = p > 0$.

Доказательство. Пусть N — наибольший устойчивый относительно действия H идеал алгебры A, содержащийся в нильрадикале алгебры A. Поскольку $B = A/N$ является H-полупервичной алгеброй, то теорема 5.2 показывает, что B цела над B^H. Пусть $\pi : A \to B$ — каноническое отображение.

В случае (a) $\pi(A^H) = B^H$. Следовательно, для каждого $a \in A$ существует такой многочлен $f \in A^H[t]$ со старшим коэффициентом 1, что $f(a) \in N$. Тогда $f(a)^n = 0$ для некоторого целого $n > 0$, поскольку N — ниль-идеал. Поэтому a цел над A^H.

Предположим, что $\operatorname{char} \Bbbk = p > 0$. Обозначим $A' = \pi^{-1}(B^H)$. Как и в случае (a) проверяется, что A цела над A'. Мы утверждаем, что для каждого $c \in A'$ существует такое $n > 0$, что $c^{p^n} \in A^H$. Действительно, $\rho(c) - c \otimes 1 \in N \otimes H^*$, поскольку $\pi(c) \in B^H$. Отсюда следует, что $\rho(c) - c \otimes 1$ нильпотентен. Поэтому

$$\rho(c^{p^n}) - c^{p^n} \otimes 1 = (\rho(c) - c \otimes 1)^{p^n} = 0$$

для достаточно большого n, но это и означает, что $c^{p^n} \in A^H$. Таким образом, A' цела над A^H, и завершающее заключение следует из транзитивности целой зависимости. □

В [58] Жу высказал гипотезу, что A цела над A^H всякий раз, когда H инволютивна. Над полем характеристики 0 известно, что H инволютивна тогда и только тогда, когда H полупроста. В этом случае след $A \to A^H$ сюръективен. Таким образом, гипотеза Жу вытекает из следствия 5.3. Однако в случае, когда $\operatorname{char} \Bbbk > 0$, вопрос о целой зависимости не зависит от каких-либо условий на H.

Как обратили внимание Кальнюк и Тыц (см. [32]), тот факт, что в положительной характеристике каждая коммутативная H-модульная алгебра цела над инвариантами, влечёт свойство H, аналогичное геометрической редуктивности, известной в теории алгебраических групп. Это свойство рассматривалось в [32] для необязательно конечномерной алгебры Хопфа H, и его главное следствие состоит в том, что всякий раз, когда A — конечно порождённая коммутативная H-модульная алгебра, на которой действие H локально конечно, алгебра инвариантов A^H конечно порождена. Когда $\operatorname{char} \Bbbk > 0$, каждая конечномерная алгебра Хопфа геометрически редуктивна в этом смысле (см. [32, Theorem 4]. Этот результат может быть переформулирован следующим образом.

Теорема 5.4 (см. [32]). *Предположим, что* $\operatorname{char} \Bbbk = p > 0$. *Если* $\varphi : A \to B$ — *сюръективный гомоморфизм коммутативных* H*-модульных алгебр и* $b \in B^H$, *то* $b^n \in \varphi(A^H)$ *для некоторого целого* $n > 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда A и B градуированы, φ уважает градуировки и b — однородный элемент степени 1. Пусть B' — подалгебра в B, порождённая b, и пусть $A' = \varphi^{-1}(B')$. Поскольку A' цела над A'^H по следствию 5.3, то $B' = \varphi(A')$ цела над $\varphi(A'^H)$. Но $\varphi(A'^H)$ — градуированная подалгебра в B'. Если $\varphi(A'^H) = \Bbbk$, то b цел над $\Bbbk$, а в этом случае b должен быть нильпотентным. Иначе $\varphi(A'^H)$ содержит однородный элемент положительной степени. Но каждая однородная компонента алгебры B' натянута на степень элемента b. Отсюда $b^n \in \varphi(A^H)$ для некоторого n при любом раскладе.

В общем случае пусть $\varphi^t : A[t] \to B[t]$ — продолжение φ на кольца многочленов. Распространим действие H на $A[t]$ и $B[t]$, делая t инвариантным. Тогда $bt \in B[t]$ — однородный H-инвариантный элемент степени 1, и, таким образом, мы находимся в ситуации предыдущего случая. □

Целая зависимость A над A^H влечёт несколько хорошо известных хороших свойств расширения колец $A^H \subset A$. В частности, каноническое отображение $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A^H$ между спектрами простых идеалов сюръективно, замкнуто и удовлетворяет свойству подъёма. Однако для более глубоких заключений одной целой зависимости недостаточно, и характеристические многочлены вступают в действие существенным образом.

Теорема 5.5 (см. [50]). *Предположим, что для каждого $a \in A$ характеристический многочлен $P_{A\otimes H^*/A}\big(\rho(a), t\big)$ имеет все коэффициенты в A^H. Тогда отображение $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A^H$ открыто, имеет конечные слои и обладает свойством спуска.*

Теорема 5.5 и её доказательство обобщают классические результаты, описывающие свойства факторного морфизма $X \to X/G$, где X — аффинная схема и X/G — её фактор по действию конечной групповой схемы.

Имеются дальнейшие применения техники, используемой при изучении действий групповых схем. Для каждого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ обозначим через $k(\mathfrak{p})$ поле вычетов локального кольца $A_\mathfrak{p}$. Пусть $\alpha_\mathfrak{p} : A \to k(\mathfrak{p})$ — канонический гомоморфизм колец. Суперпозиция

$$\delta_\mathfrak{p} : A \xrightarrow{\rho} A \otimes H^* \xrightarrow{\alpha_\mathfrak{p}\otimes \mathrm{id}} k(\mathfrak{p}) \otimes H^*$$

является гомоморфизмом H-модульных алгебр в предположении, что H действует тривиально на $k(\mathfrak{p})$ и посредством $\rightharpoonup$ (left hits) на H^*. Отсюда следует, что

$$O(\mathfrak{p}) = \big(k(\mathfrak{p}) \otimes 1\big) \cdot \delta_\mathfrak{p}(A)$$

— это коммутативная право-коидеальная подалгебра алгебры Хопфа $k(\mathfrak{p}) \otimes H^*$ над полем $k(\mathfrak{p})$. В [50] подалгебра $O(\mathfrak{p})$ была названа *орбитальной подалгеброй*, ассоциированной с $\mathfrak{p}$.

Когда H кокоммутативна и G — конечная групповая схема, представимая коммутативной алгеброй Хопфа H^*, алгебра $O(\mathfrak{p})$ представляет теоретико-схемную G-орбиту идеала $\mathfrak{p}$, являющуюся замкнутой подсхемой в аффинной схеме $\operatorname{Spec}(k(\mathfrak{p}) \otimes A)$.

Теорема 5.6 (см. [50]). *Предположим, что A является H-полупервичной и функция*

$$\mathfrak{p} \mapsto \dim O(\mathfrak{p})$$

локально постоянна на всём $\operatorname{Spec} A$. Тогда A — конечно порождённый проективный A^H-модуль, ранг которого в простом идеале $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A^H$ равен $\dim O(\mathfrak{p})$, где $\mathfrak{p}$ — любой простой идеал алгебры A, лежащий над $\mathfrak{q}$.

Кроме того, соответствие $I \mapsto I \cap A^H$ устанавливает биекцию между устойчивыми относительно действия H идеалами алгебры A и всеми идеалами алгебры A^H. Обратное соответствие — $J \mapsto JA$.

Объясним кратко основные идеи, используемые в доказательстве. Для заданных элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ множество U тех простых идеалов $\mathfrak{p}$ алгебры A, для которых $\delta_\mathfrak{p}(a_1), \ldots, \delta_\mathfrak{p}(a_n)$ образуют базис $O(\mathfrak{p})$ над $k(\mathfrak{p})$, открыто в $\operatorname{Spec} A$. Можно также проверить, что в случае, когда $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$ — два простых идеала алгебры A, причём $\mathfrak{p} \cap A^H = \mathfrak{p}' \cap A^H$, имеем $\mathfrak{p} \in U$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}' \in U$. С учётом этого, переходя к локализациям $A[s^{-1}]$ алгебры A в подходящих элементах $s \in A^H$, можно предположить, что существуют такие $a_1, \ldots, a_n \in A$, что $\delta_\mathfrak{p}(a_1), \ldots, \delta_\mathfrak{p}(a_n)$ — базис $O(\mathfrak{p})$ над $k(\mathfrak{p})$ для каждого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

Технически сложная часть доказательства заключается в том, чтобы показать, что предыдущее предположение влечёт, что $\rho(a_1), \ldots, \rho(a_n)$ образуют базис $(A \otimes 1)\rho(A) \subset A \otimes H^*$ над A относительно левой модульной структуры; как только это сделано, свободность A над A^H следует из леммы 3.3. Заметим, однако, что, когда A — алгебра без нильпотентов (эквивалентно, A полупервична), имеется общий теоретико-кольцевой факт, который утверждает, что подмодуль M свободного A-модуля F конечного ранга свободно порождается элементами $v_1, \ldots, v_n \in M$ при условии, что для каждого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ образ $k(\mathfrak{p}) \otimes M$ в $k(\mathfrak{p}) \otimes F$ имеет базис над $k(\mathfrak{p})$, состоящий из $1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_n$; при

$$M = (A \otimes 1)\rho(A), \quad F = A \otimes H^*, \quad v_i = \rho(a_i)$$

желаемое заключение немедленно достигается. Поскольку A предполагается только H-полупервичной, то приходится преодолеть несколько трудностей.

Специальный случай теоремы 5.6 был представлен в [49].

Хотя несколько фундаментальных фактов классической теории обобщаются на коммутативные H-полупервичные алгебры, в случае, когда алгебра Хопфа H не кокоммутативна, она может не допускать достаточного количества действий на коммутативных алгебрах. Следующий результат был получен Этингофом и Уолтон (см. [28]), когда либо $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, либо $\operatorname{char} \Bbbk > 0$ и H также полупроста. Распространение его на случай, когда H необязательно полупроста, было дано в [55].

Теорема 5.7. *Предположим, что $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Тогда любое действие конечномерной кополупростой алгебры Хопфа H на коммутативной области целостности A пропускается через действие групповой алгебры, т.е. существует такой идеал Хопфа I в H, что I аннулирует A и H/I порождается группоподобными элементами.*

Этингоф и Уолтон утверждают, что действие H на A *внутренне точно*, если A не аннулируется никаким ненулевым идеалом Хопфа алгебры H. В [29, 30] они исследовали вопрос о существовании внутренне точных действий на коммутативных областях целостности для точечных алгебр Хопфа. Некоторые точечные алгебры Хопфа допускают такие действия, в то время как другие не допускают.

Тот факт, что аннулятор алгебры A в H часто нетривиален, был осознан намного раньше. Коэн и Вестрейх указали в [22, Corollary 0.12], что H может действовать точно (в обычном смысле) на поле A только в том случае, если H инволютивна и все группоподобные элементы из H^* лежат в центре алгебры H^*. Здесь A может быть даже областью целостности, поскольку тогда действие H продолжается на поле частных.

Всё это показывает, что класс коммутативных H-модульных алгебр слишком узок, когда H некокоммутативна, и возникает определённая необходимость изучать инварианты в большем классе алгебр, удовлетворяющих полиномиальному тождеству. Однако до сих пор не все результаты, известные для коммутативных H-модульных алгебр, распространены на случай PI алгебр.

Как расширение коммутативной теории в другом направлении Коэн и Вестрейх (см. [23]) ввели *квантово-коммутативные* H-модульные алгебры. Закон коммутативности в этих алгебрах происходит из сплетения, определяемого квазитреугольной структурой на H. Коэн, Вестрейх и Жу доказали следующее утверждение.

Теорема 5.8 (см. [24])**.** *Пусть A — квантово-коммутативная H-модульная алгебра, где H — треугольная полупростая алгебра Хопфа, и либо* $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, *либо* $\operatorname{char} \Bbbk > \dim H$. *Тогда A цела над A^H и A является PI алгеброй.*

Можно поинтересоваться, справедливо ли заключение этой теоремы при менее обременительных ограничениях на H и характеристику поля $\Bbbk$, когда A является H-полупервичной.

6. H-Эквивариантное кольцо частных Мартиндейла

Здесь будут представлены результаты Еряшкина (см. [5]) о кольцах частных H-полупервичных PI алгебр. Обобщённые кольца частных Мартиндейла могут быть определены относительно любого фильтра $\mathcal{F}$ идеалов кольца R, подчинённого условиям, что каждый идеал $I \in \mathcal{F}$ имеет нулевые левый и правый аннуляторы в R и что $IJ \in \mathcal{F}$ всякий раз, когда $I, J \in \mathcal{F}$. Детали этой конструкции приведены, например, в [40, Sec. 6.4]. Если R первично и $\mathcal{F}$ есть множество всех ненулевых идеалов кольца R, эта конструкция даёт *левое, правое и симметрическое кольца частных Мартиндейла*, как они были определены в [45, Chap. 3].

Пусть A — некоторая H-модульная алгебра. Обозначим через $\mathcal{F}_H(A)$ множество всех её устойчивых относительно действия H идеалов с нулевыми левым и правым аннуляторами в A. Если A является H-первичной, то $\mathcal{F}_H(A)$ состоит изо всех ненулевых устойчивых относительно действия H идеалов алгебры A. Кольца частных Мартиндейла относительно этого фильтра были введены Коэн (см. [16]). Использование устойчивых относительно действия H идеалов в их определении объясняет расширяемость H-модульной структуры на эти кольца частных.

Мы будем иметь дело только с *H-симметрическим кольцом частных* $Q_H(A)$ (см. [40, с. 98]). Бо́льшие левое и правое кольца частных менее полезны. Кольцо $Q_H(A)$ характеризуется следующими свойствами (ср. [45, Proposition 10.4]):

(1) $Q_H(A)$ содержит A как подкольцо;
(2) каждый идеал $I \in \mathcal{F}_H(A)$ имеет нулевые левый и правый аннуляторы в $Q_H(A)$;
(3) для каждого $q \in Q_H(A)$ существует такой $I \in \mathcal{F}_H(A)$, что $Iq \subset A$ и $qI \subset A$;
(4) для заданных идеала $I \in \mathcal{F}_H(A)$, A-линейного слева отображения $f_l : I \to A$ и A-линейного справа отображения $f_r : I \to A$, таких, что $xf_r(y) = f_l(x)y$ для всех $x, y \in I$, существует такой $q \in Q_H(A)$, что $f_l(x) = xq$ и $f_r(x) = qx$ для всех $x \in I$.

Положим $Q = Q_H(A)$. Как объяснено в [16], Q является H-модульной алгеброй и A вкладывается в Q как устойчивая относительно действия H подалгебра. Центры $Z(A)$, $Z(Q)$ алгебр A и Q не устойчивы, вообще говоря, относительно действия H. Положим

$$Z(A)^H = Z(A) \cap A^H, \quad Z(Q)^H = Z(Q) \cap Q^H.$$

Из (2) и (3) в приведённой выше характеризации $Q_H(A)$ следует, что каждый ненулевой левый или правый A-подмодуль в Q имеет ненулевое пересечение с A. Следовательно, Q обязано быть H-первичным или H-полупервичным всякий раз, когда таково A.

Имеется несколько общих свойств H-эквивариантных колец частных Мартиндейла H-первичных алгебр. В частности, тот факт, что $Z(Q)^H$ является полем, был сформулирован в явном виде в статье Матчука (см. [36, Lemma 1.4]), в которой, однако, использовались правые кольца частных. Это поле называется *H-расширенным центроидом* алгебры A.

Лемма 6.1. *Предположим, что A является H-первичной. Тогда $Z(Q)^H$ — поле. Кроме того, для любого устойчивого относительно действия H идеала I кольца Q и морфизма $f : I \to Q$ в категории H-${}_Q\mathcal{M}_Q$, существует такой $z \in Z(Q)^H$, что $f(x) = zx$ для всех $x \in I$.*

Доказательство. Вспомним, что f — это гомоморфизм Q-бимодулей и H-модулей. Положим $I' = f^{-1}(A) \cap A$. Это устойчивый относительно действия H идеал алгебры A. Можно предположить, что $f \neq 0$. Тогда $I' \neq 0$, т.е. $I' \in \mathcal{F}_H(A)$. Заметим, что $f(x)y = f(xy) = xf(y)$ для всех $x, y \in I$. Согласно (4) существует такой $z \in Q$, что $f(x) = zx = xz$ для всех $x \in I'$.

Если $u \in Q$ — любой элемент, то $uJ \subset A$ для некоторого $J \in \mathcal{F}_H(A)$. Заменяя J на JI', будем также иметь $J \subset I'$ и $uJ \subset I'$. Поскольку z централизует все элементы из I', то отсюда следует, что $(zu - uz)J = 0$. Поэтому $zu = uz$ ввиду (2).

Поскольку f является H-линейным, то выводим, что

$$(hz)x = \sum h_{(1)} f\big(S(h_{(2)})x\big) = \varepsilon(h)f(x) = \varepsilon(h)zx \quad \text{для } h \in H,\ x \in I'.$$

Другими словами, $\big(hz - \varepsilon(h)z\big)I' = 0$. Отсюда $hz = \varepsilon(h)z$ для всех $h \in H$, и можно заключить, что $z \in Z(Q)^H$.

Определим $g : I \to Q$ по формуле $g(x) = f(x) - zx$. Тогда $g|_{I'} = 0$. Если $u \in I$ и $J \in \mathcal{F}_H(A)$ — такой идеал, что $J \subset I'$ и $uJ \subset I'$, то $g(u)J = g(uJ) = 0$, откуда $g(u) = 0$. Поэтому $g = 0$, и следовательно $f(x) = zx$ для всех $x \in I$.

Аннулятор элемента z в Q — устойчивый относительно действия H идеал. Если этот идеал ненулевой, то свойство (2) влечёт $z = 0$. Поэтому f должен быть инъективным всякий раз, когда $z \neq 0$. В этом случае $f(I)$ — ненулевой устойчивый относительно действия H идеал кольца Q. Применяя уже доказанное заключение к обратному отображению $f^{-1} : f(I) \to I$, видим, что существует такой $z' \in Z(Q)^H$, что $f^{-1}(y) = z'y$ для всех $y \in f(I)$. Тогда $(zz' - 1)I = 0$, и отсюда следует, что $z' = z^{-1}$. Но это рассуждение применимо к каждому ненулевому элементу коммутативного кольца $Z(Q)^H$. Таким образом, $Z(Q)^H$ является полем. □

Лемма 6.2. *Предположим, что A является H-первичной. Пусть S — любая простая алгебра, центр которой содержит $Z(Q)^H$. Рассмотрим $S \otimes_{Z(Q)^H} Q$ как H-модульную алгебру относительно действия H на второй тензоранд. Если I — ненулевой устойчивый относительно действия H идеал этой алгебры, то I имеет ненулевое пересечение с образом кольца Q в $S \otimes_{Z(Q)^H} Q$ при отображении $x \mapsto 1 \otimes x$.*

Доказательство. Пусть n будет минимально возможным, для которого I содержит элемент $u \neq 0$, записываемый в виде $u = a_1 \otimes b_1 + \ldots + a_n \otimes b_n$, где $a_i \in S$, $b_i \in Q$. Зафиксируем такой элемент и его выражение в виде суммы. Положим

$$M = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in Q^n \;\Big|\; \sum a_i \otimes x_i \in I\Big\}.$$

Рассмотрим Q^n как объект категории $H\text{-}{}_Q\mathcal{M}_Q$ относительно естественных действий H и Q на каждую компоненту. Тогда M — подобъект Q^n в этой категории. Заметим, что $(b_1, \ldots, b_n) \in M$. Пусть $p_i : Q^n \to Q$, $i = 1, \ldots, n$, — проекции. Тогда $J = p_1(M)$ — это устойчивый относительно действия H идеал кольца Q. Но $\operatorname{Ker} p_1|_M = 0$, поскольку в противном случае I содержал бы ненулевой элемент, записываемый в виде $\sum\limits_{i=2}^{n} a_i \otimes x_i$ с меньшим, чем n, числом слагаемых. Таким образом, $p_1|_M : M \to J$ — изоморфизм в категории $H\text{-}{}_Q\mathcal{M}_Q$. Полагая $f_i = p_i \circ (p_1|_M)^{-1}$, получим

$$M = \{\big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \mid x \in J\},$$

причём каждое отображение $f_i : J \to Q$ — морфизм в категории $H\text{-}{}_Q\mathcal{M}_Q$. По лемме 6.1 существуют такие $z_1, \ldots, z_n \in Z(Q)^H$, что $f_i(x) = z_i x$ для всех $x \in J$. В частности, $b_i = z_i b_1$ для каждого i; следовательно, $u = \sum a_i \otimes z_i b_1 = (\sum a_i z_i) \otimes b_1$.

Минимальность n влечёт, что $n = 1$, т.е. $u = a_1 \otimes b_1$. Но тогда $S a_1 S \otimes b_1 \subset I$. Поскольку S проста, то имеем $S a_1 S = S$. Отсюда $1 \otimes b_1 \in I$. □

Лемма 6.3. *Предположим, что A является H-первичной, и пусть P — такой первичный идеал алгебры A, что $P_H = 0$. Обозначим через $\overline{Q}$ симметрическое кольцо частных Мартиндейла первичного кольца $\overline{A} = A/P$. Каноническое отображение $\pi : A \to \overline{A}$ продолжается до гомоморфизма колец $Q \to \overline{Q}$, отображающего центр Q в центр $\overline{Q}$.*

Доказательство. Пусть $q \in Q$. Существует такой $I \in \mathcal{F}_H(A)$, что $Iq \subset A$ и $qI \subset A$. Поскольку $P_H = 0$, то имеем $I \not\subset P$. Поэтому $\pi(I)$ — ненулевой идеал алгебры $\overline{A}$. Заметим, что $Iq(I \cap P)$ содержится в P. Применяя π, получим $\pi(I)\pi\big(q(I \cap P)\big) = 0$, откуда $\pi\big(q(I \cap P)\big) = 0$, поскольку $\overline{A}$ первична.

Это показывает, что $q(I \cap P) \subset P$. Аналогично, $(I \cap P)q \subset P$. Следовательно, правое и левое умножения на q индуцируют, соответственно, $\overline{A}$-линейное слева отображение $f_l : \pi(I) \to \overline{A}$ и $\overline{A}$-линейное справа отображение $f_r : \pi(I) \to \overline{A}$. Пара (f_l, f_r) определяет элемент $\overline{q} \in \overline{Q}$. Легко видеть, что соответствие $q \mapsto \overline{q}$ определяет гомоморфизм колец $Q \to \overline{Q}$, ограничение которого на A есть π.

Обозначим это продолжение π той же самой буквой π. Если $z \in Z(Q)$, то $\pi(z)$ коммутирует со всеми элементами из $\pi(A) = \overline{A}$, но тогда $\pi(z)$ коммутирует со всеми элементами из $\overline{Q}$. □

Теорема 6.4 (см. [5]). *Предположим, что A — это H-первичная PI алгебра. Тогда H-симметрическое кольцо частных $Q = Q_H(A)$ является H-простой H-модульной алгеброй конечной размерности над $Z(Q)^H$. Более того, $Q = Z(Q)^H A$.*

Доказательство. Возьмём любой первичный идеал P алгебры A, такой, что $P_H = 0$. Пусть $\pi : Q \to \overline{Q}$ — гомоморфизм колец из леммы 6.3. Поскольку $\overline{A}$ — первичная PI алгебра, то $\overline{Q}$ — её классическое кольцо частных (см. [45, Theorem 23.4]). По теореме Познера кольцо $\overline{Q}$ просто и конечномерно над своим центром $Z(\overline{Q})$. Суперпозиция

$$\varphi : Q \xrightarrow{\rho} Q \otimes H^* \xrightarrow{\pi \otimes \mathrm{id}} \overline{Q} \otimes H^*$$

является гомоморфизмом H-модульных алгебр, в предположении тривиального действия H на $\overline{Q}$ и действия $\rightharpoonup$ на H^*. Он расширяется до гомоморфизма H-модульных алгебр

$$\psi : Z(\overline{Q}) \otimes_{Z(Q)^H} Q \to \overline{Q} \otimes H^*, \quad z \otimes q \mapsto (z \otimes 1) \cdot \varphi(q).$$

Поскольку $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \varphi = \pi$, то имеем $\operatorname{Ker} \varphi \subset \operatorname{Ker} \pi$. Отсюда следует, что

$$A \cap \operatorname{Ker} \varphi \subset A \cap \operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Ker} \pi|_A = P.$$

Но $\operatorname{Ker} \varphi$ — устойчивый относительно действия H идеал кольца Q. Поскольку $P_H = 0$, то получаем $A \cap \operatorname{Ker} \varphi = 0$, что влечёт $\operatorname{Ker} \varphi = 0$. Теперь $\operatorname{Ker} \psi$ — устойчивый относительно действия H идеал кольца $Z(\overline{Q}) \otimes_{Z(Q)^H} Q$. Он имеет нулевое пересечение с образом Q в силу предшествующего заключения, откуда $\operatorname{Ker} \psi = 0$ по лемме 6.2. Инъективность ψ приводит к верхней границе для размерности

$$[Q : Z(Q)^H] = [Z(\overline{Q}) \otimes_{Z(Q)^H} Q : Z(\overline{Q})] \leqslant [\overline{Q} \otimes H^* : Z(\overline{Q})] = [\overline{Q} : Z(\overline{Q})] \cdot \dim_{\Bbbk} H < \infty.$$

Тогда и устойчивая относительно действия H подалгебра $A' = Z(Q)^H A \subset Q$ конечномерна над $Z(Q)^H$. Кроме того, A' является H-первичной, поскольку каждый ненулевой идеал алгебры A' имеет ненулевое пересечение с A. По теореме 2.4 алгебра A' является H-простой. Но для каждого $q \in Q$ существует такой ненулевой устойчивый относительно действия H идеал I' алгебры A', что $qI' \subset A'$. Мы должны иметь $1 \in I'$; следовательно, $q \in A'$. Итак, $Q = A'$. □

Следствие 6.5. *Если A — H-первичная PI алгебра, то A имеет конечное число минимальных первичных идеалов, и $P_H = 0$ для каждого из них.*

Доказательство. Поскольку кольцо Q артиново, то оно имеет конечное число максимальных идеалов. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — их сужения в A. Пересечение $\bigcap P_i$ нильпотентно, поскольку оно содержится в радикале Джекобсона кольца Q. Поэтому каждый первичный идеал алгебры A содержит P_i для некоторого i, т.е. все минимальные первичные идеалы находятся среди $P_1, \ldots, P_n$. Если I — любой устойчивый относительно действия H идеал алгебры A, содержащийся в P_i, то IQ — устойчивый относительно действия H идеал кольца Q, содержащийся в максимальном идеале. Отсюда следует, что $IQ = 0$; следовательно, $I = 0$. □

Следствие 6.6. *Предположим, что A — H-первичная PI алгебра. Если P — такой первичный идеал алгебры A, что $P_H = 0$, то гомоморфизм колец $\pi : Q \to \overline{Q}$ из леммы6.3 сюръективен.*

Доказательство. Имеем $\overline{A} = \pi(A) \subset \pi(Q) \subset \overline{Q}$. Если s — любой регулярный элемент алгебры $\overline{A}$, то s обратим в $\overline{Q}$, поскольку $\overline{Q}$ — классическое кольцо частных алгебры $\overline{A}$. Но $s \in \pi(Q)$, откуда s — регулярный элемент кольца $\pi(Q)$. Поскольку $\pi(Q)$ — конечномерная алгебра над полем, то отсюда следует, что $s^{-1} \in \pi(Q)$. Тогда $\overline{Q} = \pi(Q)$. □

Следствие 6.7. *Если A — H-простая PI алгебра, то A имеет конечную размерность над центральным подполем $Z(A)^H$.*

Доказательство. В этом случае $Q_H(A) = A$. □

Лемма 6.8. *Предположим, что $K_1, \ldots, K_n$ — минимальные H-первичные идеалы алгебры A, причём $\bigcap K_i = 0$. Тогда $Q_H(A) \cong Q_H(A/K_1) \times \ldots \times Q_H(A/K_n)$.*

Доказательство. Положим $Q = Q_H(A)$, $A_i = A/K_i$ и $Q_i = Q_H(A_i)$ для каждого i. Каноническое отображение $\pi_i : A \to A_i$ продолжается до гомоморфизма H-модульных алгебр $Q \to Q_i$, как в доказательстве леммы 6.3. Принципиальное обстоятельство здесь заключается в том, что A_i является H-первичной и $I \not\subset K_i$ для каждого $I \in \mathcal{F}_H(A)$. В самом деле, K_i имеет ненулевой аннулятор в A, поскольку $K_i K_i' \subset K_i \cap K_i' = 0$, где $K_i' = \bigcap\limits_{j \neq i} K_j$. Поэтому каждый элемент из Q

приводит к A_i-линейному слева отображению $f_l : \pi_i(I) \to A_i$ и A_i-линейному справа отображению $f_r : \pi_i(I) \to A_i$, причём пара (f_l, f_r) определяет элемент из Q_i.

Теперь набор $\pi_1, \ldots, \pi_n$ задаёт гомоморфизм H-модульных алгебр

$$\pi : Q \to Q_1 \times \ldots \times Q_n.$$

Поскольку $\operatorname{Ker} \pi|_A = \bigcap K_i = 0$, то отсюда следует, что $\operatorname{Ker} \pi = 0$. Остаётся показать, что π сюръективен. Предположим, что $q_1 \in Q_1$. Существует такой ненулевой устойчивый относительно действия H идеал I_1 алгебры A_1, что $I_1 q_1 \subset A_1$ и $q_1 I_1 \subset A_1$. Возьмём любой устойчивый относительно действия H идеал J алгебры A с тем свойством, что $0 \neq \pi_1(J) \subset I_1$. Заменяя J на JK_1', будем также иметь

$$J \subset K_1', \quad \pi_1(J)\, q_1 \subset \pi_1(K_1'), \quad q_1\, \pi_1(J) \subset \pi_1(K_1').$$

Поскольку $K_1 \cap K_1' = 0$, то имеется изоморфизм A-бимодулей $K_1' \cong \pi_1(K_1')$. Определим отображения $f_l, f_r : J \to K_1'$ по правилам

$$\pi_1\bigl(f_l(x)\bigr) = \pi_1(x) q_1, \quad \pi_1\bigl(f_r(x)\bigr) = q_1 \pi_1(x).$$

Положим $I = J + \sum\limits_{i \neq 1} K_i'$. Заметим, что $K_i' \subset K_j$ для $j \neq i$, в то время как $K_j' \cap K_j = 0$. Значит, сумма $\sum K_i'$ является прямой, и имеются продолжения f_l, f_r до отображений $I \to A$, обращающихся в нуль на K_i' для каждого $i \neq 1$. Заметим, что f_l является A-линейным слева, в то время как f_r является A-линейным справа.

Поскольку $\pi_i(I) \neq 0$ для каждого i, то левый и правый аннуляторы идеала I в A содержатся в каждом K_i. Тогда эти аннуляторы нулевые, т.е. $I \in \mathcal{F}_H(A)$. Поэтому пара (f_l, f_r) определяет такой элемент $q \in Q$, что $\pi_1(q) = q_1$ и $\pi_i(q) = 0$ для $i \neq 1$. Ввиду симметрии Q_1 в этом рассуждении можно заменить на Q_j для любого j. □

Следствие 6.9. *Предположим, что A есть H-полупервичная PI алгебра с конечным числом минимальных H-первичных идеалов. Тогда $Q_H(A) \cong Q_1 \times \ldots \times Q_n$, где $Q_1, \ldots, Q_n$ — некоторые H-простые H-модульные алгебры, причём $[Q_i : Z(Q_i)^H] < \infty$ для каждого i.*

Доказательство. В любой H-полупервичной алгебре пересечение всех минимальных H-первичных идеалов нулевое. Значит, применима лемма 6.8. Она даёт разложение $Q_H(A)$ в прямое произведение, в котором каждый сомножитель $Q_i = Q_H(A/K_i)$ является H-простой алгеброй конечной размерности над $Z(Q_i)^H$ по теореме 6.4. □

Теорема 6.10. *Предположим, что A есть H-полупервичная PI алгебра с конечным числом минимальных H-первичных идеалов. Тогда $Q_H(A)$ — классическое правое кольцо частных алгебры A.*

Мы привели некоторые комментарии по поводу доказательства в обсуждении, следующим за формулировкой теоремы 2.12. Еряшкин доказывает заключение теоремы 6.10 в H-первичном случае. Если A является H-полупервичной PI алгеброй и если $K_1, \ldots, K_n$ — все её минимальные H-первичные идеалы, то, зная, что $Q_i = Q_H(A/K_i)$ есть классическое кольцо частных алгебры A/K_i для каждого i, он делает вывод, что $Q_1 \times \ldots \times Q_n$ — классическое кольцо частных алгебры A, напрямую, без использования леммы 6.8.

Для специального класса H-первичных PI алгебр теоремы 6.4 и 6.10 были получены в более ранней статье [4].

Лемма 6.11. *Множество минимальных H-первичных идеалов алгебры A конечно, если A — конечно порождённая PI алгебра. То же самое заключение выполняется, если A нётерова либо слева, либо справа.*

Доказательство. При каждом из этих предположений A имеет конечное число минимальных первичных идеалов и первичный радикал N алгебры A нильпотентен (в случае конечно порождённой PI алгебры см. [47, Corollary 6.3.36′, Theorem 6.3.39]). Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — все минимальные первичные идеалы, и для каждого i пусть K_i — наибольший устойчивый относительно действия H идеал алгебры A, содержащийся в P_i. Поскольку $\prod K_i \subset N$ нильпотентен, то любой минимальный H-первичный идеал алгебры A должен совпадать с одним из H-первичных идеалов $K_1, \ldots, K_n$. □

7. Целая зависимость PI алгебр над инвариантами

Если A — некоммутативная H-модульная алгебра, имеет смысл рассматривать целую зависимость A над инвариантами в двух разных вариантах. Один вопрос касается целой зависимости над центральными инвариантами. Для этого нужно предположить по меньшей мере, что A цела над своим центром $Z(A)$. Обозначим через $Z(A)^H$ подалгебру в $Z(A)$, состоящую из H-инвариантных центральных элементов.

Если H кокоммутативна, то $Z(A)$ устойчив относительно действия H, и $Z(A)$ цел над $Z(A)^H$ в силу классической теории. Если H некокоммутативна, то проблема становится в высшей степени нетривиальной. Когда H точечна или, по крайней мере, когда корадикал H кокоммутативен, следующий результат был получен Тотоком.

Теорема 7.1 (см. [9])**.** *Центр $Z(A)$ цел над $Z(A)^H$ и, следовательно, A цела над $Z(A)^H$ при условии, что A цела над $Z(A)$, в каждом из следующих двух случаев*:

(a) $\operatorname{char} \Bbbk > 0$ *и H имеет кокоммутативный корадикал*;

(b) $\operatorname{char} \Bbbk = 0$*, H точечна, A без нильпотентов, $Z(A)$ — конечно порождённая алгебра.*

Используя корадикальную фильтрацию $H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = H$, Тоток строит такую цепочку подалгебр $Z_0 \supset Z_1 \supset \cdots \supset Z_n$, что $Z_0 = Z(A)^{H_0}$ и для каждого $i > 0$ кольцо Z_{i-1} цело над Z_i, причём H_i действует тривиально на Z_i в том смысле, что $hz = \varepsilon(h)z$ для всех $h \in H_i$ и $z \in Z_i$. Тогда заключение теоремы 7.1 следует из транзитивности целой зависимости, поскольку $Z(A)$ цело над Z_0. Это обобщает технику, применённую Артамоновым (см. [2]) в случае, когда A — коммутативная область целостности.

Новые результаты о целой зависимости A над $Z(A)^H$ для произвольной конечномерной алгебры Хопфа появились совсем недавно. В [27] Этингоф делает наблюдение, что проблема допускает бимодульную переформулировку, которая может изучаться независимо от теории алгебр Хопфа. Действительно, $Z(A)^H$ состоит в точности из таких элементов $a \in A$, для которых левое умножение на $a \otimes 1$ в алгебре $A \otimes H^*$ совпадает с правым умножением на $\rho(a)$, или, другими словами, левое действие элемента a на $A \otimes H^*$ — то же самое, что и правое действие, относительно структуры A-бимодуля, определяемой как в разделе 3. Этот бимодуль обладает специальным свойством, которое было использовано Этингофом для того, чтобы ввести понятие *бимодуля Галуа*.

Некоторый R-бимодуль P для кольца R называется бимодулем Галуа ранга $d \geqslant 1$, если P слева и справа свободен ранга d и имеется изоморфизм бимодулей $P \otimes_R P \cong P^d$. Этингоф выводит классификацию бимодулей Галуа, когда R — полупростое артиново кольцо, являющееся конечным модулем над своим центром $Z(R)$. Пусть $R \cong R_1 \times \ldots \times R_n$, где $R_1, \ldots, R_n$ — простые кольца. В процессе классификации устанавливается, что для каждого бимодуля Галуа P кольцо R является конечным модулем над *центром* P, определяемым как

$$Z(P) = \Big\{ a \in R \mid ax = xa \text{ для всех } x \in P \Big\} \subset Z(R).$$

Пусть $\phi_i(a)$ — R_i-линейный эндоморфизм $R_i \otimes_R P$, доставляемый правым действием элемента $a \in R$. Теперь $R_i \otimes_R P$ является конечномерным векторным пространством над центром $Z(R_i)$ кольца R_i, и $\phi_i(a)$ может рассматриваться как линейное преобразование этого векторного пространства. Таким образом характеристический многочлен $\chi_{\phi_i(a)} \in Z(R_i)[t]$ имеет смысл. Пусть

$$\chi_a \in Z(R)[t] \cong Z(R_1)[t] \times \ldots \times Z(R_n)[t]$$

— многочлен, i-я компонента которого есть $\chi_{\phi_i(a)}^{m^2/m_i^2}$, где $m_i^2 = [R_i : Z(R_i)]$ и m — наименьшее общее кратное $m_1, \ldots, m_n$. В [27] показано, что для каждого центрального элемента $a \in Z(R)$

все коэффициенты χ_a принадлежат $Z(P)$. Это ключевой факт, необходимый для приложений к целой зависимости.

Предположим, что H-модульная алгебра A имеет полупростое артиново классическое кольцо частных Q, являющееся конечным модулем над своим центром $Z(Q)$. Тогда результаты Этингофа, обсуждавшиеся в предшествующем абзаце, можно применить к Q-бимодулю Галуа $Q \otimes H^*$, центр которого — это $Z(Q)^H$. В частности, Q — конечный модуль над $Z(Q)^H$, и некоторые многочлены, ассоциированные с центральными элементами кольца Q, имеют коэффициенты в $Z(Q)^H$.

Однако конечная цель заключается в том, чтобы найти условия, обеспечивающие целую зависимость алгебры A. Этингоф формулирует результаты для комодульных алгебр, но мы придерживаемся установленных в настоящей статье соглашений.

Теорема 7.2 (см. [27]). *Пусть Z — центральная подалгебра в A, полное кольцо частных $Q(Z)$ которой есть прямое произведение конечного числа полей. Предположим, что*

(1) *A — конечно порождённый Z-модуль без кручения,*
(2) *$Q(Z) \otimes_Z A$ — полупростое кольцо с центром $Q(Z)$,*
(3) *либо Z целозамкнута в $Q(Z)$, либо A — проективный Z-модуль.*

Тогда A цела над $Z \cap A^H$.

Говорят, что H-модульная алгебра A *неразложима*, если она не изоморфна прямому произведению двух ненулевых H-модульных алгебр. Если A артинова и H-полупервична, то по теореме 2.4 это эквивалентно H-простоте A.

Неразложимость A в следующем предложении означает, что соответствующий A-бимодуль Галуа $P = A \otimes H^*$ связен. В этом случае $P^{m_*^2}$ изоморфен некоторому кратному $A \otimes_{Z(P)} A$ в силу классификации бимодулей Галуа. Здесь $Z(P) = Z(A)^H$. Сравнивая левые ранги двух бимодулей, Этингоф выводит соотношение делимости, вовлекающее числовые характеристики алгебры A.

Предложение 7.3 (см. [27]). *Предположим, что A полупростая артинова алгебра, конечная как модуль над $Z(A)$ и неразложимая как H-модульная алгебра. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — все её простые факторкольца. Положим*

$$d_i = [Z(A_i) : Z(A)^H], \quad m_i = [A_i : Z(A_i)]^{1/2}, \quad m_* = \gcd(m_1, \dots, m_n).$$

Тогда $\sum d_i(m_i/m_*)^2$ делит размерность H. Другими словами, $[A : Z(A)^H]$ делит $m_*^2(\dim H)$.

Теперь мы изложим другой подход, применённый Еряшкиным, который систематически использует структурные свойства H-модульных алгебр, обсуждавшиеся ранее. Результаты были получены не только для полупервичных H-модульных алгебр, но и для H-полупервичных алгебр.

Гомоморфизм колец $A \to A \otimes H^*$, задаваемый сопоставлением $a \mapsto a \otimes 1$, отображает центр алгебры A в центральную подалгебру алгебры $A \otimes H^*$. Следовательно, $A \otimes H^*$ может рассматриваться как Z-алгебра для любой центральной подалгебры Z в A. Если A — проективный Z-модуль конечного постоянного ранга, то таким будет и $A \otimes H^*$. Как объяснено в разделе 5, в этом случае определены характеристические многочлены для расширения колец $A \otimes H^*/Z$. Для каждого $a \in A$

$$P_{A \otimes H^*/Z}\big(\rho(a), t\big) \in Z[t]$$

— это характеристический многочлен оператора левого умножения на элемент $\rho(a)$ в Z-алгебре $A \otimes H^*$. Альтернативно можно было бы использовать характеристические многочлены операторов правого умножения.

В какой-то момент понадобится следующий теоретико-кольцевой факт сформулированный ниже (доказательство см. в .

Предложение 7.4 (см. [5, предложение 3.1]). *Пусть R — кольцо, имеющее артиново справа классическое правое кольцо частных $Q(R)$. Предположим, что R — конечно порождённый модуль над таким центральным подкольцом Z, что $\operatorname{ann}_R(z) = \operatorname{ann}_Z(z)R$ для каждого $z \in Z$. Тогда $Q(R) \cong Q(Z) \otimes_Z R$, где $Q(Z)$ — полное кольцо частных кольца Z.*

Теорема 7.5 (см. [5]). *Предположим, что A — H-полупервичная алгебра с конечным числом минимальных H-первичных идеалов. Если A — проективный модуль конечного постоянного ранга над своим центром $Z(A)$, то A цела над $Z(A)^H$. На самом деле для каждого $a \in A$ характеристический многочлен $P_{A\otimes H^*/Z(A)}\bigl(\rho(a), t\bigr)$ имеет все коэффициенты в $Z(A)^H$.*

Доказательство. Прежде чем приступить к общему случаю, проверим заключение этой теоремы при дополнительных предположениях об A.

Шаг 1. Предположим, что A является H-простой. Согласно следствию 6.7 $Z(A)^H$ — поле и $[A : Z(A)^H] < \infty$; отсюда немедленно вытекает целая зависимость A над $Z(A)^H$. Мы должны ещё доказать утверждение о характеристических многочленах.

Рассмотрим действие H на $A \otimes H^*$, определяемое правилом $h(a \otimes \xi) = a \otimes (h \rightharpoonup \xi)$ для $h \in H$, $a \in A$ и $\xi \in H^*$. Тогда отображение $\rho : A \to A \otimes H^*$ является гомоморфизмом H-модульных алгебр. Таковым является и его расширение

$$\psi : Z(A) \otimes_{Z(A)^H} A \to A \otimes H^*, \quad z \otimes a \mapsto (z \otimes 1) \cdot \rho(a),$$

с действием H на первую алгебру, определяемому по формуле $h(z \otimes a) = z \otimes ha$ для $h \in H$, $z \in Z(A)$ и $a \in A$. Положим

$$\mathcal{A} = Z(A) \otimes_{Z(A)^H} A, \quad \mathcal{B} = A \otimes H^*.$$

Утверждаем, что $\mathcal{B}$ — свободный левый $\mathcal{A}$-модуль относительно действия, возникающего из ψ. Поскольку кольцо $Z(A)$ артиново и ψ — гомоморфизм $Z(A)$-алгебр, каждая из которых является свободным модулем над $Z(A)$, то достаточно проверить, что $\mathcal{A}/\mathfrak{m}\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{B}/\mathfrak{m}\mathcal{B}$ свободен ранга r для каждого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца $Z(A)$, где r не зависит от $\mathfrak{m}$. Теперь

$$\mathcal{A}/\mathfrak{m}\mathcal{A} = K(\mathfrak{m}) \otimes_{Z(A)^H} A, \quad \mathcal{B}/\mathfrak{m}\mathcal{B} = A/\mathfrak{m}A \otimes H^*$$

с $K(\mathfrak{m}) = Z(A)/\mathfrak{m}$, являющимся полем. Поскольку A является H-простой, то из леммы 6.2 следует, что $\mathcal{A}/\mathfrak{m}\mathcal{A}$ — также H-простая алгебра. Поэтому $\mathcal{B}/\mathfrak{m}\mathcal{B}$ — свободный $\mathcal{A}/\mathfrak{m}\mathcal{A}$-модуль по теореме 2.9. Ранг $r(\mathfrak{m})$ этого свободного модуля может быть вычислен так:

$$r(\mathfrak{m}) = \frac{[\mathcal{B}/\mathfrak{m}\mathcal{B} : K(\mathfrak{m})]}{[\mathcal{A}/\mathfrak{m}\mathcal{A} : K(\mathfrak{m})]} = \frac{[A : Z(A)] \cdot (\dim H)}{[A : Z(A)^H]} = \frac{\dim H}{[Z(A) : Z(A)^H]},$$

где $[A : Z(A)]$ — ранг A как $Z(A)$-модуля. Это показывает, что $r(\mathfrak{m})$ принимает одно и то же значение для всех $\mathfrak{m}$, что и требовалось.

Итак, $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}^r$ как $\mathcal{A}$-модули. Поскольку $\rho(a) = \psi(1 \otimes a)$, то выводим, что

$$P_{\mathcal{B}/Z(A)}\bigl(\rho(a), t\bigr) = P_{\mathcal{A}/Z(A)}(1 \otimes a, t)^r = P_{A/Z(A)^H}(a, t)^r,$$

а это есть многочлен с коэффициентами в $Z(A)^H$.

Шаг 2. Предположим, что A артинова и H-полупервична.

Согласно теореме 2.4, $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, где каждая A_i является H-простой H-модульной алгеброй. Ясно, что

$$Z(A) = Z(A_1) \times \ldots \times Z(A_n), \quad A^H = A_1^H \times \ldots \times A_n^H.$$

Пусть $\pi_i : A \to A_i$ — проекция, $\zeta_i : Z(A) \to Z(A_i)$ — ограничение π_i и $\zeta_i^t : Z(A)[t] \to Z(A_i)[t]$ — продолжение ζ_i на кольца многочленов. Заметим, что

$$A_i \cong Z(A_i) \otimes_{Z(A)} A \quad \text{и, следовательно,} \quad A_i \otimes H^* \cong Z(A_i) \otimes_{Z(A)} (A \otimes H^*).$$

Поскольку $(\pi_i \otimes \mathrm{id})\rho(a) = \rho(\pi_i a)$, то получаем

$$\zeta_i^t\, P_{A\otimes H^*/Z(A)}\bigl(\rho(a),t\bigr) = P_{A_i\otimes H^*/Z(A_i)}\bigl(\rho(\pi_i a),t\bigr) \in Z(A_i)^H\,[t]$$

в силу шага 1. Отсюда следует, что все коэффициенты многочлена $P_{A\otimes H^*/Z(A)}\bigl(\rho(a),t\bigr)$ инвариантны относительно действия H, поскольку они имеют H-инвариантные образы в каждом A_i.

Теперь легко завершить доказательство теоремы 7.5 в полной общности. По теореме 2.12 алгебра A имеет артиново справа и слева классическое правое кольцо частных $Q = Q(A)$, которое является H-полупервичной H-модульной алгеброй, поскольку таковой является A. Заметим, что $\mathrm{ann}_A(z) = \mathrm{ann}_{Z(A)}(z)A$ для каждого $z \in Z(A)$, поскольку A — прямое слагаемое свободного $Z(A)$-модуля. Согласно предложению 7.4, Q есть центральная локализация алгебры A. Тогда полное кольцо частных кольца $Z(A)$ совпадает с центром Q, и следовательно $Q \cong Z(Q) \otimes_{Z(A)} A$. Из свойств функториальности характеристических многочленов следует, что

$$P_{A\otimes H^*/Z(A)}\bigl(\rho(a),t\bigr) = P_{Q\otimes H^*/Z(Q)}\bigl(\rho(a),t\bigr).$$

Все коэффициенты этого многочлена лежат в $Z(Q)^H$ согласно шагу 2. Поэтому они в действительности лежат в $Z(A) \cap Z(Q)^H = Z(A)^H$. □

Все идеи этого доказательства взяты из [5]. Мы использовали теорему 2.9 для того, чтобы сделать некоторые аргументы более прозрачными. Отметим, что шаг 1 в доказательстве даёт также следующее заключение.

Следствие 7.6. *Предположим, что A является H-простой алгеброй и свободным модулем конечного ранга над своим центром $Z(A)$. Тогда размерность $[Z(A) : Z(A)^H]$ кольца $Z(A)$ над $Z(A)^H$ делит размерность H.*

Не ясно, в какой степени условия, наложенные на A в теореме 7.5, оптимальны. Один возникающий здесь вопрос — это конечность множества минимальных H-первичных идеалов. Несложное обобщение теоремы 7.5 сформулировано ниже.

Следствие 7.7. *Предположим, что A, как модуль над своим центром $Z(A)$, проективен конечного постоянного ранга и имеется такое множество $\mathcal{F}$, состоящее из H-полупервичных идеалов алгебры A, что*

(1) *каждый идеал из $\mathcal{F}$ есть пересечение конечного числа H-первичных идеалов*;
(2) *каждый идеал $I \in \mathcal{F}$ порождается $I \cap Z(A)$*;
(3) *для каждого $I \in \mathcal{F}$ образ $Z(A)$ в A/I совпадает с центром алгебры A/I*;
(4) $\bigcap\limits_{I\in\mathcal{F}} I = 0$.

Тогда для каждого $a \in A$ характеристический многочлен $P_{A\otimes H^*/Z(A)}\bigl(\rho(a),t\bigr)$ имеет все коэффициенты в $Z(A)^H$.

Доказательство. Для каждого $I \in \mathcal{F}$ имеем $A/I \cong Z(A/I) \otimes_{Z(A)} A$, и эта алгебра удовлетворяет предположениям теоремы 7.5. Поэтому все коэффициенты многочлена $P_{A\otimes H^*/Z(A)}\bigl(\rho(a),t\bigr)$ имеют H-инвариантные образы в A/I. Но п. (4) гарантирует, что произвольный элемент $c \in A$ инвариантен относительно действия H всякий раз, когда $c + I$ является H-инвариантным в A/I для каждого $I \in \mathcal{F}$. □

Нужно признать, что предположения об A в следствии 7.7 чрезмерно ограничительны. Однако они выполняются, когда A коммутативна и H-полупервична. Таким образом, теорема 5.2 есть специальный случай следствия 7.7.

Без проективности алгебры A над $Z(A)$ характеристические многочлены для расширения колец $A \otimes H^*/Z(A)$ не определены. Всё же можно использовать конечность $Q = Q(A)$ над $Z(Q)^H$. Вспомним, что если A — H-первичная PI алгебра, то Q является H-простой алгеброй и $Z(Q)^H$ — поле. Следующий результат основан на [5, предложение 3.3], хотя он не был сформулирован в таком виде.

Предложение 7.8. *Предположим, что A является H-первичной алгеброй и конечным модулем над своим центром $Z(A)$. Пусть Q — классическое кольцо частных алгебры A. Для каждого $a \in A$ все коэффициенты характеристического многочлена $P_{Q/Z(Q)^H}(a,t)$ целы над $Z(A)$.*

Доказательство. Поскольку $[Q : Z(Q)^H] < \infty$, то множество $\operatorname{Max} Q$ всех максимальных идеалов кольца Q конечно. Для каждого $M \in \operatorname{Max} Q$ обозначим через π_M каноническое отображение $Q \to Q/M$. Здесь Q/M — простое кольцо, конечномерное над своим центром $Z(Q/M)$. Поскольку $Z(A) \subset Z(Q)$, то имеем $\pi_M\big(Z(A)\big) \subset Z(Q/M)$.

Произвольный элемент $q \in Q$ цел над $Z(A)$ тогда и только тогда, когда $\pi_M(q)$ цел над $\pi_M\big(Z(A)\big)$ для каждого $M \in \operatorname{Max} Q$. Действительно, если последнее свойство выполнено, то для каждого M существует такой многочлен f_M от одной переменной со всеми коэффициентами из $Z(A)$ и старшим коэффициентом 1, что $f_M(q) \in M$. Полагая

$$f = \prod_{M \in \operatorname{Max} Q} f_M,$$

будем иметь $f(q) \in J$, где J — радикал Джекобсона кольца Q. Но J нильпотентен, откуда $f(q)^n = 0$ для некоторого целого $n > 0$. Ясно, что f^n есть многочлен со всеми коэффициентами из $Z(A)$ и старшим коэффициентом 1.

Проверим, что необходимое и достаточное условие целой зависимости из предыдущего абзаца выполняется для всех коэффициентов многочлена $P_{Q/Z(Q)^H}(a,t)$. Это даст завершающее заключение.

Рассмотрим суперпозицию

$$\rho_M : Q \xrightarrow{\rho} Q \otimes H^* \xrightarrow{\pi_M \otimes \mathrm{id}} Q/M \otimes H^*$$

и её расширение

$$\psi : Z(Q/M) \otimes_{Z(Q)^H} Q \to Q/M \otimes H^*, \qquad z \otimes q \mapsto (z \otimes 1) \cdot \rho_M(q).$$

С такими же H-модульными структурами, как в доказательстве теоремы 7.5, ψ — гомоморфизм H-модульных алгебр, и первая алгебра является H-простой согласно лемме 6.2. Отсюда следует, в частности, что ψ инъективен. По теореме 2.9 ψ превращает $Q/M \otimes H^*$ в свободный левый модуль над $Z(Q/M) \otimes_{Z(Q)^H} Q$. Пусть r будет его ранг (он зависит от M).

Обозначим через P_2 и P_1 характеристические многочлены этих двух колец, рассматриваемых как конечномерные алгебры над полем $Z(Q/M)$. Поскольку $\rho_M(a) = \psi(1 \otimes a)$, то получаем

$$P_2\big(\rho_M(a), t\big) = P_1(1 \otimes a, t)^r = P_{Q/Z(Q)^H}(a,t)^r.$$

Здесь поле $Z(Q)^H$ отождествляется с его образом в $Z(Q/M)$ при отображении π_M.

Вспомним, что $P_2\big(\rho_M(a), t\big)$ — это характеристический многочлен оператора левого умножения, ассоциированного с $\rho_M(a)$. Но $\rho(a) \in A \otimes H^*$, и следовательно $\rho_M(a)$ лежит в подкольце $\pi_M(A) \otimes H^*$ кольца $Q/M \otimes H^*$, являющемся конечно порождённым модулем над $\pi_M\big(Z(A)\big)$. Отсюда следует, что $\rho_M(a)$, а тогда и соответствующий оператор умножения, удовлетворяют полиномиальному соотношению целой зависимости над $\pi_M\big(Z(A)\big)$. Это означает, что все собственные значения этого оператора в любом алгебраическом замыкании поля $Z(Q/M)$ целы над $\pi_M\big(Z(A)\big)$. Но эти собственные значения — в точности корни характеристического многочлена, т.е. корни $P_{Q/Z(Q)^H}(a,t)$ ввиду написанного выше равенства. Коэффициенты $P_{Q/Z(Q)^H}(a,t)$ выражаются как значения элементарных симметрических функций в корнях этого многочлена. Поэтому и они целы над $\pi_M\big(Z(A)\big)$. $\square$

Теорема 7.9 (см. [5]). *Предположим, что A — H-полупервичная алгебра с конечным числом минимальных H-первичных идеалов. Пусть Q — классическое кольцо частных алгебры A. Если $Z(A)$ целозамкнуто в $Z(Q)$ и A — конечно порождённый $Z(A)$-модуль, то A цела над $Z(A)^H$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.4, $Q \cong Q_1 \times \ldots \times Q_n$, где каждое Q_i — H-простая H-модульная алгебра. Пусть $e_i \in Q$ — H-инвариантный центральный идемпотент, проекция которого в Q_j равна 1 при $j = i$ и 0 в противном случае. Поскольку $e_i \in Z(Q)$ цел над $Z(A)$, то мы должны иметь $e_i \in Z(A)$. Тогда

$$A \cong A_1 \times \ldots \times A_n, \quad \text{где } A_i = A/(1 - e_i)A.$$

Ясно, что Q_i — классическое кольцо частных алгебры A_i. Отсюда следует, что A_i является H-первичной алгеброй и конечным модулем над своим центром $Z(A_i)$, а также $Z(A_i)$ целозамкнуто в $Z(Q_i)$.

Это сводит доказательство к случаю, когда A является H-первичной. Но в этом случае применимо предложение 7.8. Оно показывает, что для каждого $a \in A$ все коэффициенты характеристического многочлена $P_{Q/Z(Q)^H}(a, t)$ лежат в $Z(A) \cap Z(Q)^H = Z(A)^H$. Поскольку $P_{Q/Z(Q)^H}(a, a) = 0$ в силу общих свойств характеристических многочленов, то a цел над $Z(A)^H$. □

Формулировка, данная в [5, предложение 3.3], содержит дополнительное предположение о том, что $\operatorname{ann}_A(z)$ равен $\operatorname{ann}_{Z(A)}(z)A$ для каждого $z \in Z(A)$. Приведённые выше доказательства показывают, что это предположение не нужно.

Теоремы 7.2, 7.5, 7.9 побуждают задать следующий вопрос.

Вопрос 7.10. Существует ли какой-либо пример H-полупервичной алгебры A, являющейся конечным модулем над своим центром $Z(A)$ и такой, что A не цела над $Z(A)^H$?

Предложение 7.11 (см. [6]). *Предположим, что H полупроста. Если A удовлетворяет полиномиальному тождеству и $A^H \subset Z(A)$, то A цела над A^H.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда A конечно порождена. Тогда целая зависимость A над A^H эквивалентна конечной порождённости как модуля. Существует сюръективный гомоморфизм H-модульных алгебр $B \to A$, где B имеет градуировку $B = B_0 \oplus B_1 \oplus \ldots$ с конечномерными устойчивыми относительно действия H однородными компонентами, причём $B_0 = \Bbbk$ и B_1 порождает B. Для этого можно начать с тензорной алгебры любого конечномерного H-подмодуля $V \subset A$, который порождает A как алгебру. Взяв факторалгебру алгебры B по подходящему устойчивому относительно действия H идеалу, можно предполагать, что B удовлетворяет полиномиальному тождеству. Отфакторизовав другой идеал, порождённый всеми коммутаторами $xy - yx$ с $x \in B$ и $y \in B^H$, можно также предполагать, что $B^H \subset Z(B)$.

Поскольку H полупроста, то B^H отображается на A^H. Следовательно, достаточно показать, что B — конечный B^H-модуль. Согласно градуированной лемме Накаямы это выполняется тогда и только тогда, когда $\dim B/B_+^H B < \infty$, где $B_+^H = \sum_{i>0} B_i^H$.

Положим $D = B/B_+^H B$. Заметим, что $B_+^H B$ — однородный устойчивый относительно действия H идеал алгебры B. Поэтому D наследует структуру градуированной H-модульной алгебры и D удовлетворяет полиномиальному тождеству. Поскольку B^H отображается на D^H, то имеем $D^H = \Bbbk$. Отсюда следует, что $D_+^H = 0$, где $D_+ = \sum\limits_{i>0} D_i$.

Пусть P — любой максимальный идеал алгебры D, и пусть P_H — наибольший устойчивый относительно действия H идеал, содержащийся в P. По теореме Капланского простая алгебра D/P конечномерна над своим центром, и, поскольку D конечно порождена, то имеем $\dim D/P < \infty$ (над $\Bbbk$). Теперь P_H — это ядро суперпозиции

$$D \xrightarrow{\rho} D \otimes H^* \longrightarrow D/P \otimes H^*.$$

Отсюда следует, что также $\dim D/P_H < \infty$. Согласно теореме 2.4, D/P_H является H-простой, а это означает, что P_H — максимальный устойчивый относительно действия H идеал алгебры D.

Если $P_H \not\subset D_+$, то $P_H + D_+ = D$. Поскольку все H-модули вполне приводимы, то выводим, что $P^H + D_+^H = D^H$, где $P^H = P \cap D^H$. Поэтому существует такой $d \in D_+^H$, что $d \notin P$. Это влечёт $D_+^H \neq 0$, противоречие.

Таким образом, единственная возможность состоит в том, что $P_H \subset D_+$. Поскольку D_+ — устойчивый относительно действия H идеал алгебры D, то получаем $P_H = D_+$ ввиду максимальности P_H, но тогда также $P = D_+$. Заключаем, что D имеет единственный максимальный идеал. Вспомним, что первичный радикал любой конечно порождённой PI алгебры нильпотентен по теореме Брауна (см. [47, Theorem 6.3.39]) и совпадает с пересечением всех максимальных идеалов по теореме Амицура—Прочези (см. [47, Theorem 6.3.3]). Это влечёт, что D_+ — первичный радикал D и что D_+ нильпотентен. Но тогда $D_i = 0$ для достаточно большого i. Отсюда $\dim D < \infty$, что и требовалось. $\square$

Условие $A^H \subset Z(A)$ может выглядеть искусственным, но иногда оно возникает вполне естественно. Например, это включение всегда выполняется, когда A квантово-коммутативна. В [22] Коэн и Вестрейх исследовали, как условие $A^H \subset Z(A)$ влияет на различные свойства H-модульной алгебры, в особенности в случае, когда A есть H^*-расширение Галуа подалгебры A^H.

В [3, 4] Еряшкин рассмотрел специальный класс $\mathcal{A}$ H-модульных алгебр. Произвольная H-модульная алгебра A принадлежит $\mathcal{A}$, если A имеет такой идеал I, что факторалгебра A/I коммутативна и I не содержит ненулевых устойчивых относительно действия H идеалов алгебры A. Такая алгебра удовлетворяет полиномиальному тождеству, поскольку она вкладывается в алгебру $A/I \otimes H^*$, являющуюся конечным модулем над своим центром. Если $z \in A^H$, то $\{za - az \mid a \in A\}$ — это H-подмодуль в A, содержащийся в идеале I, откуда $za = az$ для всех $a \in A$ ввиду условий, наложенных на I. Это показывает, что $A^H \subset Z(A)$.

Начиная с произвольного левого H-модуля V, можно получить H-первичную алгебру в $\mathcal{A}$, взяв $A = T(V)/I'_H$, где $T(V)$ — тензорная алгебра пространства V и I'_H — наибольший устойчивый относительно действия H идеал, содержащийся в идеале I', порождённом всеми коммутаторами. Здесь идеал $I = I'/I'_H$ алгебры A обладает свойством, что A/I — симметрическая алгебра пространства V. Путём тщательных рассмотрений Еряшкин установил, что A не цела над A^H в случае, когда $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, H — четырёхмерная алгебра Хопфа, описанная Свидлером, и V — один из её двумерных неразложимых модулей.

В частности, полупростота H необходима в предложении 7.11, даже если A предполагается H-первичной. В положительной характеристике предыдущая конструкция не даёт такого примера (см. следствие 8.4). Это оставляет открытым следующий вопрос.

Вопрос 7.12. Предположим, что $\operatorname{char} \Bbbk > 0$. Существует ли какой-либо пример такой H-первичной PI алгебры A, что $A^H \subset Z(A)$, но A не цела над A^H?

Если $A^H \not\subset Z(A)$, то целую зависимость A над A^H следует понимать так, как было определено Шельтером (см. [48]). Элемент $x \in A$ называется *целым в смысле Шельтера* над A^H, если существует такое целое $m > 0$, что x^m может быть записан в виде суммы нескольких элементов, каждый из которых есть произведение элементов, содержащихся в $A^H \cup \{x\}$, причём x появляется как сомножитель в этом произведении меньшее m число раз. Если все элементы из A целы в смысле Шельтера над A^H, то говорят, что A цела в смысле Шельтера над A^H.

В обзорных лекциях 1993 г. Монтгомери поставила вопрос о том, будет ли целая зависимость в смысле Шельтера алгебры A над A^H выполняться всякий раз, когда H полупроста (см. [40, Question 4.3.1]). К тому времени случай действий групп был разрешён в полной общности Квинном. Если G — такая конечная группа автоморфизмов кольца R, что $|G|R = R$, то R цело в смысле Шельтера над подкольцом инвариантов R^G. На самом деле в [46] было доказано, что R *полно-цело* над R^G, что представляет собой более сильное свойство, определяемое в терминах наборов элементов, а не отдельных элементов. Квинн также получил частичный результат для хопфовых действий.

Теорема 7.13 (см. [46]). *Предположим, что H полупроста и действие H на A является внутренним. Тогда каждый идеал I алгебры A полно-цел и, следовательно, также цел в смысле Шельтера над I^H со степенью, ограниченной функцией от размерности H.*

Условие, что действие *внутреннее* означает, что существует такой обратимый элемент $u \in A \otimes H^*$, что

$$\rho(a) = u(a \otimes 1)u^{-1} \quad \text{для всех } a \in A.$$

В частности, две подалгебры без единицы $I \otimes 1$ и $\rho(I)$ в $A \otimes H^*$ сопряжены внутренним автоморфизмом. Отсюда следует, что $(I \otimes H^*)\#H \cong I \otimes \operatorname{End}_{\Bbbk} H$ полно-цела над $\rho(I)\#H$, поскольку $I \otimes \operatorname{End}_{\Bbbk} H$, как известно, полно-цела над $I \otimes \Bbbk$ по теореме Паре—Шельтера (см. [44]). Наконец, Квинн выводит, что I полно-цела над I^H, используя такой идемпотент $e \in (A \otimes H^*)\#H$, что

$$e\big((I \otimes H^*)\#H\big)e \cong I, \quad e\big(\rho(I)\#H\big)e \cong I^H$$

как алгебры без единицы. В случае внутреннего действия все идеалы алгебры A устойчивы относительно действия H.

В настоящее время не известно, каким образом можно распространить предыдущую теорему на произвольные модульные алгебры для полупростой алгебры Хопфа. Специальные случаи этой проблемы рассматривались в [9, 16]. Еряшкин смог ответить на вопрос Монтгомери в случае PI алгебр.

Теорема 7.14 (см. [6])**.** *Предположим, что H полупроста и кополупроста. Если A удовлетворяет полиномиальному тождеству, то A цела в смысле Шельтера над A^H.*

Доказательство. Первоначальная идея происходит из статьи Монтгомери и Смолла (см. [42], где рассматривалась аналогичная проблема для действий групп на PI кольцах). По лемме Цорна A имеет устойчивый относительно действия H идеал K, максимальный по отношению к свойству, что все элементы из K целы в смысле Шельтера над A^H. Легко видеть, что K является H-полупервичным.

Заменяя A на A/K, можно предполагать, что A является H-полупервичной и A не имеет ненулевых устойчивых относительно действия H идеалов, которые целы в смысле Шельтера над A^H. Мы должны показать, что $A = 0$. Этот шаг требует бóльших усилий по сравнению со случаем действий групп.

Предположим, что $A \neq 0$. Поскольку H кополупроста, то первичный радикал алгебры A устойчив относительно действия H (см. [35, Theorem 3.5]); отсюда A полупервична. Тогда, в силу общей PI теории, A имеет такой ненулевой идеал I', что для каждого $x \in I'$ левый идеал Ax содержится в конечно порождённом $Z(A)$-подмодуле алгебры A. Положим $I = HI'$. Это ненулевой устойчивый относительно действия H идеал алгебры A. Покажем, что все элементы из I целы в смысле Шельтера над A^H, но это противоречит предположениям об A.

Обозначим через C централизатор A^H в A. Это устойчивая относительно действия H подалгебра в A с $C^H \subset Z(C)$ и $Z(A) \subset C$. Пусть $x \in I$. Из конструкции идеала I легко следует, что Ax содержится в конечно порождённом C-подмодуле, скажем N, алгебры A. Предположим, что N порождён как C-модуль элементами $e_1, \ldots, e_n$. Существует такая конечно порождённая подалгебра $C_0 \subset C$, что x и все элементы $e_i x$ принадлежат C_0-подмодулю N_0 в N, порождённому $e_1, \ldots, e_n$. Тогда $N_0 x \subset N_0$.

Без потери общности можно предполагать, что C_0 устойчива относительно действия H. Поскольку $C_0^H \subset Z(C_0)$, то предложение 7.11 показывает, что C_0 цела и, следовательно, конечно порождена как модуль над C_0^H. Значит, N_0 — конечно порождённый модуль над C_0^H. Определим $r_x \in \operatorname{End}_{C_0} N_0$ правилом $r_x(y) = yx$ для $y \in N_0$. Поскольку C_0^H — коммутативное кольцо, то эндоморфизм r_x удовлетворяет соотношению

$$r_x^m + c_1 r_x^{m-1} + \ldots + c_m \operatorname{id} = 0$$

для некоторого целого $m > 0$ и элементов $c_1, \ldots, c_m \in C_0^H$. Применяя этот оператор к $x \in N_0$, выводим, что $x^{m+1} + c_1 x^m + \ldots + c_m x = 0$. Отсюда следует, что x цел в смысле Шельтера над $C_0^H \subset A^H$. $\square$

8. Сравнение с инвариантами корадикала

Как и ранее, предполагаем, что A — это H-модульная алгебра. Для случая, когда H точечна с группой G группоподобных элементов, Артамонов отметил (см. [2]), что $A^H = A^G$, когда $\operatorname{char}\Bbbk = 0$ и A — коммутативная область целостности. Если $\operatorname{char}\Bbbk = p > 0$, алгебра Хопфа точечна и A коммутативна, то из результатов Тотока (см. [8]) и Жу (см. [58]) следует, что $z^{p^s} \in A^H$ для всех $z \in A^G$, где s — длина корадикальной фильтрации в H.

Этингоф и Уолтон (см. [29]) доказали равенство $Z(A)^H = Z(A)^{H_0}$, где H_0 — корадикал H, в случае, когда A — первичная алгебра Адзумаи и $\operatorname{char}\Bbbk = 0$. В этом разделе будут представлены более сильные заключения, принадлежащие Еряшкину.

Предложение 8.1 (см. [6])**.** *Пусть $H_0 \subset H$ — подалгебра Хопфа, содержащая корадикал H. Предположим, что A — H-простая PI алгебра. Пусть K — некоторый максимальный устойчивый относительно действия H_0 идеал алгебры A и $A_0 = A/K$. Обозначим через ν каноническое отображение $A \to A_0$.*

(i) *Если $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, то $Z(A_0)^{H_0} = \nu\big(Z(A)^H\big)$.*
(ii) *Если $\operatorname{char}\Bbbk = p > 0$, то существует такое целое $s \geqslant 0$, что $z^{p^s} \in \nu\big(Z(A)^H\big)$ для всех $z \in Z(A_0)^{H_0}$.*

Доказательство. Согласно следствию 6.7, $Z(A)^H$ — поле и $[A : Z(A)^H] < \infty$. Аналогично, $Z(A_0)^{H_0}$ — поле и $[A_0 : Z(A_0)^{H_0}] < \infty$, поскольку A_0 — H_0-простая PI алгебра. Заметим, что ν отображает $Z(A)^H$ в $Z(A_0)^{H_0}$. Определим структуры H-модуля на

$$\mathcal{A} = Z(A_0)^{H_0} \otimes_{Z(A)^H} A, \quad \mathcal{B} = A_0 \otimes H^*,$$

как в теореме 7.5. Имеется гомоморфизм H-модульных алгебр

$$\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \quad z \otimes a \mapsto (z \otimes 1) \cdot \varphi(a),$$

где $\varphi(a) = (\nu \otimes \mathrm{id})\big(\rho(a)\big)$. Согласно лемме 6.2, $\mathcal{A}$ является H-простой. Значит, $\mathcal{B}$ — свободный левый $\mathcal{A}$-модуль по теореме 2.9. Пусть r — его ранг. Тогда

$$P_{\mathcal{B}/Z(A_0)^{H_0}}\big(\varphi(a), t\big) = P_{\mathcal{A}/Z(A_0)^{H_0}}(1 \otimes a, t)^r = \nu^t P_{A/Z(A)^H}(a, t)^r$$

для всех $a \in A$. Здесь $\nu^t : Z(A)^H[t] \to Z(A_0)^{H_0}[t]$ — гомоморфизм колец многочленов, индуцированный ограничением ν на $Z(A)^H$. Таким образом, все коэффициенты вышеприведённого многочлена лежат в $\nu\big(Z(A)^H\big)$.

Пусть теперь $z \in Z(A_0)^{H_0}$. Выберем любой $a \in A$, для которого $\nu(a) = z$. Имеем $H_0^* \cong H^*/J$, где J — идеал Хопфа в H^*. Образ $\rho(a) \in A \otimes H^*$ в $A_0 \otimes H_0^*$ совпадает с $z \otimes 1$, поскольку z инвариантен относительно действия H_0. В $A_0 \otimes H^*$ получим тогда $\varphi(a) - z \otimes 1 \in A_0 \otimes J$. Но J нильпотентен, поскольку H_0 содержит корадикал H. Поэтому $\varphi(a) - z \otimes 1$ нильпотентен; следовательно,

$$P_{\mathcal{B}/Z(A_0)^{H_0}}\big(\varphi(a), t\big) = P_{\mathcal{B}/Z(A_0)^{H_0}}(z \otimes 1, t) = (t - z)^m,$$

где $m = [\mathcal{B} : Z(A_0)^{H_0}] = [A_0 : Z(A_0)^{H_0}](\dim H)$. Отсюда следует, что

$$\binom{m}{j} z^j \in \nu\big(Z(A)^H\big) \quad \text{для всех } j = 0, 1, \ldots, m.$$

В частности, $mz \in \nu\big(Z(A)^H\big)$. Если $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, это влечёт $z \in \nu\big(Z(A)^H\big)$.

Предположим, что $\operatorname{char}\Bbbk = p > 0$. Пусть p^s — наибольшая степень p, делящая m. Взяв $j = p^s$, имеем $\binom{m}{j} \not\equiv 0 \pmod p$, откуда $z^j \in \nu\big(Z(A)^H\big)$. □

В [6, предложение 3.1] предполагалось, что H_0 совпадает с корадикалом H, но более слабого предположения о том, что H_0 содержит корадикал H, очевидно, достаточно.

Нами предложено несколько иное доказательство. Доказательство в [6] основано на вложении простой H-модульной алгебры $Z(A/M) \otimes_{Z(A)^H} A$ в $A/M \otimes H^*$, где M — любой максимальный идеал алгебры A, содержащий K. Используя это вложение можно усмотреть, что (ii) выполняется с p^s, взятым как наибольшая степень p, делящая число

$$[A/M : Z(A/M)] \cdot (\dim H).$$

Другими словами, получается возможно другое значение s.

Следствие 8.2 (см. [6]). *Пусть $H_0 \subset H$ — подалгебра Хопфа, содержащая корадикал H. Предположим, что A удовлетворяет полиномиальному тождеству и A первична (или, по крайней мере, H_0-первична). Если* $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, *то*

$$Z(A)^{H_0} = Z(A)^H.$$

Доказательство. Кольцо частных $Q = Q(A)$ является H_0-простой алгеброй; следовательно, предложение 8.1 применимо к H-модульной алгебре Q и её идеалу $K = 0$. □

Для случая $\operatorname{char} \Bbbk > 0$ Еряшкин исследовал взаимосвязь между центральными инвариантами для H и для H_0 в H-первичных PI алгебрах. Следующий результат является следствием [6, предложение 3.2].

Теорема 8.3. *Пусть* $\operatorname{char} \Bbbk = p > 0$ *и $H_0 \subset H$ — подалгебра Хопфа, содержащая корадикал H. Предположим, что A — H-первичная PI алгебра. Пусть $A_0 = A/P_0$, где P_0 — H_0-первичный идеал алгебры A, не содержащий ненулевых устойчивых относительно действия H идеалов алгебры A. Если A_0 цела над $Z(A_0)^{H_0}$, то A цела над $Z(A)^H$.*

В [6, теорема 3.1] дополнительно предполагалось, что H_0 полупроста. Это позволяет заменить условие, что A_0 цела над $Z(A_0)^{H_0}$, двумя более слабыми предположениями о целой зависимости для промежуточных расширений колец.

Следствие 8.4 (см. [4]). *Предположим, что* $\operatorname{char} \Bbbk = p > 0$ *и H точечна. Если A содержит такой первичный идеал P, что факторалгебра A/P коммутативна и P не содержит ненулевых устойчивых относительно действия H идеалов алгебры A, то A цела над $Z(A)^H$.*

Доказательство. Здесь корадикал H_0 алгебры Хопфа H является групповой алгеброй $\Bbbk G$. При $P_0 = \bigcap_{g \in G} gP$ предположения теоремы 8.3 выполняются, поскольку $A_0 = A/P_0$ коммутативна; следовательно, $A_0 = Z(A_0)$ цела над $A_0^{H_0} = A_0^G$ в силу классической теории. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артамонов В. А.* Строение алгебр Хопфа// Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. — М.: ВИНИТИ, 1991. — *29*. — С. 3–63.
2. *Артамонов В. А.* Инварианты алгебр Хопфа// Вестн. МГУ. Сер. мат. мех. — 1996. — № 4. — С. 45–49.
3. *Еряшкин М. С.* Инварианты действия полупростой конечномерной алгебры Хопфа на алгебрах специального вида// Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 8. — С. 14–22.
4. *Еряшкин М. С.* Кольца Мартиндейла и H-модульные алгебры, обладающие инвариантными характеристическими многочленами// Сиб. мат. ж. — 2012. — *53*. — С. 822–838.
5. *Еряшкин М.С.* Инварианты и кольца частных H-полупервичных H-модульных алгебр, удовлетворяющих полиномиальному тождеству// Изв. вузов. Мат. — 2016. — № 5. — С. 22–40.
6. *Еряшкин М. С.* Инварианты действия полупростой алгебры Хопфа на PI-алгебре// Изв. вузов. Мат. — 2016. — № 8. — С. 21–34.
7. *Харченко В. К.* Расширения Галуа и кольца частных// Алгебра и логика. — 1974. — *13*. — С. 460–484.
8. *Тоток А. А.* Об инвариантах конечномерных точечных алгебр Хопфа// Вестн. МГУ. Сер. мат. мех. — 1997. — № 3. — С. 31–34.
9. *Тоток А. А.* Действия алгебр Хопфа// Мат. сб. — 1998. — *189*. — С. 149–160.
10. *Bahturin Yu. A., Linchenko V.* Identities of algebras with actions of Hopf algebras// J. Algebra. — 1998. — *202*. — С. 634–654.
11. *Bergen J., Cohen M., Fischman D.* Irreducible actions and faithful actions of Hopf algebras// Isr. J. Math. — 1990. — *72*. — С. 5–18.

12. *Bergen J., Montgomery S.* Smash products and outer derivations// Isr. J. Math. — 1986. — *53.* — C. 321–345.
13. *Bergman G. M., Isaacs I. M.* Rings with fixed-point-free group actions// Proc. London Math. Soc. — 1973. — *27.* — C. 69–87.
14. *Björk J.-E.* Conditions which imply that subrings of semiprimary rings are semiprimary// J. Algebra. — 1971. — *19.* — C. 384–395.
15. *Chin W.* Spectra of smash products// Isr. J. Math. — 1990. — *72.* — C. 84–98.
16. *Cohen M.* Smash products, inner actions and quotient rings// Pac. J. Math. — 1986. — *125.* — C. 45–66.
17. *Cohen M.* Hopf algebra actions – revisited// Contemp. Math. — 1992. — *134.* — C. 1–18.
18. *Cohen M., Fischman D.* Hopf algebra actions// J. Algebra. — 1986. — *100.* — C. 363–379.
19. *Cohen M., Fischman D.* Semisimple extensions and elements of trace 1// J. Algebra. — 1992. — *149.* — C. 419–437.
20. *Cohen M., Fischman D., Montgomery S.* Hopf Galois extensions, smash products, and Morita equivalence// J. Algebra. — 1990. — *133.* — C. 351–372.
21. *Cohen M., Rowen L. H.* Group graded rings// Commun. Algebra. — 1983. — *11.* — C. 1253–1270.
22. *Cohen M., Westreich S.* Central invariants of H-module algebras// Commun. Algebra. — 1993. — *21.* — C. 2859–2883.
23. *Cohen M., Westreich S.* From supersymmetry to quantum commutativity// J. Algebra. — 1994. — *168.* — C. 1–27.
24. *Cohen M., Westreich S., and Zhu S.* Determinants, integrality and Noether's theorem for quantum commutative algebras// Isr. J. Math. — 1996. — *96.* — C. 185–222.
25. *Demazure M., Gabriel P.* Groupes Algébriques. I. — Paris: Masson, 1970.
26. *Doi Y.* Algebras with total integrals// Commun. Algebra. — 1985. — *13.* — C. 2137–2159.
27. *Etingof P.* Galois bimodules and integrality of PI comodule algebras over invariants// J. Noncommut. Geom. — 2015. — *9.* — C. 567–602.
28. *Etingof P., Walton C.* Semisimple Hopf actions on commutative domains// Adv. Math. — 2014. — *251.* — C. 47–61.
29. *Etingof P., WaltonC.* Pointed Hopf actions on fields, I// Transform. Groups. — 2015. — *20.* — C. 985–1013.
30. *Etingof P., Walton C.* Pointed Hopf actions on fields, II// J. Algebra. — 2016. — *460.* — C. 253–283.
31. *Ferrer Santos W. R.* Finite generation of the invariants of finite dimensional Hopf algebras// J. Algebra. — 1994. — *165.* — C. 543–549.
32. *Kalniuk M. and Tyc A.* Geometrically reductive Hopf algebras and their invariants// J. Algebra. — 2008. — *320.* — C. 1344–1363.
33. *Kato T.* Self-injective rings// Tohoku Math. J. — 1967. — *19.* — C. 485–495.
34. *Kreimer H. F. and Takeuchi M.* Hopf algebras and Galois extensions of an algebra// Indiana Univ. Math. J. — 1981. — *30.* — C. 675–692.
35. *Linchenko V., Montgomery S.* Semiprime smash products and H-stable prime radicals for PI-algebras// Proc. Amer. Math. Soc. — 2007. — *135.* — C. 3091–3098.
36. *Matczuk J.* Centrally closed Hopf module algebras// Commun. Algebra. — 1991. — *19.* — C. 1909–1918.
37. *McConnell J. C., Robson J. C.* Noncommutative Noetherian Rings. — Wiley, 1987.
38. *Montgomery S.* Outer automorphisms of semi-prime rings// J. London Math. Soc. — 1978. — *18.* — C. 209–220.
39. *Montgomery S.* Fixed Rings of Finite Automorphism Groups of Associative Rings/ Lect. Notes Math. — Springer-Verlag, 1980. — *818.*
40. *Montgomery S.* Hopf Algebras and Their Actions on Rings/ CBMS Reg. Conf. Ser. Math. — Am. Math. Soc., 1993. — *82.*
41. *Montgomery S., Schneider H.-J.* Prime ideals in Hopf Galois extensions// Isr. J. Math. — 1999. — *112.* — C. 187–235.
42. *Montgomery S., Small L. W.* Integrality and prime ideals in fixed rings of P.I. rings// J. Pure Appl. Algebra. — 1984. — *31.* — C. 185–190.
43. *Mumford D.* Abelian Varieties. — Oxford Univ. Press, 1970.
44. *Pare R., Schelter W.* Finite extensions are integral// J. Algebra. — 1978. — *53.* — C. 477–479.
45. *Passman D. S.* Infinite Crossed Products/ Pure Appl. Math. — Academic Press, 1989. — *135.*
46. *Quinn D.* Integrality over fixed rings// J. London Math. Soc. — 1989. — *40.* — C. 206–214.

47. *Rowen L. H.* Ring Theory. Vol. II. — Academic Press, 1988.
48. *Schelter W.* Integral extensions of rings satisfying a polynomial identity// J. Algebra. — 1976. — *40.* — С. 245–257; Errata// J. Algebra. — 1977. — *44.* — С. 576
49. *Skryabin S.* Invariants of finite group schemes// J. London Math. Soc. — 2002. — *65.* — С. 339–360.
50. *Skryabin S.* Invariants of finite Hopf algebras// Adv. Math. — 2004. — *183.* — С. 209–239.
51. *Skryabin S.* Projectivity and freeness over comodule algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 2007. — *359.* — С. 2597–2623.
52. *Skryabin S.* Structure of H-semiprime Artinian algebras// Alg. Represent. Theory. — 2011. *14.* — С. 803–822.
53. *Skryabin S.* Coring stabilizers for a Hopf algebra coaction// J. Algebra. — 2011. — *338.* — С. 71–91.
54. *Skryabin S.* Invariant subrings and Jacobson radicals of Noetherian Hopf module algebras// Isr. J. Math. — 2015. — *207.* — С. 881–898.
55. *Skryabin S.* Finiteness of the number of coideal subalgebras// Proc. Am. Math. Soc. — 2017. — *145.* — С. 2859–2869.
56. *Skryabin S.* The left and right dimensions of a skew field over the subfield of invariants// J. Algebra. — 2017. — *482.* — С. 248–263.
57. *Skryabin S., Van Oystaeyen F.* The Goldie theorem for H-semiprime algebras// J. Algebra. — 2006. — *305.* — С. 292–320.
58. *Zhu S.* Integrality of module algebras over its invariants// J. Algebra. — 1996. — *180.* — С. 187–205.

С. М. Скрябин
Институт математики и механики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: `Serge.Skryabin@kpfu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 158 (2018). С. 81–115

УДК 510.5, 512.565.2

ВЫЧИСЛИМАЯ ПРЕДСТАВИМОСТЬ СЧЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

© 2018 г. **А. Н. ФРОЛОВ**

Аннотация. Данная работа посвящена изучению алгоритмических свойств счетных линейных порядков на основе построения эффективных представлений этих структур на множестве натуральных чисел. В 1991 г. К. Джокуш и Р. Соар построили низкий линейный порядок, не имеющий вычислимого представления. Ранее, в 1989 г., Р. Доуни и М. Мозес показали, что каждый низкий дискретный линейный порядок имеет вычислимую копию. Естественно спросить, для каких еще порядковых типов представление в низкой степени достаточно для существования вычислимого представления. Этот вопрос, а точнее программу исследований, сформулировал в 1998 г. Р. Доуни: описать такие порядковые свойства P, что для любого низкого линейного порядка L из выполнимости $P(L)$ следует существование вычислимого представления. В этой работе изложен подробный обзор основных результатов в этом направлении, которые в основном получены автором этой работы либо самостоятельно, либо в соавторстве.

Ключевые слова: счетные линейные порядки, вычислимые структуры, вычислимая представимость, низкие степени.

AMS Subject Classification: 03D45, 03C57

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Данная работа посвящена изучению алгоритмических свойств счетных линейных порядков на основе построения эффективных представлений этих структур на множестве натуральных чисел. Это направление исследований находится на стыке теории вычислимости и теории счетных линейных порядков. Счетные линейные порядки твердо заняли свое место в теории моделей — каждая счетная булева алгебра порождается некоторым счетным линейным порядком, а в теории групп особое место занимает направление исследований упорядоченных групп и прочее.

Основы теории вычислимых алгебраических структур и их моделей были заложены в работах 50-х годов прошлого века П. С. Новикова [6], О. Рабина [34], А. Фролиха и Дж. Шефердсона [24], Р. Воота [39], А. И. Мальцева [4, 5] и с тех пор активно развивается. В качестве наиболее важных и современных источников можно указать книги С. С. Гончарова и Ю. Л. Ершова [2] и Дж. Найт и К. Эша [13], а также большую обзорную работу 2007 г. С. С. Гончарова [28].

Исследования в области вычислимых линейных порядков были начаты почти одновременно с зарождением теории вычислимых структур с работы 1956 г. Х. Райса [35], были продолжены

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-60077).

ISSN 0233–6723

в работах Д. Янга [41], Л. Фейнера [21, 22], Р. Соара [37], М. Перетятькина [7], А. Пинуса [8], С. Фелнера [23] и с тех пор прочно заняли свое место в теории вычислимых структур. Так, на рубеже веков выходит в свет обзорная работа Р. Доуни и Дж. Реммела [20], охватывающая все актуальные направления исследований и важные открытые вопросы в теории вычислимых структур, где теории вычислимых линейных посвящен отдельный раздел. В этом направлении наиболее важными и современными источниками являются книга Дж. Розенштейна [36], обзорные работы Р. Доуни [15, 16]. В обзорной статьt М. В. Зубкова и А. Н. Фролова [3] описывается техника предельно монотонных функций в теории вычислимых линейных порядков.

В одной из самых ранних работ по исследованию вычислимых свойств линейных порядков Л. Фейнер [22] построил $\mathbf{0}'$-вычислимый линейный порядок, не имеющий вычислимого изоморфного представления. Этот результат естественным образом подталкивает к вопросу об исследовании достаточных условий вычислимой представимости линейных порядков и, более общо, к описанию вычислимо представимых линейных порядков. Последний более общий вопрос был сформулирован как фундаментальный вопрос теории вычислимых линейных порядков в уже выше упомянутой работе 2000 г. Р. Доуни и Дж. Реммела [20].

В 1998 г. Р. Доуни [16] сформулировал одну специальную программу исследований достаточных условий вычислимой представимости, поставив вопрос об описании таких порядковых свойств P, что для любого низкого линейного порядка L из выполнимости $P(L)$ следует существование вычислимого представления. Эта программа была сформулирована под влиянием целого ряда результатов. В теории вычислимости известны низкие множества, не являющиеся вычислимыми, в то же самое время они считаются «близко расположенными» к вычислимым множествам (см., например, книгу Р. Соара [9]). Естественно напрашивается предположение, что возможно некоторые низкие структуры имеют вычислимые представления. Действительно, например, Р. Доуни и К. Джокуш доказали (см. [17]), что каждая низкая булева алгебра является вычислимо представимой.

Дж. Найт поставила вопрос о вычислимой представимости низких линейных порядков (работа не опубликована). Однако К. Джокуш и Р. Соар дали отрицательный ответ на вопрос Дж. Найт, показав, что не каждый низкий линейный порядок имеет вычислимое представление (см. [29]). Но с другой стороны, любой дискретный линейный порядок низкой степени имеет вычислимую копию (Р. Доуни и М. Мозес, [19]). Линейный порядок называется дискретным, если каждый его элемент имеет непосредственного соседа и слева, и справа.

Мировая тенденция исследований в области вычислимых алгебраических структур естественным образом подталкивает нас обобщить выше приведенную программу исследований Р. Доуни, заменив условие «низкости» на условие «n-низкости» . Действительно, аналогично низким множествам (см. выше) n-низкие множества «близко расположены» к вычислимым множествам; кроме того, некоторые n-низкие структуры являются вычислимо представимыми. Например, Дж. Тёрбер доказал (см. [38]), что каждая 2-низкая булева алгебра имеет вычислимое представление, а Дж. Найт и М. Стоб показали (см. [33]), что любая 3-низкая и даже 4-низкая булева алгебра является вычислимо представимой.

Таким образом, обобщенная программа исследований достаточных условий вычислимой представимости линейных порядков заключается в описании таких порядковых свойств P_n, что для любого n-низкого линейного порядка L из выполнимости $P_n(L)$ следует существование вычислимого представления. Именно этой программе посвящена данная работа.

1. Низкие линейные порядки

1.1. Описание низких представлений. В данном разделе приводится описание линейных порядков, имеющих низкое представление — теорема 1.1, а именно, доказано, что линейный порядок $(|L|, <_L)$ имеет низкую копию тогда и только тогда, когда структура $(|L|, <_L, S_L)$, полученная путем обогащения сигнатуры линейного порядка его отношением соседства, имеет $\mathbf{0}'$-вычислимое представление. Помимо всего прочего это описание удобно для построения низких линейных порядков с различными заданными свойствами, что будет продемонстрировано в теоремах 1.22, 1.24, 1.25 и 1.31.

В этом описании важную роль играет понятие отношения соседства S. *Отношением соседства* на линейном порядке L называется бинарное отношение

$$S_L(x,y) \leftrightharpoons (x <_L y) \ \& \ (\forall z)\neg(x <_L z <_L y).$$

В этом случае элементы x и y называются *соседними*, элемент x называется *непосредственным соседом слева* элемента y, а элемент y — *непосредственным соседом справа* элемента x.

Ясно, что если линейный порядок L имеет низкую степень, то сам порядок L и отношение соседства S_L являются $\mathbf{0}'$-вычислимыми. Таким образом, структура $(|L|, <_L, S_L)$ является $\mathbf{0}'$-вычислимой. На самом деле верно и обратное.

Теорема 1.1 (А. Н. Фролов [11] и, независимо, А. Монталбан [32])**.** *Линейный порядок $L = (|L|, <_L)$ имеет низкое представление тогда и только тогда, когда структура $(|L|, <_L, S_L)$ имеет $\mathbf{0}'$-вычислимое представление. При этом, если линейный порядок L и отношение соседства на нем S_L являются $\mathbf{0}'$-вычислимыми, то существуют такие низкий линейный порядок R и $\mathbf{0}'$-вычислимый изоморфизм f, что $L \cong_f R$.*

Доказательство. Пусть $\deg(L) \leqslant \mathbf{0}'$ и $\deg(S_L) \leqslant \mathbf{0}'$. Построим низкий линейный порядок R, причем в процессе построения которого накладывается «запрет» на пару элементов $x <_R y$ на добавление новых элементов между ними. Для этого строится бинарное отношение S_R, которое на самом деле является отношением соседства. Порядок R строится по шагам методом конечных расширений, для чего на каждом шаге определяется конечный линейный порядок σ_s. Одновременно с построением σ_s строится вложение $f_s : \sigma_s \to L$ так, что $f_s \subseteq f_{s+1}$ и $f : R \to L$ является изоморфизмом, где $f = \bigcup\limits_{s\to+\infty} f_s$.

Конструкция R, S_R и f.

Шаг $s = 0$. Положим $\sigma_0 = \emptyset$ и $f_s = \emptyset$.

Шаг $s + 1$. Предположим, что на шаге s уже построены конечный линейный порядок σ_s, на некоторых элементах которого определено отношение S_R, и вложение $f_s : \sigma_s \to L$. Назовем линейный порядок $\sigma \supseteq \sigma_s$ «корректным» расширением σ_s, если $S_R(x, y)$ для $x, y \in |\sigma_s|$ влечет $\neg(x <_\sigma t <_\sigma y)$ для всех $t \in |\sigma|$.

1. Построим «промежуточные» расширения

$$\sigma'_{s+1} \supseteq \sigma_s, \quad f'_{s+1} \supseteq f_s.$$

Если $s \in \mathrm{rng}(f_s)$, то положим

$$\sigma'_{s+1} = \sigma_s, \quad f'_{s+1} = f_s.$$

Пусть $s \notin \mathrm{rng}(f_s)$. Тогда найдем такие $x, y \in |\sigma_s|$, что

$$f_s(x) <_L s <_L f_s(y), \quad \neg(f_s(x) <_L z <_L f_s(y))\text{для любого } z \in \mathrm{rng}(f_s).$$

Определим $\sigma'_{s+1} \supseteq \sigma_s$, положив новый элемент t так, чтобы $x <_R t <_R y$, и положим

$$f'_{s+1}(t) = s, \quad f'_{s+1}(p) = f_s(p) \quad \text{для всех } p \in \mathrm{dom}(f_s).$$

2. Построим такие «вспомогательные» конечные последовательности

$$\sigma'_{s+1} \subseteq \tau_1 \subseteq \tau_2 \subseteq \ldots, \quad f'_{s+1} \subseteq g_1 \subseteq g_2 \subseteq \ldots,$$

что f_k является вложением τ_k в L. Положим

$$\tau_0 = \sigma'_{s+1}, \quad g_0 = f'_{s+1}.$$

Предположим по индукции, что τ_k и g_k уже построены. Построим

$$\tau_{k+1} \supseteq \tau_k, \quad g_{k+1} \supseteq g_k$$

или определим σ_{s+1} и f_{s+1}. Для этого рассмотрим следующее условие, которое, очевидно, является $\mathbf{0}'$-вычислимым:

$$\Gamma(\tau_k) = (\exists \tau \supseteq \tau_k)(\exists s')(\tau \text{ — корректное расширение } \tau_k \ \&\ \varphi^{\tau}_{s,s'}(s)\downarrow).$$

Если это условие не выполнено, то положим

$$\sigma_{s+1} = \tau_k, \quad f_{s+1} = g_k$$

и завершаем шаг $s+1$.

Пусть условие $\Gamma(\tau_k)$ выполнено. Найдем тогда $\tau \supseteq \tau_k$, удовлетворяющее этому условию.

Относительно оракула $\mathbf{0}'$ можно определить, существует ли вложение $f \supseteq f_k$ порядка τ в L. Действительно, пусть $\tau_k = \{x_1 <_R \cdots <_R x_n\}$ и пусть для простоты

$$\tau = \Big\{x_1 <_\tau x_2 <_\tau \cdots <_\tau x_i <_\tau t_1 <_\tau \cdots <_\tau t_m <_\tau x_{i+1} <_\tau x_{i+2} <_\tau x_n\Big\}.$$

С помощью оракула $\mathbf{0}'$ можно определить, что либо существуют такие $z_1, \ldots, z_m$, что

$$g_k(x_i) <_L z_1 <_L \cdots <_L z_m <_L g_k(x_{i+1}),$$

либо существуют такие $z_1, \ldots, z_q$, что

$$q < m, \quad g_k(x_i) <_L z_1 <_L \cdots <_L z_q <_L g_k(x_{i+1}), \quad S_L(z_j, z_{j+1}) \quad \text{для } 0 \leqslant j \leqslant q,$$

где $z_0 = g_k(x_i)$ и $z_{q+1} = g_k(x_{i+1})$.

В первом случае положим

$$\sigma_{s+1} = \tau, \quad f_{s+1}(t_j) = z_j \text{ для } 1 \leqslant j \leqslant m, f_{s+1}(x_p) = f_k(x_p) \text{ для } 1 \leqslant p \leqslant n$$

и завершаем шаг $s+1$. Во втором случае построим расширение $\tau_{k+1} \supseteq \tau_k$, добавив новые элементы $t'_1, \ldots, t'_q$ так, чтобы

$$x_i <_R t'_1 <_R \cdots t'_q <_R x_{i+1}.$$

Определим «запрет» $S_R(t'_j, t'_{j+1})$ для $0 \leqslant j \leqslant q$, где $t'_0 = x_i$ и $t'_{q+1} = x_{i+1}$. Положим

$$f_{k+1}(t'_j) = z_j \text{ для } 1 \leqslant j \leqslant q, \quad f_{k+1}(x_p) = f_k(x_p) \text{ для } 1 \leqslant p \leqslant n$$

и переходим к построению σ_{k+2} и f_{k+2}.

Назовем множество

$$I_x \leftrightharpoons \Big\{y \mid (\exists n)(\exists t_1)\ldots(\exists t_n)(\forall t)(S'_R(x, t_1) \ \&\ S'_R(t_1, t_2) \ \&\ \ldots \ \&\ S'_R(t_{n-1}, t_n) \ \&\ S'_R(t_n, y))\Big\}$$

«классом связанности», где $S'_R(x, y) = S_R(x, y) \vee S_R(y, x)$. Понятно, что количество различных классов связанности порядка τ_{k+1} строго меньше, чем количество различных классов связанности порядка τ_k. Поэтому приведенная выше процедура рано или поздно остановится, σ_{s+1} и f_{s+1} определятся, и шаг $s+1$ завершится.

Описание конструкции завершено.

Ясно, что последовательности $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \cdots$ и $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \cdots$ являются $\mathbf{0}'$-вычислимыми и, следовательно, линейный порядок $R = \lim\limits_{s \to +\infty} \sigma_s$ и функция $f = \lim\limits_{s \to +\infty} f_s$ являются также $\mathbf{0}'$-вычислимыми.

Для доказательства того, что построенный порядок R имеет низкую степень, достаточно показать, что условие $\varphi^R_x(x)\downarrow$ является $\mathbf{0}'$-вычислимым. Для этого, используя оракул $\mathbf{0}'$, проверяем истинность формулы $\Gamma(\sigma_x)$. Видим, что $\varphi^R_x(x)\downarrow$ тогда и только тогда, когда формула $\Gamma(\sigma_x)$ истина. Таким образом, линейный порядок R является низким.

Так как f_s является вложением σ_s в L, то f является вложением R в L. В силу случая 1 имеем $s \in \sigma_{s+1}$ и, следовательно, $\mathrm{rng}(f) = \mathbb{N}$. Отсюда непосредственно следует, что f является изоморфизмом порядков R и L. $\square$

1.2. k-Квазидискретные линейные порядки. В этом разделе рассматривается достаточно широкий класс низких линейных порядков, для построение вычислимых представлений которых разработан специальный метод, описанный ниже. В представленном методе необходимы следующие отношения на линейных порядках.

Определение 1.2. Пусть L — линейный порядок. Тогда отношением блока на нем называется бинарное отношение

$$F(x,y) \leftrightharpoons (\exists x_0,\dots x_{n+1})(x_0 = x \ \& \ x_{n+1} = y \ \& \ S_L(x_0,x_1) \ \& \ \cdots \ \& \ S_L(x_n,x_{n+1})).$$

Эквивалентно, $F(x,y)_L \Leftrightarrow (x <_L y) \ \& \ |[x,y]_L| < +\infty$. Говорим в этом случае, что элементы x и y линейного порядка L находятся в одном блоке.

Определение 1.3. Элемент x линейного порядка L называется предельным справа (слева), если соответственно

$$P_L^+(x) \rightleftharpoons (\forall y)(\exists z)(x <_L y \to x <_L z <_L y),$$
$$(P_L^-(x) \rightleftharpoons (\forall y)(\exists z)(y <_L x \to y <_L z <_L x).$$

Следующая теорема позволяет стоить вычислимые представления для некоторого фиксированного линейного порядка, не строя при этом сам изоморфизм. Достаточно построить вложение одного порядка в другой с некоторыми свойствами, а из теоремы будет следовать, что порядки изоморфны. Также эта теорема позволяет оценить алгоритмическую сложность изоморфизма.

Теорема 1.4 (А. Н. Фролов [11]). *Пусть даны такие счетные линейные порядки L, R и функция вложения $f : L \to R$, что выполнены следующие условия*:

(1) *если $S_L(a,b)$, то $|[f(a),f(b)]_R| < \infty$;*
(2) *если $x \in |R|$ и $x \notin \operatorname{rng}(f)$, то $|[x]_R| = \infty$ и существуют такие $a,b \in |L|$, что $S_L(a,b)$ и $f(a) <_R x <_R f(b)$.*

Тогда $L \cong_g R$. При этом изоморфизм g является X-вычислимым, если X-вычислимыми являются оба порядка L и R, функция f, а также все предикаты S_T, F_T, P_T^-, P_T^+, EP_T^- и EP_T^+ для $T \in \{L,R\}$, где

$$EP_T^-(x) \Leftrightarrow (\exists y)(y \leqslant_T x \ \& \ P_T^-(y) \ \& \ F_T(y,x)), \quad EP_T^+(x) \Leftrightarrow (\exists y)(x \leqslant_T y \ \& \ P_T^+(y) \ \& \ F_T(x,y)).$$

Доказательство. Покажем сначала, что L/F_L и R/F_R изоморфны. Пусть элемент a_i является таким наименьшим натуральным числом $a \in |L|$, что $\neg F_L(a,t)$ для любого $t \in \{a_j \mid j < i\}$ (если $i = 0$, то это множество пусто и a_0 — это просто наименьшее число из $|L|$). Пусть теперь $b_i = f(a_i)$, $A = \{a_i \mid i \in \omega\}$ и $B = \{b_i \mid i \in \omega\}$. Теперь из условий (1) и (2) непосредственно следует, что $(A,<_L)$ и $(B,<_R)$ являются некоторыми X-вычислимыми представлениями для L/F_L и R/F_R и $(A,<_L) \cong_f (B,<_L)$.

Построим другие X-вычислимые представления L/F_L и R/F_R. Предположим, что выполнено $EP_L^-(a_i)$. Тогда выберем $a_i' \in |L|$, удовлетворяющий условиям $F_L(a_i',a_i)$ и $P_L^-(a_i')$. Если $\neg EP_L^-(a_i)$, но $EP_L^+(a_i)$, то выберем a_i', для которого выполнено $F_L(a_i',a_i)$ и $P_L^+(a_i')$. Если же $\neg EP_L^-(a_i)$ и $\neg EP_L^+(a_i)$, то положим $a_i' = a_i$. Определим теперь $A_0 = \{a_i' \mid i \in \omega\}$. Точно так же, полностью аналогичными построениями, определим $B_0 = \{b_i' \mid i \in \omega\}$. Понятно, что $(A_0,<_L)$ и $(B_0,<_L)$ являются X-вычислимыми представлениями порядков L/F_L и R/F_R. Также ясно, что существует X-вычислимый изоморфизм $\widetilde{g} : (A_0,<_L) \to (B_0,<_L)$.

Построим теперь X-вычислимый изоморфизм порядков L и R. Зафиксируем $x \in |L|$. Найдем такой a_i', что $F_L(x,a_i')$. Выберем $y \in |R|$, что $|[x,a_i']_L| = |[y,b_i']_R|$ и $x <_L a_i' \Leftrightarrow y <_R b_i'$. Положим $g(x) = y$. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что g является искомым изоморфизмом. □

Опишем теперь достаточно широкий класс линейных порядков, для которых применима теорема 1.4. Именно, введем класс так называемых k-квазидискретных линейных порядков и покажем, что каждый низкий k-квазидискретный линейный порядок имеет вычислимое представление, где k — произвольное натуральное число.

Определение 1.5. Максимальным блоком линейного порядка L называется класс

$$[x]_L = \{y \in |L| : |[x,y]_L| < +\infty \ \& \ |[y,x]_L| < +\infty\},$$

т.е. это класс эквивалентности, который порожден отношением блока.

Определение 1.6. Линейный порядок L называется k-квазидискретным, если $|[x]_L| \leqslant k$ или $|[x]_L| = +\infty$ для всех $x \in |L|$.

Определим некоторые подклассы класса k-квазидискретных линейных порядков. Это поможет лучше понять внутреннюю структуру таких порядков. На этих классах существенно отличается оценка сложности построенных изоморфизмов в теореме 1.9.

Определение 1.7. Линейный порядок L называется k-дискретным, если выполнено $|[x]_L| \leqslant k$ или $[x]_L \cong \zeta$ для всех $x \in |L|$. 0-Дискретный линейный порядок называется дискретным.

Определение 1.8. Бесконечный линейный порядок L без наибольшего и наименьшего элементов называется сильно η-схожим, если существует такой k, что каждый максимальный блок имеет мощность не более k, т.е. $|[x]_L| \leqslant k$ для всех $x \in |L|$.

Взаимоотношение данных определений можно представить следующим образом. Для всех натуральных чисел k каждый k-дискретный линейный порядок является k-квазидискретным, каждый k-квазидискретный линейный порядок является $(k+1)$-квазидискретным. Классы 0-квазидискретных и сильно η-схожих линейных порядков не пересекаются. Пересечение классов 1-квазидискретных и сильно η-схожих линейных порядков состоит только из плотных линейных порядков, которых существует только четыре типа η, $1+\eta$, $\eta+1$, $1+\eta+1$, где последние три порядковых типа можно представить себе, как естественное упорядочения множества рациональных чисел с добавлением соответственно $+\infty$ или $-\infty$.

Следующая теорема является основной теоремой, направленной на построение вычислимых представлений k-квазидискретных линейных порядков.

Теорема 1.9 (А. Н. Фролов [11]). *Для любого натурального числа k, для каждого $\mathbf{0}'$-вычислимого k-квазидискретного линейного порядка L, отношение соседства которого также $\mathbf{0}'$-вычислимо, существует вычислимый линейный порядок R и $\mathbf{0}'$-вычислимая функция вложения $f : L \to R$, для которых верны условия* (1) *и* (2) *теоремы* 1.4.

Прежде, чем перейти к доказательству этой теоремы, покажем как из нее следуют все основные результаты данного раздела.

Следствие 1.10. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ любой низкий k-квазидискретный линейный порядок $\mathbf{0}'''$-изоморфен некоторому вычислимому порядку.*

Доказательство. Отношение соседства любого низкого или вычислимого линейного порядка является $\mathbf{0}'$. Следовательно, все отношения S, F, P^-, P^+, EP^-, EP^+ на этих порядках вычислимы относительно $\mathbf{0}'''$. Теперь справедливость следствия непосредственно вытекает из теорем 1.9 и 1.4. □

Следствие 1.11. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ любой низкий k-дискретный линейный порядок $\mathbf{0}''$-изоморфен некоторому вычислимому порядку.*

Доказательство. Отношение соседства любого низкого или вычислимого линейного порядка является $\mathbf{0}'$. Следовательно, все отношения S, F, P^-, P^+ на этих порядках вычислимы относительно $\mathbf{0}''$. Так как линейный порядок является k-дискретным, то отношения EP^- и EP^+ на нем также являются $\mathbf{0}''$-вычислимыми. Действительно, для фиксированного c_i равномерно эффективно относительно оракула $\mathbf{0}''$ можно либо найти такой c_{i+1}, что $S(c_i, c_{i+1})$, либо определить истинность $P^+(c_i)$. Следовательно, для фиксированного x можно построить $\mathbf{0}''$-вычислимую последовательность (конечную или бесконечную) $c_0, c_1, \ldots$, где $c_0 = x$ и $S(c_i, c_{i+1})$. Если эта последовательность содержит более, чем k элементов, то из k-дискретности данного порядка следует $EP^+(x)$. В противном случае имеем $\neg EP^+(x)$. Аналогично для EP^-. Теперь справедливость следствия непосредственно вытекает из теорем 1.9 и 1.4. □

Следствие 1.12. *Каждый низкий сильно η-схожий линейный порядок $\mathbf{0}'$-изоморфен некоторому вычислимому порядку.*

Доказательство. Отношение соседства любого низкого или вычислимого линейного порядка является $\mathbf{0}'$. Так как сильно η-схожие линейные порядки не содержат бесконечных блоков, то функция, построенная в теореме 1.9, является $\mathbf{0}'$-изоморфизмом между низким сильно η-схожим линейным порядком L и вычислимым порядком R. □

Доказательство теоремы 1.9. Зафиксируем натуральное число k и такой k-квазидискретный линейный порядок $(\mathbb{N}, <_L)$, что отношения $<_L$ и S_L являются $\mathbf{0}'$-вычислимыми. Тогда существуют такие вычислимые аппроксимации L_s и S_s, что

$$(\mathbb{N}, <_L, S_L) = \lim_{s\to+\infty} (\mathbb{N}, <_{L_s}, S_s).$$

Для построения требуемых линейного порядка R и вложения $f : L \to R$ построим такие вычислимые последовательности $A_{m,s}$, $f_{m,s}$ и R_s, что

$$R = \lim_{s\to+\infty} R_s, \quad (\mathbb{N}, <_L) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \lim_{s\to+\infty} (A_{m,s}, <_{L_s}), \quad f = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \lim_{s\to+\infty} f_{m,s}.$$

Также на каждом шаге определяется такая функция $n(s)$, что последовательности $A_{m,s}$ и $f_{m,s}$ определены только для $m \leqslant n(s)$.

Конструкция порядка R.

Шаг $s = 0$. Положим $A_{0,0} = \{0\}$, $n(0) = 0$, $R_0 = \{0\}$ и $f_{0,0}(0) = 0$. (На самом деле верно $A_{0,s} = \{0\}$ для любого шага s.)

Шаг $s + 1$. Предположим, что на шаге s для любого $m \leqslant n(s)$ построены такие множество $A_{m,s}$, порядки $(A_{m,s}, <_{L_s})$ и R_s и вложение $f_{m,s} : (A_{m,s}, <_{L_s}) \to R_s$, что

(a) $m \in A_{m,s}$;

(b) не существует такого $d \in R_s$, что

$$f_{m,s}(a_i) <_{R_s} d <_{R_s} f_{m,s}(a_{i+1}) \quad \text{для } 1 \leqslant i < w,$$

где $a_1, \ldots, a_w \in A_{m,s}$ таковы, что

- (b1) $a_1 <_{L_s} \cdots <_{L_s} a_w$;
- (b2) $S_s(a_i, a_{i+1})$ для $1 \leqslant i < w$;
- (b3) не существует таких $b_1, b_2 \in A_{m,s}$, что $b_1 <_{L_s} a_1$ и $\neg S_s(b_1, a_1)$, $a_w <_{L_s} b_2$ и $\neg S_s(a_w, b_2)$, соответственно;
- (b4) $w \leqslant k$.

Выберем такое наибольшее $p \leqslant n(s)$, что

(1) конечная структура $(A'_{p,s}, <_{L_s})$ является линейным порядком;

(2) отношение S_s «согласовано» с отношением порядка L_s на $A'_{p,s}$, т.е. из $S_s(x, y)$ для $x, y \in A'_{p,s}$ следует $\neg(x <_{L_s} t <_{L_s} y)$ для всех $t \in A'_{p,s}$;

(3) $(A'_{p,s}, <_{L_s}, S_s) = (A'_{p,s}, <_{L_{s+1}}, S_{s+1})$;

(4) не существуют таких j и $c_1, \ldots, c_m \leqslant s + 1$, что

- (4a) конечная структура $(A''_{p,s}, <_{L_s})$ является линейным порядком;
- (4b) отношение S_{s+1} «согласовано» с отношением порядка L_{s+1} на $A''_{p,s}$;

(4c) $(A''_{p,s}, <_{L_s}, S_s) \neq (A''_{p,s}, <_{L_{s+1}}, S_{s+1})$;
(4d) $c_0 <_{L_{s+1}} \cdots <_{L_{s+1}} c_{m+1}$;
(4e) $S_{s+1}(c_i, c_{i+1})$ для $1 \leqslant i < m$;
(4f) либо $c_0 = a^j_{t_j}$, $c_{m+1} = p+1$ и $t_j+m+1 \leqslant k$, либо $c_0 = p+1$, $c_{m+1} = a^{j+1}_1$ и $1+m+t_{j+1} \leqslant k$.

Здесь

(i) $A'_{p,s} = A_{p,s} \cup \{p+1\}$;
(ii) $A''_{p,s} = A'_{p,s} \cup \Big\{b \mid b \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(c_i)\Big\}$ (здесь и далее операция max означает функцию взятия максимума относительно естественного порядка на множестве натуральных чисел);
(iii) $(A_{p,s+1}, <_{L_s}) = T_1 + \cdots + T_{r_p}$;
(iv) $T_i = \{a^i_1 <_{L_{s+1}} \cdots <_{L_{s+1}} a^i_{t_i}\}$;
(v) $S_{s+1}(a^i_l, a^i_{l+1})$ для $1 \leqslant i \leqslant r_p$ и $1 \leqslant l < t_i$;
(vi) $\neg S_{s+1}(a^i_{t_i}, a^{i+1}_1)$ для $1 \leqslant i < r_p$.

Положим

$$n(s+1) = p+1, \quad A_{m,s+1} = A_{m,s}, \quad f_{m,s+1} = f_{m,s}$$

для всех $m \leqslant p$. Если $n(s+1) \in A_{p,s+1}$, то положим

$$R_{s+1} = R_s, \quad A_{n(s+1),s+1} = A_{p,s+1}, \quad f_{n(s+1),s+1} = f_{p,s+1}$$

и завершаем работу шага $s+1$.

Пусть $n(s+1) \notin A_{p,s+1}$ и $a^j_{t_j} <_{L_{s+1}} n(s+1) <_{L_{s+1}} a^{j+1}_1$ для некоторого j, удовлетворяющего условию $0 \leqslant j < r_p+1$ (такой j существует в силу выбора p), где для простоты $t_0 = 0$, $a^0_0 = -\infty$, $a^{r_p+1}_1 = +\infty$, $\neg S_{s+1}(-\infty, d)$ и $\neg S_{s+1}(d, +\infty)$ для всех d.

Рассмотрим следующие два возможных *события*.

Событие 1. Предположим, что существуют такие $c^1_0, \dots, c^1_{m_1+1} \leqslant s+1$, что

(a*) $(A''_{p,s}, <_{L_s})$ является линейным порядком;
(b*) отношение S_{s+1} «согласовано» с L_{s+1} на $A''_{p,s}$;
(*c**) $c^1_0 <_{L_{s+1}} \cdots <_{L_{s+1}} c^1_{m_1+1}$;
(*d**) $S_{s+1}(c^1_i, c^1_{i+1})$ для $0 \leqslant i \leqslant m_1$;
(e*) $c^1_0 = a^j_{t_j}$ и $c^1_{m_1+1} = n(s+1)$;

здесь $A''_{p,s} = A_{p,s} \cup \big\{b \mid b \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(c^1_i)\big\}$.

Событие 2. Предположим, что существуют такие $c^2_0, \dots, c^2_{m_2+1} \leqslant s+1$, что выполнены условия, аналогичные условиям (a*)–(d*), и условие (e**) вместо (e*).

(e**) $c^2_0 = n(s+1)$ и $c^2_{m_2+1} = a^{j+1}_1$.

Случай 1. Предположим, что либо выполнены оба эти *события*, и тогда в силу выбора p имеем

$$t_j + m_1 + 1 + m_2 + t_{j+1} > k;$$

либо выполнено *событие* 1 и

$$t_j + m_1 + 1 > k,$$

либо выполнено *событие* 2 и

$$1 + m_2 + t_{j+1} > k,$$

либо не выполнено ни одно из выше приведенных *событий*.

Если множество $\{d \in |R_s| \mid f_{p,s+1}(a^j_{t_j}) <_{R_s} d <_{R_s} f_{p,s+1}(a^{j+1}_1)\}$ не пусто, то выберем такое наименьшее натуральное число $d' \in |R_{s+1}|$, что

$$f_{p,s+1}(a^j_{t_j}) <_{R_{s+1}} d' <_{R_{s+1}} f_{p,s+1}(a^{j+1}_1),$$

и определим $R_{s+1} = R_s$. В противном случае выберем наименьшее натуральное число $d' \notin |R_s|$ и определим
$$|R_{s+1}| = |R_s| \cup \{d'\}, \quad f_{p,s+1}(a^j_{t_j}) <_{R_{s+1}} d' <_{R_{s+1}} f_{p,s+1}(a^{j+1}_1).$$
В обоих случаях положим
$$A_{n(s+1),s+1} = A_{p,s+1} \cup \{n(s+1)\}, \quad f_{n(s+1),s+1}(n(s+1)) = d'$$
и $f_{n(s+1),s+1}(x) = f_{p,s+1}(x)$ для всех $x \in \mathrm{dom}(f_{p,s+1})$.

Случай 2. Пусть выполнено *событие* 1 и $t_j + m_1 + 1 \leqslant k$. Тогда выберем наименьший набор $\langle d_1, \ldots, d_{m_1+1}\rangle$ таких различных натуральных чисел, что $d_1, \ldots, d_{m_1+1} \notin |R_s|$. Положим
$$|R_{s+1}| = |R_s| \cup \{d_1, \ldots, d_{m_1+1}\}$$
и определим
$$f_{p,s+1}(a^j_{t_j}) <_{R_{s+1}} d_1 <_{R_{s+1}} \cdots <_{R_{s+1}} d_{m_1+1},$$
$$d_{m_1+1} <_{R_{s+1}} d \quad \text{для всех } d >_{R_{s+1}} f_{p,s+1}(a^j_{t_j}).$$
Теперь определим
$$A_{n(s+1),s+1} = A_{p,s+1} \cup \{c^1_1, \ldots, c^1_{m_1+1}\},$$
$$f_{n(s+1),s+1}(c^1_i) = d_i \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant m_1 + 1,$$
$$f_{n(s+1),s+1}(x) = f_{p,s+1}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathrm{dom}(f_{p,s+1}).$$

Случай 3. Если выполнено *событие* 2 и $1 + m_2 + t_{j+1} \leqslant k$, то определяем R_{s+1} и f_{s+1} аналогично *случаю* 2.

Описание конструкции завершено.

Следующие леммы завершают доказательство теоремы.

Лемма 1.13. *Для любого $p \in \mathbb{N}$ существует предел $\lim\limits_{s\to+\infty} A_{p,s}$.*

Доказательство. Ясно, что $A_{0,s} = \{0\}$ для любого $s \in \mathbb{N}$ и что выполнены условия (1)–(4) для $A_{0,s}$ при всех s.

Предположим, что для любого $p' \leqslant p$ существует такой шаг s', что выполнены условия (1)–(4) для $A'_{p',s}$ при всех $s > s'$, где $A'_{p',s} = A_{p',s} \cup \{p'+1\}$ для любого p'. Тогда существует такой шаг s_0, что для любых $p' \leqslant p$ и $s > s'$ выполнены условия (1)–(4) для $A'_{p',s}$.

Выберем такой шаг $s_1 > s_0$, что $(A'_{p,s}, <_{L_s}, S_s) = (A'_{p,s}, <_{L_{s_1}}, S_{s_1})$ для всех $s > s_1$. Заметим, что из этого непосредственно следует, что структура $(A'_{p,s}, <_{L_s})$ является линейным порядком и отношение S_s «согласовано» с отношением порядка L_s на $A'_{p,s}$ для всех $s > s_1$.

1. Предположим, что существуют такие j и $c_1, \ldots, c_m$, что
$$c_0 <_L \cdots <_L c_{m+1}; \quad S(c_i, c_{i+1}) \quad \text{для } 1 \leqslant i < m;$$
либо
$$c_0 = a^j_{t_j}, \quad c_{m+1} = p + 1, \quad t_j + m + 1 \leqslant k,$$
либо
$$c_0 = p + 1, \quad c_{m+1} = a^{j+1}_1, \quad 1 + m + t_{j+1} \leqslant k,$$
где
$$(A_{p,s_1}, <_{L_s}) = T_1 + \cdots + T_{r_p}; \quad T_i = \{a^i_1 <_{L_{s_1}} \cdots <_{L_{s_1}} a^i_{t_i}\};$$
$$S_{s_1}(a^i_l, a^i_{l+1}) \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant r_p \text{ и } 1 \leqslant l < t_i;$$
$$\neg S_{s_1}(a^i_{t_i}, a^{i+1}_1) \quad \text{для } 1 \leqslant i < r_p.$$

Выберем в этом случае такой шаг $s_2 > s_1$, что

$$(A''_{p,s}, <_{L_s}, S_s) = (A''_{p,s_2}, <_{L_{s_2}}, S_{s_2})$$

для всех $s > s_2$, где

$$A''_{p,s'} = A_{p,s'} \cup \{b \mid b \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m}(c_i^1)\}$$

для всех s'. Ясно теперь, что выполнены все условия (1)–(4) для $A'_{p,s}$ при $s > s_2$ и, следовательно, имеем $A_{p,s} = A_{p,s_2}$ для всех $s > s_2$.

2. Предположим, что не выполнено предыдущее условие. Это означает, что существуют такие j и $c_1, \ldots, c_m$, что

$$c_0 <_L \cdots <_L c_{m+1};$$

либо

$$c_0 = a^j_{t_j}, \quad c_{m+1} = p+1, \quad 1 + t_j + m = k+1,$$

либо

$$c_0 = p+1, \quad c_{m+1} = a_1^{j+1}, \quad 1 + m + t_{j+1} = k+1.$$

Выберем в этом случае такой шаг $s_2 > s_1$, что для всех $s > s_2$ выполнено

$$(A''_{p,s}, <_{L_s}, S_s) = (A''_{p,s_2}, <_{L_{s_2}}, S_{s_2}),$$

где

$$A''_{p,s'} = A_{p,s'} \cup \{b \mid b \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m}(c_i^1)\}$$

для всех s'. Нетрудно видеть, что выполнены все условия (1)–(4) для $A'_{p,s}$ при $s > s_2$ и, следовательно, имеем $A_{p,s} = A_{p,s_2}$ для всех $s > s_2$. □

Лемма 1.14. $\lim\limits_{s\to+\infty} n(s) = +\infty$.

Доказательство. В предыдущей лемме на самом деле доказано, что для любого p существует такой шаг s_p, что все условия (1)–(4) выполнены для $A'_{p,s}$ при $s > s_p$. Следовательно, для каждого s_0 существует такой шаг s_1, что условия (1)–(4) выполнены для $A'_{p,s}$ при $p \leqslant n(s_0) + 1$ и $s > s_1$. Согласно конструкции имеем $n(s) \geqslant n(s_0) + 1$ для всех $s > s_1$ и, следовательно, $\lim\limits_{s\to+\infty} n(s) = +\infty$.
□

Лемма 1.15. *Существует такой вычислимый линейный порядок $R = (\mathbb{N}, <_R)$, что*

$$R = \lim_{s\to+\infty} R_s.$$

Доказательство. Ясно, что последовательность $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \cdots$ является равномерно вычислимой. Следовательно, существует предел $R = \lim\limits_{s\to+\infty} R_s$. Более того, R является линейным порядком. В силу предыдущей леммы и того факта, что каждый раз при добавлении нового элемента в R выбирается наименьшее возможное натуральное число, получаем $|R| = \mathbb{N}$ и, следовательно, R является вычислимым порядком. □

Лемма 1.16. *Для любого $x \in \mathbb{N}$ существует предел $f_p(x) = \lim\limits_{s\to+\infty} f_{p,s}(x)$, причем $f = \bigcup\limits_{p\to+\infty} f_p$ является вложением порядка L в порядок R.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что $f_{p,s} \neq f_{p,s+1}$ тогда и только тогда, когда $A_{p,s} \neq A_{p,s+1}$. Отсюда непосредственно следует существование предела $f_p(x) = \lim\limits_{s\to+\infty} f_{p,s}(x)$.

Имеем $f_{p,s} \subseteq f_{p+1,s}$ для всех $p \leqslant n(s)$. Тогда $f_p \subseteq f_{p+1}$, так что существует $f = \bigcup\limits_{p\to+\infty} f_p$.

Так как $f_{p,s}$ является вложением порядка $(A_{p,s}, <_{L_s})$ в порядок R_s, то f является вложением порядка L в R. □

Лемма 1.17. *Выполнено условие* (1) *теоремы* 1.4*, а именно, для любых a и b из $S_L(a,b)$ следует, что $[f(a), f(b)]_R$ конечно.*

Доказательство. Выберем такие шаг s_0 и индекс p, что $a, b \in A_{p,s_0}$; $f_{p,s}(x) = f_{p,s_0}(x)$ для всех $s > s_0$ и $x \in A_{p,s_0}$; $(A_{p,s}, <_{L_s}, S_s) = (A_{p,s_0}, <_{L_{s_0}}, S_{s_0})$ для всех $s > s_0$. Тогда согласно конструкции новые элементы не добавляются в R_s между элементами $f_{p,s_0}(a)$ и $f_{p,s_0}(b)$ на шагах $s > s_0$. Следовательно, $[f(a), f(b)]_R$ конечно. □

Лемма 1.18. *Выполнено условие* (2) *теоремы* 1.4*, а именно, для любого $x \in |R|$ из $x \notin \operatorname{rng}(f)$ следует, во-первых, бесконечность класса $[x]_R$ и, во-вторых, существование таких элементов a и b, что $S_L(a,b)$ и $f(a) <_R x <_R f(b)$.*

Доказательство. Выберем такой шаг s_0, что

$$(A_{x,s}, <_{L_s}, S_s) = (A_{x,s_0}, <_{L_{s_0}}, S_{s_0})$$

и $f_{x,s}(y) = f_{x,s_0}(y)$ для всех $s > s_0$ и $y \in A_{x,s_0}$.

Если $x \in \operatorname{rng}(f_{x,s_0})$, то очевидно $x \in \operatorname{rng}(f)$. Пусть $x \notin \operatorname{rng}(f_{x,s_0})$. Тогда согласно конструкции существуют такие $a, b \in A_{x,s_0}$, что $f_{x,s_0}(a) <_R x <_R f_{x,s_0}(b)$ и $S_{s_0}(a,b)$ и, следовательно, $S_L(a,b)$ и $f(a) <_R x <_R f(b)$.

При этом $x \notin \operatorname{rng}(f_{x,s_0})$, только если $|[f^{-1}_{x,s_0}(x)]_L| > k$. Так как L является k-квазидискретным, то $[f^{-1}(x)]_L$ бесконечно. Тогда из предыдущей леммы следует, что $[x]_R$ также бесконечно. □

Теорема 1.9 доказана. □

1.3. η-Схожие линейные порядки. В данном разделе исследуем другой широкий класс линейных порядков — линейных порядков, конденсации (т.е. фактор-порядки по отношению блока) которых являются плотными. Наиболее интересными и важными подклассами таких порядков являются классы так называемых η-схожих и сильно η-схожих линейных порядков (напомним, определение последних дано в разделе 1.2 в определении 1.8).

Определение 1.19. Бесконечный линейный порядок L без наибольшего и наименьшего элементов называется η-схожим, если каждый его максимальный блок конечен, т.е. $|[x]_L| < +\infty$ для всех $x \in |L|$.

Первоначально доказательство того факта, что каждый низкий сильно η-схожий линейный порядок имеет вычислимое представление, было изложено в работе А. Н. Фролова [10] (см. также [26], где изложено более простое доказательство). Детальное изучение этого доказательства показывает, что построенный изоморфизм между данным сильно η-схожим порядком и его вычислимым представлением является $\mathbf{0}''$-вычислимым. Позже изоморфизм может быть выбран $\mathbf{0}'$-вычислимым (см. следствие 1.12).

Фактически в [10] автор использовал в доказательстве эквивалент так называемых предельно монотонных функций. Первоначально, это понятие ввел Н. Г. Хисамиев (см. [31]), но под другим названием. Сейчас же в современной литературе больше прижился термин *предельно монотонная функция.* Более подробно с этими функциями, а также с техникой их применения в теории вычислимых линейных порядков, можно познакомиться в обзорной работе М. В. Зубкова и А. Н. Фролова [3]. Там же, в частности, изложено доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.20 (А. Н. Фролов [11]). *Каждый низкий линейный порядок, конденсация которого есть η и который не содержит сильно η-схожего интервала, $\mathbf{0}''$-изоморфен некоторому вычислимому представлению.*

Естественно возникает вопрос о существовании вычислимого представления низкого η-схожего линейного порядка. Заметим, что в работе К. Джокуша и Р. Соара [29] построен низкий линейный порядок, не имеющего вычислимой копии, у которого только лишь вторая конденсация есть η, т.е. он η-схожим не является. Ниже мы дадим ответ на поставленный вопрос.

Теорема 1.21. *Существует низкий η-схожий линейный порядок, не имеющий вычислимого представления.*

Доказательство. Построим следующий линейный порядок $L = 2+L_0+4+L_1+6+L_2+8+\cdots$, где каждый $L_i = \eta+a^i_0+\eta+a^i_1+\eta+\cdots$ является конечной или бесконечной суммой и все a^i_j — нечетные числа (различные для каждого i). Ясно, что L является η-схожим. Чтобы построить L низким, по теореме 1.1 достаточно этот порядок и его отношение соседства построить $\mathbf{0}'$-вычислимыми.

Зафиксируем оракул $\mathbf{0}'$. Легко построить $\mathbf{0}'$-вычислимую нумерацию всех вычислимых линейных порядков с $\mathbf{0}'$-вычислимым отношением соседства, другими словами, такую всюду определимую $\mathbf{0}'$-вычислимую нумерацию $\{(R_n, S_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, что $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — это все вычислимые линейные порядки, а S_n — отношение соседства на R_n. Пусть $(R_{n,s}, S_{n,s})$ — их $\mathbf{0}'$-вычисления к шагу s. Обозначим через $ln_n(s)$ такое наибольшее $t \leqslant s$, что для всех $t_1, t_2 \leqslant t$ значения $R(t_1,t_2)_{n,s}$ и $S(t_1,t_2)_{n,s}$ определены. Введем отношение

$$F_{i,s}(t_1,\dots,t_n) \rightleftharpoons (t_1,\dots,t_n \leqslant ln_i(s))\ \&\ (R_i(t_j,t_{j+1})\ \& \\ S_i(t_j,t_{j+1}) \text{ для } 1 \leqslant j \leqslant n-1)\ \&\ (\neg S_i(r,t_1)\ \&\ \neg S_i(t_n,r) \text{ для всех других } r \leqslant ln_i(s)).$$

Прежде чем перейти к описанию построения L_i, введем следующие понятия. Каждый элемент будем называть либо *η-элементом*, либо *n-элементом* для некоторого нечётного числа n. Для каждого фиксированного n все n-элементы попарно связаны отношением соседства. Некоторые η-элементы могут стать n-элементами, но не наоборот, а n-элементы могут только лишь сменить номер на больший, тем самым сохраняя отношение соседства. Обозначим через $L_{i,s}$ конечный линейный порядок, построенный к шагу s. При построении будет обеспечено условие $L_{i,s} \subseteq L_{i,s+1}$, что позволит определить $L_i = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} L_{i,s}$.

Конструкция L_i.

Шаг $s = 0$. Положим $L_{i,0} = \eta 3\eta 5\eta$, то есть положим в порядке возрастания один η-элемент, 3 элемента, являющиеся 3-элементами, один η-элемент, 5 элементов, являющихся 5-элементами, и в конце еще один η-элемент. Скажем, что *i-требование не инициализировано.*

Шаг $s+1$. Предположим, что $L_{i,s} = \eta\dots\eta a_0\eta\dots\eta a_1\eta\dots\eta a_2\cdots\eta\dots\eta a_k\eta\dots\eta a_{k+1}\eta\dots\eta$. Здесь $\eta\dots\eta$ означает некоторое количество η-элементов, а a_j — a_j-элементы в количестве a_j штук.

Подшаг 1. Пусть i-требование еще не инициализировано. Найдем наименьшие наборы элементов $t_1,\dots,t_{2i+2} \leqslant ln_i(s)$ и $r_1,\dots,r_{2i+4} \leqslant ln_i(s)$, удовлетворяющих условию $F_{i,s}(t_1,\dots,t_{2i+2})$, $F_{i,s}(r_1,\dots,r_{2i+4})$ и $R_{i,s}(t_{2i+2},r_1)$. Если таких элементов нет, то в этом подшаге больше ничего не делаем и переходим в подшаг 3.

Пусть $l^{j_p}_1,\dots,l^{j_p}_{j_p} \leqslant ln_i(s)$ $(1 \leqslant p \leqslant m)$ — все такие элементы, что $F_{i,s}(l^{j_p}_1,\dots,l^{j_p}_{j_p})$, $R_{i,s}(t_{2i+2},l^{j_1}_1)$, $R_{i,s}(l^{j_1}_{j_1},l^{j_2}_1)$, $\dots$, $R_{i,s}(l^{j_{m-1}}_{j_{m-1}},l^1_{j_m})$, $R_{i,s}(l^{j_m}_{j_m},r_1)$. Предположим, что $m = k+1$ и $j_p = a_p$ для всех $1 \leqslant p \leqslant m$. В противном случае, если это не так, то снова ничего не делаем и переходим в подшаг 2.

Пусть d — это количество всех η-элементов между a_k- и a_{k+1}-элементами. Обязательно найдутся такие $s' \geqslant s$ и различные $u_1,\dots,u_f$, что $R_{i,s'}(l^{a_k}_{a_k},u_1)$, $R_{i,s'}(u_p,u_{p+1})$ для $1 \leqslant p \leqslant f-1$ и $R_{i,s'}(u_f,l^{a_{k+1}}_1)$, где либо $f > 2d+1$, либо $f \leqslant 2d+1$ и $S_{i,s}(u_p,u_{p+1})$ для всех $1 \leqslant p \leqslant f-1$.

Положим по одному элементу, между каждым η-элементом в $L_{i,s}$, который расположен между a_k-и a_{k+1}-элементами, между последним a_k-элементом и соседним справа с ним первым η-элементом. Если $f > 2d+1$, то положим также один элемент между первым a_{k+1}-элементом и соседним слева с ним последним η-элементом. Объявим все эти элементы попарно соседними, все они таким образом станут a_{2d+1}-элементами. В противном случае, когда $f \leqslant 2d+1$ и $S_{i,s}(u_p,u_{p+1})$ для всех $1 \leqslant p \leqslant f-1$, положим три элемента между первым a_{k+1}-элементом и соседним слева с ним последним η-элементом. Аналогично, объявим все эти элементы попарно соседними, все они таким образом станут a_{2d+3}-элементами. Скажем, что *i-требование инициализировано с элементами $t_1, \ldots, t_{2i+2}$ и $r_1, \ldots, r_{2i+4}$*.

Теперь для завершения построения $L_{i,s+1}$ выполним действия в подшаге 3.

Подшаг 2. Пусть i-требование еще инициализировано с элементами $t_1, \ldots, t_{2i+2}$ и $r_1, \ldots, r_{2i+4}$. Найдем наименьшие наборы таких элементов $t'_1, \ldots, t'_{2i+2} \leqslant ln_i(s)$ и $r'_1, \ldots, r'_{2i+4} \leqslant ln_i(s)$, что $F_{i,s}(t'_1, \ldots, t'_{2i+2})$, $F_{i,s}(r'_1, \ldots, r'_{2i+4})$ и $R_{i,s}(t'_{2i+2}, r'_1)$. Если $t'_1 = t_1, \ldots, t'_{2i+2} = t_{2i+2}$ и $r'_1 = r_1, \ldots, r'_{2i+4} = r_{2i+4}$, то в этом подшаге больше ничего не делаем и переходим в подшаг 3.

В противном случае положим в $L_{i,s}$ правее всех элементов $a_{k+2}\eta a_{k+3}\eta$, т.е. a_{k+2} штук a_{k+2}-элементов, один η-элемент, a_{k+3} штук a_{k+3}-элементов и еще один η-элемент, где a_{k+2} и a_{k+3} — первые нечетные числа, большие всех a_p для $1 \leqslant p \leqslant k+1$. Скажем, что *$i$-требование не инициализировано*. Переходим к подшагу 3.

Подшаг 3. Положим в $L_{i,s}$ непосредственно слева и справа от каждого η-элемента по одному новому η-элементу. Это завершает построение $L_{i,s+1}$.

Описание конструкции L_i завершено.

Ясно, что $L_{i,s} \subseteq L_{i,s+1}$. Положим $L_i = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} L_{i,s}$ и $L = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}}(2i+2+L_i+2i+4)$.

Пусть $L \cong R_i$ для некоторого i. Заметим, что L для каждого $i > 0$ содержит единственный максимальный блок длины $2i$ и, следовательно, то же самое верно для R_i. Зафиксируем такой первый шаг s_0, что s_0 больше всех элементов R_i, входящих в максимальные блоки длин $2i+2$ и $2i+4$. Тогда, согласно конструкции, на шаге s_0 будет активен подшаг 1, и i-требование может быть инициализировано только с этими элементами. Выберем такой первый шаг $s_1 > s_0$, что s_1 больше элементов всех максимальных блоков в R_i, расположенных между блоками $2i+2$ и $2i+4$. Ясно тогда, что в конструкции будет построен максимальный блок, которого не может быть в R_i. Это противоречит тому, что $L \cong R_i$. Заметим, что в этом случае L_i представляет собой конечную сумму. В тех случаях, например, когда R_j содержит бесконечно много блоков длины больше $2i+4$, но не содержит максимальных блоков четной длины, порядок L_j будет представлять собой бесконечную сумму. Ясно, что в таких случаях L не может быть изоморфен R_j. $\square$

1.4. Оценки изоморфизмов. Напомним, что в разделе 1.2 показано, что каждый низкий линейный порядок, являющийся сильно η-схожим, k-дискретным или k-квазидискретным, соответственно $\mathbf{0}'$-, $\mathbf{0}''$- или $\mathbf{0}'''$-изоморфен некоторому вычислимому линейному порядку (следствия 1.12, 1.11 и 1.10, соответственно). В разделе 1.3 приведен результат о том, что каждый низкий линейный порядок, конденсация которого есть η и который не содержит бесконечного сильно η-схожего интервала, $\mathbf{0}''$-изоморфен некоторому вычислимому представлению (теорема 1.20).

В данном разделе построены контрпримеры ко всем выше приведенным случаям, показывающие невозможность улучшения алгоритмической сложности изоморфизмов в арифметической иерархии. Другими словами, показано, что во всех случаях невозможно заменить оракул $\mathbf{0}^n$ на $\mathbf{0}^{n-1}$.

Теорема 1.22 (А. Н. Фролов [11]). *Существует низкий сильно η-схожий линейный порядок, который не может быть вычислимо изоморфным никакому вычислимому порядку.*

Доказательство. Зафиксируем оракул $\mathbf{0}'$. Построим искомый линейный порядок L порядкого типа $\eta+2+\eta+2+\cdots$. В процессе построения на пару элементов $x <_L y$ накладывается «запрет» на добавление элементов между ними. Для этого определяется отношение S_L, которое на самом деле будет определять отношение соседства на порядке L.

Конструкция порядка L.

Шаг $s = 0$. Положим $\sigma_0 = \emptyset$.

Шаг $s+1$. Предположим, что на шаге s уже построен конечный линейный порядок σ_s, на некоторых элементах которого определено отношение S_L. Назовем линейный порядок $\sigma \supseteq \sigma_s$

корректным расширением, если $S_L(x,y)$ для $x,y \in |\sigma_s|$ влечет $\neg(x <_\sigma t <_\sigma y)$ для всех $t \in |\sigma|$.

1. Построим «промежуточное» расширение $\sigma'_{s+1} \supseteq \sigma_s$. Для этого рассмотрим следующее условие, которое, очевидно, является $\mathbf{0}'$-вычислимым:

$$\Gamma(\sigma_s) = (\exists \sigma \supseteq \sigma_s)(\exists s')(\sigma \text{ — } \textit{корректное} \text{ расширение } \sigma_s \ \& \ \varphi^{\sigma}_{s,s'}(s)\downarrow).$$

Если оно выполнено, то положим $\sigma'_{s+1} = \sigma$, где σ — порядок, удовлетворяющий этому условию. В противном случае положим $\sigma'_{s+1} = \sigma_s$.

2. Нетрудно построить такое расширение $\sigma''_{s+1} \supseteq \sigma'_{s+1}$, что для любых соседних в σ'_{s+1} элементов $x <_L y$, что $\neg S_L(x,y)$, существует новый элемент $t \in \sigma''_{s+1}$, для которого $x <_L t <_L y$. В процессе такого построения добавляются новые элементы, каждый из которых выбирается как наименьшее натуральное еще не добавленное число (что обеспечивает условие $|L| = \mathbb{N}$).

3. Зафиксируем два новых элемента $x_0, y_0 \notin \sigma''_{s+1}$ и определим $\sigma_{s+1} \supseteq \sigma''_{s+1}$ так, чтобы $t <_L x_0 <_L y_0$ для любого $t \in \sigma''_{s+1}$. Предположим, что $s = \langle e_1, e_2\rangle$, и рассмотрим следующие две формулы, которые являются $\mathbf{0}'$-вычислимыми:

$$\Psi = (\exists s')(\varphi_{e_1,s'}(x_0)\downarrow \ \& \ \varphi_{e_1,s'}(y_0)\downarrow),$$
$$\Phi(a,b) = (\exists s')(\exists t)(\varphi_{e_2,s'}(\langle a,t\rangle)\downarrow= 1 \ \& \ \varphi_{e_2,s'}(\langle t,b\rangle)\downarrow= 1)$$

Предположим, что выполнены формулы Ψ и $\Phi(a_0,b_0)$, где $a_0 = \varphi_{e_1}(x_0)$ и $b_0 = \varphi_{e_1}(y_0)$. Тогда положим $S_L(x_0,y_0)$. В противном случае ничего не делаем. Завершаем шаг $s+1$.

Описание конструкции завершено.

Ясно, что последовательность $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \cdots$ является $\mathbf{0}'$-вычислимой и, следовательно, линейный порядок $L = \lim\limits_{s\to+\infty} \sigma_s$ является также $\mathbf{0}'$-вычислимым. В силу построения σ''_{s+1} ясно, что $L \cong \eta + 2 + \eta + 2 + \cdots$. Следовательно, L является сильно η-схожим.

Для доказательства того, что построенный порядок L имеет низкую степень, достаточно показать, что условие $\varphi^L_x(x)\downarrow$ является $\mathbf{0}'$-вычислимым. Для этого, используя оракул $\mathbf{0}'$, проверяем истинность формулы $\Gamma(\sigma_x)$. Имеем $\varphi^L_x(x)\downarrow$ тогда и только тогда, когда формула $\Gamma(\sigma_x)$ истина. Таким образом, линейный порядок R является низким.

Предположим, что L является вычислимо изоморфным некоторому вычислимому порядку. Пусть всюду определенные функции φ_{e_2} (вычислимый линейный порядок на $\mathbb{N}$) и φ_{e_1} (вычислимый изоморфизм) таковы, что $L \cong_{\varphi_{e_1}} (\mathbb{N}, <_{\varphi_{e_2}})$. Тогда существуют такие $x_0, y_0 \in \sigma_{\langle e_1,e_2\rangle+1}$, что x_0 и y_0 являются соседними элементами в L тогда и только тогда, когда $\varphi_{e_1}(x_0)$ и $\varphi_{e_1}(y_0)$ не являются соседними элементами в порядке $(\mathbb{N}, <_{\varphi_{e_2}})$. Противоречие. $\square$

При проведении оракульных конструкций в теоремах 1.24 и 1.25 будет использоваться следующая очевидная лемма.

Лемма 1.23. *Следующая формула является* $\mathbf{0}'$*-вычислимой* (*считаем, что* $k > 0$):

$$\Phi_{int}(x,y;e;k) \rightleftharpoons (\exists s)(\exists a_1,\ldots,a_k)(\varphi_{e,s}(\langle x,a_1\rangle)\downarrow= 1 \ \& \ \varphi_{e,s}(\langle a_1,a_2\rangle)\downarrow= 1 \ \& \ \ldots$$
$$\& \ \varphi_{e,s}(\langle a_{k-1},a_k\rangle)\downarrow= 1 \ \& \ \varphi_{e,s}(\langle a_k,y\rangle)\downarrow= 1).$$

Теорема 1.24 (А. Н. Фролов [11]). *Существует низкий дискретный линейный порядок, который не может быть* $\mathbf{0}'$*-изоморфным никакому вычислимому порядку.*

Доказательство. Зафиксируем оракул $\mathbf{0}'$. Искомый линейный порядок L будем строить в виде суммы

$$L = \sum_{e\in\omega} L_e,$$

где

$$L_e \cong \omega^* + \omega \quad \text{или} \quad L_e \cong \omega^* + \omega + \omega^* + \omega,$$

т.е. L будет иметь порядковый тип $\zeta \cdot \omega$. Каждый раз при добавлении нового элемента в процессе построения L_e будем добавлять наименьшие натуральные числа вида $\langle e_1, e_2, i\rangle$, где $e = \langle e_1, e_2\rangle$, которые еще не использовались в конструкции, таким образом, чтобы $|L_e| = \{\langle e_1, e_2, i\rangle \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Одновременно с построением порядка L будем определять отношение соседства S_L так, чтобы относительно оракула $\mathbf{0}'$ было вычислимо не только отношение порядка $<_L$, но и отношение S_L. Такое построение достаточно для доказательства теоремы, так как порядок L имеет вычислимое представление посредством $\mathbf{0}'$-изоморфизма тогда и только тогда, когда низкое представление L, которое строится в теореме 1.1, также $\mathbf{0}'$-изоморфно некоторому вычислимому порядку.

Конструкция L_e.

Шаг $s = 0$. Положим $\sigma_{e,0} = \{p_0 <_L r_0\}$, где $p_0 = \langle e_1, e_2, 0\rangle$, $r_0 = \langle e_1, e_2, 1\rangle$ и $e = \langle e_1, e_2\rangle$. Определим $S_L(p_0, r_0)$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(p_0)\downarrow, \quad \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(r_0)\downarrow, \quad \Phi_{int}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(p_0), \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(r_0); e_2; 1).$$

Последнее условие означает, что

$$|\{x \mid \varphi_{e_2}(\langle\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_0), x\rangle) = 1 \;\&\; \varphi_{e_2}(\langle x, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_0)\rangle) = 1\}| \neq |\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}|.$$

Шаг $s + 1$. Предположим, что на шаге s уже построено такое $\sigma_{e,s}$, что (здесь $e = \langle e_1, e_2\rangle$)

(1) $\sigma_{e,s} = \{p_{-k_1} <_L \cdots <_L p_{-1} <_L p_0 <_L p_1 <_L \cdots <_L p_{k_2} <_L r_{-n_1} <_L \cdots <_L r_{-1} <_L r_0 <_L r_1 <_L \cdots <_L r_{n_2}\}$;
(2) $S_L(p_i, p_{i+1})$ для $-k_1 \leqslant i < k_2$;
(3) $S_L(r_i, r_{i+1})$ для $-n_1 \leqslant i < n_2$;
(4) $S_L(p_{k_2}, r_{-n_1})$ тогда и только тогда, когда $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0)\downarrow$, $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(r_0)\downarrow$ и

$$|\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}| \neq |\{x \mid \varphi_{e_2}(\langle\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_0), x\rangle) = 1 \;\&\; \varphi_{e_2}(\langle x, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_0)\rangle) = 1\}|.$$

Определим «промежуточное» расширение $\sigma'_{e,s+1}$ порядка $\sigma_{e,s}$, положив

$$\sigma'_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L p_{-k_1} <_L \cdots <_L p_{k_2} <_L r_{-n_1} <_L \cdots <_L r_{n_2} <_L r_{n_2+1}\},$$

$S_L(p_{-k_1-1}, p_{-k_1})$ и $S_L(r_{n_2}, r_{n_2+1})$.

Случай 1. Если $S_L(p_{k_2}, r_{-n_1})$, то положим $\sigma_{e,s+1} = \sigma'_{e,s+1}$ и завершаем шаг $s + 1$.

Случай 2. Пусть $\neg S_L(p_{k_2}, r_{-n_1})$ и либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0)\uparrow$, либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0)\uparrow$. Положим тогда

$$\sigma_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L \cdots <_L p_{k_2} <_L p_{k_2+1} <_L r_{-n_1-1} <_L r_{-n_1} <_L \cdots <_L r_{n_2+1}\},$$
$$S_L(p_{k_2}, p_{k_2+1}), \quad S_L(r_{-n_1-1}, r_{-n_1}), \quad \neg S_L(p_{k_2+1}, r_{-n_1-1}).$$

Завершаем шаг $s + 1$.

Случай 3. Пусть $\neg S_L(p_{k_2}, r_{-n_1})$, $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0)\downarrow$ и $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0)\downarrow$.

Если $\Phi_{int}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0), \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0); e_2; k_2 + n_1 + 2)$, то определим

$$\sigma_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L \cdots <_L p_{k_2} <_L p_{k_2+1} <_L r_{-n_1} <_L \cdots <_L r_{n_2+1}\},$$
$$S_L(p_{k_2}, p_{k_2+1}), \quad S_L(p_{k_2+1}, r_{-n_1}).$$

Если $\neg\Phi_{int}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0), \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0); e_2; k_2 + n_1 + 2)$, то положим

$$\sigma_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L \cdots <_L p_{k_2} <_L p_{k_2+1} <_L r_{-n_1-1} <_L r_{-n_1} <_L \cdots <_L r_{n_2+1}\},$$
$$S_L(p_{k_2}, p_{k_2+1}), \quad S_L(r_{-n_1-1}, r_{-n_1}), \quad S_L(p_{k_2+1}, r_{-n_1-1}).$$

Ясно, что в обоих случаях выполнено

$$|\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}| \neq |\{x \mid \varphi_{e_2}(\langle\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_0), x\rangle) = 1 \;\&\; \varphi_{e_2}(\langle x, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_0)\rangle) = 1\}|.$$

Завершаем шаг $s + 1$.

Описание конструкции завершено.

Положим $\sigma_s = \sum\limits_{e\in\omega} \sigma_{e,s}$. Так как $\sigma_{e,s} \subseteq \sigma_{e,s+1}$, имеем $\sigma_s \subseteq \sigma_{s+1}$. Ясно, что последовательность $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \cdots$ является $\mathbf{0}'$-вычислимой и, следовательно, линейный порядок $L = \lim\limits_{s\to+\infty} \sigma_s$ является также $\mathbf{0}'$-вычислимым. Очевидно, что отношение S_L, которое строится в конструкции, является отношением соседства и является $\mathbf{0}'$-вычислимым.

Ясно, что $L = \sum\limits_{e\in\omega} L_e$, где $L_e = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} L_{e,s}$ и имеет порядковый тип либо $\omega^*+\omega$, либо $\omega^*+\omega+\omega^*+\omega$. Следовательно, порядок L является дискретным.

Предположим, что L является $\mathbf{0}'$-изоморфным некоторому вычислимому порядку. Пусть всюду определенные функции φ_{e_2} — вычислимое отношение порядка на $\mathbb{N}$ и $\varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}$ — $\mathbf{0}'$-изоморфизм таковы, что $L \cong_{\varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}} (\mathbb{N}, <_{\varphi_{e_2}})$. Тогда согласно построениям в *случае* 3 имеем

$$|\{x \mid \langle e_1, e_2, 0\rangle <_L x <_L \langle e_1, e_2, 1\rangle\}| \neq |\{x \mid \varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}(\langle e_1, e_2, 0\rangle) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} \varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}(\langle e_1, e_2, 1\rangle)\}|.$$

Противоречие. □

Теорема 1.25 (А. Н. Фролов [11]). *Существует низкий* 0*-квазидискретный линейный порядок, который не может быть* $\mathbf{0}''$*-изоморфным никакому вычислимому порядку.*

Доказательство. Зафиксируем оракул $\mathbf{0}'$. Искомый линейный порядок L будем строить в виде суммы

$$L = \sum_{e\in\omega} L_e,$$

где либо $L_e \cong \omega^* + \omega + \omega^* + \omega$, либо $L_e \cong \omega^* + \omega^* + \omega$, либо $L_e \cong \omega^* + \omega + \omega$.

Каждый раз при добавлении нового элемента в процессе построения L_e будем добавлять наименьшие натуральные числа вида $\langle e_1, e_2, i\rangle$, где $e = \langle e_1, e_2\rangle$, которые еще не использовались в конструкции, таким образом, чтобы $|L_e| = \{\langle e_1, e_2, i\rangle \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, достаточно построить такой $\mathbf{0}'$-вычислимый линейный порядок L, удовлетворяющий условиям теоремы (не выполняя условие «низкости»), что отношение S_L является также $\mathbf{0}'$-вычислимым.

Конструкция L_e.

Шаг $s = 0$. Положим $\sigma_{e,0} = \{p_0 <_L r_0\}$ и $\neg S_L(p_0, r_0)$, где $p_0 = \langle e_1, e_2, 0\rangle$, $r_0 = \langle e_1, e_2, 1\rangle$, $e = \langle e_1, e_2\rangle$. Скажем, что элемент d_0^e не определен и положим $t_0^e = 0$.

Шаг $s + 1$. Предположим, что на шаге s уже построены такие $\sigma_{e,s}$, t_s^e и d_s^e, что (где $e = \langle e_1, e_2\rangle$)

(1) $\sigma_{e,s} = \{p_{-k_1} <_L \cdots <_L p_{-1} <_L p_0 <_L p_1 <_L \cdots <_L p_{k_2} <_L r_{-n_1} <_L \cdots <_L r_{-1} <_L r_0 <_L r_1 <_L \cdots <_L r_{n_2}\}$;

(2) $S_L(p_i, p_{i+1})$ для $-k_1 \leqslant i < k_2$;

(3) $S_L(r_i, r_{i+1})$ для $-n_1 \leqslant i < n_2$;

(4) $\neg S_L(p_{k_2}, r_{-n_1})$;

(5) $\varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(p_0, t)\downarrow$ для любого $t < t_s^e$;

(6) d_s^e не определено тогда и только тогда, когда $t_s^e = 0$ и либо $\varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(p_0, 0)\uparrow$, либо $\varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(r_0, 0)\uparrow$.

Определим «промежуточное» расширение $\sigma'_{e,s+1}$ порядка $\sigma_{e,s}$, положив

$$\sigma'_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L p_{-k_1} <_L \cdots <_L p_{k_2} <_L r_{-n_1} <_L \cdots <_L r_{n_2} <_L r_{n_2+1}\},$$
$$S_L(p_{-k_1-1}, p_{-k_1}), \quad S_L(r_{n_2}, r_{n_2+1}).$$

Рассмотрим два следующих случая, согласно которым определим t_{s+1}^e и d_{s+1}^e.

Случай 1. Предположим, что либо

$$\varphi_{e_1,s+1}^{\mathbf{0}'}(p_0, t_s^e)\uparrow \quad \text{или} \quad \varphi_{e_1,s+1}^{\mathbf{0}'}(r_0, t_s^e)\uparrow,$$

либо

$$t_s^e > 0, \quad \varphi_{e_1,s+1}^{\mathbf{0}'}(p_0, t_s^e)\downarrow = \varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(p_0, t_s^e - 1), \quad \varphi_{e_1,s+1}^{\mathbf{0}'}(r_0, t_s^e)\downarrow = \varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(r_0, t_s^e - 1).$$

В первом случае, когда $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0,t^e_s)\uparrow$ или $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0,t^e_s)\uparrow$, положим $t^e_{s+1}=t^e_s$. В противном случае положим $t^e_{s+1}=t^e_s+1$.

Если d^e_s определено, то положим $d^e_{s+1}=d^e_s$. Если же d^e_s не определено (это означает, что $t^e_s=0$ и либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0,t^e_s)\uparrow$, либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(r_0,t^e_s)\uparrow$ и, следовательно, $t^e_{s+1}=0$ и либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0,t^e_{s+1})\uparrow$, либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0,t^e_{s+1})\uparrow$), то скажем, что также d^e_{s+1} неопределен, положим $\sigma_{e,s+1}=\sigma'_{e,s+1}$ и завершаем шаг $s+1$.

Случай 2. Предположим, что

$$\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0,t^e_s)\downarrow,\quad \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0,t^e_s)\downarrow$$

и либо

$$t^e_s=0,$$

либо

$$\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0,t^e_s)\neq\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0,t^e_s-1),\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0,t^e_s)\neq\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(r_0,t^e_s-1).$$

Положим $t^e_{s+1}=t^e_s+1$. В случае, если

$$\neg\Phi_{int}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0,t^e_s),\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0,t^e_s);e_2;k_2+1+n_1),$$

положим

$$d^e_{s+1}=\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0,t^e_s),$$

а также

$$\sigma_{e,s+1}=\{p_{-k_1-1}<_L\cdots<_L p_{k_2}<_L p_{k_2+1}<_L r_{-n_1-1}<_L r_{-n_1}<_L\cdots{}_L\, r_{n_2+1}\},$$
$$S_L(p_{k_2},p_{k_2+1}),\quad S_L(r_{-n_1-1},r_{-n_1}),\quad \neg S_L(p_{k_2+1},r_{-n_1-1}).$$

Пусть

$$\Phi_{int}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0,t^e_s),\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0,t^e_s);e_2;k_2+1+n_1).$$

Тогда существуют такие элементы $a_1,\dots,a_{k_2+1+n_1}$, что

$$\varphi_{e_2}(\langle a_i,a_{i+1}\rangle)\downarrow=1\quad \text{для } 0\leqslant i\leqslant k_2+1+n_1,$$

где

$$a_0=\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0,t^e_s),\quad a_{k_2+2+n_1}=\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0,t^e_s).$$

Положим $d^e_{s+1}=a_{k_2+1}$.

Определим теперь $\sigma_{e,s+1}$ в случае, когда шаг $s+1$ еще не завершен.

Случай 3a. Если $\neg\Phi_{int}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0,t^e_s-1),d^e_{s+1};e_2;k_2+1)$, то положим

$$\sigma_{e,s+1}=\{p_{-k_1-1}<_L\cdots<_L p_{k_2}<_L r_{-n_1-1}<_L\cdots<_L r_{n_2+1}\},$$
$$S_L(r_{-n_1-1},r_{-n_1}),\quad \neg S_L(p_{k_2},r_{-n_1-1}).$$

Предположим, что $\Phi_{int}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0,t^e_s-1),d^e_{s+1};e_2;k_2+1)$.

Случай 3b. $\neg\Phi_{int}(d^e_{s+1},\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(r_0,t^e_s-1);e_2;n_1+1)$. Положим тогда

$$\sigma_{e,s+1}=\{p_{-k_1-1}<_L\cdots<_L p_{k_2}<_L p_{k_2+1}<_L r_{-n_1}<_L\cdots<_L r_{n_2+1}\},$$
$$S_L(p_{k_2},p_{k_2+1}),\quad \neg S_L(p_{k_2+1},r_{-n_1}).$$

Случай 3c. $\Phi_{int}(d^e_{s+1},\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(r_0,t^e_s-1);e_2;n_1+1)$. Положим тогда

$$\sigma_{e,s+1}=\{p_{-k_1-1}<_L\cdots<_L p_{k_2}<_L p_{k_2+1}<_L r_{-n_1-1}<_L r_{-n_1}<_L\cdots<_L r_{n_2+1}\},$$
$$S_L(p_{k_2},p_{k_2+1}),\quad S_L(r_{-n_1-1},r_{-n_1}),\quad \neg S_L(p_{k_2+1},r_{-n_1-1}).$$

Во всех случаях завершаем шаг $s+1$.

Описание конструкции завершено.

Положим $\sigma_s = \sum\limits_{e\in\omega} \sigma_{e,s}$. Так как $\sigma_{e,s} \subseteq \sigma_{e,s+1}$, имеем $\sigma_s \subseteq \sigma_{s+1}$. Ясно, что последовательность $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \cdots$ является $\mathbf{0}'$-вычислимой и, следовательно, линейный порядок $L = \lim\limits_{s\to+\infty} \sigma_s$ является также $\mathbf{0}'$-вычислимым. Очевидно, что отношение S_L, которое строится в конструкции, является отношением соседства и является $\mathbf{0}'$-вычислимым.

Ясно, что $L = \sum\limits_{e\in\omega} L_e$, где $L_e = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}}$ и имеет порядковый тип либо $\omega^*+\omega+\omega^*+\omega$, либо $\omega^*+\omega^*+\omega$, либо $\omega^*+\omega+\omega$. Следовательно, порядок L является 0-квазидискретным.

Предположим, что L является $\mathbf{0}''$-изоморфным некоторому вычислимому порядку. Тогда существуют такие всюду определенные функции $\varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}$ и φ_{e_2}, что для любого x существует предел $f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}(\langle x, t\rangle)$, $(\mathbb{N}, <_{\varphi_{e_2}})$ является вычислимым линейным порядков и $L \cong_f (\mathbb{N}, <_{\varphi_{e_2}})$. Пусть $e = \langle e_1, e_2\rangle$, $p_0 = \langle e_1, e_2, 0\rangle$ и $r_0 = \langle e_1, e_2, 1\rangle$. Следующие леммы завершают доказательство теоремы.

Лемма 1.26. $\lim\limits_{s\to+\infty} t_s^e = +\infty$.

Доказательство. Пусть $t_{s_0}^e = t$. Так как $\varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}$ является всюду определенной, существует такой шаг $s_1 > s_0$, что $\varphi_{e_1,s_1}^{\mathbf{0}'}(\langle p_0, t\rangle)\downarrow$ и $\varphi_{e_1,s_1}^{\mathbf{0}'}(\langle r_0, t\rangle)\downarrow$. Тогда из конструкции следует, что $t_{s_1}^e \geqslant t+1$. Отсюда непосредственно следует справедливость леммы. □

Лемма 1.27. *Существует такой s_0, что d_s^e определено для любого $s > s_0$ и существует конечный предел $d^e = \lim\limits_{s\to+\infty} d_s^e$.*

Доказательство. Так как $\varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}$ является всюду определенной, существует такой шаг s_0, что $\varphi_{e_1,s_0}^{\mathbf{0}'}(\langle p_0, 0\rangle)\downarrow$ и $\varphi_{e_1,s_0}^{\mathbf{0}'}(\langle r_0, 0\rangle)\downarrow$. Тогда $d_{s_0}^e$ определено и, следовательно, d_s^e определено для любого $s > s_0$.

Выберем такой шаг s_1, что для любого $s > s_1$ выполнено

$$t_s^e \geqslant t_{s_1}^e > 0; \quad \varphi_{e_1,s_1}^{\mathbf{0}'}(\langle p_0, t_{s_1}^e\rangle)\downarrow; \quad \varphi_{e_1,s_1}^{\mathbf{0}'}(\langle r_0, t_{s_1}^e\rangle)\downarrow;$$

из $(\varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(\langle p_0, t_s^e\rangle)\downarrow$ и $\varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(\langle r_0, t_s^e\rangle)\downarrow$ следует

$$\varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(\langle p_0, t_s^e\rangle) = \varphi_{e_1,s_1}^{\mathbf{0}'}(\langle p_0, t_{s_1}^e\rangle), \varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(\langle r_0, t_s^e\rangle) = \varphi_{e_1,s_1}^{\mathbf{0}'}(\langle r_0, t_{s_1}^e\rangle),$$

соответственно. Тогда на всех шагах $s > s_1$ будет выполнен только *случай* 1 и, следовательно, $d_s^e = d_{s_1}^e$ для всех $s > s_1$. Таким образом, существует конечный предел $d^e = \lim\limits_{s\to+\infty} d_s^e$. □

Лемма 1.28. *Интервалы* $(\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}, <_L)$ *и* $(\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}, <_{\varphi_{e_2}})$ *не изоморфны, что противоречит выбору* f.

Доказательство. Выберем такой шаг s_0, что для любого шага $s > s_0$ выполнено

$$d_s^e = d_{s_0}^e = d^e; \quad \varphi_{e_1,s_0}^{\mathbf{0}'}(\langle p_0, t_{s_0}^e\rangle)\downarrow = f(p_0); \quad \varphi_{e_1,s_0}^{\mathbf{0}'}(\langle r_0, t_{s_0}^e\rangle)\downarrow = f(r_0);$$

из

$$\varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(\langle p_0, t_s^e\rangle)\downarrow \quad \text{и} \quad \varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(\langle r_0, t_s^e\rangle)\downarrow$$

следует

$$\varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(\langle p_0, t_s^e\rangle) = f(p_0) \quad \text{и} \quad \varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(\langle r_0, t_s^e\rangle) = f(r_0)),$$

соответственно. Ясно, что $f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} d^e \leqslant_{\varphi_{e_2}} f(r_0)$.

Пусть множество $\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} d^e\}$ конечно; тогда

(1) либо существует такой шаг $s_1 > s_0$, что согласно *случаю* 2 выполнено условие

$$\neg\Phi_{int}(\varphi_{e_1,s_1+1}^{\mathbf{0}'}(p_0, t_{s_1}^e), \varphi_{e_1,s_1+1}^{\mathbf{0}'}(r_0, t_{s_1}^e); e_2; k+1+n),$$

где $|\ \{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0) = d^e\}\ | = k+n$;

(2) либо существует такой шаг $s_2 > s_0$, что согласно *случаю* 3a выполнено условие

$$\neg\Phi_{int}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s_2}(p_0, t^e_{s_2} - 1), d^e_{s_2+1}; e_2; k+1),$$

где $|\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} d^e\}| = k$.

Тогда имеем

$$(\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}, <_L) \ncong (\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}, <_{\varphi_{e_2}}),$$

так как при работе конструкции в *случае* 3a, соответственно,

(1) на шагах $s > s_1$ добавляются новые элементы в порядок L так, чтобы

$$(\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}, <_L) \cong \omega + \omega^*.$$

Но при этом $(\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}, <_{\varphi_{e_2}})$ конечно;

(2) на шагах $s > s_2$ добавляются новые элементы в порядок L так, чтобы

$$(\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}, <_L) \cong k + \omega^*.$$

Но при этом $(\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}, <_{\varphi_{e_2}}) \cong k + 1 + R$ для некоторого порядка R.

Случай, когда множество $\{x \mid d^e <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}$ конечно, рассматривается аналогично п. 2 случая, когда множество $\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} d^e\}$ конечно.

Предположим, что $\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} d^e\}$ бесконечно и $\{x \mid d^e <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}$ бесконечно. Тогда согласно *случаю* 3c имеем

$$(\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}, <_L) \cong \omega + \omega^*$$

и, следовательно,

$$(\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}, <_L) \ncong (\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}, <_{\varphi_{e_2}}),$$

так как $\omega + \omega^*$ не содержит элемента, и левее, и правее которого расположено бесконечно много элементов. □

Теорема 1.25 доказана. □

Определение 1.29. Пусть $L_0, L_1, \ldots$ — конечная или счетная последовательность линейных порядков. *Перемешанной суммой* этой последовательности называется линейный порядок

$$L = \sum_{q \in \mathbb{Q}} L_{f(q)},$$

где $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ — такая функция, что для всех $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ и $k \in \mathbb{N}$ из $q_1 <_{\mathbb{Q}} q_2$ следует $k = f(q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}$, что $q_1 <_{\mathbb{Q}} q <_{\mathbb{Q}} q_2$.

Определение 1.30. Обозначим порядковый тип линейного порядка, являющегося перемешанной суммой последовательности $1, 2, 3, \ldots$, через η_{fin}.

Очевидно, что конденсация η_{fin} есть η и что η_{fin} не содержит сильно η-схожего интервала.

Теорема 1.31. *Существует низкий линейный порядок, порядкового типа η_{fin}, который не может быть $\mathbf{0}'$-изоморфным никакому вычислимому порядку.*

Доказательство. Искомый линейный порядок L будем строить в виде суммы

$$L = \sum_{e \in \omega} (\eta_{fin} + L_e + \eta_{fin}),$$

где $L_e \cong 1 + \eta_{fin} + 1$ или $L_e \cong k$ для некоторого натурального числа $k = k(e)$ (то есть процедура построения η_{fin} может быть остановлена на некотором шаге). Очевидно, что $L \cong \eta_{fin}$.

Каждый раз при добавлении нового элемента в процессе построения L будем добавлять наименьшие натуральные числа, которые еще не использовались в конструкции, таким образом, чтобы $|L| = \mathbb{N}$.

Очевидно, что существует эффективная процедура $EN(s)$ построения линейного порядка с вычислимым отношением соседства порядкового типа η_{fin}, добавляющая на одном шаге только один элемент t, который определен для этого шага процедуры заранее, а точнее, конструкцией порядка L. Обозначим это действие на шаге $s+1$ через $EN(s+1) = EN(s) \oplus t$. Предположим также, что $EN(0) = \emptyset$.

Зафиксируем оракул $\mathbf{0}'$. Одновременно с построением порядка L будем определять отношение соседства S_L так, чтобы относительно оракула $\mathbf{0}'$ было вычислимо не только отношение порядка $<_L$, но и отношение S_L. Такое построение достаточно для доказательства теоремы, так как порядок L имеет вычислимое представление посредством $\mathbf{0}'$-изоморфизма тогда и только тогда, когда низкое представление L, которое строится в теореме 1.1, также $\mathbf{0}'$-изоморфно некоторому вычислимому порядку.

Конструкция L_e.

Шаг $s = 0$. Положим $\sigma_{e,0} = \{p_e <_L r_e\} = 1 + EN(0) + 1$, где p_e и r_e — наименьшие натуральные числа, еще не использованные в конструкции L. Определим $S_L(p_e, r_e)$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(p_e)\downarrow, \quad \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(r_e)\downarrow, \quad \Phi_{int}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(p_e), \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(r_e); e_2; 1),$$

где $e = \langle e_1, e_2 \rangle$. Последнее условие означает, что

$$|\{x \mid \varphi_{e_2}(\langle \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_e), x\rangle) = 1 \ \& \ \varphi_{e_2}(\langle x, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_e)\rangle) = 1\}| \neq |\{x \mid p <_L x <_L r\}|.$$

Если $S_L(p, r)$, то завершаем построение L_e, т.е. работа на следующих шагах не проводится; если $\neg S_L(p, r)$, скажем, что L_e *требует внимания*.

Шаг $s + 1$. Предположим, что L_e *требует внимания* и на шаге s уже построено такое $\sigma_{e,s}$, что

$$\sigma_{e,s} = 1 + EN(s) + 1 = \{p_e\} <_L |EN(s)| <_L \{r_e\}.$$

Случай 1. Пусть либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_e)\uparrow$, либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_e)\uparrow$. Положим тогда

$$\sigma_{e,s+1} = 1 + EN(s+1) + 1 = \{p_e\} <_L EN(s+1) <_L \{r_e\}.$$

Завершаем шаг $s + 1$ (конструкция L_e по-прежнему *требует внимания*).

Случай 2. Пусть $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_e)\downarrow$ и $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_e)\downarrow$. Предположим, что $EN(s)$ содержит k элементов.

Если $\Phi_{int}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_e), \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_e); e_2; 2k+2)$, то положим между каждой парой элементов, которые являются соседними на данном шаге, но еще не положены в S_L, т.е. еще не объявлены соседними (в процедуре построения $EN(s)$), по одному новому еще не использованном элементу и объявим все пары элементов, получившиеся соседними на данном шаге, *лежащими в* S_L. Заметим, что таких элементов будет не более $2k+1$. Поэтому

$$|\{x \mid p_e <_L x <_L r_e\}| \leqslant 2k+1,$$
$$|\{x \mid \varphi_{e_2}(\langle \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_e), x\rangle) = 1 \ \& \ \varphi_{e_2}(\langle x, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_e)\rangle) = 1\}| \geqslant 2k+2$$

и, следовательно,

$$|\{x \mid p_e <_L x <_L r_e\}| \neq |\{x \mid \varphi_{e_2}(\langle \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_e), x\rangle) = 1 \ \& \ \varphi_{e_2}(\langle x, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_e)\rangle) = 1\}|.$$

Если же $\neg\Phi_{int}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_e), \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_e); e_2; 2k+2)$, то так же, как и выше, положим между каждой парой элементов, которые являются соседними на данном шаге, но еще не положены в S_L, т.е. еще не объявлены соседними (в процедуре построения $EN(s)$), по одному новому еще не использованном элементу. Причем добавим непосредственно слева от элемента p_e еще несколько новых элементов, чтобы общее количество добавленных элементов равнялось $2k+2$. Объявим теперь как и раньше все пары элементов, получившиеся соседними на данном шаге, *лежащими в* S_L. Имеем

$$|\{x \mid p_e <_L x <_L r_e\}| = 2k+1,$$
$$|\{x \mid \varphi_{e_2}(\langle \varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}(p_e), x\rangle) = 1 \ \&\ \varphi_{e_2}(\langle x, \varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}(r_e)\rangle) = 1\}| < 2k+2$$

и, следовательно,

$$|\{x \mid p_e <_L x <_L r_e\}| \neq |\{x \mid \varphi_{e_2}(\langle \varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}(p_e), x\rangle) = 1 \ \&\ \varphi_{e_2}(\langle x, \varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}(r_e)\rangle) = 1\}|.$$

В обоих исходах этого случая говорим, что L_e более *не требует внимания* и завершаем шаг $s+1$.

Описание конструкции завершено.

Положим $\sigma_s = \sum\limits_{e\in\omega} \sigma_{e,s}$. Так как $\sigma_{e,s} \subseteq \sigma_{e,s+1}$, имеем $\sigma_s \subseteq \sigma_{s+1}$. Ясно, что последовательность $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \cdots$ является $\mathbf{0}'$-вычислимой и, следовательно, линейный порядок

$$L = \lim_{s\to+\infty}(EN(s) + \sigma_s + EN(s))$$

является также $\mathbf{0}'$-вычислимым. Очевидно, что отношение S_L, которое строится в конструкции, является отношением соседства и является $\mathbf{0}'$-вычислимым.

Ясно, что каждый L_e либо конечный, либо имеет тип $1 + \eta_{fin} + 1$ и

$$L = \sum_{e\in\omega}(\eta_{fin} + L_e + \eta_{fin}),$$

где $L_e = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} L_{e,s}$. Следовательно, порядок L имеет тип η_{fin}.

Предположим, что L является $\mathbf{0}'$-изоморфным некоторому вычислимому порядку. Пусть всюду определенные функции φ_{e_2} — вычислимое отношение порядка на $\mathbb{N}$ и $\varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}$ — $\mathbf{0}'$-изоморфизм таковы, что $L \cong_{\varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}} (\mathbb{N}, <_{\varphi_{e_2}})$. Тогда согласно построениям в *случае* 2 имеем

$$|\{x \mid \langle e_1, e_2, 0\rangle <_L x <_L \langle e_1, e_2, 1\rangle\}| \neq |\{x \mid \varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}(p_e <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} \varphi_{e_1}^{\mathbf{0}'}(r_e)\}|.$$

Противоречие. □

2. 2-Низкие линейные порядки

2.1. Описание 2-низких представлений. В разделе 1.1 мы видели описание линейных порядков, имеющих низкие представление. Аналогично, прежде, чем приступить к описанию построению вычислимых представлений некоторых 2-низких линейных порядков, приведем описание линейных порядков, имеющих 2-низкие представления.

Теорема 2.1 (А. Н. Фролов [25]). *Пусть $L = (|L|, <_L, S_L, P_L^+, P_L^-, Q_L)$ является X'-вычислимым обогащенным линейным порядком. Тогда обогащенный линейный порядок $(\mathbb{N}, <_L, S_L)$ (который, очевидно, также X'-вычислимый) является X'-изоморфным некоторому Y-вычислимому обогащенному порядку, где $Y \geqslant_T X$ таков, что $Y' \leqslant_T X'$. Здесь*

$$Q_L(n,x,y) \rightleftharpoons (x <_L y) \ \&\ \neg(\exists x', y' : x \leqslant_L x' <_L y' \leqslant_L y \ \&\ |[x', y']_L| = n).$$

Чтобы лучше понять смысл отношения $Q_L(n,x,y)$, заметим, что для любого счетного линейного порядка бесконечный интервал $[x,y]_L$ является сильно η-схожим тогда и только тогда, когда для некоторого n выполнено $Q_L(n,x,y)$.

Теперь покажем, прежде, чем доказывать теорему 2.1, как из нее следует основной результат этого раздела.

Следствие 2.2. *Пусть $L = (|L|, <_L, S_L, P_L^+, P_L^-, Q_L)$ является $\mathbf{0}''$-вычислимым обогащенным линейным порядком. Тогда L имеет 2-низкое представление.*

Доказательство. По теореме 2.1 при $X = \emptyset'$, обогащенный линейный порядок $(\mathbb{N}, <_L, S_L)$ является $\emptyset''$-изоморфным некоторому Z-вычислимому обогащенному порядку, где $Z \geqslant_T \emptyset'$ и $Z' \leqslant_T \emptyset''$. Согласно критерию полноты Фридберга (см., например, [9]), существует такое множество X, что $X' \equiv_T Z$. Согласно теореме 1.1 линейный порядок L является $\emptyset''$-изоморфным некоторому Y-вычислимому порядку, где $Y' \leqslant_T X' \equiv_T Z$ и, следовательно, $Y'' \leqslant_T \emptyset''$. □

Доказательство теоремы 2.1. Без ограничения общности можно предположить, что $X = \emptyset$. Предположим, что $(\mathbb{N}, <_L, S_L, P_L^+, P_L^-, Q_L)$ — обогащенный $\emptyset'$-вычислимый линейный порядок.

В доказательстве σ всегда обозначает конечную структуру $(|\sigma|, <_\sigma, S_\sigma)$, где

(1) $(|\sigma|, <_\sigma)$ — конечный линейный порядок,
(2) для всех x, y из того, что выполнено $S_\sigma(x,y)$, следует $(\forall z \in |\sigma|)\neg(x <_\sigma z <_\sigma y)$.

Говорим, что $f : |\sigma| \to |L|$ является *корректным вложением* σ в L, если для всех $x, y \in |\sigma|$

(1) $x <_\sigma y \leftrightarrow f(x) <_L f(y)$,
(2) $S_\sigma(x,y) \leftrightarrow S_L(f(x), f(y))$.

Зафиксируем оракул $\emptyset'$.

Конструкция.

Шаг $s = 0$**.** Положим σ_0 пустой структурой.

Шаг $s+1$**.** Предположим, что построены структура $\sigma_s = (|\sigma_s|, <_{\sigma_s}, S_{\sigma_s})$ и такое корректное вложение f_s из σ_s в L, что все натуральные числа, меньшие s, содержатся и в $|\sigma_s|$, и в $f(|\sigma_s|)$.

Подшаг 1. Пусть u — такое наименьшее натуральное число, что $u \notin |\sigma_s|$ и t — такое наименьшее натуральное число, что $t \notin f(|\sigma_s|)$. Положим $\sigma_s' = (|\sigma_s| \cup \{u\}, <_{\sigma_s'}, S_{\sigma_s'})$, $f_s'(u) = t$ и для всех $x \in |\sigma_s|$

(1) $f_s'(x) = f_s(x)$,
(2) $u <_{\sigma_s'} x \leftrightarrow t <_L f_s(x)$,
(3) $S_{\sigma_s'}(u,x) \leftrightarrow S_L(t, f_s(x))$ и $S_{\sigma_s'}(x,u) \leftrightarrow S_L(f_s(x), t)$.

Заметим, что $s \in |\sigma_s'|$, $s \in f_s'(\sigma_s')$ и f_s' является корректным вложением σ_s' в L.

Подшаг 2. По индукции построим такие последовательности $\sigma^0 \subseteq \sigma^1 \subseteq \cdots$, $f^0 \subseteq f^1 \subseteq \cdots$ и $Q^{\sigma^0} \subseteq Q^{\sigma^1} \subseteq \cdots$, что f^k является корректным вложением σ^k в L, Q^{σ^k} является дополнительным предикатом на $\mathbb{N} \times |\sigma^k| \times |\sigma^k|$.

Пусть $\sigma^0 = \sigma_s'$, $f^0 = f_s'$ и $Q^{\sigma^0}(n,x,y) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x, y \in |\sigma^0|$. Предположим, что σ^k, f^k и Q^{σ^k} определены и таковы, что f^k является корректным вложением σ^k в L и существует только лишь конечное число таких n, что $Q^{\sigma^k}(n,x,y) = 1$ для всех $x, y \in |\sigma^k|$ (причем множество $Q(x,y) = \{n \mid Q^{\sigma^k}(n,x,y) = 1\}$ является равномерно вычислимым).

Легко видеть, что следующая формула является $\emptyset'$-вычислимой (так как σ' конечна, то все $\forall$-кванторы ограничены):

$$\Gamma(\sigma^k) = (\exists \sigma' \supseteq \sigma^k)(\exists s')(\forall x, y \in |\sigma^k|)(\forall x' \in |\sigma'|)(\forall n)$$

(1) $\varphi_{s,s'}^{\sigma'} \downarrow (s)$,
(2) $P_L^+(f^k(x)) \to \neg S_{\sigma'}(x, x')$,
(3) $P_L^-(f^k(y)) \to \neg S_{\sigma'}(x', y)$,
(4) $(x <_{\sigma^k} y \,\&\, Q^{\sigma^k}(n,x,y)) \to \neg(\exists x_0', \ldots, x_n')(\forall\, 0 \leqslant i < n)(x <_{\sigma'} x_0' <_{\sigma'} \cdots <_{\sigma'} x_n' <_{\sigma'} y)$ & $S_{\sigma'}(x_i', x_{i+1}')$.

Если $\Gamma(\sigma^k)$ ложно, то положим $\sigma_{s+1} = \sigma^k$ и $f_{s+1} = g^k$. Завершим шаг $s+1$.

Предположим, что $\Gamma(\sigma^k)$ выполнено и $\sigma' \supseteq \sigma^k$ удовлетворяет условиям формулы. Без ограничения общности можно предположить, что выполняется только лишь один из следующих случаев.

Случай 1. Пусть $|\sigma'| = |\sigma^k| \cup \{x_1', \ldots, x_i'\}$, где $x_1', \ldots, x_i' \notin |\sigma^k|$, $x_0' <_{\sigma'} x_1' <_{\sigma'} \cdots <_{\sigma'} x_i'$ и

$$S_{\sigma'}(x_0', x_1'), \ldots S_{\sigma'}(x_{i-1}', x_i') \text{ для некоторого } x_0' \in |\sigma^k|.$$

Всегда можно найти

(1) или корректное вложение $f' \supseteq f^k$ из σ' в L; положим в этом случае $\sigma_{s+1} = \sigma'$ и $f_{s+1} = f'$ и завершим шаг $s+1$.

(2) или такие элементы $x_0, x_1, \ldots, x_j$, что

$$x_0 = f^k(x_0') <_L x_1 <_L \cdots <_L x_j, \quad S_L(x_0, x_1),\ \ldots,\ S_L(x_{j-1}, x_j),\ j < i,$$

а также $P_L^+(x_j)$ или $x_j \in |\sigma^k|$; положим в этом случае

$$\sigma^{k+1} = (|\sigma^k| \cup \{x_1', \ldots, x_j'\}, <_{\sigma'}, S_{\sigma'}), \quad f^{k+1}(x_u') = x_u \quad \text{при } 1 \leqslant u \leqslant j,$$
$$f^{k+1}(x) = f^k(x) \quad \text{для всех } x \in |\sigma^k|,$$
$$Q^{\sigma^{k+1}}(n, x, y) = Q^{\sigma^k}(n, x, y) \quad \text{для всех } x, y \in |\sigma_k|,$$
$$Q^{\sigma^{k+1}}(n, x', y') = 0, \quad \text{если либо } x' \notin |\sigma^k|, \text{ либо } y' \notin |\sigma^k| \text{ (для всех } n \in \mathbb{N}).$$

Случай 2. Пусть $|\sigma'| = |\sigma^k| \cup \{x_1', \ldots, x_i'\}$, где $x_1', \ldots, x_i' \notin |\sigma^k|$, $x_1' <_{\sigma'} \cdots <_{\sigma'} x_i' <_{\sigma'} x_{i+1}'$ и

$$S_{\sigma'}(x_1', x_2'), \ldots S_{\sigma'}(x_i', x_{i+1}') \text{ для некоторого } x_{i+1}' \in |\sigma^k|.$$

Этот случай рассматривается аналогично *случаю* 1.

Случай 3. Пусть $|\sigma'| = |\sigma^k| \cup \{x_1', \ldots, x_i'\}$, где для некоторых $x_0', x_{i+1}' \in |\sigma^k|$ выполнено

$$x_1', \ldots, x_i' \notin |\sigma^k|, \quad x_0' <_{\sigma'} x_1' <_{\sigma'} \cdots <_{\sigma'} x_i' <_{\sigma'} x_{i+1}',$$
$$\neg S_{\sigma'}(x_0', x_1'), \quad \neg S_{\sigma'}(x_i', x_{i+1}'), \quad S_{\sigma'}(x_1', x_2'), \ldots S_{\sigma'}(x_{i-1}', x_i').$$

В этом случае обязательно либо (a) выполнено $Q_L(i, f^k(x_0'), f^k(x_{i+1}'))$, либо (b) можно найти корректное вложение $f' \supseteq f^k$ из σ' в L. Тогда

(a) положим $\sigma^{k+1} = \sigma^k$,

$$f^{k+1} = f^k, \quad Q^{\sigma^{k+1}}(i, x_0', x_{i+1}') = 1, \quad Q^{\sigma^{k+1}}(n, x, y) = Q^{\sigma^k}(n, x, y)$$

для всех $x, y \in |\sigma^k| - \{x_0', x_{i+1}'\}$ и $n \in \mathbb{N}$ (заметим, что $Q^{\sigma^k}(i', x_0', x_{i+1}') = 0$ для всех $i' \leqslant i$, и отсюда следует, что случай 3 выполняется только лишь конечное число раз);

(b) положим $\sigma_{s+1} = \sigma'$ и $f_{s+1} = f'$. Завершим шаг $s+1$.

Легко видеть, что последовательность $\{\sigma^k\}$ конечна. Другими словами, после конечного числа шагов структура $\sigma_{s+1} \supseteq \sigma_s$ и корректное вложение $f_{s+1} \supseteq f_s$ из σ_{s+1} в L будет определена.

Описание конструкции завершено.

Очевидно, что $\sigma_s \subseteq \sigma_{s+1}$. Так как $s \in |\sigma_{s+1}|$, то имеем

$$\bigcup_{s \in \mathbb{N}} |\sigma_s| = \mathbb{N}.$$

Пусть $R = (\mathbb{N}, <_R)$, где $<_R = \bigcup\limits_{s \in \mathbb{N}} <_{\sigma_s}$. Из конструкции следует, что $S_R = \bigcup\limits_{s \in \mathbb{N}} S_{\sigma_s}$.

Пусть $f = \lim\limits_{s \to \infty} f_s$. Ясно, что f_s — корректное вложение σ_s в L, а также $s \in f_{s+1}(|\sigma_{s+1}|)$. Отсюда следует, что f является изоморфизмом из R в L.

Так как $\varphi_e^{(\mathbb{N}, <_R, S_R)}(e) \downarrow \leftrightarrow \varphi_e^{\sigma_{e+1}}(e) \downarrow$, то предикат $H(e) = \varphi_e^{(\mathbb{N}, <_R, S_R)}(e) \downarrow$ является $\emptyset'$-вычислимым и, следовательно, структура $(\mathbb{N}, <_R, S_R)$ имеет низкую степень. $\square$

2.2. 1-Квазидискретные линейные порядки. В этом разделе мы покажем, что каждый 2-низкий линейный порядок изоморфен некоторому вычислимому порядку, и получим оценку изоморфизма.

Определение 2.3. Любую структуру вида $(|L|, <_L, S_L, \dots)$, полученную обогащением линейного порядка $L = (|L|, <_L)$ тем или иным набором предикатов, назовем, чтобы упростить терминологию, *обогащенным линейным порядком*, каждый раз в явном виде указывая тот язык, с которым работаем.

Теорема 2.4 (П. Е. Алаев, Дж. Тёрбер, А. Н. Фролов [1]). *Предположим, что структура*

$$L = (|L|, <_L, S_L, P_L^+, P_L^-, dn_L, F_L)$$

— $\mathbf{0}'$-вычислимый обогащенный линейный порядок. Тогда существуют такие вычислимый обогащенный линейный порядок $R = (|R|, <_R, S_R)$ и $\mathbf{0}'$-вычислимое вложение $f : |L| \xrightarrow{1\text{-}1} |R|$, что

(1) *если $x, y \in |L|$ и $S_L(x, y)$, то интервал $[f(x), f(y)]_R$ конечен;*
(2) *если $c \in |R| \setminus \operatorname{rng}(f)$, то найдутся такие $x, y \in |L|$, что $S(x, y)$ и $f(x) <_R c <_R f(y)$.*

Прежде чем приступать к доказательству теоремы, получим из нее все основные результаты этого раздела.

Следствие 2.5. *Пусть $L = (|L|, <_L)$ является 1-квазидискретным линейным порядком. Порядок L обладает вычислимым представлением тогда и только тогда, когда обогащенный порядок $(|L|, <_L, S_L, P_L^+, P_L^-, dn_L, F_L)$ обладает $\mathbf{0}''$-представлением. Если при этом $(|L|, <_L, S_L, P_L^+, P_L^-, dn_L, F_L)$ является $\mathbf{0}''$-вычислимым и таков, что $L = (|L|, <_L)$ является 1-квазидискретным (1-дискретным) линейным порядком, то L является $\mathbf{0}'''$-изоморфным (соответственно, $\mathbf{0}''$-изоморфным) некоторому вычислимому порядку.*

Доказательство. Пусть $(|L|, <_L, S_L, P_L^+, P_L^-, dn_L, F_L)$ является $\mathbf{0}''$-вычислимым, что $L = (|L|, <_L)$ является 1-квазидискретным (1-дискретным) линейным порядком.

Так как L является 1-квазидискретным (1-дискретным), то предикат dn_L пуст (соответственно, пусты предикаты P_L^+, P_L^-, EP_L^+, EP_L^-) и, следовательно, $\mathbf{0}''$-вычислим. Тогда согласно теоремам 1.4 и 2.4 существует такой $\mathbf{0}'$-вычислимый линейный порядок $R \cong_g L$, что S_R также является $\mathbf{0}'$-вычислимым, где изоморфизм g (по теореме 1.4) является $\mathbf{0}'''$-вычислимым ($\mathbf{0}''$-вычислимым).

По теореме 1.1 порядок R имеет низкое представление, причем посредством $\mathbf{0}'$-вычислимого изоморфизма. Согласно следствию 1.10 (соответственно, следствию 1.11) R (и, следовательно, L) является $\mathbf{0}'''$-изоморфным (соответственно, $\mathbf{0}''$-изоморфным) некоторому порядку. $\square$

Из следствия 2.5 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Следствие 2.6. *Каждый 2-низкий 1-квазидискретный (1-дискретный) линейный порядок $\mathbf{0}'''$-изоморфен (соответственно, $\mathbf{0}''$-изоморфен) некоторому вычислимому порядку.*

Следствие 2.7. *Если $L = (|L|, <_L, S_L)$ — такой низкий обогащенный линейный порядок, что $(|L|, <_L)$ является 1-квазидискретным (1-дискретным), то L $\mathbf{0}'''$-изоморфен (соответственно, $\mathbf{0}''$-изоморфен) некоторому вычислимому обогащенному порядку.*

Прежде чем перейти к доказательству основного результата, сформулируем ряд определений и докажем несколько вспомогательных лемм, которые могут быть также полезны для возможных дальнейших исследований n-низких представлений линейных порядков.

В следующих леммах и в доказательстве теоремы 2.4 всё время работаем со структурами двух конечных языков, которые кратко обозначим $\Sigma = (<, S, 0, 1)$ и $\Sigma^* = (<, S, P^+, P^-, dn, F, 0, 1)$.

Определение 2.8. Будем говорить, что (B, Σ) является корректной структурой, если

(1) $<$ — линейный порядок на *конечном* множестве B, а 0 и 1 — его наименьший и наибольший элементы;

(2) $S(x, y) \Rightarrow x < y$ и не существует такого $z \in B$, что $x < z < y$.

Определение 2.9. Будем говорить, что (A, Σ^*) является корректной структурой, если выполнены условия (1) и (2) предыдущего определения, а также

(3) если $P^+(x)$, то не существует такого y, что $S(x, y)$;
(4) если $P^-(y)$, то не существует такого x, что $S(x, y)$;
(5) если $dn(x, y)$, то $x < y$, $P^+(x)$, $P^-(y)$ и $\neg S(x, y)$;
(6) если $x < z < y$, то $dn(x, y) \Leftrightarrow dn(x, z)$ и $dn(z, y)$;
(7) $F(x, y) \Leftrightarrow x < y$ и существуют такие $z_0, \ldots, z_k$, что $z_0 = x$, $z_k = y$ и $S(z_i, z_{i+1})$ для всех $i < k$.

Отметим, что смысл этих определений очень прост: если (B, Σ) или (A, Σ^*) — корректная структура, то она всегда может быть расширена до линейного порядка, в котором предикаты соответствуют своему изначальному определению. Наоборот, если имеется линейный порядок с некоторыми предикатами, то любая его конечная подструктура будет удовлетворять условиям (1)–(6) и всегда может быть расширена до корректной структуры.

Два элемента x, y из корректной структуры назовём *связанными*, если либо $x = y$, либо $x < y$ и существует такой конечный набор $z_0, \ldots, z_k$ такой, что $z_0 = x$, $z_k = y$ и $S(z_i, z_{i+1})$ при $i < k$, либо $y < x$ и верен естественный аналог предыдущего случая. Обозначим это отношение как $x \sim y$; ясно, что это отношение эквивалентности.

Определение 2.10. Пусть (A, Σ^*) и (B, Σ) — две корректные структуры. Будем говорить, что $f : (A, \Sigma^*) \xrightarrow{\text{1-1}} (B, \Sigma)$ является корректным вложением, если

(a) f сохраняет порядок $<$, $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$;
(b) если $P^+(x)$, то не существует такого $b \in B$, что $S(f(x), b)$;
(c) если $P^-(y)$, то не существует такого $a \in B$, что $S(a, f(y))$;
(d) если $dn(x, y)$, то не существует таких a, b, что $f(x) \leqslant a < b \leqslant f(y)$ и $S(a, b)$;
(e) если $x < y$ и не существует такого z, что $x < z < y$, то $S(x, y) \Leftrightarrow f(x) \sim f(y)$.

Лемма 2.11. *Если $(A, \Sigma^*), (A_0, \Sigma^*), (B, \Sigma)$ — корректные структуры, $f : (A, \Sigma^*) \to (B, \Sigma)$ — корректное вложение, $(A_0, \Sigma^*) \leqslant (A, \Sigma^*)$ (т.е. (A_0, Σ^*) — подструктура в (A, Σ^*)) и $f_0 = f|_{A_0}$, то $f_0 : (A_0, \Sigma^*) \to (B, \Sigma)$ тоже является корректным вложением.*

Доказательство. Лемма почти очевидна; небольшой комментарий может потребоваться только для пункта (e). Переход ($\Rightarrow$) в нём тоже очевиден; покажем ($\Leftarrow$). Пусть $x, y \in A_0$ и $f(x) \sim f(y)$. Если в A между $x = z_0$ и $y = z_k$ появились какие-то новые элементы $z_1 < \ldots < z_{k-1}$, то всё равно будет выполняться $f(z_i) \sim f(z_{i+1})$ для всех $i < k$. Следовательно, будет верно $S(z_i, z_{i+1})$, а отсюда $F(x, y)$ в A и в A_0. Последнее влечет $S(x, y)$. □

Доказательство следующей леммы будет использовано и в анализе основной конструкции, описанной ниже, поэтому приведем его подробное изложение.

Лемма 2.12. *Пусть (A, Σ^*), (B, Σ) — две корректные структуры, $f : (A, \Sigma^*) \to (B, \Sigma)$ — корректное вложение и (A, Σ^*) — подструктура в другой корректной структуре (A_1, Σ^*). Тогда существуют такие $(B_1, \Sigma) \geqslant (B, \Sigma)$ и $f_1 \supseteq f$, что $f_1 : (A_1, \Sigma^*) \to (B_1, \Sigma)$ является корректным вложением.*

Доказательство. Выберем такие $x, y \in A$, что $x < y$ и не существует $z \in A$, для которого $x < z < y$. Ясно, что достаточно описать, какие элементы будут добавлены в B в интервале $[f(x), f(y)]$ и как будет определена f_1 на $\{z \in A_1 \mid x \leqslant z \leqslant y\}$, так как понятие корректности является в некотором смысле локальным. Если $[x, y]_{A_1} = \{x, y\}$, то эта пара не требует внимания: считаем, что $[f(x), f(y)]_{B_1} = [f(x), f(y)]_B$. Допустим, что существует такой $z \in A_1$, что $x < z < y$. Заметим, что тогда $\neg S(x, y)$ и неверно, что $f(x) \sim f(y)$.

Обозначим все элементы A_1, лежащие между x и y, через $z_0, \ldots, z_n$: $x = z_0 < z_1 < \ldots < z_{n-1} < z_n = y$; при этом $n \geqslant 2$. Пусть $a = f(x)$ и $b = f(y)$. Предположим сначала, что $dn(x, y)$. Этот случай — самый простой. Пусть $c = \min\{c_1 \in B \mid a < c_1 \leqslant b\}$. Добавим к B элементы $e_1, \ldots, e_{n-1}$, где $a < e_1 < \ldots < e_{n-1} < c$, и положим $f_1(z_i) = e_i$ при $1 \leqslant i < n$.

Пусть $\neg dn(x, y)$. Тогда существует такое $k < n$, что $\neg dn(z_k, z_{k+1})$; зафиксируем одно из таких k (например, наименьшее). Заметим сначала, что всегда можно добавить к B несколько новых элементов так, чтобы свести задачу к одному из двух случаев:

(A) все элементы из $\{c \in B \mid a < c < b\}$ равны $c_0, \ldots, c_s$, где $\neg S(a, c_0)$, $\neg S(c_s, b)$ и $S(c_i, c_{i+1})$ при всех $i < s$;

(B) все элементы из $\{c \in B \mid a \leqslant c \leqslant b\}$ равны $c_0, \ldots, c_s, d_0, \ldots, d_t$, где $c_0 = a$, $d_t = b$, $\neg S(c_s, d_0)$, $S(c_i, c_{i+1})$ при $i < s$ и $S(d_i, d_{i+1})$ при $i < t$.

Если, например, не существует такого $c \in B$, что $S(a, c)$ или $S(c, b)$, то случай (A) нужно получать так: пусть $\{c \in B \mid a < c < b\}$ равно $c'_0, \ldots, c'_p$. Если для какого-то $i < p$ $\neg S(c'_i, c'_{i+1})$, то добавим к B новый элемент c''_i, где $c'_i < c''_i < c'_{i+1}$, и положим $S(c'_i, c''_i)$ и $S(c''_i, c'_{i+1})$. Тем самым мы соединим все c'_j в один класс связанности. Если же $S(a, c)$ для некоторого c, то точно так же нужно связать с a все элементы, кроме тех, которые связаны с b, и получить случай (B). Это можно сделать, так как a и b не связаны друг с другом. Поскольку такие преобразования не портят корректность f, будем далее считать, что верно либо (A), либо (B).

В случае (A) мы добавляем к B новые элементы $e_1 < \ldots < e_k$ между a и c_0, новые элементы $e_{k+1} < \ldots < e_{n-1}$ между c_s и b, и если обозначить $e_0 = a$ и $e_n = b$, то определяем предикат S так:

$$S(e_i, e_{i+1}) \Leftrightarrow S(z_i, z_{i+1}) \text{ для всех } i \neq k;$$
$$S(e_k, c_0) \Leftrightarrow S(c_s, e_{k+1}) \Leftrightarrow S(z_k, z_{k+1}).$$

В случае же (B) добавляем новые элементы $e_1 < \ldots < e_{n-1}$ между c_s и d_0, определяя $S(e_i, e_{i+1}) \Leftrightarrow S(z_i, z_{i+1})$ при всех $i < n$, где $e_0 = c_s$ и $e_n = d_0$. В обоих случаях полагаем $f_1(z_i) = e_i$ при $1 \leqslant i < n$. Нетрудно проверить, что f_1 будет корректным вложением. $\square$

Доказательство теоремы 2.4. Сначала заметим, что без ограничения общности можно предположить существование в L наименьшего элемента 0 и наибольшего элемента 1. Кроме того, будем считать, что линейный порядок L бесконечен, т.е. $\neg F_L(0, 1)$, а его носитель $|L|$ равен $\mathbb{N}$. Далее исходный порядок L будем кратко обозначать $(\mathbb{N}, \Sigma^*)$.

Так как Σ^* является набором Δ^0_2-вычислимых предикатов, то существует такая вычислимая последовательность их аппроксимаций $\{\Sigma^*_s\}_{s\in\mathbb{N}}$, что

$$\Sigma^*_s = (<_s, S_s, P^+_s, P^-_s, dn_s, F_s, 0, 1), \quad \Sigma^* = \lim_{s\to\infty} \Sigma^*_s.$$

Другими словами, например, $S_L(x, y) = \lim\limits_{s\to\infty} S_s(x, y)$ для любых x, y.

Далее для краткости конечные подструктуры в $(\mathbb{N}, \Sigma^*)$ будем обозначать не $(A, \Sigma^*|_A)$, а просто (A, Σ^*); то же самое относится к подструктурам в $(\mathbb{N}, \Sigma^*_s)$. Будем считать, что

$$(\{0, 1\}, \Sigma^*_s) = (\{0, 1\}, \Sigma^*)$$

для всех s, т.е. на $\{0, 1\}$ все предикаты определены корректно с самого начала. Пусть $\{D_u\}_{u\in\mathbb{N}}$ — стандартная нумерация всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$.

Описываемая ниже конструкция будет по шагам строить $R = (\mathbb{N}, \Sigma)$ и несколько вспомогательных объектов. Кконцу шага s будут определяться:

(1) натуральное число $k(s) \in \omega$;

(2) корректная структура (B_s, Σ_s);

(3) конечные последовательности множеств $A_{0,s} \subseteq \ldots \subseteq A_{k(s),s}$ и функций $f_{0,s} \subseteq \ldots \subseteq f_{k(s),s}$.

При этом $(A_{i,s}, \Sigma^*_s)$ будут корректными структурами, а $f_{i,s} : (A_{i,s}, \Sigma^*_s) \to (B_s, \Sigma_s)$ — корректными вложениями при всех $i \leqslant k(s)$. Кроме того, будет выполняться, что

$$(B_s, \Sigma_s) \leqslant (B_{s+1}, \Sigma_{s+1}), \quad k(s + 1) \leqslant k(s) + 1,$$

а также $A_{0,s} = \{0,1\}$ при всех $s \in \omega$. Множества $A_{i,s}$ — это попытка найти те фрагменты, на которых предикаты из Σ^*_s уже прекратили меняться и совпали с Σ^*.

Шаг 0. Полагаем $k(0) = 0$, $A_{0,s} = \{0,1\}$, $B_0 = \{0,1\}$, где $0 < 1$ и $\neg S_R(0,1)$, $f_{0,s} : A_{0,s} \to B_0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Шаг $s+1$. Находим такое максимальное $k \leqslant k(s)$, что при всех $i \leqslant k$ выполнено

$$(A_{i,s}, \Sigma^*_s) = (A_{i,s}, \Sigma^*_{s+1}).$$

Заметим, что такое $k \geqslant 0$ всегда существует. Если $k < k(s)$, то отбрасываем $A_{i,s}$ и $f_{i,s}$ при $i > k$: полагаем $k(s+1) = k$, $A_{i,s+1} = A_{i,s}$ и $f_{i,s+1} = f_{i,s}$ при $i \leqslant k$, $(B_{s+1}, \Sigma_{s+1}) = (B_s, \Sigma_s)$. На этом шаг $s+1$ завершается.

Допустим, что $k = k(s)$. Положим

$$A_{i,s+1} = A_{i,s}, \quad f_{i,s+1} = f_{i,s} \quad \text{для всех } i \leqslant k.$$

Далее либо оставим $k(s+1) = k(s)$, либо положим $k(s+1) = k(s) + 1$, и тогда определим ещё $A_{k+1,s+1}$ и $f_{k+1,s+1}$. Для краткости на этом шаге будем обозначать их как A_{k+1} и f_{k+1}, а $A_{k,s}$ и $f_{k,s}$ — как A_k и f_k. Если ниже не будет указано что-то иное, считаем, что $(B_{s+1}, \Sigma_{s+1}) = (B_s, \Sigma_s)$.

Случай $k = 3t$. Хотим добиться того, чтобы $t \in A_{k+1}$.

Если $t \in A_k$, то полагаем

$$k(s+1) = k(s) + 1, \quad A_{k+1} = A_k, \quad f_{k+1} = f_k$$

и заканчиваем шаг $s+1$. Пусть $t \notin A_k$. Находим такое минимальное $u \leqslant s$, что $D_u \cap A_k = \emptyset$, $t \in D_u$ и $(D_u \cup A_k, \Sigma^*_{s+1})$ — корректная структура. Если такого u не существует, полагаем $k(s+1) = k(s)$ и заканчиваем шаг $s+1$. Если u существует, то

$$k(s+1) = k(s) + 1, \quad A_{k+1} = A_k \cup D_u.$$

По лемме 2.12 находим такие корректную структуру

$$(B_{s+1}, \Sigma_{s+1}) \geqslant (B_s, \Sigma_s)$$

и корректное вложение

$$f_{k+1} : (A_{k+1}, \Sigma^*_{s+1}) \to (B_{s+1}, \Sigma_{s+1}),$$

что $f_{k+1} \supseteq f_k$. В силу леммы 2.11 функции

$$f_{i,s} : (A_{i,s}, \Sigma^*_{s+1}) \to (B_{s+1}, \Sigma_{s+1})$$

останутся корректными вложениями. Шаг $s+1$ завершён.

Случай $k = 3t + 1$. Здесь цель состоит в том, чтобы $t \in B_{s+1}$.

Если $t \in B_s$, то полагаем

$$k(s+1) = k(s) + 1, \quad A_{k+1} = A_k, \quad f_{k+1} = f_k$$

и заканчиваем шаг $s+1$. Допустим, что $t \notin B_s$. Тогда просто добавим к B_s ещё один элемент t так, чтобы сохранить корректность. Для этого найдём в A_k элементы x, y такие, что $x <_s y$, $\neg S_s(x,y)$ и не существует z такого, что $x <_s z <_s y$. По условию $f_k(x)$ и $f_k(y)$ не связаны в (B_s, Σ_s), поэтому мы можем найти соседние $c, d \in B_s$ такие, что

$$f_k(x) \leqslant_R c <_R d \leqslant_R f_k(y), \quad \neg S_R(c,d).$$

Положим $B_{s+1} = B_s \cup \{t\}$, а Σ_{s+1} определим так, чтобы

$$c <_R t <_R d, \quad \neg S_R(c,t), \quad \neg S_R(t,d).$$

Нетрудно проверить, что

$$f_k : (A_k, \Sigma^*_s) \to (B_{s+1}, \Sigma_{s+1})$$

— корректное вложение. Положим

$$k(s+1) = k(s) + 1, \quad A_{k+1} = A_k, \quad f_{k+1} = f_k.$$

Случай $k = 3t+2$. В силу условий предыдущего случая $t \in B_s$. Мы хотим, чтобы стало верным по крайней мере одно из двух условий: $t \in \operatorname{rng}(f_{k+1})$ или существуют такие $x', y' \in A_{k+1}$, что

$$S_{s+1}(x', y'), \quad f_{k+1}(x') <_R t <_R f_{k+1}(y').$$

Если $t \in \operatorname{rng}(f_k)$, то положим

$$k(s+1) = k(s)+1, \quad A_{k+1} = A_k, \quad f_{k+1} = f_k$$

и шаг $s+1$ завершен. Пусть $t \notin \operatorname{rng}(f_k)$. Найдём такие $x, y \in A_k$, что $f_k(x) <_R t <_R f_k(y)$, и не существует такого $z \in A_k$, что $x <_s z <_s y$.

Если $S_s(x,y)$, то положим

$$k(s+1) = k(s)+1, \quad A_{k+1} = A_k, \quad f_{k+1} = f_k,$$

и шаг $s+1$ заканчивается. Допустим, что $\neg S_s(x,y)$. Пусть $a = f_k(x)$ и $b = f_k(y)$. Обозначим элементы из $\{c \in B_s \mid a \leqslant_R c \leqslant_R b\}$ через $c_0, \ldots, c_n$, т.е. $a = c_0 <_R c_1 <_R \cdots <_L c_{n-1} <_L c_n = b$. В этом случае $n \geqslant 2$ и $t = c_p$ для некоторого p. Рассмотрим несколько возможных вариантов.

(1) Элемент t связан с элементом a, т.е. существует такое $m \geqslant p$, что $m < n$, $\neg S_R(c_m, c_{m+1})$ и $S_R(c_i, c_{i+1})$ при $i < m$. Находим такое наименьшее $z \leqslant s$, что $(A_k \cup \{z\}, \Sigma^*_{s+1})$ — корректная структура и $S_{s+1}(x,z)$. Если такое z существует, полагаем

$$A_{k+1} = A_k \cup \{z\}, \quad f_{k+1}(z) = c_m, \quad k(s+1) = k(s)+1.$$

Если нет, то $k(s+1) = k(s)$. Шаг $s+1$ закончен.

(2) t не связан с a, но связан с b. Действуем аналогично (1), когда ищем такое z, что $S_{s+1}(z,y)$.

Далее будем считать, что t не связан ни с a, ни с b.

(3) $\neg P^+_s(x)$. Действуя точно так же, как в лемме 2.12, мы можем расширить (B_s, Σ_s) до (B_{s+1}, Σ_{s+1}) так, что

$$f_k : (A_k, \Sigma^*_s) \to (B_{s+1}, \Sigma_{s+1})$$

останется корректным вложением, и при этом t будет связан с a в B_{s+1}. Далее наши действия повторяют вариант (1), когда ищем такое z, что $S_{s+1}(x,z)$, и помещаем t между $f_{k+1}(x)$ и $f_{k+1}(z)$.

(4) $P^+_s(x)$, но $\neg P^-_s(y)$. Случай аналогичен (3).

(5) $P^+_s(x), P^-_s(y), dn_s(x,y)$. Находим такое наименьшее $z \leqslant s$, что $(A_k \cup \{z\}, \Sigma^*_{s+1})$ — корректная структура и $x <_{s+1} z <_{s+1} y$, и полагаем

$$A_{k+1} = A_k \cup \{z\}, \quad f_{k+1}(z) = t, \quad k(s+1) = k(s)+1.$$

Если же такого z не существует, $k(s+1) = k(s)$. Шаг $s+1$ завершен.

(6) $P^+_s(x), P^-_s(y), \neg dn_s(x,y)$. Вновь расширяя (B_s, Σ_s) до (B_{s+1}, Σ_{s+1}) как в лемме 2.12, мы можем считать, что $c_1, \ldots, c_{n-1}$ связаны друг с другом (но не связаны ни с a, ни с b). Ищем такую пару элементов $x', y' \leqslant s$ с минимальным номером, что $(A_k \cup \{x', y'\}, \Sigma^*_{s+1})$ — корректная структура, $x <_{s+1} x' <_{s+1} y' <_{s+1} y$ и $S_{s+1}(x', y')$. Если такая пара существует, полагаем

$$A_{k+1} = A_k \cup \{x', y'\}, \quad f_{k+1}(x') = c_1, \quad f_{k+1}(y') = c_{n-1}, \quad k(s+1) = k(s)+1.$$

Если нет, то $k(s+1) = k(s)$. Шаг $s+1$ заканчивается.

Описание конструкции завершено.

Прежде, чем завершить доказательство теоремы, докажем следующую лемму.

Лемма 2.13. $\lim\limits_{s \to +\infty} k(s) = +\infty$.

Доказательство. Предположим, что это не так. А именно, пусть $k(s) \geqslant k$ при $s \geqslant s_0$, и при этом $k(s) = k$ при бесконечно многих s. Это означает, что $A_{i,s}$ и $f_{i,s}$ для $i \leqslant k$ уже не меняются при $s \geqslant s_0$. Обозначим их окончательные значения через $A_0, \dots, A_k$ и $f_0, \dots, f_k$. И это означает, что

$$(A_k, \Sigma_s^*) = (A_k, \Sigma^*) \quad \text{при } s \geqslant s_0.$$

Покажем, что такая ситуация невозможна. На некотором шаге $s+1$ число $k(s+1)$ станет равным $k+1$ и больше не уменьшится. Действительно, рассмотрим работу конструкции на шаге $s+1$ при $k(s) = k$ и достаточно большом s. Ясно, что $k \neq 3t+1$, иначе в конце шага $s+1$ будет верно $k(s+1) = k+1$, и в силу равенств $A_{k+1} = A_k$ и $f_{k+1} = f_k$ получим, что $k(s') \geqslant k+1$ при $s' \geqslant s+1$.

Предположим, что $k = 3t$. Очевидно, существует такое конечное A', что $A_k \cup \{t\} \subseteq A'$ и (A', Σ^*) — корректная структура. В большинстве случаев можно просто взять $A' = A_k \cup \{t\}$; единственный особый случай — когда выполняется $F_L(x,t)$ для $x \in A_k$ или $F_L(t,y)$ для $y \in A_k$. Если, например, верно $F_L(x,t)$, то в A' должен присутствовать конечный набор $z_0, \dots, z_k$, связывающий x и t: $z_0 = x$, $z_k = t$ и $S_L(z_i, z_{i+1})$ при $i < t$.

Следовательно, существует такое наименьшее число u, что $A_k \cap D_u = \emptyset$, $t \in D_u$ и $(A_k \cup D_u, \Sigma^*)$ — корректная структура. Если s достаточно велико, то в конце шага $s+1$ мы получим

$$A_{k+1} = A_k \cup D_u, \quad k(s+1) = k+1,$$

и $k(s')$ не уменьшится при $s' \geqslant s+1$.

Аналогично разбирается и случай $k = 3t+2$. Если обращения к этому случаю происходят бесконечно часто, то бесконечно часто будут происходить действия, указанные по крайней мере в одном из пунктов (1)–(6), и нужно рассмотреть каждый из них. При этом обращение к (3) или (4) может произойти только один раз, поэтому можно ограничиться вариантами (1), (2), (5) и (6). Рассмотрим только наиболее сложный случай (6); остальные случаи рассматриваются аналогично.

Поскольку предикаты из Σ_s^* совпадают на элементах из $A_k c\Sigma^*$, в $(\mathbb{N}, \Sigma^*)$ верно $P_L^+(x)$, $P_L^-(y)$ и $\neg dn_L(x,y)$. Следовательно, существует такая пара x', y' с минимальным номером, что $x <_L x' <_L y' <_L y$ и $S_L(x', y')$. Если s достаточно велико, то $(A_k \cup \{x', y'\}, \Sigma_{s+1}^*)$ будет корректной структурой, а для любой пары x'', y'' с меньшим номером будет нарушаться одно из требуемых условий. Следовательно, в конце шага $s+1$ множество A_{k+1} станет равным $A_k \cup \{x', y'\}$ и больше не изменится. $\square$

Завершим доказательство теоремы. В силу леммы и работы конструкции в случае $k = 3t+1$ имеем $\bigcup\limits_{s \in \mathbb{N}} B_s = \mathbb{N}$. Положим $R = (\mathbb{N}, \Sigma) = \bigcup\limits_{s \in \mathbb{N}} (B_s, \Sigma_s)$. Очевидно, что R — вычислимая структура.

Далее, $A_{k,s}$ и $f_{k,s}$ перестают меняться при достаточно больших s. Положим

$$A_k = \lim_{s \to +\infty} A_{k,s}, \quad f_k = \lim_{s \to +\infty} f_{k,s}.$$

Тогда

$$A_k \subseteq A_{k+1}, \quad f_k \subseteq f_{k+1}, \quad (A_k, \Sigma^*) \leqslant (A, \Sigma^*)$$

и $f_k : A_k \xrightarrow{1\text{-}1} B$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Работа конструкции в случае $k = 3t$ гарантирует, что $t \in A_{k+1}$. Положим

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k, \quad f = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k.$$

Получаем, что $f : A \xrightarrow{1\text{-}1} B$ — монотонная функция.

Докажем п. (1) из формулировки теоремы. Пусть x, y таковы, что $S_L(x,y)$. Тогда $x, y \in A_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и

$$f_k : (A_k, \Sigma^*) \to (B_s, \Sigma_s)$$

— корректное вложение для некоторого $s \in \omega$. Следовательно, $f_k(x)$ и $f_k(y)$ связаны в B_s. Поскольку $(B_s, \Sigma_s) \leqslant (B_p, \Sigma_p)$ при всех $p \geqslant s$, интервал $[f_k(x), f_k(y)]$ будет одинаков в B_s и B_p; следовательно, он будет конечен и в R.

Докажем (2). Пусть $t \in |R| \setminus \mathrm{rng}(f)$. Рассмотрим шаг $s+1$, на котором $k(s) = 3t+2$ и $k(p) > 3t+2$ при $p > s$ (такое s существует и единственно). По условию найдутся такие $x', y' \in A_{k+1,s+1}$, что

$$S_{s+1}(x', y'), \quad f_{k+1,s+1}(x') <_R t <_R f_{k+1,s+1}(y').$$

Поскольку A_{k+1} и f_{k+1} больше не изменятся; это будет верно и для A, f.

Ясно, что $(\mathbb{N}, <_R, 0, 1)$ — линейный порядок с наименьшим и наибольшим элементами. Докажем теперь, что предикат S_R соответствует в R своему определению, т.е. $S_R(a,b) \Leftrightarrow a <_R b$ и не существует такого c, что $a <_R c <_R b$, для любых a, b.

Переход ($\Rightarrow$) очевиден. Действительно, если $S_s(a,b)$ для некоторого s, то такого c не может существовать в B_s. Для доказательства ($\Leftarrow$) предположим, что $a <_R b$ и не существует такого c, что $a <_R c <_R b$. Если $a = f(x)$ и $b = f(y)$ для некоторых x, y, то выполняется $S_L(x,y)$ и, следовательно, как было показано выше, $f(x)$ и $f(y)$ связаны в R, т.е. выполнено $S_R(a,b)$. Допустим, что $a = f(x)$, а $b \notin \mathrm{rng}(f)$. Тогда существует такой y, что $S_L(x,y)$ и $f(x) <_R b <_R f(y)$. Вновь $f(x)$ и $f(y)$ должны быть связаны в R, откуда $S_R(a,b)$. Остальные случаи разбираются аналогично. □

3. Контрпримеры

В этом разделе покажем, что все полученные выше положительные результаты не могут быть улучшены заменой условия «n-низкости» на условие «$n+1$-низкости» . А именно, в следствии 1.10 показано, что каждый низкий k-квазидискретный линейный порядок имеет вычислимое представление. Ниже в предложении 3.1 покажем, что это не верно для «2-низких» вместо «низких» порядков, причем, даже для класса сильно η-схожих линейных порядков. В теореме 1.20 мы увидели, что каждый низкий линейный порядок, конденсация которого есть η и который не содержит сильно η-схожего интервала, имеет вычислимую копию. В теореме 3.2 покажем, что это не верно для «2-низких» вместо «низких» порядков.

В следствии 2.6 показано, что каждый 2-низкий 1-квазидискретный (1-дискретный) линейный порядок $\mathbf{0}'''$-изоморфен (соответственно, $\mathbf{0}''$-изоморфен) некоторому вычислимому порядку. В предложении 3.3 покажем, что этот результат не верен для «3-низких» вместо «2-низких» порядков, причем даже для класса дискретных линейных порядков.

Завершим этот раздел отрицательным ответом (теорема 3.6) на вопрос Э. Кэча и А. Монталбана (см. [30]) о вычислимой представимости 2-низких разреженных линейных порядков.

Предложение 3.1. *Существует 2-низкий сильно η-схожий линейный порядок, не являющийся вычислимо представимым.*

Доказательство. К. Джокуш и Р. Соар (см. [29]) построили в каждой вычислимо перечислимой степени и, в частности, низкий линейный порядок, не имеющий вычислимого представления. Из релятивизации этого результата следует, что существует $\mathbf{0}''$-вычислимый линейный порядок A_0, не имеющий $\mathbf{0}'$-вычислимого представления, и такой, что $\mathbf{x}' \leqslant \mathbf{0}''$, где $\mathbf{x} = \deg_T(A_0) \geqslant \mathbf{0}'$. Пусть $L = (\eta + 2 + \eta) \cdot A_0$.

Р. Доуни и Дж. Найт (см. [18]) показали, что линейный порядок $R = (\eta + 2 + \eta) \cdot \widetilde{R}$ имеет X-вычислимое представление тогда и только тогда, когда линейный порядок $\widetilde{L}$ имеет X'-вычислимое представление. Отсюда немедленно следует, что L не имеет вычислимого представления.

Так как $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}'$, то существует такая степень $\mathbf{y} \leqslant \mathbf{0}'$, что $\mathbf{y}' = \mathbf{x}$. Из приведенного выше результата Р. Доуни и Дж. Найт следует, что L имеет $\mathbf{y}$-вычислимое представление. При этом $\mathbf{y}'' = \mathbf{x}' \leqslant \mathbf{0}''$, т.е. степень $\mathbf{y}$ является 2-низкой. □

Теорема 3.2. *Существует* 2*-низкий* η*-схожий линейный порядок, не имеющий бесконечного сильно* η*-схожего интервала, не являющийся вычислимо представимым.*

Доказательство. Если линейный порядок L не содержит бесконечного сильно η-схожего интервала, то выполнено

$$Q_L(n,x,y)=1 \Leftrightarrow |[x,y]_L|=n$$

и, следовательно,

$$\deg_T(Q_L) \leqslant \deg_T(<_L) \vee \deg_T(S_L).$$

Согласно теореме 2.1, достаточно построить $\emptyset''$-вычислимую структуру

$$(\mathbb{N},<_L,S_L,P_L^+,P_L^-),$$

где $L=(\mathbb{N},<_L)$ является η-схожим линейным порядком, не имеющего бесконечного сильно η-схожего интервала и не имеющего вычислимого представления.

Н. Г. Хисамиев (см. [12]) построил $\mathbf{0}''$-вычислимое множество S, которое не является рангом никакой $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции. Зафиксируем такое множество S (без ограничения общности можно предположить, что $0,1\notin S$). Построим такой порядок L, что

$$S=\{n \mid L \text{ содержит максимальный блок мощности } n\}.$$

Р. Коулез, Р. Доуни и Б. Хусаинов (см. [14]) доказали, что для каждого вычислимого линейного порядка $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} f(q)$, где $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}\setminus\{0\}$, существует $\mathbf{0}'$-предельно монотонная функция g, ранг которой равен рангу функции f. Отсюда непосредственно вытекает, что L не имеет вычислимого представления.

Зафиксируем оракул $\mathbf{0}''$.

Конструкция

Шаг $s=0$. Положим отношения $<_L,S_L,P_L^+$, P_L^- неопределенными.

Шаг $s+1$. Предположим, что на шаге s отношения $<_L$, S_L, P_L^+, P_L^- определены на $\{y \mid y<k\}$. Положим

$$x_1 <_L y_1 <_L x_2 <_L y_2 <_L \cdots <_L x_m <_L y_m,$$

где $x_1,x_2,\ldots,x_m$ — все такие элементы x, что $P_L^-(x)$; $y_1,y_2,\ldots,y_m$ — все такие элементы y, что $P_L^+(y)$.

Пусть $z\in S$ — такое наименьшее натуральное число, что

$$z\notin\{n \mid (\exists 1\leqslant i\leqslant m)(|[x_i,y_i]_L|=n)\}.$$

Положим z новых элементов $t_1,\ldots,t_z$ непосредственно слева от каждого x_i и z новых элементов $t_{z+1},\ldots,t_{2z}$ непосредственно справа от каждого y_i. Определим для каждого $j\in\{1,z+1\}$

$$\begin{gathered}
S_L(t_j,t_{j+1}),\quad \ldots,\quad S_L(t_{z+j-2},t_{z+j-1}),\\
\neg S_L(x,t_i),\quad \neg S_L(t_i,x)\quad \text{для всех } x\notin\{t_j,\ldots,t_{z+j-1}\} \text{ и } j\leqslant i\leqslant z+j-1,\\
P_L^-(t_j),\quad \neg P_L^-(t_{j+1}),\quad \ldots,\quad \neg P_L^-(t_{z+j-1}),\\
\neg P_L^+(t_j),\quad \ldots,\quad \neg P_L^+(t_{z+j-2}),\quad P_L^+(t_{z+j-1}).
\end{gathered}$$

Описание конструкции завершено.

Непосредственно из конструкции следует, что L является η-схожим линейным порядком, не имеющим сильно η-схожего интервала. Согласно комментариям выше, L имеет 2-низкое представление и не имеет вычислимого представления. □

Предложение 3.3. *Существует* 3*-низкий дискретный линейный порядок, не имеющий вычислимого представления.*

Доказательство. К. Джокуш и Р. Соар (см. [29]) построили в каждой вычислимо перечислимой степени и, в частности, низкий линейный порядок, не имеющий вычислимого представления. Из релятивизации этого результата следует, что существует $\mathbf{0}'''$-вычислимый линейный порядок A_0, не имеющий $\mathbf{0}''$-вычислимого представления, и такой, что $\mathbf{x}' \leqslant \mathbf{0}'''$, где $\mathbf{x} = \deg_T(A_0) \geqslant \mathbf{0}''$. Пусть $L = \zeta \cdot A_0$.

Р. Ватник (см. [40]) показал, что линейный порядок $R = \zeta \cdot \widetilde{R}$ имеет X-вычислимое представление тогда и только тогда, когда линейный порядок $\widetilde{L}$ имеет X''-вычислимое представление. Отсюда немедленно следует, что L не имеет вычислимого представления.

Так как $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}''$, то существует такая степень $\mathbf{y} \leqslant \mathbf{0}'$, что $\mathbf{y}'' = \mathbf{x}$. Из приведенного выше результата Р. Ватника следует, что L имеет $\mathbf{y}$-вычислимое представление. При этом $\mathbf{y}''' = \mathbf{x}' \leqslant \mathbf{0}'''$, т.е. степень $\mathbf{y}$ является 3-низкой. $\square$

Прежде, чем доказать основной результат этого раздела, приведем определение разреженного порядка и техническое предложение, которое является следствием теоремы 2.2.

Определение 3.4. Линейный порядок называется разреженным, если он не содержит плотного подпорядка.

Предложение 3.5. *Пусть L является таким $\mathbf{0}''$-вычислимым разреженным линейным порядком, что отношения S_L, P_L^-, P_L^+, F_L также являются $\mathbf{0}''$-вычислимыми. Тогда L имеет 2-низкое представление.*

Доказательство. Легко видеть, что если линейный порядок L является разреженным, то отношение $Qn_L(x, y, n)$ выполнено тогда и только тогда, когда $|[x, y]_L| \geqslant n$. Следовательно, Qn_L является вычислимым относительно F_L. Таким образом, по теореме 2.2 линейный порядок L имеет 2-низкое представление. $\square$

Теорема 3.6 (А. Н. Фролов [27]). *Существует 2-низкий разреженный линейный порядок, не имеющий вычислимого представления.*

Доказательство. Строим разреженный линейный порядок L в виде суммы

$$T_0 + L_0 + T_1 + L_1 + T_2 + L_2 + \cdots ,$$

где каждый T_i имеет порядковый тип $\zeta + 2i + 2 + \zeta$, а каждый L_i имеет либо нечетную мощность, либо порядковый тип ω.

Зафиксируем оракул $\mathbf{0}''$. Очевидно, что существует такая равномерная $\mathbf{0}''$-вычислимая (на самом деле даже вычислимая) процедура построения последовательности линейных порядков T_i, что, во-первых, каждый T_i имеет порядковый тип $\zeta + 2i + 2 + \zeta$ и, во-вторых, объединение носителей всех T_i образует множество всех нечетных натуральных чисел. Используем четные числа для конструкции L_i. При этом, когда добавляем новый элемент, то используем наименьшее четное натуральное число, которое еще не использовалось в конструкции. Отсюда следует, что все четные числа будут задействованы в этой конструкции и, следовательно, носитель линейного порядка $L = T_0 + L_0 + T_1 + L_1 + T_2 + L_2 + \cdots$ есть множество всех натуральных чисел.

Для построения L_i определим следующую равномерную $\mathbf{0}''$-вычислимую последовательность функционалов Φ_i, S_{Φ_i}, F_{Φ_i}, $P_{\Phi_i}^+$, $P_{\Phi_i}^-$, где $\{(\mathbb{N}, \Phi_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ — класс всех вычислимых линейных порядков, а S_{Φ_i}, F_{Φ_i}, $P_{\Phi_i}^+$, $P_{\Phi_i}^-$ — отношения соседства, блока, предельность справа и слева линейного порядка $(\mathbb{N}, \Phi_i)$, соответственно.

Пусть φ_i — равномерная $\mathbf{0}''$-вычислимая последовательно всех бинарных всюду определенных вычислимых функций. Очевидно, что оракул $\mathbf{0}''$ позволяет определить, удовлетворяет ли функция φ_i аксиомам линейного порядка на множестве всех натуральных чисел. Если нет, то определим функционал Φ_i таким образом, чтобы структура $(\mathbb{N}, \Phi_i)$ образовывала естественный порядок натуральных чисел.

Предположим, что φ_i удовлетворяет условию линейного порядка. Положим

(i) $\Phi_i(x,y)=1 \Leftrightarrow \varphi_i(x,y)=1$;
(ii) $S_{\Phi_i}(x,y)=1 \Leftrightarrow \varphi_i(x,y){=}1$ и не существует такого z, что $\varphi_i(x,z)=1$ и $\varphi_i(z,y)=1$;
(iii) $F_{\Phi_i}(x,y) = 1 \Leftrightarrow$ существуют такие $x_0,\dots,x_{n+1}$, что $x_0 = x$, $x_{n+1} = y$, а также $S_{\Phi_i}(x_j,x_{j+1})=1$ для $0\leqslant j\leqslant n$;
(iv) $P^+_{\Phi_i}(x) = 1 \Leftrightarrow$ для всех таких y, что $\varphi_i(x,y) = 1$, существует такой z, что $\varphi_i(x,z) = 1$ и $\varphi_i(z,y)=1$;
(v) $P^-_{\Phi_i}(x) = 1 \Leftrightarrow$ для всех таких y, что $\varphi_i(y,x) = 1$, существует такой z, что $\varphi_i(y,z) = 1$ и $\varphi_i(z,x)=1$.

Во всех остальных случаях положим функционалы равными 0.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что Φ_i, S_{Φ_i}, F_{Φ_i}, $P^+_{\Phi_i}$, $P^-_{\Phi_i}$ — такая равномерная $\mathbf{0}''$-вычислимая последовательность функционалов, что $\{(\mathbb{N},\Phi_i)\mid i\in\mathbb{N}\}$ — класс всех вычислимых линейных порядков, а S_{Φ_i}, F_{Φ_i}, $P^+_{\Phi_i}$, $P^-_{\Phi_i}$ — отношения соседства, блока, предельность справа и слева линейного порядка $(\mathbb{N},\Phi_i)$, соответственно.

Перейдем теперь к построению L_i. Для этого определим такую последовательность $L_{i,0},L_{i,1},L_{i,2},\dots$, что $L_{i,s}\subseteq L_{i,s+1}$ и $L_i=\bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}}L_{i,s}$.

Конструкция L_i.

Шаг $s=0$. Положим $L_{i,0} = \{t_1\}$, $P^-_L(t_1)$ и $\neg P^+_L(t_1)$, где t_1 — наименьшее четное число, не использованное еще в конструкции L.

Шаг $s+1$. Пусть $L_{i,s}=\{t_1<_L\dots<_L t_{2k+1}\}$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть существуют такие элементы $x_1,\dots,x_{2i+2},t,y_1,\dots,y_{2i+4}\leqslant s$, что

$$P^-_{\Phi_i}(x_1), S_{\Phi_i}(x_1,x_2),\dots,S_{\Phi_i}(x_{2i+1},x_{2i+2}),P^+_{\Phi_i}(x_{2i+2}), \tag{1}$$

$$\Phi_i(x_{2i+2},t),P^-_{\Phi_i}(t),\Phi_i(t,y_1), \tag{2}$$

$$P^-_{\Phi_i}(y_1), S_{\Phi_i}(y_1,y_2),\dots,S_{\Phi_i}(y_{2i+3},y_{2i+4}),P^+_{\Phi_i}(y_{2i+4}). \tag{3}$$

Найдем такие $p_0,\dots,p_j$, что $p_0 = t$, $S_{\Phi_i}(p_0,p_1),\dots,S_{\Phi_i}(p_{j-1},p_j)$, а также либо $P^+_{\Phi_i}(p_j)$, либо $j>2k+3$. Заметим, что такие элементы $p_0,\dots,p_j$ должны существовать.

Если либо $P^+_{\Phi_i}(p_j)$ и $j<2k+3$, либо $j>2k+3$, то выберем наименьшие четные числа t_{2k+2} и t_{2k+3}, которые еще не использовались в конструкции, и положим

$$\begin{gathered}L_{i,s+1}=\{t_0<_L<\dots<_L t_{2k+1}<_L t_{2k+2}<_L t_{2k+3}\},\\ \neg P^+_L(t_{2k+2}),P^+_L(t_{2k+3}),\\ S_L(t_{2k+1},t_{2k+2}),S_L(t_{2k+2},t_{2k+3}),\\ F_L(t_j,t_{2k+2}),F_L(t_j,t_{2k+3}) \text{ для всех } j\in\{0,\dots,2k+3\}.\end{gathered}$$

В противном случае (если $P^+_{\Phi_i}(p_j)$ и $j=2k+3$), выберем наименьшие, еще не использованные, четные числа t_{2k+2}, t_{2k+3}, t_{2k+4}, t_{2k+5} и положим

$$\begin{gathered}L_{i,s+1}=\{t_0<_L<\dots<_L t_{2k+1}<_L t_{2k+2}<_L t_{2k+3}<_L t_{2k+4}<_L t_{2k+5}\},\\ \neg P^+_L(t_{2k+2}),\neg P^+_L(t_{2k+3}),\neg P^+_L(t_{2k+4}),P^+_L(t_{2k+5}),\\ S_L(t_{2k+1},t_{2k+2}),S_L(t_{2k+2},t_{2k+3}),S_L(t_{2k+3},t_{2k+4}),S_L(t_{2k+4},t_{2k+5}),\\ F_L(t_j,t_{2k+2}),F_L(t_j,t_{2k+3}),F_L(t_j,t_{2k+4}),F_L(t_j,t_{2k+5})\forall j\in\{0,\dots,2k+5\}.\end{gathered}$$

После этого завершаем конструкцию, то есть выполнение последующих шагов не производится.

Случай 2. Предположим, что *случай* 1 не выполнен. Другими словами, предположим, что не существуют такие $x_1,\dots,x_{2i+2},t,y_1,\dots,y_{2i+4}\leqslant s$, что условия (1)–(3) выполнены. Выберем, как обычно, наименьшие, еще не использованные, четные натуральные числа t_{2k+2} и t_{2k+3} и положим

$$L_{i,s+1} = \{t_0 <_L < \dots <_L t_{2k+1} <_L t_{2k+2} <_L t_{2k+3}\},$$
$$\neg P^+_L(t_{2k+2}), \neg P^+_L(t_{2k+3}),$$
$$S_L(t_{2k+1}, t_{2k+2}), S_L(t_{2k+2}, t_{2k+3}),$$
$$F_L(t_j, t_{2k+2}), F_L(t_j, t_{2k+3}) \text{ для всех } j \in \{0, \dots, 2k+3\}.$$

Описание конструкции завершено.

Ясно, что если L_i определен в *случае* 1, то L_i имеет нечетную мощность. В противном случае (если *случай* 2 реализуется бесконечно часто), L_i имеет порядковый тип ω.

Положим $L = T_0 + L_0 + T_1 + L_1 + T_2 + L_2 + \cdots$. Из конструкции следует, что построенные в конструкции отношения S_L, F_L, P^+_L, P^-_L являются отношениями соседства, блока, предельности справа и слева порядка L, соответственно. Таким образом, L является таким $\mathbf{0}''$-вычислимым разреженным линейным порядком, что отношения S_L, F_L, P^+_L, P^-_L также являются $\mathbf{0}''$-вычислимыми. Следовательно, согласно предложению 3.5 построенный порядок L имеет 2-низкое представление.

Предположим, что L изоморфен некоторому вычислимому линейному порядку. Тогда существует такой индекс i, что φ_i — такая бинарная всюду определенная вычислимая функция, что пара $(\mathbb{N}, \varphi_i)$ является линейным порядком и $L \cong (\mathbb{N}, \varphi_i) = (\mathbb{N}, \Phi_i)$.

Так как L имеет вид $\zeta + 2 + \zeta + L_0 + \zeta + 4 + \zeta + L_1 + \zeta + 6 + \zeta + L_2 + \cdots$, где каждый L_j имеет либо нечетную мощность, либо порядковый тип ω, то существуют такие единственные элементы $x_1, \dots, x_{2i+2}, t, y_1, \dots, y_{2i+4}$, что условия (1)–(3) выполнены (здесь элемент t — образ наименьшего элемента L_i.)

Следовательно, согласно *случаю* 1 порядок L_i конечен, и существует такой элемент t', что $F_{\Phi_i}(t, t')$ и либо $|[t, t']| < |L_i|$ и $P^+_{\Phi_i}(t')$, либо $|[t, t']| > |L_i|$. Это противоречит тому, что $L \cong (\mathbb{N}, \Phi_i)$. Таким образом, разреженный линейный порядок L не имеет вычислимого представления. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алаев П., Тёрбер Дж., Фролов А.* Вычислимость на линейных порядках, обогащенных предикатами// Алгебра и логикаю — 2009. *48*, № 5. — С. 549–563.
2. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
3. *Зубков М. В., Фролов А. Н.* Вычислимые линейные порядки и предельно монотонные функции// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — 2018. — *157*. — С. 70–105.
4. *Мальцев А. И.* Конструктивные алгебры, I// Усп. мат. наук. — 1961. — *16*, № 3 (99). — С. 3–60.
5. *Мальцев А. И.* О рекурсивных абелевых группах// Докл. АН СССР. — 1962. — *146*, № 5. — С. 1009–1012.
6. *Новиков П. С.* Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества// Докл. АН СССР. — 1952. — *85*, № 4. — С. 709–712.
7. *Перетятькин М. Г.* Каждое рекурсивно перечислимое расширение теории линейных порядков имеет конструктивную модель// Алгебра и логика. — 1973. — *12*, № 2. — С. 211–219.
8. *Пинус А. Г.* Эффективные линейные порядки// Сиб. мат. ж. — 1975. — *16*. — С. 956–962.
9. *Соар Р. И.* Вычислимо перечислимые множества и степени. — Казань: Казан. мат. об-во, 2000.
10. *Фролов А. Н.* Δ^0_2 копии линейных порядков// Алгебра и логика. — 2006. — *45*, № 3. — С. 354–370.
11. *Фролов А. Н.* Линейные порядки низкой степени// Сиб. мат. ж. — 2010. — *51*, № 5. — С. 1147–1162.
12. *Хисамиев Н. Г.* Арифметическая иерархия абелевых групп// Сиб. мат. ж. — 1988. — *29*, № 6. — С. 144–159.
13. *Ash C. J., Knight J.* Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy/ Stud. Logic Found. Math. — Amsterdam: North-Holland, 2000. — *144*.
14. *Coles R. J., Downey R., Khoussainov B.* On initial segments of computable linear orders// Order. — 1997/98. — *14*. — С. 107–124.
15. *Downey R. G.* On presentations of algebraic structures// в сб.: *Sorbi A.* (ed.). Complexity, Logic, and Recursion Theory. — New York: Dekker, 1997. — С. 157–205.

16. *Downey R. G.* Computability theory and linear orders// в сб.: *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B.* (eds.). Handbook of Recursive Mathematics/ Stud. Logic Found. Math. — Elsevier, 1998. — *138*. — Chap. 14.
17. *Downey R. G., Jockusch C. G.* Every low Boolean algebra is isomorphic to a recursive one// Proc. Am. Math. Soc. — 1994. — *122*, № 3. — С. 871–880.
18. *Downey R. G., Knight J. F.* Orderings with α-th jump degree $0^{(\alpha)}$// Proc. Am. Math. Soc. — 1992. — *114*, № 2. — С. 545–552.
19. *Downey R. G., Moses M. F.* On choice sets and strongly nontrivial self-embeddings of recursive linear orderings// Z. Math. Logik Grund. Math. — 1989. — *35*. — С. 237–246.
20. *Downey R., Remmel J. B.* Questions in Computable Algebra and Combinatorics. — Wellington, New Zealand: Victoria Univ. of Wellington, 1999.
21. *Feiner L. J.* Orderings and Boolean algebras not isomoprhic to recursive ones/ Thesis. — MIT, 1967.
22. *Feiner L. J.* The strong homogeneity conjecture// J. Symb. Logic. — 1970. — *35*. — С. 373–377.
23. *Fellner S.* Recursive and finite axiomatizability of linear orderings/ Ph.D. Thesis. — New Brunswick, New Jersey: Rutgers Univ., 1976.
24. *Fröhlich A., Shepherdson J.* Effective procedure in field theory// Philos. Trans. Ros. Soc. London, Ser. A. — 1959. — *248*. — С. 407–432.
25. *Frolov A. N.* Low linear orderings// J. Logic Comput. — 2012. — *22*, № 4. — С. 745–754.
26. *Frolov A., Zubkov M.* Increasing η-representable degrees// Math. Logic Q. — 2009. — *55*, № 6. — С. 633–636.
27. *Frolov A.* Scattered linear orderings with no computable presentation// Lobachevskii J. Math. — 2014. — *35*, № 1. — С. 19–22.
28. *Goncharov S. S.* Computability and computable models// в сб.: Mathematical Problems from Applied Logic. II. Logics for the XXIst Century (Gabbay D. M., Goncharov S. S., Zakharyaschev M., eds.). — New York: Springer, 2007. — С. 99–216.
29. *Jockusch C. G., Soare R. I.* Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings// Ann. Pure Appl. Logic. — 1991. — *52*. — С. 39–61.
30. *Kach A., Montalbán A.* Cuts of linear orders// Order. — 2011. *28*. — С. 593–600.
31. *Khisamiev N. G.* A criterion for constructivizability of a direct sum of cyclic p-groups// Izv. Akad. Nauk Kaz. SSR Ser. Fiz.-Mat. — 1981. — *98*, № 1. — С. 51–55.
32. *Montalbán A.* Notes on the jump of a structure// в сб.: Mathematical Theory and Computational Practice: 5th Conf. on Computability in Europe/ Lect. Notes Comp. Sci. — Berlin: Springer-Verlag, 2009. — *5635*. — С. 372–378.
33. *Knight J. F., Stob M.* Computable Boolean algebras// J. Symb. Logic. — 2000. — *65*, № 4. — С. 1605–1623.
34. *Rabin M. O.* Effective computability of winning strategies// в сб.: Contributions of the Theory of Games. Vol. 3. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1957. — С. 147–157.
35. *Rice H.* Recursive and recursively enumerable orders// Trans. Am. Math. Soc. — 1956. — *83*. — С. 277–300.
36. *Rosenstein J. G.* Linear orderings. — New York: Academic Press, 1982.
37. *Soare R. I.* Constructive order types on cuts// J. Symb. Logic. — 1969. — *34*. — С. 285–289.
38. *Thurber J.* Every low_2 Boolean algebra has a recursive copy// Proc. Am. Math. Soc. — 1995. — *123*, № 12. — С. 3859–3866.
39. *Vaught R. L.* Sentences true in all constructive models// J. Symb. Logic. — 1960. — *25*, № 1. — С. 39–58.
40. *Watnick R.* A generalization of Tennenbaum's theorem on effectively finite linear orderings// J. Symb. Logic. — 1984. — *49*, № 2. — С. 563–569.
41. *Young D. R.* Linear orderings under 1-1 reducibility// J. Symb. Logic. — 1966. — *31*. — С. 70–85.

А. Н. Фролов
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: a.frolov.kpfu@gmail.com