ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 157

Москва 2018

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 157

ТРУДЫ
СЕМИНАРА КАФЕДРЫ АЛГЕБРЫ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
КАЗАНСКОГО (ПРИВОЛЖСКОГО)
ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Москва 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 157 (2018). С. 3–7

УДК 510, 512

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО АЛГЕБРЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ В КАЗАНСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

© 2018 г. **А. Н. АБЫЗОВ, М. М. АРСЛАНОВ**

Казанская алгебраическая школа была основана выдающимся математиком, членом-корреспондентом АН СССР Н. Г. Чеботаревым; он же руководил основанной им в 1934 г. кафедрой алгебры вплоть до своей кончины в 1947 г. На 1930-е и 40-е годы приходится период расцвета алгебраических исследований в университете. В это время зарождалась Казанская алгебраическая школа, постепенно превратившая Казань в один из мировых алгебраических центров. Основную роль в формировании этой школы сыграл организованный Н. Г. Чеботаревым алгебраический семинар, участниками которого в те годы были, кроме Николая Григорьевича, его ученики И. Д. Адо, В. В. Морозов, Н. Н. Мейман, аспиранты Николая Григорьевича А. И. Гаврилов, В. Н. Цапырин, А. В. Дороднов. Именно на этом семинаре определились основные направления научно-исследовательской деятельности коллектива, часть из которых продолжает развиваться в Казанском университете и в настоящее время.

Прежде всего, крупные результаты во многих областях алгебры были получены самим Н. Г. Чеботаревым. В теории Галуа им была определена структура абсолютной группы Галуа полей классов и установлены ограничения, наложенные на простые делители числа классов. В теории групп Ли Н. Г. Чеботарев дал доказательство высказанного еще в 1894 г. Картаном предположения, что подгруппы простых групп максимального порядка регулярны, и нашел аналитический признак наличия меры у заданного представления группы Ли.

Целый ряд работ Н. Г. Чеботарева относится к проблеме сведения решения алгебраических уравнений высших степеней (не разрешимых в радикалах) к решению уравнений возможно более простого вида, известной под общим названием «проблема резольвент». В терминах суперпозиций проблема резольвент формулируется так: для произвольного натурального числа n найти такое наименьшее число k, что корень общего уравнения n-й степени как функция от его коэффициентов представляется в виде суперпозиции алгебраических функций от k переменных. Проблема резольвент в такой формулировке связана с тринадцатой проблемой Гильберта из его знаменитой серии, состоящей из двадцати трех проблем математики, решение которых, по словам самого Гильберта, «может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки». Н. Г. Чеботарев проблеме резольвент посвятил целую серию работ. За совокупность работ в этой области ему посмертно была присуждена Сталинская премия 1 степени (1948).

Н. Г. Чеботарев при работе над проблемой резольвент столкнулся с вопросом «об одевании» конечных групп группами Ли. Эту задачу он предложил своему ученику И. Д. Адо, который блестяще справился с поставленной задачей, получив точное конечномерное представление конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль (1935). Этот результат был настолько важен в доказательстве эквивалентности групп и алгебр Ли, что И. Д. Адо была присуждена степень доктора физ.-мат. наук при защите им кандидатской диссертации. В. В. Морозову Н. Г. Чеботарев предложил проблему классификации примитивных групп, поставленную еще Софусом Ли. В 1938 г. В. В. Морозов добивается замечательных успехов, получив общие и полные результаты для пространств произвольной размерности. В том же году он защищает кандидатскую диссертацию в Московском государственном университете. Занимаясь классификацией примитивных групп, он естественно приходит к проблеме классификации всех однородных примитивных пространств. Эта проблема была сведена им к проблеме классификации всех максимальных подгрупп

полупростых групп Ли. В. В. Морозов дал полную классификацию максимальных неполупростых подгрупп полупростых групп Ли и в 1943 г. защитил докторскую диссертацию. В дальнейшем, в 1951 г. Е. Б. Дынкин в своей докторской диссертации получил классификацию полупростых максимальных подгрупп полупростых групп Ли. Таким образом, усилиями В. В. Морозова и Е. Б. Дынкина была полностью решена поставленная еще в XIX веке С. Ли проблема классификации комплексных однородных примитивных многообразий. Основу метода В. В. Морозова составляет доказанная им замечательная теорема, утверждающая регулярность всякой максимальной неполупростой подалгебры полупростой алгебры Ли. Первоначальное доказательство этой теоремы в докторской диссертации было довольно громоздким. Позднее, в 1950 г., В. В. Морозов нашел изящное общее доказательство этой важной теоремы.

Ряд учеников Н. Г. Чеботарева изучали поставленную им проблему продолжаемости полиномов. Полином $f(x)$ называется M-продолжаемым, где M — некоторое множество комплексных чисел, если путем добавления к нему членов высших порядков можно получить полином, все корни которого будут принадлежать M. А. И. Гаврилов доказал, что всякий полином является M-продолжаемым, если M — окружность ненулевого радиуса, центр которого находится в начале координат. Другой аспирант Николая Григорьевича Н. Н. Мейман исследовал случай, когда M является множеством вещественных чисел. В этом случае проблема продолжаемости полинома сводится к проверке выполнения бесконечного числа неравенств. Н. Н. Мейману удалось разработать алгоритм, с помощью которого за конечное число шагов удается определить, выполняются ли эти условия. За эти исследования Н. Н. Мейману также была присуждена степень доктора наук, минуя кандидатскую.

В 1934 г. в процессе работы над книгой «Основы теории Галуа» Н. Г. Чеботарев обратился к одной из классических задач древности — задаче перечисления всех круговых луночек, квадрируемых при помощи циркуля и линейки. Три вида квадрируемых луночек были найдены древнегреческим геометром Гиппократом Хиосским (V в. до н. э). Д. Бернулли указал условие, которому должны удовлетворять квадрируемые луночки, и привел уравнение, которому удовлетворяет еще одна (четвертая) квадрируемая луночка. Задача перечисления всех квадрируемых луночек привлекала внимание многих крупнейших математиков разных времен. Существенное продвижение в решении этой проблемы было достигнуто самим Н. Г. Чеботаревым. Прежде всего, он свел задачу к случаю, когда отношение угловых мер α и β дуг, ограничивающих луночку, соизмеримо и равно m/n (т.е. для некоторого t, $\alpha = m/t$, $\beta = n/t$), где m, n — взаимно простые натуральные числа, и составил алгебраическое относительно $\cos t$ уравнение, которому должны удовлетворять квадрируемые луночки, а это означает, что уравнение должно решаться при помощи извлечения квадратных корней. В свою очередь, последнее означает, что группа Галуа неприводимых множителей этого уравнения должна иметь порядок, равный степени двойки. Н. Г. Чеботарев подробно исследовал случай, когда числа m и n — нечетные взаимно простые натуральные числа. Его ученик А. В. Дороднов позднее (1948) разобрал случай, когда одно из этих чисел четное. Таким образом, задача перечисления всех квадрируемых луночек получила окончательное решение. В конечном итоге выяснилось, что существуют всего пять видов квадрируемых луночек.

Работы Н. Г. Чеботарева и его учеников получили широкое признание во всем мире. В 1930-е годы Казань становится одним из мировых центров алгебраических исследований, возникает авторитетная Казанская алгебраическая школа, задающая тон мировым исследованиям по многим направлениям современной алгебры, а ее глава Н. Г. Чеботарев приглашается с обзорными докладами на крупнейшие математические форумы того времени: по теории алгебраических чисел — на первый Всесоюзный математический съезд (Харьков, 1930); по теории Галуа — на Всемирный математический конгресс (Цюрих, 1932) и на второй Всесоюзный математический съезд (Ленинград, 1934).

Смерть Н. Г. Чеботарева, последовавшая в 1947 г. после операции по удалению раковой опухоли, стала тяжелым ударом для математической общественности Казани, в частности, для Казанской алгебраической школы.

Теория групп и алгебр Ли развивалась в работах учеников В. В. Морозова. Исследованиями по теории групп Ли занимались два ученика В. В. Морозова — Я. И. Заботин и Л. Д. Эскин. В

1970-е годы задачами по теории групп Ли занимался ученик Л. Д. Эскина Е. Л. Столов. В 1950-е годы В. В. Морозов начинает привлекать своих учеников к исследованию алгебр Ли над полями положительной характеристики. Уже в 1952 г. в журнале «Доклады АН СССР» выходит работа А. В. Сульдина, в которой он доказывает существование точного конечномерного представления конечномерной алгебры Ли над полем положительной характеристики, т.е. переносит результат И. Д. Адо на случай модулярных алгебр Ли. Изучением алгебр Ли над полями положительной характеристики и их представлениями занимались ученики В. В. Морозова А. Х. Долотказин и Ю. Б. Ермолаев, а также ученики А. Х. Долотказина М. Ю. Целоусов, Г. О. Эльстинг и Н. А. Корешков. В завершающей стадии реализации проекта по классификации простых модулярных алгебр Ли принял участие ученик А. Х. Долотказина С. М. Скрябин, который получил глубокие результаты по исследованию алгебр Ли картановского типа и выполнил работу по классификации простых алгебр Ли положительной характеристики и представлений алгебр Ли. Эти результаты легли в основу его докторской диссертации, защищенной в 1999 г. в МГУ.

По инициативе В. В. Морозова его ученик И. И. Сахаев занялся проблематикой, относящейся к теории колец и модулей. В 1960-е годы И. И. Сахаев изучал кольца, над которыми каждый правый конечно порожденный плоский модуль является проективным. Такие кольца в настоящее время называются правыми S-кольцами. В 1960 г. Басс получил характеризацию совершенных справа колец, т.е. колец над которыми проективны все правые плоские модули. Проблемой характеризации S-колец занимались многие известные специалисты по теории колец и модулей, например, С. Эндо, В. Васкенселос, С. Йондруп. Изучая S-кольца, И. И. Сахаев разработал глубокую технику работы с регулярными в кольцах последовательностями. Используя эту технику, он получил полное описание правых S-колец. Эти результаты легли в основу его кандидатской диссертации, защищенной в 1969 г. в МГУ.

В 1974 г. Лазаром была выдвинута гипотеза о конечной порожденности каждого проективного модуля, у которого фактор-модуль по радикалу Джекобсона конечно порожден. Для коммутативных колец эта гипотеза была доказана самим Лазаром. Справедливость этой гипотезы для PI-колец была установлена С. Йондрупом. И. И. Сахаевым были получены необходимые и достаточные условия, при которых гипотеза Лазара верна. В 1984 г. была опубликована совместная работа В. Н. Герасимова и И. И. Сахаева, в которой был построен пример полулокального кольца, для которого гипотеза Лазара не выполняется. Эти и другие его результаты легли в основу докторской диссертации И. И. Сахаева, защищенной в 1994 г. в Санкт-Петербургском университете.

В настоящее время на кафедре развиваются четыре основных направления по алгебре. Опишем каждое из них. Алгебры Хопфа, их действия и кодействия на ассоциативных алгебрах изучают С. М. Скрябин и его ученик М. С. Еряшкин. В работах С. М. Скрябина был получен ряд фундаментальных результатов о проективности и плоскостности алгебры Хопфа как модуля над подалгебрами Хопфа. Разработана теория, обобщающая категорные эквивалентности, связанные с категориями квазикогерентных пучков на однородном пространстве, в духе некоммутативной алгебраической геометрии. Теорию операд и их приложения изучает С. Н. Тронин — ученик И. И. Сахаева. С. Н. Тронин под руководством И. И. Сахаева в 1989 г. защитил кандидатскую диссертацию «О ретракциях свободных алгебр и модулей», где в качестве приложения развитых общих методов изучения ретракций свободных алгебр было показано, что любой ретракт алгебры многочленов над совершенным полем, имеющий размерность Крулля, равную двум, изоморфен кольцу многочленов от двух переменных. Этот результат не улучшен до сих пор. В 1990-х гг. С. Н. Тронин получил ряд результатов в разных разделах алгебры. В частности, им была найдена конструкция категорий частных, являющаяся обобщением колец частных Герасимова и Малколмсона. С конца 1990-х гг. С. Н. Тронин занялся исследованиями в области теории операд. Предложенный им подход основывается на более общем определении самого понятия операды, причем обобщение состоит в том, что вместо действия симметрических групп (что используется в абсолютном большинстве других исследований) берется действие морфизмов особых категорий, названных автором вербальными. Одним из частных случаев является категория с морфизмами — всевозможными конечными подстановками (случай традиционных симметрических операд). При этом других примеров вербальных категорий очень много — по

крайней мере, континуум. При помощи этого подхода было показано, что любое многообразие универсальных алгебр с точностью до рациональной эквивалентности есть многообразие алгебр над некоторой (обобщенной) операдой. Вербальные категории позволяют дать некоторую классификацию всех возможных типов тождеств в универсальной алгебре, причем эта классификация не зависит от выбора сигнатуры. В частности, класс многообразий линейных алгебр над линейными симметрическими операдами с точностью до рациональной эквивалентности совпадает с классом многообразий, определяемых полилинейными тождествами.

Использование операд позволило также построить общую теорию (всех возможных) супералгебр и их представлений (в форме модулей над супералгебрами над операдами). По результатам этих исследований в 2011 г. С. Н. Трониным была защищена докторская диссертация на тему «Операдные и категорные методы в теории многообразий универсальных алгебр». В дальнейшем С. Н. Тронин, продолжая заниматься теорией операд, получил ряд результатов в алгебраической криптографии.

Основателем научного направления «Теория колец и модулей» на кафедре алгебры и математической логики является И. И. Сахаев. В настоящее время исследования по этому направлению проводят доцент А. Н. Абызов и его ученик Д. Т. Тапкин. Как было отмечено выше, И. И. Сахаевым был получен ряд фундаментальных результатов о плоских модулях. Также И. И. Сахаев инициировал изучение слабо регулярных модулей; по этой теме учениками И. И. Сахаева защищены две кандидатские диссертации. Одной из основных проблем, связанных со слабо регулярными модулями, является поставленная И. И. Сахаевым задача об описании колец, над которыми каждый модуль является слабо регулярным. Эта проблема решена А. Н. Абызовым. В настоящее время А. Н. Абызов со своими зарубежными коллегами проводит исследования по актуальным проблемам, связанным с модулями, близкими к проективным и инъективным. В совместных работах А. Н. Абызова и Д. Т. Тапкина изучены различные теоретико-кольцевые свойства колец формальных матриц и проблема изоморфизма для них.

Одной из классической проблем современной алгебры является гомологическая классификация колец, т.е. изучение связей между свойствами кольца и категорией модулей над ним. Аналогичной задачей в рамках теории полуколец и полумодулей совместно с зарубежными математиками занимается доцент кафедры алгебры и математической логики С. Н. Ильин.

Исследования по математической логике в Казанском университете развернулись с полной силой во второй половине 1970-х гг., когда из обособленной области она превратилась в специальность многих молодых математиков. Хотя еще в дореволюционном Казанском университете выполнялись работы, проблематика которых относилась к математической логике (П. С. Порецкий, Н. А. Васильев, Н. Н. Парфентьев; первый в России курс лекций по математической логике также читался в Казанском университете профессором П. С. Порецким), устойчивой традиции в этой области исследований в нашем университете не было. Можно говорить о косвенной преемственности при формировании школы математической логики в Казанском университете в 1970-е годы. Источником этой преемственности служил прежде всего профессор В. В. Морозов (1910–1975), разносторонний ученый, обладающий высоким уровнем математической культуры. Решающую роль в количественном росте и расширении тематики логико-математических исследований в Казанском университете сыграла многолетняя работа логического семинара под руководством М. М. Арсланова, ученика В. В. Морозова. Семинар воспитал целый ряд ученых, ныне работающих в различных областях математической логики в разных городах России и стран СНГ.

Проводимые в коллективе исследования в основном относятся к разработке теории вычислимых и конструктивизируемых структур. Работы в этой области сочетают идеи алгоритмической вычислимости, алгебры, теории моделей и дескриптивной теории множеств. Многие интересующие участников семинара задачи относятся к разработке алгоритмических свойств для специальных видов алгебр — групп, полей и т. д.

Основные научные интересы коллектива концентрированы вокруг проблем анализа структур, связанных с относительной сложностью вычислений значений функций натурального аргумента

и с натуральными значениями. Главной мерой такой сложности является сводимость по Тьюрингу: функция f вычисляется проще, чем функция g, если существует машина Тьюринга, которая может вычислить значения f при условии, что она имеет доступ к значениям g. Кроме того, нас интересуют также другие варианты сложности вычислений, которые определяются наложением разного рода ограничений на понятие «доступ к значениям g».

Основными направлениями этих исследований являются проблемы, связанные с разработкой структурных теорий возникающих моделей вычислений, а также оценка информационной насыщенности различных естественных классов функций. Полученные в этом направлении результаты позволили сформулировать критерии принадлежности конкретных совокупностей функций к тем или другим классам сложностей, а также выявить основные структурные различия между различными моделями вычислений. Методы, разработанные в этих исследованиях, также полезны при выяснении эффективного содержания стандартных математических теорем (в каких случаях возможно эффективизировать доказательства существования?) и при оценке сложности комбинаторных теорем в терминах теории доказательств. В последние годы в коллективе изучаются также вопросы конструктивной теории моделей и алгебры, связанные с проблемами определимости естественных классов множеств в алгебраических структурах, связанных с теорией вычислимости, а также вопросы алгоритмической разрешимости ограниченных фрагментов этих структур.

Центральным понятием классической теории вычислимости является понятие *степени*. Степенью множества A называется совокупность всех множеств B, эквивалентных относительно тьюринговой сводимости множеству A. Частично упорядоченная отношением, индуцированным относительной вычислимостью, совокупность степеней образует *структуру степеней*.

Среди главных целей классической теории вычислимости — понимание внутреннего строения структур степеней. Как правило, степенные структуры являются сложными алгебраическими структурами с неразрешимыми теориями первого порядка (в языке частичного порядка); фактически их теории первого порядка имеют одинаковую с арифметикой первого или даже второго порядка сложность, а неразрешимость их теории, как правило, появляется уже на $\exists\forall\exists$-уровне (в то время как их $\exists$-теория, как правило, разрешима).

Эти проблемы, а также вопросы, относящиеся к исследованию вычислимых копий алгебраических структур, всегда являлись важнейшей частью теории вычислимости алгебраических структур. В публикуемых в этом сборнике статьях описываются решения целого ряда проблем такого рода, которые не поддавались решению в течение многих лет. Сборник также содержит результаты по некоторым другим проблемам, решения которых пока не удается найти, но в их исследовании в последнее годы получен значительный прогресс.

А. Н. Абызов
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: Adel.Abyzov@kpfu.ru

М. М. Арсланов
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: Marat.Arslanov@kpfu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 157 (2018). С. 8–41

УДК 510.6, 510.52, 510.53, 510.57

ТЬЮРИНГОВА ВЫЧИСЛИМОСТЬ: СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ

© 2018 г. **М. М. АРСЛАНОВ, М. М. ЯМАЛЕЕВ**

Аннотация. В работе приведен обзор результатов последних лет, связанных с разработкой структурной теории n-вычислимо перечислимых тьюринговых степеней при $n > 1$, а также обсуждаются возможные подходы к решению некоторых открытых проблем.

Ключевые слова: вычислимо-перечислимое множество, тьюрингова степень, иерархия Ершова, определимость.

AMS Subject Classification: 03C57, 03D25, 03D28, 03D45, 03D55

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Теория тьюринговых степеней неразрешимости состоит из двух частей: локальная теория, которая изучает степени, расположенные по тьюринговой сводимости ниже $\mathbf{0}'$, степени проблемы остановки машины Тьюринга и глобальная теория, под которой подразумевают исследование общей структуры степеней неразрешимости.

Локальная теория степеней представляет наибольший интерес и намного более глубоко изучена. Прежде всего это связано с тем, что она содержит всю совокупность вычислимо перечислимых (для краткости в.п.) степеней, которая является сердцевиной теории вычислимости. Более того, множества, степени которых расположены ниже $\mathbf{0}'$, обладают характеристическим свойством

$$A \leqslant_T \emptyset'$$

тогда и только тогда, когда существует такая вычислимая функция $f(s,x)$, что $A(x) = \lim_s f(s,x)$. Здесь $A(x)$ — характеристическая функция множества A:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Таким образом, условие $A \leqslant_T \emptyset'$ эквивалентно тому, что множество A может быть вычислимо аппроксимируемо в следующем смысле: существует такое вычислимое множество равномерно вычислимых последовательностей $\{f(s,x) \mid s \in \omega\}$, состоящих из нулей и единиц, что для каждого x предел последовательности $f(0,x), f(1,x), \ldots$ существует и равен значению $A(x)$.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках субсидий, выделенных Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проекты № 1.1515.2017/4.6 (М. М. Арсланов) и № 1.12878.2018/12.1 (М. М. Ямалеев).

В 1965 г. Х. Путнам (см. [72]) определил n-вычислимо перечислимые множества как обобщения вычислимо перечислимых множеств.

Определение 1.1. Пусть $n > 0$. Множество $A \subseteq \omega$ называется *n-вычислимо перечислимым* (n-в.п.), если существует такая вычислимая последовательность множеств $\{A_s\}_{s\in\omega}$, что

$$A_0(x) = 0, \quad A(x) = \lim_s A_s(x), \quad \Big|\big\{s \in \omega \mid A_s(x) \neq A_{s+1}(x)\big\}\Big| \leqslant n$$

для всех $x \in \omega$. Таким образом, в.п. множества являются 1-в.п. множествами.

Такие множества были впервые подробно исследованы (и обобщены на α-в.п. множества для вычислимых ординалов α) Ю. Л. Ершовым (см. [4–6]). Возникающая иерархия множеств полностью покрывает Δ^0_2-множества и называется *иерархией Ершова*.

Тьюринговы степени, содержащие множества из разных уровней иерархии Ершова, интенсивно исследовались начиная с 1970-х гг. Выяснилось, что они (частично упорядоченные отношением тьюринговой сводимости) имеют богатую внутреннюю структуру, во многом, но, как позднее выяснилось, не во всем, повторяя свойства своего важнейшего представителя — класса степеней, содержащих в.п. множества.

В настоящей работе представлены результаты, полученные за последние 10 лет участниками семинара по теории вычислимости в Институте математики и механики Казанского федерального университета. В первой части дан обзор результатов, связанных с разработкой структурной теории тьюринговых степеней неразрешимости. Во второй части изложены результаты, относящиеся к теоретико-модельным свойствам структур тьюринговых степеней. Особое внимание уделено к вопросам определимости важнейших степенных классов в более широких степенных структурах, которые будут рассмотрены в третьей части. Ряд проблем из этого цикла все еще ждут своего решения, несмотря на многочисленные усилия коллективов исследователей из разных стран.

Мы предполагаем знакомство читателя с математической логикой и теорией вычислимости в объеме стандартных университетских курсов; в частности, предполагается знакомство с первыми четырьмя главами книги Р. Соара «Вычислимо перечислимые множества и степени», перевод которой с английского оригинала был осуществлен Казанским математическим обществом в 2000 г. Мы также придерживаемся обозначений, принятых в этой книге. В частности, множество всех натуральных чисел обозначается через ω; так же обозначается и первый бесконечный кардинал, причем по контексту будет понятно, что именно имеется в виду в каждом случае. Для множества $A \subseteq \omega$ его дополнение, равное $\omega - A$, будем обозначать через $\bar{A}$. Мощность множества A обозначается через $|A|$. Стандартные нумерации всех в.п. и частично вычислимых функций обозначаются соответственно через $\{W_x\}_{x\in\omega}$ и $\{\Phi_x\}_{x\in\omega}$.

Двухместная функция $\langle x, y\rangle$, определенная как

$$\langle x, y\rangle := \frac{(x + y)^2 + 3x + y}{2}, \quad x, y \in \omega,$$

и осуществляющая биективное отображение ω^2 на ω, называется *канторовской нумерующей функцией*. n-Местная функция $\langle x_1, \dots x_n\rangle$ при $n > 2$ определяется так:

$$\langle x_1, \dots x_n\rangle = \Big\langle\big\langle \dots \langle x_1, x_2\rangle, x_3\big\rangle, \dots, x_n BBB\rangle.$$

Если функция f в точке x определена, то пишем $f(x)\downarrow$, в противном случае пишем $f(x)\uparrow$. Через $A[x]$ обозначается конечное множество $A \cap \{0, 1, \dots, x - 1\}$.

2. Полурешетка n-в.п. степеней: структурная теория

2.1. Сравнение элементарных теорий. Первые результаты о степенях n-в.п. множеств (*n-в.п. степенях*) были получены А. Лахланом (конец 1960-х годов, не опубликовано), показавшим, что для любой n-в.п. степени $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$, $n > 1$, существует в.п. степень $\boldsymbol{a}$ с $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}$, а также С. Купером (см. [27]), доказавшим существование *собственной d-в.п. степени*, т.е. тьюринговой степени, содержащей d-в.п., но не в.п. множества (где «d-в.п.» — альтернативное обозначение для «2-в.п.»).

Ясно, что d-в.п. степени и, в общем, n-в.п. тьюринговы степени образуют промежуточную структуру между в.п. и Δ^0_2-степенями. Естественно сравнить n-в.п. степени со степенями этих структурами, тем более они разделяют некоторые свойства степеней каждой из них.

Вышеупомянутый результат А. Лахлана и существование минимальной Δ^0_2-степени (см. [75]) показывают, что структуры n-в.п. степеней и Δ^0_2-степеней не элементарно эквивалентны. Между в.п. и n-в.п. степенями при $n > 1$ первое элементарное различие было найдено М. М. Арслановым (см. [1,2]), показавшим, что каждая ненулевая n-в.п. степень $\boldsymbol{d}$ *дополняема до* $\mathbf{0}'$ некоторой d-в.п. степенью, т.е. существует такая d-в.п. степень $\boldsymbol{e} < \mathbf{0}'$, что $\boldsymbol{d} \cup \boldsymbol{e} = \mathbf{0}'$, в то время как Йейтс и Купер (1973, не опубликовано; см. работу Д. Миллера [70]) показали, что это не так в в.п. степенях. Отсюда следует, что элементарные теории $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}_n$ различаются на Σ^0_3-уровне. Последующие элементарные различия между этими структурами были найдены Р. Доуни (см. [37]), показавшим, что теорема А. Лахлана (см. [53]) о невложимости ромба в в.п. степени с сохранением наибольшего и наименьшего элементов не имеет места в d-в.п. степенях, и С. Купером, Л. Харрингтоном, А. Лахланом, С. Леммпом и Р. Соаром (см. [31, 32]), которые установили неплотность упорядочения n-в.п. степеней для всех $n > 1$, в противовес теореме Сакса (см. [77]) о плотности в.п. степеней. Отсюда следует, что элементарные теории полурешеток $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}_n$, $n > 1$, различаются уже на Σ^0_2-уровне.

Так как любое конечное частично упорядоченное множество вложимо в $\mathcal{R}$ (и, следовательно, и в $\mathcal{D}_n$ для любого $n \geqslant 1$) с сохранением отношения $\leqslant_T$, элементарные теории $\mathcal{D}_n$ и $\mathcal{D}_m$ при $n \neq m$, $n, m \leqslant \omega$, совпадают на Σ^0_1-уровне. Известно (см., например, [8]), что существуют ω-в.п. минимальные степени. Так как n-в.п. степени при $n \geqslant 1$ минимальными быть не могут, элементарные теории $\mathcal{D}_n$, $n \geqslant 1$, и $\mathcal{D}_\omega$ различаются на Σ^0_2-уровне.

Элементарные различия между структурами n-в.п. степеней при различных $n > 1$ долго не удавалось найти. Р. Доуни (см. [37]) даже высказал гипотезу о том, что структуры m-в.п. и n-в.п. степеней при различных $m, n > 1$ должны быть элементарно эквивалентны.

Эта гипотеза было опровергнута в работе [19] М. М. Арсланова, И. Ш. Калимуллина и С. Лемпа, где удалось построить Σ^0_2-предложение, которое различает 2-в.п. и 3-в.п. степени. В этой работе приведен также первый пример определимой в полурешетке $\mathcal{D}_2$ бесконечной совокупности в.п. степеней.

Теорема 2.1 (см. [19]). *Существуют такие d-в.п. множество D и в.п. множество A, что $\emptyset <_T A <_T D \oplus A$ и для любого d-в.п. множества U, если $U \leqslant_T D \oplus A$, то либо $A \leqslant_T U$, либо $U \leqslant_T A$. (В этом случае говорят, что степени множеств A и $D \oplus A$ образуют* восьмерку.)

Следствие 2.2. *Существуют такие d-в.п. степени $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, что для любой d-в.п. степени $\boldsymbol{u}$, если $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{d}$, то либо $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{u}$, либо $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{a}$.*

Если d-в.п. степени $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{d}$ обладают этим свойством, то степень $\boldsymbol{a}$ необходимо должна быть вычислимо перечислимой. Действительно, пусть d-в.п. множества D и A таковы, что $\emptyset <_T A <_T D \oplus A$ и для любого d-в.п. множества U, и если $U \leqslant_T D \oplus A$, то либо $A \leqslant_T U$, либо $U \leqslant_T A$.

Обозначим через $X \leqslant_T D$ такое в.п. множество, что d-в.п. множество $D \oplus A$ в.п. относительно X (существование такого множества следует из упомянутого выше неопубликованного результата А. Лахлана и будет более подробно рассмотрено в п. 4.4). Если $X \not\equiv_T A$, то имеет место одна из следующих возможностей.

Случай 1. $A <_T X \leqslant_T D \oplus A$. Пусть $\boldsymbol{x} = \deg(X)$ и $\boldsymbol{a} = \deg(A)$. По теореме Сакса (см. [76]) о разложении $\boldsymbol{x}$ разложима в в.п. степенях, минуя верхний конус для $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \cup \boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{a} \not\leqslant \boldsymbol{x}_i, \quad i = 0, 1.$$

Ясно, что по крайней мере одна из в.п. степеней $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ несравнима с $\boldsymbol{a}$, противоречие.

Случай 2. $\emptyset <_T X <_T A$. Этот случай невозможен в силу следующей теоремы.

Теорема 2.3 (см. [19]). *Пусть D и A — d-в.п. множества, а X — такое в.п. множество, что $A <_T D$, $X \leqslant_T D$, $A \not\leqslant_T X$, и A и D — в.п. относительно X. Тогда существует такое d-в.п. множество U, что $U \leqslant_T D$ и $U \mid_T A$.*

Так как случаи 1 и 2 невозможны, то $X \equiv_T A$ и, следовательно, A обладает в.п. степенью, относительно которой $\deg(D \oplus A)$ является в.п.

Замечание 2.4. В условиях теоремы 2.1 для степени $\deg(D \oplus A)$ существует единственная в.п. степень $\deg(A)$ с таким свойством. А именно, если для некоторого в.п. множества U, $\emptyset <_T U <_T D \oplus A$, имеет место свойство

$$\Big(\forall\ d\text{-в.п. множества } V\Big)\ \Big[V \leqslant_T D \oplus A \to U \leqslant_T V \vee V \leqslant_T U\Big],$$

то $U \equiv_T A$.

Доказательство. Предположим, что это неверно. Тогда либо $A <_T U$, либо $U <_T A$. В обоих случаях получаем противоречие с теоремой Сакса о разложении (с избеганием верхнего конуса степеней). □

Теорема 2.5 (см. [19])**.** *Не существует таких* 2*-в.п. степеней* $\boldsymbol{f} > \boldsymbol{e} > \boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$*, что для любой* 2*-в.п. степени* $\boldsymbol{u}$ *выполнено следующее*:

(i) *если* $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{f}$*, то либо* $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{e}$*, либо* $\boldsymbol{e} \leqslant \boldsymbol{d} \cup \boldsymbol{u}$*, и*
(ii) *если* $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{e}$*, то либо* $\boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{u}$*, либо* $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{d}$*.*

Доказательство. Предположим, что такие степени $\boldsymbol{f} > \boldsymbol{e} > \boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$ существуют. Согласно наблюдению после следствия 2.2 степень $\boldsymbol{d}$ является в.п. Пусть $\boldsymbol{f}' \leqslant \boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{e}' \leqslant \boldsymbol{e}$ — такие в.п. степени, что $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{e}$ в.п. относительно $\boldsymbol{f}'$ и $\boldsymbol{e}'$ соответственно. Рассмотрим степень $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \cup \boldsymbol{e}' \cup \boldsymbol{f}'$. Ясно, что $\boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{f}$.

Заметим, что $\boldsymbol{x}$ является вычислимо перечислимой. Согласно пункту (i) имеем либо $\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{e}$, либо $\boldsymbol{e} \leqslant \boldsymbol{d} \cup \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Если имеет место первый случай, то тогда разложение $\boldsymbol{x}$ с избеганием верхнего конуса $\boldsymbol{d}$ дает в.п. степень, не сравнимую с $\boldsymbol{d}$, что приводит к противоречию. Таким образом $\boldsymbol{e} < \boldsymbol{x}$; но тогда $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{x}$ перечислимы относительно $\boldsymbol{d}$. Применяя теорему 2.3, получаем 2-в.п. степень, которая лежит между $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{f}$ и не сравнима с $\boldsymbol{e}$, что опять дает противоречие. □

2.2. Обобщение на более высокие уровни. Теперь возникает естественный вопрос о существовании таких 3-в.п. множеств F, E и D, что $\emptyset <_T D <_T D \oplus E <_T D \oplus E \oplus F$, и для любого 3-в.п. множества U, если $U \leqslant_T D \oplus E \oplus F$, то либо $D \oplus E \leqslant_T U$, либо $U \leqslant_T D \oplus E$, и если $U \leqslant_T D \oplus E$, то либо $D \leqslant_T U$, либо $U \leqslant_T D$. (В этом случае говорим, что степени множеств D, $D \oplus E$ и $D \oplus E \oplus F$ образуют *двойную восьмерку.*)

Положительный ответ на этот вопрос позволяет построить Σ^0_2-предложение, которое отличает полурешетки 2-в.п. и 3-в.п. степеней, так как из приведенной выше теоремы 2.5 следует, что в полурешетке 2-в.п. степеней такое свойство не имеет места.

Из теоремы 2.10 (и предложения 2.9) следует, что ответ на этот вопрос положителен. Приведем сначала необходимое определение.

Определение 2.6. Пусть 3-в.п. степени $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{d}$ таковы, что $\boldsymbol{f} > \boldsymbol{e} > \boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$, и для любой 3-в.п. степени $\boldsymbol{u}$ выполнено следующее:

(i) если $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{f}$, то либо $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{e}$, либо $\boldsymbol{e} \leqslant \boldsymbol{d} \cup \boldsymbol{u}$ и
(ii) если $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{e}$, то либо $\boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{u}$, либо $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{d}$.

В этом случае говорим, что степени $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ образуют *слабую двойную восьмерку.*

Нам понадобится также следующий результат, полученный М. М. Арслановым совместно с американскими математиками Т. Сламаном и Г. Лафортом.

Теорема 2.7 (см. [20])**.** *Пусть* C *—* ω*-в.п. множество и* $A \oplus W^A$ *— множество, в.п. относительно некоторого в.п. множества* A*. Если* $C \leqslant_T A \oplus W^A$*, то существует такое* d*-в.п. множество* D*, что* $C \leqslant_T D \leqslant_T A \oplus W^A$*.*

Следствие 2.8 (см. [20])**.** *Любая* ω*-в.п. степень, которая одновременно является и* 2*-CEA степенью, является* d*-в.п. степенью.*

Теперь докажем следующее утверждение.

Предложение 2.9. *Любая слабая двойная восьмерка, состоящая соответственно из* 3*-в.п.,* 2*-в.п. и в.п. степеней* $\boldsymbol{f} > \boldsymbol{e} > \boldsymbol{d}$*, на самом деле является двойной восьмеркой.*

Доказательство. Пусть слабую двойную восьмерку образуют 3-в.п., 2-в.п. и в.п. степени $\boldsymbol{f} > \boldsymbol{e} > \boldsymbol{d}$. Предположим, что существует некоторая 3-в.п. степень $\boldsymbol{f}_1 < \boldsymbol{f}$, которая несравнима с $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{d}$.

Степень $\boldsymbol{f}_1$ не может быть 2-в.п. степенью, иначе степень $\boldsymbol{f}_1 \cup \boldsymbol{d}$ также будет 2-в.п. степенью. Так как, очевидно, $\boldsymbol{f}_1 \cup \boldsymbol{d} > \boldsymbol{e}$, то степени $\boldsymbol{f}_1 \cup \boldsymbol{d} > \boldsymbol{e} > \boldsymbol{d}$ образуют слабую двойную восьмерку, чего быть не может ввиду теоремы 2.5.

Таким образом, степень $\boldsymbol{f}_1$ является собственно 3-в.п. степенью. Но тогда степени лахлановских множеств (которые будут введены в п. 4.4) для этой степени обязательно меньше $\boldsymbol{e}$ (в противном случае получаем некоторую 2-в.п. степень, не сравнимую с $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{d}$, чего быть не может). Обозначим через $\boldsymbol{e}_1$ степень некоторого лахлановского множества для 3-в.п. множества из $\boldsymbol{f}_1$. Она не может быть $\geqslant \boldsymbol{d}$ (так как тогда и $\boldsymbol{f}_1 \geqslant \boldsymbol{d}$), поэтому $\boldsymbol{e}_1 < \boldsymbol{d}$.

Рассмотрим $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}_1 \cup \boldsymbol{d}$. Степень $\boldsymbol{v}$ вычислимо перечислима относительно $\boldsymbol{d}$ и, следовательно, является 2-в.п. степенью (см. следствие 2.8 теоремы 2.7), чего быть не может (так как $\boldsymbol{f}_1 \cup \boldsymbol{d} > \boldsymbol{e} > \boldsymbol{d}$ образуют слабую двойную восьмерку). Таким образом, 3-в.п. степеней, не сравнимых с $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{d}$ одновременно, не существует. □

Теорема 2.10 (см. [19])**.** *Существуют образующие слабую двойную восьмерку* 3*-в.п. степень* $\boldsymbol{f}$*,* d*-в.п. степень* $\boldsymbol{e}$ *и в.п. степень* $\boldsymbol{d}$*.*

Следствие 2.11. $\mathcal{D}_2 \not\equiv \mathcal{D}_3$ *на* Σ^0_2*-уровне.*

Доказательство. Следующее Σ^0_2-предложение φ истинно в $\mathcal{D}_3$ и ложно в $\mathcal{D}_2$:

$$\varphi \doteq (\exists \boldsymbol{d} > \boldsymbol{0})(\exists \boldsymbol{e} > \boldsymbol{d})(\exists \boldsymbol{f} > \boldsymbol{e})\Big\{(\forall \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{f})[\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{e} \ \vee \ \boldsymbol{e} \leqslant \boldsymbol{u}] \ \&\ (\forall \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{e})[\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{d} \ \vee \ \boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{u}]\}. \qquad \square$$

Этот результат опровергает предположение Р. Доуни (см. [37]) о попарной элементарной эквивалентности этих структур.

2.3. Разложение на несравнимые степени. Дальнейшее изложение активно использует возможные способы разложения n-в.п. степеней на две несравнимые степени, поэтому начнем изложение с рассмотрения этих вопросов.

Определение 2.12. *Разложением* степени $\boldsymbol{d}$ называются такие степени $\boldsymbol{d}_0$ и $\boldsymbol{d}_1$, что $\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1 < \boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_0 \cup \boldsymbol{d}_1$. Говорят, что это — разложение над степенью $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{d}$, если $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1$. Наконец, разложение $\boldsymbol{d}$ на $\boldsymbol{d}_0$ и $\boldsymbol{d}_1$ является разложением, которое минует верхний конус степеней $\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{b} \not\leqslant \boldsymbol{d}_i$, $i \leqslant 1$.

В полурешетке в.п. степеней первые результаты о разложимости принадлежат Г. Саксу и Р. Робинсону. Г. Сакс (см. [76]) установил, что каждая в.п. степень $\boldsymbol{a} > 0$ разложима на две в.п. степени, минуя верхний конус степеней $\boldsymbol{b}$, для любой Δ^0_2-степени $\boldsymbol{b} > 0$. Р. Робинсон (см. [73]) доказал, что каждая в.п. степень $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}$ разложима на две низкие в.п. степени над любой низкой в.п. степенью. Позднее А. Лахлан (см. [58]) получил следующий результат, ныне известный как «монстр-теорема Лахлана» из-за исключительной технической трудности его доказательства (в этой работе А. Лахлан впервые применил метод $0'''$-приоритета): существуют такие в.п. степени $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, что $\boldsymbol{b}$ неразложима в в.п. степенях над $\boldsymbol{a}$. Как установил Л. Харрингтон (см. [46]), здесь за степень $\boldsymbol{b}$ можно принять степень $\boldsymbol{0}'$.

Ниже в теореме 2.13 мы увидим, что разложение произвольной d-в.п. степени $\boldsymbol{b}$ в d-в.п. степенях возможно над любой в.п. степенью $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$.

Пусть $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}$ — произвольная собственная n-в.п. степень, для некоторого $n > 1$, а $\boldsymbol{b}$ — такая в.п. степень, что $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$. Так как $\boldsymbol{a}$ в.п. относительно некоторой $(n-1)$-в.п. степени $\boldsymbol{a}_0 < \boldsymbol{a}$, то согласно теореме Сакса о разложении, релятивизованной относительно $\boldsymbol{a}_0 \cup \boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$ разложима на две Δ^0_2-степени, расположенные над $\boldsymbol{b}$. Пункты (b) и (c) теоремы 2.13 утверждают, что такое разложение возможно над низкими d-в.п. степенями и в d-в.п. степенях.

Теорема 2.13.

(a) *a) Каждая d-в.п. степень* $\boldsymbol{a}$ *разложима в d-в.п. степенях над произвольной в.п. степенью* $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$ (С. Купер [30] для случая $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, и С. Купер и А. Ли [33] в общем случае).

(b) *Произвольная в.п. степень* $\boldsymbol{a}$ *разложима в d-в.п. степенях над любой низкой d-в.п. степенью* $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$ (М. М. Арсланов, С. Купер и А. Ли [17, 18]). *Более того,*

(c) *Произвольная d-в.п. степень* $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$ *разложима в d-в.п. степенях над произвольной низкой d-в.п. степенью* $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{d}$ (А. Ли [66]), *но*

(d) *Существует такая d-в.п. степень* $\boldsymbol{d}$, *что* $\boldsymbol{0}'$ *не разложима даже в* ω*-в.п. степенях над* $\boldsymbol{d}$ (С. Купер, Л. Харрингтон, А. Лахлан, С. Лемпп и Р. Соар [31, 32]).

Ранее С. Купер [29] доказал, что свойства плотности и разложения могут быть соединены в 2-низких n-в.п. степенях. Известно (см. Р. Шор и Т. Сламан [81]), что 2-низкие в.п. степени также разложимы в $\mathcal{R}$ над любой в.п. степенью, расположенной ниже заданной. Эта и некоторые другие структурные свойства, общие для частичных порядков 2-низких в.п. и 2-низких n-в.п. степеней при $n > 1$, позволили Р. Доуни и М. Стобу (см. [40]) предположить, что упорядочение 2-низких d-в.п. степеней должно быть элементарно эквивалентно упорядочению 2-низких в.п. степеней. Позднее это предположение было опровергнуто М. М. Ямалеевым (см. [11]).

Для 3-низких n-в.п. степеней С. Купер и А. Ли установили следующий факт.

Теорема 2.14 (см. [34])**.** *Для любого* $n > 1$ *существуют такие* 3*-низкая* n*-в.п. степень* $\boldsymbol{a}$ *и в.п. степень* $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$, *что при любом разложении* $\boldsymbol{a}$ *на* n*-в.п. степени* $\boldsymbol{a}_0$ *и* $\boldsymbol{a}_1$ *хотя бы одна из степеней* $\boldsymbol{a}_0$ *или* $\boldsymbol{a}_1$ *будет располагаться над* $\boldsymbol{b}$. (*Таким образом,* $\boldsymbol{a}$ *нельзя разложить, минуя верхний конус степеней над* $\boldsymbol{b}$.)

Так как в $\mathcal{R}$ такое разложение 3-низких в.п. всегда возможно разложение с избеганием произвольного верхнего конуса степеней, то отсюда следует, что эти два упорядочения не являются элементарно эквивалентными.

Теорема 2.15 (см. [82])**.** *Пусть* $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *таковы, что* $\boldsymbol{d}$ *является* n*-в.п. степенью для некоторого* $n \geqslant 1$, *а* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *— такие* Δ^0_2*-степени, что* $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a} \not\geqslant \boldsymbol{b}$. *Тогда* $\boldsymbol{d}$ *разложима в* Δ^0_2*-степенях над* $\boldsymbol{a}$, *минуя верхний конус для* $\boldsymbol{b}$.

Ясно, что последний результат нельзя усилить, рассматривая разложения на d-в.п. степени (в [34] доказано, что этого нельзя сделать даже при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$). М. М. Ямалеев доказал (см. [10]), что такое разложение возможно при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, если $\boldsymbol{d}$ является собственно d-в.п. степенью, а $\boldsymbol{b}$ — такая невычислимая Δ^0_2-степень, что между $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{b}$ нет в.п. степеней.

Из теоремы 2.13 следует, что теорему 2.15 нельзя усилить, рассматривая разложения $\boldsymbol{d}$ в d-в.п. степенях; этого нельзя сделать даже при $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}'$. Ниже мы приведем теорему 4.1 М. М. Ямалеева (см. [10]), в которой доказано, что такое разложение $\boldsymbol{d}$ возможно, если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, степень $\boldsymbol{d}$ является собственной d-в.п. степенью, а $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{d}$ — такая невычислимая Δ^0_2-степень, что между $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{b}$ не существуют в.п. степени.

3. Теоретико-модельные свойства

3.1. Ограниченные теории. Мы видели, что накоплено довольно много результатов, относящихся к разработке структурной теории (тьюринговых) степеней неразрешимости, содержащих множества из различных уровней иерархии Ершова. Следующим естественным шагом должно было бы быть систематическое рассмотрение теоретико-модельных свойств этих структур, но в этой области сделано пока еще очень немного. К нескольким крупным достижениям, полученным в этом направлении за эти годы, относятся, кроме изложенных выше результатов М. М. Арсланова, Р. Доуни и др. о не элементарной эквивалентности полурешетки в.п. степеней и степеней, принадлежащих уровню n, $n > 1$, иерархии Ершова, следующие:

(i) совокупность n-в.п. степеней в сигнатуре $\{\leqslant\}$ не образуют Σ_1-подструктуру совокупности m-в.п. степеней ни для каких n, m, $1 \leqslant n < m$ (М. Цей, Р. Шор и Т. Сламан [24]);

(ii) для любого $m \geqslant 1$ частично упорядоченные множества m-низких в.п. и m-низких d-в.п. степеней не элементарно эквивалентны (М. М. Ямалеев [11]; этот результат при $m = 1$ независимо получен также М. Х. Файзрахмановым [9]).

Несмотря на многочисленные усилия, ответить на целый ряд естественно возникающих вопросов пока не удается. К ним прежде всего относятся:

(i) (не)разрешимость ограниченных теорий n-в.п. ($n \geqslant 1$) степеней;
(ii) проблема определимости (с параметрами или без параметров) в.п. степеней в структурах n-в.п. степеней при $n > 1$ (в более общей постановке проблема определимости m-в.п. степеней в структурах n-в.п. степеней при $1 \leqslant m < n$).

Не исследована также проблема определимости (с параметрами или без параметров) в Δ^0_2-степенях множества всех n-в.п. степеней для некоторого (всех) $n > 1$. Представляет интерес нахождение естественных множеств n-в.п. степеней, определимых с параметрами в Δ^0_2-степенях. Не известны также ответы на следующие вопросы: существуют ли определимые в $\mathcal{D}_n$, $n \geqslant 1$, индивидуальные n-в.п. степени, отличные от $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$? Пусть $\mathcal{D}_n$, $n \geqslant 1$, фиксировано. Существуют ли такие множества m-в.п. степеней ($1 \leqslant m \leqslant n$) C и n-в.п. степени $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, что $|C \cap [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = 1$?

- Остается открытой проблема элементарной эквивалентности полурешеток $\mathcal{D}_n$ и $\mathcal{D}_m$ при $m \neq n$ и $n, m \geqslant 3$.

Мы предполагаем, что теории этих полурешеток попарно различны, и отличающее их предложение может быть получено подходящим обобщением приведенного выше предложения (использованного при доказательстве различия полурешеток $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_3$)

$$(\exists \boldsymbol{d} > \mathbf{0})(\exists \boldsymbol{e} > \boldsymbol{d})(\exists \boldsymbol{f} > \boldsymbol{e})\Big\{(\forall \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{f})\big[\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{e} \ \vee \ \boldsymbol{e} \leqslant \boldsymbol{u} \cup \boldsymbol{d}\big] \ \&\ (\forall \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{e})\big[\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{d} \ \vee \ \boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{u}\big]\Big\}$$

на соответствующие уровни иерархии. Но доказательство этого утверждения, если идти по пути простого обобщения, приведенного в работе М. М. Арсланова, И. Ш. Калимуллина и С. Лемппа [19] доказательства, может оказаться технически весьма сложным.

Мы можем попробовать усилить это предположение, потребовав, чтобы входящий в предыдущую формулу φ квантор существования из обеих структур $\mathcal{D}_n$ и $\mathcal{D}_{n+1}$ выбирал одни и те же элементы: если $\mathcal{D}_n \models \forall \bar{x} \psi(\bar{a}, \bar{x})$ для некоторых $\bar{a}$ из $\mathcal{D}_n$, то и $\mathcal{D}_{n+1} \models \forall \bar{x} \psi(\bar{a}, \bar{x})$.

Сейчас увидим, что в этой более сильной постановке гипотеза неверна.

Определение 3.1. Подструктура $\mathcal{L}_1$ структуры $\mathcal{L}_2$ является для некоторого $k \geqslant 1$ её Σ_k-подструктурой, если для любой Σ_k-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ и для любых $a_1, \ldots, a_r \in \mathcal{L}_1$,

$$\mathcal{L}_1 \models \varphi(a_1, \ldots, a_r) \iff \mathcal{L}_2 \models \varphi(a_1, \ldots, a_r).$$

В этом случае пишем $\mathcal{L}_1 \preceq_{\Sigma_k} \mathcal{L}_2$.

В 1983 г. Т. Сламан установил, что в.п. степени не образуют Σ_1-подструктуру Δ^0_2-степеней. Именно, он доказал, что предложение

$$\varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \exists x(\mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a} \ \&\ \boldsymbol{c} \not\leqslant \boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{x}),$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — в.п. степени, истинно в Δ^0_2-степенях и ложно в в.п. степенях.

Так как в.п. степени являются и n-в.п. степенями для любого $n > 1$, отсюда немедленно следует, что $\mathcal{D}_n \not\preceq_{\Sigma_1} \mathcal{D}(\leqslant \mathbf{0}')$.

Далее, Ю. Янг и Л. Ю (см. [89]) доказали следующую теорему, из которой следует, что в.п. степени не образуют Σ_1-подструктуру d-в.п. степеней.

Теорема 3.2. *Существуют такие в.п. степени $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{e}$ (параметры), что*

(i) *существует такая 2-в.п. степень $\boldsymbol{d} < \boldsymbol{a}$, что $\boldsymbol{d} \not\leqslant \boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{c} \not\leqslant \boldsymbol{d} \cup \boldsymbol{b}$;*
(ii) *для любой в.п. степени $\boldsymbol{w} < \boldsymbol{a}$ выполнено либо $\boldsymbol{w} \leqslant \boldsymbol{e}$, либо $\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{w} \cup \boldsymbol{b}$.*

Наконец, $\mathcal{D}_n$ не является Σ_1-подструктурой$\mathcal{D}_{n+1}$ и при произвольном $n > 1$. Это было недавно установлено в работе М. Цея, Р. Шора и Т. Сламана [24].

Теорема 3.3 (см. [24])**.** *Для любого $n \geqslant 1$ существуют такие в.п. степени $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, n-в.п. степень $\boldsymbol{a}$ и $4(n+1)$-в.п. степень $\boldsymbol{d}$, что*

(1) $\boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{q} \not\leqslant \boldsymbol{d} \cup \boldsymbol{p}$ *и* $\boldsymbol{d} \not\leqslant \boldsymbol{g}$;
(2) *для любой* n*-в.п. степени* $\boldsymbol{w} \leqslant \boldsymbol{a}$ *либо* $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{w} \cup \boldsymbol{p}$, *либо* $\boldsymbol{w} \leqslant \boldsymbol{g}$.

Из этой теоремы следует, что предложение

$$\varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \exists \boldsymbol{w}\Big(\boldsymbol{w} \leqslant \boldsymbol{a} \ \&\ \boldsymbol{q} \not\leqslant \boldsymbol{w} \cup \boldsymbol{p} \ \&\ \boldsymbol{w} \not\leqslant \boldsymbol{g}\Big),$$

где $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ — в.п. степени, $\boldsymbol{a}$ — n-в.п. степень, истинно в $(n+1)$-в.п. степенях и ложно в n-в.п. степенях. Поэтому $\mathcal{D}_n \not\preceq_{\Sigma_1} \mathcal{D}_{n+1}$ для любого $n \geqslant 1$. Снова, так как n-в.п. степени являются m-в.п. степенями для любого $m > n$, имеем $\mathcal{D}_n \not\preceq_{\Sigma_1} \mathcal{D}_m$ при всех $n < m$.

По теореме 2.10 существуют такие в.п. степень $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$ и d-в.п. степень $\boldsymbol{e} > \boldsymbol{d}$, что каждая 3-в.п. степень $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{e}$ сравнима с $\boldsymbol{d}$. Можно ли это утверждение усилить следующим образом: существуют такие в.п. степень $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$ и d-в.п. степень $\boldsymbol{e} > \boldsymbol{d}$, что каждая n-в.п. степень $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{e}$ при любом $n < \omega$ сравнима с $\boldsymbol{d}$?

Если ответ на этот вопрос положителен, то мы получаем весьма интересное свойство степеней, принадлежащих конечным уровням иерархии Ершова. С другой стороны, в случае отрицательного ответа на этот вопрос мы получаем следующее: пусть $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{e} > \boldsymbol{d}$ — в.п. и d-в.п. степени соответственно, а $n \geqslant 3$ — наибольшее натуральное число, причем каждая n-в.п. степень $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{e}$ сравнима с $\boldsymbol{d}$ и существует не сравнимая с $\boldsymbol{d}$ $(n+1)$-в.п. степень $\boldsymbol{v} \leqslant \boldsymbol{e}$. Рассмотрим следующее Σ_1-предложение:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \equiv \exists \boldsymbol{u}\Big(\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{z} \ \&\ \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{z} \ \&\ \boldsymbol{u} \not\leqslant \boldsymbol{y} \ \&\ \boldsymbol{y} \not\leqslant \boldsymbol{u}\Big).$$

Если $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{e}$ — степени, а n — натуральное число, существование которых предполагает отрицательный ответ на предыдущий вопрос, то имеем $\mathcal{D}_{n+1} \models \varphi(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e})$ и $\mathcal{D}_n \models \neg\varphi(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e})$. Таким образом, в этом случае $\varphi(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e})$ является еще одним предложением, демонстрирующим, что $\mathcal{D}_n$ не является Σ_1-подструктурой $\mathcal{D}_{n+1}$, причем с меньшим числом параметров.

Видим, что ответ на поставленный вопрос в любом направлении приводит к весьма интересным следствиям.

Предположим, что справедлива следующая гипотеза.

Гипотеза 3.4. Для каждого $n \geqslant 1$ существуют такие n-в.п. степень $\boldsymbol{d}$ и $(n+1)$-в.п. степень $\boldsymbol{e}$, что $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{d} < \boldsymbol{e}$ и для каждой $(n+1)$-в.п. степени $\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{e}$ либо $\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{d}$, либо $\boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{c}$, но существует такая $(n+2)$-в.п. степень $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{e}$, что $\boldsymbol{u}$ не сравнима с $\boldsymbol{d}$.

Более того, возможно эта гипотеза справедлива в следующей более сильной форме (см. предыдущее обсуждение этой части гипотезы).

Для любого $n \geqslant 2$ существуют такие в.п. степень $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$ и d-в.п. степень $\boldsymbol{e} > \boldsymbol{d}$, что каждая n-в.п. степень $\boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{e}$ сравнима с $\boldsymbol{d}$. (При $n = 2$ это теорема 2.1.)

Все до сих пор известные предложения, сформулированные на языке частичного порядка, истинные в n-в.п. степенях и ложные в $(n+1)$-в.п. степенях для некоторого $n \geqslant 1$, принадлежат уровню $\forall\exists$ или более высоким уровням арифметической иерархии. Эти и некоторые другие соображения позволяют высказать следующую интересную гипотезу.

Гипотеза 3.5. Для всех $n \geqslant 1$ и для всех $\exists\forall$-предложений φ имеет место

$$\mathcal{D}_n \models \varphi \ \Rightarrow\ \mathcal{D}_{n+1} \models \varphi$$

(т.е. $\exists\forall$-теория n-в.п. степеней является подтеорией $\exists\forall$-теории $(n+1)$-в.п. степеней).

При переходе от структуры $\mathcal{R}(\leqslant, \cup)$ к структуре $\mathcal{D}_2(\leqslant)$, Σ_1-формулы становятся Σ_2-формулами, что говорит о естественности этой гипотезы.

Следующая гипотеза является усилением предыдущей.

Гипотеза 3.6. Для всех $n \geqslant 1$, $\mathcal{D}_n$ является Σ_1-подструктурой $\mathcal{D}_{n+1}$.

Действительно, предположим, что $\mathcal{D}_n$ является Σ_1-подструктурой $\mathcal{D}_{n+1}$, но при этом существует Σ_2-формула

$$\varphi = \exists \overline{x} \forall \overline{y} \psi(\overline{x}, \overline{y}),$$

истинная в $\mathcal{D}_n$, но ложная в $\mathcal{D}_{n+1}$. Тогда

$$\neg\varphi = \forall\overline{x}\exists\overline{y}\psi(\overline{x},\overline{y})$$

истинна в $\boldsymbol{D}_{n+1}$. Тогда в качестве $\overline{x}$ возьмем кортеж n-в.п. степеней $\overline{a}$, благодаря которому достигается истинность φ в $\mathcal{D}_n$, и рассмотрим Σ_1-формулу

$$\theta = \exists\overline{y}\psi(\overline{a},\overline{y}).$$

Получаем, что θ истинна $\mathcal{D}_{n+1}$ на n-в.п. параметрах, и при этом $\mathcal{D}_n$ является Σ_1-подструктурой $\boldsymbol{D}_{n+1}$. Тогда θ истинна в $\mathcal{D}_n$. Но это значит, что на степенях $\overline{a}$ формула $\exists\overline{y}\psi(\overline{a},\overline{y})$ истинна и в $\boldsymbol{D}_{n+1}$; противоречие.

3.2. Проблема разрешимости ограниченных фрагментов теории. Неразрешимость (а также неаксиоматизируемость) элементарной теории $\mathcal{D}$ была установлена А. Лахланом (см. [56]). Для теории $\mathcal{D}(\leqslant \mathbf{0}')$ это сделали, независимо, Р. Эпштейн (см. [42]) и М. Лерман (см. [62]). Л. Харрингтон и С. Шелах (см. [47]) доказали, что теория $\mathcal{R}$ также неразрешима. Наконец, совсем недавно М. Цей, Р. Шор и Т. Сламан (см. [24]) установили неразрешимость и элементарных теорий $\mathcal{D}_n$ для каждого $n > 1$.

Простое рассуждение методом приоритета с конечными рассуждениями позволяет вложить произвольное конечное частично упорядоченное множество в в.п. степени с сохранением порядка. Отсюда следует разрешимость $\forall$-теорий всех этих структур в сигнатуре $\leqslant$.

Неразрешимость $\forall\exists\forall$-теории для $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}(\leqslant \mathbf{0}')$ и $\mathcal{R}$ в сигнатуре $\leqslant$ была установлена Шмерлом для теорий $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}(\leqslant \mathbf{0}')$ (1988) и С. Лемппом, А. Ниисом и Т. Сламаном для теории $\mathcal{R}$ (см. [61]).

$\forall\exists$-Теории $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}(\leqslant \mathbf{0}')$ оказались разрешимыми. Это доказали соответственно Р. Шор (см. [79]) и М. Лерман и Р. Шор (см. [64]).

3.3. Свойства вложимости конечных решеток. По произвольной конечной решетке $\mathcal{L}$ легко построить Σ_2^0-предложение. которое истинно в $\mathcal{D}_n$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}$ вложима в $\mathcal{D}_n$. Например, вложимость ромба в структуру d-в.п. степеней эквивалентна истинности следующего Σ_2^0-предложения:

$$\exists a,b,c,d\,\Big\{(a<b, c<d)\ \&\ \forall x(x\leqslant b, c\to x\leqslant a)\ \&\ (x\geqslant b, c\to x\geqslant d)\Big\}.$$

Однако проблема описания конечных решеток, вложимых в $\mathcal{D}_n$, $n \geqslant 1$, кажется, является еще более трудной задачей. Существует множество публикаций, посвященных этой проблеме (библиографию см., например, в статье М. Лермана [63]), но окончательный результат вряд ли стоит ожидать в ближайшем будущем.

Известно также (М. Лерман [62]), что проверка истинности в $\mathcal{D}_n$, $n \geqslant 1$, произвольного Σ_2^0-предложения эквивалентна проблеме распознавания возможности по произвольному набору пар конечных решеток $\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, где $\mathcal{Q}_i$ является расширением $\mathcal{P}$ как частично упорядоченного множества, и по данному вложению $\mathcal{P}$ в $\mathcal{D}_n$, определить, существует ли вложение некоторого $\mathcal{Q}_i$ в $\mathcal{D}_n$, расширяющее вложение $\mathcal{P}$. В некоторых частных случаях эта проблема решается положительно (например, Т. Сламан и Р. Соар [83, 84] для случая $m = 1$, $n = 1$), но до получения общего решения еще далеко. Приведем пример, который иллюстрирует трудность проблемы для $\mathcal{D}_2$ даже при $m = 1$.

Пусть $\mathcal{P} = \{a, b, c \mid a < b < c\}$, $\mathcal{Q} = \{a, b, c, d \mid a < b < c,\ a < d < c,\ b \not\leqslant d,\ d \not\leqslant b\}$. Ясно, что $\mathcal{Q}$ расширяет $\mathcal{P}$, и пусть $f : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{D}_2$ — такое вложение $\mathcal{P}$ в $\mathcal{D}_2$, что $f(a) = \mathbf{0}$. В теореме 2.1 мы видели, что существуют такие в.п. степень $\boldsymbol{b} > \mathbf{0}$ и d-в.п. степень $\boldsymbol{c} > \boldsymbol{b}$, что для любой d-в.п. степени $\boldsymbol{d}$, если $\boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{c}$, то либо $\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{d}$, либо $\boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{b}$. Как видим, расширяющее $\mathcal{P}$ вложение $\mathcal{Q}$ в $\mathcal{D}_2$ не всегда существует.

Какие конечные решетки могут быть вложены в n-в.п. степенные структуры, $n \geqslant 1$? Р. Доуни предположил (см. [37]), что все конечные решетки вложимы в d-в.п. степени с сохранением 0, 1.

Положительное решение проблемы вложения конечных решеток может помочь получить доказательство разрешимости двухквантворной теории n-в.п. степеней.

Проблема расширения вложений. Пусть даны два конечных частично упорядоченных множества $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{Q}$. Верно ли, что любое вложение $\mathcal{P}$ в n-в.п. степени можно расширить до вложения $\mathcal{Q}$?

- Проблема имеет положительное решение при $|\mathcal{P}| = 2$ и $|\mathcal{Q}| < 5$.
- Существуют примеры $|\mathcal{P}| = 2$ и $|\mathcal{Q}| = 5$ с отрицательным решением.
- Существует пример $|\mathcal{P}| = 3$ и $|\mathcal{Q}| = 4$ с отрицательным решением.

Для нескольких естественных вопросов о строении полурешеток $\mathcal{D}_n$ при $n > 1$ и их алгоритмической сложности ответы получить не удается, несмотря на многочисленные усилия. Наиболее крупными из них являются следующие.

A. Проблема описания вложимых конечных ч.у. множеств в степенные структуры $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}_n$, $n > 1$ (с сохранением соответствующих отношений). Наибольший интерес представляет нахождение «эффективного» описания конечных решеток, вложимых в эти структуры с сохранением решеточных операций. По-видимому, решение этой проблемы является одним из основных условий при доказательстве разрешимости $\forall\exists$-теорий этих степенных структур, еще одной крупной открытой проблемы теории вычислимости. Дело в том, что по любой конечной решетке $\mathcal{L}$ можно построить $\exists\forall$-предложение φ, которое истинно в $\mathcal{D}_n$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}$ в нее вложимо. Например, вложимость в $\mathcal{D}_n$ четырехэлементной решетки $\{0, a, b, 1,\ a \not\leqslant b,\ b \not\leqslant a,\ a \vee b = 1,\ a \wedge b = 0\}$ с сохранением наименьшего и наибольшего элементов эквивалентно истинности в $\mathcal{D}_n$ следующего Σ^0_2-предложения:

$$\exists a, b, c, d\ \forall x\ \Big\{(a < b, c < d)\ \&\ (x \leqslant b, c \to x \leqslant a)\ \&\ (x \geqslant b, c \to x \geqslant d)\Big\}.$$

Как отмечено в [59], если бы удалось получить такое описание вложимых в $\mathcal{R}$ решеток, то с помощью техники, содержашейся в работах Р. Соара и Т. Сламана (см. [84]) и К. Амбос-Шпииса, К. Джокуша, Р. Шора и Р. Соара (см. [12]), мы смогли бы получить и доказательство разрешимости $\forall\exists$-теории $\mathcal{R}$.

B. Проблема распознавания возможности расширения вложений: существует ли алгоритм, который по данным конечным частично упорядоченным множествам $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{Q}_0, \ldots, \mathcal{Q}_n$, $n \geqslant 0$, позволяет определить, любое ли вложение $f : \mathcal{P} \to \mathcal{D}_n$ может быть продолжено до вложения $g : \mathcal{Q}_i \to \mathcal{D}_n$ для некоторого $i \leqslant n$. (Ясно, что здесь i зависит от выбора вложения $\mathcal{P}$ в $\mathcal{D}_n$.)

М. Лерман (см. [62]) заметил, что эта проблема имеет положительное решение для $\mathcal{R}$ (и в $\mathcal{D}_n$, $n \geqslant 1$) в том и только в том случае, если $\forall\exists$-теория $\mathcal{R}$ (соответственно, $\mathcal{D}_n$) разрешима.

Более того, практически все крупные результаты о строении полурешеток $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}_n$, $n > 1$, могут рассматриваться как теоремы о вложениях или расширениях вложений некоторых решеток. Например, результат приведенной выше теоремы 2.1 о существовании восьмерки может быть сформулирован следующим образом: любое вложение трехэлементного ч.у. множества $\mathcal{L} = \{0 < a < b\}$ в $\mathcal{R}$ может быть расширено до вложения ч.у. множества

$$\mathcal{L}' = \{0, a, b, d \mid 0 < a < b,\ 0 < d < b,\ a \not\leqslant d,\ d \not\leqslant a\},$$

но существует такое вложение $\mathcal{L}$ в $\mathcal{D}_2$, что его нельзя расширить до вложения $\mathcal{L}'$.

На сегодняшний день накоплено большое количество результатов, направленных на решение этих проблем для полурешетки $\mathcal{R}$. Из них наибольший интерес представляют, кроме уже упомянутых, работы К. Амбос-Шпииса и М. Лермана [13,14], в которых найдены условия, достаточные для невозможности вложения (в виде Π_2-предложения) и условия, достаточные для возможности вложения (в виде более сложного Π_3-предложения) конечных решеток в $\mathcal{R}$, а также работа Р. Соара и Т. Сламана [84], где дается полное решение проблемы расширения вложения в $\mathcal{R}$ для случая, когда расширяющая совокупность множеств состоит из одного множества.

Достаточное условие о невозможности вложения Амбос-Шпииса—Лермана выглядит следующим образом: $\mathcal{L}$ удовлетворяет этому условию, если она содержит критическую тройку Сламана $a, b, c \in L$ и два других таких несравнимых элемента $p, q \in L$, что $a \leqslant p \wedge q \leqslant a \vee c \leqslant q$. (Элементы $a, b, c \in L$ образуют *критическую тройку Сламана*, если они попарно несравнимы и $a \vee c = b \vee c$, $a \wedge b \leqslant c$.)

Отсюда, в частности, следует, что восьмиэлементная решетка $\mathcal{S}_8$, которая состоит из 0 и 1, а также таких попарно несравнимых элементов a, b, c и p, q, что

$$a \vee b < p, \quad a \vee b < q, \quad p \wedge q = a \vee b = a \vee c = b \vee c, \quad p \vee q = 1, \quad a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c = 0,$$

не вложима в $\mathcal{R}$ (результат, ранее полученный Р. Соаром и М. Сламаном в [84]). Здесь a, b и c образуют критическую тройку Сламана, а p и q — те два дополнительных элемента, о которых говорится в теореме Амбос-Шпииса—Лермана.

Соответственно, теорема (точнее, критерий) Соара—Сламана (см. [84]) выглядит следующим образом: пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — такие конечные ч.у. множества с 0 и 1, что $\mathcal{Q}$ расширяет $\mathcal{P}$. Если $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ удовлетворяют хотя бы одному из следующих двух условий (1) или (2), то существует такое вложение $\mathcal{P}$ в $\mathcal{R}$, что оно не может быть расширено до вложения $\mathcal{Q}$ в $\mathcal{R}$:

$$\big(\exists x, y \in \mathcal{Q}\big)\ \Big[x \not\geqslant y \ \&\ \mathfrak{B}(\mathfrak{A}(y)) \subseteq \mathfrak{B}\big(\mathfrak{A}(\mathfrak{B}(x))\big)\Big], \tag{1}$$

$$\big(\exists x \in \mathcal{Q} - \mathcal{P}\big)\ \Big[\mathfrak{T}(x) \neq \emptyset \ \&\ \mathfrak{B}\big(\mathfrak{A}(\mathfrak{T}(x) \cup \mathfrak{B}(x))\big) \not\subseteq \mathfrak{B}(x)\Big], \tag{2}$$

где для $S \subseteq \mathcal{Q}$,

$$\mathfrak{A}(S) = \big\{a \in \mathcal{P} \mid (\forall x \in S)(a \geqslant x)\big\},$$
$$\mathfrak{B}(S) = \big\{b \in \mathcal{P} \mid (\forall x \in S)(x \geqslant b)\big\},$$
$$\mathfrak{T}(S) = \big\{z \in \mathcal{Q} - \mathcal{P} \mid x > z \ \&\ \mathfrak{B}(x) \not\subseteq \mathfrak{B}(\mathfrak{A}(z))\big\}.$$

В противном случае любое вложение $\mathcal{P}$ в $\mathcal{R}$ может быть расширено до вложения $\mathcal{Q}$ в $\mathcal{R}$.

Для полурешеток $\mathcal{D}_n, n \geqslant 1$, эти проблемы фактически не изучались (если не считать структурные теоремы, которые, как уже говорилось, могут быть рассмотрены как результаты о вложениях и расширениях вложений). Существует все еще не доказанная и не опровергнутая гипотеза Р. Доуни (см. [37]) о вложимости любой конечной решетки в полурешетку степеней $\mathcal{D}_2$ с сохранением 0 и 1. Из следующей теоремы, независимо доказанной также Г. Ву (частное сообщение), следует, что это верно по крайней мере для решетки $\mathcal{S}_8$.

Теорема 3.7. *Решетка S_8 вложима в $\mathcal{D}_2$ с сохранением 0 и 1.*

Основным ингредиентом при доказательстве достаточности условий Р. Соара и Т. Сламана (см. [84]) о существовании нерасширяемых вложений является следующая теорема.

Теорема 3.8. *Существуют такие несравнимые в.п. степени $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, что для всех в.п. $\boldsymbol{z} < \boldsymbol{a}$, либо $\boldsymbol{z} < \boldsymbol{b}$, либо $\boldsymbol{z} \cup \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}'$.*

Для переноса условий Р. Соара и Т. Сламана о существовании нерасширяемых вложений на случай n-в.п. степеней при $n > 1$ существенно, чтобы в предыдущей теореме $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ оставались в.п. степенями, а $\boldsymbol{z}$ пробегал n-в.п. степени.

В полурешетках $\mathcal{D}_n$, $n > 1$, эта теорема Соара—Сламана справедлива в более сильной форме. А именно, в [67] А. Ли и С. Йи построили d-в.п. степени, которые образуют т.н. «двустороннюю» строгую минимальную пару в n-в.п. степенях, $n > 1$, т.е. такие d-в.п. степени $\boldsymbol{a}_0$ и $\boldsymbol{a}_1$, что для каждой n-в.п. степени $\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}$, если $\boldsymbol{z} < \boldsymbol{a}_i$, то $\boldsymbol{z} \cup \boldsymbol{a}_{1-i} = \boldsymbol{0}'$. Отсюда легко следует, что степень $\boldsymbol{a}_0$ можно сделать в.п. степенью, но заменив условие «двусторонности» строгой минимальной пары на ее «односторонность».

Теорема 3.9 (см. [67])**.** *Существуют такие в. п. степень $\boldsymbol{a}$ и d-в.п. степень $\boldsymbol{b}$, что $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ и для каждой ненулевой n-в.п. степени $\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}$, либо $\boldsymbol{z} \leqslant \boldsymbol{b}$, либо $\boldsymbol{z} \cup \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}'$.*

Нами установлено, что при таких $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ существуют и двусторонние минимальные пары.

Теорема 3.10. *Существуют такие несравнимые в.п. степень $\boldsymbol{a}_0$ и d-в.п. степень $\boldsymbol{a}_1$, что $\boldsymbol{a}_0 \cap \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$, и для каждой n-в.п. степени $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, если $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}_i$, то $\boldsymbol{x} \cup \boldsymbol{a}_{1-i} \geqslant \boldsymbol{a}_i$.*

В [23] авторы оставили открытым вопрос о существовании в полурешетке $\mathcal{R}$ строгих двусторонних минимальных пар в.п. степеней. К нему мы можем добавить следующий вопрос.

Вопрос 3.11. Существуют ли в.п. степени, которые образуют двустороннюю строгую минимальную пару в n-в.п. степенях при каждом (некотором) $n > 1$? Другими словами, можно ли в предыдущей теореме d-в.п. степень $\boldsymbol{a}_1$ сделать вычислимо перечислимой?

Принципиальное значение имеет изучение одноточечных расширений вложений конечных ч.у. множеств. Доказательство следующей теоремы получается при рассмотрении вышеприведенного критерия Соара—Сламана применительно к таким расширениям.

Теорема 3.12 (см. [3])**.** . *Пусть $\mathcal{P}$ — конечная решетка и $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{y\}$ — ее одноточечное расширение в виде частичного порядка. Тогда любое вложение $\mathcal{P}$ в виде решетки в $\mathcal{R}$ может быть расширено до вложения $\mathcal{Q}$ в виде частичного порядка тогда и только тогда, когда для каждого $x \in \mathcal{P}$*

$$y \not< x \to \exists z \in \mathcal{P}\ \Big(z \not\leqslant x\ \&\ \forall v \in \mathcal{P}\ \big(v > y \to v \geqslant z\big)\Big),$$

$$x \not< y \to \exists z, u \in \mathcal{P}\ \Big(z \leqslant x\ \&\ z \not\leqslant u\ \&\ \forall v \in \mathcal{P}\ \big(v < y \to v \leqslant u\big)\Big).$$

Замечание 3.13. Это также верно, если $\mathcal{P}$ является ч.у. множеством с 0 и 1 (необязательно решеткой).

Так как существуют решетка $\mathcal{P}$ и такое ее расширение $\mathcal{Q}$, что любое вложение $\mathcal{P}$ в $\mathcal{R}$ может быть расширено до вложения $\mathcal{Q}$ (как частичный порядок), но существуют такие вложения $\mathcal{P}$ в $\mathcal{D}_2$, что $\mathcal{Q}$ не может ее расширить (минимальным примером являются $\mathcal{P} = \{a, b \mid a < b\}$, $\mathcal{Q} = \{a, b, c \mid a < c < b\}$), то условия предыдущей теоремы не являются достаточными для существования одноточечных расширений в $\mathcal{D}_2$.

С другой стороны, у нас нет примеров, которые бы подтверждали, что эти условия не являются и необходимыми в $\mathcal{D}_2$. Более того, все известные примеры подтверждают справедливость следующей гипотезы.

Гипотеза 3.14. Пусть $\mathcal{P}$ конечная решетка и $\mathcal{Q}$ ее одноточечное расширение. Если любое вложение $\mathcal{P}$ в $\mathcal{D}_2$ может быть расширено до вложения $\mathcal{Q}$, тогда это верно и для вложений $\mathcal{P}$ в $\mathcal{R}$.

Замечание 3.15. Выше мы видели, что существует в.п. степень $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{0}'$, для которой $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} < \boldsymbol{0}'$ для любой в.п. степени $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{0}'$ (Купер и Йейтс, неопубликовано), но $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}'$ для некоторой d-в.п. степени $\boldsymbol{d} < \boldsymbol{0}'$ (М. М. Арсланов [1,2]). Отсюда следует, что предыдущая гипотеза не имеет места, если $\mathcal{Q}$ является полурешеточным расширением $\mathcal{P}$ (с сохранением операции $\vee$).

3.4. Изоморфные копии. Некоторые теоретико-модельные свойства полурешеток $\mathcal{D}_n$, $n \geqslant 1$, так же, как и решеток n-в.п. множеств $\mathcal{C}_n$, $n \geqslant 1$ ($\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ обозначает решетку всех в.п. множеств) можно вывести из соответствующих результатов для полурешеток $\mathcal{R}$ и $\mathcal{C}$, которые значительно более тщательно изучены. Например, так же, как и в вычислимо перечислимом случае, следующий результат может быть получен с помощью известных теорем А. Лахлана (см. [54]) о гипергиперпростых множествах (см., например, Х. Роджерс [74, теорема 12-XIX]) и булевых алгебрах.

Теорема 3.16. *Для любого $n \geqslant 1$ решетка $\mathcal{C}_n$ всех n-в.п. множеств не имеет вычислимого представления, т.е. она не изоморфна никакому вычислимому частичному порядку.*

Доказательство. При $n = 1$ результат непосредственно следует из теоремы Лахлана (см. [54]) о том, что любая Σ^0_3-булева алгебра изоморфна булевой алгебре в.п. надмножеств некоторого гипергиперпростого множества и теоремы Фейнера (см. [45]) о существовании Σ^0_3-булевой алгебры, которая не имеет вычислимого представления.

Теперь пусть $n \geqslant 2$ и A — произвольное гипергиперпростое множество. Если $A \subseteq B$, B является n-в.п. множеством и разность $B - A$ бесконечна, то она ко-в.п. (т.е. имеет в.п. дополнение). Действительно, $B - A$ должна быть $2k$-в.п. множеством для некоторого четного $2k$ (в противном случае $\omega - A$ не иммунна) и

$$B - A = (A_1 - A_2) \cup (A_3 - A_4) \cup \ldots (A_{2k-1} - A_{2k})$$

для некоторых в.п. множеств $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_{2k}$. Теорема Лахлана о гипергипериммунной разности в.п. множеств гласит, что если в.п. множества X и Y таковы, что $X \supset Y$ и $X - Y$ гипергипериммунна, то существует такое вычислимое множество R, что $X - Y \subseteq R \subseteq X$. Отсюда следует, что существуют такие вычислимые множества $R_1, R_2, \ldots R_k$, что

$$A_{2i-1} - A_{2i} \subseteq R_i \subseteq A_{2i-1}, \quad A \cup \{\omega - B\} = \overline{B - A} = \overline{R_1} \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} \left(A_{2i} \cap \{\overline{\cup_{m>2i} R_m}\} \right) \right\}.$$

Теперь из упомянутой теоремы Лахлана о гипергиперпростых множествах следует, что множество B также вычислимо перечислимы. Поэтому булевы алгебры $\mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{C}_n(A)$ соответственно в.п. и n-в.п. надмножеств (по модулю конечных разностей) гипергиперпростого множества A совпадают. □

При изучении степеней изоморфных копий $\mathcal{D}_n$ (для краткости: степеней представлений $\mathcal{D}_n$) весьма полезной является следующий результат, принадлежащий Р. Шору (см. [80]; он доказан им для в.п. степеней и в несколько общей формулировке).

Теорема 3.17. *Пусть A — произвольное Π^0_2-множество. Существует такая частичная решетка (т.е. верхняя полурешетка, в которой наибольшая верхняя грань существует не для всех пар элементов) $\mathcal{L}$, что*

(1) *$\mathcal{L}$ изоморфно вкладывается в любую полурешетку $\mathcal{D}_n$, $n \geqslant 1$;*
(2) *если $\mathcal{L}$ изоморфно вкладывается в какую-либо полурешетку $\mathcal{S}$, то множество A вычислимо относительно (тьюрингова) скачка любого представления $\mathcal{S}$.*

В частности, A вычислимо относительно скачка любого представления каждой полурешетки $\mathcal{D}_n$, $n \geqslant 1$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.18. *Ни одна из полурешеток $\mathcal{D}_n$, $n \geqslant 1$, не имеет вычислимого представления. Более того, степень любого представления каждой из них больше или равна $\mathbf{0}'$.*

Доказательство следующей теоремы может быть получено с помощью доказательства аналогичного результата, полученного А. Ниисом, Р. Шором и Т. Сламаном для в.п. степеней (см. [71]).

Теорема 3.19. *Пусть $n > 1$. Для любой n-в.п. степени $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$ полурешетка $\mathcal{D}_n(\leqslant \boldsymbol{a})$ не имеет вычислимого представления.*

Набросок доказательства. Приведенное в [71] доказательство того, что полурешетки в.п. степеней, расположенных под заданной в.п. степени $\boldsymbol{c} > \mathbf{0}$ не имеют вычислимых представлений, адаптируется на случай n-в.п. степеней, расположенных под заданной n-в.п. степенью для произвольного $n > 1$: операции $\cup$ и $\cap$, примененные к в.п. степеням, дают снова в.п. степени, если даже они определены на всей совокупности степеней $\leqslant \mathbf{0}'$ (тем более это так для совокупностей n-в.п. степеней для любого $n > 1$). Далее, примененная в доказательстве Нииса—Шора—Сламана техника статьи Шора [80], где получены результаты о вложениях так называемых TPP решеток в в.п. степени, позволившие доказать отсутствие вычислимых представлений для структуры в.п. степеней, позволяет это сделать и для структур n-в.п. степеней, расположенных под заданной n-в.п. степенью $> \mathbf{0}$. □

Спектры степеней представлений как полурешеток $\mathcal{D}_n$, $n \geqslant 1$, так и их фрагментов $\mathcal{D}_n(\leqslant \boldsymbol{a})$ совершенно не исследованы.

Следующая теорема приведена в работе [65] М. Лермана, Р. Шора и Р. Соара для случая $n = 1$, но приведенное там доказательство проходит и в общем случае.

Теорема 3.20. *Для любого $n \geqslant 1$ полурешетка $\mathcal{D}_n$ не счетно категорична.*

Доказательство. М. Лерман, Р. Шор и Р. Соар (см. [65])определили счетное множество попарно не изоморфных конечных частичных решеток (наибольшая нижняя грань существует не для всех пар степеней), порожденных тремя элементами, каждая из которых вкладывается в $\mathcal{R}$ и, следовательно, в $\mathcal{D}_n$ для каждого $n > 1$.

Каждая такая частичная решетка производит определенный 3-тип, реализуемый в $\mathcal{D}_n$. Теперь утверждение следует из теоремы Рыль-Нардзевского (см. [7, с. 194]) о счетной категоричности. □

4. Определимость классов степеней

4.1. Определимость m-в.п. степеней в полурешетках n-в.п. степеней при $1 \leqslant m < n$. Рассмотрим более подробно проблемы определимости в полурешетках n-в.п. степеней. Одним из возможных способов доказательства определимости m-в.п. степеней в n-в.п. степенных структурах при $m < n$ является следующий:

(a) находится некоторое бесконечное определимое в $\mathcal{D}_n$ множество $\mathcal{S}$ m-в.п. степеней и
(b) доказывается, что степени из $\mathcal{S}$ порождают под операциями $\cup$ и $\cap$ (там, где она определена) $\mathcal{D}_m$.

Теорема 4.1 (см. [10])**.** *Пусть тьюринговы степени $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{b}$ таковы, что $\boldsymbol{d}$ является собственной d-в.п. степенью, а $\boldsymbol{b}$ — такая не в.п. Δ^0_2-степень, что $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{d}$ и интервал $(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b})$ не содержит в.п. степени. Тогда $\boldsymbol{d}$ разложима в d-в.п. степенях, минуя верхний конус степеней для $\boldsymbol{b}$.*

Следствие 4.2. *Если d-в.п. степени $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{b}$ таковы, что $\boldsymbol{b}$ не в.п., то существует такая d-в.п. степень $\boldsymbol{a}$, что $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{d}$, и $\boldsymbol{a}$ разложима в d-в.п. степенях, минуя верхний конус степеней для $\boldsymbol{b}$.*

Доказательство. Если существует такая в.п. степень $\boldsymbol{a}$, что $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{d}$, то требуемое разложение $\boldsymbol{a}$ существует по теореме Сакса о разложении. Если же такой степени $\boldsymbol{a}$ не существует, то $\boldsymbol{d}$ сама так разложима по теореме 4.1. □

Пусть

$$\varphi(\boldsymbol{x}) \doteq (\exists \boldsymbol{b} > \boldsymbol{x})(\forall \boldsymbol{d})\Big[\boldsymbol{x} < \boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{b} \to (\forall \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1)\big[\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_0 \cup \boldsymbol{d}_1 \to \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}_0 \ \vee \ \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}_1\big]\Big].$$

Из вышеизложенного следует, что $\mathcal{D}_2 \models \ \varphi(\boldsymbol{a}) \Rightarrow \boldsymbol{a}$ в.п. Следовательно, формула φ описывает определимый в d-в.п. степенях класс $\mathcal{S}_2$, состоящий только из в.п. степеней. Анализируя доказательство теоремы Арсланова—Калимуллина—Лемпа, можно понять, что этот класс содержит бесконечно много в.п. степеней. Заметим также, что $\mathcal{S}_2$ не совпадает с классом всех в.п. степеней. Это следует из существования не изолирующей в.п. степени, т.е. такой в.п. степени $\boldsymbol{a}$, что для каждой d-в.п. степени $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{a}$ существует такая в.п. степень $\boldsymbol{b}$, что $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{b} > \boldsymbol{a}$ (см. [21]).

Действительно, если $\mathcal{D}_2 \models \ \varphi(\boldsymbol{a})$ для некоторой в.п. степени $\boldsymbol{a}$, то пусть $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{a}$ — такая d-в.п. степень, которая не разложима, минуя верхний конус степеней $\boldsymbol{a}$. Тогда между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ нет в.п. степеней, за исключением $\boldsymbol{a}$, т.е. $\boldsymbol{a}$ изолирует $\boldsymbol{b}$.

Таким образом, множество

$$\mathcal{S} = \Big\{\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \ \Big| \ (\exists \boldsymbol{y} > \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{z})\Big(\boldsymbol{x} < \boldsymbol{z} \leqslant \boldsymbol{y} \to (\forall \boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z}_1)\big(\boldsymbol{z}_0 \cup \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z} \ \&\ \boldsymbol{z}_0 \mid \boldsymbol{z}_1 \to \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{z}_0 \ \vee \ \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{z}_1\big)\Big)\Big\}$$

состоит только из в.п. степеней, бесконечно и определимо в $\mathcal{D}_2$ формулой $\varphi(x)$.

Теперь предположим, что $\boldsymbol{d}$ — некоторая собственная d-в.п. степень. Для любого разложения $\boldsymbol{d}$ на две d-в.п. степени $\boldsymbol{d}_0$ и $\boldsymbol{d}_1$ по крайней мере одна из степеней $\boldsymbol{d}_i$, $i \leqslant 1$, должна обладать следующим свойством: *для любой d-в.п. степени $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{d}_i \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{u}$ разложима на d-в.п. степени, минуя верхний конус степеней над $\boldsymbol{d}_i$.*

В противном случае это означает (по теореме 4.1), что для каждой степени $\boldsymbol{d}_i$, $i \leqslant 1$, между $\boldsymbol{d}_i$ и $\boldsymbol{d}$ существует в.п. степень, и, следовательно, степень $\boldsymbol{d}$ сама вычислимо перечислима (как наименьшая верхняя грань таких степеней).

Ответы на следующие вопросы пока не известны. Из вышеизложенного следует, что положительный ответ на любой из них означает определимость в.п. степеней в $\mathcal{D}_2$.

1. Верно ли, что каждая в.п. степень $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}$ является наименьшей верхней гранью двух несравнимых степеней из $\mathcal{S}$?

С этим вопросом связан также следующий: верно ли, что степени из $\mathcal{S}$ плотны среди в.п. степеней, т.е. верно ли, что между любыми двумя в.п. степенями $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ найдется некоторая степень из $\mathcal{S}$. Положительный ответ на этот вопрос немедленно влечет положительный ответ на вопрос 1; для этого разлагаем в.п. степень $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}$ на две несравнимые в.п. степени $\boldsymbol{a}_0$ и $\boldsymbol{a}_1$ (по теореме Сакса о разложении это можно сделать), и между степенями $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}_i$, $i \leqslant 1$, находим степени $\boldsymbol{b}_i \in \mathcal{S}$. Имеем $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}_0 \cup \boldsymbol{b}_1$.

2. Верно ли, что для каждой в.п. степени $\boldsymbol{a}$ существует такое разложение (на d-в.п. степени) $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}_1$, что для некоторых таких d-в.п. степеней $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_1$, что $\boldsymbol{a}_i < \boldsymbol{b}_i < \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_i$ не разложима, минуя верхний конус степеней $\boldsymbol{a}_i$, для каждого $i \in \{0,1\}$?

4.2. Новая схема для определимости m-в.п. степеней в полурешетках n-в.п. степеней при $1 \leqslant m < n$. Исследование проблемы определимости в.п. степеней в полурешетках $\mathcal{D}_n$, $n > 2$, также можно проводить по предложенной схеме.

1. Пусть $1 < n$ и собственные $(n+1)$-в.п. степени $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{b}$ таковы, что $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{b}$ и интервал $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})$ не содержит n-в.п. степеней. Верно ли, что $\boldsymbol{d}$ разложима в $(n+1)$-в.п. степенях, минуя верхний конус степеней над $\boldsymbol{b}$?
2. Верно ли, что каждая n-в. п. степень $\boldsymbol{a}$ разложима на две (n+1)-в.п. степени $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}_1$ так, что существуют такие (n+1)-в.п. степени $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_i < \boldsymbol{b}_i < \boldsymbol{a}$, что $\boldsymbol{b}_i$ не разложима в $(n+1)$-в.п. степени, минуя верхний конус степеней над $\boldsymbol{a}_i$, для каждого $i \in \{0,1\}$?

Мы предполагаем, что для каждого $n \geqslant 1$, следующее определимое в $\mathcal{D}_{n+1}$ множество $(n+1)$-в.п. степеней бесконечно и состоит из n-в.п. степеней:

$$\mathcal{S}_n = \Big\{ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \;\Big|\; (\exists \boldsymbol{y} > \boldsymbol{x})(\forall \boldsymbol{z}) \Big(\boldsymbol{x} < \boldsymbol{z} \leqslant \boldsymbol{y} \to (\forall \boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z}_1)\big(\boldsymbol{z}_0 \cup \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z} \;\&\; \boldsymbol{z}_0 \mid \boldsymbol{z}_1 \to \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{z}_0 \;\vee\; \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{z}_1\big)\Big)\Big\}.$$

Мы также предполагаем, что это множество n-в.п. степеней в $\mathcal{D}_{n+1}$ порождает весь класс n-в.п. степеней и, таким образом, *n-в.п. степени равномерно определимы в $\mathcal{D}_{n+1}$ для любого $n > 1$.*

Гипотеза 4.3. Предположим, что конечные совокупности в.п. степеней не определимы без параметров в $\mathcal{D}_2$.

Для доказательства этого предположения по данной конечной совокупности M в.п. степеней можно попробовать построить автоморфизм $\mathcal{D}_2$, который не оставлял бы на месте M.

4.3. Определимость и изолированность. Перейдем к рассмотрению свойства изолированности со стороны и тому, как это свойство может быть использовано для решения проблемы определимости. Впервые в явном виде это свойство было выделено в [88]; тем не менее, оно активно использовалось в других степенных структурах, но не получило должного распространения в тьюринговых степенях. Это свойство в неявном виде присутствует в работах [24, 89], где установлено, что $\mathcal{D}_n$ не является Σ_1-подструктурой $\mathcal{D}_m$ при $n < m$. Ограничиваясь 2-в.п. степенями, напомним, что в теореме 3.2 доказано следующее: существуют такие в.п. степени $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{e}$ (параметры), что

(i) найдется такая 2-в.п. степень $\boldsymbol{d} < \boldsymbol{a}$, что $\boldsymbol{d} \not\leqslant \boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{c} \not\leqslant \boldsymbol{d} \cup \boldsymbol{b}$;
(ii) для любой в.п. степени $\boldsymbol{w} < \boldsymbol{a}$ выполнено либо $\boldsymbol{w} \leqslant \boldsymbol{e}$, либо $\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{w} \cup \boldsymbol{b}$.

Здесь все в.п. степени, расположенные ниже $\boldsymbol{d}$, расположены также и ниже $\boldsymbol{e}$. Это подсказало следующее определение изолированности степени $\boldsymbol{d}$ со стороны степенью $\boldsymbol{e}$ (см. [88]).

Определение 4.4. Степень $\boldsymbol{d}$ изолирована в классе степеней $\mathcal{C}$ со стороны степенью $\boldsymbol{e}$, если $\boldsymbol{d} \not\leqslant \boldsymbol{e}$ и для любой степени $\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$ справедливо $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{d} \to \boldsymbol{c} < \boldsymbol{e}$.

В дальнейшем по умолчанию будем подразумевать, что класс $\mathcal{C}$ составляют в.п. степени. Также изолируемая степень $\boldsymbol{d}$ будет,как правило, 2-в.п. степенью, а изолирующая степень $\boldsymbol{e}$ будет являться либо в.п., либо 2-в.п. степенью. Приведенное определение является обобщением хорошо изученного понятия изолированности, в котором в.п. степень $\boldsymbol{e}$ должна быть строго ниже $\boldsymbol{d}$.

Покажем, как понятие изолированности со стороны может быть использовано для решения проблемы определимости. Для понятия обычной изолированности известно, что существуют как

изолированные 2-в.п. степени, так и не изолированные. Верно ли это и для изолированности со стороны, пока не известно.

Вопрос 4.5. Верно ли, что произвольная собственная 2-в.п. степень $\boldsymbol{d}$ изолируется со стороны некоторой в.п. степенью $\boldsymbol{e}$?

Предположим, что ответ на этот вопрос положителен. Пусть $\boldsymbol{d}$ является собственной 2-в.п. степенью. Тогда существует такая в.п. степень $\boldsymbol{e}$, что $\boldsymbol{d} \not\leqslant \boldsymbol{e}$, и все в.п. степени, расположенные под $\boldsymbol{d}$, находятся ниже $\boldsymbol{e}$. Ясно, что это верно и для всех определимых подклассов в.п. степеней.

Для в.п. степеней ответ на этот вопрос отрицателен по теореме Сакса о разложении. Но для получения формулы, которая бы выделила из множества всех 2-в.п. степеней все в.п. степени, нужно, чтобы степени, участвующие в теореме Сакса о разложении, также были определимыми. Как мы видели в предыдущих разделах, кандидатами таких степеней, например, могли бы быть середины восьмерок. Для этого нужно, чтобы середины восьмерок были плотны вниз и могли избегать нижние конусы заданных 2-в.п. степеней. Сформулируем это утверждение в виде гипотезы.

Гипотеза 4.6. Пусть формула $\psi(x)$ истинна в $\mathcal{D}_2(\leqslant 0')$ тогда и только тогда, когда x является серединой некоторой восьмерки.

1. Если $\boldsymbol{d}$ — собственная 2-в.п. степень, то
$$\exists \boldsymbol{e}\Big[\boldsymbol{d} \not\leqslant \boldsymbol{e} \wedge \forall \boldsymbol{w}\big(\psi(\boldsymbol{w}) \wedge \boldsymbol{w} < \boldsymbol{d} \longrightarrow \boldsymbol{w} < \boldsymbol{e}\big)\Big].$$
2. Если $\boldsymbol{a}$ — в.п. степень, то
$$\forall \boldsymbol{e}\Big[\boldsymbol{a} \not\leqslant \boldsymbol{e} \longrightarrow \exists \boldsymbol{w}\big(\psi(\boldsymbol{w}) \wedge \boldsymbol{w} < \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{w} \not\leqslant \boldsymbol{e}\big)\Big]$$
(кванторы берутся по 2-в.п. степеням).

Таким образом, здесь также мы имеем дело с восьмерками и их распределением в структуре 2-в.п. степеней. Хотя здесь проблема плотности заменена проблемой плотности вниз и изолированностью со стороны, но первая часть вопроса (об изолированности собственных 2-в.п. степеней со стороны) может стать ключевым.

4.4. Определимость и относительная перечислимость. Свойства относительной вычислимой перечислимости уже были использованы в пп. 2.1, 2.2. В этом разделе более подробно рассмотрим эти свойства, а также их возможные применения для проблемы определимости. Для начала напомним определение возникающей при этом CEA-иерархии.

Определение 4.7. Множество A является B-CEA множеством, если $B \leqslant_T A$ и A в.п. относительно B. Далее, множество A является n-CEA множеством при $n > 1$, если A является B-CEA множеством для некоторого $(n-1)$-CEA множества B, и A является 0-CEA множеством, если оно вычислимо. Степень $\boldsymbol{a}$ является n-CEA степенью, если она содержит n-CEA множество A. Степень $\boldsymbol{a}$ является $\boldsymbol{b}$-CEA степенью, если некоторое множество $A \in \boldsymbol{a}$ является B-CEA множеством для $B \in \boldsymbol{b}$.

Таким образом, 1-CEA степени являются в точности в.п. степенями. Для более высоких уровней ситуация более сложная, и на данный момент известны следующие отношения между n-в.п. и n-CEA степенями.

Теорема 4.8 (А. Лахлан, не опубликовано)**.** *Для 2-в.п. степени $\boldsymbol{d}$ существует такая в.п. степень $\boldsymbol{e}$, что $\boldsymbol{d}$ является $\boldsymbol{e}$-CEA степенью.*

Для доказательства с каждым 2-в.п. множеством $D = B_1 - B_2$ *ассоциируется* в.п. множество $As(D) = \{\langle s, x\rangle : x \in D_s - D\}$. Ясно, что $As(D) \leqslant_T D$ и D в.п. относительно $As(D)$; таким образом, D является $As(D)$-CEA множеством. Из определения видно, что $As(D)$ зависит от способов перечислений в.п. множеств B_1 и B_2, и мы можем равномерно найти индекс $As(D)$, зная индексы B_1 и B_2. Но тьюрингова степень $As(D)$ определяется однозначно, независимо от перечисления множества D. Это непосредственно следует из утверждения ниже.

Предложение 4.9 (см. [49]). *Пусть $D = B_1 - B_2$ является 2-в.п. множеством и $As(D)$ является его ассоциированным множеством. Если D в.п. относительно B, то $As(D) \leqslant_T B$.*

Доказательство. Пусть $D = \operatorname{dom}\Phi_e(B)$ для некоторого e. Для каждого $\langle s, x\rangle$ имеем: если $x \notin D_s$, то $\langle s, x\rangle \notin As(D)$. Если $x \in D_s$, то пусть $t > s$ является таким шагом в перечислении D, что
— либо $x \notin D_t$ (в этом случае $\langle s, x\rangle \in As(D)$);
— либо $\Phi_e(B, x) \downarrow [t]$ (тогда $\langle s, x\rangle \notin As(D)$).

□

Для n-в.п. множества D можно аналогично определить такое $(n-1)$-в.п. множество $As(D) \leqslant_T D$, что D является в.п. относительно $As(D)$. Иногда удобно использовать альтернативное для $As(D)$ определение $L(D) = \{s \mid \exists x \in D_s - D\}$ (здесь предполагается такое перечисление D, что $|D_{s+1} - D_s| \leqslant 1$). Легко видеть, что $L(D)$ имеет ту же тьюрингову степень, что и $As(D)$. Будем называть множества $As(D)$ и $L(D)$ *ассоциированными лахлановскими множествами* для множества D.

Таким образом, совокупность 2-в.п. степеней образует подмножество 2-CEA степеней, а n-в.п. степени при $n > 2$ — подмножество n-CEA степеней. Обратное включение неверно.

Теорема 4.10 (см. [52]). *Существует такая 2-CEA степень, которая не является n-в.п. степенью ни для какого $n < \omega$.*

Поэтому уровни CEA-иерархии дают более широкие классы степеней по сравнению с соответствующими уровнями иерархии Ершова. С другой стороны, согласно следующему результату не существует собственной n-в.п. степени, которая является 2-CEA степенью.

Теорема 4.11 (см. [20]). *Если ω-в.п. степень $\boldsymbol{d}$ является также A-CEA степенью для некоторого в.п. множества A, то существует 2-в.п. множество $D \in \boldsymbol{d}$, которое является A-CEA.*

Для полноты картины приведем также следующие результаты.

Теорема 4.12 (см. [52]). *Существует 3-в.п. степень, которая не является 2-CEA степенью.*

Теорема 4.13 (см. [20]). *Существует такое 2-в.п. множество D, что для каждого $n \geqslant 3$ существует множество A_n, которое является D-CEA и имеет собственную n-в.п. степень.*

Теорема 4.14 (см. [22]). *Существует такая в.п. степень $\boldsymbol{a}$, что если некоторая степень $\boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{0}'$ является $\boldsymbol{a}$-CEA, то $\boldsymbol{d}$ является в.п.*

При переходе от множеств к степеням можно рассмотреть аналогичное понятие, однако, картина при этом усложняется ввиду того, что в общем случае степень $L(D)$ зависит от выбора 2-в.п. множества D из 2-в.п. степени $\boldsymbol{d}$. Это приводит к рассмотрению в.п. предшественников степени $\boldsymbol{d}$, относительно которых $\boldsymbol{d}$ в.п., а именно Ш. Т. Ишмухаметовым (см. [49]) был рассмотрен класс

$$R[\boldsymbol{d}] = \big\{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{d} \text{ является } \boldsymbol{a}\text{-CEA}\big\}.$$

Однако оказалось, что этот класс совпадает с классом

$$L[\boldsymbol{d}] = \big\{\deg(L(D)) \mid \exists \text{ 2-в.п. } D \in \boldsymbol{d}\big\},$$

который был рассмотрен в [44]. Поскольку легко видеть, что $L[\boldsymbol{d}] \subset R[\boldsymbol{d}]$, то приведем доказательство для обратного включения.

Предложение 4.15 (см. [44]). *Даны 2-в.п. степень $\boldsymbol{d}$ и такая в.п. степень $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{d}$, что $\boldsymbol{a} \in R[\boldsymbol{d}]$. Тогда $\boldsymbol{a} \in L[\boldsymbol{d}]$.*

Доказательство. Пусть A — в.п. множество из $\boldsymbol{a}$. По теореме 4.11 находим такое 2-в.п. множество $U \in \boldsymbol{d}$, что U в.п. относительно A. Из предложения 4.9 следует, что $\deg(L(U)) \leqslant \boldsymbol{a}$. Рассмотрим $D = U \oplus (\omega - A)$; очевидно, что D — 2-в.п., $D \equiv_T U$ и $L(D) \in \boldsymbol{a}$. □

Таким образом, класс $L[\boldsymbol{d}]$ замкнут наверх относительно в.п. степеней, расположенных под $\boldsymbol{d}$, аналогично классу $R[\boldsymbol{d}]$. В [49] Ш. Т. Ишмухаметовым было начало исследование классов $R[\boldsymbol{d}]$ при различных $\boldsymbol{d}$, и им были получены следующие результаты (далее для удобства будем рассматривать $L[\boldsymbol{d}]$).

Теорема 4.16 (см. [49]). *Существует такая* 2*-в.п. степень* $\boldsymbol{d}$*, что* $L[\boldsymbol{d}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$*, где* $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ *являются невычислимыми в.п. степенями.*

Из предложения 4.15 согласно свойствам в.п. степеней получаем следующее утверждение.

Следствие 4.17. *Существует такая* 2*-в.п. степень* $\boldsymbol{d}$*, что* $L[\boldsymbol{d}]$ *содержит несравнимые элементы.*

Заметим, что в теореме 4.16 степень $\boldsymbol{a}$ является наименьшей в $L[\boldsymbol{d}]$, а $\boldsymbol{b}$ является наибольшей. Отметим, что собственные 2-в.п. степени $\boldsymbol{d}$ с наибольшим элементом в $L[\boldsymbol{d}]$ совпадают с классом хорошо изученных изолированных 2-в.п. степеней, введенных в работе С. Купера и С. Йи [36]. Далее, изолированные степени были исследованы Г. Ву; в частности, одним из приложений стало применение изолированных степеней для вложимости ромба в 2-в.п. степени, что не только упростило доказательство результата Р. Доуни (см. [37]), но и позволило одну половину ромба сделать в.п. В отличие от изолированных 2-в.п. степеней собственные 2-в.п. степени $\boldsymbol{d}$, у которых $L[\boldsymbol{d}]$ обладает наименьшим элементом, не были исследованы систематически. Дополняя предложение 4.15, Ш. Т. Ишмухаметов доказал, что степени $\boldsymbol{a}$ могут совпадать с $\boldsymbol{b}$ из теоремы 4.16.

Теорема 4.18 (см. [49]). *Существует такая* 2*-в.п. степень* $\boldsymbol{d}$*, что* $|L[\boldsymbol{d}]| = 1$*.*

Такие 2-в.п. степени им были названы *точными*. В п. 2.1 было показано, что вершина восьмерки должна быть точной 2-в.п. степенью. Таким образом, исследование распределения точных 2-в.п. степеней является подпроблемой распределения восьмерок, важность которой была показана в пп. 2.1 и 4.1. Однако пока известно немного результатов о комбинировании этих свойств с другими структурными свойствами; возможно, это является следствием плохой комбинируемости с другими свойствами для 2-в.п. степеней $\boldsymbol{d}$, обладающих наименьшим элементом в $L[\boldsymbol{d}]$. В [68] установлено, что точные 2-в.п. степени плотны вниз.

Теорема 4.19 (см. [68]). *Под произвольной невычислимой в.п. степенью* $\boldsymbol{a}$ *существует точная* 2*-в.п. степень* $\boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{a}$*.*

В следующей теореме установлено, что для вершин восьмерок это не так. Таким образом, вершины восьмерок и точные 2-в.п. степени образуют разные классы.

Теорема 4.20 (Р. Кейпер, С. Лемпп, М. Соскова, У. Эндрюс, М. М. Ямалеев [15]). *Существует невычислимая в.п. степень* $\boldsymbol{a}$*, под которой нет восьмерок* (*и, в частности, нет и вершин восьмерок*)*.*

Следующим естественным вопросом в исследовании лахлановских степеней является вопрос Ш. Т. Ишмухаметова, сформулированный им в [49]: будет ли произвольная 2-в.п. степень $\boldsymbol{d}$ обладать наименьшим элементом в $L[\boldsymbol{d}]$? В дальнейшем был получен ответ, который контрастирует со случаем множеств. Ш. Т. Ишмухаметов (см. [50]), а затем Ч. Фан, Г. Ву и М. М. Ямалеев (см. [44]) получили следующие результаты.

Теорема 4.21 (см. [50]). *Существует такая* 2*-в.п. степень* $\boldsymbol{d}$*, что* $L[\boldsymbol{d}]$ *не обладает наименьшей степенью.*

Теорема 4.22 (см. [44]). *Существует такая* 2*-в.п. степень* $\boldsymbol{d}$*, что* $L[\boldsymbol{d}]$ *не обладает минимальной степенью.*

В [43] установлено, что понятия «минимальная степень» и «наименьшая степень» совпадают для классов $L[\boldsymbol{d}]$. Таким образом, с этой точки зрения теоремы 4.21 и 4.22 являются эквивалентными.

Теорема 4.23 (см. [43]). *Пусть* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L[\boldsymbol{d}]$ *для некоторой* 2*-в.п. степени* $\boldsymbol{d}$*. Тогда существует такая* $\boldsymbol{c} \in L[\boldsymbol{d}]$*, что* $\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$*.*

Так как для любой собственной 2-в.п. степени $\boldsymbol{d}$ имеем $\boldsymbol{0} \notin L[\boldsymbol{d}]$, то как следствие получаем следующее утверждение.

Следствие 4.24 (см. [43]). *Если $\boldsymbol{d}$ является собственной 2-в.п. степенью, то $L[\boldsymbol{d}]$ не содержит минимальную пару.*

Нетрудно видеть, что если степень $\boldsymbol{e}$ является в.п., то $L[\boldsymbol{e}] = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}]$; в частности, всегда будет существовать наименьшая и наибольшая степени. Если $\boldsymbol{d}$ является 2-в.п. степенью, то, как было показано Ш. Т. Ишмухаметовым (см. [49]), существуют точные степени, которые в некотором смысле «далеки» от в.п. степеней и являются «более собственными» 2-в.п. степенями. Следующий вопрос о существовании собственных 2-в.п. степеней, «более близких» к в.п. степеням, остается открытым.

Вопрос 4.25. Существует ли такая 2-в.п. степень $\boldsymbol{d}$, что $L[\boldsymbol{d}] = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{d})$ (интервал без конечных точек)?

Отдельной мотивацией для исследования лахлановских степеней является нахождение структурных свойств, которые связали бы $\boldsymbol{d}$ и $L[\boldsymbol{d}]$ в случаях, когда $\boldsymbol{d}$ является собственной 2-в.п. степенью. М. М. Ямалеев предпринял следующий подход для решения вопроса определимости в.п. степеней в 2-в.п. степенях. Рассмотрим следующий вопрос.

Вопрос 4.26. Верно ли, что для любой собственной 2-в.п. степени $\boldsymbol{d}$ существует такая в.п. степень $\boldsymbol{a}$, что $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x} \in L[\boldsymbol{d}]$?

Положительный ответ на него мог бы быть использован следующим образом. Если степень $\boldsymbol{d}$ является собственно 2-в.п. степенью, то пусть $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{d}$ — в.п. степень, существование которой предполагается. Поскольку $\boldsymbol{a}$ ограничивает снизу спектр лахлановских степеней, то обе части любого разложения, которые избегают верхнего конуса $\boldsymbol{a}$, обязаны быть собственно 2-в.п. степенями. В противном случае пусть $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{c}$ и степень $\boldsymbol{c}$ является в.п. Тогда пусть $C \in \boldsymbol{c}$ и $B \in \boldsymbol{b}$; следовательно, $\deg(C \oplus B) = \boldsymbol{d}$, но

$$L(C) \oplus L(B) \equiv_T \emptyset \oplus L(B) \equiv_T L(B),$$

а значит,

$$\boldsymbol{a} \not\leqslant \deg(L(C) \oplus L(B)),$$

что приводит к противоречию. (Здесь нужно отметить, что такие разложения не обязательно существуют. Но тогда степень $\boldsymbol{d}$ сразу распознается как собственная 2-в.п.) Предполагается, что для в.п. степеней это неверно, а именно, произвольная в.п. степень раскладывается с избеганием произвольных верхних конусов таким образом, что одна из частей разложения будет определимой (для определимости можно использовать середины восьмерок). Это утверждение — одно из предполагаемых свойств в.п. степеней, которое мы сформулируем в виде гипотезы.

Гипотеза 4.27. Для любой невычислимой в.п. степени $\boldsymbol{c}$ и любой невычислимой 2-в.п. степени $\boldsymbol{f}$ существуют такие в.п. степени $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, что $\boldsymbol{u}$ является серединой восьмерки, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u} \cup \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{f} \not\leqslant \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$.

Таким образом, кандидатом на выделение в.п. степеней среди всех 2-в.п. степеней является следующая формула:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \forall \boldsymbol{a}\ \exists \boldsymbol{u}\ \exists \boldsymbol{v}\ \Big[\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \to \big(\psi(\boldsymbol{u})\,.\wedge.\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \cup \boldsymbol{v}\,.\wedge.\,\boldsymbol{a} \not\leqslant \boldsymbol{u}\,.\wedge.\,\boldsymbol{a} \not\leqslant \boldsymbol{v}\big)\Big],$$

где формула $\psi(\boldsymbol{u})$ истинна тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{u}$ является серединой некоторой восьмерки в $D(\leqslant \boldsymbol{0}')$. Приведенная гипотеза утверждает, что формула $\varphi(\boldsymbol{x})$ истинна тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}$ является в.п. степенью.

4.5. Пример работы с определимыми классами. Дальнейшая часть раздела будет посвящена основным идеям доказательства теоремы 4.20, на примере которых будет показана работа с восьмерками и использование лахлановских множеств. Основные обозначения и терминология будут следовать Р. Соару (см. [8]) и Р. Доуни и Д. Хиршфилду (см. [38]). Также будем придерживаться устоявшейся в последние годы методики для изложения приоритетных конструкций. Иизложим основные идеи доказательства существования невычислимой в.п. степени, под которой нет восьмерок.

Требования. Напомним, что вершина восьмерки всегда является точной степенью. Теперь пусть 2-в.п. степени $\boldsymbol{d}_1 > \boldsymbol{d}_2 > \mathbf{0}$ образуют восьмерку. Если $D \in \boldsymbol{d}_1$ является 2-в.п. степенью, то согласно п. 4.4 имеем $L(D) \in \boldsymbol{d}_2$.

Таким образом, для доказательства теоремы необходимо построить такое в.п. множество A, что для произвольного 2-в.п. множества $D \leqslant_T A$ верно следующее: если $\mathbf{0} < \deg(L(D)) < \deg(D)$, то существует 2-в.п. множество $E \leqslant_T D$, которое не сравнимо по Тьюрингу с множеством $L(D)$. Зафиксируем эффективное перечисление всех кортежей $\langle \Phi, \Psi, \Theta, \Omega, D \rangle$, которые состоят из ч.в. функционалов Φ, Ψ, Θ, Ω и 2-в.п. множеств D. Достаточно построить в.п. множество A, удовлетворяющее следующему набору требований:

$$\mathcal{P}_\Theta : A \neq \Theta;$$
$$\mathcal{R}_{\Phi,D} : D = \Phi^A \;\Rightarrow\; \exists E\, \exists \Lambda_{\Phi,D}\, (E = \Lambda^D_{\Phi,D} \wedge E \mid_T L(D)) \vee D \leqslant_T L(D) \vee L(D) \leqslant_T \emptyset,$$

где каждое $\mathcal{R}$-требование имеет бесконечный список подтребований:

$$\mathcal{T}_\Psi : E = \Psi^{L(D)} \;\Rightarrow\; \exists \Gamma_\Psi\ (D = \Gamma_\Psi^{L(D)});$$
$$\mathcal{S}_\Omega : L(D) = \Omega^E \;\Rightarrow\; \exists \Delta_\Omega\ (L(D) = \Delta_\Omega) \vee \exists \Gamma_\Omega\ (D = \Gamma_\Omega^{L(D)}).$$

В дальнейшем иногда будем опускать индексы, если они восстанавливаются из контекста. Построение множества A проводится при помощи дерева стратегий и гэп/когэп метода. Доказательство требует $\mathbf{0}'''$-приоритетных рассуждений, и полный вариант доказательства может быть найден в [15]. В представленном варианте наброска доказательства мы опишем работу стратегий в отдельности, а также основные моменты их взаимодействия на дереве стратегий.

Для дальнейших рассуждений для удобства будем придерживаться соглашения, что на каждом шаге алгоритма перечисления каждого из множеств они меняются не более чем на одном элементе. Обозначение $s^D(x)$ означает шаг, на котором x перечисляется в D. Если такого шага нет, то пишем $s^D(x) \uparrow$. Таким образом, если x покидает D, то $s^D(x)$ перечисляется в $L(D)$. Сперва рассмотрим основные идеи удовлетворения каждой стратегии в отдельности.

Базовый модуль $\mathcal{P}$-стратегии. Базовый модуль $\mathcal{P}$-стратегии является вариантом стандартной стратегии Фридберга—Мучника. Назначаем еще не использованного свидетеля a, ждем такого шага s, что $\Theta(a)[s] \downarrow = 0$, и перечисляем a в A.

Базовый модуль $\mathcal{R}$-стратегии. Любая $\mathcal{R}$-стратегия ρ является родительской стратегией для всех ее подстратегий. Она отслеживает длину текущего равенства между D и Φ^A. Далее, на нерасширяюших шагах стратегия имеет конечный выход fin. На расширяющих шагах стратегия переключается на построение такого функционала Λ, что $\Lambda^D = E$, и имеет бесконечный выход ∞, под которым расположены ее $\mathcal{S}$- и $\mathcal{T}$-подстратегии (которые назовем дочерними стратегиями стратегии $\mathcal{R}$).

Базовый модуль $\mathcal{T}$-стратегии. Любая $\mathcal{T}$-стратегия τ является подстратегией некоторой $\mathcal{R}$-стратегии. Работая в отдельности, она проверяет текущую длину равенства между E и $\Psi^{L(D)}$. На расширяющих шагах τ так строит Γ_τ, что $\Gamma_\tau^{L(D)} = D$. Стратегия имеет два возможных выхода Γ и fin.

Базовый модуль $\mathcal{S}$-стратегии. Любая $\mathcal{S}$-стратегия σ является подстратегией некоторой $\mathcal{R}$-стратегии. Она проверяет текущую длину равенства между $L(D)$ и Ω^E, и если шаг является расширяющим, то σ сперва пытается построить такой функционал Δ_σ, что $\Delta_\sigma = L(D)$. Однако при взаимодействии с другими стратегиями (которое будет описано в дальнейшем) этот функционал может быть нарушен, и тогда стратегия будет переключаться на строительство такого запасного функционала Γ_σ, что $\Gamma_\sigma^{L(D)} = D$. Таким образом, стратегия имеет три возможных выхода: Γ, Δ и fin.

Взаимодействие между стратегиями. Рассмотрим нетривиальные взаимодействия между стратегиями и опишем, как преодолеваются возникающие трудности. Поскольку трудности начинаются при перечислении элементов в множество A некоторыми $\mathcal{P}$-стратегиями, то в дальнейшей будем предполагать существование $\mathcal{P}$-стратегий под рассматриваемыми стратегиями.

$\mathcal{T}$-Стратегия τ под ее родительской $\mathcal{R}$-стратегией ρ. Рассмотрим некоторые детали поведения стратегии τ, под Γ-выходом которой находятся $\mathcal{P}$-стратегии π. Для успешной работы стратегии необходимо для каждого x определить $\Gamma^{L(D)}(x) = D(x)$. До того, как определить это значение в первый раз, выбираем «большое число» $y = y_x$ и ждем, пока длина равенства между $\Psi^{L(D)}$ и E не станет больше, чем y. На первом расширяющем шаге, когда это произойдет, определяем $\Gamma^{L(D)}(x)[s] = D(x)[s]$ с use-функцией $\gamma(x)[s] = s > \psi(y)[s]$. Теперь (при предположении, что τ находится на истинном пути) равенство между $\Gamma^{L(D)}(x)$ и $D(x)$ может быть нарушено только если свидетель a некоторой $\mathcal{P}$-стратегии $\pi \supseteq \tau^\frown\Gamma$ перечисляется в A. Отметим, что a должен был быть выбран до шага s; таким образом, подобные нарушения функционала $\Gamma^{L(D)}(x)$ могут произойти не более, чем конечное число раз (поскольку все новые свидетели $\mathcal{P}$-стратегий после инициализации будут выбраны достаточно большими, а количество старых свидетелей конечно).

Изменения в множестве A допускают изменения в множестве D на всех x с Φ use-функцией $\varphi(x)[s] \geqslant a$. Рассмотрим следующие возможные случаи:

Случай 1: x перечисляется в D, но $L(D) \upharpoonright (\gamma(x)+1)$ остается неизменным; тогда перечисляем $y = y_x$ в E (поскольку разрешение от D получено) и инициализируем все стратегии под τ. Таким образом, имеем

$$1 = E(y) \neq \Psi^{L(D)}(y) = \Psi^{L(D)}(y)[s] = 0,$$

и τ удовлетворена. Инициализированные стратегии должны выбирать свежих свидетелей, поэтому теперь только стратегии, имеющие приоритет выше, чем τ, могут перечислять числа в A, которые позволяют изменения в $\Psi^{L(D)}(y)[s]$. Действительно, если $\Psi^{L(D)}(y)[s]$ изменяется на шаге $s_1 > s$, то некоторое число x_1 покидает D, где $s^D(x_1) \leqslant \psi(y) < s$. Следовательно, некоторое $a_1 \leqslant \varphi(x_1)[s] < s$ должно быть перечислено в A после шага s, поэтому a_1 должно было быть выбрано до шага s.

Случай 2: x перечисляется в D или покидает D, и это сопровождается изменением $L(D) \upharpoonright (\gamma(x)+1)$; тогда переопределяем $D(x) = \Gamma^{L(D)}(x)$ с новой большей use-функцией $\gamma(x)$. Отметим, что новое переопределение $\Gamma^{L(D)}(x)$ может быть вызвано только перечислением некоторого числа $a_1 < a$ в A. Нетрудно видеть, что когда a перечисляется в A некоторой $\mathcal{P}$-стратегией, происходит инициализация всех стратегий с меньшим приоритетом, а значит, и всех стратегий со свидетелями, большими, чем a. Новые свидетели будут больше, чем текущая use-функция $\varphi(x)$, и не повлияют на вычисления, относящиеся к x. Таким образом, увеличение $\varphi(x)$ может быть вызвано только перечислением некоторого $a_1 < a$, но, как было отмечено выше, это может произойти только конечное число раз.

Заметим, что если x покидает D, то должно быть изменение в $L(D) \upharpoonright (\gamma(x)+1)$. Это следует из того, что $\Gamma^{L(D)}(x)$ был корректно определен на шаге s, когда x уже был в D, а значит, было $s^D(x) < s = \gamma(x)$. Следовательно, рассмотренные случаи исчерпывают все возможности.

Интуитивно эту ситуацию при построении функционала Γ проще представлять как периоды *открытого окна*, когда разрешено перечисление a в A (в английской терминологии используется слово gap, однако мы будем использовать термины, более уместные в русском языке, сохраняя тем не менее термин «метод гэп/ко-гэп»). Таким образом, в эти периоды открытых окон косвенно сбрасывается запрет стратегии τ в том смысле, что если произойдут нежелательные изменения для τ из-за перечисления некоторого a в A в этот период, то τ сможет удовлетворится навсегда. Поэтому эти изменения является нежелательными только на первый взгляд; на самом эти изменения позволяют говорить об *успешном закрытии* окна (соответственно, если эти изменения отсутствуют, то закрытие считается *без успеха*). В итоге либо одно из открытий окна завершится успешным закрытием, а именно, в некоторый момент будет иметь случай 1, и τ будет диоганализирована; либо все открытия завершатся без успеха, а именно, всегда будет иметь случай 2, что означает корректное построение сведения D к $L(D)$. В формальной конструкции этот метод

удобно описывается при помощи ссылок (link), которые позволят во время периодов открытых окон наладить взаимодействие стратегий со своими подстратегиями, в частности они позволяют переходить от стратегии к подстратегии, минуя все промежуточные стратегии. К примеру, работая с упомянутыми выше ρ и τ, при наличии ссылки мы перейдем из ρ в τ и сразу же решим, есть ли необходимость перечислять y в E, что позволит поддерживать корректность $E = \Lambda^D_\rho$, а соответствующий функционал строится стратегий ρ. Таким образом, в этом случае перечисление элементов или их изъятие из E происходит только в тот момент, когда мы приходим к подстратегии ρ, используя ссылку (если же из ρ ссылки нет, то изменяем E в ρ); в других случаях нет необходимости менять E в ρ, так как ρ не должна будет менять E к старому варианту ввиду соответствующего изменения в D при возвращении начального сегмента к старым значениям (исключением является случай, когда некоторая $\mathcal{P}$-стратегия между ρ и τ перечисляет достаточно малое число в A, которое позволяет D измениться и заставляет нас изменить E к старому варианту, однако это также влечет инициализацию τ).

$\mathcal{T}$-Стратегия τ под $\mathcal{S}$-стратегией σ под их родительской $\mathcal{R}$-стратегией ρ. Наиболее серьезный конфликт, который вынуждает применение метода $\mathbf{0'''}$-приоритета вместо использования обычного метода приоритета с бесконечными нарушениями, возникает в следующем сценарии. Пусть имеется $\mathcal{R}$-стратегия ρ с ее $\mathcal{S}$-подстратегией σ и такой $\mathcal{T}$-подстратегией τ, что τ находится под конечным выходом σ. Более того, предположим, что имеются три $\mathcal{P}$-стратегии π_2, π_1 и π_0, которые расположены под Γ-выходом τ, под Δ-выходом σ и под Γ-выходом σ, соответственно. Предположим, что происходит следующая последовательность событий.

Сначала $\mathcal{P}$-стратегия π_2 перечисляет своего свидетеля a_2 в A, позволяя числу x перечислиться в D, что в итоге позволяет τ перечислить $y = y_x$ в E для своей диагонализации. Далее, $\mathcal{P}$-стратегия π_1 перечисляет своего свидетеля $a_1 < a_2$ в A, позволяя x покинуть D, что может вынудить y покинуть E для сохранения корректности функционала Λ. Однако, если это произойдет, то шаг $s^D(x)$, на котором x перечислился в D, перечислится в $L(D)$, так как x покинет D; при этом возможно, что σ уже определило $\Delta(s^D(x)) = 0$, которое теперь не может быть поправлено. Эта проблема решается тем, что σ строит запасной функционал $\Gamma^{L(D)} = D$ для удовлетворения ее родительской стратегии ρ.

Однако построение стратегией σ функционала Γ (при этом σ будет иметь бесконечный Γ-выход, расположенный левее бесконечного Δ-выхода) создает новую потенциальную проблему. Предположим, что теперь $\mathcal{P}$-стратегия π_0 под Γ-выходом σ перечисляет своего свидетеля a_0 в A, позволяя D измениться на элементе, в котором уже определен $\Gamma^{L(D)}$, что создает возможные проблемы для корректности функционала Γ. Стратегия для σ может использовать следующую процедуру для вынуждения изменения в $L(D)$ и корректировки $\Gamma^{L(D)}$: до перехода к свидетелю a_0 стратегия π_0 имеем число x, которое возникло из-за некоторой $\mathcal{P}$-стратегии, аналогичной π_1; при этом x только что покинуло D и привело к порче функционала Δ стратегии σ. Аналогично согласованию работы ρ и τ, будем использовать ссылки от ρ к σ; таким образом, мы посетим σ сразу, не позволяя ρ изъять y из E и допуская временное нарушение построения Λ^D. Поэтому если функционал Δ нарушился на элементе $s^D(x)$, то мы сразу создаем вторую ссылку от ρ к σ и переходим к выходу Γ, только теперь позволяя a_0 перечислиться в A. Предположим, что это привело к изменению $D(x')$ для некоторого x'.

(1) Если x' перечислился в D, то, возможно, это произошло без некоторого $L(D)$-изменения, и построение функционала $\Gamma^{L(D)}(x')$ испортилось. Если $\Gamma^{L(D)}(x')$ определено, то это означает, что x' является достаточно малым, что позволяет сохранить y в E, не нарушая корректности Λ^D. Но это приводит к постоянному неравенству между Ω^E и $L(D)$ в точке $s^D(x)$, поскольку старое значение $\Omega^E(s^D(x)) = 0$ не изменилось, в то время как $s^D(x) \in L(D)$; это неравенство может быть нарушено только действием некоторой стратегии с приоритетом, более высоким, нежели σ (поскольку после диагонализации σ имеет всегда конечный выход, если не происходит ее инициализация).

(2) Если x' покидает D (и при этом вошло в D на шаге $s^D(x')$), то из построения Γ следует, что $\gamma(x') \geqslant s^D(x')$. Таким образом, уход x' из множества D приводит к перечислению $s^D(x')$ в $L(D)$, позволяя $\Gamma^{L(D)}(x')$ оставаться корректным.

Аналогично предыдущему случаю, мы *открываем второе окно*, когда позволяем элементу a_0 перечислиться в A. Таким образом, либо одно из открытий окончится *успешным закрытием* (т.е. в некоторым момент произойдет случай (1)), и стратегия σ будет диагонализирована, либо все открытия окончатся *без успеха* (т.е. всегда будет иметь место случай (2)), и тогда множество D будет корректно сведено к $L(D)$. Напомним, что в конструкции для работы с окнами создаются ссылки из ρ в σ, благодаря которым решение о перечислении y в E можно принимать не во время работы стратегии ρ, а во время работы ее подстратегии σ, к которой мы перейдем сразу же после ρ по ссылке, что позволит сохранить корректность $E = \Lambda^D_\rho$.

Работа нескольких $\mathcal{R}$-стратегий. Для интуитивного анализа ограничимся двумя $\mathcal{R}$-стратегиями ρ_0 и ρ_1. Предположим, что $\rho_0 \subset \rho_1$, и пусть они имеют подстратегии σ_0 и σ_1 соответственно (также предположим, что σ_0 и σ_1 имеют Г-выходы). Возможны следующие их приоритетные упорядочения:

1) $\rho_0 \subset \sigma_0 \subset \rho_1 \subset \sigma_1$,
2) $\rho_0 \subset \rho_1 \subset \sigma_1 \subset \sigma_0$, и
3) $\rho_0 \subset \rho_1 \subset \sigma_0 \subset \sigma_1$.

Третий случай может привести к проблеме со ссылками, поэтому идея работы заключается в следующем: когда σ_0 переходит в выходу, который удовлетворяет стратегии ρ_0, то под этим выходом создаем версию стратегии ρ_1, скажем $\mathcal{R}$-стратегию ρ_1', а также под этим выходом будем размещать только подстратегии ρ_1', но не подстратегии стратегии ρ_1. Таким образом, третий случай сводится к первому случаю, проблемы которого решаются обычными $\mathbf{0}'''$-приоритетным рассуждениями.

В первом случае серьезные проблемы отсутствуют, так как ρ_1 находится под Г-выходом σ и знает, что σ строит Г, удовлетворяя ρ_0. Во втором случае могут быть ссылки, которые идут от ρ_0 к σ_0, минуя ρ_1 и σ_1, однако если σ_0 имеет истинный выход Г, то, как и ранее, у ρ_1 будет еще одна версия, скажем ρ_1', под этим выходом. Таким образом, в случае истинного выхода Г ссылки могут бесконечно проходить через ρ_1 и σ_1, но тогда стратегия ρ_1' отвечает за выполнение требования стратегии ρ_1. В случае, если ссылка от ρ_0 не будет бесконечно проходить через ρ_1 и σ_1, то, начиная с некоторого момента, ρ_1 начнет работать в обычном режиме.

Таким образом, согласуется работа двух $\mathcal{R}$-стратегий и их подстратегий. В случае нескольких $\mathcal{R}$-стратегий принцип согласования останется таким же, а детали и полная конструкция могут быть найдены в [15].

4.6. Определимость с параметрами. Перейдем к рассмотрению вопросов определимости с параметрами.

Теорема 4.28. *Существует бесконечная совокупность в.п. степеней, каждая из которых определима в $\mathcal{D}_2$ с одним параметром из $\mathcal{D}_2 - \mathcal{R}$.*

Доказательство. Для любого $\boldsymbol{a} \in \mathcal{S}$ пусть $\boldsymbol{d}$ является такой степенью, что для любой степени $\boldsymbol{z}$, если $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{z} \leqslant \boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{z}_0 \cup \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z}$ для некоторых d-в.п. степеней $\boldsymbol{z}_0$ и $\boldsymbol{z}_1$, и $\boldsymbol{z}_0 \mid \boldsymbol{z}_1$, то либо $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{z}_0$, либо $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{z}_1$. Ясно, что $\boldsymbol{d}$ не вычислимо перечислима и однозначно определяет в.п. степень $\boldsymbol{a}$. В частности, $S \cap [\mathbf{0}, \boldsymbol{d}] = \{\boldsymbol{a}\}$. □

Т. Сламан и У. Вудин [85] доказали, что класс $\mathcal{R}$ в.п. степеней определим с параметрами в $\mathcal{D}(\leqslant \mathbf{0}')$. Принципиальное место в их доказательстве занимает теорема 4.30.

Определение 4.29. Совокупность низких степеней $\mathcal{A}$ называется *равномерно низкой совокупностью*, если существуют такие последовательность множеств $\langle X(n) \mid n \in \omega \rangle$ и $\emptyset'$-вычислимая функция f, что

$$\{deg(X(n)) \mid n \in \omega\} = \mathcal{A}, \quad \Phi^{\emptyset'}_{f(n)} = (X(n))'.$$

Теорема 4.30. *Пусть $\mathcal{A}$ — равномерно низкое множество Δ^0_2-степеней, ограниченное некоторой низкой степенью $\boldsymbol{a}$. Тогда $\mathcal{A}$ определимо с параметрами в $\mathcal{D}(\leqslant \mathbf{0}')$.*

Из этой теоремы определимость $\mathcal{R}$ с параметрами в $\mathcal{D}(\leqslant \mathbf{0}')$ выводится с помощью следующей теоремы.

Теорема 4.31 (см. [86])**.** . *Существуют такие две равномерно вычислимые совокупности в.п. степеней $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$, что каждая из них ограничена некоторой низкой степенью, каждая в.п. степень $\boldsymbol{a}$ является наименьшей верхней гранью $\boldsymbol{a}_0 \in \mathcal{A}_0$ и $\boldsymbol{a}_1 \in \mathcal{A}_1$.*

Доказательство. Разложим креативное множество $K = \{\langle e, n\rangle \mid n \in W_e\}$ по теореме Сакса на два низких T-несравнимых множества A_0 и A_1 и определим совокупности $\mathcal{A}_i$, $i \leqslant 1$, как совокупности степеней множеств

$$\mathcal{B}_i = \big\{e \mid \langle e, n\rangle \in A_i\big\}_{n\in\omega}.$$

Следовательно, по предыдущей теореме класс $\mathcal{R}$ в.п. степеней определим с параметрами в $\mathcal{D}(\leqslant \mathbf{0}')$. □

Теорема 4.32. *Пусть $\boldsymbol{a}$ — низкая в.п. степень $> \mathbf{0}$. Множество n-в.п. степеней $\{\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{a}\}$ определимо с параметрами в $\mathcal{D}(\leqslant \mathbf{0}')$ для любого $n \geqslant 1$.*

Доказательство. Нужно определить такую вычислимую функцию g, что множество степеней $\{deg(V_{n,g(e)}) \mid e \in \omega\}$ совпадает с множеством всех n-в.п. степеней $\leqslant \boldsymbol{a}$. Здесь $\{V_{n,e}\}_{e\in\omega}$ — эффективная нумерация всех n-в.п. множеств, $n \geqslant 2$.

При $n = 1$ такую функцию g можно получить по теореме Йейтса о характеризации Σ^0_3-индексных множеств классов в.п. множеств. Для случая $n > 1$ такую функцию g можно найти с помощью следующего утверждения: для любого $n > 1$ и любой всюду определенной функции $f \leqslant_T \emptyset''$ существует такая вычислимая функция g, что для любого $e \in \omega$, $V_{n,f(e)} \equiv_T V_{n,g(e)}$. Это утверждение было доказано в [2] для случая, когда вместо нумерации n-в.п. множеств $\{V_n\}$ берется нумерация в.п. множеств $\{W_n\}$. Доказательство для общего случая такое же с очевидными и необходимыми изменениями.

Пусть A — в.п. множество, степень которого есть $\boldsymbol{a}$. Так как $\{e : V_{n,e} \leqslant_T A\}$ является Σ^A_3-множеством (см., например, [49], где также доказано, что это индексное множество является Σ^A_3-полным), и так как $A' \leqslant_T \emptyset'$, то $\{e : V_{n,e} \leqslant_T A\}$ является Σ^0_3-множеством. Отсюда следует, что существует такая функция $f \leqslant_T \emptyset''$, что

$$\big\{V_{n,e} : V_{n,e} \leqslant_T A,\ e \in \omega\big\} = \big\{V_{n,f(e)} : e \in \omega\big\}.$$

Теперь пусть g — такая вычислимая функция, что $V_{n,f(e)} \equiv_T V_{n,g(e)}$ для каждого $e \in \omega$. Имеем

$$\big\{\boldsymbol{b} \in \mathcal{D}_2 \mid \boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{a}\big\} = \big\{deg(V_{n,g(e)}) \mid e \in \omega\big\}.$$

Следующая функция c вычислима относительно $\emptyset'$:

$$c(e,x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in V_{n,g(e)},\\ 0, & \text{если } x \notin V_{n,g(e)}.\end{cases}$$

Поэтому существует такая вычислимая относительно $\emptyset'$ функция α, что $V_{n,g(e)} = \Phi^{\emptyset'}_{\alpha(e)}$ для любого $e \in \omega$. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 4.30. □

Теорема 2.1 утверждает, что существуют такие в.п. степень $\boldsymbol{b} > \mathbf{0}$ и d-в.п. степень $\boldsymbol{c} > \boldsymbol{b}$, что для любой в.п. степени $\boldsymbol{d}$, если $\boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{c}$, то либо $\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{d}$, либо $\boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{b}$. Нетрудно проверить, что выполнение дополнительного требования

$$(\forall e)(\exists^\infty s)\big(\Phi^B_e(e)[s]\downarrow \to \Phi^B_e(e)\downarrow\big),$$

которое позволяет в этой теореме сделать степень множества $B \in \boldsymbol{b}$ низкой, легко сочетается с процессом удовлетворения всех остальных ее требований. Таким образом, существуют в.п. множества *низкой степени*, удовлетворяющие условиям приведенной теоремы. Нам не известно, существуют ли множества *не низкой степени* с этими свойствами, т.е. существуют ли такие d-в.п. степени $\boldsymbol{d} > \mathbf{0}$, у которых разложения на d-в.п. степени не могут быть низкими:

$$(\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b}) \to \boldsymbol{a}' > \mathbf{0}' \ \&\ \boldsymbol{b}' > \mathbf{0}'.$$

Если бы приведенную выше теорему удалось усилить таким образом, то это бы означало, что описанный выше метод Сламана—Вудина принципиально не подходит для доказательства определимости n-в.п. степеней с параметрами в $\mathcal{D}(\leqslant \mathbf{0}')$. А именно, n-в.п. степени при $n > 1$ в общем случае нельзя разложить на две низкие n-в.п. степени, в отличие от случая в.п. степеней.

4.7. Определимость m-в.п. степеней на решеточном языке n-в.п. множеств.

Определение 4.33. Множество тьюринговых степеней $\mathcal{C}$ определимо в $\mathcal{E}_n$ при некотором $n \geqslant 1$, если существует определимый в $\mathcal{E}_n$ класс множеств $S \subset \mathcal{E}_n$ такой, что $\mathcal{C} = \{\deg(B) \mid B \in S\}$.

Пример 4.34. Степень $\mathbf{0}$ определима в каждой из $\mathcal{E}_n, 1 \leqslant n < \omega$, так как $\mathbf{0} = \deg(\emptyset)$.

Для каждого $n \geqslant 0$, пусть

$$H_n = \left\{\boldsymbol{a} \text{ в.п.} \mid \boldsymbol{a}^{(n)} = \mathbf{0}^{(n+1)}\right\}, \quad L_n = \left\{\boldsymbol{a} \text{ в.п.} \mid \boldsymbol{a}^{(n)} = \mathbf{0}^{(n)}\right\}$$

— классы n-высоких и n-низких множеств соответственно. По определению $\boldsymbol{a}^0 = \boldsymbol{a}$, поэтому $H_0 = \{\mathbf{0}'\}$ и $L_0 = \{\mathbf{0}\}$.

Начиная с 1960-х годов различные авторы исследовали вопросы определимости в этом смысле для классов H_n и $L_n, n \geqslant 0$, в решетке $\mathcal{E}_1$ в.п. множеств. Результаты о неопределимости для этих классов скачков вытекают из следующей теоремы П. Чолака (см. [25]) и Харрингтона—Соара (см. [48]).

Теорема 4.35 (П. Чолак [25]; Л. Харрингтон, Р. Соар [48])**.** *Каждое невычислимое в.п. множество A некоторым автоморфизмом $\mathcal{E}$ переводится к некоторому высокому в.п. множеству H (в этом случае говорят, что A автоморфно H).*

Так как при автоморфизмах сохраняются все теоретико-решеточные свойства, то из этой теоремы вытекает, что классы L_n, $n > 0$, и $\overline{H_n}$, $n > 0$, будучи замкнуты вниз относительно тьюринговой сводимости, являются не определимыми. (Замкнутость вниз для класса степеней $\mathcal{A}$ означает, что $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ и $\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b} \in \mathcal{A}$.)

Неопределимость для класса $\overline{H}_0$ всех не T-полных в.п. степеней установлено Л. Харрингтоном и Р. Соаром (см. [48]).

Результаты об определимости для классов скачков H_n и $\bar{L}_n$ при $n \geqslant 2$ установили П. Чолак и Л. Харрингтон (см. [26]).

Теорема 4.36 (см. [26])**.** *H_n и $\bar{L}_n$ определимы при $n \geqslant 2$.*

Заметим, что определимость для класса $\overline{L_2}$ следует из более ранних работ А. Лахлана [55] и Дж. Шенфилда [78].

Так как класс высоких степеней H_1 совпадает с классом степеней, содержащих максимальные множества (см. [69]), то высокие в.п. степени также определимы в $\mathcal{E}$.

Для единственного оставшегося класса $\overline{L}_1$ Р. Эпштейн доказала его неопределимость.

Теорема 4.37 (см. [41])**.** *Совокупность не низких в.п. степеней не определима в $\mathcal{E}$.*

Определимость в.п. множеств (и, следовательно, в.п. степеней) в $\mathcal{E}_2$ установили С. Лемпп и А. Ниис (см. [60]). Они доказали, что элемент из $\mathcal{E}_2$ является в.п. тогда и только тогда, когда он является супремумом двух элементов с единственными дополнениями. Основным ингредиентом в их доказательстве является следующее наблюдение.

Лемма 4.38 (см. [60])**.** *В.п. множество A в $\mathcal{E}_2^*$ имеет d-в.п. дополнение $C-D$ тогда и только тогда, когда для некоторого в.п. множества B имеем $C - D =^* \overline{B}$, и либо $A =^* B$, либо A является мажорным подмножеством B (обозначение $A \subset_m B$).*

(Напомним, что в.п. множество A является *мажорным подмножеством* в.п. множества B, если $A \subset_\infty B$ и для каждого в.п. множества W имеем $\overline{B} \subseteq^* W \to \overline{A} \subseteq^* W$.)

Отсюда следует, что каждое в.п. множество A есть объединение двух непересекающихся в.п. множеств с единственными дополнениями: A является объединением двух непересекающихся в.п. множеств A_0 и A_1 низкой степени по известной теореме Сакса (см. [76]; см. также [8,

теорема VII.3.2]) и, следовательно, A_0, A_1 не могут быть мажорными подмножествами никаких множеств, так как мажорные подмножества имеют высокие степени (см. [51], а также [8, упр. X1.1.19]).

Ниже мы обобщим этот результат С. Лемппа и А. Нииса об определимости на более высокие уровни иерархии Ершова, наши рассуждения базируются на аналогичных наблюдениях.

Лемма 4.39. *Пусть $n > 2$ и A — в.п. множество. Если X является n-в.п. дополнением A в $\mathcal{E}^*_n$, то существует такое в.п. множество B, что $X =^* \overline{B}$, и либо $A =^* \overline{B}$, либо $A \subset_m B$.*

Доказательство. Пусть $X = (B_1 - B_2) \cup \ldots B_n$ для некоторых в.п. множеств $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots B_n$. Ясно, что $X \cap A = \emptyset$; поскольку $A, X \subseteq A \cup B_1$, имеем $A \cup B_1 =^* \omega$. По принципу редукции существует такое вычислимое множество $R \subset B_1$, что $A \cup R = \omega$. Ясно, что мы можем предположить, что X имеет вид $(R - B_2) \cup (R \cap B_3 - B_4) \cup \ldots \cup (R \cap B_{2m-1} - B_{2m})$ (если n число нечетное, то $B_{2m} = \emptyset$).

Если $\overline{A} \cap B_{2m} \neq^* \emptyset$, то для 3-в.п. множества $M = (\omega - B_{2m}) \cup A$ имеем $A, X \subseteq M$ и $M \subset_\infty \omega$, противоречие. Следовательно, $\overline{A} \cap B_{2m} =^* \emptyset$. С другой стороны,

$$B_1 \supseteq^* \overline{A}, \quad \overline{A} \cap (B_{2i} - B_{2i+1}) =^* \emptyset$$

для каждого $i, 1 \leqslant i < m$ (в противном случае, если для некоторого $i, 1 \leqslant i < m$ имеем

$$\overline{A} \cap (B_{2i} - B_{2i+1}) = \infty,$$

то $A, X \subseteq M$, где $M = (R - B_2) \cup \ldots \cup (R \cap B_{2i-1} - B_{2i}) \cup B_{2i+1} \cup A$, противоречие). Следовательно, $X =^* B_1 - A \cap B_1 = B_1 - A$, и утверждение вытекает из леммы 4.38. □

Определение 4.40. Пусть $A \subset_\infty B$ — в.п. множества. A называется *маленьким* в B (пишется $A \subset_s B$), если для каждой пары в.п. множеств X, Y, из $X \cap (B - A) \subseteq Y$ следует, что $Y \cup (X - B)$ является в.п. множеством.

Лемма 4.41. *Пусть $n \geqslant 1$, A и B — в.п. множества, $A \subset_s B$. Тогда для любого такого n-в.п. множества $S \subset A$, что $B - S$ является в.п., множество $\omega - S$ также в.п.*

Доказательство. Пусть $X = \omega$ и $Y = B - S$. Тогда $X \cap (B - A) = B - A \subset Y$. Поэтому $Y \cup (X - B) = Y \cup (\omega - B) = \omega - S$ в.п. □

Следующее утверждение доказано в [60, доказательство теоремы 2.4].

Лемма 4.42. *Если d-в.п. множество $A - B$ имеет единственное дополнение в $\mathcal{E}_2$, то оно в.п.*

Мы следующим образом обобщаем это утверждение.

Лемма 4.43. *Пусть $0 < n < \omega$. Если n-в.п. множество X имеет единственное дополнение в $\mathcal{E}_n$, то оно d-в.п.*

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай, когда $n = 3$: $X = (A - B) \cup C$ для некоторых в.п. множеств $A \supseteq B \supseteq C$. В общем случае утверждение доказывается индукцией с помощью аналогичных рассуждений.

Пусть 3-в.п. множество $Y = (P - Q) \cup L$ является дополнением для $(A - B) \cup C$. Рассмотрим два случая. (Для в.п. множества S_1 и n-в.п. множества S_2, $S_1 \subset S_2$, мы скажем, что S_1 является мажорным подмножеством S_2 ($S_1 \subset_m S_2$), если для каждого в.п. множества W имеем $\overline{S_2} \subseteq^* W \to \overline{S_1} \subseteq^* W$.)

Случай 1. P вычислимо. Как и в [60] доказывается, что

$$A - (B - C) =^* (A - P) \cup (A \cap (Q - L)) =^* A_1 \cup (A \cap Q) - A_1 \cup (A \cap L),$$

так как $(A - P) \cap (Q - L) =^* \emptyset$, где $A_1 = A - P$ — в.п. множество. Следовательно, $A - (B - C)$ — d-в.п. множество.

Случай 2. P невычислимо. Как и в [60], доказываем, что $\tilde{P} - (Q - L)$ также является дополнением $A - (B - C)$, где $\tilde{P} = U \cup (Q - L)$ и U — маленькое мажорное подмножество P ($U \subset_{sm} P$).

Предполагая, что $(A-B)\cup C$ не является d-в.п. множеством, докажем, что $\tilde{P}-(Q-L)\subset_\infty P-(Q-L)$, так что $A-(B-C)$ имеет два разных дополнения.

Для этого мы повторяем аргументацию из [60] (случай 2 доказательства аналогичной теоремы) с небольшими изменениями. Пусть R — такое вычислимое множество, что $R\subseteq A$ и $\overline{R}\subseteq P$. Соотношение $U\subset_{sm} P$ влечет, что $\overline{R}\subseteq U$. Теперь предположим, что

$$\tilde{P}-(Q-L)=^* P-(Q-L).$$

Пусть $S=R\cap(B-(C\cup L))\cap P$. S является d-в.п. множеством, которое разлагает P с другим в.п. компонентом $\overline{R}\cup Q$. Из леммы 4.41 следует, что S имеет в.п. дополнение. Пусть Z — такое в.п. множество, что $\overline{S}=Z$. Ясно, что $X,Y\subseteq Z$, и поэтому множество S конечно.

Теперь пусть $S_1=R\cap(B-C)\cap P$. Так как $S=^*\emptyset$, то имеем $S_1=^* B\cap L\cap R$. Следовательно, S_1 в.п. Отсюда следует, что

$$Z=\overline{R}\cup S_1\cup C\cup\overline{(B-C)}$$

— co-d-в.п. множество и, очевидно, $A-(B-C), P-(Q-L)\subseteq Z$.

Теперь докажем, что $\tilde{P}-(Q-L)=^* P-(Q-L)$ влечет, что множество $\overline{Z}$ бесконечно (это будет противоречить условию $A-(B-C)\vee P-(Q-L)=^* 1$). Предположение о том, что $\overline{Z}$ — конечное множество, влечет, что

$$A-(B-C)=^* R\cap\overline{S_1}\cup(Q-L)\cap A.$$

Но $(Q-L)\cap A=Q\cap C$, поэтому

$$A-(B-C)=^*(R\cap\overline{S_1})\cup(Q\cap C)$$

и, следовательно, $A-(B-C)$ d-в.п. множество, противоречие. □

Лемма 4.44.

(a) *Если d-в.п. множество $A-B$ в $\mathcal{E}_3$ имеет единственное* 3*-в.п. дополнение $X=(P-Q)\cup L$, то $A-B$ в $\mathcal{E}_3$ также является единственным d-в.п. дополнением $(P-Q)\cup L$.*

(b) *Если* 3*-в.п. множество X имеет единственное d-в.п. дополнение $A-B$ в $\mathcal{E}_3$, то X — d-в.п. множество.*

Доказательство. (a) Пусть A_1-B_1 — еще одно дополнение для X. Если, например,

$$(A_1-B_1)-(A-B)=\infty,$$

то

(i) если $\overline{A}\cap(A_1-A_2)=\infty$, то 3-в.п. множество $(P\cup A_1-(A\cup B_1\cup Q))\cup L$ является еще одним дополнением для $A-B$);

(ii) если $B\cap(A_1-B_1)=\infty$, то 3-в.п. множество

$$(P-(Q\cup(B\cap A_1-B_1\cap B)))\cup L=(P-Q\cup B\cap A_1)\cup B_1\cap B\cup L$$

— еще одно дополнение для $A-B$.

(b) Доказательство похоже на доказательство леммы 4.43. Мы рассматриваем два случая: когда множество A вычислимо и когда оно не вычислимо. В первом случае доказательство в точности повторяет доказательство такого же случая в [60, теорема 2.4] с необходимыми, но очевидными изменениями (в этом случае мы получим, что $A-B$ является в.п. множеством). Второй случай повторяет доказательство такого же случая в лемме 4.43. □

Замечание 4.45. Лемма 4.44(b) является более сильной формой леммы 4.43 для случая $n=3$: в условиях леммы 4.44(b) говорится, что для того, чтобы 3-в.п. множество X являлось d-в.п. множеством, достаточно, чтобы оно не имело в $\mathcal{E}_3$ двух различных d-в.п. множеств, каждое из которых является дополнением X (следовательно, X может иметь такими 3-в.п. множества).

Теорема 4.46. *Элемент $\mathcal{E}_n$ является в.п. тогда и только тогда, когда он является супремумом двух его элементов с единственными дополнениями.*

Доказательство (*для случая* $n = 3$). Часть $\Rightarrow$ докзывается в точности как в [60]: если некоторое 3-в.п. множество A является в.п., то разбиваем A на два непересекающихся в.п. множества A_0 и A_1 низкой степени. Каждое A_i имеет единственное дополнение $\overline{A_i}$; иначе, если A_i имеет еще одно d-в.п. дополнение, то по лемме 4.39 оно обязано быть мажорным подмножеством в.п. множества, но степени мажорных подмножеств являются высокими.

Часть $\Leftarrow$ теоремы следует из лемм 4.43 и 4.44: если 3-в.п. множество A является супремумом двух 3-в.п. множеств A_0 и A_1 с единственными 3-в.п. дополнениями $\tilde{A}_0$ и $\tilde{A}_1$ соответственно, то по лемме 4.43 A_0 и A_1 являются d-в.п. множествами. По лемме 4.44(a) A_0 и A_1 — единственные дополнения для $\tilde{A}_0$ и $\tilde{A}_1$ соответственно. Поэтому по лемме 4.44(b) оба $\tilde{A}_0$ и $\tilde{A}_1$ — d-в.п. множества. Таким образом, d-в.п. множества A_0 и A_1 имеют единственные d-в.п. дополнения и, по лемме 4.42, A_0 и A_1 являются в.п. множествами. Так как A является объединением A_0 и A_1, то оно также в.п. множество. □

Следствие 4.47. *Множество всех в.п. степеней и множество всех не вычислимых в.п. степеней определимы без параметров в каждой из* $\mathcal{E}_n$.

Следствие 4.48. *Пусть* $1 \leqslant m < n < \omega$. $\mathcal{E}_m$ *определима без параметров в* $\mathcal{E}_n$.

Теорема 4.49. *Множество всех высоких в.п. степеней* H_1 *определимо в каждой из* $\mathcal{E}_n$, $1 \leqslant n < \omega$.

Доказательство. Пусть $n \geqslant 1$ фиксировано и $\mathcal{A}$ следующее определимое в $\mathcal{E}_n$ множество n-в.п. множеств:

$$\mathcal{A} = \Big\{X : \ X - n\text{-в.п. и } (\forall e)\ \big(V_{n,e} \cap \overline{X} \text{ конечно} \vee \overline{V}_{n,e} \cap \overline{X} \text{ конечно}\big)\ \Big\}.$$

Известно, что для любого в.п. множества U высокой степени существует максимальное множество $M \equiv_T U$ (см. [69], а также [8, гл. 11, § 1]). Таким образом, для каждого максимального множества M имеем $M \in \mathcal{A}$: если некоторое n-в.п. множество

$$B = \bigcup_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \{(R_{2i+1} - R_{2i}) \cup (R_{2i} - R_{2i+1})\}$$

разбивает $\bar{M}$ на бесконечные части, то, очевидно, в.п. множество R_i для некоторого $0 \leqslant i \leqslant n-1$ также разбивает $\bar{M}$ на бесконечные части, что невозможно. Таким образом, $\mathcal{A}$ содержит все высокие в.п. степени: $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$.

Докажем обратное включение $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$. Пусть V — такое n-в.п. множество, что

$$(\forall e)\ \ (V_{n,e} \cap V \text{ конечно} \vee \bar{V}_{n,e} \cap V \text{ конечно}).$$

Ясно, что n должно быть четным числом,

$$V = \bigcup_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \{(A_{2i-1} - A_{2i})\}$$

для некоторых в.п. множеств $A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n$, и V — гипергипериммунное множество. Теорема Лахлана о гипергипериммунной разности в.п. множеств (см. [57]) гласит, что если для некоторых таких в.п. множеств X и Y, что $X \supset Y$, множество $X - Y$ гипергипериммунно, то существует такое вычислимое множество R, что $X - Y \subseteq R \subseteq X$. Поэтому существуют такие вычислимые множества $R_1, R_2, \ldots, R_k$, что

$$A_{2i} - A_{2i-1} \subseteq R_i \subseteq A_{2i-1}, \quad \{\omega - V\} = \overline{R_1} \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^{n/2} \left(A_{2i} \cap \left\{ \overline{\bigcup_{m>2i} R_m} \right\} \right) \right\}.$$

Отсюда следует, что V в.п. и степень V высокая. Таким образом, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$. □

До сих пор у нас не было примеров определимых подклассов $\mathcal{E}_n$, $1 < n < \omega$, содержащих не в.п. множества, отличных от $\mathcal{E}_m$, $m < n$. Пусть

$$\mathcal{D}_n := \mathcal{E}_{n+1} \cap \overline{\mathcal{E}_{n+1}}.$$

Имеем

$$\mathcal{E}_n \subset \mathcal{D}_n \subset \mathcal{E}_{n+1}$$

для каждого n, $1 \leqslant n < \omega$. Для каждого $n \geqslant 0$ класс множеств $\mathcal{D}_n$ определим в $\mathcal{E}_{n+1}$ формулой

$$(\forall X \in \mathcal{E}_{n+1})(X \in D_n \leftrightarrow \omega - X \in \mathcal{E}_{n+1}).$$

Следовательно, если бы при некотором $n > 0$ мы имели

$$\big\{ \deg(A) \mid A \in \mathcal{E}_n \big\} \subset \big\{ \deg(A) \mid A \in \mathcal{E}_{n+1} \cap \overline{\mathcal{E}_{n+1}} \big\} \subset \big\{ \deg(A) \mid A \in \mathcal{E}_{n+1} \big\},$$

то мы получили бы определимое в $\mathcal{E}_{n+1}$ множество $(n+1)$-в.п. степеней, отличное от $\mathcal{E}_n$. Однако, как следует из теоремы 4.50, это неверно.

Теорема 4.50. *Для каждого $n > 0$ имеем*

$$\big\{ \deg(A) \mid A \in \mathcal{E}_n \big\} = \big\{ \deg(A) : A \in \mathcal{E}_{n+1} \cap \overline{\mathcal{E}_{n+1}} \big\}.$$

Доказательство. Пусть X и Y — такие $(n+1)$-в.п. множества, что $X \cup Y = \omega$ и $X \cap Y = \emptyset$. Пусть $X = A - B$ и $Y = C - D$ для некоторых в.п. множеств A, C и n-в.п. множеств B, D, $B \subset A$ и $D \subset C$. Пусть f и g — такие $1-1$-вычислимые функции, что $A = \mathrm{rng}(f)$ и $C = \mathrm{rng}(g)$, и пусть $U = f^{-1}(B) \oplus g^{-1}(D)$. Тогда U является n-в.п. множеством и, поскольку $Y = \omega - X$, имеем $U \leqslant_T A - B$. Докажем, что и $A - B \leqslant_T U$. Для произвольного числа x перечисляем множества A и C до тех пор, пока x не перечислится в A или в C. Если, например, $x \in A$, то пусть $f(y) = x$ для некоторого y. Имеем $x \in A - B$ тогда и только тогда, когда $2y \notin U$. □

Обобщая определение в.п. мажорного подмножества, назовем n-в.п. множество A $(n > 1)$ *мажорным подмножеством* в.п. множества B, если $A \subset_\infty B$ и

$$\overline{B} \subseteq^* W \to \overline{A} \subseteq^* W$$

для каждого в.п. множества W.

Так же, как это было сделано для случая в.п. мажорных подмножеств (см. [8, X1.1.19]), можно доказать, что n-в.п. мажорные подмножества в.п. множеств (если они существуют) имеют высокие степени.

Теорема 4.51 (см. [16])**.** *Пусть $n > 0$. Если n — четное число, то n-в.п. мажорных подмножеств не существует. Если n — число нечетное, то у каждого не вычислимого в.п. множества B существует n-в.п. мажорное подмножество A собственной n-в.п. степени.*

Доказательство. Пусть $n = 2k$, $R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_{2k}$ — в.п. множества и

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} R_{2i} - R_{2i-1}$$

— такое n-в.п. подмножество в.п. множества B, что $B - A$ бесконечно. Ясно, что мы можем предположить, что R_{2k} бесконечно и, поскольку B в.п., каждое R_i является подмножеством B. Пусть C — такое бесконечное вычислимое подмножество R_{2k}, что $R_{2k} - C$ бесконечно. Тогда вычислимое множество $\overline{C}$ свидетельствует, что A не является мажорным подмножеством B.

Теперь пусть $n = 2k + 1$ и B — невычислимое в.п. множество. Построим n-в.п. множество A собственной n-в.п. степени такое, что $A \subset_m B$.

Искомое n-в.п. множество A строим, комбинируя две стратегии: стратегию Лахлана построения мажорного подмножества невычислимых в.п. множеств (см. [8, теорема X.4.6]) и стратегии построения n-в.п. множества собственной n-в.п. степени.

Строим A так, чтобы $A \not\equiv_T$ для всех e, $(n-1)$-в.п. множество V_e (в некоторой фиксированной нумерации всех $(n-1)$-в.п. множеств $\{V_e\}_{e \in \omega}$), используя то, что наибольшее количество изменений $A(x)$ на одну единицу больше, чем у $V_e(x)$.

Снова для простоты предположим, что $n = 3$. Искомое 3-в.п. множество A строим как $(D_1 - D_2) \cup D_3$, где $D_1 \supseteq D_2 \supseteq D_3$ — в.п. множества и $A \subset B$. Для выполнения условия «степень A не является d-в.п. степенью» мы для каждого d-в.п. множества V и частично вычислимых функционалов Φ и Ψ будем удовлетворять требованиям

$$\mathcal{R}_{V,\Phi,\Psi} : A \neq \Phi^V \vee V \neq \Psi^A,$$

где $\{(W_e, \Phi_e, \Psi_e)\}_{e\in\omega}$ — нумерация троек, состоящих из в.п. множеств W и частично вычислимых функционалов Φ и Ψ.

Для удовлетворения требования $R_{V,\Phi,\Psi}$ выбираем еще не использованное число $x \in B$ и ждем наступления такого шага s, на котором

$$A_s(x) = \Phi^V(x)[s] \wedge V\lceil\varphi(x)[s] = \Psi^A_s\lceil\varphi(x)[s]$$

(если это никогда не случится, то требование $R_{V,\Phi,\Psi}$ удовлетворено), устанавливаем запрет для остальных стратегий на интервал $A\lceil\psi_s\varphi_s(x)$, перечисляем x в D_1 и ждем наступления шага s', на котором

$$A_{s'}(x) = \Phi^{V\lceil\varphi(x)}(x)[s'] \wedge V\lceil\varphi(x)[s'] = \Psi^{A\lceil\psi\varphi(x)}\lceil\varphi(x)[s']$$

(снова, если этот шаг никогда не наступит, то требование удовлетворено). Перечисляем x в D_2 (т.е. убираем x из A) и запрещаем интервал $A\lceil\psi_{s'}\varphi_{s'}(x)$ для остальных требований. Ждем наступления шага s'', на котором

$$A_{s''}(x) = \Phi^{V\lceil\varphi(x)}(x)[s''] \wedge V\lceil\varphi(x)[s''] = \Psi^{A\lceil\psi\varphi(x)}\lceil\varphi(x)[s'']$$

(снова, если этот шаг никогда не наступит, то требование удовлетворено). Теперь кладем x в D_3 и запрещаем интервал $A\lceil\psi_{s''}\varphi_{s''}(x)$ для остальных требований.

Изменения $\Phi^V(x)$ между шагами s' и s'' могли произойти только из-за изменения в $V\lceil\varphi(x)$; они необратимы, так как V является 2-в.п. множеством.

Чтобы сделать множество A мажорным подмножеством B, мы используем предложенную Соаром модификацию конструкции Лахлана мажорного подмножества в.п. множества (см. [8, теорема X.4.6]). С этой целью выбираем последовательность подвижных маркеров $\{\Gamma_n\}_{n\in\omega}$, имея в конечном итоге $B - A = \{d_0 < d_1 < \ldots\}$, где d^s_n — позиция Γ_n к концу шага s, и $d_n = \lim_s d^s_n$. Мы должны удовлетворить следующим требованиям:

(i) $\mathcal{N}_e$: маркер Γ_e движется самое большее конечное число раз, и
(ii) $\mathcal{P}_e$: $\overline{B} \subseteq W_e \to \overline{A} \subseteq^* W_e$.

Следующим образом модифицируем конструкцию из [8, теорема X.4.6]. На шаге $s+1$ при удовлетворении требования $\mathcal{P}_e$ мы работаем с элементами $y \in B$ и $d^s_e < y$ только если они не запрещены $\mathcal{R}$-требованиями более высокого приоритета. (Если такие y или e не существуют, то просто переходим к следующему шагу.)

Так как каждое из требований $R_{V,\Phi,\Psi}$ удовлетворяется через конечное число нарушений, мы можем удовлетворить всем требованиям в точности так же, как у Соара в [8] с очевидными изменениями. □

Следствие 4.52. *Для каждого $n > 1$ и для каждого нечетного числа $m < n$ существует определимое в $\mathcal{E}_n$ подмножество высоких собственно m-в.п. степеней.*

Доказательство немедленно следует из теорем 4.51 и 4.46 (точнее, из следствия 4.48). □

Известно (см., например, [2]), что для каждого n, $1 < n < \omega$, существует высокая собственная n-в.п. степень. Естественно возникает вопрос: определим ли в $\mathcal{E}_n$ класс высоких n-в.п. степеней для каждого n, $1 < n < \omega$? Следующая теорема дает частичный ответ на этот вопрос.

Теорема 4.53. *Для каждого нечетного числа n, $1 \leqslant n < \omega$, для каждой высокой n-в.п. степени $\boldsymbol{d}$ и для каждого невычислимого в.п. множества A существует такое n-в.п. мажорное подмножество M множества A, что* $\deg(M) = \boldsymbol{d}$.

Доказательство этой теоремы может быть получено простым обобщением на случай n-в.п. множеств доказательства Лермана (см. [8, XI.2.14]) следующего результата: для каждой высокой в.п. степени $\boldsymbol{d}$ и для каждого невычислимого в.п. множества A существует такое его мажорное подмножество M, что $\deg(M) = \boldsymbol{d}$.

Следствие 4.54. *Для каждого нечетного числа n, $1 \leqslant n < \omega$, множество всех высоких n-в.п. степеней определимо в $\mathcal{E}_n$.*

Вопрос 4.55. Верно ли, что множество всех высоких n-в.п. степеней определимо в $\mathcal{E}_n$ при четных числах n?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арсланов М. М.* Структурные свойства степеней ниже $\mathbf{0}'$// Докл. АН СССР. — 1985. — *283*. — С. 270–273.
2. *Арсланов М. М.* О верхней полурешетке степеней ниже $\mathbf{0}'$// Изв. вузов. Мат. — 1988. — *7*. — С. 27–33.
3. *Арсланов М. М.* Структурная теория степеней неразрешимости: достижения и открытые проблемы// Алгебра и логика. — 2015. — *54*, № 4. — С. 529–535.
4. *Ершов Ю. Л.* Об одной иерархии множеств. I// Алгебра и логика. — 1968. — *7*. — С. 47–73.
5. *Ершов Ю. Л.* Об одной иерархии множеств. II// Алгебра и логика. — 1968. — *7*. — С. 15–47.
6. *Ершов Ю. Л.* Об одной иерархии множеств. III// Алгебра и логика. — 1970. — *9*. — С. 34–51.
7. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. — М.: Наука, 1987.
8. *Соар Р.* Вычислимо перечислимые множества и степени. — Казань: Казан. мат. об-во, 2000.
9. *Файзрахманов М. Х.* Разложимость низких 2-вычислимо перечислимых степеней и тьюринговы скачки в иерархии Ершова// Изв. вузов. Мат. — 2010.— *12*. — С. 58–66.
10. *Ямалеев М. М.* Разложимость 2-вычислимо перечмслимых степеней с избеганием конусов// Изв. вузов. Мат. — 2009. — *6*. — С. 76–80.
11. *Ямалеев М. М.* Структурные свойства тьюринговых степеней множеств из иерархии Ершова/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Казань: КГУ, 2009.
12. *Ambos-Spies K., Jockusch C. G. Jr., Shore R. A., Soare R. I.* An algebraic decomposition of the recursively enumerable degrees and the coincidence of several degree classes with the promptly simple degrees// Trans. Am. Math. Soc. — 1984. — *281*. — С. 109—128.
13. *Ambos-Spies K., Lerman M.* Lattice embeddings into the recursively enumerable degrees// J. Symb. Logic. — 1986. — *51*. — С. 257—272.
14. *Ambos-Spies K. Lerman M.* Lattice embeddings into the recursively enumerable degrees. II// J. Symb. Logic. — 1989. — *54*. — С. 735—760.
15. *Andrews U., Kuyper R., Lempp S., Soskova M., Yamaleev M. M.* Nondensity of double bubbles in the D.C.E. degrees// Lect. Notes Comput. Sci. — 2017. — *10010*. — С. 547–562.
16. *Arslanov M. M.* Definable relations in Turing degree structures// J. Logic Comput. — 2013. — *23*, № 6. — С. 1145–1154.
17. *Arslanov M. M., Cooper S. B., Li A.* There is no low maximal d.c.e. degree// Math. Logic Quart. — 2000. — *46*. — С. 409–416.
18. *Arslanov M. M., Cooper S. B., Li A.* There is no low maximal d.c.e. degree. Corrigendum// Math. Logic Quart. — 2004. — *50*. — С. 628–636.
19. *Arslanov M. M., Kalimullin I. Sh., Lempp S.* On Downey's conjecture// J. Symb. Logic. — 2010. — *75*. — С. 401–441.
20. *Arslanov M. M., LaForte G. L., Slaman T. A.* Relative recursive enumerability in the difference hierarchy// J. Symb. Logic. — 1998. — *63*. — С. 411–420.
21. *Arslanov M. M., Lempp S., Shore R. A.* On isolating r.e. and isolated d-r.e. degrees// London Math. Soc. Lect. Note Ser. — 1996. — *224*. — С. 61–80.
22. *Arslanov M. M., Lempp S., Shore R. A.* Interpolating d-r.e. and REA degrees between r.e. degrees// Ann. Pure Appl. Logic. — 1996. — *78*. — С. 29–56.
23. *Barmpalias G., Cai M., Lempp S., Slaman T. A.* On the existence of a strong minimal pair// J. Math. Logic. — 2015. — *15*, № 1. — 1550003.
24. *Cai M., Shore R. A., Slaman T. A.* The n-r.e. degrees: undecidability and Σ_1 substructures// J. Math. Logic. — 2012. — *12*.— С. 1–30.
25. *Cholak P.* Automorphisms of the lattice of recursively enumerable sets/ Mem. Am. Math. Soc. — 1995. — *541*.

26. *Cholak P., Harrington L.* On the definability of the double jump in the computably enumerable sets// J. Math. Logic. — 2002.— *2*. — С. 261–296.
27. *Cooper S. B.* Degrees of Unsolvability/ Ph.D. Thesis. — Leicester: Leicester University, 1971.
28. *Cooper S. B.* The jump is definable in the structure of the degrees of unsolvability// Bull. Am. Math. Soc., New Ser. — 1990. — *23*, № 1. — С. 151–158.
29. *Cooper S. B.* The density of the low$_2$ n-r.e. degrees// Arch. Math. Logic. — 1991. — *31*. — С. 19–24.
30. *Cooper S. B.* A splitting theorem for the n-r.e. degrees// Proc. Am. Math. Soc. — 1992. — *115*. — С. 461–471.
31. *Cooper S. B., Harrington L., Lachlan A. H., Lempp S., Soare R. I.* The d-r.e. degrees are not dense// Ann. Pure Appl. Logic. — 1991. — *55*. — С. 125–151.
32. *Cooper S. B., Harrington L., Lachlan A. H., Lempp S., Soare R. I.* Corrigendum to «The d.r.e. degrees are not dense»// Ann. Pure Appl. Logic. — 2017. — *168*. — С. 2164–2165.
33. *Cooper S. B., Li A.* Non-uniformity and generalised Sacks splitting// Acta Math. Sinica. Engl. Ser. — 2002. — *18*. — С. 327–334.
34. *Cooper S. B., Li A.* Splitting and cone avoidance in the d.c.e. degrees// Sci. China. Ser. A. — 2002. — *45*. — С. 1135–1146.
35. *Cooper S. B., Li A.* Turing definability in the Ershov hierarchy// J. London Math. Soc. (2). — 2002. — *66*. — С. 513–528.
36. *Cooper S. B., Yi X.* Isolated d.r.e. degrees/ Preprint Ser. 17. — Universiry of Leeds, 1995.
37. *Downey R. G.* D.r.e. degrees and the nondiamond theorem// Bull. London Math. Soc. — 1989. — *21*. — С. 43–50.
38. *Downey R., Hirschfeldt D.* Algorithmic Randomness and Complexity. — Springer-Verlag, 2010.
39. *Downey R. G., Laforte G. A., Shore R. I.* Decomposition and infima in the computably enumerable degrees// J. Symb. Logic. — 2003. — *68*. — С. 551–579.
40. *Downey R. G., Stob M.* Splitting theorems in recursion theory// Ann. Pure Appl. Logic. — 1993. — *65*. — С. 1–106.
41. *Epstein R.* The nonlow computably enumerable degrees are not definable in $\mathcal{E}$// Trans. Am. Math. Soc. — 2013. — *365*. — С. 1305–1345.
42. *Epstein R. L.* Degrees of Unsolvability: Structure and Theory/ Lect. Notes Math. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1979. — *759*.
43. *Fang Ch., Liu J., Wu G., Yamaleev M. M.* Nonexistence of minimal pairs in $L[\boldsymbol{d}]$// Lect. Notes Comput. Sci. — 2015. — *9136*. — С. 177–185.
44. *Fang Ch., Wu G., Yamaleev M. M.* On a problem of Ishmukhametov// Arch. Math. Logic. — 2013. — *52*. — С. 733–741.
45. *Feiner L.* Hierarchies of Boolean algebras// J. Symb. Logic. — 1970. — *35*. — С. 305–373.
46. *Harrington L.* Understanding Lachlan's monster paper/ handwritten notes, 1980.
47. *Harrington L., Shelah S.* The undecidability of the recursively enumerable degrees (research announcement)// Bull. Am. Math. Soc. — 1982. — *6*, № 1. — С. 79–80.
48. *Harrington L., Soare R. I.* The Δ^0_3-automorphism method and noninvariant classes of degrees// J. Am. Math. Soc. — 1996. — *9*. — С. 617–666.
49. *Ishmukhametov Sh. T.* Downward density of exact degrees// Arch. Math. Logic. — 1999. — *38*. — С. 373–386.
50. *Ishmukhametov Sh. T.* On relative enumerability of Turing degrees// Arch. Math. Logic. — 2000. — *39*. — С. 145–154.
51. *Jockusch C. G., Jr.* Review of Lerman [12]// Math. Reviews. — 1973. — *45*. — № 3200.
52. *Jockusch C., Shore R.* Pseudojump operators, II: Transfinite iterations, hierarchies and minimal covers// J. Symb. Logic. — 1984. — *49*. — С. 1205–1236.
53. *Lachlan A. H.* Lower bounds for pairs of recursively enumerable degrees// Proc. London Math. Soc. — 1966. — *16*. — С. 537–569.
54. *Lachlan A. H.* The elementary theory of recursively enumerable sets// Duke Math. J. — 1968. — *35*. — С. 123–146.
55. *Lachlan A. H.* Degrees of recursively enumerable sets which have no maximal supersets// J. Symb. Logic. — 1968. — *33*. — С. 431–443.
56. *Lachlan A. H.* Distrubutive initial segments of the degrees of unsolvability// Z. Math. Logik Grundlag. Math. — 1968. — *14*. — С. 457–472.
57. *Lachlan A. H.* On the lattice of recursively enumerable sets// Trans. Am. Math. Soc. — 1968. — *130*. — С. 1–37.

58. *Lachlan A. H.* A recursively enumerable degree which will not split over all lesser ones// Ann. Math. Logic. — 1975. — *9*. — С. 307–365.
59. *Lempp S., Lerman M., Solomon D.* Embedding finite lattices into the computably enumerable degrees—a status survey// в кн.: «Logic Colloquium'02»/ Proc. Ann. Eur. Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic. — Lect. Notes Logic. — 2006. — *27*. — С. 206–229.
60. *Lempp S., Nies A.* Differences of computably enumerable sets// Math. Log. Q. — 2000. — *46*. — С. 555–561.
61. *Lempp S., Nies A., Slaman T. A.* The Π_3-theory of the computably enumerable Turing degrees is undecidable// Trans. Am. Math. Soc. — 1998. — *350*, № 7. — С. 2719–2736.
62. *Lerman M.* Degrees of Unsolvability/ Perspectives in Mathematical Logic. Omega Series. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1983.
63. *Lerman M.* Embeddings into the recursively enumerable degrees// в кн.: «Computability, Enumerability, Decidability: Directions in Recursion Theory» (S. B. Cooper, T. A. Slaman, and S. S. Wainer, eds.)/ London Math. Soc. Lect. Notes. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. — *224*. — С. 185–204.
64. *Lerman M., Shore R. A.* Decidability and invariant classes for degree structures// Trans. Am. Math. Soc. — 1988. — *301*, № 2. — С. 669–692.
65. *Lerman M. Shore R. A., Soare R. I.* The elementary theory of the recursively enumerable degrees is not $\aleph_0$-categorical// Adv. Math. — 1984. — *53*. — С. 301–320.
66. *Li A.* The low splitting theorem in the difference hierarchy// Lect. Notes Comp. Sci. — 2005. — *3526*. — С. 287–296.
67. *Li A., Yi X.* Cupping the recursively enumerable degrees by d.r.e. degrees// Proc. London Math. Soc. (3). — 1999. — *78*. — С. 1–21.
68. *Liu J., Wu G., Yamaleev M. M.* Downward density of exact degrees// Lobachevskii J. Math. (4). — 2015. — *36*. — С. 389–398.
69. *Martin D. A.* Classes of recursively enumerable sets and degrees of unsolvability// Z. Math. Logik Grundl. Math. — 1966. — *12*. — С. 295–310.
70. *Miller D. P.* High recursively enumerable degrees and the anti-cupping property// Lect. Notes Math. — 1981. — *859*. — С. 230-–245.
71. *Nies A., Slaman T. A., Shore R. A.* Interpretability and definability in the recursively enumerable degrees// Proc. Lon. Math. Soc. (3). — 1998. — *77*. — С. 241–291.
72. *Putnam H.* Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski// J. Symb. Logic. — 1965. — *30*. — С. 49–57.
73. *Robinson R. W.* Interpolation and embedding in the recursively enumerable degrees// Ann. Math. (2).— 1971. — *93*. — С. 285–314.
74. *Rogers H., Jr.* Theory of Recursive Functions and Effective Computability. — New York: McGraw Hill, 1967.
75. *Sacks G. E.* A minimal degree less than $\mathbf{0}'$// Bull. Am. Math. Soc. — 1961. — *67*. — С. 416–419.
76. *Sacks G. E.* On the degrees less than $\mathbf{0}'$// Ann. Math. (2). — 1963. — *77*. — С. 211–231.
77. *Sacks G. E.* The recursively enumerable degrees are dense// Ann. Math. (2). — 1964. — *80*. — С. 300–312.
78. *Shoenfield J. R.* Degrees of classes of RE sets// J. Symb. Logic. — 1976. — *41*. — С. 695–696.
79. *Shore R. A.* On the $\forall\exists$-sentences of α-recursive theory// в кн.: «Generalized Recursion Theory, II»/ Proc. Second Symp. on Generalized Recursion Theory–1977. — Oslo, 1978.
80. *Shore R. A.* Finitely generated codings and the degrees r.e. in a degree $\boldsymbol{d}$// Proc. Am. Math. Soc. — 1982. — *84*. — С. 256–263.
81. *Shore R. A., Slaman T. A.* Working below a low_2 recursively enumerable degrees// Arch. Math. Logic. — 1990. — *29*. — С. 201–211.
82. *Shore R. A., Slaman T. A.* A splitting theorem for n-REA degrees// Proc. Am. Math. Soc. — 2001. — *129*. — С. 3721–3728.
83. *Slaman T. A., Soare R. I.* Algebraic aspects of the computably enumerable degrees// Proc. Nat. Ac. Sci. — 1995. — *2*. — С. 617–621.
84. *Slaman T. A., Soare R. I.* Extension of embeddings in the computably enumerable degrees// Ann. Math. (2). — 2001. — *154*. — С. 1—43.
85. *Slaman T. A., Woodin W.* Definability in Turing degrees// Ill. J. Math. (2). — 1986. — *30*. — С. 320–334.
86. *Welch L.* A hierarchy of families of recursively enumerable degrees and a theorem on bounding minimal pairs/ Ph.D. Thesis. — Urbana: University of Illinois, 1980.
87. *Wu G.* Isolation and lattice embedding// J. Symb. Logic. — 2002. — *67*. — С. 1055–1064.
88. *Wu G., Yamaleev M. M.* Isolation: motivations and applications// Uch. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki (2). — 2012. — *154*. — С. 204—217.

89. *Yang Y., Yu L.* On Σ_1-structural differences among Ershov hierarchies// J. Symb. Logic. — 2006. — *71*. — С. 1223–1236.

М. М. Арсланов
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: Marat.Arslanov@kpfu.ru

М. М. Ямалеев
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 157 (2018). С. 42–58

УДК 510.674, 510.532, 512.56

СПЕКТРЫ КАТЕГОРИЧНОСТИ ВЫЧИСЛИМЫХ СТРУКТУР

© 2018 г. **Н. А. БАЖЕНОВ**

Аннотация. Спектром категоричности вычислимой структуры S называют множество всех тьюринговых степеней, которые могут вычислять изоморфизмы между произвольными вычислимыми представлениями S. Степень категоричности S — это наименьшая степень из спектра категоричности S. В статье приводится обзор результатов о спектрах и степенях категоричности для вычислимых структур. Особое внимание уделено результатам о степенях категоричности для линейных порядков и булевых алгебр. Строится новая серия примеров степеней категоричности для линейных порядков.

Ключевые слова: вычислимая категоричность, спектр категоричности, степень категоричности, вычислимая структура, линейный порядок, булева алгебра, разрешимая категоричность, автоустойчивость, автоустойчивость относительно сильных конструктивизаций, индексное множество.

AMS Subject Classification: 03C57, 03D45

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Одной из важных проблем в современной теории вычислимых моделей является изучение алгоритмической сложности изоморфизмов между вычислимыми структурами. Исследования в этой области восходят к работам А. И. Мальцева [25–27] и А. Фрёлиха и Дж. Шефердсона [71]. Е. Б. Фокина, И. Ш. Калимуллин и Р. Миллер (см. [68]) ввели понятие спектра категоричности, позволяющее давать описание тьюринговых степеней изоморфизмов между различными вычислимыми представлениями данной счётной структуры $\mathcal{S}$.

Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень. Вычислимую структуру $\mathcal{S}$ называют $\mathbf{d}$-*вычислимо категоричной* (или $\mathbf{d}$-*автоустойчивой*), если для любой вычислимой структуры $\mathcal{A}$, изоморфной $\mathcal{S}$, существует $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм f, действующий из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{S}$. В случае, если $\mathbf{d}$ — вычислимая степень, говорят, что $\mathcal{S}$ *вычислимо категорична*. Понятие вычислимо категоричной структуры было введено в [26]. *Спектром категоричности* структуры $\mathcal{S}$ называют множество

$$\mathrm{CatSpec}(\mathcal{S}) = \{\mathbf{d} : \mathcal{S} \text{ является } \mathbf{d}\text{-вычислимо категоричной}\}.$$

Тьюрингова степень $\mathbf{c}$ является *степенью категоричности* структуры $\mathcal{S}$, если $\mathbf{c}$ есть наименьшая степень в спектре $\mathrm{CatSpec}(\mathcal{S})$.

В данной статье приводится обзор результатов, связанных со следующей естественной проблемой.

Проблема 1. Какие множества тьюринговых степеней могут быть спектрами категоричности для вычислимых структур? В частности, какие степени могут быть степенями категоричности?

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-11-00028).

В разделе 2 излагаются результы о **d**-вычислимой категоричности для вычислимых структур. Особую роль в этой области играет изучение $\mathbf{0}^{(\alpha)}$-вычислимой категоричности, где α — вычислимый ординал, а $\mathbf{0}^{(\alpha)}$ — α-й скачок вычислимой тьюринговой степени. Исследование $\mathbf{0}^{(\alpha)}$-вычислимой категоричности тесно связано с понятиями Δ^0_α-размерности и относительной Δ^0_α-категоричности (основные результаты об этих понятиях изложены в п. 2.1). Изучение **d**-вычислимой категоричности для вычислимых структур из различных алгебраических классов естественным образом приводит к понятию класса структур, полного относительно спектров категоричности (см. п. 2.2). В п. 2.3 даётся обзор известных в настоящее время спектров и степеней категоричности. В п. 2.4 излагаются результаты о разрешимой категоричности, которая является естественным аналогом вычислимой категоричности для категории разрешимых структур. Кроме того, приводятся результаты о сложности индексных множеств для классов вычислимо категоричных и разрешимо категоричных структур.

Естественным продолжением проблемы 1 является следующий вопрос.

Проблема 2. Пусть K — некоторый естественный класс алгебраических структур (например, класс всех абелевых групп или класс всех колец). Какие тьюринговы степени могут быть степенями категоричности для структур из K?

Отметим, что в некоторых случаях решение этой проблемы может быть полностью сведено к решению проблемы 1; например, в [78] доказано, что любая степень категоричности является степенью категоричности некоторой двухступенно нильпотентной группы (подробнее см. в п. 2.2). Тем не менее, для многих классов K проблема 2 интересна сама по себе; при этом подходы к её решению должны быть основаны на сложных методах, существенно использующих алгебраические и алгоритмические свойства класса K.

В данной работе внимание сконцентрировано на проблеме 2 для линейных порядков и булевых алгебр. Основные известные результаты в этом направлении изложены в разделе 3. Кроме того, в теореме 3.4 строится новая серия примеров степеней категоричности для линейных порядков: если α — бесконечный вычислимый ординал и $\mathbf{d}$ — такая тьюрингова степень, что $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}^{(\alpha+1)}$ и $\mathbf{d}$ является 2-вычислимо перечислимой относительно $\mathbf{0}^{(\alpha+1)}$, то существует разреженный линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий степень категоричности $\mathbf{d}$.

2. **d**-Вычислимая категоричность

Предварительные сведения по теории вычислимости можно найти в монографиях [30, 31, 99]. Все рассматриваемые структуры имеют вычислимые языки. Формулы логики первого порядка отождествляются с их гёделевскими номерами. Считаем, что для любой рассматриваемой счётной структуры её носитель является подмножеством множества натуральных чисел ω.

Структура $\mathcal{S}$ называется *жёсткой*, если она имеет только один автоморфизм. Через $Th(\mathcal{S})$ обозначаем элементарную теорию структуры $\mathcal{S}$. Если $X \subseteq \omega$, то через $\overline{X}$ обозначается дополнение X, т.е. множество $\omega \setminus X$. Стандартное сокращение *в.п.* используется для термина *вычислимо перечислимый*.

Пусть n — натуральное число. Говорят, что счётная структура $\mathcal{M}$ языка L является *n-разрешимой*, если её Σ_n-диаграмма является вычислимым множеством, т.е. существует алгоритм, позволяющий по произвольным конечной Σ_n-формуле $\psi(x_0, \ldots, x_n)$ языка L и набору $\bar{a} = a_0, \ldots, a_n$ из $\mathcal{M}$ определить, выполнено ли условие $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$.

Бесконечные формулы языка L — это формулы логики $L_{\omega_1\omega}$. Для счётного ординала α можно стандартным образом определить *бесконечные* Σ_α- и Π_α-*формулы* (подробности см., например, в [40, гл. 6]). В доказательствах из раздела 3 будут использоваться *вычислимые бесконечные формулы* языка L, введённые в [39]. Приведём краткое неформальное описание для этого класса формул. В вычислимых бесконечных формулах помимо обычных способов образования формул первого порядка могут также использоваться дизъюнкции и конъюнкции вычислимо перечислимых множеств формул. Пусть α — ненулевой вычислимый ординал.

1. Вычислимые Σ_0- и Π_0-формулы — это бескванторные формулы первого порядка в языке L.

2. Вычислимая Σ_α-формула (Σ^c_α-формула) — это в.п. дизъюнкция вида
$$\bigvee_i \exists \bar{u}_i \psi_i(\bar{x}, \bar{u}_i),$$
где каждая ψ_i является Π_{β_i}-формулой для некоторого $\beta_i < \alpha$.
3. Вычислимая Π_α-формула (Π^c_α-формула) — это в.п. конъюнкция вида
$$\bigwedge_i \forall \bar{u}_i \psi_i(\bar{x}, \bar{u}_i),$$
где каждая ψ_i является Σ_{β_i}-формулой для некоторого $\beta_i < \alpha$.

Формальное определение вычислимых бесконечных формул и их основные свойства можно найти, например, в [40, гл. 7].

Более подробно с основными понятиями и результатами по теории вычислимых моделей можно ознакомиться в монографиях [16, 19, 40] и обзорах [66, 72, 76].

2.1. Δ^0_α-Размерность и относительная Δ^0_α-категоричность. Особую роль в исследовании **d**-вычислимой категоричности играет случай, когда степень **d** имеет вид $\mathbf{0}^{(\alpha)}$, где α — вычислимый ординал. С $\mathbf{0}^{(\alpha)}$-вычислимой категоричностью связан целый ряд важных результатов в теории вычислимых моделей. Бóльшая часть этих результатов была получена ещё до начала систематического изучения спектров категоричности (см. [68]).

Пусть α — вычислимый ординал. Говорят, что вычислимая структура $\mathcal{S}$ является *относительно Δ^0_α-категоричной*, если для любой структуры $\mathcal{A}$, изоморфной $\mathcal{S}$, существует $\Delta^0_\alpha(\mathcal{A})$-вычислимый изоморфизм, действующий из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{S}$.

Нетрудно заметить, что относительная $\Delta^0_{1+\alpha}$-категоричность влечёт $\mathbf{0}^{(\alpha)}$-вычислимую категоричность. В общем случае понятия $\Delta^0_{1+\alpha}$-категоричности и $\mathbf{0}^{(\alpha)}$-вычислимой категоричности не совпадают. С. С. Гончаров построил первый пример вычислимо категоричной структуры, не являющейся относительно Δ^0_1-категоричной (см. [8]). В [74] доказано, что для любого вычислимого ординала-последователя α существует $\mathbf{0}^{(\alpha)}$-вычислимо категоричная структура, не являющаяся относительно $\Delta^0_{1+\alpha}$-категоричной. В [55] аналогичный результат получен для предельных ординалов α. Более того, в [60] доказано, что для любого вычислимого ординала β существует вычислимо категоричная структура, не являющаяся относительно Δ^0_β-категоричной.

Относительно Δ^0_α-категоричные структуры имеют достаточно хорошее синтаксическое описание (в терминах вычислимых бесконечных формул), которое, в частности, позволяет использовать эти структуры для построения различных примеров спектров категоричности.

Формальным Σ^0_α-семейством Скотта для счётной структуры $\mathcal{S}$ языка L называют в.п. множество Ψ, состоящее из Σ^c_α-формул языка L (возможно, имеющих конечный набор параметров $\bar{c}$ из $\mathcal{S}$) и удовлетворяющее следующим условиям:

(a) любой конечный набор элементов $\bar{a}$ из $\mathcal{S}$ удовлетворяет некоторой формуле ψ из Ψ;
(b) если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — наборы из $\mathcal{S}$, удовлетворяющие одной и той же формуле ψ из Ψ, то структуры $(\mathcal{S}, \bar{a})$ и $(\mathcal{S}, \bar{b})$ изоморфны.

Теорема 2.1 (см. [42, 54])**.** *Пусть α — ненулевой вычислимый ординал. Вычислимая структура $\mathcal{S}$ является относительно Δ^0_α-категоричной в том и только том случае, когда $\mathcal{S}$ обладает формальным Σ^0_α-семейством Скотта.*

Для структур из многих естественных алгебраических классов K понятия вычислимой категоричности и относительной Δ^0_1-категоричности совпадают. Более того, в таких случаях достаточно часто можно получить полное алгебраическое описание вычислимо категоричных структур, принадлежащих K. Приведём несколько примеров.

Теорема 2.2 (см. [15, 95])**.** *Для вычислимого линейного порядка $\mathcal{L}$ следующие условия эквивалентны*:

(1) *$\mathcal{L}$ вычислимо категоричен*;
(2) *$\mathcal{L}$ относительно Δ^0_1-категоричен*;

(3) *$\mathcal{L}$ имеет лишь конечное число пар соседних элементов.*

Теорема 2.3 (см. [15, 94])**.** *Для вычислимой булевой алгебры $\mathcal{B}$ следующие условия эквивалентны*:

(2) *$\mathcal{B}$ вычислимо категорична*;
(2) *$\mathcal{B}$ относительно Δ^0_1-категорична*;
(2) *$\mathcal{B}$ имеет лишь конечное число атомов.*

Теорема 2.4 (см. [7, 51, 98])**.** *Для вычислимой абелевой p-группы $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны*:

(1) *$\mathcal{A}$ вычислимо категорична*;
(2) *$\mathcal{A}$ относительно Δ^0_1-категорична*;
(3) *$\mathcal{A}$ изоморфна либо $F \oplus \left(\bigoplus\limits_{i<\alpha} \mathbb{Z}(p^\infty)\right)$, либо $F \oplus \left(\bigoplus\limits_{i<\omega} \mathbb{Z}(p^{m+1})\right) \oplus \left(\bigoplus\limits_{j<n} \mathbb{Z}(p^\infty)\right)$, где F — это конечная группа, $\alpha \leqslant \omega$ и $m, n \in \omega$.*

Подобные результаты также получены для деревьев конечной высоты (рассматриваемых как частичные порядки; см. [81]), структур эквивалентности (см. [52]), структур с вложением (см. [34]). Кроме того, известно полное описание вычислимо категоричных структур в следующих классах: упорядоченные абелевы группы (см. [75]), периодические абелевы группы (см. [86]), булевы алгебры с конечным числом выделенных идеалов и множеств атомов в факторе по этим идеалам (см. [35]) и т. д.

В [6] доказано, что любая вычислимо категоричная 2-разрешимая структура является относительно Δ^0_1-категоричной. В [23] показано, что этот результат нельзя обобщить для 1-разрешимых структур: существует вычислимо категоричная 1-разрешимая структура, не имеющая формального Σ^0_1-семейства Скотта. Тем не менее, в [61] доказано, что любая вычислимо категоричная 1-разрешимая структура является относительно Δ^0_2-категоричной.

Существует достаточно много работ, в которых исследуются относительная $\Delta^0_{1+\alpha}$-категоричность и $\mathbf{0}^{(\alpha)}$-вычислимая категоричность для структур из естественных алгебраических классов: булевых алгебр (см. [24, 37, 43, 48, 83]), линейных порядков (см. [24, 33, 38, 83]), абелевых групп (см. [62–64, 85]), полей (см. [79, 91, 92]) и т. д. Более подробный обзор результатов, полученных в этих и других работах, можно найти, например, в [66, 67, 84].

Δ^0_α-Размерностью вычислимой структуры $\mathcal{S}$ называют число вычислимых представлений $\mathcal{S}$ с точностью до Δ^0_α-вычислимого изоморфизма. Δ^0_1-Размерность часто называют *вычислимой размерностью*. Отметим, что структура $\mathcal{S}$ является $\mathbf{0}^{(\alpha)}$-вычислимо категоричной в том и только том случае, когда её $\Delta^0_{1+\alpha}$-вычислимая размерность равна 1.

Для любого натурального числа $n \geqslant 2$ в [8] построен вычислимый жёсткий граф, имеющий вычислимую размерность n. Все известные до [8] примеры вычислимых структур либо были вычислимо категоричными, либо имели бесконечную вычислимую размерность. В [74] для любого вычислимого ординала-последователя $\alpha \geqslant 2$ и любого ненулевого $n \leqslant \omega$ была построена вычислимая жёсткая структура, имеющая Δ^0_α-размерность n. До сих пор остаётся открытым следующий вопрос: если β — вычислимый предельный ординал, то может ли вычислимая структура иметь конечную Δ^0_β-размерность $n \geqslant 2$?

В [9] доказано следующее: если у структуры $\mathcal{S}$ имеются вычислимые копии $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, которые $\mathbf{0}'$-вычислимо изоморфны, но не вычислимо изоморфны, то вычислимая размерность $\mathcal{S}$ бесконечна. В частности, отсюда следует, что для любой $\mathbf{0}'$-вычислимо категоричной структуры её вычислимая размерность равна либо 1, либо ω. Кроме того, известно, что для любой вычислимой структуры $\mathcal{S}$, принадлежащей одному из перечисленных ниже классов K, вычислимая размерность $\mathcal{S}$ всегда равна либо 1, либо ω: алгебраически замкнутые поля (см. [87]), линейные порядки (см. [15]), булевы алгебры (см. [15]), упорядоченные абелевы группы (см. [75]), деревья (рассматриваемые как частичные порядки; см. [81, 89]), архимедовы упорядоченные поля (см. [82]), периодические абелевы группы (см. [86]).

2.2. Классы, полные относительно спектров категоричности. Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень. $\mathbf{d}$-*Вычислимой размерностью* вычислимой структуры $\mathcal{S}$ называют количество вычислимых представлений $\mathcal{S}$ с точностью до $\mathbf{d}$-вычислимого изоморфизма. Отметим, что для вычислимого ординала α понятие $\mathbf{0}^{(\alpha)}$-вычислимой размерности совпадает с понятием $\Delta^0_{1+\alpha}$-размерности.

Говорят, что класс структур K является *полным относительно эффективных размерностей*, если для любой вычислимой структуры $\mathcal{S}$ существует такая вычислимая структура $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ из класса K, что $\mathbf{d}$-вычислимые размерности $\mathcal{S}$ и $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ совпадают для любой тьюринговой степени $\mathbf{d}$.

Понятие полного относительно эффективных размерностей класса введено в работе Д. Р. Хиршфельдта, Б. Хусаинова, Р. А. Шора и А. М. Слинько [78]. Более того, в [78] определено более сильное понятие *HKSS-полного* класса (сам термин «*HKSS*-полный» впервые использован в [93]). Подробное изложение результатов об *HKSS*-полных классах выходит за рамки данного обзора. Формальные определения и основные результаты в этом направлении можно найти, например, в [78, 90, 93].

Из результатов работы [78] вытекает, что следующие классы являются полными относительно эффективных размерностей: ориентированные графы, неориентированные графы без петель, частичные порядки, недистрибутивные решётки, кольца (с делителями нуля), области целостности произвольной фиксированной характеристики, коммутативные полугруппы, двухступенно нильпотентные группы. Кроме того, известна полнота относительно эффективных размерностей для следующих классов: поля нулевой характеристики (см. [90]), папповы проективные плоскости (см. [22]), свободно порождённые проективные плоскости (см. [21]), булевы алгебры с операторами (см. [80]), полимодальные алгебры (см. [46]), структуры с двумя отношениями эквивалентности (см. [28, 32]).

Многие естественные классы структур не являются полными относительно эффективных размерностей. В частности, не может быть полным относительно эффективных размерностей никакой класс K, обладающий следующим свойством: любая вычислимая структура из K имеет вычислимую размерность 1 или ω. Поэтому, например, класс булевых алгебр не полон относительно эффективных размерностей (см. [15]).

Определение 2.1. Будем говорить, что класс структур K является *полным относительно спектров категоричности*, если для любой вычислимой структуры $\mathcal{S}$ существует такая вычислимая структура $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ из класса K, что спектры категоричности для $\mathcal{S}$ и $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ совпадают.

Нетрудно понять, что полнота относительно эффективных размерностей всегда влечёт полноту относительно спектров категоричности. Вопрос о том, верно ли обратное утверждение, до сих пор является открытым.

Понятие класса, полного относительно спектров категоричности, позволяет пользоваться следующим соглашением. В дальнейшем в формулировках некоторых результатов не будет уточняться, какому конкретному классу принадлежит вычислимая структура $\mathcal{S}$, имеющая интересующий нас спектр категоричности. Если K — это полный относительно эффективных размерностей класс, то всегда можно подобрать структуру $\mathcal{S}_K$ из K с таким же спектром. Поэтому, например, можно считать, что $\mathcal{S}$ — это ориентированный граф или коммутативная полугруппа.

2.3. Известные примеры спектров категоричности. Говорят, что тьюрингова степень $\mathbf{d}$ является 2-*вычислимо перечислимой* (2-*в.п.*) относительно тьюринговой степени $\mathbf{x}$, если существуют такие $\mathbf{x}$-вычислимо перечислимые множества A и B, что $\deg_T(A \setminus B) = \mathbf{d}$.

Теорема 2.5 (см. [68])**.** *Пусть n — натуральное число; $\mathbf{d}$ — такая тьюрингова степень, что $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}^{(n)}$ и $\mathbf{d}$ является 2-вычислимо перечислимой относительно $\mathbf{0}^{(n)}$. Тогда $\mathbf{d}$ является степенью категоричности. Кроме того, $\mathbf{0}^{(\omega)}$ также является степенью категоричности.*

Теорема 2.6 (см. [56])**.** *Пусть α — бесконечный вычислимый ординал; $\mathbf{d}$ — такая тьюрингова степень, что $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}^{(\alpha+1)}$ и $\mathbf{d}$ является 2-вычислимо перечислимой относительно $\mathbf{0}^{(\alpha+1)}$. Тогда $\mathbf{d}$ является степенью категоричности. Кроме того, $\mathbf{0}^{(\alpha)}$ также является степенью категоричности.*

Б. Чима и К. М. Нг анонсировали в 2017 г. следующий результат: любая степень $\mathbf{d} \leqslant \mathbf{0}'$ также является степенью категоричности. В [36] начато систематическое изучение тьюринговых степеней, которые *не являются* степенями категоричности никакой вычислимой структуры.

Теорема 2.7 (см. [36, 56]). *Тьюрингова степень* $\mathbf{d}$ *не может быть степенью категоричности никакой вычислимой структуры, если она удовлетворяет одному из приведённых ниже условий*:
(1) $\mathbf{d}$ — *негиперарифметическая* (см. [56]);
(2) $\mathbf{d}$ — *невычислимая гипериммунно-свободная* (см. [36]);
(3) $\mathbf{d}$ — 2-*генерическая относительно некоторого совершенного дерева* (см. [36]).

Кроме того, в [36] построена Σ^0_2 тьюрингова степень, не являющаяся степенью категоричности.

В [69] введено понятие тьюринговой степени, *низкой относительно изоморфизмов* (low for isomorphism). Степень $\mathbf{d}$ является низкой относительно изоморфизмов, если для любой пары вычислимых структур $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ существование $\mathbf{d}$-вычислимого изоморфизма f, действующего из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$, влечёт существование вычислимого изоморфизма $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Ясно, что любая невычислимая, низкая относительно изоморфизмов степень не является степенью категоричности. В [69], в частности, доказано, что любая 2-генерическая по Коэну степень является низкой относительно изоморфизмов. Более подробно с результатами о степенях, низких относительно изоморфизмов, можно познакомиться в [69, 70].

Одним из важных понятий, использующихся при изучении спектров категоричности, является понятие строгой степени категоричности.

Определение 2.2 (см. [68]). Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень, $\mathcal{S}$ — вычислимая структура. Говорят, что $\mathbf{d}$ — *строгая степень категоричности* (strong degree of categoricity) структуры $\mathcal{S}$, если $\mathbf{d}$ — является степенью категоричности $\mathcal{S}$ и при этом существует пара вычислимых структур $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \cong \mathcal{S}$ со следующим свойством: для любого изоморфизма f, действующего из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$, выполнено неравенство $\deg_T(f) \geqslant \mathbf{d}$.

Говорят, что $\mathbf{d}$ есть *нестрогая степень категоричности* для $\mathcal{S}$, если $\mathbf{d}$ — степень категоричности $\mathcal{S}$ и при этом $\mathbf{d}$ не является строгой степенью категоричности $\mathcal{S}$.

В [68] был поставлен следующий вопрос: существуют ли такие степень $\mathbf{d}$ и вычислимая структура $\mathcal{S}$, что $\mathbf{d}$ — это нестрогая степень категоричности для $\mathcal{S}$?

Этот вопрос связан со следующим наблюдением: многие естественные примеры вычислимых структур имеют строгие степени категоричности (в частности, структуры из теорем 2.5 и 2.6). Положительный ответ на вопрос был независимо получен в [5, 58]. Доказательство из [58] существенно использует конструкцию структуры с конечной вычислимой размерностью (см. [8]). Методы, использованные в [5], опираются на новое понятие *спектральной размерности*.

Определение 2.3 (см. [5]). Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — изоморфные вычислимые структуры. *Спектром изоморфизмов* пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называют множество $\mathrm{IsoSpec}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, состоящее из всех тьюринговых степеней $\mathbf{d}$, для которых существует $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$.

Спектральной размерностью вычислимой структуры $\mathcal{S}$ называется наименьший ординал $\alpha \leqslant \omega$, для которого существует последовательность пар вычислимых структур $\{(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)\}_{i<\alpha}$ со следующими свойствами: для каждого $i < \alpha$ выполнено $\mathcal{A}_i \cong \mathcal{B}_i \cong \mathcal{S}$ и

$$\mathrm{CatSpec}(\mathcal{S}) = \bigcap_{i<\alpha} \mathrm{IsoSpec}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i).$$

Нетрудно проверить следующее: если невычислимая степень $\mathbf{d}$ — это степень категоричности $\mathcal{S}$, то $\mathbf{d}$ является строгой в том и только том случае, когда спектральная размерность $\mathcal{S}$ равна 1.

Теорема 2.8 (см. [5]). *Для любого натурального числа* $n \geqslant 2$ *существует вычислимый жёсткий граф* $\mathcal{G}$*, имеющий степень категоричности* $\mathbf{0}'$ *и спектральную размерность* n*. В частности,* $\mathbf{0}'$ *— это нестрогая степень категоричности для* $\mathcal{G}$.

Пусть $\mathbf{x}$ — тьюрингова степень; X — такое множество, что $\deg_T(X) = \mathbf{x}$. Говорят, что тьюрингова степень $\mathbf{d}$ является PA-*степенью над* $\mathbf{x}$, если существует такое $\mathbf{d}$-вычислимое множество

$A \subseteq \omega$, что $\{e : \varphi_e^X(e)\downarrow = 1\} \subseteq A$ и $\{e : \varphi_e^X(e)\downarrow = 0\} \subseteq \overline{A}$. PA-Степени над $\mathbf{0}$ кратко называют PA-степенями. Известно (см. [97]), что множество всех PA-степеней над $\mathbf{x}$ не имеет минимальных элементов.

Р. Миллер (см. [88]) построил первый пример вычислимой структуры, не имеющей степени категоричности. Позднее были получены следующие результаты о структурах без степени категоричности.

Теорема 2.9 (см. [92]). *Существует вычислимое алгебраическое поле, спектр категоричности которого состоит в точности из всех PA-степеней.*

Теорема 2.10 (см. [47]). *Пусть α — такой вычислимый ординал-последователь, что $\alpha \geqslant 2$. Существует вычислимая дистрибутивная решётка, спектр категоричности которой равен множеству всех PA-степеней над $\mathbf{0}^{(\alpha)}$.*

Кроме того, из первого пункта теоремы 2.7 вытекает следующий результат.

Следствие 2.1. *Пусть $\mathcal{S}$ — вычислимая структура, имеющая две вычислимые копии $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, между которыми не существует гиперарифметических изоморфизмов. Тогда $\mathcal{S}$ не имеет степени категоричности.*

В [57] исследовались спектры категоричности *на конусе* тьюринговых степеней; в частности, доказано, что на конусе любая счётная (не обязательно вычислимая) структура $\mathcal{S}$ имеет строгую степень категоричности и при этом эта степень является Δ^0_α-полной для некоторого счётного ординала α. Определения и основные результаты, связанные с изучением различных теоретико-рекурсивных свойств на конусе тьюринговых степеней, можно найти в [57, 77].

В [65] изучались спектры категоричности для жёстких структур. В частности, в [65] доказано, что для любой невычислимой в.п. тьюринговой степени $\mathbf{d}$ существует $\mathbf{d}$-вычислимо категоричная жёсткая структура, не имеющая степени категоричности.

Отметим, что построенные в теореме 2.5 вычислимые структуры, имеющие *вычислимо перечислимую* степень категоричности $\mathbf{d}$, являются жёсткими. В [50] доказано, что этот результат нельзя обобщить для *2-в.п.* степеней: существует собственная 2-в.п. степень, не являющаяся степенью категоричности никакой жёсткой структуры. В частности, это показывает, что класс степеней категоричности для произвольных структур является более широким, чем класс степеней категоричности для жёстких структур.

2.4. Разрешимая категоричность и индексные множества. Вычислимая структура $\mathcal{M}$ языка L является *разрешимой*, если её полная диаграмма вычислима, т.е. существует алгоритм, позволяющий по произвольным формуле первого порядка $\psi(x_0, \ldots, x_n)$ языка L и набору $\bar{a} = a_0, \ldots, a_n$ из $\mathcal{M}$ определить, выполнено ли $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$. Отметим, что разрешимая структура является n-разрешимой для любого натурального числа n.

Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень. Вычислимую структуру $\mathcal{M}$ называют *разрешимо* $\mathbf{d}$-*категоричной* (или $\mathbf{d}$-*автоустойчивой относительно сильных конструктивизаций*), если $\mathcal{M}$ имеет разрешимую копию и для любых разрешимых копий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ структуры $\mathcal{M}$ существует $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм, действующий из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$. В случае, когда $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, говорят, что структура $\mathcal{M}$ *разрешимо категорична. Спектром разрешимой категоричности* (или *спектром автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций*) называется множество

$$\mathrm{CatSpec}_{\mathrm{Dec}}(\mathcal{M}) = \big\{\mathbf{d} : \mathcal{M} \text{ разрешимо } \mathbf{d}\text{-категорична}\big\}.$$

Тьюрингова степень $\mathbf{c}$ является *степенью разрешимой категоричности* (или *степенью автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций*) для $\mathcal{M}$, если $\mathbf{c}$ — это наименьшая степень в спектре $\mathrm{CatSpec}_{\mathrm{Dec}}(\mathcal{M})$.

Предположим, что $\mathbf{d}$ — степень разрешимой категоричности структуры $\mathcal{M}$. Будем говорить, что $\mathbf{d}$ — *строгая степень разрешимой категоричности* для $\mathcal{M}$, если существуют такие разрешимые копии $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ структуры $\mathcal{M}$, что для любого изоморфизма f, действующего из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$, верно $\deg_T(f) \geqslant \mathbf{d}$.

Говорят, что структура $\mathcal{M}$ является *простой моделью*, если $\mathcal{M}$ элементарно вкладывается в любую модель теории $Th(\mathcal{M})$. Структуру $\mathcal{M}$ языка L называют *атомной моделью*, если для любого набора $\bar{a} = a_0, \ldots, a_n$ из $\mathcal{M}$ существует такая формула первого порядка $\psi(x_0, \ldots, x_n)$ языка L, что $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ и для любой формулы первого порядка $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ выполнено: если $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$, то $\mathcal{M} \models \forall \bar{x}[\psi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})]$. Такую формулу $\psi(\bar{x})$ называют *полной формулой* теории $Th(\mathcal{M})$. Известно (см., например, [20]), что $\mathcal{M}$ является простой моделью в том и только том случае, когда $\mathcal{M}$ — счётная атомная модель.

А. Т. Нуртазин [29] получил следующий критерий разрешимой категоричности.

Теорема 2.11 (см. [29]). *Пусть $\mathcal{M}$ — разрешимая структура языка L. Тогда $\mathcal{M}$ является разрешимо категоричной в том и только том случае, когда существует конечный набор $\bar{c} = c_0, \ldots, c_n$ из $\mathcal{M}$ со следующими свойствами*:

(a) *структура $(\mathcal{M}, \bar{c})$ является простой моделью*;
(b) *множество полных формул (в языке $L \cup \{\bar{c}\}$) теории $Th(\mathcal{M}, \bar{c})$ вычислимо.*

Систематическое исследование спектров разрешимой категоричности было начато С. С. Гончаровым (см. [10]). В частности, в [10] доказано, что для любой в.п. тьюринговой степени $\mathbf{d}$ существует разрешимая простая модель, имеющая строгую степень разрешимой категоричности $\mathbf{d}$.

Теорема 2.12 (см. [3, 45]). *Пусть α — вычислимый ординал, $\mathbf{d}$ — такая тьюрингова степень, что $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}^{(\alpha+1)}$ и $\mathbf{d}$ в.п. относительно $\mathbf{0}^{(\alpha+1)}$. Тогда существует разрешимая структура, имеющая строгую степень разрешимой категоричности $\mathbf{d}$.*

В [49] был построен первый пример разрешимой простой модели, не имеющей степени разрешимой категоричности. Позднее этот результат был уточнён следующим образом.

Теорема 2.13 (см. [45]). *Существует разрешимая простая модель, спектр разрешимой категоричности которой состоит в точности из всех PA-степеней.*

Отметим, что критерий А. Т. Нуртазина (теорема 2.11) показывает, что класс разрешимо категоричных структур имеет достаточно хорошее синтаксическое описание. Точная оценка (относительно уровней гиперарифметической иерархии) для сложности этого описания может быть получена с помощью техники *индексных множеств*.

Пусть K — это класс структур. *Индексным множеством* класса K называют множество

$$I(K) = \Big\{ e \in \omega : \text{в.п. множество } W_e \text{ есть атомная диаграмма некоторой структуры из } K \Big\}.$$

Обзор основных результатов и библиографию по индексным множествам можно найти, например, в [53, 66].

Теорема 2.14. *Для каждого из приведённых ниже классов K индексное множество разрешимо категоричных структур, принадлежащих K, является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством*:

(a) *ориентированные графы* (см. [17, 18]);
(b) *линейные порядки* (см. [73]);
(c) *булевы алгебры* (см. [12]);
(d) *двухступенно нильпотентные группы* (см. [13]);
(e) *структуры с двумя отношениями эквивалентности* (см. [28]).

Отметим, что для класса вычислимо категоричных структур аналогичного достаточно простого синтаксического описания не существует, о чём свидетельствует следующий результат.

Теорема 2.15 (см. [60]). *Индексное множество вычислимо категоричных структур является m-полным Π^1_1-множеством.*

Кроме того, в [14] показано, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ индексное множество структур, имеющих вычислимую размерность n, также является m-полным Π^1_1-множеством.

3. Линейные порядки и булевы алгебры

В данном разделе приводятся результаты о **d**-вычислимой категоричности для линейных порядков и булевых алгебр. Предварительные сведения о счётных линейных порядках можно найти в [59, 96].

Как обычно, через ζ обозначается линейный порядок целых чисел, через η — порядок рациональных чисел. Линейный порядок $\mathcal{L}$ называют *разреженным*, если не существует изоморфного вложения из η в $\mathcal{L}$.

Ч. Мак-Кой (см. [83]) получил полное описание относительно Δ^0_2-категоричных линейных порядков.

Теорема 3.1 (см. [83]). *Вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$ является относительно Δ^0_2-категоричным в том и только том случае, когда $\mathcal{L}$ изоморфен сумме конечного числа интервалов, каждый из которых имеет тип изоморфизма m, ω, ω^*, ζ или $n \cdot \eta$ (где m, n — натуральные числа), и при этом каждый интервал типа $n \cdot \eta$ обладает супремумом и инфимумом.*

В [24] построены континуум попарно не изоморфных счётных линейных порядков, каждый из которых имеет формальное Σ^0_3-семейство Скотта. В [33] показано, что любой относительно Δ^0_2-категоричный, вычислимый линейный порядок имеет степень категоричности $\mathbf{d} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{0}'\}$. Кроме того, в [33] анонсирован следующий результат: существует $\mathbf{0}^{(2)}$-вычислимо категоричный линейный порядок, не являющийся относительно Δ^0_3-категоричным.

К. Эш (см. [38]) получил полное описание $\mathbf{0}^{(\alpha)}$-вычислимо категоричных ординалов. В [1] найдены степени категоричности для всех вычислимых ординалов.

Теорема 3.2 (см. [1]). *Пусть α — вычислимый ординал.*

(a) *Если $0 < k < \omega$ и $\omega^k \leqslant \alpha < \omega^{k+1}$, то ординал α имеет строгую степень категоричности $\mathbf{0}^{(2k-1)}$.*

(b) *Если γ — вычислимый бесконечный ординал и $\omega^\gamma \leqslant \alpha < \omega^{\gamma+1}$, то α имеет строгую степень категоричности $\mathbf{0}^{(2\gamma)}$.*

Помимо теоремы 3.2 известны следующие примеры степеней категоричности для линейных порядков, независимо полученные автором и А. Н. Фроловым.

Теорема 3.3 (см. [1, 33, 44]). *Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень, удовлетворяющая одному из следующих условий*:

(a) $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}^{(2)}$ *и* $\mathbf{d}$ *является 2-в.п. относительно* $\mathbf{0}^{(2)}$ (см. [33]);

(b) *существует такой вычислимый бесконечный ординал α, что* $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}^{(\alpha+1)}$ *и* $\mathbf{d}$ *вычислимо перечислима относительно* $\mathbf{0}^{(\alpha+1)}$ (см. [1, 44]).

Тогда существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий строгую степень категоричности $\mathbf{d}$.

А. Н. Фролов (2015) также анонсировал аналог теоремы 3.3 для степеней $\mathbf{d}$, удовлетворяющих следующему условию:

(a1) существует такое натуральное число $n \geqslant 3$, что $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}^{(n)}$ и $\mathbf{d}$ является 2-в.п. относительно $\mathbf{0}^{(n)}$.

Основным новым результатом данного раздела является следующая теорема, обобщающая п. (b) теоремы 3.3 и дающая новую серию примеров степеней категоричности для линейных порядков.

Теорема 3.4. *Пусть α — вычислимый бесконечный ординал и $\mathbf{d}$ — такая тьюрингова степень, что $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}^{(\alpha+1)}$ и $\mathbf{d}$ является 2-в.п. относительно $\mathbf{0}^{(\alpha+1)}$. Тогда существует вычислимый разреженный линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий строгую степень категоричности $\mathbf{d}$.*

Доказательство. Сначала приведём доказательство для случая, когда $\alpha = 2\beta + 1$ (где β — это вычислимый бесконечный ординал).

Непосредственная релятивизация рассуждения из доказательства теоремы 3.1 в [68] показывает, что можно выбрать такое множество $D \in \mathbf{d}$, что D является 2-в.п. относительно $\mathbf{0}^{(2\beta+2)}$ и для любого оракула $X \subseteq \omega$ выполнено следующее: если $\overline{D}$ вычислимо перечислимо относительно X, то $D \leqslant_T X \oplus \mathbf{0}^{(2\beta+2)}$. Выберем такое множество D и зафиксируем такие $\Sigma^0_{2\beta+2}$-множества A и B, что $B \subset A$ и $D = A \setminus B$.

Лемма 3.1 (см. [41, пример 4])**.** *Для любого $\Pi^0_{2\beta+2}$-множества $S \subseteq \omega$ существует такая равномерно вычислимая последовательность линейных порядков $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\omega}$, что для каждого n выполнено условие*

$$\mathcal{A}_n \cong \begin{cases} \omega^{\beta+1}, & \text{если } n \in S, \\ \omega^{\beta+1} + \omega^{\beta}, & \text{если } n \notin S. \end{cases}$$

Применив лемму 3.1, получим такие три вычислимых последовательности линейных порядков $\{\mathcal{A}_k\}_{k\in\omega}$, $\{\mathcal{B}_k\}_{k\in\omega}$ и $\{\mathcal{C}_k\}_{k\in\omega}$, что

$$\mathcal{A}_k \cong \begin{cases} \omega^{\beta+1}, & \text{если } k \notin A, \\ \omega^{\beta+1} + \omega^{\beta}, & \text{если } k \in A; \end{cases} \quad \mathcal{B}_k \cong \begin{cases} \omega^{\beta+1}, & \text{если } k \notin B, \\ \omega^{\beta+1} + \omega^{\beta}, & \text{если } k \in B; \end{cases}$$

$$\mathcal{C}_k \cong \begin{cases} \omega^{\beta+1}, & \text{если } k \notin \varnothing^{(2\beta+2)}, \\ \omega^{\beta+1} + \omega^{\beta}, & \text{если } k \in \varnothing^{(2\beta+2)}. \end{cases}$$

Для каждого $n \in \omega$ определим вычислимый линейный порядок $\mathcal{M}_n$ по следующим правилам:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{4k} &= \mathcal{A}_k + 1 + \zeta + \mathcal{A}_k, \\ \mathcal{M}_{4k+1} &= \mathcal{B}_k + 1 + \zeta + (\omega^{\beta+1} + \omega^{\beta}), \\ \mathcal{M}_{4k+2} &= \mathcal{C}_k + 1 + \zeta + \mathcal{C}_k, \\ \mathcal{M}_{4k+3} &= \omega^{\beta+1} + 1 + \zeta + (\omega^{\beta+1} + \omega^{\beta}). \end{aligned}$$

Зададим вычислимый линейный порядок

$$\mathcal{L} = \sum_{k\in\omega} \left(k + 4 + \sum_{l\in\zeta} \left(2 + \zeta + \mathcal{M}_{4k} + 2 + \zeta + \mathcal{M}_{4k+1} \right) + \right.$$
$$\left. + 3 + \sum_{l\in\zeta} \left(2 + \zeta + \mathcal{M}_{4k+2} + 2 + \zeta + \mathcal{M}_{4k+3} \right) \right).$$

Нетрудно проверить, что порядок $\mathcal{L}$ является разреженным (например, с помощью [96, предложение 5.21]). Следующие две леммы показывают, что $\mathcal{L}$ имеет строгую степень категоричности $\mathbf{d}$.

Лемма 3.2. *Структура $\mathcal{L}$ является $\mathbf{d}$-вычислимо категоричной.*

Доказательство. Напомним, что $\mathbf{0}^{(\omega+2)} \leqslant \mathbf{0}^{(2\beta+2)} \leqslant \mathbf{d}$. Пусть $\mathcal{R}$ — произвольная вычислимая копия $\mathcal{L}$. Используя оракул $\mathbf{0}^{(4)}$, можно найти разложение $\mathcal{R}$ следующего вида:

$$\mathcal{R} = \sum_{k\in\omega} \left(k + 4 + \left(\sum_{l\in\zeta} \left(2 + \zeta + \mathcal{S}_{k,l} + 2 + \zeta + \mathcal{T}_{k,l} \right) \right) + 3 + \sum_{l\in\zeta} \left(2 + \zeta + \mathcal{U}_{k,l} + 2 + \zeta + \mathcal{V}_{k,l} \right) \right),$$

где для каждого целого числа l выполнено

$$\mathcal{S}_{k,l} \cong \mathcal{S}_{k,l+1}, \quad \mathcal{T}_{k,l} \cong \mathcal{T}_{k,l+1}, \quad \mathcal{U}_{k,l} \cong \mathcal{U}_{k,l+1}, \quad \mathcal{V}_{k,l} \cong \mathcal{V}_{k,l+1}.$$

Кроме того, каждый из порядков $\mathcal{S}_{k,l}$ и $\mathcal{T}_{k,l}$ изоморфен $\mathcal{M}_{4k}$ или $\mathcal{M}_{4k+1}$. Каждая из структур $\mathcal{U}_{k,l}$ и $\mathcal{V}_{k,l}$ изоморфна $\mathcal{M}_{4k+2}$ или $\mathcal{M}_{4k+3}$.

В [40, предложение 7.2] была определена такая $\Pi^c_{2\beta+1}$-формула $\mu_{\omega^\beta}(x, y)$, что для любого линейного порядка $\mathcal{Q}$ выполнено следующее: $\mathcal{Q} \models \mu_{\omega^\beta}(x, y)$ в том и только том случае, когда $x <_{\mathcal{Q}} y$ и интервал $[x; y[_{\mathcal{Q}}$ изоморфен ординалу ω^β. Используя формулу μ_{ω^β}, докажем следующий факт.

Утверждение 3.1. *Существует* $\mathbf{d}$*-вычислимая процедура, находящая по вычислимым индексам порядков* $\mathcal{S}_{k,l}$ *и* $\mathcal{T}_{k,l}$ *такие два числа* $s(k,l)$ *и* $t(k,l)$*, что*

$$\{s(k,l), t(k,l)\} = \{4k, 4k+1\}, \quad \mathcal{S}_{k,l} \cong \mathcal{M}_{s(k,l)}, \quad \mathcal{T}_{k,l} \cong \mathcal{M}_{t(k,l)}.$$

Доказательство. Используя оракул $\mathbf{0}^{(4)}$, найдём в $\mathcal{R}$ разложения

$$(\mathcal{S}_{k,l}+1) = \mathcal{S}_1 + 1 + \zeta + \mathcal{S}_2 + 1, \quad (\mathcal{T}_{k,l}+1) = \mathcal{T}_1 + 1 + \zeta + \mathcal{T}_2 + 1.$$

Отметим следующее: каждый из порядков $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ изоморфен либо $\omega^{\beta+1}$, либо $\omega^{\beta+1}+\omega^\beta$.

Рассмотрим следующие два случая.

Случай 1. Если $k \in D$, то в точности один из порядков $(\mathcal{S}_1+1)$ и $(\mathcal{T}_1+1)$ изоморфен ординалу $\omega^{\beta+1}+\omega^\beta+1$. В частности, в точности в одном из этих порядков истинна формула

$$\psi_{\omega^\beta} = \exists x \mu_{\omega^\beta}(x, c),$$

где c — это наименьший элемент соответствующего порядка. Проверка формулы ψ_{ω^β} в вычислимой структуре имеет сложность $\Sigma^0_1(\mathbf{0}^{(2\beta+2)})$. Следовательно, используя оракул $\mathbf{0}^{(2\beta+2)}$, можно найти, в какой из структур $(\mathcal{S}_1+1)$ и $(\mathcal{T}_1+1)$ истинно ψ_{ω^β}. Если $(\mathcal{S}_1+1) \models \psi_{\omega^\beta}$, то $\mathcal{S}_{k,l} \cong \mathcal{M}_{4k}$ и $\mathcal{T}_{k,l} \cong \mathcal{M}_{4k+1}$. В противном случае выполнено $\mathcal{S}_{k,l} \cong \mathcal{M}_{4k+1}$ и $\mathcal{T}_{k,l} \cong \mathcal{M}_{4k}$.

Случай 2. Если $k \notin D$, то, используя оракул $\mathbf{0}^{(2\beta+2)}$, находим такой наименьший (относительно стандартного порядка на натуральных числах) элемент x, что в одном из порядков $(\mathcal{S}_2+1)$ и $(\mathcal{T}_2+1)$ выполнено $\mu_{\omega^\beta}(x,c)$, где c — наименьший элемент соответствующего порядка. Если x лежит в $\mathcal{S}_2$, то объявляем, что $\mathcal{S}_{k,l} \cong \mathcal{M}_{4k+1}$ и $\mathcal{T}_{k,l} \cong \mathcal{M}_{4k}$. В противном случае считаем, что $\mathcal{S}_{k,l} \cong \mathcal{M}_{4k}$ и $\mathcal{T}_{k,l} \cong \mathcal{M}_{4k+1}$.

Напомним, что дополнение множества D равно $\overline{A} \cup B$. Если $k \notin A$, то, как и в первом случае, формула ψ_{ω^β} истинна в точности в одном из порядков $(\mathcal{S}_2+1)$ и $(\mathcal{T}_2+1)$. Если $k \in B$, то $\mathcal{S}_2 \cong \mathcal{T}_2 \cong \omega^{\beta+1}+\omega^\beta$ и $\mathcal{M}_{4k} \cong \mathcal{M}_{4k+1}$. Опираясь на эти факты, нетрудно показать, что в случае 2 описанная процедура также работает корректно. □

Используя аналогичные рассуждения, нетрудно доказать следующее утверждение.

Утверждение 3.2. *Существует* $\mathbf{0}^{(2\beta+2)}$*-вычислимая процедура, находящая по вычислимым индексам порядков* $\mathcal{U}_{k,l}$ *и* $\mathcal{V}_{k,l}$ *такие два числа* $u(k,l)$ *и* $v(k,l)$*, что*

$$\{u(k,l), v(k,l)\} = \{4k+2, 4k+3\}, \quad \mathcal{U}_{k,l} \cong \mathcal{M}_{u(k,l)}, \quad \mathcal{V}_{k,l} \cong \mathcal{M}_{v(k,l)}.$$

В [47, с. 610] (см. также [47, предложение 2]) был доказан следующий факт.

Утверждение 3.3 (см. [47])**.** *Существует эффективная процедура, позволяющая по вычислимым индексам таких вычислимых структур* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$*, что* $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \cong \mathcal{C} \in \{\omega^{\beta+1}, \omega^{\beta+1}+\omega^\beta\}$*, определить* $\Delta^0_{2\beta+2}$*-индекс для изоморфизма* f*, действующего из* $\mathcal{A}$ *на* $\mathcal{B}$*.*

Теперь, используя утверждения 3.1–3.3, а также тот факт, что порядок ζ относительно Δ^0_2-категоричен, можно (равномерно по k) построить $\mathbf{d}$-вычислимые изоморфизмы

$$F_k : \sum_{l\in\zeta}\Big(2+\zeta+\mathcal{S}_{k,l}+2+\zeta+\mathcal{T}_{k,l}\Big) \to \sum_{l\in\zeta}\Big(2+\zeta+\mathcal{M}_{4k}+2+\zeta+\mathcal{M}_{4k+1}\Big),$$
$$G_k : \sum_{l\in\zeta}\Big(2+\zeta+\mathcal{U}_{k,l}+2+\zeta+\mathcal{V}_{k,l}\Big) \to \sum_{l\in\zeta}\Big(2+\zeta+\mathcal{M}_{4k+2}+2+\zeta+\mathcal{M}_{4k+3}\Big).$$

Построенное отображение $\bigcup\limits_{k\in\omega}(F_k \cup G_k)$ нетрудно продолжить до $\mathbf{d}$-вычислимого изоморфизма из $\mathcal{R}$ на $\mathcal{L}$. Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *Существует вычислимая такая структура* $\mathcal{R}$*, изоморфная* $\mathcal{L}$*, что для любого изоморфизма* f*, действующего из* $\mathcal{R}$ *на* $\mathcal{L}$*, выполнено* $\deg_T(f) \geqslant \mathbf{d}$.

Доказательство. Для $n \in \omega$ определим линейный порядок $\mathcal{Q}_n$ по следующим правилам:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{4k} &= \mathcal{B}_k + 1 + \zeta + \mathcal{A}_k,\\ \mathcal{Q}_{4k+1} &= \mathcal{A}_k + 1 + \zeta + (\omega^{\beta+1} + \omega^{\beta}),\\ \mathcal{Q}_{4k+2} &= \omega^{\beta+1} + 1 + \zeta + \mathcal{C}_k,\\ \mathcal{Q}_{4k+3} &= \mathcal{C}_k + 1 + \zeta + (\omega^{\beta+1} + \omega^{\beta}).\end{aligned}$$

Зададим $\mathcal{R}$ следующим образом:

$$\mathcal{R} = \sum_{k\in\omega}\left(k + 4 + \sum_{l\in\zeta}\Big(2 + \zeta + \mathcal{Q}_{4k} + 2 + \zeta + \mathcal{Q}_{4k+1}\Big) + \right.$$
$$\left. + 3 + \sum_{l\in\zeta}\Big(2 + \zeta + \mathcal{Q}_{4k+2} + 2 + \zeta + \mathcal{Q}_{4k+3}\Big)\right).$$

Легко проверить, что $\mathcal{R}$ является вычислимой копией $\mathcal{L}$.

Без ограничения общности можно считать, что:

(i) любой элемент из $\mathcal{L}$, лежащий в одной из копий $\mathcal{M}_{4k}$ или $\mathcal{M}_{4k+2}$, есть чётное число;
(ii) любой элемент из $\mathcal{L}$, лежащий в одной из копий $\mathcal{M}_{4k+1}$ или $\mathcal{M}_{4k+3}$, есть нечётное число;
(iii) существуют такие вычислимые последовательности $\{q_k\}_{k\in\omega}$ и $\{r_k\}_{k\in\omega}$, что каждый q_k есть элемент, принадлежащий одной из копий $\mathcal{Q}_{4k}$ в $\mathcal{R}$, а каждый r_k принадлежит одной из копий $\mathcal{Q}_{4k+2}$ в $\mathcal{R}$.

Пусть f — изоморфизм, действующий из $\mathcal{R}$ на $\mathcal{L}$. Заметим следующее:

(1) если $k \notin \varnothing^{(2\beta+2)}$, то $\mathcal{Q}_{4k+2} \cong \mathcal{M}_{4k+2}$ и $\mathcal{Q}_{4k+2} \ncong \mathcal{M}_{4k+3}$; в частности, $f(r_k)$ есть чётное число;
(2) если $k \in \varnothing^{(2\beta+2)}$, то $\mathcal{Q}_{4k+2} \cong \mathcal{M}_{4k+3}$ и $\mathcal{Q}_{4k+2} \ncong \mathcal{M}_{4k+2}$; отсюда вытекает, что значение $f(r_k)$ нечётно.

Из этих замечаний легко получить, что $\deg_T(f) \geqslant \mathbf{0}^{(2\beta+2)}$.

Нетрудно понять, что $f(q_k)$ чётно в том и только том случае, когда $\mathcal{Q}_{4k} \cong \mathcal{M}_{4k}$. Отсюда вытекает, что $k \in \overline{D}$ тогда и только тогда, когда $k \in B$ или $f(q_k)$ чётно. Значит, множество $\overline{D}$ вычислимо перечислимо относительно $(f \oplus \mathbf{0}^{(2\beta+2)})$. Следовательно, наш выбор множества D гарантирует, что $D \leqslant_T (f \oplus \mathbf{0}^{(2\beta+2)}) \equiv_T f$. Лемма 3.3 доказана. □

Из леммы 3.2 вытекает, что $\{\mathbf{c} : \mathbf{c} \geqslant \mathbf{d}\} \subseteq \mathrm{CatSpec}(\mathcal{L})$. Лемма 3.3 показывает, что $\mathbf{d}$ есть наименьшая степень в спектре $\mathrm{CatSpec}(\mathcal{L})$; при этом $\mathbf{d}$ является строгой степенью категоричности для $\mathcal{L}$.

Доказательство для случая, когда $\alpha = 2\beta$, аналогично приведённому выше. Основное изменение заключается в следующем: вместо порядков $\omega^{\beta+1}$ и $\omega^{\beta+1} + \omega^{\beta}$ необходимо использовать ординалы ω^{β} и $\omega^{\beta} \cdot 2$ соответственно. Поэтому, в частности, вместо леммы 3.1 будет применяться следующее утверждение.

Лемма 3.4 (следует из [41, теорема 3.1]; см., например, [47, с. 607])**.** *Для любого $\Pi^0_{2\beta+1}$-множества $S \subseteq \omega$ существует такая равномерно вычислимая последовательность линейных порядков $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\omega}$, что для каждого n выполнено условие*

$$\mathcal{A}_n \cong \begin{cases}\omega^{\beta}, & \text{если } n \in S,\\ \omega^{\beta}\cdot 2, & \text{если } n \notin S.\end{cases}$$

Недостающие технические детали для случая $\alpha = 2\beta$ нетрудно восстановить, опираясь на доказательство теоремы 4 из [47]. Теорема 3.4 доказана. □

Из теоремы 3.4 и теоремы 5.4 из [45] вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Пусть α — вычислимый бесконечный ординал и $\mathbf{d}$ — такая тьюрингова степень, что $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}^{(\alpha+1)}$ и $\mathbf{d}$ является 2-в.п. относительно $\mathbf{0}^{(\alpha+1)}$. Также предположим, что $\mathcal{L}$ —*

это линейный порядок, построенный в теореме 3.4 *и имеющий степень категоричности* $\mathbf{d}$. *Тогда порядок* $\mathcal{L}_1 = \zeta \cdot \mathcal{L}$ *имеет разрешимую копию и* $\mathbf{d}$ *является строгой степенью разрешимой категоричности для* $\mathcal{L}_1$.

Перейдём теперь к обзору результатов о булевых алгебрах. Предварительные сведения о счётных булевых алгебрах можно найти в [11]. Для линейного порядка $\mathcal{L}$ через $\mathrm{Int}(\mathcal{L})$ обозначается интервальная булева алгебра, построенная по $\mathcal{L}$.

Ч. Мак-Кой (см. [24, 83]) получил полное описание относительно Δ^0_2- и относительно Δ^0_3-категоричных булевых алгебр.

Теорема 3.5 (см. [24, 83]). *Пусть* $\mathcal{B}$ *— вычислимая булева алгебра.*

(i) *Структура* $\mathcal{B}$ *является относительно* Δ^0_2*-категоричной тогда и только тогда, когда* $\mathcal{B}$ *изоморфна конечному прямому произведению булевых алгебр, каждая из которых либо вычислимо категорична, либо изоморфна алгебре* $\mathrm{Int}(\omega)$ (см. [83]).

(ii) *Алгебра* $\mathcal{B}$ *относительно* Δ^0_3*-категорична в том и только том случае, когда* $\mathcal{B}$ *изоморфна конечному прямому произведению булевых алгебр* $\mathcal{C}_i$, $i \leqslant n$, *каждая из которых удовлетворяет одному из следующих условий* (см. [24]):
   (a) $\mathcal{C}_i$ *относительно* Δ^0_2*-категорична*;
   (b) $\mathcal{C}_i \cong \mathrm{Int}(\omega \cdot \eta)$;
   (c) $\mathcal{C}_i \cong \mathrm{Int}(\omega + \eta)$.

Алгебраическое описание из теоремы 3.5 было использовано при доказательстве следующего результата о степенях категоричности.

Теорема 3.6 (см. [43, 67]). *Пусть* $\mathcal{B}$ *— вычислимая булева алгебра.*

(i) *Структура* $\mathcal{B}$ *является* $\mathbf{0}'$*-вычислимо категоричной в том и только том случае, когда* $\mathcal{B}$ *относительно* Δ^0_2*-категорична. Кроме того, любая* $\mathbf{0}'$*-вычислимо категоричная булева алгебра имеет строгую степень категоричности* $\mathbf{d} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{0}'\}$ (см. [43]).

(ii) *Если* $\mathcal{B}$ *относительно* Δ^0_3*-категорична, то* $\mathcal{B}$ *имеет строгую степень категоричности* $\mathbf{d} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{0}', \mathbf{0}''\}$ (см. [67]).

К. Эш (см. [37]) дал полное описание $\mathbf{0}^{(\alpha)}$-вычислимо категоричных суператомных булевых алгебр. В [2, 4] найдены степени категоричности для всех суператомных булевых алгебр и алгебр вида $\mathrm{Int}(\omega^\alpha \cdot \eta)$.

Теорема 3.7 (см. [2, 4]). *Пусть* k *и* m *— ненулевые натуральные числа,* α *— бесконечный вычислимый ординал.*

(1) *Алгебра* $\mathrm{Int}(\omega^k \cdot m)$ *имеет строгую степень категоричности* $\mathbf{0}^{(2k-1)}$ *и строгую степень разрешимой категоричности* $\mathbf{0}^{(2k-2)}$.

(2) *Алгебра* $\mathrm{Int}(\omega^k \cdot \eta)$ *имеет строгую степень категоричности* $\mathbf{0}^{(2k)}$ *и строгую степень разрешимой категоричности* $\mathbf{0}^{(2k-1)}$.

(3) *Степень* $\mathbf{0}^{(2\alpha)}$ *является строгой степенью категоричности и строгой степенью разрешимой категоричности для алгебры* $\mathrm{Int}(\omega^\alpha \cdot m)$.

(4) *Степень* $\mathbf{0}^{(2\alpha+1)}$ *является строгой степенью категоричности и строгой степенью разрешимой категоричности для алгебры* $\mathrm{Int}(\omega^\alpha \cdot \eta)$.

В частности, теорема 3.7 показывает, что для любого вычислимого ординала β тьюрингова степень $\mathbf{0}^{(\beta)}$ является степенью категоричности для некоторой булевой алгебры. До сих пор остаётся открытым следующий вопрос. Могут ли булевы алгебры иметь другие степени категоричности; например, можно ли доказать аналог теоремы 3.4 для булевых алгебр?

В заключение отметим, что, используя следствие 2.1, нетрудно доказать следующее утверждение: линейный порядок Харрисона $\mathcal{H} = \omega_1^{CK} \cdot (1 + \eta)$ и булева алгебра Харрисона $\mathrm{Int}(\mathcal{H})$ не имеют степени категоричности (детали см., например, в [2, § 4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баженов Н. А.* О степенях автоустойчивости для линейных порядков и линейно упорядоченных абелевых групп// Алгебра и логика. — 2016. — *55*, № 4. — С. 393–418.
2. *Баженов Н. А.* О степенях автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для булевых алгебр// Алгебра и логика. — 2016. — *55*, № 2. — С. 133–155.
3. *Баженов Н. А.* Спектры автоустойчивости булевых алгебр// Алгебра и логика. — 2014. — *53*, № 6. — С. 764–769.
4. *Баженов Н. А.* Степени категоричности суператомных булевых алгебр// Алгебра и логика. — *52*, № 3. — С. 271–283.
5. *Баженов Н. А., Калимуллин И. Ш., Ямалеев М. М.* О строгих и нестрогих степенях категоричности// Алгебра и логика. — 2016. — *55*, № 2. — С. 257–263.
6. *Гончаров С. С.* Автоустойчивость и вычислимые семейства конструктивизаций// Алгебра и логика. — 1975. — *14*, № 6. — С. 647–680.
7. *Гончаров С. С.* Автоустойчивость моделей и абелевых групп// Алгебра и логика. — 1980. — *19*, № 1. — С. 23–44.
8. *Гончаров С. С.* О числе неавтоэквивалентных конструктивизаций// Алгебра и логика. — 1977. — *16*, № 3. — С. 257–282.
9. *Гончаров С. С.* Предельно эквивалентные конструктивизации// Тр. Ин-та мат. СО АН СССР. — 1982. — *2*. — С. 4–12.
10. *Гончаров С. С.* Степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2011. — *274*. — С. 119–129.
11. *Гончаров С. С.* Счётные булевы алгебры и разрешимость. — Новосибирск: Научная книга, 1996.
12. *Гончаров С. С., Баженов Н. А., Марчук М. И.* Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций булевых алгебр// Сиб. мат. ж. — 2015. — *56*, № 3. — С. 498–512.
13. *Гончаров С. С., Баженов Н. А., Марчук М. И.* Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций групп// Сиб. мат. ж. — 2017. — *58*, № 1. — С. 95–103.
14. *Гончаров С. С., Баженов Н. А., Марчук М. И.* Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей естественных классов// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 1. — С. 12–14.
15. *Гончаров С. С., Дзгоев В. Д.* Автоустойчивость моделей// Алгебра и логика. — 1980. — *19*, № 1. — С. 45–58.
16. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
17. *Гончаров С. С., Марчук М. И.* Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей конечной сигнатуры и сигнатуры графов// Алгебра и логика. — 2015. — *54*, № 6. — С. 663–679.
18. *Гончаров С. С., Марчук М. И.* Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей ограниченной сигнатуры// Алгебра и логика. — 2015. — *54*, № 2. — С. 163–192.
19. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980.
20. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. — М.: Мир, 1977.
21. *Когабаев Н. Т.* Свободно порождённые проективные плоскости конечной вычислимой размерности// Алгебра и логика. — 2016. — *55*, № 6. — С. 704–737.
22. *Когабаев Н. Т.* Теория проективных плоскостей полна относительно спектров степеней и эффективных размерностей// Алгебра и логика. — 2015. — *54*, № 5. — С. 599–627.
23. *Кудинов О. В.* Автоустойчивая 1-разрешимая модель без вычислимого семейства Скотта $\exists$-формул// Алгебра и логика. — 1996. — *35*, № 4. — С. 458–467.
24. *Мак-Кой Ч. Ф. Д.* О Δ^0_3-категоричности для линейных порядков и булевых алгебр// Алгебра и логика. — 2002. — *41*, № 5. — С. 531–552.
25. *Мальцев А. И.* Конструктивные алгебры, I// Усп. мат. наук. — 1961ю — *16*, № 3. — С. 3–60.
26. *Мальцев А. И.* О рекурсивных абелевых группах// Докл. АН СССР. — *146*, № 5. — С. 1009–1012.
27. *Мальцев А. И.* Строго родственные модели и рекурсивно совершенные алгебры// Докл. АН СССР. — 1962. — *145*, № 2. — С. 276–279.
28. *Марчук М. И.* Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций структур с двумя отношениями эквивалентности// Алгебра и логика. — *55*, № 4. — С. 465–477.
29. *Нуртазин А. Т.* Сильные и слабые конструктивизации и вычислимые семейства// Алгебра и логика. — 1974. — *13*, № 3. — С. 311–323.

30. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972.
31. *Соар Р. И.* Вычислимо перечислимые множества и степени. — Казань: Казан. мат. об-во, 2000.
32. *Тусупов Д. А.* Изоморфизмы и алгоритмические свойства структур с двумя эквивалентностями// Алгебра и логика. — 2016. — *55*, № 1. — С. 75–86.
33. *Фролов А. Н.* Эффективная категоричность вычислимых линейных порядков// Алгебра и логика. — 2015. — *54*, № 5. — С. 638–642.
34. *Цензер Д., Харизанов В., Реммел Дж. Б.* Теоретико вычислительные свойства структур с вложением// Алгебра и логика. — 2014. — *53*, № 1. — С. 60–108.
35. *Alaev P. E.* Computably categorical Boolean algebras enriched by ideals and atoms// Ann. Pure Appl. Logic. — 2012. — *163*, № 5. — С. 485–499.
36. *Anderson B. A., Csima B. F.* Degrees that are not degrees of categoricity// Notre Dame J. Formal Logic. — 2016. — *57*, № 3. — С. 389–398.
37. *Ash C. J.* Categoricity in hyperarithmetical degrees// Ann. Pure Appl. Logic. — 1987. — *34*, № 1. — С. 1–14.
38. *Ash C. J.* Recursive labelling systems and stability of recursive structures in hyperarithmetical degrees// Trans. Am. Math. Soc. — 1986. — *298*, № 2. — С. 497–514.
39. *Ash C. J.* Stability of recursive structures in arithmetical degrees// Ann. Pure Appl. Logic. — 1986. — *32*, № 2. — С. 113–135.
40. *Ash C. J., Knight J. F.* Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy/ Stud. Logic Found. Math. — Amsterdam: Elsevier, 2000. — *144*.
41. *Ash C. J., Knight J. F.* Pairs of recursive structures// Ann. Pure Appl. Logic. — 1990. — *46*, № 3. — С. 211–234.
42. *Ash C., Knight J., Manasse M., Slaman T.* Generic copies of countable structures// Ann. Pure Appl. Logic. — 1989. — *42*, № 3. — С. 195–205.
43. *Bazhenov N. A.* Δ^0_2-Categoricity of Boolean algebras// J. Math. Sci. — *203*, № 4. — С. 444–454.
44. *Bazhenov N.* A note on effective categoricity for linear orderings// в кн.: *Gopal T. V., Jäger G., Steila S.* (ред.). Theory and Applications of Models of Computation. — *Lect. Notes Comput. Sci.* — Cham: Springer, 2017. — *10185*. — С. 85–96.
45. *Bazhenov N.* Autostability spectra for decidable structures// Math. Struct. Comput. Sci. — 2018. — *28*, № 3. — С. 392–411.
46. *Bazhenov N.* Categoricity spectra for polymodal algebras// Stud. Log. — 2016. — *104*, № 6. — С. 1083–1097.
47. *Bazhenov N. A.* Effective categoricity for distributive lattices and Heyting algebras// Lobachevskii J. Math. — 2017. — *38*, № 4. — С. 600–614.
48. *Bazhenov N. A.* Hyperarithmetical categoricity of Boolean algebras of type $B(\omega^\alpha \times \eta)$// J. Math. Sci. — 2014. — *202*, № 1. — С. 40–49.
49. *Bazhenov N.* Prime model with no degree of autostability relative to strong constructivizations// в кн: *Beckmann A., Mitrana V., Soskova M.* (ред.). Evolving Computability/ Lect. Notes Comput. Sci. — Cham: Springer, 2015. — *9136*. — С. 117–126.
50. *Bazhenov N. A., Yamaleev M. M.* Degrees of categoricity of rigid structures// в кн.: *Kari J., Manea F., Petre I.* (ред.). Unveiling Dynamics and Complexity/ Lect. Notes Comput. Sci. — Cham: Springer, 2017. — *10307*. — С. 152–161.
51. *Calvert W., Cenzer D., Harizanov V. S., Morozov A.* Effective categoricity of Abelian p-groups// Ann. Pure Appl. Logic. — 2009. — *159*, № 1-2. — С. 187–197.
52. *Calvert W., Cenzer D., Harizanov V. S., Morozov A.* Effective categoricity of equivalence structures// Ann. Pure Appl. Logic. — 2006. — *141*, № 1-2. — С. 61–78.
53. *Calvert W., Knight J. F.* Classification from a computable viewpoint// Bull. Symb. Logic. — 2006. — *12*, № 2. — С. 191–218.
54. *Chisholm J.* Effective model theory vs. recursive model theory// J. Symb. Logic. — 1990. — *55*, № 3. — С. 1168–1191.
55. *Chisholm J., Fokina E. B., Goncharov S. S., Harizanov V. S., Knight J. F., Quinn S.* Intrinsic bounds on complexity and definability at limit levels// J. Symb. Logic. — 2009. — *74*, № 3. — С. 1047–1060.
56. *Csima B. F., Franklin J. N. Y., Shore R. A.* Degrees of categoricity and the hyperarithmetic hierarchy// Notre Dame J. Formal Logic. — 2013. — *54*, № 2. — С. 215–231.
57. *Csima B. F., Harrison-Trainor M.* Degrees of categoricity on a cone via η-systems// J. Symb. Logic. — 2017. — *82*, № 1. — С. 325–346.
58. *Csima B. F., Stephenson J.* Finite computable dimension and degrees of categoricity/ в печати; `http://www.math.uwaterloo.ca/~csima/papers/finitecompdemdegcat.pdf`

59. *Downey R. G.* Computability theory and linear orderings// в кн.: *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B.* (ред.). Handbook of Recursive Mathematics. Vol. 2/ Stud. Logic Found. Math. — Amsterdam: Elsevier, 1998. — *139*. — С. 823–976.
60. *Downey R. G., Kach A. M., Lempp S., Lewis-Pye A. E. M., Montalbán A., Turetsky D. D.* The complexity of computable categoricity// Adv. Math. — 2015. — *268*. — С. 423–466.
61. *Downey R. G., Kach A. M., Lempp S., Turetsky D. D.* Computable categoricity versus relative computable categoricity// Fund. Math. — 2013. — *221*, № 2. — С. 129–159.
62. *Downey R., Melnikov A. G.* Computable completely decomposable groups// Trans. Am. Math. Soc. — 2014. — *366*, № 8. — С. 4243–4266.
63. *Downey R., Melnikov A. G.* Effectively categorical abelian groups// J. Algebra. — 2013. — *373*. — С. 223–248.
64. *Downey R., Melnikov A. G., Ng K. M.* Abelian p-groups and the Halting problem// Ann. Pure Appl. Logic. — 2016. — *167*, № 11. — С. 1123–1138.
65. *Fokina E., Frolov A., Kalimullin I.* Categoricity spectra for rigid structures// Notre Dame J. Formal Logic. — 2016. — *57*, № 1. — С. 45–57.
66. *Fokina E. B., Harizanov V., Melnikov A.* Computable model theory// в кн.: *Downey R.* (ред.). Turing's legacy: Developments from Turing's ideas in logic/ Lect. Notes Logic. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014. — *42*. — С. 124–194.
67. *Fokina E., Harizanov V., Turetsky D.* Computability-theoretic categoricity and Scott families/ в печати; `http://home.gwu.edu/~harizanv/FHTCategoricity.pdf`
68. *Fokina E. B., Kalimullin I., Miller R.* Degrees of categoricity of computable structures// Arch. Math. Logic. — 2010. — *49*, № 1. — С. 51–67.
69. *Franklin J. N. Y., Solomon R.* Degrees that are low for isomorphism// Computability. — 2014. — *3*, № 2. — С. 73–89.
70. *Franklin J. N. Y., Turetsky D.* Lowness for isomorphism and degrees of genericity// Computability. — 2018. — *7*, № 1. — С. 1–6.
71. *Fröhlich A., Shepherdson J. C.* Effective procedures in field theory// Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1956. — *248 (950)*. — С. 407–432.
72. *Goncharov S. S.* Computability and computable models// в кн.: *Gabbay D. M., Goncharov S. S., Zakharyaschev M.* (ред.). Mathematical problems from applied logic. II. — New York: Springer, 2006. — С. 99–216.
73. *Goncharov S. S., Bazhenov N. A., Marchuk M. I.* Index set of linear orderings that are autostable relative to strong constructivizations// J. Math. Sci. — 2017. — *221*, № 6. — С. 840–848.
74. *Goncharov S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R.* Enumerations in computable structure theory// Ann. Pure Appl. Logic. — 2005. — *136*, № 3. — С. 219–246.
75. *Goncharov S. S., Lempp S., Solomon R.* The computable dimension of ordered abelian groups// Adv. Math. — 2003. — *175*, № 1. — С. 102–143.
76. *Harizanov V. S.* Pure computable model theory// в кн.: *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B.* (ред.). Handbook of recursive mathematics. Vol. I/ Stud. Logic Found. Math. — Amsterdam: Elsevier, 1998. — *138*. — С. 3–114.
77. *Harrison-Trainor M.* Degree spectra of relations on a cone/ Preprint. — `arXiv:1412.3842`.
78. *Hirschfeldt D. R., Khoussainov B., Shore R. A., Slinko A. M.* Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures// Ann. Pure Appl. Logic. — 2002. — *115*, № 1-3. — С. 71–113.
79. *Hirschfeldt D. R., Kramer K., Miller R., Shlapentokh A.* Categoricity properties for computable algebraic fields// Trans. Am. Math. Soc. — 2015. — *367*, № 6. — С. 3981–4017.
80. *Khoussainov B., Kowalski T.* Computable isomorphisms of Boolean algebras with operators// Stud. Log. — 2012. — *100*, № 3. — С. 481–496.
81. *Lempp S., McCoy C., Miller R., Solomon R.* Computable categoricity of trees of finite height// J. Symb. Logic. — 2005. — *70*, № 1. — С. 151–215.
82. *Levin O.* Computable dimension for ordered fields// Arch. Math. Logic. — 2016. — *55*, № 3-4. — С. 519–534.
83. *McCoy C.* Δ^0_2-Categoricity in Boolean algebras and linear orderings// Ann. Pure Appl. Logic. — 2003. — *119*, № 1-3. — С. 85–120.
84. *Melnikov A. G.* Computable abelian groups// Bull. Symb. Logic. — 2014. — *20*, № 3. — С. 315–356.
85. *Melnikov A. G.* Torsion-free abelian groups with optimal Scott families// J. Math. Logic. — 2018. — *18*, № 1. — 1850002.
86. *Melnikov A. G., Ng K. M.* Computable torsion abelian groups// Adv. Math. — 2018. — *325*. — С. 864–907.

87. *Metakides G., Nerode A.* Effective content of field theory// Ann. Math. Logic. — 1979. — *17*, № 3. — С. 289–320.
88. *Miller R.* **d**-Computable categoricity for algebraic fields// J. Symb. Logic. — 2009. — *74*, № 4. — С. 1325–1351.
89. *Miller R.* The computable dimension of trees of infinite height// J. Symb. Logic. — 2005. — *70*, № 1. — С. 111–141.
90. *Miller R., Poonen B., Schoutens H., Shlapentokh A.* A computable functor from graphs to fields/ Preprint, 2015. — arXiv:1510.07322.
91. *Miller R., Schoutens H.* Computably categorical fields via Fermat's last theorem// Computability. — 2013. — *2*, № 1. — С. 51–65.
92. *Miller R., Shlapentokh A.* Computable categoricity for algebraic fields with splitting algorithms// Trans. Am. Math. Soc. — 2015. — *367*, № 6. — С. 3955–3980.
93. *Montalbán A.* Computability theoretic classifications for classes of structures// Proc. Int. Congr. Math. Seoul 2014. Vol. II. — Seoul: Kyung Moon, 2014. — С. 79–101.
94. *Remmel J. B.* Recursive isomorphism types of recursive Boolean algebras// J. Symb. Logic. — *46*, № 3. — С. 572–594.
95. *Remmel J. B.* Recursively categorical linear orderings// Proc. Am. Math. Soc. — 1981. — *83*, № 2. — С. 387–391.
96. *Rosenstein J. G.* Linear orderings/ Pure Appl. Math. — New York etc.: Academic Press, 1982. — *98*.
97. *Simpson S. G.* Degrees of unsolvability: a survey of results// в кн.: *Barwise J.* (ред.) Handbook of Mathematical Logic. Stud. Logic Found. Math. — Amsterdam: Elsevier, 1977. — *90*. — С. 631–652.
98. *Smith R. L.* Two theorems on autostability in p-groups// в кн.: *Lerman M., Schmerl J. H., Soare R. I.* (ред.). Logic year 1979–80/ Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1981. — *859*. — С. 302–311.
99. *Soare R. I.* Turing computability. Theory and applications. — Berlin: Springer, 2016.

Н. А. Баженов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 157 (2018). С. 59–69

УДК 510.5

О СТЕПЕНЯХ ПЕРЕЧИСЛЕНИЙ СЧЕТНЫХ СЕМЕЙСТВ ВЕХНЕРОВСКОГО ТИПА

© 2018 г. **И. Ш. КАЛИМУЛЛИН, М. Х. ФАЙЗРАХМАНОВ**

Аннотация. Работа представляет собой обзор результатов по счетным семействам, имеющим естественный спектр степеней. Данные результаты были получены при помощи модификации методологии, предложенной С. Вехнером, который первым нашел семейство множеств, имеющее спектр, состоящий в точности из ненулевых тьюринговых степеней. На основе этого метода были получены примеры семейств, имеющих другие естественные спектры. В данной работе приведены новые примеры естественных спектров. В частности, построено семейство конечных множеств, имеющее спектр, состоящий в точности из не K-тривиальных степеней, а также найдены новые достаточные условия на Δ^0_2-степень $\mathbf{a}$, при выполнении которых класс $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}\}$ является спектром степеней некоторого семейства. Приведен обзор последних результатов авторов о спектрах степеней α-семейств, где α — произвольный вычислимый ординал.

Ключевые слова: спектр степеней, счетное семейство, перечисление семейства, алгебраическая структура, α-семейство.

AMS Subject Classification: 03D20, 03D45

1. Введение. Проблема описания тьюринговых степеней, перечисляющих заданное семейство множеств натуральных чисел возникла в связи так называемой проблемой Лемппа (1997; (см. [6, Sec. 9.5]):

Существует ли счетная неконструктивизируемая алгебраическая структура, конструктивизируемая во всех ненулевых степенях?

Другими словами, существует ли структура $\mathfrak{A}$ со спектром степеней $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$.

Определение 1.1 (см. [16])**.** *Спектром степеней* структуры $\mathfrak{A}$ называется класс тьюринговых степеней $\mathbf{x}$, для которых существует $\mathbf{x}$-вычислимая копия структуры $\mathfrak{A}$.

Было ясно, что естественным объектом классической теории вычислимости, позволяющим построить такую структуру, является семейство множеств, поскольку более простой объект — множество, либо является перечислимым, либо не перечислим относительно ненулевой степени. В тоже самое время (см. [12]) семейство множеств легко кодируется в структуры с сохранением спектра степеней.

Определение 1.2. Счетное семейство множеств натуральных чисел $\mathcal{S}$ *перечислимо* относительно множества X (и его степени $\mathbf{x} \ni X$), если существует такая вычислимая функция f, что $\mathcal{S} = \{W^X_{f(i)} : i \in \omega\}$. *Спектром степеней* семейства $\mathcal{S}$ назовем класс тьюринговых степеней $\mathbf{Sp}\,\mathcal{S}$, перечисляющих $\mathcal{S}$.

Позднее С. Вехнер (см. [17]) нашел семейство, решающее проблему Лемппа.

Теорема 1.3 (см. [17])**.** *Пусть $\mathcal{F}$ — семейство всех конечных множеств. Семейство*

$$\mathcal{W} = \big\{\{n\} \oplus F : F \in \mathcal{F} \;\&\; F \neq W_n\big\}$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-11-00028, И. Ш. Калимуллин) и Министерства образования и науки РФ в рамках проекта «федеральный профессор математики» № 1.451.2016/1.4 (И. Ш. Калимуллин) и субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 1.1515.2017/4.6, М. Х. Файзрахманов).

перечислимо относительно X тогда и только тогда, когда X невычислимо, т.е. спектр семейства есть класс $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$. Следовательно, существует алгебраическая структура со спектром степеней $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$.

Отметим, что при построении данного семейства был использован следующий интересный прием. Требования на невычислимые множества X, $X \neq W_n$ и $\overline{X} \neq W_n$ закодированы в элементы семейства $\{n\} \oplus F$ с условием $F \neq W_n$. Возникла надежда, что кодируя подобным образом другие требования на X, можно получать новые спектры семейств и соответствующих структур. Это вызвало ряд публикаций разных авторов с применением данной техники. Неформально назовем семейства, в которых условия на его спектр закодированы в условия на элементы этого семейства, *вехнеровскими*. В следующем параграфе приведен обзор результатов в данном направлении.

2. Спектры семейств вехнеровского типа. Одним из непосредственных обобщений семейства из теоремы 1.3 является семейство следующего вида:

$$\mathcal{W}(\mathcal{R}, \nu) = \big\{\{n\} \oplus U \mid n \in \omega \;\&\; U \in \mathcal{R} \;\&\; U \neq \nu(n)\big\},$$

где $\mathcal{R}$ — некоторое семейство (как правило, вычислимо перечислимое), а ν — некоторая нумерация множеств $\nu : \omega \to 2^\omega$. В качестве $\mathcal{R}$ можно, например, взять семейство $\mathcal{F}$ всех конечных множеств (конечных подмножеств ω), семейство $\mathcal{E}$ всех вычислимо перечислимых множеств или семейство $\mathcal{C}$ всех вычислимых множеств. Начнем с описания спектров семейств вида $\mathcal{W}(\mathcal{R}, \nu)$, если $\mathcal{R}$ содержит все конечные множества и ν — вычислимая нумерация Δ^0_2 множеств. Под *вычислимой нумерацией Δ^0_2-множеств* мы подразумеваем такое соответствие $\nu : \omega \to 2^\omega$, что существует вычислимая функция h, для которой имеет место соотношение $\chi_{\nu(n)} = \Phi^K_{h(n)}$ при всех $n \in \omega$. Под *вычислимой нумерацией низких множеств* мы подразумеваем такую вычислимую нумерацию Δ^0_2-множеств ν, что существует вычислимая функция h, для которой имеет место $\chi_{\nu(n)'} = \Phi^K_{h(n)}$ при всех $n \in \omega$. Будем говорить, что нумерация ν является *CS-нумерацией относительно* вычислимой инъективной функции C из $\omega \times \omega$ в ω, если существует такая вычислимая бинарная функция S, что для всех n и m имеет место равенство $\nu(S(n,m)) = \nu(n)^{(m)}_C$, где множество $X^{(m)}_C$ для множества $X \subseteq \omega$ определяется следующим образом:

$$X^{(m)}_C = \{k \mid C(m,k) \in X\}.$$

Будем также говорить, что нумерация ν является *CS-нумерацией*, если она является CS-нумерацией относительно некоторой вычислимой инъективной функции C из $\omega \times \omega$ в ω.

Следующая теорема описывает спектры семейств $\mathcal{W}(\mathcal{R}, \nu)$, где $\mathcal{R}$ — вычислимо перечислимое семейство, содержащее все конечные множества, а ν — вычислимая нумерация Δ^0_2-множеств.

Теорема 2.1 (см. [1])**.** *Пусть ν — вычислимая нумерация Δ^0_2-множеств и $\mathcal{R}$ — вычислимо перечислимое семейство, содержащее все конечные множества. Тогда для степени $\mathbf{x}$ следующие условия* (i)–(iii) *эквивалентны*:

(i) $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{R}, \nu))$.

(ii) *Существует такое в.п. относительно $\mathbf{x}$ множество Y, что для всех n и m имеет место соотношение $Y^{(\langle n,m\rangle)} \neq \nu(n)$ и $k \in Y^{(\langle n,m\rangle)}$ для всех $k < m$.*

(iii) *Существует такое в.п. относительно $\mathbf{x}$ множество Y, что для всех n и m имеет место соотношение $Y^{(\langle n,m\rangle)} \neq \nu(n)$ и $k \in Y^{(\langle n,m\rangle)}$ для всех $k < m$, причем множество $Y^{(\langle n,m\rangle)}$ конечно.*

Следующее условие (iv) *является достаточным для выполнения условий* (i)–(iii):

(iv) *Существует такое в.п. относительно $\mathbf{x}$ множество Z, что $F \cup Z \notin \{\nu(n)\}_{n\in\omega}$ для любого конечного множества F.*

Если ν является CS-нумерацией, то каждое из условий (iv) *и* (v) (*см. ниже*) *является необходимым и достаточным для условий* (i)–(iii).

(v) *Существует в.п. относительно $\mathbf{x}$ множество $Z \notin \{\nu(n)\}_{n\in\omega}$.*

Следствие 2.2. *Пусть $\mathbf{x}' > \mathbf{0}'$, $\mathcal{R}$ — вычислимо перечислимое семейство, содержащее все конечные множества и ν — вычислимая нумерация Δ^0_2-множеств. Тогда $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{R}, \nu))$.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathbf{x}$. Тогда в.п. относительно $\mathbf{x}$ множество $X' \in \mathbf{x}'$ не является Δ^0_2-множеством. Остается применить теорему 2.1 (условие (iv)) при $Z = X'$. □

Следствие 2.3 (см. [17]). *Пусть $\varepsilon(n) = W_n$ для всех n. Тогда* $\mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$.

Доказательство. Ясно, что ε является вычислимой CS-нумерацией Δ^0_2-множеств. Условие (v) теоремы 2.1 эквивалентно существованию не-в.п. множества, являющегося в.п. относительно $\mathbf{x}$, что, в свою очередь, эквивалентно условию $\mathbf{x} > \mathbf{0}$. (Если множество $X \in \mathbf{x}$ не вычислимо, то можем взять множество $Y = X \oplus \overline{X}$.) □

Следствие 2.4. *Пусть $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$ и $\varepsilon^A(n) = W^A_n$, где $A \in \mathbf{a}$. Тогда* $\mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^A)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}\}$.

Доказательство. Из $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$, следует, что что ε^A является вычислимой нумерацией Δ^0_2-множеств, причем семейство $\{\varepsilon^A(n)\}_{n\in\omega}$ состоит в точности из всех множеств, вычислимо перечислимых относительно $\mathbf{a}$. Данная нумерация является, очевидно, CS-нумерацией. Тогда условие (v) теоремы 2.1 эквивалентно условию $\mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}$. □

Известно, что существует бесконечно много низких минимальных степеней. Поэтому возможны спектры степеней семейств, содержащие все степени, кроме двух степеней, одна из которых нулевая.

Следствие 2.5. *Пусть $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$, $\mathbf{a}$ — минимальная степень, $\varepsilon^A(n) = W^A_n$, где $A \in \mathbf{a}$. Тогда* $\mathrm{card}(\mathbf{D} - \mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^A))) = 2$.

Другим приложением теоремы 2.1 служит следствие 2.6, дающее пример двух спектров алгебраических структур, объединение которых снова есть спектр алгебраической структуры.

Следствие 2.6. *Пусть $\mathbf{a} > \mathbf{c}$, $\mathbf{b} > \mathbf{c}$, $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$, $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$ и $\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Тогда*

$$\mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^C)) \neq \mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon_A)), \quad \mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^C)) \neq \mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^B)),$$
$$\mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^C)) = \mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon_A)) \cup \mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^B)),$$

где $A \in \mathbf{a}$, $B \in \mathbf{b}$ и $C \in \mathbf{c}$.

Из теоремы 2.1 следует, что для Δ^0_2 CS-нумераций спектр семейства $\mathcal{W}(\mathcal{R}, \nu)$ описывается наиболее просто, причем здесь в полной мере справедливо соответствие между условием $F \neq \nu(n)$ на элементы семейства и итоговым спектром $\{\mathbf{x} : (\exists Z \text{ в.п. в } \mathbf{x})(\forall n)[Z \neq \nu(n)]\}$. В этой связи важно отметить, что любой Δ^0_2-класс, замкнутый относительно 1-сводимости, имеет Δ^0_2 CS-нумерацию.

Предложение 2.7 (см. [1]). *Пусть дана такая вычислимая нумерация α Δ^0_2-множеств, что класс $\mathcal{C} = \{\alpha(n)\}_{n\in\omega}$ замкнут вниз относительно 1-сводимости, т.е. если $X \in \mathcal{C}$ и $Y \leqslant_1 X$, то $Y \in \mathcal{C}$. Тогда для любой вычислимой инъективной функции $C : \omega \times \omega \to \omega$, существует такая вычислимая нумерация ν Δ^0_2-множеств, являющаяся CS-нумерацией относительно C, что $\mathcal{C} = \{\nu(n)\}_{n\in\omega}$.*

Предложение 2.7 вместе с теоремой 2.1 позволяет установить существование спектров, состоящих из степеней, тьюринговые скачки которых не лежат в заданной вычислимой совокупности Δ^0_2 множеств, замкнутой вниз относительно 1-сводимости.

Следствие 2.8. *Пусть класс $\mathcal{C} \subseteq \Delta^0_2$ имеет вычислимую нумерацию Δ^0_2 множеств и замкнут вниз относительно 1-сводимости. Тогда для некоторой вычислимой CS-нумерации ν имеем*

$$\mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu)) = \{\deg(X) \mid X' \notin \mathcal{C}\}.$$

Доказательство. Так как $Z \leqslant_1 X'$ для любого вычислимо перечислимого относительно X множества Z, имеем

$$(\exists Z \text{ в.п. относительно } X)[Z \notin \mathcal{C}] \iff X' \notin \mathcal{C}.$$ □

Например, каждый уровень иерархии Ершова

$$\{\Sigma_a^{-1}, \Pi_a^{-1}, \Delta_a^{-1} \mid a \in O\},$$

очевидно, удовлетворяет условиям следствия 2.8. В частности, для класса Δ_ω^{-1} справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.9. *Существует такая вычислимая нумерация ϖ Δ_2^0 множеств, что*

$$\mathbf{Sp}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varpi)) = \{\deg(X) \mid \emptyset' <_{\mathrm{tt}} X'\}.$$

Доказательство. Действительно, согласно результату Картенса [7] имеем

$$(\forall Z \text{ в.п. относительно } X)[Z \in \Delta_\omega^{-1}] \iff X' \in \Delta_\omega^{-1} \iff X' \leqslant_{\mathrm{tt}} \emptyset'. \qquad \square$$

Множества X со свойством $X' \leqslant_{\mathrm{tt}} \emptyset'$ и их степени называются *супернизкими* (см., например, [15]). Таким образом, следствие 2.9 дает пример спектра степеней структуры, совпадающих с классом всех несупернизких степеней.

Теорема 2.1 и ее доказательство не применимы к нумерациям ν, не являющимся Δ_2^0. Даже для тех простых случаев, когда $\nu = \varepsilon^A$ и $A \in \Delta_2^0$, анализ спектра семейства

$$\mathcal{W}(\mathcal{R}, \varepsilon^A) = \{\{n\} \oplus U \mid n \in \omega \ \&\ U \in \mathcal{R} \ \&\ U \neq W_n^A)\},$$

сложен.

Более того, нетрудно привести к противоречию предположение о том, что спектр степеней семейства

$$\mathcal{W}(\mathcal{R}, \varepsilon^A) = \{\{e\} \oplus U \mid e \in \omega \ \&\ U \in \mathcal{R} \ \&\ U \neq W_e^A\}$$

равен совокупности $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}\}$ при $A \in \mathbf{a}$, $\mathbf{a}' > \mathbf{0}'$ и некотором семействе $\mathcal{R}$, содержащем хотя бы одно непустое конечное множество $F \in \mathcal{R}$. Рассмотрим множество

$$J = \{j \in \omega \mid D_j \in \mathcal{W}(\mathcal{R}, \varepsilon^A)\},$$

где через D_j обозначено конечное множество с каноническим индексом j. Ясно, что если $\mathcal{W}(\mathcal{R}, \varepsilon^A) = \{W_{d(k)}^X \mid k \in \omega\}$ для некоторого множества X и вычислимой функции d, то для всех $j \in \omega$

$$j \in J \iff (\exists k)(\exists k)[D_j \subseteq W_{d(k),s}^X \ \&\ (\forall x \notin D_j)(\forall t)[x \notin W_{d(k),t}^X]],$$

т.е. J будет X'-вычислимо перечислимым множеством. По определению спектра степеней семейства в качестве X здесь может выступать произвольное множество $X \not\leqslant_T A$.

Релятивизируя к оракулу $\emptyset'$ построение минимальной пары степеней, найдем такие множества Y_0 и Y_1, что $\emptyset' \leqslant_T Y_0 \not\leqslant_T A \oplus \emptyset'$, $\emptyset' \leqslant_T Y_1 \not\leqslant_T A \oplus \emptyset'$ и

$$Z \text{ является } Y_0\text{-в.п. } \&\ Z \text{ является } Y_1\text{-в.п.} \implies Z \text{ является } \emptyset'\text{-в.п.}$$

для всех $Z \subseteq \omega$. По критерию полноты Фридберга существуют такие множества X_0 и X_1, что $X_i' \equiv_T X_i \oplus \emptyset' \equiv_T Y_i$ при $i \in \{0, 1\}$. Тогда $X_i \not\leqslant_T A$ при $i \in \{0, 1\}$, так что J является одновременно и X_0'-в.п., и X_1'-в.п. Значит, J является $\emptyset'$-в.п.

Найдем теперь такие вычислимые функции f, g и h, что для всех $n \in \omega$

$$W_{f(n)}^A = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } n \notin A', \\ F, & \text{если } n \in A', \end{cases} \qquad D_{g(n)} = \{f(n)\} \oplus \emptyset, \quad D_{h(n)} = \{f(n)\} \oplus F.$$

Тогда $n \in A' \iff g(n) \in J$ и $n \notin A' \iff h(n) \in J$ для всех $n \in \omega$, откуда $A' \leqslant_T \emptyset'$, что противоречит условию $\mathbf{a}' > \mathbf{0}'$.

И. Ш. Калимуллин установил (см. [2]), что для класса $\mathcal{R}$ всех областей значения возрастающих примитивно рекурсивных функций все же выполнен аналог теоремы 2.1, т.е. спектр семейства $\mathcal{W}(\mathcal{R}, \varepsilon^A)$ равен $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}\}$, где $\mathbf{a}$ — степень множества A. Ниже мы модифицируем это доказательство для класса всех областей значения инъективных примитивно рекурсивных функций, чтобы получить новые спектры семейств и получить аналог следствия 2.6 (эффект нетривиального объединения спектров).

Пусть $\mathcal{R}$ теперь равняется $\mathcal{P}$ всех областей значения инъективных примитивно рекурсивных функций. Нетрудно видеть, что если $C \in \mathcal{P}$, $C \subseteq B$ и B вычислимо перечислимо, то $B \in \mathcal{P}$. Мы установим, что если A-вычислимо перечислимо, то $\mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A)$ является X-в.п. тогда и только тогда, когда $X \not\leqslant_T A$.

Лемма 2.10.

(1) (см. [2]). *Пусть A — в.п. множество. Тогда существует такая вычислимая функция h, что для произвольных $X \not\leqslant_T A$ и $e \in \omega$ имеем $W^X_{h(e)} \in \mathcal{P}$ и $W^X_{h(e)} \neq W^A_e$.*

(2) (см. [5]). *Пусть Z — в.п. множество, $Z \leqslant_T A$ и $Z' \equiv_T A'$. Тогда существует такая вычислимая функция h, что для произвольных $X \not\leqslant_T A$ и $e \in \omega$ имеет место $W^X_{h(e)} \in \mathcal{P}$ и $W^X_{h(e)} \neq W^A_e$.*

Теорема 2.11 (см. [5])**.** *Пусть $A - \Delta^0_2$-множество, для которого существует в.п. множество $Z \leqslant_T A$, $Z' \equiv_T A'$, и $\mathcal{P}$ — семейство всех областей значения инъективных примитивно рекурсивных функций. Тогда*

(1) *семейство*
$$\mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A) = \{\{e\} \oplus U \mid e \in \omega \ \&\ U \in \mathcal{P} \ \&\ U \neq W^A_e\}$$
не является A-в.п.;

(2) *существует такая вычислимая функция d, что для всех $X \not\leqslant_T A$ имеет место*
$$\mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A) = \{W^X_{d(n)} \mid n \in \omega\}.$$

Таким образом, для степени $\mathbf{a} = \deg(A)$ спектром семейства $\mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A)$ является совокупность степеней $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}\}$.

Доказательство. (1) Предположим, что A-в.п. множество W^A_u, $u \in \omega$, является перечислением семейства $\mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A)$. Тогда существует такая вычислимая функция F, что
$$W^A_{F(e)} \neq \varepsilon^A(e) = W^A_e$$
для всех $e \in \omega$, что противоречит теореме рекурсии.

(2) Для доказательства существования функции d необходимо зафиксировать следующее:

(a) вычислимую последовательность $\{g_j\}_{j\in\omega}$ всех инъективных примитивно рекурсивных функций;

(b) такой сильно вычислимый массив конечных множеств $\{V_{e,s}\}_{e,s\in\omega}$, что
$$W^A_e = \bigcup_u \bigcap_{s \geqslant u} V_{e,s}$$
для всех $e \in \omega$ (так как по условию $A \in \Delta^0_2$-множество и, следовательно, $A' \in \Sigma^0_2$, такой массив существует);

(c) такую вычислимую функцию k, что для всех $e, j, s \in \omega$
$$W^A_{k(e,j,s)} = \{x \mid g_j(x + s) \in W^A_e\};$$

(d) вычислимую функцию h из леммы 2.10.

Поскольку $W^X_{h(e)} \neq W^A_e$ и $W_{h(e)} \in \mathcal{P}$ при $X \not\leqslant_T A$, для такой вычислимой функции $\widetilde{h}$, что
$$W^X_{\widetilde{h}(e,j,s)} = \{g_j(x) \mid x < s\} \cup \{g_j(x + s) \mid x \in W^X_{h(k(e,j,s))}\},$$
также имеет место $W^X_{\widetilde{h}(e,j,s)} \neq W^A_e$ и $W_{\widetilde{h}(e,j,s)} \in \mathcal{P}$, если $X \not\leqslant_T A$ и $e, j, s \in \omega$.

Обозначим через υ вычислимую функцию
$$\upsilon(e, y, s) = \min\{u \leqslant s \mid (\forall t)[u \leqslant t < s \implies y \in V_{e,t}]\},$$
не убывающую относительно переменной s.

Определим вычислимую функцию d_1 так, что

$$W^X_{d_1(e,j,y)} = \{g_j(x) \mid (\exists s > x)[y \notin V_{e,s} \vee g_j(x) \in W^X_{\widetilde{h}(e,j,\upsilon(e,y,s))}]\}.$$

Ясно, что если $y \notin W^A_e$, то $W^X_{d_1(e,j,y)} = \operatorname{rng} g_j$. Если же $y \in W^A_e$, то существует предел

$$u = \lim_s \upsilon(e,y,s).$$

Тогда $W^X_{d_1(e,j,y)} = W^X_{\widetilde{h}(e,j,u)}$, откуда $W^X_{d_1(e,j,y)} \neq W^A_e$ и $W_{d_1(e,j,y)} \in \mathcal{P}$ при $X \not\leqslant_T A$.

Определим теперь вычислимую функцию d_2 так, что

$$W^X_{d_2(e,j,y,u)} = \begin{cases} \operatorname{rng} g_j, & \text{если } y \in \bigcap\limits_{s \geqslant u} V_{e,s} \text{ и } y \notin \operatorname{rng} g_j, \\ W^X_{\widetilde{h}(e,j,t)}, & \text{если } t = \min\{s \geqslant u \mid y \notin V_{e,s} \text{ или } y \in g_j(s)\}. \end{cases}$$

Убедимся, что такая вычислимая функция d, что

$$W^X_{d(\langle e,j,y,u\rangle)} = \begin{cases} \{e\} \oplus W^X_{d_1(e,j,y)}, & \text{если } u \text{ нечетно и } y \in \{g_j(k) : k < u\}, \\ \{e\} \oplus W^X_{d_2(e,j,y,u)}, & \text{если } u \text{ четно и } y \notin \{g_j(k) : k < u\}, \\ \{e\} \oplus W^X_{h(e)}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для всех $n = \langle e,j,y,u\rangle \in \omega$ и $X \subseteq \omega$, удовлетворяет утверждению теоремы.

Пусть $X \not\leqslant_T A$. Отметим сначала, что по построению $W^X_{d(n)} \in \mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A)$ для всех $n \in \omega$. Предположим, что $\{e\} \oplus \operatorname{rng} g_j \in \mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A)$. Тогда $\operatorname{rng} g_j \neq W^A_e$. Если $y \in \operatorname{rng} g_j - W^A_e$, то $W^X_{d(n)} = \{e\} \oplus \operatorname{rng} g_j$ при $n = \langle e,j,y,u\rangle$ для достаточно большого нечетного u. Если же $y \in W^A_e - \operatorname{rng} g_j$, то $y \in \bigcap\limits_{s \geqslant u} V_{e,s}$ для некоторого четного u и, следовательно, $W^X_{d(n)} = \{e\} \oplus \operatorname{rng} g_j$ при $n = \langle e,j,y,u\rangle$. Таким образом, $\mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A) = \{W^X_{d(n)} \mid n \in \omega\}$. □

Рассмотрим две операции на нумерациях. Пусть $\nu_1, \nu_2 : \omega \to 2^\omega$. Нумерации $\nu_1 + \nu_2$ (прямая сумма нумераций ν_1 и ν_2) и $\nu_1 \times \nu_2$ (прямое произведение нумераций ν_1 и ν_2) определяются следующим образом:

$$(\nu_1 + \nu_2)(2n) = \nu_1(n), \quad (\nu_1 + \nu_2)(2n+1) = \nu_2(n),$$
$$(\nu_1 \times \nu_2)(\langle n, m\rangle) = \nu_1(n) \oplus \nu_2(m),$$

где $n, m \in \omega$.

Следующая теорема показывает, что данные операции согласуются со спектрами семейств вида $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu)$.

Теорема 2.12 (см. [1]). *Пусть A_1, A_2 — Δ^0_2-множества, для которых $A_1' \equiv_T \emptyset'$ и $A_1' \equiv_T \emptyset'$. Тогда для степеней $\mathbf{a}_1 = \deg(A_1)$ и $\mathbf{a}_2 = \deg(A_2)$ спектром семейства $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^{A_1} + \varepsilon^{A_2})$ является совокупность степеней $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}_1\} \cap \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}_2\}$, а спектром семейства $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^{A_1} \times \varepsilon^{A_2})$ является совокупность степеней $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}_1\} \cup \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}_2\}$. В частности, спектр семейства $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^{A_1} \times \varepsilon^{A_2})$ равен $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}\}$, если существует $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \cap \mathbf{a}_2$.*

Совмещая рассуждения из [1] и [5] можно получить следующее утверждение.

Следствие 2.13. *Пусть A_1, A_2 — Δ^0_2-множества, для которых существуют такие в.п. множества $Z_1 \leqslant_T A_1$, $Z_2 \leqslant_T A_2$, что $Z_1' \equiv_T A_1'$ и $Z_2' \equiv_T A_2'$, $\mathcal{P}$ — семейство всех областей значения инъективных примитивно рекурсивных функций, а $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P} = \{X \oplus Y : X, Y \in \mathcal{P}\}$. Тогда для степеней $\mathbf{a}_1 = \deg(A_1)$ и $\mathbf{a}_2 = \deg(A_2)$ спектром семейства $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^{A_1} + \varepsilon^{A_2})$ является совокупность степеней*

$$\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}_1\} \cap \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}_2\},$$

а спектром семейства $\mathcal{W}(\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}, \varepsilon^{A_1} \times \varepsilon^{A_2})$ является совокупность степеней

$$\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}_1\} \cup \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}_2\}.$$

В частности, спектр семейства $\mathcal{W}(\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}, \varepsilon^{A_1} \times \varepsilon^{A_2})$ равен $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leqslant \mathbf{a}\}$, если существует $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \cap \mathbf{a}_2$.

Также с помощью методов работы [5] в [10] было найдено семейство со спектром из степеней множеств, не являющихся *низкими*. Напомним, что степень $\mathbf{x}$ называется *низкой*, если $\mathbf{x}' = \mathbf{0}'$. Фиксируем такую функцию $g \equiv_T \emptyset'$, что множество $C_g = \{\sigma \in \omega^{<\omega} : \sigma \not\preceq g\}$ всех конечных строк, не являющихся началом g, вычислимо перечислимо.

Теорема 2.14 (см. [10]). *Семейство*

$$\mathcal{G} = \{\{n\} \oplus (C_g \cup g_F) : n \in \omega,\ \overline{F} \in \mathcal{F},\ \overline{F} \neq W_n^g\},$$

где $g_F = \{g \upharpoonright x : x \in F\}$, *является* $\mathbf{x}$*-в.п. тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x}$ *не является низкой, т.е.* $\mathbf{Sp}(\mathcal{G}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}' > \mathbf{0}'\}$.

При этом первый пример алгебраической структуры с таким спектром был найден в [12].

Все до сих пор перечисленные спектры степеней семейств имеют меру Лебега в канторовском пространстве, равную 1. Алгебраические структуры с такими спектрами получили в литературе название *почти вычислимых* (см. [8, 13, 14]). При этом в [8] был найден первый пример почти вычислимой структуры, спектр которой не является ко-счетным.

Теорема 2.15 (см. [8]). *Пусть*

$$\mathcal{G} = \{\{n\} \oplus F : n \in \omega,\ F \in \mathcal{F},\ (\{D_{\varphi_n(m)}\}_{n\in\omega} \text{ попарно не пересекаются} \Rightarrow (\exists m)\,[D_{\varphi_n(m)} \subseteq F])\}.$$

Тогда $\mathbf{Sp}\,\mathcal{G} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}$ *гипериммунна*$\}$.

Исследование теоретико-мерных и топологических свойств спектров семейств были продолжены в [9]. В процитированной работе также найдены семейства, спектрами которых являются дополнения классов *совокупно рекурсивных* степеней $\mathbf{AC}$ и степеней множеств *с трассируемым скачком* $\mathbf{JT}$, интенсивно изучаемых в теории алгоритмической случайности, первый из которых меру 1 и первую категорию. Таким образом получается различие понятия меры и категории на спектрах алгебраических структур.

Теорема 2.16 (см. [9]). *Пусть* μ *— функция модуля для* $\emptyset'$. *Тогда спектр степеней семейства*

$$\mathcal{A} = \{\varphi : \varphi \text{ — такая конечная частичная функция, что } (\exists n)\,[\varphi(n) > \mu(n)]\}$$

равен классу $\overline{\mathbf{AC}}$ *всех степеней, не являющихся совокупно рекурсивными.*

Теорема 2.17 (см. [9]). *Существует счетное семейство (вехнеровского типа), спектр степеней которого равен классу* $\overline{\mathbf{JT}}$ *всех степеней без трассируемого скачка.*

Помимо упомянутых классов в теории алгоритмической случайности часто возникает класс, определяемый неравенством на беспрефиксную сложность K начальных сегментов его множеств (см., например, [15]). Скажем, что множество A *K-тривиально*, если существует такое число b, что $K(A \upharpoonright n) \leqslant K(n) + b$ для всех n. Это определение равносильно существованию такого числа b, что $K(n) \leqslant K^A(n) + b$ для всех n, где K^A — беспрефиксная колмогоровская сложность относительно оптимальной беспрефиксной частичной A-вычислимой функции. Покажем, что дополнение класса K-тривиальных степеней так же является спектром перечислений некоторого семейства. Для каждого $b \in \omega$ рассмотрим семейство $\mathcal{F}_b$, состоящее из всех таких частичных $\{0,1\}$-значных функций ψ, что $\operatorname{dom}\psi = \omega \upharpoonright m$ и $K(\psi \upharpoonright n) > K(n) + b$ для некоторых m и $n \leqslant m$.

Следующий новый результат дает еще одно семейство вехнеровского типа, в котором не-K-тривиальность элемента спектра $\mathbf{x}$ закодировано в условии $\psi \in \mathcal{F}_b$ на элементы семейства.

Теорема 2.18. *Семейство* $\mathcal{S} = \{\{b\} \oplus \psi : \psi \in \mathcal{F}_b\}$ *перечислимо относительно* A *тогда и только тогда, когда* A *не K-тривиально.*

Доказательство. Пусть A не K-тривиально. Покажем, что $\mathcal{S}$ перечислимо относительно A. Пусть $\mathcal{P}$ — множество частичных $\{0,1\}$-значных функций, областью определения которых являются начальные сегменты ω. Достаточно установить, что по заданным каноническому индексу функции $\psi \in \mathcal{P}$ и числам b, s можно равномерно с помощью оракула A перечислить функцию $\widehat{\psi} \in \mathcal{F}_b$, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) $\psi \subseteq \widehat{\psi}$;

(2) если $K_t(\psi \upharpoonright n) > K_t(n) + b$ для всех $n \leqslant |\operatorname{dom}\psi|$ и всех $t \geqslant s$, то $\widehat{\psi} = \psi$.

Фиксируем произвольно $b, s \in \omega$, $\psi \in \mathcal{P}$ и определим $\widehat{\psi}(x) = \psi(x)$ для всех $x \in \operatorname{dom}\psi$. Пусть $|\operatorname{dom}\psi| = m$. Для всех $x \geqslant m$ положим $\widehat{\psi}(x) = A(x)$, если существует такое $t \geqslant s + x - m$, что $K_t(\widehat{\psi} \upharpoonright n) \leqslant K_t(n) + b$ для всех $n \leqslant x$. Выполнение условий (1), (2) очевидно. Также справедлива принадлежность $\widehat{\psi} \in \mathcal{F}_b$, поскольку A не K-тривиально.

Обратно, пусть $\mathcal{S}$ перечислимо относительно A. Тогда для каждого n равномерно с помощью оракула A можно перечислить график некоторой функции $\psi_n \in \mathcal{F}_n$. Предположим, что A является K-тривиальным. Отсюда следует, что существует константа b, удовлетворяющая для всех m неравенству $K(m) \leqslant K^A(m) + b - 1$. Используя теорему рекурсии, фиксируем такой индекс n, что

$$\Phi_n^A(m) = \psi_{n+b} \upharpoonright U(m),$$

где U — оптимальная беспрефиксная частично вычислимая функция, и правая часть равенства определена только если $U^A(m) \downarrow \leqslant |\operatorname{dom}\psi_{n+b}|$. Имеем $K^A_{\Phi_n}(\psi_{n+b} \upharpoonright m) = K(m)$. Следовательно,

$$K(\psi_{n+b} \upharpoonright m) \leqslant K^A(\psi_{n+b} \upharpoonright m) + b - 1 \leqslant K^A_{\Phi_n}(\psi_{n+b} \upharpoonright m) + n + b = K(m) + n + b$$

для всех $m \leqslant |\operatorname{dom}\psi_{n+b}|$; противоречие с выбором ψ_{n+b}. Этим завершается доказательство теоремы. □

3. Обращение скачков семейств вехнеровского типа. Результаты предыдущего параграфа могут быть использованы для описания спектров степеней алгебраических структур не только с помощь непосредственной трансляции семейств в структуры, но и с помощью так называемых обращений скачка, при которых семейство кодируется в структуры с точностью до равенства нескольких тьюринговых скачков их представлений. В [12] возможность такой трансляции для структур была установлена для структур при любой α-итерации скачка, где α — произвольный вычислимый последовательный ординал.

Теорема 3.1 (см. [12]). *Для любой счетной алгебраической структуры $\mathfrak{A}$ и вычислимого последовательного ординала α существует алгебраическая структура $\mathfrak{A}^{-\alpha}$, конструктивизируемая относительно степени $\mathbf{x}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ конструктивизируема относительно α-итерации тьюрингового скачка $\mathbf{x}^{(\alpha)}$, т.е.*

$$\mathbf{Sp}(\mathfrak{A}^{-\alpha}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^{(\alpha)} \in \mathbf{Sp}(\mathfrak{A})\}.$$

Недавно в [3] было установлено, что предыдущая теорема не верна для предельных ординалов.

Теорема 3.2 (см. [3]). *Для предельных вычислимых ординалов α не существует алгебраической структуры $\mathfrak{B}$ со спектром степеней*

$$\mathbf{Sp}(\mathfrak{B}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^{(\alpha)} \geqslant \mathbf{a}\}$$

при $\mathbf{a} > \mathbf{0}^{(\alpha)}$.

И. Ш. Калимуллин и М. Х. Файзрахманов (см. [4,10,11]) предложили общий подход, с помощью которого можно получать обращения спектров алгебраических структур кодированием семейств вехнеровского типа. Для этого было введено следующее понятие, обобщающее понятие семейства множеств.

Определение 3.3. Произвольное подмножество $A \subseteq \omega$ назовем 0-*семейством*. Для ординала $\alpha > 0$ счетные множества β-семейств, $\beta < \alpha$, будем называть α-семействами.

Назовем число e X-*в.п. индексом* 0-семейства $A \subseteq \omega$, если $A = W_e^X$. Пусть α — X-вычислимый ординал, заданный $\mathcal{O}^X$-обозначением. X-*в.п. индексом* α-семейства $\mathcal{S}$ называется каждое число e, для которого

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{H}^i_\beta : \beta < \alpha,\ i \in \omega \text{ и } \Phi_e^X(\beta, i) \downarrow\},$$

где $\mathcal{H}^i_\beta$ — β-семейство с X-в.п. индексом $\Phi_e^X(\beta, i)$ (относительно обозначения $\beta <_{O^X} \alpha$).

Определение 3.4. Будем говорить, что α-семейство $\mathcal{S}$ *перечислимо относительно* X (X-в.п.), если существует X-в.п. индекс $\mathcal{S}$ относительно некоторого $\mathcal{O}^X$-обозначения α.

Очевидно, данное определение согласовано с понятием X-перечислимых семейств в случае $\alpha = 1$. *Спектр степеней* $\mathbf{Sp}\,\mathcal{S}$ α-семейства $\mathcal{S}$ определяется как класс степеней множеств, перечисляющих $\mathcal{S}$. Как и для случая счетных семейств, спектр каждого α-семейства так же является спектром алгебраической структуры (см. [11]).

Нетрудно показать, что для конечных итераций скачка существуют обращения внутри класса обобщенных семейств. Для каждого n-семейства $\mathcal{U}$, $n \in \omega$, индуктивно определим $(n+1)$-семейства

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}) = \begin{cases} \{\{x,y\} : x \neq y\} \cup \{\{x\} : x \in A\}, & \text{если } n = 0 \text{ и } \mathcal{U} = A \subseteq \omega, \\ \{\mathcal{E}(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \in \mathcal{U}\}, & \text{если } n > 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{U}) = \begin{cases} \mathcal{F} \cup \{\overline{\{x\}} : x \in A\}, & \text{если } n = 0 \text{ и } \mathcal{U} = A \subseteq \omega, \\ \{\mathcal{D}(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \in \mathcal{U}\}, & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

Теорема 3.5 (см. [4,10]). *Пусть $\mathcal{U}$ — n-семейство, $n \in \omega$.*

1. *$\mathcal{U}$ является X'-в.п. тогда и только тогда, когда $(n+1)$-семейство $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ является X-в.п.*
2. *$\mathcal{U}$ является X''-в.п. тогда и только тогда, когда $(n+1)$-семейство $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ является X-в.п.*

Для вычислимого ординала α обозначим через $\mathbf{Low}_\alpha = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^{(\alpha)} = \mathbf{0}^{(\alpha)}\}$ класс всех α-*низких* степеней. Применяя n раз оператор $\mathcal{D}$ к 1-семейству из теоремы 2.15, релятивизированной относительно оракула $\emptyset^{(2n)}$, получаем следующую теорему.

Теорема 3.6 (см. [4,10]). *Для каждого $n > 0$ существует n-семейство со спектром $\overline{\mathbf{Low}}_{2n-1} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^{(2n-1)} > \mathbf{0}^{(2n-1)}\}$ всех не $(2n-1)$-низких степеней.*

Применяя оператор $\mathcal{E}$ к n-семействам из теоремы 3.6, релятивизированной относительно оракула $\emptyset'$, получаем следующий результат.

Теорема 3.7 (см. [4,10]). *Для каждого $n > 0$ существует n-семейство со спектром $\overline{\mathbf{Low}}_{2n-2} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^{(2n)} > \mathbf{0}^{(2n)}\}$ всех не $(2n)$-низких степеней.*

И. Ш. Калимуллин и М. Х. Файзрахманов (см. [11]) распространили обращение α-семейств на бесконечные итерации скачка. Для этого по индукции для каждого вычислимого ординала α был определен оператор $\mathcal{E}_\alpha$, переводящий множества в $(\alpha+1)$-семейства. Пусть

$$\mathcal{E}_0(A) = \mathcal{E}(A), \quad \mathcal{E}_\alpha(A) = \{\mathcal{E}_\beta(Z) : Z \in \mathcal{E}_0(A)\}, \text{ если } \alpha = \beta + 1.$$

Если α — предельный ординал, то определим $(\alpha+1)$-семейство

$$\mathcal{E}_\alpha(A) = \{\{\mathcal{E}_\beta(f(\beta)) \mid \beta < \alpha\} : f \in \mathcal{M}_\alpha\},$$

состоящее из α-семейств вида $\mathcal{E}_\beta(f(\beta))$, $\beta < \alpha$, где f пробегает все возможные элементы класса $\mathcal{M}_\alpha$, равного классу всех таких функций $f : \alpha \to \mathcal{F}$, что для каждой конечной возрастающей последовательности

$$0 = \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_n < \alpha$$

функция f постоянна на каждом из интервалов $[\beta_k, \beta_{k+1})$, $k < n$, и $f(\beta) = f(\beta_n) \in \mathcal{E}_0(A)$ для всех $\beta \in [\beta_n, \alpha)$.

Теперь для произвольных вычислимых ординалов α, β и β-семейства $\mathcal{U}$ можно определить по индукции $(\alpha + 1 + \beta)$-семейство

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathcal{U}) = \{\mathcal{E}_\alpha(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \in \mathcal{U}\}.$$

Теорема 3.8 (см. [11]). *Пусть α, β Э— вычислимые ординалы. Произвольное β-семейство $\mathcal{U}$ является $\mathbf{x}^{(\alpha+1)}$-в.п. тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}_\alpha(\mathcal{U})$ является $\mathbf{x}$-в.п.*

Следствие 3.9 (см. [11]).

$$\mathbf{Sp}\,\mathcal{E}_\alpha(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^{\emptyset^{(\alpha+1)}})) = \overline{\mathbf{Low}}_{\alpha+1} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^{(\alpha+1)} > \mathbf{0}^{(\alpha+1)}\}.$$

В некоторых случаях удается построить обращение предельных итераций скачка, что дает новые спектры степеней алгебраических структур.

Теорема 3.10 (см. [11]). *Пусть α — вычислимый предельный ординал. Тогда $(\alpha{+}1)$-семейство*

$$\mathcal{S}_\alpha = \left\{ \{\mathcal{E}_\beta(\{n\} \oplus f(\beta)) \mid \beta < \alpha\} : f \in \mathcal{M}_\alpha,\ \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta) \neq W_n^{\emptyset^{(\alpha)}} \right\}$$

является обращением α-скачка семейства $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^{\emptyset^{(\alpha)}})$, т.е. $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^{\emptyset^{(\alpha)}})$ является $\mathbf{x}^{(\alpha)}$-в.п. тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}_\alpha$ является $\mathbf{x}$-в.п., и, следовательно,

$$\mathbf{Sp}\,\mathcal{S}_\alpha = \overline{\mathbf{Low}}_\alpha = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^{(\alpha)} > \mathbf{0}^{(\alpha)}\}.$$

Отметим, что в отличие от предыдущих результатов данного раздела, в определении семейства $\mathcal{S}_\alpha$ не участвуют вехнеровские семейства из предыдущего раздела, но вместе с тем сами семейства тоже являются вехнеровскими в том смысле, что условие $\mathbf{x}^{(\alpha)} \not\leqslant \mathbf{0}^{(\alpha)}$ закодировано в элементы семейства с условием $\bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta) \neq W_n^{\emptyset^{(\alpha)}}$, что (достаточно отдаленно) напоминает отрицание α-низкости.

Кроме того, из предыдущего результата немедленно следует существование алгебраической структуры со спектром, состоящим из не α-низких степеней для предельных вычислимых ординалов α. Отметим, что существование таких спектров не следует из теоремы 3.1.

Следствие 3.11. *Для любого предельного вычислимого ординала α, существует алгебраическая структура $\mathfrak{A}$ со спектром степеней*

$$\mathbf{Sp}\,\mathfrak{A} = \overline{\mathbf{Low}}_\alpha = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^{(\alpha)} > \mathbf{0}^{(\alpha)}\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калимуллин И. Ш.* Спектры степеней некоторых алгебраических структур// Алгебра и логика. — 2007. — *46*. — С. 729–744.
2. *Калимуллин И. Ш.* Почти вычислимо перечислимые семейства множеств// Мат. сб. — 2008. — *199*. — С. 33–40.
3. *Калимуллин И. Ш., Кач А., Монталбан А., Пузаренко В. Г., Файзрахманов М. Х.* Обращение скачка алгебраических структур и Σ-определимость// Алгебра и логика. — 2018. — *57*, № 2. — С. 243–249.
4. *Калимуллин И. Ш., Файзрахманов М. Х.* Иерархия классов семейств и n-низкие степени// Алгебра и логика. — 2015. — *54*. — С. 536–541.
5. *Andrews U., Cai M. Kalimullin I., Lempp S., Miller J., Montalbán A.* The complements of lower cones of degrees and the degree spectra of structures// J. Symb. Logic. — 2016. — *81*. — С. 997–1006.
6. *Ash C. J., Knight J. F.* Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy/ Stud. Logic Found. Math. — Amsterdam: Elsevier, 2000. — *144*.
7. *Carstens H. G.* Δ_2^0-Mmengen// Arch.Math. Log. Grundlag. — 1978. — *18*. — С. 55–65.
8. *Csima B. F., Kalimullin I. S.* Degree spectra and immunity properties// Math. Log. Q. — 2010. — *56*. — С. 67–77.
9. *Diamondstone D., Greenberg N., Turetsky D.* Natural large degree spectra// Computability. — 2013. — *2*. — С. 1–8.
10. *Faizrahmanov M., Kalimullin I.* The enumeration spectrum hierarchy of n-families// Math. Log. Q. — 2016. — *62*. — С. 420–426.
11. *Faizrahmanov M., Kalimullin I.* The enumeration spectrum hierarchy and low_α segrees// J. Univ. Comp. Sci. — 2016. — *22*. — С. 943–955.
12. *Goncharov S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R.* Enumerations in computable structure theory// Ann. Pure Appl. Logic. — 2005. — *136*. — С. 219–246.
13. *Greenberg N., Montalbán A., Slaman T.* The Slaman–Wehner theorem in higher recursion theory// Proc. Am. Math. Soc. — 2011. — *139*. — С. 1865–1869.

14. *Kalimullin I. Sh.* Some notes on degree spectra of structures// в кн.: *Cooper S. B., Löwe B., Sorbi A.* (ред.). Computation and logic in the real world/ Lect. Notes Comp. Sci. — Springer, 2007. — *4497*. — С. 389–397.
15. *Nies A.* Lowness properties and randomness// Adv. Math. — 2005. — *197*. — С. 274–305.
16. *Richter L.* Degrees of structures// J. Symb. Logic. — 1981. — *46*. — С. 723–731.
17. *Wehner S.* Enumerations, countable structures, and Turing degrees// Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — *126*. — С. 2131–2139.

И. Ш. Калимуллин
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казань
E-mail: ikalimul@gmail.com

М. Х. Файзрахманов
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казань
E-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 157 (2018). С. 70–105

УДК 510.5, 512.565.2

ВЫЧИСЛИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОРЯДКИ И ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

© 2018 г. **М. В. ЗУБКОВ, А. Н. ФРОЛОВ**

Аннотация. Основная цель работы — описание техники предельно монотонных функций в теории вычислимых линейных порядков. Приведены основные определения предельно монотонных функций и их обобщений, а также ряд их основных свойств и применений.

Ключевые слова: вычислимые линейные порядки, предельно монотонные функции, эффективные представления, низкие степени, самовложения, автоморфизмы.

AMS Subject Classification: 03D45, 03C57

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В 1981 г. Н. Г. Хисамиев (см. [16]) ввел понятие так называемых *s-функций*, которое затем активно использовал для описания алгоритмических свойств абелевых групп. К сожалению, издание, где это понятие было введено, трудно доступно для иностранных специалистов. В 1997 г. Р. Дж. Коулз, Р. Доуни и Б. Хусаинов (см. [20]) впервые использовали это понятие в иностранном издании и дали ему название *предельно монотонных функций*; это понятие ими использовалось для исследования алгоритмических свойств линейных порядков. В настоящее время указанное понятие и играет важную роль в изучении алгоритмических свойств различных алгебраических структур.

Основная цель работы — описание техники предельно монотонных функций в теории вычислимых линейных порядков. Приведены основные определения предельно монотонных функций и их обобщений, а также ряд их основных свойств. Показана связь $\emptyset'$-предельно монотонных функций и вычислимых представлений линейных порядков, конденсация которых есть η, указан ряд применений описанной техники в полных или частичных решениях фундаментальных проблем теории вычислимых линейных порядков. Достигнуто некоторое продвижение в решении проблемы Р. Доуни об описании таких порядковых свойств P, что для любого низкого линейного порядка L из выполнимости $P(L)$ следует существование вычислимого представления L. Приведены некоторые результаты, касающиеся проблем описания η-представимых, неубывающе η-представимых и сильно η-представимых степеней, поставленных в различных работах Дж. Розенштейна и Р. Доуни. Описана проблема замкнутости наверх в классе перечислимых степеней

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 1.1515.2017/4.6, М. В. Зубков) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-08252, А. Н. Фролов).

спектра отношения соседства нетривиальных вычислимых линейных порядков. Проблема остается открытой для класса η-схожих линейных порядков, не задающихся предельно монотонными функциями.

На основе техники предельно монотонных функций получено новое простое (использующее лишь метод приоритета с конечными нарушениями) подтверждение гипотезы Дж. Розенштейна (1984 г.) о том, что каждый вычислимый η-схожий линейный порядок (в расширенном виде — линейный порядок, конденсация которого есть η) без сильно η-схожих интервалов имеет вычислимое представление, обладающее нетривиальным вычислимым самовложением (оригинальное доказательство принадлежит Р. Доуни, Б. ,Кастермансу и С. Лемппу, а в расширенном виде — М. Мозесу; эти доказательства основаны на методе приоритета с бесконечными нарушениями и достаточно громоздки).

В 1987 г. Х. Кирстед сформулировал гипотезу о том, что каждое вычислимое представление вычислимого линейного порядка имеет строго нетривиальный Π^0_1-автоморфизм тогда и только тогда, когда порядок не содержит интервалов типа η. Техника предельно монотонных функций позволяет получить ряд частичных подтверждений этой гипотезы. Сначала это было сделано Ч. Харрисом, К. Ли и Б. Купером в 2016 г., затем их результат был обобщен Г. Ву и М. В. Зубковым (выход публикации предполагается в 2018 г.). В данной работе авторами получено обобщение результата Г. Ву и М. В. Зубкова, также использующее технику предельно монотонных функций. Однако в общем случае гипотеза Х. Кирстеда не верна. Это доказано М. В. Зубковым и К. М. Нг (работа находится в печати).

Мы приведем основные термины и обозначения теории вычислимости, следуя [55], и теории счетных линейных порядков, следуя [51].

Множества, рассматриваемые в данной работе, если не оговорено другое, являются подмножествами множества неотрицательных целых чисел, которое обозначается $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Двухместная функция $\langle x, y\rangle$, определенная соотношением $\langle x, y\rangle := \frac{1}{2}\big[(x+y)^2 + 3x + y\big]$, $x, y \in \mathbb{N}$, и осуществляющая биективное отображение $\mathbb{N}^2$ на $\mathbb{N}$, называется *канторовской нумерующей функцией*.

Частичная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется вычислимой, если существует некоторый алгоритм, вычисляющий значение функции для всех $x_1, \dots, x_n$, входящих в область определения функции. Отношение $R(x_1, \dots, x_n)$ вычислимо, если существует такая вычислимая всюду определенная функция $f(x_1, \dots, x_n)$, что $R(x_1, \dots, x_n)$ истинно тогда и только тогда, когда $f(x_1, \dots, x_n) = 1$. Множество A называется вычислимым, если отношение $x \in A$ вычислимо. Множество A принадлежит классу Σ^0_n (или является Σ^0_n-множеством) для $n > 0$, если существует такое вычислимое отношение $R(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, что $x \in A$ тогда и только тогда, когда

$$(\exists y_1)(\forall y_2)(\exists y_3) \dots (Qy_n)[R(x, y_1, \dots, y_n)],$$

где Q является квантором $\exists$, если n нечетно, и квантором $\forall$, если n четно. Множество A принадлежит классу Π^0_n, если $\mathbb{N} \setminus A$ принадлежит классу Σ^0_n. Множество A принадлежит классу Δ^0_n, если $A \in \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n$.

Пусть $\Phi^X_0, \Phi^X_1, \Phi^X_2, \dots$ — некоторая эффективная нумерация всех алгоритмов, частично вычислимых относительно X. Множество A сводится по Тьюрингу (или T-сводится) к множеству B (обозначение $A \leqslant_T B$), если $(\exists n)(\forall x)[A(x) = \Phi^B_n(x)]$. Множества A и B T-эквивалентны ($A \equiv_T B$), если $A \leqslant_T B$ и $B \leqslant_T A$. Для каждого множества A определим его T-степень:

$$\deg_r(T) = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid B \equiv_T A\}.$$

Оператор $'$ называется оператором тьюрингова скачка, где $A' = \{x \mid \Phi^A_x(x) \text{ определено}\}$. Множество X называется n-низким, если $X^{(n)} \leqslant_T \emptyset^{(n)}$, где $X^{(n)}$ — n-я итерация оператора скачка. 1-Низкое множество называется просто низким.

Линейный порядок $\mathcal{L}$ — это алгебраическая система $(L, <_{\mathcal{L}})$ с одним бинарными отношением, обладающим свойствами антирефлексивности, антисимметричности, транзитивности и для любых $x, y \in L$ либо $x \leqslant_{\mathcal{L}} y$, либо $y \leqslant_{\mathcal{L}} x$ (где $x \leqslant_{\mathcal{L}} y \Leftrightarrow x = y \vee x <_{\mathcal{L}} y$). Если $\mathcal{L} = (L, <_{\mathcal{L}})$ — линейный порядок, то $\mathcal{L}^*$ определяется следующим образом: $\mathcal{L}^* = (L, <_{\mathcal{L}^*})$, где $(\forall x)(\forall y)[x <_{\mathcal{L}^*} y \leftrightarrow y <_{\mathcal{L}} x]$.

Линейный порядок $(M, <_{\mathcal{M}})$ называется подпорядком $(L, <_{\mathcal{L}})$, если $M \subset L$ и $(\forall x \in M)(\forall y \in M)[x <_{\mathcal{M}} y \leftrightarrow x <_{\mathcal{L}} y]$. В этом случае также будем писать $\mathcal{M} = (M, <_{\mathcal{L}})$. Интервалом в линейном порядке $\mathcal{L}$ называется такой подпорядок $\mathcal{M} = (M, <_{\mathcal{L}})$, что $(\forall x, y \in M)(\forall z \in L)[x <_{\mathcal{M}} z <_{\mathcal{M}} y \to z \in M]$. Замкнутым интервалом в линейном порядке $\mathcal{L}$ с концами x и y называется множество $[x, y]_{\mathcal{L}} = \{z \in L \mid x \leqslant_{\mathcal{L}} z \leqslant_{\mathcal{L}} y\}$. Открытым интервалом в линейном порядке $\mathcal{L}$ с концами x и y называется множество $(x, y)_{\mathcal{L}} = \{z \in L \mid x <_{\mathcal{L}} z <_{\mathcal{L}} y\}$.

Линейные порядки $\mathcal{L} = (L, \leqslant_{\mathcal{L}})$ и $\mathcal{M} = (M, \leqslant_{\mathcal{M}})$ называются изоморфными (обозначение $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$), если существует такая биекция $\varphi : L \to M$, что $(\forall x \in L)(\forall y \in L)[x <_{\mathcal{L}} y \leftrightarrow \varphi(x) <_{\mathcal{M}} \varphi(y)]$. Если два линейных порядка изоморфны, будем говорить, что они имеют одинаковый порядковый тип. Тип естественного отношения порядка на множествах натуральных чисел $\mathbb{N}$, целых чисел $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ и рациональных чисел $\mathbb{Q}$ будем обозначать соответственно как ω, ζ и η. Конечный линейный порядок с точностью до изоморфизма определяется числом своих элементов. С учетом операции сложения и умножения на порядковых типах естественно отождествить тип конечного линейного порядка, состоящего из n элементов, с числом n.

Пусть $\mathcal{M} = (M, <_{\mathcal{M}})$ и $\mathcal{L}_i = (L_i, <_{\mathcal{L}_i})$ $(i \in M)$ — линейные порядки. Предположим, что $L_i \cap M = \emptyset$ $(i \in M)$ и $L_i \cap L_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$ $(i, j \in M)$. Тогда определен линейный порядок $\mathcal{L} = \sum\limits_{i \in M} \mathcal{L}_i$, где $L = \bigcup\limits_{i \in M} L_i$, а отношение $<_{\mathcal{L}}$ задается следующим образом: если $x \in L_i$, $y \in L_j$, то $x <_{\mathcal{L}} y$ тогда и только тогда, когда $(i <_{\mathcal{M}} j) \vee (i = j \;\&\; x <_{\mathcal{L}_i} y)$. Если $\mathcal{L}_i \cong \mathcal{L}_j \cong \mathcal{L}$, то по определению $\mathcal{L}\mathcal{M} = \sum\limits_{i \in M} \mathcal{L}_i$. Вообще говоря, умножение определено не однозначно для данных линейных порядков $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ и зависит от выбора последовательности $\mathcal{L}_i$. Однако нетрудно видеть, что если $\mathcal{L}_i \cong \mathcal{L}'_i$ и $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$, то $\sum\limits_{i \in M} \mathcal{L}_i \cong \sum\limits_{i \in M'} \mathcal{L}'_i$ и, следовательно, если $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}'$ и $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$, то $\mathcal{L}\mathcal{M} \cong \mathcal{L}'\mathcal{M}'$. Таким образом, эти две операции корректно и однозначно определены для порядковых типов.

Так как линейный порядок $\mathcal{L} = (L, <_{\mathcal{L}})$ однозначно определен только лишь основным множеством и отношением порядка, то это позволяет использовать для линейных порядков любые определения и термины, которые соответственно употребляются для множеств и отношений. В частности, линейный порядок $\mathcal{L}$ называется *X-вычислимым* или иначе *X-конструктивным*, если его основное множество и отношение порядка являются X-вычислимыми. Говорим, что линейный порядок *n-низкий*, если он является X-вычислимым для некоторого n-низкого множества X.

Если линейный порядок $\mathcal{L}$ изоморфен некоторому X-вычислимому порядку, то мы говорим, что $\mathcal{L}$ является *X-вычислимо представимым* или, иначе, *X-конструктивизируемым*, *имеет X-вычислимое представление* или *имеет X-вычислимую копию*.

1. Предельно монотонные функции

1.1. Определение и свойства. Приведем определение предельно монотонных функций.

Определение 1.1 (см. [20])**.** Функция F называется *X-предельно монотонной*, если существует такая X-вычислимая функция $f(x, s)$, что

(1) $(\forall x)(\forall s)[f(x, s) \leqslant f(x, s+1)]$;
(2) $(\forall x)[F(x) = \lim\limits_{s \to \infty} f(x, s)]$.

Очевидно, что область значений любой предельно монотонной функции лежит в классе Σ^0_2. Обратное не верно даже для класса Δ^0_2; это было показано в следующей теореме, которая впервые была доказана Н. Г. Хисамиевым (см. [16]) и передоказана Р. Дж. Коулзом, Р. Доуни и Б. Хусаиновым (см. [20]).

Теорема 1.2 (см. [16, 20])**.** *Существует Δ^0_2-множество, не являющееся областью значений никакой предельно монотонной функции.*

Отметим несколько простых свойств предельно монотонных функций.

Предложение 1.3. *Пусть $A = \mathrm{rng}(F)$ и $B = \mathrm{rng}(G)$, где F, G являются X-предельно монотонными функциями. Тогда следующие множества являются областями значений некоторых*

X-предельно монотонных функций: $A \cup B$, $A \oplus B$, а также $\varphi(A)$ для любой неубывающей X-вычислимой функции φ, определенной всюду на $\mathbb{N}$.

Хорошо известно следующее утверждение о предельно монотонных функциях.

Предложение 1.4 (см. [45]). *Если $A \in \Sigma^0_2$, $B \subset A$ — бесконечное подмножество и $B = \mathrm{rng}(F)$ для некоторой предельно монотонной функции F, то существует такая предельно монотонная функция G, что $A = \mathrm{rng}(G)$.*

Следствие 1.5. *Если $A \in \Sigma^0_2$ и R — бесконечное в.п. множество, то $A \oplus R$ является множеством значений некоторой предельно монотонной функции.*

Следствие 1.6 (см. [57]). *Существуют такие два множества $A, B \in \Delta^0_2$, что $A = \mathrm{rng}(F)$, $B = \mathrm{rng}(G)$ для некоторых предельно монотонных функций F, G, но $A \cap B$ не является областью значений никакой предельно монотонной функции.*

Следствие 1.7 (см. [57]). *Существует такое множество $B \in \Delta^0_2$, что B является областью значений некоторой предельно монотонной функции, а $\overline{B}$ не является областью значений никакой предельно монотонной функции.*

Доказательство. По теореме 1.2 существует множество $C \in \Delta^0_2$, не являющееся областью значений никакой предельно монотонной функции. Тогда множество $B = \overline{C} \oplus \mathbb{N} \in \Delta^0_2$ является областью значений некоторой предельно монотонной функции согласно следствию 1.5. Его дополнение имеет вид $\overline{B} = \overline{\overline{C} \oplus \mathbb{N}} = \overline{\overline{C}} \oplus \overline{\mathbb{N}} = C \oplus \emptyset = 2C$. Пусть $\varphi(x) = [\frac{1}{2}x]$ (здесь квадратные скобки означают целую часть); тогда $C = \varphi(\overline{B})$. Если бы множество $\overline{B}$ было бы областью значений предельно монотонной функции, то, согласно предложению 1.3, множество C было бы таким же, что противоречит выбору C. Следовательно, множество $\overline{B}$ не является областью значений предельно монотонной функции и $\overline{B} \in \Delta^0_2$, так как $B \in \Delta^0_2$. □

Пусть $F, G : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ — некоторые функции. Положим по определению

$$(F \dot{+} G)(p) = \begin{cases} F(p) + G(p), & \text{если } p \in \mathrm{supp}(F) \cap \mathrm{supp}(G); \\ \max\{F(p), G(p)\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогично можно определить данную операцию для функций нескольких аргументов.

Предложение 1.8 (см. [6]). *Пусть $F, G : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ — X-предельно монотонные функции, $w : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — неубывающая X-вычислимая функция, c — константа. Тогда следующие функции X-предельно монотонны: $F \dot{+} G$, $F + G$, $F \cdot G$, $w \circ F$, $F \dot{-} c$, $\max\{F, G\}$, $\min\{F, G\}$.*

В применении к вычислимым линейным порядкам, особую роль играют $\emptyset'$-предельно монотонные функции. Следующий эквивалентный способ задания таких функций неявно был использован К. Харрисом (см. [37]) и доказан А. Кэчем и Д. Турецким (см. [43]).

Теорема 1.9 (см. [43]). *Для функции $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *функция F является $\emptyset'$-предельно монотонной;*
(2) *существует такая вычислимая функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $F(x) = \liminf\limits_{s \to \infty} f(x, s)$.*

В конструкциях вместо произвольной вычислимой аппроксимации f из предыдущей теоремы удобно пользоваться аппроксимацией g со следующими свойствами, в частности, она будет использоваться в разделе 3 этой статьи.

Теорема 1.10 (см. [4]). *Пусть $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — вычислимая функция и $F(x) = \liminf\limits_{s \to \infty} f(x, s)$ всюду определена. Тогда существует такая вычислимая функция $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что*

$$\liminf_{s \to \infty} g(x, s) = \liminf_{s \to \infty} f(x, s).$$

При этом

$$(\forall n)(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)[(\exists^\infty s)[g(x_1, s) = \liminf_{s \to \infty} f(x_1, s) \ \& \ \ldots \ \& \ g(x_n, s) = \liminf_{s \to \infty} f(x_n, s)]].$$

Доказательство. Введем функцию $z(x,s,p) = |\{u \leqslant s \mid f(x,u) = p\}|$, где $x,s,p \in \mathbb{N}$. Очевидно, что если $\liminf\limits_{s\to\infty} f(x,s) = p$, то $\lim\limits_{s\to\infty} z(x,s,p) = \infty$ и $(\forall q < p)[\lim\limits_{s\to\infty} z(x,s,q) < \infty]$.

Конструкция.

Шаг 0. Определим $g(x,0) = f(x,0)$ для всех $x \in \mathbb{N}$.

Шаг $s+1$. Пусть $s+1 = \langle k,t\rangle$. Если существуют такие $x_0, p_0 \leqslant t$, что $z(x_0,k-1,p_0) \neq z(x_0,k,p_0) = t$, то для всех $x \leqslant t$, удовлетворяющих условию $(\exists p \leqslant t)[z(x,k,p) \geqslant t]$, положим

$$g(x,s+1) = \min\{p \mid p \leqslant t \ \&\ z(x,k,p) \geqslant t\}.$$

Для всех остальных $x \in \mathbb{N}$ определим $g(x,s+1) = f(x,k)$.

Фиксируем x и покажем, что найдется такой s_0, что для всех $s > s_0$ выполнено

$$g(x,s) \geqslant \liminf_{s\to\infty} f(x,s).$$

Пусть $\liminf\limits_{s\to\infty} f(x,s) = p$; тогда существуют такие $k_0,\dots,k_{p-1}$, что для $i = 0,\dots,p-1$ из $k > k_i$ вытекает $z(x,k,i) = z(x,k_i,i)$. Пусть

$$n = \max\{z(x,k_i,i) \mid 1 \leqslant i \leqslant p-1\}.$$

Выберем такой шаг q, что для всех $x \leqslant n$ и всех $u > q$ выполнено

$$f(x,u) \geqslant \liminf_{s\to\infty} f(x,s).$$

Тогда для любого $s > s_0$, где $s_0 = \langle q,0\rangle$, будет выполняться неравенство

$$g(x,s) \geqslant \liminf_{s\to\infty} f(x,s).$$

Действительно, пусть $s > s_0$ и $s = \langle k,t\rangle$. Если $t > n$, то условие $z(x,k,p) > t$ не выполняется, и согласно конструкции имеем $g(x,s) = f(x,k)$, где $k > q$ и, следовательно, $f(x,k) \geqslant p$. В противном случае, в силу выбора шага, не существует таких $x_0 \leqslant t, p_0 < p$, что $z(x_0,k-1,p_0) \neq z(x_0,k,p_0) = t$ и, следовательно, $g(x,s) = f(x,k) \geqslant p$.

Пусть $x_1 < \ldots < x_n$ таковы, что

$$\liminf_{s\to\infty} f(x_1) = p_1, \quad \ldots, \quad \liminf_{s\to\infty} f(x_n) = p_n.$$

Покажем, что для любого s_0 существует такой шаг $s_1 > s_0$, что одновременно выполняются равенства

$$g(x_1,s_1) = p_1, \quad \ldots, \quad g(x_n,s_1) = p_n.$$

Пусть $s_0 = \langle k_0,t_0\rangle$. Выберем $t_1 = \max\{k_0,t_0\}+1$. Тогда для $1 \leqslant i \leqslant n$ имеем $z(x_i,k_0,p_i) < t_1$. Так как

$$\liminf_{t\to\infty} z(x_i,t,p_i) = \infty, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

то существуют такие i_0 и $k_1 > t_1$, что

$$z(x_{i_0},k_1-1) \neq z(x_{i_0},k_1) = t_1, \quad z(x_i,k_1,p_i) > t_1, \quad i \neq i_0,\ 0 < i \leqslant n.$$

Пусть $s_1 = \langle k_1,t_1\rangle$; тогда $s_1 > s_0$, так как $k_1 > k_0$ и $t > t_0$. В силу выбора k_1 и t_1 выполняются равенства

$$g(x_1,s_1) = p_1, \quad \ldots, \quad g(x_n,s_1) = p_n.$$

Из свойств

$$(\exists^\infty s)[g(x,s) = \liminf_{s\to\infty} f(x,s)], \quad (\exists s_0)(\forall s > s_0)[g(x,s) \geqslant \liminf_{s\to\infty} f(x,s)]$$

непосредственно следует, что

$$\liminf_{s\to\infty} f(x,s) = \liminf_{s\to\infty} g(x,s). \qquad \square$$

Нетрудно видеть, что эти утверждения релятивизуются относительно произвольного оракула X.

1.2. Некоторые обобщения. В работе А. Кэча [41] изучалось обобщение предельно монотонных функций, в которых на ряду с натуральными числами допускается в качестве значения ординал ω. Приведем определения и основные результаты работы.

Определение 1.11. Множество $S \subset \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ является X-предельно монотонным множеством, если существует такая всюду определенная X-вычислимая функция $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $g(x,s) \leqslant g(x,s+1)$ для всех x и s и функция $G(x) = \lim\limits_{s\to\infty} g(x,s)$ перечисляет S в том смысле, что $G(x) = \omega$, если $\lim\limits_{s\to\infty} g(x,s) = \infty$.

Теорема 1.12 (см. [41])**.** *Множество $S \subset \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ является $\emptyset'$-предельно монотонным множеством тогда и только тогда, когда существует такая всюду определенная вычислимая функция $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что функция $G(x) = \liminf\limits_{s\to\infty} g(x,s)$ перечисляет S в том смысле, что $G(x) = \omega$, если $\liminf\limits_{s\to\infty} g(x,s) = \infty$.*

Введем следующее определение, которое нельзя рассматривать как обобщение приведенного выше определения, однако оно имеет некоторые применения в следующих разделах этой работы, в частности, в теоремах 3.10 и 3.11.

Определение 1.13. Пусть R — вычислимый частичный порядок. Функция $G : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \cup R$ (здесь порядок на $\mathbb{N} \cup R$ задается как сумма порядков и обозначается $\prec$) называется *X-предельно монотонной с множеством значений, расширенным R* если существует такая X-вычислимая функция $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup R$, что

(1) $\lim\limits_{s\to\infty} g(q,s) = G(q)$ для всех $q \in \mathbb{Q}$;
(2) $g(q,s) \preceq g(q,s+1)$ для всех $q \in \mathbb{Q}$, $s \in \mathbb{N}$;
(3) если $\lim\limits_{s\to\infty} g(q,s) = x$, то существует такой s_0, что $g(q,s) = x$ для всех $s \geqslant s_0$.

В работе Г. Ву и М. Зубкова [56] это определение рассматривалось для случай одноэлементного $R = \{\zeta\}$. В разделе 3 нам будет необходим случай, когда $R = \{\omega, \omega^*, \zeta\}$, где $\omega, \omega^* < \zeta$ и ω, ω^* не сравнимы между собой. Поэтому нам будет необходима модификация теоремы 1.10. Пусть R — вычислимый частичный порядок и $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — вычислимое перечисление без повторений множества $\mathbb{Q}$.

Теорема 1.14. *Функция $G : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \cup R$ является $\emptyset'$-предельно монотонной с расширенной областью значений тогда и только тогда, когда существует такая вычислимая функция g, что*

(1) $G(q) = \liminf\limits_{s\to\infty} g(q,s)$;
(2) *для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такая последовательность $\{s_i^k\}_{i\in\mathbb{N}}$, что $g(q_j, s_i^k) = G(q_j)$ для всех $j < k$ и $i \in \mathbb{N}$;*
(3) *если $G(q) \in R$, то существует такое s_0, что $g(q,s) = G(q)$ для всех $s \geqslant s_0$.*

1.3. Предельно монотонные функции относительно системы обозначений Клини. Далее приведем еще более расширенное определение предельно монотонной функции, позволяющее принимать функции в качестве значений произвольные ординалы вплоть до наименьшего не конструктивного. Такие функции были рассмотрены в работе М. В. Зубкова и А. Н. Фролова [35]. Приведем необходимые определения и результаты теории обозначений для ординалов. Данная теория была развита в работах Черча и Клини [18, 19, 46]. Определения и доказательства приведенных результатов также можно найти в [2, 9].

Определение 1.15. Системой обозначений S называется отображение ν_S некоторого подмножества D_S множества натуральных чисел на некоторый начальный отрезок ординальных чисел, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) существует такая частично вычислимая функция k_S, что
  (i) если $\nu_S(x) = 0$, то $k_S(x) = 0$;
  (ii) если $\nu_S(x)$ является последователем, то $k_S(x) = 1$;

(iii) если $\nu_S(x)$ является предельным ординалом, то $k_S(x) = 2$;

(2) существует такая частично вычислимая функция p_S, что если $\nu_S(x)$ является последователем, то $p_S(x) \downarrow$ и $\nu_S(x) = \nu_S(p_S(x)) + 1$;

(3) существует такая частично вычислимая функция q_S, что если $\nu_S(x)$ является предельным ординалом, то $q_S(x) \downarrow$, функция $\Phi_{q_S(x)}$ всюду определена и последовательность $\{\nu_S(\Phi_{q_S(x)}(n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ является возрастающей последовательностью ординалов, сходящейся к $\nu_S(x)$.

Элементы множества D_S называются обозначениями S. Ординал называется конструктивным, если некоторая система обозначений дает ему обозначение. Известно, что класс конструктивных ординалов совпадает с классом вычислимых ординалов.

Определение 1.16 (система обозначений O, Клини)**.** Определим отображение $|\cdot|_{\mathcal{O}}$ некоторого подмножества $D_{\mathcal{O}}$ множества натуральных чисел в класс ординалов следующим образом:

(1) $|1|_{\mathcal{O}} = 0$;

(2) пусть $|n|_{\mathcal{O}} \downarrow = \beta$ для некоторого n; тогда полагаем $|2^n|_{\mathcal{O}} = \beta + 1$;

(3) пусть для некоторого e выполняется условие

$$(\forall n)[\Phi_e(n) \downarrow \ \& \ |\Phi_e(n)|_{\mathcal{O}} \downarrow \ \& \ |\Phi_e(n)|_{\mathcal{O}} < |\Phi_e(n+1)|_{\mathcal{O}}];$$

тогда полагаем

$$|3 \cdot 5^e|_{\mathcal{O}} = \lim_{n\to\infty} |\Phi_e(n)|_{\mathcal{O}}.$$

Пусть S — некоторая система обозначений. Легко видеть, что тогда существуют такие частично вычислимые функции λ_S и ϕ_S, что $\nu_S(x) = \lambda_S(x) + \phi_S(x)$ и $\lambda_S(x)$ — предельный, а $\phi_S(x)$ — конечный ординалы.

Область определения отображения $|\cdot|_{\mathcal{O}}$ обозначим через O. Кроме того, нам понадобиться определение частичного порядка $<_O$ на O.

Определение 1.17. Для любого $x \in O$ полагаем $2 <_O 2^x$. Кроме того, полагаем $z <_O 2^x$ для каждого $z \in O$, для которого $z <_O x$.

Для любого $e \in \mathbb{N}$ имеем: если $3 \cdot 5^e \in O$, то, согласно определению клиниевской системы обозначений, $\Phi_e(n) \downarrow$ для любого n и $\Phi_e(n) \in O$. Полагаем $z <_O 3 \cdot 5^e$ для каждого такого $z \in O$, что $z <_O \Phi_e(n)$ для некоторого n.

Непосредственно из определения следует, что если $x <_O y$, то $|x|_{\mathcal{O}} < |y|_{\mathcal{O}}$. Очевидно, обратное утверждение неверно.

Существует вычислимая функция $+_O$, называемая клиниевской операцией сложения, обладающая следующими свойствами:

(1) $(\forall x, y \in O)[x +_O y \in O]$;

(2) $(\forall x, y \in O)[y \neq 1 \to x <_O x +_O y]$;

(3) $(\forall x, y \in O)[|x +_O y|_{\mathcal{O}} = |x|_{\mathcal{O}} + |y|_{\mathcal{O}}]$.

Определение 1.18. Функция $F : \mathbb{N} \to \omega_1^{CK}$ называется X-предельно монотонной относительно клиниевской системы обозначений ординалов O, если существует такая X-вычислимая функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, что

(1) $\lim\limits_{s\to\infty} |f(x,s)|_{\mathcal{O}} = F(x)$;

(2) $(\forall s \in \mathbb{N})[f(x,s) \leqslant_O f(x,s+1)]$.

Ясно, что новое определение расширяет класс предельно монотонных функций. Многие свойства предельно монотонных функций переносятся и на новое определение. Например, если $F, G : \mathbb{N} \longrightarrow \omega_1^{CK}$ являются X-предельно монотонными функциями относительно клиниевской системы обозначений, то легко видеть, что $F + G$, $F \cdot G$, $\max\{F, G\}$ и $\min\{F, G\}$ — X-предельно монотонны относительно клиниевской системы обозначений.

Предложение 1.19 (см. [35])**.** *Для функции $F : \mathbb{N} \to \omega_1^{CK}$ следующие условия эквивалентны*:

(1) *функция F является X'-предельно монотонной относительно клиниевской системы обозначений*;
(1) *существует такая X-вычислимая функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что*
   (a) $\liminf\limits_{s\to\infty} |f(x,s)|_{\mathcal{O}} = F(x)$;
   (b) *для любого $s \in \mathbb{N}$ числа $f(x,s)$ и $f(x,s+1)$ сравнимы относительно частичного порядка $<_O$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Так как F является X'-предельно монотонной функцией относительно клиниевской системы обозначений, то существует X'-вычислимая функция g, удовлетворяющая свойствам (1), (2) определения 1.18. Очевидно, существует такое X-вычислимое отношение R, что для x и y соотношение $(\forall s)[\neg(y <_O g(x,s))]$ выполняется тогда и только тогда, когда $(\forall u)(\exists v)[R(x,y,u,v)]$.

Положим

$$ln_R(x,y,s) = \max\{k \leqslant s \mid (\forall u \leqslant k)(\exists v \leqslant s)[R(x,y,u,v)]\}.$$

Формула $(\forall u)(\exists v)[R(x,y,u,v)]$ истинна тогда и только тогда, когда истинна

$$(\exists^\infty s)[(ln_R(x,y,s+1) > ln_R(x,y,s))].$$

Теперь определим X-вычислимую функцию f следующим образом:
(1) $f(x,0) = 0$;
(2) если существует такое $y \leqslant s$, что $ln_R(x,y,s+1) > ln_R(x,y,s)$, то положим

$$f(x,s+1) = \min_O\{y \leqslant s \mid ln_R(x,y,s+1) >_O ln_R(x,y,s)\};$$

в противном случае определим $f(x,s+1) = g(x,s)$.

Равенство $F(x) = \alpha$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\alpha = \min\{|y'|_{\mathcal{O}} \mid (\forall u)(\exists v)[R(x,y',u,v)]\}.$$

Следовательно, $F(x) = \alpha$ тогда и только тогда, когда

$$y = \min\{|y'|_{\mathcal{O}} \mid (\exists^\infty s)[ln_R(x,y',s+1) > ln_R(x,y',s)]\}.$$

Наконец, $F(x) = \alpha$ тогда и только тогда, когда

$$\liminf_{s\to\infty} |g(x,s)|_{\mathcal{O}} = \alpha.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — функция, удовлетворяющая свойствам (а) и (б) п. (2). При помощью оракула X' определим функцию $\tilde{f} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Для любого $x \in \mathbb{N}$ полагаем $\tilde{f}(x,0) = 0$. Далее, если $(\exists u > s+1)[f(x,u) <_O f(x,s+1)]$, то полагаем $\tilde{f}(x,s+1) = \tilde{f}(x,s)$, в противном случае $\tilde{f}(x,s+1) = f(x,s+1)$. Легко видеть, что для любого $x \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\lim_{s\to\infty} |\tilde{f}(x,s)|_{\mathcal{O}} = \liminf_{s\to\infty} |f(x,s)|_{\mathcal{O}}.$$

Для доказательства $(\forall s \in \mathbb{N})[f(x,s) \leqslant_O f(x,s+1)]$ достаточно заметить, что из свойства (б) п. (2) следует, что если для s_0 выполняется

$$(\forall s > s_0)[\neg f(x,s+1) <_O f(x,s)],$$

то

$$(\forall s > s_0)[f(x,s+1) \geqslant_O f(x,s+1)]. \qquad \square$$

Заметим, что определение и свойства предельно монотонных функций относительно клиниевской системы обозначений без труда переносятся на любую вычислимую область определения. В самом деле, пусть D — какое-либо бесконечное вычислимое множество и $n : \mathbb{N} \to D$ — его некоторая биективная нумерация, вычислимая вместе с обратной. Ясно, что если естественным образом перенести определение предельно монотонных функций на D, то любую предельно монотонную функцию с областью определения D можно представить в виде композиции предельно монотонной функций на $\mathbb{N}$ и n и наоборот, любую предельно монотонную функцию на $\mathbb{N}$ можно представить в виде композиции n^{-1} и предельно монотонной функций с областью определения D.

Например, далее нам понадобятся предельно монотонные функции, определенные на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 1.20 (см. [35]). *Пусть $f(x,y) : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to O$ — вычислимая функция. Тогда существует такая вычислимая функция $g(x,y) : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to O$, что*

$$\liminf_{s\to\infty} |f(x,s)|_{\mathcal{O}} = \liminf_{s\to\infty} |g(x,s)|_{\mathcal{O}},$$
$$(\forall x)(\forall s)[|g(x,s)|_{\mathcal{O}} > 0 \to (\exists \beta \in \omega_1^{CK})[\beta + 1 = |g(x,s)|_{\mathcal{O}}]].$$

Доказательство. Построим требуемую функцию. Для тех s, для которых $|f(x,s{+}1)|_{\mathcal{O}}$ равно нулю или не является предельным ординалом, т.е. $f(x,s+1) \neq 3\cdot 5^e$, полагаем $g(x,s+1) = f(x,s+1)$. Если же $|f(x,s+1)|_{\mathcal{O}}$ — предельный ординал, то $f(x,s+1) = 3\cdot 5^e$ для некоторого e и

$$|f(x,s+1)|_{\mathcal{O}} = \lim_{n\to\infty} |\Phi_e(n)|_{\mathcal{O}}.$$

Возможны два случая: $f(x,s{+}1) \leqslant_{\mathcal{O}} f(x,s)$ или $f(x,s{+}1) >_O f(x,s)$. В первом случае выбираем такой наименьший n, что

$$\Phi_e(n) >_O \max_{\mathcal{O}}\{g(x,u) \mid u \leqslant s, g(x,u) <_O f(x,s+1)\};$$

во втором — такой наименьший n, что

$$\Phi_e(n) >_O f(x,s).$$

В обоих случаях полагаем $g(x,s+1) = \Phi_e(n)$. Легко видеть, что

$$\liminf_{s\to\infty} |f(x,s)|_{\mathcal{O}} = \liminf_{s\to\infty} |g(x,s)|_{\mathcal{O}}. \qquad \square$$

В частности, из приведенных выше конструкций легко получить следующее предложение. Функцию $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}\cup\{\zeta\}$, удовлетворяющую одному из условий этого предложения, будем также называть функцией, являющейся $\emptyset'$-предельно монотонной относительно клиниевской системы обозначений для ординалов O.

Предложение 1.21. *Пусть $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}\cup\{\zeta\}$ — некоторая функция. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *существуют такие функции H и K, являющиеся $\emptyset'$-предельно монотонными относительно клиниевской системы обозначений для ординалов O, что*
   (i) $F(q) = H(q)^* + 1 + K(q)$,
   (ii) $H(q), K(q) \leqslant \omega$,
   (iii) $H(q) = \omega$ *тогда и только тогда, когда* $K(q) = \omega$;
(2) *существует такая $\emptyset'$-вычислимая функция $f(q,s)$, что*
   (i) $\lim\limits_{s\to\infty} f(q,s) = F(q)$ *для всех* $q \in \mathbb{Q}$,
   (ii) $f(q,s) \leqslant f(q,s+1)$ *для всех* $q \in \mathbb{Q}$, $s \in \mathbb{N}$;
(3) *существует такая вычислимая функция $g(q,s)$, что $F(q) = \liminf\limits_{s\to\infty} g(q,s)$ для всех $q \in \mathbb{Q}$.*

2. Связь с линейными порядками

2.1. Линейные порядки, схожие с η. Для линейного порядка L назовем предикат

$$S_L(x,y) \rightleftharpoons (x <_L y) \;\&\; ([x,y]_L = \{x,y\})$$

отношением соседства, а предикат

$$F_L(x,y) \rightleftharpoons (x <_L y) \;\&\; (|[x,y]_L| < \infty)$$

отношением блока.

Отношение блока порождает отношение эквивалентности: $x \sim y \Leftrightarrow (x = y) \vee F_L(x,y) \vee F_L(y,x)$. Классы эквивалентности называются *блоками* и обозначаются $[x]_L = \{y \mid x \sim y\}$. Линейный порядок на блоках, индуцированный порядком L, называется фактор-порядком (или конденсацией) и обозначается $L/_\sim$, т.е. $[x]_L <_{L/_\sim} [y]_L \Leftrightarrow x <_L y$ для всех $[x]_L \neq [y]_L$.

Особое внимание исследователями уделяется так называемым *η-схожим* (η-like) линейным порядкам. Это такие порядки, конденсация которых есть η и которые не содержат бесконечных блоков. Одно из эквивалентных определений этих порядков — это представимость в виде $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, а $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ — некоторая функция. Если в этом условии область значений F ограничена, то порядок называется *сильно η-схожим*.

Может показаться, что η-схожие линейные порядки достаточно просто устроены и легко поддаются исследованиям. Однако это не так. Дж. Розенштейн (см. [51]) установил, что для вычислимого η-схожего линейного порядка L функция $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, удовлетворяющая условию $L \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$, может быть выбрана из класса Δ^0_3 и, следовательно, ее область значений будет из класса Σ^0_3. С. Феллнер (см. [31]) показал, что если такая функция F принадлежит классу Π^0_2, то линейный порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ имеет вычислимое представление.

Однако не для каждой Δ^0_3-вычислимой функции $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$ порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ имеет вычислимую копию. Первый пример такой функции (с бесконечной областью значений) был построен в работе М. Лермана и Дж. Розенштейна [48]. Позже Р. Доуни (см. [21, теорема 4.16]) построил такую Δ^0_3-вычислимую функцию F, что $\mathrm{rng}(F) = \{1, 2, 3, 4\}$ и линейный порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ не имеет вычислимого представления.

Естественно возникает вопрос: какие еще области значений могут иметь аналогичные примеры функций $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, что $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ не имеет вычислимого представления? В частности, можно ли доказать утверждение Р. Доуни для $\mathrm{rng}(f) = \{1, 2\}$ вместо $\mathrm{rng}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$? Положительный ответ на этот вопрос был получен А. Н. Фроловым (см. [15]). Более того, для любого конечного неодноэлементного множества D, не содержащего нуля, существует такая Δ^0_3-вычислимая функция F, имеющая область значений D, что $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ не имеет вычислимой копии. Для этого используется следующее кодирование.

Предложение 2.1 (см. [15]). *Пусть $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$, $a_0 \neq 0$ и $n \geqslant 1$. Линейный порядок L имеет $\emptyset'$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда имеет вычислимое представление линейный порядок $L' = (a_0\eta + a_1 + a_0\eta + \cdots + a_0\eta + a_n + a_0\eta) \cdot L$.*

Понятно, что линейный порядок $(a_0\eta + a_1 + a_0\eta + \cdots + a_0\eta + a_n + a_0\eta) \cdot L$ является η-схожим и, следовательно, представим в виде $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ для некоторой функции $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Построим ее вычислимо относительно оракула X. Зафиксируем такую X-равномерно вычислимую последовательность $\{Q_x\}_{x\in L}$, что $Q = \sum\limits_{x\in L} Q_x$ является X-вычислимым линейным порядком, Q_x — плотным линейным порядком без концевых точек для каждого $x \in L$. Тогда $Q \cong \mathbb{Q}$.

Выберем n произвольных элементов (например, с наименьшим натуральным номером) $q^x_1 <_Q \cdots <_Q q^x_n$ из каждого Q_x. Определим вспомогательную функцию $\widetilde{f}$: положим $\widetilde{f}(q^x_i) = a_i$ для всех $x \in L$ и $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\widetilde{f}(q) = a_0$ для всех остальных $q \in \mathbb{Q}$. Заметим, что

$$\sum_{q\in Q_x} \widetilde{f}(q) \cong a_0\eta + a_1 + a_0\eta + \cdots + a_0\eta + a_n + a_0\eta.$$

Так как $Q \cong \mathbb{Q}$, существует X-вычислимый изоморфизм $\varphi : \mathbb{Q} \to Q$. Положим $f(q) = \widetilde{f}(\varphi(q))$ для всех $q \in \mathbb{Q}$. Понятно, что функция f является X-вычислимой, причем

$$\sum_{q\in\mathbb{Q}} f(q) \cong \sum_{q\in Q} \widetilde{f}(q) \cong \sum_{x\in L}\sum_{q\in Q_x} \widetilde{f}(q) \cong \sum_{x\in L}(a_0\eta + a_1 + a_0\eta + \cdots + a_0\eta + a_n + a_0\eta) \cong$$
$$\cong (a_0\eta + a_1 + a_0\eta + \cdots + a_0\eta + a_n + a_0\eta) \cdot L.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.2 (см. [15]). *Пусть L Э— X-вычислимый линейный порядок. Тогда существует такая X-вычислимая функция F, что*

$$\sum_{q\in\mathbb{Q}} F(q) \cong (a_0\eta + a_1 + a_0\eta + \cdots + a_0\eta + a_n + a_0\eta)\cdot L,$$

где $a_0 \neq 0$ и $n \geqslant 1$.

Пусть $D = \{a_0 < a_1 < \cdots < a_n\}$, где $a_0 \neq 0$ и $n \geqslant 1$. Предположим, что $\widetilde{L}$ — $\emptyset''$-вычислимый линейный порядок, не имеющий $\emptyset'$-вычислимой копии. Тогда согласно предложению 2.2 существует такая $\emptyset''$-вычислимая функция F, что

$$\sum_{q\in\mathbb{Q}} f(q) \cong L, \quad \operatorname{rng}(f) = D,$$

где $L = (a_0\eta + a_1 + a_0\eta + \cdots + a_0\eta + a_n + a_0\eta)\cdot\widetilde{L}$. Так как $\widetilde{L}$ не имеет $\emptyset'$-вычислимого представления, из предложения 2.1 вытекает, что L не имеет вычислимой копии.

Таким образом, устанавливается следующий факт.

Предложение 2.3 (см. [15]). *Пусть D — такое конечное множество, что $0 \notin D$ и $|D| > 1$. Тогда существует такая $\emptyset''$-вычислимая функция F, что $\operatorname{rng}(F) = D$ и линейный порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ не имеет вычислимого представления.*

Пусть F — произвольная функция с бесконечной областью значений. Построим новую функцию G, имеющую ту же область значений, что и F, и такую, что $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$ не имеет вычислимой копии. Зафиксируем конечное множество $D \subset \operatorname{rng}(F)$: $0 \notin D$ и $|D| > 1$. Из предложения 2.3 следует, что существует $\emptyset''$-вычислимая функция $\widetilde{F}$, причем $\operatorname{rng}(\widetilde{F}) = D$ и $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} \widetilde{F}(q)$ не имеет вычислимого представления. Пусть Q_1 и Q_2 — два плотных линейных порядка без концевых точек. Имеем вычислимые изоморфизмы $\varphi_1 : \mathbb{Q} \to Q_1$, $\varphi_2 : \mathbb{Q} \to Q_2$ и $\varphi : \mathbb{Q} \to Q_1 + 1 + Q_2$. Зафиксируем произвольный элемент a_0 из $\operatorname{rng}(F)$.

Построим новую функцию G следующим образом:

(1) положим $G(q) = \widetilde{F}(\varphi_1^{-1}(\varphi(q)))$ для любого такого $q \in \mathbb{Q}$, что $\varphi(q) \in Q_1$;
(2) положим $G(q) = F(\varphi_2^{-1}(\varphi(q)))$ для любого такого $q \in \mathbb{Q}$, что $\varphi(q) \in Q_2$;
(3) положим, наконец, $G(q) = a_0$ для единственного $q \in \mathbb{Q}$, причем $\varphi(q) \notin Q_1$ и $\varphi(q) \notin Q_2$.

Имеем

$$\sum_{q\in\mathbb{Q}} G(q) \cong \sum_{q\in\mathbb{Q},\varphi(q)\in Q_1} G(q) + a_0 + \sum_{q\in\mathbb{Q},\varphi(q)\in Q_2} G(q) \cong$$
$$\cong \sum_{q\in Q_1} \widetilde{F}(\varphi_1^{-1}(q)) + a_0 + \sum_{q\in Q_2} F(\varphi_2^{-1}(q)) \cong \sum_{q\in\mathbb{Q}} \widetilde{F}(q) + a_0 + \sum_{q\in\mathbb{Q}} F(q).$$

Так как линейный порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} \widetilde{F}(q)$ не имеет вычислимого представления, то порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$ также не имеет вычислимого представления. Наконец, очевидно, $\operatorname{rng}(G) = \operatorname{rng}(F)$. Таким образом, учитывая предложение 2.3, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.4 (см. [15]). *Пусть F — произвольная X-вычислимая функция, область значений которой содержит два различных и отличных от 0 числа. Тогда существует такая $X \oplus \emptyset''$-вычислимая функция G, что $\operatorname{rng}(G) = \operatorname{rng}(G)$ и $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$ не имеет вычислимой копии. Если при этом F имеет конечную область значений или хотя бы $F \leqslant_T \emptyset''$, то функция G может быть выбрана $\emptyset''$-вычислимой.*

2.2. Линейные порядки, задаваемые предельно монотонными функциями. Первоначально техника предельно монотонных функций в линейных порядках использовалась в работе Р. Доуни, Р. Коулза и Б. Хусаинова [20]. Они построили вычислимый линейный порядок, Π^0_2-начальный сегмент которого является η-схожим и не имеет вычислимого представления[1]. Немного позже А. Н. Фролов (см. [11]) доказал, что каждый низкий сильно η-схожий линейный порядок имеет вычислимое представление. Фактически в доказательстве этого результата использовался эквивалент предельно монотонных функций. М. В. Зубков и А. Н. Фролов (см. [34]) выделили отдельные этапы этого доказательства и получили улучшенный вариант этого результата.

Теорема 2.5 (см. [34]). *Для η-схожих линейных порядков $L = (\mathbb{N}, <_L)$ следующие условия равносильны*:

(1) *структура $(\mathbb{N}, <_L, S_L, F_L)$ имеет X'-вычислимое представление*;
(2) *структура $(\mathbb{N}, <_L, F_L)$ имеет X'-вычислимое представление*;
(3) $L \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} f(q)$, *где $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ является X'-предельно монотонной функцией*;
(4) $L \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} f(q)$, *где $f(x) = \liminf\limits_{s\to\infty} g(x, s)$ для некоторой X-вычислимой функции $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (требуется, что $\liminf\limits_{s\to\infty} g(x, s)$ существует и конечный для любого $x \in \mathbb{Q}$)*;
(5) *L имеет X-вычислимое представление, отношение блока которого ко-вычислимо перечислимо относительно X.*

Таким образом, если $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$ является $\emptyset'$-предельно монотонной функцией, то η-схожий линейный порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} f(q)$ имеет вычислимое представление. Однако обратное не верно.

Теорема 2.6 (см. [23]). *Существует вычислимый η-схожий линейный порядок $\mathcal{L}$, который не представим в виде $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$ ни для какой $\emptyset'$-предельно монотонной функции G.*

Таким образом, существования вычислимой копии η-схожего линейного порядка не достаточно для существования $\emptyset'$-предельно монотонной функции, его задающего.

Рассмотрим теперь линейные порядки с бесконечными блоками, конденсация которых есть η. В особых случаях вычислимость таких порядков даже совпадает с существованием $\emptyset'$-предельно монотонных функций. Например, А. Кэч (см. [41]) рассмотрел порядки следующего вида.

Определение 2.7. Обозначим через $\sigma(S)$ перемешанную сумму счетного множества линейных порядков $S = \{\mathcal{L}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$; это (единственный с точностью до изоморфизма) линейный порядок, получающийся разбиением рациональных чисел на счетное семейство $\{\mathbb{Q}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ плотных в $\mathbb{Q}$ множеств и заменой каждого элемента в $\mathbb{Q}_i$ копией $\mathcal{L}_i$.

Теорема 2.8 (см. [41]). *Для множества $S \subset \mathbb{N}\cup\{\omega\}$ порядок $\sigma(S)$ имеет вычислимую копию тогда и только тогда, когда S является $\emptyset'$-предельно монотонным множеством.*

Рассмотрим общий случай. Если конденсация линейного порядка есть η, этот порядок может содержать как конечные блоки, так и блоки типа ω, ω^* или ζ. В этом случае лучшим результатом на данный момент является следующая теорема, доказательство которой фактически повторяет доказательство теоремы 2.5 с рядом некоторых достаточно естественных изменений. Заметим, что из нее в частности нетрудно вывести теорему 2.8.

Теорема 2.9 (см. [14]). *Для линейных порядков $L = (\mathbb{N}, <_L)$, конденсация которых есть η, следующие условия равносильны*:

(1) *структура $(\mathbb{N}, <_L, S_L, F_L)$ имеет X'-вычислимое представление*;
(2) *структура $(\mathbb{N}, <_L, F_L)$ имеет X'-вычислимое представление*;

[1] В исходном доказательстве использовался метод приоритета с бесконечными нарушениями. М. В. Зубковым (см. [7]) было найдено более простое доказательство этого результата, использующее только лишь метод с конечными нарушениями.

(3) $L \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}}((f_1(q))^* + 1 + f_2(q))$, *где* $f_1, f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ *являются* X'*-предельно монотонными функциями;*

(4) $L \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}}((f_1(q))^* + 1 + f_2(q))$, *где* $f_i(x) = \liminf\limits_{s\to\infty} g_i(x, s)$ *для некоторых* X*-вычислимых функций* $g_i : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (*требуется, что* $\liminf\limits_{s\to\infty} g_i(x, s)$ *существует и конечный для любого* $x \in \mathbb{Q}$);

(5) L *имеет* X*-вычислимое представление, отношение блока которого ко-вычислимо перечислимо относительно* X.

Изложим теперь дальнейшие обобщения приведенных результатов. В конденсации линейного порядка $\mathcal{L}$ отношение блока следующим образом индуцирует отношение $\tilde{F}_{\mathcal{L}}(x, y) \Leftrightarrow F_{\mathcal{L}/F_{\mathcal{L}}}([x]_{\mathcal{L}}, [y]_{\mathcal{L}})$. Это отношение позволяет построить еще одну факторизацию, т.е. конденсацию конденсации. Эту процедуру можно повторить и далее. Более точно, определим отношение $F^{\alpha}_{\mathcal{L}}$ для любого ординала α следующим образом:

(1) $F^0_{\mathcal{L}}(x, y) \Leftrightarrow x = y$, $[x]^0_{\mathcal{L}} \rightleftharpoons \{y \in L \mid F^0_{\mathcal{L}}(x, y)\}$;

(2) если ординал $\alpha = \beta + 1$ — последователь, то

$$F^{\beta+1}_{\mathcal{L}}(x, y) \Leftrightarrow F_{\mathcal{L}/F^{\beta}_{\mathcal{L}}}([x]^{\beta}_{\mathcal{L}}, [y]^{\beta}_{\mathcal{L}}), \quad [x]^{\beta}_{\mathcal{L}} \rightleftharpoons \{y \in L \mid F^{\beta}_{\mathcal{L}}(x, y)\};$$

(3) если ординал α — предельный, то

$$F^{\alpha}_{\mathcal{L}}(x, y) \Leftrightarrow (\exists\beta < \alpha)[F_{\mathcal{L}/F^{\beta}_{\mathcal{L}}}([x]^{\beta}_{\mathcal{L}}, [y]^{\beta}_{\mathcal{L}})], \quad [x]^{\alpha}_{\mathcal{L}} \rightleftharpoons \{y \in L \mid (\exists\beta < \alpha)[F^{\beta}_{\mathcal{L}}(x, y)]\}.$$

Отметим, что при таком определении $F^1_{\mathcal{L}}(x, y) \Leftrightarrow F_{\mathcal{L}}(x, y)$. Рассуждая по индукции, нетрудно видеть, что для любого α это определение корректно. Для базиса индукции это очевидно. Пусть для любого $\beta < \alpha$ отношение $F^{\beta}_{\mathcal{L}}$ представляет собой отношение эквивалентности, а класс эквивалентности $[x]^{\beta}_{\mathcal{L}}$ некоторого элемента $x \in L$ является интервалом в $\mathcal{L}$. Тогда на множестве $L/F^{\beta}_{\mathcal{L}}$ можно определить фактор-порядок $\mathcal{L}/F^{\beta}_{\mathcal{L}}$ следующим образом:

$$[x]^{\beta}_{\mathcal{L}} <_{\mathcal{L}/F^{\beta}_{\mathcal{L}}} [y]^{\beta}_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow x <_{\mathcal{L}} y;$$

следовательно, выражение $F_{\mathcal{L}/F^{\beta}_{\mathcal{L}}}([x]^{\beta}_{\mathcal{L}}, [y]^{\beta}_{\mathcal{L}})$ корректно определено.

Введем обозначения $\mathcal{L}^{(0)}_F = \mathcal{L}$. Для любого ординала α введем обозначение $\mathcal{L}^{(\alpha)}_F = \mathcal{L}/F^{\alpha}_{\mathcal{L}}$. Следующая теорема является наилучшим обобщением теорем 2.9 и 2.5.

Теорема 2.10 (см. [35]). *Пусть* $\mathcal{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}}(H(q)^* + 1 + K(q))$, *где* H *и* K — $\emptyset'$*-предельно монотонные функции относительно клиниевской системы обозначений* O. *Тогда* $\mathcal{L}$ *имеет вычислимую копию, с* Σ^0_1*-одноместным предикатом* $U(x)$, *отмечающем в копии элементы, соответствующие единицам в выражении* $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}}(H(q)^* + 1 + K(q))$. *Кроме того, если функции* H *и* K *ограничены конструктивным ординалом* α, *то* $\mathcal{L}$ *имеет вычислимую копию с* Π^0_1 *отношениями* $F^{\beta}_{\mathcal{L}}$ $(1 \leqslant \beta \leqslant \alpha)$.

2.3. Достаточные условия вычислимой представимости. Как было доказано выше, существование $\emptyset'$-предельно монотонной функции, задающей некоторый линейный порядок, достаточно для существования его вычислимого представления. Естественно возникает вопрос: для каких порядковых типов такие функции существуют? Как мы увидим ниже, для ряда линейных порядков, имеющих низкое представление, удается построить $\emptyset'$-предельно монотонные функции, их задающие. И, следовательно, такие порядки вычислимо представимы.

Заметим, что в отличие от булевых алгебр (см. [22]), существование представления линейного порядка в низкой степени не влечет существование вычислимой копии (см. [40]). С другой стороны, Р. Доуни и М. Мозес (см. [27]) доказали, что каждый низкий дискретный линейный порядок имеет вычислимую копию (линейный порядок является дискретным, если он не содержит предельных элементов). Из этих результатов естественно возник вопрос (а по сути целая программа исследований), который был поставлен в 1998 г. в обзорной работе Р. Доуни [21]: описать такие

порядковые свойства P, что для любого низкого линейного порядка L из выполнимости $P(L)$ следует существование вычислимого представления L.

Из отрицательных результатов стоит отметить работу А. Н. Фролова [33], где построен 2-низкий разреженный линейный порядок, не имеющий вычислимого представления (линейный порядок называется разреженным, если он не содержит плотного подпорядка). Этот результат фактически является отрицательным ответом на вопрос А. Монталбана и А. Кэча (см. [42]).

Основными лучшими положительными результатами в этом направлении на данный момент времени являются следующие два результата: каждый низкий линейный порядок, любой блок которого либо бесконечен, либо имеет мощность, не превосходящую некоторого наперед заданного числа k (такие порядки были названы k-квазидискретными), имеет вычислимую копию (см. [12]); каждый 2-низкий 1-квазидискретный линейный порядок вычислимо представим (см. [1]). Ниже приведем еще два результата, которые не покрываются этими двумя.

Используя технику предельно монотонных функций, можно также получить некоторые дополнительные результаты, направленные на решение сформулированной выше проблемы Р. Доуни. В частности, если линейный порядок является сильно η-схожим, то легко построить $\emptyset'$-предельно монотонную функцию, его задающую, и, следовательно (по теореме 2.5), показать, что каждый низкий сильно η-схожий линейный порядок имеет вычислимую копию (см. [11]). Этот результат был первым продвижением в этом направлении после постановки вопроса Р. Доуни. Но на данный момент времени, так как каждый сильно η-схожий линейный порядок является k-квазидискретным, этот результат покрывается выше приведенной работой А. Н. Фролова [12], где доказывается вычислимая представимость каждого низкого k-квазидискретного линейного порядка.

Подробно об этом направлении исследований можно познакомиться в обзорной работе А. Н. Фролова [10]. Здесь же мы изложим два результата, полученные с использованием техники предельно монотонных функций, которые не покрывается выше сформулированными результатами; это результаты А. Н. Фролова (см. [32]) и М. В. Зубкова (см. [3]).

Теорема 2.11 (см. [32]). *Если низкий линейный порядок, конденсация которого есть η, не имеет сильно η-схожего интервала, то он имеет вычислимую копию. Более того, его порядковый тип может быть задан при помощи $\emptyset'$-предельно монотонной функции.*

Доказательство. Пусть линейный порядок L имеет низкую степень, а его конденсация есть η. Тогда отношение порядка $<_L$ и отношение соседства S_L являются $\emptyset'$-вычислимыми. Докажем, что существуют такие $\emptyset'$-предельно монотонные функции $f_1, f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, что выполнено

$$L \cong \sum_{q \in \mathbb{Q}} ([f_1(q)]^* + 1 + f_2(q)).$$

Тогда по теореме 2.9 порядок L является изоморфным некоторому вычислимому представлению (отношение блока которого является Π^0_1-вычислимым).

Без ограничения общности можно предположить, что дан такой вычислимый линейный порядок L, отношение соседства S_L которого также вычислимо, удовлетворяющий условию $L/_\sim \cong \eta$, и требуется построить функции f_1, f_2 так, чтобы они были предельно монотонными.

Очевидно, что множество $B = \{b_0 < b_1 < \cdots\}$ является Π^0_1-вычислимым, где $[b_i]_L \neq [b_j]_L$ для $i \neq j$, b_i — наименьшее натуральное число класса $[b_i]_L$ и для каждого x существует такой i, что $x \in [b_i]_L$. Пусть $B_s = \{b^s_0 < b^s_1 < \cdots\}$ — некоторая Π^0_1-аппроксимация B. Определим

$$[x]_{<_L} = \{y \in [x]_L \mid y <_L x\}, \quad [x]_{>_L} = \{y \in [x]_L \mid y >_L x\}.$$

Чтобы определить функции f_1 и f_2, построим такие их аппроксимации g_1 и g_2 соответственно, что $f_i(q) = \lim\limits_{s \to +\infty} g_i(q, s)$ для всех $q \in \mathbb{Q}$ и $1 \leqslant i \leqslant 2$. При построении будем *маркировать* рациональные числа натуральными номерами. Если некоторое рациональное число q маркировано на некотором шаге s, то либо q не меняет своей маркировки, либо q меняет маркировку, либо q становится не маркированным на некотором шаге $s' > s$. Обозначим символом q_x рациональное число, которое маркировано номером x. Зафиксируем некоторую вычислимую биекцию $N : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

Конструкция.

Шаг $s = 0$**.** Предположим для удобства, что $-\infty$ и $+\infty$ являются рациональными числами и они маркированы номерами $-\infty$ и $+\infty$ соответственно. Более того, $-\infty <_L x <_L +\infty$ для всех элементов x; $b_{-2} = b_{-2}^{s'} = -\infty$, $b_{-1} = b_{-1}^{s'} = +\infty$ для всех s'. Все оставшиеся рациональные числа на этом шаге считаются не маркированными.

Шаг $s+1$**.** Выберем такое наибольшее натуральное число $k \leqslant s+1$, что

(1) $B_s \restriction k = B_{s+1} \restriction k$, где $B_{s+1} \restriction k = B_{s+1} \cap \{0, \dots, k\} = \{b_0^{s+1} < \dots < b_n^{s+1}\}$;

(2) для всех $x \in B_{s+1} \restriction k$ существует рациональное число, которое маркировано номером x.

Для каждого $x \notin B_{s+1} \restriction k$ отменяем маркировку x и рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Предположим, что существует такое не маркированное рациональное число q, что функции $g_1(q,s)$ и $g_2(q,s)$ определены. Без ограничения общности предположим, что q единственно. Выберем такие рациональные числа q_x и q_y, что

(a) $q_x <_{\mathbb{Q}} q <_{\mathbb{Q}} q_y$;

(b) не существует никакого маркированного рационального числа между q_x и q_y.

Так как $L/_\sim \cong \eta$ и L не содержит бесконечного сильно η-схожего интервала, то один из следующих случаев обязательно выполняется: либо существует такой шаг $s' \geqslant s$, что $x \in [y]_L \cap \{0, \dots, s'\}$ (в этом случае ничего не делаем); либо существуют такие $z_1, z_2 \in B_{s+1}$, $t \in B_{s+1}$, и $s'' \geqslant s$, что

(a) $x <_L z_1 <_L z_2 <_L y$,

(b) $z_1 \leqslant_L t \leqslant_L z_2$,

(c) $|[t]_{<_L} \cap \{0, \dots, s''\}| = g_1(q,s)$,

(d) $|[t]_{>_L} \cap \{0, \dots, s''\}| = g_2(q,s)$.

Пусть выполнено (b) и z_1, z_2 — наименьшие из таких чисел. Тогда маркируем рациональное число q номером t, т.е. положим $q_t = q$. (Здесь без ограничения общности можно предположить, что $s'' = s$.)

Случай 2. Предположим, что

$$b_i^{s+1} <_L b_{n+1}^{s+1} <_L b_j^{s+1}$$

для некоторых $i, j \leqslant n$, удовлетворяющих условиям $\neg(b_i^{s+1} <_L b_k^{s+1} <_L b_j^{s+1})$, $k \leqslant n$. Выберем такое рациональное число $\widetilde{q}$, что

$$N(\widetilde{q}) = \min_{\leqslant_{\mathbb{N}}}\{N(q) \mid q_{b_i^{s+1}} <_{\mathbb{Q}} q <_{\mathbb{Q}} q_{b_j^{s+1}}\}.$$

Определим

$$q_{b_{n+1}^{s+1}} = \widetilde{q}, \quad g_1(q_{b_{n+1}^{s+1}}, s') = |[b_{n+1}^{s+1}]_{<_L} \cap \{0, \dots, s\}|, \quad g_2(q_{b_{n+1}^{s+1}}, s') = |[b_{n+1}^{s+1}]_{>_L} \cap \{0, \dots, s\}|$$

для всех $s' \leqslant s$.

Случай 3. Для любого маркированного рационального числа q_x положим

$$g_1(q_x, s+1) = |[x]_{<_L} \cap \{0, \dots, s, s+1\}|, qqqg_2(q_x, s+1) = |[x]_{>_L} \cap \{0, \dots, s, s+1\}|.$$

Завершим доказательство теоремы.

Пусть $q_x(s)$ — рациональное число, которое маркировано номером x на шаге s. Докажем, что для любого $x \in B$ существует такой наименьший шаг s_x, что

(1) $q_x(s) = q_x(s_x)$ для всех $s \geqslant s_x$,

(2) функция $x \mapsto q_x(s_x)$ является биекцией B в $\mathbb{Q}$,

(3) $x <_L y \Leftrightarrow q_x(s_x) <_{\mathbb{Q}} q_y(s_y)$ для всех $x, y \in B$.

Пусть s_x — такое наименьшее натуральное число, что $s_x \geqslant s_{x'}$ и $B_s \restriction x = B_{s_x} \restriction x = B \restriction x$ для всех $x' < x$ и $s \geqslant s_x$. По индукции из конструкции следует, что $q_x(s) = q_x(s_x)$ для всех $s \geqslant s_x$; $q_x(s_x) \neq q_{x'}(s_{x'})$ и $x' <_L y' \Leftrightarrow q_{x'}(s_{x'}) <_{\mathbb{Q}} q_{y'}(s_{y'})$ для всех $x', y' \in B$, что $x', y' < x$.

Осталось показать, что для каждого $q \in \mathbb{Q}$ существует такой $x \in B$, что $q = q_x(s_x)$. Пусть q таково, что для всех q', удовлетворяющих условию $N(q') < N(q)$, существует такое x', что $q_{x'}(s_{x'}) = q'$. Пусть s_1 — наибольшее из всех таких $s_{x'}$. Согласно случаю 2, существует такой шаг

$s_2 \geqslant s_1$, что функции $g_1(q, s_2)$ и $g_2(q, s_2)$ определены и q имеет некоторую маркировку на этом шаге.

Выберем такие $x', y' \in B$, что

$$x' \neq y', \quad N(q_{x'}(s_{x'})), \quad N(q_{y'}(s_{y'})) < N(q), \quad q_{x'}(s_{x'}) <_{\mathbb{Q}} q <_{\mathbb{Q}} q_{y'}(s_{y'}).$$

Имеем $x', y' \in B$, $x' \neq y'$ и $L/_\sim \cong \eta$. Отсюда следует, что существуют такие $z_1, z_2 \in B$, что $x' <_L z_1 <_L z_2 <_L y'$ (зафиксируем наименьшие z_1, z_2). Пусть z — наибольшее число из z_1 и z_2. Найдем такой шаг $s_3 \geqslant s_2$, что $B_s \restriction z = B_{s_3} \restriction z = B \restriction z$ для всех $s \geqslant s_3$. Согласно случаю 1, после шага s_3 рациональное число q изменит свою маркировку не более одного раза. Другими словами, существует такой шаг $s_4 \geqslant s_3$, что $q_x(s) = q_x(s_4) = q$ для некоторого x и для всех $s \geqslant s_4$.

Теперь отсюда и из самой конструкции следует, что $g_i(q, s)$ определена и выполнено неравенство $g_i(q, s) \leqslant g_i(q, s + 1)$ для всех $q \in \mathbb{Q}$, $s \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant i \leqslant 2$.

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать, что

$$L \cong \sum_{q \in \mathbb{Q}} ([f_1(q)]^* + 1 + f_2(q)),$$

где

$$f_i : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \cup \{\omega\},$$

причем

$$f_i(q) = \begin{cases} \lim\limits_{s \to +\infty} g_i(q, s), & \text{если предел конечен,} \\ \omega & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad q \in \mathbb{Q},\ 1 \leqslant i \leqslant 2.$$

Действительно, из конструкции следует, что для всех $s \geqslant s_x$ и $x \in B$ выполнено

$$g_1(q_x(s_x), s) = |[x]_{<_L} \cap \{0, \ldots, s\}|, \quad g_2(q_x(s_x), s) = |[x]_{>_L} \cap \{0, \ldots, s\}|.$$

Следовательно,

$$\lim_{s \to +\infty} g_1(q_x(s_x), s) = |[x]_{<_L}|, \quad \lim_{s \to +\infty} g_2(q_x(s_x), s) = |[x]_{>_L}|.$$

Отсюда непосредственно следуют все требуемые условия. □

Для изложения результата М. В. Зубкова необходимо ввести следующее понятие левых и правых максимальных блоков.

Определение 2.12. Блок $[x]_{\mathcal{L}}$ будем называть левым (правым) локальным максимумом, если существует такой $[y]_{\mathcal{L}} <_{\mathcal{L}} [x]_{\mathcal{L}}$ ($[y]_{\mathcal{L}} >_{\mathcal{L}} [x]_{\mathcal{L}}$), что для любого $[z]_{\mathcal{L}}$ из условий

$$[y]_{\mathcal{L}} <_{\mathcal{L}} [z]_{\mathcal{L}} <_{\mathcal{L}} [x]_{\mathcal{L}} \quad ([y]_{\mathcal{L}} >_{\mathcal{L}} [z]_{\mathcal{L}} >_{\mathcal{L}} [x]_{\mathcal{L}}),$$

вытекает $|[z]_{\mathcal{L}}| < |[x]_{\mathcal{L}}|$.

Доказано следующее достаточное условие существования $\emptyset'$-предельно монотонной функции. Как следствие, η-схожий линейный порядок, определяемый этой функцией, будет иметь вычислимую копию.

Теорема 2.13 (см. [3]). *Пусть $\mathcal{L}$ — η-схожий линейный порядок, в котором размеры левых и правых локальных максимумов ограничены. Линейный порядок $\mathcal{L}$ имеет низкую копию тогда и только тогда, когда существует такая $\emptyset'$-предельно монотонная функция $G : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, что $\mathcal{L} \cong \sum\limits_{q \in \mathbb{Q}} G(q)$.*

Доказательство. По теореме 2.5 достаточно построить $\emptyset'$-вычислимую аппроксимацию функции G. Для этого будем строить вспомогательную функцию «выбора» φ, ставящую в соответствие каждому рациональному числу элемент порядка $\mathcal{L}$ ровно по одному из каждого блока и сохраняющую при этом порядок. Так как конечной целью является построение $\emptyset'$-предельно монотонной функции G, то построение аппроксимации функции φ будет производиться так, чтобы обеспечивать выполнение следующего условия: если значение аппроксимации на некотором рациональном числе изменилось, т.е. $\varphi(q, s) \neq \varphi(q, s + 1)$, то количество элементов найденных к шагу $s + 1$ в блоке, содержащем новое значение аппроксимации, должно быть не меньше, чем количество элементов найденных к шагу s в блоке, содержащем предыдущее значение. Нетрудно

видеть, что если обеспечить выполнение всех указанных условий, то $\emptyset'$-вычислимую аппроксимацию функции G на элементе q на шаге s можно задать как количество элементов, найденных к шагу s в блоке, содержащем элемент $\varphi(q, s)$.

Согласно предположению теоремы, существует такое k, что размеры блоков, являющихся левыми или правыми локальными максимумами, не превосходят k.

Основная идея построения заключается в том, что каждое новое значение для функции φ выбирается таким образом, чтобы между ним и значениями, определенными ранее, было не менее k элементов. Если выбранное значение является левым или правым локальным максимумом, то изменений значений аппроксимации φ на данном аргументе не будет, так как все предыдущие и последующие значения находятся на расстоянии, большем k, и, следовательно, лежат в других блоках.

Предположим, что для двух различных аргументов p и q значения аппроксимации φ лежат в одном блоке. Пусть p — аргумент с большим номером (и, соответственно, с меньшим приоритетом). Тогда для p необходимо переопределить значение аппроксимации. Так как исходное расстояние между значениями φ на p и на q было больше k, то содержащий их блок $[x_0]_{\mathcal{L}}$ имеет размер больше k, и, следовательно, не является ни левым, ни правым локальным максимумом. Тогда между данным блоком и любым другим найдется блок, имеющий размер, не меньший размера $[x_0]_{\mathcal{L}}$, который, в свою очередь, не меньше текущего значения аппроксимации функции g на элементе p. Таким образом, на p можно будет переопределить значение аппроксимации φ, не нарушая при этом ее значений на аргументах с более высоким приоритетом. □

Класс порядков, удовлетворяющих условию теоремы 2.13, существенно шире, чем объединение классов сильно η-схожих линейных порядков и η-схожих линейных порядков, не содержащих сильно η-схожих интервалов.

В следующем результате отметим, что для низких k-квазидискретных линейных порядков, конденсация которых есть η, существование $\emptyset'$-предельно монотонной функции более сильное условие, чем существование вычислимой копии. Именно, покажем, что, существует η-схожий 2-квазидискретный линейный порядок, имеющий низкую (а следовательно, и вычислимую) копию, порядковый тип которого не может быть задан никакой $\emptyset'$-предельно монотонной функции.

Теорема 2.14 (см. [3]). *Существует низкий 2-квазидискретный линейный порядок $\mathcal{L}$, конденсация которого есть η и для которого не существует такой пары $\emptyset'$-предельно монотонных функций F и G, что*

$$\mathcal{L} \cong \sum_{q \in \mathbb{Q}} (G^*(q) + 1 + F(q)).$$

2.4. η-Представимые множества. Вопрос, рассматриваемый в данном разделе, — это проблема описания сильно η-представимых множеств. В теории вычислимых структур важным вопросом является вопрос кодирования множеств в структуры. В своей книге [51] Дж. Розенштейн обращает внимание на один такой способ кодирования множеств в η-схожие линейные порядки.

Определение 2.15. Пусть $\{a_0, a_1, a_2 \dots\}$ — перечисление множества $A \subseteq \omega$ (возможно, с повторениями). Тогда линейный порядок L вида $\eta + a_0 + \eta + a_1 + \eta + a_2 + \eta + \dots$ называется η-представлением множества A. Если $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \dots$, то L называется неубывающим η-представлением. Если же $a_0 < a_1 < a_2 \dots$, то L называется сильным η-представлением.

Множество, а также тьюринговая степень, содержащая это множество, называются η-представимыми (неубывающе η-представимыми, сильно η-представимыми), если существует вычислимое η-представление (неубывающее η-представление, сильное η-представление, соответственно) этого множества.

Нетрудно доказать (см. [30]), что η-представимые множества (т.е. множества, имеющие вычислимые η-представления) принадлежат Σ^0_3-уровню арифметической иерархии. Дж. Розенштейн (см. [51]) и С. Феллнер (см. [31]), соответственно, показали, что любое Σ^0_2- или Π^0_2-множество является сильно η-представимым. С другой стороны, М. Лерман (см. [47]) построил Δ^0_3-множество, не имеющее вычислимого η-представления. Дж. Розенштейн (см. [51]) показал, что любое сильно η-представимое множество лежит в классе Δ^0_3. Он фактически доказал, что каждое неубывающе

η-представимое множество лежит в классе Δ^0_3. В этой же работе Дж. Розенштейн поставил вопрос описания сильно η-представимых множеств; однако, по всей видимости, это трудная задача. Р. Доуни (см. [21]) поставил более слабый вопрос об описании хотя бы сильно η-представимых степеней. Следующие теоремы дают описания степеней, содержащих η-представимые и неубывающе η-представимые множества.

Теорема 2.16 (см. [47]). *Степень является η-представимой тогда и только тогда, когда она является вычислимо перечислимой относительно $\mathbf{0}''$.*

Теорема 2.17 (см. [34, 43]). *Степень является неубывающе η-представимой тогда и только тогда, когда она является $\mathbf{0}''$-вычислимой.*

Доказательство. Пусть $A \leqslant_T \emptyset''$. Покажем, что $A \oplus \omega$ — множество, η-представимое по неубыванию. Так как $A \oplus \omega \equiv_T A$, каждая $\mathbf{0}''$-вычислимая степень содержит множество, η-представимое по неубыванию.

Пусть $f(x,s)$ — такая $\emptyset'$-вычислимая функция, что, во-первых, для любого x существует $\lim\limits_{s\to\infty} f(x,s)$ и, во-вторых, $x \in A$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\lim\limits_{s\to\infty} f(x,s) = 1$.

Согласно теореме 2.5, достаточно построить $\emptyset'$-вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$ порядкового типа $\eta + a_0 + \eta + a_1 + \eta + a_2 + \eta + \ldots$ с $\emptyset'$-вычислимыми отношениями соседства и блока. Здесь $A \oplus \omega = \{a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots\}$.

Фиксируем оракул $\emptyset'$. Будем строить $\mathcal{L}$ как ω-сумму $\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \ldots$ следующим образом: если $x \notin A$, то тип порядка $\mathcal{R}_x$ будет конечной суммой порядковых типов $\eta + 2x + 1 + \eta$. Если $x \in A$, то тип $\mathcal{R}_x$ будет $\eta + 2x + \eta + \tau_x$; здесь τ_x обозначает некоторую конечную сумму элементов вида $\eta + 2x + 1 + \eta$. Этого будет достаточно для доказательства теоремы.

Проведем конструкцию R_x для фиксированного $x \in \mathbb{N}$.

Конструкция.

Шаг $s = 0$**.** Если $f(x,0) = 1$, то полагаем $\mathcal{R}_{x,0} = \eta + 2x + \eta + 2x + 1 + \eta$. Такая запись для $\mathcal{R}_{x,0}$ (как и для множеств $\mathcal{R}_{x,s}$, $s \geqslant 0$, ниже) означает, что вычислимое множество $R_{x,0}$ определяется так, что его порядковый тип есть $\eta + 2x + \eta + 2x + 1 + \eta$. Если $f(x,0) \neq 1$, то полагаем $\mathcal{R}_{x,0} = \eta + 2x + 1 + \eta$. Этот шаг гарантирует, что каждое нечетное число (то есть ω-часть $A \oplus \omega$) будет кодирована в $\mathcal{R}$.

Шаг $s + 1$**.** Предположим, что $\mathcal{R}_{x,s}$ представляет собой конечную сумму $\mathcal{R}^0 + \mathcal{R}^1 + \ldots + \mathcal{R}^k$, где R^0 имеет один из двух порядковых типов: либо $\eta + 2x + \eta$, либо $\eta + 2x + 1 + \eta$, а $\mathcal{R}^1, \ldots, \mathcal{R}^k$ имеют порядковый тип $\eta + 2x + 1 + \eta$.

Если $f(x,s) = f(x,s+1)$, то ничего не делаем. Предположим, что $f(x,s) \neq f(x,s+1)$. Если $f(x,s+1) = 1$, то полагаем $\mathcal{R}_{x,s+1} = \eta + 2x + \eta + R_{x,s}$. Если $f(x,s+1) \neq 1$, то полагаем $\mathcal{R}_{x,s+1} = \widetilde{\mathcal{R}}^0 + \mathcal{R}^1 + \ldots + \mathcal{R}^k$. Здесь $\widetilde{R}^0 \supset R^0$, $\widetilde{\mathcal{R}}^0$ имеет порядковый тип $\eta + 2x + 1 + \eta$ и интервал $\widetilde{R}^0$ получается из R^0 добавлением одного элемента, так чтобы блок длины $2x$ (такой блок в $\mathcal{R}^0$ единственный) стал блоком длины $2x + 1$.

Так как для любого x существует конечный предел $\lim\limits_{s\to\infty} f(x,s)$, то существует такой шаг $s = s(x)$, что $f(x,s) = f(x,s')$ (и, следовательно, $\mathcal{R}_{x,s} = \mathcal{R}_{x,s'}$) для любого $s' > s$. Пусть $\mathcal{R}_x = \lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{R}_{x,s}$. Легко видеть, что если $\lim\limits_{s\to\infty} f(x,s) = 1$ (это означает, что $x \in A$), то $\mathcal{R}_x$ имеет порядковый тип $\eta + 2x + \eta + 2x + 1 + \eta + 2x + 1 + \eta + \ldots + \eta + 2x + 1 + \eta$ (сумма состоит из конечного числа слагаемых), и если $\lim\limits_{s\to\infty} f(x,s) \neq 1$ (это означает, что $x \notin A$), то $\mathcal{R}_x$ имеет порядковый тип$\eta + 2x + 1 + \eta + 2x + 1 + \eta + 2x + 1 + \eta + \ldots + \eta + 2x + 1 + \eta$ (сумма также конечна).

Легко видеть, что $\mathcal{L} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \ldots$ есть $\mathbf{0}'$-вычислимое η-представление по неубыванию множества $A \oplus \omega$. Так как на каждом шаге конструкции отношения блока и соседства не изменяются, а только доопределяются, то отношение блока и отношение соседства в порядке $\mathcal{L}$ оба суть Δ^0_2-отношения. По теореме 2.5, $\mathcal{L}$ имеет вычислимую копию. Таким образом, $A \oplus \omega$ есть множество, η-представимое по неубыванию. $\square$

Описание сильно η-представимых степеней является более трудной задачей. Например, К. Харрис (см. [37]) показал, что существует Δ^0_3-степень, не содержащая сильно η-представимых множеств. Также следующая теорема показывает, что «хорошего» описания сильно η-представимых степеней с использованием арифметической или релятивизованной иерархий не существует.

Теорема 2.18 (см. [5]). *Каждая степень $\boldsymbol{a} \leqslant_{tt} \mathbf{0}''$ является сильно η-представимой.*

Здесь используется сводимость, отличная от тьюринговой. Множество A таблично сводится (или tt-сводится) к множеству B ($A \leqslant_{tt} B$), если существуют такие вычислимые функции f и g, что

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists y \in D_{g(x)})(\forall z < f(x))[x \in B \leftrightarrow x \in D_y),$$

где $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — стандартная нумерация всех конечных множеств.

В частности, любая степень, являющаяся n-вычислимо перечислимой относительно $\mathbf{0}'$, содержит сильно η-представимое множество. Следующая теорема дает более «тонкое» описание сильно η-представимых степеней.

Теорема 2.19 (см. [5]). *Степень является сильно η-представимой тогда и только тогда, когда она содержит область значений такой $\emptyset'$-предельно монотонной функции $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$, что*

(1) $(\{x \mid f(x) > 1\}, \leqslant_{\mathbb{Q}}) \cong \omega$;
(2) $(\forall x, y)(f(x) > 1 \;\&\; f(y) > 1 \;\&\; x <_{\mathbb{Q}} y \to f(x) <_{\mathbb{N}} f(y))$.

Как уже было сказано выше, вопрос Дж. Розенштейна об описании сильно η-представимых множеств остается открытым, однако имеются некоторые частичные результаты.

Теорема 2.20 (см. [37]). *Множество является η-представимым тогда и только тогда, когда оно является множеством значений некоторой $\emptyset'$-предельно монотонной функции.*

Теорема 2.21 (см. [4]). *Множество A является неубывающе η-представимым тогда и только тогда, когда оно Δ^0_3-множество и η-представимо.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Следует из того, что каждое неубывающе η-представимое множество лежит в классе Δ^0_3 (см. [51]).

($\Leftarrow$) Пусть η-представимое множество A принадлежит классу Δ^0_3. Тогда существует такая $\mathbf{0}'$-предельно монотонная функция $G : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, что $\mathrm{rng}(G) = A$. Пусть g — ее апроксимация. Определим $\mathbf{0}'$-вычислимую функцию $\widetilde{g}(x, s) = \max\{g(y, s) \mid y \leqslant x\}$. Так как $g(x, s) \leqslant g(x, s + 1)$, легко видеть, что $\widetilde{g}(x, s) \leqslant \widetilde{g}(x, s + 1)$. Кроме того,

$$\lim_{s\to\infty} \widetilde{g}(x, s) = \lim_{s\to\infty} \max\{g(y, s) \mid y \leqslant x\} = \max\{G(y) \mid y \leqslant x\}.$$

Таким образом, функция $\widetilde{G}(x) = \lim\limits_{s\to\infty} \widetilde{g}(x, s)$ всюду определена и $\mathrm{rng}(\widetilde{G}) \subseteq rng(G) = A$. Кроме того, $x \leqslant y \Rightarrow \widetilde{G}(x) \leqslant \widetilde{G}(y)$.

Для доказательства утверждения построим такую $\mathbf{0}'$-вычислимую функцию f, что

$$\lim_{s\to\infty} f(q, s) = F(q),$$

где F — требуемая функция, и $f(q, s) \leqslant f(q, s + 1)$ для любого $q \in \mathbb{Q}$. Выберем в $\mathbb{Q}$ такую последовательность элементов $p_0 <_{\mathbb{Q}} p_1 <_{\mathbb{Q}} p_2 <_{\mathbb{Q}} \ldots$, что $(\forall q \in \mathbb{Q})(\exists i)[q < p_i]$, и положим

$$\widehat{g}(q, s) = \begin{cases} \widetilde{g}(i, s), & \text{если } q = p_i, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Введем обозначение $\operatorname{supp} F = \{q \in \mathbb{Q} \mid F(q) > 1\}$.

Конструкция.

Шаг 0. Определим $\varphi_0(p_i) = p_i$. Положим

$$f(q, 0) = \begin{cases} \widetilde{g}(\varphi_0^{-1}(q), 0), & \text{если } q \in \varphi(\mathbb{Q}), \\ q \notin \varphi(\mathbb{Q}), & \text{если } q \notin \varphi(\mathbb{Q}). \end{cases}$$

Шаг $s+1$**.** Предположим, что после шага s построена такая псевдонеубывающая функция $f(\cdot,s)$, что $\operatorname{rng}(f(\cdot,s))-\{0,1\}=A_s-\{0,1\}$. (Для удобства считаем, что $-\infty<_{\mathbb{Q}}u<_{\mathbb{Q}}+\infty$ для всех $u\in\mathbb{Q}$ и, кроме того, $f(-\infty,s)<n<f(+\infty,s)$ для всех $s,n\in\omega$.)

Для $q\in\operatorname{rng}(\varphi_{s+1})$ полагаем $h(q,s+1)=\widetilde{g}(\varphi_{s+1}^{-1}(q),s+1)$. Для таких $q\notin\operatorname{rng}(\varphi_{s+1})$, что $f(p,s)>1$, полагаем

$$h(q,s+1)=\max[\{h(q,s+1)\mid q\in\operatorname{rng}(\varphi_{s+1})\ \&\ q\leqslant_{\mathbb{Q}}p\}\cup\{f(p,s)\}].$$

Нетрудно видеть, что $\operatorname{rng}(h(\cdot,s+1))\supset\widetilde{g}(\operatorname{dom}(\varphi_{s+1}),s+1)$ и если $p,q\in\operatorname{supp}h(\cdot,s+1)$, то $p\leqslant_{\mathbb{Q}}q\to h(p,s+1)\leqslant h(q,s+1)$.

(a) Если

$$\operatorname{rng}(h(\cdot,s+1))\cap[2,s+1]-(A_{s+1}\cup\operatorname{rng}(\widetilde{g}(\cdot,s+1)))\cap[2,s+1]=\emptyset,$$

то сразу переходим к пункту (b). Рассмотрим функцию h', определенную на $q\in\operatorname{supp}(h(\cdot,s+1))$ следующим образом:

$$h'(q,s+1)=\min[\{h(p,s+1)\geqslant h(q,s+1)\mid h(q,s+1)\in\\ \in(A_{s+1}\cup\operatorname{rng}(g(\cdot,s+1)))\cap[2,s+1]\}\cup\{s+1\}].$$

Пусть

$$h(q,s+1)\in\operatorname{rng}(h(\cdot,s+1))\cap[2,s+1]-(A_{s+1}\cup\operatorname{rng}(\widetilde{g}(\cdot,s+1)))\cap[2,s+1].$$

Тогда $q\notin\operatorname{rng}(\varphi_{s+1})$ и, следовательно, $h'(q,s+1)=h(q,s+1)=\widetilde{g}(\varphi_{s+1}^{-1}(q),s+1)$ для $q\in\operatorname{rng}(\varphi)\cap[2,s+1]$. Кроме того, $h'(q,s+1)\geqslant h(q,s+1)$ для всех $q\in\operatorname{supp}(h(\cdot,s+1))$. Далее функцию h' будем обозначать h. Нетрудно видеть, что для $q,p\in\operatorname{supp}(h(\cdot,s+1))$, если $q\leqslant_{\mathbb{Q}}p$, то $h(q,s+1)\leqslant h(p,s+1)$.

(b) Если

$$(A_{s+1}\cup\operatorname{rng}(g(\cdot,s+1)))\cap[2,s+1]-\operatorname{rng}(h(\cdot,s+1))\cap[2,s+1]=\emptyset,$$

то переходим к пункту (c). В противном случае это множество можно представить в виде

$$\{a_0<a_1<\ldots<a_n\}=(A_{s+1}\cup\operatorname{rng}(g(\cdot,s+1)))\cap[2,s+1]-\operatorname{rng}(h(\cdot,s+1))\cap[2,s+1].$$

Находим такие $p,q\in\operatorname{supp}(h(\cdot,s+1))\cup\{+\infty,-\infty\}$, что $h(p,s+1)<a_n<h(q,s+1)$ (здесь, как и раньше, считаем, что $h(-\infty)<n<h(+\infty)$ для любого $n\in\omega$) и $\operatorname{supp}(h(\cdot,s+1))\cap(p,q)_{\mathbb{Q}}=\emptyset$. Так как $\mathbb{Q}$ — плотный линейный порядок, то существует такой наименьший индекс j_0, что $p<_{\mathbb{Q}}q_{j_0}<_{\mathbb{Q}}q$. Определим функцию $h(q_{j_0},s+1)=a_n$. Теперь количество элементов в множестве $(A_{s+1}\cup\operatorname{rng}(g(\cdot,s+1)))\cap[2,s+1]-\operatorname{rng}(h(\cdot,s+1))\cap[2,s+1]$ уменьшилось на единицу. Повторяем описанную процедуру до тех пор, пока не будет выполняться равенство $(A_{s+1}\cup\operatorname{rng}(g(\cdot,s+1)))\cap[2,s+1]=\operatorname{rng}(h(\cdot,s+1))\cap[2,s+1]$.

(c) Полагаем $f(q,s+1)=h(q,s+1)$ для всех $q\in\mathbb{Q}$, для которых $h(q,s+1)$ определена. Для остальных $q\in\mathbb{Q}$ полагаем $f(q,s+1)=1$.

Ясно, что функция f является $\mathbf{0}'$-вычислимой. Пусть $\varphi=\bigcup\limits_{s\in\omega}\varphi_s$. Такое определение корректно, так как $\varphi_s\subset\varphi_s+1$. Положим $F(q)=\lim\limits_{s\to\infty}f(q,s)$; покажем, что F всюду определена. Если $p\in\operatorname{rng}(\varphi)$, то $(\exists s_p)(\forall s>s_p)[p\in\operatorname{rng}(\varphi_s)]$; тогда

$$(\forall s>s_p)[f(p,s)=h(p,s)=g(\varphi_s^{-1}(p),s)],$$

но $\varphi_s^{-1}(p)=\varphi_{s_p}^{-1}(p)$ для любого $s\geqslant s_p$. Таким образом,

$$(\forall s>s_p)[f(p,s)=g(\varphi_s^{-1}(p),s)]$$

и, следовательно,

$$\lim_{s\to\infty}f(p,s)=\lim_{s\to\infty}g(\varphi_{s_p}^{-1}(p),s)=G(\varphi_{s_p}^{-1}(p))=G(\varphi^{-1}(p)).$$

Тогда $\operatorname{rng}(F)\supset\operatorname{rng}(G)$.

Существует такой шаг s'_p, что

$$(\forall q \leqslant_{\mathbb{Q}} \varphi^{-1}(p))(\forall s \geqslant s_0)[g(q,s) = g(q,s'_p) = G(q)],$$
$$(\forall x \leqslant G(\varphi^{-1}(p)))[\chi(x,s) = \chi(x,s'_p) = \chi_A(x)].$$

Нетрудно видеть, что

$$(\forall q \leqslant_{\mathbb{Q}} p)(\forall s > s'_p)[f(q,s) = f(q,s'_p)],$$
$$(\forall s > s_p)[(A_s \cup \mathrm{rng}(g(\cdot,s))) \cap [2, G(\varphi_s^{-1}(p))] = \mathrm{rng}(f(\cdot,s)) \cap [2, G(\varphi_s^{-1}(p))]].$$

Следовательно, для каждого $p \in \mathrm{rng}(\varphi)$ и для каждого $q \leqslant_{\mathbb{Q}} p$ существует конечный предел $\lim\limits_{s\to\infty} f(p,s)$. Так как $\mathrm{rng}(\varphi)$ неограничен в $\mathbb{Q}$, то для любого $q \in \mathbb{Q}$ существует конечный предел $\lim\limits_{s\to\infty} f(q,s)$. Так как

$$(\forall q \leqslant_{\mathbb{Q}} p)(\forall s > s'_p)[f(q,s) = f(q,s'_p)], \quad |\{q \leqslant_{\mathbb{Q}} p \mid q \in supp(f(\cdot,s))\}| < \infty$$

для любого s, то $|\{q \leqslant_{\mathbb{Q}} p \mid q \in \mathrm{supp}(F))\}| < \infty$. В силу неограниченности $\mathrm{rng}(\varphi)$ получаем, что $\langle \mathrm{supp}(F); <_{\mathbb{Q}} \rangle \cong \langle \omega; < \rangle$. Следовательно, функция F является $\mathbf{0}'$-предельно монотонной псевдонеубывающей на Q. Из

$$\mathrm{rng}(f(\cdot,s)) \cap [2, G(\varphi_s^{-1}(p))] = (A_s \cup \mathrm{rng}(g(\cdot,s))) \cap [2, G(\varphi_s^{-1}(p))],$$
$$(\forall q \leqslant_{\mathbb{Q}} p)(\forall s > s'_p)[f(q,s) = f(q,s'_p)]$$

получаем, по выбору шага s_p

$$(\forall p \in \mathrm{rng}(\varphi))[\mathrm{rng}(F) \cap [2, G(\varphi_s^{-1}(p))] = (A \cup \mathrm{rng}(g(\cdot,s))) \cap [2, G(\varphi_s^{-1}(p))].$$

Так как множество $\{G(\varphi_s^{-1}(p))\}_{p\in\mathrm{rng}(\varphi)}$ бесконечно и, следовательно, неограниченно в ω, имеем $\mathrm{rng}(F) - \{0,1\} = (A \cup \mathrm{rng}(g(\cdot,s))) - \{0,1\}$. Теорема доказана. □

К. Харрис (см. [37]) предпринял ряд попыток найти аналогичное описание сильно η-представимых множеств, однако все они оказались безуспешными (были построены контрпримеры). Отметим еще один частичный результат, обобщающий выше приведенные результаты Дж. Розенштейна (см. [51]) и С. Феллнера (см. [31]).

Теорема 2.22 (см. [6]). *Пусть $A = B \cup C$ — бесконечное множество, где $B \in \Sigma^0_2$ и $C \in \Pi^0_2$. Тогда A является сильно η-представимым.*

2.5. Спектр отношения соседства. Первоначально понятие спектра отношений на вычислимых структурах было введено В. Харизановой (см. [36]). Приведем это определение только для отношения соседства на вычислимых линейных порядках.

Определение 2.23. *Спектром* отношения соседства вычислимого линейного порядка L называется класс

$$\mathrm{DgSp}_L(S) = \{\deg_T(S_{L'}) \mid L' \cong L \ \&\ \deg_T(L') = \mathbf{0}\}.$$

Так как отношение соседства линейного порядка L задается Π_1-формулой в сигнатуре линейного порядка, то $\mathrm{DgSp}_L(S)$ содержит только перечислимые степени.

Очевидно, что если линейный порядок L содержит только лишь конечное число пар соседних элементов, то $\mathrm{DgSp}_L(S) = \{\mathbf{0}\}$. Такой линейный порядок и спектр его отношения соседства назовем *тривиальными*. Д. Хиршфельдт (см. [39]) показал, что спектр отношения соседства нетривиального вычислимого линейного порядка бесконечен, т.е. если $\{\mathbf{0}\} \subsetneq \mathrm{DgSp}_L(S)$, то $\mathrm{DgSp}_L(S)$ бесконечен. Р. Доуни и М. Мозес (см. [28]) построили вычислимый линейный порядок, спектр отношения соседства которого одноэлементный и равен $\{\mathbf{0}'\}$. Эти результаты подтолкнули ряд исследователей к постановке следующих проблем:

(i) существует ли вычислимый линейный порядок, спектр отношения соседства которого состоит из одного элемента или хотя бы конечен, но не равен $\{\mathbf{0}\}$ и $\{\mathbf{0}'\}$?

(ii) всегда ли спектр отношения соседства нетривиального вычислимого линейного порядка содержит степень $\mathbf{0}'$?

Нетрудно видеть, что положительное решение следующего вопроса, который впервые был сформулирован в работе А. Н. Фролова, В. Харизановой и Дж. Чаб [17], влечет отрицательный ответ на (i) и положительный ответ на (ii): верно ли, что спектр отношения соседства вычислимого линейного порядка либо тривиален, либо замкнут наверх в классе перечислимых степеней?

Ими же было получено первое подтверждение этого вопроса. А именно, А. Н. Фролов, В. Харизанова и Дж. Чаб (см. [17]) показали, что если линейный порядок с бесконечным количеством пар соседних элементов не содержит плотного финального интервала, то спектр его отношения соседства замкнут наверх в классе перечислимых степеней. Этот результат позволил им построить примеры спектров отношения соседства, образующие верхние конусы перечислимых степеней с вершиной в любой наперед заданной перечислимой степени. Существенное продвижение в решении основной проблемы было получено в следующей теореме.

Теорема 2.24 (см. [13]). *Если линейный порядок не является η-схожим, то спектр его отношения соседства замкнут наверх в классе перечислимых степеней.*

Г. Ву, Р. Доуни и Ш. Лемпп (см. [25]) опубликовали в 2010 г. доказательство того, что если линейный порядок является η-схожим и содержит бесконечное количество пар соседей, то спектр его отношения соседства замкнут наверх в классе перечислимых степеней. В совокупности с выше приведенной теоремой это дает полный ответ на поставленный вопрос. Однако авторы данной работы нашли неисправимую ошибку в доказательстве этого результата. После длительного обсуждения Г. Ву, Р. Доуни и Ш. Лемпп признали, что представленное доказательство содержит ошибку. В 2017 г. ими было опубликовано опровержение (см. [26]), в котором было предоставлено некоторое рассуждение, которое, по их мнению, все же доказывает справедливость основного утверждения. К сожалению, указанная работа [26], заключенная на 4 страницах, более половины из которых содержат общие рассуждения, не позволяет авторам данной статьи воспроизвести полное и неопровержимое доказательство. Поэтому мы считаем, что вопрос о замкнутости наверх в классе перечислимых степеней спектра отношения соседства нетривиального вычислимого η-схожего линейного порядка остается открытым.

Заметим, что исходное доказательство Г. Ву, Р. Доуни и Ш. Лемппа (см. [25]) все же корректно для частного случая — класса вычислимых η-схожих линейных порядков, не содержащих сильно η-схожих интервалов. Но для таких порядков, как показано в теореме 2.11, существуют $\emptyset'$-предельно монотонные функции, их задающие. На самом деле, вместо оракула $\emptyset'$ можно взять такой X, что X вычисляет отношение соседства. Использование техники предельно монотонных функций позволяет получить более простое доказательство этого частного случая, для которого исходное доказательство Г. Ву, Р. Доуни и Ш. Лемппа верно. Причем, как было показано в предыдущих разделах этой статьи, не только η-схожие линейные порядки, не содержащие сильно η-схожих интервалов, задаются предельно монотонными функциями, поэтому следующая теорема существенно покрывает выше приведенный частный случай. (Статья находится в печати, приведем только набросок доказательства.)

Теорема 2.25 (см. [8]). *Если в линейном порядке $\mathcal{L}$ бесконечное множество соседей и $\mathcal{L} \cong \sum_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$, где $G : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ является X-предельно монотонной функцией для некоторого перечислимого множества X, то существует такой вычислимый линейный порядок $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}'$, что $S_{\mathcal{L}'} \equiv_T F_{\mathcal{L}'} \equiv_T X$.*

Набросок доказательства. Идея построения линейного порядка совпадает с идей в доказательстве теоремы 2.5. Отличие заключается в определении вычислимой аппроксимирующей функции для G.

Так как G — X-предельно монотонная функция, то существуют такие X-вычислимая функция f и, следовательно, Φ_e, что

$$G(q) = \lim_{s\to\infty} f(q,s) = \lim_{s\to\infty} \Phi_e^X(q,s).$$

Определим сначала вспомогательную функцию

$$Ln(q,0) = 0, \quad Ln(q,s+1) = \min\{t \leqslant s \mid \Phi_e^{X_{s+1}}(q,t)[s+1] \downarrow \neq \Phi_e^{X_s}(q,t)[s]\}.$$

Теперь определим

$$g(q,s) = \max\{1\} \cup \{\Phi_e^{X_{s+1}}(q,t)[s+1] \mid t \leqslant Ln(q,s)\}.$$

Покажем, что

$$\liminf_{s\to\infty} g(q,s) = \lim_{s\to\infty} \Phi^{X_s}(q,s) = G(q).$$

Пусть s_0 таков, что $\Phi^{X_s}(q,s_0) = G(q)$ и $\Phi^{X_s}(q,t) = \Phi^{X_{s_0}}(q,t)$ для всех $s \geqslant s_0$ и $t \leqslant s_0$. Тогда $L(q,s) \geqslant s_0$ для $s > s_0$ и, следовательно, $g(q,s) \geqslant \Phi^{X_s}(q,s_0) = G(q)$. Теперь покажем, что для любого $s > s_0$ существует такой $s' > s$, что $g(q,s) = G(q)$. Пусть $t > s_0$ — наименьший шаг, для которого существует такой $s_1 > s$, что

$$\Phi_e^{X_{s_1+1}}(q,t)[s_1+1] \downarrow \neq \Phi_e^{X_s}(q,t)[s].$$

Пусть s_2 — наибольший шаг, для которого

$$\Phi_e^{X_{s_2+1}}(q,t)[s_2+1] \downarrow \neq \Phi_e^{X_{s_2}}(q,t)[s_2].$$

Такой шаг существует, так как $f(q,s) = \lim\limits_{s\to\infty} \Phi_e^{X_s}(q,s)$. Тогда

$$Ln(q,s_2+1) = t, \quad g(q,s) = \Phi_e^{X_{s_1+1}}(q,t)[s_1+1] = G(q).$$

Линейный порядок будем строить в виде такой равномерной последовательности $\{I_s(q)\}_{s\in\mathbb{N},q\in\mathbb{Q}}$ конечных линейных порядков, что $I(q) = \lim\limits_{s\to\infty} I_s(q)$ — корректно определенный конечный линейный порядок для любого $q \in \mathbb{Q}$ и $\mathcal{L}' = \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} I(q)$ — вычислимый линейный порядок, изоморфный $\mathcal{L}$. При добавлении нового элемента в L' всегда выбирается наименьший (в обычном порядке), еще не содержащийся в L' элемент, т.е. конструкция проводится таким образом, чтобы носителем $\mathcal{L}'$ стало все множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Кроме того, для выполнения условия $X \leqslant_T S_{\mathcal{L}}$ для каждого элемента x мы выберем q_x и пару элементов a_x, b_x в $I(q_x)$, которые на данном шаге являются соседями, и данная пара будет кодировать принадлежность x множеству A. Если x не принадлежит множеству A, то мы стараемся сделать a_x и b_x соседями; в противном случае делаем a_x и b_x не соседями. Сохранить a_x, b_x соседями может не получиться, если интервал $I_s(q_x)$ позднее станет одноэлементным; тогда выбираем новую кодирующую пару. Аккуратно организуя выбор, мы сможем добиться того, что пару a_x и b_x выберем в интервале $I_s(q_x)$, который на последующих шагах будет содержать по крайней мере два элемента. Если в процессе построения потребуется сделать a_x и b_x не соседями, то мы нарушаем построение $I(q_x)$ на данном шаге: фактически, мы вынуждаем $g(q_x,s)$ принять значение, равное единице. Если мы гарантируем, что для каждого $q \in \mathbb{Q}$ такое произойдет лишь конечное число раз, то мы не нарушим общую конструкцию $\mathcal{L}'$, так как $\liminf\limits_{s\to\infty} g(q,s) = \liminf\limits_{s\to\infty} g'(q,s)$, где g' — функция, получающаяся из исходной функции g применением указанной процедуры. Пусть $N_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ — некоторая вычислимая биективная функция.

Конструкция. В ходе конструкции для организации выбора подходящих интервалов для кодирующих пар будем использовать семейство конечных линейных порядков $\mathcal{C}_{x,s} = \{C_{x,s}, <_{\mathcal{C}_{x,s}}\}$.

Шаг 0. $I_0(q)$ не определен для всех $q \in \mathbb{Q}$. Для всех x полагаем $\mathcal{C}_{x,0} = \{0\}$.

Шаг $s+1$. Конструкция шага происходит в два этапа. На первом этапе мы производим действия, необходимые для кодирования A в $S_{\mathcal{L}'}$, а именно, определяем кодирующие пары и функцию g'. На втором этапе непосредственно строим $\mathcal{L}'$ по g'.

Этап 1. Для каждого $x < s+1$ выполняем следующую процедуру. Пусть после шага s имеем

$$\mathcal{C}_{x,s} = \{c^x_{0,s} <_{\mathcal{C}_{x,s}} c^x_{1,s} <_{\mathcal{C}_{x,s}} \ldots <_{\mathcal{C}_{x,s}} c^x_{s,s}\}.$$

Возможны следующие три случая.

1. Если x — такое наименьшее число, что значение $q_{x,s}$ и пара $a_{x,s}$, $b_{x,s}$ не определены, то находим такое число y, наименьшее в порядке $\mathcal{C}_{x,s}$, что $|I_s(N(y))| > 1$, $x \leqslant y \leqslant s$ и $N(y) \neq q_{z,s}$ для $z < x$. Пусть $I_s(N(y)) = \{x_1 <_{\mathcal{L}'} x_2 <_{\mathcal{L}'} \ldots\}$. Полагаем $a_{x,s+1} = x_1$,

$b_{x,s+1} = x_2$, $q_{x,s+1} = N(y)$. Если такой пары нет, то оставляем $a_{x,s+1}$, $b_{x,s+1}$ и $q_{x,s+1}$ не определенными. В обоих случаях полагаем

$$\mathcal{C}_{x,s+1} = \{c^x_{0,s} <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} c^x_{1,s} <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} \ldots <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} c^x_{s,s} <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} s+1\}.$$

2. Если пара $a_{x,s}$, $b_{x,s}$ определена, то возможны следующие подслучаи:

2.1. $a_{x,s}$, $b_{x,s}$ — соседи в $\mathcal{L}'_s$ и $x \notin A_{s+1}$. В этом случае пара $a_{x,s}$, $b_{x,s}$ правильно кодирует x; полагаем $g'(q_{x,s}, s+1) = g(q_{x,s}, s+1)$;

2.2. $a_{x,s}$, $b_{x,s}$ — соседи в $\mathcal{L}'_s$ и $x \in A_{s+1}$. Нам необходимо сделать $a_{x,s}$, $b_{x,s}$ не соседями; полагаем $g'(q_{x,s}, s+1) = 1$;

2.3. $a_{x,s}$, $b_{x,s}$ — не соседи в $\mathcal{L}'_s$ и $x \in A_{s+1}$. Пара $a_{x,s}$, $b_{x,s}$ правильно кодирует x; полагаем $g'(q_{x,s}, s+1) = g(q_{x,s}, s+1)$.

В случаях 2.1–2.3 полагаем

$$\mathcal{C}_{x,s+1} = \{c^x_{0,s} <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} c^x_{1,s} <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} \ldots <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} c^x_{s,s} <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} s+1\}.$$

2.4 $a_{x,s}$, $b_{x,s}$ — не соседи в $\mathcal{L}'_s$ и $x \notin A_{s+1}$. В этом случае мы исходно неверно выбрали пару кодирующих элементов. Полагаем $g'(q_{z,s}, s+1) = 1$ и делаем значения $q_{z,s}$ и пары $a_{z,s+1}$, $b_{z,s+1}$ не определенными для всех $z \geqslant x$. Изменяем порядок выбора кодирующих элементов, а именно, пусть $q_{x,s} = N(c_{i,s})$ для некоторого i; тогда полагаем

$$\mathcal{C}_{x,s+1} = \{c^x_{0,s} <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} \ldots <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} c^x_{i-1,s} <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} c^x_{i+1,s} <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} \ldots <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} c^x_{s,s} <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} s+1 <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} c^x_{i,s}\}.$$

3. Если пара $a_{x,s}$, $b_{x,s}$ не определена, но x — не наименьшее такое число, то полагаем

$$\mathcal{C}_{x,s+1} = \{c^x_{0,s} <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} c^x_{1,s} <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} \ldots <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} c^x_{s,s} <_{\mathcal{C}_{x,s+1}} s+1\}.$$

Для всех $q \in \mathbb{Q}$, для которых значение $g'(q, s+1)$ еще не определено, полагаем $g'(q, s+1) = g(q, s+1)$.

Этап 2. Теперь для любого $q \in \mathbb{Q}$ определим $I_{s+1}(q)$ так, чтобы $N_{\mathbb{Q}}(q) \leqslant s$. Может случиться, что $I_s(q)$ еще не определен, для некоторого такого q, что $N_{\mathbb{Q}}(q) \leqslant s$. Следовательно, необходимо рассмотреть два случая:

1. Предположим, что $I_s(q)$ определен и $I_s(q) = \{x_1 <_{\mathcal{L}'} x_2 <_{\mathcal{L}'} \ldots <_{\mathcal{L}'} x_n\}$. Если $g(q, s) = n$, то ничего не делаем. Если $g'(q, s) > n$, то добавляем новые элементы $x_{n+1}, \ldots, x_{g'(q,s)}$ в $I_s(q)$ и определяем

$$I_{s+1}(q) = \{x_1 <_{\mathcal{L}'} x_2 <_{\mathcal{L}'} \ldots <_{\mathcal{L}'} x_n <_{\mathcal{L}'} x_{n+1} <_{\mathcal{L}'} \ldots <_{\mathcal{L}'} x_{g'(q,s)}\}.$$

Если $g'(q, s) < n$, то определяем

$$I_{s+1}(q) = \{x_1 <_{\mathcal{L}'} x_2 <_{\mathcal{L}'} \ldots <_{\mathcal{L}'} x_{g'(q,s)}\}$$

и объявляем $x_{g'(q,s)+1}, \ldots, x_n$ *свободными* (т.е. не связанными ни с каким $I_{s+1}(u)$ ни для какого $u \in \mathbb{Q}$).

2. Предположим, что $I_s(q)$ не определен. Для удобства считаем, что $-\infty <_{\mathbb{Q}} u <_{\mathbb{Q}} +\infty$ для всех $u \in \mathbb{Q}$ и оба порядка $I_t(-\infty) = \{-\infty\}$, $I_t(+\infty) = \{+\infty\}$ определены для всех $t \in \mathbb{N}$. Кроме того, $-\infty <_{\mathcal{L}'} z <_{\mathcal{L}'} +\infty$ для всех $z \in \mathcal{L}'$. Выберем $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$ так, чтобы $q_1 <_{\mathbb{Q}} q <_{\mathbb{Q}} q_2$, $I_s(q_1)$ и $I_s(q_2)$ были определены и не существовало такого q_3, что $q_1 <_{\mathbb{Q}} q_3 <_{\mathbb{Q}} q_2$ и $I_s(q_3)$ был бы определен.

Выберем такой наименьший x_0 (в обычном порядке на $\mathbb{N}$), что x_0 — *свободный* элемент, лежащий между блоками $I_s(q_1)$ и $I_s(q_2)$. Если такого x_0 нет, добавляем новый *свободный* элемент в $\mathcal{L}'$ между $I_s(q_1)$ и $I_s(q_2)$ и обозначаем его x_0. Далее определяем

$$I_{s+1}(q) = \{x_0 <_{\mathcal{L}'} x_1 <_{\mathcal{L}'} \ldots <_{\mathcal{L}'} x_n\},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ новые элементы, и $g'(q, s) = n+1$.

Исходя из этой конструкции нетрудно показать, что справедливо следующее:

(1) для любого x определены $q_x = \lim\limits_{s\to\infty} q_{x,s}$, $a_x = \lim\limits_{s\to\infty} a_{x,s}$ и $b_x = \lim\limits_{s\to\infty} b_{x,s}$;

(2) для каждого $q \in \mathbb{Q}$ выполнено $g(q,s) = g'(q,s)$, за исключением, быть может, конечного числа s;
(3) $I(q) = \lim\limits_{s\to\infty} I_s(q)$ корректно определены, $|I(q)| = \liminf\limits_{s\to\infty} g'(q,s) = G(q)$ и, следовательно,

$$\sum_{q\in\mathbb{Q}} G(q) \cong \sum_{q\in\mathbb{Q}} I(q) = \mathcal{L}';$$

(4) $S_{\mathcal{L}'}(x,y) \Leftrightarrow (\exists s)[F_{\mathcal{L}'}(x,y)\ \&\ S_{\mathcal{L}'_s}(x,y)]$ и $\neg S_{\mathcal{L}'}(x,y) \Leftrightarrow (\exists s)[\neg S_{\mathcal{L}'_s}(x,y)]$, откуда следует, что $S_{\mathcal{L}'} \leqslant_T F_{\mathcal{L}'}$;
(5) $F_{\mathcal{L}'}(x,y) \Leftrightarrow (\exists s)(\exists q)[I_q = \{x_0 <_{\mathcal{L}'} x_1 <_{\mathcal{L}'} \ldots <_{\mathcal{L}'} x_{g'(q,s)}\}\ \&\ F_{\mathcal{L}'_s}(x,y)\ \&\ (\exists i,j < \Phi^X(q,s)) \leqslant g'(q,s)[x = x_i\ \&\ y = x_j]]$ и $\neg F_{\mathcal{L}'}(x,y) \Leftrightarrow (\exists s)[\neg F_{\mathcal{L}'_s}(x,y)]$; следовательно, $F_{\mathcal{L}'} \leqslant_T X$;
(6) $S_{\mathcal{L}'} \equiv_T F_{\mathcal{L}'} \equiv_T X$ (X — перечислимое множество и $x \notin X \Leftrightarrow (\exists s)[S_{\mathcal{L}'}(a_{x,s}, b_{x,s})]$).

□

3. Эффективные самовложения и автоморфизмы линейных порядков

3.1. Вычислимые нетривиальные самовложения. Интерес к линейным порядкам, которые не содержат сильно η-схожих интервалов, обусловлен в первую очередь вопросом существования нетривиальных вычислимых самовложений вычислимых линейных порядков. Инъективная функция $f : L \to L$ называется *самовложением* линейного порядка L, если $x <_L y \Leftrightarrow f(x) <_L f(y)$ для всех $x, y \in |L|$. Очевидно, что любой линейный порядок обладает тождественным самовложением. Назовем тождественное самовложение *тривиальным*.

Б. Душник и Е. Миллер (см. [29]) доказали классический результат о существовании нетривиального самовложения у каждого линейного порядка. Однако построение нетривиального самовложения в этой работе неэффективно. Более того, оно не может быть эффективным, поскольку существует вычислимый линейный порядок, упорядоченный по типу ω, все вычислимые самовложения которого тривиальны, т.е. тождественны (см. [51, 52]).

Теорема 3.1 (см. [51, 52])**.** *Существует вычислимая копия порядка ω, не имеющая нетривиальных вычислимых самовложений.*

В 1984 г. Дж. Розенштейн сформулировал гипотезу о том, что каждый вычислимый η-схожий линейный порядок без сильно η-схожих интервалов имеет вычислимое представление, обладающее нетривиальным вычислимым самовложением. Позже, в 1989 г. Р. Доуни и М. Мозес (см. [27]) выдвинули более общую гипотезу, что каждое вычислимое представление вычислимого линейного порядка имеет нетривиальное вычислимое самовложение тогда и только тогда, когда порядок содержит сильно η-схожий интервал. Общая проблема пока остается открытой.

Р. Доуни, Б. Кастерманс и С. Лемпп (см. [24]) представили доказательство гипотезы Дж. Розенштейна. Найденное ими доказательство достаточно сложно и основано на методе приоритета с бесконечными нарушениями. Используя тот же метод, М. Мозес (см. [49]) обобщил указанный результат для случая линейных порядков, конденсация которых есть η. Доказательство М. Мозеса также достаточно объемное: оно занимает 30 страниц. Ниже мы приведем альтернативное доказательство, используя технику предельно монотонных функций.

Теорема 3.2 (см. [49])**.** *Каждый вычислимый линейный порядок, фактор-порядок по отношению блока которого есть η, не имеющий сильно η-схожего интервала, имеет вычислимое представление, все вычислимые самовложения которого тривиальны.*

Доказательство (см. [14]). Из теорем 2.11 и 2.9 следует, что существуют такие вычислимые функции $g_1, g_2 : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $L \cong P \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} ([f_1(q)]^* + 1 + f_2(q))$, где $f_1, f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ и для любого $q \in \mathbb{Q}$

$$f_i(q) = \begin{cases} \liminf\limits_{s\to+\infty} g_i(q,s), & \text{если этот нижний предел существует,} \\ \omega & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Сначала покажем идею построения вычислимого представления R порядка L. Порядок R строим из блоков I_q, $q \in \mathbb{Q}$, таким образом, чтобы $R = \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} I_q \cong L$. Фиксируем некоторый элемент $t_q \in I_q$. На шаге s строим I_q, состоящий из $g_1(q,s) + g_2(q,s) + 1$ элементов, следующим образом. Пусть $a_l <_R \cdots <_R a_1$ и $b_1 <_R \cdots <_R b_r$ — все элементы I_q, лежащие соответственно *левее* и *правее* элемента t_q. *Слева* от t_q делаем следующее:

(i) если $l < g_1(q,s)$, то в I_q добавляем $g_1(q,s) - l$ новых элементов непосредственно слева от a_l (т.е. добавляем недостающее количество элементов);
(ii) если $l > g_1(q,s)$, то объявляем элементы $a_l, \ldots, a_{g_1(q,s)+1}$ *свободными* в порядке R и удаляем их из I_q (т.е. они остаются в порядке R, но они уже не привязаны к I_q);
(iii) если $l = g_1(q,s)$, то ничего не делаем.

Справа от t_q проводим аналогичную работу.

Ясно, что в пределе $I_q \cong [f_1(q)]^* + 1 + f_2(q)$. Однако в процессе такого построения могут появиться «лишние» элементы; не допустить их появления поможет правильная организация построения всех I_q. Фиксируем некоторую вычислимую нумерацию $\nu : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. На шаге s запускаем конструкцию блоков I_q только при $\nu(q) \leqslant s$. На шаге $s+1$ запускаем конструкцию I_{q_0} при $\nu(q_0) = s+1$ следующим образом. Выбираем такие соседние $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, что $\nu(q_1), \nu(q_2) \leqslant s$, $q_1 <_{\mathbb{Q}} q_0 <_{\mathbb{Q}} q_2$. Запускаем конструкцию I_{q_0} по описанной выше стратегии, выбрав при этом в качестве t_{q_0} либо наименьшее натуральное число, являющееся *свободным* элементом и лежащее между блоками I_{q_1} и I_{q_2}, либо еще не использованное натуральное число, если множество свободных элементов, лежащих между блоками I_{q_1} и I_{q_2}, пусто. Так как для каждого $q \in \mathbb{Q}$ элемент t_q никогда не становится свободным, то «лишних» элементов в пределе не будет. Другими словами, построенный вычислимый линейный порядок $R = \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} I_q$ является представлением порядка L.

Опишем теперь изменения в конструкции порядка R, чтобы все вычислимые самовложения R были тривиальными. Для этого нужно для всех $e \in \mathbb{N}$ выполнить требования вида

$$R_e : \varphi_e \text{ не является тривиальным самовложением } R.$$

Чтобы удовлетворить каждое такое требование в отдельности, нужно для каждого $e \in \mathbb{N}$ найти такой a_e, что $\varphi_e(a_e) \downarrow = b_e$, $\varphi_e(b_e) \downarrow = c_e$ и либо $a_e <_R b_e <_R c_e$, либо $c_e <_R b_e <_R a_e$. Если такого a_e не существует, то φ_e не может быть нетривиальным самовложением порядка R. Предположим для определенности, что $a_e <_R b_e <_R c_e$. Затем нужно конструкцию порядка R переопределить так, чтобы интервал $[b_e, c_e]_R$ был конечным, а интервал $[a_e, b_e]_R$ — бесконечным. Тогда φ_e также не может быть нетривиальным самовложением порядка R. Так как порядок L не содержит сильно η-схожего интервала, то, используя обычную технику конечного приоритета так же, как и в теореме 2.11, мы всегда это можем сделать. □

3.2. Гипотеза Кирстеда. Результаты в положительном направлении. Используя стандартную челночную конструкцию, легко показать, что если линейный порядок $\mathcal{L}$ имеет порядковый тип η, то каждая его вычислимая копия имеет нетривиальный вычислимый автоморфизм. С. Шварц дал характеризацию линейных порядков, имеющих в каждой вычислимой копии нетривиальный автоморфизм.

Теорема 3.3 (см. [53, 54]). *Каждая вычислимая копия вычислимого линейного порядка $\mathcal{L}$ имеет вычислимый нетривиальный автоморфизм тогда и только тогда, когда линейный порядок имеет интервал типа η.*

Исследования этого вопроса для η-схожих линейных порядков были начаты в работе Х. Кирстеда [44]. Он рассматривал частный случай, а именно, порядок типа $2 \cdot \eta$, для которого методом приоритета с бесконечными нарушениями построил копию, не имеющую нетривиальных Π^0_1-автоморфизмов.

Теорема 3.4 (см. [44]). *Существует вычислимый линейный порядок порядкового типа $2 \cdot \eta$, не имеющий нетривиальных Π^0_1-автоморфизмов.*

Следуя Х. Кирстеду (см. [44]), назовем автоморфизм f *достаточно* (fairly) *тривиальным*, если для каждого $x \in L$ найдется только конечное множество элементов между x и $f(x)$. Нетривиальный автоморфизм назовем *строго нетривиальным*, если он не является достаточно тривиальным. Работа Х. Кирстеда [44] заканчивается тремя гипотезами, основной из которых является следующая.

Гипотеза 3.5 (см. [44])**.** Каждая вычислимая копия вычислимого линейного порядка имеет строго нетривиальный Π^0_1-автоморфизм тогда и только тогда, когда порядок не содержит интервалов типа η.

Сам Х. Кирстед доказал (см. [44]), что эта гипотеза верна для порядка типа $2 \cdot \eta$. Позднее Р. Доуни и М. Мозес доказали, что гипотеза верна для дискретных линейных порядков.

Теорема 3.6 (см. [27])**.** *Каждый вычислимый дискретный порядок имеет вычислимую копию, не имеющую строго нетривиальных* Π^0_1*-самовложений.*

В недавней работе [38] Ч. Харрис, К. Ли и Б. Купер доказали справедливость гипотезы Кирстеда для η-схожих линейных порядков, заданных $\emptyset'$-предельно монотонными функциями.

Теорема 3.7 (см. [38])**.** *Пусть* $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *—* $\emptyset'$*-предельно монотонная функция и* $\mathcal{L} \cong \sum_{q \in \mathbb{Q}} F(q)$ *— линейный порядок, не имеющий бесконечных плотных интервалов. Тогда* $\mathcal{L}$ *имеет* Π^0_1*-жесткую вычислимую копию.*

Ч. Харрис, К. Ли и Б. Купер исследовали даже несколько более общий случай, рассмотрев не только класс Π^0_1-функций, но и любой такой класс функций, что графики функций лежащих в нем равномерно вычислимы относительно $\emptyset'$.

Определение 3.8. Для вычислимой функции $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ говорят, что $\{f(e, \cdot, s) \mid e, s \in \mathbb{N}\}$ является *восходящей* Δ^0_2*-равномерной аппроксимацией* (upwards uniform Δ^0_2-approximation), если для всех $x, e \in \mathbb{N}$ выполнено одно из следующих условий:

(1) предел $\lim\limits_{s \to \infty} f(e, x, s)$ конечен;

(2) $\liminf\limits_{s \to \infty} f(e, x, s) = \infty$.

Будем говорить, что f определяет класс частичных функций $\{f_e \mid e \in \mathbb{N}\}$, если для каждого e, $\mathrm{dom}(f_e) = \{x \mid$ предел $\lim\limits_{s \to \infty} f(e, x, s)$ существует$\}$. В этом случае класс функций $\{f_e \mid e \in \mathbb{N}\}$ называется *восходяще* Δ^0_2*-равномерно аппроксимируемым*. Ч. Харрис, К. Ли и Б. Купер показали (см. [38]), что существует такой класс, содержащий все Π^0_1-функции.

Предложение 3.9 (см. [38])**.** *Существует восходяще* Δ^0_2*-равномерно аппроксимируемый класс функций* $\mathcal{F}$*, содержащий класс всех (частичных)* Π^0_1*-функций.*

В [38] также доказано, что для линейного порядка $\mathcal{L} \cong \sum_{q \in \mathbb{Q}} F(q)$, не имеющего плотных интервалов, где $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ является $\emptyset'$-предельно монотонной, и для любого восходяще Δ^0_2-равномерно аппроксимируемого класса функций $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ имеет вычислимую $\mathcal{F}$-жесткую копию. Линейный порядок называется $\mathcal{F}$-жесткимб если он не имеет нетривиальных автоморфизмов, лежащих в $\mathcal{F}$.

Частичное решение проблемы Кирстеда, полученное в теореме 3.7, было обобщено Г. Ву и М. В. Зубковым (см. [56]); для этого они использовали обобщение $\emptyset'$-предельно монотонных функций, согласно определению 1.13 при $R = \{\zeta\}$.

Теорема 3.10 (см. [56])**.** *Гипотеза Кирстеда справедлива для всех линейных порядков вида* $\sum_{q \in \mathbb{Q}} F(q)$*, где* $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \cup \{\zeta\} \setminus \{0\}$ *—* $\emptyset'$*-предельно монотонная функция с множеством значений расширенным* ζ*.*

Основной интерес в данной теореме представляет то, что в рассматриваемом классе линейные порядки одновременно могут содержать и конечные блоки, и блоки типа ζ, тогда как Р. Доуни и М. Мозес доказали гипотезу для порядков, имеющих только блоки только типа ζ (см. [27]),

а Ч. Харрис, К. Ли и Б. Купер — для линейных порядков, имеющих только конечные блоки (см. [38]).

Этот подход авторами статьи обобщен на случай когда в линейном порядке, конденсация которых есть η, могут встречаться и конечные, и бесконечные блоки всех типов, т.е. и ζ, и ω, и ω^*.

Теорема 3.11. *Гипотеза Кирстеда справедлива для всех линейных порядков* $\mathcal{T} = \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$, *где* $G : \mathbb{Q} \to (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\zeta, \omega, \omega^*\}$ *— $\emptyset'$-предельно монотонная функция с множеством значений, расширенным* ζ, ω *и* ω^*, *согласно определению* 1.13 *при* $R = \{\zeta, \omega, \omega^*\}$.

Доказательство. В доказательстве мы следуем стратегии из работы Г. Ву и М. В. Зубкова (см. [56]) для конечных и ζ-блоков. Новая часть — стратегия для ω- и ω^*-блоков. Для построения искомого линейного порядка $\mathcal{T} = \langle T; <_{\mathcal{T}} \rangle$ используется обобщение конструкции из работы М. В. Зубкова и А. Н. Фролова [34] и частный случай конструкции из [35]. Кроме того, внесены некоторые изменения для взаимодействия с R-стратегией доказательства теоремы 3.10.

Линейный порядок строится в виде равномерно вычислимой последовательности $\{I_s(q)\}_{s\in\mathbb{N},q\in\mathbb{Q}}$ таких конечных линейных порядков, что $I(q) = \lim\limits_{s\to\infty} I_s(q)$ — равномерно вычислимый линейный порядок типа $G(q)$ и $\mathcal{T} = \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} I(q)$ — вычислимый линейный порядок типа $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$. Каждый интервал $I_s(q)$ имеет выделенный элемент $U(q)$ со следующими свойствами:

(1) $U(q)$ определяется на наименьшем шаге s_0, когда аппроксимация $I(q)$ не пуста;
(2) $U(q) \in I_s(q)$ для каждого $s > s_0$.

Кроме того, если $I_s(q)$ не пусто, то $d_s(q) \in \{l, r\}$ будет задавать направление конструкции для $I_s(q)$ влево или вправо, соответственно.

Так как G — расширенная $\emptyset'$-предельно монотонная функция, существует аппроксимация g функции G, удовлетворяющая условиям (1)–(3) теоремы 1.14. На шаге s гарантируем, что если $g(q, s)$ имеет конечное значение, то $I_s(q)$ содержит ровно $g(q, s)$ элементов. Когда $g(q, s)$ возрастает, добавляем новые элементы в $I(q)$ справа или слева $I(q)$, в зависимости от текущего направления конструкции для данного блока. Когда $g(q, s)$ убывает, удаляем соответствующее количество элементов из $I(q)$. (Отметим, что если элемент удаляется из какого-либо интервала, он позднее войдет в какой-нибудь новый интервал, и он позднее не может быть выброшен из этого (нового) интервала. Это гарантирует, что каждый элемент x лежит в $I(q)$ для некоторого q.) Если $g(q, s)$ имеет значение ζ, то начинаем конструкцию интервала типа ζ, добавляя новые элементы в $I(q)$ слева и справа.

Основное отличие от конструкции теоремы 3.10 заключается в изменении направления построения блока. Для этого используется последовательность множеств $\{CD_s\}_{s\in\mathbb{N}}$. Если $q \in CD_s$, то построение блока $I(q)$ начинается заново, и при этом направление конструкции для него меняется на противоположное. В таком случае, если $U(q)$ был самым левым (наименьшим) элементом $I_s(q)$, то он становится самым правым элементом (наибольшим) элементом $I_{s+1}(q)$, и наоборот. Последовательность $\{CD_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ определяется R-стратегией. Отметим здесь, что каждый элемент q, по построению, будет принадлежать не более чем конечному числу множеств CD_s.

В конструкции при добавлении нового элемента в T он выбирается как наименьшее, в стандартном порядке на натуральных числах, еще не лежащее в T. Другими словами, основным множеством порядка $\mathcal{T}$ будет все множество натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Кроме того, Z- и W-стратегии могут добавлять элементы в $I(q)$, что возможно на шаге s, если $g(q, s) = \zeta$. Эти стратегии добавляют новый элемент x достаточно далеко от $U(q)$. Это означает, что для каждого n существует лишь конечное число таких шагов s, что Z добавляет x в $I(q)$ на шаге s, и число элементов между x и $U(q)$, добавленных T-стратегией, меньше, чем n. В силу этого, если $G(q)$ конечно, то существует шаг s_0, после которого все элементы, добавляемые Z в $I_s(q)$, будут достаточно далеко от $U(q)$ и покинут этот блок позднее. Следовательно, размер $I(q)$ останется равным $G(q)$. Если $G(q) = \zeta$ ($G(q) = \omega$, $G(q) = \omega*$), то элементы, добавленные в $I(q)$ стратегией T, сформируют порядковый тип ζ (или ω, ω^*). В этом случае Z-стратегия (W-стратегия) добавляет только конечное число новых элементов между старыми, что не изменит порядковый тип. Другими словами, $I(q)$ все равно будет иметь тип ζ (или ω, ω^*).

Диагонализация автоморфизмов, имеющих нетривиальное действие на конечных блоках. Пусть f — восходящая Δ_2^0-равномерная аппроксимация класса $\mathcal{F}$. Рассмотрим (для фиксированного e) функцию $f(e,\cdot,\cdot)$ — аппроксимацию потенциального автоморфизма, имеющего нетривиальное действие на конечном блоке. Если соответствующая функция f_e действительно является автоморфизмом, имеющим нетривиальное действие на конечном блоке, то существуют такие q, q' и шаг s, что

(1) $f(e, I(q), s) \cap I(q) = \emptyset$;
(2) $f(e,\cdot,s)$ — изоморфизм между $I(q)$ и начальным или финальным сегментом $I(q')$;
(3) $U(q') > U(q)$ как натуральные числа.

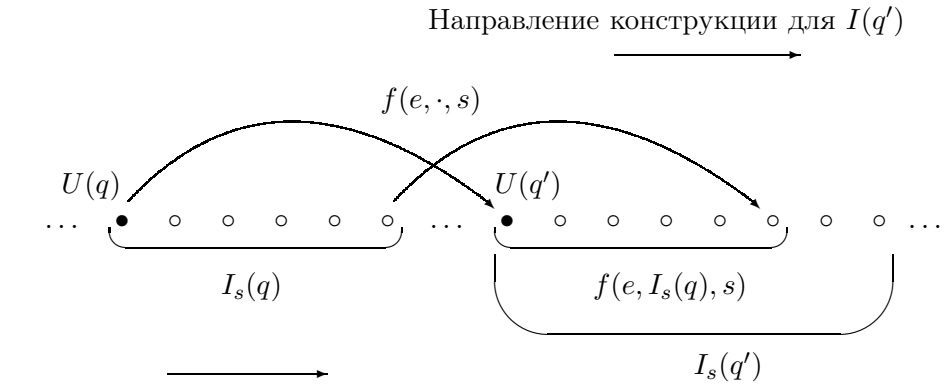

Рис. 1. f_e выглядит как автоморфизм

Мы можем требовать выполнения третьего условия, так как если f_e имеет нетривиальное действие на конечном блоке, то для подходящего числа итераций f_e на блоке $I(q)$, для которого выполняются условия (1)–(2), мы получим блок $I(q_1) = f_e^m(I(q))$ (для достаточно большого m), удовлетворяющий 1–3 (см. рис. 5).

Стратегия прозрачна: перечисляем q' в CD_s. Как отмечалось выше, это означает, что мы начинаем заново построение блока $I(q')$ и меняем направление конструкции этого блока.

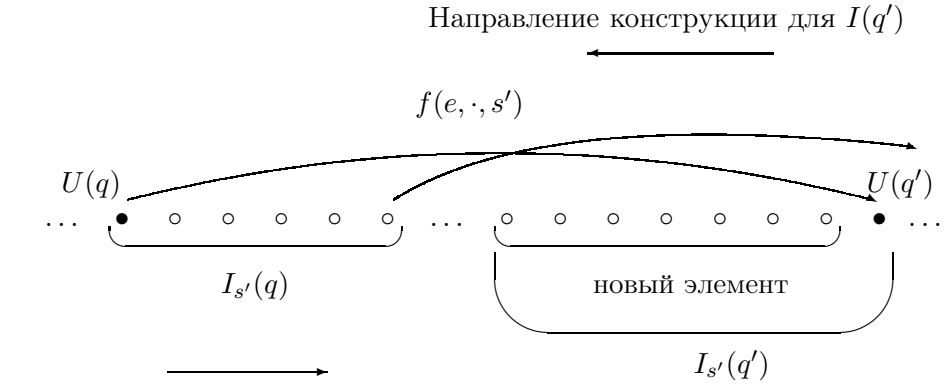

Рис. 2. Изменение направления конструкции

Следовательно, если $U(q')$ был левым крайним элементом блока $I_s(q')$, то он становится правым крайним элементом блока $I_{s+1}(q')$ и наоборот. Если аппроксимация функции f_e не меняется на блоке $I(q)$ после шага s, мы успешно провели диагонализацию, и f_e не является автоморфизмом. В противном случае повторяем стратегию.

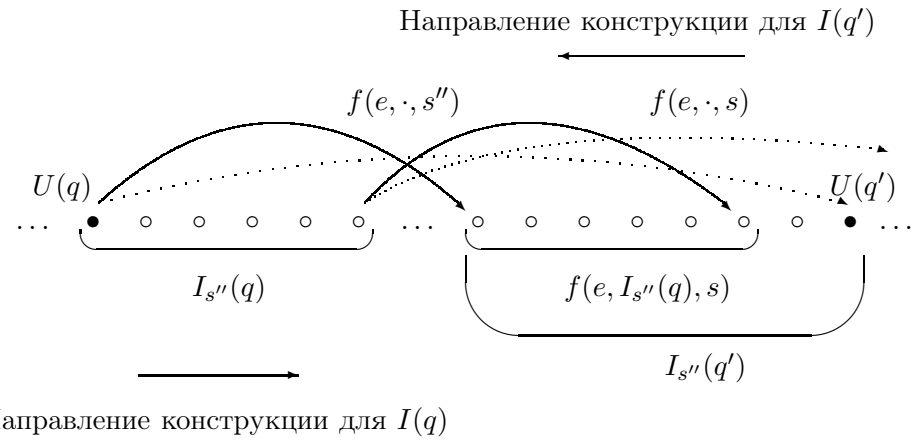

Рис. 3. f_e снова выглядит как автоморфизм

Существует две возможности: либо проведем успешную диагонализацию против автоморфизма f_e, либо будем возвращаться к ситуации как на рис. 1 бесконечно много раз.

Если f_e — всюду определенная функция, то реализуется первый вариант. Отметим только, что работа стратегии может нарушаться конечное число раз стратегиями с более высокими приоритетами. Сложность возникает, когда f_e не определена на $I(q)$; в этом случае наша стратегия может попытаться перечислять q' в CD_s на бесконечном множестве шагов. Это будет означать, что существует бесконечное число таких шагов s, что $f(e,U(q),s)=U(q')$ (как на рис. 1) и существует бесконечное число таких шагов s, что $f(e,U(q),s)\neq U(q')$ (как на рис. 3). Предположение, что $\mathcal{F}$ — восходяще Δ^0_2-равномерно аппроксимируемый класс, делает такую ситуацию невозможной. Условие (3) влечет, что q' может быть перечислено в CD_s только конечным множеством стратегий и, в силу вышесказанного, только конечное число раз.

Диагонализация автоморфизмов, имеющих нетривиальное действие на бесконечных блоках типа ζ. Как и в предыдущих случаях, мы будем рассматривать функцию $f(e,\cdot,\cdot)$ — аппроксимацию потенциального автоморфизма, имеющего нетривиальное действие на бесконечном блоке типа ζ. Если соответствующая функция f_e в самом деле является автоморфизмом, имеющим нетривиальное действие на бесконечном блоке типа ζ, то существует такое q_i, что $I(q_i)$ — блок типа ζ и f_e имеет нетривиальное действие на $I(q_i)$. Каждая Z_n-стратегия такова, что $n=\langle e,i,k\rangle$, работает с q_i и $f(e,\cdot,\cdot)$ и, следовательно, существует бесконечно много стратегий, работающих с q_i и $f(e,\cdot,\cdot)$. Цель каждой такой стратегии — вынудить изменить значение аппроксимации автоморфизма на элементе $U(q_i)$. При сделанных предположениях найдется такой достаточно большой интервал $[x,y]_s\subset I_s(q_i)$, что (см. рис. 4)

(1) $[x,y]_s$ содержит $U(q_i)$, по крайней мере n элементов слева от $U(q_i)$ и по крайней мере n элементов справа от $U(q_i)$ (эти элементы добавлены T-стратегией);
(2) образ $[x,y]_s$ относительно $f(e,\cdot,s)$ является интервалом $I_s(q')$ для некоторого $q'\neq q_i$. В этом случае найдем такие элементы fl_n и fr_n такие, что

$$f(e,[x,y]_s,s)=[fl_n,fr_n]_s;$$

(3) $f(e,\cdot,s)$ — изоморфизм между $[x,y]_s$ и $f(e,[x,y]_s,s)$;
(4) $f(e,[x,y]_s,s)$ содержит $U(q')$, по крайней мере n элементов слева от $U(q')$ и по крайней мере n справа от $U(q')$ (эти элементы добавлены T-стратегией).

Тогда мы меняем расстояние между fl_n и fr_n (увеличиваем на 1) добавлением нового элемента непосредственно слева от fr_n (см. рис. 5).

Ждем такой шаг $s'>s$, что образ $[x,y]_{s'}$ относительно $f(e,\cdot,s')$ будет интервалом $I_s(q')$ и функция $f(e,\cdot,s')$ будет изоморфизмом линейных порядков на этих интервалах (см. рис. 6).

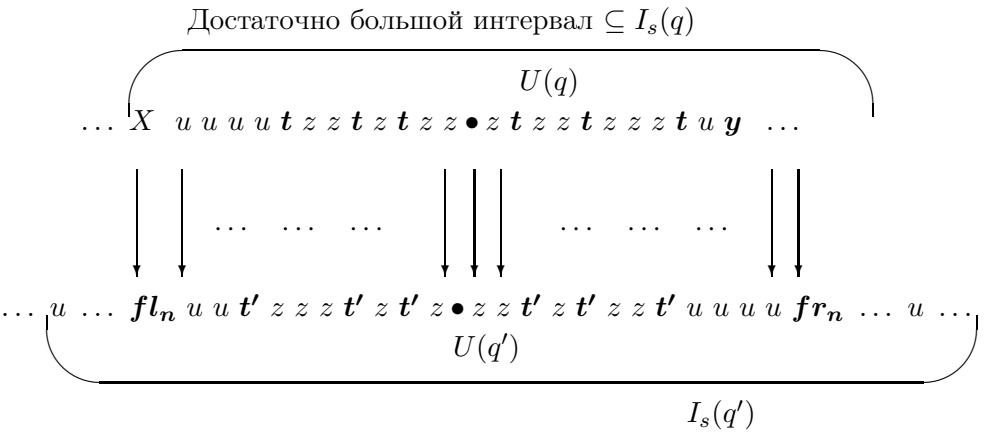

Рис. 4. f_e выглядит как автоморфизм

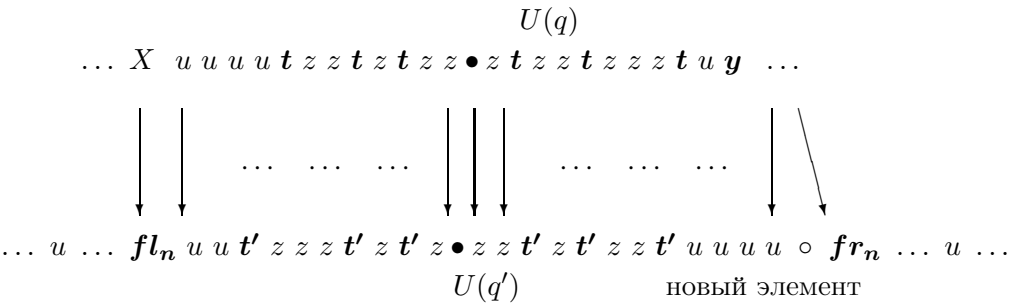

Рис. 5. Диагонализация функции f_e

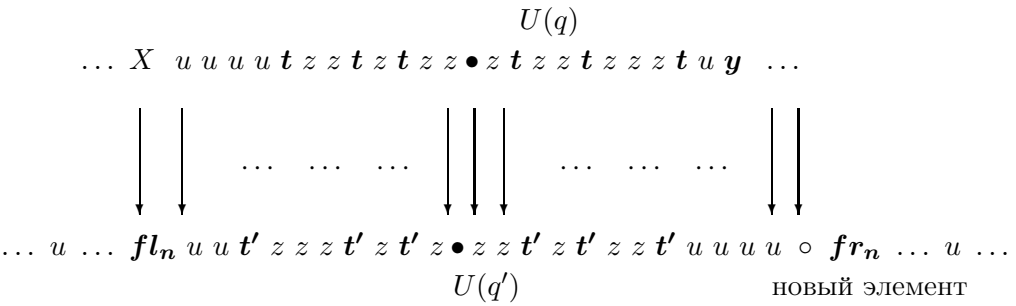

Рис. 6. f_e снова выглядит как автоморфизм

Если $f(e, [x, y]_{s'}, s')$ не является интервалом $[fl_n, fr_n]_{s'}$, то мы вынудили необходимые изменения на элементе $U(q_i)$, и данная стратегия успешно завершается. В противном случае мы изменяем расстояние между x и y, делая его равным расстоянию между fl_n и fr_n, добавлением нового элемента непосредственно слева от y (см. рис. 7).

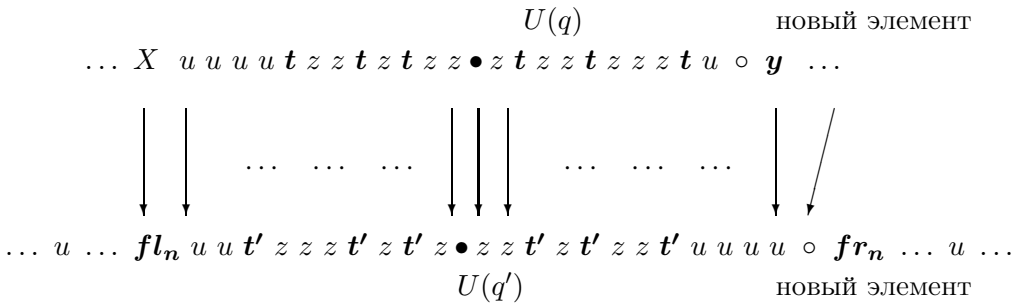

Рис. 7. Вторая попытка диагонализации

Снова ждем такой шаг $s'' > s'$, что образ $[x, y]_{s''}$ относительно $f(e, \cdot, s'')$ является интервалом $I_s(q')$ и $f(e, \cdot, s'')$ — изоморфизм между ними. Если мы вынудили изменения на $U(q_i)$, то стратегия успешно завершается. Если таких изменений не произошло, то полагаем $f(e, [x, y]_{s''}, s'') = [fl_n, fr_n]_{s''}$ как на рис. 8. Повторяем нашу стратегию.

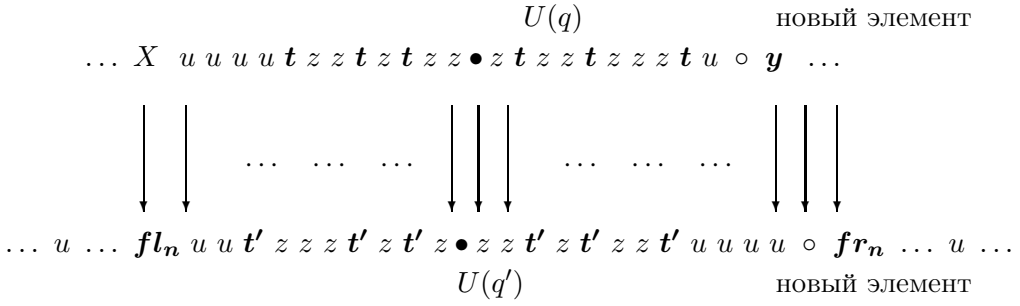

Рис. 8. Восстановились предыдущие значения

Предположим, что работа стратегии Z_n не заканчивается успешно за конечное число шагов, т.е. существует бесконечно много таких шагов s, что $f(e, x, s) = fl_n$ и $f(e, y, s) = fr_n$, и существует бесконечно много таких шагов s, что значение аппроксимации в x или в y меняется. Таким, образом мы имеем противоречие с предположением, что $\mathcal{F}$ — восходяще Δ^0_2-равномерно аппроксимируемый класс.

Работа Z_n может быть нарушена T-стратегией. Пусть $n = \langle e, i, k\rangle$. Такое нарушение возможно только если существует такой $s > n$, что $g(q_i, s) \neq \zeta$. Если $I(q_i)$ — в самом деле бесконечный блок, работа только конечного числа стратегий Z_n, работающих с этим блоком, может быть нарушена T-стратегией.

Кроме того, стратегия Z_n может инициализироваться стратегией $Z_{n'}$ при $n' < n$. Отметим, что каждая $Z_{n'}$-стратегия может инициализировать Z_n только конечное число раз.

Диагонализация автоморфизмов, имеющих нетривиальное действие на бесконечных блоках типа ω и ω^*. Снова будем рассматривать функцию $f(e, \cdot, \cdot)$ — аппроксимацию потенциального автоморфизма, имеющего нетривиальное действие на бесконечном блоке типа ω. Случай ω^* рассматривается двойственным образом. Если соответствующая функция f_e в самом деле

является автоморфизмом, имеющим нетривиальное действие на бесконечном блоке типа ω, то существует такое q_i, что $I(q_i)$ — блок типа ω и f_e имеет нетривиальное действие на $I(q_i)$. Идея стратегии в этом случае аналогична идеи стратегии для блоков типа ζ; при этом ситуация даже упрощается, так как в данном случае наименьший элемент интервала $I(q_i)$ под действием f_e должен отображаться в наименьший элемент интервала $f_e(I(q_i))$. Каждая такая W_n-стратегия, что $n = \langle e, i, k\rangle$, работает с q_i и $f(e, \cdot, \cdot)$; следовательно, существует бесконечно много стратегий, работающих с q_i и $f(e, \cdot, \cdot)$. Цель каждой такой стратегии — вынудить изменить значение аппроксимации автоморфизма на элементе $U(q_i)$. При сделанных предположениях найдется такой достаточно большой интервал $[x, y]_s \subset I_s(q_i)$, что (см. рис. 9)

(1) x — наименьший в $I(q_i)$;
(2) $[x, y]_s$ содержит $U(q_i)$ и по крайней мере n элементов, добавленных T-стратегией;
(3) образ $[x, y]_s$ относительно $f(e, \cdot, s)$ является интервалом $I_s(q')$ для некоторого $q' \neq q_i$ и $f(e, x, s)$ — наименьший элемент в $I_s(q')$. Тогда выберем такие элементы fl_n и fr_n, что

$$f(e, [x, y]_s, s) = [fl_n, fr_n]_s;$$

(4) $f(e, \cdot, s)$ — изоморфизм между $[x, y]_s$ и $[fl_n, fr_n]$;
(5) $f(e, [x, y]_s, s)$ содержит $I_s(q')$ и по крайней мере n элементов, добавленных T-стратегией.

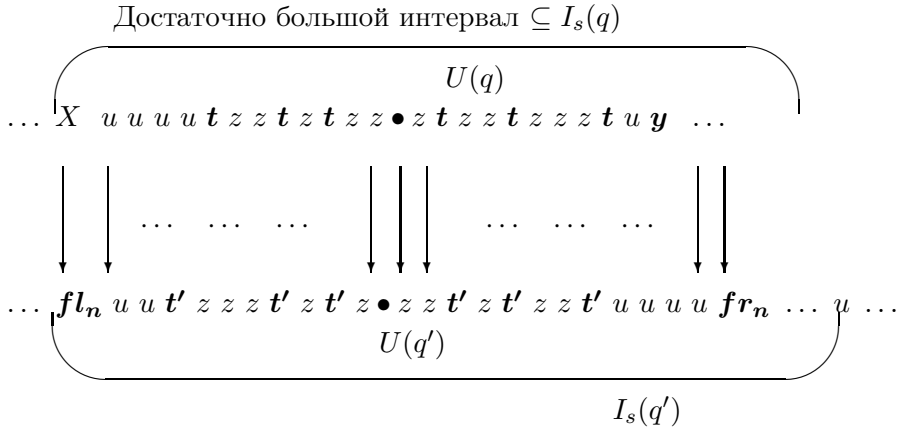

Рис. 9. f_e выглядит как автоморфизм

Далее работа стратегии и верификация повторяют работу и верификациию Z-стратегии. Меняем расстояние между fl_n и fr_n (увеличиваем на 1) добавлением нового элемента непосредственно слева от fr_n (см. рис. 5). Ждем такой шаг $s' > s$, что образ $[x, y]_{s'}$ относительно $f(e, \cdot, s')$ будет начальным интервалом $I_s(q')$, а функция $f(e, \cdot, s')$ будет изоморфизмом линейных порядков на этих интервалах (см. рис. 6). Если $f(e, [x, y]_{s'}, s')$ не является начальным интервалом $I_s(q')$, то мы вынудили необходимые изменения на элементе $U(q_i)$, и данная стратегия успешно завершается. В противном случае изменяем расстояние между x и y, делая его равным расстоянию между fl_n и fr_n, добавлением нового элемента непосредственно слева от y (см. рис. 7). Снова ждем такой шаг $s'' > s'$, что образ $[x, y]_{s''}$ относительно $f(e, \cdot, s'')$ является начальным интервалом $I_s(q')$ и $f(e, \cdot, s'')$ — изоморфизм между ними. Если мы вынудили изменения на $U(q_i)$, то стратегия успешно завершается. Если таких изменений не произошло, то полагаем $f(e, [x, y]_{s''}, s'') = [fl_n, fr_n]_{s''}$, как на рис. 8. Повторяем стратегию.

Предположим, что работа стратегии W_n не заканчивается успешно за конечное число шагов, т.е. существует бесконечно много таких шагов s, что $f(e, y, s) = fr_n$, и существует бесконечно много таких шагов s, что $f(e, y, s) \neq fr_n$. Тогда имеем противоречие с предположением, что $\mathcal{F}$ — восходяще Δ^0_2-равномерно аппроксимируемый класс.

Работа W_n может быть нарушена T- или Z-стратегией. Пусть $n = \langle e, i, k\rangle$. Такое нарушение возможно только в том случае, если существует такой $s > n$, что $g(q_i, s) \neq \omega$. Если $I(q_i)$ —

в самом деле бесконечный блок, то только конечное число стратегий W_n, работающих с этим блоком, может быть нарушено другими стратегиями.

Кроме того, стратегия W_n может инициализироваться стратегией $W_{n'}$ при $n' < n$. Отметим, что каждая $W_{n'}$-стратегия может инициализировать W_n только конечное число раз.

Общая стратегия. Если мы успешно завершили стратегию R_e на q, то либо $I(q)$ — не одноэлементный блок, и наша диагонализация завершилась успешно, либо $I(q)$ — одноэлементный блок, и нам необходимо выбрать нового свидетеля. Мы делаем это следующим образом. Пусть для каждого R_e имеем конечное число свидетелей. В процессе построения подсчитываем число таких шагов, что g равно 1 для каждого свидетеля. Если на некотором шаге это число растет, то мы добавляем нового свидетеля для R_e. Если q — свидетель и $I(q)$ — не одноэлементный блок, то существует такой шаг s_0, что значение g на q будет строго больше 1. После этого шага не будем добавлять новых свидетелей для R_e. □

3.3. Гипотеза Кирстеда. Контрпример. Таким образом, гипотеза Кирстеда доказана для очень широкого класса линейных порядков, однако в общем случае она не верна. Недавно М. В. Зубков и К. М. Нг (см. [50]) доказали следующую теорему.

Теорема 3.12 (см. [50]). *Существует такая функция $G : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \cup \{\zeta\} \setminus \{0\}$, являющаяся $\emptyset'$-предельно монотонной относительно клиниевской системы обозначений O, что линейный порядок $\mathcal{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} (G(q))$ не имеет интервалов типа η и каждая вычислимая копия $\mathcal{L}$ имеет сильно нетривиальный Π^0_1-автоморфизм.*

Таким образом, естественным образом встает вопрос, для каких классов линейных порядков верна гипотеза Кирстеда. В частности, верна ли она для η-схожих линейных порядков? В этом направлении М. В. Зубковым и К. М. Нг и был получен следующий результат, показывающий, что конструкция, дающая ответ на этот вопрос, должна быть сложной.

Теорема 3.13 (см. [50]). *Существует η-схожий вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, не содержащий интервалов типа η и такой, что каждый вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}'$, Δ^0_2-изоморфный $\mathcal{L}$, имеет строго нетривиальный Π^0_1-автоморфизм.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алаев П. Е., Тербер Дж., Фролов А. Н.* Вычислимость на линейных порядках, обогащенных предикатами// Алгебра и логика. — 2009. — *48*, № 5. — С. 549–563.
2. *Арсланов М. М.* Иерархия Ершова. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2007.
3. *Зубков М. В.* Достаточные условия существования $\mathbf{0}'$-предельно монотонных функций для вычислимых η-схожих линейных порядков// Сиб. мат. ж. — 2017. — *58*, № 1. — С. 107–121.
4. *Зубков М. В.* Вычислимые линейные порядки и η-представимость/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2009.
5. *Зубков М. В.* Сильно η-представимые степени и предельно монотонные функции// Алгебра и логика. — 2011. — *50*, № 4. — С. 504–520.
6. *Зубков М. В.* Одна теорема о сильно η-представимых множествах// Изв. вузов. Мат. — 2009. — № 7. — С. 77–81.
7. *Зубков М. В.* О начальных сегментах вычислимых линейных порядков с дополнительными вычислимыми предикатами// Алгебра и логика. — 2009. — *48*, № 5. — С. 564-579.
8. *Зубков М. В., Фролов А. Н.* Спектр отношения соседства// в печати.
9. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972.
10. *Фролов А. Н.* Вычислимая представимость счетных линейных порядков// Итоги науки и техн. Совр. мат. приложения. Темат. обзоры. — 2018. — *158*.
11. *Фролов А. Н.* Δ^0_2-Копии линейных порядков// Алгебра и логика. — 2006. — *45*, № 3. — С. 354–370.
12. *Фролов А. Н.* Линейные порядки низкой степени// Сиб. мат. ж. — 2010. — *51*, № 5. — С. 1147–1162.
13. *Фролов А. Н.* Представления отношения соседства вычислимого линейного порядка// Изв. вузов. Мат. — 2010. — № 7. — С. 73–85.
14. *Фролов А. Н.* Проблемы Розенштейна// Тр. Междунар. науч. конф. «Вычислимость и модели», 30 августа–1 сентября 2009, Усть-Каменогорск, ВКГТУ. — 2010. — С. 103–114.

15. *Фролов А. Н.* Ранги η-функций η-схожих линейных порядков// Изв. вузов. Мат. — 2012. — № 3. — С. 96–99.
16. *Хисамиев Н. Г.* Критерий конструктивизируемости прямой суммы циклических p-групп// Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат. — 1981. — *98*, № 1. — С. 51–55.
17. *Chubb J., Frolov A., Harizanov V.* Degree spectra of the successor relation of computable linear orderings// Arch. Math. Logic. — 2009. — *48*, № 1. — С. 7–13.
18. *Church A.* The constructive second order number class// Bull. Am. Math. Soc. — 1938. — *44*. — С. 224–232.
19. *Church A., Kleene S. C.* Formal definitions in the theory of ordinal numbers// Fund. Math. — 1937. — *28*. — С. 224–232.
20. *Coles R. J., Downey R., Khoussainov B.* On initial segments of computable linear orders// Order. — 1997/98. — *14*. — С. 107–124.
21. *Downey R. G.* Computability Theory and Linear Orderings// в кн.: *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B.* (eds.). Handbook of Recursive Mathematics. Vol. 2/ Stud. Logic Found. Math. — Amsterdam: Elsevier, 1998. — *139*. — С. 823–976.
22. *Downey R. G., Jockusch C. G.* Every low Boolean algebra is isomorphic to a recursive one// Proc. Am. Math. Soc. — 1994. — *122*, № 3. — С. 871–880.
23. *Downey R. G., Kach A. M., Turetsky D.* Limitwise monotonic functions and their applications// Proc. 11 Asian Logic Conf. — 2012. — С. 59–85.
24. *Downey R. G., Kastermans B., Lempp S.* On computable self-embeddings of computable linear orderings// J. Symb. Logic. — 2009. — *74*, № 4. — С. 1352–1366.
25. *Downey R., Lempp S., Wu G.* On the complexity of the successivity relation in computable linear orderings// J. Math. Logic. — 2010. — *83*, № 10. — С. 83–99.
26. *Downey R., Lempp S., Wu G.* Corrigendum: "On the complexity of the successivity relation in computable linear orderings"// J. Math. Logic. — 2017. — *17*, № 2. — 1792002-1–1792002-4.
27. *Downey R. G., Moses M. F.* On choice sets and strongly nontrivial self-embeddings of recursive linear orders// Math. Logic Q. — 1989. — *35*. — С. 237–246.
28. *Downey R., Moses M.* Recursive linear orders with incomplete successivities// Trans. Am. Math. Soc. — 1991. — *326*. — С. 653–668.
29. *Dushnik B., Miller E. W.* Partially ordered sets// Am. J. Math. — 1941. — *63*. — С. 600–610.
30. *Feiner L. J.* Hierarchies of Boolean algebras// J. Symb. Logic. — 1970. — *35*. — С. 365–374.
31. *Fellner S.* Recursive and finite axiomatizability of linear orderings/ Ph.D. thesis. — New Brunswick, New Jersey: Rutgers Univ., 1976.
32. *Frolov A. N.* Low linear orderings// J. Log. Comp. — 2012. — *22*, № 4. — С. 745–754.
33. *Frolov A.* Scattered linear orderings with no computable presentation// Lobachevskii J. Math. — 2014. — *35*, № 1. — С. 19–22.
34. *Frolov A. N., Zubkov M. V.* Increasing η-representable degrees// Math. Logic Q. — 2009. — *55*. — С. 633–636.
35. *Frolov A. N. Zubkov M. V.* Limitwise monotonic functions relative to the Kleene's ordinal notation system// Lobachevskii J. Math. — 2014. — *35*. — С. 295–301.
36. *Harizanov V.* Degree spectrum of a recursive relation on a recursive structure// Ph.D. thesis. — Madison: Univ. of Wisconsin: 1987.
37. *Harris K.* η-Representation of sets and degrees// J. Symb. Logic. — 20018. — *73*. — С. 1097–1121.
38. *Harris C. M., Lee K. I., Cooper S. B.* Automorphisms of η-like computable linear orderings and Kierstead's conjecture// Math. Logic Q. — 2016. — *62*, № 6. — С. 481–506.
39. *Hirshfeldt D.* Degree spectra of relations on computable structures in the presence of Δ^0_2 isomorphisms// J. Symb. Logic. — 2002. — *67*. — С. 697–720.
40. *Jockusch C. G., Soare R. I.* Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings// Ann. Pure Appl. Logic. — 1991. — *52*. — С. 39–61.
41. *Kach A. M.* Computable shuffle sums of ordinals// Arch. Math. Logic. — 2008. — *47*, № 3. — С. 211–219.
42. *Kach A., Montalbán A.* Cuts of linear orders// Order. — 2011. — *28*. — С. 593–600.
43. *Kach A. M., Turetsky D.* Limitwise monotonic fuctions, sets and degrees on computable domains// J. Symb. Logic. — 2010. — *75*. — С. 131–154.
44. *Kierstead H. A.* On Π^0_1-automorphisms of recursive linear orders// J. Symb. Logic. — 1987. — *52*. — С. 681–688.
45. *Khisamiev N. G.* Constructive abelian groups// в кн.: *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B.* (eds.). Handbook of Recursive Mathematics. Vol. 2/ Stud. Logic Found. Math. — Amsterdam: Elsevier, 1998. — *139*. — С. 1177–1231.

46. *Kleene S. C.* On notation for ordinal numbers// J. Symb. Logic. — 1938. — *3*. — С. 150–155.
47. *Lerman M.* On recursive linear orderings// Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1981. — *859*. — С. 132–142.
48. *Lerman M., Rosenstein J. R.* Recursive linear orderings// Proc. Logic Symp. Patras, Greece, August 18-22, 1980/ *G. Metakides* (ed.). — Stud. Logic Found. Math. — 1982. — *109*. — С. 123–136.
49. *Moses M.* The block relation in computable linear orders// Notre Dame J. Formal Logic. — 2011. — *52*, № 3. — С. 289–305.
50. *Ng K. M., Zubkov M.* On the Kierstead conjecture// в печати.
51. *Rosenstein J. G.* Linear orderings/ Pure Appl. Math. — New York–London: Academic Press, 1982. — *98*.
52. *Rosenstein J. G.* Recursive linear orderings// Orders: Description and Roles/ Proc. Conf. "Ordered Sets Applications," l'Arbresle (France), 1982. — Ann. Discr. Math. — Amsterdam: North-Holland, 1984. — *23*. — С. 465–475.
53. *Schwarz S. T.* Quotient lattices, index sets, and recursive linear orderings/ Ph.D. thesis. — Univ. of Chicago, 1982.
54. *Schwarz S. T.* Recursive automorphisms of recursive linear orderings// Ann. Pure Appl. Logic. — 1984. — *26*. — С. 69–73.
55. *Soare R. I.* Recursively enumerable sets and degrees. — Heidelberg: Springer-Verlag. — 1987.
56. *Wu G., Zubkov M.* The Kierstead's conjecture and limitwise monotonic functions// Ann. Pure Appl. Logic. — 2018. — *169*, № 6. — С. 467–486.
57. *Zubkov M.* On η-representable sets// Bull. Symb. Logic. — 2009. — *15*. — С. 292–293.

М. В. Зубков
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: maxim.zubkov@kpfu.ru

А. Н. Фролов
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: a.frolov.kpfu@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 157 (2018). С. 106–134

УДК 510.5, 512.565.2

ПРЕДПОЛНЫЕ НУМЕРАЦИИ

© 2018 г. **В. Л. СЕЛИВАНОВ**

Аннотация. В обзоре обсуждается теория предполных нумераций, которые часто встречаются в ряде разделов теории вычислимости. Предполные нумерации тесно связаны с различными вариантами теоремы о неподвижной точке, играющей важную методологическую роль. В ряде случаев этот подход позволяет заменить громоздкие доказательства, связанные с так называемым методом приоритета, изящными и простыми применениями этой теоремы. В некотором смысле статья охватывает часть теории вычислимости, в которой можно обойтись элементарными методами.

***Ключевые слова*:** нумерация, предполная нумерация, полная нумерация, универсальность, сводимость, иерархия, индексное множество.

***AMS Subject Classification*:** 03D45, 03C57

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Нумерации естественно появляются в ряде разделов алгебры, логики и теории вычислимости. Они возникают при рассмотрении счетного множества объектов, заданных вычислимым множеством «имен». Взяв вычислимую биекцию между множеством всех натуральных чисел и множеством всех имен, получим нумерацию множества всех рассматриваемых объектов. Типичные примеры: нумерация Гёделя формул конечной сигнатуры по модулю эквивалентности в данной теории, нумерация Клини всех вычислимых частичных функций, нумерация конечно определенной группы, индуцированная нумерацией термов. Изучение связи между объектом и его именами (т.е. номерами), в частности (не)вычислимости естественных отношений между объектами, оказывается интересным, полезным, и тесно связанным с теорией вычислимости, теорией моделей и их приложениями.

Заметим, что нумерации не исчерпывают класс математических структур, моделирующих «теорию имен». Например, при изучении вычислений с ограниченными ресурсами в качестве

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-11-00028).

имен естественнее брать не натуральные числа, а слова в конечном алфавите, а в дескриптивной теории множеств и теории вычислимости типа 2 — бесконечные слова в конечном или счетном алфавите (см. [92, 93]). Последний пример, играющий важную роль в вычислимом анализе, будет кратко затронут ниже. Были даже попытки построения общей «теории имен», но для целей данной работы такая общность является излишней.

Нумерации являются новым (по сравнению с алгебраическими и топологическими структурами) типом математических структур, поэтому естественна попытка построить общую теорию нумераций. По-видимому, впервые эта задача сформулирована А. Н. Колмогоровым (см. [90]), ряд известных математиков (включая В. А. Успенского, Х. Роджерса и А. Лахлана) приняли участие в ее решении. Особенно систематично работали в этой области А. И. Мальцев, Ю. Л. Ершов и их последователи в Новосибирске.

Хотя теория нумераций пока, по-видимому, не догнала алгебру и топологию по степени влияния на математику и приложения, некоторые ее разделы уже хорошо развиты, интересны и полезны. Примером является теория предполных нумераций, инициированная А. И. Мальцевым и Ю. Л. Ершовым и разрабатываемая рядом других математиков. Начальная стадия ее развития подытожена в обзорах [12, 19, 48] и монографиях [13, 20].

С того времени получено немало новых результатов. Целью данной работы является дать обзор теории предполных нумераций. Он является обновленной русскоязычной версией обзора [76, 80], вышедшего на английском языке в труднодоступных изданиях. Хотя мы пытаемся упомянуть все существенные результаты теории начиная с ее зарождения, мы не обсуждаем ее историю до книги [13] и просто даем для таких результатов ссылку на эту книгу. Для результатов, не вошедших в [13], стараемся дать ссылку на первоисточник. Такой стиль приводит к тому, что частота фамилии в списке литературы не обязательно прямо пропорциональна степени влияния соответствующего автора на развитие теории.

Напомнив некоторые сведения и обозначения в следующем разделе, в разделах 3–6 приведем базовые факты о предполных нумерациях и о некоторых их подклассах. Далее рассмотрим применения изложенной теории к теории иерархий (раздел 7), к индексным множествам (разделы 8–10) и к структурам степеней неразрешимости (разделы 11, 12). Доказательства не приводим, поскольку они имеются в цитированных источниках. Полные доказательства (а также много дополнительной информации) имеются в неопубликованной рукописи [75], файл которой может быть предоставлен по запросу по электронной почте. Доказательства часто используют подходящий вариант теоремы о неподвижной точке и технически просты.

2. Обозначения и вспомогательные сведения

Мощность множества S обозначаем через $|S|$. Символом ω обозначаем множество всех неотрицательных целых чисел. Для $k < \omega$ множество $\{0, \dots, k-1\}$ отождествляем с k. Области определения и значений функции f обозначаем соответственно как $\mathrm{dom}(f)$ и $\mathrm{rng}(f)$. Если не оговорено противное, под (частичной) функцией понимаем (частичную) функцию из ω в ω, а под множеством — подмножество множества ω. Рассматривая произвольные множества, мы иногда говорим о них как об *абстрактных множествах*). Для частичной функции ψ запись $\psi(x)\downarrow$ (соответственно $\psi(x)\uparrow$) означает $x \in \mathrm{dom}(\psi)$ (соответственно $x \notin \mathrm{dom}(\psi)$).

Мы используем без напоминания стандартную терминологию и обозначения из теории вычислимости (см. [73, 86]).

Пусть $(O; <_O)$ — клиниевская система ординальных обозначений (см. [73]). Как обычно, $|a|_O$ — вычислимый ординал с клиниевским обозначением $a \in O$. Пусть Σ^0_n, Π^0_n — классы арифметической иерархии. Множество A называем Σ^0_n-*трудным*, если любое Σ^0_n-множество m-сводится к A, и Σ^0_n-*полным*, если оно Σ^0_n-трудное и принадлежит Σ^0_n. Два последних понятия применимы и для других классов множеств.

Под *нумерацией* понимаем функцию ν, у которой $\mathrm{dom}(\nu) = \omega$, а под *нумерацией абстрактного множества* S — нумерацию ν с $\mathrm{rng}(\nu) = S$. Через φ и π обозначаем стандартные нумерации всех вычислимых частичных (в.ч.) функций и вычислимо перечислимых (в.п.) множеств соответственно (введенное А. И. Мальцевым нестандартное обозначение π имеет то преимущество, что

отвечает стремлению обозначать нумерации малыми греческими буквами). Следуя А. И. Мальцеву, φ и π называем соответственно нумерациями Клини и Поста.

Любой нумерации ν можно поставить в соответствие отношение эквивалентности $\mathrm{Ker}(\nu) = \{(x,y) \mid \nu x = \nu y\}$ на ω, а любому отношению эквивалентности η на ω — нумерацию ν_η, определенную соотношением $\nu_\eta(x) = \{y \mid (x,y) \in \eta\}$. Нумерация ν *позитивна*, если отношение $\mathrm{Ker}(\nu)$ вычислимо перечислимо. Нумерация ν *нетривиальна*, если ее область значений содержит хотя бы два элемента. Под *ν-индексным множеством* множества $S \subseteq \mathrm{rng}(\nu)$ понимаем прообраз $\nu^{-1}(S)$. Множество S называем *сильно ν-вычислимо перечислимым*, если $\nu^{-1}(S)$ вычислимо перечислимо, и *ν-вычислимым*, если $S = \nu(W)$ для некоторого в.п. множества W.

Поставим в соответствие любым нумерациям μ, ν и ν_k $(k < \omega)$ нумерации $\mu \oplus \nu$, $\mu \otimes \nu$ и $\bigoplus\limits_k \nu_k$, называемые соответственно *суммой μ и ν*, *произведением μ и ν* и *бесконечной суммой ν_k* $(k < \omega)$ и определяемые соотношениями

$$(\mu \oplus \nu)2n = \mu n, \quad (\mu \oplus \nu)(2n+1) = \nu n, \quad (\mu \otimes \nu)\langle x, y\rangle = (\mu x, \nu y), \quad \Big(\bigoplus_k \nu_k\Big)\langle x, y\rangle = \nu_x(y).$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартная вычислимая биекция между $\omega \times \omega$ и ω; аналогично обозначаем кодирование и более длинных кортежей. Введенные операции применимы и к множеством (посредством отождествления множеств с характеристическими функциями, которые можно считать нумерациями $\nu : \omega \to \{0,1\}$). Например, $A \oplus B$ — сочленение множеств A и B, а $K = \bigoplus\limits_k \pi_k = \{\langle x, y\rangle \mid y \in \pi_x\}$ — стандартное креативное множество. Введенные операции применимы также к частичным функциям (их можно определить, отождествляя частичную функцию ψ с нумерацией $\psi : \omega \to \omega \cup \{\perp\}$, где $\perp$ — новый элемент, для которого $\psi(x) = \perp$ в точности тогда, когда $\psi(x) \uparrow$). Например, $\upsilon = \bigoplus\limits_k \varphi_k$ — стандартная универсальная в.ч. функция. Пусть γ — нумерация, связанная с наименьшим отношением эквивалентности на ω, содержащим график функции υ. Эта нумерация нетривиальна и позитивна (см. [13]).

Напомним некоторые отношения между нумерациями μ и ν. Нумерация μ *сводится* к ν (обозначение $\mu \leqslant \nu$), если $\mu = \nu \circ f$ для подходящей вычислимой функции f, и μ *эквивалентна* ν $(\mu \equiv \nu)$, если $\mu \leqslant \nu$ и $\nu \leqslant \mu$. В случае инъективности входящих в определения функций соответствующие отношения обозначаются соответственно $\leqslant_1$ и $\equiv_1$. Заметим, что $\leqslant$ и $\leqslant_1$ — предпорядки, которые в случае множеств совпадают соответственно с отношениями m- и 1-сводимости. Обобщение теоремы Майхилла показывает, что $\mu \equiv_1 \nu$ в точности тогда, когда нумерации μ и ν вычислимо изоморфны (т.е. $\mu = \nu \circ f$ для некоторой вычислимой перестановки f).

Понятия предыдущего абзаца не применимы к нумерациям, области значений которых несравнимы по включению, так что имеет смысл рассмотреть их ослабленные версии. Функция $f : \mathrm{rng}(\mu) \to \mathrm{rng}(\nu)$ называется *морфизмом из μ в ν* $(f : \mu \to \nu)$, если $f \circ \mu \leqslant \nu$. Заметим, что нумерации и морфизмы образуют категорию, в которой $\mu \oplus \nu$ (для μ и ν с непересекающимися областями значений) и $\mu \otimes \nu$ являются соответственно копроизведением и произведением объектов μ и ν. Назовем μ и ν *c-эквивалентными* $(\mu \equiv_c \nu)$, если существуют такие морфизмы $f : \mu \to \nu$ и $g : \nu \to \mu$, что $f \circ g$ и $g \circ f$ — тождественные отображения. Нумерации μ и ν *c-изоморфны* $(\mu \equiv_{c1} \nu)$, если функции f и g представляются вычислимой перестановкой (т.е. $f \circ \mu = \nu \circ p$ для подходящей вычислимой перестановки p). Заметим, что любая нумерация ν c-изоморфна нумерации, ассоциированной с $\mathrm{Ker}(\nu)$, так что все категорные понятия имеют эквивалентные переформулировки в терминах отношений эквивалентности на ω. Заметим также, что $\mu \equiv \nu$ влечет $\mu \equiv_c \nu$ и $\mu \equiv_1 \nu$ влечет $\mu \equiv_{c1} \nu$ (обратное, вообще говоря, неверно).

По аналогии с алгеброй и геометрией, идеальной была бы классификация нумераций с точностью до c-эквивалентности, но она, к сожалению, в большинстве случаев нереальна. В ряде случаев полезно следующее более грубое отношение эквивалентности. Назовем μ *фактором* ν $(\mu \leqslant_q \nu)$, если $\mu \equiv g \circ \nu$ для некоторого морфизма $g : \nu \to \mu$. Заметим, что любой фактор нумерации ν c-изоморфен фактору вида $\nu/{\sim}$, где $\sim$ — отношение эквивалентности на $\mathrm{rng}(\nu)$ и нумерация $\nu/{\sim}$ отображает число n в класс эквивалентности элемента νn. Нумерации μ и ν назовем *q-эквивалентными* $(\mu \equiv_q \nu)$, если $\mu \leqslant_q \nu$ и $\nu \leqslant_q \mu$. Заметим, что $\leqslant_q$ — предпорядок и $\mu \equiv_c \nu$

влечет $\mu \equiv_q \nu$ (обратное, вообще говоря, неверно). В этой статье для простоты стараемся избегать категорной терминологии, активно использованной в [13].

3. Основные факты о предполных нумерациях

Центральным для этой статьи является следующее понятие, введенное А. И. Мальцевым.

Определение 3.1. Нумерация ν называется *предполной*, если для любой в.ч. функции ψ найдется такая тотальная вычислимая функция t (которую называем ν-доопределением ψ), что $\nu t(x) = \nu\psi(x)$ для всех $x \in \mathrm{dom}(\psi)$.

Заметим, что если ν — предполная нумерация и $\{\psi_n\}$ — вычислимая последовательность в.ч. функций, то найдется вычислимая последовательность $\{t_n\}$ ν-доопределений для них (возьмем ν-доопределение t для $\psi = \bigoplus_k \psi_k$ и положим $t_n = \lambda x.t\langle n, x\rangle$)). Заметим также, что ν предполна в точности тогда, когда универсальная в.ч. функция υ имеет ν-доопределение.

Понятие предполной нумерации выглядит на первый взгляд ad hoc. Следующая характеризация в терминах неподвижных точек показывает естественность и важность этого понятия. Под *ν-неподвижной точкой* функции f понимаем любое число e, удовлетворяющее равенству $\nu e = \nu f(e)$. Говорим, что ν обладает *эффективным свойством неподвижной точки*, если существует такая вычислимая функция e, что $e(n)$ — ν-неподвижная точка функции φ_n при условии, что φ_n тотальна. Говорим, что ν обладает *равномерно эффективным свойством неподвижной точки*, если то же самое свойство выполняется с параметрами: существует такая вычислимая функция e, что если φ_n тотальна, то

$$\nu e\langle n, k, \langle z_1, \ldots, z_k\rangle\rangle = \nu\varphi_n\langle z_1, \ldots, z_k, e\langle n, k, \langle z_1, \ldots, z_k\rangle\rangle\rangle.$$

Теорема 3.2 (см. [13])**.** *Предполнота нумерации равносильна тому, что она обладает эффективным свойством неподвижной точки (равномерно эффективным свойством неподвижной точки).*

Близкие характеризации предполных нумераций имеются в [63]. В [44, 91] имеются другие полезные факты, в частности, теорема о так называемой анти-диагональной нормализации, оказавшаяся полезной в теории доказательств.

Далее приведем некоторые свойства предполных нумераций (см. [13]). Назовем последовательность $(A_0, \ldots, A_k)$ в.п. множеств *m-полной*, если любая последовательность в.п. множеств $(B_0, \ldots, B_k)$, удовлетворяющая всем булевым тождествам, справедливым для множеств $A_0, \ldots, A_k$, равномерно m-сводится к $(A_0, \ldots, A_k)$ (т.е. существует такая вычислимая функция f, что $B_i = f^{-1}(A_i)$ для всех $i \leqslant k$).

Предложение 3.3.

(1) *Если попарно непересекающиеся в.п. множества $A_0, \ldots, A_k$ и числа $a_0, \ldots, a_k, a_{k+1}$ удовлетворяют условию $\nu^{-1}\nu(a_i) \subseteq A_i \subseteq \overline{\nu^{-1}\nu(a_{k+1})}$ для любого $i \leqslant k$, то последовательность $(A_0, \ldots, A_k)$ m-полна.*
(2) *Класс всех предполных нумераций замкнут относительно факторов и произведений.*
(3) *Если μ — нетривиальная предполная нумерация и $\mu \leqslant \nu$ ($\nu \leqslant \mu$), то $\mu \leqslant_1 \nu$ (соответственно, $\nu \leqslant_1 \mu$).*
(4) *Если нумерация c-эквивалентна предполной нумерации, то эти нумерации c-изоморфны.*
(5) *Если предполная нумерация сводится к $\mu \oplus \nu$, то она сводится к хотя бы одной из μ, ν.*
(6) *Если нумерация ν предполна, то любой морфизм $f : \nu \to \nu$ имеет неподвижную точку.*

Из свойства 3.3(1) получаем теорему Райса для предполных нумераций.

Следствие 3.4. *Любое нетривиальное в.п. индексное множество предполной нумерации ν m-полно. В частности, не существует нетривиальных вычислимых индексных множеств.*

Проиллюстрируем доказательство последнего утверждения с помощью свойства неподвижной точки. Предположим, что $\nu^{-1}(A)$ вычислимо и $\emptyset \subset A \subset \mathrm{rng}(\nu)$. Тогда вычислимая функция f,

отображающая $\nu^{-1}(A)$ в b и $\overline{\nu^{-1}(A)}$ в a (где $a \in \nu^{-1}(A) \not\ni b$) не имеет ν-неподвижных точек. Противоречие.

Другим следствием свойства 3.3(1) является следующее.

Следствие 3.5. *Любая последовательность $k+2$ попарно непересекающихся в.п. индексных множеств предполной нумерации эффективно неотделима.*

Из теоремы 3.2 и свойства 3.3(2) вытекает следующее обобщение так называемой двойной теоремы о рекурсии, известной для нумерации Поста (см. [73]).

Следствие 3.6. *Любая предполная нумерация ν удовлетворяет двойной (а также n-кратной) теореме о рекурсии. В частности, для любых вычислимых функций f и g найдутся такие $c, d < \omega$, что $\nu c = \nu f\langle c, d\rangle$ и $\nu d = \nu g\langle c, d\rangle$.*

Далее охарактеризуем предполные нумерации ν как нумерации, для которых класс $\hat{\nu} = \{\mu \mid \mu \leqslant \nu\}$ имеет «хорошую» нумерацию. Назовем нумерацию $\xi : \omega \to \hat{\nu}$ *$\oplus$-замкнутой*, если $\bigoplus_k \xi_k \in \mathrm{rng}(\xi)$, и *допустимой*, если она $\oplus$-замкнута и для подходящей вычислимой функции s имеем $\xi_k\langle n, x\rangle = \xi_{s\langle k,n\rangle}(x)$ (последнее свойство является абстрактной версией частного случая smn-теоремы). Например, φ — допустимая нумерация класса $\hat{v}$ всех в.ч. функций, а π — допустимая нумерация класса $\hat{K}$ всех в.п. множеств.

Основная часть следующего результата доказана в [9].

Теорема 3.7.

(1) *Предполнота нумерации ν равносильна тому, что $\hat{\nu}$ имеет допустимую нумерацию, а также тому, что $\hat{\nu}$ имеет $\oplus$-замкнутую нумерацию.*
(2) *Любая допустимая нумерация класса $\hat{\nu}$ предполна.*

Из определения следует, что любые две допустимые нумерации класса $\hat{\nu}$ эквивалентны, а из предложения 3.3(3) — что они даже вычислимо изоморфны. Это обобщает классические факты о $\hat{v}$ и $\hat{K}$, установленные Х. Роджерсом. Приведем следствие утверждений 3.7 и 3.3 (получающееся рассмотрением нумерации $\nu = \bigoplus_k \xi_k$), которое немного усиливает факт для класса $\hat{K}$ всех в.п. множеств. В разделе 6 приведем аналогичное усиление теоремы Роджерса для $\hat{v}$, т.е. для в.ч. функций.

Следствие 3.8.

(1) *Если ξ — такая нетривиальная $\oplus$-замкнутая нумерация некоторого класса в.п. множеств, что* $\mathrm{rng}(\xi)$ *замкнуто вниз относительно $\leqslant$, то* $\mathrm{rng}(\xi)$ *— класс всех в.п. множеств.*
(2) *Если ξ — допустимая нумерация, удовлетворяющая допущениям* п. (1)*, то ξ вычислимо изоморфна π.*

Теперь обсудим два класса предполных нумераций, введенных соответственно А. И. Мальцевым (см. [13]) и автором (см. [25]).

Определение 3.9.

(1) Нумерация ν называется *полной* (относительно $a \in \mathrm{rng}(\nu)$), если для любой в.ч. функции ψ найдется такая тотальная вычислимая функция t (называемая ν-доопределением ψ относительно a), что $\nu t(x) = \nu\psi(x)$ для $\psi(x)\downarrow$ и $\nu t(x) = a$ для $\psi(x)\uparrow$.
(2) Нумерация ν называется 2-*полной* (относительно $a, b \in \mathrm{rng}(\nu)$), если она полна относительно a и кополна относительно b (кополнота означает, что для любого в.п. множества C найдется такая вычислимая функция g, что $\nu g\langle x, y\rangle = \nu x$ для $y \notin C$ and $\nu g\langle x, y\rangle = b$ for $y \in C$).

Аналогично соответствующим свойствам предполных нумераций, полнота нумерации ν относительно a равносильна тому, что любая вычислимая последовательность в.ч. функций имеет вычислимую последовательность ν-доопределений относительно a, а также тому, что универсальная функция υ имеет ν-доопределение относитльно a, а кополнота нумерации ν относительно b равносильна тому, что что функция g существует для креативного множества K.

Для предполной нумерации ν, ν-доопределение t для ψ может давать произвольные значения $\nu t(x)$ для $\psi(x)\uparrow$; для полных же нумераций эти значения регулируются простейшим разумным образом. Вспомогательное понятие кополной нумерации является в определенном смысле двойственным к понятию полной нумерации. Чтобы это объяснить, напомним (см. [13]), что с любой нумерацией ν можно связать предпорядок $\leqslant_\nu$ на $\mathrm{rng}(\nu)$ следующим образом: $x \leqslant_\nu y$, если для любого сильно ν-в.п. множества $S \subseteq \mathrm{rng}(\nu)$ условие $x \in S$ влечет $y \in S$. Легко видеть, что если ν полна (кополна) относительно a, то a есть наименьший (соответственно, наибольший) элемент в $(\mathrm{rng}(\nu); \leqslant_\nu)$.

Легко видеть, что полные нумерации предполны, а 2-полные нумерации полны. Следующие примеры показывает, что эти включения собственны. Это вытекает из отмеченных свойств предпорядков $\leqslant_\nu$ и определения нумераций φ, π и γ в предыдущем разделе. Заметим, что нумерация γ предполна, поскольку тождественная функция γ-доопределяет функцию υ.

Предложение 3.10.

(1) *Нумерация π 2-полна относительно $\emptyset, \omega$.*
(2) *Нумерация φ полна относительно $\emptyset$, но не 2-полна.*
(3) *Нумерация γ предполна, но не полна.*

Далее рассмотрим свойства полных и 2-полных нумераций.

Предложение 3.11.

(1) *Классы всех полных и 2-полных нумераций замкнуты относительно факторов и произведений.*
(2) *Последовательность $(A_0, \ldots, A_k)$ нетривиальных попарно непересекающихся в.п. множеств m-полна в точности тогда, когда все A_i являются индексными множествами некоторой полной нумерации.*
(3) *Последовательность $(A_0, \ldots, A_k)$ нетривиальных в.п. множеств, удовлетворяющих соотношениям $A_i \not\subseteq A_j$ и $\emptyset \neq A_i \cap A_j = A_k \cap A_l$ для всех $i \neq j$ и $k \neq l$, m-полна (в классе всех таких последовательностей) в точности тогда, когда все A_i являются индексными множествами некоторой 2-полной нумерации.*

Теорема Райса выполняется для полных и ко-полных нумераций в усиленной формулировке:

Теорема 3.12 (см. [13, 75])**.** *Любое нетривиальное индексное множество полной нумерации либо Σ^0_1-трудное, либо Π^0_1-трудное. Это справедливо и для кополных нумераций.*

Справедлив также следующий аналог теоремы 3.7.

Теорема 3.13 (см. [75])**.** *Нумерация ν полна* (2-*полна*) *в том и только в том случае, если $\hat{\nu}$ имеет допустимую нумерацию, которая полна* (*соответственно,* 2-*полна*).

В заключение этого раздела обсудим важный вопрос о релятивизации введенных понятий. Пусть f — произвольный оракул (который можно считать либо функцией, либо множеством). Понятия f-предполной, f-полной и f-2-полной нумерации получаются из соответствующих нерелятивизованных версий, если считать функцию ψ в.ч. функцией относительно f, множество C в.п. относительно f, а функции t, g — (абсолютно) вычислимыми. Заметим, что нумерация ν тривиальна (т.е. $\mathrm{rng}(\nu)$ одноэлементно) в точности тогда, когда она принадлежит любому из введенных классов относительно любого оракула f.

Эта сильная релятивизация была введена в [27]. Она приводит к сильным релятивизациям большинства сформулированных выше результатов, а также результатов, рассматриваемых далее. Например, релятивизованная форма теоремы 3.12 выглядит так: любое нетривиальное индексное множество f-полной нумерации либо $\Sigma^{0,f}_1$-трудное, либо $\Pi^{0,f}_1$-трудное относительно обычной m-сводимости (а не только относительно m-сводимости функциями, вычислимыми относительно f). Формулировки других релятивизованных версий предоставляются читателю; далее некоторые из них будем использовать.

Одним из немногих примеров результатов, имеющих лишь слабую релятивизацию, является предложение 3.3(5). Релятивизуя доказательство этого результата в [13], получим лишь, что если

$\mu \leqslant \nu \oplus \xi$ и μ f-предполна, то либо $\mu \leqslant^f \nu$, либо $\mu \leqslant^f \xi$ (где $\leqslant^f$ — отношение m-сводимости функциями, вычислимыми относительно f). Вообще говоря, это утверждение нельзя усилить до обычной m-сводимости.

Заметим, что если ν f-предполна и $\mu \leqslant^f \nu$, то $\mu \leqslant \nu$, и что любая f-предполная нумерация предполна. Это справедливо и для других двух введенных понятий. Заметим также, что предложение 3.10 справедливо для релятивизованных нумераций $\pi^f, \varphi^f, \gamma^f$.

Введенные релятивизации можно использовать для ответа на естественный вопрос о существовании нумерации, (ко)полной относительно нескольких элементов. Из сделанных выше замечаний следует, что если ν $\emptyset'$-предполна, то ν — 2-полна относительно любых $a, b \in \mathrm{rng}(\nu)$. Беря подходящие факторы нумерации $\gamma^{\emptyset'}$, получим следующее утверждение, которое для случая полных нумераций известно из [13].

Следствие 3.14 (см. [75]). *Для любого $k, 1 < k \leqslant \omega$, существует нумерация множества $\{0, \ldots, k-1\}$, которая 2-полна относительно любых $a, b < k$.*

Завершим этот раздел некоторыми вариантами понятия предполноты. Иногда полезна следующая версия из [75]: нумерация ν Π^1_1-*предполна*, если любая частичная Π^1_1-функция имеет вычислимое ν-доопределение. Такие нумерации A-предполны для любого $A \in \Delta^1_1$, но не A-предполны для Π^1_1-трудных множеств A. Теория таких нумераций (а также Π^1_1-полных и Π^1_1-2-полных нумераций) может быть развита аналогично теории, представленной выше.

Заметим, что наряду с обсуждаемыми в этой статье тотальными (т.е. определенными на всем ω) нумерациями, достаточными для изучения вычислимости в алгебре и теории моделей, интересны и частичные нумерации (т.е. функции, определенные на подмножествах ω). Важными примерами является клиниевская система обозначений для вычислимых ординалов и частичная нумерация вычислимых действительных чисел (см. [93]). Частичные нумерации принципиально важны при изучении свойств счетных вычислимых топологических пространств (см., например, [87] и указанную там литературу). Некоторые свойства частичных нумераций лучше, чем тотальных. Например, категория частичных нумераций (с естественно определямыми морфизмами) декартово замкнута, а категория тотальных нумераций — нет. Д. Шпреен распространил теорию предполных нумераций на частичные нумерации и нашел интересные применения (см. [88, 89]).

Другой интересный вариант теории предполных нумераций разработан К. Вайраухом (см. [92, 93]), который распространил эту теорию с нумераций на частичные представления топологических пространств, играющих важную роль в вычислимом анализе и топологии. Частичное представление — это частичная функция на бэровском пространстве ω^ω. Представления являются ключом к определению и изучению вычислимости в топологических пространства (на основе теории вычислимости в бэровском пространстве, известной из классической теории вычислимости). Понятия этого направления разделяются на два варианта — вычислимый и топологический, которые тесно связаны между собой. Интересной особенностью теории предполных представлений является то, что не видно разумного обобщения на представления понятия полной нумерации. Статья [82] содержит обсуждение отношений между частичными и полными нумерациями и представлениями, а также применения предполных тотальных представлений в теории иерархий.

4. Универсальность

Здесь покажем, что многие естественно возникающие нумерации принадлежат одному из классов, введенных в предыдущем разделе. Более того, они часто имеют некоторое свойство универсальности для данного класса. Этот факт лежит в основе многих применений предполных нумераций и их подклассов. Упомянутые понятия универсальности были введены в [13, 25].

Определение 4.1. f-Предполная (f-полная, f-2-полная) нумерация ν называется *универсальной*, если любая f-предполная (соответственно, f-полная, f-2-полная) нумерация является фактором нумерации ν.

Следующая характеризация введенных понятий из [13, 25] удобнее в применении, чем их определение.

Теорема 4.2.

(1) *f-Предполная нумерация ν универсальна тогда и только тогда, когда среди ее факторов содержится нетривиальная f-позитивная нумерация.*
(2) *f-Полная нумерация ν универсальна тогда и только тогда, когда существует бесконечная f-в.п. последовательность непустых попарно непересекающихся ν-индексных множеств.*
(3) *f-2-полная нумерация ν универсальна тогда и только тогда, когда существуют такие бесконечная f-в.п. последовательность $\{S_n\}$ ν-индексных множеств и вычислимая функция g, что $g(n) \in S_n \setminus (\bigcup_{k\neq n} S_k)$ для всех $n < \omega$.*

Из теоремы 4.2(1) следует, что любая нетривиальная f-позитивная f-предполная нумерация является универсальной f-предполной. Этот факт вместе с релятивизацией пп. (2), (3) предложения 3.10 дают следующие «канонические» примеры универсальности.

Следствие 4.3. *Нумерации γ^f, φ^f и π^f являются соответственно универсальной f-предполной, универсальной f-полной и универсальной f-2-полной.*

Таким образом, все классы нумераций из определения 4.1 непусты. Из релятивизации предложения 3.10 вытекает, что для любого оракула f все три класса попарно не пересекаются.

Ясно, что нумерации μ и ν являются факторами нумерации $\mu \otimes \nu$ (канонические проекции дают искомые факторизации), поэтому из предложений 3.3(2) и 3.11(1) получаем следующий результат, дающий много новых примеров универсальных нумераций.

Следствие 4.4. *Если нумерации μ и ν f-предполны и хотя бы одна из них универсальна, то нумерация $\mu \otimes \nu$ — универсальная f-предполная. Аналогичное справедливо и для двух других понятий.*

Из определения 4.1 следует, что введенные классы нумераций замкнуты по отношению q-эквивалентности из раздела 2. Из следствия 4.4 вытекает, что любой из этих классов содержит континуум классов c-эквивалентности. Интересной задачей является идентификация как можно большего числа таких классов c-эквивалентности. Интересный пример дается следующей теоремой, из которой будет следовать c-изоморфизм многих обсуждаемых ниже нумераций.

Теорема 4.5 (см. [67])**.** *Любые две нетривиальные f-позитивные f-предполные нумерации c-изоморфны.*

Теперь рассмотрим некоторые естественные нумерации с точки зрения введенных понятий. Сначала посмотрим на нумерации, возникающие за пределами теории вычислимости. Пусть λ — геделева нумерация всех λ-термов по модулю эквивалентности, отождествляющей два терма, приводимые друг к другу по правилам λ-исчисления. Для любых $n, k < \omega$ пусть $\alpha_{n,k}$ — геделева нумерация всех Σ^0_{n+1}-формул сигнатуры $\{+, \cdot, 0, 1\}$, свободные переменные которых находятся среди $x_0, \ldots, x_{k-1}$, по модулю эквивалентности в арифметике Пеано (которая предполагается непротиворечивой).

Теорема 4.6 (см. [91])**.** *Нумерации λ и $\alpha_{n,k}$ нетривиальны, позитивны и предполны (и потому все они являются универсальными предполными).*

Заметим, что нумерация α всех формул по модулю эквивалентности в арифметике Пеано не является предполной, поскольку отрицание представимо в нумерации α вычислимой функцией без α-неподвижных точек. В [67, 69] показано, что эта нумерация имеет естественное свойство универсальности в классе «равномерно конечно предполных» нумераций. Работа [85] содержит интересный обзор подобных вариантов предполных нумераций.

Представляется интересным исследовать с точки зрения введенных понятий другие естественные нумерации в логике и информатике, в частности, нумерации классов схем программ по модулю естественных отношений эквивалентности таких схем.

Вернемся к теории вычислимости и рассмотрим нумерации уровней некоторых иерархий. Пусть $\emptyset^{(a)} (a \in O)$ — a-итерация тьюрингова скачка $'$ вдоль клиниевской системы O начиная с

пустого множества, т.е.

$$\emptyset^{(1)} = \emptyset, \quad \emptyset^{(2^b)} = (\emptyset^{(b)})' \text{для } b \neq 1, \quad \emptyset^{(3\cdot 5^e)} = \bigoplus_k \emptyset^{(\varphi_e(k))}.$$

Пусть $\{\Sigma^0_{(a)}\}_{a\in O}$ — гиперарифметическая иерархия, т.е. $\Sigma^0_{(a)}$ для $a \neq 1$ — класс всех в.п. множеств относительно $\emptyset^{(a)}$, и $\Sigma^0_{(a)} = \Sigma^0_{|a|_O}$ для $|a|_O < \omega$. Стандартная нумерация класса $\Sigma^0_{(a)}$ вычислимо изоморфна нумерации $\pi^{\emptyset^{(a)}}$, так что она универсальная $\emptyset^{(a)}$-2-полная.

Теперь рассмотрим разностную иерархию, подробно изученную в контексте теории вычислимости в [11]. Конечная версия иерархии Ершова $\{\Sigma^{-1}_n\}_{n<\omega}$ определяется так: Σ^{-1}_n — класс всех множеств вида $\bigcup_k(A_{2k} \setminus A_{2k+1})$, для таких в.п. множеств A_k, что $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots$ и $A_n = \emptyset$. Чтобы определить трансфинитную версию этой иерархии, поставим в соответствие любому $a \in O$ число $r(a) < 2$ по правилу: $r(a) = 0$ в точности тогда, когда $|a|_O$ четно (напомним, что нулевой и предельный ординалы считаются четными, а $\alpha + 1$ четно в точности тогда, когда α нечетно). Пусть $\Sigma^{-1}_{(a)}$ — класс всех множеств вида $\bigcup\{A_b \setminus \bigcup_{c<_O b} A_c \mid b <_O a, r(b) \neq r(a)\}$, где $\{A_b\}_{b<_O a}$ — вычислимая последовательность в.п. множеств. Заметим, что трансфинитная версия продолжает конечную версию, т.е. $\Sigma^{-1}_{(a)} = \Sigma^{-1}_{|a|_O}$ для $|a|_O < \omega$. Согласно [11], любой уровень $\Sigma^{-1}_{(a)}$ имеет естественную нумерацию, которая для $|a|_O = 1$ вычислимо изоморфна π. Для других уровней имеем следующее утверждение, вытекающее из определений и результатов в [7, 56] о том, что нетривиальные индексные множества всех этих нумераций не принадлежат $\Delta^{-1}_{(a)}$.

Теорема 4.7. *Для $|a|_O > 1$ нумерация класса $\Sigma^{-1}_{(a)}$ 2-полна (относительно либо $(\emptyset, \emptyset)$, либо $(\emptyset, \omega)$, в зависимости от $r(a)$), но не является универсальной.*

Теперь рассмотрим факторизации естественных нумераций по эквивалентности относительно известных сводимостей. Принципиальный результат в этом направлении, полученный в [4], в нашей терминологии выглядит следующим образом.

Теорема 4.8. *Нумерация $\pi/\equiv_m$ является $\emptyset^{(2)}$-позитивной $\emptyset^{(2)}$-предполной (поэтому она и универсальная $\emptyset^{(2)}$-предполная).*

Заметим, что в этой теореме отношение $\equiv_m$ является небольшой модификацией m-эквивалентности, в которой все вычислимые множества образуют одну степень. Согласно [4, 34], этот результат можно расширить на все конечные уровни иерархии Ершова. Согласно [31, 34, 74], результат обобщается на все уровни этой иерархии и на все сильные сводимости между m и wtt (включая ограниченные варианты).

Теорема 4.9. *Для любого $a_O > 1$ и любой сильной сводимости $\leqslant_r$, нумерация класса $\Sigma^0_{(a)}/\equiv_r$ является $\emptyset^{(2)}$-позитивной $\emptyset^{(2)}$-предполной (а значит, и универсальной $\emptyset^{(2)}$- предполной).*

Для любого $n < \omega$ пусть K_n — класс всех последовательностей $(A_0, \ldots, A_{n+1})$ непустых попарно непересекающихся в.п. множеств. Класс K_n имеет главную вычислимую нумерацию (см. [13]), которая индуцирует нумерации фактор-множеств $K_n/\equiv_m$ и $K_n/\equiv_{sm}$, где $\equiv_m$ — отношение эквивалентности по равномерной m-сводимости последовательностей, а $\equiv_{sm}$ — эквивалентность по следующей сводимости: $(A_0, \ldots, A_{n+1})$ sm-сводится к $(B_0, \ldots, B_{n+1})$, если существует такая вычислимая функция g, что $A_i \subseteq g^{-1}(B_i)$ для всех $i \leqslant n+1$. Последняя сводимость использовалась в [13] для классификации $(n+2)$-кортежей индексных множеств.

Теорема 4.10 (см. [34])**.** *Для любого $n < \omega$ нумерации фактор-множеств $K_n/\equiv_m$ и $K_n/\equiv_{sm}$ являются $\emptyset^{(2)}$-позитивными $\emptyset^{(2)}$-предполными (а значит, и универсальными $\emptyset^{(2)}$-предполными).*

Теорема 4.9 ничего не говорит о тьюринговой сводимости. В [31,74] показано, что в этом случае ситуация кардинально отличается от ситуации с сильными сводимостями.

Теорема 4.11. *Для любого $a_O > 1$ нумерация фактор-множества $\Sigma^0_{(a)}/\equiv_T$ является универсальной $\emptyset^{(2)}$-полной относительно $0'$.*

В [4, 60, 86] изучались следующие отношения, индуцируемые операцией тьюрингова скачка: $A \leqslant_T^n B$, если $A^{(n)} \leqslant_T B^{(n)}$.

Теорема 4.12 (см. [74]). *Для любого $n < \omega$ нумерация $\pi/\equiv_T^n$ универсальна и $\emptyset^{(n+2)}$-полна относительно $[\emptyset^{(n+1)}]$.*

Теорема 4.12 обобщает теорему 4.11 (получающуюся при $|a|_O = 1$), поскольку отношение $\leqslant_T^0$ совпадает с $\leqslant_T$. Заметим, что теорема 4.12 остается справедливой для индуцированных нумераций фактор-множеств $\Sigma^0_{(a)}/\equiv_T^n$ для $n > 0$, поскольку эти нумерации c-эквивалентны $\pi/\equiv_T^n$ (это следует из теоремы Сакса о скачке).

Пусть $A \leqslant_T^\omega B$ означает, что $A^{(n)} \leqslant_T B^{(n)}$ для некоторого $n < \omega$. Следующий результат является переформулировкой одного из результатов работ [60, 86].

Теорема 4.13. *Нумерация $\pi/\equiv_T^\omega$ является $\emptyset^{(\omega)}$-позитивной $\emptyset^{(\omega)}$-предполной (а значит, и универсальной $\emptyset^{(\omega)}$-предполной).*

Далее рассмотрим факторизации нумерации π по некоторым отношениям конгруэнтности на решетке $\mathcal{E}$ всех в.п. множеств.

Теорема 4.14 (см. [74]). *Пусть $\sim$ — нетривиальное отношение конгруэнтности на $\mathcal{E}$, инвариантное относительно автоморфизмов решетки $\mathcal{E}$ и содержащее равенство по модулю конечных множеств. Тогда нумерация $\pi/\sim$ является универсальной $\emptyset'$-2-полной относительно $[\omega], [\emptyset]$.*

Итак, любая нумерация $\pi/\sim$ из предыдущей теоремы q-эквивалентна нумерации $\pi^{\emptyset'}$. Отметим курьезный факт, что $\pi/\sim$ — универсальная $\emptyset'$-2-полная относительно $[\omega], [\emptyset]$, в то время как $\pi^{\emptyset'}$ — относительно $\emptyset, \omega$ (в противоположном порядке!).

Рассмотрим теперь примеры универсальных нумераций, естественно возникающих в алгебре. Зафиксируем сигнатуру $L = \{f_i, P_j \mid i < i_0,\ j < j_0\}$, где $i_0, j_0 \leqslant \omega$, f_i — функциональные символы, P_j — предикатные символы, и арность любого символа вычислима по его индексу. Случай нулевой арности возможен. По техническим причинам считаем, что $j_0 > 0$ и P_0 — бинарный символ, интерпретируемый как равенство. Используем некоторые стандартные факты о квазимногообразиях, которые можно найти, например, в [21]. Фиксируем в.п. множество Q L-квазитождеств.

Под *позитивной L-структурой* понимаем объект $\mathbf{A} = (A; \alpha, f_i^A, P_i^A)$, образованный L-структурой $(A; f_i^A, P_j^A)$ и такой нумерацией α множества A, что любая функция f_i^A представляется в α вычислимой функцией равномерно по i, а любой предикат P_j^A сильно в.п. в нумерации α равномерно по j. Под *морфизмом* между такими объектами понимаем гомоморфизм, представляемый вычислимой функцией в соответствующих нумерациях. Позитивные Q-модели с такими морфизмами образуют категорию, в которой существует (определяемое естественным образом) произведение $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ любых двух объектов. Категорно изоморфные объекты $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называем *c-эквивалентными* (символически, $\mathbf{A} \equiv_c \mathbf{B}$).

Назовем нумерацию $\{(A_n; \alpha_n f_i^n, P_j^n)\}_{n<\omega}$ множества позитивных L-структур *вычислимо перечислимой* (в.п.), если последовательность $\{f_i^n\}$ равномерно вычислима, а последовательность $\{P_j^n\}$ равномерно сильно в.п. по всем i, j, n. Мы рассматриваем такие нумерации структур по модулю c-эквивалентности, не всегда упоминая это явно. Мы применяем к нумерациям структур терминологию предшествующих разделов с учетом этого соглашения. Например, в.п. последовательность структур $\{\mathbf{A}_n\}$ сводится к в.п. последовательности структур $\{\mathbf{B}_n\}$, если существует такая вычислимая функция g, что $\mathbf{A}_n \equiv_c \mathbf{B}_{g(n)}$ для всех $n < \omega$. Под *допустимой нумерацией всех позитивных Q-моделей* понимаем такую в.п. нумерацию $\{\mathbf{A}_n\}$ Q-моделей, что любая в.п. нумерация Q-моделей сводится к $\{\mathbf{A}_n\}$.

В [79] было показано, что для любого в.п. множества Q L-квазитождеств существует допустимая нумерация всех позитивных Q-моделей, и эта нумерация единственна с точностью до вычислимого изоморфизма (для частного случая булевых алгебр это было сделано ранее в [37]).

Среди Q-моделей имеется «простейшая», а именно, одноэлементная структура $\mathbf{E}$, в которой все предикаты истинны. Оказывается, существует также «сложнейшая» модель. Назовем позитивную Q-модель $\mathbf{B}$ *компонентой* позитивной Q-модели $\mathbf{A}$, если $\mathbf{A} \equiv_c \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$ для некоторой позитивной Q-модели $\mathbf{C}$. Назовем позитивную Q-модель $\mathbf{U}$ *универсальной*, если любая позитивная Q-модель является компонентой $\mathbf{U}$. В [78] показано, что для любого в.п. множества Q квазитождеств найдется универсальная позитивная Q-модель, и она однозначна с точностью до c-эквивалентности (опять, для случая булевых алгебр это было сделано ранее в [39]). Этот результат не нужен здесь в полной общности, поэтому поясним его только для следующего частного случая.

Предположим, что сигнатура L содержит единственный константный символ, обозначаемый через 0, и что квазитождества из Q гарантируют, что простейшая модель $\mathbf{E}$ является подструктурой любой Q-модели. Назовем такую теорию Q *специальной*. Назовем множество Q квазитождеств *хорошим*, если оно специально и существует такая последовательность $\{\mathbf{B}_n\}_{n<\omega}$ конечных Q-моделей, что $\mathbf{B}_n$ на вкладывается $\mathbf{B}_m$ при $m \neq n$ и существует алгоритм, вычисляющий по любому n диаграмму модели $\mathbf{B}_n$ (диаграмма будет конечным множеством формул).

Примерами хороших теорий являются: полугруппы с 0, абелевы группы, группы, кольца, дистрибутивные решетки (по поводу последнего примера см. [33]).

Хорошо известно, что для любой последовательности $\{\mathbf{B}_n\}$ (абстрактных) Q-моделей любого специального множества Q существует *прямая сумма* $\coprod_n \mathbf{B}_n$, которая также является Q-моделью. Легко видеть, что прямая сумма $\mathbf{U}$ допустимой нумерации всех в.п. Q-моделей будет универсальной моделью.

Теперь посмотрим на допустимую нумерацию всех в.п. Q-моделей с точки зрения теории предполных нумераций. Следующий факт получен в [79].

Теорема 4.15.

(1) *Для любого в.п. специального множества Q квазитоэдеств допустимая нумерация $\nu = \{\mathbf{A}_n\}$ всех в.п. Q-моделей является $\emptyset'$-2-полной относительно $\mathbf{E}$ и $\mathbf{U}$.*
(2) *Для любого в.п. хорошего множества Q квазитоэдеств, допустимая нумерация $\nu = \{\mathbf{A}_n\}$ всех в.п. Q-моделей является универсальной $\emptyset'$-2-полной относительно $\mathbf{E}$ и $\mathbf{U}$.*

Завершим этот раздел рассмотрением некоторых нумераций множеств и функционалов конечных типов. Определим S_k и F_k индукцией по $k < \omega$ так: $S_0 = 2^\omega$, $S_{k+1} = 2^{S_k}$, $F_0 = (\omega \cup \{\bot\})^\omega$ и $F_{k+1} = (\omega \cup \{\bot\})^{F_k}$, где A^B — класс всех функций из B в A. В [13, 49] конструкция A^B была эффективизирована в следующем смысле: было показано, что для многих нумераций μ и ν существует естественная (главная вычислимая) нумерация ν^μ всех морфизмов из μ в ν. Мы не будем выписывать довольно технические условия на μ и ν, гарантирующие существование такой нумерации и заметим лишь, что они достаточны для корректного определения следующих последовательностей нумераций: $\sigma_0 = K^{id}$, $\sigma_{k+1} = K^{\sigma_k}$, $\psi_0 = \upsilon$ и $\psi_{k+1} = \upsilon^{\psi_k}$, где id — тождественная нумерация ω, K — креативное множество (рассматриваемая как нумерация множества $\{0,1\}$) а υ — универсальная в.ч. функция (рассматриваемая как нумерация множества $\omega \cup \{\bot\}$). В [13, 49] показано, что $\sigma_1 \equiv_c \pi$, $\psi_1 \equiv_c \varphi$ и $\sigma_k : \omega \to S_k$, $\psi_k : \omega \to F_k$ — естественные нумерации в.п. классов и в.ч. функционалов конечных типов, соответственно. Из определений этих объектов нетрудно вывести следующий результат.

Теорема 4.16. *Для любого $k < \omega$ нумерация ψ_k является универсальной полной, а нумерация σ_k — универсальной 2-полной.*

5. Позитивные предполные структуры

Изучение вычислимости в алгебре и теории моделей происходит путем рассмотрения нумерованных структур. В этом разделе рассмотрим примеры позитивных структур, нумерации которых предполны. Понятия и результаты взяты в основном из работ [31, 34, 70, 74]. Основным инструментом опять является теорема о неподвижной точке.

Определение 5.1. Под *специальным f-порядком* понимаем f-позитивный частичный порядок $\mathbf{A} = (A; \alpha, \leqslant, 0, 1)$, где α — f-предполная нумерация, 0 — наименьший элемент, 1 — наибольший элемент и $0 \neq 1$. Понятия специальной f-верхней полурешетки и f-решетки определяются аналогично, только от соответствующих операций $\cup$ (соответственно, $\cup, \cap$) надо еще потребовать, чтобы они представлялись вычислимыми функциями в нумерации α.

Следующие результаты об α-индексных множествах сразу следуют из приведенного определения и следствия 3.5.

Следствие 5.2. *Для любого специального f-порядка $\mathbf{A} = (A; \alpha, \leqslant, 0, 1)$ имеем*:

(1) *если $0 < a$, то $\{x \mid a \leqslant \alpha x\}$ — $\Sigma_1^{0,f}$-полно*;
(2) *если $a < 1$, то $\{x \mid \alpha x \leqslant a\}$ — $\Sigma_1^{0,f}$-полно*;
(3) *если $0 < a < 1$, то $\{x \mid a \not\leqslant \alpha x \wedge \alpha x \not\leqslant a\}$ является — $\Pi_1^{0,f}$-полно*;
(4) *для всех $a_0, \ldots, a_n \in A$ множество $\{x \mid \alpha x = a_0 \vee \cdots \vee \alpha x = a_n\}$ is $\Sigma_1^{0,f}$-полно.*

Назовем порядок $\mathbf{A}$ *эффективно широким*, если существует такая вычислимая функция g, что $0 < \alpha g(x) < 1$ для всех x, и если $0 < \alpha y < 1$ для всех $y \in \pi x$, то $\alpha g(x)$ $\leqslant$-несравнимо с αy для всех $y \in \pi x$. Заметим, что в эффективно широком порядке всегда существует элемент $a \in A$ с условием $0 < a < 1$ (рассмотрите пустое πx), и для любого элемента $0 < \alpha b < 1$ найдется элемент, несравнимый с αb (рассмотрите $\pi x = \{b\}$).

Теорема 5.3. *Любой специальный f-порядок является эффективно широким.*

Назовем порядок $\mathbf{A}$ *эффективно плотным вверх*, если существует такая вычислимая функция g, что $\alpha x < 1$ влечет $\alpha x < \alpha g(x) < 1$.

Теорема 5.4. *Для любой специальной f-верхней полурешетки $\mathbf{A} = (A; \alpha, \leqslant, \cup, 0, 1)$ имеем*:

(1) $\mathbf{A}$ *эффективно плотна вверх*;
(2) *для любого $n < \omega$ найдутся такие $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$, что $a_k \not\leqslant \bigcup\limits_{l \neq k} a_l$ для всех $k \leqslant n$.*

Теорема 5.5. *Для любой специальной f-верхней полурешетки $\mathbf{A} = (A; \alpha, \leqslant, \cup, 0, 1)$ имеем*:

(1) *если $0 < a < 1$, то $\{x \mid a < \alpha x\}$ $\Sigma_2^{-1,f}$-полно*;
(2) *если $0 < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$, то множества $\{x \mid a_0 \leqslant \alpha x \wedge a_1 \not\leqslant \alpha x\}$ и $\{x \mid (a_0 \leqslant \alpha x \wedge a_1 \not\leqslant \alpha x) \vee a_2 \leqslant \alpha x\}, \ldots$ m-полны соответственно в $\Sigma_2^{-1,f}$ и $\Sigma_3^{-1,f}, \ldots$.*

Заметим, что теоремы 5.4 и 5.5, вообще говоря, неверны для специальных f-порядков.

Говорим, что $\mathbf{A}$ *эффективно плотно*, если существует такая вычислимая функция g, что $\alpha x < \alpha y$ влечет $\alpha x < \alpha g\langle x, y\rangle < \alpha y$. Следующий результат, вообще говоря, неверен для f-верхних полурешеток.

Теорема 5.6. *Любая специальная f-решетка эффективно плотна.*

Пункт (1) следующей теоремы двойственен теореме 5.5(1), а п. (2) доказывается аналогично доказательству утверждения 5.5(1) в [34, 75].

Теорема 5.7. *Для любой специальной f-решетки $\mathbf{A} = (A; \alpha, \leqslant, \cup, \cap, 0, 1)$ имеем*:

(1) *если $0 < a < 1$, то $\{x \mid \alpha x < a\}$ $\Sigma_2^{-1,f}$-полно*;
(2) *если ($0 < a$ или $b < 1$), то $\{x \mid a < \alpha x < b\}$ $\Sigma_2^{-1,f}$-полно.*

Следующий результат показывает, как можно строить новые специальные f-порядки из имеющихся.

Теорема 5.8.

(1) *Классы специальных f-порядков, f-верхних полурешеток и f-решеток замкнуты относительно произведения.*

(2) *Если* $\mathbf{A} = (A; \alpha, \leqslant, \cup, 0, 1)$ *— специальная* f*-верхняя полурешетка и* $a < 1$*, то структура* $([a, 1]; \alpha^*, \cup, a, 1)$ *с индуцированной нумерацией* α^* *является специальной* f*-верхней полурешеткой.*

(3) *Если* $\mathbf{A} = (A; \alpha, \leqslant, \cup, \cap, 0, 1)$ *— специальная* f*-решетка и* $a < b$*, то структура* $([a, b]; \alpha^*, \cup, \cap, a, b)$ *с индуцированной нумерацией* α^* *является специальной* f*-решеткой.*

Мы не знаем ответ на вопрос, существует ли f-верхняя полурешетка с разрешимой элементарной теорией. Отрицательный ответ имел бы интересные следствия для теории степеней по сильным сводимостям.

Замечание 5.9. Выше приведены простейшие факты о позитивных (пред)порядках, применимые к структурам степеней (см. раздел 11). Статья [70] содержит много дополнительной информации о более общих позитивных решетках и булевых алгебрах, применимых к алгебрам Линденбаума достаточно сильных теорий.

Многие структуры из раздела 4 принадлежат к одному из введенных здесь классов. Например, структура $(\Sigma^0_1; \leqslant^\omega_T)$ — специальный $\emptyset^{(\omega)}$-порядок, структуры $(\Sigma^{-1}_{(a)}; \leqslant_r)$ и $(K_n; \leqslant_m)$ с операцией супремума, индуцированной операцией $\oplus$ — специальные $\emptyset^{(2)}$-верхние полурешетки, структура $A_{n,k} = \mathrm{rng}(\alpha_{n,k})$ с операциями, индуцированными конъюнкцией и дизъюнкцией — специальная решетка, а структура $(K_n; \leqslant_{sm})$ с операциями, индуцированными операциями $\oplus$ и $\otimes$ — специальная $\emptyset^{(2)}$-решетка (то, что $\otimes$ индуцирует операцию инфимума, замечено в [10]). Интерпретируя результаты этого раздела в таких структурах, получаем много конкретных фактов об индексных множествах и структурах степеней. В разделах 9 и 11 обсудим эти применения подробно.

Заметим, что любая конечно представленная структура (с естественной гёделевой нумерацией) позитивна. Есть много интересных открытых вопросов о позитивных конечно представленных структурах, например: существует ли нетривиальная конечно представленная полугруппа с предполной гёделевой нумерацией? Нетрудно видеть, что такой группы не существует.

6. Структуры предполных нумераций

Обсудим положение введенных классов предполных нумераций среди всех нумераций. Соответствующие результаты имеют применения в изучении иерархий и индексных множеств.

Фиксируем произвольное абстрактное множество S, содержащее не менее двух элементов, и рассмотрим класс S^ω всех нумераций вида $\nu : \omega \to S$. Хорошо известно (см. [13]), что структура $(S^\omega; \leqslant, \oplus)$ — верхняя полурешетка (для упрощения формулировок применяем терминологию, обычно применяемую для частичных порядков, и к предпорядкам, имея в виду фактор-структуру по индуцируемому предпорядком отношению эквивалентности). Пусть C_0, C_1 и C_2 — классы всех предполных, полных и 2-полных нумераций из S^ω, соответственно. Попытаемся охарактеризовать введенные классы в структуре S^ω. Терминология и результаты, вплоть до предложения 6.13, взяты из [24, 25].

Определение 6.1. Для любого $a \in S$ определим унарную операцию p_a на S^ω следующим образом:

$$[p_a(\nu)]n = \begin{cases} a & \text{в случае } \upsilon(n)\uparrow, \\ \nu\upsilon(n) & \text{в случае } \upsilon(n)\downarrow, \end{cases}$$

где υ — универсальная в.ч. функция.

Введенные в [25] операции p_a являются модифицированными версиями операции пополнения нумерованного множества из [13]. Для любого $a \in S$ пусть C^a_1 — множество всех нумераций из S^ω, полных относительно a, так что $C_1 = \bigcup\{C^a_1 \mid a \in S\}$.

Теорема 6.2. *Для любой* $\nu \in S^\omega$ *нумерация* $p_a(\nu)$ *является наименьшим элементом предпорядка* $(\{\mu \in C^a_1 \mid \nu \leqslant \mu\}; \leqslant)$.

Следующее понятие позволит лучше понять свойства введенных операций.

Определение 6.3. Под полурешеткой с дискретными замыканиями понимаем структуру $(P;\leqslant,\sqcup,\{f_i\}_{i\in I})$ со следующими свойствами:

(1) $(P;\leqslant)$ — предпорядек с операцией супремума $\sqcup$.
(2) f_i — операции замыкания на $(P;\leqslant)$, т.е. $x\leqslant f_i(x)$, $x\leqslant y\to f_i(x)\leqslant f_i(y)$ и $f_if_i(x)\leqslant f_i(x)$ для всех $i\in I$ и $x,y\in P$.
(3) если $f_i(x)\leqslant y\sqcup z$, то либо $f_i(x)\leqslant y$б либо $f_i(x)\leqslant z$.
(4) Если $f_i(x)\leqslant f_k(y)$ и $i\neq k$, то $f_i(x)\leqslant y$.

Теорема 6.4. *Структура $(S^\omega;\leqslant,\oplus,\{p_a\}_{a\in S})$ является полурешеткой с дискретными замыканиями.*

Далее установим аналоги описанных результатов для 2-полных нумераций.

Определение 6.5. Для любого $b\in S$ определим унарную операцию q^b на S^ω следующим образом:

$$[q^b(\nu)]\langle x,y\rangle=\begin{cases}\nu x & \text{в случае } y\notin K,\\ b & \text{в случае } y\in K,\end{cases}$$

где K — креативное множество.

Теорема 6.6. *Для любой $\nu\in S^\omega$ нумерация $p_aq^b(\nu)$ является наименьшим элементом предпорядка $(\{\mu\in C_2^{a,b}\mid\nu\leqslant\mu\};\leqslant)$.*

Понятие полурешетки с 2-дискретными замыканиями аналогично определению 6.3, только теперь имеем функции $f_i^j(i,j\in I)$ и вместо п. (4) имеем следующий: если $f_i^j(x)\leqslant f_k^l(y)$ и $i\neq k$, $j\neq l$, то $f_i(x)\leqslant y$. Аналог теоремы 6.4 формулируется следующим образом.

Теорема 6.7. *Структура $(S^\omega;\leqslant,\oplus,\{p_a\circ q^b\}_{a,b\in S})$ является полурешеткой с 2-дискретными замыканиями.*

Отметим дополнительно некоторые свойства введенных операций.

Предложение 6.8.

(1) *Если существует морфизм $f:\nu\to\nu$ без неподвижных точек, то $p_a(\nu)\not\leqslant p_c(\nu)$ при $a\neq c$.*
(2) *$f\circ p_a(\nu)=p_{f(a)}(f\circ\nu)$ для любой функции f, у которой* $\mathrm{dom}(f)=S$.
(3) *Для любых $a\neq c$ и ν нумерация ν является инфимумом нумераций $p_a(\nu)$ и $p_c(\nu)$.*
(4) *Для любого $b\in S$, q^b — операция замыкания на $(S^\omega;\leqslant)$.*
(5) *$p_aq^b(\nu)\equiv q^bp_a(\nu)$.*
(6) *$f\circ q^b(\nu)=q^{f(b)}(f\circ\nu)$ для любой функции f, у которой* $\mathrm{dom}(f)=S$.
(7) *$q^t(\mu\oplus\nu)\equiv q^t(\mu)\oplus q^t(\nu)$.*
(8) *$p_a(\lambda n.b)\equiv q^b(\lambda n.a)$.*

Далее рассмотрим предпорядки $(C_i;\leqslant)$, $i<3$. Будет удобна следующая терминология о предпорядках $(P;\leqslant)$.

Определение 6.9.

(1) Говорим, что множество $\{b_0,\dots,b_n\}$ элементов P является *слабым супремумом* для множества $\{a_0,\dots,a_m\}$ элементов P, если $a_i\leqslant b_j$ для всех $i\leqslant m$, $j\leqslant n$, и для любого $x\in P$, если $a_i\leqslant x$ для всех $i\leqslant m$, то $b_j\leqslant x$ для некоторого $j\leqslant n$. Понятие слабого инфимума вводится двойственным образом.
(2) $(P;\leqslant)$ назовем *дискретной слабой полурешеткой*, если для любых элементов $a_0,\dots,a_m\in P$ найдутся такие $b_0,\dots,b_n\in P$, что $\{b_0,\dots,b_n\}$ — слабый супремум для $\{a_0,\dots,a_m\}$, а $\{a_0,\dots,a_m\}$ — слабый инфимум для $\{b_0,\dots,b_n\}$.
(3) Говорим, что дискретная слабая полурешетка $(P;\leqslant)$ *имеет порядок n*, если любое непустое подмножество P имеет слабый супремум мощности n и найдется непустое конечное подмножество P, не имеющее слабого супремума мощности меньше n.

Заметим, что дискретные слабые полурешетки подобны полурешеткам в том смысле, что любое непустое конечное множество имеет слабый супремум. С другой стороны, они максимально далеки от полурешеток в том смысле, что, как легко вывести из определения, любое непустое конечное множество без наибольшего элемента не имеет обычного супремума.

Теорема 6.10.

(1) *Если S конечно, то $(C_1;\leqslant)$ — дискретная слабая полурешетка порядка $|S|$.*
(2) *Если S конечно, то $(C_2;\leqslant)$ — дискретная слабая полурешетка порядка $|S|^2$.*
(3) *Любое непустое конечное подмножество множества C_0 без наибольшего элемента не имеет слабого супремума в $(C_0;\leqslant)$.*

Из теоремы 6.10 следует, что все три структуры попарно не элементарно эквиваленты и что структура $(C_0;\leqslant)$ более хаотична, чем $(C_1;\leqslant)$ и $(C_2;\leqslant)$. Следующая теорема, обобщающая результат из [34], показывает все же наличие некоторой регулярности предполных нумераций в структуре полных нумераций.

Теорема 6.11. *Для любых $a \in S$, $\nu \in S^\omega$ и морфизма $f : \nu \to \nu$ без неподвижных точек не существует предполной нумерации μ со свойством $\nu \leqslant \mu < p_a(\nu)$.*

Из теоремы 6.11 вытекает следующий аналог следствия 3.8.

Следствие 6.12.

(1) *Если ξ — $\oplus$-замкнутая нумерация (подкласса) в.ч. функций, замкнутая вниз относительно $\leqslant$ и содержащая тождественную функцию id, то $\mathrm{rng}(\xi)$ — класс всех в.ч. функций.*
(2) *Любая допустимая нумерация, удовлетворяющая посылке п.* (1)*, вычислимо изоморфна нумерации φ.*

Для простоты обозначений мы формулировали результаты этого раздела в нерелятивизованной форме. Релятивизованные версии p^f, q^f введенных операций (в которых вместо υ берется υ^f, а вместо $K - K^f$) определены и подробно изучены в [27]). Для них справедливы аналоги всех приведенных выше результатов. Принципиально важно, что эти аналоги справедливы равномерно относительно оракулов (в некотором естественном смысле, объясненном в [75, 76]). Например, сводящие функции в соотношениях

$$\nu \leqslant p^f(\nu), \quad \mu \leqslant \nu \to p^f(\mu) \leqslant p^f(\nu)), \quad p^f(p^f(\nu)) \leqslant p^f(\nu)$$

(абсолютно) вычислимы и годятся сразу для всех оракулов.

Заметим, что операции p_a и их релятивизованные аналоги в несколько иных обозначениях были переоткрыты в [42], где также передоказаны некоторые их свойства (наряду с некоторыми новыми наблюдениями). В [43] эти свойства использованы для исследования релятивизованных варинтов полурешеток вычислимых нумераций (названных полурешетками Роджерса), играющих заметную роль в теории нумераций.

Согласно замечаниям в конце раздела 3, для любого оракула f отношения $\leqslant$ и $\leqslant^f$ совпадают на любом релятивизованном классе C_i^f, $i < 3$. Установим замкнутость этих классов относительно некоторых естественных операций на S^ω. Любой n-арной операции $g : S^n \to S$ поставим в соответствие n-арную операцию $\hat{g}$ на S^ω следующим образом:

$$\hat{g}(\nu_1, \ldots, \nu_n) = g \circ (\nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_n), \quad n > 1,$$
$$\hat{g}(\nu) = g \circ \nu, \quad n = 1,$$
$$\hat{g} = \lambda x.a \quad \text{для 0-арной функции } g \text{ с } \mathrm{rng}(g) = \{a\}.$$

Следующий результат вытекает из предложений 3.3(2) и 3.11(1).

Предложение 6.13. *Классы C_0^f, C_1^f и C_2^f замкнуты относительно всех операций $\hat{g}$.*

Теперь рассмотрим структуры C_i^f относительно предпорядков, которые слабее, чем $\leqslant$. Рассмотрим частный случай $S = k$, где $2 \leqslant k \leqslant \omega$. В этом случае $C_i^f \subseteq k^\omega$ являются классами функций, так что имеет смысл говорить о (тьюринговых) степенях элементов множества k^ω. Следующий результат получен в [40].

Теорема 6.14.

(1) *Степени нетривиальных f-полных нумераций из k^ω совпадают со степенями $\geqslant f'$.*
(2) *Степени нетривиальных f-2-полных нумераций из k^ω совпадают со степенями $\geqslant f'$.*
(3) *Степени нетривиальных f-предполных нумераций из k^ω совпадают со степенями множеств, отделяющих множества из фиксированной f-эффективно неотделимой пары непересекающихся f-в.п. множеств.*

Заметим, что в случае (3) имеем дело с известным классом степеней. Известно, например, что этот класс замкнут вверх и содержит степени $<f'$ (см. [60]). В нерелятивизованном случае $f = \emptyset$ этот класс имеет интересную характеризацию (см. [60]), из которой вытекает следующее утверждение.

Следствие 6.15. *Степени нетривиальных предполных нумераций из k^ω совпадают со степенями полных расширений арифметики Пеано.*

Закончим этот раздел открытым вопросом. Согласно следствию 3.14 существует множество $A \in 2^\omega$, являющееся полной нумерацией относительно и 0, и 1 (например, таким будет любое Σ^0_2-полное множество). Насколько «простым» может быть такое A? Из одного результата в [54] и теоремы 6.2 следует, что любое такое множество Δ^0_2-трудное. Существует ли такое Σ^0_2-множество, которое не Σ^0_2-полно? Отрицательный ответ на этот вопрос был бы нетривиальным фактом об определимости в структуре $(2^\omega; \leqslant, p_0, p_1)$, которая изучена очень слабо.

7. Иерархии

Обсудим применения полных нумераций в теории иерархий. Основная идея состоит в использовании операций пополнения из предыдущего раздела для порождения полных множеств в уровнях иерархий. Оказывается, итерируя эти операции подходящим образом, начиная с пустого множества, можно не только охарактеризовать большинство известных в теории вычислимости иерархий, но и получить новые, и даже прийти к полной (в некотором точном смысле) классификации иерархий арифметических множеств (см. [27]). Начнем с общего рабочего определения иерархии.

Определение 7.1.

(1) Под *ω-иерархией* понимаем такую последовательность множеств $\{C_n\}_{n<\omega}$, что $C_n \oplus \overline{C}_n \leqslant_m C_{n+1}$ и C_n — полная нумерация относительно 0 равномерно по n.
(2) Под *O-иерархией* понимаем такую последовательность множеств $\{C_{(a)}\}_{a\in O}$, что $C_{(a)} \oplus \overline{C}_{(a)} \leqslant_m C_{(b)}$ и $C_{(a)}$ — полная нумерация относительно 0 равномерно по $a <_O b$.

Появление полных нумераций в определении объясняется тем, что, согласно примерам из разделов 3 и 4 допустимые нумерации уровней известных иерархий полны относительно $\emptyset$, а m-полные множества в этих уровнях (рассматриваемые как нумерации из 2^ω) полны относительно 0. Определение упоминает только m-полные множества в уровнях $S_n = \{X \mid X \leqslant_m C_n\}$ иерархий, а не сами уровни. Из предложения 3.3(6) следует, что $C_n \not\leqslant_m \overline{C}_n$ для любого n и аналогично для трансфинитных версий иерархий из п. (2).

Под *оператором скачка* понимаем такую унарную операцию на J на 2^ω, что $A \oplus \bar{A} \leqslant J(A)$ и $J(A)$ — полная нумерация относительно 0 равномерно по A (заметим, что автоматически выполняется $A <_m J(A)$). Ясно, что для любого A, полного относительно 0, последовательность $\{J^{(a)}(A)\}$ итераций оператора J вдоль O начиная с A будет O-иерархией; обозначим ее через (J, A). Например, $(', \emptyset)$ — гиперарифметическая мерархия. Согласно предыдущему разделу, $J_m(A) = p_0(A \oplus \bar{A})$ — пример оператора скачка. Он был введен в [11] и назван *m-скачком*. Какая иерархия получится итерированием m-скачка начиная с пустого множества?

Теорема 7.2 (см. [11])**.** *Для любого $a \in O$ множество $J^{(a)}_m(\emptyset)$ является m-полным в $\Sigma^{-1}_{(a)}$.*

Конечные уровни иерархии Ершова имеют интересные альтернативные характеризации в терминах операций, введенных в предыдущем разделе. В следующей теореме п. (1) следует из результатов [27], а п. (2) — из результатов [52] и легко проверяемого равенства $q^0(A) = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A,\ b \notin K\}$.

Теорема 7.3.

(1) *Любое множество, полученное из $\emptyset$ применением конечного числа операций p_0 и $^-$, m-полно в одном из уровней Σ_n^{-1}, Π_n^{-1} $(n < \omega)$, и все возможности реализуются.*

(2) *Любое множество, полученное из $\emptyset$ применением конечного числа операций q^0 и $^-$, m-полно в одном из уровней Σ_n^{-1}, Π_n^{-1} $(n < \omega)$, и все возможности реализуются.*

Существует много других интересных иерархий, порождаемых «естественными» операторами скачка. Например, пусть J_m^n — m-скачок, релятивизованный к $\emptyset^{(n)}$ $(n < \omega)$, т.е. $J_m^n(A) = p_0^{\emptyset^{(n)}}(A \oplus \bar{A})$. Тогда $(J_m^n, \emptyset)$ — разностная иерархий над Σ_{n+1}^0. Более широкий класс ω-иерархий получается рассмотрением множеств, порождаемых из пустого множества всеми операциями J_m^n $(n < \omega)$; детали см. в [27]. Однако оказывается, что даже этих иерархий недостаточно для классификации многих простых арифметических множеств. В [27] найден класс иерархий с естественными свойствами замкнутости, которых достаточно для классификации большинства естественных арифметических множеств.

Этот класс получается итерированием операции $r : S^\omega \times S^\omega \times k^\omega \to S^\omega$, где S — абстрактное множество и $2 \leqslant k \leqslant \omega$. Положим $r(\mu, \nu, f) = \bigoplus\limits_n p^f_{\nu(n)}(\mu)$. Тогда

$$r(\mu, \lambda x.a, f) \equiv p^f_a(\mu), \quad r(\lambda x.b, \nu, f) = q^{b,f}(\nu)$$

для всех $a, b \in S$, так что r обобщает операции, введенные в разделе 10. Заметим, что для $S = k = 2$ операция r является тернарной операцией на множествах и $r(\omega, \emptyset, A) \equiv A'$, так что r обобщает также тьюрингов скачок. Она обобщает и все операторы скачка, упомянутые выше, а также позволяет определить много новых операторов скачка. А именно, для любых множеств B и C, если B — полная нумерация относительно 0, то $A \mapsto r(A \oplus \bar{A}, B, C)$ — оператор скачка. Это следует из определения и легко проверяемого свойства, что если ν — f-полная нумерация относительно a, то такова же и нумерация $r(\mu, \nu, f)$. Это свойство, наряду с другими свойствами r, установленными в [27], играет центральную роль в алгебраическом доказательстве следующего результата, классифицирующего структуру, порожденную операциями r, $^-$ и $\oplus$ из $\emptyset$ в классе 2^ω.

Определение 7.4.

(1) Для всех $n < \omega$ и $\alpha < \varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$ определим множества C_α^n индукцией по α следующим образом:

$$C_0^n = \emptyset, \quad C_{\omega^\gamma}^n = C_\gamma^{n+1} \text{ для } \gamma > 0, \quad C_{\alpha+1}^n = r(C_\alpha^n \oplus \overline{C}_\alpha^n, C_0^n, \emptyset^{(n)}),$$
$$C_{\alpha+\omega^\gamma}^n = r(C_\alpha^n \oplus \overline{C}_\alpha^n, C_{\omega^\gamma}^n, \emptyset^{(n)}) \text{ для } \alpha = \omega^\gamma \cdot \beta > 0 \text{ и } \gamma > 0.$$

(2) Положим

$$S_\alpha^n = \{X \mid X \leqslant_m C_\alpha^n\}, \quad \Sigma_\alpha = S_\alpha^0, \quad \Pi_\alpha = \{\bar{X} \mid X \in \Sigma_\alpha\}, \quad \Delta_\alpha = \Sigma_\alpha \cap \Pi_\alpha.$$

Определение использует ординальную арифметику, детали которой можно найти, например, в [66]. Корректность п. (1) определения следует из того, что любой ненулевой ординал однозначно представим в виде $\alpha = \omega^{\gamma_0} + \cdots + \omega^{\gamma_k}$ для подходящей последовательности $\gamma_0 \geqslant \cdots \geqslant \gamma_k$ ординалов $<\alpha$. Применяя пункты определения, последовательно получаем $C_{\omega^{\gamma_0}}^n$, $C_{\omega^{\gamma_0}+\omega^{\gamma_1}}^n$, …, C_α^n. Свойства полных нумераций и операций из предыдущего раздела играют центральную роль в доказательстве следующей теоремы из [27].

Теорема 7.5.

(1) *Для любых $\alpha < \beta < \varepsilon_0$, $C_\alpha^0 \not\leqslant_m \overline{C}_\alpha^0$, множество $C_\alpha^0 \oplus \overline{C}_\alpha^0$ является $\Delta_{\alpha+1}$-полным и*

$$C_\alpha^0 \oplus \overline{C}_\alpha^0 \leqslant_m C_\beta^0.$$

(2) *С точностью до m-эквивалентности класс множеств, порождаемых операциями r, $^-$, $\oplus$ из $\emptyset$, совпадает с классом множеств C^0_α, $\overline{C}^0_\alpha$, $C^0_\alpha \oplus \overline{C}^0_\alpha$ ($\alpha < \varepsilon_0$).*

В [27] показано, как из последовательности $\{\Sigma_\alpha\}$ (называемой далее тонкой иерархией арифметических множеств) можно извлечь семейство иерархий, составляющее (в определенном точном смысле) полную иерархическую классификацию арифметических множеств. В дальнейшем уровни тонкой иерархии были охарактеризованы в терминах теоретико-множественных операций, и на этой основе показано, что тонкая иерархия является конечным эффективным аналогом иерархии Вэджа борелевских множеств (см. [34, 37, 77, 78]). Были также изучены полезные варианты тонкой иерархии в ряде разделов логики и теории вычислений, обобщающие многие известные иерархии. Детали можно найти в обзоре [81].

В [64] дано некоторое уточнение понятия «естественной» m-степени и получена характеризация таких степеней в терминах иерархии Вэджа. Из этой работы и свойств операций p^f_a из предыдущего раздела (включая отмеченную равномерность по оракулам) следует, что все m-степени полных в уровнях тонкой иерархии множеств являются естественными в смысле работы [64]. Более того, такими множествами (и их трансфинитными итерациями) исчерпываются все естественные арифметические m-степени.

Многие эксперты изучали (тьюринговы) степени множеств в иерархии Ершова. Принципиальным был результат Б. Купера о том, что существует разность двух в.п. множеств, не эквивалентная по Тьюрингу никакому в.п. множеству (см. [46]). В [62] и независимо в [30] этот результат был распространен на все уровни иерархии Ершова, т.е. показано, что эта иерархия не схлопывается по модулю тьюринговой эквивалентности. В [2, 61, 62] введена так называемая CEA-иерархия, в некотором смысле расширяющая иерархию Ершова. В [62] показано, что эта иеархия имеет глубокие применения к теории степеней. В [32, 38] полностью описаны соотношения (по модулю тьюринговой эквивалентности) между этими иерархиями, а также иерархией высоких-низких степеней (см. [73]), в классе степеней, лежащих под $0'$.

Интересным и трудным является вопрос об описании собственных уровней тонкой иерархии (т.е. уровней, содержащих множества, не эквивалентные по Тьюрингу множествам из более низких уровней). Недавно был достигнут прогресс в этом вопросе (см. [41, 84]). Например, было показано, что все уровни $\Sigma_{\omega+n+2}$, $n < \omega$, — собственные, а все уровни $\Sigma_{\lambda+1}$ (λ предельный) — не собственные.

В [29, 47] подробно изучена иерархия предельно вычислимых функций, расширяющая иерархию Ершова (если множества отождествить с характеристическими функциями). Эта иерархия была расширена в [28] на все арифметические функции, что дает, в частности, расширение тонкой иерархии с множеств на функции.

Как известно, «эффективные» иерархии теории вычислимости тесно связаны с классическими иерархиями дескриптивной теории множеств (см. [71, 75]), а именно, каждая эффективная иерархия в бэровском пространстве «в пределе» переходит в соответствующую классическую иерархию (арифметическая иерархия — в иерархию Бореля, разностная иерархия — в иерархию Хаусдорфа, тонкая иерархия — в иерархию Вэджа). Грубо говоря, «предельный переход» состоит просто в объединении по всем оракулам одинаковых уровней релятивизованных эффективных иерархий. При этом все уровни классических иерархий получают индуцированные представления, являющиеся предполными в упомянутом в конце предыдущего раздела смысле. Тесная связь эффективных и классических иерархий играет заметную роль в бурно развивающемся в последнее время вычислимом анализе (см. также [83] и приведенную там литературу).

8. Экстенсиональное описание индексных множеств

Этот и следующие два раздела посвящены индексным множествам. Заметим, что формулировки этого раздела не упоминают предполноту явно, однако полные нумерации играют определенную роль в доказательствах.

Напомним, что ν-индексное множество класса $X \subseteq \mathrm{rng}(\nu)$ — это просто прообраз $\nu^{-1}(X)$. Для естественных нумераций индексные множества представляют проблему разрешения для X. Здесь

рассмотрим проблему экстенсионального (т.е. не упоминающего явно имена n объектов νn) описания классов X, для которых $\nu^{-1}(X)$ принадлежит данному классу множеств $\mathcal{C}$. Классический пример — теорема Райса 3.4, дающее такое описание для класса $\mathcal{C} = \Delta^0_1$. Ее можно переформулировать в следующем виде.

Теорема 8.1. *Для любой предполной нумерации ν и любого $X \subseteq \mathrm{rng}(\nu)$ множество $\nu^{-1}(X)$ вычислимо в точности тогда, когда $X = \emptyset$ или $X = \mathrm{rng}(\nu)$.*

Теорема Райса неформально означает, что все нетривиальные проблемы разрешимости для предполных нумераций невычислимы. Для класса $\mathcal{C} = \Sigma^0_1$ проблема экстенсионального описания несколько сложнее. Для нумерации Поста π решение дает следующий результат, известный как теорема Райса—Шапиро. Формулировка использует топологию на классе $\mathcal{E}$ всех в.п. множеств, базисными открытыми множествами которой являются множества вида $O_A = \{A \in \mathcal{E} \mid F \subseteq A\}$, где F — конечное множество. Если обозначить стандартную нумерацию всех конечных множеств через δ, открытые множества можно записать в виде $O_{\delta(U)} = \bigcup\limits_{u \in U} O_{\delta(u)}$, где U — произвольное множество.

Определение 8.2. Классы вида $O_{\delta(U)}$, где U — в.п. множество, называются *эффективно открытыми.*

Теорема 8.3. *Для любого $X \subseteq \mathcal{E}$ множество $\pi^{-1}(X)$ в.п. в точности тогда, когда X эффективно открыто.*

Теорема Райса—Шапиро справедлива для широкого класса нумераций, а именно для тех, которые обладают так называемой аппроксимацией (см. [13, 49]). Все результаты этого раздела справедливы для довольно широких подклассов таких нумераций (см. [28]), включающих, например, нумерации π и φ, нумерации функционалов из раздела 4, а также всевозможные декартовы произведения этих нумераций. Для простоты формулируем их здесь только для нумерации π.

Рассмотрим проблему экстенсионального описания для уровней $\mathcal{C} = \Sigma^0_n$, $n > 1$, арифметической иерархии. Для ее решения построим из класса всех эффективно открытых множеств «экстенсионально определенные» классы E^0_{n+1}, используя теоретико-множественные операции, которыми можно построить уровни Σ^0_{n+1} из в.п. множеств.

Пусть $(B; \beta)$ нумерованная подалгебра булевой алгебры $P(S)$ всех подмножеств абстрактного множества S (т.е. B — подалгебра $P(S)$ и β — нумерация B, в которой все булевы операции вычислимы).

Определение 8.4. Пусть T_{n+1} — класс множеств $\bigcup_{i_0} \bigcap_{i_1} \cdots \square_{i_n} \beta f \langle i_0, \ldots, i_n \rangle$, где символы $\cup, \cap, \ldots$ чередуются и функция f вычислима. Последовательность $\{T_{n+1}\}_{n<\omega}$ назовем эффективной иерархией Бореля над $(B; \beta)$ в $P(S)$.

Введенные классы упорядочены «как надо», т.е. $T_n \cup \check{T}_n \subseteq T_{n+1}$, где $\check{T}_n$ — класс всех дополнений до множеств из T_n. Последовательность $\{T_{n+1}\}$ имеет свойства, похожие на свойства иерархии Бореля. Классы T_n имеют естественные 2-полные нумерации, индуцированные нумерациями β и π (детали см. в [26, 28]). Полнота этих нумераций относительно $\emptyset$ существенна для доказательства некоторых свойств эффективной иерархии Бореля.

Чтобы применить введенные понятия к поставленной проблеме, определим нумерацию o всех эффективно открытых множеств соотношением $o_n = O_{\delta(\pi_n)}$. Пусть B — булева алгебра, порожденная эффективно открытыми множествами в $P(\mathcal{E})$. Пусть β — нумерация B, индуцируемая нумерацией o и геделевой нумерацией булевых термов, тогда $(B; \beta)$ — нумерованная булева алгебра. Пусть $\{E^0_n\}_{n \geqslant 2}$ — эффективная иерархий Бореля, порожденная алгеброй $(B; \beta)$ в $P(\mathcal{E})$ (для удобства дальнейших формулировок начали нумерацию с 2), и пусть E^0_1 — класс эффективно открытых множеств.

Теорема 8.5. *Для всех $n \geqslant 3$ и $X \subseteq \mathcal{E}$ имеем $\pi^{-1}(X) \in \Sigma^0_n$ в точности тогда, когда $X \in E^0_n$.*

Этот результат из [26, 28] решает проблему для уровней $n \geqslant 3$ (заметим, что в [45] проблема обсуждается как открытая без ссылок на наши работы).

Остается рассмотреть уровень Σ^0_2. Оказывается, для этого уровня ситуация принципиально иная и аналогичное предыдущему экстенсиональное описание невозможно. Чтобы это понять, заметим, что класс I_n всех π-индексных множеств из Σ^0_n ($n = 1$, $n > 2$) является Σ^0_n-вычислимым, т.е. $I_n = \nu(U)$ для некоторого в.п. множества U, где ν — допустимая нумерация класса Σ^0_n (это было замечено в [26]).

Для уровня Σ^0_2 ситуация противоположная. Назовем множество $X \subseteq \mathrm{rng}(\nu)$ *ν-продуктивным*, если существует такая вычислимая функция p, что $\nu(\pi_x) \subseteq X$ влечет $\nu p(x) \in X \setminus \nu(\pi_x)$. Конечно, ν-продуктивные множества не являются ν-вычислимыми.

Теорема 8.6. *Класс всех π-индексных множеств из Σ^0_2 является Σ^0_2-продуктивным.*

Этот результат из [26, 28] показывает, что не существует описания всех π-индексных множеств из Σ^0_2, аналогичного приведенным выше (поскольку они индуцируют вычислимую нумерацию соответствующих индексных множеств). В частности, включение $\{X \subseteq \mathcal{E} \mid \pi^{-1}(X) \in \Sigma^0_2\} \supset E^0_2$ собственное, поскольку нумерация класса E^0_2 индуцирует Σ^0_2-вычислимую нумерацию соответствующих индексных множеств.

Далее рассмотрим проблему экстенсионального описания для уровней $\mathcal{C} = \Sigma^{-1}_k$ иерархии Ершова. В этом случае естественным кандидатом на решение является разностная иерархия E^{-1}_k над E^0_1 (класс E^{-1}_k состоит из классов вида $\bigcup\limits_i (A_{2i} \setminus A_{2i+1})$, где $A_i \in E^0_1$ таковы, что $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots$ и $A_k = 0$).

Теорема 8.7. *Для всех $n > 1$ и $X \subseteq \mathcal{E}$ с вычислимым множеством $\delta^{-1}(X)$ имеем $\pi^{-1}(X) \in \Sigma^{-1}_n$ в точности тогда, когда $X \in E^{-1}_n$.*

Этот результат получен в [50], где был также задан вопрос о том, следует ли из $\pi^{-1}(X) \in \Sigma^{-1}_k$ соотношение $X \in \bigcup\limits_n E^{-1}_n$. В [22] и независимо в [58] был получен отрицательный ответ; в частности, включение $E^{-1}_k \subset \{X \subseteq \mathcal{E} \mid \pi^{-1}(X) \in \Sigma^{-1}_k\}$ собственное (впервые это установлено в [57]). В [28] это было усилено до следующего аналога теоремы 8.6.

Теорема 8.8. *Для любого $k > 1$ класс всех π-индексных множеств из Σ^{-1}_k является Σ^{-1}_k-продуктивным (поэтому он не является Σ^{-1}_k-вычислимым, и включение $E^{-1}_k \subset \{X \subseteq \mathcal{E} \mid \pi^{-1}(X) \in \Sigma^{-1}_k\}$ собственное).*

Статья [28] содержит несколько вариаций на эту тему (например, множество $\{X \subseteq \mathcal{E} \mid \pi^{-1}(X) \in \Sigma^{-1}_2\}$ содержится в E^0_2, но не содержится в $\check{E}^0_2$). Один из оставшихся открытых вопросов: существует ли Π^0_2-вычислимый класс π-индексных множеств, содержащий все индексные множества из Σ^{-1}_2?

Аналогичные результаты известны для уровней $\Sigma^{-1,\emptyset^{(n)}}_k$ разностной иерархии, релятивизованной к $\emptyset^{(n)}$. Пусть $\{E^{-1,n}_k\}$ — разностная иерархия над E^0_{n+1} (заметим, что $E^{-1,0}_k = E^{-1}_k$). Следующий факт доказан в [28].

Теорема 8.9.

(1) *Для любых $n > 1$, $k < \omega$ и $X \subseteq \mathcal{E}$ имеем $\pi^{-1}(X) \in \Sigma^{-1,\emptyset^{(n)}}_k$ в точности тогда, когда $X \in E^{-1,n}_k$.*

(2) *Для любого $k > 0$ класс всех π-индексных множеств из $\Sigma^{-1,\emptyset'}_k$ является $\Sigma^{-1,\emptyset'}_k$-продуктивным (поэтому он не является $\Sigma^{-1,\emptyset'}_k$-вычислимым и включение $E^{-1,1}_k \subset \{X \subseteq \mathcal{E} \mid \pi^{-1}(X) \in \Sigma^{-1,\emptyset'}_k\}$ собственное).*

В заключение этого раздела обсудим проблему экстенсионального описания для уровней $\mathcal{C} = \Sigma_\alpha (\alpha < \varepsilon_0)$ тонкой иерархии. Естественным кандидатом на решение являются уровни $\mathcal{S}^0_\alpha$ тонкой иерархии над $L = \{E^0_{n+1}\}$ (см. определение тонкой иерархии в терминах теоретико-множественных операций в [77]). Следующий результат вытекает из теорем 8.5 и 8.9(1) и обобщает их.

Предложение 8.10. *Для любого $X \subseteq \mathcal{E}$ и любого ординала α вида $\alpha = \omega^{\omega^\gamma} (0 < \gamma < \varepsilon_0)$ имеем $\pi^{-1}(X) \in \Sigma_\alpha$ в точности тогда, когда $X \in \mathcal{S}^0_\alpha$.*

Мы не знаем ответ на следующий вопрос, является ли Σ_α-продуктивным класс всех π-индексных множеств из Σ_α, для любого $\alpha \in \varepsilon_0 \setminus \{0, 1, \omega^{\omega^\gamma} \mid 0 < \gamma < \varepsilon_0\}$.

Заметим, что эффективные иерархии этого раздела можно аналогичным образом определить для широкого класса эффективных топологических пространств. Рассмотрение таких иерархий интересно для упомянутой в конце предыдущего раздела эффективной дескриптивной теории множеств (см. [83]).

9. Оценки сложности индексных множеств

Возможно, самым популярным направлением изучения индексных множеств является оценка (m-степеней) индексных множеств конкретных интересных классов объектов. Мы обсудим лишь малую часть результатов этого нарправления, непосредственно относящихся к предполным нумерациям. Согласно разделу 4, многие естественные нумерации допустимы, поэтому m-степени не зависят от выбора конкретных таких нумераций данного класса объектов. Более того, многие из этих нумераций предполны, поэтому m-степени индексных множеств состоят из единственного типа вычислимого изоморфизма.

Сначала обсудим следствия результатов раздела 5. Пусть ν — допустимая нумерация уровня $\Sigma^{-1}_{(a)}$ иерархии Ершова, C — $\Sigma^{-1}_{(a)}$-полное множество, и $\leqslant_r$ — сильная сводимость. Интерпретируя теорему 5.3 в данной ситуации, получаем следующий результат (см. [31, 34, 74]).

Теорема 9.1. *Для любых $a_O > 1$ и $A, A_0, \dots, A_n \in \Sigma^{-1}_{(a)}$, имеем:*

(1) *если $\emptyset <_r A$, то $\{x \mid A \leqslant_r \nu x\}$ Σ^0_3-полно;*
(2) *если $A <_r C$, то $\{x \mid \nu x \leqslant_r A\}$ Σ^0_3-полно;*
(3) *если $\emptyset <_r A <_r C$, то $\{x \mid A \not\leqslant_r \nu x \wedge \nu x \not\leqslant_r A\}$ Π^0_3-полно;*
(4) *множество $\{x \mid \nu x = A_0 \vee \dots \vee \nu x = A_n\}$ Σ^0_3-полно.*

Заметим, что $\Sigma^{-1}_{(2)} = \Sigma^0_1$, поэтому при $r = m$ получаем известные оценки индексных множеств в.п. m-степеней, полученные впервые Ч. Ейтсом и С. Каллибековым (см. [14]). Теорема 9.1 обобщает эти результаты на все уровни иерархии Ершова и на все сильные сводимости. При этом доказательства заметно проще доказательств Ч. Ейтса и С. Каллибекова (использующих метод приоритета), поскольку вытекают из теорем о неподвижной точке (в доказательстве теоремы 5.3) и простой пошаговой конструкции (в доказательстве теоремы 4.9). Аналогичные замечания справедливы и для других результатов этого раздела, вплоть до теоремы 9.5.

Применяя теорему 5.3 к структуре $(\Sigma^0_1; \leqslant^\omega_T)$ из раздела 5, получим аналог теоремы 9.1 с нумерацией π вместо ν и классом Σ^0_ω всех множеств в.п. относительно $\emptyset^{(\omega)}$ вместо Σ^0_3. Частным случаем этого является следующая оценка из [60, 86], где L (соответственно, H) — класс всех таких в.п. множеств A, что $A^{(n)} \equiv_T \emptyset^{(n)}$ (соответственно, $A^{(n)} \equiv_T \emptyset^{(n+1)}$) для некоторого $n < \omega$.

Следствие 9.2. *π-Индексные множества классов L, H и $L \cup H$ являются Σ^0_ω-полными.*

К структуре $(\Sigma^{-1}_{(a)}; \leqslant_r)$ применима также теорема 5.4. Так получается следующая оценка, которая, по-видимому, не была известна до работы [34]. Используем обозначения теоремы 9.1.

Теорема 9.3.

(1) *Если $\emptyset <_r A <_r C$, то $\{x \mid A <_r \nu x\}$ является $\Sigma_2^{-1,\emptyset^{(2)}}$-полным.*
(2) *Если $\emptyset <_r A_0 <_r A_1 <_r A_2 < \cdots$, то множества $\{x \mid A_0 \leqslant_r \nu x \wedge A_1 \not\leqslant_r \nu x\}$, $\{x \mid (A_0 \leqslant_r \nu x \wedge A_1 \not\leqslant_r \nu x) \vee A_2 \leqslant_r \nu x\}, \dots$ являются m-полными соответственно в $\Sigma_2^{-1,\emptyset^{(2)}}$ и $\Sigma_3^{-1,\emptyset^{(2)}}, \dots$.*

Заметим, что доказательство с использованием предполных нумераций опять очень простое. По-видимому, прямое доказательство было бы технически сложным и громоздким.

Теоремы 9.1 и 9.3 применимы также к структурам $(K_n; \leqslant_m)$ и $(K_n; \leqslant_{sm})$ из раздела 5. К последней структуре применима также теорема 5.5. Так получается следующий результат, в котором $\emptyset$ и C обозначают соответственно наименьший и наибольший элемент решетки $(K_n; \leqslant_{sm})$.

Теорема 9.4. *Для любых $A, B \in K_n$ имеем*:

(1) *если $\emptyset <_{sm} B <_{sm} C$, то $\{x \mid \nu x <_{sm} B\}$ является $\Sigma_2^{-1,\emptyset^{(2)}}$-полным*;

(2) *если $\emptyset <_{sm} A$ или $B <_{sm} C$, то $\{x \mid A <_{sm} \nu x <_{sm} B\}$ является $\Sigma_2^{-1,\emptyset^{(2)}}$-полным.*

Теперь сформулируем два результата, оценивающих индексные множества из некоторых бесконечных последовательностей. Следующий результат независимо получен в [11] и [51].

Теорема 9.5. *π-Индексное множество любого конечного класса конечных множеств m-полно в одном из уровней Σ_{2k}^{-1}, Π_{2k+1}^{-1} $(k < \omega)$, и все возможности реализуются.*

В [28] получен общий результат такого типа, обобщающий теорему 9.5 и некоторые результаты из [58].

Теорема 9.6. *Если нумерация ν полна над некоторой своей аппроксимацией ν_0 и $X \subseteq \mathrm{rng}(\nu)$ таково, что $\nu^{-1}(X) \in \bigcup_{k<\omega} \Sigma_k^{-1}$ и $\nu_0^{-1}(X)$ вычислимо, то $\nu^{-1}(X)$ m-полно в одном из уровней Σ_{2k}^{-1}, Π_{2k+1}^{-1} $(k < \omega)$.*

Мы не напоминаем довольно техническое понятия, связанные с аппроксимациями (см. [13,49]). Отметим лишь, что класс нумераций из теоремы 9.6 довольно широк, в частности он включает π, φ, нумерации функционалов конечных типов и замкнут относительно произведения.

10. Структуры степеней индексных множеств

Обсудим структуры I_ν всех ν-индексных множеств по сводимостям $\leqslant_m$ и $\leqslant_T$. Эта тема возникла из теоремы Райса и развивалась несколькими исследователями, включая Л. Хэй. Результаты раздела 6 позволяют свести многие результаты этого направления к рутинным алгебраическим вычислениям.

Структуры $(I_\nu; \leqslant_m)$ оказываются тесно связанными со структурами $(C_i^f; \leqslant)$, $i \leqslant 2$, из раздела 6, рассматриваемыми для случая $S = 2$ (так, C_0^f — класс всех f-предполных множеств из 2^ω). Как и в разделе 6, наши обозначения не различают предпорядок и соответствующий фактор-порядок.

Теорема 10.1. *Если нумерация ν универсальная f-предполная (соответственно, f-полная, f-2-полная), то структура $(I_\nu; \leqslant_m)$ изоморфна структуре $(C_0^f; \leqslant)$ (соответственно, $(C_1^f; \leqslant)$, $(C_2^f; \leqslant)$).*

Несмотря на простоту, этот факт из [25,34] принципиален для данного направления, поскольку дает возможность применения результатов раздела 6 к структуре $(I_\nu; \leqslant_m)$. Например, если $\mu \equiv_q \nu$, то $(I_\mu; \leqslant_m)$ и $(I_\nu; \leqslant_m)$ изоморфны. Поэтому при рассмотрении универсальных нумераций можно ограничиться примерами γ^f, φ^f и π^f из раздела 4. В качестве частного случая теоремы 6.10 получаем следующее утверждение.

Теорема 10.2.

(1) $(I_{\varphi^f}; \leqslant_m)$ — *дискретная слабая полурешетка порядка* 2.

(2) $(I_{\pi^f}; \leqslant_m)$ — *дискретная слабая полурешетка порядка* 4.

(3) *Любое непустое конечное подмножество множества I_{γ^f} без наибольшего элемента не имеет слабого супремума в $(I_{\gamma^f}; \leqslant_m)$.*

Применяя этот результат к нумерациям из раздела 4, получаем следующие факты о структурах $(I_\nu; \leqslant_m)$, прямое доказательство которых нетривиально.

Следствие 10.3.

(1) $(I_\varphi; \leqslant_m)$ — *дискретная слабая полурешетка порядка* 2.

(2) $(I_\pi; \leqslant_m)$ — *дискретная слабая полурешетка порядка* 4.

(3) *Для любой нумерации $\nu = \pi/\equiv_T^n$ из теоремы* 4.12 $(I_\nu; \leqslant_m)$ — *дискретная слабая полурешетка порядка* 2.

(4) *Для любой нумерации* $\nu = \pi/\sim$ *из теоремы* 4.14 $(I_\nu; \leqslant_m)$ — *дискретная слабая полурешетка порядка* 4.

Заметим, что п. (1) был впервые получен независимо в [16] и [68], а п. (2) — в [24]. Пункты (3), (4) были доказаны в [31, 74].

Теорема Райса из раздела 3 и теорема 4.12 дают следующий частный случай следствия 10.3(3).

Следствие 10.4. *Для любой нумерации* $\nu = \pi/\equiv^n_T$ *из теоремы* 4.12 *любое нетривиальное* ν*-индексное множество либо* Σ^0_{n+3}*-трудное, либо* Π^0_{n+3}*-трудное.*

Последний результат впервые был получен К. Джокушем прямой конструкцией (см. [60, 86]). Доказательство теоремы 4.12 в [74] использует доказательство К. Джокуша.

Теорема 10.2 дает некоторые «глобальные» факты о структурах $(I_\varphi; \leqslant_m)$ и $(I_\pi; \leqslant_m)$. Теперь рассмотрим «локальные» факты о подструктурах, порождаемых операциями слабого супремума. Пусть $A_0 = \emptyset$ и $A_{n+1} = p_0(A_n \oplus \bar{A}_n)$.

Предложение 10.5.

(1) *Для любого* $n < \omega$ *множество* A_n Σ^{-1}_n*-полно.*
(2) *Для любого* $n < \omega$, $\{A_{n+1}, \bar{A}_{n+1}\}$ — *слабый супремум для* $\{A_n, \bar{A}_n\}$, *а* $\{A_n, \bar{A}_n\}$ — *слабый инфимум для* $\{A_{n+1}, \bar{A}_{n+1}\}$ *в* $(I_\varphi; \leqslant_m)$.
(3) $\{A_n, \bar{A}_n \mid n \leqslant 1\}$ — *начальный сегмент* $(I_\varphi; \leqslant_m)$.
(4) *Сегмент* $(\{X \in I_\varphi \mid A_1 \leqslant X \leqslant A_2\}; \leqslant)$ *изоморфен структуре всех в.п. m-степеней* (*поэтому* $\{A_n, \bar{A}_n \mid n \leqslant 2\}$ *не является начальным сегментом* $(I_\varphi; \leqslant_m)$).
(5) *Все интервалы* $\{X \mid \bar{A}_n < X < A_{n+1}\}$ *пусты.*

Заметим, что п. (1) установлен в разделе 7, а остальные утверждения следуют из свойств операции p_0 в разделе 10 (изоморфизм в (4) индуцируется отображением $X \mapsto p_0(\bar{X})$). Пункт (2) и другие интересные свойства введенных объектов были впервые независимо получены в [16, 68].

Из предложения 6.8 следует, что любое множество A_n m-эквивалентно некоторому π-индексному множеству, поэтому $\{A_n\}$ можно рассматривать и как последовательность элементов I_π. Установим некоторые свойства этой последовательности в I_π.

Предложение 10.6.

(1) *Для любого* $n < \omega$, $\{A_{n+1}, \bar{A}_{n+1}\}$ —*слабый супремум для* $\{A_n, \bar{A}_n\}$, *а* $\{A_n, \bar{A}_n\}$ — *слабый инфимум для* $\{A_{n+1}, \bar{A}_{n+1}\}$ *в* $(I_\pi; \leqslant_m)$.
(2) $\{A_n, \bar{A}_n \mid n \leqslant 2\}$ — *начальный сегмент* $(I_\pi; \leqslant_m)$.
(3) *Сегмент* $(\{X \in I_\pi \mid X \leqslant A_3\}; \leqslant)$ *является сложной структурой, содержащей изоморфную копию структуры m-степеней простых множеств* (*поэтому* $\{A_n, \bar{A}_n \mid n \leqslant 3\}$ *не является начальным сегментом* $(I_\pi; \leqslant_m)$).
(4) *Все интервалы* $\{X \mid \bar{A}_n < X < A_{n+1}\}$ *и* $\{X \mid A_n < X < A_{n+1}\}$ *пусты.*

Приведенные свойства доказаны в [52, 55] (только утверждение об m-степенях простых множеств взято из [23]), но могут быть легко выведены из свойств операций в разделе 6. Заметим, что Л. Хэй доказала и ряд других свойств последовательностей π-индексных множеств $\{B_n\}$ с условиями $B_n < B_{n+1}$ и $\{X \in I_\pi \mid B_n < X < B_{n+1}\} = \emptyset$ (она называет такие последовательности *дискретными* ω*-последовательностями*). Например (см. [53]), любая тьюрингова степень над $0'$ содержит дискретную ω-последовательность.

Теперь рассмотрим структуры $(I_\nu; \leqslant_T)$ (тьюринговых) степеней ν-индексных множеств. Из теорем 6.14 и 10.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 10.7.

(1) *Степени нетривиальных* π*-индексных множеств* (*а также* φ*-индексных множеств*) *совпадают со степенями, лежащими над* $0'$.
(2) *Степени нетривиальных* $\pi/\equiv^n_T$*-индексных множеств* (*где* $\equiv^n_T$ *взято из теоремы* 4.12) *совпадают со степенями, лежащими над* $0^{(n+3)}$.
(3) *Степени нетривиальных* $\pi/\sim$*-индексных множеств* (*где* $\sim$ *взято из теоремы* 4.14) *совпадают со степенями, лежащими над* $0^{(2)}$.

Заметим, что п. (1) впервые доказан в [54], а п. (2) (для случая $n = 0$) — в [94].

Из теорем 6.14, 4.9 и 4.13 получаем следующий результат (см. [34]). Утверждение (2) в этом следствии отвечает на вопрос работы [60].

Следствие 10.8.

(1) *Степени нетривиальных индексных множеств нумерации* $\Sigma^{-1}_{(a)}/\equiv_r$ *из теоремы* 4.9 *совпадают со степенями множеств, отделяющих элементы некоторой* $0^{(2)}$*-эффективно неотделимой пары непересекающихся* $0^{(2)}$*-в.п. множеств.*

(2) *Степени нетривиальных индексных множеств нумерации* $\pi/\equiv^{\omega}_T$ *из теоремы* 4.13 *совпадают со степенями множеств, отделяющих элементы некоторой* $0^{(\omega)}$*-эффективно неотделимой пары непересекающихся* $0^{(\omega)}$*-в.п. множеств.*

Из следствия 6.15 получаем следующее описание степеней γ-индексных множеств.

Следствие 10.9. *Степени нетривиальных* γ*-индексных множеств совпадают со степенями полных расширений арифметики Пеано.*

Из приведенных результатов и известных результатов об элементарных теориях структур степеней (см., например, [72]) следует, что элементарные теории структур $(I_\nu; \leqslant_T)$ для универсальных нумераций из раздела 4 m-эквивалентны арифметике второго порядка. В [36] доказана эта же оценка сложности теории структуры $(I_{\varphi^f}; \leqslant_m)$. Нам не известно, выполняется ли та же оценка для структур $(I_{\pi^f}; \leqslant_m)$ и $(I_{\gamma^f}; \leqslant_m)$.

11. Структуры степеней неразрешимости

Приведем примеры применения результатов раздела 5 к структурам степеней. Результаты, авторство которых явно не указано, получены в [34]. Первое применение вытекает из теоремы 5.3.

Следствие 11.1. *Структура* $(\Sigma^0_1; \leqslant^{\omega}_T)$ *эффективно широкая*; *в частности, в ней истинно предложение* $\forall a(0 < a < 1 \to \exists b(a \not\leqslant b \wedge b \not\leqslant a))$.

В [60] показано, что структура $(\Sigma^0_1; \leqslant^{\omega}_T)$ плотна. По-видимому, открыт вопрос о том, является ли $(\Sigma^0_1; \leqslant^{\omega}_T)$ верхней (или нижней) полурешеткой.

Следующий результат является частным случаем теоремы 5.4. Соответствующий факт справедлив также для других структур из конца раздела 5.

Следствие 11.2. *Для любого* $a_O > 1$ *и любой сильной сводимости* $\leqslant_r$ *имеем*:

(1) *структура* $(\Sigma^{-1}_{(a)}; \leqslant_r)$ *эффективно плотна вверх*;

(2) *для любого* $n < \omega$ *найдутся такие* $A_0, \ldots, A_n \in \Sigma^{-1}_{(a)}$, *что* $A_k \not\leqslant_r \bigoplus_{l \neq k} A_l$ *для всех* $k \leqslant n$.

Для случая в.п. m- и tt-степеней утверждения (1) и (2) были доказаны соответственно в [8] и [15] с использованием метода приоритета. Следствие 11.2 дает широкое обобщение этих результатов с коротким и ясным доказательством.

В [10] доказано, что для любого $k < \omega$ структура всех $(n+1)$-кортежей попарно непересекающихся в.п. множеств по отношению $\leqslant_{sm}$ является плотной. Из теоремы 5.5 и того факта, что $(K_n; \leqslant_{sm})$ — специальная $\emptyset^{(2)}$-решетка, получаем следующее уточнение результата из [10].

Следствие 11.3. *Для любого* $n < \omega$ *структура* $(K_n; \leqslant_{sm})$ *является эффективно плотной.*

Теорема 5.5 влечет также следующий результат о структурах $(A_{n,k}; \leqslant)$, где $\leqslant$ — частичный порядок, индуцированный импликацией формул.

Следствие 11.4. *Для любых* $n, k < \omega$ *структура* $(A_{n,k}; \leqslant)$ *является эффективно плотной.*

Для некоторых структур этого раздела открыт вопрос о (не)разрешимости элементарных теорий соответствующих фактор-структур.

Замечание 11.5. Как и в разделе 10, результаты этого раздела доказываются простым применением теоремы о неподвижной точке без использования метода приоритета. По-видимому, этих простых методов все же недостаточно для доказательства большинства глубоких фактов о структурах степеней.

12. Степени без неподвижных точек

По теореме о неподвижной точке любая вычислимая функция имеет неподвижную точку в нумерации φ. Теорема 3.2 обобщает это утверждение на все предполные нумерации. Согласно релятивизации теоремы 3.2 любая A-вычислимая функция (для любого оракула $A \subseteq \omega$) имеет неподвижную точку в любой A-предполной нумерации. Естественно спросить, какие еще функции имеют неподвижную точку в A-предполных нумерациях.

Теорема 12.1. *Пусть $B - A$-в.п. множество, удовлетворяющее $A \leqslant_T B <_T A'$. Тогда любая B-вычислимая функция f имеет неподвижную точку в любой A-предполной нумерации.*

Эту теорему можно сформулировать в виде критерия полноты.

Следствие 12.2. *Пусть $\nu - A$-предполная нумерация, $A \leqslant_T B$, $B - A$-в.п. множество и пусть существует B-вычислимая функция без ν-неподвижных точек. Тогда $B \equiv_T A'$.*

Для принципиального частного случая $\nu = \pi$ и $A = \emptyset$ утверждения 12.1 и 12.2 (известные как критерий полноты Арсланова) получены в [5] и (с упрощенным доказательством) в [86]. Доказательство теоремы 12.1 в [31,74] является прямым обобщением доказательства в [86]. В [60] критерий полноты Арсланова был обобщен на все n-СЕА ($n < \omega$) множества B (вместо в.п. множеств B выше). Доказательство этого обобщения значительно сложнее, чем доказательство теоремы 12.1.

Критерий полноты Арсланова можно использовать для демонстрации того интересного феномена, что эффективные версии ряда классов в.п. невычислимых множеств (например, эффективно простых, эффективно гиперпростых и т. п.) автоматически приводят к полным (по Тьюрингу) множествам. Много примеров такого рода можно найти в [6].

Нашей следующей целью будет характеризация (тьюринговых) степеней, содержащих функции без ν-неподвижных точек, где ν — одна из нумераций, специфицированных ниже. Обозначим через FPF_ν множество всех таких функций, а также множество степеней всех таких функций.

Определение 12.3. Назовем нумерацию ν *A-широкой*, если существуют такие A-в.п. последовательность $\{S_k\}$ ν-индексных множеств и вычислимая функция u, что $u(k) \in S_k \setminus (\bigcup_{l \neq k} S_l)$ для всех $k < \omega$.

Приведем следствие теоремы 4.2, показывающее, что многие A-предполные нумерации являются A-широкими.

Следствие 12.4. *Любая универсальная A-предполная (A-полная, A-2-полная) нумерация является A-широкой.*

Следующее понятие из [60] приводит к удобной характеризации FPF_ν-степеней.

Определение 12.5. Функция f называется *дигонально не вычислимой*, если $f(e) \neq \varphi_e^A(e)$ для всех $e < \omega$. Пусть DNR^A обозначает множество всех таких функций, а также множество всех степеней таких функций.

Теорема 12.6. *Для любой A-предполной A-широкой нумерации ν имеем $FPF_\nu = DNR^A$.*

Теорема 12.6 получена в [40] как абстрактная версия соответствующего факта из [60,86] (практически с тем же доказательством). Из нее следует, что для многих нумераций ν и μ множества FPF_ν и FPF_μ совпадают.

Следствие 12.7. *Если нумерации μ и ν являются A-предполными и A-широкими, то $FPF_\mu = FPF_\nu$.*

Например, из результатов раздела 4 получаем:

$$FPF_\varphi = FPF_\pi = FPF_\gamma, \quad FPF_{\pi/\equiv_T} = FPF_{\varphi^{\emptyset^{(2)}}}, \quad FPF_{\pi/\sim} = FPF_{\pi^{\emptyset'}}$$

и т. д.

Теорему 12.4 можно использовать для доказательства того факта, что в теореме 12.1 нельзя опустить условие «B является в.п. относительно A». Следующий результат из [36] является простым обобщением соответствующих фактов из [3,86]. Он вытекает из теоремы Джокуша и Соара о низком базисе (см. [73]).

Теорема 12.8. *Если нумерация ν является A-предполной и A-широкой, то существует такая функция f без ν-неподвижных точек, что $A \leqslant_T f <_T A'$.*

Согласно теореме 12.4 и результатам раздела 4 многие естественные нумерации являются A-предполными и A-широкими для подходящего A. Теоремы 12.1 и 12.8 дают нетривиальную информацию о таких нумерациях.

Следующий результат устанавливает интересную связь между DNR-степенями (для простоты далее рассмотрим нерелятивизованный случай $A = \emptyset$) с в.п. степенями. Его доказательство (как и доказательство теоремы 12.4) не использует метод приоритета.

Теорема 12.9 (см. [65])**.** *Для любой DNR-степени $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{0}'$ найдется невычислимая в.п. степень $\mathbf{b} \leqslant \mathbf{a}$.*

Из теорем 12.8 и 12.9 получается не использующее метода приоритета решение проблемы Поста.

Следствие 12.10 (см. [65])**.** *Существует невычислимое неполное в.п. множество.*

Для любого k, $2 \leqslant k \leqslant \omega$, пусть DNR_k^A — множество всех A-диагонально не вычислимых функций из k^ω (так что $DNR_\omega^A = DNR^A$). Приведем некоторую информацию о степенях таких функций (см. [59]).

Теорема 12.11.

(1) *DNR_2^A-Степени совпадают со степенями множеств, отделяющих элементы фиксированной A-эффективно неотделимой пары непересекающихся A-в.п. множеств.*
(2) *Для любого k, $2 \leqslant k < \omega$, $DNR_k^A = DNR_2^A \subset DNR^A$.*

Из этого результата и теорем 6.14 и 10.1 вытекает следующая характеризация DNR_2^A-степеней.

Теорема 12.12 (см. [40])**.** *DNR_2^A-Степени совпадают со степенями нетривиальных индексных множеств нетривиальной A-предполной A-позитивной нумерации.*

Следствие 12.13. *DNR_2-Степени совпадают со степенями полных расширений арифметики Пеано.*

Частный случай теоремы 12.12 (см. утверждение 10.8(2)) отвечает на один вопрос из [60].

Как известно (см. [59]), не существует минимальной степени в DNR_2, но существует минимальная степень в DNR.

Замечание 12.14. Изучение функций без неподвижных точек проходило независимо от теории предполных нумераций. Цитированные статьи М. М. Арсланова и его учеников неявно использовали вариант f-предполных нумераций с тотальной f-вычислимой функцией ψ вместо частичной функции в определении 3.1. В [86] получены небольшие усиления этих результатов, говорящие уже о частичных функциях. В этот момент автору стала понятна тесная связь этих двух направлений, отраженная в [31,34,40,74].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арсланов М. М.* Некоторые обобщения теоремы о неподвижной точке// Изв. вузов. Мат. — 1981. — *228*, № 5. — С. 9–16.
2. *Арсланов М. М.* Об одной иерархии степеней неразрешимости// в сб.: Вероятностные методы и кибернетика. — Казань: Казан. гос. ун-т, 1982. — *18*. — С. 10–17.
3. *Арсланов М. М.* Рекурсивно перечислимые множества и степени. — Казань: Казан. гос. ун-т, 1986.
4. *Арсланов М. М.* Полнота в арифметической иерархии и неподвижные точки// Алгебра и логика. — 1989. — *28*. — С. 3–18.

5. *Арсланов М. М., Надыров Р. Ф. Соловьев В. Д.* Критерий полноты рекурсивно перечислимых множеств и некоторые обобщения теоремы о неподвижной точке// Изв. вузов. Мат. — 1977. — *179*, № 4. — С. 3–7.
6. *Арсланов М. М., Соловьев В. Д.* Эффективизации определений классов простых множеств// в кн.: Алгоритмы и автоматы. — Казань: Казан. гос. ун-т, 1978. — С. 100–108.
7. *Ахтямов Р. Б.* Индексные множества в иерархии Ершова// в сб.: Вероятностные методы и кибернетика. — Казань: Казан. гос. ун-т, 1990. — *24*. — С. 3–15.
8. *Денисов С. Д.* Об m-степенях рекурсивно перечислимых множеств// Алгебра и логика. — 1970. — *9*. — С. 422–427.
9. *Дворников С. Г.* Предполно нумерованные множества// Сиб. мат. ж. — 1979. — *20*. — С. 1303—1305.
10. *Дворников С. Г.* Решетка степеней отделимости// Тр. 7 Всес. конф. по мат. логике. — Новосибирск, 1984. — С. 55.
11. *Ершов Ю. Л.* Об одной иерархии множеств, 1// Алгебра и логика. — 1968. — *7*, № 1. — С. 47–74; 2// Алгебра и логика. — 1968. — *7*, № 4. — С. 15–47; 3// Алгебра и логика. — 1970. — *9*, № 1. — С. 34–51.
12. *Ершов Ю. Л.* Полно нумерованные множества// Сиб. мат. ж. — 1969. — *10*. — С. 1048–1064.
13. *Ершов Ю. Л. Теория нумераций.* — М.: Наука, 1977.
14. *Каллибеков С.* Об индексных множествах m-степеней// Сиб. мат. ж. — 1971. — *12*. — С. 1292–1300.
15. *Каллибеков С.* О tt-степенях рекурсивно перечислимых множеств// Мат. заметки. — 11973. — *14*, № 5. — С. 421–426.
16. *Кузьмина Т. М.* Структура m-степеней индексных множеств семейств частично рекурсивных функций// Алгебра и логика. — 1981. — *20*. — С. 55–68.
17. *Кузьмина Т. М.* О слабых полурешетках и m-степенях индексных множеств// Алгебра и логика. — 1989. — *28*. — С. 555–569.
18. *Мальцев А. И.* Конструктивные алгебры, I// Усп. мат. наук. — 1961. — *16*, № 3. — С. 3–60.
19. *Мальцев А. И.* Полно нумерованные множества// Алгебра и логика. — 1963. — *2*. — С. 4–29.
20. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1965.
21. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
22. *Селиванов В. Л.* Несколько замечаний о классах рекурсивно перечислимых множеств// Сиб. мат. ж. — 1978. — *19*. — С. 153–161.
23. *Селиванов В. Л.* Об индексных множествах классов нумераций// в кн.: Алгоритмы и автоматы. — Казань: Казан. гос. ун-т, 1978. — С. 95–99.
24. *Селиванов В. Л.* О структуре степеней индексных множеств// Алгебра и логика. — 1979. — *18*. — С. 463–480.
25. *Селиванов В. Л.* О структуре степеней обобщенных индексных множеств// Алгебра и логика. — 1982. — *21*. — С. 472–491.
26. *Селиванов В. Л.* Об индексных множествах в иерархии Клини—Мостовского// Тр. ИМ СО АН СССР. — Новосибирск, 1982. — *2*. — С. 135–158.
27. *Селиванов В. Л.* Иерархии гиперарифметических множеств и функций// Алгебра и логика. — 1983. — *22*. — С. 666–692.
28. *Селиванов В. Л.* Индексные множества в гиперарифметической иерархии// Сиб. мат. ж. — 1984. — *25*. — С. 164–181.
29. *Селиванов В. Л.* Об иерархии предельных вычислений// Сиб. мат. ж. — 1984. — *25*, С. 146–156.
30. *Селиванов В. Л.* Об иерархии Ершова// Сиб. мат. ж. — 1985. — *26*. — С. 134–149.
31. *Селиванов В. Л.* Индексные множества фактор-объектов нумерации Поста// Алгебра и логика. — 1988. — *27*, — С. 343–358.
32. *Селиванов В. Л.* Иерархия Ершова и Т-скачок// Алгебра и логика. — 1988. — *27*, 464–478.
33. *Селиванов В. Л.* Об алгоритмической сложности алгебраических систем// Мат. заметки. — 1988. — *44*, № 6. — С. 823–832.
34. *Селиванов В. Л.* Применения предполных нумераций к степеням табличного типа и индексным множествам// Алгебра и логика. — 1989. — *12*. — С. 165–185.
35. *Селиванов В. Л.* Тонкие иерархии арифметических множеств и индексные множества// Тр. ИМ СО АН СССР. — Новосибирск, 1989. — *12*. — С. 165–185.
36. *Селиванов В. Л.* Иерархическая классификация арифметических множеств и индексные множества// Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989.
37. *Селиванов В. Л.* Тонкие иерархии и определимые индексные множества// Алгебра и логика. — 1991. — *30*. — С. 705–725.

38. *Селиванов В. Л.* Скачки некоторых классов Δ^0_2-множеств// Мат. заметки. — 1991. — *50*, № 6. — С. 122–125.
39. *Селиванов В. Л.* Универсальные булевы алгебры с применениями// Тр. Междунар. конф. в честь А. И. Ширшова. — Новосибирск, 1991. — С. 127.
40. *Селиванов В. Л.* Предполные нумерации и функции без неподвижных точек// Мат. заметки. — 1992. — *51*, № 1. — С. 175–181.
41. *Селиванов В. Л., Ямалеев М. М.* О тьюринговых степенях в утончениях арифметической иерархии// Алгебра и логика. — 2018. — *57*, № 3. — С. 338–361.
42. *Badaev S., Goncharov S., Sorbi A.* Completeness and universality of arithmetical numberings// в кн.: *Cooper S. B., Goncharov S. S.* (eds.). Computability and Models. Perspectives East and West. — New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003. — С. 11–44.
43. *Badaev S., Goncharov S., Sorbi A.* Algebraic properties of Rogers semilattices of arithmetical numberings// в кн.: *Cooper S. B., Goncharov S. S.* (eds.). Computability and Models. Perspectives East and West. — New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003. — С. 45–78.
44. *Bernardi C., Sorbi A.* Classifying positive equivalence relations// J. Symb. Logic. — 1983. — *48*. — С. 529–538.
45. *Brandt U.* Index sets in the arithmetical hierarchy// Ann. Pure Appl. Logic. — 1988. — *37*. — С. 101—110.
46. *Cooper S. B.* Degrees of unsolvability/ Ph.D. thesis. — Leicester, England: Leicester University, 1971.
47. *Epstein R. L., Haas R., Kramer R.* Hierarchies of sets and degrees below $0'$// в кн.: *Lerman M., Schmerl J. H., Soare R. I.* (eds.). Logic Year 1979-80. University of Connecticut. — Berlin: Springer-Verlag, 1981. — С. 32–48.
48. *Ershov Yu. L.* Theorie der Numerierungen 1// Z. Math. Logik Grundl. Math. — 1973. — *19*. — С. 289–388.
49. *Ershov Yu. L.* Theorie der Numerierungen 2// Z. Math. Logik Grundl. Math. — 1975. — *21*. — С. 473–584.
50. *Grassin J.* Index sets in Ershov hierarchy// J. Symb. Logic. — 1974. — *39*, № 1. — С. 97–104.
51. *Hay L.* Index sets of finite classes of recursively enumerable sets// J. Symb. Logic. — 1969. — *34*. — С. 39–44.
52. *Hay L.* A discrete chain of degrees of index sets// J. Symb. Logic. — 1972. — *37*. — С. 139–149.
53. *Hay L.* Discrete ω-sequences of index sets// Trans. Am. Math. Soc. — 1973. — *183*. — С. 293–311.
54. *Hay L.* Index sets in $0'$// Алгебра и логика. — 1973. — *12*. — С. 713–729.
55. *Hay L.* A noninitial segment of index sets// J. Symb. Logic. — 1974. — *39*. — С. 209–224.
56. *Hay L.* Rice theorems for d.c.e. sets// Can. J. Math. — 1975. — *27*. — С. 352–365.
57. *Hay L.* Boolean combinations of c.e. sets// J. Symb. Logic. — 1976. — *41*. — С. 255–278.
58. *Hay L., Johnson N.* Extensional characterization of index sets// Z. Math. Logik Grundl. Math. — 1979. — *25*. — С. 227—234.
59. *Jockusch C. G. jr.* Degrees of functions without fixed points// Abstr. Eighth Congress for LMPS. — Moscow, 1987. — *1*. — С. 116–118.
60. *Jockusch C. G. jr., Lerman M., Soare R. I., Solovay R. M.* Recursively enumerable sets modulo iterated jumps and extensions of Arslanov's completeness criterion// J. Symb. Logic. — 1989. — *54*. — С. 1288–1323.
61. *Jockusch C. G. jr., Shore R.* Pseudo jump operators, 1. The recursively enumerable case// Trans. Am. Math. Soc. — 1983. — *275*, № 2. — С. 599–609.
62. *Jockusch C. G. jr., Shore R.* Pseudo jump operators, 2. Transfinite iterations, hierarchies and minimal covers// J. Symb. Logic. — 1984. — *49*. — С. 1205–1236.
63. *Kanda A., Lachlan A.* Alternative characterizations of precomplete numberings// Z. Math. Logik Grundl. Math. — 1987. — *33*. — С. 97–100.
64. *Kihara T., Montalban A.* The uniform Martin's conjecture for many-one degrees/ e-print `ArXiv:1608.05065` v1 [Math.LO], 2016.
65. *Kucera A.* An alternative, priority-free, solution to Post's problem// в кн.: Mathematical Foundations of Computer Science/ Proc. 12th Symp. Bratislava/Czech. 1986. — Lect. Notes Comput. Sci. — 1986. — *233*. — С. 493–500.
66. *Kuratowski K., Mostowski A.* Set theory. — Amsterdam: North Holland, 1967.
67. *Lachlan A. H.* A note on positive equivalence relations// Z. Math. Logik Grundl. Math. — 1987. — *33*. — С. 43–46.
68. *Mohrherr J.* Kleene index sets and functional m-degrees// J. Symb. Logic. — 1983. — *48*. — С. 829–840.
69. *Montagna F.* Relatively precomplete numberings and arithmetic// J. Phil. Logic. — 1982. — *11*. — С. 419–430.
70. *Montagna F., Sorbi A.* Universal recursion-theoretic properties of c.e. preordered structures// J. Symb. Logic. — 1985. — *50*. — С. 397—406.
71. *Moschovakis Y. N.* Descriptive set theory. — Amsterdam: North Holland, 2009.

72. *Nerode A., Shore R. A.* Reducibility orderings: theories, definability and automorphisms// Ann. Math. Logic. — 1980. — *18*. — С. 61—89.
73. *Rogers H. jr.*, Theory of recursive functions and effective computability. — New York: McGraw-Hill, 1967.
74. *Selivanov V. L.* Index sets of factor-objects of the Post numbering// в кн.: Proc. Int. Conf. on Fundamentals of Computation Theory, Kazan/ Lect. Notes Comp. Sci. — 1987. — *278*. — С. 396–400.
75. *Selivanov V. L.* Hierarchies, numerations, index sets. — Handwritten lecture notes, 1992.
76. *Selivanov V. L.* Precomplete numerations with applications/ Preprint № 9. — Univ. Heidelberg, 1994.
77. *Selivanov V. L.* Fine hierarchies and Boolean terms// J. Symb. Logic. — 1995. — *60*. — С. 289–317.
78. *Selivanov V. L.* Fine hierarchy and definability in the Lindenbaum algebra// в кн.: Logic: from foundations to applications. European logic colloquium. — Oxford: Clarendon Press, 1996. — С. 425–452.
79. *Selivanov V. L.* On recursively enumerable structures// Ann. Pure Appl. Logic. — 1996. — *78*. — С. 243–258.
80. *Selivanov V. L.* Precomplete numberings// Int. Conf. «Logic and Applications» dedicated to Yu. L. Ershov and A. I. Maltsev. — Novosibirsk: Sobolev Inst. Math., 2002. — С. 104–143.
81. *Selivanov V. L.* Fine hierarchies and m-reducibilities in theoretical computer science// Theor. Comp. Sci. — 2008. — *405*. — С. 116–163.
82. *Selivanov V. L.* Total representations// Logic. Meth. Comp. Sci. — 2013. — *9*, № 2. — С. 1–30.
83. *Selivanov V. L.* Towards the effective descriptive set theory// в кн.: *Beckmann A., Mitrana V., Soskova M.* (eds.). Evolving computability. CiE 2015/ Lect. Notes Comp. Sci. — Springer, 2015. — *9136*. — С. 324–333.
84. *Selivanov V. L. and Yamaleev M. M.* Extending Cooper's theorem to Δ^0_3 Turing degrees// Computability. — 2018. — 7, № 2-3. — С. 289–300.
85. *Shavrukov V. Yu.* Remarks on uniformly finitely precomplete positive equivalences/ ILLC Prepublication Series for Math. Logic and Foundations ML-93-12ю — Univю Amsterdam, 1993.
86. *Soare R. I.* Recursively enumerable sets and degrees. — Berlin: Springer, 1987.
87. *Spreen D.* Can partial indexings be totalized?// J. Symb. Logic. — 2001. — *6*. — С. 1157–1185.
88. *Spreen D.* Partial numberings and precompeteness// в кн.: *Brattka V. et al.* (eds.). Logic, Computation, Hierarchies. — Berlin–Boston: De Gruyter, 2014. — С. 325–340.
89. *Spreen D.* An isomorphism theorem for partial numberings// в кн.: *Brattka V. et al.* (eds.). Logic, Computation, Hierarchies. — Berlin–Boston: De Gruyter, 2014. — С. 341–481.
90. *Uspensky V. A.* Kolmogorov and mathematical logic// J. Symb. Logic. — 1992. — *57*, № 2. — С. 385–412.
91. *Visser A.* Numberings, λ-calculus and arithmetic// в кн.: *Seldin J. P., Hindley J. R.* (eds.). To H. B. Curry: Essays on combinatory logic, λ-calculus and formalism. — New York: Academic Press, 1980. — С. 259–284.
92. *Weihrauch K.* Computability. — Berlin: Springer, 1987.
93. *Weihrauch K.* Computable Analysis. — Berlin: Springer, 2000.
94. *Welch L. V.* A hierarchy of families of recursively enumerable degrees// J. Symb. Logic. — 1984. — *49*. — С. 1160–1170.

В. Л. Селиванов
Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН, Новосибирск;
Казанский федеральный университет, Казань
E-mail: vseliv@iis.nsk.su