ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 156

Москва 2018

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 156

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Москва 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 156 (2018). С. 3–17

УДК 517.955

АНАЛОГ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО МНОГОМЕРНОГО ПОЛИКАЛОРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

© 2018 г. **Ш. Т. КАРИМОВ**

Аннотация. В работе получена явная формула решения аналога задачи Коши для неоднородного многомерного поликалорического уравнения с оператором Бесселя. Для построения решения применен многомерный оператор Эрдейи—Кобера дробного порядка.

Ключевые слова: задача Коши, поликалорическое уравнение, оператор Эрдейи—Кобера, дифференциальный оператор Бесселя.

AMS Subject Classification: 35K25, 35K30

1. Введение. Постановка задачи. Сингулярные параболические уравнения с оператором Бесселя относятся к классу уравнений, вырождающихся по пространственным переменным на границе области; они часто встречаются в приложениях, например, в задачах теплопереноса в неподвижной среде (твердом теле), в задачах диффузионного пограничного слоя (см. [14]), в задачах распространения тепла при закачке горячей жидкости в нефтяной пласт (см. [18]) и др.

Вырождающиеся уравнения представляют собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными; число опубликованных работ по этой тематике весьма значительно. Особое место занимают начальные и краевые задачи для параболических уравнений с оператором Бесселя. Теория классических решений задачи Коши для сингулярных параболических уравнений второго порядка с оператором Бесселя разработана в работах В. В. Крехивского и М. И. Матийчука [11,12], D. Colton [20], O. Arena [19], И. А. Киприянова, В. В. Катрахова и В. М. Ляпина [9], В. В. Крехивского [10], И. И. Веренич [2], С. А. Терсенова [17], С. Д. Ивасишена и В. П. Лавренчука [5], А. Б. Муравника [13] и др. Задача Коши для сингулярных параболических уравнений в классах распределений и в классах обобщенных функций типа S' изучались Я. И. Житомирским [4], В. В. Городецким, И. В. Житарюком, и В. П. Лавренчуком [3] и др. Однако начальные и краевые задачи для уравнений с оператором Бесселя высокого порядка к настоящему времени остаются малоизученными.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — точка n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, и $\mathbb{R}^n_+ = \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_k > 0,\ k = \overline{1,n}\big\}$. В области $\Omega = \big\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n_+,\ t \in \mathbb{R}^1_+\big\}$ рассмотрим задачу нахождения классического решения $u(x,t)$ уравнения

$$L^m_\gamma(u) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_B\right)^m u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{2}$$

и однородным граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x_j^{2k+1}}\right|_{x_j=0} = 0, \quad t > 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{3}$$

ISSN 0233–6723

где
$$\Delta_B=\sum_{k=1}^{n}B_{\gamma_k}^{x_k},\quad B_{\gamma_k}^{x_k}=\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\left[\frac{2\gamma_k+1}{x_k}\right]\frac{\partial}{\partial x_k}$$
— оператор Бесселя, действующий по переменной x_k, $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathbb{R}^n$, $\gamma_k\in\mathbb{R}$, $\gamma_k>-1/2$, $k=\overline{1,n}$, m — натуральное число; $f(x,t)$, $\varphi_k(x)$, $k=\overline{0,m-1}$ — заданные дифференцируемые функции.

Отметим, что в задачах общей теории дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих оператор Бесселя по одной или нескольким переменным, основным аппаратом исследования является соответствующее интегральное преобразование Фурье—Бесселя. В отличие от традиционных методов для решения поставленной задачи применим многомерный оператор Эрдейи—Кобера дробного порядка. Поэтому сначала рассмотрим некоторые свойства этого оператора.

2. Многомерный оператор Эрдейи—Кобера дробного порядка. В теории и приложениях широко используются различные модификации и обобщения классических операторов интегрирования и дифференцирования дробного порядка. К таким модификациям относятся, в частности, операторы Эрдейи— Кобера (см. [16]).

В [21] многомерный обобщенный оператор Эрдейи—Кобера был введен в виде
$$\begin{aligned}J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)&=\\ &=J_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n\\ \eta_1, & \eta_2, & \ldots, & \eta_n\end{pmatrix}f(x)=J_{\lambda_1}^{x_1}(\eta_1,\alpha_1)\ J_{\lambda_2}^{x_2}(\eta_2,\alpha_2)\ \cdots\ J_{\lambda_n}^{x_n}(\eta_n,\alpha_n)\ f(x)=\\ &=\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{2x_k^{-2(\alpha_k+\eta_k)}}{\Gamma(\alpha_k)}\right]\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_n}\prod_{k=1}^{n}\left[t_k^{2\eta_k+1}\left(x_k^2-t_k^2\right)^{\alpha_k-1}\ \bar{J}_{\alpha_k-1}\Big(\lambda\sqrt{x_k^2-t_k^2}\Big)\right]\times\\ &\qquad\times f(t_1,t_2,\ldots,t_n)\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_n,\end{aligned}\tag{4}$$
где $\lambda,\alpha,\eta\in\mathbb{R}^n$, $\alpha_k>0$, $\eta_k\geqslant-1/2$, $k=\overline{1,n}$; $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, $\bar{J}_\nu(z)$ — функция Бесселя—Клиффорда, которая выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$ по формуле
$$\bar{J}_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}J_\nu(z),$$
$J_{\lambda_k}^{x_k}(\eta_k,\alpha_k)$ — частный интеграл Эрдейи—Кобера порядка α_k по k-й переменной:
$$\begin{aligned}J_{\lambda_k}^{x_k}(\eta_k,\alpha_k)f(x)=\frac{2x_k^{-2(\alpha_k+\eta_k)}}{\Gamma(\alpha_k)}\int_0^{x_k}(x_k^2-t^2)^{\alpha_k-1}\bar{J}_{\alpha_k-1}\Big(\lambda_k\sqrt{x_k^2-t^2}\Big)\times\\ \times t^{2\eta_k+1}f\big(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1},\ t,\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_n\big)\,dt.\end{aligned}$$
В [21] также исследованы основные свойства оператора (4) и показано, что обратный оператор имеет вид
$$\begin{aligned}J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_{i\lambda}\begin{pmatrix}-\alpha\\ \eta+\alpha\end{pmatrix}f(x)=2^{n-|m|}\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k^{-2\eta_k}}{\Gamma(m_k-\alpha_k)}\left(\frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{m_k}\right]\times\\ \times\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_n}\prod_{k=1}^{n}\left[t_k^{2(\eta_k+\alpha_k)+1}\ \left(x_k^2-t_k^2\right)^{m_k-1-\alpha_k}\bar{I}_{m_k-1-\alpha_k}\Big(\lambda\sqrt{x_k^2-t_k^2}\Big)\right]\times\\ \times f\big(t_1,t_2,\ldots,t_n\big)\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_n,\end{aligned}\tag{5}$$
где $\alpha_k>0$, $m_k=[\alpha_k]+1$, $\eta_k\geqslant-1/2$, $k=\overline{1,n}$, $\bar{I}_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}I_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента; $m=(m_1,m_2,\ldots,m_n)$ — мультииндекс, а $|m|=m_1+m_2+\cdots+m_n$ — его длина.

Учитывая, что $\bar{J}_\nu(0)=1$ в пределе при $\lambda_k\to 0$, $k=\overline{1,n}$, получим

$$J_0\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_{0,0,\dots,0}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n\end{pmatrix}f(x)=$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2x_k^{-2(\alpha_k+\eta_k)}}{\Gamma(\alpha_k)}\right]\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_n}\prod_{k=1}^{n}\left[t_k^{2\eta_k+1}\left(x_k^2-t_k^2\right)^{\alpha_k-1}\right]f(t)\,dt_1\,dt_2\,\dots\,dt_n. \quad (6)$$

Этот оператор является многомерным аналогом обычного (не обобщенного) оператора Эрдейи—Кобера. В этом случае обратный оператор (5) примет следующий вид:

$$J_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=2^{n-|m|}\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k^{-2\eta_k}}{\Gamma(m_k-\alpha_k)}\left(\frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{m_k}\right]\times$$
$$\times\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_n}\prod_{k=1}^{n}\left[t_k^{2(\eta_k+\alpha_k)+1}\left(x_k^2-t_k^2\right)^{m_k-1-\alpha_k}\right]f(t_1,t_2,\dots,t_n)\,dt_1\,dt_2\,\dots\,dt_n. \quad (7)$$

Теорема 1 (см. [21]). *Пусть* $\alpha_k>0$, $\eta_k\geqslant -1/2$, $k=\overline{1,n}$; $f(x)\in C^2(\Omega^n)$; *функции* $x_k^{2\eta_k+1}B_{\eta_k}^{x_k}f(x)$ *интегрируемы при* $x_k\to 0$ *и*

$$\lim_{x_k\to 0}x_k^{2\eta_k+1}f_{x_k}(x)=0,\quad k=\overline{1,n}.$$

Тогда

$$\left(B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2\right)J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}B_{\eta_k}^{x_k}f(x),\quad k=\overline{1,n}.$$

В частности, если $\lambda_k=0$, $k=\overline{1,n}$, *то*

$$B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}J_0\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_0\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}B_{\eta_k}^{x_k}f(x),\quad k=\overline{1,n},$$

где

$$\Omega^n=\prod_{k=1}^{n}(0,b_k)=(0,b_1)\times(0,b_2)\times\cdots\times(0,b_n)$$

— декартово произведение, $b_k>0$, $k=\overline{1,n}$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n}\left[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2\right]J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]f(x).$$

В частности, если $\eta_k=-1/2$, $k=\overline{1,n}$, *то*

$$\sum_{k=1}^{n}\left[B_{\alpha_k-1/2}^{x_k}+\lambda_k^2\right]J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ -1/2\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ -1/2\end{pmatrix}\Delta f(x),$$

где

$$\Delta f(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k^2}\right]$$

— многомерный оператор Лапласа.

Докажем некоторые свойства многомерного обобщенного оператора Эрдейи—Кобера, которые применяются при решении поставленной задачи.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha_k > 0$, $\eta_k \geqslant -1/2$, $k = \overline{1,n}$, $f(x) \in C^{2n}(\Omega^n)$, *функции* $x_k^{2\eta_k+1} B_{\eta_k}^{x_k} f(x)$ *интегрируемы в окрестности* $x_k = 0$ *и*

$$\lim_{x_k\to 0} x_k^{2\eta_k+1} f_{x_k}(x) = 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\prod_{k=1}^{n} \Bigl(B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2\Bigr) J_\lambda \begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x) = J_\lambda \begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} \prod_{k=1}^{n} B_{\eta_k}^{x_k} f(x).$$

В частности, если $\eta_k = -1/2$, $k = \overline{1,n}$, *то*

$$\prod_{k=1}^{n} \Bigl[B_{\alpha_k-(1/2)}^{x_k} + \lambda_k^2\Bigr] J_\lambda \begin{pmatrix}\alpha\\ -1/2\end{pmatrix} f(x) = J_\lambda \begin{pmatrix}\alpha\\ -1/2\end{pmatrix} \frac{\partial^{2n} f(x)}{\partial x_1^2 \partial x^2 \ldots \partial x_n^2}.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Пусть $\Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr]^0 = E$, где E — единичный оператор,

$$\Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr]^{m_k} = \Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr]^{m_k-1} \Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr] = \Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr] \Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr] \cdots \Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr]$$

— m_k-я степень оператора $B_{\eta_k}^{x_k}$, $k = \overline{0,n}$.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha_k > 0$, $\eta_k \geqslant -1/2$; $f(x) \in C^{2m_0}(\Omega^n)$; *функции* $x_k^{2\eta_k+1} \Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr]^{p_k+1} f(x)$ *интегрируемы при* $x_k \to 0$ *и*

$$\lim_{x_k\to 0} x_k^{2\eta_k+1} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr]^{p_k} f(x) = 0, \quad p_k = \overline{0, m_k-1}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Тогда

$$\Bigl[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2\Bigr]^{m_k} J_\lambda \begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x) = J_\lambda \begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} \Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr]^{m_k} f(x), \quad k = \overline{1,n}, \tag{8}$$

где $m_0 = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$.

Заметим, что теорема 3 верна и в том случае, когда некоторые или все $\lambda_k = 0$, $k = \overline{1,n}$.

Доказательство. Теорему 3 можно доказать методом математической индукции по m_k, $k = \overline{1,n}$. Произвольно фиксируем $k \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Доказательство формулы (8) при фиксированном k и $m_k = 1$ приведено в теореме 1. Предположим, что равенство (8) имеет место при $m_k = l_k$ и докажем, что оно справедливо при $m_k = l_k + 1$. Из равенства

$$\Bigl[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2\Bigr]^{l_k+1} J_\lambda \begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x) = \Bigl[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2\Bigr] \Bigl[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2\Bigr]^{l_k} J_\lambda \begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x)$$

согласно предположению индукции при выполнении условий теоремы 3 имеем

$$\Bigl[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2\Bigr] \Bigl[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2\Bigr]^{l_k} J_\lambda \begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x) = \Bigl[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2\Bigr] J_\lambda \begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} \Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr]^{l_k} f(x).$$

При выполнении условий

$$\lim_{x_k\to 0} x_k^{2\eta_k+1} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr]^{l_k} f(x) = 0, \quad k = \overline{1,n},$$

теорема 1 применима к функциям $\Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr]^{l_k} f(x)$, откуда и получаем формулу (8). □

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \Bigl[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2\Bigr]^{m_k} J_\lambda \begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x) = J_\lambda \begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} \Bigl[B_{\eta_k}^{x_k}\Bigr]^{m_k} f(x).$$

Кроме того, если $f(x) \in C^{2|m|}(\Omega^n)$, то

$$\prod_{k=1}^{n} \left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k} + \lambda_k^2\right]^{m_k} J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} f(x) = J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} \prod_{k=1}^{n} \left[B^{x_k}_{\eta_k}\right]^{m_k} f(x). \tag{9}$$

Теорема 4. *Пусть $\alpha_k > 0$, $\eta_k \geqslant -1/2$, $k = \overline{1,n}$, $q \in \mathbb{N}$; $f(x) \in C^{2q}(\Omega^n)$; функции $x_k^{2\eta_k+1}\left[B^{x_k}_{\eta_k}\right]^{l+1} f(x)$ интегрируемы в нуле и*

$$\lim_{x_k\to 0} x_k^{2\eta_k+1}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left[B^{x_k}_{\eta_k}\right]^{l} f(x) = 0, \quad l = \overline{0,q-1}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k} + \lambda_k^2\right]\right)]^q J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} f(x) = J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} \left[\sum_{k=1}^{n} B^{x_k}_{\eta_k}\right]^q f(x).$$

Теорема 4 доказывается с использованием полиномиальной формулы

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k} + \lambda_k^2\right]\right)^q = \sum_{|m|=q} \frac{q!}{m!} \prod_{k=1}^{n}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k} + \lambda_k^2\right]^{m_k}$$

и равенства (9), где $m! = m_1! m_2! \ldots m_n!$.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда при $\eta_k = -1/2$, $k = \overline{1,n}$, справедливо равенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left[B^{x_k}_{\alpha_k-1/2} + \lambda_k^2\right]\right)^q J_\lambda \binom{\alpha}{-1/2} f(x) = J_\lambda \binom{\alpha}{-1/2} \Delta^q f(x).$$

В частности, при $\lambda_k = 0$ верно равенство

$$\Delta_B^q J_0 \binom{\alpha}{-1/2} f(x) = J_0 \binom{\alpha}{-1/2} \Delta^q f(x),$$

где

$$\Delta_B \equiv \sum_{k=1}^{n} B^{x_k}_{\alpha_k-1/2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2\alpha_k}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right).$$

Пусть $L^{(y)}$ — не зависящий от переменной $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ линейный дифференциальный оператор порядка $l \in \mathbb{N}$ по переменной $y = (y_1, y_2, \ldots, y_s) \in \mathbb{R}^s$.

Теорема 5. *Пусть $\alpha_k > 0$, $\eta_k \geqslant -1/2$, $k = \overline{1,n}$, $q \in \mathbb{N}$; $f(x,y) \in C^{2q,lq}_{x,y}(\Omega^n \times \Omega^s)$, функции $x_k^{2\eta_k+1}\left[B^{x_k}_{\eta_k}\right]^{j+1} f(x,y)$ интегрируемы в окрестности начала координат и*

$$\lim_{x_k\to 0} x_k^{2\eta_k+1}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left[B^{x_k}_{\eta_k}\right]^{j} f(x,y) = 0, \quad j = \overline{0,q-1}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Тогда

$$\left(L^{(y)} \pm \sum_{k=1}^{n}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k} + \lambda_k^2\right]\right)^q J_\lambda^{(x)} \binom{\alpha}{\eta} f(x,y) = J_\lambda^{(x)} \binom{\alpha}{\eta} \left(L^{(y)} \pm \sum_{k=1}^{n} B^{x_k}_{\eta_k}\right)^q f(x,y);$$

верхние индексы означают переменные, по которым действуют операторы.

Доказательство. Используя биномиальную формулу, получим

$$\left(L^{(y)} \pm \sum_{k=1}^{n}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}+\lambda_k^2\right]\right)^q J^{(x)}_\lambda\binom{\alpha}{\eta} f(x,y) =$$

$$= \sum_{j=0}^{q} C_q^j (\pm 1)^j \left(L^{(y)}\right)^{q-j}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}+\lambda_k^2\right]\right)^j J^{(x)}_\lambda\binom{\alpha}{\eta} f(x,y).$$

Далее, применяя теорему 4, имеем

$$J^{(x)}_\lambda\binom{\alpha}{\eta}\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}(\pm 1)^j \left(L^{(y)}\right)^{q-j}\left(\sum_{k=1}^{n} B^{x_k}_{\eta_k}\right)^j f(x,y) = J^{(x)}_\lambda\binom{\alpha}{\eta}\left(L^{(y)} \pm \sum_{k=1}^{n} B^{x_k}_{\eta_k}\right)^q f(x,y).$$

Теорема 5 доказана. □

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Если*

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_\omega), \quad y=(x_{\omega+1},x_{\omega+2},\ldots,x_{\omega+\sigma}), \quad \omega+\sigma=n,$$

$$L^{(y)} = -\sum_{k=\omega+1}^{\omega+\sigma}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}+\lambda_k^2\right],$$

то

$$\left(\sum_{k=1}^{\omega}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}+\lambda_k^2\right] - \sum_{k=\omega+1}^{\omega+\sigma}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}+\lambda_k^2\right]\right)^q J_\lambda\binom{\alpha}{\eta} f(x) =$$

$$= J_\lambda\binom{\alpha}{\eta}\left(\sum_{k=1}^{\omega} B^{x_k}_{\eta_k} - \sum_{k=\omega+1}^{\omega+\sigma} B^{x_k}_{\eta_k}\right)^q f(x),$$

где $\omega+\sigma=n$. *В частности, если* $L^{(y)}\equiv 0$, *то*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}+\lambda_k^2\right]\right)^q J_\lambda\binom{\alpha}{\eta} f(x) = J_\lambda\binom{\alpha}{\eta}\left(\sum_{k=1}^{n} B^{x_k}_{\eta_k}\right)^q f(x).$$

Пусть

$$[D^{x_k}_{\eta_k}]^0 = E, \quad D^{x_k}_{\eta_k} \equiv x_k^{-2\eta_k}\left(\frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)x_k^{2\eta_k};$$

m_k-ю степень оператора $D^{x_k}_{\eta_k}$ можно представить в виде

$$D^{x_k}_{\eta_k}]^{m_k} = \left[D^{x_k}_{\eta_k}\right]^{m_k-1} D^{x_k}_{\eta_k} = x_k^{-2\eta_k}\left(\frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{m_k} x_k^{2\eta_k},$$

(m_k — неотрицательные целые числа, $k=\overline{1,n}$).

Теорема 6. *Если* $\alpha_k>0$, $\eta_k\geqslant -1/2$, $k=\overline{1,n}$, $f(x)\in C^{m_0}(\Omega^n)$, *функции* $x_{x_k}^{2\eta_k+1}\left[D^{x_k}_{\eta_k}\right]^{l_k+1} f(x)$ *интегрируемы при* $x_k\to 0$ *и*

$$\lim_{x_k\to 0} x_k^{2\eta_k}\left[D^{x_k}_{\eta_k}\right]^{l_k} f(x) = 0, \quad l_k=\overline{0,m_k-1}, \quad k=\overline{1,n},$$

то

$$\left[D^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right]^{m_k} J_\lambda\binom{\alpha}{\eta} f(x) = J_\lambda\binom{\alpha}{\eta}\left[D^{x_k}_{\eta_k}\right]^{m_k} f(x), \quad k=\overline{1,n}, \tag{10}$$

где $m_0=\max\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}$.

Доказательство. Теорема 6 также доказывается с применением метода математической индукции по m_k, $k=\overline{1,n}$. Произвольно фиксируем $k\in\mathbb{N}$. Доказательство формулы (10) при $m_k=1$, $k=\overline{1,n}$, приведено в [7,8]. Имеем

$$\left[D^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right] J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} f(x) = J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} \left[D^{x_k}_{\eta_k}\right] f(x), \quad k=\overline{1,n}. \tag{11}$$

Предположим, что равенство (10) имеет место при $m_k=l_k$, и докажем, что оно справедливо при $m_k=l_k+1$:

$$\left[D^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right]^{l_k+1} J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} f(x) = \left[D^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right]\left[D^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right]^{l_k} J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} f(x). \tag{12}$$

По предположению индукции при выполнении условий теоремы 6 имеем

$$\left[D^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right]^{l_k} J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} f(x) = J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} \left[D^{x_k}_{\eta_k}\right]^{l_k} f(x).$$

Тогда равенство (12) примет вид

$$\left[D^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right]^{l_k+1} J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} f(x) = \left[D^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right] J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} \left[D^{x_k}_{\eta_k}\right]^{l_k} f(x).$$

Далее, при выполнении условий

$$\lim_{x_k\to 0} x_k^{2\eta_k}\left[D^{x_k}_{\eta_k}\right]^{l_k} f(x)=0,$$

применяя формулу (11) к функциям $\left[D^{x_k}_{\eta_k}\right]^{l_k} f(x)$, убеждаемся в справедливости формулы (10). □

Следствие 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 6. *Тогда*

$$\prod_{k=1}^{n}\left[D^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right]^{m_k} J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} f(x) = J_\lambda \binom{\alpha}{\eta} \prod_{k=1}^{n}\left[D^{x_k}_{\eta_k}\right]^{m_k} f(x).$$

Теорема 7. *Пусть* $0<\alpha_k<1$, $\eta_k\geqslant -1/2$, $k=\overline{1,n}$, $p\in\mathbb{N}$; $g(x)\in C^{2p}(\Omega^n)$; *функции* $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right]^l g(x)$ *интегрируемы в нуле и*

$$\lim_{x_k\to 0} x_k^{2(\eta_k+\alpha_k)+1}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right]^l g(x)=0, \quad l=\overline{0,p-1}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\left[B^{x_k}_{\eta_k}-\lambda_k^2\right]^p J_\lambda^{-1}\binom{\alpha}{\eta} g(x) = J_\lambda^{-1}\binom{\alpha}{\eta}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right]^p g(x), \quad k=\overline{1,n},$$

или

$$\left[B^{x_k}_{\eta_k}\right]^p J_\lambda^{-1}\binom{\alpha}{\eta} g(x) = J_\lambda^{-1}\binom{\alpha}{\eta}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}+\lambda_k^2\right]^p g(x), \quad k=\overline{1,n}.$$

В частности, если $\lambda_k=0$, *то*

$$\left[B^{x_k}_{\eta_k}\right]^p J_0^{-1}\binom{\alpha}{\eta} g(x) = J_0^{-1}\binom{\alpha}{\eta}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right]^p g(x), \quad k=\overline{1,n}.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Следствие 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 7. *Тогда*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left[B^{x_k}_{\eta_k}-\lambda_k^2\right]\right)^p J_\lambda^{-1}\binom{\alpha}{\eta} g(x) = J_\lambda^{-1}\binom{\alpha}{\eta}\left(\sum_{k=1}^{n}B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}\right)^p g(x)$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{n}B^{x_k}_{\eta_k}\right)^p J_\lambda^{-1}\binom{\alpha}{\eta} g(x) = J_\lambda^{-1}\binom{\alpha}{\eta}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}+\lambda_k^2\right]\right)^p g(x).$$

Если выполнены условия

$$\lim_{x_k\to 0} x_k^{2\alpha_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[B^{x_k}_{\alpha_k-1/2}\right]^l g(x)=0,\quad l=\overline{0,p-1},\quad k=\overline{1,n}$$

то из последнего равенства при $\lambda_k=0$, $\eta_k=-1/2$, $k=\overline{0,m-1}$, следует справедливость равенства

$$\Delta^p J_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\-1/2\end{pmatrix}g(x)=J_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\-1/2\end{pmatrix}\Delta_B^p g(x),\tag{13}$$

где

$$\Delta^p=\left[\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right]^p$$

— p-я степень многомерного оператора Лапласа, а

$$\Delta_B^p=\left(\sum_{k=1}^n\left[B^{x_k}_{\alpha_k-1/2}\right]\right)^p=\left(\sum_{k=1}^n\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\frac{2\alpha_k}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right]\right)^p.$$

Доказанные теоремы позволяют сводить многомерные уравнения высокого порядка с сингулярными коэффициентами к полигармоническим, поликалорическим и поливолновым уравнениям и тем самым поставить и исследовать корректные начальные и граничные задачи для таких уравнений.

3. Решение поставленной задачи в случае однородного уравнения. Пусть существует решение однородного уравнения $L_\gamma^m(u)=0$, удовлетворяющее условиям (2) и (3). Будем искать это решение в виде

$$u(x,t)=J_0^{(x)}\begin{pmatrix}\alpha\\\eta\end{pmatrix}U(x,t),\tag{14}$$

где $\alpha,\eta\in\mathbb{R}^n$, причем $\alpha_k=\gamma_k+1/2>0$, $\eta_k=-1/2$, $k=\overline{1,n}$, $U(x,t)$ — неизвестная и достаточное число раз дифференцируемая функция, $J_0^{(x)}\binom{\alpha}{\eta}$ — многомерный оператор Эрдейи—Кобера дробного порядка (6), действующий по переменной $x\in\mathbb{R}^n$.

Подставляя (14) в граничные условия (3), а затем в уравнение (1) и начальные условия (2), и используя теорему 5 при $L^{(t)}\equiv\partial/\partial t$, получим задачу нахождения решения $U(x,t)$ уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)^m U(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Omega,\tag{15}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\Phi_k(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad k=\overline{0,m-1},\tag{16}$$

и однородным граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^{2k+1}U}{\partial x_j^{2k+1}}\right|_{x_j=0}=0,\quad t>0,\quad j=\overline{1,n},\quad k=\overline{0,m-1},\tag{17}$$

где $\Phi_k(x)=J_0^{-1}\binom{\alpha}{\eta}\varphi_k(x)$, $\eta_k=-1/2$, $k=\overline{0,m-1}$, $J_0^{-1}\binom{\alpha}{\eta}$ — обратный оператор (7).

Учитывая граничные условия (17), продолжим функции $\Phi_k(x)$ четным образом на $x_k<0$, $k=\overline{0,m-1}$, и продолженные функции обозначим через $\tilde\Phi_k(x)$. Тогда в области $\tilde\Omega=\{(x,y):x\in\mathbb{R}^n,\ t>0\}$ получим задачу нахождения решения уравнения (15), удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\tilde\Phi_k(x),\quad x\in\mathbb{R},\quad k=\overline{0,m-1}.\tag{18}$$

Введем обозначения

$$W_0(x,t)=U(x,t),\quad W_k(x,t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)^k W_0(x,t).$$

В этих обозначениях задача (15), (18) эквивалентна задаче о нахождении функций $W_k(x,t)$, $k=\overline{0,m-1}$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_k}{\partial t} - \Delta W_k = W_{k+1}, & (x,t) \in \tilde{\Omega}, \quad k=\overline{0,m-2}, \\ \dfrac{\partial W_{m-1}}{\partial t} - \Delta W_{m-1} = 0, & (x,t) \in \tilde{\Omega}, \end{cases} \tag{19}$$

и начальным условиям

$$W_k(x,0) = F_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k=\overline{0,m-1}, \tag{20}$$

где

$$F_k(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j \Delta^{k-j} \tilde{\Phi}_j(x), \quad k=\overline{0,m-1}. \tag{21}$$

При решении задачи (19), (20) воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. *Если $g(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то имеет место равенство*

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}\right] \left\{ \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi\tau}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\eta) \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4\tau}\right] d\eta \right\} dy =$$
$$= \frac{t}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\eta) \exp\left[-\frac{|\eta-x|^2}{4t}\right] dy. \tag{22}$$

Доказательство. В левой части равенства (22), в силу равномерной сходимости несобственных интегралов, сделаем перестановку порядка интегрирования по η и по y. Затем, пользуясь формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big[-p\xi^2 - q\xi\Big] d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right), \quad \operatorname{Re} p > 0$$

(см. [15]), вычислив внутренний интеграл по y, получим

$$\prod_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\{(x_j-y_j)^2}{4(t-\tau)} - \frac{(y_j-\eta_j)^2}{4\tau}\right] dy_j = \left[2\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}\sqrt{\tau(t-\tau)}\right]^n \exp\left[-\frac{|\eta-x|^2}{4t}\right]. \tag{23}$$

Подставляя (23) в левую часть равенства (22), после сокращения подобных членов, получим лемму 1. □

Вернемся к исследованию задачи (19), (20). Последовательно решая каждое уравнение системы (19), начиная с последнего, с учетом начальных условий (20) и леммы 1, находим решение задачи (19), (20). Затем, учитывая равенство $W_0(x,t) = U(x,t)$, получим решение задачи (15), (17) в виде

$$U(x,t) = \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F_k(s) \exp\left[-\frac{|s-x|^2}{4t}\right] ds, \tag{24}$$

где $F_k(x)$, $k=\overline{0,m-1}$, — известные функции, определяемые через заданные начальные функции равенствами (21).

Учитывая четность функций $F_k(x)$, $k=\overline{0,m-1}$, перепишем равенство (24) в виде

$$U(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} U_k(x,t), \tag{25}$$

где

$$U_k(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} F_k(s)\, G(x,t,s)\, ds, \tag{26}$$

$$G(x,s,t)=\prod_{j=1}^{n}G_0(x_j,s_j,t),\quad G_0(x_j,s_j,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left[-\frac{(s_j-x_j)^2}{4t}\right]+\exp\left[-\frac{(s_j+x_j)^2}{4t}\right]\right\}.$$

Чтобы исследовать поведение функций $F_k(x)$, $k=\overline{0,m-1}$, сделаем некоторые преобразования. Докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть начальные функции $\varphi_j(x)\in C^{2(m-j)-1}(\mathbb{R}^n_+)$, $j=\overline{0,m-1}$, непрерывны и ограничены и все их производные до порядка $2(m-j)-1$ включительно, $j=\overline{0,m-1}$, обращаются в нуль при $x_k=0$, $k=\overline{1,n}$. Тогда имеют место равенства*

$$\lim_{x_k\to 0}x_k^{2\alpha_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[B^{x_k}_{\alpha_k-1/2}\right]^l\varphi_j(x)=0,\quad k=\overline{1,n},\quad l=\overline{0,m-1},\quad j=\overline{0,m-1},\tag{27}$$

$$\lim_{x_k\to 0}\left[B^{x_k}_{\gamma_k}\right]^i\varphi_{j-i}(x)=0,\quad k=\overline{1,n},\quad i=\overline{0,j},\qquad j=\overline{0,m-1}.\tag{28}$$

Доказательство. Методом математической индукции нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^p h(x)=\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}A_{pj}\frac{h^{(p-j+1)}(x)}{x^{p+j-1}},\tag{29}$$

где A_{pj} — постоянные, определяемые из рекуррентных соотношений

$$A_{(p+1)1}=A_{p1}=1,\quad p\geqslant 1,\quad A_{(p+1)j}=(p+j-1)A_{p(j-1)}+A_{pj},\quad p\geqslant 2,\quad j=\overline{2,p},$$
$$A_{(p+1)(p+1)}=(2p-1)A_{pp}=(2p-1)!!,\quad p\geqslant 1.$$

Равенство (27) перепишем в виде

$$\lim_{x_k\to 0}H(x)=\lim_{x_k\to 0}x_k^{2\alpha_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[B^{x_k}_{\alpha_k-1/2}\right]^l\varphi_j(x)=\lim_{x_k\to 0}x_k^{1+2\alpha_k}\sum_{q=0}^{l}C_l^q(2\alpha_k)^{l-q}\left(\frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{l-q+1}\varphi_j^{(2q)}(x).$$

Учитывая (29), имеем

$$\lim_{x_k\to 0}H(x)=\sum_{q=0}^{l}C_l^q(2\alpha_k)^{l-q}\sum_{j=1}^{l-q+1}(-1)^{j+1}A_{(l-q+1)j}\lim_{x_k\to 0}\frac{\varphi_j^{(l-q-j+2)}(x)}{x_k^{l-q+j-2-2\alpha_k}}.$$

Применяя к последнему равенству правило Лопиталя $l-q+j-2$ раз (см. [6]) и учитывая условие доказываемой леммы, получим

$$\lim_{x_k\to 0}\frac{\varphi_j^{(l-q-j+2)}(x)}{x_k^{l-q+j-2-2\alpha_k}}=\frac{\lim\limits_{x_k\to 0}x_k^{2\alpha_k}\varphi_j^{(2(l-q))}(x)}{(l-q+j-2)!}=0.$$

Отсюда следует справедливость равенства (27). Равенство (28) доказываются аналогично. Лемма 2 доказана. □

В силу леммы 2 для функций $\Phi_k(x)$ выполняются условия теоремы 7. Принимая во внимание формулу (13), при $x_k>0$, $k=\overline{1,n}$, можно представить равенство (21) в виде

$$F_k(x)=J_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\-1/2\end{pmatrix}f_k(x),\quad k=\overline{0,m-1},\tag{30}$$

где

$$f_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^j\Delta_B^j\varphi_{k-j}(x),\quad k=\overline{0,m-1}.\tag{31}$$

Учитывая вид обратного оператора (7), представим равенства (30) в виде

$$F_k(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}\right] \bar{F}_k(x), \quad k = \overline{0, m-1},$$

$$\bar{F}_k(x) = \prod_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_j)}\right] \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_n} \prod_{j=1}^{n}\left[(x_j^2 - s_j^2)^{-\alpha_j} s_j^{2\alpha_j}\right] f_k(s)\, ds_1\, ds_2\, \ldots\, ds_n.$$

Заметим, что в силу леммы 2 из равенства (31) следует, что функции $f_k(x)$, $k = \overline{0, m-1}$, при $x_j \geqslant 0$ будут непрерывными, ограниченными и $f_k(x)\big|_{x_j=0} = 0$, в силу чего из последнего равенства имеем

$$\bar{F}_k(x)\Big|_{x_j=0} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{0, m-1}. \tag{32}$$

Принимая во внимание (32), в равенстве (26) выполним интегрирование по частям. Затем, подставив в это равенство значение функций $\bar{F}_k(x)$, получим

$$U_k(x,t) = -\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_j)}\right] \int_{\mathbb{R}_+^n} f_k(s) \prod_{j=1}^{n}\left[s_j^{2\alpha_j} G_1(x_j, s_j, t)\right] ds, \tag{33}$$

где

$$G_1(x_j, s_j, t) = \int_{s_j}^{+\infty} (y_j^2 - s_j^2)^{-\alpha_j} \frac{\partial}{\partial y_j} G_0(x_j, y_j, t) dy_j. \tag{34}$$

Вычислим интеграл (34). Применяя формулу

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\lambda^2} \cos(b\lambda) d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} \exp\left[-\frac{b^2}{4a}\right], \quad \operatorname{Re} a > 0$$

(см. [15, с. 451]), представим функцию $G_0(x_j, y_j, t)$ в виде

$$G_0(x_j, y_j, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda^2} \cos(x_j\lambda) \cos(y_j\lambda) d\lambda.$$

Вычислим производную по y_j и подставим полученное выражение для функции G_{0y} в (34). Затем, принимая во внимание равномерную сходимость интегралов, меняем порядок интегрирования и, применяя формулу Мелера—Сонина (см. [1, с. 93]), вычислим внутренний интеграл. В результате находим

$$G_1(x_j, s_j, t) = -\frac{2^{1/2-\alpha_j}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1-\alpha_j) s_j^{1/2-\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda^2} \lambda^{\alpha_j + (1/2)} J_{\alpha - 1/2}(\lambda s_j) \cos(x_j \lambda) d\lambda, \tag{35}$$

где $J_v(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка v (см. [1, с. 12]).

Теперь, подставляя (33) в (25), а затем полученный результат в (14), после смены порядка интегрирования получим

$$u(x,t) = -\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{2x_j^{1-2\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)\Gamma(1-\alpha_j)}\right] \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \int_{\mathbb{R}_+^n} f_k(s) \prod_{j=1}^{n} s_j^{2\alpha_j} G_2(x_j, s_j, t)\, ds, \tag{36}$$

где

$$G_2(x_j, s_j, t) = \int_0^{x_j} \left(x_j^2 - \xi_j^2\right)^{\alpha_j - 1} G_1(\xi_j, s_j, t)\, d\xi_j. \tag{37}$$

Подставим в (37) выражение (35) функции G_1 и изменим порядок интегрирования. Затем, применяя формулу Пуассона (см. [1, с. 93]), вычислим внутренний интеграл. В итоге находим

$$G_2(x_j,s_j,t)=-\frac{1}{2}\Gamma(\alpha_j)\Gamma(1-\alpha_j)\left(\frac{s_j}{x_j}\right)^{1/2-\alpha_j}\int\limits_0^\infty e^{-t\lambda^2}J_{\alpha_j-1/2}(s_j\lambda)J_{\alpha_j-1/2}(x_j\lambda)\lambda\,d\lambda.$$

Далее, учитывая формулу

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\lambda^2}J_\nu(s\lambda)J_\nu(x\lambda)\lambda\,d\lambda=\frac{1}{2t}\exp\left(-\frac{x^2+s^2}{4t}\right)I_\nu\left(\frac{xs}{2t}\right),$$

где $\operatorname{Re}\nu>-1$, $\operatorname{Re}t>0$ (см. [1, с. 60]), имеем

$$G_2(x_j,s_j,t)=-\frac{1}{4t}\Gamma(\alpha_j)\Gamma(1-\alpha_j)\left(\frac{s_j}{x_j}\right)^{1/2-\alpha_j}\exp\left(-\frac{x_j^2+s_j^2}{4t}\right)I_{\alpha_j-1/2}\left(\frac{x_js_j}{2t}\right),\tag{38}$$

где $I_v(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента порядка v (см. [1, с. 13]).

Подставляя (38) в (36) и учитывая неравенства $\alpha_j=\gamma_j+1/2<1$ и $\gamma_j>-1/2$, $j=\overline{1,n}$, находим окончательный вид решения однородного уравнения $L_\gamma^m(u)=0$, удовлетворяющее условиям (2) и (3) при $|\gamma_j|<1/2$, $j=\overline{1,n}$:

$$u(x,t)=\frac{1}{(2t)^n}\prod_{j=1}^n x_j^{-\gamma_j}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}f_k(s)\,G(x,s,t)\,ds,\tag{39}$$

где

$$f_k(x)=\sum_{j=0}^k(-1)^jC_k^j\Delta_B^{k-j}\varphi_j(x),$$

$$G(x,s,t)=\prod_{j=1}^n\left\{s_j^{\gamma_j+1}\exp\left[-\frac{x_j^2+s_j^2}{4t}\right]I_{\gamma_j}\left(\frac{x_js_j}{2t}\right)\right\}=$$
$$=\prod_{j=1}^n\left[s_j^{\gamma_j+1}I_{\gamma_j}\left(\frac{x_js_j}{2t}\right)\right]\exp\left[-\frac{|x|^2+|s|^2}{4t}\right],\quad |x|^2=\sum_{j=1}^n x_j^2.\tag{40}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть $|\gamma_j|<1/2$, $j=\overline{1,n}$, а функции $\varphi_j(x)\in C^{2(m-j)-1}(\mathbb{R}_+^n)$, $j=\overline{0,m-1}$, непрерывны и ограничены и все их производные до порядка $2(m-j)-1$ включительно, $j=\overline{0,m-1}$, обращаются в нуль при $x_k=0$, $k=\overline{1,n}$. Тогда функция $u(x,t)$, определяемая равенством (39), является классическим решением однородного уравнения $L_\gamma^m(u)=0$, удовлетворяющее условиям (2) и (3).*

4. Решение задачи в случае неоднородного уравнения. Теперь рассмотрим задачу нахождения решения неоднородного уравнения (1), удовлетворяющего однородным граничным условиям (3) и следующим однородным начальным условиям:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=0,\quad x\in\mathbb{R}_+^n,\quad k=\overline{0,m-1}.\tag{41}$$

Чтобы найти решение задачи (1), (3), (41), воспользуемся следующим аналогом второго принципа Дюамеля для уравнения высокого порядка.

Теорема 9. *Пусть функция $U(x,t,\tau)$, зависящая от параметра τ, является решением однородного уравнения $L_\gamma^m(U)=0$, $x\in\mathbb{R}_+^n$, $t>\tau$, удовлетворяющего однородным граничным условиям* (3) *при $t>\tau$ и начальным условиям*

$$\left.\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right|_{t=\tau}=0,\quad x\in\mathbb{R}_+^n,\quad k=\overline{0,m-2},\qquad \left.\frac{\partial^{m-1}U}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=\tau}=f(x,\tau),\quad x\in\mathbb{R}_+^n. \tag{42}$$

Тогда функция

$$V(x,t)=\int\limits_0^t U(x,t,\tau)d\tau, \tag{43}$$

является решением задачи (1), (3), (41).

Доказательство. Дифференцируя равенство (43) и учитывая (42), находим

$$\frac{\partial V}{\partial t}=U(x,t,\tau)\big|_{\tau=t}+\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial t}U(x,t,\tau)\,d\tau=\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial t}U(x,t,\tau)\,d\tau,$$

$$\Delta_B V(x,t)=\int\limits_0^t\Delta_B U(x,t,\tau)\,d\tau.$$

Составим выражение

$$L_\gamma^1(V)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_B\right)V=\int\limits_0^t L_\gamma^1\big(U(x,t,\tau)\big)d\tau.$$

Повторяя этот процесс $m-1$ раз, с учетом (42) получим

$$L_\gamma^{m-1}(V)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_B\right)^{m-1}V=\int\limits_0^t L_\gamma^{m-1}\big(U(x,t,\tau)\big)d\tau. \tag{44}$$

Далее, дифференцируя (44) по t, находим

$$\frac{\partial}{\partial t}L_\gamma^{m-1}(V)=L_\gamma^{m-1}\big(U(x,t,\tau)\big)\Big|_{\tau=t}+\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial t}L_\gamma^{m-1}\big(U(x,t,\tau)\big)d\tau. \tag{45}$$

В силу (42) имеем

$$L_\gamma^{m-1}\big(U(x,t,\tau)\big)\Big|_{\tau=t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_B\right)^{m-1}U\Big|_{\tau=t}=$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}C_{m-1}^k\big[-\Delta_B\big]^{m-k-1}\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\Big|_{\tau=t}=\frac{\partial^{m-1}U}{\partial t^{m-1}}\Big|_{\tau=t}=f(x,t).$$

Принимая во внимание последнее равенство, из (45) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}L_\gamma^{m-1}(V)=f(x,t)+\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial t}L_\gamma^{m-1}\big(U(x,t,\tau)\big)\,d\tau. \tag{46}$$

Применяя к равенству (44) оператор Δ_B и вычитая затем полученное равенство из (46), в силу соотношения $L_\gamma^m(U)=0$ находим $L_\gamma^m(V)=f(x,t)$.

Непосредственным вычислением можно проверить, что функция $V(x,t)$, определяемая равенством (43), удовлетворяет граничным условиям (3) и начальным условиям (41). Теорема 9 доказана. □

Чтобы найти решение однородного уравнения $L_\gamma^m(U)=0$, $x\in\mathbb{R}_+^n$, $t>\tau$, удовлетворяющего граничным условиям (3) и начальным условиям (41), сделаем замену переменных $t_1=t-\tau$. Тогда решение этой задачи даётся формулой (39), в которой t заменено на $t_1+\tau$. Из этой формулы, возвращаясь к старым переменным t и τ, имеем

$$U(x,t,\tau)=\frac{(t-\tau)^{m-n-1}}{2^n(m-1)!}\prod_{j=1}^{n}\left[x_j^{-\gamma_j}\right]\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(s,\tau)\,G(x,s,t-\tau)\,ds.$$

Принимая во внимание последнее равенство, из (43) находим решение задачи (1), (3), (41) в следующем виде:

$$V(x,t)=\frac{1}{2^n(m-1)!}\prod_{j=1}^{n}\left[x_j^{-\gamma_j}\right]\int\limits_0^t(t-\tau)^{m-n-1}\,d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(s,\tau)\,G(x,s,t-\tau)\,ds,$$

где $G(x,s,t)$ — функция, определяемая равенством (40).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1973.
2. *Веренич И. И.* Внутренние оценки решений параболических уравнений с оператором Бесселя// Докл. АН УССР. — 1977. — № 11. — С. 969–974.
3. *Городецкий В. В., Житарюк И. В., Лавренчук В. П.* Задача Коши для линейных параболических уравнений с оператором Бесселя в пространствах обобщенных функций типа S'/ Деп. в УкрИНТЭИ 09.03.93, № 38 Ук 93. — Черновцы: Черновиц. ун-т, 1993.
4. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя// Мат. сб. — 1955. — *36*, № 2. — С. 299–310.
5. *Ивасишен С. Д., Лавренчук В. П.* Об интегральном представлении решений параболической системы с оператором Бесселя// Нелин. гранич. задачи. — 1992. — *4*. — С. 19–25.
6. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. Продолжение курса. — М.: Изд-во МГУ, 1987.
7. *Каримов Ш. Т.* Новые свойства обощенного оператора Эрдейи—Кобера и их приложения// Докл. АН РУз. — 2014. — № 5. — С. 11–13.
8. *Каримов Ш. Т.* О некоторых обобщениях свойств оператора Эрдейи—Кобера и их приложения// Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2017. — № 2 (18). — С. 20–40.
9. *Киприянов И. А., Катрахов В. В., Ляпин В. М.* О краевых задачах в области общего вида для сингулярных параболических систем уравнений// Докл. АН СССР. — 1976. — *230*, № 6. — С. 1271–1274.
10. *Крехивский В. В.* Теоремы единственности решений задачи Коши для уравнений с оператором Бесселя// в кн.: Математическое моделирование физических процессов. — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1989. — С. 82–86.
11. *Крехивский В. В., Матийчук М. И.* Фундаментальные решения и задача Коши для линейных параболических систем с оператором Бесселя// Докл. АН СССР. — 1968. — *181*, № 6. — С. 1320–1323.
12. *Крехивский В. В., Матийчук М. И.* О краевых задачах для параболических систем с оператором Бесселя// Докл. АН СССР. — 1971. — *139*, № 4. — С. 773–775.
13. *Муравник А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши// Совр. мат. Фундам. направл. — 2014. — *52*. — С. 3–141.
14. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2001.
15. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. — М.: Физматлит, 2002.
16. *Самко С. Г., Килбас А.А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
17. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. — Новосибирск: Наука, 1985.
18. *Чупров И. Ф., Канева Е. А., Мордвинов А. А.* Уравнения математической физики с приложениями к задачам нефтедобычи и трубопроводного транспорта газа. — Ухта: УГТУ, 2004.

19. *Arena O.* On a singular parabolic equation related to axially symmetric heat potentials// Ann. Mat. Pura Appl. — 1975. — *105*, № 1. — C. 347–393.
20. *Colton D.* Cauchy's problem for a singular parabolic differential equation// J. Differ. Equations. — 1970. — *8*. — C. 250–257.
21. *Karimov Sh. T.* Multidimensional generalized Erdélyi–Kober operator and its application to solving Cauchy problems for differential equations with singular coefficients// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2015. — *18*, № 4. — C. 845–861.

Ш. Т. Каримов
Ферганский государственный университет, Фергана, Республика Узбекистан
E-mail: `shkarimov09@rambler.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 156 (2018). С. 18–29

УДК 517.956

ЗАДАЧА ЖЕВРЕ ДЛЯ ОДНОГО СМЕШАННО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© 2018 г. **А. О. МАМАНАЗАРОВ**

Аннотация. Исследована однозначная разрешимость задачи Жевре для одного смешанно-параболического уравнения с сингулярным коэффициентом в полосе. Доказаны существование и единственность решения поставленной задачи. Единственность решения доказана методом интегралов энергии, а существование — методами теории интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма, а также сингулярных интегральных уравнений.

Ключевые слова: задача Жевре, смешанно-параболическое уравнение, сингулярный коэффициент, единственность решения, существование решения.

AMS Subject Classification: 35A01, 35K20

1. Введение. Постановка задачи. Теория уравнений смешанного типа, благодаря своей прикладной важности, является одним из важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными (см. [4, 6, 10, 18, 19]). Известно, что в начале исследователи занимались изучением уравнений смешанного эллиптико-гиперболического, эллиптико-параболического и параболо-гиперболического типов (см. [5, 7]). В последнее время возрос интерес к исследованию смешанно-параболических уравнений. Это вызвано, в частности, их приложениями в гидродинамике и изучением движения жидкости со знакопеременным коэффициентом вязкости.

Первыми работами об уравнениях такого типа были статьи французского математика М. Жевре [21, 22], опубликованные еще в 1913-1914 гг. В них содержатся первые фундаментальные исследования по линейным уравнениям с частными производными второго порядка смешанно-параболического типа. Дальнейшее развития эта теория получила в работах А. М. Нахушева, С. А. Терсенова, Т. Д. Джураева, C. D. Pagani, G. C. Talenti, И. Е. Егорова, С. В. Попова и их учеников. В настоящее время имеется целый ряд работ, где наряду с основными граничными задачами предложены и изучены новые постановки краевых задач для смешанно-параболических уравнений в ограниченных областях (см. [1, 8, 9, 11, 14, 16, 17, 20, 23, 24]). В настоящей работе для одного смешанно-параболического уравнения с сингулярным коэффициентом поставлен и изучен аналог задачи Жевре в полосе.

Пусть D — область плоскости переменных x и t, ограниченная прямыми $t = 0$ и $t = T$, где $T = \text{const} > 0$. В области D рассмотрим уравнение $L^{(k)}u = 0$, где

$$L^{(k)}u \equiv \begin{cases} L_1^{(k)}u \equiv u_{xx} + \dfrac{k_1}{x}u_x - u_t, & (x,t) \in D_1 = D \cap (x > 0), \\ L_2^{(k)}u \equiv u_{xx} + \dfrac{k_2}{x}u_x u_t, & (x,t) \in D_2 = D \cap (x < 0), \end{cases}$$

k_1 и k_2 — заданные действительные числа из $[0, 1)$.

Очевидно, что $L_1^{(k)}u = 0$ и $L_2^{(k)}u = 0$ являются параболическими уравнениями, причем направления времени этих уравнений параллельны оси ординат и противоположны. Поэтому $L^{(k)}u = 0$ в области D является смешанно-параболическим уравнением.

Задача G. Найти непрерывную в замыкании области D функцию $u(x,t)$, являющуюся регулярным в областях D_1 и D_2 решением уравнения $L_1^{(k)}u = 0$ и $L_2^{(k)}u = 0$ соответственно и удовлетворяющую условиям склеивания

$$\lim_{x\to -0} u(x,t) = \lim_{x\to +0} u(x,t), \qquad 0 < t < T, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to -0} (-x)_2^k u_x(x,t) = \lim_{x\to +0} x_1^k u_x(x,t), \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty, \tag{3}$$

$$u(x,T) = \varphi_2(x), \quad -\infty < x \leqslant 0, \tag{4}$$

$$\lim_{|x|\to +\infty} u(x,t)) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(-x)$ — заданные непрерывные функции на $[0,+\infty)$, причем

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} \varphi_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to -\infty} \varphi_2(x) = 0.$$

Докажем однозначную разрешимость поставленной задачи.

При исследовании задачи G воспользуемся операторами дробного интегродифференцирования (см. [15]), определяемые равенствами

$$D_{0t}^{-\gamma}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\eta)^{\gamma-1}\varphi(\eta)d\eta, \quad D_{tT}^{-\gamma}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_t^T (\eta-t)^{\gamma-1}\varphi(\eta)d\eta, \quad \gamma > 0;$$

$$D_{0t}^{\gamma}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\varphi(\eta)d\eta}{(t-\eta)}^{\gamma}, \qquad D_{tT}^{\gamma}\varphi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_t^T \frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta-t)^{\gamma}}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

2. Исследование задачи G при $k_1 = k_2 = 0$. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи G. При этом условии согласование (2) принимает вид

$$\lim_{x\to -0} u_x(x,t) = \lim_{x\to +0} u_x(x,t), \quad 0 < t < T. \tag{6}$$

Учитывая условия (1) и (6), примем следующие обозначения:

$$u(-0,t) = u(+0,t) = \tau(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$\lim_{x\to -0} u_x(x,t) = \lim_{x\to +0} u_x(x,t) = \nu(t), \quad 0 < t < T.$$

Известно, что решение уравнения $L_1^{(0)}u = 0$, непрерывное в замыкании области D_1 и удовлетворяющее условиям (3),

$$\lim_{x\to +\infty} u(x,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$\lim_{x\to +0} u_x(x,t) = \nu(t), \quad 0 < t < T,$$

определяется формулой (см. [13])

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x\xi}}{2t} I_{-1/2}\left(\frac{x\xi}{2t}\right) \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\right) \varphi_1(\xi)d\xi -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \nu(\eta)(t-\eta)^{-1/2} \exp\left(\frac{-x^2}{4(t-\eta)}\right) d\eta, \tag{7}$$

где $I_{-1/2}(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента (см. [2]):

$$I_{-1/2}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2j-1/2}}{j!\Gamma(j+1/2)}.$$

В формуле (7) перейдем к пределу при $x \to 0$. учитывая равенство

$$\sqrt{\frac{\pi z}{2}} I_{-1/2}(z)\Big|_{z=0} = 1$$

и обозначение $u(0,t) = \tau(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, получим в результате соотношение между $\tau(t)$ и $\nu(t)$ на отрезке $D_0 = \big\{(0,t) : 0 < t < T\big\}$, перенесенное из области D_1:

$$\tau(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \nu(\eta)(\eta - t)^{-1/2} d\eta + \Phi_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

где

$$\Phi_1(t) = (\pi t)^{-1/2} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_1(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi.$$

Выполняя замену переменных $t = T - t_0$, $x = -x_0$ в области D_2 и уравнение $L_2^{(0)} u = 0$ и используя формулу (7), нетрудно убедиться, что решение уравнения $L_2^{(0)} u = 0$, непрерывное в замыкании области D_2 и удовлетворяющее условиям (4),

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad \lim_{x\to-0} u_x(x,t) = \nu(t), \quad 0 < t < T,$$

определяется в виде

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sqrt{x\xi}}{2(T-t)} I_{-1/2}\left[\frac{x\xi}{2(T-t)}\right] \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4(T-t)}\right) \varphi_2(\xi) d\xi +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_t^T \nu(\eta)\big(\eta - t\big)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4(\eta - t)}\right) d\eta. \tag{9}$$

Переходя к пределу при $x \to 0$, из равенства (9) получим соотношение между $\tau(t)$ и $\nu(t)$ на отрезке D_0, перенесенное из области D_2:

$$\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_t^T \nu(\eta)\big(\eta - t\big)^{-1/2} d\eta + \Phi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{10}$$

здесь

$$\Phi_2(t) = \Big[\pi\big(T - t\big)\Big]^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_2(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(T-t)}\right) d\xi.$$

Этим задача G при $k_1 = k_2 = 0$ (в смысле разрешимости) сведена к эквивалентной системе уравнений (8), (10). Поэтому теперь займемся исследованием системы (8), (10). С этой целью, исключая из уравнений (8) и (10) неизвестную функцию $\tau(t)$, получим следующее уравнение относительно неизвестной функции $\nu(t)$:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \nu(\eta)\big(t - \eta\big)^{-1/2} d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_t^T \nu(\eta)\big(\eta - t\big)^{-1/2} d\eta = \Phi_1(t) - \Phi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Это уравнение с помощью операторов дробного интегрирования $D_{0t}^{-\gamma}$ запишется в виде

$$D_{0t}^{-1/2}\nu(t) + D_{tT}^{-1/2}\nu(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Применяя к этому равенству оператор дробного дифференцирования $D_{0t}^{1/2}$, а затем принимая во внимание равенства

$$D_{0t}^{1/2} D_{0t}^{-1/2} \nu(t) = \nu(t), \quad D_{0t}^{1/2} D_{tT}^{-1/2} \nu(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^T \left(\frac{\eta}{t}\right)^{1/2} \frac{\nu(\eta)}{t-\eta}\, d\eta$$

(см. [15]) получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции $\nu(t)$:

$$\nu(t) + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^T \left(\frac{\eta}{t}\right)^{1/2} \frac{\nu(\eta)}{\eta - t}\, d\eta = D_{0t}^{1/2} \Big[\Phi_1(t) - \Phi_2(t)\Big], \quad 0 < t < T.$$

Умножая это уравнение на $t^{1/2}$ и вводя обозначения

$$t^{1/2} \nu(t) = \rho(t), \quad t^{1/2} D_{0t}^{1/2} \Big[\Phi_1(t) - \Phi_2(t)\Big] = \Phi_0(t),$$

получим сингулярное интегральное уравнение Коши (см. [12]) относительно функции $\rho(t)$:

$$\rho(t) + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^T \frac{\rho(\eta)}{\eta - t}\, d\eta = \Phi_0(t), \quad 0 < t < T. \tag{11}$$

Исследуем правую часть уравнения (11). Согласно разложению оператора дробного дифференцирования

$$\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{1/2} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \big(t-\eta\big)^{-1/2} \Big[\Phi_1(\eta) - \Phi_2(\eta)\Big]\, d\eta =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \Phi_1(0) - \Phi_2(0) + t^{1/2} \int\limits_0^t \frac{\Phi_1'(\eta) - \Phi_2'(\eta)}{(t-\eta)^{1/2}}\, d\eta \right\}. \tag{12}$$

Рассмотрим функцию $\Phi_1(t)$. Очевидно, что

$$\Phi_1'(t) = -\frac{t^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_1(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi + \frac{t^{-5/2}}{4\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_1(\xi) \xi^2 \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi.$$

В интегралах, участвующих в $\Phi_1(t)$ и $\Phi_1'(t)$, выполним замену переменных $\xi = 2s\sqrt{t}$:

$$\Phi_1(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_1\Big(2\sqrt{t}s\Big) e^{-s^2}\, ds, \Phi_1'(t) = -\frac{t^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_1\Big(2\sqrt{t}s\Big) e^{-s^2}\, ds + \frac{t^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_1\Big(2\sqrt{t}s\Big) s^2 e^{-s^2}\, ds.$$

Учитывая условие $\varphi_1(0) = 0$, функцию $\varphi_1(t)$ можно представить в виде $\varphi_1(t) = t^{\varepsilon} \tilde{\varphi}_1(t)$, где $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$, $\tilde{\varphi}_1(t) \in C[0, +\infty)$ и $\big|\tilde{\varphi}_1(t)\big| < +\infty$. Подставляя это выражение функции $\varphi_1(t)$ в $\Phi_1(t)$ и $\Phi_1'(t)$, легко убедиться, что $\Phi_1(t) = t^{\varepsilon/2} O(1)$, т.е. $\Phi_1(0) = 0$ и $\Phi_1'(t) = t^{\varepsilon/2-1} \omega_1(t)$; здесь $\omega_1(t) \in C[0, T]$.

Далее, учитывая условие $\varphi_2(0) = 0$, аналогичным методом можно убедиться, что

$$\big|\Phi_2(0)\big| < +\infty, \quad \Phi_2'(t) = (T-t)^{\varepsilon/2-1} \omega_2(t), \quad \omega_2(t) \in C[0, T].$$

Теперь найденные выражения для $\Phi_1'(t)$ и $\Phi_2'(t)$ подставим в (12), затем в полученных интегралах заменим переменные по формуле $\eta = ts$:

$$\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\Phi_1(0) - \Phi_2(0)\Big] + \sqrt{\frac{t}{\pi}}\int\limits_0^t (t-\eta)^{-1/2}\eta^{\varepsilon/2-1}\omega_1(\eta)d\eta -$$

$$- \sqrt{\frac{t}{\pi}}\int\limits_0^t (t-\eta)^{-1/2}(T-\eta)^{\varepsilon/2-1}\omega_2(\eta)d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\Phi_1(0) - \Phi_2(0)\Big] + \frac{1}{\sqrt{\pi}}t^{\varepsilon/2}\int\limits_0^1 s^{\varepsilon/2-1}(1-s)^{-1/2}\omega_1(ts)ds -$$

$$- \frac{t}{\sqrt{\pi}}T^{\varepsilon/2-1}\int\limits_0^1 (1-s)^{-1/2}\left(1-\frac{t}{T}s\right)^{\varepsilon/2-1}\omega_2(ts)\,ds. \quad (13)$$

Здесь первые и вторые слагаемые — ограниченные и непрерывные функции. Применяя теорему о среднем значении к последнему интегралу в (13), а затем используя интегральное представление гипергеометрической функции Гаусса

$$\int\limits_0^1 z^{a-1}(1-z)^{c-a-1}(1-xz)^{-b}\,dz = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}F(a,b,c;x), \quad (14)$$

(см. [3]), находим

$$\int\limits_0^1 (1-s)^{-1/2}\left(1-\frac{t}{T}s\right)^{\varepsilon/2-1}\omega_2(ts)\,ds =$$

$$= \omega_2(ts_1)\int\limits_0^1 (1-s)^{-1/2}\left(1-\frac{t}{T}s\right)^{\varepsilon/2-1}ds = 2\omega_2(ts_1)F\left[1, \frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{3}{2}; \frac{t}{T}\right],$$

где $s_1 = \mathrm{const} \in [0,1]$.

Отсюда, применяя формулу автотрансформации

$$F(a,b,c;x) = (1-x)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c; x) \quad (15)$$

(см. [3]) к функции Гаусса, имеем

$$\int\limits_0^1 (1-s)^{-1/2}\left(1-\frac{t}{T}s\right)^{\varepsilon/2-1}\omega_2(ts)\,ds =$$

$$= 2\omega_2(ts_1)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{(\varepsilon-1)/2}F\left[\frac{1}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}, \frac{3}{2}; \frac{t}{T}\right] = (T-t)^{(\varepsilon-1)/2}O(1).$$

Учитывая это, из равенства (13) получим

$$\Phi_0(t) = (T-t)^{(\varepsilon-1)/2}O(1).$$

Индекс сингулярного интегрального уравнения (11) в классе $h(0)$ функций, ограниченных при $t = 0$ и неограниченных при $t = T$, равен нулю. Поэтому его решение в этом классе существует, единственно и дается формулой

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\Phi_0(t) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^T \left[\frac{t(T-\eta)}{(T-t)\eta}\right]^{1/4}\frac{\Phi_0(\eta)d\eta}{\eta - t} \quad (16)$$

(см. [12]). В силу обозначения $\rho(t)=t^{1/2}\nu(t)$, функция $\nu(t)$ однозначно находится из (16):

$$\nu(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\left\{\Phi_0(t)-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T\left[\frac{t(T-\eta)}{(T-t)\eta}\right]^{1/4}\frac{\Phi_0(\eta)d\eta}{\eta-t}\right\}. \tag{17}$$

Пользуясь установленными выше свойствами $\Phi_0(t)$, нетрудно убедиться, что функция $\nu(t)$, определяемая равенством (17), принадлежит классу $C[0,T]\cap L(0,T)$. Подставляя функцию (17) в (7) и (9) находим решение задачи G в областях D_1 и D_2.

Этим исследование задачи G при $k_1=k_2=0$ завершено.

3. Исследование задачи G при $k_1,k_2\in(0,1)$. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи G. Согласно условиям (1) и (2), введем следующие обозначения:

$$u(-0,t)=u(+0,t)=\tau(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{18}$$

$$\lim_{x\to-0}(-x)^{k_2}u_x(x,t)=\lim_{x\to+0}x^{k_1}u_x(x,t)=\nu(t),\quad 0<t<T. \tag{19}$$

Известно, что непрерывное в замыкании области D_1 решение уравнения $L_1^{(k_1)}u=0$, удовлетворяющее условиям (3) и

$$\lim_{x\to+\infty}u(x,t)=0,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$\lim_{x\to+0}x^{k_1}u_x(x,t)=\nu(t),\quad 0<t<T,$$

определяется формулой

$$u(x,t)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\xi^{k_1}(x\xi)^{(1-k_1)/2}}{2t}I_{(k_1-1)/2}\left(\frac{x\xi}{2t}\right)\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\right)\varphi_1(\xi)\,d\xi-$$
$$-2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_0^t\nu(\eta)(t-\eta)^{-(1+k_1)/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)d\eta \tag{20}$$

(см. [13]). Переходя к пределу при $x\to0$ и учитывая обозначение (18), из (20) получим функциональное соотношение между $\tau(t)$ и $\nu(t)$ на отрезке D_0, перенесенное из области D_1:

$$\tau(t)=-2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_0^t\nu(\eta)(t-\eta)^{-(1+k_1)/2}\,d\eta+\Phi_3(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{21}$$

где

$$\Phi_3(t)=2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_0^{+\infty}\xi^{k_1}t^{-(1+k_1)/2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)\varphi_1(\xi)\,d\xi.$$

Выполняя замену переменных $t=T-t_0$, $x=-x_0$ в области D_2 и уравнение $L_2^{(k_2)}u=0$ и используя формулу (20), нетрудно убедиться, что непрерывное в замыкании области D_2 решение уравнения $L_2^{(k_2)}u=0$, удовлетворяющее условиям (4) и

$$\lim_{x\to-\infty}u(x,t)=0,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$\lim_{x\to-0}(-x)^{k_2}u_x(x,t)=\nu(t),\quad 0<t<T,$$

представимо в виде

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(-\xi)^{k_2}(x\xi)^{(1-k_2)/2}}{2(T-t)}I_{(k_2-1)/2}\left[\frac{x\xi}{2(T-t)}\right]\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4(T-t)}\right)\varphi_2(\xi)\,d\xi+$$
$$+\,2^{-k_2}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_2}{2}\right)\int\limits_{t}^{T}\nu(\eta)(\eta-t)^{-(1+k_2)/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4(\eta-t)}\right)d\eta. \quad (22)$$

Отсюда, также переходя к пределу при $x\to 0$, получим функциональное соотношение между $\tau(t)$ и $\nu(t)$ на отрезке D_0, перенесенное из области D_2:

$$\tau(t)=2^{-k_2}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_2}{2}\right)\int\limits_{t}^{T}\nu(\eta)(\eta-t)^{-(1+k_2)/2}\,d\eta+\Phi_4(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad (23)$$

где

$$\Phi_4(t)=2^{-k_2}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_2}{2}\right)\int\limits_{-\infty}^{0}(-\xi)^{k_2}(T-t)^{-(1+k_2)/2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(T-t)}\right)\varphi_2(\xi)\,d\xi.$$

Исключая из соотношений (21) и (23) неизвестную функцию $\tau(t)$, относительно неизвестной функции $\nu(t)$ получим уравнение вида

$$2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_{0}^{t}\nu(\eta)(t-\eta)^{-(1+k_1)/2}\,d\eta+$$
$$+\,2^{-k_2}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_2}{2}\right)\int\limits_{t}^{T}\nu(\eta)(\eta-t)^{-(1+k_2)/2}\,d\eta=\Phi_3(t)-\Phi_4(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \quad (24)$$

Следовательно, задача G (в смысле разрешимости) эквивалентна интегральному уравнению (24). Если из уравнения (24) возможно однозначно найти неизвестную функцию $\nu(t)$, то решение задачи G в областях D_1 и D_2 определяется формулами (20) и (22) соответственно. Поэтому теперь исследуем интегральное уравнение (24).

Сначала докажем единственность решения уравнения (24). С этой целью рассмотрим однородное уравнение, соответствующее (24):

$$2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_{0}^{t}\nu(\eta)(t-\eta)^{-(1+k_1)/2}\,d\eta+$$
$$+\,2^{-k_2}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_2}{2}\right)\int\limits_{t}^{T}\nu(\eta)(\eta-t)^{-(1+k_2)/2}\,d\eta=0. \quad (25)$$

Заменим t на z в (25), умножим на функцию $\nu(z)$ и проинтегрируем по z на отрезке $[0,T]$:

$$2^{-k_1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_1}{2}\right)\int\limits_{0}^{T}\nu(z)\,dz\int\limits_{0}^{z}\nu(\eta)(z-\eta)^{-(1+k_1)/2}\,d\eta+$$
$$+\,2^{-k_2}\Gamma^{-1}\left(\frac{1+k_2}{2}\right)\int\limits_{0}^{T}\nu(z)\,dz\int\limits_{z}^{T}\nu(\eta)(\eta-z)^{-(1+k_2)/2}\,d\eta=0.$$

Из этого равенства, заменяя функции $(z-\eta)^{-(1+k_1)/2}$ и $(\eta-z)^{-(1+k_2)/2}$ по формуле

$$\bigl|z-\eta\bigr|^{-\gamma}=\Gamma^{-1}(\gamma)\cos^{-1}\frac{\gamma\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\xi^{\gamma-1}\cos\bigl(|z-\eta|\xi\bigr)d\xi,\quad \gamma\in(0,1)$$

(см. [3]), после преобразований получим

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2^{k_j+1}\Gamma}^{2}\left[\frac{1+k_j}{2}\right]\cos\left[\frac{\pi(1+k_j)}{2}\right]\times$$
$$\times\int\limits_0^{+\infty}\xi^{(k_j-1)/2}\left[\left(\int\limits_0^T\nu(\eta)\cos(\eta\xi)\,d\eta\right)^2+\left(\int\limits_0^T\nu(\eta)\sin(\eta\xi)d\eta\right)^2\right]d\xi=0.$$

Отсюда следует, что для всех $\xi\in(0,+\infty)$ справедливы равенства

$$\int\limits_0^T\nu(\eta)\cos(\eta\xi)d\eta=0,\quad \int\limits_0^T\nu(\eta)\sin(\eta\xi)d\eta=0. \tag{26}$$

Тогда равенства (26) справедливы, в частности, при $\xi=\pi n/T$, $n\in\mathbb{N}$, откуда следует, что коэффициенты Фурье функции $\nu(t)\in L_2[0,T]$ равны нулю. Следовательно, $\nu(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$, т.е. однородное уравнение (25) в классе $L_2[0,T]$ имеет только тривиальное решение. Отсюда следует, что если в классе $L_2[0,T]$ существует решение интегрального уравнения (24), то оно единственно.

Теперь переходим к доказательству существования решения уравнения (24). С этой целью уравнение (24) перепишем с помощью операторов дробного интегрирования:

$$\alpha D_{0t}^{(k_1-1)/2}\nu(t)+\beta D_{tT}^{(k_2-1)/2}\nu(t)=\Phi_3(t)-\Phi_4(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{27}$$

где

$$\alpha=2^{-k_1}\Gamma\left[\frac{1-k_1}{2}\right]/\Gamma\left[\frac{1+k_1}{2}\right],\quad \beta=2^{-k_2}\Gamma\left[\frac{1-k_2}{2}\right]/\Gamma\left[\frac{1+k_2}{2}\right].$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $k_1=k_2\in(0,1)>0$. Применяя оператор дробного дифференцирования $D_{0t}^{(1-k_1)/2}$ к уравнению (27) и принимая во внимание равенства

$$D_{0t}^{\gamma}D_{0t}^{-\gamma}\nu(t)=\nu(t),\quad D_{0t}^{\gamma}D_{tT}^{-\gamma}\nu(t)=\nu(t)\cos\gamma\pi+\frac{\sin\gamma\pi}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{\eta}{t}\right)^{\gamma}\frac{\nu(\eta)}{t-\eta}\,d\eta,\quad 0<\gamma<1$$

(см. [15]), для неизвестной функции $\nu(t)$ получим интегральное уравнение вида

$$\nu(t)+\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\left(\frac{1-k_1}{4}\pi\right)\int\limits_0^T\left(\frac{\eta}{t}\right)^{(1-k_1)/2}\frac{\nu(\eta)}{\eta-t}\,d\eta=$$
$$=\frac{1}{2\alpha}\cos^{-2}\left[\frac{\pi(1-k_1)}{4}\right]D_{0t}^{(1-k_1)/2}\Bigl[\Phi_3(t)-\Phi_4(t)\Bigr],\quad 0<t<T,$$

которое после введения обозначений

$$t^{(1-k_1)/2}\nu(t)=\rho(t),\quad \frac{1}{2\alpha}\cos^{-2}\left[\frac{\pi(1-k_1)}{4}\right]t^{(1-k_1)/2}D_{0t}^{(1-k_1)/2}\Bigl[\Phi_3(t)-\Phi_4(t)\Bigr]=\Phi_5(t),$$

превращается в сингулярное интегральное уравнение Коши:

$$\rho(t)+\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\left(\frac{1-k_1}{4}\pi\right)\int\limits_0^T\frac{\rho(\eta)}{\eta-t}\,d\eta=\Phi_5(t),\quad 0<t<T. \tag{28}$$

Используя условия, наложенные на заданные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, как и в случае $k_1 = k_2 = 0$, можно показать, что

$$\Phi_5(t) \in C[0,T), \quad \Phi_5(t) = (T-t)^{(\varepsilon+k_1-1)/2} O(1),$$

где $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$.

Индекс уравнения (28) в классе $h(0)$ равен нулю. Поэтому оно в этом классе имеет единственное решение, и это решение дается формулой

$$\rho(t) = \cos^2\left(\frac{1-k_1}{4}\pi\right)\Phi_5(t) - \frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{1-k_1}{2}\pi\right)\int\limits_0^T \left[\frac{t(T-\eta)}{(T-t)\eta}\right]^{(1-k_1)/4} \frac{\Phi_5(\eta)d\eta}{\eta - t} \tag{29}$$

(см. [12]). В силу равенства $\rho(t) = t^{(1-k_1)/2}\nu(t)$ функция $\nu(t)$ однозначно находится из (29):

$$\nu(t) = t^{(k_1-1)/2}\left\{\cos^2\left(\frac{1-k_1}{4}\pi\right)\Phi_5(t) - \frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{1-k_1}{2}\pi\right)\int\limits_0^T \left[\frac{t(T-\eta)}{(T-t)\eta}\right]^{(1-k_1)/4} \frac{\Phi_5(\eta)\,d\eta}{\eta - t}\right\}. \tag{30}$$

Пользуясь свойствами функции $\Phi_5(t)$ и сингулярных интегралов, нетрудно доказать, что функция $\nu(t)$, определяемая равенством (30), принадлежит классу $C[0,T] \cap L_2[0,T]$. Этим завершается исследование уравнения (27) при $k_1 = k_2 \in (0,1)$.

Случай 2. Пусть теперь $k_1 > k_2$. В этом случае, применяя дифференциальный оператор $D_{0t}^{(1-k_1)/2}$ к уравнению (27), получим

$$\nu(t) + \frac{\beta}{\alpha} D_{0t}^{(1-k_1)/2} D_{tT}^{(k_2-1)/2}\nu(t) = \Phi_6(t), \quad t \in (0,T), \tag{31}$$

где

$$\Phi_6(t) = \alpha^{-1} D_{0t}^{(1-k_1)/2}\Big[\Phi_3(t) - \Phi_4(t)\Big].$$

Упростим второе слагаемое в (31). На основании разложения операторов $D_{0t}^{(1-k_1)/2}$ и $D_{tT}^{(k_2-1)/2}$ имеем

$$J = D_{0t}^{(1-k_1)} D_{tT}^{(k_2-1)/2} = c_1 \frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-s)^{(k_1-1)/2}\,ds \int\limits_s^T (\eta - s)^{-(1+k_2)/2}\nu(\eta)\,d\eta,$$

где

$$c_1 = \Gamma^{-1}\left[\frac{1-k_2}{2}\right]\Gamma^{-1}\left[\frac{1+k_1}{2}\right].$$

В повторном интеграле меняем порядок интегрирования:

$$J = c_1\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_0^t \nu(\eta)\,d\eta \int\limits_0^\eta (t-s)^{(k_1-1)/2}(\eta-s)^{-(k_2+1)/2}\,ds + \right.$$
$$\left. + \int\limits_t^T \nu(\eta)\,d\eta \int\limits_0^t (t-s)^{(k_1-1)/2}(\eta-s)^{-(k_2+1)/2}\,ds\right\}.$$

Выполним замену переменных в первом внутреннем интеграле по формуле $s = \eta z$, а во втором внутреннем интеграле — по формуле $s = \eta t$:

$$J = c_1\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_0^t \nu(\eta)\left[t^{(k_1-1)/2}\eta^{(1-k_2)/2}\int\limits_0^1 (1-z)^{-(1+k_2)/2}\left(1-\frac{\eta}{t}z\right)^{(k_1-1)/2} dz\right] d\eta + \right.$$
$$\left. + \int\limits_t^T \nu(\eta)\left[t^{(k_1+1)/2}\eta^{-(1+k_2)/2}\int\limits_0^1 (1-z)^{(k_1-1)/2}\left(1-\frac{t}{\eta}z\right)^{-(1+k_2)/2} dz\right] d\eta\right\}.$$

Применяя формулу (14) к внутренним интегралам, находим

$$J = c_1 \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2}{1-k_2} \int\limits_0^t \nu(\eta)\eta^{(1-k_2)/2} t^{(k_1-1)/2} F\left[\frac{1-k_1}{2},\ 1,\ \frac{3-k_2}{2};\ \frac{\eta}{t}\right] d\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{k_1+1} \int\limits_t^T \nu(\eta)\eta^{-(k_2+1)/2} t^{(k_1+1)/2} F\left[\frac{1+k_2}{2},\ 1,\ \frac{k_1+3}{2};\ \frac{t}{/}\eta\right] d\eta \right\}. \tag{32}$$

Выполнив операции дифференцирования в (32) по формулам

$$\frac{d}{dx}\Big[x^a F\big(a,b,c;x\big)\Big] = a x^{a-1} F\big(a+1,b,c;x\big),$$

$$\frac{d}{dx}\Big[x^{c-1} F\big(a,b,c;x\big)\Big] = (c-1)x^{c-2} F\big(a,b,c-1;x\big),$$

а затем применяя формулу

$$F\big(a,b,c;1\big) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c-a-b>0$$

(см. [3]) к внеинтегральным членам, получим

$$J = -c_1 \int\limits_0^t \nu(\eta)\eta^{(1-k_2)/2} t^{(k_1-3)/2} F\left(\frac{3-k_1}{2},\ 1,\ \frac{3-k_2}{2};\ \frac{\eta}{t}\right) d\eta +$$

$$+ c_1 \int\limits_t^T \nu(\eta)\eta^{-(1+k_2)/2} t^{(k_1-1)/2} F\left(\frac{1+k_2}{2},\ 1,\ \frac{1+k_1}{2};\ \frac{t}{\eta}\right) d\eta.$$

Отсюда, применяя формулу (15) к функциям Гаусса, находим окончательный вид интеграла J:

$$J = \int\limits_0^t \nu(\eta) K_1(t,\eta)\, d\eta + \int\limits_t^T \nu(\eta) K_2(t,\eta) d\eta,$$

где

$$K_1(t,\eta) = c_1 \left(\frac{\eta}{t}\right)^{(1-k_2)/2} (t-\eta)^{-1+(k_1-k_2)/2} F\left(\frac{k_1-k_2}{2},\ \frac{1-k_2}{2},\ \frac{3-k_2}{2};\ \frac{\eta}{t}\right),$$

$$K_2(t,\eta) = c_1 \left(\frac{\eta}{t}\right)^{(1-k_1)/2} (\eta-t)^{-1+(k_1-k_2)/2} F\left(\frac{k_1-k_2}{2},\ \frac{k_1-1}{2},\ \frac{1+k_1}{2};\ \frac{t}{\eta}\right).$$

Подставляя это выражение функции J в (31), получим следующее уравнение относительно неизвестной функции $\nu(t)$:

$$\nu(t) + \int\limits_0^T K(t,\eta)\nu(\eta) d\eta = \Phi_6(t), \quad 0<t<T, \tag{33}$$

где

$$K(t,\eta) = \begin{cases} -(\beta/\alpha)K_1(t,\eta), & t>\eta, \\ -(\beta/\alpha)K_2(t,\eta), & t<\eta. \end{cases}$$

Введя обозначения $\rho(t) = t^{(1-k_1)/2}\nu(t)$, $\Phi_7(t) = t^{(1-k_1)/2}\Phi_6(t)$, из (33) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $\rho(t)$:

$$\rho(t) + \int\limits_0^T K_0(t,\eta)\rho(\eta) d\eta = \Phi_7(t), \quad 0<t<T, \tag{34}$$

где

$$K_0(t,\eta) = \begin{cases} K_3(t,\eta), & t > \eta, \\ K_4(t,\eta), & T < \eta, \end{cases}$$

$$K_3(t,\eta) = -\frac{\beta}{\alpha}\Gamma^{-1}\left[\frac{1+k_1}{2}\right]\Gamma^{-1}\left[\frac{1-k_2}{2}\right]\left(\frac{\eta}{t}\right)^{(k_1-k_2)/2} \times \\ \times (t-\eta)^{-1+(k_1-k_2)/2} F\left(\frac{k_1-k_2}{2},\ \frac{1-k_2}{2},\ \frac{3-k_2}{2};\ \frac{\eta}{t}\right),$$

$$K_4(t,\eta) = \frac{\beta}{\alpha}\Gamma^{-1}\left[\frac{1+k_1}{2}\right]\Gamma^{-1}\left[\frac{1-k_2}{2}\right](\eta-t)^{-1+(k_1-k_2)/2} F\left(\frac{k_1-k_2}{2},\ \frac{k_1-1}{2},\ \frac{k_1+1}{2};\ \frac{t}{\eta}\right).$$

Принимая во внимание условие $k_1 > k_2$ и используя свойства функции $F(a,b,c;x)$, нетрудно убедиться, что

$$K_0(t,\eta) = \left|t-\eta\right|^{-1+(k_1-k_2)/2} O(1).$$

Далее, пользуясь равенствами $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, как и выше, можно показать, что

$$\Phi_7(t) = (T-t)^{(\varepsilon+k_1-1)/2} O(1) \in C[0,T).$$

Так как однородное интегральное уравнение (25) имеет только тривиальное решение, то (в силу эквивалентности)однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (34), также имеет только решение $\rho(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$. Тогда, согласно альтернативе Фредгольма (см. [12]), решение неоднородного уравнения (34) существует и единственно. После того, как из (34) найдена функция $\rho(t)$, функция $\nu(t) = t^{(1-k_1)/2}\rho(t)$ оказывается будет известной и принадлежит классу $C(0,T) \cap L_2[0,T]$.

Этим полностью завершается исследование задачи G.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акбарова М. Х.* Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений смешанного типов/ Автореф. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Ташкент, 1995.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие транцендентные функции. Функция Бесселя. Функция параболического цилиндра. Ортогональные полиномы. — М.: Наука, 1966.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие транцендентные функции. Гипергеометрическая Функция. Функция Лежандра. — М.: Наука, 1965.
4. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. — М.: ИЛ, 1961.
5. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. — М.: АН СССР, 1959.
6. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959.
7. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. — Ташкент: Фан, 1979.
8. *Егоров И. Е.* Об одной краевой задаче для системы сингулярных параболических уравнений// Динамика сплошной среды. — Новосибирск, 1973. — № 14. — С. 100–105.
9. *Керефов А. А.* Об одной краевой задаче Жевре для параболического уравнения со знакопеременным разрывом первого рода у коэффициента при производной по времени// Диффер. уравн. — 1974. — *10*, № 1. — С. 69–77.
10. *Коган М. А* О магнитогидродинамических течениях смешанного типа// Прикл. мат. мех. — 1961. — *25*, № 1. — С. 132–157.
11. *Кумышев Р. М., Сурамова Ж. Х., Сабанчиева А. А., Битова А. А.* Краевая задача для смешанно-параболического уравнения в ограниченной области с меняющимся направлением времени// Акт. вопр. совр. науки. — 2015. — № 2 (6). — С. 4–8.
12. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
13. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2001.
14. *Попов С. В.* Безусловная разрешимость первой краевой задачи для сингулярного параболического уравнения с меняющимся направлением времени// в кн.: Краевые задачи для неклассических уравнений мат. физики. — Новосибирск, 1989. — С. 153–160.

15. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
16. *Терсенов С. А.* Первая краевая задача для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени/ Препринт. — Новосибирск, 1978.
17. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. — Новосибирск: Наука, 1985.
18. *Франкль Ф. И.* О боковом водозаборе из быстрых мелких рек// Тр. Киргиз. гос. ун-та. — 1953. — *2.* — С. 33–45.
19. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике. — М.: Наука, 1973.
20. *Шополов Н. Н.* Една гранична задача за смесено параболично уравнение с нелокални начални условия// Год. ВУЗ. Прилож. мат. — 1980 (1981). — *15*, № 2. — 7 с.
21. *Gevrey M.* Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique// J. Math. Appl. — 1913. — *9.* — С. 305–475.
22. *Gevrey M.* Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique// J. Math. Appl. — 1914. — С. 105–137.
23. *Pagani C. D., Talenti G.* On an forward-backward parabolic equation// Ann. Mat. Pura Appl. — 1971. — *90*, № 4. — С. 1–58.
24. *Pagani C. D.* On the parabolic equation and a related one// Ann. Mat. Pura Appl. — 1974. — *99*, № 4. — С. 333–399.

А. О. Маманазаров
Ферганский государственный университет, Фергана, Республика Узбекистан
E-mail: mega.mamanazarov@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 156 (2018). С. 30–40

УДК 517.956.223

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2018 г. **А. К. УРИНОВ, К. Т. КАРИМОВ**

Аннотация. Доказана однозначная разрешимость первой краевой задачи для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в прямоугольном параллелепипеде. Методом интегралов энергии доказана единственность решения поставленной задачи. Для доказательства существования решений использован спектральный метод Фурье, основанный на разделение переменных. Решение поставленной задачи построено в виде суммы двойного ряда Фурье—Бесселя. При обосновании равномерной сходимости построенного ряда использованы асимптотические методы. Полученная оценка позволила доказать сходимость ряда и его производных до второго порядка включительно, а также теорему существования в классе регулярных решений данного уравнения.

***Ключевые слова*:** задача Дирихле, уравнение эллиптического типа, спектральный метод, единственность решения, существование решения.

***AMS Subject Classification*:** 35A10, 35M12

1. Введение. Постановка задачи. Теория уравнений с сингулярными коэффициентами является одной из быстро развивающихся частей современной теории дифференциальных уравнений с частными производными, которые имеют много применений в аэродинамике и газовой динамике (см. [15]) и проблемах ирригации (см. [9]). Исследования стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия, фильтрация и т. д.) обычно приводят к уравнениям эллиптического типа (см. монографии А. В. Бицадзе [1], Р. Гильберта [16], М. М. Смирнова [10], М. С. Салахитдинова [7, 8] и др.).

Отметим некоторые работы по изучению локальных и нелокальных задач для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, близкие к настоящей работе. В [5, 13, 14] исследованы задача N и задача T для уравнений эллиптического типа с одним сингулярным коэффициентом в полушаре. Для эллиптических уравнений с двумя и тремя сингулярными коэффициентами в областях, состоящей из частей шара, задачи Дирихле и Дирихле—Неймана исследованы в [17–20]. Во всех перечисленных выше работах задачи решены методом функции Грина. В [3, 11] исследованы задачи Дирихле и Дирихле—Неймана для эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами в четверти цилиндра методом спектрального анализа. Однако многие краевые задачи для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами остаются неизученными, например, задача в прямоугольной параллелепипеде. В данной работе исследована однозначная разрешимость первой краевой задачи для трехмерного уравнения эллиптического типа с тремя сингулярными коэффициентами в прямоугольном параллелепипеде.

Пусть $\Omega = \{(x,y,z):\ 0<x<a,\ 0<y<b,\ 0<z<c\}$, где $a,b,c\in\mathbb{R}$. В области Ω рассмотрим трехмерное уравнение с тремя сингулярными коэффициентами

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0, \tag{1}$$

где $u=u(x,y,z)$ — неизвестная функция, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда $0<\alpha,\beta,\gamma<1/2$.

В области Ω уравнение (1) принадлежит эллиптическому типу. Плоскости $x=0$, $y=0$ и $z=0$ являются плоскостями сингулярности уравнения.

Задача D**.** Найти функцию $u(x,y,z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и краевым условиям

$$u(0,y,z) = \varphi_1(y,z), \quad u(a,y,z) = \varphi_2(y,z), \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c; \tag{2}$$

$$u(x,0,z) = \psi_1(x,z), \quad u(x,b,z) = \psi_2(x,z), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant z \leqslant c; \tag{3}$$

$$u(x,y,0) = \chi_1(x,y), \quad u(x,y,c) = \chi_2(x,y), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \tag{4}$$

где φ_i, ψ_i, χ_i, $i=\overline{1,2}$, — заданные непрерывные функции, причем на ребрах и вершинах области Ω выполняются условия согласования.

2. Единственность решения задачи D.

Теорема 1. *Задача D не имеет более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что задача D имеет два решения $V_1(x,y,z)$ и $V_2(x,y,z)$; тогда функция $u(x,y,z)=V_1(x,y,z)-V_2(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y,z) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

В области Ω справедливо тождество

$$x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}u\,Lu = \left(x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_x\right)_x + \left(x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_y\right)_y + \left(x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_z\right)_z - \\ - x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right) = 0.$$

Интегрируя это тождество по области

$$\Omega^{\varepsilon_5\varepsilon_6}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4} = \Big\{(x,y,z):\ \varepsilon_1<x<a-\varepsilon_2,\ \varepsilon_3<y<b-\varepsilon_4,\ \varepsilon_5<z<c-\varepsilon_6\Big\},$$

где ε_i, $i=\overline{1,6}$, — достаточно малые положительные числа, имеем

$$\iiint\limits_{\Omega^{\varepsilon_5\varepsilon_6}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}} \left[\left(x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_x\right)_x + \left(x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_y\right)_y + \left(x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_z\right)_z\right] dx\,dy\,dz = \\ = \iiint\limits_{\Omega^{\varepsilon_5\varepsilon_6}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}} \left[x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)\right] dx\,dy\,dz. \tag{5}$$

Очевидно, что если $\varepsilon_j \to 0$, $j=\overline{1,6}$, то $\Omega^{\varepsilon_5\varepsilon_6}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4} \to \Omega$.

Применяя формулу Гаусса—Остроградского (см. [12, с. 333]) к левой стороне равенства (5), имеем

$$\int\limits_{\varepsilon_5}^{c-\varepsilon_6}\int\limits_{\varepsilon_3}^{b-\varepsilon_4} y^{2\beta}z^{2\gamma}\Big[(a-\varepsilon_2)^{2\alpha}u(a-\varepsilon_2,y,z)u_x(a-\varepsilon_2,y,z) - \varepsilon_1^{2\alpha}u(\varepsilon_1,y,z)u_x(\varepsilon_1,y,z)\Big]\,dy\,dz + \\ + \int\limits_{\varepsilon_5}^{c-\varepsilon_6}\int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_2} x^{2\alpha}z^{2\gamma}\Big[(b-\varepsilon_4)^{2\beta}u(x,b-\varepsilon_4,z)u_y(x,b-\varepsilon_4,z) - \varepsilon_3^{2\beta}u(x,\varepsilon_3,z)u_y(x,\varepsilon_3,z)\Big]\,dx\,dz + \\ + \int\limits_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_2}\int\limits_{\varepsilon_3}^{b-\varepsilon_4} x^{2\alpha}y^{2\beta}\Big[(c-\varepsilon_6)^{2\gamma}u(x,y,c-\varepsilon_6)u_z(x,y,c-\varepsilon_6) - \varepsilon_5^{2\gamma}u(x,y,\varepsilon_5)u_z(x,y,\varepsilon_5)\Big]\,dx\,dy = \\ = \iiint\limits_{\Omega^{\varepsilon_5\varepsilon_6}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}} \left[x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)\right] dx\,dy\,dz.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon_j \to 0$, $j = \overline{1,6}$, и учитывая однородные краевые условия, из последнего равенства получим

$$\iiint\limits_{\Omega} \Big[x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} \big(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\big)\Big]\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Следовательно,

$$u_x(x,y,z) \equiv u_y(x,y,z) \equiv u_z(x,y,z) \equiv 0, \quad (x,y,z) \in \Omega.$$

Тогда $u(x,y,z) \equiv \mathrm{const}$, $(x,y,z) \in \Omega$. Так как $u(x,y,z) \in C(\bar\Omega)$ и $u(0,y,z) \equiv 0$, то $u(x,y,z) \equiv 0$, $(x,y,z) \in \bar\Omega$. Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

3. Существование решения задачи D. Решение задачи D будем искать в виде

$$u(x,y,z) = u_1(x,y,z) + u_2(x,y,z) + u_3(x,y,z), \tag{6}$$

где функции $u_1(x,y,z)$, $u_2(x,y,z)$ и $u_3(x,y,z)$ — решения следующих краевых задач.

Задача $D^{(1)}$. Найти функцию $u_1(x,y,z) \in C(\bar\Omega) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям (2),

$$u_1(x,0,z) = 0, \quad u_1(x,b,z) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant z \leqslant c; \tag{7}$$

$$u_1(x,y,0) = 0, \quad u_1(x,y,c) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b. \tag{8}$$

Задача $D^{(2)}$. Найти функцию $u_2(x,y,z) \in C(\bar\Omega) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям (3),

$$u_2(0,y,z) = 0, \quad u_2(a,y,z) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c; \tag{9}$$

$$u_2(x,y,0) = 0, \quad u_2(x,y,c) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b. \tag{10}$$

Задача $D^{(3)}$. Найти функцию $u_3(x,y,z) \in C(\bar\Omega) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям (4),

$$u_3(0,y,z) = 0, \quad u_3(a,y,z) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c; \tag{11}$$

$$u_3(x,0,z) = 0, \quad u_3(x,b,z) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant z \leqslant c. \tag{12}$$

В самом деле, если функции $u_1(x,y,z)$, $u_2(x,y,z)$, $u_3(x,y,z)$ являются решениями задач $D^{(1)}$, $D^{(2)}$, $D^{(3)}$ соответственно, то функция

$$u(x,y,z) = u_1(x,y,z) + u_2(x,y,z) + u_3(x,y,z)$$

удовлетворяет всем условиям исходной задачи D.

Рассмотрим задачу $D^{(1)}$. Сначала найдем нетривиальные частные решения уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющие краевым условиям (7), (8). С этой целью, разделив переменные по формуле $u_1(x,y,z) = X(x)W(y,z)$, из уравнения (1) получим

$$X''(x) + \frac{2\alpha}{x} X'(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < a, \tag{13}$$

$$W_{yy} + W_{zz} + \frac{2\beta}{y} W_y + \frac{2\gamma}{z} W_z + \lambda W = 0, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c, \tag{14}$$

где λ — константа разделения.

Учитывая однородные краевые условия (7) и (8), для уравнения (14) получим задачу на собственные значение в прямоугольнике $\Big\{(y,z): \ 0 \leqslant y \leqslant b, \ 0 \leqslant z \leqslant c\Big\}$ со следующими краевыми условиями:

$$W(0,z) = W(b,z) = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant c; \qquad W(y,0) = W(y,c) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant b.$$

Путем разделения переменных $W(y,z) = Q(y)Z(z)$ эта задача сводится к двум задачам на собственные значения:

$$Q''(y) + \frac{2\beta}{y} Q'(y) + \mu Q(y) = 0, \quad Q(0) = 0, \quad Q(b) = 0; \tag{15}$$

$$Z''(z) + \frac{2\gamma}{z}Z'(z) + (\lambda - \mu)Z(z) = 0, \quad Z(0) = 0, \quad Z(c) = 0, \tag{16}$$

где μ — константа разделения.

Произведя замену $Q(y) = (t/\sqrt{\mu})^{1/2-\beta}g(t)$, где $t = \sqrt{\mu}y$, в уравнении (15) получим уравнение Бесселя (см. [2, с. 49]):

$$t^2 g''(t) + tg'(t) + \left(t^2 - \left[\frac{1}{2} - \beta\right]^2\right) g(t) = 0. \tag{17}$$

Принимая во внимание вид общего решения (см. [2, с. 51]) уравнения (17) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (15) в виде

$$Q(y) = d_1 y^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}\Big(\sqrt{\mu}y\Big) + d_2 y^{1/2-\beta} Y_{1/2-\beta}\Big(\sqrt{\mu}y\Big); \tag{18}$$

здесь d_1 и d_2 — произвольные постоянные, $J_l(x)$ и $Y_l(x)$ — функция Бесселя порядка l первого и второго рода соответственно. Из (18) следует, что решение уравнения (15), удовлетворяющее первому из краевых условий задачи (15), существует при $\beta < 1/2$ и определяется равенством

$$Q(y) = d_1 y^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}\Big(\sqrt{\mu}y\Big). \tag{19}$$

Подставляя (19) во второе краевое условие задачи (15), получим условия существования ее нетривиального решения:

$$J_{1/2-\beta}\Big(\sqrt{\mu}b\Big) = 0. \tag{20}$$

Известно, что при $l > -1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет счетное число нулей, причем все они вещественны имеют попарно противоположные знаки (см. [2, с. 528]). Так как $1/2 - \beta > 0$, то уравнения (20) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая n-й положительный корень уравнения (20) через σ_n, получим те значения параметра μ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (15) (т.е. собственные значения задачи): $\mu_n = (\sigma_n/b)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Полагая в (19) $\mu = \mu_n$ и $d_1 = d_{1n}$, где $d_{1n} \neq 0$ — произвольная постоянная, получим нетривиальные решения (собственные функции) задачи (15):

$$Q_n(y) = d_{1n} y^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}\left(\sigma_n \frac{y}{b}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Теперь перейдем к исследованию задачи (16). Методом, использованным при решении задачи (15), найдем общее решение уравнения (16) в виде

$$Z(z) = d_3 z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}\Big(\sqrt{\lambda - \mu_n}z\Big) + d_4 z^{1/2-\gamma} Y_{1/2-\gamma}\Big(\sqrt{\lambda - \mu_n}z\Big), \tag{22}$$

где d_3 и d_4 — произвольные постоянные.

Подставляя (22) в краевые условия задачи (16), имеем $d_4 = 0$ и

$$J_{1/2-\gamma}\Big(\sqrt{\lambda - \mu_n}c\Big) = 0. \tag{23}$$

Учитывая условие $\gamma < (1/2)$ и обозначая m-й положительный корень уравнения (23) через δ_m, получим те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (16):

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\sigma_n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\delta_m}{c}\right)^2, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Полагая в (22) $\lambda = \lambda_{nm}$, $d_4 = 0$ и $d_3 = d_{3m}$, где d_{3m} — произвольная постоянная, получим нетривиальные решения (собственные функции) задачи (16) в виде

$$Z_m(z) = d_{3m} z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m \frac{z}{c}\right), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Общее решение уравнения (13) при каждом значении λ_{nm} имеет вид

$$X_{nm}(x) = d_{5nm} x^{1/2-\alpha} I_{1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big) + d_{6nm} x^{1/2-\alpha} K_{1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big), \tag{25}$$

где d_{5nm} и d_{6nm} — произвольные постоянные, $I_\omega(z)$ и $K_\omega(z)$ — модифицированные функции Бесселя порядка ω первого и третьего рода соответственно (см. [2, с. 91-92]).

Подставляя (21), (24), (25) в равенство $u_1(x,y,z)=X(x)Q(y)Z(z)$, получим нетривиальные в области Ω решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (7) и (8):

$$u_{1nm}(x,y,z)=x^{1/2-\alpha}y^{1/2-\beta}z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m\frac{z}{c}\right)\times \\ \times\left[A_{nm}I_{1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)+B_{nm}K_{1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)\right], \quad (26)$$

где $A_{nm}=d_{1n}d_{3m}d_{5nm}$, $B_{nm}=d_{1n}d_{3m}d_{6nm}$ — произвольные постоянные.

Теперь будем искать решение задачи $D^{(1)}$ в области Ω в виде суммы ряда

$$u_1(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{1nm}(x,y,z)= \\ =\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}x^{(1/2)-\alpha}y^{(1/2)-\beta}z^{1/2-\gamma}J_{(1/2)-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)J_{(1/2)-\gamma}\left(\delta_m\frac{z}{c}\right)\times \\ \times\left[A_{nm}I_{(1/2)-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)+B_{nm}K_{(1/2)-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)\right]. \quad (27)$$

Из условия, чтобы функция (27) удовлетворяла краевому условию (2), получим

$$\varphi_1(y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}y^{(1/2)-\beta}z^{1/2-\gamma}J_{(1/2)-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m\frac{z}{c}\right)\times \\ \times\frac{\big(\sqrt{\lambda_{nm}}\big)^{\alpha-1/2}\Gamma[(1/2)-\alpha]}{2^{(1/2)+\alpha}}B_{nm}, \quad (28)$$

$$\varphi_2(y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a^{(1/2)-\alpha}y^{(1/2)-\beta}z^{1/2-\gamma}J_{(1/2)-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m\frac{z}{c}\right)\times \\ \times\left[A_{nm}I_{(1/2)-\alpha}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right)+B_{nm}K_{(1/2)-\alpha}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right)\right]. \quad (29)$$

Формулу (28) запишем в виде

$$y^{\beta-1/2}z^{\gamma-1/2}\varphi_1(y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}J_{(1/2)-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)f_n(z), \quad (30)$$

где

$$f_n(z)=\sum_{m=1}^{\infty}J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m\frac{z}{c}\right)\left[\frac{\Gamma[1/2-\alpha]B_{nm}}{2^{1/2+\alpha}}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\right)^{(1/2)-\alpha}\right]. \quad (31)$$

Ряды (30) и (31) называются рядами Фурье—Бесселя функций $y^{\beta-1/2}z^{\gamma-1/2}\varphi_1(y,z)$ и $f_n(z)$ соответственно (см. [2, с. 633]).

Из (30) и (31) соответственно находим

$$f_n(z)=\frac{2}{b^2J^2_{3/2-\beta}(\sigma_n)}\int_0^b t^{1/2+\beta}z^{\gamma-1/2}\varphi_1(t,z)J_{(1/2)-\beta}\left(\sigma_n\frac{t}{b}\right)dt,$$

$$B_{nm}=\frac{2^{3/2+\alpha}\big(\sqrt{\lambda_{nm}}\big)^{(1/2)-\alpha}}{\big[bc\,J_{3/2-\beta}(\sigma_n)J_{3/2-\gamma}(\delta_m)\big]^2\,\Gamma[1/2-\alpha]}\times \\ \times\int_0^c\int_0^b t^{1/2+\beta}s^{1/2+\gamma}J_{(1/2)-\beta}\left(\sigma_n\frac{t}{b}\right)J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m\frac{s}{c}\right)\varphi_1(t,s)\,dt\,ds=\varphi_{1nm}. \quad (32)$$

При помощи формул дифференцирования бесселевых функций

$$\frac{d}{dx}\Big[x^{\nu}J_{\nu}(x)\Big]=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$$

представим коэффициенты φ_{1nm} в виде

$$\varphi_{1nm}=\frac{bc\,2^{3/2+\alpha}\big(\sqrt{\lambda_{nm}}\big)^{(1/2)-\alpha}}{\sigma_n\delta_m\left[bc\,J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)J_{3/2-\gamma}(\delta_m)\right]^2\Gamma[1/2-\alpha]}\times$$

$$\times\int\limits_0^c\int\limits_0^b\varphi_1(t,s)t^{2\alpha-1}s^{2\gamma-1}\frac{d}{dt}\left[t^{3/2-\alpha}J_{3/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n t}{b}\right)\right]\frac{d}{ds}\left[s^{3/2-\gamma}J_{3/2-\gamma}\left(\frac{\delta_m s}{c}\right)\right]dt\,ds. \quad (33)$$

Интегрируя по частям в (33), получим

$$\varphi_{1nm}=\frac{bc\,2^{3/2+\alpha}\big(\sqrt{\lambda_{nm}}\big)^{(1/2)-\alpha}}{\sigma_n\delta_m\Big[bc\,J_{3/2=\alpha}(\sigma_n)J_{3/2-\gamma}(\delta_m)\Big]^2\Gamma[1/2-\alpha]}\times$$

$$\times\Bigg\{b^{1/2+\alpha}c^{1/2+\gamma}J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)J_{3/2-\gamma}(\delta_m)\varphi_1(b,c)-$$

$$-b^{1/2+\alpha}J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)\int\limits_0^c s^{3/2-\gamma}J_{3/2-\gamma}\left(\frac{\delta_m s}{c}\right)\frac{d}{ds}\Big[s^{2\gamma-1}\varphi_1(b,s)\Big]ds-$$

$$-c^{1/2+\gamma}J_{3/2-\gamma}(\delta_m)\int\limits_0^b t^{3/2-\alpha}J_{3/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n t}{b}\right)\frac{d}{dt}\Big[t^{2\alpha-1}\varphi_1(t,c)\Big]dt+$$

$$+\int\limits_0^c\int\limits_0^b t^{3/2-\alpha}s^{3/2-\gamma}J_{3/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n t}{b}\right)J_{3/2-\gamma}\left(\frac{\delta_m s}{c}\right)\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[t^{2\alpha-1}s^{2\gamma-1}\varphi_1(t,s)\Big]dt\,ds\Bigg\}. \quad (34)$$

Предположим, что выполнены условия

$$\varphi_1(b,z)=\varphi_1(y,c)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant b,\quad 0\leqslant z\leqslant c. \quad (35)$$

Тогда формула (34) принимает вид

$$\varphi_{1nm}=\frac{bc\,2^{3/2+\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}\Big)^{(1/2)-\alpha}}{\sigma_n\delta_m\Big[bc\,J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)J_{3/2-\gamma}(\delta_m)\Big]^2\Gamma[1/2-\alpha]}\times$$

$$\times\int\limits_0^c\int\limits_0^b t^{3/2-\alpha}s^{3/2-\gamma}J_{3/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n t}{b}\right)J_{3/2-\gamma}\left(\frac{\delta_m s}{c}\right)\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[t^{2\alpha-1}s^{2\gamma-1}\varphi_1(t,s)\Big]dt\,ds.$$

Отсюда, интегрируя по частям, имеем

$$\varphi_{1nm}=\frac{2^{3/2+\alpha}\big(\sqrt{\lambda_{nm}}\big)^{1/2-\alpha}}{\sigma_n^2\delta_m^2\Big[J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)J_{3/2-\gamma}(\delta_m)\Big]^2\Gamma[1/2-\alpha]}\times$$

$$\times\Bigg\{b^{3/2-\alpha}c^{3/2-\gamma}J_{5/2-\alpha}(\sigma_n)J_{5/2-\gamma}(\delta_m)\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[t^{2\alpha-1}s^{2\gamma-1}\varphi_1(t,s)\Big]_{\substack{t=b\\ s=c}}-$$

$$-\frac{J_{5/2-\gamma}(\delta_m)}{c^{\gamma-3/2}}\int\limits_0^b t^{5/2-\alpha}J_{5/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n t}{b}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[t^{2\alpha-1}s^{2\gamma-1}\varphi_1(t,s)\Big]\right]_{s=c}dt-$$

$$
-\frac{J_{5/2-\alpha}(\sigma_n)}{b^{\alpha-3/2}}\int\limits_0^c s^{5/2-\gamma}J_{3/2-\gamma}\left(\frac{\delta_m s}{c}\right)\frac{\partial}{\partial s}\left[s^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[t^{2\alpha-1}s^{2\gamma-1}\varphi_1(t,s)\Big]\right]_{t=b}ds+
$$

$$
+\int\limits_0^c\int\limits_0^b t^{5/2-\alpha}s^{5/2-\gamma}J_{5/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n t}{b}\right)J_{5/2-\gamma}\left(\frac{\delta_m s}{c}\right)\times
$$

$$
\times\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\left\{(ts)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[t^{2\alpha-1}s^{2\gamma-1}\varphi_1(t,s)\Big]\right\}\Bigg\}\,dt\,ds.
$$

Отсюда следует, что если функция $\varphi_1(y,z)$ удовлетворяет условиям

$$
\begin{cases}\tilde{\varphi}_1(y,z)=\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z}\Big[y^{2\beta-1}z^{2\gamma-1}\varphi_1(y,z)\Big]\in C\big([0,b]\times[0,c]\big),\\ \lim\limits_{y\to b}\tilde{\varphi}_1(y,z)=\lim\limits_{z\to c}\tilde{\varphi}_1(y,z)=0,\end{cases}\tag{36}
$$

то функции φ_{1nm} определяются формулами

$$
\varphi_{1nm}=\frac{2^{3/2+\alpha}\big(\sqrt{\lambda_{nm}}\big)^{1/2-\alpha}}{\sigma_n^2\delta_m^2\Big[J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)J_{3/2-\gamma}(\delta_m)\Big]^2\Gamma[1/2-\alpha]}\times
$$

$$
\times\int\limits_0^c\int\limits_0^b t^{5/2-\alpha}s^{5/2-\gamma}J_{5/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n t}{b}\right)J_{5/2-\gamma}\left(\frac{\delta_m s}{c}\right)\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[(ts)^{-1}\tilde{\varphi}_1(t,s)\Big]\,dt\,ds.
$$

Снова интегрируя по частям, получим

$$
\varphi_{1nm}=\frac{bc\,2^{3/2+\alpha}\big(\sqrt{\lambda_{nm}}\big)^{1/2-\alpha}}{\sigma_n^3\delta_m^3\Big[J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)J_{3/2-\gamma}(\delta_m)\Big]^2\Gamma[1/2-\alpha]}\times
$$

$$
\times\Bigg\{b^{5/2-\alpha}c^{5/2-\gamma}J_{7/2-\alpha}(\sigma_n)J_{7/2-\gamma}(\delta_m)\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[(ts)^{-1}\tilde{\varphi}_1(t,s)\Big]_{\substack{t=b\\ s=c}}-
$$

$$
-c^{5/2-\gamma}J_{7/2-\gamma}(\delta_m)\int\limits_0^b t^{7/2\alpha}J_{7/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n t}{b}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[(ts)^{-1}\tilde{\varphi}_1(t,s)\Big]\right]_{s=c}dt-
$$

$$
-b^{5/2-\alpha}J_{7/2-\alpha}(\sigma_n)\int\limits_0^c s^{7/2-\gamma}J_{7/2-\gamma}\left(\frac{\delta_m s}{c}\right)\frac{\partial}{\partial s}\left[s^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[(ts)^{-1}\tilde{\varphi}_1(t,s)\Big]\right]_{t=b}ds+
$$

$$
+\int\limits_0^c\int\limits_0^b t^{7/2-\alpha}s^{7/2-\gamma}J_{7/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n t}{b}\right)J_{7/2-\gamma}\left(\frac{\delta_m s}{c}\right)\times
$$

$$
\times\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\left\{(ts)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[(ts)^{-1}\tilde{\varphi}_1(t,s)\Big]\right\}\,dt\,ds\Bigg\}.
$$

Если потребовать выполнение условий

$$
\begin{cases}\tilde{\varphi}_{10}(y,z)=\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z}\Big[(yz)^{-1}\tilde{\varphi}_1(y,z)\Big]\in C\big([0,b]\times[0,c]\big),\\ \lim\limits_{y\to b}\tilde{\varphi}_{10}(y,z)=\lim\limits_{z\to c}\tilde{\varphi}_{10}(y,z)=0,\end{cases}\tag{37}
$$

то φ_{1nm} запишется в виде

$$\varphi_{1nm} = \frac{bc\,2^{3/2+\alpha}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\right)^{1/2-\alpha}}{\sigma_n^3\delta_m^3\left[J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)J_{3/2-\gamma}(\delta_m)\right]^2\Gamma[1/2-\alpha]}\times$$
$$\times\int_0^c\int_0^b t^{7/2-\alpha}s^{7/2-\gamma}J_{7/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n t}{b}\right)J_{7/2-\gamma}\left(\frac{\delta_m s}{c}\right)\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[(ts)^{-1}\tilde{\varphi}_{10}(t,s)\Big]\,dt\,ds = \frac{\tilde{\varphi}_{1nm}}{\sigma_n^3\delta_m^3}.$$

В силу этого равенства (32) принимает вид

$$B_{nm} = \frac{\tilde{\varphi}_{1nm}}{\sigma_n^3\delta_m^3}. \tag{38}$$

Аналогично, из формулы (29) при выполнении условий

$$\begin{cases} \varphi_2(b,z) = \varphi_2(y,c) = 0, \\ \tilde{\varphi}_2(y,z) = \dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z}\Big[y^{2\beta-1}z^{2\gamma-1}\varphi_2(y,z)\Big] \in C\big([0,b]\times[0,c]\big), \\ \lim\limits_{y\to b}\tilde{\varphi}_2(y,z) = \lim\limits_{z\to c}\tilde{\varphi}_2(y,z) = 0, \\ \tilde{\varphi}_{20}(y,z) = \dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z}\Big[(yz)^{-1}\tilde{\varphi}_2(y,z)\Big] \in C\big([0,b]\times[0,c]\big), \\ \lim\limits_{y\to b}\tilde{\varphi}_{20}(y,z) = \lim\limits_{z\to c}\tilde{\varphi}_{20}(y,z) = 0 \end{cases} \tag{39}$$

получим

$$A_{nm}I_{(1/2)-\alpha}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right) + B_{nm}K_{(1/2)-\alpha}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right) = \frac{\tilde{\varphi}_{2nm}}{\sigma_n^3\delta_m^3}, \tag{40}$$

где

$$\frac{\tilde{\varphi}_{2nm}}{\sigma_n^3\delta_m^3} = \frac{4bca^{\alpha-1/2}}{\sigma_n^3\delta_m^3\Big[J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)J_{3/2-\gamma}(\delta_m)\Big]^2}\times$$
$$\times\int_0^c\int_0^b t^{7/2-\alpha}s^{7/2-\gamma}J_{7/2-\alpha}(\sigma_n t)J_{7/2-\gamma}(\delta_m s)\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big[(ts)^{-1}\tilde{\varphi}_{20}(t,s)\Big]\,dt\,ds.$$

Подставляя (38) в (40), найдем

$$A_{nm} = \frac{\tilde{\varphi}_{2nm} - \tilde{\varphi}_{1nm}K_{(1/2)-\alpha}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right)}{\sigma_n^3\delta_m^3 I_{(1/2)-\alpha}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right)}.$$

Подставляя найденные значения A_{nm} и B_{nm} в (27), получим формальное решение задачи D.

Теперь докажем, что функция (27) является решением задачи D. Для этого вначале докажем равномерную сходимость ряда (27) в $\bar{\Omega}$.

Известно (см. [4, с. 172-173]), что для цилиндрических функций при $\xi\to\infty$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$J_\nu(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\left[\cos\left(\xi - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\big(\xi^{-1}\big)\right], \tag{41}$$

$$I_\nu(\xi) = \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}}\Big[1 + O\big(\xi^{-1}\big)\Big], \quad K_\nu(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}e^{-\xi}\Big[1 + O\big(\xi^{-1}\big)\Big]. \tag{42}$$

В этих формулах $O(\xi^{-1})$ означает такую величину, отношение которой к ξ^{-1} при $\xi\to\infty$ остается меньше некоторой постоянной (см. [6, с. 15]). Для них справедливы следующие соотношения при $\xi\to\infty$:

$$f(\xi) = O\big(f(\xi)\big), \quad O\big(O\big(f(\xi)\big)\big) = O\big(f(\xi)\big), \tag{43}$$

$$O\big(f(\xi)\big)O\big(g(\xi)\big)=O\big(f(\xi)g(\xi)\big), \tag{44}$$

$$O\big(f(\xi)\big)+O\big(g(\xi)\big)=O\big(|f(\xi)|+|g(\xi)|\big), \tag{45}$$

$$C\cdot O\big(f(\xi)\big)=O\big(f(\xi)\big),\quad O\big(f(\xi)g(\xi)\big)=f(\xi)O\big(g(\xi)\big), \tag{46}$$

$$O\big(f^2(\xi)\big)=O\big(f(\xi)\big)^2,\quad O\big(1/\xi^2\big)=O\big(1/\xi\big), \tag{47}$$

где f — произвольная функция.

Применяя последовательно формулы (43), (44), (47), (45) и (46) к равенству (41), а формулы (43), (44), (46) и (47) к равенствам (42), получим

$$J_\nu(\xi)=O\big(\xi^{-1/2}\big), \tag{48}$$

$$I_\nu(\xi)=O\big(\xi^{-1/2}\big)e^{\xi},\quad K_\nu(\xi)=O\big(\xi^{-1/2}\big)e^{-\xi}. \tag{49}$$

Также известно (см. [2, с. 653]), что если $f(t)\in C[l_0,l_1]$, где $0\leqslant l_0<l_1<\infty$, то при $\xi\to\infty$ справедливо равенство

$$\int\limits_{l_0}^{l_1} f(t)\,t\,J_\nu(\xi t)\,dt=O\left(\frac{1}{\xi^{3/2}}\right). \tag{50}$$

С помощью асимптотических формул (48)–(50) и (43)–(47) нетрудно показать, что при $n\to\infty$ и $m\to\infty$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\tilde\varphi_{1nm}&=O\left(\frac{(\lambda_{nm})^{1/4}}{(\sigma_n\delta_m)^{1/2}}\right), &\qquad \tilde\varphi_{2nm}&=O\Big((\sigma_n\delta_m)^{-1/2}\Big),\\
A_{nm}&=O\left(\frac{(\lambda_{nm})^{1/4}}{(\sigma_n\delta_m)^{7/2}}\right)e^{-\sqrt{\lambda_{nm}}a}, &\qquad B_{nm}&=O\left(\frac{(\lambda_{nm})^{1/4}}{(\sigma_n\delta_m)^{7/2}}\right).
\end{aligned} \tag{51}$$

Из асимптотических формул (48), (49), (51) следует, что если $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$, то при $n\to\infty$, $m\to\infty$ имеет место равенство

$$x^{(1/2)-\alpha}y^{(1/2)-\beta}z^{1/2-\gamma}J_{(1/2)-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m\frac{z}{c}\right)\times \\ \times\Big[A_{nm}I_{(1/2)-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)+B_{nm}K_{(1/2)-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)\Big]=O\left(\frac{1}{(\sigma_n\delta_m)^4}\right).$$

Отсюда следует, что для членов ряда (27) в $\bar\Omega$ справедливы следующие оценки:

$$\bigg|x^{(1/2)-\alpha}y^{(1/2)-\beta}z^{1/2-\gamma}J_{(1/2)-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m\frac{z}{c}\right)\times \\ \times\Big[A_{nm}I_{(1/2)-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)+B_{nm}K_{(1/2)-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)\Big]\bigg|\leqslant\frac{C_1}{(\sigma_n\delta_m)^4},$$

где C_1 — некоторая положительная постоянная. Тогда, в силу признака Вейерштрасса (см. [12, с. 427]), ряд (27) сходится абсолютно и равномерно в $\bar\Omega$ и, следовательно $u_1(x,y,z)\in C(\bar\Omega)$.

Теперь докажем, что $u_{1yy}(x,y,z)\in C(\Omega)$. Дважды почленно продифференцировав ряд (27) по аргументу y, имеем

$$u_{1yy}(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sigma_n}{b}y^{-1}J_{-1/2-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)+\left(\frac{\sigma_n}{b}\right)^2J_{-3/2-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)\right]y^{1/2-\beta}z^{1/2-\gamma}\times \\ \times J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m\frac{z}{c}\right)x^{1/2-\beta}\Big[A_{nm}I_{1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)+B_{nm}K_{1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)\Big]. \tag{52}$$

Применяя асимптотические формулы (48), (49) и (51), при $(x,y,z)\in\Omega$ и $n\to\infty$, $m\to\infty$ получим

$$\left[\frac{\sigma_n}{b}y^{-1/2-\beta}J_{-1/2-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)+\left(\frac{\sigma_n}{b}\right)^2y^{1/2-\beta}J_{-3/2-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)\right]z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m\frac{z}{c}\right)\times$$
$$\times\, x^{1/2-\beta}\Big[A_{nm}I_{1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)+B_{nm}K_{1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)\Big]=O\left(\frac{1}{\sigma_n^2\delta_m^4}\right).$$

Отсюда следует, что для членов ряда (52) в Ω имеют место следующие оценки:

$$\left|\left[\left(\frac{\sigma_n}{b}\right)y^{-1/2-\beta}J_{-1/2-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)+\left(\frac{\sigma_n}{b}\right)^2y^{1/2-\beta}J_{-3/2-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)\right]z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m\frac{z}{c}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\, x^{1/2-\beta}\Big[A_{nm}I_{1/2\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)+B_{nm}K_{1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)\Big]\right|\leqslant\frac{C_2}{\sigma_n^2\delta_m^4},$$

где C_2 — некоторая положительная постоянная. Из этих оценок следует, что ряд (52) мажорируется сходящимся числовым рядом и потому сходится абсолютно и равномерно в Ω. Следовательно, $u_{1yy}(x,y,z)\in C(\Omega)$. Аналогично доказывается, что $u_{1zz}(x,y,z)\in C(\Omega^+\cup\Omega^-)$.

Покажем, что $u_{1xx}(x,y,z)\in C(\Omega)$. Дважды дифференцируя ряд (27) по аргументу x, получим

$$u_{1xx}(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}y^{1/2-\beta}z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m\frac{z}{c}\right)\times$$
$$\times\left\{\sqrt{\lambda_{nm}}\,x^{-1/2-\alpha}\Big[A_nmI_{-1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)-B_{nm}K_{-1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)\Big]+\right.$$
$$\left.+\,\lambda_{nm}\,x^{1/2-\alpha}\Big[A_{nm}I_{-3/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)+B_{nm}K_{-3/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)\Big]\right\}. \quad (53)$$

Применяя асимптотические формулы (48), (49), (51), (43) и (44), при $(x,y,z)\in\Omega$, $n\to\infty$ и $m\to\infty$ имеем

$$y^{1/2-\beta}z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m\frac{z}{c}\right)\times$$
$$\times\left\{\sqrt{\lambda_{nm}}\,x^{-1/2-\alpha}\Big[A_{nm}I_{-1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)-B_{nm}K_{-1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)\Big]+\right.$$
$$\left.+\,\lambda_{nm}\,x^{1/2-\alpha}\Big[A_{nm}I_{-3/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)+B_{nm}K_{-3/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)\Big]\right\}=O\left(\frac{\lambda_{nm}}{(\sigma_n\delta_m)^4}\right).$$

Отсюда следует, что для членов ряда (53) в Ω имеют место следующие оценки:

$$\left|y^{1/2-\beta}z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\beta}\left(\sigma_n\frac{y}{b}\right)J_{1/2-\gamma}\left(\delta_m\frac{z}{c}\right)\times\right.$$
$$\times\left\{\sqrt{\lambda_{nm}}\,x^{-1/2-\alpha}\Big[A_{nm}I_{-1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)-B_{nm}K_{-1/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)\Big]+\right.$$
$$\left.\left.+\,\lambda_{nm}\,x^{1/2-\alpha}\Big[A_{nm}I_{-3/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)+B_{nm}K_{-3/2-\alpha}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}}x\Big)\Big]\right\}\right|\leqslant\frac{C_3\lambda_{nm}}{(\sigma_n\delta_m)^4},$$

где C_3 — некоторая положительная постоянная. Из этой оценки следует, что ряд (53) мажорируются сходящимся числовым рядом, а потому сходится абсолютно и равномерно в Ω. Следовательно $u_{1xx}(x,y,z)\in C(\Omega)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (35), (36), (37) *и* (39). *Тогда решение задачи* $D^{(1)}$ *существует, единственно и определяется формулой* (27).

Существование решения задач $D^{(2)}$ и $D^{(3)}$ доказывается аналогично. После того как найдены решения $u_1(x,y,z)$, $u_2(x,y,z)$ и $u_3(x,y,z)$ задач $D^{(1)}$, $D^{(2)}$, и $D^{(3)}$, подставляя их в (6), найдем решение задачи D. Этим завершается доказательство существования решения задачи D.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
2. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Т. 1. — М.: ИЛ, 1949.
3. *Каримов К. Т.* Задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами// Узб. мат. ж. — 2017. — № 1. — С. 96–105.
4. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. — М.: Высшая школа, 1962.
5. *Назипов И. Т.* Решение пространственной задачи Трикоми для сингулярного уравнения смешанного типа методом интегральных уравнений// Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 3. — С. 69–85.
6. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. — М.: Мир, 1986.
7. *Салахитдинов М. С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. — Ташкент, 2005.
8. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* К спектральной теории уравнений смешанного типа. — Ташкент, 2010.
9. *Сербина Л. И.* Об одной проблеме для линеаризованного уравнения Буссинеска с нелокальным условием Самарского// Диффер. уравн. — 2002. — *38*, № 8. — С. 1113–1119.
10. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. — М.: Наука, 1966.
11. *Уринов А. К., Каримов К. Т.* Задача Дирихле—Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами// Вестн. Нац. ун-та Узбекистана. Сер. Мат. Мех. Физ. Информ. — 2017. — *2/1*. — С. 195–206.
12. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: Наука, 1969.
13. *Хийирбеков Т. Э.* Решение задачи T_3^+ для одного трехмерного уравнения в произвольной области// Волж. мат. сб. — 1971. — № 8. — С. 215–220.
14. *Хийирбеков Т. Э.* Решение задачи N для одного n-мерного уравнения в нормальной области// Волж. мат. сб. — 1971. — № 8. — С. 221–226.
15. *Bers L.* Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. — New York–London, 1958.
16. *Gilbert R.* Function theoretic methods in partial differential equations. — New York–London: Academic Press, 1969.
17. *Karimov E. T.* On a boundary problem with Neumann's condition for 3D singular elliptic equations// Appl. Math. Lett. — 2010. — *23*. — С. 517–522.
18. *Karimov E. T., Nieto J. J.* The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients// Comput. Math. Appl. — 2011. — *62*. — С. 214–224.
19. *Nieto J. J., Karimov E. T.* On an analogue of the Holmgren's problem for 3d singular elliptic equation// Asian-Europ. J. Math. — 2012. — *5*, № 2. — 1250021.
20. *Salakhitdinov M. S., Karimov E. T.* Spatial boundary problem with the Dirichlet–Neumann condition for a singular elliptic equation// Appl. Math. Comput. — 2012. — *219*. — С. 3469–3476.

А. К. Уринов
Ферганский государственный университет, Фергана, Республика Узбекистан
E-mail: `urinovak@mail.ru`

К. Т. Каримов
Ферганский государственный университет, Фергана, Республика Узбекистан
E-mail: `karimovk80@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 156 (2018). С. 41–57

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ НАГРУЖЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2018 г. И. В. ФРОЛЕНКОВ, Е. Н. КРИГЕР

Аннотация. Проведено исследование разрешимости нового класса неклассических прямых задач для многомерных нагруженных параболических уравнений специального вида с данными Коши. Получены достаточные условия разрешимости задач. Для доказательства использован метод слабой аппроксимации. На примере одной задачи показано применение доказанной теоремы к исследованию обратных задач для многомерных параболических уравнений с данными Коши.

Ключевые слова: параболическое уравнение, нагруженное уравнение, задача Коши, разрешимость, метод слабой аппроксимации.

AMS Subject Classification: 35K15, 35B45, 35B65

При изучении обратных задач для многомерных параболических уравнений в неограниченной области, в которых одновременному определению подлежат один или несколько коэффициентов и функция-решение, нередко применяется метод исследования, в котором обратная задача приводится к прямой для нагруженного параболического уравнения (см. [7]). В таких случаях возникают различного рода неклассические прямые задачи для многомерных нагруженных параболических уравнений с данными Коши. В настоящей работе рассматривается один из таких классов задач. Разрешимость исследуемых задач доказывается методом слабой аппроксимации (см. [13]).

Данная статья является развитием работы [10], в которой вбыла рассмотрена задача Коши для двумерного нагруженного параболического уравнения специального вида неограниченной области. В [16] исследована разрешимость задач Коши для двумерного нагруженного параболического уравнения специального вида и для одномерного нагруженного уравнения типа Бюргерса. В [14, 17] были получены достаточные условия разрешимости задач Коши для систем нагруженных уравнений типа Бюргерса и параболического типа.

Изучению некоторых классов нагруженных уравнений, связанных с уравнениями параболического типа, посвящены работы [3–6, 9, 11, 15]. В [1, 12] исследованы численные методы решения задач для нагруженных параболических уравнений.

1. Постановка задачи. В пространстве $\mathbb{R}$ переменных x_1 выберем r_1 различных точек α_{k_1}, $k_1=\overline{1,r_1}$. Аналогичным образом в пространстве $\mathbb{R}$ переменных x_2 выберем r_2 различных точек α_{k_2}, $k_2=\overline{1,r_2}$. Продолжая далее, в пространстве $\mathbb{R}$ переменных x_n выберем r_n различных точек α_{k_n}, $k_n=\overline{1,r_n}$, и в пространстве $\mathbb{R}$ переменных z выберем r_{n+1} различных точек $\beta_{k_{n+1}}$, $k_{n+1}=\overline{1,r_{n+1}}$.

Рассмотрим в многомерной полосе

$$G_{[0,T]}=\Big\{(t,x,z)\ \Big|\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ z\in\mathbb{R}\Big\}$$

задачу Коши для нагруженного параболического уравнения

$$u_t(t,x,z) = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(t, x_i, \overline{\omega}_u(t)\right) \cdot u_{x_i x_i}(t,x,z) + a_{n+1}\left(t, z, \overline{\omega}_u(t)\right) \cdot u_{zz}(t,x,z) + \\ + \sum_{i=1}^{n} b_i\left(t, x, z, \overline{\omega}_u(t)\right) \cdot u_{x_i}(t,x,z) + b_{n+1}\left(t,x,z,\overline{\omega}_u(t)\right) \cdot u_z(t,x,z) + \\ + f\left(t,x,z,u(t,x,z), \overline{\omega}_u(t), \overline{\chi}_u(t,x)\right) \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \quad (2)$$

Здесь

$$\overline{\omega}_u(t) = \left(u\left(t, \alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_n}, \beta_{k_{n+1}}\right),\ D_x^s u\left(t, \alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_n}, \beta_{k_{n+1}}\right),\ \frac{\partial^l}{\partial z^l} u\left(t, \alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_n}, \beta_{k_{n+1}}\right) \right),$$

$$\overline{\chi}_u(t,x) = \left(u\left(t, x, \beta_{k_{n+1}}\right),\ \frac{\partial^l}{\partial z^l} u\left(t, x, \beta_{k_{n+1}}\right) \right),$$

$$s = (s_1, \ldots, s_n), \quad s_i = 0, 1, \ldots, \widetilde{p}_i, \quad k_i = \overline{1, r_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k_{n+1} = \overline{1, r_{n+1}}, \quad l = 0, 1, \ldots, \widetilde{q};$$

$$D_x^s v(x) = D^{(s_1, s_2, \ldots, s_n)} v(x) = \frac{\partial^{|s|} v(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_n^{s_n}},$$

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n), \quad s_r \geqslant 0 \text{ — целые}, \quad r = \overline{1, n}, \quad |s| = s_1 + \ldots + s_n.$$

Выберем и зафиксируем целые постоянные p_i и q таким образом, что

$$p_i \geqslant \max\{\widetilde{p}_i, 2\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad q \geqslant \max\{\widetilde{q}, 2\}.$$

Пусть $0 < t_* \leqslant T$ — некоторая фиксированная постоянная. Через $Z^{p_1, \ldots, p_n, q}_{x_1, \ldots, x_n, z}\left([0, t_*]\right)$ обозначим множество функций $u(t,x,z)$, определенных в $G_{[0,t_*]}$ и принадлежащих классу

$$C^{1, p_1, \ldots, p_n, q}_{t, x_1, \ldots, x_n, z}\left(G_{[0,t_*]}\right) = \Big\{ u(t,x,z) \ \Big|\ u_t,\ \frac{\partial^l}{\partial z^l} D_x^s u \in C\left(G_{[0,t_*]}\right), \\ s = (s_1, \ldots, s_n),\ s_i = 0, 1, \ldots, p_i,\ i = 1, \ldots, n,\ l = 0, 1, \ldots, q \Big\},$$

ограниченных в $G_{[0,t_*]}$ вместе со всеми производными, входящими в уравнение (1),

$$\sum_{l=0}^{q} \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_i=0,1,\ldots,p_i,\\ i=1,\ldots,n}} \left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} D_x^s u(t,x,z) \right| \leqslant C.$$

Под классическим решением задачи (1), (2) в $G_{[0,t_*]}$ будем понимать функцию $u(t,x,z) \in Z^{p_1, \ldots, p_n, q}_{x_1, \ldots, x_n, z}\left([0, t_*]\right)$, удовлетворяющую в $G_{[0,t_*]}$ уравнению (1) и начальному условию (2).

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Пусть f, u_0, a_i, b_i, $i = 1, \ldots, n+1$, — действительнозначные функции, определенные и непрерывные при любых значениях своих аргументов. Для любого $t_1 \in (0, T]$ и любой $w(t,x,z) \in Z^{p_1+2, \ldots, p_n+2, q+2}_{x_1, \ldots, x_n, z}\left([0, t_1]\right)$ данные функции как функции переменных $(t,x,z) \in G_{[0,t_*]}$ непрерывны и обладают непрерывными производными, входящими в соотношение (4), а функции $a_i, i = 1, \ldots, n+1$, удовлетворяют неравенствам

$$a_i\left(t, x_i, \overline{\omega}_u(t)\right) \geqslant a_0 > 0, \quad mi = 1, \ldots, n+1,$$
$$a_{n+1}\left(t, z, \overline{\omega}_u(t)\right) \geqslant a_0 > 0,$$

где a_0 — постоянная, не зависящая от функции $w(t,x,z)$.

Условие 2. Функция $u_0(x,z)$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{l=0}^{q+2} \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\\ i=1,\ldots,n}} \left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} D_x^s u_0(x,z) \right| \leqslant \widetilde{C}, \tag{3}$$

причем все ее производные, входящие в (3), непрерывны. Здесь $\widetilde{C} > 1$ — постоянная, не зависящая от функции $w(t,x,z)$ и ее производных.

Условие 3. Для любого $t_1 \in (0,T]$, любого $t \in [0,t_1]$ и произвольной функции $w(t,x,z) \in \in Z^{p_1+2,\ldots,p_n+2,q+2}_{x_1,\ldots,x_n,z}([0,t_1])$ справедливы следующие оценки:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{s_i=0}^{p_i+2} \left| \frac{\partial^{s_i}}{\partial x_i^{s_i}} a_i\left(t, x_i, \overline{\omega}_w(t)\right) \right| + \sum_{l=0}^{q+2} \left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} a_{n+1}\left(t, z, \overline{\omega}_w(t)\right) \right| + \\ + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{l=0}^{q+2} \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\\ i=1,\ldots,n}} \left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} D_x^s b_i\left(t, x, z, \overline{\omega}_w(t)\right) \right| \leqslant P_{\gamma_1}\left(U_w(t)\right), \tag{4}$$

$$\sum_{l=0}^{q+2} \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\\ i=1,\ldots,n}} \left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} D_x^s f\left(t, x, z, u(t,x,z), \overline{\omega}_w(t), \overline{\chi}_w(t,x)\right) \right| \leqslant P_{\gamma_2}\left(U_w(t)\right), \tag{5}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \geqslant 0$ — некоторые фиксированные целые числа,

$$P_\zeta(y) = \widetilde{C}\left(1 + y + \ldots + y^\zeta\right), \tag{6}$$

$\widetilde{C} > 1$ — постоянная, не зависящая от функции $w(t,x,z)$ и ее производных,

$$U_w(t) = \sum_{l=0}^{q+2} \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\\ i=1,\ldots,n}} \sup_{0<\xi\leqslant t} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ z\in\mathbb{R}}} \left| \frac{\partial^l}{\partial z^l} D_x^s w(\xi,x,z) \right|, \quad w(t,x,z) \in Z^{p_1+2,\ldots,p_n+2,q+2}_{x_1,\ldots,x_n,z}([0,t_1]).$$

2. Существование решения задачи.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия 1–3. Возможны следующие два случая.*

1. *Пусть коэффициенты a_i, b_i, $i = 1,\ldots,n+1$, уравнения* (1) *не зависят от пространственных переменных:*

$$a_i = a_i\left(t, \overline{\omega}_u(t)\right), \quad b_i = b_i\left(t, \overline{\omega}_u(t)\right), \quad i = 1,\ldots,n+1.$$

(a) *Если условие 3 выполняется при $\gamma_1 \geqslant 0$, $\gamma_2 \in \{0,1\}$, то классическое решение $u(t,x,z)$ задачи* (1), (2) *существует в классе $Z^{p_1,\ldots,p_n,q}_{x_1,\ldots,x_n,z}([0,T])$;*

(b) *если условие 3 выполняется при $\gamma_1 \geqslant 0$, $\gamma_2 > 1$, то существует такая константа t_*, $0 < t_* \leqslant T$, зависящая от $\widetilde{C}$ из* (3), (6), *что классическое решение $u(t,x,z)$ задачи* (1), (2) *существует в классе $Z^{p_1,\ldots,p_n,q}_{x_1,\ldots,x_n,z}([0,t_*])$.*

2. *Пусть коэффициенты a_i, b_i, $i = 1,\ldots,n+1$, уравнения* (1) *зависят от временной и пространственных переменных:*

$$a_i = a_i\left(t, x_i, \overline{\omega}_u(t)\right), \quad i = 1,\ldots,n, \qquad a_{n+1} = a_{n+1}\left(t, z, \overline{\omega}_u(t)\right), \\ b_i = b_i\left(t, x, z, \overline{\omega}_u(t)\right), \quad i = 1,\ldots,n+1.$$

(a) *Если условие 3 выполняется при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \in \{0,1\}$, то классическое решение $u(t,x,z)$ задачи* (1), (2) *существует в классе $Z^{p_1,\ldots,p_n,q}_{x_1,\ldots,x_n,z}([0,T])$;*

(b) *если условие 3 выполняется при $\gamma_1=0$, $\gamma_2>1$, то существует такая константа t_*, $0<t_*\leqslant T$, зависящая от $\widetilde{C}$ из* (3), (6), *что классическое решение $u(t,x,z)$ задачи* (1), (2) *существует в классе $Z^{p_1,\ldots,p_n,q}_{x_1,\ldots,x_n,z}([0,t_*])$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
U_{s,l}(0)=U_{s_1,\ldots,s_n,l}(0)=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u_0(x,z)\right|,\\
U^\tau_{s,l}(t)=U^\tau_{s_1,\ldots,s_n,l}(t)=\sup_{m\tau<\xi\leqslant t}\ \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u^\tau(\xi,x,z)\right|,\quad m\tau<t\leqslant(m+1)\tau,\\
l=0,1,\ldots,q+2,\quad s=(s_1,\ldots,s_n),\quad s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\quad i=1,\ldots,n,\\
U(0)=\sum_{l=0}^{q+2}\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\\ i=1,\ldots,n}}U_{s,l}(0),\quad U^\tau(t)=\sum_{l=0}^{q+2}\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\\ i=1,\ldots,n}}U^\tau_{s,l}(t).
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Справедливы следующие утверждения:

$$
\begin{aligned}
1.\quad & \left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u^\tau(\xi,x,z)\right|\leqslant U^\tau_{s,l}(t)\leqslant U^\tau(t),\quad m\tau<\xi\leqslant t\leqslant(m+1)\tau,\\
& l=0,1,\ldots,q+2,\quad s=(s_1,\ldots,s_n),\quad s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\quad i=1,\ldots,n;
\end{aligned}
\tag{8}
$$

2. функции $U^\tau_{s,l}(t)$, $U^\tau(t)$ неотрицательны и не убывают на каждом временном шаге $(m\tau,(m+1)\tau]$.

Для доказательства теоремы 1 будем пользоваться методом слабой аппроксимации (см. [13]).

Рассмотрим *случай* 1.

Расщепим уравнение (1) на два дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\tau/2$ в следах неизвестной функции и нелинейных членах. Поскольку в уравнении (1) коэффициенты a_i, b_i, $i=1,\ldots,n+1$, не зависят от пространственных переменных, рассмотрим следующую расщепленную задачу:

$$
\begin{gathered}
u^\tau_t=2\sum_{i=1}^n a_i\left(t,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)u^\tau_{x_ix_i}(t,x,z)+2a_{n+1}\left(t,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)u^\tau_{zz}(t,x,z)+\\
+2\sum_{i=1}^n b_i\left(t,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)u^\tau_{x_i}(t,x,z)+2b_{n+1}\left(t,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)u^\tau_z(t,x,z),\\
m\tau<t\leqslant\left(m+\frac12\right)\tau;
\end{gathered}
\tag{9}
$$

$$
\begin{gathered}
u^\tau_t=2f\left(t-\frac{\tau}{2},\ x,\ z,\ u^\tau\left(t-\frac{\tau}{2},x,z\right),\ \overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right),\overline{\chi}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2},x\right)\right),\\
\left(m+\frac12\right)\tau<t\leqslant(m+1)\,\tau;
\end{gathered}
\tag{10}
$$

$$
\begin{gathered}
u^\tau(t,x,z)\big|_{t\leqslant0}=u_0(x,z),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad z\in\mathbb{R},\\
m=0,1,\ldots,(M-1),\quad M\tau=T.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Здесь

$$\overline{\omega}^{\tau}_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)=\Bigg(u^\tau\left(t-\frac{\tau}{2},\alpha_{k_1},\ldots,\alpha_{k_n},\beta_{k_{n+1}}\right),\ D^s_x u^\tau\left(t-\frac{\tau}{2},\alpha_{k_1},\ldots,\alpha_{k_n},\beta_{k_{n+1}}\right),$$
$$\frac{\partial^l}{\partial z^l}u^\tau\left(t-\frac{\tau}{2},\alpha_{k_1},\ldots,\alpha_{k_n},\beta_{k_{n+1}}\right)\Bigg),$$

$$\overline{\chi}^{\tau}_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2},x\right)=\left(u^\tau\left(t-\frac{\tau}{2},x,\beta_{k_{n+1}}\right)\ \frac{\partial^l}{\partial z^l}u^\tau\left(t-\frac{\tau}{2},x,\beta_{k_{n+1}}\right)\right),$$
$$s=(s_1,\ldots,s_n),\quad s_i=0,1,\ldots,\widetilde{p}_i,\quad k_i=1,\ldots,r_i,\quad p_i\geqslant\max\{\widetilde{p}_i,2\},\quad i=\overline{1,n},$$
$$k_{n+1}=1,\ldots,r_{n+1},\quad l=0,1,\ldots,\widetilde{q},\quad q\geqslant\max\{\widetilde{q},2\}.$$

Далее под m-м целым шагом будем понимать интервал $(m\tau,(m+1)\tau]$, а под r-м дробным шагом m-го целого шага — полуинтервал $\left(\left(m+\frac{r-1}{2}\right)\tau,\ \left(m+\frac{r}{2}\right)\tau\right]$, где $m=0,1,\ldots,(M-1)$, $r=1,2$.

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^\tau(t,x,z)$ расщепленной задачи (9)–(11).

Рассмотрим нулевой целый шаг $(m=0)$. На первом дробном шаге при $t\in\left(0,\frac{\tau}{2}\right]$ рассматриваем уравнение

$$u^\tau_t=2\sum_{i=1}^n a_i\left(t,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)u^\tau_{x_ix_i}(t,x,z)+2a_{n+1}\left(t,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)u^\tau_{zz}(t,x,z)+$$
$$+2\sum_{i=1}^n b_i\left(t,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)u^\tau_{x_i}(t,x,z)+2b_{n+1}\left(t,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)u^\tau_z(t,x,z).$$

Согласно принципу максимума для задачи Коши (9), (11), в силу выполнения условий **1**, **2**, имеем

$$\left|u^\tau(\xi,x,z)\right|\leqslant\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ z\in\mathbb{R}}}\left|u_0(x,z)\right|,\quad 0<\xi\leqslant t,\quad t\in\left(0,\frac{\tau}{2}\right].\tag{12}$$

Применим к уравнению (9) и начальному условию (11) операцию дифференцирования D^s_x, $s=(s_1,\ldots,s_n)$, $s_i=0,1,\ldots,p_i+2$, $i=1,\ldots,n$, а затем продифференцируем по z полученную задачу k раз, $k=1,\ldots,q+2$. Согласно условиям **1**, **2**, получим

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D^s_x u^\tau(\xi,x,z)\right|\leqslant\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D^s_x u_0(x,z)\right|,\quad 0<\xi\leqslant t,\quad t\in\left(0,\frac{\tau}{2}\right],\\ l=\overline{0,q+2},\quad s=(s_1,\ldots,s_n),\quad s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\quad i=1,\ldots,n.\end{gathered}\tag{13}$$

Возьмем от обеих частей неравенств (12) и (13) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}$, затем $\sup\limits_{0<\xi\leqslant t}$, сложим их и, согласно обозначениям (7) и условиям (8), получим

$$U^\tau(t)\leqslant U(0),\quad 0<t\leqslant\frac{\tau}{2}.\tag{14}$$

Рассмотрим второй дробный шаг, $t\in\left(\frac{\tau}{2},\tau\right]$:

$$u^\tau_t=2f\left(t-\frac{\tau}{2},x,z,u^\tau\left(t-\frac{\tau}{2},x,z\right),\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right),\overline{\chi}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{2},x\right)\right).$$

Проинтегрируем уравнение (10) по временной переменной. Имеет место оценка

$$\left|u^\tau(\xi,x,z)\right|\leqslant\left|u^\tau\left(\frac{\tau}{2},x,z\right)\right|+$$
$$+2\int\limits_{\tau/2}^{\xi}\left|f\left(\theta-\frac{\tau}{2},\ x,\ z,\ u^\tau\left(\theta-\frac{\tau}{2},x,z\right),\ \overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(\theta-\frac{\tau}{2}\right),\ \overline{\chi}^\tau_{u^\tau}\left(\theta-\frac{\tau}{2},x\right)\right)\right|d\theta,$$

где $\tau/2<\xi\leqslant t$, $t\in(\tau/2,\tau]$. Отсюда, учитывая условие (5), получаем

$$\left|u^\tau(\xi,x,z)\right|\leqslant\left|u^\tau\left(\frac{\tau}{2},x,z\right)\right|+2\int\limits_{\tau/2}^{\xi}P_{\gamma_2}\left(U^\tau(\theta)\right)d\theta,\quad \frac{\tau}{2}<\xi\leqslant t,\quad t\in\left(\frac{\tau}{2},\tau\right]. \tag{15}$$

Рассмотрим случай **1**(a). Условие 3 выполняется при $\gamma_2\in\{0,1\}$. Тогда (15) перепишется следующим образом:

$$\left|u^\tau(\xi,x,z)\right|\leqslant\left|u^\tau\left(\frac{\tau}{2},x,z\right)\right|+2\int\limits_{\tau/2}^{\xi}\widetilde{C}\cdot\left(1+U^\tau\left(\theta-\frac{\tau}{2}\right)\right)d\theta,\quad \frac{\tau}{2}<\xi\leqslant t,\quad t\in\left(\frac{\tau}{2},\tau\right]. \tag{16}$$

Применим операцию дифференцирования D_x^s, $s=(s_1,\ldots,s_n)$, $s_i=0,1,\ldots,p_i+2$, $i=1,\ldots,n$, к уравнению (10), затем продифференцируем полученное уравнение k раз по z, $k=1,\ldots,q+2$, и проинтегрируем по временной переменной. С учетом (5) и условия на γ_2 имеем

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u^\tau(\xi,x,z)\right|\leqslant\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u^\tau\left(\frac{\tau}{2},x,z\right)\right|+2\int\limits_{\tau/2}^{\xi}\widetilde{C}\cdot\left(1+U^\tau\left(\theta-\frac{\tau}{2}\right)\right)d\theta,\\ \frac{\tau}{2}<\xi\leqslant t,\quad t\in\left(\frac{\tau}{2},\tau\right],\quad l=\overline{1,q+2},\quad s=(s_1,\ldots,s_n),\quad s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\quad i=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{17}$$

Возьмем от обеих частей неравенств (16) и (17) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}$, затем $\sup\limits_{0<\xi\leqslant t}$, сложим их и, согласно (7), (8) и (14) получим

$$U^\tau(t)\leqslant U(0)+C\cdot\int\limits_{\tau/2}^{\tau}\left(1+U^\tau\left(\theta-\frac{\tau}{2}\right)\right)d\theta,\quad t\in\left(\frac{\tau}{2},\tau\right].$$

Здесь и далее считаем, что $C>1$ — некоторые постоянные, вообще говоря, различные, зависящие от констант, ограничивающих входные данные, и не зависящие от параметра расщепления τ.

Из свойств определенного интеграла в силу неубывания функции $U^\tau(t)$ получим

$$U^\tau(t)\leqslant U(0)+C\cdot\int\limits_{0}^{\tau}\left(1+U^\tau(\theta)\right)d\theta,\quad t\in(0,\tau].$$

Согласно лемме Гронуолла

$$U^\tau(t)\leqslant U(0)\cdot e^{C\tau}+\frac{C}{C}\cdot\left(e^{C\tau}-1\right),U^\tau(t)\leqslant(U(0)+1)\cdot e^{C\tau}-1\quad\forall t\in(0,\tau]. \tag{18}$$

На первом целом временном шаге, при $t\in(\tau,2\tau]$, рассуждая аналогично нулевому целому шагу, учитывая (18), получим

$$U^\tau(t)\leqslant(U(0)+1)\cdot e^{2C\tau}-1\quad\forall t\in(0,2\tau].$$

Проделав аналогичные рассуждения, на втором целом временном шаге, при $t\in(2\tau,3\tau]$, имеем

$$U^\tau(t)\leqslant(U(0)+1)\cdot e^{3C\tau}-1\quad\forall t\in(0,3\tau].$$

Через конечное число шагов на интервале $((M-1)\tau,M\tau]$ получим

$$U^\tau(t)\leqslant(U(0)+1)\cdot e^{CM\tau}-1=(U(0)+1)\cdot e^{CT}-1\leqslant C\quad\forall t\in((M-1)\tau,M\tau].$$

Справедлива оценка

$$U^\tau(t)\leqslant(U(0)+1)\cdot e^{CT}-1\leqslant C\quad\forall t\in[0,T].$$

Таким образом, доказаны равномерные по τ оценки

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u^\tau(t,x,z)\right|\leqslant C,\quad (t,x,z)\in G_{[0,T]},\\ l=0,1,\ldots,q+2,\quad s=(s_1,\ldots,s_n),\quad s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\quad i=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{19}$$

Из оценок (19) следует, что правые части уравнений (9)–(11) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений будут ограничены равномерно по τ:

$$\left|u_t^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad (t,x,z) \in G_{[0,T]}.$$

Применяя операцию дифференцирования D_x^s, $s=(s_1,\ldots,s_n)$, $s_i=0,1,\ldots,p_i$, $i=1,\ldots,n$, и дифференцируя k раз по z уравнения (9)–(11), $k=1,\ldots,q$, в силу (19) получим оценки

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l} D_x^s u_t^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad (t,x,z)\in G_{[0,T]},\\ l=0,1,\ldots,q, \quad s=(s_1,\ldots,s_n), \quad s_i=0,1,\ldots,p_i, \quad i=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{20}$$

Оценки (19), (20) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений задачи (9)–(11) сходится вместе с соответствующими производными к функции $u(t,x,z)\in$ $\in Z^{p_1,\ldots,p_n,q}_{x_1,\ldots,x_n,z}\left(G^N_{[0,T]}\right)$, которая в силу теоремы сходимости метода слабой аппроксимации, является решением задачи (1), (2). Здесь $N>0$ — целая постоянная,

$$G^N_{[0,T]} = \Big\{(t,x,z) \;\Big|\; 0\leqslant t\leqslant T,\ |x_i|\leqslant N,\ i=\overline{1,n},\ |z|\leqslant N\Big\}.$$

В силу произвольности выбора постоянной N решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2) принадлежит классу $Z^{p_1,\ldots,p_n,q}_{x_1,\ldots,x_n,z}\left(G_{[0,T]}\right)$. При этом справедливы следующие оценки при $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$:

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l} D_x^s u(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad l=\overline{0,q}, \quad s=(s_1,\ldots,s_n), \quad s_i=0,1,\ldots,p_i, \quad i=\overline{1,n}.$$

Рассмотрим случай **1**(b). Условие 3 выполняется при $\gamma_2>1$. Тогда на втором дробном шаге аналогично случаю **1**(a) имеем:

$$U^\tau(t) \leqslant U(0) + C\cdot\int\limits_0^\tau P_{\gamma_2}\left(U^\tau(\theta)\right)d\theta, \quad t\in(0,\tau]\,. \tag{21}$$

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \mathcal{P}_{\gamma_2}\left(\omega(t)\right), \quad \omega(0)=U(0). \tag{22}$$

По теореме Коши (см. [8]) решение $\omega(t)$ задачи (22) существует на некотором интервале $[0,t_*]$, где $0<t_*\leqslant T$ зависит от C и начальных данных $U(0)$. Функция $\omega(t)$ является монотонно возрастающей на интервале $[0,t_*]$ и $\omega(t)\in C^1\left([0,t_*]\right)$.

Из (21), (22) следует, что если для некоторого $t_0\leqslant t$ справедливо неравенство $U^\tau(t_0)\leqslant\omega(t_0)$, то $U^\tau(t)\leqslant\omega(t)$, $\in[t_0,t_1]$.

Так как $U^\tau(0)\leqslant\omega(0)$, то из монотонности функции $\omega(t)$ следует, что $U^\tau(t)\leqslant\omega(\tau)$, $t\in[0,\tau]$. На первом целом временном шаге, при $t\in(\tau,2\tau]$, рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим $U^\tau(t)\leqslant\omega(2\tau)$, $t\in[0,2\tau]$. Через конечное число шагов получим неравенство $U^\tau(t)\leqslant\omega(t_*)\leqslant C$, $t\in[0,t_*]$.

Таким образом, доказаны равномерные по τ оценки

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l} D_x^s u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad (t,x,z)\in G_{[0,t_*]},\\ l=0,1,\ldots,q+2, \quad s=(s_1,\ldots,s_n), \quad s_i=0,1,\ldots,p_i+2, \quad i=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{23}$$

Из этих оценок следует, что правые части уравнений (9)–(11) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений будут ограничены равномерно по τ, т.е.

$$\left|u_t^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, (t,x,z) \in G_{[0,t_*]}.$$

Применяя операцию дифференцирования D_x^s, $s=(s_1,\ldots,s_n)$, $s_i=0,1,\ldots,p_i$, $i=1,\ldots,n$, и дифференцируя k раз уравнения (9)–(11) по z, $k=1,\ldots,q$, в силу (23), получим оценки

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u_t^\tau(t,x,z)\right|\leqslant C,\quad (t,x,z)\in G_{[0,t_*]},\\ l=0,1,\ldots,q,\quad s=(s_1,\ldots,s_n),\quad s_i=0,1,\ldots,p_i,\quad i=\overline{1,n}.\end{gathered}\tag{24}$$

Оценки (23), (24) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений задачи (9)–(11) сходится вместе с соответствующими производными к функции $u(t,x,z)\in$ $\in Z^{p_1,\ldots,p_n,q}_{x_1,\ldots,x_n,z}\left(G^N_{[0,t_*]}\right)$, которая в силу теоремы сходимости метода слабой аппроксимации является решением задачи (1), (2). Здесь $N>0$ — целая постоянная,

$$G^N_{[0,t_*]}=\Big\{(t,x,z)\ \Big|\ 0\leqslant t\leqslant t_*,\ |x_i|\leqslant N,\ i=\overline{1,n},\ |z|\leqslant N\Big\}.$$

В силу произвольности выбора постоянной N решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2) принадлежит классу $Z^{p_1,\ldots,p_n,q}_{x_1,\ldots,x_n,z}\left(G_{[0,t_*]}\right)$. 2 При этом справедливы следующие оценки при $(t,x,z)\in G_{[0,t_*]}$:

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u(t,x,z)\right|\leqslant C,\quad l=\overline{0,q},\quad s=(s_1,\ldots,s_n),\quad s_i=0,1,\ldots,p_i,\quad i=\overline{1,n}.$$

Рассмотрим случай **2** теоремы. Расщепим уравнение (1) на $n+2$ дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\frac{\tau}{n+2}$ в следах неизвестной функции и нелинейных членах:

$$\begin{aligned}u_t^\tau=(n+2)a_1\left(t,x_1,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)u^\tau_{x_1x_1}(t,x,z)+\\ +(n+2)b_1\left(t,x,z,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)u^\tau_{x_1}(t,x,z),\quad m\tau<t\leqslant\left(m+\frac{1}{n+2}\right)\tau;\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}u_t^\tau=(n+2)a_2\left(t,x_2,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)u^\tau_{x_2x_2}(t,x,z)+\\ +(n+2)b_2\left(t,x,z,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)u^\tau_{x_2}(t,x,z),\quad \left(m+\frac{1}{n+2}\right)\tau<t\leqslant\left(m+\frac{2}{n+2}\right)\tau;\end{aligned}\tag{26}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}u_t^\tau=(n+2)a_n\left(t,x_n,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)u^\tau_{x_nx_n}(t,x,z)+\\ +(n+2)b_n\left(t,x,z,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)u^\tau_{x_n}(t,x,z),\quad \left(m+\frac{n-1}{n+2}\right)\tau<t\leqslant\left(m+\frac{n}{n+2}\right)\tau;\end{aligned}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}u_t^\tau=(n+2)a_{n+1}\left(t,z,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)u^\tau_{zz}(t,x,z)+\\ +(n+2)b_{n+1}\left(t,x,z,\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)u^\tau_{z}(t,x,z),\quad \left(m+\frac{n}{n+2}\right)\tau<t\leqslant\left(m+\frac{n+1}{n+2}\right)\tau;\end{aligned}\tag{28}$$

$$\begin{aligned}u_t^\tau=(n+2)f\left(t-\frac{\tau}{n+2},x,z,u^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},x,z\right),\overline{\omega}^\tau_{u^\tau}(t),\overline{\chi}^\tau_{u^\tau}(t,x)\right),\\ \left(m+\frac{n+1}{n+2}\right)\tau<t\leqslant(m+1)\tau;\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{gathered}u^\tau(t,x,z)\big|_{t\leqslant 0}=u_0(x,z),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad z\in\mathbb{R},\\ m=0,1,\ldots,(M-1),\quad M\tau=T.\end{gathered}\tag{30}$$

Далее под m-м целым шагом будем понимать интервал $(m\tau,(m+1)\tau]$, а под r-м дробным шагом m-го целого шага — полуинтервал $\left(\left(m+\frac{r-1}{n+2}\right)\tau,\left(m+\frac{r}{n+2}\right)\tau\right]$, где $m=0,1,\ldots,(M-1)$, $r=1,2,\ldots,n+2$. Здесь

$$\overline{\omega}^{\tau}_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)=\left(u^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},\alpha_{k_1},\ldots,\alpha_{k_n},\beta_{k_{n+1}}\right),\right.$$
$$\left.D^s_x u^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},\alpha_{k_1},\ldots,\alpha_{k_n},\beta_{k_{n+1}}\right),\ \frac{\partial^l}{\partial z^l}u^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},\alpha_{k_1},\ldots,\alpha_{k_n},\beta_{k_{n+1}}\right)\right),$$

$$\overline{\chi}^{\tau}_{u^\tau}\left(t-\frac{\tau}{n+2},x\right)=\left(u^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},x,\beta_{k_{n+1}}\right),\frac{\partial^l}{\partial z^l}u^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},x,\beta_{k_{n+1}}\right)\right),$$
$$s=(s_1,\ldots,s_n),\quad s_i=0,1,\ldots,\widetilde{p}_i,\quad k_i=1,\ldots,r_i,\quad p_i\geqslant\max\{\widetilde{p}_i,2\},\quad i=\overline{1,n},$$
$$k_{n+1}=1,\ldots,r_{n+1},\quad l=0,1,\ldots,\widetilde{q},\quad q\geqslant\max\{\widetilde{q},2\}.$$

Так как в условиях теоремы $\gamma_1=0$, то соотношение (4) из условия 3 имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s_i=0}^{p_i+2}\left|\frac{\partial^{s_i}}{\partial x_i^{s_i}}a_i(t,x_i,\overline{\omega}_{u^\tau}(t))\right|+\sum_{l=0}^{q+2}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}a_{n+1}(t,z,\overline{\omega}_{u^\tau}(t))\right|+$$
$$+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{l=0}^{q+2}\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\\ i=1,\ldots,n}}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D^s_x b_i(t,x,z,\overline{\omega}_{u^\tau}(t))\right|\leqslant C. \quad (31)$$

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^\tau(t,x,z)$ задачи (25)–(30). Будем пользоваться обозначениями (7).

Рассмотрим нулевой целый шаг ($m=0$). На первом дробном шаге, $t\in\left(0,\frac{\tau}{n+2}\right]$, рассматриваем уравнение (25) с начальным условием (30).

Согласно принципу максимума для задачи Коши (25), (30) в силу выполнения условий 1, 2, имеем

$$\left|u^\tau(\xi,x,z)\right|\leqslant\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|u_0(x,z)\right|\leqslant U(0),\quad 0<\xi\leqslant t,\quad t\in\left(0,\frac{\tau}{n+2}\right].$$

Продифференцируем (25), (30) по x_1:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}u^\tau_t(t,x,z)=(n+2)\cdot a_1\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}u^\tau_{x_1x_1}+(n+2)u^\tau_{x_1x_1}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1}a_1+b_1\right)+(n+2)\frac{\partial}{\partial x_1}b_1\cdot u^\tau_{x_1},$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}u^\tau(t,x,z)\big|_{t\leqslant 0}=\frac{\partial}{\partial x_1}u_0(x,z).$$

Введем обозначение $v^\tau_1=u^\tau_{x_1}$. Получим

$$v^\tau_{1\,t}(t,x,z)=(n+2)\cdot a_1\cdot v^\tau_{1\,x_1x_1}+(n+2)\cdot v^\tau_{1\,x_1}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1}a_1+b_1\right)+(n+2)\cdot b_1\cdot v^\tau_1,$$
$$v^\tau_1(t,x,z)\big|_{t\leqslant 0}=v_{10}(x,z).$$

Отсюда, учитывая (31), согласно принципу максимума получаем

$$\left|v^\tau_1(\xi,x,z)\right|\leqslant\exp\left((n+2)\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}b_1\right|\cdot\tau\right)\cdot\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|v_{10}(x,z)\right|$$

и далее

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}u^\tau(\xi,x,z)\right|\leqslant\exp\left((n+2)\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}b_1\right|\cdot\tau\right)\cdot\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}u_0(x,z)\right|,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\tau}\cdot U(0). \tag{32}$$

Продифференцируем (25), (30) по x_1 дважды:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_t^\tau(t,x,z) = (n+2)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}a_1\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}u_{x_1x_1}^\tau + (n+2)\cdot a_1\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_{x_1x_1}^\tau +$$
$$+ (n+2)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}u_{x_1x_1}^\tau\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1}a_1+b_1\right) + (n+2)\cdot u_{x_1x_1}^\tau\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}a_1+\frac{\partial}{\partial x_1}b_1\right)+$$
$$+ (n+2)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}b_1\cdot u_{x_1}^\tau + (n+2)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}b_1\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}u_{x_1}^\tau,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u^\tau(t,x,z)\big|_{t\leqslant 0} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_0(x,z).$$

Введем обозначение $v_2^\tau = u_{x_1x_1}^\tau$. Имеем

$$v_{2\,t}^\tau(t,x,z) = (n+2)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}a_1\cdot v_{2\,x_1}^\tau + (n+2)\cdot a_1\cdot v_{2\,x_1x_1}^\tau +$$
$$+ (n+2)\cdot v_{2\,x_1}^\tau\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1}a_1+b_1\right) + (n+2)\cdot v_2^\tau\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}a_1+\frac{\partial}{\partial x_1}b_1\right)+$$
$$+ (n+2)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}b_1\cdot u_{x_1}^\tau + (n+2)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}b_1\cdot v_2^\tau.$$

Отсюда, учитывая условие (31) и оценку (32), согласно принципу максимума, получаем

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant \exp\left[\left((n+2)\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}a_1\right| + 2(n+2)\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}b_1\right|\right)\cdot\tau\right]\times$$
$$\times\left((n+2)\cdot\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}b_1\right|\cdot\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}u^\tau\right|\cdot\tau + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_0\right|\right),$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\tau}\cdot\big(C\cdot e^{C\tau}\cdot U(0)\cdot\tau + U(0)\big) \leqslant U(0)\cdot e^{C\tau}\cdot\big(C\cdot e^{C\tau}\cdot\tau+1\big),$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\tau}\cdot U(0). \tag{33}$$

Дифференцируя (25), (30) по x_1 далее до p_1+2 раз, учитывая (32), (33) и рассуждая аналогичным образом, имеем:

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\tau}\cdot U(0),\quad k_1=0,1,\ldots,p_1+2,\quad 0<\xi\leqslant t,\quad 0<t\leqslant\frac{\tau}{n+2}.$$

Продифференцируем (25), (30) по x_2:

$$u_{x_2t}^\tau = (n+2)\cdot a_1\cdot u_{x_2x_1x_1}^\tau + (n+2)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}b_1\cdot u_{x_1}^\tau + (n+2)\cdot b_1\cdot u_{x_2x_1}^\tau.$$

Отсюда

$$\left|u_{x_2}^\tau\right| \leqslant (n+2)\cdot\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial}{\partial x_2}b_1\right|\cdot\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|u_{x_1}^\tau\right|\cdot\tau + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial}{\partial x_2}u_0\right| \leqslant$$
$$\leqslant [\text{в силу (31), (32)}] \leqslant (n+2)\cdot C\cdot e^{C\tau}\cdot U(0)\cdot\tau + U(0),$$

т.е.

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_2}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\tau}\cdot U(0).$$

Рассуждая аналогичным образом, получим

$$\left|\frac{\partial^{k_i}}{\partial x_i^{k_i}}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\tau}\cdot U(0), \quad k_i=0,1,\dots,p_i+2, \quad i=1,\dots,n;$$

$$\left|\frac{\partial^{k_{i+1}}}{\partial z^{k_{i+1}}}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\tau}\cdot U(0), \quad k_{i+1}=0,1,\dots,q+2.$$

Продифференцируем (25), (30) по x_1 и по x_2:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}u_t^\tau(t,x,z)=(n+2)\cdot a_1\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}u^\tau_{x_1x_1}+(n+2)\cdot u^\tau_{x_1x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}b_1+$$
$$+(n+2)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}u^\tau_{x_1x_1}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1}a_1+b_1\right)+(n+2)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}b_1\cdot u^\tau_{x_1}+(n+2)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}b_1\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}u^\tau_{x_1}.$$

Введем обозначение $\rho^\tau=u^\tau_{x_1x_2}$. Тогда справедливо соотношение

$$\rho^\tau_t=(n+2)a_1\cdot\rho^\tau_{x_1x_1}+(n+2)\cdot u^\tau_{x_1x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}b_1+(n+2)\cdot\rho^\tau_{x_1}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1}a_1+b_1\right)+$$
$$+(n+2)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}b_1\cdot u^\tau_{x_1}+(n+2)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}b_1\cdot\rho^\tau.$$

Отсюда

$$\left|u^\tau_{x_1x_2}(\xi,x,z)\right| \leqslant \exp\left[\left((n+2)\cdot\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}b_1\right|\right)\cdot\tau\right]\times$$
$$\times\left((n+2)\cdot\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial}{\partial x_2}b_1\right|\cdot\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u^\tau\right|\cdot\tau+\right.$$
$$\left.+(n+2)\cdot\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}b_1\right|\cdot\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}u^\tau\right|\cdot\tau+\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}u_0\right|\right).$$

В силу (31), (32), (33), имеем

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\tau}\cdot U(0).$$

Продолжая рассуждения, получим:

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^{s_1,\dots,s_n}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\tau}\cdot U(0), \quad 0<\xi\leqslant t, \quad 0<t\leqslant\frac{\tau}{n+2},\\ l=0,1,\dots,q+2, \quad s_i=0,1,\dots,p_i+2, \quad i=1,\dots,n.\end{gathered} \tag{34}$$

Возьмем от обеих частей неравенств (34) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}$, затем $\sup\limits_{0<\xi\leqslant t}$, сложим их и согласно (7) и (8) получим

$$U^\tau(t) \leqslant e^{C\tau}\cdot U(0), \quad 0<t\leqslant\frac{\tau}{n+2}.$$

На втором дробном шаге рассмотрим уравнение (26) с начальными данными $u^\tau\left(\frac{\tau}{n+2}, x, z\right)$. Повторяя рассуждения, проделанные на первом дробном шаге, с учетом оценки (34) получаем

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l} D_x^{s_1,\ldots,s_n} u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\tau} U\left(\frac{\tau}{n+2}\right) \leqslant e^{C\tau}\cdot U(0), \quad 0<\xi\leqslant t, \quad \frac{\tau}{n+2}<t\leqslant\frac{2\tau}{n+2}. \tag{35}$$

Возьмем от обеих частей неравенств (35) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}$, затем $\sup\limits_{0<\xi\leqslant t}$, сложим их и, согласно (7) получим

$$U^\tau(t)\leqslant e^{C\tau}\cdot U(0), \quad \frac{\tau}{n+2}<t\leqslant\frac{2\tau}{n+2}.$$

Таким же образом получаем оценки на $n+1$ дробных шагах.

Рассмотрим $(n+2)$-й дробный шаг нулевого целого шага. Рассматриваем уравнение (29) с начальным условием $u^\tau\left(\frac{(n+1)\tau}{n+2}, x, z\right)$.

Проинтегрируем уравнение (29) по временной переменной. Справедлива оценка

$$\begin{aligned}\left|u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant \left|u^\tau\left(\frac{(n+1)\tau}{n+2}, x, z\right)\right| &+ \\ + (n+2)\int\limits_{\frac{(n+1)\tau}{n+2}}^{\xi}\Bigg|f\Bigg(\theta-\frac{\tau}{n+2},\ x,\ z,\ u^\tau\left(\theta-\frac{\tau}{n+2},x,z\right),\ \overline{\omega}^\tau_{u^\tau}\left(\theta-\frac{\tau}{n+2}\right),& \\ \overline{\chi}^\tau_{u^\tau}\left(\theta-\frac{\tau}{n+2},x\right)\Bigg)\Bigg|d\theta, \qquad \frac{(n+1)\tau}{n+2}<\xi\leqslant t, \quad t\in\left(\frac{(n+1)\tau}{n+2},\tau\right]&.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (5) следует

$$\begin{gathered}\left|u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant \left|u^\tau\left(\frac{(n+1)\tau}{n+2}, x, z\right)\right| + (n+2)\cdot\int\limits_{\frac{(n+1)\tau}{n+2}}^{\xi} P_{\gamma_2}\left(U^\tau(\theta)\right)d\theta, \\ \frac{(n+1)\tau}{n+2}<\xi\leqslant t, \quad t\in\left(\frac{(n+1)\tau}{n+2},\tau\right].\end{gathered}\tag{36}$$

Рассмотрим случай **2**(a). Условие 3 выполняется при $\gamma_2\in\{0,1\}$. Тогда (36) перепишется в виде

$$\begin{gathered}\left|u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant \left|u^\tau\left(\frac{(n+1)\tau}{n+2}, x, z\right)\right| + (n+2)\int\limits_{\frac{(n+1)\tau}{n+2}}^{\xi} \widetilde{C}\cdot\left(1+U^\tau\left(\theta-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)d\theta, \\ \frac{(n+1)\tau}{n+2}<\xi\leqslant t, \quad t\in\left(\frac{(n+1)\tau}{n+2},\tau\right].\end{gathered}\tag{37}$$

Применим операцию дифференцирования D_x^s, $s=(s_1,\ldots,s_n)$, $s_i=0,1,\ldots,p_i+2$, $i=1,\ldots,n$, к уравнению (29), затем продифференцируем полученное уравнение k раз по z, $k=1,\ldots,q+2$, и проинтегрируем по временной переменной. С учетом (5) и условия на γ_2 получим

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant \left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u^\tau\left(\frac{(n+1)\tau}{n+2}, x, z\right)\right| &+ \\ + (n+2)\int\limits_{\frac{(n+1)\tau}{n+2}}^{\xi} \widetilde{C}\cdot\left(1+U^\tau\left(\theta-\frac{(n+1)\tau}{n+2}\right)\right)d\theta&,\end{aligned}\tag{38}$$

где

$$\frac{(n+1)\tau}{n+2} < \xi \leqslant t, \quad t \in \left(\frac{(n+1)\tau}{n+2}, \tau\right];$$

$$l = 1, \ldots, q+2, \quad s = (s_1, \ldots, s_n), \quad s_i = 0, 1, \ldots, p_i + 2, \quad i = \overline{1, n}.$$

Возьмем от обеих частей неравенств (37) и (38) сначала $\sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \\ z \in \mathbb{R}}}$, затем $\sup\limits_{0 < \xi \leqslant t}$, сложим их и, согласно обозначений (7), условий (8) и оценки на $(n+1)$-м шаге, получим

$$U^\tau(t) \leqslant U(0) \cdot e^{C\tau} + C \cdot \int\limits_{\frac{(n+1)\tau}{n+2}}^{\tau} \left(1 + U^\tau\left(\theta - \frac{\tau}{n+2}\right)\right) d\theta, \quad t \in \left(\frac{(n+1)\tau}{n+2}, \tau\right].$$

Из свойств определенного интеграла в силу неубывания функции $U^\tau(t)$ имеем

$$U^\tau(t) \leqslant U(0) \cdot e^{C\tau} + C \cdot \int\limits_{\frac{(n+1)\tau}{n+2}}^{\tau} \left(1 + U^\tau\left(\frac{(n+1)\tau}{n+2}\right)\right) d\theta \leqslant$$
$$\leqslant U(0) \cdot e^{C\tau} + C \cdot \int\limits_{0}^{\tau} \left(1 + U^\tau\left(\frac{(n+1)\tau}{n+2}\right)\right) d\theta \leqslant$$
$$\leqslant U(0) \cdot e^{C\tau} + C \cdot \left(1 + U^\tau\left(\frac{(n+1)\tau}{n+2}\right)\right) \cdot \tau.$$

Учитывая оценку на предыдущем шаге, получим

$$U^\tau(t) \leqslant U(0) \cdot e^{C\tau} + C \cdot \left(1 + U^\tau(0) \cdot e^{C\tau}\right) \cdot \tau = U(0) \cdot e^{C\tau} \cdot (1 + C\tau) + C\tau + 1 - 1 =$$
$$= (1 + C\tau) \cdot (1 + U(0) \cdot e^{C\tau}) - 1.$$

Следовательно,

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0) + 1)e^{C\tau} - 1, \quad t \in (0, \tau]. \tag{39}$$

На первом целом временном шаге, при $t \in (\tau, 2\tau]$, рассуждая аналогично нулевому целому шагу, согласно (39) имеем

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0) + 1) \cdot e^{2C\tau} - 1 \quad \forall t \in (0, 2\tau].$$

Проделав аналогичные рассуждения, на втором целом временном шаге, при $t \in (2\tau, 3\tau]$ получим

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0) + 1) \cdot e^{3C\tau} - 1 \quad \forall t \in (0, 3\tau].$$

Через конечное число шагов на интервале $((M-1)\tau, M\tau]$

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0) + 1) \cdot e^{CM\tau} - 1 = (U(0) + 1) \cdot e^{CT} - 1 \leqslant C \quad \forall t \in (0, M\tau].$$

Справедливо неравенство

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0) + 1) \cdot e^{CT} - 1 \leqslant C \quad \forall t \in [0, T].$$

Таким образом, доказаны равномерные по τ оценки

$$\begin{gathered} \left|\frac{\partial^l}{\partial z^l} D_x^s u^\tau(t, x, z)\right| \leqslant C, \quad (t, x, z) \in G_{[0,T]}, \quad l = 0, 1, \ldots, q+2, \\ s = (s_1, \ldots, s_n), \quad s_i = 0, 1, \ldots, p_i + 2, \quad i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{40}$$

Из оценок (40) следует, что правые части уравнений (25)–(30) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений будут ограничены равномерно по τ:

$$\left|u_t^\tau(t, x, z)\right| \leqslant C, \quad (t, x, z) \in G_{[0,T]}.$$

Применяя операцию дифференцирования D_x^s, $s=(s_1,\dots,s_n)$, $s_i=0,1,\dots,p_i$, $i=1,\dots,n$, и дифференцируя k раз уравнения (25)–(30) по z, $k=1,\dots,q$, в силу (40) получим оценки

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u_t^\tau(t,x,z)\right|\leqslant C,\quad (t,x,z)\in G_{[0,T]},$$
$$l=0,1,\dots,q,\quad s=(s_1,\dots,s_n),\quad s_i=0,1,\dots,p_i,\quad i=\overline{1,n}. \tag{41}$$

Оценки (40), (41) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела, некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений задачи (25)–(30) сходится вместе с соответствующими производными к функции $u(t,x,z)\in$ $\in Z^{p_1,\dots,p_n,q}_{x_1,\dots,x_n,z}\left(G^N_{[0,T]}\right)$, которая в силу теоремы сходимости метода слабой аппроксимации, является решением задачи (1), (2). Здесь $N>0$ — целая постоянная,

$$G^N_{[0,T]}=\Big\{(t,x,z)\ \Big|\ 0\leqslant t\leqslant T,\ |x_i|\leqslant N,\ i=\overline{1,n},\ |z|\leqslant N\Big\}.$$

В силу произвольности выбора постоянной N решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2) принадлежит классу $Z^{p_1,\dots,p_n,q}_{x_1,\dots,x_n,z}\left(G_{[0,T]}\right)$. При этом справедливы следующие оценки при $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$:

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u(t,x,z)\right|\leqslant C,\quad l=\overline{0,q},\quad s=(s_1,\dots,s_n),\quad s_i=0,1,\dots,p_i,\quad i=\overline{1,n}.$$

Рассмотрим случай **2**(b). Условие 3 выполняется при $\gamma_2>1$. Тогда на $(n+2)$-м дробном шаге, аналогично случаю **2**(a), имеем

$$U^\tau(t)\leqslant U(0)\cdot e^{C\tau}+C\cdot\int\limits_{\frac{(n+1)\tau}{n+2}}^{\tau}P_{\gamma_2}\left(U^\tau(\theta)\right)d\theta,\quad t\in\left(\frac{(n+1)\tau}{n+2},\tau\right].$$

Отсюда, в силу свойств определенного интеграла,

$$U^\tau(t)\leqslant U(0)\cdot e^{C\tau}+C\cdot\int\limits_0^{\tau}P_{\gamma_2}\left(U^\tau(\theta)\right)d\theta,\quad t\in(0,\tau]. \tag{42}$$

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\omega(t)}{dt}=\mathcal{P}_{\gamma_2}\left(\omega(t)\right),\quad \omega(0)=U(0). \tag{43}$$

По теореме Коши (см. [8]) решение $\omega(t)$ задачи (43) существует на некотором интервале $[0,t_*]$, где $t_*\in(0,T]$ зависит от C и начальных данных $U(0)$. Функция $\omega(t)$ является монотонно возрастающей на интервале $[0,t_*]$ и $\omega(t)\in C^1\left([0,t_*]\right)$.

Из (42), (43) следует, что если для некоторого $t_0\leqslant t$ справедливо неравенство $U^\tau(t_0)\leqslant\omega(t_0)$, то $U^\tau(t)\leqslant\omega(t)$, $t\in[t_0,t_1]$. Так как $U^\tau(0)\leqslant\omega(0)$, то из монотонности функции $\omega(t)$ следует, что $U^\tau(t)\leqslant\omega(\tau)$, $t\in[0,\tau]$. На первом целом временном шаге, $t\in(\tau,2\tau]$, рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим $U^\tau(t)\leqslant\omega(2\tau)$, $t\in[0,2\tau]$. Через конечное число шагов имеем

$$U^\tau(t)\leqslant\omega(t_*)\leqslant C,\quad t\in[0,t_*].$$

Таким образом, доказаны равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u^\tau(t,x,z)\right|\leqslant C,\quad (t,x,z)\in G_{[0,t_*]},\quad l=0,1,\dots,q+2,$$
$$s=(s_1,\dots,s_n),\quad s_i=0,1,\dots,p_i+2,\quad i=\overline{1,n}. \tag{44}$$

Из этих оценок следует, что правые части уравнений (25)–(30) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений будут ограничены равномерно по τ, т.е.

$$\left|u_t^\tau(t,x,z)\right|\leqslant C,\quad (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}.$$

Применяя операцию дифференцирования D_x^s, $s=(s_1,\ldots,s_n)$, $s_i=0,1,\ldots,p_i$, $i=\overline{1,n}$, и дифференцируя k раз уравнения (25)–(30) по z, $k=1,\ldots,q$, в силу (44) получим оценки

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l} D_x^s u_t^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}, \quad l=0,1,\ldots,q, \\ s=(s_1,\ldots,s_n), \quad s_i=0,1,\ldots,p_i, \quad i=\overline{1,n}. \tag{45}$$

Оценки (44), (45) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела, некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений задачи (25)–(30) сходится вместе с соответствующими производными к функции $u(t,x,z)\in \in Z^{p_1,\ldots,p_n,q}_{x_1,\ldots,x_n,z}\left(G^N_{[0,t_*]}\right)$, которая в силу теоремы сходимости метода слабой аппроксимации, является решением задачи (1), (2). Здесь $N>0$ — целая постоянная,

$$G^N_{[0,t_*]} = \Big\{(t,x,z) \;\Big|\; 0\leqslant t\leqslant t_*,\ |x_i|\leqslant N,\ i=\overline{1,n},\ |z|\leqslant N\Big\}.$$

В силу произвольности выбора постоянной N решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2) принадлежит классу $Z^{p_1,\ldots,p_n,q}_{x_1,\ldots,x_n,z}\left(G_{[0,t_*]}\right)$. При этом справедливы следующие оценки при $(t,x,z)\in G_{[0,t_*]}$:

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l} D_x^s u(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad l=\overline{0,q}, \quad s=(s_1,\ldots,s_n), \quad s_i=0,1,\ldots,p_i, \quad i=\overline{1,n}.$$

Теорема 1 доказана. □

3. Пример. Приведем пример задачи из [2], для которой может быть применен результат исследования нагруженного многомерного параболического уравнения вида (1). В этой работе рассмотрена задача идентификации функции источника и коэффициента при нелинейном члене в многомерном параболическом уравнении.

В области $G_{[0,T]}=\big\{(t,x,z)\,|\,0\leqslant t\leqslant T,\ x\in E_n,\ z\in E_1\big\}$ рассматривается задача Коши

$$u_t(t,x,z)=L_x(u)+u_{zz}+\lambda_1(t,x)M\left(t,u(t,x,z)\right)+\lambda_2(t,x)f(t,x,z), \tag{46}$$

$$u(0,x,z)=u_0(x,z), \quad x\in E_n, \quad z\in E_1. \tag{47}$$

Здесь

$$L_x(u)=\sum_{k,m=1}^{n} a_{km}(t)u_{x_kx_m}+\sum_{k=1}^{n} a_k(t)u_{x_k},$$

где $a_{km}(t)$, $a_k(t)\in C[0,T]$, функции $M(t,y)$, $u_0(x,z)$ и $f(t,x,z)$ — вещественнозначные, определенные на $[0,T]\times E_1$, E_2 и $G_{[0,T]}$ соответственно. Функции $\lambda_1(t,x)$ и $\lambda_2(t,x)$ подлежат определению вместе с решением $u(t,x,z)$ задачи (46), (47).

Заданы условия переопределения

$$u(t,x,0)=\varphi_1(t,x), \quad u_z(t,x,0)=\varphi_2(t,x), \tag{48}$$

и условия согласования

$$u_0(x,0)=\varphi_1(0,x), \quad \frac{\partial}{\partial z}u_0(x,0)=\varphi_2(0,x). \tag{49}$$

Полагаем, что $M(t,y)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая соотношению

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial y^l}M(t,y)\right| \leqslant M_0\left(1+|y|^p\right), \quad j=0,1,\ldots,9, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad y\in E_1, \tag{50}$$

причем все входящие в него производные непрерывны.

Пусть для $(t,x)\in \Pi_{[0,T]}=\big\{(t,x)\,|\,0\leqslant t\leqslant T,\ x\in E_n\big\}$

$$\left|M\left(t,\varphi_1(t,x)\right)f_z(t,x,0)-M^{(1)}\left(t,\varphi_1(t,x)\right)\varphi_2(t,x)f(t,x,0)\right| \geqslant \delta>0; \tag{51}$$

здесь δ — фиксированная постоянная. Считаем, что входные данные удовлетворяют соотношению

$$\begin{gathered}\left|D_x^\beta \psi_i(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\beta u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\beta f(t,x,z)\right| \leqslant C,\\ |\beta| = m, \quad m = 0,1,2,3,4, \quad k = 0,1,\ldots,5, \quad (t,x,z) \in G_{[0,T]},\end{gathered} \tag{52}$$

и являются достаточно гладкими, т.е. все производные, входящие в (52), непрерывны; здесь C — положительная константа,

$$\psi_1(t,x) = (\varphi_1)_t - L_x(\varphi_1), \quad \psi_2(t,x) = (\varphi_2)_t - L_x(\varphi_2).$$

Обратная задача (46), (47) с помощью условий переопределения (48) приводится к следующей прямой задаче:

$$\begin{aligned}u_t(t,x,z) = L_x\left(u(t,x,z)\right) + u_{zz}(t,x,z) + &\\ + \left[A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\right] M\left(t,u(t,x,z)\right) + &\\ + \left[B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\right] f(t,x,z),&\end{aligned}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z).$$

Здесь

$$\begin{aligned}&A_1(t,x) = \frac{\psi_1(t,x) f_z(t,x,0) - \psi_2(t,x) f(t,x,0)}{\Delta(t,x)},\\ &A_2(t,x) = \frac{-f_z(t,x,0)}{\Delta(t,x)}, \quad A_3(t,x) = \frac{f(t,x,0)}{\Delta(t,x)},\\ &B_1(t,x) = \frac{\psi_2(t,x) M\left(t,\varphi_1(t,x)\right) - \psi_1(t,x) M^{(1)}\left(t,\varphi_1(t,x)\right)\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)},\\ &B_2(t,x) = \frac{M^{(1)}\left(t,\varphi_1(t,x)\right)\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)}, \quad B_3(t,x) = \frac{-M\left(t,\varphi_1(t,x)\right)}{\Delta(t,x)},\\ &\Delta(t,x) = M\left(t,\varphi_1(t,x)\right) f_z(t,x,0) - M^{(1)}\left(t,\varphi_1(t,x)\right)\varphi_2(t,x) f(t,x,0),\end{aligned}$$

— известные функции.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (см. [2]). *Пусть выполняются условия (49)–(52). Тогда существует решение $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ задачи (46)–(48) в классе*

$$\begin{aligned}Z(t^*) = \Big\{u, \lambda_1, \lambda_2 \;\Big|\; u_t, \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u \in C\left(G_{[0,t^*]}\right)), &\\ \lambda_1(t,x), \lambda_2(t,x) \in C_{t,x}^{0,2}\left(\Pi_{[0,t^*]}\right);\; k = 0,1,2,3; |\alpha| \leqslant 2\Big\},&\end{aligned}$$

удовлетворяющее при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$ соотношениям

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\sum_{k=0}^{3}\left|D_x^\alpha \frac{\partial^k}{\partial z^k} u(t,x,z)\right| \leqslant C, \qquad \sum_{|\alpha|\leqslant 2}\left|D_x^\alpha \lambda_1(t,x)\right| + \sum_{|\alpha|\leqslant 2}\left|D_x^\alpha \lambda_2(t,x)\right| \leqslant C.$$

Здесь t^* — некоторая постоянная, зависящая от δ и константы C из (52), ограничивающей входные данные, $0 < t^* \leqslant T$, и

$$C_{t,x}^{0,2}\left(\Pi_{[0,t^*]}\right) = \Big\{g(t,x) \;\Big|\; D_x^\alpha g(t,x) \in C(\Pi_{[0,t^*]}),\; |\alpha| \leqslant 2\Big\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р.* Конечноразностные методы решения нагруженных параболических уравнений// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2016. — *56*, № 1. — С. 99–112.
2. *Белов Ю. Я., Фроленков И. В.* Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений// Докл. РАН. — 2005. — *404*, № 5. — С. 583–585.
3. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: 2010.
4. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче// Мат. заметки. — 2004. — *76*, № 6. — С. 840–853.
5. *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых нелокальных и связанных с ними обратных задач для параболических уравнений// Мат. заметки ЯГУ. — 2011. — *18*, № 2. — С. 64–78.
6. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 6. — С. 961–972.
7. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применения. — М.: Наука, 2012.
8. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.
9. *Тарасенко А. В.* Об одной задаче с оператором М. Сайго в краевом условии для нагруженного уравнения теплопроводности// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2012. — *28*, № 3. — С. 41–46.
10. *Фроленков И. В., Белов Ю. Я.* О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши// в сб.: Неклассические уравнения математической физики. — Новосибирск: Ин-т мат., 2012. — С. 262–279.
11. *Фроленков И. В., Романенко Г. В.* О разрешимости специальных систем одномерных нагруженных параболических уравнений и систем составного типа с данными Коши// Сиб. ж. индустр. мат. — 2014. — *17*, № 1. — С. 135–148.
12. *Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности с краевыми условиями III рода// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2009. — *49*, № 7. — С. 1223–1231.
13. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for partial differential equations. — Utrecht: VSP, 2002.
14. *Belov Yu. Ya., Korshun K. V.* On solvability of the Cauchy problem for a loaded system// Ж. Сиб. ун-та. Сер. мат. физ. — 2014. — *7*, № 2. — С. 155–161.
15. *Dzhenaliev M. T., Ramazanov M. I.* On a boundary-value problem for a spectrally loaded heat operator: I// Differ. Equations. — 2007. — *43*, № 4. — С. 513–524.
16. *Frolenkov I. V., Darzhaa M. A.* On the existence of some problems for nonlinear loaded parabolic equations with Cauchy data// Ж. Сиб. ун-та. Сер. мат. физ. — 2014. — *7*, № 2. — С. 173–185.
17. *Romanenko G. V., Frolenkov I. V.* On the solvability of a system of two multidimensional loaded parabolic equations with the Cauchy data// Ж. Сиб. ун-та. Сер. мат. физ. — 2016. — *9*, № 3. — С. 364–373.

И. В. Фроленков
Институт математики и фундаментальной информатики,
Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: igor@frolenkov.ru

Е. Н. Кригер
АО «Информационные спутниковые системы» им. акад. М. Ф. Решетнева»,
Железногорск, Красноярский край
E-mail: e_katherina@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 156 (2018). С. 58–72

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© 2018 г. **И. В. ФРОЛЕНКОВ, М. А. ЯРОВАЯ**

Аннотация. В работе рассматривается нагруженное параболическое уравнение специального вида в неограниченной области с данными Коши. Уравнение является одномерным, правая часть уравнения линейным или нелинейным образом зависит от неизвестной функции $u(t, x)$, а также следов этой функции и ее производных по пространственной переменной до заданного порядка в конечном числе различных точек пространства. Такие уравнения возникают при сведении некоторого класса задач идентификации одного или нескольких коэффициентов одномерного параболического уравнения с данными Коши к вспомогательным прямым задачам. В работе получены достаточные условия глобальной разрешимости и достаточные условия разрешимости поставленной задачи в малом временном интервале. Решение ищется в классе достаточно гладких ограниченных функций. Исследована единственность найденного классического решения, сформулированы достаточные условия, доказана соответствующая теорема. Получена априорной оценки решения, гарантирующей непрерывную зависимость решения от правой части уравнений и начальных условий.

***Ключевые слова*:** параболическое уравнение, нагруженное уравнение, задача Коши, разрешимость, метод слабой аппроксимации, единственность решения, непрерывная зависимость.

***AMS Subject Classification*:** 35K15, 35B45, 35B65

Сложность исследования обратных задач состоит в том, что в большинстве случаев они некорректны. В них может нарушаться хотя бы одно из трех условий корректности: существование, единственность и устойчивость решения по отношению к малым вариациям данных задачи. Приборы, используемые в экспериментах, имеют определенный уровень погрешности, а значит, методы решения обратных задач должны обладать устойчивостью к малым погрешностям во входных данных. Единственность решения дает ответ на вопрос о том, достаточно ли имеющейся экспериментальной информации для однозначного определения искомой характеристики изучаемого объекта или процесса.

Исследование корректности обратных задач — весьма трудоемкий процесс. Любое незначительное изменение исходной модели обратной задачи или изменение числа неизвестных коэффициентов приводит к тому, что сильно меняется прямая задача, и необходимо вновь получать все априорные оценки и исследовать разрешимость новой задачи. Данная работа является попыткой формализовать и упростить этот процесс для некоторого класса обратных задач.

Разрешимость подобного класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши исследовалась ранее в [9]. Данная работа является развитием работы [9]. Помимо вопроса существования решения для модельных задач изучены вопросы единственности решения, а также непрерывной зависимости решения от входных данных. Важным аспектом данной работы является то, что каждая часть содержит построенные примеры обратных задач, входные данные которых удовлетворяют сформулированным в работе достаточным условиям. Также приведены алгоритмы проверки этих условий.

1. Существование решения. В пространстве E_1 переменных x выберем r различных точек α_k, $k=\overline{1,r}$. В области $G_{[0,T]}=\big\{(t,x)\,|\,0\leqslant t\leqslant T,\ x\in E_1\big\}$ рассмотрим задачу Коши для параболического уравнения

$$u_t(t,x)=\mu(t)u_{xx}(t,x)+f\big(t,x,u(t,x),\overline{\omega}_u(t)\big) \tag{1}$$

с начальными данными

$$u(0,x)=u_0(x),\quad x\in E_1. \tag{2}$$

Через

$$\overline{\omega}_u(t)=\left(u(t,\alpha_k),\ \frac{\partial^j u(t,\alpha_k)}{\partial x^j}\right),\quad k=\overline{1,r},\quad j=0,1,\dots,p_1,$$

обозначена вектор функция, компоненты которой является следами (зависящими только от переменной t) функции $u(t,x)$ и всех ее производных по пространственной переменной x до порядка p_1 включительно. Выберем и зафиксируем постоянную $p\geqslant\max\{2,p_1\}\geqslant 2$.

Определение 1. Обозначим через $Z_x^p(G_{[0,t^*]})$ множество функций $u(t,x)$, определенных в $G_{[0,t^*]}$, принадлежащих классу

$$C_{t,x}^{1,p}(G_{[0,t^*]})=\left\{u(t,x)\ \Big|\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial^j u}{\partial x^j}\in C(G_{[0,t^*]}),\ j=\overline{0,p}\right\},$$

ограниченных при $(t,x)\in G_{[0,t^*]}$ вместе со всеми производными и удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{j=0}^{p}\left|\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial x^j}\right|\leqslant C.$$

Определение 2. Под *классическим решением* задачи в $G_{[0,t^*]}$ будем понимать функцию $u(t,x)\in Z_x^p(G_{[0,t^*]})$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным данным (2) в $G_{[0,t^*]}$.

Здесь $0<t^*\leqslant T$ — некоторая фиксированная постоянная. Если t^* зависит от констант, ограничивающих входные данные, и $t^*\leqslant T$, то будем говорить, что $u(t,x)$ является решением задачи (1), (2) *в малом* временном интервале. Если t^* фиксировано при любом наборе входных данных, удовлетворяющих достаточным условиям разрешимости, будем говорить, что $u(t,x)$ является решением задачи (1), (2) *во всем* временном интервале.

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Функции $\mu(t)$, $u_0(x)$, $f\big(t,x,v,\overline{\omega}_v(t)\big)$ — действительнозначные функции переменных (t,x) при любой действительнозначной функции $v(t,x)$. Для всех $t\in(0,T]$ выполнено неравенство $\mu(t)>0$. Функция $u_0(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right|\leqslant\widetilde{C}_1, \tag{3}$$

причем все входящие в (3) производные непрерывны.

Условие 2. Для всех $t_1\in(0,T]$ и любой функции $v(t,x)\in Z_x^{p+2}(G_{[0,t_1]})$ функция $f\big(t,x,v,\overline{\omega}_v(t)\big)$, рассматриваемая как функция переменных $(t,x)\in G_{[0,t_1]}$, непрерывна, удовлетворяет неравенству

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}f\big(t,x,v(t,x),\overline{\omega}_v(t)\big)\right|\leqslant P_\gamma(U_v(t)), \tag{4}$$

причем все производные, входящие в (4), непрерывны; здесь $\gamma\geqslant 0$ — некоторое фиксированное целое число, $P_\zeta(y)=\widetilde{C}_2(1+y+\ldots+y^\zeta)$б где $\widetilde{C}_2\geqslant 1$ — постоянная, не зависящая от функции $v(t,x)$ и ее производных,

$$U_v(t)=\sum_{j=0}^{p+2}\sup_{0<\xi\leqslant t}\sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v(\xi,x)\right|,\quad v(t,x)\in Z_x^{p+2}(G_{[0,t_1]}).$$

Теорема 1 (теорема существования). *Пусть выполняются условия* 1, 2.

(1) *Если условие 2 выполняется при* $\gamma=0$ *или* $\gamma=1$, *то в классе* $Z_x^p(G_{[0,T]})$ *существует по крайней мере одно классическое решение* $u(t,x)$ *задачи* (1), (2).

(2) *Если условие 2 выполняется при* $\gamma>1$, *то существует такая константа* t^*, *зависящая от констант* $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$ *из условий* 1, 2, $t^*\in(0,T]$, *что в классе* $Z_x^p(G_{[0,t^*]})$ *существует по крайней мере одно классическое решение* $u(t,x)$ *задачи* (1), (2).

Доказательство данной теоремы в целом повторяет рассуждения, приведенные в [9].

Используется расщепленная на два дробных шага вспомогательная задача, в которой сделан сдвиг по времени на $(t-\tau/2)$ в следах неизвестных функций и нелинейных членах:

$$u_t^\tau(t,x)=2\mu(t)u_{xx}^\tau,\quad n\tau<t\leqslant\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau; \tag{5}$$

$$u_t^\tau(t,x)=2f\left(t-\frac{\tau}{2},\ x,\ u^\tau\left(t-\frac{\tau}{2},x\right),\ \overline{\omega}_{u^\tau}^\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right),\quad \left(n+\frac{1}{2}\right)\tau<t\leqslant(n+1)\tau; \tag{6}$$

$$u^\tau(0,x)=u_0(x),\quad x\in E_1; \tag{7}$$

здесь $n=0,\dots,N-1$, $N\tau=T$,

$$\overline{\omega}_{u^\tau}^\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right)=\left(u^\tau\left(t-\frac{\tau}{2},\alpha_k\right),\ \frac{\partial^j u^\tau(t-\frac{\tau}{2},\alpha_k)}{\partial x^j}\right),\quad k=\overline{1,r},\quad j=0,1,\dots,p_1.$$

Доказаны априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^\tau(t,x)$ задачи в классе гладких ограниченных функций. В первом случае оценки имеют вид

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(t,x)\right|\leqslant C,\quad k=0,1,\dots,p+2,\quad (t,x)\in G_{[0,T].} \tag{8}$$

Из оценок (8) следует, что правые части уравнений ограничены равномерно по τ, а значит, и левые части уравнений ограничены равномерно по τ:

$$|u_t^\tau(t,x)|\leqslant C,\quad (t,x)\in G_{[0,T]}.$$

Дифференцируя уравнения (5) — (7) по x, в силу (8) справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u_t^\tau(t,x)\right|\leqslant C,\quad k=0,1,\dots,p. \tag{9}$$

Оценки (8) и (9) гарантируют равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность семейства решений $u^\tau(t,x)$ на отрезке $[0,t^*]$, где $t^*\leqslant T$. По теореме Арцела существует некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x)$ ($\tau_k\to0$ при $k\to\infty$) последовательности $u^\tau(t,x)$ решений задачи (5)–(7), которая сходится вместе с производными по x до порядка p включительно равномерно в каждом множестве $G_{[0,T]}^N$ к функции $u(t,x)$ для любого фиксированного числа $N>0$; здесь

$$G_{[0,T]}^N=\Big\{(t,x)\ \Big|\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x\in E_1,\ |x|\leqslant N\Big\}.$$

Ясно, что $u(t,x)\in C_{t,x}^{0,p}(G_{[0,T]})$, причем $u(0,x)=u_0(x)$. Эта функция на основании теоремы сходимости метода слабой аппроксимации (см. [1]) является решением исходной задачи (1), (2), причем $u(t,x)\in\ C_{t,x}^{1,p}(G_{[0,T]})$. При этом справедлива следующая оценка при $(t,x)\in G_{[0,T]}$:

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t,x)\right|\leqslant C,\quad k=0,1\dots,p. \tag{10}$$

Для второго случая оценки аналогичны, но получены в малом временном интервале $[0,t^*]$, где $0<t^*\leqslant T$ (t^* зависит от констант ограничевающих входные данные):

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(t,x)\right|\leqslant C,\quad k=0,1,\dots,p+2,\quad (t,x)\in G_{[0,t^*]}, \tag{11}$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u_t^\tau(t,x)\right|\leqslant C,\quad k=0,1\dots,p. \tag{12}$$

Некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x)$ ($\tau_k \to 0$ при $k \to \infty$) последовательности $u^\tau(t,x)$ решений задачи (5)–(7) сходится вместе с производными по x до порядка p включительно равномерно в каждом множестве $G^N_{[0,t^*]}$ ($N > 0$ — произвольное фиксированное число) к функции $u(t,x)$, которая является решением исходной задачи (1), (2), причем $u(t,x) \in C^{1,p}_{t,x}(G_{[0,t^*]})$. При этом оценка (10) справедлива при $(t,x) \in G[0,t^*]$.

2. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим в $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ -\infty < x < \infty\}$ уравнение
$$u_t(t,x) = \mu(t)u_{xx}(t,x) + \lambda(t)g(t,x) \tag{13}$$
с начальными данными
$$u(0,x) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{14}$$
Полагаем, что $\mu(t) > 0$, $u_0(x)$, $g(t,x)$ — действительнозначные функции, определенные и непрерывные в $G_{[0,T]}$, удовлетворяющие соотношению
$$\sum_{k=0}^{4} \left|\frac{d^k u_0(x)}{dx^k}\right| + \left|\frac{\partial^k g(t,x)}{\partial x^k}\right| \leqslant \widehat{C}_1. \tag{15}$$
причем производные, входящие в (15), непрерывны.

Функция $\lambda(t)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x)$ задачи (13), (14), удовлетворяющим условию переопределения
$$u(t,\zeta) = \phi(t), \quad \phi(t) \in C^1[0,T], \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{16}$$
где $\zeta \in E_1$ — некоторая фиксированная постоянная. Также выполняется условие
$$\left|g(t,\zeta)\right| \geqslant \delta > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{17}$$

Приведем задачу (13), (14) к вспомогательной прямой задаче. При $x = \zeta$, используя (16), получим
$$\lambda(t) = \frac{\phi'(t) - \mu(t)u_{xx}(t,\zeta)}{g(t,\zeta)}. \tag{18}$$
Знаменатель последнего выражения не обращается в нуль в силу условия (17).

Получим следующую вспомогательную прямую задачу (19), (14):
$$u_t(t,x) = \mu(t)u_{xx}(t,x) + \frac{\phi'(t) - \mu(t)u_{xx}(t,\zeta)}{g(t,\zeta)}g(t,x). \tag{19}$$

Проверим выполнение условий 1, 2 доказанной теоремы существования. Задача (19), (14) является частным случаем задачи (1), (2), где
$$f\big(t,x,v,\overline{\omega}_v(t)\big) = \frac{\phi'(t) - \mu(t)v_{xx}(t,\zeta)}{g(t,\zeta)}g(t,x). \tag{20}$$

Выберем и зафиксируем $p = 2$. Условие 1 выполняется в силу предположения (15). Проверим выполнение условия 2. Возьмем произвольное $t_1 \in (0,T]$ и произвольную функцию $v(t,x)$ класса $Z^4_x(G_{[0,t_1]})$ и подставим её в (20). Очевидно, что полученная композиция в силу (15) будет непрерывно дифференцируема по x до 4 порядка при всех $(t,x) \in G_{[0,t_1]}$, причем
$$\sum_{j=0}^{4} \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} f\big(t,x,v(t,x),\overline{\omega}_v(t)\big)\right| \leqslant P_1(U_v(t)).$$

Действительно,
$$\sum_{j=0}^{4} \left|\frac{\partial^j f\big(t,x,v(t,x),\ \overline{\omega}_v(t)\big)}{\partial x^j}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{4} \left|\frac{\phi'(t) - \mu v_{xx}(t,\zeta)}{g(t,\zeta)} \frac{\partial^j g(t,x)}{\partial x^j}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\delta}\Big(C + C \sup_{0<\xi\leqslant t}\sup_{x\in E_1}\left|v_{xx}(t,\zeta)\right|\Big)C \leqslant \widehat{C}_2(1 + U_v(t)) \equiv P_1(U_v(t)).$$

Получили, что условие 2 выполняется при $\gamma=1$. Условия теоремы существования выполнены, классическое решение задачи (13), (14) согласно теореме существует в классе $Z_x^2(G_{[0,T]})$.

Пример 2. Рассмотрим в $G_{[0,T]}=\big\{(t,x)\,|\,0\leqslant t\leqslant T,\ -\infty<x<\infty\big\}$ уравнение

$$u_t(t,x)=\mu(t)u_{xx}(t,x)+\lambda_1(t)u(t,x)+\lambda_2(t)g(t,x) \tag{21}$$

с начальными данными

$$u(0,x)=u_0(x), \quad -\infty<x<\infty. \tag{22}$$

Полагаем, что $\mu(t)>0$, $u_0(x)$, $g(t,x)$ — действительнозначные функции, определенные и непрерывные в $G_{[0,T]}$, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{k=0}^{4}\left|\frac{d^k u_0(x)}{dx^k}\right|+\left|\frac{\partial^k g(t,x)}{\partial x^k}\right|\leqslant \widehat{C}_1 \tag{23}$$

причем производные, входящие в (23), непрерывны.

Функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x)$ задачи (21), (22), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t,a)=\varphi(t), \quad u(t,b)=\psi(t), \tag{24}$$

где $a\in E_1$ и $b\in E_1$ — некоторые различные фиксированные постоянные, $\varphi(t)\in C^1[0,T]$, $\psi(t)\in C^1[0,T]$. Также выполняется условие

$$\big|\varphi(t)g(t,b)-\psi(t)g(t,a)\big|\geqslant\delta>0, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{25}$$

Приведем задачу (21)–(22) к вспомогательной прямой задаче. Используя условия переопределения, получим выражения на λ_1,λ_2:

$$\lambda_1=\frac{\varphi'(t)g(t,b)+\mu(t)u_{xx}(t,a)g(t,b)-\psi'(t)g(t,a)-\mu(t)u_{xx}(t,b)g(t,a)}{\varphi(t)g(t,b)-\psi(t)g(t,a)},$$
$$\lambda_2=\frac{\psi'(t)\varphi(t)-\mu(t)u_{xx}(t,b)\varphi(t)-\varphi'(t)\psi(t)-\mu(t)u_{xx}(t,a)\psi(t)}{\varphi(t)g(t,b)-\psi(t)g(t,a)}$$

Знаменатель этих выражений не обращается в нуль в силу (25).

Рассмотрим вспомогательную прямую задачу для уравнения

$$\begin{aligned}u_t(t,x)=\mu(t)u_{xx}(t,x)+&\\ +\frac{\varphi'(t)g(t,b)-\mu(t)u_{xx}(t,a)g(t,b)-\psi'(t)g(t,a)-\mu(t)u_{xx}(t,b)g(t,a)}{\varphi(t)g(t,b)-\psi(t)g(t,a)}&u(t,x)+\\ +\frac{\psi'(t)\varphi(t)-\mu(t)u_{xx}(t,b)\varphi(t)-\varphi'(t)\psi(t)-\mu(t)u_{xx}(t,a)\psi(t)}{\varphi(t)g(t,b)-\psi(t)g(t,a)}&g(t,x)\end{aligned} \tag{26}$$

с начальными данными (22). Проверим выполнение условий 1, 2 доказанной теоремы существования. Выберем и зафиксируем $p=2$. Имеем

$$\begin{aligned}f\big(t,x,v(t,x),\overline{\omega}_v(t)\big)=&\\ =\frac{\varphi'(t)g(t,b)-\mu(t)v_{xx}(t,a)g(t,b)-\psi'(t)g(t,a)-\mu(t)v_{xx}(t,b)g(t,a)}{\varphi(t)g(t,b)-\psi(t)g(t,a)}&v(t,x)+\\ +\frac{\psi'(t)\varphi(t)-\mu(t)v_{xx}(t,b)\varphi(t)-\varphi'(t)\psi(t)-\mu(t)v_{xx}(t,a)\psi(t)}{\varphi(t)g(t,b)-\psi(t)g(t,a)}&g(t,x).\end{aligned} \tag{27}$$

Условие 1 выполняется в силу предположения (23). Проверим выполнение условия 2:

$$\sum_{j=0}^{4}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}f\big(t,x,v(t,x),\overline{\omega}_v(t)\big)\right|\leqslant P_2(U_v(t)).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{4}\left|\frac{\partial^j f\big(t,x,v(t,x),\overline{\omega}_v(t)\big)}{\partial x^j}\right| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \left|\frac{\varphi'(t)g(t,b)-\mu(t)v_{xx}(t,a)g(t,b)-\psi'(t)g(t,a)-\mu(t)v_{xx}(t,b)g(t,a)}{\varphi(t)g(t,b)+\psi(t)g(t,a)}\sum_{j=0}^{4}\frac{\partial^j v}{\partial x^j}\right| + \\
&\qquad + \left|\frac{\psi'(t)\varphi(t)-\mu(t)v_{xx}(t,b)\varphi(t)-\varphi'(t)\psi(t)-\mu(t)v_{xx}(t,a)\psi(t)}{\varphi(t)g(t,b)+\psi(t)g(t,a)}\sum_{j=0}^{4}\frac{\partial^j g(t,x)}{\partial x^j}\right| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\delta}\left[C+C\sup_{0<\xi\leqslant t}\sup_{x\in E_1}\big|v_{xx}(t,a)\big|+C+C\sup_{0<\xi\leqslant t}\sup_{x\in E_1}\big|v_{xx}(t,b)\big|\right]\sup_{x\in E_1}|v(t,x)| + \\
&\qquad\quad + \frac{1}{\delta}\left[C+C\sup_{0<\xi\leqslant t}\sup_{x\in E_1}\big|v_{xx}(t,b)\big|+C+C\sup_{0<\xi\leqslant t}\sup_{x\in E_1}\big|v_{xx}(t,a)\big|\right]C \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \widehat{C}_2\big(U_v^2(t)+U_v(t)+1\big)\equiv P_2(U_v(t)).
\end{aligned}$$

Получили, что условие 2 выполняется при $\gamma=2$. Условия теоремы существования выполнены; следовательно, найдется такая постоянная $0<t^*\leqslant T$, зависящая от констант, ограничивающих входные данные, что в классе $Z_x^2(G_{[0,t^*]})$ существует классическое решение задачи (13), (14).

3. Единственность решения. Рассмотрим задачу (1) с начальными данными (2). Выберем и зафиксируем $p\geqslant\max\{p_1,2\}+2\geqslant 4$. Предположим, что с данным p и некоторым γ выполняются условия 1 и 2 теоремы существования. В силу этой теоремы у задачи (1), (2) существует классическое решение $u^1(t,x)\in Z_x^p(G_{[0,t^*]})$, где $t^*=T$ в случае глобальной разрешимости (если $\gamma\in\{0,1\}$), либо $0<t^*\leqslant T$ в случае локальной разрешимости (если $\gamma>1$). Предположим, что наряду с функцией $u^1(t,x)$ существует другая функция $u^2(t,x)\in Z_x^p(G_{[0,t^*]})$, являющаяся решением задачи. Тогда

$$\begin{aligned}
&u_t^i(t,x)=\mu(t)u_{xx}^i(t,x)+f\big(t,x,u^i(t,x),\overline{\omega}_{u^i}(t)\big), \quad && i=1,2,\\
&u^i(0,x)=u_0(x), && i=1,2.
\end{aligned}$$

Разность $u^1(t,x)-u^2(t,x)=u(t,x)$ является решением задачи

$$u_t(t,x)=\mu(t)u_{xx}+f\big(t,x,u^1(t,x),\overline{\omega}_{u^1}(t)\big)-f\big(t,x,u^2(t,x),\overline{\omega}_{u^2}(t)\big), \tag{28}$$

$$u(0,x)=0. \tag{29}$$

Условие 3. Предположим, что функция f такова, что при всех $t_1\in(0,t^*]$ и всех $v^1(t,x),v^2(t,x)\in Z_x^p(G_{[0,t_1]})$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned}
&f\big(t,x,v^1(t,x),\overline{\omega}_{v^1}\big)-f\big(t,x,v^2(t,x),\overline{\omega}_{v^2}\big)=\\
&\qquad =(v^1-v^2)\cdot F\Big(t,x,v^1(t,x),v^2(t,x),\overline{\omega}_{v^1}(t),\overline{\omega}_{v^2}(t)\Big)+\\
&\quad +\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\left(\frac{\partial^s}{\partial x^s}v^1(t,\alpha_k)-\frac{\partial^s}{\partial x^s}v^2(t,\alpha_k)\right)F_{k,s}\Big(t,x,v^1(t,x),v^2(t,x),\overline{\omega}_{v^1}(t),\overline{\omega}_{v^2}(t)\Big)
\end{aligned} \tag{30}$$

для любых $(t,x)\in G_{[0,t_1]}$.

Условие 4. Заданные функции $F, F_{k,s}$, $k=\overline{1,r}$, $s=\overline{0,p_1}$, являются достаточно гладкими и для всех $(t,x)\in G_{[0,t_1]}$ выполнено неравенство

$$\Big|F\Big(t,x,v^1(t,x),v^2(t,x),\overline{\omega}_{v^1}(t),\overline{\omega}_{v^2}(t)\Big)\Big|+ \\ +\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\Big|F_{k,s}\Big(t,x,v^1(t,x),v^2(t,x),\overline{\omega}_{v^1}(t),\overline{\omega}_{v^2}(t)\Big)\Big|\leqslant C. \quad (31)$$

Очевидно, константа C зависит от ограничивающих функций $v^1(t,x)$ и $v^2(t,x)$ и их производных соответствующего порядка.

Теорема 2 (теорема единственности)**.** *Если решение задачи* (1), (2) *существует в классе* $Z^p_x(G_{[0,t^*]})$, *где* $p\geqslant \max\{p_1,2\}+2\geqslant 4$, *то при выполнении условий* 5, 6 *оно единственно в классе* $Z^p_x(G_{[0,t^*]})$.

Доказательство. Уравнение (28) перепишем в следующем виде:

$$u_t(t,x)=\mu(t)u_{xx}+u(t,x)\cdot F\Big(t,x,v^1(t,x),v^2(t,x),\overline{\omega}_{v^1}(t),\overline{\omega}_{v^2}(t)\Big)+ \\ +\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\frac{\partial^s}{\partial x^s}u(t,\alpha_k)F_{k,s}\Big(t,x,v^1(t,x),v^2(t,x),\overline{\omega}_{v^1}(t),\overline{\omega}_{v^2}(t)\Big). \quad (32)$$

Введём неотрицательные, неубывающие на $[0,t^*]$ функции

$$m_s(t)=\sup_{G_{[0,t]}}\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}u(\xi,x)\right|, \quad s=0,1,\dots,p_1.$$

В силу принципа максимума для уравнения получим

$$\big|u(\xi,x)\big|\leqslant \exp\left(\xi\cdot\sup_{G_{[0,t^*]}}|F|\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\sup_{G_{[0,t^*]}}\big|F_{k,s}\big|\cdot(m_s(t))\right)\cdot\xi, \\ (\xi,x)\in G_{[0,t^*]}, \quad 0\leqslant t\leqslant t^*.$$

Справедливо неравенство

$$\big|u(\xi,x)\big|\leqslant C\cdot\left(\sum_{s=0}^{p_1}m_s(t)\right)\cdot t, \quad (\xi,x)\in G_{[0,t^*]}, \quad 0\leqslant t\leqslant t^*.$$

Взяв от обеих частей этого неравенства $\sup\limits_{G_{[0,t]}}$, в силу неотрицательности функций $m_s(t)$, $s=0,1,\dots$ $\dots,p_1$, получим:

$$m_0(t)\leqslant C\cdot\left(\sum_{s=0}^{p_1}m_s(t)\right)\cdot t, \quad 0\leqslant t\leqslant t^*. \quad (33)$$

Продифференцировав уравнение k раз по x, $k=1,\dots,p_1$, в силу принципа максимума получим аналогичные оценки:

$$m_s(t)\leqslant C\cdot\left(\sum_{s=0}^{p_1}m_s(t)\right)\cdot t, \quad s=1,\dots,p_1, \quad 0\leqslant t\leqslant t^*. \quad (34)$$

Сложим неравенства

$$\sum_{s=0}^{p_1}m_s(t)\leqslant C\cdot\left(\sum_{s=0}^{p_1}m_s(t)\right)\cdot t, \quad 0\leqslant t\leqslant t^*.$$

Отсюда следует, что при $t\in[0,\theta]$, где $\theta<1/C$, выполняется соотношение

$$\sum_{s=0}^{p_1}m_s(t)=0.$$

Так как $m_s(t)\geqslant 0$, то $u(t,x)=0$ при $(t,x)\in G_{[0,\theta]}$.

Рассуждая аналогично, для $t\in[\theta,2\theta]$ получим, что $u(t,x)=0$, $(t,x)\in G_{[0,2\theta]}$. Продолжая рассуждения, через конечное число шагов получим

$$u(t,x)\equiv 0, \quad (t,x)\in G_{[0,t^*]}. \tag{35}$$

Отсюда следует, что $u^1(t,x)-u^2(t,x)\equiv 0$, $(t,x)\in G_{[0,t^*]}$, т.е. $u^1(t,x)=u^2(t,x)$, $t\in[0,t^*]$, $x\in E_1$.

Таким образом, решения совпадают во всей области $G_{[0,t^*]}$. Следовательно, решение задачи единственно в классе $Z_x^p(G_{[0,t^*]})$. Теорема доказана. □

Пример 3. Рассмотрим в области $G_{[0,T]}=\big\{(t,x)\,|\,0\leqslant t\leqslant T,\ -\infty<x<\infty\big\}$ уравнение

$$u_t=\mu(t)u_{xx}(t,x)+\lambda(t)g(t,x) \tag{36}$$

с начальными данными

$$u(0,x)=u_0(x), \quad -\infty<x<\infty. \tag{37}$$

Пусть $\mu(t)>0$, $u_0(x)$, $g(t,x)$ — непрерывные в $G_{[0,T]}$ действительнозначные функции, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{k=0}^{4}\left\{\left|\frac{d^k u_0(x)}{dx^k}\right|+\left|\frac{\partial^k g(t,x)}{\partial x^k}\right|\right\}\leqslant \widehat{C}_1, \tag{38}$$

причем производные, входящими в это соотношение, непрерывны. Также выполняется условие

$$\big|g(t,\zeta)\big|\geqslant\delta>0, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{39}$$

Для задачи (36), (37) выполнены все условия теоремы существования. Пусть $u^1(t,x)\in Z_x^4(G_{[0,T]}$, $\lambda^1\in C[0,T]$ — решение этой задачи. Допустим также, что наряду с функцией $u^1(t,x)$ существует некоторое другое решение $u^2(t,x)\in Z_x^4(G_{[0,T]}$, $\lambda^2\in C[0,T]$. Тогда

$$u_t^i=\mu(t)u_{xx}^i(t,x)+\lambda^i(t)g(t,x), \tag{40}$$

$$u^i(0,x)=u_0(x), \quad i=1,2, \quad -\infty<x<\infty. \tag{41}$$

Функции λ^1 и λ^2 подлежат определению одновременно с решениями $u^1(t,x)$ и $u^2(t,x)$ задачи (40), (41), удовлетворяющими условиям переопределения

$$u^i(t,\zeta)=\phi(t), \quad i=1,2, \qquad \phi(t)\in C^1[0,t], \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{42}$$

где $\zeta\in E_1$ — некоторая фиксированная постоянная.

Положим $v(t,x)=u^1(t,x)-u^2(t,x)$, $\chi(t)=\lambda_1(t)-\lambda_2(t)$. Вычитая второе уравнение из первого, получим следующую задачу для $v(t,x)$, $\chi(t)$:

$$v_t(t,x)=\mu(t)v_{xx}(t,x)+\chi(t)g(t,x), \tag{43}$$

$$v(0,x)=0, \tag{44}$$

с соответствующим условием переопределения

$$v(t,\zeta)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{45}$$

Приведем задачу (43), (44) к вспомогательной прямой задаче. При $x=\zeta$, используя (45), получим

$$\chi(t)=-\frac{\mu(t)v_{xx}(t,\zeta)}{g(t,\zeta)}. \tag{46}$$

Знаменатель выражения не обращается в нуль в силу условия (39).

Подставив $\chi(t)$ в уравнение (43), получим

$$v_t(t,x)=\mu(t)v_{xx}(t,x)+\frac{-\mu(t)v_{xx}(t,\zeta)}{g(t,\zeta)}g(t,x). \tag{47}$$

Уравнение (47) с начальным условием (44) является частным случаем задачи (13), (14), где

$$f\big(t,x,v,\overline{\varpi}_v(t)\big)=\frac{-\mu(t)v_{xx}(t,\zeta)}{g(t,\zeta)}g(t,x).$$

Проверим выполнение условий 3, 4. Выбрав произвольное $t_1 \in (0,T]$ и две произвольные функции $v^1(t,x), v^2(t,x) \in Z^4(G_{[0,T]})$, получим

$$f\big(t,x,v^1,\overline{\omega}_{v^1}(t)\big) - f\big(t,x,v^2,\overline{\omega}_{v^2}(t)\big) = \\ = \frac{-\mu(t)v^1xx(t,\zeta)}{g(t,\zeta)}g(t,x) - \frac{-\mu(t)v^2_{xx}(t,\zeta)}{g(t,\zeta)}g(t,x) = \\ = -\frac{\mu(t)g(t,x)}{g(t,\zeta)}\Big(v^1_{xx}(t,\zeta) - v^2_{xx}(t,\zeta)\Big).$$

Очевидно, что в (30) $F \equiv 0$, $F_{1,0} \equiv 0$, $F_{1,1} \equiv 0$,

$$F_{1,2} = -\frac{\mu(t)g(t,x)}{g(t,\zeta)}.$$

В силу условий на входные данные все функции $F_{k,s}$ являются гладкими и ограниченными для любых $v^1(t,x)$, $v^2(t,x)$.

Таким образом, условия 3, 4 теоремы единственности выполняются; следовательно $v(t,x) \equiv 0$ в $G_{[0,T]}$, а это означает, что $u^1(t,x) \equiv u^2(t,x)$, так что решение задачи (36), (37) единственно.

4. Непрерывная зависимость решения от входных данных. Рассмотрим в области $G_{[0,T]}$ задачу Коши для нагруженного уравнения

$$u_t(t,x) = \mu(t)u_{xx}(t,x) + u(t,x)G(t,x) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\frac{\partial^s}{\partial x^s}u(t,\alpha_k)G_{k,s}(t,x) + F(t,x), \tag{48}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in E_1, \tag{49}$$

где α_k, $k = \overline{1,r}$ — различные фиксированные точки в пространстве E_1 переменных x. Выберем и зафиксируем $p \geqslant \max\{p_1, 2\} \geqslant 2$.

Пусть $\mu(t)$, $G(t,x)$, $G_{k,s}(t,x)$, $k = \overline{1,r}$, $s = \overline{0,p_1}$, $F(t,x)$, $u_0(x)$ — действительнозначные функции, определенные в $[0,T]$, $G_{[0,T]}$, E_1 и удовлетворяющие соотношению

$$\big|\mu(t)\big| + \sum_{j=0}^{p+2}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}G(t,x)\right| + \sum_{j=0}^{p+2}\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}G_{k,s}(t,x)\right| + \sum_{j=0}^{p+2}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}F(t,x)\right| + \sum_{j=0}^{p+2}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u_0(x)\right| \leqslant C, \tag{50}$$

причем все производные, входящие в (50), непрерывны.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \|h_1(t,x)\|_1 &= \sum_{j=0}^{p+2}\sup_{0<\xi\leqslant T}\sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}h_1(\xi,x)\right|, && h_1(t,x) \in Z_x^{p+2}(G_{[0,T]}),\\ \|h_2(x)\|_2 &= \sum_{j=0}^{p}\sup_{0<\xi\leqslant T}\sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}h_1(\xi,x)\right|, && h_2(t,x) \in Z_x^{p}(G_{[0,T]}),\\ \|h_3(x)\|_3 &= \sum_{j=0}^{p+2}\sup_{x\in E_1}\left|\frac{d^j}{dx^j}h_3(x)\right|, && h_3(t,x) \in Z_x^{p+2}(G_{[0,T]}). \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} U_k^\tau(t) &= \sup_{n\tau<\xi\leqslant t}\sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(\xi,x)\right|, \quad n\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \quad k = 0,1,\dots,p+2,\\ U^\tau(t) &= \sum_{k=0}^{p+2}U_k^\tau(t). \end{aligned} \tag{52}$$

Воспользуемся методом слабой аппроксимации. Расщепим уравнение (48) на три дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\frac{\tau}{3}$ в членах содержащих следы неизвестных функций:

$$u_t^\tau(t,x) = 3\mu(t)u_{xx}^\tau(t,x), \qquad n\tau < t \leqslant \left(n+\frac{1}{3}\right)\tau, \tag{53}$$

$$u_t^\tau(t,x) = 3u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3},x\right)G(t,x), \qquad \left(n+\frac{1}{3}\right)\tau < t \leqslant \left(n+\frac{2}{3}\right)\tau, \tag{54}$$

$$u_t^\tau(t,x) = 3\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\frac{\partial^s}{\partial x^s}u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3},\alpha_k\right)G_{k,s}(t,x)+3F(t,x), \qquad \left(n+\frac{2}{3}\right)\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \tag{55}$$

$$u^\tau(0,x) = u_0^\tau(x); \tag{56}$$

здесь $n=0,\ldots,N-1$, $N\tau=T$.

Назовем n-м целым шагом полуинтервал $(n\tau,(n+1)\tau]$, а i-м дробным шагом n-ого целого шага — полуинтервал $\big((n+\frac{i-1}{3})\tau,(n+\frac{i}{3})\tau\big]$.

На нулевом целом шаге, $n=0$, на первом дробном шаге, $t\in(0,\tau/3]$, рассмотрим следующую начальную задачу:

$$u_t^\tau(t,x) = 3\mu(t)u_{xx}^\tau, \quad u^\tau(0,x) = u_0^\tau(x).$$

Согласно принципу максимума для уравнения получаем оценку

$$\big|u^\tau(\xi,x)\big| \leqslant \sup_{x\in E_1}\big|u_0(x)\big|, \quad 0<\xi\leqslant t, \quad 0<t\leqslant\frac{\tau}{3}. \tag{57}$$

Продифференцируем уравнение (53) и начальное условие (56) k раз по x, где $k=1,2,\ldots,p+2$:

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau\right)_t = 3\mu(t)\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}u_{xx}^\tau\right),$$
$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(0,x) = \frac{d^k}{dx^k}u_0(x).$$

Используя принцип максимума, получим следующую оценку:

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau\right| \leqslant \sup_{x\in E_1}\left|\frac{d^k}{dx^k}u_0(x)\right|. \tag{58}$$

Возьмем от обеих частей неравенств (57) и (58) $\sup\limits_{x\in E_1}$, а затем $\sup\limits_{0<\xi\leqslant t}$. Сложив полученные неравенства, с учетом обозначений (51) получим

$$U^\tau(t) \leqslant \|u_0(x)\|_3. \tag{59}$$

На втором дробном шаге $t\in(\tau/3,2\tau/3]$ рассмотрим задачу

$$u_t^\tau(t,x) = 3u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}\right)G(t,x), \quad u^\tau\left(\frac{\tau}{3},x\right) = u_0^\tau\left(\frac{\tau}{3},x\right).$$

Проинтегрировав уравнение по временной переменной, получим соотношение

$$u^\tau(\xi,x) = u^\tau\left(\frac{\tau}{3},x\right)+3\int\limits_{\tau/3}^{\xi}u^\tau\left(\theta-\frac{\tau}{3},x\right)G(\theta,x)d\theta, \quad 0<\xi\leqslant t, \quad t\in\left(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}\right],$$

откуда

$$\big|u^\tau(\xi,x)\big| \leqslant \left|u^\tau\left(\frac{\tau}{3},x\right)\right|+3\int\limits_{\tau/3}^{2\tau/3}\left|u^\tau\left(\theta-\frac{\tau}{3},x\right)\right|\big|G(\theta,x)\big|d\theta, \quad 0<\xi\leqslant t, \quad t\in\left(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}\right].$$

Используя обозначения (52), находим

$$\big|u^\tau(t,x)\big| \leqslant \left|u^\tau\left(\frac{\tau}{3},x\right)\right|+\widetilde{C}\left|U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)\right|\tau. \tag{60}$$

Продифференцируем уравнение (54) и начальное условие (56) k раз по x, где $k=1,2,\ldots,p+2$:

$$\left(\frac{\partial^k u^\tau}{\partial x^k}\right)_t = 3\sum_{i=0}^{k} C_n^i \left(\frac{\partial^{k-i} u^\tau}{\partial x^{k-i}}\right)\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} G(t,x)\right).$$

Интегрируя уравнение k раз по x, $k=1,\ldots,p+2$, получим

$$\left|\frac{\partial^k u^\tau(\xi,x)}{\partial x^k}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} u^\tau\left(\frac{\tau}{3},x\right)\right| + 3C_n^i \int\limits_{\tau/3}^{\xi} \left|\frac{\partial^{k-i}}{\partial x^{k-i}} u^\tau\left(\theta-\frac{\tau}{3},x\right)\right| \left|\frac{\partial^i}{\partial x^i} G(t,x)\right| d\theta,$$

$$0<\xi\leqslant t, \quad t\in\left(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}\right],$$

так что

$$\left|\frac{\partial^k u^\tau(\xi,x)}{\partial x^k}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} u^\tau\left(\frac{\tau}{3},x\right)\right| + \widetilde{C}\left|U_{k-i}^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)\right|\tau, \quad 0<\xi\leqslant t, \quad t\in\left(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}\right]. \tag{61}$$

Возьмем от обеих частей неравенств (60) и (61) $\sup\limits_{x\in E_1}$, а затем $\sup\limits_{0<\xi\leqslant t}$. Сложив полученные неравенства, с учетом (52) получим

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) + CU^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)\tau = U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)(C\tau+1). \tag{62}$$

Рассмотрим третий дробный шаг

$$u_t^\tau(t,x) = 3\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1} \frac{\partial^s}{\partial x^s} u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3},\alpha_k\right) G_{k,s}(t,x) + 3F(t,x), \quad \left(n+\frac{2}{3}\right)\tau < t \leqslant (n+1)\tau.$$

Проинтегрируем уравнение по временной переменной на $(2\tau/3,\tau]$:

$$u^\tau(\xi,x) = u^\tau\left(\frac{2\tau}{3},x\right) + 3\int\limits_{2\tau/3}^{\xi} \left(\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1} \frac{\partial^s}{\partial x^s} u^\tau\left(\theta-\frac{\tau}{3},\alpha_k\right) G_{k,s}(\theta,x) + 3F(\theta,x)\right) d\theta,$$

откуда

$$\left|u^\tau(\xi,x)\right| \leqslant \left|u^\tau\left(\frac{2\tau}{3},x\right)\right| + 3\int\limits_{2\tau/3}^{\tau} \left(\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}\left|u^\tau\left(\theta-\frac{\tau}{3},\alpha_k\right)\right| \left|G_{k,s}(t,x)\right| + \left|F(\theta,x)\right|\right) d\theta.$$

Используя свойства функции $U^\tau(t)$, находим

$$u^\tau(\xi,x) \leqslant \left|u^\tau\left(\frac{2\tau}{3},x\right)\right| + \widetilde{C}\left(\sum_{s=0}^{p_1} U_s^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) + \sup_{0<\xi\leqslant T}\sup_{x\in E_1}|F|\right)\tau.$$

С учетом обозначений (52) получим

$$u^\tau(\xi,x) \leqslant \left|u^\tau\left(\frac{2\tau}{3},x\right)\right| + \widetilde{C}\left(\sum_{s=0}^{p_1} U_s^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) + \|F(t,x)\|_1\right)\tau.$$

Дифференцируя уравнение k раз по x, $k=1,2,\ldots,p+2$, получим оценку

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} u^\tau(\xi,x)\right| \leqslant \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} u^\tau\left(\frac{2\tau}{3},x\right)\right| + \widetilde{C}\left(\sum_{s=0}^{p_1} U_s^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) + \sup_{0<\xi\leqslant T}\sup_{x\in E_1}\frac{\partial^k}{\partial x^k}|F|\right)\tau.$$

С учетом обозначений (52) получаем

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) + \widetilde{C}\left(\sum_{s=0}^{p} U_s^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) + \|F(t,x)\|_1\right)\tau. \tag{63}$$

Из неравенств (59), (62) и (63) с учетом обозначений (52)на нулевом целом временном шаге имеем

$$U^\tau(t) \leqslant \|u_0\|_3 + C\Big(\|u_0\|_3 + \|F(t,x)\|_1\Big)\tau, \quad 0 < t \leqslant \tau,$$

$$U^\tau(t) \leqslant \|u_0\|_3 + \|F(t,x)\|_1 - \|F(t,x)\|_1 + C\Big(\|u_0\|_3 + \|F(t,x)\|_1\Big)\tau \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\|u_0\|_3 + \|F(t,x)\|_1\Big)\Big(\|F(t,x)\|_1 + C\tau\Big) - \|F(t,x)\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\|u_0\|_3 + \|F(t,x)\|_1\Big)e^{C\tau} - \|F(t,x)\|_1.$$

На первом целом временном шаге, рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$U^\tau(t) \leqslant \Big(\|u^\tau(t,x)\|_2 + \|F(t,x)\|_1)e^{C\tau} \leqslant \Big(\|u_0(x)\|_3 + \|F(t,x)\|_1\Big)e^{2C\tau} - \|F(t,x)\|_1.$$

Через конечное число шагов получим

$$U^\tau(t) \leqslant \Big(\|u_0(x)\|_3 + \|F(t,x)\|_1\Big)e^{NC\tau} - \|F(t,x)\|_1 =$$
$$= \Big(\|u_0(x)\|_3 + \|F(t,x)\|_1\Big)e^{CT} - \|F(t,x)\|_1.$$

На отрезке $[0,T]$ справедливо неравенство

$$U^\tau(t) \leqslant \Big(\|u_0(x)\|_3 + \|F(t,x)\|_1\Big)e^{CT} - \|F(t,x)\|_1.$$

Используя данную оценку, несложно доказать, что некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x)$ последовательности $u^\tau(t,x)$ решений задачи сходится вместе с производными по x до порядка p к функции $u(t,x)$,которая в силу теоремы сходимости метода слабой аппроксимации является решением задачи. Принимая во внимание (51), заключаем, что верно неравенство

$$\|u(t,x)\|_2 \leqslant \Big(\|u_0(x)\|_3 + \|F(t,x)\|_1\Big)e^{CT} - \|F(t,x)\|_1.$$

Теорема 3 (о непрерывной зависимости решения от входных данных)**.** *Пусть выполнено условие* (50)*, где* $p \geqslant \max\{p_1, 2\} \geqslant 2$*. Тогда существует по крайней мере одно решение, принадлежащее классу* $Z_x^p(G_{[0,T]})$*, для которого справедлива оценка*

$$\|u(t,x)\|_2 \leqslant \Big(\|u_0(x)\|_3 + \|F(t,x)\|_1\Big)e^{CT} - \|F(t,x)\|_1.$$

Рассмотрим теперь два набора входных данных $\mu(t)$, $f^i\big(t,x,u(t,x),\overline{\omega}(t)\big)$, $u_0^i(x)$, $i=1,2$, удовлетворяющих условиям теоремы существования решения для $p+2$. Тогда согласно теореме для каждого набора входных данных существует решение $u^i(t,x) \in Z_x^q(G_{[0,t^*]})$, причем

$$u_t^i = \mu(t)u_{xx}^i + f^i\big(t,x,u^i(t,x),\overline{\omega}_{u^i}(t)\big), \quad u^i(0,x) = u_0^i(x), \quad i=1,2. \tag{64}$$

Для разности $u(t,x) = u^1(t,x) - u^2(t,x)$ получим следующую задачу:

$$u_t = \mu(t)u_{xx} + f^1\big(t,x,u^1(t,x),\overline{\omega}_{u^1}^1(t)\big) - f^2\big(t,x,u^2(t,x),\overline{\omega}_{u^2}^2(t)\big),$$
$$u(0,x) = u_0^1(x) - u_0^2(x) = u_0(x).$$

Имеем:

$$u_t = \mu(t)u_{xx} + f^1\big(t,x,u^1(t,x),\overline{\omega}_{u^1}^1(t)\big) - f^1\big(t,x,u^2(t,x),\overline{\omega}_{u^2}^2(t)\big) +$$
$$+ f^1\big(t,x,u^2(t,x),\overline{\omega}_{u^2}^2(t)\big) - f^2\big(t,x,u^2(t,x),\overline{\omega}_{u^2}^2(t)\big).$$

Возьмем произвольную функцию $v(t,x) \in Z_x^{p+2}(G_{[0,T]})$ и введем обозначение

$$f^1\big(t,x,v,\overline{\omega}_v(t)\big) - f^2\big(t,x,v,\overline{\omega}_v(t)\big) = F\big(t,x,v,\overline{\omega}_v(t)\big).$$

Условие 5. Предположим, что функция f в правой части исходного уравнения такова, что для всех $t_1 \in (0, t^*]$, всех $v^1(t,x)$, $v^2(t,x) \in Z_x^p(G_{[0,t_1]})$ и всех $(t,x) \in G_{[0,t_1]}$ выполняется соотношение

$$f\big(t,x,v^1(t,x),\overline{\omega}_{v^1}\big) - f\big(t,x,v^2(t,x),\overline{\omega}_{v^2}\big) = \\ = (v^1 - v^2)\cdot G\Big(t,x,v^1(t,x),v^2(t,x),\overline{\omega}_{v^1}(t),\overline{\omega}_{v^2}(t)\Big) + \\ + \sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\left(\frac{\partial^s}{\partial x^s}v^1(t,\alpha_k) - \frac{\partial^s}{\partial x^s}v^2(t,\alpha_k)\right) G_{k,s}\Big(t,x,v^1(t,x),v^2(t,x),\overline{\omega}_{v^1}(t),\overline{\omega}_{v^2}(t)\Big). \quad (65)$$

Условие 6. Предположим, что известные функции G, $G_{k,s}$, $k = \overline{1,r}$, $s = \overline{0,p_1}$, являются достаточно гладкими и удовлетворяют соотношению

$$\Big|G\Big(t,x,v^1(t,x),v^2(t,x),\overline{\omega}_{v^1}(t),\overline{\omega}_{v^2}(t)\Big)\Big| + \\ + \sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\Big|G_{k,s}\Big(t,x,v^1(t,x),v^2(t,x),\overline{\omega}_{v^1}(t),\overline{\omega}_{v^2}(t)\Big)\Big| \leqslant C \quad \forall (t,x) \in G_{[0,t_1]}. \quad (66)$$

Очевидно, здесь константа C зависит от констант ограничивающих функций $v^1(t,x)$ и $v^2(t,x)$ и их производных соответствующего порядка.

Пусть взятые выше функции f_i удовлетворяют этим условиям. С учетом условия 5 получим

$$u_t = \mu(t)u_{xx} + uG\Big(t,x,u^1(t,x),u^2(t,x),\overline{\omega}^1_{u^1}(t),\overline{\omega}^2_{u^2}(t)\Big) + \\ + \sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\frac{\partial^s}{\partial x^s}u(t,\alpha_k)G_{k,s}\Big(t,x,u^1(t,x),u^2(t,x),\overline{\omega}^1_{u^1}(t),\overline{\omega}^2_{u^2}(t)\Big) + \\ + F\Big(t,x,u^2(t,x),\overline{\omega}^2_{u^2}(t)\Big), \quad (67)$$

$$u(0,x) = u_0(x). \quad (68)$$

Применив к задаче (67), (68) теорему о непрерывной зависимости решения от входных данных, получим

$$\|u(t,x)\|_2 \leqslant \Big(\|u_0(x)\|_3 + \Big\|F\Big(t,x,u^2(t,x),\overline{\omega}^2_{u^2}(t)\Big)\Big\|_1\Big)e^{CT} - \Big\|F\Big(t,x,u^2(t,x),\overline{\omega}^2_{u^2}(t)\Big)\Big\|_1.$$

Пример 4. Рассмотрим для задачи (13), (14) два набора входных данных $\mu(t)$, $g^i(t,x)$, $u^i_0(x)$. Тогда

$$u^i_t(t,x) = \mu(t)u^i_{xx}(t,x) + \lambda^i(t)g^i(t,x), \quad (69)$$

$$u^i(0,x) = u^i_0(x), \quad i = 1,2, \quad -\infty < x < \infty. \quad (70)$$

Полагаем, что действительнозначные функции $\mu(t) > 0$, $u^i_0(x)$, $g^i(t,x)$ определены и непрерывны в $G_{[0,T]}$ и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=0}^{4}\left\{\left|\frac{d^k u^i_0(x)}{dx^k}\right| + \left|\frac{\partial^k g^i(t,x)}{\partial x^k}\right|\right\} \leqslant \widehat{C}_1, \quad (71)$$

причем все входящие в (71) производные непрерывны. Пусть также выполняется условие

$$\big|g^2(t,\zeta)\big| \geqslant \delta > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (72)$$

Функции λ^1 и λ^2 подлежат определению одновременно с решением $u^1(t,x)$ и $u^2(t,x)$ задачи (69), (69), удовлетворяющей условиям переопределения

$$u^i(t,\zeta) = \psi^i(t), \quad i = 1,2, \quad \psi(t) \in C^1[0,t], \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad (73)$$

где $\zeta \in E_1$ — некоторая фиксированная постоянная.

Пусть

$$v(t,x) = u^1(t,x) - u^2(t,x), \quad \lambda = \lambda^1 - \lambda^2, \quad v_0(x) = u_0^1(x) - u_0^2(x), \quad \psi(t) = \psi^1(t) - \psi^2(t).$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим следующую задачу для $v(t,x)$, $\lambda^1(t)$, $\lambda^2(t)$:

$$v_t(t,x) = \mu(t)v_{xx}(t,x) + \lambda^1(t)g^1(t,x) - \lambda^2(t)g^2(t,x), \tag{74}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \tag{75}$$

с соответствующим условием переопределения

$$v(t,\zeta) = \psi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{76}$$

Преобразуем уравнение (74):

$$v_t(t,x) = \mu(t)v_{xx}(t,x) + \lambda^1(t)g^1(t,x) - \lambda^2(t)g^2(t,x) - \lambda^1(t)g^2(t,x) + \lambda^1(t)g^2(t,x),$$

$$v_t(t,x) = \mu(t)v_{xx}(t,x) + \lambda(t)g^2(t,x) + \lambda^1(t)\big(g^1(t,x) - g^2(t,x)\big).$$

Приведем задачу (74), (75) к вспомогательной прямой задаче. При $x = \zeta$, используя (76), получим

$$\lambda(t) = \frac{\psi'(t) - \mu(t)v_{xx}(t,\zeta) - \lambda^1(t)(g^1(t,\zeta) - g^2(t,\zeta))}{g^2(t,\zeta)}. \tag{77}$$

Знаменатель выражения не обращается в нуль в силу условия (72).

Подставив $\lambda(t)$ в уравнение (74), находим

$$v_t(t,x) = \mu(t)v_{xx}(t,x) + \lambda^1(t)\big(g^1(t,x) - g^2(t,x)\big) + \\ + \frac{\psi'(t) - \mu(t)v_{xx}(t,\zeta) - \lambda^1(t)\big(g^1(t,\zeta) - g^2(t,\zeta)\big)}{g^2(t,\zeta)} g^2(t,x),$$

$$v_t(t,x) = \mu(t)v_{xx}(t,x) + \frac{-\mu(t)g^2(t,x)}{g^2(t,\zeta)} v_{xx}(t,\zeta) + \\ + \lambda^1(t)\big(g^1(t,x) - g^2(t,x)\big) + \frac{\psi'(t)g^2(t,x)}{g^2(t,\zeta)} + \frac{-\lambda^1(t)\big(g^1(t,\zeta) - g^2(t,\zeta)\big)g^2(t,x)}{g^2(t,\zeta)}.$$

Все коэффициенты в этом уравнении являются известными достаточно гладкими ограниченными функциями. При этом уравнение, очевидно, имеет вид (48).

После преобразований несложно получить следующую оценку:

$$\sum_{k=0}^{2} \sup_{(t,x)\in G_{[0,T]}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k}\big(u^1(t,x) - u^2(t,x)\big)\right| \leqslant \hat{C}\left(\sum_{k=0}^{4} \sup_{x\in E_1} \left| \frac{d^k}{dx^k}\big(u_0^1(x) - u_0^2(x)\big)\right| + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{4} \sup_{(t,x)\in G_{[0,T]}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k}\big(g^1(t,x) - g^2(t,x)\big)\right| + \sum_{k=0}^{1} \sup_{t\in[0,T]} \left| \frac{d^k}{dt^k}(\psi^1(t) - \psi^2(t))\right| \right),$$

из которой, очевидно, следует непрерывная зависимость решения от входных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белов Ю. Я., Кантор С. А.* Метод слабой аппроксимации. — Красноярск, 1999.
2. *Белов Ю. Я., Фроленков И. В. и др.* Неклассические и обратные краевые задачи/ Учебное пособие. — Красноярск: Сиб. фед. ун-т, 2007.
3. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 6. — С. 961–972.
4. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
5. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применения. — М.: Наука, 2012.
6. *Понтрягин, Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.
7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
8. *Фроленков И. В.* Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Красноярск, 2007.

9. *Фроленков И. В., Белов Ю. Я.* О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши// в сб.: Неклассические уравнения математической физики. — Новосибирск: Ин-т мат., 2012. — С. 262–279.
10. *Frolenkov I. V., Darzhaa M. A.* On the existence of some problems for nonlinear loaded parabolic equations with Cauchy data// Ж. Сиб. ун-та. Сер. мат. физ. — 2014. — 7, № 2. — С. 173–185.

И. В. Фроленков
Институт математики и фундаментальной информатики,
Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: igor@frolenkov.ru

М. А. Яровая
Институт математики и фундаментальной информатики,
Сибирский федеральный университет, Красноярск

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 156 (2018). С. 73–83

УДК 517.968

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

© 2018 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ, К. Х. ШАБАДИКОВ**

Аннотация. Рассматриваются вопросы однозначной обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейного псевдопараболического уравнения высокого порядка с двумя параметрами при смешанных производных. С помощью метода Фурье разделения переменных задача сводится к счетной системе нелинейных интегральных уравнений, однозначная разрешимость которой доказывается методом последовательных приближений. Доказана непрерывная зависимость обобщенного решения рассматриваемой смешанной задачи по начальной функции и по положительным параметрам.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, обобщенная производная, метод последовательных приближений, параметр, однозначная разрешимость.

AMS Subject Classification: 35A02, 35M10, 35S05

1. Постановка задачи. Задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, которые по одной переменной являются начальными, а по другим переменным — граничными, часто называются смешанными. Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений (см. [1]). Смешанными задачами также являются многие задачи концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок. Много смешанных задач и в гидродинамике. Представляют интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков (см. [2, 3]), к которым приводит, например, изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек. Дифференциальные и интегродифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка рассматривались в работах многих авторов (см., например, [6–14]).

В настоящей работе рассматриваются вопросы обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейного псевдопараболического дифференциального уравнения высокого порядка с двумя параметрами при смешанных производных.

В прямоугольной области D рассматривается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U(t,x)+(-1)^n\nu\frac{\partial^{2n}U(t,x)}{\partial x^{2n}}+\mu\frac{\partial^{4n}U(t,x)}{\partial x^{4n}}\right)+\frac{\partial^{4n}U(t,x)}{\partial x^{4n}}=f\big(t,x,U(t,x)\big) \tag{1}$$

с начальным условием

$$U(t,x)\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \varphi(x)\in C^{4n+1}(D_l) \tag{2}$$

и граничными условиями Бенара

$$U(t,x)\big|_{x=0}=U_{xx}(t,x)\big|_{x=0}=\ldots=\frac{\partial^{4n-2}}{\partial x^{4n-2}}U(t,x)\big|_{x=0}= \\ =U(t,x)\big|_{x=l}=U_{xx}(t,x)\big|_{x=l}=\ldots=\frac{\partial^{4n-2}}{\partial x^{4n-2}}U(t,x)\big|_{x=l}=0, \tag{3}$$

где

$$f(t,x,U)\in C(D\times\mathbb{R}),$$

$$\varphi(x)\big|_{x=0}=\varphi''(x)\big|_{x=0}=\ldots=\varphi^{(4n-2)}(x)\big|_{x=0}=\varphi(x)\big|_{x=l}=\varphi''(x)\big|_{x=l}=\ldots=\varphi^{(4n-2)}(x)\big|_{x=l}=0,$$
$$D\equiv D_T\times D_l,\quad D_T\equiv[0;T],\quad D_l\equiv[0;l],\quad 0<T<\infty,\quad 0<l<\infty,$$

ν, μ — положительные параметры, n — заданное натуральное число.

В данной работе воспользуемся методом Фурье разделения переменных, основанным на поиске решения смешанной задачи (1)–(3) в виде

$$U(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(t)\vartheta_i(x), \tag{4}$$

где $\vartheta_i(x)=\sqrt{2/l}\sin\lambda_i x$ — собственные функции спектральной задачи

$$\vartheta''(x)+\lambda^2\vartheta(x)=0,\quad \vartheta(0)=\vartheta(l)=0,\quad 0<\lambda,$$

образующие полную ортонормированную систему функций в $L_2(D_l)$, а $\lambda_i=i\pi/l$ — соответствующие собственные значения.

В дальнейшем воспользуемся следующими известными банаховыми пространствами:

(i) пространство $B_2(T)$ последовательностей непрерывных функций $\{u_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ на отрезке D_T с нормой

$$\|u(t)\|_{B_2(T)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\max_{t\in D_T}|u_i(t)|\Big)^2}<\infty;$$

(ii) координатное гильбертово пространство ℓ_2 числовых последовательностей $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с нормой

$$\|\varphi\|_{\ell_2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i|^2}<\infty;$$

(iii) пространство $L_2(D_l)$ суммируемых с квадратом функций на отрезке D_l с нормой

$$\|\vartheta(x)\|_{L_2(D_l)}=\sqrt{\int_0^l|\vartheta(y)|^2dy}<\infty.$$

Следуя [4, 5], определим обобщенное решение смешанной задачи (1)–(3). Обозначим через $\hat{W}_2^1(D)$ класс функций $U(t,x)$ двух переменных, непрерывных в замкнутом прямоугольнике D и имеющих в нем частные производные

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{4n-1}U(t,x)}{\partial x^{4n-1}},\quad \frac{\partial U(t,x)}{\partial t},$$

каждая из которых принадлежат не только классу $L_2(D)$, но и классу $L_2(D_l)$ при фиксированном $t\in D_T$ и классу $L_2(D_T)$ при фиксированном $x\in D_l$, где

$$L_2(D)=\left\{U(t,x):\sqrt{\int_0^T\int_0^l|U(t,y)|^2\,dy\,dt}<\infty\right\}.$$

2. Счетная система нелинейных интегральных уравнений.

Определение. Функция $U(t,x)\in \hat{W}_2^1(D)$ называется *обобщенным решением* смешанной задачи (1)–(3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l \left\{U(t,y)\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y)+(-1)^n\nu\frac{\partial^{2n+1}}{\partial t\partial y^{2n}}\Phi(t,y)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\mu\frac{\partial^{4n+1}}{\partial t\partial y^{4n}}\Phi(t,y)+\frac{\partial^{4n}}{\partial y^{4n}}\Phi(t,y)\right]-f\Phi\right\}dy\,dt=$$
$$=\int_0^l \varphi(y)\left[\Phi(t,y)+(-1)^n\nu\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}\Phi(t,y)+\mu\frac{\partial^{4n}}{\partial y^{4n}}\Phi(t,y)\right]_{t=0}dy$$

для любой функции $\Phi(t,x)\in C^{1,4n}(D)$, подчиненной следующим условиям:

$$\Phi(t,x)\big|_{x=0}=\Phi_{xx}(t,x)\big|_{x=0}=\ldots=\frac{\partial^{2(2n-1)}}{\partial x^{2(2n-1)}}\Phi(t,x)\big|_{x=0}=$$
$$=\Phi(t,x)\big|_{x=l}=U_{xx}(t,x)\big|_{x=l}=\ldots=\frac{\partial^{2(2n-1)}}{\partial x^{2(2n-1)}}\Phi(t,x)\big|_{x=l}=0,$$

$$\lim_{t\to T}\int_0^l \Phi(t,y)dy=\lim_{t\to T}\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y)dy=0,$$

где $f\Phi=f\big(t,x,U(t,x)\big)\Phi(t,x)$.

Покажем, что коэффициенты Фурье $u_i(t)$ решения смешанной задачи (1)–(3) удовлетворяют следующей счетной системе нелинейных интегральных уравнений:

$$u_i(t,\nu,\mu)=\varphi_i\exp\big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)t\big\}+$$
$$+\frac{1}{\omega_{0i}(\nu,\mu)}\int_0^t\int_0^l \exp\big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)(t-s)\big\}f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(s,\nu,\mu)\vartheta_j(y)\right)\vartheta_i(y)\,dy\,ds, \quad (5)$$

где

$$\omega_{0i}(\nu,\mu)=1+\nu\lambda_i^{2n}+\mu\lambda_i^{4n}, \quad \omega_{1i}(\nu,\mu)=\frac{\lambda_i^{4n}}{\omega_{0i}(\nu,\mu)}.$$

Действительно, в интегральном тождестве учтем разложение (4). Положим $\Phi(t,x)=h(t)\vartheta_i(x)\in$ $\in C^{1,4n}(D)$, где функции $\vartheta_i(x)$ образуют полную ортонормированную систему функций в $L_2(D_l)$. Тогда из определения обобщенного решения смешанной задачи (1)–(3) путем интегрирования по частям получаем

$$\int_0^T h(t)\left[\Big(1+\nu\lambda_i^{2n}+\mu\lambda_i^{4n}\Big)u_i'(t)+\lambda_i^{4n}u_i(t)-\int_0^l f\left(t,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)\vartheta_j(y)\right)\vartheta_i(y)\,dy\right]dt=0. \quad (6)$$

Так как функции $u_i(t)$ имеют обобщенные производные первого порядка по t в смысле Соболева на отрезке D_T и $h(t)\neq 0$ для всех $t\in D_T$, то из (6) следует

$$\omega_{0i}(\nu,\mu)u_i'(t)+\lambda_i^{4n}u_i(t)=\int_0^l f\left(t,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)\vartheta_j(y)\right)\vartheta_i(y)\,dy, \quad (7)$$

где $\omega_{0i}(\nu,\mu)=1+\nu\lambda_i^{2n}+\mu\lambda_i^{4n}$. Решая счетную систему (7) методом вариации произвольных постоянных и используя условие $u_i(0)=\varphi_i$, придем к системе (5), где

$$\varphi_i=\int\limits_0^l \varphi(y)\vartheta_j(y)\,dy. \tag{8}$$

3. Однозначная разрешимость системы (5)**.** Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$u_i^0(t,\nu,\mu)=\varphi_i\exp\big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)t\big\},\quad t\in D_T,$$

$$u_i^{k+1}(t,\nu,\mu)=u_i^0(t,\nu,\mu)+\frac{1}{\omega_{0i}(\nu,\mu)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l \exp\big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)(t-s)\big\}\times$$
$$\times f\left(s,y,\sum_{j=1}^\infty u_j^k(s,\nu,\mu)\vartheta_j(y)\right)\vartheta_i(y)\,dy\,ds,\quad k=0,1,\ldots,\quad t\in D_T. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

$$(1)\quad \max_{t\in D_T}\int\limits_0^t\left\|f\left(s,x,\sum_{j=1}^\infty u_j^0(s,\nu,\mu)\vartheta_j(x)\right)\right\|_{L_2(D_l)}ds\leqslant\Delta,\quad 0<\Delta=\mathrm{const}<\infty;$$

$$(2)\quad \big|f(t,x,u)-f(s,x,a)\big|\leqslant H(t,x)|u-a|,\quad \max_{t\in D_T}\int\limits_0^t\big\|H(s,x)\big\|_{L_2(D_l)}ds<\infty.$$

Тогда система (5) *имеет единственное решение в пространстве* $B_2(T)$*.*

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. Применяя неравенства Гельдера и Бесселя, в силу первого условия теоремы из (9) получаем оценку

$$\Big\|u^1(t,\nu,\mu)-u^0(t,\nu,\mu)\Big\|_{B_2(t)}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^\infty\frac{1}{\omega_{0i}(\nu,\mu)}\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^l\exp\big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)(t-s)\big\}f\left(s,y,\sum_{j=1}^\infty u_j^0(s,\nu,\mu)\vartheta_j(y)\right)\vartheta_i(y)\,dy\,ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant M_1\int\limits_0^t\sqrt{\sum_{i=1}^\infty\left[\int\limits_0^l\left|f\left(s,y,\sum_{j=1}^\infty u_j^0(s,\nu,\mu)\vartheta_j(y)\right)\vartheta_i(y)\right|dy\right]^2}\,ds\leqslant$$
$$\leqslant M_1\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t\left\|f\left(s,x,\sum_{j=1}^\infty u_j^0(s,\nu,\mu)\vartheta_j(x)\right)\right\|_{L_2(D_l)}ds\leqslant M_1\Delta, \tag{10}$$

где

$$M_1=\left\|\frac{1}{\omega_{0i}(\nu,\mu)}\right\|,\quad \Big\|u^1(t,\nu,\mu)-u^0(t,\nu,\mu)\Big\|_{B_2(t)}=\sqrt{\sum_{i=1}^\infty\Big|u_i^1(t,\nu,\mu)-u_i^0(t,\nu,\mu)\Big|^2}.$$

Для второй разности, в силу второго условия теоремы и оценки (10), из (9) с помощью неравенств Гельдера и Бесселя получаем

$$\Big\|u^2(t,\nu,\mu)-u^1(t,\nu,\mu)\Big\|_{B_2(t)}\leqslant$$
$$\leqslant M_1\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t\left\|f\left(s,x,\sum_{j=1}^{\infty}u_j^1(s,\nu,\mu)\vartheta_j(x)\right)-f\left(s,x,\sum_{j=1}^{\infty}u_j^0(s,\nu,\mu)\vartheta_j(x)\right)\right\|_{L_2(D_l)}ds\leqslant$$
$$\leqslant M_1\int\limits_0^t\int\limits_0^l H(s,y)\sum_{j=1}^{\infty}\Big|u_j^1(s,\nu,\mu)-u_j^1(s,\nu,\mu)\Big|\cdot\big|\vartheta_j(y)\big|\,dy\,ds\leqslant$$
$$\leqslant M_1\int\limits_0^t\big\|H(s,x)\big\|_{L_2D_l}\Big\|u^1(s,\nu,\mu)-u^0(s,\nu,\mu)\Big\|_{B_2(t)}ds\leqslant M_1^2\Delta\int\limits_0^t\big\|H(s,x)\big\|_{L_2(D_l)}ds.$$

Аналогично для третьей разности получаем

$$\Big\|u^3(t,\nu,\mu)-u^2(t,\nu,\mu)\Big\|_{B_2(t)}\leqslant$$
$$\leqslant M_1\int\limits_0^t\big\|H(s,x)\big\|_{L_2(D_l)}\Big\|u^2(s,\nu,\mu)-u^1(s,\nu,\mu)\Big\|_{B_2(t)}ds\leqslant$$
$$\leqslant M_1^3\Delta\int\limits_0^t\big\|H(s,x)\big\|_{L_2(D_l)}\int\limits_0^s\big\|H(\theta,x)\big\|_{L_2(D_l)}d\theta\,ds=$$
$$=\frac{M_1^3\Delta}{2!}\left[\int\limits_0^t\big\|H(s,x)\big\|_{L_2(D_l)}ds\right]^2.$$

Продолжая этот процесс, по индукции получаем оценку

$$\Big\|u^{k+1}(t,\nu,\mu)-u^k(t,\nu,\mu)\Big\|_{B_2(T)}\leqslant\frac{M_1^{k+1}\Delta}{k!}\left[\int\limits_0^t\big\|H(s,x)\big\|_{L_2(D_l)}ds\right]^k. \tag{11}$$

Существование решения системы (5) следует из справедливости оценок (10) и (11), так как при $k\to\infty$ последовательность функций $\big\{u^k(t,\nu,\mu)\big\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно по t к функции $u(t,\nu,\mu)\in B_2(T)$. Покажем единственность этого решения в пространстве $B_2(T)$. Предположим, что система (5) имеет два решения $u(t,\nu,\mu)\in B_2(T)$ и $a(t,\nu,\mu)\in B_2(T)$. Тогда для их разности справедлива оценка

$$\Big\|u(t,\nu,\mu)-a(t,\nu,\mu)\Big\|_{B_2(t)}\leqslant M_1\int\limits_0^t\big\|H(s,x)\big\|_{L_2(D_l)}\Big\|u(s,\nu,\mu)-a(s,\nu,\mu)\Big\|_{B_2(t)}ds. \tag{12}$$

Применяя к (12) неравенство Гронуолла—Беллмана, получаем, что $\big\|u(t,\nu,\mu)-a(t,\nu,\mu)\big\|_{B_2(T)}\equiv 0$ для всех $t\in D_T$. Отсюда следует единственность решения системы (5) в пространстве $B_2(T)$. $\square$

4. Разрешимость смешанной задачи (1)–(3)**.** Подстановка решения системы (5) в ряд Фурье (4) дает формальное решение смешанной задачи (1)–(3)

$$U(t,x,\nu,\mu)=\sum_{i=1}^{\infty}\vartheta_i(x)\Bigg[\varphi_i\exp\big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)t\big\}+$$
$$+\frac{1}{\omega_{0i}(\nu,\mu)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\exp\big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)(t-s)\big\}f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(s,\nu,\mu)\vartheta_j(y)\right)\vartheta_i(y)\,dy\,ds\Bigg]. \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Если функция* $u(t,\nu,\mu)\in B_2(T)$ *является единственным решением счетной системы нелинейных интегральных уравнений* (5), *то ряд* (13) *является обобщенным решением смешанной задачи* (1)–(3).

Доказательство. Так как $u(t,\nu,\mu)\in B_2(T)$, то из равенства

$$\lim_{k\to\infty} U^k(t,x,\nu,\mu)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} u^k(t,\nu,\mu)\vartheta_i(x)=\sum_{i=1}^{\infty} u(t,\nu,\mu)\vartheta_i(x)=U(t,x,\nu,\mu)$$

в силу условий теоремы следует, что

$$\lim_{k\to\infty} f\Big(t,x,U^k(t,x,\nu,\mu)\Big)=f\Big(t,x,U(t,x,\nu,\mu)\Big) \tag{14}$$

в смысле метрики $L_2(D)$. Построим последовательность функционалов

$$V_k=\int_0^T\int_0^l\bigg\{U^k(t,y,\nu,\mu)\bigg[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y)+(-1)^n\nu\frac{\partial^{2n+1}}{\partial t\partial y^{2n}}\Phi(t,y)+\mu\frac{\partial^{4n+1}}{\partial t\partial y^{4n}}\Phi(t,y)+\frac{\partial^{4n}}{\partial y^{4n}}\Phi(t,y)\bigg]-$$
$$-f\Big(t,x,U^k(t,x,\nu,\mu)\Big)\Phi(t,x)\bigg\}\,dy\,dt-$$
$$-\int_0^l\varphi^k(y)\bigg[\Phi(t,y)+(-1)^n\nu\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}\Phi(t,y)+\mu\frac{\partial^{4n}}{\partial y^{4n}}\Phi(t,y)\bigg]_{t=0}\,dy. \tag{15}$$

Интегрируя по частям отдельные слагаемые в (15) и учитывая условия теоремы и начальное условие $u_i(0,\nu,\mu)=\varphi_i$, получаем:

$$V_k=\int_0^l\bigg(\varphi(y)-\sum_{i=1}^{k}\varphi_i\vartheta_i(y)\bigg)\bigg[\Phi(t,y)+(-1)^n\nu\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}\Phi(t,y)+\mu\frac{\partial^{4n}}{\partial y^{4n}}\Phi(t,y)\bigg]_{t=0}\,dy-$$
$$-\int_0^T\int_0^l\Phi(t,x)\vartheta_i(y)\bigg[f\Big(t,y,U(t,y,\nu,\mu)\Big)-\sum_{i=1}^{k}\int_0^l f\Big(t,z,U(t,z,\nu,\mu)\Big)\vartheta_i(z)\,dz\bigg]\,dy\,dt. \tag{16}$$

Очевидно, что первый интеграл в (16) стремится к нулю при $k\to\infty$, так как $\varphi(x)\in L_2(D_l)$. Сходимость последней разности в (16) при $k\to\infty$ следует из (14). Отсюда заключаем, что $\lim\limits_{k\to\infty}V_k=0$. Это и доказывает теорему. □

5. Непрерывная зависимость решения смешанной задачи от начальной функции. Ряд (13) запишем в виде интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$U(t,x,\nu,\mu)=U_0(t,x,\nu,\mu)+\int_0^t\int_0^l K\big(t,s,x,y,\nu,\mu\big)f\big(s,y,U(s,y,\nu,\mu)\big)\,dy\,ds, \tag{17}$$

где

$$U_0(t,x,\nu,\mu)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\exp\big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)t\big\}\vartheta_i(x),$$
$$K(t,s,x,y,\nu,\mu)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_{0i}(\nu,\mu)}\exp\big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)(t-s)\big\}\vartheta_i(y)\vartheta_i(x).$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Если* $u(t,\nu,\mu)\in B_2(T)$ *является единственным решением системы* (5), *то решение смешанной задачи* (1)–(3) *непрерывно зависит от начальной функции* $\varphi(x)$.

Доказательство. Пусть $U_1(t,x,\nu,\mu)$ и $U_2(t,x,\nu,\mu)$ — два различных решения смешанной задачи (1)–(3), соответствующие двум различным значениям функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ соответственно. Предположим, что

$$\left\|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right\|_{C(D_l)}<\delta, \quad 0<\delta=\mathrm{const}\,.$$

Тогда получаем

$$\left\|U_{01}(t,x,\nu,\mu)-U_{02}(t,x,\nu,\mu)\right\|_{C(D_l)}\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\bigl(\varphi_{1i}-\varphi_{2i}\bigr)\exp\bigl\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)t\bigr\}\vartheta_i(x)\right\|_{C(D_l)}=$$
$$=\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\bigl(\varphi_{1i}\vartheta_i(x)-\varphi_{2i}\vartheta_i(x)\bigr)\exp\bigl\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)t\bigr\}\right\|_{C(D_l)}\leqslant\left\|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right\|_{C(D_l)}<\delta. \quad (18)$$

При помощи неравенства Гельдера получаем

$$\bigl|K(t,s,x,y,\nu,\mu)\bigr|\leqslant\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\omega_{0i}(\nu,\mu)}\right|\Bigl|\exp\bigl\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)(t-s)\bigr\}\Bigr|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{l}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\omega_{0i}(\nu,\mu)}\right|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\Bigl|\exp\bigl\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)(t-s)\bigr\}\Bigr|^2}\leqslant\frac{2}{l}M_1M_2,$$

где

$$M_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\max_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}\Bigl|\exp\bigl\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)(t-s)\bigr\}\Bigr|^2}.$$

Тогда с учетом (18) имеем

$$\left\|U_1(t,x,\nu,\mu)-U_2(t,x,\nu,\mu)\right\|_{C(D_l)}<$$
$$<\delta+\frac{2}{l}M_1M_2\int_0^t\int_0^l H(s,y)\left\|U_1(s,y,\nu,\mu)-U_2(s,y,\nu,\mu)\right\|_{C(D_l)}dy\,ds. \quad (19)$$

Применяя к (19) неравенство Гронуолла—Беллмана, находим

$$\left\|U_1(t,x,\nu,\mu)-U_2(t,x,\nu,\mu)\right\|_{C(D_l)}<\varepsilon,$$

если положить

$$\varepsilon=\delta\cdot\exp\left\{\frac{2}{l}M_1M_2\max_{t\in D_T}\int_0^t\int_0^l H(s,y)\,dy\,ds\right\}.$$

Это и доказывает теорему. □

6. Непрерывная зависимость решения смешанной задачи от параметров. Изучим непрерывную зависимость решения смешанной задачи (1)–(3) по первому параметру ν.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если* $u(t,\nu,\mu)\in B_2(T)$ — *единственное решение системы* (5), *то при произвольных* $\nu_1,\nu_2\in[0;\nu]$ *справедлива оценка*

$$\Bigl|U(t,x,\nu_1,\mu)-U(t,x,\nu_2,\mu)\Bigr|\leqslant A\bigl|\nu_1-\nu_2\bigr|, \quad 0<A=\mathrm{const}\,. \quad (20)$$

Доказательство. Для разности $U(t,x,\nu_1,\mu)-U(t,x,\nu_2,\mu)$ из формулы (13) получаем оценку

$$\Bigl|U(t,x,\nu_1,\mu)-U(t,x,\nu_2,\mu)\Bigr|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\Bigl|u(t,\nu_1,\mu)-u(t,\nu_2,\mu)\Bigr|\cdot\bigl|\vartheta_i(x)\bigr|\leqslant\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{i=1}^{\infty}\Bigl|u(t,\nu_1,\mu)-u(t,\nu_2,\mu)\Bigr|\leqslant$$

$$
\begin{gathered}
\leqslant \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i| \cdot \Big| \exp\big\{-\omega_{1i}(\nu_1,\mu)t\big\} - \exp\big\{-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)t\big\}\Big| + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\omega_{0i}(\nu_1,\mu)} - \frac{1}{\omega_{0i}(\nu_2,\mu)} \right| \times \\
\times \int_0^t \int_0^l \exp\big\{-\omega_{1i}(\nu_1,\mu)(t-s)\big\} \left| f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty} u_j(s,\nu_1,\mu)\vartheta_j(y)\right) \vartheta_i(y) \right| dy\,ds + \\
+ \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{0i}(\nu_2,\mu)} \int_0^t \int_0^l \exp\big\{-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)(t-s)\big\} \big|\vartheta_i(y)\big| \times \\
\times \left| f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty} u_j(s,\nu_1,\mu)\vartheta_j(y)\right) - f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty} u_j(s,\nu_2,\mu)\vartheta_j(y)\right) \right| dy\,ds + \\
+ \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{0i}(\nu_2,\mu)} \int_0^t \int_0^l \Big| \exp\big\{-\omega_{1i}(\nu_1,\mu)(t-s)\big\} - \exp\big\{-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)(t-s)\big\}\Big| \times \\
\times \left| f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty} u_j(s,\nu_1,\mu)\vartheta_j(y)\right) \vartheta_i(y) \right| dy\,ds. \quad (21)
\end{gathered}
$$

Используем следующие две оценки:

$$
\begin{gathered}
\Big| \exp\big\{-\omega_{1i}(\nu_1,\mu)t\big\} - \exp\big\{-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)t\big\}\Big| \leqslant \\
\leqslant \left| \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{d}{d\nu} \Big[\exp\big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)t\big\}\Big] \right| \leqslant \frac{\lambda_i^{6n} T}{\big[\omega_{0i}(0,\mu)\big]^2} \big|\nu_1-\nu_2\big| < T\big|\nu_1-\nu_2\big|, \quad (22)
\end{gathered}
$$

$$
\left| \frac{1}{\omega_{0i}(\nu_1,\mu)} - \frac{1}{\omega_{0i}(\nu_2,\mu)} \right| \leqslant \left| \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{d}{d\nu} \left[\frac{1}{\omega_{0i}(\nu,\mu)}\right] \right| \leqslant \frac{\lambda_i^{2n}}{\big[\omega_{0i}(0,\mu)\big]^2} \big|\nu_1-\nu_2\big| < \big|\nu_1-\nu_2\big|. \quad (23)
$$

Дважды интегрируя по частям в (8), имеем

$$
\varphi_i = -\frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^l \varphi''(y)\vartheta_j(y)\,dy. \quad (24)
$$

В силу формул (22) и (24), для первого слагаемого в правой части (21) с помощью неравенств Гельдера и Бесселя получаем

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{\infty} \big|\varphi_i\big| \cdot \Big| \exp\big\{-\omega_{1i}(\nu_1,\mu)t\big\} - \exp\big\{-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)t\big\}\Big| \leqslant \\
\leqslant T\big|\nu_1-\nu_2\big| \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^l \varphi''(y)\vartheta_j(y)\,dy \right| \leqslant T \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^4}} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^l \varphi''(y)\vartheta_j(y)\,dy \right|^2} \leqslant \\
\leqslant A_1 \big|\nu_1-\nu_2\big|, \quad (25)
\end{gathered}
$$

где

$$
A_1 = T \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^4}} \big\|\varphi''(x)\big\|_{L_2(D_l)}.
$$

С учетом (23) для второго слагаемого в правой части (21) аналогично получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\omega_{0i}(\nu_1,\mu)}-\frac{1}{\omega_{0i}(\nu_2,\mu)}\right|\times$$
$$\times\int_0^t\int_0^l \exp\left\{-\omega_{1i}(\nu_1,\mu)(t-s)\right\}\left|f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(s,\nu_1,\mu)\vartheta_j(y)\right)\vartheta_i(y)\right|dy\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\left|\nu_1-\nu_2\right|\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\exp\left\{-2\omega_{1i}(\nu_1,\mu)(t-s)\right\}}\times$$
$$\times\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_0^l f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(s,\nu_1,\mu)\vartheta_j(y)\right)\vartheta_j(y)\,dy\right|^2}\leqslant A_2\left|\nu_1-\nu_2\right|,\quad(26)$$

где $A_2=M_2\Delta$. С учетом условий теоремы 1 для третьего слагаемого в правой части (21) получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_{0i}(\nu_2,\mu)}\int_0^t\int_0^l \exp\left\{-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)(t-s)\right\}\left|\vartheta_i(y)\right|\times$$
$$\times\left|f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(s,\nu_1,\mu)\vartheta_j(y)\right)-f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(s,\nu_2,\mu)\vartheta_j(y)\right)\right|dy\,ds\leqslant$$
$$\leqslant M_1\int_0^t\left\|f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(s,\nu_1,\mu)\vartheta_j(y)\right)-f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(s,\nu_2,\mu)\vartheta_j(y)\right)\right\|_{L_2(D_l)}ds\leqslant$$
$$\leqslant M_1\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^t\int_0^l H(s,y)\sum_{j=1}^{\infty}\left|u_j(s,\nu_1,\mu)\vartheta_j(y)-u_j(s,\nu_2,\mu)\vartheta_j(y)\right|dy\,ds=$$
$$=M_1\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^t\int_0^l H(s,y)\left|U(s,y,\nu_1,\mu)-U(s,y,\nu_2,\mu)\right|dy\,ds.\quad(27)$$

С учетом оценки (22) для четвертого слагаемого в правой части (21) аналогично получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_{0i}(\nu_2,\mu)}\int_0^t\int_0^l\left|\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu_1,\mu)(t-s)\right\}-\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)(t-s)\right\}\right|\times$$
$$\times\left|f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}u_j(s,\nu_1,\mu)\vartheta_j(y)\right)\vartheta_i(y)\right|dy\,ds\leqslant A_3\left|\nu_1-\nu_2\right|,\quad(28)$$

где $A_3=TM_1\Delta$. С учетом оценок (25)–(28) из (21) получаем

$$\left|U(t,x,\nu_1,\mu)-U(t,x,\nu_2,\mu)\right|\leqslant A_4\left|\nu_1-\nu_2\right|+$$
$$+M_1\frac{2}{l}\int_0^t\int_0^l H(s,y)\left|U(s,y,\nu_1,\mu)-U(s,y,\nu_2,\mu)\right|dy\,ds,\quad(29)$$

где $A_4=\left(A_1+A_2+A_3\right)\sqrt{2/l}$.

Применив к (29) неравенства Гронуолла—Беллмана, получим оценку (20). При этом полагаем, что

$$A = A_4 \cdot \exp\left\{ M_1 \frac{2}{l} \max_{t \in D_T} \int\limits_0^t \int\limits_0^l H(s,y)\,dy\,ds \right\}.$$

Это и доказывает теорему. □

Нетрудно сформулировать и доказать аналогичную теорему о непрерывной зависимости решения смешанной задачи (1)–(3) относительно второго параметра μ.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Если* $u(t,\nu,\mu) \in B_2(T)$ — *единственное решение системы* (5), *то при произвольных* $\mu_1, \mu_2 \in [0;\mu]$ *справедлива оценка*

$$\Big| U(t,x,\nu,\mu_1) - U(t,x,\nu,\mu_2) \Big| \leqslant B \big|\mu_1 - \mu_2\big|, \quad 0 < B = \mathrm{const}\,.$$

Теорема 5 доказывается аналогично теореме 4.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если* $u(t,\nu,\mu) \in B_2(T)$ — *единственное решение системы* (5), *то при произвольных* $\nu_1, \nu_2 \in [0;\nu]$, $\mu_1, \mu_2 \in [0;\mu]$ *справедлива оценка*

$$\Big| U(t,x,\nu_1,\mu_1) - U(t,x,\nu_2,\mu_2) \Big| \leqslant C\Big(\big|\nu_1 - \nu_2\big| + \big|\mu_1 - \mu_2\big| \Big),$$

где $C = \max\big\{A; B\big\}$.

Действительно, в силу теорем 4 и 5 имеем

$$\begin{aligned} &\Big| U(t,x,\nu_1,\mu_1) - U(t,x,\nu_2,\mu_2) \Big| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \Big| U(t,x,\nu_1,\mu_1) - U(t,x,\nu_2,\mu_1) \Big| + \Big| U(t,x,\nu_2,\mu_1) - U(t,x,\nu_2,\mu_2) \Big| \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant A\big|\nu_1 - \nu_2\big| + B\big|\mu_1 - \mu_2\big| \leqslant C\Big(\big|\nu_1 - \nu_2\big| + \big|\mu_1 - \mu_2\big| \Big). \end{aligned}$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если* $u(t,\nu,\mu) \in B_2(T)$ — *единственное решение системы* (5), *то при произвольных* $\nu \in [0;\alpha]$, $\nu + h \in (0;\alpha)$, $0 < \alpha, h = \mathrm{const}$ *справедлива оценка*

$$\left| \frac{U(t,x,\nu+h,\mu) - U(t,x,\nu,\mu)}{h} \right| \leqslant A.$$

Действительно, в силу теоремы 4 имеем

$$\left| \frac{U(t,x,\nu+h,\mu) - U(t,x,\nu,\mu)}{h} \right| \leqslant A \frac{\big|\nu + h - \nu\big|}{h} = A.$$

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если* $u(t,\nu,\mu) \in B_2(T)$ — *единственное решение системы* (5), *то при произвольных* $\mu \in [0;\beta]$, $\mu + h \in (0;\beta)$, $0 < \beta, h = \mathrm{const}$ *справедлива оценка*

$$\left| \frac{U(t,x,\nu,\mu+h) - U(t,x,\nu,\mu)}{h} \right| \leqslant B.$$

Следствия 2 и 3 можно обобщить следующим образом.

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если* $u(t,\nu,\mu) \in B_2(T)$ — *единственное решение системы* (5), *то при произвольных* $\nu \in [0;\alpha]$, $\nu + h \in (0;\alpha)$, $0 < \alpha, h = \mathrm{const}$ *и* $\mu \in [0;\beta]$, $\mu + h \in (0;\beta)$, $0 < \beta, h = \mathrm{const}$ *справедлива оценка*

$$\left| \frac{U(t,x,\nu+h,\mu+h) - U(t,x,\nu,\mu)}{h} \right| \leqslant C.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. — М.: Наука, 1986.
2. *Алгазин С. Д., Кийко И. А.* Флаттер пластин и оболочек. — М.: Наука, 2006.
3. *Замышляева А. А.* Математические модели соболевского типа высокого порядка// Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. модел. программир. — 2014. — *7*, № 2. — С. 5–28.
4. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений// Усп. мат. наук. — 1960. — *15*, № 2 (92). — С. 97–154.
5. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени граничного управления колебаниями струны упругой силой// Диффер. уравн. — 2006. — *42*, № 12. — С. 1699–1711.
6. *Каримов Ш. Т.* Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 8. — С. 27–41.
7. *Кошанов Б. Д., Солдатов А. П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 12. — С. 1666–1681.
8. *Похожаев С. И.* О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка// Мат. сб. — 1982. — *117*, № 2. — С. 251–265.
9. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. — Киев: Наукова думка, 1973.
10. *Тодоров Т. Г.* О непрерывности ограниченных обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка// Вестн. Ленинградск. гос. ун-та. — 1975. — *19*. — С. 56–63.
11. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного интегродифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 1. — С. 112–123.
12. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для нелинейного интегродифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени// Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. Мех. Физ. — 2013. — *5*, № 1. — С. 69–75.
13. *Юлдашева А. В.* Об одной задаче для квазилинейного уравнения четного порядка// Дифференциальные уравнения. Математическая физика/ Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — М.: ВИНИТИ РАН, 2017. — *140*. — С. 43–49.
14. *Karimov Sh. T.* Multidimensional generalized Erdélyi–Kober operator and its application to solving Cauchy problems for differential equations with singular coefficients// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2015. — *18*, № 4. — С. 845–861.

Т. К. Юлдашев
Сибирский государственный университет науки и технологий
им. акад. М. Ф. Решетнева, Красноярск
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

К. Х. Шабадиков
Ферганский государственный университет, Фергана, Республика Узбекистан
E-mail: konak4426@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 156 (2018). С. 84–88

УДК 517.928.2

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ С ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

© 2018 г. **Д. А. ТУРСУНОВ, К. Г. КОЖОБЕКОВ**

Аннотация. В работе модифицированным методом пограничных функций построено полное равномерное асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с кратной точкой поворота в действительной оси.

Ключевые слова: асимптотика, пограничные функций, задача Коши, бисингулярная задача, точка поворота, обобщенный метод пограничных функций, сингулярное возмущение.

AMS Subject Classification: 34E20

1. Введение. Дифференциальные уравнения с точками поворота возникают в теории упругости, оптике, гидродинамике, геофизике и других областях естествознания. Кроме того, широкий класс дифференциальных уравнений с неинтегрируемыми особенностями типа Бесселя и их возмущений может быть сведен к дифференциальным уравнениям с точками поворота. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с точками поворота, исследованы в [9, 10, 12–15] и др. На практике обычно для построения асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач с точками поворота исследователи применяют метод сращивания (метод согласования) (см. [3, 8, 11]) или метод регуляризации С. А. Ломова (см. [4]), а также другие методы. Нами предложена модификация метода пограничных функций, благодаря которой удается построить полные, равномерные асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач с точками поворота. В [1, 5–7] исследованы краевые задачи с точками поворота. Настоящая работа посвящена развитию предлагаемого метода.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon y_\varepsilon''(x) + x^n y_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x), \quad 0 < x \leqslant T, \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0) = a, \quad y_\varepsilon'(0) = b, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ — малый параметр, n — фиксированное натуральное число, T, a, b — константы,

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(x), \quad f_k \in C^\infty[0,T], \quad f_0(0) \neq 0.$$

Решение задачи (1), (2) существует и единственно; требуется построить асимптотическое разложение решения этой задачи при $\varepsilon \to 0$.

Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что малый параметр ε присутствует при старшей производной и точка $x = 0$ является n-кратной точкой поворота для уравнения (1). Подобные задачи по терминологии А. М. Ильина называют бисингулярными (см. [3]).

Если асимптотическое решение задачи (1), (2) искать в виде

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x), \tag{3}$$

то получим
$$y_k(x) = O\big(x^{-n-(n+2)k}\big), \quad x \to 0, \quad k = 0, 1, \ldots .$$
Заметим, что асимптотическое решение (3) не удовлетворяет начальным условиям (2); кроме того, ряд (3) является асимптотическим только при $\sqrt[n+2]{\varepsilon} < x \leqslant T$.

Полное равномерное асимптотическое решение задачи (1), (2) будем строить обобщенным методом пограничных функций (см. [1, 5–7]).

3. Построение асимптотического разложения. Асимптотическое решение задачи (1), (2) будем искать в виде
$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=-n}^{-1} \mu^k \pi_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \big(v_k(x) + \pi_k(t)\big), \tag{4}$$
где $\mu = \sqrt[n+2]{\varepsilon}$, $x = \mu t$, $\pi_k(t)$ — пограничные функций зависящие, от μ, $\pi_k \in C^\infty[0, T/\mu]$, $v_k(x) \in \in C^\infty[0, T]$.

Подставляя (4) в (1) и (2), получаем
$$\pi''_{-n}(t) + t^n\pi_{-n}(t) + x^n v_0(x) + \mu\Big(\pi''_{-n+1}(t) + t^n\pi_{-n+1}(t) + x^n v_1(x)\Big) + \ldots +$$
$$+ \mu^{n+2}\Big(\pi''_2(t) + t^n\pi_2(t) + x^n v_{n+2}(x) + v''_0(x)\Big) + \mu^{n+3}\Big(\pi''_3(t) + t^n\pi_3(t) + x^n v_{n+3}(x) +$$
$$+ v''_1(x)\Big) + \ldots = f_0(x) + \mu^{n+2} f_1(x) + \ldots + \mu^{k(n+2)} f_k(x) + \ldots; \tag{5}$$
$$\pi_k(0) = 0, \quad k < 0, \quad \pi_0(0) = a - v_0(0), \quad \pi_k(0) = -v_k(0), \quad k \in \mathbb{N}; \tag{6}$$
$$\pi'_k(0) = 0, \quad k < 0, \quad \pi'_0(0) = \mu(b - v'_0(0)), \quad \pi'_k(0) = -\mu v'_k(0), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$
Из соотношения (5) имеем
$$\pi''_{-n}(t) + t^n\pi_{-n}(t) + x^n v_0(x) = f_0(x). \tag{8}$$
Определим функцию $v_0(x)$ так, чтобы $v_0(x) \in C^\infty[0, T]$. Равенство (8) запишем в виде
$$\pi''_{-n}(t) + t^n\pi_{-n}(t) + x^n v_0(x) = f_0(x) - \widetilde{f}_0(x) + \widetilde{f}_0(x),$$
где
$$\widetilde{f}_0(x) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j f_{0,j}, \quad f_{0,j} = \frac{f_0^{(j)}(0)}{j!}.$$
Отсюда
$$x^n v_0(x) = f_0(x) - \widetilde{f}_0(x) \quad \Rightarrow \quad v_0(x) = \frac{f_0(x) - \widetilde{f}_0(x)}{x^n};$$
$$\pi''_{-n}(t) + t^n\pi_{-n}(t) = \widetilde{f}_0(\mu t).$$

Лемма 1. *Задача*
$$\pi''_{-n}(t) + t^n\pi_{-n}(t) = \widetilde{f}_0(\mu t), \quad 0 < t \leqslant \frac{T}{\mu}, \quad \pi_{-n}(0) = 0, \quad \pi'_{-n}(0) = 0 \tag{9}$$
имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение в классе функций, убывающих со степенным ростом при $t \to T/\mu$, $\mu \to 0$.

Доказательство. Однородное уравнение
$$\pi''_{-n}(t) + t^n\pi_{-n}(t) = 0$$
имеет два линейно независимых решения (см. [2]):
$$z_1(t) = \sqrt{t}J_{1/2q}\left(\frac{t^q}{q}\right), \quad z_2(t) = \sqrt{t}Y_{1/2q}\left(\frac{t^q}{q}\right), \quad q = \frac{n+2}{2},$$

где $J_i(s)$, $Y_i(s)$ — функции Бесселя. Заметим, что $0<i<1/2$. Учитывая свойства функции Бесселя

$$J_i(s)=Y_i(s)=O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right), \quad s\to\infty;$$
$$J_i(s)=O(s^i), \quad Y_i(s)=O(s^{-i}), \quad s\to 0;$$
$$W\big(J_i(s),Y_i(s)\big)=\frac{2}{\pi s},$$

получаем

$$z_{1,2}(t)=O\big(\sqrt{t}t^{-q/2}\big)=O\big(t^{-n/4}\big), \quad t\to\infty; \quad z_1(0)=0, \quad z_1'(0)\neq 0;$$
$$z_2(0)\neq 0, \quad z_2'(0)=0, \quad W\big(z_1(t),z_2(t)\big)=c_w, \quad c_w=\frac{n+2}{\pi}\neq 0.$$

С помощью функции $z_{1,2}(t)$ запишем явное решение задачи:

$$\pi_{-n}(t)=z_2(t)c_w\int\limits_0^t z_1(\tau)\widetilde{f}_0(\mu\tau)d\tau-z_1(t)c_w\int\limits_0^t z_2(\tau)\widetilde{f}_0(\mu\tau)d\tau.$$

Действительно, функция $\pi_{-n}(t)$ удовлетворяет уравнению, так как

$$\pi_{-n}'(t)=z_2'(t)c_w\int\limits_0^t z_1(\tau)\widetilde{f}_0(\mu\tau)d\tau-z_1'(t)c_w\int\limits_0^t z_2(\tau)\widetilde{f}_0(\mu\tau)d\tau;$$
$$\pi_{-n}''(t)=z_2''(t)c_w\int\limits_0^t z_1(\tau)\widetilde{f}_0(\mu\tau)d\tau-z_1''(t)c_w\int\limits_0^t z_2(\tau)\widetilde{f}_0(\mu\tau)d\tau+\widetilde{f}_0(\mu t),$$
$$\pi_{-n}''(t)+t^n\pi_{-n}(t)\equiv\widetilde{f}_0(\mu t).$$

Раметим, что $\pi_{-n}(0)=0$, $\pi_{-n}'(0)=0$. Кроме того, если $\widetilde{f}_0(\mu t)\equiv 0$, то $\pi_{-n}(t)\equiv 0$, т.е. однородное уравнение с однородными начальными условиями имеет только нулевое решение. Отсюда следует единственность решения $\pi_{-n}(t)$.

Интегрируя по частям Функцию $\pi_{-n}(t)$ при $t\to T/\mu$, $\mu\to 0$ и учитывая свойства функции Бесселя, получаем

$$\pi_{-n}(t)=O\Big(t^{-n}\widetilde{f}_0(\mu t)\Big)=O(\mu^n), \quad t\to\frac{T}{\mu}, \quad \mu\to 0.$$

Лемма доказана. □

Из соотношения (5) имеем

$$\pi_{-n+j}''(t)+t^n\pi_{-n+j}(t)+x^nv_j(x)=0, \quad j\in\mathbb{N}, \quad j\neq k(n+2), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Пусть $v_j(x)\equiv 0$, $j\in\mathbb{N}$, $j\neq k(n+2)$, $k\in\mathbb{N}$; тогда

$$\pi_{-n+j}''(t)+t^n\pi_{-n+j}(t)=0, \quad j\in\mathbb{N}, \quad j\neq k(n+2), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Начальные условия примут вид

$$\pi_j(0)=0, \quad \pi_j'(0)=0, \quad j\in\mathbb{N}, \quad j\neq k(n+2), \quad k\in\mathbb{N};$$
$$\pi_0(0)=a-v_0(0), \quad \pi_0'(0)=\mu(b-v_0'(0));$$
$$\pi_{k(n+2)}(0)=-v_{k(n+2)}(0), \quad \pi_{k(n+2)}'(0)=-\mu v_{k(n+2)}'(0).$$

Также из (5) получаем

$$\pi_{-n+k(n+2)}''(t)+t^n\pi_{-n+k(n+2)}(t)+x^nv_{k(n+2)}(x)+v_{(k-1)(n+2)}''(x)=f_k(x), \quad k\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Определим функции $v_k(x)$ так, чтобы $v_k(x)\in C^\infty[0,T]$. Равенства (10) запишем в виде

$$\pi_{-n+k(n+2)}''(t)+t^n\pi_{-n+k(n+2)}(t)+x^nv_{k(n+2)}(x)=g_k(x)-\widetilde{g}_k(x)+\widetilde{g}_k(x), \quad k\in\mathbb{N},$$

где

$$g_k(x) = f_k(x) - v''_{(k-1)(n+2)}(x), \quad \widetilde{g}_k(x) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j g_{k,j}, \quad g_{k,j} = \frac{g_k^{(j)}(0)}{j!}.$$

Отсюда

$$x^n v_{k(n+2)}(x) = g_k(x) - \widetilde{g}_k(x) \quad \Rightarrow \quad v_{k(n+2)}(x) = \frac{g_k(x) - \widetilde{g}_k(x)}{x^n q(x)},$$
$$\pi''_{-n+k(n+2)}(t) + t^n \pi_{-n+k(n+2)}(t) = \widetilde{g}_k(\mu t).$$

Значит,

$$v_j(x) \equiv 0, \quad j \in \mathbb{N}, \quad j \neq k(n+2), \quad v_{k(n+2)}(x) = \frac{g_k(x) - \widetilde{g}_k(x)}{x^n q(x)}, \quad g_0(x) = f_0(x), \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$\pi_{-n+j}(t) \equiv 0, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad \pi_0(t) = \frac{z_2(t)}{z_2(0)}(a - v_0(0)) + \mu \frac{z_1(t)}{z'_1(0)}\big(b - v'_0(0)\big),$$
$$\pi_{k(n+2)}(t) = -\frac{z_2(t)}{z_2(0)} v_{k(n+2)}(0) - \mu \frac{z_1(t)}{z'_1(0)} v'_{k(n+2)}(0),$$
$$\pi_{-n+k(n+2)}(t) = z_2(t) c_w \int_0^t z_1(\tau) \widetilde{g}_k(\mu\tau)\, d\tau - z_1(t) c_w \int_0^t z_2(\tau) \widetilde{g}_k(\mu\tau)\, d\tau.$$

Таким образом, мы определили все члены асимптотического разложения (4). Теперь оценим остаточный член этого асимптотического разложения.

4. Оценка остаточного члена. Пусть

$$R_{\varepsilon,m}(x) = y_\varepsilon(x) - y_{\varepsilon,m}(x),$$

где

$$y_{\varepsilon,m}(x) = \sum_{k=-n}^{-1} \mu^k \pi_k(t) + \sum_{k=0}^{m(n+2)} \mu^k (v_k(x) + \pi_k(t)).$$

Тогда для остаточной функции $R_{\varepsilon,m}(x)$ получаем задачу

$$\varepsilon R''_{\varepsilon,m}(x) + x^n R_{\varepsilon,m}(x) = -\varepsilon^{m+1} v''_{m(n+2)}(x), \quad 0 < x \leqslant T, \tag{11}$$
$$R_{\varepsilon,m}(0) = 0, \quad R'_{\varepsilon,m}(0) = 0. \tag{12}$$

Пусть $x = \mu t$, $\varepsilon = \mu^{n+2}$; тогда

$$R''_{\mu,m}(t) + t^n R_{\mu,m}(t) = -\mu^{(m+1)(n+2)-n} v''_{m(n+2)}(\mu t), \quad 0 < t \leqslant \frac{T}{\mu}, \tag{13}$$
$$R_{\mu,m}(0) = 0, \quad R'_{\mu,m}(0) = 0. \tag{14}$$

Учитывая лемму, имеем

$$R_{\mu,m}(t) = \mu^{m(n+2)+2} c_w \left(z_1(t) \int_0^t z_2(\tau) v''_{m(n+2)}(\mu\tau)\, d\tau - z_2(t) \int_0^t z_1(\tau) v''_{m(n+2)}(\mu\tau)\, d\tau \right).$$

Отсюда получаем

$$R_{\varepsilon,m}(x) = O\big(\varepsilon^{m+2/(n+2)}\big), \quad \varepsilon \to 0, \quad x \in [0, T].$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для решения задачи Коши* (1), (2) *при* $\varepsilon \to 0$ *справедливо асимптотическое разложение* (4).

5. Заключение. Обобщенным методом пограничных функций построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с кратной точкой поворота в действительной оси. Построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюизе. Получена оценка для остаточного члена асимптотического разложения решения задачи Коши. Построенное разложение является асимптотическим в смысле Эрдейи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алымкулов К., Турсунов Д. А.* Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач// Изв. вузов. Мат. — 2016. — № 12. — С. 3–11.
2. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 2001.
3. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений кравеых задач. — М.: Наука, 1989.
4. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
5. *Турсунов Д. А.* Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота// Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — *22*, № 1. — С. 271–281
6. *Турсунов Д. А.* Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. — 2013. — № 1 (21). — С. 34–40.
7. *Турсунов Д. А.* Асимптотическое решение бисингулярной задачи Робена// Сиб. электр. мат. изв. — 2017. — *14*. — С. 10–21.
8. *Kevorkian J., Cole J. D.* Perturbation methods in applied mathematics. — Springer-Verlag, 1968.
9. *Olver F. M.* Connection formulas for second-order differential equations with multiple turning points// SIAM J. Math. Anal. — 1977. — *1*, № 8. — С. 127–154.
10. *Olver F. M.* Connection formulas for second-order differential equations having an arbitrary number of turning points of arbitrary multiplicities// SIAM J. Math. Anal. — 1977. — *4*, № 8. — С. 673–700.
11. *Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid dynamics. — New York: Academic Press, 1964.
12. *Wasow W.* Asymptotic expansions for ordinary differential equations.— New York: Dover, 1965.
13. *Wasow W.* Linear turning point theory. — New York: Springer-Verlag, 1985.
14. *Watts A. M.* A singular perturbation problem with a turning point// Bull. Austr. Math. Soc. — 1971. — *5*. — С. 61–73.
15. *Wong R.* Selected papers of F. W. J. Olver. Parts 1, 2. — World Scientific, 2000.

Д. А. Турсунов
Ошский государственный университет, Ош, Республика Кыргызстан
E-mail: tdaosh@gmail.com

К. Г. Кожобеков
Ошский государственный университет, Ош, Республика Кыргызстан
E-mail: kudayberdi.kozhobekov@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 156 (2018). С. 89–102

УДК 517.968

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА И КЛАССИЧЕСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕННИ—ЛЮКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

© 2018 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ**

Аннотация. Рассмотрены вопросы классической разрешимости и построения решения нелокальной обратной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Бенни—Люка четвертого порядка с вырожденным ядром. Использован метод Фурье разделения переменных. Доказан критерий однозначной разрешимости поставленной обратной краевой задачи. Изучена устойчивость решения интегро-дифференциального уравнения по функции восстановления.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение Бенни—Люка, уравнение четвертого порядка, вырожденное ядро, интегральное условие, классическая разрешимость.

AMS Subject Classification: 35A02, 35M10, 35S05

1. Постановка задачи. Теория краевых и обратных задач в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. Исследования многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек описываются дифференциальными уравнениями в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., например, [2, 3, 9, 13–15, 22]). К обратным задачам относят задачи определения физических свойств объектов: плотности, коэффициента теплопроводности, упругих модулей в зависимости от координат или других параметров.

Дифференциальные уравнения в частных производных четвертого порядка рассматривались в [1, 4, 5, 8, 11, 16, 17], а интегро-дифференциальные уравнения с частными производными — в [6, 7, 10, 12, 18–22].

В настоящей работе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости нелокальной обратной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Бенни—Люка четвертого порядка с вырожденным ядром. Итак, в области $\Omega = \{(t, x, y)\,|\,0 < t < T,\ 0 < x, y < l\}$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$U_{tt} - \Big(U_{ttxx} + U_{ttyy}\Big) - \Big(U_{xx} + U_{yy}\Big) + \Big(U_{xxxx} + U_{yyyy}\Big) + \\ + \nu \int_0^T K(t,s)\Big(U_{xx}(s,x,y) + U_{yy}(s,x,y)\Big)\,ds = \alpha(t)\beta(x,y), \quad (1)$$

где T и l — заданные положительные действительные числа, ν — действительный спектральный параметр,

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) b_i(s),$$

$a_i(t), b_i(s) \in C[0;T]$, $a_i(t) \neq 0$, $t \in [0;T]$, $\alpha(t) \in C[0;T]$, $\alpha(t) \neq 0$, $t \in [0;T]$. Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

ISSN 0233–6723

Задача. Найти в области Ω пару функций

$$U(t,x,y)\in C\big(\overline{\Omega}\big)\cap C^1\Big(\Omega\cup\{x=0\}\cup\{x=l\}\cup\{y=0\}\cup\{y=l\}\Big)\cap$$
$$\cap\, C^{2,4,4}_{t,x,y}(\Omega)\cap C^{2+2+0}_{t,x,y}(\Omega)\cap C^{2+0+2}_{t,x,y}(\Omega),$$
$$\beta(x,y)\in C^4\big\{0<x,y<l\big\},$$

удовлетворяющую уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(0,x,y)=U(T,x,y),\quad 0\leqslant x,y\leqslant l, \tag{2}$$

$$\int\limits_0^T U(t,x,y)\,dt=\varphi(x,y),\quad 0\leqslant x,y\leqslant l, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&U(t,0,y)=U(t,l,y)=U(t,x,0)=U(t,x,l)=0,\\ &U_{xx}(t,0,y)=U_{xx}(t,l,y)=U_{xx}(t,x,0)=U_{xx}(t,x,l)=0,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,\\ &U_{yy}(t,0,y)=U_{yy}(t,l,y)=U_{yy}(t,x,0)=U_{yy}(t,x,l)=0,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\int\limits_0^T \Theta(t)U(t,x,y)\,dt=\psi(x,y),\quad 0\leqslant x,y\leqslant l, \tag{5}$$

где $C^{r,s,\theta}_{t,x,y}(\Omega)$ — класс функций, имеющих непрерывные производные $\partial^r/\partial t^r$, $\partial^s/\partial x^s$, $\partial^\theta/\partial y^\theta$ в области Ω, $C^{r+s+0}_{t,x,y}(\Omega)$ — класс функций, имеющих непрерывную производную $\partial^{r+s}/\partial t^r\partial x^s$ в области Ω, $C^{r+0+s}_{t,x,y}(\Omega)$ — класс функций, имеющих непрерывную производную $\partial^{r+s}/\partial t^r\partial y^s$ в области Ω, $r=\overline{1,r_0}$, $s=\overline{1,s_0}$, $r\leqslant r_0$, $s\leqslant s_0$ — натуральные числа, $\Theta(t)\in C[0,T]$, $\Theta(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ — заданные достаточно гладкие функции,

$$\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=0,\quad \psi(0,y)=\psi(l,y)=\psi(x,0)=\psi(x,l)=0,$$
$$\overline{\Omega}=\big\{(t,x,y)\,|\,0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant x,y\leqslant l\big\}.$$

2. Формальное решение краевой задачи (1)–(4).

Нетривиальное решение уравнения (1) в области Ω будем искать в виде ряда Фурье

$$U(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}u_{n,m}(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y, \tag{6}$$

где

$$u_{n,m}(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l U(t,x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy,\quad n,m=1,2,\ldots. \tag{7}$$

Предполагается, что и функция $\beta(x,y)$ разлагается в ряд Фурье

$$\beta(x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\beta_{n,m}\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y, \tag{8}$$

где

$$\beta_{n,m}=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l \beta(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy,\quad n,m=1,2,\ldots. \tag{9}$$

Подставляя ряды (6) и (8) в уравнение (1), получаем

$$u''_{n,m}(t)+\mu^2_{n,m}u_{n,m}(t)=\nu\lambda^2_{n,m}\int\limits_0^T\sum_{i=1}^k a_i(t)b_i(s)u_{n,m}(s)\,ds+\frac{1}{1+\mu^2_{n,m}}\alpha(t)\beta_{n,m}, \tag{10}$$

где

$$\lambda_{n,m}^2 = \frac{\mu_{n,m}^2}{1+\mu_{n,m}^2}, \quad \mu_{n,m} = \frac{\pi(n+m)}{l}.$$

Введя обозначение

$$\tau_{in,m} = \int_0^T b_i(s) u_{n,m}(s)\,ds \tag{11}$$

перепишем уравнения (10) в виде

$$u''_{n,m}(t) + \mu_{n,m}^2 u_{n,m}(t) = \nu\lambda_{n,m}^2 \sum_{i=1}^k a_i(t)\tau_{in,m} + \frac{1}{1+\mu_{n,m}^2}\alpha(t)\beta_{n,m}. \tag{12}$$

Дифференциальные уравнения (12) решаются методом вариации произвольных постоянных:

$$u_{n,m}(t) = c_{n,m}\cos\mu_{n,m}t + d_{n,m}\sin\mu_{n,m}t + \eta_{n,m}(t), \tag{13}$$

где

$$\eta_{n,m}(t) = \nu\frac{\lambda_{n,m}^2}{\mu_{n,m}}\sum_{i=1}^k \tau_{in,m}\int_0^t \sin\mu_{n,m}(t-s)a_i(s)\,ds + \frac{\beta_{n,m}}{\mu_{n,m}(1+\mu_{n,m}^2)}\int_0^t \sin\mu_{n,m}(t-s)\alpha(s)\,ds.$$

Условие (2) с учетом формулы (7) принимает вид

$$u_{n,m}(0) = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l U(0,x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dy\,dx = \\ = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l U(T,x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dy\,dx = u_{n,m}(T). \tag{14}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$ в (13) воспользуемся условием (14):

$$u_{n,m}(t) = d_{n,m}\left[\sin\mu_{n,m}t + \frac{\sin\mu_{n,m}T}{1-\cos\mu_{n,m}T}\cos\mu_{n,m}t\right] + \xi_{n,m}(t), \tag{15}$$

где

$$\xi_{n,m}(t) = \frac{\eta_{n,m}(T)}{1-\cos\mu_{n,m}T}\cos\mu_{n,m}t + \eta_{n,m}(t).$$

Теперь воспользуемся интегральным условием (3) и формулой (7):

$$\int_0^T u_{n,m}(t)\,dt = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l U(t,x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dy\,dx = \\ = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l \varphi(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dy\,dx = \varphi_{n,m}. \tag{16}$$

Тогда из (15) и (16) получаем

$$\varphi_{n,m} = \int_0^T u_{n,m}(t)\,dt = d_{n,m}\int_0^T\left[\sin\mu_{n,m}t + \frac{\sin\mu_{n,m}T}{1-\cos\mu_{n,m}T}\cos\mu_{n,m}t\right]dt + \gamma_{n,m} = \\ = \frac{d_{n,m}}{\mu_{n,m}}\left[1-\cos\mu_{n,m}T + \frac{\sin^2\mu_{n,m}T}{1-\cos\mu_{n,m}T}\right] + \gamma_{n,m}, \tag{17}$$

где

$$\gamma_{n,m} = \int\limits_0^T \xi_{n,m}(t)\,dt.$$

Итак, для определения неизвестных коэффициентов $d_{n,m}$ требуем выполнение следующего условия:

$$\sigma_{n,m}(T) = 1 - \cos\mu_{n,m}T \neq 0. \tag{18}$$

Тогда из (17) находим

$$d_{n,m} = \frac{\mu_{n,m}}{2}\Big(\varphi_{n,m} - \gamma_{n,m}\Big). \tag{19}$$

Подставляя (19) в (15), получим

$$u_{n,m}(t) = \varphi_{n,m}B_{n,m}(t) + \nu\sum_{i=1}^{k}\tau_{in,m}D_{in,m}(t) + \beta_{n,m}E_{n,m}(t), \tag{20}$$

где

$$B_{n,m}(t) = \frac{\mu_{n,m}}{2}\delta_{0n,m}(t), \quad \delta_{0n,m}(t) = \sin\mu_{n,m}t + \frac{\sin\mu_{n,m}T}{\sigma_{n,m}(T)}\cos\mu_{n,m}t,$$

$$D_{in,m}(t) = h_{in,m}(T)\delta_{2n,m}(t) + h_{in,m}(t) - \frac{\mu_{n,m}}{2}\delta_{0n,m}(t)\int\limits_0^T h_{in,m}(t)\,dt,$$

$$E_{n,m}(t) = \delta_{1n,m}(T)\delta_{2n,m}(t) + \delta_{1n,m}(t) - \frac{\mu_{n,m}}{2}\delta_{0n,m}(t)\int\limits_0^T \delta_{1n,m}(t)\,dt,$$

$$h_{in,m}(t) = \frac{\lambda_{n,m}^2}{\mu_{n,m}}\int\limits_0^t \sin\mu_{n,m}(t-s)a_i(s)\,ds, \quad i = \overline{1,k},$$

$$\delta_{1n,m}(t) = \frac{1}{\big(1+\mu_{n,m}^2\big)\mu_{n,m}}\int\limits_0^t \sin\mu_{n,m}(t-s)\alpha(s)\,ds,$$

$$\delta_{2n,m}(t) = \frac{1}{\sigma_{n,m}(T)}\left[\cos\mu_{n,m}t - \frac{\delta_{0n,m}(t)}{2}\sin\mu_{n,m}T\right],$$

$$\lambda_{n,m} = \sqrt{\frac{\mu_{n,m}^2}{1+\mu_{n,m}^2}}, \quad \mu_{n,m} = \frac{\pi(n+m)}{l}.$$

Подставляя (20) в (11), получаем счетную систему алгебраических уравнений

$$\tau_{in,m} + \nu\sum_{j=1}^{k}\tau_{jn,m}H_{ijn,m} = \Psi_{in,m}, \tag{21}$$

где

$$H_{ijn,m} = -\int\limits_0^T b_i(s)D_{jn,m}(s)\,ds, \quad \Psi_{in,m} = \int\limits_0^T b_i(s)\Big[\varphi_{n,m}B_{n,m}(s) + \beta_{n,m}E_{n,m}(s)\Big]\,ds. \tag{22}$$

Отметим, что из линейной независимости функций $a_i(t)$ и $b_i(s)$ следует, что $H_{ijn,m} \neq 0$. Система (21) однозначно разрешима при любых конечных $\Psi_{in,m}$, если выполняется следующее условие:

$$\Delta_{n,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \nu H_{12n,m} & \ldots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & 1+\nu H_{22n,m} & \ldots & \nu H_{2kn,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu H_{k1n,m} & \nu H_{k2n,m} & \ldots & 1+\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{23}$$

Определитель $\Delta_{n,m}(\nu)$ в (23) представляет собой многочлен относительно ν степени не выше k. Уравнение $\Delta_{n,m}(\nu)=0$ имеет не более k различных корней, которые являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Для других значений ν условие (23) выполняется; для таких регулярных значений ν система (21) имеет единственное решение при любой конечной ненулевой правой части. Поэтому при выполнении условия (23) имеет место однозначная разрешимость поставленной нелокальной обратной задачи.

Решения системы (21) записываются в виде

$$\tau_{in,m} = \frac{\Delta_{in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}, \quad i=\overline{1,k}, \tag{24}$$

где

$$\Delta_{in,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \dots & \nu H_{1(i-1)n,m} & \Psi_{1n,m} & \nu H_{1(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & \dots & \nu H_{2(i-1)n,m} & \Psi_{2n,m} & \nu H_{2(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{2kn,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu H_{k1n,m} & \dots & \nu H_{k(i-1)n,m} & \Psi_{kn,m} & \nu H_{k(i+1)n,m} & \dots & 1+\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_{in,m}(\nu)$ содержатся $\Psi_{in,m}$, содержащие, в свою очередь, неизвестные величины $\beta_{n,m}$, входящие в состав правой части системы (21). Чтобы вывести их из-под знака определителя, выражение в (22) запишем в следующем виде:

$$\Psi_{in,m} = \varphi_{n,m}\Psi_{1in,m} + \beta_{n,m}\Psi_{2in,m},$$

где

$$\Psi_{1in,m} = \int\limits_0^T b_i(s)B_{n,m}(s)\,ds, \quad \Psi_{2in,m} = \int\limits_0^T b_i(s)E_{n,m}(s)\,ds.$$

В этом случае, согласно свойству определителя имеем

$$\Delta_{in,m}(\nu) = \varphi_{n,m}\Delta_{1in,m}(\nu) + \beta_{n,m}\Delta_{2in,m}(\nu),$$

где

$$\Delta_{jin,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \dots & \nu H_{1(i-1)n,m} & \Psi_{j1n,m} & \nu H_{1(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & \dots & \nu H_{2(i-1)n,m} & \Psi_{j2n,m} & \nu H_{2(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{2kn,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu H_{k1n,m} & \dots & \nu H_{k(i-1)n,m} & \Psi_{jkn,m} & \nu H_{k(i+1)n,m} & \dots & 1+\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix}, \quad j=1,2.$$

Тогда формула (24) записывается в виде

$$\tau_{in,m} = \varphi_{n,m}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} + \beta_{n,m}\frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}, \quad i=\overline{1,k}. \tag{25}$$

Подставляя (25) в (20), получаем

$$u_{n,m}(t) = \varphi_{n,m}F_{n,m}(t) + \beta_{n,m}M_{n,m}(t), \tag{26}$$

где

$$F_{n,m}(t) = B_{n,m}(t) + \nu\sum_{i=1}^k \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}D_{in,m}(t), \quad M_{n,m}(t) = E_{n,m}(t) + \nu\sum_{i=1}^k \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}D_{in,m}(t).$$

Теперь (26) подставим в ряд Фурье (6):

$$U(t,x,y) = \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big[\varphi_{n,m}F_{n,m}(t) + \beta_{n,m}M_{n,m}(t)\Big]\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y. \tag{27}$$

3. Обоснование разрешимости краевой задачи (1)–(4)**.** Рассмотрим случай, когда нарушается условие (18). Пусть $\sigma_{n,m}(T)=1-\cos\mu_{n,m}T=0$ при некоторых T. Это условие эквивалентно равенству

$$\cos\mu_{n,m}T = 1, \tag{28}$$

где $\mu_{n,m}=\pi(n+m)/l$. Уравнение (28) имеет решения

$$T_k=\frac{2\pi k}{\mu_{n,m}},\quad k\in\mathbb{N},$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Другие значения $0<T$, для которых условие (18) выполняется, называются регулярными. Для регулярных значений T имеет место формула (27). Поэтому при выполнении условия (18) решение краевой задачи (1)–(4) в области Ω представляется в виде ряда (27).

Покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x,y)$ и $\beta(x,y)$ ряд (27) сходится абсолютно и равномерно. Действительно, при любых n, m и регулярных значениях T справедливы оценки

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|u_{n,m}(t)\right|\leqslant C\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big[\left|\varphi_{n,m}\right|+\left|\beta_{n,m}\right|\Big], \tag{29}$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|u''_{n,m}(t)\right|\leqslant C\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big[\left|\varphi_{n,m}\right|+\left|\beta_{n,m}\right|\Big], \tag{30}$$

где $0<C=\mathrm{const}$.

Так как для регулярных значений T справедливы соотношения

$$0<\left|\sigma_{n,m}(T)\right|=\left|1-\cos\mu_{n,m}T\right|\leqslant 2,$$

то на основании формулы (26) благодаря гладкости функций $F_{n,m}(t)$, $M_{n,m}(t)$ получаем

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|u_{n,m}(t)\right|\leqslant\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\max_{t\in[0,T]}\left|F_{n,m}(t)\right|\left|\varphi_{n,m}\right|+\max_{t\in[0,T]}\left|M_{n,m}(t)\right|\left|\beta_{n,m}\right|\right]\leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\max_{t\in[0,T]}\left|F(t)\right|\left|\varphi_{n,m}\right|+\max_{t\in[0,T]}\left|M(t)\right|\left|\beta_{n,m}\right|\right]\leqslant C_1\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big[\left|\varphi_{n,m}\right|+\left|\beta_{n,m}\right|\Big],$$

где

$$C_1=2\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\left|F(t)\right|;\ \max_{t\in[0,T]}\left|M(t)\right|\right\},\quad F(t)\geqslant F_{n,m}(t),\quad M(t)\geqslant M_{n,m}(t). \tag{31}$$

Дифференцируя выражения (26) два раза, аналогично получаем

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|u''_{n,m}(t)\right|\leqslant\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\max_{t\in[0,T]}\left|F''_{n,m}(t)\right|\left|\varphi_{n,m}\right|+\max_{t\in[0,T]}\left|M''_{n,m}(t)\right|\left|\beta_{n,m}\right|\right]\leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\max_{t\in[0,T]}\left|F''(t)\right|\left|\varphi_{n,m}\right|+\max_{t\in[0,T]}\left|M''(t)\right|\left|\beta_{n,m}\right|\right]\leqslant C_2\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big[\left|\varphi_{n,m}\right|+\left|\beta_{n,m}\right|\Big],$$

где

$$C_2=2\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\left|F''(t)\right|;\ \max_{t\in[0,T]}\left|M''(t)\right|\right\},\quad F''(t)\geqslant F''_{n,m}(t),\quad M''(t)\geqslant M''_{n,m}(t).$$

Отсюда следуют оценки (29) и (30), где $C=\max\{C_1,C_2\}$.

Условия А. Пусть функция $\varphi(x,y) \in C^5\big([0;l] \times [0;l]\big)$ на сегменте $[0;l]$ имеет кусочно-непрерывные производные до шестого порядка, причем

$$\begin{gathered}\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=0,\\ \varphi_{xx}(0,y)=\varphi_{xx}(l,y)=\varphi_{xx}(x,0)=\varphi_{xx}(x,l)=0,\\ \varphi_{yy}(0,y)=\varphi_{yy}(l,y)=\varphi_{yy}(x,0)=\varphi_{yy}(x,l)=0,\\ \varphi_{xxxx}(0,y)=\varphi_{xxxx}(l,y)=\varphi_{xxxx}(x,0)=\varphi_{xxxx}(x,l)=0,\\ \varphi_{yyyy}(0,y)=\varphi_{yyyy}(l,y)=\varphi_{yyyy}(x,0)=\varphi_{yyyy}(x,l)=0.\end{gathered}$$

Путем шестикратного интегрирования по частям по переменной x в интеграле (16)

$$\varphi_{n,m}=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\varphi(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy$$

получаем

$$\varphi_{n,m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^6\frac{\varphi_{n,m}^{VI}}{n^6},\quad \varphi_{n,m}^{VI}=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\varphi_{xxxxxx}(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy, \tag{32}$$

причем справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}^{VI}\right]^2\leqslant\frac{4}{l^2}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\left[\varphi_{xxxxxx}(x,y)\right]^2\,dx\,dy<\infty. \tag{33}$$

Аналогично, путем шестикратного интегрирования по переменной y получим

$$\varphi_{n,m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^6\frac{\varphi_{n,m}^{VI}}{m^6},\quad \varphi_{n,m}^{VI}=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\varphi_{yyyyyy}(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy, \tag{34}$$

причем справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}^{VI}\right]^2\leqslant\frac{4}{l^2}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\left[\varphi_{yyyyyy}(x,y)\right]^2\,dx\,dy<\infty. \tag{35}$$

Условия Б. Пусть функция $\beta(x,y)\in C^5\big([0;l]\times[0;l]\big)$ на сегменте $[0;l]$ имеет кусочно непрерывные производные до шестого порядка и

$$\begin{gathered}\beta(0,y)=\beta(l,y)=\beta(x,0)=\beta(x,l)=0,\\ \beta_{xx}(0,y)=\beta_{xx}(l,y)=\beta_{xx}(x,0)=\beta_{xx}(x,l)=0,\\ \beta_{yy}(0,y)=\beta_{yy}(l,y)=\beta_{yy}(x,0)=\beta_{yy}(x,l)=0,\\ \beta_{xxxx}(0,y)=\beta_{xxxx}(l,y)=\beta_{xxxx}(x,0)=\beta_{xxxx}(x,l)=0,\\ \beta_{yyyy}(0,y)=\beta_{yyyy}(l,y)=\beta_{yyyy}(x,0)=\beta_{yyyy}(x,l)=0.\end{gathered}$$

Путем шестикратного интегрирования по переменной x в интеграле (9)

$$\beta_{n,m}=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\beta(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy$$

получаем

$$\beta_{n,m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^6\frac{\beta_{n,m}^{VI}}{n^6},\quad \beta_{n,m}^{VI}=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\beta_{xxxxxx}(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy, \tag{36}$$

причем справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\beta_{n,m}^{VI}\right]^2 \leqslant \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l\left[\beta_{xxxxxx}(x,y)\right]^2\,dx\,dy<\infty. \tag{37}$$

Аналогично путем шестикратного интегрирования по частям по переменной y получим

$$\beta_{n,m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^6\frac{\beta_{n,m}^{VI}}{m^6},\quad \beta_{n,m}^{VI}=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l\beta_{yyyyyy}(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy, \tag{38}$$

причем справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\beta_{n,m}^{VI}\right]^2 \leqslant \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l\left[\beta_{yyyyyy}(x,y)\right]^2\,dx\,dy<\infty. \tag{39}$$

Учитывая формулы (29), (32), (33), (36) и (37) и применяя неравенства Минковского и Гельдера, для ряда (27) получим

$$\begin{aligned}
&\left|U(t,x,y)\right|\leqslant\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|u_{n,m}(t)\right|\left|\sin\frac{\pi n}{l}x\right|\left|\sin\frac{\pi m}{l}y\right|\leqslant\\
&\leqslant\frac{2C}{l}\left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|\varphi_{n,m}\right|^2}+\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|\beta_{n,m}\right|^2}\right]\leqslant\gamma_1\left[\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}\left|\varphi_{n,m}^{VI}\right|+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}\left|\beta_{n,m}^{VI}\right|\right]\leqslant\\
&\leqslant\gamma_1\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{12}}}\left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}^{VI}\right]^2}+\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\beta_{n,m}^{VI}\right]^2}\right]\leqslant\\
&\leqslant\frac{4\gamma_1}{l^2}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{12}}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\varphi_{xxxxxx}(x,y)\right]^2dx\,dy}+\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\beta_{xxxxxx}(x,y)\right]^2dx\,dy}\right]<\infty,
\end{aligned} \tag{40}$$

где

$$\gamma_1=\frac{2C}{l}\left(\frac{l}{\pi}\right)^6.$$

Аналогично с учетом оценок (29), (34), (35), (38) и (39) получаем

$$\left|U(t,x,y)\right|\leqslant\frac{4\gamma_1}{l^2}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{12}}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\varphi_{yyyyyy}(x,y)\right]^2dx\,dy}+\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\beta_{yyyyyy}(x,y)\right]^2dx\,dy}\right]<\infty. \tag{41}$$

Из (40) и (41) следует, что ряд (27) абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{\Omega}$.

Для функции (27) покажем непрерывность всех производных, входящих в уравнение (1). Функцию (27) формально продифференцируем нужное число раз:

$$U_{tt}(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}F''_{n,m}(t)+\beta_{n,m}M''_{n,m}(t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y, \tag{42}$$

$$U_{xxxx}(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}F_{n,m}(t)+\beta_{n,m}M_{n,m}(t)\right]\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y, \tag{43}$$

$$U_{yyyy}(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}F_{n,m}(t)+\beta_{n,m}M_{n,m}(t)\right]\left(\frac{\pi m}{l}\right)^4\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y, \tag{44}$$

$$U_{ttxx}(t,x,y) = -\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}F''_{n,m}(t) + \beta_{n,m}M''_{n,m}(t)\right]\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi m}{l}y, \tag{45}$$

$$U_{ttyy}(t,x,y) = -\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}F''_{n,m}(t) + \beta_{n,m}M''_{n,m}(t)\right]\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi m}{l}y. \tag{46}$$

Учитывая оценки (30)–(33), (36) и (37) и применяя неравенства Минковского и Гельдера, для ряда (42) получим

$$\begin{aligned}\left|U_{tt}(t,x,y)\right| &\leqslant \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|u''_{n,m}(t)\right|\left|\sin\frac{\pi n}{l}x\right|\left|\sin\frac{\pi m}{l}y\right| \leqslant \frac{2C}{l}\left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|\varphi_{n,m}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|\beta_{n,m}\right|^2}\right] \leqslant \\ &\leqslant \gamma_1\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{12}}}\left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi^{VI}_{n,m}\right]^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\beta^{VI}_{n,m}\right]^2}\right] \leqslant \\ &\leqslant \frac{4\gamma_1}{l^2}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{12}}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\varphi_{xxxxxx}(x,y)\right]^2 dx\,dy} + \sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\beta_{xxxxxx}(x,y)\right]^2 dx\,dy}\right] < \infty,\end{aligned} \tag{47}$$

где $\gamma_1 = (2C/l)(l/\pi)^6$.

С учетом оценок (30), (34), (35), (38) и (39) также получаем оценку

$$\left|U_{tt}(t,x,y)\right| \leqslant \frac{4\gamma_1}{l^2}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{12}}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\varphi_{yyyyyy}(x,y)\right]^2 dx\,dy} + \sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\beta_{yyyyyy}(x,y)\right]^2 dx\,dy}\right] < \infty. \tag{48}$$

Аналогично оценкам (47) и (48) для рядов (43) и (44) получаем

$$\begin{aligned}\left|U_{xxxx}(t,x,y)\right| &\leqslant \frac{2\pi^4}{l^5}\sum_{n,m=1}^{\infty}n^4\left|u_{n,m}(t)\right|\left|\sin\frac{\pi n}{l}x\right|\left|\sin\frac{\pi m}{l}y\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{2\pi^4}{l^5}C\left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}n^8\left|\varphi_{n,m}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}n^8\left|\beta_{n,m}\right|^2}\right] \leqslant \\ &\leqslant \gamma_2\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}}\left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi^{VI}_{n,m}\right]^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\beta^{VI}_{n,m}\right]^2}\right] \leqslant \\ &\leqslant \frac{4\gamma_2}{l^2}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\varphi_{xxxxxx}(x,y)\right]^2 dx\,dy} + \sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\beta_{xxxxxx}(x,y)\right]^2 dx\,dy}\right] < \infty,\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\left|U_{yyyy}(t,x,y)\right| &\leqslant \frac{2\pi^4}{l^5}\sum_{n,m=1}^{\infty}m^4\left|u_{n,m}(t)\right|\left|\sin\frac{\pi n}{l}x\right|\left|\sin\frac{\pi m}{l}y\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{2\pi^4}{l^5}C\left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}m^8\left|\varphi_{n,m}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}m^8\left|\beta_{n,m}\right|^2}\right] \leqslant \gamma_2\left[\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left|\varphi^{VI}_{n,m}\right| + \sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left|\beta^{VI}_{n,m}\right|\right] \leqslant \\ &\leqslant \frac{4\gamma_2}{l^2}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\varphi_{yyyyyy}(x,y)\right]^2 dx\,dy} + \sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\beta_{yyyyyy}(x,y)\right]^2 dx\,dy}\right] < \infty,\end{aligned} \tag{50}$$

где $\gamma_2 = 2Cl/\pi^2$. Точно так же и для рядов (45) и (46), аналогично (49) и (50) легко показать, что

$$\left|U_{ttxx}(t,x,y)\right| < \infty, \quad \left|U_{ttyy}(t,x,y)\right| < \infty.$$

Таким образом, в области Ω функция $U(t,x,y)$, определяемая рядом (27), удовлетворяет условиям прямой задачи (1)–(4).

Для доказательства единственности решения покажем, что при однородном интегральном условии

$$\int\limits_0^T U(t,x,y)\,dt = 0, \quad 0 \leqslant x,y \leqslant l,$$

и нулевой правой части краевая задача (1)–(4) имеет только тривиальное решение. С этой целью предположим, что $\varphi(x,y) \equiv 0$, $\beta(x,y) \equiv 0$. Тогда $\varphi_{n,m} \equiv 0$, $\beta_{n,m} \equiv 0$ и из формул (6) и (26) следует, что

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^l U(t,x,y) \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy = 0, \quad n,m = 1,2,\ldots.$$

Отсюда в силу полноты систем собственных функций

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}, \quad \left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi m}{l}y\right\}$$

в $L_2[0,l]$, заключаем, что $U(t,x,y) \equiv 0$ для всех $x,y \in [0,l]$ и $t \in [0,T]$. Следовательно, если выполняются условия (18) и (23), то для прямой задачи (1)–(4) существует решение, и это решение единственно в области Ω.

4. **Обратная задача** (1)–(5).

Определим неизвестный коэффициент $\beta(x,y)$. С этой целью воспользуемся условием (5). Тогда из (26) получаем

$$\psi_{n,m} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \int\limits_0^l \psi(x,y) \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \int\limits_0^l \int\limits_0^T \Theta(t)U(t,x,y)\,dt \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy =$$
$$= \int\limits_0^T \Theta(t)u_{n,m}(t)\,dt = \varphi_{n,m}\chi_{1n,m} + \beta_{n,m}\chi_{2n,m},$$

где

$$\chi_{1n,m} = \int\limits_0^T \Theta(t)F_{n,m}(t)\,dt, \quad \chi_{2n,m} = \int\limits_0^T \Theta(t)M_{n,m}(t)\,dt.$$

Отсюда получаем

$$\beta_{n,m} = \frac{\psi_{n,m} - \varphi_{n,m}\chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}}. \tag{51}$$

Проверим условие, что $\chi_{2n,m} \neq 0$ в (51). Предположим противное: пусть

$$\chi_{2n,m} = \int\limits_0^T \Theta(t)M_{n,m}(t)\,dt = 0. \tag{52}$$

Применим теорему о среднем. По условию задачи $\Theta(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$. Тогда из (52) получим, что

$$\int\limits_0^T M_{n,m}(t)\,dt = 0.$$

Анализ функции $M_{n,m}(t)$ показывает, что это возможно, если справедливо следующее равенство:

$$\int_0^T \sin\mu_{n,m}(T-t)\alpha(t)\,dt = 0. \tag{53}$$

Применим теорему о среднем к равенству (53). По условию задачи $\alpha(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$. Тогда из (53) заключаем, что

$$\int_0^T \sin\mu_{n,m}(T-t)\,dt = 0.$$

Вычисляя этот интеграл, приходим к тригонометрическому уравнению

$$\cos\mu_{n,m}T = \frac{1}{\mu_{n,m}},$$

которое имеет решения

$$T_k = \pm\frac{1}{\mu_{n,m}}\arccos\frac{1}{\mu_{n,m}} + \frac{2k\pi}{\mu_{n,m}},$$

где k — натуральное число. Следовательно, для других значений T имеет место неравенство $\chi_{2n,m}\neq 0$. В силу достаточной гладкости функций $\psi(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ что ряд

$$\beta(x,y) = \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\psi_{n,m}-\varphi_{n,m}\chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y \tag{54}$$

сходится абсолютно и равномерно.

Условия В. Пусть функция $\psi(x,y)\in C^5\big([0;l]\times[0;l]\big)$ на сегменте $[0;l]$ имеет кусочно непрерывные производные до шестого порядка и

$$\begin{gathered}
\psi(0,y)=\psi(l,y)=\psi(x,0)=\psi(x,l)=0,\\
\psi_{xx}(0,y)=\psi_{xx}(l,y)=\psi_{xx}(x,0)=\psi_{xx}(x,l)=0,\\
\psi_{yy}(0,y)=\psi_{yy}(l,y)=\psi_{yy}(x,0)=\psi_{yy}(x,l)=0,\\
\psi_{xxxx}(0,y)=\psi_{xxxx}(l,y)=\psi_{xxxx}(x,0)=\psi_{xxxx}(x,l)=0,\\
\psi_{yyyy}(0,y)=\psi_{yyyy}(l,y)=\psi_{yyyy}(x,0)=\psi_{yyyy}(x,l)=0.
\end{gathered}$$

Путем шестикратного интегрирования по переменной x в интеграле

$$\psi_{n,m} = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l \psi(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy$$

получаем

$$\psi_{n,m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^6\frac{\psi_{n,m}^{VI}}{n^6},\quad \psi_{n,m}^{VI} = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l \psi_{xxxxxx}(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy, \tag{55}$$

причем справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\big[\psi_{n,m}^{VI}\big]^2 \leqslant \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l \big[\psi_{xxxxxx}(x,y)\big]^2\,dx\,dy < \infty. \tag{56}$$

Аналогично путем шестикратного интегрирования по переменной y получим

$$\psi_{n,m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^6\frac{\psi_{n,m}^{VI}}{m^6},\quad \psi_{n,m}^{VI} = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l \psi_{yyyyyy}(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy, \tag{57}$$

причем справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\psi_{n,m}^{VI}\right]^2 \leqslant \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l\left[\psi_{yyyyyy}(x,y)\right]^2 dx\,dy < \infty. \tag{58}$$

Учитывая формулы (32), (33), (55) и (56) и применяя неравенства Минковского и Гельдера, для ряда (54) получим

$$\begin{aligned}
\left|\beta(x,y)\right| &\leqslant \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big(\left|\psi_{n,m}\right| + \left|\varphi_{n,m}\right|\left|\chi_{1n,m}\right|\Big)\left|\chi_{2,n,m}\right|^{-1}\left|\sin\frac{\pi n}{l}x\right|\left|\sin\frac{\pi m}{l}y\right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\left|\psi_{n,m}\right| + C_1\left|\varphi_{n,m}\right|\int_0^T\left|\Theta(t)\right|dt\right)\left(C_1\int_0^T\left|\Theta(t)\right|dt\right)^{-1} \leqslant \\
&\leqslant \frac{2}{C_0 l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big(\left|\psi_{n,m}\right| + C_0\left|\varphi_{n,m}\right|\Big) \leqslant \frac{2}{C_0 l}\left(\frac{l}{\pi}\right)^6\left[\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}\left|\psi_{n,m}^{VI}\right| + C_0\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}\left|\varphi_{n,m}^{VI}\right|\right] \leqslant \\
&\leqslant \frac{2l^5}{C_0\pi^6}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{12}}}\left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\psi_{n,m}^{VI}\right]^2} + C_0\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}^{VI}\right]^2}\right] \leqslant \\
&\leqslant \gamma_3\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{12}}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\psi_{xxxxxx}(x,y)\right]^2 dx\,dy} + C_0\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\varphi_{xxxxxx}(x,y)\right]^2 dx\,dy}\right] < \infty,
\end{aligned} \tag{59}$$

где

$$\gamma_3 = \frac{2l^5}{C_0\pi^6}, \quad C_0 = C_1\int_0^T\left|\Theta(t)\right|dt,$$

а величина C_1 определяется из формулы (31). Аналогично с учетом оценок (34), (35), (57) и (58) получаем

$$\begin{aligned}
\left|\beta(x,y)\right| &\leqslant \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big(\left|\psi_{n,m}\right| + \left|\varphi_{n,m}\right|\left|\chi_{1n,m}\right|\Big)\left|\chi_{2,n,m}\right|^{-1}\left|\sin\frac{\pi n}{l}x\right|\left|\sin\frac{\pi m}{l}y\right| \leqslant \\
&\leqslant \gamma_3\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{12}}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\psi_{yyyyyy}(x,y)\right]^2 dx\,dy} + C_0\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\varphi_{yyyyyy}(x,y)\right]^2 dx\,dy}\right] < \infty.
\end{aligned} \tag{60}$$

Из (59) и (60) следует, что ряд (54) сходится абсолютно и равномерно в области $\{0 < x, y < l\}$.

Аналогично доказывается сходимость следующих рядов:

$$\beta_{xxxx}(x,y) = \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\psi_{n,m} - \varphi_{n,m}\chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y,$$

$$\beta_{yyyy}(x,y) = \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\psi_{n,m} - \varphi_{n,m}\chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}}\left(\frac{\pi m}{l}\right)^4\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y.$$

Подставляя (51) в (27), окончательно определим основную неизвестную функцию $U(t,x,y)$:

$$U(t,x,y) = \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n,m}\left(F_{n,m}(t) - M_{n,m}(t)\frac{\chi_{1n,m}}{\chi_{2n,m}}\right) + \psi_{n,m}\frac{M_{n,m}(t)}{\chi_{2n,m}}\right]\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y. \tag{61}$$

Для ряда (61) нетрудно доказать справедливость оценок, которые выше доказаны для случая ряда (27). При этом законно почленное дифференцирование ряда (61)) по всем переменным, и полученные ряды будут сходиться абсолютно и равномерно.

Теперь покажем, что решение $U(t,x,y)$ интегро-дифференциального уравнения (1) устойчиво по функции восстановления $\beta(x,y)$. Пусть $U_1(t,x,y)$ и $U_2(t,x,y)$ — два различных решения краевой задачи (1)–(4), соответствующие двум различным значениям функции восстановления $\beta_1(x,y)$ и $\beta_2(x,y)$, соответственно. Предположим, что

$$\left|\beta_{1n,m}-\beta_{2n,m}\right|<\delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m}$ — такие достаточно малые величины, что ряд $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}\delta_{n,m}$ сходится. Тогда в силу условий теоремы из (27) имеем

$$\left|U_1(t,x,y)-U_2(t,x,y)\right|\leqslant\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|M_{n,m}(t)\right|\left|\beta_{1n,m}-\beta_{2n,m}\right|<\frac{4}{l}\max_{t\in[0,T]}\left|M(t)\right|\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{n,m}.$$

Отсюда окончательно получаем утверждения об устойчивости решения интегро-дифференциального уравнения (1) по функции восстановления, если положим

$$\varepsilon=\frac{4}{l}\max_{t\in[0,T]}\left|M(t)\right|\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{n,m}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* А, Б *и* В. *Тогда прямая задача* (1)–(4) *однозначно разрешима в области* Ω, *если выполняются условия* (18) *и* (23). *Это решение определяется рядом* (27). *При этом возможно почленное дифференцирование ряда* (27) *по всем переменным, и полученные ряды будут сходиться абсолютно и равномерно. Кроме того, при* $\chi_{2n,m}\neq 0$ *пара решений обратной задачи однозначно определяется из формул* (54) *и* (61). *При этом решение* $U(t,x,y)$ *интегро-дифференциального уравнения* (1) *устойчиво по функции восстановления* $\beta(x,y)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аманов Д., Мурзамбетова М. Б.* Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2013. — № 1. — С. 3–10.
2. *Ахтямов А. М., Аюпова А. Р.* О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2010. — *12*, № 3. — С. 37–42.
3. *Баев А. Д., Шабров С. А., Мон Меан.* О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. физ. мат. — 2014. — № 1. — С. 50–55.
4. *Буряченко Е. А.* О размерности ядра задачи Дирихле для уравнений четвертого порядка// Диффер. уравн. — 2015. — *51*, № 4. — С. 472–480.
5. *Кириченко С. В.* Об одной нелокальной задаче для уравнения четвертого порядка с доминирующей смешанной производной// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2017. — № 2. — С. 26–31.
6. *Зарипов С. К.* Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной точкой в ядре// Вестн. Томск. ун-та. Мат. мех. — 2017. — № 46. — С. 24–36.
7. *Зарипов С. К.* Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенностью в ядре// Вестн. Самар. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2017. — *21*, № 2. — С. 236–248.
8. *Мамедов И. Г.* Фундаментальное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения четвертого порядка с негладкими коэффициентами// Владикавказ. мат. ж. — 2010. — *12*, № 1. — С. 17–32.
9. *Пиров Р.* Об одном способе исследования решения систем уравнений в частных производных, возникающей в трехмерной теории поля// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. физ. мат. — 2015. — № 4. — С. 175–180.

10. *Сафаров Ж. Ш.* Оценки устойчивости решений некоторых обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2014. — № 3. — С. 75–82.
11. *Смирнов М. М.* Модельные уравнения смешанного типа четвертого порядка. — Л.: ЛГУ, 1972.
12. *Смирнов Ю. Г., Цупак А. А.* О фредгольмости уравнения электрического поля в векторной задаче дифракции на объемном частично экранированном теле// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 9. — С. 1242–1251.
13. *Турбин М. В.* Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель—Балкли // Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. физ. мат. — 2013. — № 2. — С. 246–257.
14. *Шабров С. А.* Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. физ. мат. — 2015. — № 2. — С. 168–179.
15. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
16. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — *51*, № 9. — С. 1703–1711.
17. *Юлдашев Т. К.* Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка// Изв. ин-та мат. и информ. Удмурт. ун-та. — 2016. — № 1 (47). — С. 119–128.
18. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2013. — № 1. — С. 58–66.
19. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени// Вестн. Южно-Уральск. ун-та. Сер. Мат. Мех. Физ. — 2013. — *5*, № 1. — С. 69–75.
20. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма третьего порядка с вырожденным ядром// Владикавказ. мат. ж. — 2016. — *18*, № 2. — С. 76–85.
21. *Юлдашев Т. К., Середкина А. И.* Обратная задача для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка// Вестн. Самар. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2013. — *32*, № 3. — С. 46–55.
22. *Benney D. J., Luke J. C.* Interactions of permanent waves of finite amplitude// J. Math. Phys. — 1964. — *43*. — С. 309–313.

Т. К. Юлдашев
Сибирский государственный университет науки и технологий
им. акад. М. Ф. Решетнева, Красноярск
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 156 (2018). С. 103–105

УДК 517.928

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ С ТОЧКОЙ ПОВОРОТА В СЛУЧАЕ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ

© 2018 г. **Э. А. ТУРСУНОВ**

Аннотация. Доказано существование решений возмущенной задачи Коши на бесконечном промежутке и получены асимптотические оценки близости решений возмущенной и невозмущенной задачи на бесконечном промежутке, содержащем неустойчивый интервал.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача Коши, асимптотическая устойчивость, асимптотика, малый параметр, точка поворота, неустойчивый интервал.

AMS Subject Classification: 34E20

1. Введение. Многие актуальные прикладные и технические задачи сводятся к изучению систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старших производных. В начале XX в. появились первые работы, посвященные изучению линейных уравнений с малым параметром при старшей производной. В 1950-х гг. начались систематические исследования таких систем. Исследованиями занимались А. Н. Тихонов, Л. С. Понтрягин, А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, М. И. Иманалиев, В. И. Рожков, А. А. Шишкин, С. А. Ломов, А. И. Нейштадт и др.

Одним из основных результатов в теории сингулярно возмущенных уравнений является теорема А. Н. Тихонова о предельном переходе. А. Н. Тихонов сформулировал достаточные условия, при выполнении которых решения возмущенной и невозмущенной систем асимптотически близки. Л. С. Понтрягин и его ученики значительно продвинули теорию систем с малым параметром при старшей производной.

Первой работой, в которой рассматривается случай нарушения условия устойчивости на некотором отрезке, но выполняется предельный переход, является работа М. А. Шишковой [9]. В данной работе исследуется задача Коши при нарушении условия устойчивости. Получены асимптотические оценки близости решений возмущенной и невозмущенной задачи на бесконечном промежутке, содержащем неустойчивый интервал.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\alpha} f(t), \quad t \in (t_0, +\infty), \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon), \quad \|x^0(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{\beta}), \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ — малый параметр, $A(t)$ — аналитическая квадратная (2×2)-матрица с элементами $a_{jm}(t)$, $j,m = 1,2$, $f(t) = \big(f_1(t), f_2(t)\big)^T$ — аналитическая вектор-функция, $x^0(\varepsilon) = \big(x_1^0(\varepsilon), x_2^0(\varepsilon)\big)^T$, $t_0 = -a/2n$.

Условие U_1. Пусть матрица $A(t)$ имеет комплексно сопряженные собственные значения

$$\lambda_{1,2}(t) = (a-t)^{2n-1}(t \pm ik),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $0 < a \in \mathbb{R}$, $a = k\,\mathrm{tg}(\pi n/(2n+1))$, $0 < k \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1 - 1/(2n)$, $\beta \geqslant \alpha$, $i = \sqrt{-1}$.

Решение задачи Коши (1)–(2) существует и единственно при $0 < \varepsilon$. Исследуем асимптотическое поведение решения задачи (1)–(2), когда малый параметр ε стремится к нулю, т.е. асимптотическую близость решения возмущенной задачи и решения предельного уравнения при $\varepsilon \to 0$.

Рассматриваемая задача имеет следующие особенности:

1) присутствие малого параметра ε при старшей производной системы (1);
2) при $t = a$ собственные значения матрицы функции $A(t)$ совпадают, т.е. $\lambda_1(a) = \lambda_2(a)$. По терминологии В. Вазова (см. [10]) и М. В. Федорюка (см. [8]) точка $t = a$ называется *точкой поворота* системы (1) порядка $(2n-1)$, $n \in \mathbb{N}$;
3) действительные части собственных значений $\lambda_{1,2}(t)$ в интервале $t \in [-a/2, +\infty)$ меняют знаки, т.е.

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) = t(a-t)^{2n-1} < 0, \quad t \in [-a/2n, 0) \cup (a, +\infty),$$
$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) = t(a-t)^{2n-1} > 0, \quad t \in (0, a).$$

Это означает, что в рассматриваемом интервале нарушается условие асимптотической устойчивости (одно из условии теоремы А. Н. Тихонова о предельном переходе, см. [5]).

В устойчивом интервале, т.е. когда $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) < 0$, выполняются все условия теоремы А. Н. Тихонова о предельном переходе и поэтому имеет место равенство:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = \widetilde{x}(t),$$

где $\widetilde{x}(t)$ — решение предельной задачи. В неустойчивом интервале, т.е. в случае $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) > 0$, вопрос о предельном переходе остается открытым.

Впервые для конкретного примера положительный ответ на этот вопрос дала М. А. Шишкова (см. [9]). Подобная задача в общем виде исследована в [1–4]. В [6] доказана асимптотическая близость решений возмущенной задачи и предельного уравнения на интервале, содержащем бесконечно большой неустойчивый интервал.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполняются условие U_1. Тогда для решения задачи* (1)–(2) *справедливо равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = \widetilde{x}(t), \quad t \in [-a/2n, +\infty).$$

Доказательство. Предельное уравнение (1) имеет решение $\widetilde{x}(t) = 0$. Уравнение (1) с помощью преобразования $x(t,\varepsilon) = B(t)y(t,\varepsilon)$ приводится к виду

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = \Lambda(t)y(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\alpha}h(t) + \varepsilon g(t)y(t,\varepsilon), \quad t \in (t_0, +\infty), \tag{3}$$

$$y(t_0,\varepsilon) = y^0(\varepsilon), \quad \|y^0(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{\beta}), \tag{4}$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(t), \lambda_2(t)\big)$, $h(t) = B^{-1}(t)f(t)$, $g(t) = -B^{-1}(t)B'(t)$. Задачу Коши (3)–(4) приведем к интегральному уравнению

$$y(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)y^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\Big(g(\tau)y(\tau,\varepsilon) + \varepsilon^{\alpha-1}h(\tau)\Big)d\tau, \tag{5}$$

где

$$E(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\Lambda(s)ds\right).$$

Далее интегральное уравнение (5) будем решать методом последовательных приближений.

При оценке последовательных приближений применяем идею [9] перехода в комплексную плоскость. Пути интегрирования состоят из критических линий уровней (линии Стокса; (см. [1–4, 6]). При интегрировании применим метод стационарной фазы (см. [7]). В результате получим следующие оценки для последовательных приближений:

$$y_{j,1}(t,\varepsilon) \sim O\big(\varepsilon^{\beta}\big) + O\big(\varepsilon^{\alpha-1+1/2n}\big) \sim O\big(\varepsilon^{\alpha-1+1/2n}\big), \qquad \alpha - 1 + 1/2n > 0, \quad j = 1,2;$$
$$y_{j,2}(t,\varepsilon) \sim O(\varepsilon^{\alpha-1+1/2n})\big(1 + O(\varepsilon^{1/2n})\big), \qquad j = 1,2; \quad \ldots,$$
$$y_{j,k}(t,\varepsilon) \sim O\big(\varepsilon^{\alpha-1+1/2n}\big)\Big(1 + O\big(\varepsilon^{1/2n}\big) + \cdots + O\big(\varepsilon^{(k-1)/2n}\big)\Big), \quad j = 1,2.$$

Отсюда получаем

$$\|x(t,\varepsilon\| \leqslant c\varepsilon^{\alpha-1+1/2n}, \quad 0 < c = \text{const}\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = 0, \quad t \in [-a/2n, +\infty).$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нейштадт А. И.* Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось// Усп. мат. наук. — 1985. — *40*, № 5. — С. 300–301.
2. *Нейштадт А. И., Сидоренко В. В.* Запаздывание потери устойчивости в системе Циглера/ Препринт. — М.: ИПМ РАН им. М. В. Келдыша, 1995.
3. *Нейштадт А. И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях, I// Диффер. уравн. — 1987. — *23*, № 12. — С. 2060–2067.
4. *Нейштадт А. И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях, II// Диффер. уравн. — 1988. — *24*, № 2. — С. 226–233.
5. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных// Мат. сб. — 1952. — *31 (73)*, № 3. — С. 575–586.
6. *Турсунов Д. А.* Асимптотическое поведение решения сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют n-кратный полюс/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Ош, 2005.
7. *Федорюк М. В.* Метод перевала. — М.: Либроком, 2010.
8. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.
9. *Шишкова М. А.* Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных// Докл. АН СССР. — 1973. — *209*, № 3. — С. 576–579.
10. *Wasow W.* Asymptotic expansions for ordinary differential equations. — New York: Dover, 1965.

Э. А. Турсунов
Ошский государственный университет, Ош, Республика Кыргызстан
E-mail: dosh2012@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 156 (2018). С. 106–116

УДК 517.955.2

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

© 2018 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ, К. Х. ШАБАДИКОВ**

Аннотация. Изучена начальная задача для одного квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных высшего порядка. Выражение оператора в частных производных высокого порядка в виде суперпозиции операторов первого порядка позволило применить методы решения уравнений первого порядка. Доказана однозначная разрешимость поставленной начальной задачи.

Ключевые слова: начальная задача, характеристики, производная по направлению, суперпозиция дифференциальных операторов, однозначная разрешимость.

AMS Subject Classification: 35A30, 35C15, 35G55, 35L30

1. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков представляют большой интерес с точки зрения физических приложений (см. [1, 3, 5–9, 12, 13]. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка локально решаются методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений путем сведения их к характеристической системе. Применение метода характеристик позволяет свести изучение эволюции волн к изучению распространения частиц (см. [2]). В [4] разработана методика интегрирования нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. В [10, 11] рассмотрены обратные задачи для квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В области $\Omega \equiv \Omega_T \times \mathbb{R}$ рассматривается квазилинейное уравнение вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \int\limits_0^1 u(t,\sigma)\, d\sigma \frac{\partial}{\partial x}\right)^m u(t,x) = f\big(t,x,u(t,x)\big) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^i}{\partial t^i} u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi_{i+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, 2n+m-1}, \tag{2}$$

где $u(t,x)$ — искомая функция, $f(t,x,u) \in C(\Omega_T \times \mathbb{R}^2)$, $\varphi_i(x) \in C(\mathbb{R})$, $i = \overline{1, 2n+m}$, $\Omega_T \equiv [0;T]$, $0 < T < \infty$, $\mathbb{R} \equiv (-\infty; \infty)$, $0 < \alpha = \text{const}$; n, m — произвольные натуральные числа.

2. Сведение начальной задачи к интегральному уравнению.

Лемма 1. *Начальная задача* (1), (2) *эквивалентна следующему интегральному уравнению*:

$$u(t,x) \equiv \Theta(t,x;u,r) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i\big(r(t,0,x)\big) \frac{t^{m-i}}{(m-i)!} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \Big[\varphi_{m+2j-1}\big(r(t,s,x) - \alpha s\big) + \varphi_{m+2j-1}\big(r(t,s,x) + \alpha s\big)\Big] \frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\, ds+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t \frac{(t-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\Big[\varphi_{m+2k}\big(r(t,s,x)-\alpha(t-2s)\big)+\varphi_{m+2k}\big(r(t,s,x)+\alpha(t-2s)\big)\Big]\frac{s^{n-k}}{(n-k)!}\,ds+$$

$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}f\Big(s,r(t,s,x),u(s,r(t,s,x))\Big)\,ds, \quad (3)$$

где

$$r(t,s,x)=x-\int_s^t\int_0^1 u(\theta,\sigma)\,d\sigma\,d\theta;$$

x играет роль параметра.

Доказательство. Левую часть уравнения (1) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}+\int_0^1 u(t,\sigma)d\sigma\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}+\int_0^1 u(t,\sigma)\,d\sigma\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u=D_2^nD_1^nD_0^m[u],$$

где

$$D_2[u]\equiv u_t-\alpha u_x,\quad D_1[u]\equiv u_t+\alpha u_x,\quad D_0[u]\equiv u_t+\int_0^1 u(t,\sigma)\,d\sigma u_x.$$

Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$D_2^nD_1^nD_0^m[u]=f\big(t,x,u(t,x)\big). \quad (4)$$

Из (4) видно, что уравнение (1) имеет характеристики

$$x+\alpha t=C_1,\quad x-\alpha t=C_2,\quad x-\int_0^t\int_0^1 u(s,\sigma)\,d\sigma\,ds=C_3,$$

где C_i — произвольные постоянные, $i=\overline{1,3}$. Характеристики обладают теми свойствами, что дифференциальные выражения $D_1[u]$, $D_2[u]$, $D_3[u]$ представляют собой (с точностью до множителя) производные du/dl_1, du/dl_2, du/dl_3 функции u по направлениям l_1, l_2, l_3 вдоль характеристик. Это позволяет представить уравнение (1) как обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение u вдоль характеристик.

Рассмотрим выражение $D_2[u]\equiv u_t-\alpha u_x$. Введем обозначение $p(t,s,x)=x+\alpha(t-s)$ и произведем замену $u(t,x)=\vartheta(t,z)$, $z=p(t,0,x)$. После дифференцирования имеем

$$u_t(t,x)=\vartheta_t(t,z)+\vartheta_z(t,z)z_t.$$

Так как $\vartheta_z(t,z)=u_x(t,x)$, $z_t=\alpha$, то получаем

$$\vartheta_t(t,z)=u_t(t,x)-\alpha u_x(t,x).$$

С учетом последнего соотношения и формулы $x=z-\alpha t$ уравнение (4) перепишем в виде

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}D_1^nD_0^m[\vartheta(t,z)]=f\Big(t,z-\alpha t,\vartheta(t,z-\alpha t)\Big). \quad (5)$$

Интегрируя n раз уравнение (5), получаем

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}D_1^nD_0^m[\vartheta(t,z)]=\Phi_1(z)+\int_0^t f\Big(s,z-\alpha s,\vartheta(s,z-\alpha s)\Big)\,ds, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} D_1^n D_0^m[\vartheta(t,z)] = \Phi_2(z) + \Phi_1(z)t + \int\limits_0^t (t-s) f\Big(s, z-\alpha s, \vartheta(s, z-\alpha s)\Big)\, ds, \tag{7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_1^n D_0^m[\vartheta(t,z)] = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(z) \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f\Big(s, z-\alpha s, \vartheta(s, z-\alpha s)\Big)\, ds, \tag{8}$$

где $\Phi_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — произвольные постоянные вдоль первой характеристики $x + \alpha t = C_1$, которые подлежат определению, $C_1 = \mathrm{const}$. Начальные условия (2) для (6)–(8) имеют вид

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} D_1^n D_0^m[\vartheta(0,z)] = \varphi_{2n+m}(z), \qquad \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} D_1^n D_0^m[\vartheta(0,z)] = \varphi_{2n+m-2}(z), \quad \ldots,$$
$$\frac{\partial}{\partial t} D_1^n D_0^m[\vartheta(0,z)] = \varphi_{m+4}(z), \qquad D_1^n D_0^m[\vartheta(0,z)] = \varphi_{m+2}(z).$$

В силу этих условий из (6)–(8) получаем, что

$$D_1^n D_0^m[\vartheta(t,z)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{2i+m}(z) \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f\Big(s, z-\alpha s, \vartheta(s, z-\alpha s)\Big)\, ds. \tag{9}$$

С учетом соотношений $\vartheta(t,z) = u(t,x)$, $z = x + \alpha t$, $z - \alpha s = p(t,s,x)$ интегро-дифференциальное уравнение (9) перепишем в виде

$$D_1^n D_0^m[u(t,x)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{2i+m}(x+\alpha t) \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f\Big(s, p(t,s,x), u\big(s, p(t,s,x)\big)\Big)\, ds, \tag{10}$$

где $p(t,s,x) = x + \alpha(t-s)$.

Теперь рассмотрим дифференциальное выражение $D_1[u] \equiv u_t + \alpha u_x$. Введем обозначение $q(t,s,x) = x - \alpha(t-s)$ и произведем замену $u(t,x) = w(t,\eta)$, $\eta = q(t,0,x)$. После дифференцирования имеем

$$u_t(t,x) = w_t(t,\eta) - \alpha w_\eta(t,\eta).$$

Так как $w_\eta(t,\eta) = u_x(t,x)$, то отсюда получаем

$$w_t(t,\eta) = u_t(t,x) + \alpha u_x(t,x). \tag{11}$$

С учетом (11) и $x + \alpha t = \eta + 2\alpha t$ уравнение (10) перепишем в виде

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} D_0^m[w(t,\eta)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi_{2i+m}(\eta + 2\alpha t) \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f\Big(s, p(t,s,\eta+\alpha t), w\big(s, p(t,s,\eta+\alpha t)\big)\Big)\, ds. \tag{12}$$

Интегрирование уравнения (12) дает

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} D_0^m[w(t,\eta)] = \Phi_{n+1}(\eta) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^t \varphi_{2j+m}(\eta + 2\alpha s) \frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\, ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} f\Big(s, p(t,s,q), w\big(s, p(t,s,q)\big)\Big)\, ds, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} D_0^m[w(t,\eta)] = \Phi_{n+2}(\eta) + \Phi_{n+1}(\eta)t + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^t (t-s)\varphi_{2j+m}(\eta+2\alpha s)\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds + \\ + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n+1}}{(n+1)!} f\Big(s, p(t,s,q), w\big(s,p(t,s,q)\big)\Big)\,ds, \quad (14)$$

....

$$D_0^m w(t,\eta) = \sum_{i=n+1}^{2n} \Phi_i(\eta)\frac{t^{2n-i}}{(2n-i)!} + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{2j+m}(\eta+2\alpha s)\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds + \\ + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f\Big(s, p(t,s,q), w\big(s,p(t,s,q)\big)\Big)\,ds, \quad (15)$$

где $\Phi_i(\eta)$, $i = n+1, n+2, \ldots, 2n$ — произвольные постоянные вдоль характеристики $x - \alpha t = C_2$, которые подлежат определению, $C_2 = \mathrm{const}$. Начальные условия (2) для (13)–(15) имеют вид

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} D_0^m w(0,\eta) = \varphi_{2n+m-1}(\eta), \quad \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} D_0^m w(0,\eta) = \varphi_{2n+m-3}(\eta), \quad \ldots, \quad D_0^m w(0,\eta) = \varphi_{m+1}(\eta).$$

В силу этих условий из (13)–(15) получаем, что

$$D_0^m w(t,\eta) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{2i+m-1}(\eta)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{2j+m}(\eta+2\alpha s)\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds + \\ + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f\Big(s, p(t,s,q), w\big(s,p(t,s,q)\big)\Big)\,ds. \quad (16)$$

Учитывая, что $w(t,\eta) = u(t,x)$, $\eta = q(t,0,x) = x - \alpha t$, $\eta + 2\alpha s = x - \alpha(t-2s)$, $p(t,s,q) = x$, перепишем уравнения (18) в виде

$$D_0^m[u(t,x)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{2i+m-1}(x-\alpha t)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \\ + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{2j+m}\big(x-\alpha(t-2s)\big)\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f\big(s,x,u(s,x)\big)\,ds, \quad (17)$$

где x играет роль параметра. Теперь уравнения (1) в отличие от (4) запишем в виде

$$D_1^n D_2^n D_0^m[u] = f\big(t,x,u(t,x)\big).$$

Повторяя все процедуры (5)–(16), аналогично (17) получим

$$D_0^m u(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{2i+m-1}(x+\alpha t)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \\ + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{2j+m}(x+\alpha(t-2s))\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f\big(s,x,u(s,x)\big)\,ds. \quad (18)$$

Из (17) и (18) получаем, что

$$D_0^m u(t,x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big[\varphi_{2i+m-1}(x-\alpha t)+\varphi_{2i+m-1}(x+\alpha t)\Big]\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\Big[\varphi_{2j+m}(x-\alpha(t-2s))+\varphi_{2j+m}(x+\alpha(t-2s))\Big]\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds+$$
$$+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}f\big(s,x,u(s,x)\big)\,ds, \quad (19)$$

где x играет роль параметра.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$D_0[u]\equiv u_t+\int\limits_0^1 u(t,\sigma)d\sigma u_x.$$

Введем обозначение

$$r(t,s,x)=x-\int\limits_s^t\int\limits_0^1 u(\theta,\sigma)\,d\sigma\,d\theta$$

и произведем замену $u(t,x)=h(t,\xi)$, $\xi=r(t,0,x)$. После дифференцирования имеем

$$u_t(t,x)=h_t(t,\xi)-\int\limits_0^1 u(t,\sigma)\,d\sigma\,h_\xi(t,\xi).$$

Так как $h_\xi(t,\xi)=u_x(t,x)$, то отсюда получаем, что

$$h_t(t,\xi)=u_t(t,x)+\int\limits_0^1 u(t,\sigma)\,d\sigma\,u_x(t,x).$$

С учетом этого соотношения и формулы

$$x=\xi+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u(\theta,\sigma)\,d\sigma\,d\theta=\xi+r(t,0,0)$$

запишем уравнение (19) в виде

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}h(t,\xi)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big[\varphi_{2i+m-1}\big(\xi+r(t,0,0)-\alpha t\big)+\varphi_{2i+m-1}\big(\xi+r(t,0,0)+\alpha t\big)\Big]\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\Big[\varphi_{2j+m}\big(\xi+r(s,0,0)-\alpha(t-2s)\big)+$$
$$+\varphi_{2j+m}\big(\xi+r(s,0,0)+\alpha(t-2s)\big)\Big]\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds+$$
$$+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}f\Big(s,\xi+r(s,0,0),h\big(s,\xi+r(s,0,0)\big)\Big)\,ds. \quad (20)$$

Интегрируя теперь уравнения (20) вдоль третьей характеристики m раз, получаем

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}h(t,\xi)=\Phi_{2n+1}(\xi)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\Big[\varphi_{2i+m-1}\big(\xi+r(s,0,0)-\alpha s\big)+\varphi_{2i+m-1}\big(\xi+r(s,0,0)+\alpha s\big)\Big]\frac{s^{n-i}}{(n-i)!}\,ds+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\frac{(t-s)^n}{n!}\Big[\varphi_{2j+m}\big(\xi+r(s,0,0)-\alpha(t-2s)\big)+$$
$$+\varphi_{2j+m}\big(\xi+r(s,0,0)+\alpha(t-2s)\big)\Big]\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds+$$
$$+\int_0^t\frac{(t-s)^{2n}}{(2n)!}f\Big(s,\xi+r(s,0,0),h\big(s,\xi+r(s,0,0)\big)\Big)\,ds, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}h(t,\xi)=\Phi_{2n+2}(\xi)+\Phi_{2n+1}(\xi)t+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t(t-s)\Big[\varphi_{2i+m-1}\big(\xi+r(s,0,0)-\alpha s\big)+\varphi_{2i+m-1}\big(\xi+r(s,0,0)+\alpha s\big)\Big]\frac{s^{n-i}}{(n-i)!}\,ds+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\frac{(t-s)^{n+1}}{(n+1)!}\Big[\varphi_{2j+m}\big(\xi+r(s,0,0)-\alpha(t-2s)\big)+$$
$$+\varphi_{2j+m}\big(\xi+r(s,0,0)+\alpha(t-2s)\big)\Big]\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds+$$
$$+\int_0^t\frac{(t-s)^{2n+1}}{(2n+1)!}f\Big(s,\xi+r(t,0,0),h\big(s,\xi+r(t,0,0)\big)\Big)\,ds, \quad (22)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h(t,\xi)=\sum_{i=1}^{m}\Phi_{2n+i}(\xi)\frac{t^{m-i}}{(m-i)!}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\Big[\varphi_{2j+m-1}\big(\xi+r(s,0,0)-\alpha s\big)+\varphi_{2j+m-1}\big(\xi+r(s,0,0)+\alpha s\big)\Big]\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\frac{(t-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\Big[\varphi_{2k+m}\big(\xi+r(s,0,0)-\alpha(t-2s)\big)+$$
$$+\varphi_{2k+m}\big(\xi+r(s,0,0)+\alpha(t-2s)\big)\Big]\frac{s^{n-k}}{(n-k)!}\,ds+$$
$$+\int_0^t\frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}f\Big(s,\xi+r(s,0,0),h\big(s,\xi+r(s,0,0)\big)\Big)\,ds, \quad (23)$$

где Φ_i, $i=\overline{2n+1,2n+m}$ — произвольные постоянные вдоль третьей характеристики, которые подлежат определению.

Начальные условия (2) для (21)–(23) имеют вид

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}h(0,\xi)=\varphi_m(\xi),\quad \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}h(0,\xi)=\varphi_{m-1}(\xi),\quad \ldots,\quad h(0,\xi)=\varphi_1(\xi).$$

В силу этих условий из (21)–(23) получаем, что

$$h(t,\xi)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(\xi)\frac{t^{m-i}}{(m-i)!}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\Big[\varphi_{2j+m-1}\big(\xi+r(s,0,0)-\alpha s\big)+\varphi_{2j+m-1}\big(\xi+r(s,0,0)+\alpha s\big)\Big]\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\frac{(t-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\Big[\varphi_{2k+m}\big(\xi+r(s,0,0)-\alpha(t-2s)\big)+$$

$$+\varphi_{2k+m}\big(\xi+r(s,0,0)+\alpha(t-2s)\big)\Big]\frac{s^{n-k}}{(n-k)!}\,ds+$$

$$+\int_0^t\frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}f\Big(s,\xi+r(s,0,0),h\big(s,\xi+r(s,0,0)\big)\Big)\,ds. \tag{24}$$

Учитывая соотношения

$$h(t,\xi)=u(t,x),\quad \xi=r(t,0,x)=x-\int_0^t\int_0^1 u(\theta,\sigma)\,d\sigma\,d\theta,$$

$$\xi+r(s,0,0)=\xi+\int_0^s\int_0^1 u(\theta,\sigma)\,d\sigma\,d\theta=x-\int_s^t\int_0^1 u(\theta,\sigma)\,d\sigma\,d\theta=r(t,s,x),$$

из (24) получаем интегральное уравнение (3). Путем $(2n+m)$-кратного дифференцирования вдоль соответствующих характеристик из (3) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^{2n+m}u(t,x)}{dt^{2n+m}}=f\big(t,x,u(t,x)\big), \tag{25}$$

где x играет роль параметра.

Для левой части (25) вдоль характеристик справедливо

$$\frac{d^{2n+m}u(t,x)}{dt^{2n+m}}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}+\int_0^1 u(\theta,\sigma)\,d\sigma\,d\theta\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u(t,x)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}+\int_0^1 u(\theta,\sigma)\,d\sigma\,d\theta\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u(t,x).$$

Следовательно, нелинейное интегральное уравнение (3) эквивалентно начальной задаче (1), (2) вдоль характеристик. Лемма доказана. $\square$

3. Исследования интегрального уравнения (3).

Лемма 2. *Пусть выполняются следующие условия*:

1. $$0<\max_{x\in\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{m}\big|\varphi_i(x)\big|\frac{T^{m-i}}{(m-i)!}+\max_{(t,x)\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}\big|\varphi_{m+2j-1}(x)\big|\int_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds+$$ $$+\max_{(t,x)\in\Omega}\sum_{k=1}^{n}\big|\varphi_{m+2k}(x)\big|\int_0^t\frac{(t-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\frac{s^{n-k}}{(n-k)!}ds\leqslant\Delta_0<\infty;$$
2. $\big|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)\big|\leqslant\chi_i\big|x_1-x_2\big|,\quad 0<\chi_i=\mathrm{const}<\infty,\quad i=\overline{1,2n};$

3. $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}\big|f(t,x,u)\big|\leqslant M(t),\quad 0<M(t)\in C(\Omega_T);$

4. $\big|f(t,x_1,u_1)-f(t,x_2,u_2)\big|\leqslant Q(t)\big|x_1-x_2\big|+N(t)\big|u_1-u_2\big|,$
$0<Q(t)\in C(\Omega_T),\quad 0<N(t)\in C(\Omega_T);$

5. $0<\max\limits_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}M(s)\,ds\leqslant\Delta_1.$

Тогда интегральное уравнение (3) *имеет единственное решение в области* Ω. *Это решение можно найти методом последовательных приближений*:

$$u_0(t,x)=0,\quad u_{\tau+1}(t,x)\equiv\Theta(t,x;u_\tau,p_\tau),\quad \tau=0,1,\ldots,\tag{26}$$

где

$$p_0(s,t,x)=x,\quad p_\tau(s,t,x)=x-\int\limits_s^t\int\limits_0^1 u_\tau(\theta,\sigma)\,d\sigma\,d\theta.$$

Доказательство. В силу условий леммы заключаем, что для первой разности приближения (26) справедлива следующая оценка:

$$\big|u_1(t,x)-u_0(t,x)\big|\leqslant\sum_{i=1}^m\big|\varphi_i(x)\big|\frac{T^{m-i}}{(m-i)!}+\sum_{j=1}^n\big|\varphi_{m+2j-1}(x)\big|\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}ds+$$
$$+\sum_{k=1}^n\big|\varphi_{m+2k}(x)\big|\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\frac{s^{n-k}}{(n-k)!}\,ds+\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}M(s)\,ds\leqslant\Delta_0+\Delta_1.\tag{27}$$

С учетом (27) и условий леммы из (26) получаем, что для второй разности приближения (26) справедлива следующая оценка:

$$\big|u_2(t,x)-u_1(t,x)\big|\leqslant\sum_{i=1}^m\frac{\chi_iT^{m-i}}{(m-i)!}\int\limits_0^t\big|u_1(s,x)-u_0(s,x)\big|\,ds+$$
$$+\sum_{j=1}^n\chi_{m+2j-1}\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\int\limits_s^t\big|u_1(\theta,x)-u_0(\theta,x)\big|\,d\theta\,ds+$$
$$+\sum_{k=1}^n\chi_{m+2k}\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\frac{s^{n-k}}{(n-k)!}\int\limits_s^t\big|u_1(\theta,x)-u_0(\theta,x)\big|\,d\theta\,ds+$$
$$+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\left[Q(s)\int\limits_s^t\big|u_1(\theta,x)-u_0(\theta,x)\big|\,d\theta+N(s)\big|u_1(s,x)-u_0(s,x)\big|\right]ds\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^t H(t,s)\big|u_1(s,x)-u_0(s,x)\big|\,ds\leqslant\big(\Delta_0+\Delta_1\big)\int\limits_0^t H(t,s)ds,\tag{28}$$

где

$$H(t,s)=\sum_{i=1}^m\frac{\chi_iT^{m-i}}{(m-i)!}+\sum_{j=1}^n\chi_{m+2j-1}\frac{(t-s)^m}{(m-1)!}\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}+$$
$$+\sum_{k=1}^n\chi_{m+2k}\frac{(t-s)^{n+m}}{(n+m-1)!}\frac{s^{n-k}}{(n-k)!}+\frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\Big[Q(s)(t-s)+N(s)\Big].$$

С учетом (28) для третьей разности приближения (26) получим следующую оценку:

$$\left|u_3(t,x)-u_2(t,x)\right| \leqslant \int\limits_0^t H(t,s)\left|u_2(s,x)-u_1(s,x)\right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(\Delta_0+\Delta_1\right)\int\limits_0^t H(t,s)\int\limits_0^s H(s,\theta)\,d\theta\,ds = \frac{\Delta_0+\Delta_1}{2!}\left[\int\limits_0^t H(t,s)ds\right]^2.$$

Продолжая этот процесс, по индукции получаем

$$\left|u_{\tau+1}(t,x)-u_\tau(t,x)\right| \leqslant \int\limits_0^t H(t,s)\left|u_\tau(s,x)-u_{\tau-1}(s,x)\right| ds \leqslant \frac{\Delta_0+\Delta_1}{\tau!}\left[\int\limits_0^t H(t,s)\,ds\right]^\tau. \tag{29}$$

Из оценки (29) следует, что последовательность функций $\left\{u_\tau(t,x)\right\}_{\tau=1}^{\infty}$, определенная итерацией (26), сходится абсолютно и равномерно в области Ω.

Теперь предположим, что интегральное уравнение (3) имеет в области Ω два решения $u(t,x)$ и $\vartheta(t,x)$. Тогда для модуля разности этих решений справедлива оценка

$$\left|u(t,x)-\vartheta(t,x)\right| \leqslant \int\limits_0^t H(t,s)\left|u(s,x)-\vartheta(s,x)\right| ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла—Беллмана к последнему неравенству, получаем, что

$$\left|u(t,x)-\vartheta(t,x)\right| \equiv 0$$

в области Ω. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть выполняются условия леммы* 2. *Тогда для итерационного процесса* (26) *справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\left|u_\tau(t,x)-u(t,x)\right| \leqslant \left(\Delta_0+\Delta_1\right)\frac{\omega^\tau}{\tau!}\cdot\exp\omega, \tag{30}$$

где

$$\omega = \max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t H(t,s)\,ds < \infty.$$

Доказательство. Действительно, в силу условий леммы с учетом (29) имеем оценку

$$\left|u_\tau(t,x)-u(t,x)\right| \leqslant \left|u_{\tau+1}(t,x)-u_\tau(t,x)\right| + \left|u_{\tau+1}(t,x)-u(t,x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\Delta_0+\Delta_1\right)\frac{\omega^\tau}{\tau!} + \int\limits_0^t H(t,s)\left|u_\tau(s,x)-u(s,x)\right| ds.$$

Применение неравенства Гронуолла–Беллмана к последнему неравенству дает оценку (30). □

Лемма 4. *Пусть выполняются условия леммы* 2. *Тогда для любых* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\left|u(t,x_1)-u(t,x_2)\right| \leqslant \Psi(t)\left|x_1-x_2\right|, \tag{31}$$

где

$$\Psi(t) = \mu\exp\left\{\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}N(s)\,ds\right\} < \infty,$$

$$\mu = \max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t \left[\sum_{i=1}^m \frac{\chi_i T^{m-i}}{(m-i)!} + \sum_{j=1}^n \chi_{m+2j-1}\frac{(t-s)^m}{(m-1)!}\frac{s^{n-j}}{(n-j)!} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^n \chi_{m+2k}\frac{(t-s)^{n+m}}{(n+m-1)!}\frac{s^{n-k}}{(n-k)!} + \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}Q(s)(t-s)\right] ds.$$

Доказательство. Действительно, в силу условий леммы имеем оценку

$$\bigl|u(t,x_1)-u(t,x_2)\bigr| \leqslant \sum_{i=1}^m \frac{\chi_i T^{m-i}}{(m-i)!}\int\limits_0^t \bigl|x_1-x_2\bigr|\,ds +$$
$$+ \sum_{j=1}^n \chi_{m+2j-1}\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\int\limits_s^t \bigl|x_1-x_2\bigr| d\theta ds +$$
$$+ \sum_{k=1}^n \chi_{m+2k}\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\frac{s^{n-k}}{(n-k)!}\int\limits_s^t \bigl|x_1-x_2\bigr|\,d\theta\,ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}Q(s)\int\limits_s^t \bigl|x_1-x_2\bigr|\,d\theta\,ds + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}N(s)\bigl|u_1(s,x)-u_0(s,x)\bigr|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \mu\cdot\bigl|x_1-x_2\bigr| + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}N(s)\bigl|u(s,x_1)-u(s,x_2)\bigr|\,ds,$$

где

$$\mu = \max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t \left[\sum_{i=1}^m \frac{\chi_i T^{m-i}}{(m-i)!} + \sum_{j=1}^n \chi_{m+2j-1}\frac{(t-s)^m}{(m-1)!}\frac{s^{n-j}}{(n-j)!} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^n \chi_{m+2k}\frac{(t-s)^{n+m}}{(n+m-1)!}\frac{s^{n-k}}{(n-k)!} + \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}Q(s)(t-s)\right] ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла – Беллмана к последней оценке получаем

$$\bigl|u(t,x_1)-u(t,x_2)\bigr| \leqslant \mu\bigl|x_1-x_2\bigr|\cdot\exp\left\{\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}N(s)\,ds\right\}.$$

Отсюда следует справедливость оценки (31). □

Из доказанных лемм вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия леммы* 2. *Тогда начальная задача* (1), (2) *имеет единственное решение в области* Ω. *Это решение находится из итерационного процесса Пикара* (26). *Для решения начальной задачи* (1), (2) *справедливы оценки* (30) *и* (31).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алгазин С. Д., Кийко И. А.* Флаттер пластин и оболочек. — М.: Наука, 2006.
2. *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка. — М.: МГУ, 1999.
3. *Замышляева А. А.* Математические модели соболевского типа высокого порядка// Вестн. Южно-Уральск. ун-та. Сер. Мат. модел. програм. — 2014. — *7*, № 2. — С. 5–28.
4. *Иманалиев М. И., Ведь Ю. А.* О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом// Диффер. уравн. — 1989. — *23*, № 3. — С. 465–477.

5. *Каримов Ш. Т.* Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 8. — С. 27–41.
6. *Кошанов Б. Д., Солдатов А. П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 12. — С. 1666–1681.
7. *Похожаев С. И.* О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка// Мат. сб. — 1982. — *117*, № 2. — С. 251–265.
8. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. — Киев: Наукова думка, 1973.
9. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 1. — С. 112–123.
10. *Юлдашев Т. К.* Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка// Вестн. Томск. ун-та. Мат. Мех. — 2012. — № 2. — С. 56–62.
11. *Юлдашев Т. К.* Об обратной задаче для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка// Вестн. Южно-Уральск. ун-та. Сер. Мат. Мех. Физ. — 2012. — *6*, № 11 (270). — С. 35–41.
12. *Юлдашев Т. К.* Обобщенная разрешимость смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения высокого порядка с вырожденным ядром// Изв. ин-та там. информ. Удмурт. ун-та. — 2017. — *50*. — С. 121–132.
13. *Юлдашева А. В.* Об одной задаче для квазилинейного уравнения четного порядка// Дифференциальные уравнения. Математическая физика/ Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — М.: ВИНИТИ РАН, 2017. — *140*. — С. 43–49.

Т. К. Юлдашев
Сибирский государственный университет науки и технологий
им. акад. М. Ф. Решетнева, Красноярск
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

К. Х. Шабадиков
Ферганский государственный университет, Фергана, Республика Узбекистан
E-mail: konak4426@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 156 (2018). С. 117–125

УДК 517.955.2

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ДВУМЕРНЫМ ОПЕРАТОРОМ УИЗЕМА ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ

© 2018 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ**

Аннотация. В работе изучается однозначная разрешимость начальной задачи для одного квазилинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных высшего порядка с вырожденным ядром. Выражение интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволило представить рассматриваемое интегро-дифференциальное уравнение как обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее изменение неизвестной функции вдоль линии характеристик. Доказана однозначная разрешимость начальной задачи методом последовательных приближений. Получена оценка сходимости итерационного процесса Пикара.

***Ключевые слова*:** начальная задача, характеристики, производная по направлению, метод последовательных приближений, однозначная разрешимость.

***AMS Subject Classification*:** 35A30, 35C15, 35G55, 35L30

1. Постановка задачи. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков представляют большой интерес с точки зрения физических приложений. К таким уравнениям приводятся многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек (см. [1, 3, 6–10, 16, 17]). Выражение операторов частных производных высокого порядка в виде суперпозицию операторов первого порядка позволяет, в частности, редуцировать задачу к характеристической системе и применять методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод характеристик сводит изучение эволюции волн к изучению распространения частиц (см. [2]). В [4, 5] разработана методика интегрирования нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. В [11, 12] рассмотрены обратные задачи для квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных с вырожденным ядром раньше рассматривались в [13–15].

В области $\Omega \equiv \Omega_T \times \mathbb{R}^2$ рассматривается уравнение вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(t,x,y)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\right)^m u(t,x,y) = \\ = \lambda \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,s,\xi,z)u(s,\xi,z)\,dz\,d\xi\,ds + F\big(t,x,y,u(t,x,y)\big) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(t,x,y)\big|_{t=0} = \varphi_1(x,y), \quad \frac{\partial^i}{\partial t^i}u(t,x,y)\Big|_{t=0} = \varphi_{i+1}(x,y), \quad x,y\in\mathbb{R}, \quad i=\overline{1,m-1}, \quad (2)$$

где $u(t,x,y)$ — искомая функция,

$$K(t,s,\xi,z) = f(\xi,z)\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(t)b_\nu(s),$$

$a_\nu(t), b_\nu(s) \in C(\Omega_T)$, λ — действительный спектральный параметр,

$$0 < \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| f(\xi, z) \right| dz \, d\xi < \infty,$$

$F(t, x, y, u) \in C(\Omega \times \mathbb{R})$, $\varphi_i(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$, $i = \overline{1, m}$, $\Omega_T \equiv [0; T]$, $0 < T < \infty$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$; n, m — натуральные числа. Здесь предполагается, что функции $a_\nu(t)$ и $b_\nu(s)$ являются линейно независимыми.

2. Сведение задачи (1), (2) к интегральному уравнению.

Теорема 1. *Начальная задача* (1), (2) *эквивалентна следующему интегральному уравнению*:

$$u(t, x, y) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i\big(p(t, 0, x, y), q(t, 0, x, y)\big) \frac{t^{m-i}}{(m-i)!} +$$
$$+ \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \left[\lambda \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(s) c_\nu + F\Big(s, p(t, s, x, y), q(t, s, x, y), u\big(s, p(t, s, x, y), q(t, s, x, y)\big)\Big) \right] ds, \quad (3)$$

где функции $p(t, s, x, y)$, $q(t, s, x, y)$ *определяются из системы интегральных уравнений*

$$\begin{cases} p(t, s, x, y) = x - \displaystyle\int\limits_s^t u\big(\theta, p(t, \theta, x, y), q(t, \theta, x, y)\big) \, d\theta, \\ q(t, s, x, y) = y - \displaystyle\int\limits_s^t u\big(\theta, p(t, \theta, x, y), q(t, \theta, x, y)\big) \, d\theta, \end{cases} \quad (4)$$

$p(t, t, x, y) = x$, $q(t, t, x, y) = y$,

$$c_\nu = \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi, z) b_\nu(s) u(s, \xi, z) \, dz \, d\xi \, ds,$$

x, y *играют роль параметра.*

Доказательство. Левую часть уравнения (1) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(t, x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \right)^m u(t, x, y) = D_u^m[u],$$

где

$$D_u = \frac{\partial}{\partial t} + u(t, x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

— двумерный оператор Уизема. Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$D_u^m[u] = \lambda \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi, z) \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(t) b_\nu(s) u(s, \xi, z) \, dz \, d\xi \, ds + F\big(t, x, y, u(t, x, y)\big). \quad (5)$$

Уравнение (1) имеет характеристики

$$x - \int\limits_0^t u(s, x, y) \, ds = C_1, \quad y - \int\limits_0^t u(s, x, y) \, ds = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Вводя обозначение

$$c_\nu = \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi, z) b_\nu(s) u(s, \xi, z) \, dz \, d\xi \, ds, \quad (6)$$

запишем уравнение (5) в виде

$$D_u^m[u] = \lambda \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(t) c_\nu + F\big(t, x, y, u(t, x, y)\big). \tag{7}$$

Введем также обозначения

$$p(t, s, x, y) = x - \int\limits_s^t u(\theta, x, y)\, d\theta, \quad p(t, t, x, y) = x,$$

$$q(t, s, x, y) = y - \int\limits_s^t u(\theta, x, y)\, d\theta, \quad q(t, t, x, y) = y.$$

Введем такую функцию четырех аргументов $w(t, s, x, y) = u\big(s, p(t, s, x, y), q(t, s, x, y)\big)$, что при $t = s$ она принимает вид $w(t, t, x, y) = u\big(t, p(t, t, x, y), q(t, t, x, y)\big) = u(t, x, y)$. С учетом того, что

$$\begin{aligned} w_s(t, s, x, y) &= u_s\big(s, p(t, s, x, y), q(t, s, x, y)\big) + \\ &\quad + u_p\big(s, p(t, s, x, y), q(t, s, x, y)\big) \cdot p_s(t, s, x, y) + u_q\big(s, p(t, s, x, y), q(t, s, x, y)\big) \cdot q_s(t, s, x, y) = \\ &= u_s\big(s, p(t, s, x, y), q(t, s, x, y)\big) + \\ &\quad + u\big(s, p(t, s, x, y), q(t, s, x, y)\big) \Big[u_p\big(s, p(t, s, x, y), q(t, s, x, y)\big) + u_q\big(s, p(t, s, x, y), q(t, s, x, y)\big)\Big], \end{aligned}$$

перепишем уравнение (7) в виде

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m} w(t, s, x, y) = \lambda \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(s) c_\nu + F\big(s, p(t, s, x, y), q(t, s, x, y), w(t, s, x, y)\big). \tag{8}$$

Интегрируя уравнения (8) вдоль характеристик m раз, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} w(t, s, x, y) &= \Phi_1\big(p(t, 0, x, y), q(t, 0, x, y)\big) + \\ &+ \int\limits_0^s \left[\lambda \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(\varsigma) c_\nu + F\big(\varsigma, p(t, \varsigma, x, y), q(t, \varsigma, x, y), w(t, \varsigma, x, y)\big)\right] d\varsigma, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m-2}}{\partial s^{m-2}} w(t, s, x, y) &= \Phi_2\big(p(t, 0, x, y), q(t, 0, x, y)\big) + \Phi_1\big(p(t, 0, x, y), q(t, 0, x, y)\big) s + \\ &+ \int\limits_0^s (s - \varsigma) \left[\lambda \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(\varsigma) c_\nu + F\big(\varsigma, p(t, \varsigma, x, y), q(t, \varsigma, x, y), w(t, \varsigma, x, y)\big)\right] d\varsigma, \end{aligned} \tag{10}$$

....

$$\begin{aligned} w(t, s, x, y) &= \sum_{i=1}^{m} \Phi_i\big(p(t, 0, x, y), q(t, 0, x, y)\big) \frac{s^{m-i}}{(m-i)!} + \\ &+ \int\limits_0^s \frac{(s - \varsigma)^{m-1}}{(m-1)!} \left[\lambda \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(\varsigma) c_\nu + F\big(\varsigma, p(t, \varsigma, x, y), q(t, \varsigma, x, y), w(t, \varsigma, x, y)\big)\right] d\varsigma, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\Phi_i\big(p(t, 0, x, y), q(t, 0, x, y)\big)$ — произвольные постоянные вдоль характеристик, подлежащие определению, $i = \overline{1, m}$.

Начальные условия (2) для уравнения (8) имеют вид

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} w(t,s,x,y) = \varphi_m\big(p(t,0,x,y), q(t,0,x,y)\big),$$
$$\frac{\partial^{m-2}}{\partial s^{m-2}} w(t,s,x,y) = \varphi_{m-1}\big(p(t,0,x,y), q(t,0,x,y)\big),$$
$$w(t,s,x,y) = \varphi_1\big(p(t,0,x,y), q(t,0,x,y)\big).$$

С учетом этих начальных условий из (9)–(11) получаем, что

$$w(t,s,x,y) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i\big(p(t,0,x,y), q(t,0,x,y)\big) \frac{s^{m-i}}{(m-i)!} +$$
$$+ \int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m-1}}{(m-1)!} \left[\lambda \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(\varsigma) c_\nu + F\big(\varsigma, p(t,\varsigma,x,y), q(t,\varsigma,x,y), w(t,\varsigma,x,y)\big)\right] d\varsigma. \quad (12)$$

При $t = s$ из (12) получаем интегральное уравнение (3) вместе с системой (4).

Путем m-кратного дифференцирования из (3) вдоль характеристик получаем

$$\frac{d^m u(t,x,y)}{dt^m} = \lambda \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(t) c_\nu + F\big(t,x,y,u(t,x,y)\big), \quad (13)$$

где x, y играют роль параметров. С другой стороны, для левой части (13) вдоль характеристик справедливо cjjnyjitybt

$$\frac{d^m u(t,x,y)}{dt^m} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u(t,x,y)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\right)^m u(t,x,y).$$

Теорема доказана. □

Теперь преобразуем интегральное уравнение (3). Подставляя его в формулу (6), получим систему алгебраических уравнений

$$c_\nu - \lambda \sum_{\mu=1}^{n} A_{\nu\mu} c_\mu = B_\nu(u,p,q), \quad \nu = \overline{1,n}, \quad (14)$$

где

$$A_{\nu\mu} = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,z) b_\nu(s) \int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m-1}}{(m-1)!} a_\nu(\varsigma)\, d\varsigma\, dz\, d\xi\, ds,$$

$$B_\nu(u,p,q) = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,z) b_\nu(s) \sum_{i=1}^{m} \varphi_i\big(p(s,0,\xi,z), q(s,0,\xi,z)\big) \frac{s^{m-i}}{(m-i)!}\, dz\, d\xi\, ds +$$
$$+ \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,z) b_\nu(s) \int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m-1}}{(m-1)!} F\big(\varsigma, p(s,\varsigma,\xi,z), q(q,\varsigma,\xi,z), u(\varsigma,p,q)\big) d\varsigma\, dz\, d\xi\, ds. \quad (15)$$

Система (14) однозначно разрешима при любых $B_\nu(u,p,q)$, если выполняется следующее условие:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \ldots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22} & \ldots & \lambda A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda A_{n1} & \lambda A_{n2} & \ldots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (16)$$

Определитель $\Delta(\lambda)$ в (16) является многочленом степени не выше n относительно λ. Алгебраическое уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет не более n различных корней. Через Λ обозначим множество корней этого алгебраического уравнения. При $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Lambda$ условие (16) выполняется; для таких регулярных значений λ система (14) имеет единственное решение при любой правой части.

Для регулярных значений $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Lambda$ решения системы (14) записываются в виде

$$c_\nu = \frac{\Delta_\nu(\lambda, u, p, q)}{\Delta(\lambda)}, \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{17}$$

где

$$\Delta_\nu(\lambda, u, p, q) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \dots & \lambda A_{1(\nu-1)} & B_1(u,p,q) & \lambda A_{1(\nu+1)} & \dots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \dots & \lambda A_{2(\nu-1)} & B_2(u,p,q) & \lambda A_{2(\nu+1)} & \dots & \lambda A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda A_{n1} & \dots & \lambda A_{n(\nu-1)} & B_n(u,p,q) & \lambda A_{n(\nu+1)} & \dots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Из (18) видно, что определители $\Delta_\nu(\lambda, u, p, q)$ зависят и от самой неизвестной функции $u(t, x, y)$. Подстановка (17) в уравнение (3) дает следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$u(t,x,y) \equiv \Theta(t,x,y;u,p,q) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i\big(p(t,0,x,y), q(t,0,x,y)\big)\frac{t^{m-i}}{(m-i)!} +$$

$$+ \int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\left[\lambda \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(s)\frac{\Delta_\nu(\lambda,u,p,q)}{\Delta(\lambda)} + F\big(s, p(t,s,x,y), q(t,s,x,y), u(s,p,q)\big)\right] ds. \tag{19}$$

Итак, доказана, следующая теорема.

Теорема 2. *При регулярных значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Lambda$, для которых выполняется условие* (16)*, интегральные уравнения* (3) *и* (19) *эквивалентны.*

3. Разрешимость интегрального уравнения (19).

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия*:

1. $0 < \max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \sum\limits_{i=1}^{m} \big|\varphi_i(x,y)\big|\dfrac{T^{m-i}}{(m-i)!} \leqslant \Delta_0 < \infty$;
2. $\big|\varphi_i(x_1,y_1) - \varphi_i(x_2,y_2)\big| \leqslant \chi_i\big[|x_1-x_2| + |y_1-y_2|\big], \quad 0 < \chi_i = \mathrm{const} < \infty, \quad i = \overline{1,m}$;
3. $\max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \big|f(t,x,y,u)\big| \leqslant M(t), \quad 0 < M(t) \in C(\Omega_T)$;
4. $\Big|f\big(t,x_1,y_1,u_1\big) - f\big(t,x_2,y_2,u_2\big)\Big| \leqslant Q(t)\big[|x_1-x_2| + |y_1-y_2|\big] + N(t)\big|u_1-u_2\big|$,
   $0 < Q(t) \in C(\Omega_T), \quad 0 < N(t) \in C(\Omega_T)$;
5. $0 < \max\limits_{t\in\Omega_T} \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} M(s)\,ds \leqslant \Delta_1$;
6. $0 < \max\limits_{t\in\Omega_T} \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \left|\lambda \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(s)\frac{\Delta_\nu(\lambda,0,x,y)}{\Delta(\lambda)}\right| ds \leqslant \Delta_2 < \infty$;
7. $0 < \max\limits_{t\in\Omega_T} \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \big[2Q(s)(t-s) + N(s)\big]\,ds < \infty, \quad 0 < \big|\overline{\Delta}_\nu(\lambda)\big| < \infty$,

где величины $\overline{\Delta}_\nu(\lambda)$ определяются ниже из (24)*. Тогда при регулярных значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\Lambda$, для которых выполняется условие* (16)*, интегральное уравнение* (19) *имеет единственное решение в области Ω. Это решение можно найти методом последовательных приближений*:

$$u_0(t,x,y) = 0, \quad u_{k+1}(t,x,y) \equiv \Theta\big(t,x,y;u_k,p_k,q_k\big), \quad k = 0,1,\dots, \tag{20}$$

где $p_k(t,s,x,y)$, $q_k(t,s,x,y)$ *определяются из следующих итераций:*

$$\begin{cases} p_0(t,s,x,y)=x, \quad p_k(t,s,x,y)=x-\int\limits_s^t u_k\big(\theta,p_{k-1}(t,\theta,x,y),q_{k-1}(t,\theta,x,y)\big)\,d\theta, \\ q_0(t,s,x,y)=y, \quad q_k(t,s,x,y)=y-\int\limits_s^t u_k\big(\theta,p_{k-1}(t,\theta,x,y),q_{k-1}(t,\theta,x,y)\big)\,d\theta. \end{cases}$$

Доказательство. В силу условий теоремы для первой разности приближения (20) справедлива следующая оценка:

$$\big|u_1(t,x,y)-u_0(t,x,y)\big| \leqslant \sum_{i=1}^m \big|\varphi_i(x,y)\big|\frac{T^{m-i}}{(m-i)!}+ \\ +\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\left[\left|\lambda\sum_{\nu=1}^n a_\nu(s)\frac{\Delta_\nu(\lambda,0,x,y)}{\Delta(\lambda)}\right|+M(s)\right]ds \leqslant \Delta_0+\Delta_1+\Delta_2. \quad (21)$$

С учетом (21) и условий теоремы для второй разности приближения (20) справедлива оценка

$$\big|u_2(t,x,y)-u_1(t,x,y)\big| \leqslant 2\sum_{i=1}^m \chi_i\frac{T^{m-i}}{(m-i)!}\int\limits_0^t \big|u_1(s,x,y)-u_0(s,x,y)\big|\,ds+ \\ +\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\left[2Q(s)\int\limits_s^t \big|u_1(\theta,x,y)-u_0(\theta,x,y)\big|\,d\theta+N(s)\big|u_1(s,x,y)-u_0(s,x,y)\big|\right]ds+ \\ +\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\left|\lambda\sum_{\nu=1}^n a_\nu(s)\frac{\Delta_\nu\big(\lambda,u_1,p_1,q_1\big)-\Delta_\nu\big(\lambda,u_0,p_0,q_0\big)}{\Delta(\lambda)}\right|ds. \quad (22)$$

С учетом (15) из (18) имеем оценку

$$\big|\Delta_\nu\big(\lambda,u_1,p_1,q_1\big)-\Delta_\nu\big(\lambda,u_0,p_0,q_0\big)\big| \leqslant \big|\overline{\Delta}_\nu(\lambda)\big|\int\limits_0^s \big|u_1(\theta,x,y)-u_0(\theta,x,y)\big|\,d\theta, \quad (23)$$

где

$$\overline{\Delta}_\nu(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \ldots & \lambda A_{1(\nu-1)} & \overline{B}_1 & \lambda A_{1(\nu+1)} & \ldots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \ldots & \lambda A_{2(\nu-1)} & \overline{B}_2 & \lambda A_{2(\nu+1)} & \ldots & \lambda A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda A_{n1} & \ldots & \lambda A_{n(\nu-1)} & \overline{B}_n & \lambda A_{n(\nu+1)} & \ldots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix}, \quad \nu=\overline{1,n}, \quad (24)$$

$$\overline{B}_\nu=2\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi,z)b_\nu(s)\sum_{i=1}^m \chi_i\frac{s^{m-i}}{(m-i)!}\,dz\,d\xi\,ds+ \\ +\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi,z)b_\nu(s)\int\limits_0^s \frac{(s-\theta)^{m-1}}{(m-1)!}\Big[2Q(\theta)(s-\theta)+N(\theta)\Big]\,d\theta\,dz\,d\xi\,ds.$$

С учетом (23) оценку (22) перепишем в виде

$$\big|u_2(t,x,y)-u_1(t,x,y)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^t H(t,s)\big|u_1(s,x,y)-u_0(s,x,y)\big|\,ds \leqslant \big(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2\big)\int\limits_0^t H(t,s)\,ds, \tag{25}$$

где

$$H(t,s)=2\sum_{i=1}^m \chi_i\frac{T^{m-i}}{(m-i)!}+\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\left[\left|\lambda\sum_{\nu=1}^n sa_\nu(s)\frac{\overline{\Delta}_\nu(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right|+2Q(s)(t-s)+N(s)\right].$$

С учетом (25) для третьей разности приближения (20) получим следующую оценку

$$\big|u_3(t,x,y)-u_2(t,x,y)\big| \leqslant \int\limits_0^t H(t,s)\big|u_2(s,x,y)-u_1(s,x,y)\big|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \big(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2\big)\int\limits_0^t H(t,s)\int\limits_0^s H(s,\theta)\,d\theta\,ds = \big(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2\big)\frac{1}{2!}\left[\int\limits_0^t H(t,s)\,ds\right]^2.$$

Продолжая этот процесс, по индукции получаем, что

$$\big|u_{k+1}(t,x,y)-u_k(t,x,y)\big| \leqslant \int\limits_0^t H(t,s)\big|u_k(s,x,y)-u_{k-1}(s,x,y)\big|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \big(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2\big)\frac{1}{k!}\left[\int\limits_0^t H(t,s)\,ds\right]^k. \tag{26}$$

Из оценки (26) следует, что последовательность функций $\big\{u_k(t,x,y)\big\}_{k=1}^\infty$, определенная формулой (20), сходится абсолютно и равномерно в области Ω.

Пусть интегральное уравнение (19) имеет в области Ω два решения $u(t,x,y)$ и $\vartheta(t,x,y)$. Тогда для разности этих решений справедлива оценка

$$\big|u(t,x,y)-\vartheta(t,x,y)\big| \leqslant \int\limits_0^t H(t,s)\big|u(s,x,y)-\vartheta(s,x,y)\big|\,ds.$$

Применяя неравенство Гроноулла—Беллмана, получаем, что $\big|u(t,x,y)-\vartheta(t,x,y)\big|\equiv 0$ в области Ω. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 3. *Тогда для итерационного процесса* (20) *справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\big|u_k(t,x,y)-u(t,x,y)\big| \leqslant \big(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2\big)\frac{\rho^k}{k!}e^\rho, \tag{27}$$

где

$$\rho=\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t H(t,s)\,ds<\infty.$$

Доказательство. Действительно, в силу условий теоремы с учетом (26) имеем оценку

$$\big|u_k(t,x,y)-u(t,x,y)\big| \leqslant \big|u_{k+1}(t,x,y)-u_k(t,x,y)\big|+\big|u_{k+1}(t,x,y)-u(t,x,y)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \big(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2\big)\frac{\rho^k}{k!}+\int\limits_0^t H(t,s)\big|u_k(s,x,y)-u(s,x,y)\big|\,ds.$$

Применяя неравенство Гроноулла–Беллмана к последнему неравенству, получаем оценку (27). □

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 3. *Тогда для любых* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\bigl|u(t,x_1,y_1)-u(t,x_2,y_2)\bigr| \leqslant \Psi(t)\Bigl(\bigl|x_1-x_2\bigr|+\bigl|y_1-y_2\bigr|\Bigr), \tag{28}$$

где

$$\Psi(t)=\mu\exp\left\{\int\limits_0^t H(t,s)\,ds\right\}<\infty, \quad \mu=\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t\left\{\sum_{i=1}^m\frac{\chi_i T^{m-i}}{(m-i)!}+\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}Q(s)(t-s)\right\}ds.$$

Доказательство. Действительно, в силу условий теоремы имеем оценку

$$\begin{aligned}
&\bigl|u\bigl(t,x_1,y_1\bigr)-u\bigl(t,x_2,y_2\bigr)\bigr| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=1}^m \chi_i\frac{T^{m-i}}{(m-i)!}\int\limits_0^t\Bigl(\bigl|x_1-x_2\bigr|+\bigl|y_1-y_2\bigr|+2\bigl|u(s,x_1,y_1)-u(s,x_2,y_2)\bigr|\Bigr)ds+\\
&+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\left|\lambda\sum_{\nu=1}^n a_\nu(s)\frac{\overline{\Delta}_\nu(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right|\int\limits_0^s\bigl|u(\theta,x_1,y_1)-u(\theta,x_2,y_2)\bigr|\,d\theta\,ds+\\
&+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}Q(s)\int\limits_s^t\Bigl(\bigl|x_1-x_2\bigr|+\bigl|y_1-y_2\bigr|+\bigl|u(\theta,x_1,y_1)-u(\theta,x_2,y_2)\bigr|\Bigr)d\theta\,ds+\\
&+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}N(s)\bigl|u(s,x_1,y_1)-u(s,x_2,y_2)\bigr|\,ds\leqslant\\
&\leqslant\mu\cdot\Bigl(\bigl|x_1-x_2\bigr|+\bigl|y_1-y_2\bigr|\Bigr)+\int\limits_0^t H(t,s)\bigl|u(s,x_1,y_1)-u(s,x_2,y_2)\bigr|\,ds,
\end{aligned}$$

где

$$\mu=\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t\left\{\sum_{i=1}^m\frac{\chi_i T^{m-i}}{(m-i)!}+\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}Q(s)(t-s)\right\}ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла—Беллмана к последней оценке получаем

$$\bigl|u(t,x_1,y_1)-u(t,x_2,y_2)\bigr|\leqslant\mu\Bigl(\bigl|x_1-x_2\bigr|+\bigl|y_1-y_2\bigr|\Bigr)\exp\left\{\int\limits_0^t H(t,s)\,ds\right\}.$$

Отсюда следует справедливость оценки (28). □

Наконец, сформулируем основной результат работы, вытекающий из доказанных выше теорем.

Теорема 6. *Пусть выполняются все условия теоремы* 3. *Тогда при регулярных значениях параметра* $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Lambda$, *для которых выполняется условие* (16), *начальная задача* (1), (2) *имеет единственное решение в области* Ω. *Это решение может быть найдено при помощи итерационного процесса Пикара* (20). *Для решения начальной задачи* (1), (2) *справедливы оценки* (27) *и* (28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алгазин С. Д., Кийко И. А.* Флаттер пластин и оболочек. — М.: Наука, 2006.
2. *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка. — М.: МГУ, 1999.
3. *Замышляева А. А.* Математические модели соболевского типа высокого порядка// Вестн. Южно-Уральск. ун-та. Сер. Мат. модел. програм. — 2014. — 7, № 2. — С. 5–28.

4. *Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н.* К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема// Докл. РАН. — 1992. — *325*, № 6. — С. 111–115.
5. *Иманалиев М. И., Ведь Ю. А.* О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом// Диффер. уравн. — 1989. — *23*, № 3. — С. 465–477.
6. *Каримов Ш. Т.* Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 8. — С. 27–41.
7. *Кошанов Б. Д., Солдатов А. П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 12. — С. 1666–1681.
8. *Похожаев С. И.* О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка// Мат. сб. — 1982. — *117*, № 2. — С. 251–265.
9. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. — Киев: Наукова думка, 1973.
10. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 1. — С. 112–123.
11. *Юлдашев Т. К.* Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка// Вестн. Томск. ун-та. Мат. Мех. — 2012. — № 2. — С. 56–62.
12. *Юлдашев Т. К.* Об обратной задаче для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка// Вестн. Южно-Уральск. ун-та. Сер. Мат. Мех. Физ. — 2012. — *6*, № 11 (270). — С. 35–41.
13. *Юлдашев Т. К.* Обобщенная разрешимость смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения высокого порядка с вырожденным ядром// Изв. ин-та там. информ. Удмурт. ун-та. — 2017. — *50*. — С. 121–132.
14. *Юлдашев Т. К.* Об одной нелокальной задаче для неоднородного интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2017. — *159*, № 1. — С. 88–99.
15. *Юлдашев Т. К.* Об одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром// Геометрия и механика/ Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — М.: ВИНИТИ РАН, 2018. — *145*. — С. 95–109.
16. *Юлдашева А. В.* Об одной задаче для квазилинейного уравнения четного порядка// Дифференциальные уравнения. Математическая физика/ Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — М.: ВИНИТИ РАН, 2017. — *140*. — С. 43–49.
17. *Benney D. J., Luke J. C.* Interactions of permanent waves of finite amplitude// J. Math. Phys. — 1964. — *43*. — С. 309–313.

Т. К. Юлдашев
Сибирский государственный университет науки и технологий
им. акад. М. Ф. Решетнева, Красноярск
E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`