ISSN 0233-6723

ВИНИТИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 153

Москва 2018

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 153

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Москва 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 153 (2018). С. 3–12

УДК 517.5; 517.956.225

ЗАДАЧА БРЕЗИСА—МАРКУСА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

© 2018 г. **Ф. Г. АВХАДИЕВ**

Аннотация. Многие неравенства типа Харди в областях евклидова пространства связаны с точными, но недостижимыми константами. В. Г. Мазья и ряд других авторов обнаружили, что это обстоятельство позволяет усилить соответствующие неравенства за счет добавления новых интегральных слагаемых. В работе приведен краткий обзор результатов по этой тематике, начало которым положено исследованиями Х. Брезиса и М. Маркуса по неравенствам типа Харди. Приведены также обобщения задачи Брезиса и Маркуса на неравенства типа Реллиха с весами, являющимися степенями расстояния от точки до границы области. Кроме того, рассмотрены обобщения на случай конформно инвариантных интегральных неравенств в односвязных и двусвязных плоских областях гиперболического типа.

Ключевые слова: неравенство Харди, неравенство Реллиха, выпуклая область, внутренний радиус, функция Бесселя, метрика Пуанкаре.

AMS Subject Classification: 39B72; 26D15; 30C20

1. Введение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, т.е. открытое связное множество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Через $C_0^\infty(\Omega)$ обозначим семейство гладких функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактными носителями в области Ω. Как правило, предполагаем, что $n \geqslant 2$.

Пусть $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ и пусть $\partial\Omega$ — граница области Ω. Тогда определена функция расстояния

$$\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{y\in\partial\Omega} |x - y|, \quad x \in \Omega.$$

Известно следующее утверждение.

Предложение 1 (см. [17, 20, 21]). *Если область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ выпукла и $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, то для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\nabla f|^2\, dx \geqslant \frac{1}{4} \int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^2}\, dx, \tag{1}$$

где постоянная $1/4$ является точной. А именно, для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, что справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega \left|\nabla f_\varepsilon\right|^2 dx < \frac{1+\varepsilon}{4} \int\limits_\Omega \frac{|f_\varepsilon|^2}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^2}\, dx. \tag{2}$$

Пусть $H_+ = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\right\}$. Очевидно, $\operatorname{dist}(x, \partial H_+) = x_n$. Поэтому неравенство (1) для $\Omega = H_+$ имеет вид

$$\int\limits_{H_+} |\nabla f|^2\, dx \geqslant \frac{1}{4} \int\limits_{H_+} \frac{|f|^2}{x_n^2}\, dx \quad \forall f \in C_0^\infty(H_+).$$

Интересно сравнить это неравенство для полупространства со следующим результатом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №17-01-00282-а), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Республики Татарстан (проект № 15-41-02433).

Предложение 2 (В. Г. Мазья [3]). *Для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(H_+)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{H_+} |\nabla f|^2\,dx \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_{H_+} \frac{|f|^2}{x_n^2}\,dx + \frac{1}{16}\int\limits_{H_+} \frac{|f|^2}{x_n(x_{n-1}^2+x_n^2)^{1/2}}\,dx. \tag{3}$$

Через $H_0^1(H_+)$ обозначим пространство Соболева, полученное замыканием множества $C_0^\infty(H_+)$ по норме

$$\|f\| := \sqrt{\int\limits_{H_+} |\nabla f|^2\,dx} + \sqrt{\int\limits_{H_+} |f|^2 x_n^{-2}\,dx}.$$

Неравенство В. Г. Мазьи (3) показывает, что не существует функции $f \not\equiv 0$, $f \in H_0^1(H_+)$, для которой справедливо равенство

$$\int\limits_{H_+} |\nabla f|^2\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_{H_+} \frac{|f|^2}{x_n^2}\,dx,$$

несмотря на то, что

$$\frac{1}{4} = \inf_{\substack{f\not\equiv 0,\\ f\in H_0^1(H_+)}} \left(\int\limits_{H_+} |\nabla f|^2\,dx\right) \Bigg/ \left(\int\limits_{H_+} |f|^2 x_n^{-2}\,dx\right).$$

Аналогичный факт справедлив для любой ограниченной выпуклой области в силу следующего результата.

Предложение 3 (Х. Брезис, М. Маркус [16]). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область с конечным диаметром $D = \operatorname{diam}(\Omega)$. Тогда для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla f|^2\,dx \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\delta^2}\,dx + \frac{1}{4}\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^2\,\ln^{-2}(eD/\delta)}{\delta^2}dx, \tag{4}$$

где $\delta = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Внимание многих математиков привлекло следующее неравенство типа Харди в форме Брезиса—Маркуса из той же статьи [16]:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla f|^2\,dx \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^2}\,dx + \lambda\int\limits_{\Omega} |f|^2\,dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5}$$

Задача Брезиса—Маркуса состоит в исследовании существования областей, для которых справедливо неравенство вида (5) с некоторой постоянной $\lambda = \lambda(\Omega)$ и оценкам этой постоянной в зависимости от геометрических характеристик области Ω. Естественно, наибольший интерес вызывают те области Ω, для которых постоянная $\lambda = \lambda(\Omega)$ является положительным числом.

Настоящая статья посвящена обзору базовых идей и результатов, относящихся к задаче Брезиса—Маркуса. Ограниченный объем статьи не позволил нам рассмотреть многие интересные L^p-обобщения неравенств вида (5) на случай $p \neq 2$.

Следует также отметить, что мы отдаем предпочтение результатам, в которых представлены явные оценки числового параметра $\lambda = \lambda(\Omega)$ в зависимости от простых геометрических характеристик области Ω. Кроме того, в статье приведены несколько результатов, близких к неравенствам в форме Брезиса—Маркуса, но связанных с неравенствами типа Реллиха и с конформно инвариантными интегральными неравенствами.

2. Неравенства в форме Брезиса—Маркуса в выпуклых областях и в шаровом слое. Приведем сначала результат Х. Брезиса и М. Маркуса из [16] о неравенстве вида (5) для областей с конечным диаметром.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная выпуклая область с диаметром $D = \operatorname{diam}(\Omega)$. Тогда для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\nabla f|^2\,dx \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^2}\,dx + \frac{1}{4(\operatorname{diam}\Omega)^2}\int\limits_\Omega |f|^2\,dx. \tag{6}$$

В [16] был поставлен вопрос, можно ли заменить постоянную $\lambda = 1/(4\operatorname{diam}\Omega)^2$ в неравенстве (6) величиной вида $\lambda = K(n)/(4(|\Omega|^{2/n})$ с некоторой положительной постоянной $K(n)$, где $|\Omega|$ обозначает объем области Ω в $\mathbb{R}^n$.

Понятно, что этот вопрос связан с аналогиями по классическим оценкам первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$ для лапласиана при граничных условиях Дирихле и со следующим неравенством Пуанкаре:

$$\int\limits_\Omega |\nabla f|^2\,dx \geqslant \lambda_1(\Omega)\int\limits_\Omega |f|^2\,dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega). \tag{7}$$

А именно, хорошо известны оценка Пуанкаре $\lambda_1(\Omega) \geqslant \pi^2/(\operatorname{diam}\Omega)^2$ и знаменитое изопериметрическое неравенство Рэлея—Фабера—Крана

$$\lambda_1(\Omega) \geqslant \frac{\omega_n^{2/n}}{(\operatorname{vol}\Omega)^{2/n}} j_{n/2-1}^2,$$

где j_ν — первый нуль функции Бесселя J_ν порядка ν, $j_0 = 2{,}4048\ldots$, $j_{1/2} = \pi$ и

$$\nu(\nu+2) < j_\nu^2 < 2(\nu+1)(\nu+3)$$

для любого положительного ν, что обобщает классические оценки Римана $j_\nu \geqslant \nu$ (см. [23, 25]).

Положительный ответ на вопрос Х. Брезиса и М. Маркуса о неравенстве (5) для выпуклых областей с конечным объемом дали М. Хофман-Остенхоф, Т. Хофман-Остенхоф и А. Лаптев в [19]. Они доказали, что неравенство (5) верно с величиной $\lambda = K(n)/(4(|\Omega|^{2/n})$, где

$$K(n) = n\left[\frac{s_{n-1}}{n}\right]^{2/n},$$

где s_{n-1} — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Оценка из [19] была улучшена В. Д. Эвансом и Р. Т. Льюисом.

Теорема 2 (см. [18])**.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная или неограниченная выпуклая область, имеющая конечный объем $|\Omega|$. Тогда для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\nabla f|^2\,dx \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^2}\,dx + \frac{3K(n)}{2|\Omega|^{2/n}}\int\limits_\Omega |f|^2\,dx.$$

В дальнейшем нам потребуются две следующих величины. А именно, внутренний радиус области, определяемый формулой

$$\delta_0(\Omega) = \sup_{x\in\Omega}\operatorname{dist}(x,\partial\Omega),$$

и постоянная Лямба $\lambda_0 = 0{,}940\ldots$, определяемая как первый положительный нуль функции $J_0(t) + 2tJ_0'(t)$, где J_0 — функция Бесселя порядка нуль.

Отметим два простых факта. При $n \geqslant 2$ существуют области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, для которых внутренний радиус является конечной величиной, а диаметр области и ее объем равны бесконечности. Простейший примером такой области является множество $\Omega = (0,1)\times\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Кроме того, используя неравенство Пуанкаре (7) и некоторые свойства первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$, Ф. Г. Авхадиев и К.-Й. Вирс доказали следующий факт.

Предложение 4 (см. [7]). *Если для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, выпуклой или невыпуклой, справедливо неравенство вида* (5) *с некоторой положительной постоянной λ, то внутренний радиус конечен*: $\delta_0(\Omega) < \infty$.

Оказалось, что условие $\delta_0(\Omega) < \infty$ является и достаточным для существования положительной постоянной λ в неравенстве (5) для выпуклых областей. А именно, Ф. Г. Авхадиев и К.-Й. Вирс доказали следующую теорему.

Теорема 3 (см. [7]). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная или неограниченная выпуклая область с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$. Тогда для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\nabla f|^2\, dx \geqslant \frac{1}{4} \int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^2}\, dx + \frac{\lambda_0^2}{(\delta_0(\Omega))^2} \int\limits_\Omega |f|^2\, dx, \tag{8}$$

где $\lambda_0 = 0{,}940\ldots$ — постоянная Лямба. Неравенство (8) *является точным для всех размерностей. А именно, для любого $\varepsilon > 0$ множитель λ_0^2 не может быть заменен множителем $(\lambda_0+\varepsilon)^2$ для любого конечного интервала $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ и для всех областей вида $\Omega = (a, b) \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ и их линейных преобразований.*

Пусть m — положительный параметр. Нам потребуется число $c = c(m)$, удовлетворяющее уравнению

$$J_0\left(\frac{2}{m}c\right) + 2cJ_0'\left(\frac{2}{m}c\right) = 0, \quad 0 < \frac{2c}{m} < j_0 = 2{,}4048\ldots,$$

где J_0 — функция Бесселя порядка 0.

Для выпуклой области с конечным внутренним радиусом имеет место следующее утверждение.

Предложение 5 (см. [7, теорема 2]). *Для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо следующее обобщение неравенства* (8):

$$\int\limits_\Omega |\nabla f|^2\, dx \geqslant \frac{1}{4} \int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{\delta^2}\, dx + \frac{c^2(m)}{\delta_0^m} \int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{\delta^{2-m}}\, dx.$$

Константа $c^2(m)$ в этом неравенстве является точной для тех же областей, которые указаны в теореме 3 в качестве экстремальных областей.

Очевидно, величину $c(m)$ можно рассматривать как значения функции $c : (0, \infty) \to (0, \infty)$, определяемые указанным выше уравнением. В [7] доказано следующее утверждение.

Предложение 6. *Функция $c(m)/m$ от переменной m является монотонно убывающей, а сама функция $c = c(m)$ может быть найдена как решение дифференциального уравнения первого порядка*

$$c' = \frac{c}{m} - \frac{c}{1 + 4c^2}$$

с начальным условием $c(2) = \lambda_0$, где λ_0 Э— постоянная Лямба.

В [7, 9] имеется ряд других обобщений теоремы 3.

Если $n \geqslant 2$ и $\Omega \neq (a, b) \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, то задача определения точной константы перед вторым интегралом в неравенстве (8) является трудной даже в случае простейших областей. Мы продемонстрируем это обстоятельство на примере известных результатов из [10, 14] для случая, когда Ω — шар.

Для шаров

$$B_n = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho\right\},$$

где $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$, рассмотрим вопрос о точной константе $c(n)$ в следующих неравенствах в форме Брезиса—Маркуса:

$$\int\limits_{B_n} |\nabla f|^2\, dx \geqslant \frac{1}{4} \int\limits_{B_n} \frac{|f|^2}{(\rho - |x - x_0|)^2}\, dx + \frac{c(n)}{\rho^2} \int\limits_{B_n} |f|^2\, dx \quad \forall f \in C_0^\infty(B_n).$$

Поскольку константа $c(n)$ инвариантна при линейных конформных преобразованиях, достаточно рассмотреть случай, когда $x_0 = 0$, $\rho = 1$. Поэтому мы полагаем, что константа $c(n)$ определена формулой

$$c(n) = \inf_{f \in C_0^\infty(B_n^0)} \left(\int\limits_{B_n^0} |\nabla f|^2\, dx - \frac{1}{4} \int\limits_{B_n^0} |f|^2 (1 - |x|)^{-2}\, dx \right) \Big/ \left(\int\limits_{B_n^0} |f|^2\, dx \right),$$

где $B_n^0 = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\big\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) $c(1) = \lambda_0^2$, *где* $\lambda_0 = 0{,}940\ldots$ *— постоянная Лямба, определенная как первый положительный нуль функции* $J_0(t) + 2tJ_0'(t)$;

(ii) $c(2) \geqslant 2$;

(iii) $c(3) = j_0^2$, *где* $j_0 = 2{,}4048\ldots$ *— первый положительный нуль функции Бесселя* $J_0(t)$ *порядка* 0;

(iv) *для любого* $n \geqslant 4$, $n \in \mathbb{N}$,

$$c(n) \geqslant j_0^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4};$$

(v) *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c(n)}{n^2} = \frac{1}{4}.$$

Очевидно, утверждение (i) является следствием теоремы 3. Утверждения (iii) и (iv) доказаны Г. Барбатисом, С. Филиппасом и А. Тертикасом в [14]. Утверждения (ii) и (v) доказаны Ф. Г. Авхадиевым и К.-Й. Вирсом в [10].

С теоремой 4 связана следующая гипотеза.

Гипотеза (см. [10]). Для всех областей размерности n с заданным внутренним радиусом δ_0 максимальное значение для константы Брезиса—Маркуса $\lambda = \lambda(\Omega)$ из неравенства (5) равно $\lambda(B_n)$, где B_n — n-мерный шар радиуса δ_0.

Следует также отметить, что остаются нерешенными и задачи о точных оценках сверху и снизу величины λ из неравенства (5) в семействе выпуклых областей с фиксированным диаметром или объемом.

Далее, нам потребуются функции, определяемые равенствами

$$X_1(t) = (1 - \ln t)^{-1}, \quad t \in (0,1], \quad X_1(1) = 1,$$
$$X_j(t) = X_1(X_{j-1}(t)), \quad t \in (0,1], \quad X_j(1) = 1, \quad j = 2, 3, \ldots.$$

Г. Барбатис, С. Филиппас и А. Тертикас установили следующее обобщение неравенства Брезиса—Маркуса (4) (см. [13]).

Теорема 5. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— ограниченная или неограниченная выпуклая область с конечным внутренним радиусом* $\delta_0(\Omega)$. *Тогда существует такая постоянная* $D_0 \geqslant \delta_0(\Omega)$, *что для любой вещественнозначной функции* $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\nabla f|^2\, dx \geqslant \frac{1}{4} \int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{\delta^2}\, dx + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^\infty \int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{\delta^2} X_1^2(\delta/D_0) \cdots X_j^2(\delta/D_0)\, dx,$$

где $\delta = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Рассмотрим теперь шаровой слой $\Omega = B_R \setminus \overline{B}_\rho$, где

$$B_R := \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\big\}, \quad \overline{B}_\rho := \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant \rho\big\}, \quad 0 \leqslant \rho < R \leqslant +\infty.$$

Понятно, что шаровой слой является невыпуклой областью. Тем не менее, для шарового слоя справедливы неравенства типа Харди в форме Брезиса—Маркуса при $n \geqslant 3$. А именно, имеет место следующее утверждение, доказанное Ф. Г. Авхадиевым и А. Лаптевым.

Теорема 6 (см. [5]). *Пусть $n \geqslant 2$ и пусть $\Omega = B_R \setminus \overline{B}_\rho \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\nabla f|^2\,dx \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)^2} + \frac{(n-1)(n-3)}{|x|^2}\right)|f|^2\,dx + \sigma(f),$$

где

$$\sigma(f) = \frac{2m^{n-1}}{R-\rho}\int\limits_{\Sigma_m} |f|^2\,d\omega \geqslant 0, \quad \omega = \frac{x}{|x|},$$

— интеграл по средней поверхности, определенной равенством

$$\Sigma_m = \big\{x \in B_R \setminus \overline{B}_\rho :\ |x| = m := (\rho+R)/2\big\}.$$

Отметим, что эта теорема является эффективной лишь при $n \geqslant 3$, так как $(n-1)(n-3) < 0$ при $n = 2$.

3. Усиления двух неравенств типа Реллиха. В этом разделе мы рассмотрим неравенства типа Реллиха, содержащие под интегралом функцию $|\Delta f|$, где Δ — лапласиан, и весовые функции, являющиеся степенями расстояния от точки до границы области.

Напомним, что оригинальные неравенства Ф. Реллиха с точными константами имеют вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta f|^2\,dx \geqslant \frac{n^2(n-4)^2}{16}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|^2}{|x|^4}\,dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

где $n \geqslant 3$. Очевидно, $\operatorname{dist}(x, \partial(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})) = |x|$.

Предложение 7 (М. П. Оуэн [22]). *Для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, и для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\Delta f|^2\,dx \geqslant \frac{5}{16}\int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^4}\,dx,$$

причем постоянная $9/16$ в этом неравенстве является оптимальной в том смысле, что она является точной для полупространства H_+.

Предложение 8 (Ф. Г. Авхадиев [4]). *Постоянная $9/16$ в неравенстве М. П. Оуэна является точной для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, т.е. для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, что справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\Delta f_\varepsilon|^2\,dx < \frac{9+\varepsilon}{16}\int\limits_\Omega \frac{|f_\varepsilon|^2}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^4}\,dx.$$

А. Балинский, В. Д. Эванс и Р. Т. Льюис (см. [11, с. 217]) получили следующее усиление неравенства М. П. Оуэна.

Теорема 7. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная или неограниченная выпуклая область с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$. Тогда для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\Delta f|^2\,dx \geqslant \frac{9}{16}\int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^4}\,dx + \frac{\lambda_0^2}{4(\delta_0(\Omega))^2}\int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^2}\,dx + \frac{\lambda_0^4}{(\delta_0(\Omega))^4}\int\limits_\Omega |f|^2\,dx,$$

где $\lambda_0 = 0{,}940\ldots$ — постоянная Лямба.

Иное усиление неравенства типа Реллиха в форме М. П. Оуэна получили Г. Барбатис и А. Тертикас (см. [15]). Ими доказана следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная или неограниченная выпуклая область с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$. Тогда существует такая постоянная $D_0 \geqslant \delta_0(\Omega)$, что для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\Delta f|^2 dx \geqslant \frac{9}{16} \int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{\delta^4} dx + \frac{5}{8} \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{\delta^2} X_1^2(\delta/D_0) \cdots X_j^2(\delta/D_0) dx,$$

где $\delta = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

В доказательствах теорем 3.17 и 3.28 существенно используется следующее, хорошо известное интегральное тождество для вещественнозначных функций $f \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int\limits_\Omega |\Delta f|^2 \, dx = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2 dx.$$

Отметим также, что имеются интересные обобщения теорем 2, 4 и 8 на случай полигармонических операторов (см. [12, 15]).

Рассмотрим теперь другое неравенство типа Реллиха, доказанное автором в [4].

Предложение 9. *Для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, и для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_\Omega (\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^2 |\Delta f|^2 \, dx \geqslant \frac{1}{16} \int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^2} \, dx, \tag{9}$$

причем постоянная $1/16$ является точной для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, т.е. для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, что справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega (\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^2 |\Delta f_\varepsilon|^2 \, dx < \frac{1+\varepsilon}{16} \int\limits_\Omega \frac{|f_\varepsilon|^2}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^2} \, dx.$$

Оказалось, что неравенство (9) также позволяет усиление с помощью добавления положительного интегрального слагаемого к правой части неравенства. Приведем лишь одно усиление такого типа, доказанное в недавней работе автора [2].

Поскольку мы пользуемся конформными отображениями областей на плоскости, то обозначаем точки плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ как комплексные числа $z = x + iy$.

Теорема 9. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область, не совпадающая со всей плоскостью, g — любое из однолистных конформных отображений области Ω на верхнюю полуплоскость H_+. Тогда для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеют место неравенства*

$$\iint\limits_\Omega (\operatorname{dist}(z, \partial\Omega))^2 |\Delta f|^2 \, dx \, dy \geqslant \frac{1}{16} \iint\limits_\Omega \frac{|f|^2}{(\operatorname{dist}(z, \partial\Omega))^2} dx \, dy + \frac{1}{8} \iint\limits_\Omega |f|^2 \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 dx \, dy, \quad z = x + iy.$$

Отметим, что здесь $\Omega \subset \mathbb{C}$ — произвольная выпуклая область, не совпадающая со всей плоскостью, В частности, допустимы и выпуклые области, для которых внутренний радиус равен бесконечности.

4. Задача Брезиса—Маркуса для конформно инвариантных неравенств. Рассмотрим плоские области. Предположим, что $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа, т.е. область, имеющая не менее трёх граничных точек на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. В любой точке $z = x + iy \in \Omega$ такой области определен (см., например, [8]) гиперболический радиус

$$R(z, \Omega) = \frac{1}{\lambda_\Omega(z)},$$

где λ_Ω — коэффициент метрики Пуанкаре с гауссовой кривизной $k = -4$. Такая фиксация кривизны принята в теории функций комплексного переменного, так как тогда $1/\lambda_\Omega(z)$ в точности совпадает с классическим конформным радиусом области Ω в точке $z \in \Omega$ для односвязных областей гиперболического типа, не содержащих бесконечно удаленной точки. Здесь необходимо одно пояснение. Обычно, в математической литературе конформный радиус определяется как фиксированное положительное число, связанное с теоремой Римана о конформных отображениях (см., например, [23]). Мы будем рассматривать гиперболический радиус, в частности, конформный радиус, как функцию $R(\cdot,\Omega):\Omega\to(0,\infty)$. Такой подход отражен, например, в [6, 8].

Отметим также хорошо известные примеры: $R(z,E) = 1-|z|^2$ для единичного круга $E = \{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$, $R(z,H_+) = 2y$ для верхней полуплоскости $H_+ = \{z\in\mathbb{C} : y = \operatorname{Im} z > 0\}$, $R(z,Q_\pi) = 2\sin y$ для полосы $Q_\pi = \{z\in\mathbb{C} : 0<y=\operatorname{Im} z<\pi\}$, $R(z,A_0) = -2|z|\ln|z|$ для единичного круга с выколотым центром $A_0 = \{z\in\mathbb{C} : 0<|z|<1\}$.

В ряде работ по геометрической теории функций рассматривалось следующее конформно инвариантное неравенство: для любой вещественнозначной функции $f\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2\,dx\,dy \geqslant c(\Omega)\iint\limits_{\Omega}\frac{|f|^2}{R^2(z,\Omega)}\,dx\,dy \equiv c(\Omega)\iint\limits_{\Omega}|f|^2\lambda_\Omega^2(z)\,dx\,dy, \tag{10}$$

где константа $c(\Omega)$ определена однозначно как постоянная, максимальная из возможных в этом вариационном неравенстве. Гладкость $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z=\infty$ понимается как гладкость $f(1/z)$ в точке $z=0$.

Очевидно, неравенство (10) является родственным неравенству Харди, хотя оно интерпретируется как аналог неравенства Пуанкаре в спектральной теории оператора Лапласа—Бельтрами на римановых многообразиях постоянной отрицательной кривизны (см. [24] и библиографию в ней). Известно, в частности, что $c(\Omega)\in[0,1]$ для любой области и эта константа равна единице для любой односвязной или двусвязной области гиперболического типа. Эти результаты получаются из известной формулы Элстродта—Паттерсона—Сулливана (см. [24, с. 333]):

$$c(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0\leqslant\beta\leqslant 1/2,\\ 4\beta(1-\beta) & \text{для } 1/2\leqslant\beta\leqslant 1,\end{cases}$$

где $\beta=\beta(\Omega)$ — критический показатель сходимости рядов Пуанкаре—Дирихле для фундаментальной группы преобразований Ω.

Таким образом, для односвязных и двусвязных областей точная константа $c(\Omega)$ в неравенстве (10) равна 1 и также известно, что она недостижима. Возникает естественная задача: получить аналоги неравенства Брезиса и Маркуса, усиливающие неравенство (10), в случае односвязных и двусвязных областей. Решение этой задачи получено автором в [1], где доказаны две следующих теоремы. Первое утверждение относится к случаю односвязных областей.

Теорема 10. *Пусть $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$ — односвязная область гиперболического типа, g — любое из однолистных конформных отображений области Ω на верхнюю полуплоскость*

$$H_+ = \{\zeta = \xi + i\eta\in\mathbb{C} : \eta>0\}.$$

Тогда для любой вещественнозначной функции $u\in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint\limits_{\Omega}|\nabla f|^2\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_{\Omega}\frac{|f|^2\,dx\,dy}{R^2(z,\Omega)} + \frac{1}{4}\iint\limits_{\Omega}|f|^2\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2dx\,dy,\quad z = x+iy.$$

Постоянная $1/4$ не может быть заменена бо́льшей величиной.

В случае двусвязных областей остаточный член содержит естественную характеристику области, а именно, конформный модуль.

Теорема 11. *Пусть $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$ — двусвязная область с модулем $M(\Omega)<\infty$, g — однолистное конформное отображение области Ω на кольцо*

$$A_q = \{\zeta\in\mathbb{C} : q<|\zeta|<1\},\quad q = \exp(-2\pi M(\Omega)).$$

Тогда для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\iint\limits_\Omega |\nabla f|^2\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_\Omega \frac{|f|^2\,dx\,dy}{R^2(z,\Omega)} + \frac{1}{16M^2(\Omega)}\iint\limits_\Omega |f|^2\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\,dy,$$

где $z = x + iy$. *Постоянная* $1/16$ *не может быть заменена бо́льшей величиной.*

Для выпуклой области конформный радиус и расстояние до границы области являются сравнимыми величинами, а именно,

$$R(z,\Omega) \leqslant 2\,\mathrm{dist}(z,\partial\Omega), \quad z \in \Omega,$$

в силу теоремы Лёвнера (см., например, [8, с. 45]). Следовательно, первая часть теоремы 10 легко влечет новое неравенство типа Брезиса и Маркуса в произвольной выпуклой области $\Omega \neq \mathbb{C}$ (см. [1]).

Следствие 1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{C}$ — *выпуклая область, не совпадающая со всей плоскостью,* g — *любое из однолистных конформных отображений области* Ω *на верхнюю полуплоскость* H_+. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\iint\limits_\Omega |\nabla f|^2\,dx\,dy \geqslant \frac{1}{4}\iint\limits_\Omega \frac{|f|^2}{\mathrm{dist}^2(z,\partial\Omega)}\,dx\,dy + \frac{1}{4}\iint\limits_\Omega |f|^2\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\,dy, \quad z = x+iy.$$

Обе постоянные $1/4$ *являются точными.*

В [2] рассматривалось следующее конформно инвариантное неравенство для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\iint\limits_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta f|^2\,dx\,dy \geqslant C(\Omega)\iint\limits_\Omega \frac{|f|^2}{R^2(z,\Omega)}\,dx\,dy, \tag{11}$$

где константа $C(\Omega)$ определена однозначно как постоянная, максимальная из возможных в этом вариационном неравенстве.

Неравенство (11) является родственным неравенству Реллиха. В [2] доказано, что константа $C(\Omega)$ равна единице для любой односвязной или двусвязной области гиперболического типа и что она недостижима. Снова возникает задача Брезиса и Маркуса: получить неравенства, усиливающие неравенство (11) за счет дополнительных слагаемых, в случае односвязных и двусвязных областей. В [2] доказаны две следующих теоремы. Первая из них относится к случаю односвязных областей, а вторая связана с двусвязными областями гиперболического типа, имеющими конечный конформный модуль.

Теорема 12. *Пусть* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — *односвязная область гиперболического типа,* g — *любое из однолистных конформных отображений области* Ω *на верхнюю полуплоскость*

$$H_+ = \bigl\{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} : \eta > 0\bigr\}.$$

Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеют место неравенства*

$$\iint\limits_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta f|^2\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_\Omega \frac{|f|^2}{R^2(z,\Omega)}\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint\limits_\Omega |f|^2\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\,dy, \quad z = x+iy.$$

Теорема 13. *Пусть* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — *двусвязная область гиперболического типа с модулем* $M = M(\Omega) \in (0,\infty]$, g — *однолистное конформное отображение области* Ω *на кольцо*

$$K(0;q,1) = \bigl\{\zeta \in \mathbb{C} : q < |\zeta| < 1\bigr\}, \quad q = \exp(-2\pi M(\Omega)) \in [0,1).$$

Тогда для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеют место неравенства*

$$\iint\limits_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta f|^2\,dx\,dy \iint\limits_\Omega \frac{|f|^2}{R^2(z,\Omega)}\,dx\,dy + \frac{1}{8M^2(\Omega)}\iint\limits_\Omega |f|^2\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\,dy, \quad z = x+iy.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авхадиев Ф. Г.* Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 12. — С. 3–28.
2. *Авхадиев Ф. Г.* Конформно инвариантные неравенства/ Комплексный анализ// Итоги науки и техн. Сер. Совр мат. и ее прилож. Темат. обз. — М.: ВИНИТИ РАН, 2017. — *142*. — С. 28–41.
3. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
4. *Avkhadiev F. G.* Hardy—Rellich inequalities in domains of the Euclidean space// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *442*. — С. 469–484.
5. *Avkhadiev F. G., Laptev A.* Hardy inequalities for nonconvex domains// Int. Math. Ser. "Around Research of Vladimir Maz'ya, I," Function Spaces. — Springer, 2010. — *11*. — С. 1–12.
6. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* The conformal radius as a function and its gradient image// Isr. J. Math. — 2005. — *145*. — С. 349–374.
7. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains// Z. Angew. Math. Mech. — 2007. — *87*, № 8-9. — С. 632–642.
8. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Schwarz–Pick-Type Inequalities. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag, 2009.
9. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants// Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2011. — *18*. — С. 723–736.
10. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* On the best constants for the Brezis—Marcus inequalities in balls// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — *396*, № 2. — С. 473–480.
11. *Balinsky A. A., Evans W. D., Lewis R. T.* The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality. — Heidelberg–New York–Dordrecht–London: Springer-Verlag, 2015.
12. *Barbatis M. G.* Improved Rellich inequalities for the polyharmonic operator// Indiana Univ. Math. J. — 2006. — *55*, № 4. — С. 825–835.
13. *Barbatis G., Filippas S., Tertikas A.* Series expansion for L^p Hardy inequalities// *Indiana Univ. Math.* — 2003. — *52*. — С. 171–190.
14. *Barbatis G., Filippas S., Tertikas A.* Refined L^p Hardy inequalities// *Comm. Cont. Math.*. — 2003. — *5*, № 6. — С. 869–881.
15. *Barbatis M. G., Tertikas A.* On a class of Rellich inequalities// J. Comp. Appl. Math. — 2006. — *194*. — С. 156–172.
16. *Brezis H., Marcus M.* Hardy's inequalities revisited// Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). — 1997-1998. — *25*, № 1-2. — С. 217–237.
17. *Davies E. B.* The Hardy constant// Quart. J. Math. Oxford (2). — 1995. — *46*, № 4. — С. 417–431.
18. *Evans W. D., Lewis R. T.* Hardy and Rellich inequalities with remainders// J. Math. Inequal. — 2007. — *1*, № 4. — С. 473–490.
19. *Hoffmann-Ostenhof M., Hoffmann-Ostenhof T. Laptev A.* A geometrical version of Hardy's inequality// J. Func. Anal. — 2002. — *189*. — С. 539–548.
20. *Marcus M., Mitzel V. J., Pinchover Y.* On the best constant for Hardy's inequality in $\mathbb{R}^n$// Trans. Am. Math. Soc. — 1998. — *350*. — С. 3237–3250.
21. *Matskewich T., Sobolevskii P. E.* The best possible constant in a generalized Hardy's inequality for convex domains in $\mathbb{R}^n$// Nonlin. Anal. — 11997. — *28*. — С. 1601–1610.
22. *Owen M. P.* The Hardy–Rellich inequality for polyharmonic operators// Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. — 1999. — *129*. — С. 825–835.
23. *Pólya G., Szegö G.* Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1951.
24. *Sullivan D.* Related aspects of positivity in Riemannian geometry// J. Differ. Geom. — 1987. — *25*, № 3. — С. 327–351.
25. *Watson G. N.* Theory of the Bessel Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1962.

Ф. Г. Авхадиев
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: `avkhadiev47@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 153 (2018). С. 13–28

УДК 517.5

ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ВЕСОВЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ $H(D)$

© 2018 г. **Р. А. БАШМАКОВ, К. П. ИСАЕВ, Р. С. ЮЛМУХАМЕТОВ**

Аннотация. В работе рассматриваются весовые подпространства пространства аналитических функций на ограниченной выпуклой области комплексной плоскости. Получены описания сильно сопряженных пространств к индуктивному и проективному пределу равномерно весовых пространств функций, аналитических в ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$, в терминах преобразования Фурье—Лапласа. По каждому нормированному равномерно весовому пространству $H(D,u)$ построены наименьшее линейное пространство $\mathcal{H}_i(D,u)$, содержащее $H(D,u)$ и инвариантное относительно дифференцирования, и наибольшее линейное пространство $\mathcal{H}_p(D,u)$, содержащееся в $H(D,u)$ и инвариантное относительно дифференцирования. На этих пространствах введены естественные локально выпуклые топологии и приведено описание сильно сопряженных пространств в терминах преобразования Фурье—Лапласа. Доказано существование представляющих систем из экспонент в пространстве $\mathcal{H}_i(D,u)$.

***Ключевые слова*:** аналитические функции, целые функции, ряды экспонент, достаточные множества.

***AMS Subject Classification*:** 30B50, 42A38, 46E10

1. Введение.

Понятие представляющих систем введено в [3]. Система элементов e_n, $n \in \mathbb{N}$, в локально выпуклом пространстве X называется *представляющей*, если любой элемент этого пространства представляется в виде ряда

$$x = \sum_n x_n e_n,$$

сходящегося в топологии пространства X. Если для каждого элемента это представление единственное, то представляющая система становится базисом. Введение понятия представляющей системы вызвано тем, что в используемых обычно пространствах аналитических функций базисов из экспонент не существует. Рассмотрим, например, пространство $H(D)$ аналитических в ограниченной выпуклой области D функций с топологией равномерной сходимости на компактах из D. Предположим, что система $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, образует базис в этом пространстве. Любая функция $f \in H(D)$ представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_k f_k e^{\lambda_k z},$$

сходящегося равномерно на компактах. Пусть в этом разложении $f_1 \neq 0$. Дифференциальный оператор $Ag = g' - \lambda_1 g$ непрерывно действует в пространстве $H(D)$. Положим

$$g(z) = e^{\lambda_1 z} \int_{z_0}^{z} \left(e^{-\lambda_1 t} f(t)\right) dt,$$

где z_0 — некоторая точка в D. Тогда $g \in H(D)$. Значит, имеет место представление

$$g(z) = \sum_k g_k e^{\lambda_k z},$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00095-а).

причём $Ag = f$. В силу непрерывности оператора A имеем

$$f = Ag = \sum_k g_k(\lambda_k - \lambda_1)e^{\lambda_k z}.$$

В силу предполагаемой базисности системы получим $f_1 = g_1(\lambda_1 - \lambda_1) = 0$, что противоречит предположению $f_1 \neq 0$. Классическая теорема А. Ф. Леонтьева (см. [4, теорема 5.3.2, с. 382]) утверждает существование представляющих систем экспонент в $H(D)$.

Теорема А. *Пусть D — ограниченная выпуклая область. Существует такая последовательность $\{\lambda_n\}$, зависящая только от области D, что любую функцию $F(z)$, аналитическую в области D, можно в D разложить в ряд Дирихле*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D,$$

сходящийся равномерно на компактах из D.

Система $e^{\lambda_n z}$ существенно избыточна: из нее можно удалить подсистему $e^{\mu_k z}$ так, что оставшаяся система продолжает быть представляющей. Для этого достаточно, например, чтобы последовательность показателей имела нулевую линейную плотность

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{|\mu_k|\leqslant r} 1 = 0$$

и была правильно распределенным множеством (см. [4, с. 100]). Степень избыточности представляющей системы отражает свойства топологии пространства, в котором система является представляющей. Вообще говоря, чем тоньше топология пространства, тем меньше степень избыточности представляющих систем. Представляющие системы в локально выпуклых подпространствах $H(D)$ построены в [2, 5, 11].

В данной работе рассматриваются весовые подпространства $H(D)$, где D — ограниченная выпуклая область на плоскости.

В разделе 2 доказаны подготовительные утверждения, леммы и теорема 1. В теореме 2 дается описание сильно сопряженного пространства к индуктивному пределу равномерно весовых пространств функций, аналитических в ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$, в терминах преобразования Фурье—Лапласа. В теореме 3 дано описание сильно сопряженного пространства к проективному пределу равномерно весовых пространств аналитических функций.

В разделе 3 по каждому нормированному равномерно весовому пространству $H(D, u)$ конструируются наименьшее линейное пространство $\mathcal{H}_i(D, u)$, содержащее $H(D, u)$ и инвариантное относительно дифференцирования, и наибольшее линейное пространство $\mathcal{H}_p(D, u)$, содержащееся в $H(D, u)$ и инвариантное относительно дифференцирования. На этих пространствах вводятся естественные локально выпуклые топологии и дается описание сильно сопряженных пространств в терминах преобразования Фурье—Лапласа (теорема 4).

В теореме 5 доказано существование представляющих систем из экспонент в пространстве $\mathcal{H}_i(D, u)$.

2. Двойственность весовых пространств аналитических функций. Пусть D — ограниченная выпуклая область, $0 \in D$, и $\varphi(z)$ — выпуклая функция в этой области. Через $H(D, \varphi)$ обозначим равномерно весовое пространство аналитических в D функций с нормой

$$\|f\| = \sup_{z\in D} |f(z)|e^{-\varphi(z)},$$

а через $H_2(D, \varphi)$ — интегрально весовое пространство с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{z\in D} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} dm(z),$$

где $dm(z)$ — плоская мера Лебега. Если $D=\mathbb{C}$, то вместо $H(\mathbb{C},\varphi)$ будем писать $H(\varphi)$, а вместо $H_2(D,\varphi)$ — $H_2(\varphi)$. Пусть $\widetilde{\varphi}(\lambda)$ — преобразование Юнга функции φ:

$$\widetilde{\varphi}(\lambda)=\sup_{z\in D}\big(\operatorname{Re}\lambda z-\varphi(z)\big),\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Как известно, $\widetilde{\varphi}$ — выпуклая функция, и если φ выпукла, то $\widetilde{(\widetilde{\varphi})}=\varphi$. Пусть

$$K_s(\varphi,z)=\int\limits_{\mathbb{C}} e^{\operatorname{Re}\lambda z-\widetilde{\varphi}(\lambda)}(1+|\lambda|)^s dm(\lambda),\quad z\in D,\quad s\in\mathbb{R}.$$

Очевидно, функции $\ln K_s(\varphi,z)$ выпуклы в области D. Пространство $H(D,\ln K_0(\varphi,z))$ для краткости будем обозначать через $H^-(D,\varphi)$, а $K_s(\varphi,z)$ — через $K_s(z)$.

Предложение 1. *Пусть φ — некоторая функция в ограниченной области D, содержащей* 0.

(1) *Преобразование Юнга $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\Big|\widetilde{\varphi}(\lambda_1)-\widetilde{\varphi}(\lambda_2)\Big|\leqslant\sup_{z\in D}|z|\,\big|\lambda_1-\lambda_2\big|\quad\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}.$$

(2) *Для любого $q\in(0;1)$ справедливы неравенства*

$$qH_D(\lambda)-C'_q\leqslant\widetilde{\varphi}(\lambda)\leqslant H_D(\lambda)+C''_q,\quad\lambda\in\mathbb{C},$$

где $H_D(\lambda)=\sup\limits_{z\in D}\operatorname{Re}\lambda z$ — опорная функция области D, $C'_q,C''_q>0$ — некоторые постоянные.

(3) *Выполняются оценки*

$$\frac{1}{2\pi}K_{-3}(z)\leqslant e^{\varphi(z)}\leqslant e^{\sup_{z\in D}|z|}K_0(z),\quad z\in D.$$

Доказательство. Пусть

$$\widetilde{\varphi}(\lambda_1)=\operatorname{Re}\lambda_1 z_1-\varphi(z_1).$$

Тогда

$$\widetilde{\varphi}(\lambda_1)-\widetilde{\varphi}(\lambda_2)=\big(\operatorname{Re}\lambda_1 z_1-\varphi(z_1)\big)-\widetilde{\varphi}(\lambda_2)\leqslant\operatorname{Re}z_1\big(\lambda_1-\lambda_2\big)\leqslant\max_D|z||\lambda_1-\lambda_2|$$

для всех $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$. Поменяв местами λ_1 и λ_2, получим требуемое неравенство.

Второе утверждение следует из ограниченности снизу выпуклой функции в ограниченной области и ограниченности сверху на компактах.

Левое неравенство в третьем утверждении тривиальное. Правое неравенство следует из п. (1). Предложение 1 доказано. □

В следующем предложении представлены некоторые свойства выпуклых функций и преобразования Юнга.

Предложение 2. *Пусть u — выпуклая функция в ограниченной выпуклой области $D\subset\mathbb{R}^2$, а функция $\widetilde{u}$ дважды дифференцируема и удовлетворяет условию*

$$\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2\widetilde{u}(y)}{\partial y_j\partial y_k}a_j a_k\geqslant\frac{b}{1+|y|^2}|a|^2,\quad a,y\in\mathbb{R}^2,\tag{B}$$

с постоянной $b>12$. Положим

$$K_s(u,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{(x,y)-\widetilde{u}(y)}(1+|y|)^s dm(y),\quad s\in[-3;3],x\in D,$$

где (x,y) — евклидово скалярное произведение. Пусть y_x — точка достижения супремума $\sup_y((x,y)-\widetilde{u}(y))$:

$$\sup_y((x,y)-\widetilde{u}(y))=(x,y_x)-\widetilde{u}(y_x).$$

Справедливы следующие утверждения:

(1) *существуют такие постоянные* M_s, *зависящие только от постоянной* b *в условии* (B), *что*

$$\int\limits_{B(y_x,(1+|y_x|)/2)} e^{(x,y)-\widetilde{u}(y)}(1+|y|)^s dm(y) \leqslant K_s(u,x) \leqslant$$

$$\leqslant M_s \int\limits_{B(y_x,(1+|y_x|)/2)} e^{(x,y)-\widetilde{u}(y)}(1+|y|)^s dm(y), \quad x \in D,$$

где $B(y_x,(1+|y_x|)/22)$ — *круг с центром* y_x *и радиусом* $(1+|y_x|)/2$;

(2) *если*

$$|x-x'| \leqslant \frac{cb}{2(1+|y_x|)}, \quad \text{где} \quad c = \int\limits_0^{1/2} \frac{dt}{1+t^2},$$

то для некоторой константы A *верна оценка*

$$\big|u(x)-u(x')\big| \leqslant A, \quad x \in D.$$

В частности, $x' \in D$.

Эти свойства доказаны в [1][леммы 1–3].

Лемма 1.

(1) *Пусть* S — *линейный непрерывный функционал на пространстве* $H(\widetilde{\varphi})$ *и* $\widehat{S}(z)$ — *преобразование Фурье—Лапласа этого функционала:*

$$\widehat{S}(z) = S_\lambda(e^{\lambda z}), \quad z \in D.$$

Тогда $\widehat{S} \in H(D)$ *и*

$$\big|\widehat{S}(z)\big| \leqslant \|S\|_{H^*(\widetilde{\varphi})} e^{\varphi(z)}, \quad z \in D;$$

тем самым,

$$\big\|\widehat{S}\big\|_{H(D,\varphi)} \leqslant \|S\|_{H^*(\widetilde{\varphi})}.$$

(2) *Пусть* S — *линейный непрерывный функционал на пространстве* $H(D,\varphi)$ *и* $\widehat{S}(\lambda)$ — *преобразование Фурье—Лапласа этого функционала*:

$$\widehat{S}(\lambda) = S_z(e^{\lambda z}), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда $\widehat{S} \in H(\mathbb{C})$ *и*

$$\big|\widehat{S}(\lambda)\big| \leqslant \|S\|_{H^*(D,\varphi)} e^{\widetilde{\varphi}(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C};$$

тем самым,

$$\big\|\widehat{S}\big\|_{H(\widetilde{\varphi})} \leqslant \|S\|_{H^*(D,\varphi)}.$$

Утверждения леммы 1 следуют непосредственно из определения нормы функционала.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(x_1+ix_2)$ — *выпуклая функция в ограниченной выпуклой области* D *и функция* $\widetilde{\varphi}(y_1+iy_2)$ *удовлетворяет условию* (B) *с постоянной* $b > 12$. *Тогда для любой функции* $f \in H(D,\varphi)$ *верна оценка*

$$\big|f^{(s)}(z)\big| \leqslant C_s \|f\|_{H(D,\varphi)} K_s(\varphi,z), \quad z \in D, \quad s \in \{0,1,2,3\},$$

где постоянная C_s *зависит только от постоянной* b. *В частности,*

$$\big|f^{(s)}(z)\big| \frac{1}{K_{s+1}(\varphi,z)} \to 0, \quad \operatorname{dist}(z,\partial D) \to 0.$$

Доказательство. Для точки $z \in D$ через λ_z обозначим точку, в которой достигается супремум $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{C}}(\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda))$. Пусть

$$t = t_z = \frac{bc}{2(1+|\lambda_z|)}, \quad \text{где} \quad c = \int\limits_0^{1/2} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Из формулы Коши следует

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant \frac{(s-1)!}{t^s} \max_{w\in B(z,t)} |f(w)| \leqslant \frac{(s-1)!}{t^s} e^{\varphi(z)} \max_{w\in B(z,t)} |f(w)| e^{-\varphi(w)} \max_{w\in B(z,t)} e^{\varphi(w)-\varphi(z)}.$$

В силу п. (2) предложения 2 отсюда вытекает

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant \frac{2^s(s-1)!}{(bc)^s} e^A \|f\|_{H(D,\varphi)} (1+|\lambda_z|)^s e^{\varphi(z)}.$$

По п. (3) предложения 1 имеем

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant \frac{2^s(s-1)!}{(bc)^s} e^{A+\sup_{z\in D}|z|} \|f\|_{H(D,\varphi)} (1+|\lambda_z|)^s K_0(z).$$

Пункт (1) предложения 2 позволяет локализовать интеграл, определяющий функцию K_0:

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant \frac{2^s(s-1)!}{(bc)^s} e^{A+\sup_{z\in D}|z|} \|f\|_{H(D,\varphi)} M_0 (1+|\lambda_z|)^s \times$$
$$\times \int\limits_{B(\lambda_z,(1+|\lambda_z|)/2} e^{\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda)} dm(\lambda) \leqslant C_s ||f||_{H(D,\varphi)} K_s(z),$$

где

$$C_s = \frac{2^s(s-1)!}{(bc)^s} e^{A+\sup_{z\in D}|z|} M_0 \max\left\{\frac{(1+|\lambda_z|)^s}{(1+|\lambda|)^s} : \lambda \in B\left(\lambda_z, \frac{1}{2}(1+|\lambda_z|)\right)\right\}.$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть φ, u — выпуклые функции на ограниченной выпуклой области D, функции $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{u}$ удовлетворяют условию* (B) *с постоянной $b > 12$ и*

$$\widetilde{u}(\lambda) \geqslant \widetilde{\varphi}(\lambda) + 4\ln(1+|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда для любой функции $g \in H^-(D,u)$, аналитической в области D и удовлетворяющей условию

$$\sup_{z\in D} \frac{|g(z)|}{K_0(u,z)} < \infty,$$

функция $G(z) = \dfrac{g(z)}{K_0(\varphi,z)}$, продолженная нулем на $\mathbb{C}\setminus D$, принадлежит $C^3(\mathbb{C})$; при этом

$$\|G(z)\|_{C^3(\mathbb{C})} \leqslant M\|g\|_{H^-(D,u)}.$$

Доказательство. Выполнение соотношения $a(x) \leqslant \mathrm{const}\cdot b(x)$, $x \in E$, для неотрицательных функций $a(x), b(x)$ будем обозначать символом $\prec$: $a(x) \prec b(x)$, $x \in E$. Аналогичный смысл имеют символы $\succ$ и $\asymp$.

Из соотношения между функциями $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{u}$ следует

$$|G(z)| \leqslant \sup_{z\in D} \frac{|g(z)|}{K_0(u,z)} \frac{K_0(u,z)}{K_0(\varphi,z)} \leqslant \sup_{z\in D} \frac{|g(z)|}{K_0(u,z)} \frac{K_{-4}(\varphi,z)}{K_0(\varphi,z)}.$$

Значит, по п. (1) предложения 2

$$|G(z)| \prec (1+|\lambda_z|)^{-4} \to 0$$

при $\operatorname{dist}(z,\partial D) \to 0$; тем самым, $G(z) \in C(\mathbb{C})$ и

$$\|G\|_{C(\mathbb{C})} \leqslant M_{-4}\|g\|_{H^-(D,u)}.$$

Также согласно предложению 2 имеем

$$\left|\frac{\partial G(z)}{\partial \overline{z}}\right| = \left|g(z)\frac{\partial K_0(\varphi,z)}{\partial \overline{z}}\frac{1}{K_0^2(\varphi,z)}\right| \leqslant \sup_{z\in D}\frac{|g(z)|}{K_0(u,z)}\frac{K_0(u,z)K_1(\varphi,z)}{K_0^2(\varphi,z)} \prec$$
$$\prec \|g\|_{H^-(D,u)}\frac{K_{-4}(\varphi,z)K_1(\varphi,z)}{K_0^2(\varphi,z)} \prec (1+|\lambda_z|)^{-3} \to 0$$

при $\operatorname{dist}(z,\partial D)\to 0$. Дополнительно, учитывая лемму 2, получим

$$\left|\frac{\partial G(z)}{\partial z}\right| \leqslant \left|g(z)\frac{\partial K_0(\varphi,z)}{\partial z}\frac{1}{K_0^2(\varphi,z)}\right| + \left|g'(z)\frac{1}{K_0(\varphi,z)}\right| \prec$$
$$\prec \|g\|_{H^-(D,u)}\left(\frac{K_0(u,z)K_1(\varphi,z)}{K_0^2(\varphi,z)} + \frac{K_1(u,z)}{K_0(\varphi,z)}\right) \prec$$
$$\prec \|g\|_{H^-(D,u)}\left(\frac{K_{-4}(\varphi,z)K_1(\varphi,z)}{K_0^2(\varphi,z)} + \frac{K_{-3}(\varphi,z)}{K_0(\varphi,z)}\right) \prec \|g\|_{H^-(D,u)}(1+|\lambda_z|)^{-3} \to 0$$

при $\operatorname{dist}(z,\partial D)\to 0$. Производные второго и третьего порядка оцениваются такими же прямыми вычислениями. Лемма 3 доказана. □

Теорема 1. *Пусть φ, v — выпуклые функции на ограниченной выпуклой области D, $0\in D$, функции $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{v}$ удовлетворяют условию* (B) *с постоянной $b>12$ и*

$$\widetilde{v}(\lambda) \geqslant \widetilde{\varphi}(\lambda) + 10\ln(1+|\lambda|), \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Тогда каждая функция $F\in H_2(\widetilde{\varphi})$ является преобразованием Фурье—Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $H^-(D,v)$, причем

$$\|S\|_{(H^-(D,v))^*} \leqslant M\|F\|_{H_2(\widetilde{\varphi})}, \quad F\in H_2(\widetilde{\varphi}),$$

и константа M зависит только от постоянной b.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $F\in H_2(\widetilde{\varphi})$:

$$\int_{\mathbb{C}} |F(\lambda)|^2 e^{-2\widetilde{\varphi}(\lambda)}dm(\lambda) < \infty. \tag{1}$$

В пространстве $\mathbb{C}^2$ рассмотрим одномерное подпространство

$$\Sigma = \Big\{w=(w_1,w_2) : w_1 = i\lambda,\ w_2=-\lambda,\ \lambda\in\mathbb{C}\Big\}$$

и функцию на этом подпространстве

$$g(w) = F(\lambda), \quad \lambda\in\mathbb{C}, \quad w\in\Sigma.$$

Выпуклая функция

$$\Phi(w) = \sup_{z\in D}\Big(\big(\operatorname{Re} z\cdot\operatorname{Im} w_1 + \operatorname{Im} z\cdot\operatorname{Im} w_2\big) - \varphi(z)\Big), \quad w\in\mathbb{C}^2,$$

обладает свойствами

$$\Phi(w) = \Phi(i\operatorname{Im} w), \qquad w\in\mathbb{C}^2, \tag{2}$$
$$\Phi(w) = \widetilde{\varphi}(\lambda), \qquad w\in\Sigma, \quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{3}$$
$$\Phi(iy) = \widetilde{\varphi}(y_1 - iy_2), \quad y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2. \tag{4}$$

Из предложения 1 и соотношений (2)–(4) следует, что выполняется условие Липшица

$$\big|\Phi(w') - \Phi(w'')\big| \leqslant \max_{z\in D}|z|\,|w'-w''|, \quad w',w''\in\mathbb{C}^2. \tag{5}$$

Применим теорему 15.1.3. из [9, с. 317]. Существует целая функция $f(w)$ на $\mathbb{C}^2$, которая совпадает с g на подпространстве Σ и обладает оценкой

$$\int\limits_{\mathbb{C}^2} |f(w)|^2 e^{-2\Phi(w)}(1+|w|^2)^{-3}dm(w) \leqslant C_0 \int\limits_{\Sigma} |g(w)|^2 e^{-2\widetilde{\varphi}(w)}dm(w) = C_0\|F\|^2_{H_2(\widetilde{\varphi})}, \tag{6}$$

где

$$C_0 = 6\pi \exp\Big(\max_{z\in\overline{D}}|z|\Big).$$

Функция $|f(w)|^2$ субгармонична в $\mathbb{C}^2$, поэтому для любого $w\in\mathbb{C}^2$ имеем

$$|f(w)|^2 \leqslant \frac{1}{V}\int\limits_{B} |f(w+\zeta)|^2 dm(\zeta) \leqslant \frac{1}{V}\int\limits_{Q} |f(w+\zeta)|^2 dm(\zeta),$$

где B — единичный шар в $\mathbb{C}^2$ и V — объем этого шара, Q — единичный куб $\{|\operatorname{Re}\zeta|, |\operatorname{Im}\zeta| \leqslant 1\}$. Учитывая свойство (5), получим

$$|f(w)|^2 e^{-2\Phi(w)}(1+|w|^2)^{-3} \leqslant C\int\limits_{Q} |f(w+\zeta)|^2 e^{-2\Phi(w+\zeta)}(1+|w+\zeta|^2)^{-3}dm(\zeta), \tag{7}$$

где

$$C = \frac{C_0}{V}\sup\left\{\left(\frac{1+|w+\zeta|^2}{1+|w|^2}\right)^3 e^{2(\Phi(w+\zeta)-\Phi(w))},\ w\in\mathbb{C}^2,\ \zeta\in Q\right\}.$$

В частности, для $x\in\mathbb{R}^2$

$$|f(x)|^2 e^{-2\Phi(x)}(1+|x|^2)^{-3} \leqslant C\int\limits_{Q} |f(x+\zeta)|^2 e^{-2\Phi(x+\zeta)}(1+|x+\zeta|^2)^{-3}dm(\zeta).$$

Проинтегрировав полученное неравенство по $x\in\mathbb{R}^2$ и учитывая свойство (2) и оценку (6), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2(1+|x|^2)^{-3}dx \leqslant 2Ce^{2\widetilde{\varphi}(0)}\int\limits_{\mathbb{C}^2} |f(w)|^2 e^{-2\Phi(w)}(1+|w|^2)^{-3}dm(w) \leqslant C_1\|F\|^2_{H_2(\widetilde{\varphi})},$$

где $C_1 = 2e^{2\widetilde{\varphi}(0)}C\cdot C_0$.

По терминологии монографии [10, с. 288] функция f является элементом пространства L^2_{-3}. Другими словами, f является преобразованием Фурье некоторого линейного непрерывного функционала S_0 на пространстве Соболева W^2_3, состоящего из функций $u(x)$ на $\mathbb{R}^2$, для которых

$$\frac{\partial^{(k)}u}{\partial^{(j)}x_1\partial^{(k-j)}x_2} \in L_2, \quad k=0,1,2,3, \quad j=0,1,\ldots,k.$$

В этом пространстве рассматривается норма

$$\|u\|^2 = \sum_{|\alpha|\leqslant 3} c_\alpha\|D^\alpha u\|^2_{L^2},$$

где c_α — полиномиальные коэффициенты и $\alpha=(j,i)$ — мультииндекс. Из оценок (6), (7) и равенства (2) получим равномерную оценку

$$|f(w)|^2 \prec (1+|w|^2)^3 e^{2\Phi(w)} = (1+|w|^2)^3 e^{2\Phi(i\operatorname{Im} w)}, \quad w\in\mathbb{C}^2.$$

Если

$$H(y) = \sup_{(x_1+ix_2)\in D}(y_1x_1+y_2x_2)$$

— опорная функция области D (в смысле $\mathbb{R}^2$), то согласно п (2) предложения 1 и соотношениям (2), (4)

$$|f(w)|^2 \prec (1+|w|^2)^3 e^{2\Phi(w)} = (1+|w|^2)^3 e^{2\widetilde{\varphi}(y_1-iy_2)} \prec (1+|w|^2)^3 e^{2H(\operatorname{Im} w)}, \quad w\in\mathbb{C}^2.$$

По теореме Пэли—Винера—Шварца (см. [10, с. 220]) из этой оценки следует, что носитель распределения S_0 лежит в $\overline{D}$. Отсюда, в частности, заключаем, что функционал S_0 определен на $W_3^2(G)$ для любой области $G \supset \overline{D}$. Кроме того, для любого $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$S_y(u) = S_0(u(t)e^{(t,y)}), \quad u \in W_3^2,$$

будет линейным непрерывным функционалом на W_3^2; при этом

$$S_y(e^{-i(t,x)}) = S_0(e^{-i(t,x+iy)}) = f(x+iy), \quad (x+iy) \in \mathbb{C}^2,$$

и по формуле Парсеваля

$$\|S_y\|^2_{W_2^3} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |f(x+iy)|^2 (1+|x|^2)^{-3} dx.$$

Разделим это равенство на $(1+|y|^2)^3 e^{2\Phi(iy)}$ и проинтегрируем по $y \in \mathbb{R}^2$. Учитывая неравенство (6), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \|S_y\|^2 e^{-2\Phi(iy)} (1+|y|^2)^{-3} dy = \int\limits_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |f(x+iy)|^2 e^{-2\Phi(iy)} (1+|x|^2)^{-3} (1+|y|^2)^{-3}\, dy\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{C}^2} |f(w)|^2 e^{-2\Phi(w)} (1+|w|^2)^{-3} dm(w) \leqslant C_0 \|F\|^2_{H_2(\widetilde{\varphi})}. \quad (8)$$

Пусть $\widetilde{u} = (\widetilde{\varphi} + \widetilde{v})/2$; тогда

$$\widetilde{v}(\lambda) - \widetilde{u}(\lambda) = \frac{\widetilde{v}(\lambda) - \widetilde{\varphi}(\lambda)}{2} \geqslant 5\ln(1+|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Значит,

$$\widetilde{v}(\lambda) \geqslant \widetilde{u}(\lambda) + 5\ln(1+|\lambda|), \quad \widetilde{u}(\lambda) \geqslant \widetilde{\varphi}(\lambda) + 5\ln(1+|\lambda|).$$

По функции u определим функцию $U(w)$, $w \in \mathbb{C}^2$, так же как по функции φ определяли функцию $\Phi(w)$:

$$U(w) = \sup_{z \in D} \Big(\big(\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} w_1 + \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w_2 \big) - u(z) \Big), \quad w \in \mathbb{C}^2.$$

Из соотношения между u, φ и из (4) следует

$$U(iy) = \widetilde{u}(y_1 - iy_2) \geqslant \widetilde{\varphi}(y_1 - iy_2) + 5\ln(1+|y|) = \Phi(iy) + 5\ln(1+|y|), \quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

В силу (8), согласно неравенству Коши—Буняковского, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \|S_y\| e^{-U(iy)} dy \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^2} \|S_y\| e^{-\Phi(iy)} (1+|y|)^{-5} dy \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \|S_y\|^2 e^{-2\Phi(iy)} (1+|y|^2)^{-3} dy \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} (1+|y|^2)^{-7} dy \right)^{1/2} \leqslant C_2 \|F\|_{H_2(\widetilde{\varphi})}, \quad (9)$$

где

$$C_2 = C_0 \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} (1+|y|^2)^{-7} dy \right)^{1/2}.$$

По лемме 3, примененной к паре функций u, v, для любой функции g, аналитической в области D и удовлетворяющей условию

$$\sup_{z \in D} \frac{|g(z)|}{K_0(v,z)} < \infty,$$

функция $g(z)/K_0(u,z)$, продолженная нулем на $\mathbb{C}\setminus D$, принадлежит $C^3(\mathbb{C})$ и, в частности, на этой функции определено значение функционала S_y. Пусть

$$S(g)=\int\limits_{\mathbb{R}^2} S_y\left(\frac{g(z)}{K_0(u,z)}\right)e^{-U(iy)}dy,\quad g\in H^-(D,v).$$

Из (9) следует оценка

$$|S(g)|\leqslant\left\|\frac{g(z)}{K_0(u,z)}\right\|_{W_3^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\|S_y\|e^{-U(iy)}dy\leqslant C_2\left\|\frac{g(z)}{K_0(u,z)}\right\|_{W_3^2}\|F\|_{H_2(\widetilde{\varphi})}.$$

По лемме 3

$$\left\|\frac{g(z)}{K_0(u,z)}\right\|_{W_3^2}\leqslant C_D\left\|\frac{g(z)}{K_0(u,z)}\right\|_{C^3}\leqslant MC_D\|g\|_{H^-(D,v)},$$

где C_D — постоянная, зависящая только от размеров области D. Таким образом,

$$|S(g)|\leqslant MC_2C_D\|g\|_{H^-(D,v)}\|F\|_{H_2(\widetilde{\varphi})}$$

и S — линейный непрерывный функционал на $H^-(D,v)$, причем

$$\|S\|\leqslant MC_2C_D\|F\|_{H_2(\widetilde{\varphi})}.$$

Докажем, что преобразование Фурье—Лапласа этого функционала — функция F. Сначала будем предполагать, что носитель $K=\operatorname{supp}S$ функционала S — компакт в D. Поскольку мы считаем, что $0\in D$, то найдется такое $q\in(0;1)$, что выпуклая оболочка носителя K лежит в области qD. Возьмем $q'\in(0;1)$, $q'>q$. Согласно равенству (4) и п. (2) предложения 1 имеем для $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$U(iy)=\widetilde{u}(y_1-iy_2)\geqslant q'H_D(y_1-iy_2)-C'_{q'}=q'H(y)-C'_{q'},$$

где H — опорная функция области D в вещественном смысле. Поэтому

$$\sup_{t\in K}\big((y,t)-U(iy)\big)\leqslant\sup_{t\in qD}(y,t)-q'H(y)+C'_{q'}=(q-q')H(y)+C'_{q'}.$$

Таким образом, при $s\in[0;3]$ имеет место равномерная по $t\in q\overline{D}$ сходимость интегралов

$$\int\limits_{|y|\leqslant R}e^{(t,y)-U(iy)}|y|^s\,dy\to\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{(t,y)-U(iy)}|y|^s dy,\quad R\to\infty.$$

Это значит, что имеет место сходимость в норме пространства $C^3(q\overline{D})$ функций

$$A_R(t)=\int\limits_{|y|\leqslant R}e^{(t,y)-U(iy)}dy\to\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{(t,y)-U(iy)}dy,\quad R\to\infty.$$

Пусть $t=(t_1,t_2)$, $y=(y_1,y_2)$. Положим $z=t_1+it_2$, $\lambda=y_1-iy_2$; тогда последнее соотношение с учетом (4) имеет вид

$$A_R(t)\to\int\limits_{\mathbb{C}}e^{\operatorname{Re}\lambda z-\widetilde{u}(\lambda)}dm(\lambda)=K_0(u,z),\quad R\to\infty.$$

Таким образом, для любой функции $g\in H^-(D,v)$ имеет место сходимость в норме пространства W_2^3 $(z=t_1+it_2)$:

$$\frac{g(z)}{K_0(u,z)}A_R(t)\to g(z),\quad R\to\infty.$$

Следовательно,

$$S(g)=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|y|\leqslant R} S_y\left(\frac{g(z)}{K_0(u,z)}\right)e^{-U(iy)}dy=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|y|\leqslant R} S_0\left(\frac{g(z)e^{(t,y)-U(iy)}}{K_0(u,z)}\right)dy=$$

$$=\lim_{R\to\infty}S_0\left(\frac{g(z)}{K_0(u,z)}A_R(t)\right)dy=S_0\left(\lim_{R\to\infty}\frac{g(z)}{K_0(u,z)}A_R(t)\right)dy=S_0(g(z)).$$

В частности,

$$S(e^{\lambda z})=S_0(e^{\lambda z}).$$

Целая функция $S_0(e^{-i(t,w)})$ по построению совпадает с целой функцией $f(w)$ на мнимом подпространстве, а $S_0(e^{\lambda z})$ — сужение этой функции на подпространство Σ. Значит, $S(e^{\lambda z})=F(\lambda)$.

Пусть теперь F — произвольная функция из $H_2(\widetilde{\varphi})$, S — функционал на $H^-(D,v)$, построенный выше. Если

$$\widetilde{\varphi}(\lambda_0)=\inf_{\lambda}\widetilde{\varphi}(\lambda),$$

то функция $\widetilde{\varphi}(\lambda_0+\alpha(\lambda-\lambda_0))$ возрастающая по $\alpha\in\mathbb{R}_+$. Для $\alpha\in(1/2;1)$ положим $F_\alpha(\lambda)=F(\lambda_0+\alpha(\lambda-\lambda_0))$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и пусть $R_\varepsilon>0$ таково, что

$$\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|\geqslant R_\varepsilon/4}\bigl|F(\lambda)\bigr|^2e^{-2\widetilde{\varphi}(\lambda)}dm(\lambda)<\varepsilon.$$

Тогда

$$\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|\geqslant R_\varepsilon/2}\bigl|F_\alpha(\lambda)\bigr|^2e^{-2\widetilde{\varphi}(\lambda)}dm(\lambda)=\frac{1}{\alpha^2}\int\limits_{|w-\lambda_0|\geqslant\alpha R_\varepsilon/2}|F(w)|^2e^{-2\widetilde{\varphi}(\lambda_0+\frac{1}{\alpha}(w-\lambda_0))}dm(w)\leqslant$$

$$\leqslant 4\int\limits_{|w-\lambda_0|\geqslant R_\varepsilon/4}|F(w)|^2e^{-2\widetilde{\varphi}(w)}dm(w)<4\varepsilon.$$

Следовательно, интегралы, определяющие норму $\|F_\alpha\|$, сходятся равномерно по $\alpha\in(1/2;1)$. Поскольку при $\alpha\to1$ функции F_α равномерно на компактах стремятся к F, то $F_\alpha\to F$ при $\alpha\to1$ в норме пространства $H_2(\widetilde{\varphi})$. Очевидно,

$$\bigl|F_\alpha(\lambda)\bigr|\prec e^{\alpha H_D(\lambda)},\quad \lambda\in\mathbb{C},$$

и согласно доказанному выше, каждая функция F_α является преобразованием Фурье—Лапласа функционала S_α:

$$S_\alpha(e^{\lambda z})=F_\alpha(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

При этом $\|S-S_\alpha\|\leqslant C\|F-F_\alpha\|$; поэтому $S(e^{\lambda z})=\lim\limits_{\alpha\to1}S_\alpha(e^{\lambda z})=\lim\limits_{\alpha\to1}F_\alpha(\lambda)=F(\lambda)$. Теорема 1 доказана. □

Следствие 1. *Пусть φ, v — выпуклые функции на ограниченной выпуклой области D, $0\in D$, функции $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{v}$ удовлетворяют условию* (B) *с постоянной $b>12$ и*

$$\widetilde{v}(\lambda)\geqslant\widetilde{\varphi}(\lambda)+10\ln(1+|\lambda|),\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Тогда каждая функция $F\in H_2(\widetilde{\varphi})$ является преобразованием Фурье—Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $H(D,v)$, причем

$$\|S\|_{H^*(D,v)}\leqslant M\|F\|_{H_2(\widetilde{\varphi})},\quad F\in H_2(\widetilde{\varphi}),$$

и константа M зависит только от постоянной b.

Доказательство. Согласно правому неравенству в п (3) предложения 1 имеем $H(D,v)\subset H^-(D,v)$, причем

$$\|g\|_{H^-(D,v)}\leqslant\|g\|_{H(D,v)},\quad g\in H(D,v),$$

т.е. вложение непрерывное. Сужение линейного непрерывного функционала $S \in (H^-(D,v))^*$ на $H(D,v)$ удовлетворяет соотношению

$$|S(g)| \leqslant \|S\|_{(H^-(D,v))^*}\|g\|_{H^-(D,v)} \leqslant \|S\|_{(H^-(D,v))^*}\|g\|_{H(D,v)};$$

следовательно, $\|S\|_{H^*(D,v)} \leqslant \|S\|_{(H^-(D,v))^*} \leqslant M\|F\|_{H_2(\widetilde{\varphi})}$. Следствие 1 доказано. □

Теорема 2. *Пусть $\varphi_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, — возрастающая последовательность выпуклых функций на ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ и функции*

$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda) = \sup_{z \in D}(\operatorname{Re}\lambda z - \varphi_n(z)), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

дважды дифференцируемы и удовлетворяют следующим условиям:

(1) *для любого n при некоторых $b_n > 12$, $R_n > 0$ верно соотношение*

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_n(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geqslant \frac{b_n}{1+|x|^2}|y|^2,$$

$y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$, $|x_1 + ix_2| \geqslant R_n$;

(2) *для всех n существуют такие постоянные c_n, что*

$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda) \geqslant \widetilde{\varphi}_{n+1}(\lambda) + \ln(1+|\lambda|) + c_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Введем пространства

$$H = \bigcup_n H(D, \varphi_n), \quad P = \bigcap_n H(\widetilde{\varphi}_n)$$

с топологиями индуктивного и проективного предела соответственно. Тогда преобразование Фурье—Лапласа

$$\mathfrak{L} : S \to \widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z}), \quad S \in H^*,$$

устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством H^* и пространством P, а преобразование

$$L : S \to \widehat{S}(z) = S(e^{\lambda z}), \quad S \in P^*,$$

устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством P^* и пространством H.

Доказательство. (1) Пусть $S \in H^*$; тогда $S \in H^*(D, \varphi_n)$ для любого n. Согласно п. (2) леммы 1 имеем $\widehat{S} \in H(\widetilde{\varphi}_n)$ для любого n, причем $\|\widehat{S}\|_{H(\widetilde{\varphi}_n)} \leqslant \|S\|_{H^*(D,\varphi_n)}$. Тем самым преобразование Фурье—Лапласа непрерывно отображает H^* в P. Инъективность отображения следует из полноты системы $e^{\lambda z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, в пространстве H.

Докажем сюръективность. Пусть $F \in P$, т.е. $F \in H(\widetilde{\varphi}_n)$ для любого n. В силу второго условия теоремы имеем $F \in H_2(\widetilde{\varphi}_n)$ для любого n. Возьмем $n \geqslant 11$, функции $\varphi = \varphi_n$, $v = \varphi_{n-10}$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Следовательно, $F(\lambda) = \widehat{S}(\lambda)$ для некоторого линейного непрерывного функционала на пространстве аналитических на D функций с нормой

$$\|g\| = \sup_{z \in D} \frac{|g(z)|}{K_0(v,z)}, \quad K_0(v,z) = \int_{\mathbb{C}} e^{\operatorname{Re}\lambda z - \widetilde{v}(\lambda)} dm(\lambda),$$

причем $\|S\|_{(H^-(D,v))^*} \leqslant M\|F\|_{H_2(\widetilde{\varphi})}$, $\quad F \in H_2(\widetilde{\varphi})$. Из п. (3) предложения 1 следует, что S — линейный непрерывный функционал на $H(D,v) = H(D, \varphi_{n-10})$. В силу произвольности n заключаем, что S — линейный непрерывный функционал на H. Первое утверждение теоремы доказано.

(2) Тот факт, что преобразование Фурье—Лапласа $L : P^* \to H$ действует непрерывно, следует из п. (1) леммы 1. Инъективность этого оператора следует из полноты системы $e^{\lambda z}$, $z \in D$, в пространстве P. Докажем сюръективность. Значение обратного оператора $\mathfrak{L}^{-1} : P \to H^*$ на функции $F \in P$ будем обозначать символом $\check{F}$. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in H$ и определим линейный функционал S_φ на пространстве P формулой

$$S_\varphi(F) = \check{F}(\varphi).$$

Непрерывность этого функционала следует из непрерывности оператора L^{-1}. Докажем, что
$$S_\varphi(e^{\lambda z}) = \varphi(z), \quad z \in D.$$
Зафиксируем $z \in D$ и обозначим через E_z функцию $e^{\lambda z} \in P$. Тогда $S_\varphi(e^{\lambda z}) = \check{E}_z(\varphi)$. Очевидно, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливо соотношение $\check{E}_z(e^{\lambda w}) = e^{\lambda z}$, т.е. функционал $\check{E}_z$ на элементы системы $e^{\lambda w}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, действует как точечный функционал $\delta_z : g \to g(z)$. В силу полноты данной системы в пространстве H функционал $\check{E}_z$ совпадает с δ_z: $S_\varphi(e^{\lambda z}) = \check{E}_z(\varphi) = \varphi(z)$. Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть $\varphi_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, — убывающая последовательность выпуклых функций на ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ и функции*
$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda) = \sup_{z\in D}\Big(\operatorname{Re}\lambda z - \varphi_n(z)\Big), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$
дважды дифференцируемы и удовлетворяют следующим условиям:

(1) *для всех n при некоторых $b_n > 12$, $R_n > 0$ верно соотношение*
$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_n(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geqslant \frac{b_n}{1+|x|^2}|y|^2,$$
$y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$, $|x_1 + ix_2| \geqslant R_n$;

(2) *для всех n существуют такие постоянные c_n, что*
$$\widetilde{\varphi}_{n+1}(\lambda) \geqslant \widetilde{\varphi}_n(\lambda) + \ln(1+|\lambda|) + c_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Введем пространства
$$H = \bigcap_n H(D, \varphi_n), \quad P = \bigcup_n H(\widetilde{\varphi}_n)$$
с топологиями проективного и индуктивного предела соответственно. Тогда преобразование Фурье—Лапласа
$$\mathfrak{L} : S \to\to \widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z}), \quad S \in H^*,$$
устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством H^* и пространством P, а преобразование
$$L : S \to \widehat{S}(z) = S(e^{\lambda z}), \quad S \in P^*,$$
устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством P^* и пространством H.

Первое утверждение теоремы доказано в [1]. Оба утверждения могут быть доказаны аналогично утверждениям теоремы 2.

3. Представляющие системы экспонент в индуктивных пределах весовых нормированных пространств аналитических функций. Пусть D — ограниченная выпуклая область на плоскости и u — выпуклая функция в этой области. В этом разделе будем предполагать, что функция $\widetilde{u}$ дважды дифференцируема и для некоторой функции $b(x) = b(|x|) =\to \infty$ при $|x| \to \infty$ выполняется соотношение
$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geqslant \frac{b(x)}{1+|x|^2}|y|^2, \quad y = (y_1, y_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \qquad (\mathrm{B}_1)$$
Пусть
$$v_n(\lambda) = \widetilde{u}(\lambda) + n\ln(1+|\lambda|^2), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad u_n(z) = \widetilde{v}_n(z), \quad z \in D, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
Последовательность функций v_n — возрастающая по n. Соответственно, последовательность функций u_n — убывающая. Введем пространства
$$\mathcal{H}_p(D, u) = \bigcap_{n=0}^{\infty} H(D, u_n), \quad \mathcal{H}_i(D, u) = \bigcup_{n=0}^{\infty} H(D, u_{-n})$$

с топологиями проективного и индуктивного предела соответственно. Пусть

$$\mathcal{P}_i(u) = \bigcup_{n=0}^{\infty} H(v_n), \quad \mathcal{P}_p(u) = \bigcap_{n=0}^{\infty} H(v_{-n}).$$

Теорема 4. *Пусть выпуклая в ограниченной выпуклой области D функция u удовлетворяет условию* (B_1). *Тогда преобразование Фурье—Лапласа устанавливает следующие топологические изоморфизмы*:

(1) *сильно сопряженного пространства $\mathcal{H}_p^*(D,u)$ и пространства $\mathcal{P}_i(u)$, сильно сопряженного пространства $\mathcal{P}_i^*(u)$ и пространства $\mathcal{H}_p(D,u)$;*
(2) *сильно сопряженного пространства $\mathcal{P}_p^*(u)$ и пространства $\mathcal{H}_i(D,u)$, сильно сопряженного пространства $\mathcal{H}_i^*(D,u)$ и пространства $\mathcal{P}_p(u)$.*

Доказательство. Элементарными вычислениями убеждаемся в оценке

$$\left|\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \ln(1+|x|^2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k\right| \leqslant \frac{4}{1+|x|^2}|y|^2, \quad y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2, \quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Пусть $b(x) \geqslant 4n$ при $|x| \geqslant R'_n$ и

$$M_n = \sup_{|x|\leqslant R'_n} \widetilde{u}(x_1+ix_2), \quad G_n = \bigl\{x : \widetilde{u}(x_1+ix_2) < M_n\bigr\}.$$

Из условия (B_1) и последней оценки следует, что функция $\widetilde{u}(x_1+ix_2)+n\ln(1+|x|^2)$ выпукла на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus B(0,R'_n)$, а функция

$$\psi_n(x_1+ix_2) := \max\bigl(\widetilde{u}(x_1+ix_2)+n\ln(1+|x|^2), M_n+n\ln(1+(R'_n)^2)\bigr)$$

выпукла на $\mathbb{R}^2$. В самом деле, на множестве $\mathbb{R}^2\setminus B(0,R'_n)$ эта функция выпукла как максимум двух выпуклых функций, а в круге $B(0,R'_n)$ она равна тождественно $M_n+n\ln(1+(R'_n)^2)$. Заметим, что

$$\psi_n(x_1+ix_2) = \widetilde{u}(x_1+ix_2)+n\ln(1+|x|^2) = v_n(x_1+ix_2)$$

на $\mathbb{R}^2 \setminus G_n$ и тем самым удовлетворяет условию (B_1). Кроме того, отсюда следует, что банаховы пространства $H(v_n)$ и $H(\psi_n)$ совпадают; значит

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} H(\psi_n) = \mathcal{P}_i(u), \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} H(\psi_{-n}) = \mathcal{P}_p(u).$$

Положим

$$\varphi_n(z) = \widetilde{\psi}_n(z), \quad z\in D, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Тогда в некоторой окрестности границы D $\varphi_n(z) \equiv u_n(z)$ и, значит, совпадают банаховы пространства $H(D,\varphi_n)$ и $H(D,u_n)$. Поэтому

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} H(D,\varphi_{-n}) = \mathcal{H}_i(D,u), \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} H(D,\varphi_n) = \mathcal{H}_p(D,u).$$

Убывающая последовательность выпуклых функций φ_n, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяет условиям теоремы 3. Из утверждения этой теоремы вытекает первое утверждение доказываемой теоремы. Возрастающая последовательность φ_n, $-n\in\mathbb{N}$, удовлетворяет условиям теоремы 2 и из утверждения этой теоремы вытекает второе утверждение доказываемой теоремы. Теорема 4 доказана. $\square$

Теорема 5. *Пусть выпуклая в ограниченной выпуклой области D функция u удовлетворяет условию* (B_1). *Тогда в пространстве $\mathcal{H}_i(D,u)$ существует представляющая система экспонент $e^{\lambda_k z}$, т.е. каждая функция $f\in\mathcal{H}_i(D,u)$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \quad z\in D,$$

причем ряд сходится в топологии пространства $\mathcal{H}_i(D,u)$. Если удалить из системы произвольное конечное число элементов, то система останется представляющей. Если же удалить бесконечную подсистему, то оставшаяся система, вообще говоря, уже не будет представляющей.

Доказательство. Доказательство проведем на основе понятия достаточных множеств. Пусть S — замкнутое множество на плоскости. В пространстве $\mathcal{P}_p(u)$ рассмотрим топологию, определяемую полунормами

$$\|F\|_n = \sup_{\lambda\in S}\bigl|F(\lambda)\bigr|e^{-v_{-n}(\lambda)}, \quad v_{-n}(\lambda)=\widetilde{u}(\lambda)-n\ln(1+|\lambda|^2), \quad \lambda\in\mathbb{C}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Множество S называется достаточным для пространства $\mathcal{P}_p(u)$, если эта топология оказывается равносильной исходной топологии.

Известна связь между достаточными множествами в $\mathcal{P}_p(u)$ и представляющими системами в $\mathcal{H}_i(D,u)$: если дискретное множество $S=\{\lambda_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, является достаточным для $\mathcal{P}_p(u)$, то система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k\in\mathbb{N}$, является представляющей в $\mathcal{H}_i(D,u)$ (см. [12]).

Теорема B (см. [2, теорема 1]). *Пусть ψ — субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный порядок роста ρ, μ — мера, ассоциированная с ней по Риссу. Если для некоторых a, $\alpha>0$ для всех точек $z\in\mathbb{C}$ выполняется условие*

$$\mu(B(z,t))\leqslant a(|z|+1)^{\alpha}t, \quad t\in(0;(|z|+1)^{-\alpha}),$$

то существует целая функция L с такими простыми нулями λ_n, что при некоторых $\delta,\beta>0$ круги $B_n=B(\lambda_n,\delta(|\lambda_n|+1)^{-\beta})$ попарно не пересекаются, а сама функция для некоторых постоянных A_1, A_2, A_3 удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}\ln|L(\lambda)|&\leqslant\psi(\lambda)+A_1\ln(|\lambda|^2+1), &&\lambda\in\mathbb{C},\\ \ln|L(\lambda)|&\geqslant\psi(\lambda)-A_2\ln(|\lambda|^2+1), &&\lambda\notin\bigcup_n B_n,\\ \ln|L'(\lambda_n)|&\geqslant\psi(\lambda_n)-A_3\ln(|\lambda_n|^2+1), &&n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Постоянные A_1, A_2, A_3 зависят от ρ,α,a и не зависят от конкретного вида функции ψ.

Функция $\widetilde{u}$ удовлетворяет условиям теоремы B для $\rho=1$, $\alpha=0$. Пусть L — целая функция, удовлетворяющая указанным оценкам и λ_n, $n\in\mathbb{N}$, — ее нули. Докажем, что множество $S=\{\lambda_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ является достаточным для пространства $\mathcal{P}_p(u)$.

Нужно показать, что для любого натурального числа $m\in\mathbb{N}$ найдутся такие числа $n\in\mathbb{N}$ и $M>0$, что для любой функции $F\in\mathcal{P}_p(u)$

$$\bigl|F(\lambda)\bigr|e^{-v_{-m}(\lambda)}\leqslant M\sup_k|F(\lambda_k)|e^{-v_{-n}(\lambda_k)}:=M\|F\|_n, \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Итак, зафиксируем натуральное число m и выберем натуральные числа $N\geqslant A_1+m$ и $n\geqslant N+A_2+A_3+1$. Здесь постоянные A_j взяты из теоремы B. Пусть $F\in\mathcal{P}_p(u)$; тогда

$$\bigl|F(\lambda)\bigr|\leqslant\|F\|_{H(v_{-n})}e^{v_{-n}(\lambda)}, \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Значит,

$$\bigl|\lambda^{2N}F(\lambda)\bigr|\leqslant\|F\|_{H(v_{-n})}e^{\widetilde{u}(\lambda)}(|\lambda|^2+1)^{-A_2-1}.$$

Отсюда и в силу нижних оценок на функцию L получим, что на некоторых окружностях $|\lambda|=R_k$, $R_k\to\infty$, $k\to\infty$, имеет место оценка

$$\frac{|\lambda^{2N}F(\lambda)|}{|L(\lambda)|}\prec(|\lambda|^2+1)^{-1}.$$

Следовательно, равномерно на плоскости сходится ряд Лагранжа

$$\lambda^{2N}F(\lambda)=\sum_k\frac{\lambda_k^{2N}F(\lambda_k)}{(\lambda-\lambda_k)L'(\lambda_k)}L(\lambda).$$

В силу нижней оценки на $L'(\lambda_k)$ имеем
$$\frac{|\lambda_k^{2N}F(\lambda_k)|}{|L'(\lambda_k)|} \prec \|F\|_n(1+|\lambda_k|^2)^{-n+A_3+N}.$$
Отсюда и из представления в виде ряда Лагранжа в силу выбора n следует оценка для $|\lambda-\lambda_k| \geqslant 1$:
$$\bigl|F(\lambda)\bigr| \leqslant \mathrm{const}\cdot\|F\|_n|L(\lambda)||\lambda|^{-2N},$$
которая продолжается на все λ по принципу максимума. Отсюда, учитывая оценки сверху на функцию L и выбор числа N, получим
$$\bigl|F(\lambda)\bigr|e^{-\widetilde{u}(\lambda)+m\ln(1+|\lambda|^2)} \leqslant \mathrm{const}\cdot\|F\|_n$$
или
$$\|F\|_{H(v_m)} \leqslant \mathrm{const}\cdot\|F\|_n, \quad F\in\mathcal{P}_p(u).$$
Теорема 5 доказана. □

Предложение 3. *Пусть выпуклая в ограниченной выпуклой области D функция u удовлетворяет условиям теоремы 5, а L — целая функция, удовлетворяющая условию теоремы* B *для $\psi=\widetilde{u}$. Пусть λ_k, $k\in\mathbb{N}$, — нули функции L, а μ_n, $n\in\mathbb{N}$, — некоторое бесконечное подмножество нулей. Система*
$$E=\Bigl\{e^{\lambda_n z},\ n\in\mathbb{N}\Bigr\}\setminus\Bigl\{e^{\mu_n z},\ n\in\mathbb{N}\Bigr\}$$
не является представляющей в пространстве $\mathcal{H}_i(D,u)$.

Доказательство. Переходя при необходимости к подмножеству, будем считать, что множество $\{\mu_k\}$ удовлетворяет следующему условию: в каждый отрезок $[2^n;2^{n+1}]$, $n\in\mathbb{N}$, попадает не более одного $r_k=|\mu_k|$ и $r_k>1$. Через $m(t)$ обозначим считающую функцию этого множества. Тогда функция
$$g(\lambda)=\prod_k\left(1-\frac{\lambda}{\mu_k}\right), \quad \lambda\in\mathbb{C},$$
является целой функцией, и выполняется соотношение
$$\ln|g(\lambda)|=\int\limits_1^{|\lambda|}\frac{m(t)dt}{t}+O(\ln|\lambda|), \quad \lambda\to\infty, \quad |\lambda-\mu_n|\geqslant 1, \quad n\in\mathbb{N}.$$
Поскольку $m(t)\to\infty$, $t\to\infty$, то
$$\ln|\lambda|=o(\ln|g(\lambda)|), \quad |\lambda-\mu_k|\geqslant 1, \quad k\in\mathbb{N}, \quad |\lambda|\to\infty.$$
В самом деле, пусть $\lambda\in[2^n;2^{n+1}]$. Тогда
$$\left|\sum_{|\mu_k|\geqslant 2^{n+2}}\ln\left|1-\frac{\lambda}{\mu_k}\right|\right|\leqslant|\lambda|\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{2^k}\leqslant 1, \qquad \left|\sum_{|\mu_k|\leqslant 2^{n-1}}\ln\left|1-\frac{\mu_k}{\lambda}\right|\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\leqslant 1.$$
Так как для $|\lambda-\mu_k|\geqslant 1$
$$\left|\sum_{2^{n-1}<|\mu_k|<2^{n+2}}\left|1-\frac{\lambda}{\mu_k}\right|\right|=O(\ln|\lambda|), \quad |\lambda|\to\infty,$$
то
$$\bigl|\ln|g(\lambda)|\bigr|=\sum_{|\mu_k|\leqslant 2^{n-1}}\ln\left|\frac{\lambda}{\mu_k}\right|+O(\ln|\lambda|)=\int\limits_1^{|\lambda|}\frac{m(t)dt}{t}+O(\ln|\lambda|), \quad \lambda\to\infty.$$
Таким образом, функция
$$L_1(\lambda)=\frac{L(\lambda)}{g(\lambda)}$$

принадлежит пространству $P_p(u)$ и тем самым является преобразованием Фурье—Лапласа некоторого функционала S на пространстве $H_i(D, u)$. Если бы система экспонент была представляющей, то каждый элемент этого пространства был бы суммой ряда по этой системе. Подействовав на этот ряд функционалом S, мы получили бы $S = 0$. Предложение 3 доказано. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абузярова Н. Ф., Юлмухаметов Р. С.* Сопряженные пространства к весовым пространствам аналитических функций// Сиб. мат. ж. — 2001. — *42*, № 1. — С. 3–17.
2. *Исаев К. П., Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С.* Представление рядами экспонент функций в локально выпуклых подпространствах $A^\infty(D)$// Уфим. мат. ж. — 2017. — *9*, № 3. — С. 50–62.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 1 (217). — С. 73–126.
4. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
5. *Напалков В. В.* О дискретных слабодостаточных множествах в некоторых пространствах целых функций// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — *45*, № 5. — С. 1088–1099.
6. *Напалков В. В.* О сравнении топологии в некоторых пространствах целых функций// Докл. АН СССР. — 1982. — *264*, № 4. — С. 827–830.
7. *Напалков В. В.* Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1987. — *51*, № 2. — С. 287–305.
8. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967.
9. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Ч. 1. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — М.: Мир, 1986.
10. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Ч. 2. Теория распределений и анализ Фурье. — М.: Мир, 1986.
11. *Юлмухаметов Р. С.* Достаточные множества в одном пространстве целых функций// Мат. сб. — 1981. — *116 (158)*, № 3 (11). — С. 427–439.
12. *Ehrenpreis L.* Fourier Analysis in Several Complex Variables. — N.Y.: Wiley, 1970.

Р. А. Башмаков
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: `bashmakov_rustem@mail.ru`

К. П. Исаев
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр РАН, Уфа;
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: `orbit81@list.ru`

Р. С. Юлмухаметов
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр РАН, Уфа;
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: `yulmukhametov@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 153 (2018). С. 29–54

УДК 517.53; 517.983

ОБ ОПЕРАТОРАХ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ГЕЛЬФОНДА—ЛЕОНТЬЕВА

© 2018 г. **А. В. БРАТИЩЕВ**

Посвящается члену-корреспонденту АН СССР А. Ф. Леонтьеву

Аннотация. Расширено понятие оператора обобщенного дифференцирования Гельфонда—Леонтьева в пространстве $H(G)$ аналитических в односвязной области G функций. В связи с этим понятием рассмотрены вопросы представления оператора, разрешимости линейных операторных уравнений, сходимости рядов обобщенных экспонент, коммутации и ряд других.

***Ключевые слова*:** оператор обобщенного дифференцирования, ряд обобщенных экспонент, интегральное представление, мультипликатор, диагональный оператор.

***AMS Subject Classification*:** 30B40; 46E10; 47B47

1. Введение. Различным задачам, связанным с понятием оператора обобщенного дифференцирования, посвящены работы самого А. Ф. Леонтьева, его учеников и последователей. Обзор базируется, в основном, на исследованиях автора и его ученика А. В. Моржакова, и является развернутым изложением доклада на конференции, посвященной 100-летию А. Ф. Леонтьева (см. [11]).

Появление понятия оператора (операции) обобщенного дифференцирования связано с проблемой обобщения ряда Фурье с целью представления решений линейных функциональных уравнений, начиная с простейших, типа разностного уравнения $y(z+1)-y(z)=0$. В [19] это была аппроксимация системой экспоненциальных мономов $\left\{z^{l-1}e\{\lambda_n z\}\right\}_{l=1,\ n=1}^{p_n,\ \infty}$ (в частности, разложение в ряд по системе) и уравнения, порожденные дифференциальными операторами бесконечного порядка $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^{(n)}(z)$. При этом характеристическая функция $a(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имела экспоненциальный тип и нули λ_n соответствующих кратностей p_n, а функция $y(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n z^n$ предполагалась аналитической в круге $|z|<R$ ($y(z)\in H(D(0,R))$). В [34] исследовалась аппроксимация системой обобшенных экспонент вида $e(\lambda_n z)$, где $e(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} e_n z^n$ — целая функция конечного порядка и нормального типа. Строилось функциональное уравнение, которому аппроксимируемые функции удовлетворяют, и изучалось общее решение этого уравнения. При синтезе этих подходов в [21] задача представления операторного уравнения в дифференциальной форме и привела авторов к введению оператора обобщенного дифференцирования

$$[D_e y](z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_{k-1}}{e_k}y_k z^{k-1}.$$

Последующее развитие идеологии этой статьи включало различные подходы к обобщению последнего определения (см. [28, 49, 51]). В [16] оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда—Леонтьева в пространстве аналитических в односвязной области $G\subseteq \mathbf{C}$ функций $H(G)$ (с топологией равномерной сходимости на компактах) назван линейный непрерывный в $H(G)$ оператор, действующий на системе степеней $\{z^n\}$ по правилу

$$Dz^n=a_{n-1}z^{n-1},\quad n\in\mathbb{N},\quad D1=0,$$

где $\{d_n\} \in \mathbf{C}$. Так как система полна в $H(G)$, то оператор определяется единственным образом. Определение не предполагает $0 \in G$ и обобщает исходное определение. Функцию

$$d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

назовем *порождающей функцией* оператора обобщенного дифференцирования D. В случае, если $d_n \neq 0$ для всех $n \geqslant 0$, функцию

$$e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{n!} z^n, \quad e_n := \frac{n!}{d_0 \dots d_{n-1}}, \quad e(0) = 1,$$

принято называть *обобщенной экспонентой*, если ряд сходится.

Диагональным оператором в $H(G)$ называется любой линейный и непрерывный в $H(G)$ оператор, действующий на системе степеней z^n по правилу

$$Jz^n = d_n z^n, \quad n \in \mathbb{N} \cap \{0\},$$

где $\{d_n\} \in \mathbb{C}$.

Замечание 1.1. Оператор обобщенного дифференцирования D не имеет обратного на пространстве многочленов $\operatorname{span}\{z^n\}$, но если $d_n \neq 0$ для всех $n \geqslant 0$, то оператор, определяемый по правилу

$$Iz^n = \frac{1}{d_n} z^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \cap \{0\},$$

и являющийся линейным на линейной оболочке $\operatorname{span}\{z^n\}$, будет единственным правым обратным к D. В случае непрерывного продолжения на все $H(G)$ он называется *оператором обобщенного интегрирования* и является правым обратным к D на $H(G)$.

2. Представление операторов обобщенного дифференцирования в $H(G)$. При переносе геометрических свойств области аналитичности пределов последовательностей полиномов Дирихле на обобщенные полиномы Дирихле А. Ф. Леонтьев выделил такой класс операторов обобщенного дифференцирования

$$Dz^n = P(n) z^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad D1 := 0,$$

где $P(z) = a_1 z + \dots + a_s z^s$, $a_s \neq 0$, $a_k \in \mathbb{C}$. Для них было найдено представление

$$[Dy](z) = \sum_{k=1}^{s} \Delta_k z^{k-1} y^{(k)}(z),$$

где Δ_k — разделенные разности из интерполяционной формулы Ньютона

$$P(z) = \sum_{k=1}^{s} \Delta_k z(z-1)\dots(z-k+1)$$

с узлами $0, 1, \dots, s$ (см. [35]). Очевидно, операторы этого класса применимы к любой аналитической функции в каждой точке ее аналитичности. Порождающая функция этого оператора обобщенного дифференцирования

$$d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n+1) z^n = \sum_{n=0}^{s} k! \Delta_k \frac{z^{k-1}}{(1-z)^{k+1}}$$

голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$ и имеет в точке $z = 1$ полюс порядка не выше $s + 1$. Обобщенная экспонента имеет вид

$$e(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{P(1) \dots P(n)}$$

в предположении $P(n) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Причина отсутствия свободного члена в многочлене $P(z)$ вызвана постановкой задачи: оператор обобщенного дифференцирования должен быть применим к любой аналитической функции. Если поставить задачу найти оператор обобщенного дифференцирования рассматриваемого типа, применимый к любой аналитической в начале координат функции в каждой точке ее аналитичности, то получается следующий результат.

Теорема 2.1 (см. [17]). *Пусть $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_s z^s$, где $a_s \neq 0$, $a_k \in \mathbb{C}$. Тогда соответствующий оператор обобщенного дифференцирования имеет представление*

$$[Dy](z) = a_0 \frac{y(z) - y(0)}{z} + \sum_{k=1}^{s} \Delta_k z^{k-1} y^{(k)}(z),$$

причем $\Delta_0 = a_0$, $\Delta_s = a_s$. Если $\nu_1, \dots, \nu_s$ — нули $P(z)$, то

$$e(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{P(1)\dots P(n)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-\nu_1)_n \dots (1-\nu_s)_n} =: {}_1F_s(1; 1-\nu_1, \dots, 1-\nu_s; z),$$

где ${}_1F_s$ — обобщенная гипергеометрическая функция (см. [56]).

Очевидно, оператор обобщенного дифференцирования не применим к функциям, имеющим $z = 0$ особой точкой, и применим к любой функции, аналитической в этой точке, в каждой точке ее аналитичности.

В [28] изучались операторы обобщенного дифференцирования, применимые к любой аналитической в нуле функции в каждой точке ее аналитичности. Для них при помощи интегрального представления в форме Адамара (см. [65]) была найдена форма

$$[Dy](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C y(t) \frac{1}{t^2} d\left(\frac{z}{t}\right) dt,$$

где $d(z)$ — аналитическая функция в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$. Следующая теорема описывает в терминах ядра класс операторов обобщенного дифференцирования в пространстве $H(G)$, где область $G \subseteq \mathbb{C}$ односвязна. Выберем последовательность ограниченных областей $G_1 \subset\subset \dots \subset\subset G_n \subset\subset \dots$, которая исчерпывает G.

Теорема 2.2 (см. [46]). *Определенное на последовательности степеней $\{z^n\}$ отображение*

$$Dz^n = d_{n-1} z^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad D1 = 0,$$

расширяется до линейного непрерывного отображения в $H(G)$ тогда и только тогда, когда ряд

$$d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

сходится в окрестности начала координат и функциональный элемент $d(z/t)$, $|t| > 1/\varepsilon$, $|z - z_0| < \varepsilon$, как функция двух переменных аналитически продолжается в каждую односвязную область $\overline{G}'_{N(n)} \times G_n \subset \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Это расширение имеет на $H(G)$ интегральное представление

$$[Dy](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma G_{N+1}} y(t) \frac{1}{t^2} d\left(\frac{z}{t}\right) dt, \quad z \in G_n.$$

Рассмотрим конкретные примеры операторов обобщенного дифференцирования.

Обобщенный оператор Данкла (см. [7])

$$[\Lambda_{\alpha,\beta} y](z) = y'(z) + \alpha \frac{y(z) - y(0)}{z} + \beta \frac{y(-z) - y(0)}{z}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \frac{\beta - \alpha}{2} \notin \mathbb{N},$$

совпадает с оператором Данкла (см. [57])

$$[\Lambda_\alpha y](z) = y'(z) + \frac{2\alpha + 1}{2} \frac{y(z) - y(-z)}{z}, \quad \alpha > -\frac{1}{2},$$

при $\alpha = \beta$. Он является оператором обобщенного дифференцирования в пространстве $H(G)$, где односвязная область G центрально-симметрична относительно начала координат,

$$\Lambda_{\alpha,\beta} z^n = (n + \alpha + (-1)^{n-1}\beta) z^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad D1 = 0.$$

Порождающая функция оператора $\Lambda_{\alpha,\beta}$ равна

$$d(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{\alpha}{1-z} + \frac{\beta}{1+z},$$

а обобщенная экспонента —

$$e(z) = {}_1F_3\left(1;\ 1,\ \frac{1+\alpha+\beta}{2},\ \frac{2+\alpha-\beta}{2};\ \frac{z^2}{4}\right) + \frac{z}{1+\alpha+\beta}\ {}_1F_3\left(1;\ 1,\ \frac{3+\alpha+\beta}{2},\ \frac{2+\alpha-\beta}{2};\ \frac{z^2}{4}\right).$$

Оператор обобщенного дифференцирования имеет вид (см. [18])

$$Dz^n = \frac{(a+n-1)(b+n-1)}{c+n-1} z^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad D1 = 0, \quad c \neq 0, -1, \ldots.$$

В этом случае порождающая функция будет равна

$$d(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{a+b-c-1}{1-z} + \frac{(a-c)(b-c)}{c}\, {}_2F_1(1, c; 1+c; z),$$

где ${}_2F_1(1, c; 1+c; z)$ — сумма гипергеометрического ряда (см. [56]). Обобщенная экспонента этого оператора является целой функцией экспоненциального типа и равна

$$e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n}{(a)_n (b)_n} z^n = {}_2F_2(1, c; a, b; z).$$

Оператор обобщенного дифференцирования имеет такое представление при условии $\operatorname{Re} c > 0$:

$$[Dy](z) = y\prime(z) + (a+b-c-1)\frac{y(z)-y(0)}{z} + \frac{(a-c)(b-c)}{z^c} \int_0^z t^{c+1} \frac{y(t)-y(0)}{t} dt.$$

Оператор обобщенного дифференцирования (см. [5]) имеет вид

$$Dz^n = \frac{1-q^n}{1-aq^{n-1}} z^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad D1 = 0, \quad a, q \in \mathbb{C}, \quad |a| \leqslant |q| < 1,$$

а порождающая его функция

$$d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-aq^n} z^n = \frac{1}{1-z} + (a-q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1-q^{n+1}z}$$

является мероморфной с простыми полюсами $1, 1/q, \ldots$ и решением функционального уравнения

$$F(z) - aF(qz) = \frac{1-q}{(1-z)(1-qz)}.$$

На аналитические в звездной области функции он действует по правилу

$$[Dy](z) = \left(1 - \frac{a}{q}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{q}\right)^{n-1} \frac{y(z) - y(q^n z)}{z}.$$

Порождающая функция

$$d_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-aq^n}{1-q^{n+1}} z^n = \frac{1}{1-z} + (q-a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{n+1}z}$$

линейного правого обратного к D оператора

$$Iz^n = \frac{1-aq^n}{1-q^{n+1}} z^{n+1}, \quad n \geqslant 0,$$

является решением функционального уравнения

$$F(z) - qF(qz) = \frac{1}{1-z} - \frac{a}{1-qz}.$$

Функция Гейне

$$e(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)\dots(1-aq^{n-1})}{(1-q)\dots(1-q^n)}$$

является обобщенной экспонентой и решением функционального уравнения

$$F(z) - \frac{1-az}{1-z}F(qz) = 0.$$

Вернемся к теореме 2.2. Очевидно,

$$G'^{-1}G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{G}'^{-1}_{N(n)} G_n.$$

Так как $z/t \in \overline{G}'^{-1}_{N(n)} G_n$, то можно было ожидать, что $d(z)$ будет аналитически продолжаться до однозначной локально аналитической функции на множестве $G'^{-1}G := \{\zeta z : \zeta \in G'^{-1},\ z \in G\}$, которое не обязательно является открытым. В [46] найдены односвязная область G и оператор обобщенного дифференцирования на $H(G)$, порождающая функция которого оказывается многозначной при аналитическом продолжении на $G'^{-1}G$.

Вопрос описания класса областей G, для которых порождающие функции всех операторов обобщенного дифференцирования на $H(G)$ будут локально аналитическими на $G'^{-1}G$, тесно связан с понятием мультипликатора. Впервые его определение дано в ежегодном отчете автора по НИР за 1998 г. (тема № 15 «Операторы обобщенного дифференцирования и смежные вопросы», Ростовская государственная академия сельхозмашиностроения, номер государственной регистрации 2.09.90 001184). Назовем *мультипликатором* множества $G_1 \subseteq \mathbb{C}$ по отношению к множеству $G_2 \subseteq \mathbb{C}$ множество

$$M(G_1, G_2) := \{z \in \mathbb{C} : zG_1 \subseteq G_2\}.$$

Для мультипликатора справедливо равенство

$$M(G_1, G_2) = (G_1^{-1} G_2')'.$$

В частности, мультипликатором множества G назовем множество

$$M(G) := \{z \in \mathbb{C} : zG \subseteq G\}.$$

Очевидно, $1 \in M(G)$.

Необходимость введения и изучения этого понятия возникла как результат рассмотрения автором цикла задач: описание области абсолютной сходимости ряда обобщенных экспонент (см. [4, 12]; исследование линейных операторов, символ которых является функцией произведения своих аргументов (см. [2]); описание обобщенного преобразования Бореля (см. [3]). Теория мультипликатора множеств развита в серии работ [3,9,15,47]. Установлены общие свойства мультипликатора пары множеств и одного множества. Исследована обратная задача описания всех множеств, имеющих мультипликатором заданное множество.

Теорема 2.3 (см. [9])**.**

(1) *В случае несвязного мультипликатора $M(G)$ в пространстве $H(G)$ всегда найдется оператор обобщенного дифференцирования, для которого аналитическое продолжение порождающей функции $d(z)$ на $G'^{-1}G$ будет многозначным, а в случае связного $M(G) \neq \{1\}$ функция $d(z)$ локально аналитическая и однозначная на $G'^{-1}G$.*

(2) *Пусть мультипликатор $M(G)$ связный.*
   (a) *Пусть $0 \in M(G)$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $D(0,\varepsilon) \subseteq M(G)$ тогда и только тогда, когда G ограничена. Если G не ограничена и $\neq \mathbb{C}$, то $0 \in G$ и $M(G) \subseteq \overline{D(0,1)}$.*

(b) *В случае* $0 \notin G$ *существует спираль с началом в точке* 1, *наматывающаяся на точку* 0 *или на точку* ∞:

$$S_{\varphi_0} = \big\{z = \exp\{re^{\varphi_0 i}\} : r \geqslant 0\big\} \subseteq M(G), \quad \varphi_0 \neq \pi k + \frac{\pi}{2},$$

и существует полунепрерывная сверху на $(-\infty, +\infty)$ *функция* $k(x)$ *со связной областью определения* $\{x : k(x) < \infty\}$, *которая определяет область* G *по формуле*

$$G \equiv \big\{z = \exp\{re^{\varphi i}\} :\ k(r\sin(\varphi_0 - \varphi)) < \cos(\varphi_0 - \varphi)\big\}.$$

(c) *В случае* $0 \in G$ *существует наматывающаяся на точку* 0 *спираль* $S_{\varphi_0} \subseteq M(G)$, $\pi/2 < \varphi_0 < 3\pi/2$, *и* $(-2\pi\cos\varphi_0)$ *— периодическая полунепрерывная сверху на* $(-\infty, +\infty)$ *функция* $k_1(x)$, *которая задает границу области* G *по формуле*

$$\Gamma = \left\{\exp\left\{k_1(x)\cos\varphi_0 + \left(k_1(x)\sin\varphi_0 - \frac{x}{\cos\varphi_0}\right) i\right\} :\ x \in (-\infty, +\infty)\right\}.$$

(3) *Дополнение* G' *в случае* $|\varphi_0 - \varphi| < \pi/2$ *представляет собой пучок спиралей с вершиной в бесконечности, а в случае* $|\varphi_0| < \pi/2$ *— пучок с вершиной в нуле.*

Приведем конкретные классы областей G, для которых порождающие функции всех мультипликаторов из $H(G)$ составляют пространство однозначных локально аналитических на $G'^{-1}G$ функций.

Теорема 2.4.

(1) (см. [16]) *Односвязная область* G, $0 \notin G$, *имеет своим мультипликатором полуинтервал* $(0, 1]$ *тогда и только тогда, когда множество* $G \cup \{0\}$ *звездное и оно не совпадает с открытым углом с вершиной в нуле. В этом случае порождающие функции всех операторов обобщенного дифференцирования из* $H(G)$ *аналитически продолжаются во внешность некоторого отрезка* $[0, M]$, $M > 1$, *расширенной комплексной плоскости,* $G'^{-1}G = \overline{\mathbb{C}} \setminus [1, \infty)$.

(2) (см. [47]) *Пусть каждый луч с началом в нуле пересекает область по интервалу (из которых хотя бы один конечный и хотя бы один не начинается в нуле) или по пустому множеству. В этом случае порождающие функции всех операторов обобщенного дифференцирования аналитически продолжаются в* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$.

(3) (см. [48]) *Пусть* G *— звездная область относительно нуля и* $G \neq \mathbb{C}$. *В этом случае порождающие функции всех операторов обобщенного дифференцирования из* $H(G)$ *аналитически продолжаются в звездную область* $G'^{-1}G$.

3. Обобщенное преобразование Бореля. Классическое преобразование Бореля (см. [33]) связывает целую функцию экспоненциального типа

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} z^n$$

с аналитической в бесконечно удаленной точке расширенной комплексной плоскости функцией

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{t^{n+1}},$$

также называемой *преобразованием Бореля* функции $f(z)$. Обозначим через K_f наименьшее выпуклое множество, во внешность которого аналитически продолжается $F(t)$. Если ввести обозначения

$$h_f(\theta) := \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln|f(r\exp\{\theta i\})|}{r}, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

для индикатора функции $f(z)$ и $k_f(\theta)$ для опорной функции компакта K_f, то согласно теореме Пойа они связаны равенством

$$k_f(\theta) = h_f(-\theta).$$

K_f называется *сопряженной индикаторной диаграммой* функции $f(z)$.

Преобразование Бореля используется в ряде задач комплексного анализа и потому подвергалось различным обобщениям (см. [22]). Суть их состоит в том, чтобы, заменяя ядро $\exp\{-zt\}$ преобразования на близкую по свойствам функцию, пытаться получить полностью или частично аналог теоремы Пойа. При этом обычно менялся порядок функции $f(z)$. В [3] мы остаемся в классе целых функций экспоненциального типа, но описываем все обобщенные экспоненты, для которых в той или иной мере сохраняется аналог теоремы Пойа.

Обобщенную экспоненту сейчас удобнее брать в виде

$$e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{n!} z^n.$$

Обобщенным преобразованием Бореля (ОПБ) целой функции экспоненциального типа

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} z^n$$

(относительно $e(z)$) назовем сумму

$$F_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{e_n t^{n+1}}.$$

Обобщенным обратным преобразованием Бореля (ООПБ) голоморфной в точке $\{\infty\}$ функции

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{t^{n+1}}$$

назовем сумму ряда

$$f_e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n e_n}{n!} z^n.$$

Несложно доказать следующее утверждение.

Предложение 3.1.

(1) *Для каждой функции экспоненциального типа ряд, определяющий обобщенное преобразование Бореля, сходится в окрестности $t = \infty$ тогда и только тогда, когда*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|e_n|} > 0.$$

В этом случае функция

$$\tilde{e}_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e_n} z^n$$

голоморфна в начале координат.

(2) *Для каждой голоморфной в точке $t = \infty$ функции ряд, определяющий обобщенное обратное преобразование Бореля, сходится к целой функции экспоненциального типа тогда и только тогда, когда*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|e_n|} < \infty.$$

В этом случае функция

$$\tilde{e}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n$$

голоморфна в начале координат.

Обозначим символом $[1, h(\theta)]$ пространство целых функций экспоненциального типа с индикатором $\leqslant h(\theta)$. В следующей теореме для случая $K = \{0\}$ в пунктах (b) подразумевается аналитичность в нуле.

Теорема 3.1 (см. [3]).

(1) *Пусть*

$$e_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e_n n!} z^n$$

— целая функция экспоненциального типа и K — выпуклый компакт, опорную функцию которого обозначим $h_K(-\theta)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

(a) *для любой функции*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} z^n \in [1, h_K(\theta)]$$

имеем

$$F_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{e_n t^{n+1}} \in H(K');$$

(b) $K_{e_1} \subseteq M(K)$; *при этом диагональный оператор*

$$[J_1 f](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C f(t) \frac{1}{t} \tilde{e}_1 \left(\frac{z}{t}\right) \, dt$$

непрерывен в пространстве $H(K'^{-1})$.

(2) *Пусть*

$$e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{n!} z^n$$

— целая функция экспоненциального типа и K — выпуклый компакт. Тогда следующие утверждения равносильны:

(b) *для каждой функции $F(t) \in H(K')$ имеем $f_e(z) \in [1, h_K(\theta)]$;*

(b) $K_e \subseteq M(K)$; *при этом диагональный оператор*

$$[Jf](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C f(t) \frac{1}{t} \tilde{e} \left(\frac{z}{t}\right) \, dt$$

непрерывен в пространстве $H(K'^{-1})$.

Предложение 3.2. *Пусть*

$$0 < \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|e_n|} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|e_n|} < \infty$$

и K — выпуклый компакт. Для того чтобы существовали порожденное функцией

$$e_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e_n n!} z^n$$

прямое и порожденное функцией

$$e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{n!} z^n$$

обратное преобразования Бореля соответственно пространств $[1, h_K(\theta)]$ и $H(K')$, необходимо и достаточно, чтобы K_e, $K_{e_1} \subseteq M(K)$.

Приведем пример из [3] нетривиальных компакта K и функции $e(z)$, для которых имеет место это утверждение. Положим $\kappa_s := \exp\left\{\dfrac{2\pi i}{s}\right\}$, где $s \geqslant 2$ фиксировано. В качестве K возьмем правильный s-угольник

$$K_s := \left\{ z = \sum_{l=1}^{s} \alpha_l \kappa_s^l : \alpha_l \geqslant 0, \ \sum_{l=1}^{s} \alpha_l \leqslant 1 \right\}.$$

Для отличных от нуля комплексных чисел a_0, a_1, ..., a_{s-1} положим

$$e(z) := \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{s-1}\Big(a_0 + a_1\kappa_s^{-i} + \dots + a_{s-1}\kappa_s^{-(s-1)i}\Big)\exp\{\kappa_s^i z\}.$$

Функции

$$\tilde{e}(z) = \frac{a_0 + \dots + a_{s-1}z^{s-1}}{1-z^s}, \quad \tilde{e}_1(z) = \frac{a_0^{-1} + \dots + a_{s-1}^{-1}z^{s-1}}{1-z^s}$$

голоморфны вне точек κ_s^l, $l = 1, \dots, s$. Поэтому для компакта K_s существуют порождаемые этой функцией $e(z)$ обобщенные прямое и обратное преобразования Бореля пространств $[1, h_{K_s}(\theta)]$ и $H(K_s')$.

Теорема 3.2 (см. [3]). *Пусть*

$$e(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e_n}{n!}z^n$$

— целая функция экспоненциального типа. Тогда пара утверждений

(a) *для каждого содержащего начало координат выпуклого компакта K и для любой функции $F(t) \in H(K')$ для ее обобщенного обратного преобразования Бореля имеем $f_e(z) \in [1, h_K(\theta)]$,*
(b) $K_e \subseteq [0, 1]$

равносильна паре утверждений

(a) *для каждого не содержащего начало координат выпуклого компакта K и для любой функции $F(t) \in H(K')$ для ее обобщенного обратного преобразования Бореля имеем $f_e(z) \in [1, h_K(\theta)]$,*
(b) $K_e = \{1\}$.

Аналогичное утверждение имеет место для пары $\tilde{e}_1(z)$ и обобщенного преобразования Бореля.

Замечание 3.1. Ранее в статье (см. [40]) о представлении функций рядами обобщенных экспонент А. Ф. Леонтьев также пришел к классу функций экспоненциального типа $e(z)$, для которых $\tilde{e}(z)$ и $\tilde{e}_1(z)$ аналитически продолжаются в область $\overline{\mathbb{C}}\setminus[1,\infty]$. Он доказал, что такие функции $e(z)$ необходимо имеют вполне регулярный рост в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, но не обязательно вполне регулярного роста в левой полуплоскости.

Замечание 3.2. Если $\tilde{e}(z)$ — функция, аналитическая в области $\overline{\mathbb{C}}\setminus[1,\infty]\}$, а $\tilde{e}_1(z)$ — функция, аналитическая в круге $D(0,1)$, то граница главной звезды $\tilde{e}_1(z)$ задается в полярной системе координат следующей кривой (см. [55]):

$$\exists\alpha,\beta \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big)\ \forall\theta \in (0, 2\pi)\ \rho(\theta) := \min\Big\{\exp\{\theta \operatorname{tg}\alpha\},\ \exp\{(2\pi-\theta)\operatorname{tg}\beta\}\Big\}, \quad \rho(0) = 1.$$

4. Полиномы Бренке и коммутационные соотношения. В [60] было предложено обобщение понятия полиномов Аппеля (1880 г.), получившее название *полиномов Бренке*, которые, в свою очередь, подвергались дальнейшим обобщениям; кроме того, изучались разложения в ряды по этим полиномам (см. [59]).

Пусть даны два формальных степенных ряда

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n, qqq\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n z^n.$$

Их произведение

$$a(w)\psi(zw) = \sum_{n=0}^{\infty}p_n(z)w^n$$

порождает последовательность полиномов Бренке (ППБ)

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!}\psi_k z^k, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

В частном случае $\psi(z) = e^z$ получается последовательность полиномов Аппеля

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!k!} z^k,$$

которые связаны равенствами

$$\frac{d}{dz} p_n(z) = p_{n-1}(z), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Имеет место следующая связь между классом полиномов Бренке и классом операторов обобщенного дифференцирования Гельфонда—Леонтьева на $\operatorname{span}\{z^n\}$.

Теорема 4.1 (см. [7]). *Последовательность полиномов Бренке $p_n(z)$, где $\psi_n \neq 0$ для всех $n \geqslant 0$, порождает оператор обобщенного дифференцирования D на $\operatorname{span}\{z^n\}$ по следующему правилу:*

$$Dz^n = \frac{\psi_{n-1}}{\psi_n} z^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad D1 := 0,$$

причем

$$Dp_n(z) = p_{n-1}(z), \quad Dp_n(0) = \frac{a_{n-1}\psi_0}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad e(z) \equiv \frac{1}{\psi_0}\psi(z).$$

Обратно, оператор обобщенного дифференцирования D на $\operatorname{span}\{z^n\}$ с условием $d_n \neq 0$, $n \geqslant 0$, и формальный ряд

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

порождают ППБ $\{p_n(z)\}$ с порождающей функцией полиномов

$$a(w)e(zw) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) w^n,$$

причем

$$Dp_n(z) = p_{n-1}(z), \quad Dp_n(0) = \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим символом $\mathcal{L}_D$ множество линейных операторов L на $\operatorname{span}\{z^n\}$, которые коммутируют с оператором обобщенного дифференцирования D: $LD = DL$.

Теорема 4.2 (см. [7]). *Между $\mathcal{L}_D$ и множеством всех последовательностей полиномов Бренке с порождающей функцией*

$$a(w)e(zw) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) w^n,$$

где $d_n \neq 0$ для всех $n \geqslant 0$ и

$$e(z) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{d_0 \ldots d_{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{n!} z^n$$

— обобщенная экспонента оператора обобщенного дифференцирования D, существует изоморфизм, задаваемый правилом

$$\left[L \frac{e_n}{n!} t^n\right](z) = p_n(z), \quad n \geqslant 0.$$

При этом (формально)

$$\bigl[Le(\lambda t)\bigr](z) = a(\lambda)e(\lambda z), \quad a_n = \bigl[Lt^n\bigr](0)e_n, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Следующая теорема дает критерий расширяемости оператора из $\mathcal{L}_D$ до оператора, непрерывного в $H(G)$, и интегральное представление такого оператора.

Теорема 4.3 (см. [7])**.** *Пусть оператор обобщенного дифференцирования D непрерывен в $H(G)$ и обобщенная экспонента*

$$e(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e_n}{n!}z^n$$

является целой функцией экспоненциального типа. Оператор $L\in\mathcal{L}_D$ расширяется до непрерывного в $H(G)$ оператора тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(1) *его характеристическая функция*

$$a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[Lt^n](0)e_n}{n!}z^n$$

является целой функцией экспоненциального типа, что равносильно условию

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Bigl|\bigl[Lt^n\bigr](0)e_n\Bigr|}<\infty;$$

(2) *для последовательности его полиномов Бренке*

$$p_n(z)=\left[L\left(\frac{e_n}{n!}t^n\right)\right](z)$$

имеет место равномерная по n оценка через старшие коэффициенты на каждом компакте из G: для любого $m\geqslant 1$ существует такое $C_m>0$, что при всех $z\in G_m$ и всех $n\geqslant 1$ справедливо неравенство

$$|p_n(z)|\leqslant C_m\max_{t\in G_m}\left|\frac{e_n}{n!}t^n\right|,$$

что равносильно равномерной сходимости ряда

$$k(t,z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,p_n(z)}{e_n\,t^{n+1}}$$

в бицилиндрической области $D(\infty,R_m)\times G_m$, где

$$D(\infty,R_m):=\bigl\{z\in\overline{\mathbb{C}}:|z|>R_m\bigr\};$$

(3) *для всех $m\geqslant 1$ существует такое $M=M(m)$, что сумма ряда*

$$k(t,z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!p_n(z)}{e_nt^{n+1}}$$

аналитически продолжается в односвязную область $\overline{G}'_M\times G_m\subset\overline{\mathbb{C}}\times\mathbb{C}$. При этом L представи́м в виде оператора обобщенной комплексной свертки:

$$[Ly](z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma G_{M+1}}y(t)k(t,z)\,dt,$$

и обобщенное обратное преобразование Бореля ядра $k(t,z)$ равно $\bigl[Le(\lambda t)\bigr](z)=a(\lambda)e(\lambda z)$.

Более простой по форме критерий расширения оператора, коммутирующего с оператором обобщенного дифференцирования, получается для круговой области $D(0,R)$, если воспользоваться критерием М. Г. Хапланова (см. [53]).

Замечание 4.1. Пусть оператор обобщенного дифференцирования D непрерывен в $H(D(0,R))$, т.е. его порождающая функция $d(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ аналитична в $D(0,1)$. Оператор $L \in \mathcal{L}_D$ расширяется до непрерывного в $H(D(0,R))$ оператора тогда и только тогда, когда модули членов его полиномов Бренке имеют следующую равномерную оценку: для любого $r < R$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|e_n|} \max_{0\leqslant k\leqslant n} \left| \left[Lt^{n-k}\right](0) C_n^k e_{n-k} e_k \right| r^k} < R.$$

Замечание 4.2 (см. [7])**.** Пусть G — односвязная центрально симметричная область, $D = \Lambda_{\alpha,\beta}$, $L \in \mathcal{L}_{\Lambda_{\alpha,\beta}}$. Следующие утверждения равносильны:

(1) L расширяется до линейного непрерывного в $H(G)$ оператора и коммутирует с обобщенным оператором Данкла: $L\Lambda_{\alpha,\beta} = \Lambda_{\alpha,\beta} L$ на $H(G)$;

(2) функция

$$a(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[Lt^n](0)}{(1+\alpha+\beta)\ldots(n+\alpha+(-1)^{n-1}\beta)} \lambda^n$$

является целой функцией экспоненциального типа, а функция

$$A(t-z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[L\zeta^n](0) n!}{(1+\alpha+\beta)\ldots(n+\alpha+(-1)^{n-1}\beta)} \frac{1}{(t-z)^{n+1}}$$

аналитически продолжается в каждую область $\overline{G}'_M \times G_m$ как функция двух переменных.

При $D = d/dz$ имеем

$$e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Первое условие теоремы принимает вид

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|[Lt^n](0)|} < \infty;$$

оно равносильно тому, что характеристическая функция оператора

$$a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[Lt^n](0)}{n!} z^n$$

является целой функцией экспоненциального типа. Преобразование Бореля последней

$$A(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[L\zeta^n](0)}{t^{n+1}}$$

аналитично в окрестности бесконечности, и можно показать, что

$$A(t-z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! p_n(z)}{t^{n+1}}$$

на каждой бицилиндрической области $D(\infty, R_M) \times G_m$. Поэтому имеет место следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Оператор $L \in \mathcal{L}_{d/dz}$ расширяется до непрерывного в $H(G)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(1) *его характеристическая функция $a(z)$ является целой функцией экспоненциального типа;*

(2) *функция $A(t-z)$ аналитически продолжается как функция двух переменных в каждую область вида $\overline{G}'_M \times G_m$.*

Второе условие можно переформулировать так: функция $A(t)$ аналитически продолжается из окрестности бесконечности до локально аналитической на множестве $G'-G$. Нас давно интересовал вопрос: будут ли эти продолжения однозначными локально аналитическими на $G'-G$? Для ограниченных областей имеем $G'-G=\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$, и ответ положителен(см. [14, 54]). Для некоторых классов неограниченных областей ответ также положителен (см. [29]). В обоих случаях это продолжение было аналитическим вне множества $S(G):=\{z\in\mathbb{C}:z+G\subseteq G\}$, обладающего свойством $G'-G=(S(G))'$ (см. [8,29]). Мы его назвали *вычетом множества* G. Всегда $0\in S(G)$.

Теорема 4.4 (см. [8])**.** *Пусть G — односвязная область, а ее вычет $S(G)$ связен и $\neq\{0\}$. Тогда для каждого непрерывного в $H(G)$ оператора $L\in\mathcal{L}_{d/dz}$ существует локально аналитическая на $(S(G))'$ функция $A(t)$, обладающая следующим свойством: для любого $m\geqslant 1$ найдется такое $M=M(m)$, что для всех $z\in G_m$*

$$[Ly](z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma G_{M+1}} y(t)A(t-z)\,dt.$$

В случае несвязного $S(G)$ всегда существует непрерывный в $H(G)$ оператор $L\in\mathcal{L}_{d/dz}$, у которого соответствующая функция $A(t)$ локально аналитична, но неоднозначна на $(S(G))'$.

Вопрос об однозначности ядер всех операторов комплексной свертки для случая $S(G)=\{0\}$ остается открытым.

5. Хаотичность и гиперцикличность операторов обобщенной свертки. В [57] была установлена хаотичность и гиперцикличность операторов свертки, ассоциированных с оператором Данкла, в пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$. В [27] этот результат распространен на операторы обобщенного дифференцирования в исходном определении. В [26] изучено другое по сравнению с предложенным нами в [7] обобщение оператора Данкла, которое также является частным случаем оператора обобщенного дифференцирования Гельфонда—Леонтьева. Поэтому результаты [27] позволили выделить соответствующий класс хаотических и гиперциклических операторов свертки. В [6] был описан класс линейных непрерывных в $H(G)$ операторов, коммутирующих с оператором Данкла Λ_α, дано его интегральное представление и доказана хаотичность и гиперцикличность операторов этого класса. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.1 (см. [6])**.**

(1) *Пусть линейный оператор L непрерывен на $H(G)$, где область G односвязна и симметрична относительно начала координат,*

$$e(\lambda):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^n\left[\frac{n}{2}\right]!\Gamma(\alpha+1+\left[\frac{n+1}{2}\right])}z^n$$

— обобщенная экспонента оператора Данкла Λ_α (см. [57])*. Тогда равносильны следующие утверждения*:

(a) $L\in\mathcal{L}_{\Lambda_\alpha}$;

(b) *L действует на последовательности степеней по правилу*

$$L\left[\frac{n!\Gamma(\alpha+1)}{2^n[\frac{n}{2}]!\Gamma(\alpha+1+[\frac{n+1}{2}])}t^n\right](z):=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k\frac{(n-k)!\Gamma(\alpha+1)}{2^{n-k}\left[\frac{n-k}{2}\right]!\Gamma\Big(\alpha+1+\left[\frac{n-k+1}{2}\right]\Big)}z^{n-k};$$

(c) *функция*

$$a(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\lambda^n:=\frac{[Le(\lambda t)](z)}{e(\lambda z)}$$

не зависит от z и является целой функцией экспоненциального типа по λ, а функция двух переменных

$$A(t-z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(t-z)^{n+1}},\quad t\in D(\infty,R)\subseteq\overline{G}'_M,\quad z\in D(z_0,\varepsilon)\subseteq G_m,$$

аналитически продолжается в односвязные области $\overline{G}'_M \times G_m \subset \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$. *Такой оператор* L *представим в виде обобщенной комплексной свертки*

$$[Ly](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma G_{M+1}} y(t)\big[B_e a(\lambda) e(\lambda z)\big](t,z)\,dt.$$

(2) *Пусть* L — *линейное непрерывное не скалярно кратное тождественному преобразование пространства* $H(G)$, *где* G — *звездная область, и* $L\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha L$ *на* $H(G)$. *Тогда* L *имеет инвариантное относительно* Λ_α *гиперциклическое многообразие, которое плотно в* $H(G)$. *Оператор* L *является также хаотическим.*

В теореме 4.3 был описан класс линейных непрерывных в $H(G)$ операторов, которые коммутируют с заданным и непрерывным в $H(G)$ оператором обобщенного дифференцирования D. В [7] для для этого класса доказана следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть оператор обобщенной комплексной свертки* L *удовлетворяет теореме 4.3 и не является скалярно кратным тождественному преобразование пространства* $H(G)$. *Тогда* L *имеет инвариантное относительно* D *гиперциклическое многообразие, которое плотно в* $H(G)$. *Оператор* L *является также хаотическим.*

6. Операторы обобщенного дифференцирования и линейные операторные уравнения. Операторы обобщенного дифференцирования первоначально появились в [21] как инструмент представления операторных уравнений, которым удовлетворяют функции, аппроксимируемые системой обобщенных экспонент $\{e(\lambda_n z)\}$. Развитие этого направления отражено в монографиях, диссертациях и обзорах, в частности, [24, 31, 36]. Изучение дифференциальных уравнений на базе операторов обобщенного дифференцирования следует начинать с рассмотрения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Теорема 6.1 (см. [47]).

(1) *Пусть* D — *оператор обобщенного дифференцирования в* $H(G)$. *Для того чтобы уравнение* $(D-\lambda I)y = 0$ *имело ненулевое решение для каждого* $\lambda \in \mathbb{C}$, *достаточно (а в случае* $0 \in G$ *и необходимо), чтобы все числа* d_n, *начиная с некоторого* d_{n_0}, *были не равны нулю и обобщенная экспонента*

$$z^{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{d_{n_0} \ldots d_{n-1}} z^n =: e(z)$$

была целой функцией. В этом случае общее решение имеет вид $y(z) = Ce(\lambda z)$, *где* $C \in \mathbb{C}$.

Далее предполагаем, что $e(z)$ — *целая функция.*

(2) *Частное решение неоднородного уравнения*

$$(D-\lambda I)y = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k e^{(k)}(\lambda z)$$

имеет вид

$$y_0(z) = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{c_{k-1}}{k} z^k e^{(k)}(\lambda z).$$

(3) *Частное решение неоднородного уравнения*

$$(D-\lambda I)y = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k e^{(k)}(\mu z)$$

в случае $\lambda \neq \mu$ *имеет вид*

$$y_0(z) = \sum_{k=0}^{m} q_k z^k e^{(k)}(\mu z),$$

где коэффициенты q_k *явно выражаются через* $\{c_k\}$, λ, μ.

(4) *Общее решение неоднородного уравнения*

$$(D-\lambda I)^s y = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k e^{(k)}(\mu z)$$

в случае $\lambda \neq \mu$ *имеет вид*

$$y(z) = \sum_{k=0}^{s-1} b_k z^k e^{(k)}(\lambda z) + \sum_{k=0}^{m} q_k z^k e^{(k)}(\mu z),$$

где b_k *— произвольные постоянные, а* q_k *явно выражается через* $\{c_k\}$, λ, μ.

(5) *Пусть характеристическое уравнение однородного операторного уравнения*

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_n y = 0$$

имеет корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *кратностей соответственно* $p_1, \ldots, p_m$. *Тогда общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y(z) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=0}^{p_l-1} c_{l,k} z^k e^{(k)}(\lambda_l z),$$

где $c_{l,k}$ *— произвольные коэффициенты из* $\mathbb{C}$.

Теорема 6.2.

(1) (см. [47]) *Пусть* G *— односвязная область,* $0 \in G$ *и* D *— оператор обобщенного дифференцирования в* $H(G)$. *Уравнение* $Dy = f$ *разрешимо в* $H(G)$ *для любой правой части из* $H(G)$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(a) $d_n \neq 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(b) *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{d_n} z^n =: d_1(z)$ *сходится в окрестности начала координат, и функциональный элемент* $\dfrac{z}{t} d_1\left(\dfrac{z}{t}\right)$, $|t| > 1/\varepsilon$, $|z - z_0| < \varepsilon$, *аналитически продолжается в каждую односвязную область* $\overline{G}'_M \times G_m$, $m \in \mathbb{N}$. *В этом случае частное решение задается в виде интеграла*

$$y(z) = [If](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma G_{M+1}} f(t) \frac{z}{t} d_1\left(\frac{z}{t}\right) dt, \quad z \in G_m.$$

(2) (см. [17]) *Пусть* G *— звездная относительно нуля область, а оператор обобщенного дифференцирования*

$$[Dy](z) = a_0 \frac{y(z) - y(0)}{z} + \sum_{k=1}^{s} \Delta_k z^{k-1} y^{(k)}(z)$$

образован по многочлену $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_s z^s$, $a_s \neq 0$, *как описано выше. Предположим, что* $P(k) \neq 0$ *для всех* $k \geqslant 0$ *и все нули* $\nu_1, \ldots, \nu_s$ *этого многочлена лежат в левой полуплоскости:* $\operatorname{Re} \nu_1, \ldots, \operatorname{Re} \nu_s < 1$. *Тогда общее решение в* $H(G)$ *линейного операторного уравнения* $Dy - \lambda y = f$ *для любой правой части из* $H(G)$ *имеет вид*

$$Ce(\lambda z) + \frac{z}{a_s} \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^s} \left(\frac{\lambda}{a_s}(1-u_1)\ldots(1-u_s) z\right)^k \prod_{k=1}^{s} u_k^{-\nu_k} f(u_1 \ldots u_s z)\, du_1 \ldots du_s,$$

где $e(z) = {}_1F_s(1; 1-\nu_1, \ldots, 1-\nu_s; z)$, $C \in \mathbb{C}$.

(3) (см. [47]) *Пусть* G *— односвязная область,* $0 \notin G$, $P(z) = z(z-\nu)$, $\nu \notin \mathbb{N} \cup 0$. *Тогда общее решение в* $H(G)$ *линейного операторного уравнения* $Dy - \lambda y = f$ *для любой правой части из*

$H(G)$ имеет вид

$$Ce(\lambda z)+\int\limits_{z_0}^{z}\int\limits_{z_0}^{x_2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!^2}\left(\lambda\left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)(z-x_2)\right)^k {x_1}^{-\nu}{x_2}^{\nu-1}f(x_1)\,dx_1\,dx_2.$$

В последнем пункте вопрос о представлении решения в случае $\deg P>2$ открыт.

7. Операторы обобщенного дифференцирования и интерполяционная задача. В работах А. Ф. Леонтьева присутствуют различные постановки интерполяционных задач с разным их предназначением. Мы здесь не останавливаемся на так называемой «задаче свободной интерполяции» (см. [1]) и интерполирующей функции Леонтьева (см. [25, 34]), а приводим задачи, связанные с темой статьи.

Теорема 7.1 (см. [37]).

(1) *Пусть интерполяционные задачи $f_1(n)=e_n$, $f_2(n)=1/e_n$ разрешимы в пространстве функций порядка не выше 1 и типа 0 в правой полуплоскости: существует такое $N>0$, что для всех $n>N$, всех $\varepsilon>0$ и всех $|z|>r(\varepsilon)$ справедливо неравенство*

$$\bigl|f_i(z)\bigr|\leqslant a^{\varepsilon|z|}.$$

Тогда функции

$$E(t):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e_n}{t^{n+1}},\quad E_1(t):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e_nt^{n+1}} \tag{1}$$

голоморфны вне отрезка $[0,1]$.

(2) *Если функции (1) голоморфны вне отрезка $[0,1]$, то для каждой выпуклой области G, $0\in G$, найдется такая последовательность $\{\lambda_n\}$, обладающая свойством*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0,$$

что последовательность $\{e(\lambda_n z)\}$ будет представляющей в пространстве $H(G)$.

Теорема 7.2 (см. [3]). *Пусть*

$$e(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e_n}{n!}z^n$$

— целая функция экспоненциального типа и K — выпуклый компакт $\neq\{0\}$ (в этом случае $1\in M(K)\subseteq\overline{D(0,1)}$). Тогда равносильны следующие утверждения:

(a) $K_e\subseteq M(K)$;

(b) *существует функция экспоненциального типа в полуплоскости $\operatorname{Re}z>0$, интерполирующая $\{d_n\}$ в следующем смысле: $a(0)=d_0$, $a(1)=d_1,\dots$, и такая, что ее преобразование Лапласа аналитически продолжается в односвязную область $(\overline{\ln M(K)})'$, где $\ln M(K)$ есть объединение точки $\infty=\ln 0$ и всех точек из полосы $-\pi\leqslant\operatorname{Im}(z)<\pi$, являющихся образами $M(K)$ при отображении $w=\ln z$, $-\pi\leqslant\arg z<\pi$.*

Теорема 7.3 (см. [47]).

(1) *Пусть мультипликатор односвязной области G равен $M(G)=[0,1]$. Оператор обобщенного дифференцирования $Dz^n=a_{n-1}z^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, $D1=0$, непрерывен в $H(G)$ тогда и только тогда, когда найдутся $\sigma>0$ и целая функция экспоненциального типа $a(z)$ с индикаторной диаграммой на $[-\sigma,0]$, которая решает следующую интерполяционную задачу: $a(0)=d_0$, $a(1)=d_1,\dots$.*

(2) *Пусть каждый луч с началом в нуле пересекает односвязную область G по интервалу (из которых хотя бы один конечный и хотя бы один не начинается в нуле) или по пустому множеству. Оператор обобщенного дифференцирования $Dz^n=a_{n-1}z^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, $D1=0$, непрерывен в $H(G)$ тогда и только тогда, когда найдется целая функция порядка не выше 1 и типа 0, которая решает следующую интерполяционную задачу: $a(0)=d_0$, $a(1)=d_1,\dots$.*

(3) *Пусть G — звездная область относительно нуля и $G \neq \mathbb{C}$. Оператор обобщенного дифференцирования $Dz^n = a_{n-1}z^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $D1 = 0$, непрерывен в $H(G)$ тогда и только тогда, когда найдется функция экспоненциального типа в полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$, *интерполирующая $\{d_n\}$ в следующем смысле*: $a(0) = d_0$, $a(1) = d_1, \ldots,$ *и такая, что ее преобразование Лапласа аналитически продолжается в односвязную область $(\overline{\ln M(G)})'$, где $\ln M(G)$ есть объединение точки $\infty = \ln 0$ и всех точек из полосы $-\pi \leqslant \operatorname{Im}(z) < \pi$, являющихся образами $M(G)$ при отображении $w = \ln z$, $-\pi \leqslant \arg z < \pi$.*

В последнем случае использованы результаты по аналитическому продолжению суммы степенного ряда из [45].

Пусть $\Lambda := \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^r$ — последовательность попарно различных точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ комплексной плоскости кратностей соответственно $p_1, \ldots, p_r$, $n := \sum\limits_{k=1}^r p_k$, E_Λ — n-мерное векторное пространство экспоненциальных мономов $z^{l-1}e^{\lambda_k z}$ с базисом $e(\Lambda) := \left\{z^{l-1}e^{\lambda_k z}\right\}_{l=1,k=1}^{m_k,r}$. Это пространство инвариантно как относительно операции дифференцирования d/dz, т.е. $d/dz : E_\Lambda \to E_\Lambda$, так и относительно оператора сдвига: $S_\alpha : E_\Lambda \to E_\Lambda$, где $[S_\alpha y](z) := y(z+\alpha)$.

Линейный оператор $L : E_\Lambda \to E_\Lambda$ называется *стационарным* (см. [50]), если он коммутирует со всеми операторами сдвига: $LS_\alpha y = S_\alpha Ly$ для всех $y \in E_\Lambda$.

Теорема 7.4 (свойства стационарного линейного оператора в E_Λ; см. [10])**.**

(1) *Введем обозначение $l_{k,i} := [Lt^i e^{\lambda_k t}](0)$. Тогда*

$$[Lt^l e^{\lambda_k t}](z) = \sum_{i=0}^{l} C_l^i l_{k,l-i} z^i e^{\lambda_k z}.$$

(2) (критерий стационарности) *Линейный оператор $L : E_\Lambda \to E_\Lambda$ стационарен тогда и только тогда, когда он коммутирует с операцией дифференцирования*:

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dz}(Ly) \quad \forall y \in E_\Lambda.$$

(3) (формула представления) *По последовательности $\left\{\left[Lt^{l-1}e^{\lambda_k t}\right](z)\right\}_{l=1,k=1}^{m_k,r}$ и узлам $\Lambda := \left\{\lambda_k, m_k\right\}_{k=1}^r$ образуем интерполяционный многочлен в форме Эрмита (см. [20])*

$$p(x,z) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m_k} \frac{\left[Lt^{l-1}e^{\lambda_k t}\right](z)}{(l-1)!} \sum_{s=0}^{m_k-l} \frac{1}{s!}\left[\frac{(\zeta-\lambda_k)^{m_k}}{\omega(\zeta)}\right]^{(s)}_{\zeta=\lambda_k} \frac{\omega(x)}{(x-\lambda_k)^{m_k-l-s+1}},$$

обладающий свойством

$$p^{(l-1)}_{x^{l-1}}(\lambda_k, z) = \left[Lt^{l-1}e^{\lambda_k t}\right](z), \quad k = 1, \ldots, r, \quad l = 1, \ldots, m_k.$$

Стационарный линейный оператор $L : E_\Lambda \to E_\Lambda$ представим в виде интегрального оператора

$$[Ly](z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C y(w)k(w,z)\,dw,$$

в котором ядро

$$k(w,z) = \int\limits_0^\infty p(t,z)e^{-wt}dt$$

является преобразованием Бореля функции $p(t,z)$, а контур C охватывает все узлы Λ.

8. Ряды обобщенных экспонент. Впервые задача о полноте системы вида $\{e(\lambda_n z)\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$, была рассмотрена в статье А. О. Гельфонда [63]. В [21] такие последовательности трактуются как элементарные решения операторного уравнения, и исследуется вопрос о разложении по этим решениям.

Формула вычисления области сходимости ряда из экспонент с комплексными показателями была установлена Г. Л. Лунцем. Пусть неубывающая по модулю последовательность различных комплексных чисел $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0.$$

Пусть $\theta_n:=\arg\lambda_n$, а Θ_Λ — множество предельных точек последовательности $\{\theta_n+2\pi k\}_{n=1,\ k=-\infty}^{\infty,\ \infty}$. По последовательности коэффициентов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\{\lambda_n z\} \tag{2}$$

определим 2π-периодическую функцию по правилу

$$k_a(\varphi):=\begin{cases}\lim\limits_{\delta\to 0}\varliminf\limits_{|\theta_n-\varphi|<\delta}\dfrac{1}{|\lambda_n|}\ln\dfrac{1}{|a_n|}, & \text{если } \varphi\in\Theta_\Lambda,\\ +\infty, & \text{если } \varphi\notin\Theta_\Lambda.\end{cases}$$

Тогда область сходимости этого ряда совпадает с областью абсолютной сходимости и вычисляется по формуле (см. [43])

$$G:=\big\{z\in\mathbb{C}:\ \forall\varphi\in\Theta_\Lambda\ \operatorname{Re}(e^{\varphi\imath}z)<k_a(\varphi)\big\}.$$

Под областью сходимости понимается множество точек, в некоторой окрестности каждой из которых ряд сходится. Ряд будет расходиться во всех точках вне замыкания множества G. Однако это свойство нарушается при переходе к рядам обобщенных экспонент.

Пусть $e(z)$ — целая функция порядка $\rho>0$ с индикатором $h(\theta)$ (см. [33]). Под областью сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e(\lambda_n z) \tag{3}$$

понимается множество точек G_e, в некоторой окрестности каждой из которых он сходится.

По последовательности коэффициентов ряда (3) определим 2π-периодическую функцию по правилу

$$k_a(\varphi):=\begin{cases}\lim\limits_{\delta\to 0}\varliminf\limits_{|\theta_n-\varphi|<\delta}\dfrac{1}{|\lambda_n|^\rho}\ln\dfrac{1}{|a_n|}, & \text{если } \varphi\in\Theta_\Lambda,\\ +\infty, & \text{если } \varphi\notin\Theta_\Lambda.\end{cases}$$

Положим

$$G_a:=\big\{z=r\exp\{\theta\imath\}:\ \forall\varphi\in\Theta_\Lambda\ h(\theta+\varphi)r^\rho<k_a(\varphi)\big\},$$
$$\hat G_a:=\big\{z=r\exp\{\theta\imath\}:\ \forall\varphi\in\Theta_\Lambda\ h(\theta+\varphi)r^\rho\leqslant k_a(\varphi)\big\}.$$

В [44] установлены следующие факты:

(1) ряд (3) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из множества G_a;
(2) Если 2π-периодическое множество $\{\theta_n+2\pi k\}_{n=1,\ k=-\infty}^{\infty,\ \infty}$ нигде не плотно на оси и функция $e(z)$ имеет вполне регулярный рост (см. [33]), то в любом шаре вне $\hat G_a$ найдется точка, в которой ряд (3) расходится.

Эти факты получили следующее развитие.

Теорема 8.1 (см. [12]).

(1) *$G_a\subseteq G_e$, а если функция $e(z)$ имеет вполне регулярный рост, то $G_e\subseteq\hat G_a$.*
Далее у функции $e(z)$ предполагается вполне регулярный рост.

(2) *Для любого ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \exp(\lambda_n z)$ *равенство* $G_a = G_e$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $h(\theta) \neq 0$ *тождественно ни на каком интервале* (α, β).

(3) *Если для любого ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \exp(\lambda_n z)$ *имеет место равенство* $\hat{G}_a = \overline{G_e}$, *то* $h(\theta) \neq 0$ *тождественно ни на каком интервале* (α, β). *Обратное, вообще говоря, неверно.*

(4) *Пусть*

$$k_{G_a}(\varphi) := \sup_{z \in G_a} h(\theta + \varphi) r^{\rho}, \quad G_0 := \big\{z : \ \forall \varphi \ h(\theta + \varphi) r^{\rho} < k_{G_a}(\varphi)\big\}.$$

Тогда $G_a = G_0$, *и функция* $k_{G_a}(\varphi)$ *является* ρ*-тригонометрически выпуклой* (см. [33] *и* 2π*-периодической.*

Следующие примеры показывают, что $\overline{G_a} \neq \hat{G}_a$, вообще говоря, и $G_e \neq G_a$.

Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + e^{-nz}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(1 + e^{-nz}).$$

Они образованы по функции $e(z) := 1 + e^z$ и последовательности $\{\lambda_n\} := \{-n\}$;

$$h(\theta) := \begin{cases} \cos\theta, & |\theta| < \pi/2, \\ 0, & |\theta - \pi| \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

В обоих случаях

$$k_a(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi = 2\pi n + \pi, \\ \infty, & \varphi \neq 2\pi n + \pi, \end{cases}$$

откуда

$$G_a = \big\{z : \ h(\theta + \pi) r < 0\big\} = \emptyset, \quad \hat{G}_a = \big\{z : \ h(\theta + \pi) r \leqslant 0\big\} = \big\{z : \ \mathrm{Re}(z) \geqslant 0\big\} \neq \overline{G_a}.$$

Для первого ряда $G_e = \emptyset = G_a$; для второго ряда $G_e = \{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$, т.е. $\overline{G_e} = \hat{G}_a$.

Пусть $\rho = 1$. Ассоциируем с рядом (3) ряд (2) с теми же коэффициентами и показателями. Область сходимости ряда (2) обозначим G, а ее опорную функцию — $k_G(\theta)$.

Теорема 8.2.

(1) (см. [12]) *Пусть последовательность* λ_n *удовлетворяет условию*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$$

и $e(z)$ — *целая функция экспоненциального типа вполне регулярного роста с ненулевым индикатором* $h(\theta)$ *и сопряженной индикаторной диаграммой* K. *Будем предполагать условие*

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} > 0,$$

если нуль является угловой точкой границы компакта K. *Тогда область сходимости* G_e *ряда обобщенных экспонент совпадает с мультипликатором пары множеств* K, G:

$$G_e = M(K, G) = \big\{z \in \mathbb{C} : \ zK \subseteq G\big\} = \big\{z \in \mathbb{C} : \ \forall \varphi \in \Theta_\Lambda \ h(\theta + \varphi) r < k_G(-\varphi)\big\}.$$

Следующее утверждение показывает существенность предположения о полной регулярности роста $e(z)$.

(2) (см. [2]) *Пусть* $e(z)$ — *целая функция экспоненциального типа с ненулевым индикатором* $h(\theta)$ *и сопряженной индикаторной диаграммой* K. *Рассмотрим множество рядов вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e(\lambda_n z),$$

предполагая дополнительно

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} > 0,$$

если нуль является угловой точкой границы компакта K. Для того чтобы области сходимости G_e, G, ряда и его ассоциированного всегда были связаны равенством

$$G_e = \{z \in \mathbb{C}: \ zK \subseteq G\},$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $e(z)$ имела вполне регулярный рост.

Замечание 8.1. В работе Т. А. Леонтьевой [41] доказана выпуклость области сходимости ряда обобщенных экспонент (3) в предположении, что нули функции $e(z)$ образуют R-множество (см. [33]).

Последовательность $e(\lambda_n z)$ называется *представляющей* в $H(G)$ (см. [30]), если каждая функция из этого пространства представима в виде суммы ряда (3), сходящегося в топологии $H(G)$.

Замечание 8.2. Пусть целая функция экспоненциального типа $e(z)$ имеет вполне регулярный рост. Без потери общности считаем тип равным 1 и $h(0) = 0$.

(1) (см. [39]) Для того чтобы существовали ряды (3) с произвольной выпуклой областью сходимости G, $0 \in G$, необходимо и достаточно, и чтобы все особенности функции

$$E(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{t^{n+1}}$$

лежали на отрезке $[0, 1]$.

(2) (см. [38]) Для того чтобы в каждом пространстве $H(G)$, $0 \in G$, G — выпуклая область, существовала представляющая последовательность $\{e(\lambda_n z)\}$, необходимо и достаточно, чтобы $e_n \neq 0$ для всех $n \geqslant 0$ и чтобы все особенности функций

$$E(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{t^{n+1}}, \quad E_1(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e_n t^{n+1}}$$

лежали на отрезке $[0, 1]$.

Область назовем *s-инвариантной*, если она инвариантна относительно поворота вокруг начала координат на угол $2\pi/s$, $s \geqslant 2$. Класс всех выпуклых s-инвариантных областей обозначим Ω_s. В [13] рассмотрена задача получения аналогичного замечанию результата для класса Ω_s.

Теорема 8.3. *Пусть функция $e(z)$ — целая функция экспоненциального типа с индикатором $h(\theta)$, K — выпуклый компакт с опорной функцией $h(-\theta)$.*

(1) *Для того чтобы при любой $G \in \Omega_s$ существовал ряд (3) с областью сходимости G, необходимо и достаточно, чтобы $K \subseteq K_s$.*

(2) *Для того чтобы область сходимости ряда (3) была всегда s-инвариантной и для любой $G \in \Omega_s$ существовал ряд (3) с областью сходимости G, необходимо и достаточно, чтобы $K = K_s$.*

(3) *Для того чтобы область сходимости ряда (3) была всегда s-инвариантной и для любой $G \in \Omega_s$ в $H(G)$ существовала представляющая последовательность $\{e(\lambda_n z)\}$, необходимо и достаточно, чтобы $K = K_s$, $e_n \neq 0$ для всех $n \geqslant 0$, и все особенности функции*

$$E_1(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e_n t^{n+1}}$$

лежали в K_s.

9. Однодиагональные операторы. Пусть $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ — односвязные области. Непрерывный линейный оператор $L : H(G_1) \to H(G_2)$ назовем *однодиагональным* (*s-диагональным*), если существует такое $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $L1 = \dots = Lz^{s-1} = 0$ и $Lz^n = d_{n-s}z^{n-s}$ для всех $n \geqslant s$ или если существует такое $s = -1, -2, \dots$, что $Lz^n = d_n z^{n-s}$ для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Название объясняется тем, что все элементы матрицы такого оператора в пространстве многочленов $\operatorname{span}\{z^n\}$ с базисом $\{z^n\}$ равны нулю, кроме элементов на линии, параллельной главной диагонали. Однодиагональными являются, например, диагональные операторы, операторы обобщенного дифференцирования и обобщенного интегрирования Гельфонда—Леонтьева.

Следующая теорема обобщает теорему 2.2

Теорема 9.1 (см. [18]). *Определенное на $\{z^n\}$ по приведенному выше правилу отображение расширяется до однодиагонального из оператора $H(G_1) \to H(G_2)$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ сходится в окрестности начала координат и для любого $m \in \mathbb{N}$ существует такое $\{M = M(m)\}$, что функциональный элемент от двух переменных $d\,(z/t)$, $|t| > \varepsilon^{-1}$, $|z| < \varepsilon$, аналитически продолжается в каждую односвязную область $\overline{G}'_{1,M} \times G_{2,m}$, где последовательность односвязных областей $G_{i,m}$ исчерпывает G_i, $i = 1, 2$, причем в случае $0 \notin G_2$ элемент $d(z)$ аналитически продолжается в точку $z = \infty$, имеет в ней нуль порядка $>s$ в случае $s \geqslant 0$ и нуль порядка $\geqslant 1$ в случае $s < 0$. В случае $s \geqslant 0$ оператор имеет интегральное представление*

$$\forall y \in H(G_1) \quad \forall z \in G_{2,n} \quad [Ly](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma G_{1,N+1}} y(t) \frac{1}{t^{s+1}} d\left(\frac{z}{t}\right) dt,$$

а случае $s < 0$ — представление

$$\forall y \in H(G_1) \quad \forall z \in G_{2,n} \quad [Ly](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma G_{1,N+1}} y(t) \frac{z^{-s}}{t} d\left(\frac{z}{t}\right) dt.$$

Возьмем в качестве D обобщенную гипергеометрическую функцию (см. [56])

$${}_{q+1}F_q(a_1, \dots, a_{q+1}; b_1, \dots, b_q; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_{q+1})_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} z^n, \quad a_i, b_j \neq -1, -2, \dots.$$

Она порождает однодиагональный оператор в $H(G)$, $0 \in G$, так как ее особыми точками (ветвления) при аналитическом продолжении из нуля являются $0, 1, \infty$, причем $1, \infty \notin G'^{-1}G$.

Частный случай однодиагональных операторов — диагональные операторы — ведут свое начало от теоремы Адамара об умножении особенностей (1899 г.). Они встречаются в [21] как операторы преобразования одного оператора обобщенного дифференцирования в другой и в [52] как операторы преобразования обобщенных полиномов Фабера. Общее определение в $H(G)$ дано в [42].

Обозначим через $\mathcal{L}(G_1, G_2) = \mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$ пространство линейных непрерывных операторов $L : H(G_1) \to H(G_2)$. Каждый такой оператор реализуется в виде интегрального оператора

$$[Ly](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma G_{1,N+1}} y(t) k(t, z)\, dt,$$

где ядро $k(t, z)$ — локально аналитическая функция на множестве $G_1{}' \times G_2 \subset \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ (см. [64]).

Функция $e(\lambda, z) := [Le^{\lambda t}](z)$ есть обобщенное обратное преобразование Бореля ядра по переменной t и потому является целой функцией экспоненциального типа по переменной λ. Назовем функцию

$$h(\lambda, z) := \frac{e(\lambda, z)}{\exp\{\lambda z\}}$$

символом оператора L.

Обозначим через $\mathcal{L}_{Leo}(G_1, G_2)$ подпространство в $\mathcal{L}(G_1, G_2)$, состоящее из всех диагональных операторов.

Теорема 9.2 (см. [2]). *Пусть $L \in \mathcal{L}(G_1, G_2)$.*

(1) *Равносильны следующие утверждения*:
   (a) $L \in \mathcal{L}_{Leo}(G_1, G_2)$;
   (b) *символ оператора $h(\lambda, z)$ является функцией произведения своих аргументов*;
   (c) *обратное преобразование Бореля по переменной t ядра $k(t, z)$ является функцией произведения своих аргументов*;
   (d) *L коммутирует с оператором $z\dfrac{d}{dz}$*:
$$\forall y \in H(G_1) \quad z\frac{d}{dz}L[y(t)] = \left[Lt\frac{d}{dt}\right](z);$$
   (e) *ядро $k(t, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*
$$t\frac{dk}{dt} + z\frac{dk}{dz} + k = 0$$
   в областях $\overline{G}'_{1,M)} \times G_{2,m}$.

(2) *Если символ оператора $L \in \mathcal{L}(G_1, G_2)$ зависит от произведения аргументов, $h(\lambda, z) = h(\lambda z)$, то оператор диагональный и его порождающая функция $d(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ связана с символом равенством*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n = h(z)e^z.$$

Рассмотрим класс операторов $\mathcal{L}_c(G_1, G_2)$, символ которых не зависит от переменной z:
$$\frac{e(\lambda, z)}{\exp\{\lambda z\}} \equiv a(\lambda).$$
Функция $a(\lambda)$ называется также *характеристической функцией* оператора; она является целой функцией экспоненциального типа. Эти операторы называются *операторами комплексной свертки*, так как имеют представление
$$[Ly](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C y(t)A(t - z)\, dt$$
(см. [62]), где $A(t)$ — преобразование Бореля характеристической функции $a(\lambda)$.

Теорема 9.3 (см. [2]). *Пусть $0 \notin G_1 \cup G_2$. Обозначим через $T : H(\ln G_i) \to H(G_i)$, $i = 1, 2$, топологический изоморфизм пространств с ядром $k(t, z) := \dfrac{1}{t - \ln z}$.*

(1) *Между пространством операторов $L_1 \in \mathcal{L}_{Leo}(G_1, G_2)$ и пространством операторов $L_2 \in \mathcal{L}_c(\ln G_1, \ln G_2)$ существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое формулой $L_2 = T^{-1}L_1T$.*

(2) *Ядра операторов L_1, L_2 связаны равенством*
$$A(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d(e^{-\zeta})\, \frac{d\zeta}{t - \zeta}.$$
Характеристическая функция оператора L_2 равна
$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C t^{\lambda-1} d\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

Замечание 9.1. Пусть $0 \notin G_1 \cup G_2$.

(1) Имеет место следующая связь понятий вычета и мультипликатора множеств:
$$\ln M(G_1, G_2) = S(\ln G_1, \ln G_2).$$

(2) Вопрос об эпиморфизме диагонального оператора сводится к вопросу об эпиморфизме оператора комплексной свертки (см. [23]).

Замечание 9.2. Если $0 \in G_2 \setminus G_1$, то $\mathcal{L}_{Leo}(G_1, G_2) = \emptyset$.

Можно исследовать линейные операторные уравнения, порожденные диагональным оператором. Так, Г. Дэвис (см. [61]) изучал разрешимость дифференциального уравнения Эйлера бесконечного порядка

$$[Jy](z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n y^{(n)}(z) = f(z)$$

в пространстве $H(\mathbb{C})$.

Теорема 9.4. *Пусть* $0 \in G_1 \cap G_2$, $J \in \mathcal{L}_{Leo}(G_1, G_2)$, $Jz^n = d_n z^n$, $n \in \mathbb{N} \cap \{0\}$. *Уравнение* $Jy = f$ *разрешимо в* $H(G_1)$ *для любой правой части из* $H(G_2)$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

(a) $d_n \neq 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(b) *ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d_n} z^n =: d_1(z)$$

сходится в окрестности начала координат, и функциональный элемент

$$\frac{1}{t} d_1\left(\frac{z}{t}\right), \quad |t| > \frac{1}{\varepsilon}, \quad |z - z_0| < \varepsilon,$$

аналитически продолжается в каждую односвязную область $\overline{G}'_{2,M(m)} \times G_{1,m}$, $m \in \mathbb{N}$. *В этом случае решение уравнения находится с помощью диагонального оператора*:

$$y(z) = [J_1 f](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma G_{M+1}} f(t) \frac{1}{t} d_1\left(\frac{z}{t}\right) dt, \quad z \in G_{1,m}.$$

Замечание 9.3. Случай $G_1 = G_2 =: G$ рассмотрен в [47]. При условии аналитического продолжения $d(z)$ в $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ диагональный оператор представи́м на $H(G)$ в виде дифференциального оператора Эйлера бесконечного порядка (см. [32]):

$$[Jy](z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n y^{(n)}(z),$$

где

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} a_k, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

В этой же работе изучалась разрешимость соотвествующего операторного уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Братищев А. В.* Базисы Кете, целые функции и их приложения/ Дисс. на соискание уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — Ростов-на-Дону: РГУ, 1993.
2. *Братищев А. В.* О линейных операторах, символ которых является функцией произведения своих аргументов// Докл. РАН. — 1999. — *365*, № 1. — С. 9–12.
3. *Братищев А. В.* Описание обобщенных преобразований Бореля, сохраняющих теорему Пойя// Вестн. ДГТУ. — 2001. — *1*, № 1. — С. 79–89.
4. *Братищев А. В.* Область сходимости ряда обобщенных экспонент, образованного целой функцией конечного порядка// Вестн. ДГТУ. — 2003. — *3*, № 2. — С. 139–144.
5. *Братищев А. В.* Оператор обобщенного дифференцирования, порожденный функцией Гейне// В сб.: Современные проблемы теории функций и их приложения/ Тез. докл. 13 Саратовской зимней мат. школы. — Саратов: Научная книга, 2006. — С. 36–37.

6. *Братищев А. В.* Хаотичность коммутирующих с дифференцированием Данкла преобразований пространств аналитических функций// Вестн. ДГТУ. — 2009. — *9*, № 2. — С. 196–207.
7. *Братищев А. В.* Операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда—Леонтьева и полиномы Бренке// Вестн. ДГТУ. — 2010. — *10*, № 6. — С. 813–824.
8. *Братищев А. В.* О представлении линейных операторов, коммутирующих с дифференцированием, в односвязной области// Вестн. ДГТУ. — 2014. — *14*, № 1. — С. 15–21.
9. *Братищев А. В.* О представлении оператора обобщенного дифференцирования Гельфонда—Леонтьева в односвязной области// Вестн. ДГТУ. — 2014. — *14*, № 2. — С. 21–26.
10. *Братищев А. В.* Математическая теория управляемых динамических систем. Введение в понятия и методы/ Уч. пособие. — Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2015.
11. *Братищев А. В.* Об операторе обобщенного дифференцирования Гельфонда—Леонтьева// Междунар. мат. конф. по теории функций, посвященная 100-летию чл.-корр. АН СССР А. Ф. Леонтьева (Уфа, 24–27 мая 2017 г.)/ Тез. докл. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2017. — С. 29–30.
12. *Братищев А. В., Калиниченко Л. И.* Описание области сходимости ряда обобщенных экспонент// Докл. РАН. — 1993. — *331*, № 6. — С. 666–667.
13. *Братищев А. В., Калиниченко Л. И.* Критерий s-инвариантности области сходимости ряда обобщенных экспонент// В кн.: Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. 1. Комплексный анализ. — Уфа: Инст. мат. с ВЦ РАН, 1996. — С. 16–22.
14. *Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф.* Общий вид линейных операторов, перестановочных с операцией дифференцирования// Мат.заметки. — 1972. — *12*, № 2. — С. 187–195.
15. *Братищев А. В., Моржаков А. В.* О мультипликаторе пары множеств комплексной плоскости// Вестн. ДГТУ. — 2004. — *4*, № 3. — С. 270–281.
16. *Братищев А. В., Моржаков А. В.* Представление оператора обобщенного дифференцирования в одном классе односвязных областей// Вестн. ДГТУ. — 2005. — *5*, № 4. — С. 481–490.
17. *Братищев А. В., Моржаков А. В.* О резольвенте одного класса операторов обобщенного диференцирования// Вестн. ДГТУ. — 2006. — *6*, № 2. — С. 85–88.
18. *Братищев А. В., Моржаков А. В.* Об однодиагональных операторах// В сб.: Интегро-дифференциальные операторы и их приложения. — Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2008. — *8*. — С. 196–207.
19. *Гельфонд А. О.* Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций// Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1951. — *38*. — С. 42–67.
20. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967.
21. *Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф.* Об одном обобщении ряда Фурье// Мат. сб. — 1951. — *29 (71)*, № 3. — С. 477–500.
22. *Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В.* Целые и мероморфные функции// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — М: ВИНИТИ, 1990. — *85*. — С. 5–186.
23. *Епифанов О. В.* Критерий эпиморфности свертки в произвольных областях комплексной плоскости// Мат. заметки. — 1982. — *31*, № 5. — С. 695–705.
24. *Епифанов О. В.* Операторы свертки и дифференциальные операторы бесконечного порядка в пространствах аналитических функций/ Дисс. на соискание уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — Киев: Ин-т мат., 1990.
25. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об интерполирующей функции А. Н. Леонтьева// Уфим. мат. ж. — 2014. — *6*, № 3. — С. 17–27.
26. *Карамов И. И., Напалков В. В.* Обобщенный оператор Данкла// Уфим. мат. ж. — 2014. — *6*, № 1. — С. 59–68.
27. *Ким В. Э.* Гиперцикличность и хаотичность операторов обобщенной свертки, порождаемых операторами Гельфонда—Леонтьева// Мат. сб. — 2009. — *85*, № 6. — С. 849–856.
28. *Коробейник Ю. Ф.* Об операторах обобщенного дифференцирования, применимых к любой аналитической функции// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — *28*, № 4. — С. 833–854.
29. *Коробейник Ю. Ф.* Линейные операторы, перестановочные с дифференцированием и определенные в пространстве функций, аналитических в бесконечных областях// Висш. техн. уч. завед. Мат. — 1973. — *9*, кн. 3. — С. 35–44.
30. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1978. — *42*, № 2. — С. 325–355.

31. *Коробейник Ю. Ф.* О разрешимости в комплексной области некоторых общих классов линейных операторных уравнений. — Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2005.
32. *Коробейник Ю. Ф., Донсков Ю. М.* Аналитические решения уравнения Эйлера бесконечного порядка// Изв. вузов. Мат. — 1969. — *11 (90)*. — С. 46–52.
33. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М: ГИТТЛ, 1956.
34. *Леонтьев А. Ф.* Ряды полиномов Дирихле и их обобщения// Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1951. — *39*. — С. 1–216.
35. *Леонтьев А. Ф.* Об области регулярности предельной функции одной последовательности аналитических функций// Мат. сб. — 1956. — *39*, № 4. — С. 405–422.
36. *Леонтьев А. Ф.* Обобщенные ряды экспонент. — М.: Наука, 1981.
37. *Леонтьев А. Ф.* Представление функций в выпуклых областях обобщенными рядами экспонент// Acta Sci. Math. Szeged. — 1983. — *45*. — С. 305–315.
38. *Леонтьев А. Ф.* Область сходимости ряда обобщенных экспонент// Мат. сб. — 1984. — *123*, № 1. — С. 3–10.
39. *Леонтьев А. Ф.* К вопросу о представлении функций рядами обобщенных экспонент// Anal. Math. — 1986. — *12*. — С. 213–228.
40. *Леонтьев А. Ф.* Представление функций рядами обобщенных экспонент// Мат. сб. — 1987. — *134*, № 4. — С. 496–510.
41. *Леонтьева Т. А.* О выпуклости области сходимости ряда обобщенных экспонент// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат., мех. — 1990. — *5*. — С. 28–32.
42. *Линчук С. С.* Диагональные операторы в пространствах аналитических функций и их приложения// В сб.: Актуальные вопросы теории функций. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1987. — С. 118–121.
43. *Лунц Г. Л.* О некоторых обобщениях рядов Дирихле// Мат. сб. — 1942. — *10*, № 1-2. — С. 33–50.
44. *Лунц Г. Л.* О сходимости некоторых общих рядов в пространствах нескольких комплексных переменных// Сиб. мат. ж. — 1972. — *13*, № 2. — С. 467–472.
45. *Мавроди Н. Н.* Необходимые и достаточные условия аналитической продолжимости степенного ряда// В сб.: Актуальные проблемы математического анализа. — Ростов-на-Дону: Изд-во ГинГо, 2000. — С. 94–99.
46. *Моржаков А. В.* Описание класса операторов обобщенного дифференцирования в пространстве аналитических функций// Тр. VIII Междунар. науч.-техн. конф. по динамике технологических систем. — Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2007. — С. 189–193.
47. *Моржаков А. В.* Исследование операторов и операторных уравнений, порожденных обобщенным дифференцированием/ Дисс. на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2008.
48. *Моржаков А. В., Мелихов С. Н.* Представление оператора обобщенного дифференцирования в одном классе звездных областей// Теория функций, ее приложения и смежные вопросы/ Мат. 7 Казан. летней науч. школы-конф. — Казань: Изд-во КГУ, 2005. — С. 112–113.
49. *Напалков В. В.* О расширении оператора обобщенного дифференцирования// Мат. заметки. — 1969. — *6*, № 4. — С. 425–436.
50. *Пугачев В. С.* Основы автоматического управления. — М: Наука, 1974.
51. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
52. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1964.
53. *Хапланов М. Г.* Линейные преобразования аналитических пространств// Докл. АН СССР. — 1951. — *80*, № 1. — С. 21–24.
54. *Царьков Ю. М.* Изоморфизмы некоторых аналитических пространств, перестановочных со степенью оператора дифференцирования// Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1970. — *11*. — С. 86–92.
55. *Agmon S.* On the singularities of Taylor series with reciprocal coefficients// Pac. J. Math. — 1952. — *2*. — С. 431–453.
56. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Function. Vol. 1. — New York–Toronto–London: Mc Grow-Hill, 1953.
57. *Betancor J. J., Sifi M., Trimeche K.* Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operator on $\mathbb{C}$// Acta Math. Hung. — 2005. — *106*, № 1-2. — С. 101–116.

58. *Bieberbach L.* Analitischer Fortssetzung. — Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1955.
59. *Boas R. P., Buck R. C.* Polynomial expansions of analytic functions. — Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1958.
60. *Brenke W. C.* On generating functions of polynomial systems// Am. Math. Month. — 1945. — *52.* — С. 297–301.
61. *Davis H. T.* The Euler differential equation of infinite order// Am. Math. Month. — 1925. — *32.* — С. 223–233.
62. *Dickson D. G.* Analytic mean periodic functions// Trans. Am. Math. Soc. — 1964. — *110.* — С. 361–374.
63. *Gelfond A.* Sur les systemes complets de fonctions analytiques// Мат. сб. — 1938. — *4 (46)*, № 1. — С. 149–156.
64. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie// J. Reine Angew. Math. — 1953. — *191.* — С. 30–49.
65. *Schottlaender S.* Der Hadamardsche Multiplikationssatz und weitere Kompositionssätze der Funktiontheorie // Math. Nachr. — 1954. — *11*, № 4/5. — С. 239–294.

А. В. Братищев
Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону
E-mail: `avbratishchev@spark-mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 153 (2018). С. 55–68

УДК 517.9

ОПЕРАТОР ПОММЬЕ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2018 г. **П. А. ИВАНОВ, С. Н. МЕЛИХОВ**

Аннотация. Изучены операторы Поммье в пространствах аналитических функций многих комплексных переменных. Описаны линейные непрерывные операторы, перестановочные с системой операторов Поммье в пространстве $A(\Omega)$ функций, аналитических в полицилиндрической области Ω, и в счетном индуктивном пределе весовых пространств Фреше целых функций. Исследованы циклические векторы системы операторов Поммье в пространстве $A(\Omega)$.

Ключевые слова: оператор Поммье, коммутант, циклический вектор, аналитическая функция.

AMS Subject Classification: 47B38, 47A16, 46E10

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^N$, $A(\Omega)$ — пространство всех аналитических в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах области Ω. Хорошо изучен оператор Поммье D_0 в $A(\Omega)$ в случае $N = 1$. (Часто D_0 называют оператором сдвига влево.) Отметим те работы, в которых изучены линейные непрерывные операторы, перестановочные с D_0, и решаются задачи, связанные с аппроксимационными свойствами D_0. В [6, 7, 14, 15, 27, 32] описан коммутант D_0 и его одномерного возмущения — линейного непрерывного левого обратного к оператору умножения на независимую переменную в кольце всех линейных непрерывных в $A(\Omega)$ операторов и в счетном индуктивном пределе E весовых пространств Фреше целых функций. В [9, § 9] изучен коммутант оператора обобщенного дифференцирования в пространствах числовых семейств; его частным случаем является оператор сдвига влево (см. также библиографию в [9]). Циклические векторы D_0 и линейного непрерывного левого обратного к оператору умножения на независимую переменную в $A(\Omega)$ и в E исследованы в [5, 11, 14, 20, 30, 32]. В [8, 30] изучены их собственные замкнутые инвариантные подпространства. В [28] исследованы циклические векторы и инвариантные подпространства D_0 в пространстве Харди H^2 в единичном круге; в [29] — коммутант и циклические векторы обобщенного сдвига влево в банаховом пространстве. Отметим, что в [6–8] применяется, в частности, подход, при котором коммутант D_0 рассматривается как представление алгебры аналитических функционалов. Ранее этот метод применялся в [19] к коммутанту оператора обобщенного интегрирования.

В настоящей статье предложена многомерная версия оператора Поммье. Его естественной областью определения в многомерной ситуации является пространство $A(\Omega)$, когда Ω — полицилиндрическая область, в частности, пространство всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций и его подпространства.

Структура работы следующая. В разделе 2 вводятся и изучаются частные операторы Поммье $D_{j,z}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, и их произведения — мультистепени D_z^α. Здесь исследуются и ассоциированные с ними операторы сдвига и устанавливается их связь с многомерным вариантом интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева. В разделе 3 дано полное описание линейных непрерывных в $A(\Omega)$ операторов, перестановочных с каждым оператором $D_{j,0}$. В разделе 3 приводится также аналогичное описание коммутанта системы операторов $\mathcal{D}_0 := \{D_{j,0} : \ 1 \leqslant j \leqslant N\}$ в весовом (LF)-пространстве целых функций. Раздел 4 посвящен описанию циклических векторов системы $\mathcal{D}_0$ в $A(\Omega)$. По ходу изложения мы приводим некоторые исторические сведения.

2. Обозначения. Определения

2.1. Операторы D_z^α в полицилиндрических областях. Пусть $N \in \mathbb{N}$; символ P_N обозначает множество $\{1, 2, \dots, N\}$. Для $t = (t_j)_{j=1}^N$, $z = (z_j)_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N$, $j \in P_N$, через $t_{j,z}$ обозначим точку в $\mathbb{C}^N$, полученную из t заменой j-й координаты на z_j, т.е.

$$(t_{j,z})_k := \begin{cases} z_j, & k = j, \\ t_j, & k \neq j. \end{cases}$$

Положим $\partial_j := \partial/\partial z_j$, $j \in P_N$. Пусть $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N$, $\beta = (\beta_j)_{j=1}^N \in \mathbb{N}_0^N$ будем писать $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha_j \leqslant \beta_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Как обычно, считая, что $c^0 = 1$ для любого $c \in \mathbb{C}$, полагаем

$$z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_N^{\alpha_N}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_N, \quad \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_N!, \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Определение 2.1. Пусть функция f аналитична в полицилиндрической области Ω в $\mathbb{C}^N$. Для $j \in P_N$, $z, t \in \Omega$ положим

$$D_{j,z}(f)(t) := \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(t_{j,z})}{t_j - z_j}, & t_j \neq z_j, \\ \partial_j f(t_{j,z}), & t_j = z_j. \end{cases}$$

Установим некоторые свойства операторов $D_{j,z}$. Для области $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ символ $A(\Omega)$ обозначает пространство всех функций, аналитических в Ω, с топологией равномерной сходимости на компактах области Ω. Для локально выпуклого пространства H через $\mathcal{L}(H)$ обозначим пространство всех линейных непрерывных операторов в H, символом H' — топологическое сопряженное к H, а через H'_β — сильное сопряженное к H пространство.

Далее, до конца этого пункта, Ω — полицилиндрическая область в $\mathbb{C}^N$: $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — области в $\mathbb{C}$. Пусть M_j — оператор умножения на j-ю переменную: $M_j(f)(t) := t_j f(t)$, $t \in \Omega$, $f \in A(\Omega)$; I — тождественный оператор. Ясно, что $M_j \in \mathcal{L}(A(\Omega))$, $j \in P_N$. Определим векторы $e_j \in \mathbb{C}^N$ следующим образом: $(e_j)_k := \delta_{jk}$, $j, k \in P_N$.

Для $z \in \mathbb{C}^N$, $\varepsilon > 0$ введем поликруги

$$U_\varepsilon(z) := \big\{t \in \mathbb{C}^N : \ |t_j - z_j| < \varepsilon, \ j \in P_N\big\}, \quad \overline{U}_\varepsilon(z) := \big\{t \in \mathbb{C}^N : \ |t_j - z_j| \leqslant \varepsilon, \ j \in P_N\big\}.$$

Лемма 2.1. *Пусть Ω — полицилиндрическая область в $\mathbb{C}^N$.*

(i) *Для любых $z \in \Omega$, $j, k \in P_N$ в $A(\Omega)$ выполняется равенство*

$$D_{j,z} D_{k,z} = D_{k,z} D_{j,z}.$$

(ii) *Для любых $j \in P_N$, $\lambda, z \in \Omega$ в $A(\Omega)$ выполняется равенство*

$$D_{j,z} - D_{j,\lambda} = (z_j - \lambda_j) D_{j,z} D_{j,\lambda}.$$

(iii) *$D_{j,z} \in \mathcal{L}(A(\Omega))$ для любых $z \in \Omega$, $j \in P_N$.*

(iv) *Для любых* $j \in P_N$, $z \in \Omega$ *оператор* $M_j - z_j I$ *является линейным непрерывным правым обратным к* $D_{j,z} : A(\Omega) \to A(\Omega)$ (*отсюда, в частности, следует, что* $D_{j,z} : A(\Omega) \to A(\Omega)$ *сюръективен*).

(v) *Для любых* $j \in P_N$, $z \in \Omega$ *семейство* $D_{j,\lambda} \in \mathcal{L}(A(\Omega))$, $\lambda \in \Omega \backslash \{z\}$, *сходится к* $D_{j,z}$ *при* $\lambda \to z$ *равномерно на любом ограниченном множестве в* $A(\Omega)$.

(vi) *Для любых* $j \in P_N$, $z \in \Omega$, $f \in A(\Omega)$ *в* $A(\Omega)$ *существует предел*

$$\lim_{t \to 0} \frac{D_{j,z+te_j}(f) - D_{j,z}(f)}{t},$$

равный $D^2_{j,z}(f)$.

Доказательство. Утверждения (i), (ii) и (iv) проверяются непосредственно; (iii) вытекает из теоремы о замкнутом графике (см. [23, теорема 6.7.1]).

(v). Возьмем такое $\varepsilon > 0$, что $\overline{U}_\varepsilon(z) \subset \Omega$. Зафиксируем $f \in A(\Omega)$. Так как функция $(t, z) \mapsto D_{j,z}(f)(t)$ аналитична по каждой переменной t_k и z_k при фиксированных остальных, то по теореме Гартогса она аналитична в $\Omega \times \Omega$ (по (t, z)). Отсюда следует, что множество $V := \big\{D_{j,\lambda}(f) : \lambda \in \overline{U}_\varepsilon(z)\big\}$ ограничено в $A(\Omega)$. Следовательно, V относительно компактно в $A(\Omega)$. Поскольку $D_{j,\lambda}(f) \to D_{j,z}(f)$ при $\lambda \to z$ поточечно в Ω, то $D_{j,\lambda}(f) \to D_{j,z}(f)$ при $\lambda \to z$ и в $A(\Omega)$. По теореме Банаха—Штейнгауза $\big\{D_{j,\lambda} : \lambda \in \overline{U}_\varepsilon(z)\big\}$ при $\lambda \to z$ сходится к $D_{j,z}$ равномерно на каждом ограниченном множестве в $A(\Omega)$.

Утверждение (vi) вытекает из равенства (ii) и (v). □

Таким образом, операторы $D_{j,z}$ попарно перестановочны, и естественно для $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $z \in \Omega$ ввести операторы D_z^α, действующие в $A(\Omega)$, следующим образом:

$$D_z^\alpha := D_{1,z}^{\alpha_1} D_{2,z}^{\alpha_2} \cdots D_{N,z}^{\alpha_N}.$$

Из леммы 2.1(i) вытекает, что $D_z^\alpha D_z^\beta = D_z^{\alpha+\beta}$ для любого $z \in \Omega$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$.

Пусть $f_\beta(t) := t^\beta$, $t \in \mathbb{C}^N$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Отметим, что $D_0^\alpha(f_\beta) = f_{\beta-\alpha}$, если $\alpha \leqslant \beta$, и $D_0^\alpha(f_\beta) = 0$ в противном случае.

Следуя З. Биндерману (см. [24]), с операторами D_0^α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, как и в случае $N = 1$ (см. замечание 2.1), можно связать их сдвиги T_z, $z \in \mathbb{C}^N$. Они определяются таким образом, чтобы для многочленов f выполнялось равенство

$$T_z(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} z^\alpha D_0^\alpha(f),$$

если Ω содержит 0.

Определение 2.2. Для $z \in \Omega$, $j \in P_N$, $f \in A(\Omega)$ положим

$$T_{j,z}(f)(t) := \begin{cases} \dfrac{t_j f(t) - z_j f(t_{j,z})}{t_j - z_j}, & t_j \neq z_j, \\ z_j \partial_j f(t_{j,z}) + f(t_{j,z}), & t_j = z_j, \end{cases} \qquad T_z = T_{1,z} T_{2,z} \cdots T_{N,z}.$$

Отметим равенства $T_{j,z} = D_{j,z} M_j$. Отсюда следует, что $T_{j,z} \in \mathcal{L}(A(\Omega))$ для любых $j \in P_N$, $z \in \Omega$. Кроме того, операторы $T_{j,z}$, $j \in P_N$, попарно перестановочны (см. лемму 2.2).

Лемма 2.2. *Для любых* $j, k \in P_N$, $z, \lambda \in \Omega$ *имеем*:

(i) $T_{j,z} = I + z_j D_{j,z}$;

(ii) $T_{j,z} T_{k,z} = T_{k,z} T_{j,z}$;

(iii) $D_{j,z} T_{j,\lambda} = T_{j,\lambda} D_{j,z}$.

Доказательство. (i). Вследствие леммы 2.1(iv)

$$T_{j,z} = D_{j,z} M_j = D_{j,z}(M_j - z_j I + z_j I) = I + z_j D_{j,z}.$$

Утверждения (ii) и (iii) вытекают из равенства (i) этой леммы и леммы 2.1(i). □

Положим

$$C\Omega := (\mathbb{C}\backslash\Omega_1) \times \cdots \times (\mathbb{C}\backslash\Omega_N), \quad t^{\mathbf{1}} := t_1 \cdots t_N, \quad t \in \mathbb{C}^N;$$
$$f_z(t) := \frac{1}{z-t} := \frac{1}{(z-t)^{\mathbf{1}}}, \quad z, t \in \mathbb{C}^N, \quad z_j \neq t_j, \quad j \in P_N.$$

Лемма 2.3.

(i) *Пусть* $0 \in \Omega$. *Тогда для любого многочлена* f *и любой точки* $z \in \Omega$

$$T_z(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} z^\alpha D_0^\alpha(f),$$

где последняя сумма содержит конечное число слагаемых. В частности, $T_z(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, *где* $\mathbf{1}$ — *функция, равная тождественно* 1.

(ii) *Пусть области* Ω_j, $j \in P_N$, *односвязны и содержат* 0. *Тогда для любых* $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $f \in A(\Omega)$, $z \in \Omega$ *справедливо равенство*

$$D_0^\alpha(f)(z) = \frac{1}{\alpha!}\varphi_\alpha(T_z(f)).$$

(iii) *Имеет место соотношение*

$$T_z(f_\xi) = \frac{\xi^{\mathbf{1}}}{\xi - z} f_\xi, \quad \xi \in C\Omega, \quad z \in \Omega.$$

(iv) *Для любых* $\varphi \in A(\Omega)'$, $f \in A(\Omega)$ *функция* $z \mapsto \varphi(T_z(f))$ *аналитична в* Ω *по* z.

(v) *Для любых* $\varphi \in A(\Omega)'$, $f \in A(\Omega)$, $z, w \in \Omega$, $j \in P_N$ *имеет место равенство*

$$(D_{j,z})_t(\varphi(T_t(f)))(w) = \varphi(T_w(D_{j,z}(f))).$$

Доказательство. Равенство (i) справедливо для любого монома t^β, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, а значит, и для любого многочлена f. Равенства (iii) проверяются непосредственно.

(ii). Для многочленов f утверждение следует из (i). Поскольку все области Ω_j односвязны, то множество многочленов плотно в $A(\Omega)$. Так как линейные операторы T_z и D_0^α непрерывны в $A(\Omega)$, то равенство в (ii) справедливо для любой функции $f \in A(\Omega)$.

(iv). Вследствие леммы 2.1(vi), с учетом равенства $T_{j,z} = D_{j,z}M_j$, функция $\Phi(z) := \varphi(T_z(f))$ дифференцирума в каждой точке Ω по каждой переменной, причем

$$\partial_j\Phi(z) = \varphi\Big(\big(T_{1,z} \cdots T_{j-1,z} D_{j,z}^2 M_j T_{j+1,z} \cdots T_{N,z}\big)(f)\Big), \quad z \in \Omega.$$

Следовательно, функция Φ аналитична в Ω.

(v). Применяя леммы 2.2 и 2.1, получим, что при $z_j \neq w_j$

$$\begin{aligned}
(D_{j,z})_t\big(\varphi(T_t(f))\big)(w) &= \frac{\varphi(T_w(f)) - \varphi(T_{w_{j,z}}(f))}{w_j - z_j} = \varphi\left(\frac{T_w(f) - T_{w_{j,z}}(f)}{w_j - z_j}\right) = \\
&= \varphi\left(T_{1,w} \cdots T_{j-1,w} T_{j+1,w} \cdots T_{N,w}\left(\frac{T_{j,w}(f) - T_{j,z}(f)}{w_j - z_j}\right)\right) = \\
&= \varphi\left(T_{1,w} \cdots T_{j-1,w} T_{j+1,w} \cdots T_{N,w}\left(\frac{D_{j,w}(M_j(f)) - D_{j,z}(M_j(f))}{w_j - z_j}\right)\right) = \\
&= \varphi\left(T_{1,w} \cdots T_{j-1,w} T_{j+1,w} \cdots T_{N,w}\left(\frac{(w_j - z_j)D_{j,w}D_{j,z}(M_j(f))}{w_j - z_j}\right)\right) = \\
&= \varphi\Big(T_{1,w} \cdots T_{j-1,w} T_{j+1,w} \cdots T_{N,w} D_{j,z} D_{j,w}\big(M_j(f)\big)\Big) = \\
&= \varphi\Big(T_{1,w} \cdots T_{j-1,w} T_{j+1,w} \cdots T_{N,w} D_{j,z}\big(T_{j,w}(f)\big)\Big) = \\
&= \varphi\Big(T_{1,w} \cdots T_{j-1,w} T_{j+1,w} \cdots T_{N,w} T_{j,w}\big(D_{j,z}(f)\big)\Big) = \varphi\big(T_w(D_{j,z}(f))\big).
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Для произвольных $z, t \in \mathbb{C}^N$, $\sigma \subset P_N$ определим $t_{\sigma,z} \in \mathbb{C}^N$ следующим образом:

$$(t_{\sigma,z})_j := \begin{cases} t_j, & j \notin \sigma, \\ z_j, & j \in \sigma \end{cases}$$

(если $\sigma = \{j\}$, то $t_{\sigma,z} = t_{j,z}$). Для множества $\sigma \subset P_N$ символ $|\sigma|$ обозначает количество элементов в σ. Считаем, что $|\emptyset| = 0$. Далее $D_z := D_z^1$.

Приведем лемму о действии операторов D_z и T_z.

Лемма 2.4. *Пусть Ω — полицилиндрическая область в $\mathbb{C}^N$.*

(i) $\displaystyle D_z(f)(t) = \frac{1}{t-z} \sum_{\sigma \subset P_N} (-1)^{|\sigma|} f(t_{\sigma,z}), \quad f \in A(\Omega), \quad t, z \in \Omega, \quad t_j \neq z_j, \quad j \in P_N;$

(ii) $\displaystyle T_z(f)(t) = \frac{1}{t-z} \sum_{\sigma \subset P_N} (-1)^{|\sigma|} t^1_{\sigma,z} f(t_{\sigma,z}), \quad f \in A(\Omega), \quad t, z \in \Omega, \quad t_j \neq z_j, \quad j \in P_N;$

(iii) $T_z(f)(t) = T_t(f)(z)$ *для любых $t, z \in \Omega$, $f \in A(\Omega)$.*

Доказательство. Равенства (i) и (ii) проверяются индукцией по N; (iii) следует из (ii). □

2.2. Операторы D_z^α в весовых пространствах целых функций. Для непрерывной функции $v : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$ и для $f : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ введем весовые преднормы (нормы)

$$p_v(f) := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{\exp(v(z))}.$$

Для двойной последовательности таких функций $v_{n,k} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$, что в $\mathbb{C}^N$

$$v_{n,k+1} \leqslant v_{n,k} \leqslant v_{n+1,k}, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

положим $p_{n,k} := p_{v_{n,k}}$ и определим весовые пространства Фреше

$$E_n := \big\{ f \in A(\mathbb{C}^N) : \ p_{n,k}(f) < +\infty \ \forall k \in \mathbb{N} \big\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

с фундаментальной последовательностью непрерывных преднорм $(p_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$. Отметим, что E_n непрерывно вложено в E_{n+1} для любого $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Введем в E топологию индуктивного предела пространств E_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно вложений E_n в E:

$$E := \operatorname*{ind}_{n \to} E_n.$$

Для $z \in \mathbb{C}^N$ положим

$$|z| := \left(\sum_{j=1}^N |z_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Ниже будем предполагать, что последовательность $(v_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет следующему условию: для любого n существует такое m, что при всех k найдутся такие s и $C \geqslant 0$, что

$$\sup_{|t-z| \leqslant 1} v_{n,s}(t) + \ln(1 + |z|) \leqslant \inf_{|t-z| \leqslant 1} v_{m,k}(t) + C, \quad z \in \mathbb{C}^N. \tag{1}$$

Тогда пространство E инвариантно относительно каждого дифференцирования $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_N^{\alpha_N}}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ и сдвигов и для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что всякое ограниченное в E_n множество относительно компактно в E_m. Кроме того, E инвариантно относительно операторов умножения M_j, $j \in P_N$.

Будем считать, что выполнено также следующее условие:

$$\text{существует такое } n, \text{ что для всех } k \text{ имеем } \inf_{z\in\mathbb{C}^N} v_{n,k}(z) > -\infty. \tag{2}$$

Условие (2) равносильно тому, что E содержит функцию, тождественно равную 1 (а значит, и все многочлены). Последнее позволяет ввести, как и выше, операторы $D_{j,z}$, $j \in P_N$, и D_z^α, $z \in \mathbb{C}^N$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, действующие в E линейно и непрерывно. Аналогично случаю полиобласти, так же, как и в п. 2.1, вводятся операторы сдвига T_z, $z \in \mathbb{C}^N$, ассоциированные с системой $\mathcal{D}_0 := \{D_{j,0} : j \in P_N\}$. Все операторы T_z, $z \in \mathbb{C}^N$, линейно и непрерывно отображают E в E. Для введенных операторов справедливы аналоги лемм 2.1, 2.2, 2.3(i), (iv), (v), 2.4. Равенство (ii) леммы 2.3 также справедливо для E, если, например, множество многочленов плотно в E.

2.3. Связь с интерполирующей функцией А. Ф. Леонтьева. Отметим связь операторов $D_z = D_z^1$ с многомерным аналогом интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева. Пусть K_j, $j \in P_N$, — выпуклые компакты в $\mathbb{C}$, содержащие 0; $K := K_1 \times \cdots \times K_N$; $A(K)$ — пространство ростков всех аналитических на K функций с его естественной топологией счетного индуктивного предела банаховых пространств. Положим

$$v_{n,k}(z) := \sum_{j=1}^N \left(H_{K_j}(z_j) + \frac{|z_j|}{k} \right), \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

(Функции $v_{n,k}$ не зависят от n.) При этом для ограниченного множества $Q \subset \mathbb{C}^m$ символ H_Q обозначает опорную функцию Q:

$$H_Q(z) := \sup_{t\in Q} \left(\sum_{j=1}^m z_j t_j \right), \quad z \in \mathbb{C}^m.$$

Заметим, что

$$H_K(z) = \sum_{j=1}^N H_{K_j}(z_j), \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

Положим

$$e_z(t) := e^{zt},$$

где

$$zt := \sum_{j=1}^N z_j t_j, \quad z, t \in \mathbb{C}^N.$$

Согласно [21, теорема 4.5.3] преобразование Лапласа

$$\mathcal{F}(\varphi)(z) := \varphi(e_z), \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad \varphi \in A(K)',$$

является топологическим изоморфизмом $A(K)'_\beta$ на пространство Фреше $E_K := E$, где E задается последовательностью $(v_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$, как выше. Естественная двойственность между $A(K)$ и $A(K)'$ индуцирует двойственность между $A(K)$ и E_K, задаваемую билинейной формой

$$\langle h, f \rangle := \mathcal{F}^{-1}(f)(h), \quad h \in A(K), \quad f \in E_K.$$

Для $f \in E_K$, $h \in A(K)$, $z \in \mathbb{C}^N$ положим

$$\omega_f(z, h) := \langle h, D_z(f) \rangle. \tag{3}$$

Отображение $\omega_f : \mathbb{C}^N \times A(K) \to \mathbb{C}$ является многомерным вариантом интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева (см. [13]), определяемой f. В [4] исследован ее абстрактный аналог при $N = 1$ и показано, что равенство (3) действительно задает интерполирующую функцию А. Ф. Леонтьева. Обоснованием этого при $N > 1$ является следующее.

Зафиксируем $z \in \mathbb{C}^N$. Найдем вначале операторы $D'_z : A(K) \to A(K)$, сопряженные к $D_z : E_K \to E_K$ относительно дуальной пары $(A(K), E_K)$. Для $f \in E_K$, $\lambda \in \mathbb{C}^N$, $\lambda_j \neq z_j$, $j \in P_N$, вследствие леммы 2.4(i),

$$\langle D'_z(e_\lambda), f\rangle = \big\langle e_\lambda, D_z(f)\big\rangle = D_z(f)(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z}\sum_{\sigma\subset P_N}(-1)^{|\sigma|}f(\lambda_{\sigma,z}) =$$

$$= \left\langle \frac{1}{\lambda - z}\sum_{\sigma\subset P_N}(-1)^{|\sigma|}e_{\lambda_{\sigma,z}},\ f\right\rangle. \quad (4)$$

Следуя А. Ф. Леонтьеву, введем оператор

$$J_z(h)(t) := \int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_N} h(t-\xi)e^{z\xi}d\xi_1\cdots d\xi_N, \quad h \in A(K)$$

(интегрирование ведется по отрезкам $[0, t_j]$, $j \in P_N$; t_j принадлежат таким выпуклым областям G_j в $\mathbb{C}$, содержащим K_j, что функция h аналитична в $G_1 \times \cdots \times G_N$). Тогда $J_z \in \mathcal{L}(A(K))$. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}^N$, $\lambda_j \neq z_j$, $j \in P_N$

$$J_z(e_\lambda)(t) = \prod_{j=1}^N \frac{e^{z_jt_j} - e^{\lambda_jt_j}}{z_j - \lambda_j} = \frac{1}{\lambda - z}\sum_{\sigma\subset P_N}(-1)^{|\sigma|}e_{\lambda_{\sigma,z}}.$$

Отсюда и из равенства (4) следует, что $D'_z(e_\lambda) = J_z(e_\lambda)$ для для любого такого $\lambda \in \mathbb{C}^N$, что $\lambda_j \neq z_j$, $j \in P_N$, а значит, для любого $\lambda \in \mathbb{C}^N$. Таким образом,

$$\langle h, D_z(f)\rangle = \mathcal{F}^{-1}(f)\big(J_z(h)\big), \quad f \in E_K, \quad h \in A(K), \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

Последнее обосновывает равенство (3) (см. [13, гл. IV, § 2]).

Отметим, что ω_f в ситуации, когда f является функцией с разделяющимися переменными, т.е.

$$f(z) = \prod_{j=1}^N f_j(z_j),$$

применялась В. П. Громовым (см. [2]) при разложении в ряды экспонент аналитических функций двух комплексных переменных, В. В. Напалковым (см. [16, гл. IV, § 19]) при разложении в ряды экспонент функций, аналитических в полиобластях в $\mathbb{C}^N$, для решения уравнений свертки в полиобластях.

Замечание 2.1. Идея определения оператора сдвига для линейного оператора в локально выпуклом пространстве восходит к Ж. Дельсарту (см. [25, 26]). Он определил и применил операторы сдвига для дифференциальных операторов, в частности, для оператора Бесселя с помощью обобщения ряда Тейлора. Различные обобщения операторов сдвига применяются в теории приближений (группы или полугруппы операторов в банаховом пространстве; операторы обобщенного сдвига, теория которых создана и развита Б. М. Левитаном в [12] в связи с потребностями теории почти периодических функций). Другой класс операторов обобщенного сдвига используется в теории уравнений типа свертки в пространствах аналитических функционалов, в частности, в пространствах функций, аналитических в ρ-выпуклых областях ($\rho > 0$) (они порождены оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда—Леонтьева, заданным функцией Миттаг-Леффлера; см. статью В. А. Ткаченко [18]). Обобщенные сдвиги, порожденные системой операторов частного дифференцирования, использовались В. П. Громовым (см. [3]) при изучении циклических векторов в пространствах голоморфных вектор-функций. З. Биндерман ввел и изучил операторы сдвига (функциональные R-сдвиги) для линейных операторов в комплексном линейном пространстве, имеющих линейный правый обратный (см. [24]). В основе их определения в [24] также лежит обобщение ряда Тейлора. Отметим, что В. А. Ткаченко (см. [19]), Н. Е. Линчук (см. [14]) и Ю. С. Линчук (см. [32]) использовали одномерный оператор сдвига

T_z при описании линейных непрерывных операторов, перестановочных, соответственно, с оператором обобщенного интегрирования и оператором Поммье (и связанным с ним оператором). Кроме того, конструкции подобного рода в пространствах целых функций экспоненциального типа применял И. Ф. Красичков-Терновский (см. [10, § 10]) для решения проблемы распространения спектрального синтеза.

3. Коммутант системы операторов Поммье

3.1. Случай полицилиндрической области. Пусть Ω — полицилиндрическая область, содержащая 0. Обозначим через $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ множество всех таких операторов $B \in \mathcal{L}(A(\Omega))$, что $BD_{j,0} = D_{j,0}B$ на $A(\Omega)$ для любого $j \in P_N$. Ясно, что $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ совпадает с множеством всех $B \in \mathcal{L}(A(\Omega))$, перестановочных с каждым оператором D_0^α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Пусть $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{T})$ Э— множество всех таких операторов $B \in \mathcal{L}(A(\Omega))$, что $BT_z = T_zB$ на $A(\Omega)$ для любого $z \in \Omega$.

Для $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ определим функционалы

$$\varphi_\alpha(f) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_N^{\alpha_N}}(0), \quad f \in A(\Omega).$$

Ясно, что $\varphi_\alpha \in A(\Omega)'$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Лемма 3.1. *Для любой функции $f \in A(\Omega)$ и любого компакта K в Ω множество сдвигов $S(f,K) := \{T_z(f) : z \in K\}$ ограничено в $A(\Omega)$.*

Утверждение этой леммы следует из того факта, что функция $(t,z) \mapsto T_z(f)(t) = T_t(f)(z)$ аналитична в $\Omega \times \Omega$ (по (t,z)).

Для $z \in \Omega$ введем дельта-функции $\delta_z(f) := f(z)$, $f \in A(\Omega)$. Ясно, что $\delta_z \in A(\Omega)'$, $z \in \Omega$. Далее, $\mathbb{C}[z]$ — множество всех многочленов переменных $z_1, \ldots, z_N$ над полем $\mathbb{C}$.

Теорема 3.1. *Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие 0. Следующие условия равносильны*:

(i) $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$;
(ii) $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{T})$;
(iii) *существует такой функционал $\varphi \in A(\Omega)'$, что $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \Omega$, $f \in A(\Omega)$.*

Доказательство. (i)⇒(ii). Пусть $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$. Для любого $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ для монома $f_\beta(t) = t^\beta$ по лемме 2.3

$$T_z(f_\beta) = \sum_{0 \leqslant \alpha \leqslant \beta} z^\alpha D_0^\alpha(f_\beta).$$

Поэтому

$$T_zB(f_\beta) = \sum_{0 \leqslant \alpha \leqslant \beta} z^\alpha D_0^\alpha(B(f_\beta)) = B\Big(\sum_{0 \leqslant \alpha \leqslant \beta} z^\alpha D_0^\alpha(f_\beta)\Big) = BT_z(f_\beta).$$

Вследствие линейности оператор B перестановочен с каждым оператором T_z на $\mathbb{C}[z]$. Поскольку $\mathbb{C}[z]$ плотно в $A(\Omega)$, то равенство $T_zB = BT_z$ выполняется и на $A(\Omega)$.

(ii)⇒(iii). Пусть $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{T})$. Тогда для любых $f \in A(\Omega)$, $z, t \in \Omega$ выполняются равенства

$$BT_z(f)(t) = T_zB(f)(t) = T_tB(f)(z). \tag{5}$$

Полагая $t := 0$, для $\varphi := \delta_0 B \in A(\Omega)'$ получим

$$\varphi(T_z(f)) = B(f)(z), \quad f \in A(\Omega), \quad z \in \Omega.$$

(iii)⇒(i) вытекает из леммы 2.3. □

Для многочлена $P(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[z]$ положим

$$P(D_0) := \sum_\alpha c_\alpha D_0^\alpha.$$

Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{D}_0) := \{P(D_0) : P \in \mathbb{C}[z]\}$. Ясно, что $\mathcal{P}(\mathcal{D}_0) \subset \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$. Ниже используется топология поточечной сходимости в $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$; она задается множеством преднорм

$$p_{K,\Delta}(B) := \max_{f\in\Delta} \max_{z\in K} |B(f)(z)|,$$

где K пробегает семейство всех компактных подмножеств Ω, а Δ — семейство всех конечных подмножеств $A(\Omega)$.

Следствие 3.1. *Множество $\mathcal{P}(\mathcal{D}_0)$ плотно в $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ в топологии поточечной сходимости.*

Доказательство. Возьмем $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$. По теореме 3.1 существует $\varphi \in A(\Omega)'$, для которого

$$B(f) = \varphi(T_z(f)), \quad z \in \Omega, \quad f \in A(\Omega).$$

Поскольку множество $\Phi := \{\varphi_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полно в $A(\Omega)'_\beta$, то существует сеть

$$\left\{\Phi_\mu = \sum_{\gamma\in\Delta_\mu} c_{\gamma,\mu}\varphi_\gamma\right\}_{\mu\in M},$$

сходящаяся к φ в $A(\Omega)'_\beta$ (Δ_μ — конечные подмножества $\mathbb{N}_0^N$). Зафиксируем компакт K в Ω. По лемме 3.1 множество $S(f,K)$ ограничено в $A(\Omega)$. Поэтому

$$\sup_{h\in S(f,K)} \left|\Phi_\mu(h) - \varphi(h)\right| \xrightarrow[\mu\in M]{} 0.$$

Поскольку по лемме 2.3(ii)

$$\Phi_\mu(T_z(f)) = \sum_{\gamma\in\Delta_\mu} c_{\gamma,\mu}\varphi_\gamma(T_z(f)) = \sum_{\gamma\in\Delta_\mu} \gamma! c_{\gamma,\mu} D_0^\gamma(f)(z),$$

то

$$\sup_{z\in K} \left|\sum_{\gamma\in\Delta_\mu} \gamma! c_{\gamma,\mu} D_0^\gamma(f)(z) - B(f)(z)\right| \xrightarrow[\mu\in M]{} 0. \qquad \square$$

Перед формулировкой другого следствия приведем сведения о реализации сопряженного к $A(\Omega)$ с помощью преобразования Коши. Символом $A_0(C\Omega)$ обозначим пространство аналитических в $C\Omega$ функций, обращающихся в 0 во всех точках, хотя бы одна координата которых равна ∞. При этом $A_0(C\Omega)$ наделяется своей обычной топологией счетного индуктивного предела банаховых пространств. Согласно [16, § 12] преобразование Коши $\mathcal{C}(\varphi)(\xi) := \varphi(f_\xi)$, $\varphi \in A(\Omega)'$ (здесь $f_\xi(t) = 1/(\xi - t)$), является линейным топологическим изоморфизмом $A(\Omega)'_\beta$ на $A_0(C\Omega)$. Изоморфизм $\mathcal{C} : A(\Omega)' \to A_0(C\Omega)$ индуцирует двойственность между $A(\Omega)$ и $A_0(C\Omega)$. Соответствующая билинейная форма, задающая ее, имеет вид

$$\langle f, g\rangle = \mathcal{C}^{-1}(g)(f), \quad f \in A(\Omega), \quad g \in A_0(C\Omega).$$

Зафиксируем $g \in A_0(C\Omega)$. Тогда для $\varphi = \mathcal{C}^{-1}(g)$, оператора $B_\varphi(h)(z) = \varphi(T_z(h))$, его сопряженного $B'_\varphi : A_0(C\Omega) \to A_0(C\Omega)$ выполняются равенства

$$B'_\varphi(g)(\xi) = \langle B'_\varphi(g), f_\xi\rangle = \langle g, B_\varphi(f_\xi)\rangle = \langle g_z, \varphi(T_z(f_\xi))\rangle = \left\langle g_z, \varphi\left(\frac{\xi^1}{\xi - z} f_\xi\right)\right\rangle = \xi^1\mathcal{C}(\varphi)(\xi)g(\xi).$$

Отсюда следует, что сопряженным к оператору $B_\varphi : A(\Omega) \to A(\Omega)$ относительно дуальной пары $(A(\Omega), A_0(C\Omega))$ является оператор умножения $M_{\widetilde{\varphi}}$ на функцию $\widetilde{\varphi}(\xi) := \xi^1\mathcal{C}(\varphi)(\xi)$. Поскольку для любого ненулевого $\varphi \in A(\Omega)$ оператор $M_{\widetilde{\varphi}} : A_0(C\Omega) \to A_0(C\Omega)$ инъективен, имеет замкнутый образ и $A(\Omega)$ является монтелевским пространством Фреше, получим следующее утверждение.

Следствие 3.2. *Для любого ненулевого функционала $\varphi \in A(\Omega)'$ оператор $B_\varphi : A(\Omega) \to A(\Omega)$, $h \mapsto \varphi(T_z(h))$, $z \in \Omega$, сюръективен. При $N = 1$ он имеет линейный непрерывный правый обратный.*

Часть предыдущего следствия, относящаяся к случаю $N = 1$, вытекает из сюръективности B_φ и того факта (см. [14, предложение 1]), что, как показано Н. Е. Линчук при $N = 1$, для $\varphi \in A(\Omega)' \backslash \{0\}$ ядро B_φ конечномерно.

3.2. Случай весовых пространств целых функций. Для пространства E, как в п. 2.2, справедлив аналог теоремы 3.1. Символ $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$ (соответственно, $\mathcal{K}(\mathcal{T})$) обозначает коммутант системы $\mathcal{D}_0$ (соответственно $\{T_z : z \in \mathbb{C}^N\}$) в кольце $\mathcal{L}(E)$.

Теорема 3.2. *Пусть пространство E задано двойной последовательностью $(v_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющей условиям* (1) *и* (2)*, как в п.* 2.2. *Предположим, что множество всех многочленов плотно в E. Следующие утверждения равносильны*:

(i) $B \in \mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$;
(ii) $B \in \mathcal{K}(\mathcal{T})$;
(iii) *существует такой функционал $\varphi \in E'$, что*

$$B(f)(z) = \varphi(T_z(f)), \quad z \in \Omega, \quad f \in E.$$

При сделанных предположениях доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1.

Замечание 3.1. Известные ранее результаты о циклических векторах операторов Поммье относятся к случаю $N = 1$. Н. И. Нагнибида (см. [15, следствие 3]) показал, применяя представления линейных непрерывных операторов с помощью бесконечных матриц, что для круга $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ $(0 < R \leqslant \infty)$ множество $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ в точности состоит из D_0-операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. В [14] Н. Е. Линчук доказала равносильность утверждений (i) и (iii) теоремы 3.1 в случае $N = 1$ для произвольной области Ω в расширенной комплексной плоскости, содержащей 0. В [14] существенно используется теория характеристических функций линейных непрерывных операторов Г. Кете (см. [31]). Этот метод довольно тесно связан со спецификой пространства $A(\Omega)$. И. Димовски и В. Христов (см. [27]) доказали, по сути, равносильность всех трех утверждений (i)–(iii) теоремы 3.1 для односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Кроме того, в [27] охарактеризованы линейные непрерывные операторы в $A(\Omega)$, отображающие в себя фиксированное гиперподпространство в $A(\Omega)$ и перестановочные в нем с D_0. Мы существенно используем метод доказательства статьи [27], более алгебраический. Отметим, что для обычного сдвига (вместо T_z) перестановка z и t в равенстве (5) использовалась и ранее при описании операторов, перестановочных со сдвигами (см., например, [17, теорема 6.33]). Ю. С. Линчуком (см. [32]) были описаны линейные непрерывные операторы в $A(\Omega)$, перестановочные с одномерным возмущением оператора Поммье D_0, а именно, с оператором $D_0 + \varphi\delta_0$, где φ — фиксированная функция, аналитическая в Ω, а δ_0 — дельта-функция: $\delta_0(f) := f(0)$. Операторы $D_0 + \varphi\delta_0$ являются линейными непрерывными левыми обратными к оператору умножения на независимую переменную. Эта статья Ю. С. Линчука послужила побудительным мотивом изучения коммутанта оператора типа Поммье в весовом (LF)-пространстве целых в $\mathbb{C}$ функций (см. [6]). В [6] доказана равносильность утверждений (i) и (iii) (фактически — всех утверждений (i)–(iii)) теоремы 3.2 для $N = 1$ и для оператора типа Поммье (при этом не предполагается, что выполнено условие (2)).

4. Циклические векторы

Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие 0. Символом $\mathrm{Cycl}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ обозначим множество всех циклических векторов системы $\mathcal{D}_0$, т.е. таких функций $f \in A(\Omega)$, что система $\{D_0^\alpha(f) : \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полна в $A(\Omega)$.

Лемма 4.1. *Если сеть $\Phi_\mu \in A(\Omega)'$, $\mu \in M$, сходится к нулевому функционалу в $A(\Omega)'_\beta$, то для любой функции $f \in A(\Omega)$ сеть $\Big\{(\Phi_\mu)_t\big(T_t(f)(z)\big)\Big\}_{\mu\in M}$ сходится к 0 в $A(\Omega)$ (по $z \in \Omega$).*

Доказательство. Отметим, что функция $t \mapsto T_t(f)(z) = T_z(f)(t)$ аналитична в Ω по t. По лемме 2.3(iv) функции $(\Phi_\mu)_t(T_t(f)(z)) = \Phi_\mu(T_z(f))$, $\mu \in M$, аналитичны в Ω (по z). Для любого компакта $K \subset \Omega$ вследствие леммы 3.1

$$\lim_{\mu\in M}\sup_{z\in K}\big(\Phi_\mu\big)_t\big(T_t(f)(z)\big) = \lim_{\mu\in M}\sup_{z\in K}\Phi_\mu\big(T_z(f)\big) = \lim_{h\in S(f,K)}\big|\Phi_\mu(h)\big| = 0. \qquad \square$$

Лемма 4.2. *Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая* 0*. Для $f \in A(\Omega)$ следующие утверждения равносильны*:

(i) $f \in \mathrm{Cycl}_\Omega(\mathcal{D}_0)$;
(ii) *система $\{T_z(f) : z \in \Omega\}$ полна в $A(\Omega)$.*

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). Пусть $f \in \mathrm{Cycl}_\Omega(\mathcal{D}_0)$. Предположим, что система $\{T_z(f) : z \in \Omega\}$ не полна в $A(\Omega)$. Тогда существует такой ненулевой функционал $\varphi \in A(\Omega)$, что $\varphi(T_z(f)) = 0$ для любого $z \in \Omega$. Положим

$$B(h)(z) := \varphi(T_z(h)), \quad h \in A(\Omega), \quad z \in \Omega.$$

По теореме 3.1 $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$. При этом $B(h)(0) = \varphi(h)$, $h \in A(\Omega)$. Значит, B — ненулевой оператор. Поскольку $f \in \operatorname{Ker} B$, то $f \notin \mathrm{Cycl}_\Omega(\mathcal{D}_0)$. Получено противоречие.

(ii)$\Rightarrow$(i). Пусть $\chi \in A(\Omega)'$ и $\chi(D_0^\alpha(f)) = 0$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. По лемме 2.3

$$D_0^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\alpha!}\varphi_\alpha(T_t(f)), \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N, \quad t \in \Omega.$$

Поскольку система $\{\varphi_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полна в $A(\Omega)'_\beta$, то существует сеть (и даже последовательность) $\chi_\mu \in \operatorname{span}\{\varphi_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$, $\mu \in M$, сходящаяся к χ в $A(\Omega)'_\beta$. Поэтому, учитывая лемму 4.1 и равенства

$$(\varphi_\gamma)_z\big((\varphi_\delta)_t(T_t(f)(z))\big) = (\varphi_\delta)_t\big((\varphi_\gamma)_z(T_t(f)(z))\big)$$

для любых $\gamma, \delta \in \mathbb{N}_0^N$, получим для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$:

$$0 = \chi(D_0^\alpha(f)) = \frac{1}{\alpha!}\left(\lim_{\mu\in M}\chi_\mu\right)_t\Big((\varphi_\alpha)_z\big(T_t(f)(z)\big)\Big) = \frac{1}{\alpha!}\lim_{\mu\in M}\Big((\chi_\mu)_t\big((\varphi_\alpha)_z(T_t(f)(z))\big)\Big) =$$
$$= \frac{1}{\alpha!}\lim_{\mu\in M}\Big((\varphi_\alpha)_z\big((\chi_\mu)_t(T_t(f)(z))\big)\Big) = \frac{1}{\alpha!}(\varphi_\alpha)_z\left(\lim_{\mu\in M}(\chi_\mu)_t(T_t(f)(z))\right) = \frac{1}{\alpha!}(\varphi_\alpha)_z\big(\chi_t(T_t(f)(z))\big) =$$
$$= \frac{1}{\alpha!}(\varphi_\alpha)_z\big(\chi(T_z(f))\big).$$

Значит, $\chi(T_z(f)) = 0$ для любого $z \in \Omega$. Поэтому, в силу (ii), функционал χ нулевой. Следовательно, выполняется утверждение (i). $\square$

Далее для замкнутой жордановой кривой Γ в $\mathbb{C}$ символы $\operatorname{int}\Gamma$ и $\operatorname{ext}\Gamma$) обозначают соответственно внутренность и внешность Γ в $\mathbb{C}$; $\overline{Q}$ для $Q \subset \mathbb{C}$ — замыкание Q в $\mathbb{C}$.

Теорема 4.1. *Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие* 0*. Следующие условия равносильны*:

(i) $f \in \mathrm{Cycl}_\Omega(\mathcal{D}_0)$;
(ii) *$f \in A(\Omega)$ и f отлична от рациональной функции.*

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). Пусть $f \in A(\Omega)$ является рациональной функцией, т.е. $f(t) = P(t)/Q(t)$, где P и Q — многочлены. Вследствие леммы 2.4 для любой функции $g \in A_0(C\Omega)$, для некоторых замкнутых жордановых кривых L_j в Ω_j, $j \in P_N$, таких, что g аналитична на

$\overline{\mathrm{ext}\,L_1} \times \cdots \times \overline{\mathrm{ext}\,L_N}$, для $L = L_1 \times \cdots \times L_N$

$$\int\limits_L g(t)T_z(f)(t)dt = \sum_{\sigma\subset P_N} (-1)^{|\sigma|} \int\limits_L t^1_{\sigma,z} g(t) \frac{f(t_{\sigma,z})}{t-z} dt =$$
$$= \sum_{\substack{\sigma\subset P_N,\\ \sigma\neq\emptyset}} (-1)^{|\sigma|} \int\limits_L t^1_{\sigma,z} g(t) \frac{f(t_{\sigma,z})}{t-z} dt + \int\limits_L t^1 g(t) \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z \in (\Omega_1\backslash L_1) \times \cdots \times (\Omega_N\backslash L_N). \quad (6)$$

При этом для любого $z \in \mathrm{int}\,L_1 \times \cdots \times \mathrm{int}\,L_N$ по (одномерной) интегральной формуле Коши для неограниченной области, каждый из интегралов

$$\int\limits_L t^1_{\sigma,z} g(t) \frac{f(t_{\sigma,z})}{t-z} dt, \quad \sigma \subset P_N, \quad \sigma \neq \emptyset,$$

равен нулю. Пусть

$$P(t) = \sum_{\alpha\in\Lambda} b_\alpha t^\alpha, \quad Q(t) = \sum_{\alpha\in\Lambda} c_\alpha t^\alpha$$

(Λ — конечное подмножество $\mathbb{N}_0^N$); $\omega_j := \max\{\alpha_j : \alpha \in \Lambda\}$, $j \in P_N$. Возьмем $g(t) := Q(t)/t^\delta$, где $\delta_j = \omega_j + 2$, $j \in P_N$. Тогда

$$g \in A_0\Big((\mathbb{C}\backslash\{0\}) \times \cdots \times (\mathbb{C}\backslash\{0\})\Big),$$

а значит, $g \in A_0(C\Omega)$. Возьмем такое $\varepsilon > 0$, что $\overline{U}_\varepsilon(0) \subset \Omega$, и положим

$$L_j := \big\{t_j \in \mathbb{C} : |t_j| = \varepsilon\big\}, \quad j \in P_N.$$

По интегральной формуле Коши

$$\int\limits_L \frac{t^1 g(t) f(t)}{t-z} dt = \int\limits_L \frac{t^1 P(t)}{t^\gamma (t-z)} dt = 0$$

для любого $z \in U_\varepsilon(0)$. Вследствие (6)

$$\int\limits_L g(t)T_z(f)(t)dt = 0$$

для любого $z \in \Omega$. Поскольку функция g ненулевая, система $\{T_z(f) : z \in \Omega\}$ не является полной в $A(\Omega)$, и по лемме 4.2 $f \notin \mathrm{Cycl}_\Omega(\mathcal{D}_0)$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Предположим, что $f \notin \mathrm{Cycl}_\Omega(\mathcal{D}_0)$. Согласно (двойственному) критерию полноты и лемме 4.2 существует такая ненулевая функция $g \in A_0(C\Omega)$, что для некоторых замкнутых жордановых кривых L_j в Ω_j, $j \in P_N$, таких, что g аналитична на $\overline{\mathrm{ext}\,L_1} \times \cdots \times \overline{\mathrm{ext}\,L_N}$, для $L = L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_N$ выполняются равенства

$$\int\limits_L g(t)T_z(f)dt = 0, \quad z \in \Omega,$$

т.е., вследствие леммы 2.4,

$$\sum_{\sigma\subset P_N} (-1)^{|\sigma|} \int\limits_L t^1_{\sigma,z} g(t) \frac{f(t_{\sigma,z})}{t-z} dt = 0, \quad z \in (\Omega_1\backslash L_1) \times \cdots \times (\Omega_N\backslash L_N).$$

Следовательно,

$$\int\limits_L \frac{t^1 g(t) f(t)}{t-z} dt = \sum_{\substack{\sigma\subset P_N,\\ \sigma\neq\emptyset}} (-1)^{|\sigma|+1} \int\limits_L t^1_{\sigma,z} g(t) \frac{f(t_{\sigma,z})}{t-z} dt, \quad z \in (\Omega_1\backslash L_1) \times \cdots \times (\Omega_N\backslash L_N).$$

Пусть для $\sigma \subset P_N$ символ $\Phi^{\sigma,-}$ обозначает предельные значения функции

$$\Phi(z) := (2\pi i)^{-N} \int\limits_L \frac{t^1 g(t) f(t)}{t-z} dt$$

на L, если для кривой L_j для $j \notin \sigma$ они берутся изнутри, а для кривой L_j при $j \in \sigma$ — извне. Выполняется равенство (см. [1, § 9])

$$t^1 g(t) f(t) = \sum_{\sigma \subset P_N} (-1)^{|\sigma|} \Phi^{\sigma,-}, \quad t \in L.$$

Поскольку значения функции Φ не изменятся, если кривые заменить на замкнутые жордановы кривые в Ω_j, содержащие в своей внутренности L_j, то все функции $\Phi^{\sigma,-}$ равны нулю, если $\sigma \neq P_N$. Значит,

$$t^1 g(t) f(t) = (-1)^N \Phi^{P_N,-}(t), \quad t \in L.$$

Поэтому по каждой переменной (при фиксированных остальных) $t^1 g(t) f(t)$ является рациональной функцией. Согласно [22, гл. 1, задача 10] f — рациональная функция. □

Следствие 4.1. *Для целой в $\mathbb{C}^N$ функции f следующие утверждения равносильны*:

(i) $f \in \mathrm{Cycl}_{\mathbb{C}^N}(\mathcal{D}_0)$;

(ii) f *отлична от многочлена.*

Замечание 4.1. Ранее условия цикличности векторов относительно оператора Поммье были получены для $N = 1$. М. Г. Хапланов (см. [20]) доказал достаточные условия полноты системы $\{D_0^n(f) : n \in \mathbb{N}_0\}$ в пространстве $A(\Omega)$ в случае, когда Ω — круг $|z| < R$ (при этом он использовал матричное представление линейных непрерывных операторов в соответствующем пространстве). Ю. А. Казьмин установил критерий полноты такой системы в $A(\Omega)$ для односвязной области Ω в $\mathbb{C}$ (см. [11]). Метод доказательства теоремы 4.1, используемый в данной работе, близок к примененному в [11] и основанному на специальных интегральных представлениях, в частности, на интегральном представлении n-й степени оператора Поммье. Н. Е. Линчук доказала такой критерий уже в самом общем случае — для произвольной области Ω в расширенной комплексной плоскости (см. [14]). Ю. С. Линчук (см. [32]) получил условия цикличности функций в $A(\Omega)$ также для односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, но относительно оператора более общего вида, именно, оператора $D_0 + \varphi\delta_0$, где φ — фиксированная функция, аналитическая в Ω. При этом в [32] предполагалось, что функция $1 - z\varphi(z)$ не обращается в нуль в Ω. От этого предположения удалось избавиться в [5]. Заметим, что в [14, 32] использовался метод, основанный на применении теории Кете характеристических функций линейных непрерывных операторов в $A(\Omega)$ (последняя существенно связана, в свою очередь, со свойствами простейших дробей). Отметим также работу [28], в которой исследованы циклические векторы оператора сдвига влево в пространстве Харди H^2 в единичном круге, и статью [29], в которой получены общие результаты о циклических векторах обобщенного сдвига влево в банаховых пространствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
2. *Громов В. П., Мишин С. Н., Панюшкин С. В.* Операторы конечного порядка и дифференциально-разностные уравнения. — Орел, 2009.
3. *Громов В. П.* О представлении функций двойными последовательностями Дирихле// Мат. заметки. — 1970. — *7*, № 1. — С. 53–61.
4. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева// Уфим. мат. ж. — 2014. — *6*, № 3. — С. 17–27.
5. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об орбитах аналитических функций относительно оператора типа Поммье// Уфим. мат. ж. — 2015. — *7*, № 4. — С. 75–79.
6. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций// Алгебра анал. — 2016. — *28*, № 2. — С. 114–137.
7. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об алгебре аналитических функционалов, связанной с оператором Поммье// Владикавказ. мат. ж. — 2016. — *18*, № 4. — С. 34–40.

8. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об инвариантных подпространствах оператора Поммье в пространствах целых функций экспоненциального типа// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2017. — 142.— С. 111–120.
9. *Коробейник Ю. Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983.
10. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза// Мат. сб. — 1972. — *88*, № 3 (7). — С. 331–352.
11. *Казьмин Ю. А.* О последовательных остатках ряда Тейлора// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. мех. — 1963. — *5*. — С. 35–46.
12. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига. — М.: Наука, 1973.
13. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
14. *Линчук Н. Е.* Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения// Мат. заметки. — 1988. — *44*, № 6. — С. 794–802.
15. *Нагнибида Н. И.* О линейных непрерывных операторах в аналитическом пространстве, перестановочных с оператором дифференцирования// Теория функций, функциональный анализ и их приложения/ Респ. межвед. науч. сб. — Харьков, 1966. — *2*. — С. 160–164.
16. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. — М.: Наука, 1982.
17. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
18. *Ткаченко В. А.* Уравнения типа свертки в пространствах аналитических функционалов// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1977. — *41*, № 2. — С. 378–392.
19. *Ткаченко В. А.* Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов// Мат. заметки. — 1979. — *2*, № 2. — С. 271–282.
20. *Хапланов М. Г.* О полноте некоторых систем аналитических функций// Уч. зап. Ростов. гос. пед. ин-та. — Ростов-на-Дону, 1955. — *3*. — С. 53–58.
21. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. — М.: Мир, 1968.
22. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Часть II. — М.: Наука, 1985.
23. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.
24. *Binderman Z.* Functional shifts induced by right invertible operators// Math. Nachr. — 1992. — *157*. — С. 211–224.
25. *Delsartes J.* Sur une extensions de la formule de Taylor// J. Math. Pures Appl. — 1938. — *17*, № 9. — С. 213–231.
26. *Delsartes J.* Une extension nouvelle de la théorie de fonctions presque-periodiques de Bohr// Acta Math. — 1939. — *69*. — С. 257–317.
27. *Dimovski I. N., Hristov V. Z.* Commutants of the Pommiez operator// Int. J. Math. Math. Sci. — 2005. — *8*. — С. 1239–1251.
28. *Douglas R. G., Shapiro H. S., Shields A. I.* Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1970. — *20*, № 1. — С. 37–76.
29. *Godefroy G., Shapiro J. H.* Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds// J. Funct. Anal. — 1991. — *98*. — С. 229–269.
30. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On the completeness of orbits of a Pommiez operator in weighted (LF)-spaces of entire functions// Complex Anal. Oper. Theory. — 2017. — *11*, № 6. — С. 1407–1424.
31. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie// J. Reine Angew. Math. — 1953. — *191*. — С. 30–49.
32. *Linchuk Yu. S.* Cyclical elements of operators which are left-inverses to multiplication by an independent variable// Methods Funct. Anal. Topol. — 2006. — *12*, № 4. — С. 384–388.

П. А. Иванов
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: pavel_rsm@list.ru

С. Н. Мелихов
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ
E-mail: melih@math.rsu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 153 (2018). С. 69–83

УДК 517.54

НЕРАВЕНСТВА БОРА В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2018 г. А. А. ИСМАГИЛОВ, А. В. КАЮМОВА, И. Р. КАЮМОВ, С. ПОННУСАМИ

Аннотация. Статья посвящена обзору последних результатов И. Р. Каюмова и С. Поннусами, связанных с неравенством Бора. Кроме того, получена точная оценка усиленного неравенства Бора, а также исследован радиус Бора—Рогозинского для одного класса подчинения. Все результаты являются точными.

Ключевые слова: неравенство Бора, радиус Бора, радиус Рогозинского, аналитические функции, гармонические отображения.

AMS Subject Classification: 30B10, 30A10

1. Введение. Одна из классических задач теории аналитических функций — это задача нахождения величины

$$r_0 = \sup\left\{ r \in (0,1): \ B_f(r) := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leqslant \|f\|_\infty \right\},$$

где супремум берется по классу ограниченных аналитических функций $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, определенных на единичном круге $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}: \ |z| < 1\}$. М. Рис, И. Шур и Ф. Винер доказали, что $r_0 = 1/3$; число $1/3$ называется классическим радиусом Бора для автоморфизмов единичного круга $\mathbb{D}$. В [12] получен радиус Бора для степенных рядов n переменных, определенных на полидиске $\mathbb{C}^n$. Многие авторы обращались в своих исследованиях к радиусу Бора, что привело к расширению этого понятия. Это, в свою очередь, вызвало большой интерес к неравенству Бора, возникающему в различных ситуациях, в том числе и функциональных пространствах (см., например, [10,11,27], недавнее исследование по этой теме Абу-Муханна и др. [5], а также несколько новых результатов [20–23,25]).

Цель данной статьи — обзор последних результатов в этой области, а также получение улучшенного неравенство Бора для аналитических функций.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 сформулирована и доказана классическая теорема Бора, а также приведены недавние результаты, включающие нахождение радиуса Бора для нечетных аналитических функций. В разделе 3 приведены четыре различных улучшенных варианта классической теоремы Бора, при этом внимание уделено как радиусу Бора, так и понятию радиуса Бора—Рогозинского для аналитических функций. В разделе 4 обсуждаются [22], связанные с радиусом Бора—Рогозинского для аналитических функций. В разделе 5 представлены новые результаты с доказательствами. В разделе 6 мы продолжаем обсуждение радиуса Бора и p-радиуса Бора для ограниченных гармонических функций. Наконец, в разделе 7 рассмотрен радиус Бора для гармонических функций Блоха.

Работа А. В. Каюмовой выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00282). Работа С. Поннусами выполнена при поддержке проекта Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ/Р-163 в Департаменте науки и технологий Республики Индия.

2. Классическая теорема Бора. Сформулируем и докажем неравенство Бора, которое также называется теоремой Бора. Ввиду его простоты и элегантности, приведем это доказательство в полном объеме.

Теорема 1. *Пусть* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — *аналитическая функция в области* $\mathbb{D}$ *и* $|f(z)| \leqslant 1$ *в* $\mathbb{D}$. *Тогда справедливы следующие отверждения*:

(i) *точное неравенство* $|a_n| \leqslant 1 - |a_0|^2$ *достигается при* $n \geqslant 1$;

(ii) $B_f(r) := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leqslant 1$ *для* $|z| \leqslant \frac{1}{3}$;

(iii) *радиус* $1/3$ *является неулучшаемым.*

Доказательство. Напомним, что если $\omega^n = 1$, то

$$S_k(n) = 1 + \omega^k + \omega^{2k} + \cdots + \omega^{k(n-1)} = \begin{cases} n, & \text{если } k \text{ кратно } n, \\ 0, & \text{в обратном случае.} \end{cases}$$

Используя это, находим, что

$$g(z) = \frac{f(\omega z) + f(\omega^2 z) + \cdots + f(\omega^{n-1} z) + f(z)}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(n)}{n} a_k z^k =$$
$$= a_0 + a_n z^n + a_{2n} z^{2n} + \cdots =: h(z^n),$$

где h — аналитическая функция и $|h(z)| \leqslant 1$ в $\mathbb{D}$. Таким образом, по лемме Шварца—Пика имеем $|h'(0)| \leqslant 1 - |h(0)|^2$, что доказывает (i). Теперь ясно, что для $r \leqslant 1/3$

$$B_f(r) \leqslant |a_0| + (1 - |a_0|^2) \sum_{n=1}^{\infty} r^n = |a_0| + \big(1 - |a_0|^2\big) \frac{r}{1-r} \leqslant$$
$$\leqslant |a_0| + (1 - |a_0|^2) \frac{1/3}{1 - (1/3)} = \frac{1}{2}\big[2 - (1 - |a_0|)^2\big] \leqslant 1.$$

что доказывает (ii). Наконец, чтобы показать, что радиус $1/3$ является неулучшаемым, рассмотрим

$$\varphi(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \alpha z} = (\alpha - z) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^k = \alpha - (1 - \alpha^2) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} z^k,$$

где $\alpha \in (0, 1)$. Видим, что $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ и

$$B_\varphi(r) = \alpha + (1 - \alpha^2) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} r^k = \alpha + \frac{(1 - \alpha^2) r}{1 - \alpha r} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha r} \left[r(1 + 2\alpha) - 1\right].$$

Отсюда следует, что $B_\varphi(r) > 1$ тогда и только тогда, когда $r > 1/(1 + 2\alpha)$. Так как α может быть выбрано сколь угодно близко к 1, то это означает, что $r_0 = 1/3$ наилучшее из возможных. □

Этот простой результат вызвал большой интерес среди математиков. В продолжение исследований, связанных неравенством Бора, среди прочего, классическая теорема Бора была сформулирована для нечетных аналитических функций, а также для знакопеременных рядов (см. [6]).

В [6, лемма 2.2] было показано, что если функция $f(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k}$ аналитична и $|f(z)| \leqslant 1$ в $\mathbb{D}$, то $B_f(r) \leqslant 1$ для всех $|z| = r \leqslant r_*$, где r_* — решение уравнения

$$5r^4 + 4r^3 - 2r^2 - 4r + 1 = 0,$$

которое единственно в интервале $1/\sqrt{3} < r < 1$. Величина r_* может быть вычислена приближенно и равна 0,7313 .... Кроме того, в [6] приведен пример, показывающий, что радиус Бора для класса нечетных функций удовлетворяет неравенствам $r_* \leqslant r \leqslant r^* \approx 0{,}789991$, где

$$r^* = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{B-2}{6}} + \frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt{\frac{6}{B-2}} - \frac{B}{24} - \frac{1}{6}}; \tag{1}$$

здесь

$$B = \left(3601 - 192\sqrt{327}\right)^{1/3} + \left(3601 + 192\sqrt{327}\right)^{1/3}.$$

Таким образом, в [6] была поставлена следующая задача.

Задача 1 (см. [6])**.** Найти радиус Бора для класса нечетных функций f, удовлетворяющих условию $|f(z)| \leqslant 1$ для всех $z \in \mathbb{D}$.

В [20] авторы решили эту задачу в более общей форме. А именно, аналогичную проблему для p-симметричных функций вида $f(z) = z\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{pk+1}z^{pk}$. Стоит отметить, что свойство p-симметричности в случае $p > 1$ доставляет серьезные трудности из-за того, что если использовать точные неравенства $|a_n| \leqslant 1 - |a_0|^2$ $(n \geqslant 1)$ одновременно (как и в классическом случае), мы не получим точного результата из-за того, что в экстремальном случае $|a_0| < 1$. Кроме того, важно, что в классическом случае нет экстремальной функции, а в нашем случае есть. Сформулируем эти результаты и их следствия (см. [20]).

Теорема 2 (см. [20, теорема 1])**.** *Пусть $p \in \mathbb{N}$, $f(z)$ — такая аналитическая и p-симметрическая в $\mathbb{D}$ функция, что $|f(z)| \leqslant 1$ в $\mathbb{D}$. Тогда*

$$B_f(r) \leqslant 1 \quad \text{для} \quad r \leqslant r_p,$$

где r_p — наибольший положительный корень уравнения

$$-6r^{p-1} + r^{2(p-1)} + 8r^{2p} + 1 = 0$$

в интервале $(0, 1)$. Экстремальная функция имеет вид $z(z^p - a)/(1 - az^p)$, где

$$a = \left(1 - \frac{\sqrt{1 - {r_p}^{2p}}}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{{r_p}^p}.$$

Результат при $p = 1$ хорошо известен: $r_1^* = 1/\sqrt{2}$.

Случай $p = 2$ имеет особый интерес, поскольку он обеспечивает решение задачи 1.

Следствие 1. *Если $f(z)$ — нечетная аналитическая функция в $\mathbb{D}$ и $|f(z)| \leqslant 1$ в $\mathbb{D}$, то*

$$B_f(r) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad r \leqslant r_2 = 0{,}789991\ldots,$$

где $r_2 = r^*$ совпадает с (1). Экстремальная функция имеет вид $z(z^2 - a)/(1 - az^2)$.

В [21] был доказан следующий общий результат.

Теорема 3 (см. [21, теорема 1])**.** *Пусть $p \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant m \leqslant p$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{pk+m}z^{pk+m}$ — аналитическая функция в $\mathbb{D}$ и $|f(z)| \leqslant 1$ в $\mathbb{D}$. Тогда*

$$B_f(r) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad r \leqslant r_{p,m},$$

где $r_{p,m}$ — наибольший положительный корень уравнения

$$-6r^{p-m} + r^{2(p-m)} + 8r^{2p} + 1 = 0.$$

Экстремальная функция имеет вид $z^m(z^p - a)/(1 - az^p)$, где

$$a = \left(1 - \frac{\sqrt{1 - {r_{p,m}}^{2p}}}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{{r_{p,m}}^p}.$$

Случай $p = 2$ и $m = 1$ представляет особый интерес, поскольку он охватывает класс нечетных аналитических функций; это простое упражнение, чтобы увидеть, что для $p = m, 2m, 3m$ радиусы Бора равны

$$r_{m,m} = \frac{1}{\sqrt[2m]{2}}, \quad r_{2m,m} = \sqrt[m]{r_2}, \quad r_{3m,m} = \sqrt[2m]{\frac{7+\sqrt{17}}{16}},$$

где r_2 приведено в следствии 1. Стоит отметить, что в последнем случае $r_{3,1}$ имеет значение $(\sqrt{7+\sqrt{17}})/4$. Результат при $m = 0$ хорошо известен (см. [6]); напомним его из-за его самостоятельного интереса.

Следствие 2. *Пусть $p \geqslant 1$. Если $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{pk} z^{pk}$ — аналитическая функция в $\mathbb{D}$ и $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant 1$ в $\mathbb{D}$. Тогда $B_f(r) \leqslant 1$ для $0 \leqslant r \leqslant r_{p,0} = 1/\sqrt[p]{3}$. Радиус $r_{p,0} = 1/\sqrt[p]{3}$ является наилучшим.*

Если $a_0 = 0$, то из доказательства [21, теорема 1] следует, что число $r_{p,0} = 1/\sqrt[p]{3}$ в следствии 2 может быть заменено на $r_{p,0} = 1/\sqrt[2p]{2}$, которое в этом случае является радиусом Бора. Более того, радиус $r = 1/\sqrt[2p]{2}$ является наилучшим из возможных, что показывает функция

$$\varphi_\alpha(z) = z^p \left(\frac{\alpha - z^p}{1 - \alpha z^p}\right),$$

где $\alpha = 1/\sqrt[2p]{2}$. Случай $p = 1$ из этого результата совпадает со случаем $p = 2$ общего результата следствия 4 (при $g(z) \equiv 0$).

Чтобы сформулировать следующий результат, введем понятие подчинения.

Пусть f и g — аналитические функции в $\mathbb{D}$. Функция g наазывается *подчинением* для f (обозначение $g \prec f$ или $g(z) \prec f(z)$), если существует такая аналитическая функция w, что $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ и $g(z) = f(w(z))$ при $z \in \mathbb{D}$. В случае, когда f однолистна в $\mathbb{D}$, $g \prec f$ тогда и только тогда, когда $g(0) = f(0)$ и $g(\mathbb{D}) \subset f(\mathbb{D})$ (см. [9, гл. 2] и [16, с. 190, 253]). Из леммы Шварца (см., например, [9]) следует, что

$$\bigl|g'(0)\bigr| = \bigl|f'(w(0))w'(0)\bigr| \leqslant \bigl|f'(0)\bigr|.$$

Для данной аналитической функции f введем обозначение $S(f) = \{g : g \prec f\}$. В [2, теорема 1] показано, что если f, g — такие аналитические функции, что функция f однолистна в $\mathbb{D}$ и $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ принадлежит $S(f)$, то неравенство

$$B_g(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| r^n \leqslant 1$$

выполняется при $r_f = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}17157$. Равенство выполняется для функции Кебе $f(z) = z/(1-z)^2$. Наш следующий результат касается радиуса Бора для подчиненных функций, когда подчиняющая функция нечетна и однолистна в $\mathbb{D}$. В этом случае радиус Бора намного больше, и доказательство совершенно иное. В отличие от предыдущего случая (см. также [2, теорема 1]), а также классического случая (см. теорему 1), где для доказательства требуется оценка коэффициентов, для нечетной однолистной функции $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} z^{2k-1}$ точная оценка для $|a_{2k-1}|$ до сих пор не известна. Даже если мы используем известную оценку коэффициентов для класса нечетных однолистных функций, задача не станет проще.

Теорема 4 (см. [20, теорема 2])**.** *Если f, g — такие аналитические функции в $\mathbb{D}$, что*

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{2k-1} z^{2k-1}$$

— нечетная аналитическая в $\mathbb{D}$ *и*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \in S(f),$$

то неравенство $B_g(r) \leqslant 1$ *выполняется при* $r \leqslant r_*$, *где* $r_* = 0{,}554958$ *— наименьший положительный корень уравнения*

$$x^2 = (1-x)^2(1+x).$$

Как отмечено в [20, замечание 2], если в теореме 4 g — также нечетная аналитическая функция, то легко получить точное значение радиуса Бора из теоремы 4. Следующая задача, предложенная в [20], остается открытой.

Задача 2. Найти радиус Бора для класса нечетных функций f, удовлетворяющих условию $0 < |f(z)| \leqslant 1$ для всех $0 < |z| < 1$.

3. Усиление неравенства Бора И. Р. Каюмовым и С. Поннусами. Помимо приведенных выше результатов, И. Р. Каюмов и С. Поннусами (см. [22]) усилили классическую версию теоремы Бора в четырех различных формулировках. Приведем эти формулировки.

Теорема 5. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *— аналитическая функция в* $\mathbb{D}$, $|f(z)| \leqslant 1$ *в* $\mathbb{D}$ *и* S_r *— площадь образа круга* $|z| < r$ *при отображении функцией* f. *Тогда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k + \frac{16}{9}\left(\frac{S_r}{\pi}\right) \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad r \leqslant \frac{1}{3},$$

причем числа $1/3$ *и* $16/9$ *не могут быть улучшены. Кроме того,*

$$|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k + \frac{9}{8}\left(\frac{S_r}{\pi}\right) \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad r \leqslant \frac{1}{2},$$

причем константы $1/2$ *и* $9/8$ *не могут быть улучшены.*

Теорема 6. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *— аналитическая в круге* $\mathbb{D}$ *функция и* $|f(z)| \leqslant 1$ *в* $\mathbb{D}$. *Тогда*

$$|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k| + \frac{1}{2}|a_k|^2\right) r^k \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad r \leqslant \frac{1}{3},$$

причем числа $1/3$ *и* $1/2$ *не могут быть улучшены.*

Теорема 7. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *— аналитическая функция в круге* $\mathbb{D}$ *и* $|f(z)| \leqslant 1$ *в* $\mathbb{D}$. *Тогда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k + \bigl|f(z) - a_0\bigr|^2 \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad r \leqslant \frac{1}{3},$$

причем число $1/3$ *не может быть улучшено.*

Теорема 8. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *— аналитическая в круге* $\mathbb{D}$ *функция и* $|f(z)| \leqslant 1$ *в* $\mathbb{D}$. *Тогда*

$$|f(z)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad r \leqslant \sqrt{\frac{11}{27}},$$

и это число не может быть улучшено.

Понятие радиуса Бора, первоначально определенное для аналитических функций из $\mathbb{D}$ в $\mathbb{D}$, было распространено некоторыми авторами для отображений из $\mathbb{D}$ на некоторые области Ω из $\mathbb{D}$ (см. [2, 3, 7]).

4. Радиус Бора—Рогозинского для аналитических функций. Помимо радиуса Бора используется также понятие радиуса Рогозинского (см. [24, 28, 29]), который определяется следующим образом. Если $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — аналитическая функция в круге $\mathbb{D}$, удовлетворяющая неравенству $|f(z)| < 1$ в $\mathbb{D}$, то для каждого $N \geqslant 1$ имеем $|S_N(z)| < 1$ в круге $|z| < 1/2$, и эта оценка точна, где S_N — частичные суммы разложения функции f:

$$S_N(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^k.$$

И. Р. Каюмов и С. Поннусами (см. [22]) ввели новую величину, которую назвали суммой Бора—Рогозинского $R_N^f(z)$ функции f:

$$R_N^f(z) := |f(z)| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| r^k, \quad |z| = r.$$

Заметим, что при $N = 1$ эта величина связана с классической суммой Бора, в которой $f(0)$ заменяется на $f(z)$. Очевидно, что

$$|S_N(z)| = \left| f(z) - \sum_{k=N}^{\infty} a_k z^k \right| \leqslant R_N^f(z).$$

Таким образом, оценка радиуса Бора для $R_N^f(z)$ вытекает из оценки радиуса Рогозинского для ограниченных аналитических функций. Следовательно, сумма Бора—Рогозинского связана с суммой Рогозинского. Как и в классической ситуации радиуса Бора, естественно определить радиус Бора—Рогозинского. Приведем несколько основных результатов статьи [22], которые связывают эти радиусы.

Теорема 9. *Пусть $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — аналитическая в круге $\mathbb{D}$ функция и $|f(z)| < 1$ в $\mathbb{D}$. Тогда*

$$|f(z)| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| r^k \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad r \leqslant R_N,$$

где R_N — положительный корень уравнения $\psi_N(r) = 0$, $\psi_N(r) = 2(1+r)r^N - (1-r)^2$. Радиус R_N является наилучшим возможным. Более того,

$$|f(z)|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| r^k \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad r \leqslant R_N',$$

где R_N' — положительный корень уравнения $(1+r)r^N - (1-r)^2 = 0$. Радиус R_N' является наилучшим возможным.

Из принципа максимума следует, что радиус Бора—Рогозинского всегда меньше или равен радиусу Бора. Очевидно, что радиус Рогозинского всегда больше или равен радиусу Бора—Рогозинского.

Заметим, что R_N и R_N' в теореме 9 оба стремятся к 1, когда $N \to \infty$, поэтому значение радиуса Бора—Рогозинского в обоих случаях стремится к 1 при $N \to \infty$. Заметим, что $R_1 = \sqrt{5} - 2$ — корень уравнения

$$\psi_1(r) = 2(1+r)r - (1-r)^2 = -1 + 4r + r^2 = 0,$$

и мы получаем, что $R_1' = 1/3$. Таким образом мы можем сформулировать следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *— аналитическая в круге* $\mathbb{D}$ *функция и* $|f(z)| < 1$ *в* $\mathbb{D}$. *Тогда*

$$|f(z)| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad r \leqslant \sqrt{5} - 2 \approx 0{,}236068,$$

и значение радиуса r *не может быть больше, чем* $\sqrt{5} - 2$. *Более того,*

$$|f(z)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad r \leqslant \frac{1}{3},$$

и значение радиуса r *не может быть больше, чем* $1/3$.

5. Усиление теоремы 5. Наша главная цель — усилить теорему 5. Справедлива следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *— аналитическая в круге* $\mathbb{D}$ *функция,* $|f(z)| \leqslant 1$ *в* $\mathbb{D}$ *и* S_r *— площадь образа круга* $|z| < r$ *при отображении функцией* f. *Тогда*

$$M(r) := \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k + \frac{16}{9} \left(\frac{S_r}{\pi - S_r} \right) \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad r \leqslant \frac{1}{3}, \tag{2}$$

и число $16/9$ *не может быть улучшено.*

Для доказательства теоремы 10 нам нужны следующие леммы.

Лемма 1 (см. [20, лемма 2])**.** *Пусть* $|b_0| < 1$ *и* $0 < R \leqslant 1$. *Если* $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *— аналитическая функция и* $|g(z)| \leqslant 1$ *в* $\mathbb{D}$. *Тогда выполняется точное неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 R^{pk} \leqslant R^p \frac{(1 - |b_0|^2)^2}{1 - |b_0|^2 R^p}. \tag{3}$$

Лемма 2 (см. [22, лемма 1])**.** *Пусть функция* $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *аналитична в* $\mathbb{D}$, $|g(z)| < 1$ *в* $\mathbb{D}$ *и* S_r *— площадь образа круга* $|z| < r$ *при отображении функцией* g. *Тогда выполняется точное неравенство*

$$\frac{S_r}{\pi} := \sum_{k=1}^{\infty} k |b_k|^2 r^{2k} \leqslant r^2 \frac{(1 - |b_0|^2)^2}{(1 - |b_0|^2 r^2)^2} \quad \textit{при} \quad 0 < r \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Замечание 1. Как показывает пример функции $g(z) = z^n$, $n \geqslant 2$, для функций, не являющихся однолистными, лемма 1, вообще говоря, не верна при $r > 1/\sqrt{2}$.

Лемма 3. *Пусть* $p \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant m \leqslant p$ *и функция* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{pk+m} z^{pk+m}$ *аналитична в* $\mathbb{D}$ *и* $|f(z)| < 1$ *в* $\mathbb{D}$. *Тогда выполняются неравенства*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk+m}| r^{pk} \leqslant \begin{cases} A(r) := r^p \dfrac{1 - |a_m|^2}{1 - r^p |a_m|} & \textit{при } |a_m| \geqslant r, \\[2ex] B(r) := r^p \dfrac{\sqrt{1 - |a_m|^2}}{\sqrt{1 - r^{2p}}} & \textit{при } |a_m| < r. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство этой леммы следует из доказательства теоремы 1 из [21] (см. также [20, доказательство теоремы 1] в случае $m = 0$). Однако для удобства читателя мы представим некоторые детали. Во-первых, заметим, что для функции f имеет место представление $f(z) = z^m g(z^p)$, где $|g(z)| \leqslant 1$ в $\mathbb{D}$ и $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ аналитична в $\mathbb{D}$, $b_k = a_{pk+m}$. Пусть $|b_0| = a$. Выберем такое $\rho > 1$, что $\rho r \leqslant 1$. Тогда из неравенства Коши—Шварца и (3) при R, замененным на ρr, следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| r^{pk} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \rho^{pk} r^{pk}} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-pk} r^{pk}} \leqslant \frac{r^p(1-a^2)}{\sqrt{1-a^2 r^p \rho^p}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^{-p} r^p}} \tag{6}$$

по лемме 1. Рассмотрим случаи $a \geqslant r^p$ и $a < r^p$ отдельно.

Если $a \geqslant r^p$, то в (6) можно положить $\rho = 1/\sqrt[p]{a}$. С другой стороны, если $a < r^p$, то в (6) можно положить $\rho = 1/r$. Имеем оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| r^{pk} \leqslant \begin{cases} r^p \dfrac{(1-a^2)}{1-r^p a}, & a \geqslant r^p, \\ r^p \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-r^{2p}}}, & a < r^p. \end{cases}$$

Искомые неравенства (5) получаются при подстановке $b_k = a_{pk+m}$ и $a = |a_m|$. □

Доказательство теоремы 10. Рассмотрим функцию $M(r)$, определяемую выражением (2). Так как $M(r)$ — возрастающая по r функция, достаточно доказать неравенство (2) при $r = 1/3$. Пусть $r = 1/3$. Кроме того, при $m = 0$ и $p = 1$ из леммы 3 получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \leqslant \Phi(r) = \begin{cases} A(r) := r\dfrac{1-|a_0|^2}{1-r|a_0|}, & |a_0| \geqslant r, \\ B(r) := r\dfrac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{\sqrt{1-r^2}}, & |a_0| < r. \end{cases} \tag{7}$$

В частности,

$$\Phi\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{cases} A\left(\dfrac{1}{3}\right) := \dfrac{1-|a_0|^2}{3-|a_0|}, & |a_0| \geqslant \dfrac{1}{3}, \\ B\left(\dfrac{1}{3}\right) := \dfrac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{\sqrt{8}}, & |a_0| < \dfrac{1}{3}. \end{cases} \tag{8}$$

Далее, из леммы 2 находим, что

$$\frac{S_r}{\pi} \leqslant \frac{r^2(1-|a_0|^2)^2}{(1-|a_0|^2 r^2)^2} \quad \text{при} \quad 0 < r \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}};$$

следовательно

$$1 - \frac{S_r}{\pi} \geqslant \frac{(1-r^2)(1-r^2|a_0|^4)}{(1-|a_0|^2 r^2)^2}.$$

Отсюда мы получаем, что

$$\frac{S_r}{\pi - S_r} \leqslant \frac{r^2(1-|a_0|^2)^2}{(1-r^2)(1-r^2|a_0|^4)} \quad \text{при} \quad 0 < r \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{9}$$

В случае $|a_0| \geqslant 1/3$, используя (8) и (9) при $r = 1/3$, имеем

$$M(r) \leqslant |a_0| + A\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{16}{9}\left(\frac{S_{1/3}}{\pi - S_{1/3}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \big(1-|a_0|\big)\left[1 - \frac{1+|a_0|}{3-|a_0|} - \frac{2(1+|a_0|)(1-|a_0|^2)}{9-|a_0|^4}\right] \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \frac{2(1-|a_0|)^3(6+|a_0|+|a_0|^3)}{(3-|a_0|)(9-|a_0|^4)}.$$

Последнее означает, очевидно, что $M(r) \leqslant 1$ при $|a_0| \in [1/3, 1]$. Таким образом, неравенство (2) выполняется при $|a_0| \in [1/3, 1]$.

Далее рассмотрим случай $|a_0| < 1/3$. Еще раз используя (8) и (9) при $r = 1/3$, получаем, что

$$M(r) \leqslant |a_0| + B(1/3) + \frac{16}{9}\left(\frac{S_{1/3}}{\pi - S_{1/3}}\right) \leqslant \frac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{\sqrt{8}} + \left(|a_0| + \frac{2(1-|a_0|^2)^2}{9-|a_0|^4}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{\sqrt{8}} + \frac{2+9|a_0|-4|a_0|^2+2|a_0|^4-|a_0|^5}{9-|a_0|^4} \leqslant \frac{1}{\sqrt{8}} + \Psi(|a_0|),$$

где

$$\Psi(t) = \frac{2+9t-4t^2+2t^4-t^5}{9-t^4}, \quad t \in \left[0, \frac{1}{3}\right).$$

Легко видеть, что $\Psi(t)$ возрастает при $t \in [0, 1/3)$. Действительно, числитель выражения возрастает на $[0, 1/3)$, а знаменатель убывает на $[0, 1/3)$, поэтому максимум достигается при $t = 1/3$. Следовательно,

$$M(r) \leqslant \frac{1}{\sqrt{8}} + \Psi(1/3) = \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{139}{273} < 1,$$

поэтому неравенство (2) выполняется при $|a_0| \in [0, 1/3)$. □

Теорема 11. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *— аналитическая в* $\mathbb{D}$ *функция,* $|f(z)| \leqslant 1$ *в* $\mathbb{D}$ *и* S_r *— площадь образа круга* $|z| < r$ *при отображении функцией* f*. Тогда*

$$M_1(r) := |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k + \frac{9}{8}\left(\frac{S_r}{\pi - S_r}\right) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad r \leqslant \frac{1}{2}, \tag{10}$$

причем число $9/8$ *не может быть улучшено.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 10, сначала из (7) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \leqslant \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} A\left(\frac{1}{2}\right) := \dfrac{1-|a_0|^2}{2-|a_0|}, & |a_0| \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ B\left(\frac{1}{2}\right) := \dfrac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{\sqrt{3}}, & |a_0| < \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{11}$$

при $r \leqslant 1/2$. Кроме того, в силу (9), получим

$$\frac{S_{1/2}}{\pi - S_{1/2}} \leqslant \frac{4}{3}\frac{(1-|a_0|^2)^2}{4-|a_0|^4}. \tag{12}$$

Пусть $|a_0| \geqslant 1/2$. В этом случае, используя (11) и (12), получим, что

$$M_1(r) \leqslant |a_0|^2 + A\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{9}{8}\left(\frac{S_{1/2}}{\pi - S_{1/2}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \bigl(1 - |a_0|^2\bigr)\left[1 - \frac{1}{2 - |a_0|} - \frac{3}{2}\frac{(1 - |a_0|^2)}{4 - |a_0|^4}\right] \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \frac{\bigl(1 - |a_0|^2\bigr)\bigl(1 - |a_0|\bigr)^2\bigl(2 - |a_0| + 2|a_0|^2 + 2|a_0|^3|\bigr)}{2\bigl(2 - |a_0|\bigr)\bigl(4 - |a_0|^4\bigr)};$$

следовательно, $M_1(r) \leqslant 1$ при $|a_0| \in [1/2, 1]$.

Пусть теперь $|a_0| < 1/2$. Еще раз используя (11), (12) и доказательство теоремы 10, получаем, что $M_1(r) \leqslant \Psi_1(|a_0|)$, где

$$\Psi_1(t) = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{\sqrt{3}} + \frac{3 + 2t^2 + 3t^4 - 2t^6}{8 - 2t^4}.$$

Вычисления показывают, что $\Psi_1(t)$ на $[0, 1/2)$ имеет только одну стационарную точку при $t = 0{,}22558\ldots$ (локальный минимум), и поэтому максимум $\Psi(t)$ достигается при $t_0 = |a_0| = 1/2$ и равен

$$\Psi(t_0) = \frac{27}{28} < 1;$$

следовательно $M_1(r) \leqslant 1$ при $|a_0| \in [0, 1/2)$. Таким образом, неравенство (11) имеет место при $|a_0| \in [0, 1]$. □

6. Неравенство Бора для гармонических отображений. Большое количество задач, возникающих в механике жидкости, электростатике, теплопроводности и многих других задачах физики, имеют математическую интерпретацию в терминах уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, где Δ обозначает комплексный оператор Лапласа

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Таким образом, все эти физические задачи сводятся к решению уравнения в некоторой области D комплексной плоскости. Функция $u(x, y)$ обычно удовлетворяет некоторым граничным условиям на границе ∂D области D. Из основных свойств теории аналитических функций следует, что решение указанной выше задачи сводится к нахождению аналитической функции f в D, удовлетворяющей преобразованным граничным условиям на ∂D. Оказывается, решение этой задачи может быть значительно упрощено в выпуклых областях, таких как полуплоскости, диски, полосы и т. п. Большую часть обоснований можно найти в классической литературе.

Будем считать, что комплекснозначная гармоническая функция $f = u + iv$ определена на односвязной области D. Тогда f имеет канонический вид $f = h + \overline{g}$, где h и g аналитичны в D. Обобщение неравенства Бора для гармонических функций в единичном круге $\mathbb{D}$ со значениями в $\mathbb{D}$ было начато Абу Муханном в [2].

Теорема 12 (см. [2])**.** *Пусть*

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n z^n}$$

— комплекснозначная гармоническая функция в $\mathbb{D}$. Если $|f(z)| < 1$ в $\mathbb{D}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) r^n \leqslant \frac{2}{\pi} \approx 0{,}63662 \tag{13}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\, e^{i\mu} a_n + e^{-i\mu} b_n| r^n + |\operatorname{Re} e^{i\mu} a_0| \leqslant 1 \tag{14}$$

для $r \leqslant 1/3$ и любого вещественного μ. Равенство в (14) достигается для преобразования Мебиуса

$$\varphi(z) = \frac{z-a}{1-az}, \quad 0 < a < 1, \quad \textit{при } a \to 1.$$

В [2] приведен пример гармонической функции, показывающий, что неравенство (14) не выполняется, если $|\operatorname{Re} e^{i\mu} a_0|$ заменить на $|a_0|$.

Пусть D — ограниченное множество. Обозначим через $\overline{D}$ замыкание D и через $\overline{D}_{\min}$ наименьший замкнутый круг, содержащий $\overline{D}$.

Теорема 13 (см. [4, теорема 4.4]). *Пусть*

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n z^n}$$

— комплекснозначная гармоническая функция в $\mathbb{D}$. Если $f : \mathbb{D} \to D$ для некоторой ограниченной области D, то для $r \leqslant 1/3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(|a_n| + |b_n|\big) r^n \leqslant \frac{2}{\pi}\rho, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left|e^{i\mu} a_n + e^{-i\mu} b_n\right| r^n + \left|\operatorname{Re} e^{i\mu}(a_0 - w_0)\right| \leqslant \rho,$$

где ρ и w_0 — радиус и центр круга $\overline{D}_{\min}$ соответственно.

Значение $r = 1/3$ точное и достигается для аналитической однолистной функции f, действующей из $\mathbb{D}$ в D. В частности, если D — окружность радиуса $\rho > 0$ с центром в точке ρw_0, то $r = 1/3$ для функции Мёбиуса

$$\varphi(z) = e^{i\mu_0} \rho \left(\frac{z+a}{1+az} + |w_0|\right)$$

для некоторого $0 < a < 1$ и μ_0, удовлетворяющего равенству $w_0 = |w_0| e^{i\mu_0}$.

Для изложения результатов, связанных с радиусом Бора для гармонических отображений, нам понадобится следующее определение. Для $p \geqslant 1$ будем говорить, что число r_p является *p-радиусом Бора* для гармонической функции $f = h + \overline{g}$, определенной в единичном круге $\mathbb{D}$, где $g(0) = 0$, если r_p является наибольшим значением, при котором выполнено неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big(|a_k|^p + |b_k|^p\big)^{1/p} r^k \leqslant 1 \quad \text{при} \quad |z| = r \leqslant r_p.$$

Отметим, что все эти радиусы совпадают в аналитическом случае. Более того, они эквивалентны с учетом оценок

$$\max\big(|a_k|, |b_k|\big) \leqslant \big(|a_k|^p + |b_k|^p\big)^{1/p} \leqslant |a_k| + |b_k| \leqslant 2\max\big(|a_k|, |b_k|\big).$$

Заметим, что случай $\max(|a_k|, |b_k|)$ соответствует $p = \infty$. Этот подход был использован при получении следующего результата.

Теорема 14 (см. [21, Theorem 3]). *Пусть $f = h + \overline{g}$ — такое гармоническое отображение, определенное в $\mathbb{D}$, что $|f(z)| \leqslant 1$ в $\mathbb{D}$, где*

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k. \tag{15}$$

Тогда для любых $p \geqslant 1$ и $r < 1$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(|a_k|^p + |b_k|^p\big)^{1/p} r^k \leqslant \max\left\{2^{(1/p)-1/2}, 1\right\} \sqrt{1 - |a_0|^2}\, \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

В частности, из теоремы 14 при $p=1$ следует, что $r \leqslant 1/3$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big(|a_k|+|b_k|\big)r^k \leqslant \frac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Напомним (см. (13)), что это неравенство было первоначально получено с $2/\pi \approx 0{,}63662$ вместо $(\sqrt{1-|a_0|^2})/2$. Это означает, что приведенное выше неравенство является значительным улучшением по сравнению с результатом Абу Муханна [2].

Заметим, что $\max\big\{2^{(1/p)-1/2}, 1\big\}$ равен 1 при $p \geqslant 2$ и равен $2^{(1/p)-1/2}$ при $p \in [1,2]$. Это наблюдение для $a_0 = 0$ в теореме 14 дает следующий интересный результат.

Следствие 4 (см. [21]). *Пусть $f = h + \overline{g}$ — такое гармоническое отображение круга $\mathbb{D}$, что $|f(z)| \leqslant 1$ в $\mathbb{D}$, где $h(z)$ и $g(z)$ такие же, как в (15). Если $p \geqslant 2$, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big(|a_k|^p+|b_k|^p\big)^{1/p}r^k \leqslant 1 \quad \text{при} \quad r \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Константа $1/\sqrt{2}$ точная.

Другие результаты, замечания и комментарии можно найти в [21]. Сформулируем некоторые результаты, связанные с радиусом Бора для некоторого класса гармонических отображений, полученные И. Р. Каюмовым и др. в [23].

Теорема 15 (см. [23, теорема 1]). *Пусть*

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$$

— такое гармоническое отображение круга $\mathbb{D}$, что $|g'(z)| \leqslant |h'(z)|$ в $\mathbb{D}$, h — ограниченная в $\mathbb{D}$ функция. Тогда

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty}\big(|a_n|+|b_n|\big)r^n \leqslant ||h||_\infty \quad \text{при} \quad r \leqslant \frac{1}{5}, \tag{16}$$

причем константа $1/5$ точная. Кроме того, если $a_0 = 0$ или $|a_0|$ в (16) можно заменить на $|a_0|^2$, то константа $1/5$ может быть заменена на $1/3$, которая тоже точна.

В более общем смысле, теорема 15 может быть расширена для гармонических функций f, у которых аналитическая часть не ограничена. Например, справедлива следующая теорема.

Теорема 16 (см. [23, теорема 2]). *Пусть*

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$$

— такое гармоническое отображение единичного круга $\mathbb{D}$, что $|g'(z)| \leqslant |h'(z)|$ в $\mathbb{D}$, где h удовлетворяет условию $\operatorname{Re} h(z) \leqslant 1$ в $\mathbb{D}$ и $h(0) = a_0 > 0$. Тогда

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(|a_n|+|b_n|\big)r^n \leqslant 1 \quad \text{при} \quad r \leqslant \frac{1}{5},$$

причем константа $1/5$ точная.

Доказательства теорем 15 и 16 опираются на неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2 r^n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 r^n \quad \text{при} \quad |z| = r < 1,$$

которое справедливо, когда $|g'(z)| \leqslant |h'(z)|$ в $\mathbb{D}$.

С другой стороны, когда h и g ограничены и $h(0) = 0$, определение точного значения радиуса Бора для гармонической функции $f = h + \overline{g}$ требует нового подхода.

Теорема 17 (см. [23, теорема 3]). *Пусть*

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$$

— гармоническая функция, определенная в круге $\mathbb{D}$*, функции* h *и* g *ограничены в* $\mathbb{D}$*. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(|a_n| + |b_n|\big) r^n \leqslant \max\big\{\|h\|_\infty, \|g\|_\infty\big\} \quad \text{при} \quad r \leqslant \sqrt{\frac{7}{32}},$$

причем константа $\sqrt{7/32}$ *точная.*

Как и симметричном случае аналитических функций (см. [6,20,21]), в [23] получен следующий аналогичный результат для гармонических функций.

Теорема 18 (см. [23, теорема 4]). *Пусть* $p \geqslant 2$*. Предположим, что*

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{pn+1} + \overline{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{pn+1}}$$

— гармоническая p*-симметричная функция, определенная в круге* $\mathbb{D}$*, функции* h *и* g *ограниченны в* $\mathbb{D}$*. Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(|a_n| + |b_n|\big) r^{pn+1} \leqslant \max\big\{\|h\|_\infty, \|g\|_\infty\big\} \quad \text{при} \quad r \leqslant \frac{1}{2},$$

причем константа $1/2$ *является точной.*

В [23] получен ряд других результатов о радиусе Бора для квазиконформных гармонических отображений. Кроме того, в этой статье можно также найти открытые проблемы и гипотезы о радиусе Бора.

7. Радиус Бора для гармонических функций Блоха. В этом разделе рассмотрена задача нахождения радиуса Бора для пространства ограниченных гармонических функций Блоха.

Гармоническая функция $f = h + \overline{g}$, определенная в круге $\mathbb{D}$, называется *гармонической функцией Блоха*, если

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \big(1 - |z|^2\big)\Lambda_f(z) < +\infty,$$

где $\Lambda_f(z) = |f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)| = |h'(z)| + |g'(z)|$. Пространство всех гармонических функций Блоха обозначается $\mathcal{B}_H$; оно является комплексным банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|$, заданной соотношением (см. [15])

$$\|f\|_{\mathcal{B}_H} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \big(1 - |z|^2\big)\Lambda_f(z);$$

эту норму называют гармонической нормой Блоха. В последнее время пространство $\mathcal{B}_H$ вместе с его различными обобщениями были широко исследованы (см., например, [17–19]).

Очевидно, что это определение совпадает с классическим пространством Блоха $\mathcal{B}$, когда f является аналитической в $\mathbb{D}$ функцией. Отметим замечательный обзор [8] по этой теме и монографию [26].

Сначала сформулируем наш результат для аналитического случая.

Теорема 19. *Пусть* $f \in \mathcal{B}$ *и* $\|f\|_{\mathcal{B}} \leqslant 1$*. Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leqslant 1 \quad \text{при} \quad r \leqslant R = 0{,}55356\ldots, \tag{17}$$

где R *— положительный корень уравнения*

$$1 - R + R\log(1 - R) = 0.$$

Число R *не может быть заменено на число, большее, чем* $0{,}624162\ldots$*.*

Сформулируем теперь гармонический аналог теоремы 19.

Теорема 20. *Пусть* $f = h + \overline{g}$ — *гармоническая в* $\mathbb{D}$ *функция,* $g(0) = 0$ *и* $\|f\|_{\mathcal{B}_H} \leqslant 1$*, где*

$$\|f\|_{\mathcal{B}_H} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \big(1-|z|^2\big)\big(|h'(z)| + |g'(z)|\big).$$

Тогда

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} r^n \leqslant 1 \quad \text{при} \quad r \leqslant R = 0{,}55356\ldots. \tag{18}$$

Число $0{,}55356\ldots$ *не может быть заменено на число большее, чем* $0{,}624162\ldots$.

Как отмечалось ранее, если заменить первое слагаемое $|a_0|$ в (17) и (18) на $|a_0|^2$, радиус Бора можно будет определить в усовершенствованной форме. Совсем недавно Лиу и Поннусами (см. [25]) обобщили полученные результаты для ν-отображений Блоха. Для более подробного исследования этого вопроса читатель может обратиться к [25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голузин Г. М.* О подчиненных однолистных функциях// Тр. МИАН СССР. — М.: Изд-во АН СССР, 1951. — *38*. — С. 68–71.
2. *Abu-Muhanna Y.* Bohr's phenomenon in subordination and bounded harmonic classes// Complex Var. Elliptic Equ. — 2010. — *55*, № 11. — C. 1071–1078.
3. *Abu-Muhanna Y., Ali R. M.* Bohr's phenomenon for analytic functions into the exterior of a compact convex body// J. Math. Anal. Appl. — 2011. — *379*, № 2. — C. 512–517.
4. *Abu-Muhanna Y., Ali R. M., Ng Z. C., Hasni S. F. M.* Bohr radius for subordinating families of analytic functions and bounded harmonic mappings// J. Math. Anal. Appl. — 2014. — *420*, № 1.— C. 124–136.
5. *Ali R. M., Abu-Muhanna Y., Ponnusamy S.* On the Bohr inequality// в сб.: Progress in Approximation Theory and Applicable Complex Analysis/ Springer Optimization and Its Applications. — 2016. — *117*. — C. 265–295.
6. *Ali R. M., Barnard R. W., Solynin A. Yu.* A note on the Bohr's phenomenon for power series// J. Math. Anal. Appl. — 2017. — *449*, № 1. — C. 154–167.
7. *Aizenberg L.* Generalization of results about the Bohr radius for power series// Stud. Math. — 2007. — *180*. — C. 161–168.
8. *Anderson J. M., Clunie J. G., Pommerenke C.* On Bloch functions and normal functions// J. Reine Angew. Math. — 1974. — *270*. — C. 12–37.
9. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Schwarz–Pick type inequalities. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser-Verlag, 2009.
10. *Bénéteau C., Dahlner A., Khavinson D.* Remarks on the Bohr phenomenon// Comput. Methods Funct. Theory. — 2004. — *4*, № 1.— C. 1–19.
11. *Boas H. P.* Majorant series// Korean Math. Soc. — 2000. — *37*, № 2. — C. 321–337.
12. *Boas H. P., Khavinson D.* Bohr's power series theorem in several variables// Proc. Am. Math. Soc. — 1997. — *125*, № 10. — C. 2975–2979.
13. *Boas H. P., Khavinson D.* Vita: Friedrich Wilhelm Wiener// Math. Intelligencer. — 2000. — *22*. — C. 73–75.
14. *Bohr H.* A theorem concerning power series// Proc. London Math. Soc. — 1914. — *13*, № 2. — C. 1–5.
15. *Colonna F.* The Bloch constant of bounded harmonic mappings// Indiana Univ. Math. J. — 1989. — *38*. — C. 829–840.
16. *Duren P. L.* Univalent Functions. — New York: Springer-Verlag, 1983.
17. *Chen Sh., Ponnusamy S., Wang X.* Landau theorem and Marden constant for harmonic ν-bloch mappings// Bull. Austr. Math. Soc. — 2011. — *84*. — C. 19–32.
18. *Chen Sh., Ponnusamy S., Wang X.* Coefficient estimates and Landau–Bloch theorem for planar harmonic mappings// Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. — 2011. — *34*, № 2. — C. 255–265.
19. *Chen Sh., Ponnusamy S., Wang X.* Landau–Bloch constants for functions in α-Bloch spaces and Hardy spaces// Complex Anal. Oper. Theory. — 2012. — *6*. — C. 1025–1036.
20. *Kayumov I. R., Ponnusamy S.* Bohr inequality for odd analytic functions// Comput. Methods Funct. Theory. — 2017. — *17*, № 4. — C. 679–688.
21. *Kayumov I. R., Ponnusamy S.* Bohr's inequality for analytic functions $\sum\limits_k b_k z^{kp+m}$ and harmonic functions/ e-print `arXiv:1708.05578`

22. *Kayumov I. R., Ponnusamy S.* Bohr–Rogosinski radius for analytic functions/ e-print arXiv:1708.05585
23. *Kayumov I. R., Ponnusamy S., Shakirov N.* Bohr radius for locally univalent harmonic mappings// Math. Nachr. — 2018. — *291*, № 11-12. — С. 1757–1768.
24. *Landau E., Gaier D.* Darstellung und Begrüundung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. — Berlin: Springer-Verlag, 1986.
25. *Liu G., Ponnusamy S.* On harmonic ν-Bloch and ν-Bloch-type mappings/ e-print arXiv:1707.01570
26. *Pommerenke C.* Boundary Behaviour of Conformal Maps. — New York: Springer, 1992.
27. *Popescu G.* Multivariable Bohr inequalities// Trans. Am. Math. Soc. — 2007. — *359*, № 11. — С. 5283–5317.
28. *Rogosinski W.* Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten// Math. Z.. — 1923. — *17*. — С. 260–276.
29. *Schur I., Szegő G.* Über die Abschnitte einer im Einheitskreise beschränkten Potenzreihe// Sitz.-Ber. Preuss. Acad. Wiss. Berlin Phys.-Math. Kl. — 1925. — С. 545–560.

А. А. Исмагилов
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: amir.ismagilov@mail.ru

А. В. Каюмова
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: anvas@inbox.ru

И. Р. Каюмов
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: Ilgiz.Kaymov@kpfu.ru

С. Поннусами
Индийский институт технологий, Мадрас, Индия
E-mail: samy@iitm.ac.in

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 153 (2018). С. 84–93

УДК 517.927.25

К ФОРМУЛЕ ДЭВИСА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

© 2018 г. **Х. К. ИШКИН, А. В. РЕЗБАЕВ**

Аннотация. В статье изучаются условия, при которых спектр оператора Штурма—Лиувилля на некоторой гладкой кривой локализуется около счетного числа лучей. В случае, когда потенциал кусочно аналитичен, найдена асимптотика собственных чисел каждой серии, локализующейся около соответствующего луча. Полученный результат позволяет обобщить известную формулу об асимптотике функции распределения спектра, которая была установлена Б. Дэвисом в случае конечного числа лучей локализации.

Ключевые слова: несамосопряженный дифференциальный оператор, спектральная устойчивость, локализация спектра.

AMS Subject Classification: 34B24, 47A10

1. Введение. Пусть γ — кривая с параметризацией $z(x) = x + is(x)$, $x \in [0,1]$, где функция s кусочно непрерывно дифференцируема, т.е. существует такое разбиение $0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$, что $s \in C^{(1)}[x_{m-1}, x_m]$. Кроме того, пусть s' не убывает, $s(0) = s(1) = 0$, $s'(0) < 0 < s'(1)$. Введем обозначения $\alpha_0 = \operatorname{arctg} s'(0)$, $\alpha_1 = \operatorname{arctg} s'(1)$. Тогда

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < 0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Для любой функции $y \in AC(\gamma)$, т.е. абсолютно непрерывной на кривой γ (относительно меры $|dz|$), функцию

$$y'_\gamma(z) := \lim_{\gamma \ni \zeta \to z} \frac{y(\zeta) - y(z)}{\zeta - z},$$

определенную почти всюду на γ, будем называть *производной y вдоль γ*. Аналогично определяем $y''_\gamma(z)$ и т. д. (в предположении что эти объекты существуют). Всюду далее, если не возникает путаница, значок γ в $y_\gamma^{(n)}$ будем опускать.

Определение 1. Пусть $q \in L^1(\gamma)$. *Оператором Штурма–Лиувилля на кривой* γ будем называть оператор L_γ с областью определения

$$D(L_\gamma) = \Big\{ y \in L^2(\gamma): \ y' \in AC(\gamma), \ -y'' + qy \in L^2(\gamma), \ y(0) = y(1) = 0 \Big\},$$

действующий в пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу

$$L_\gamma y = -y'' + qy.$$

Точно так же, как в случае $\gamma = [0,1]$ (см., например, [8, § 17, теорема 1]), доказывается, что оператор L_γ плотно определен. Отсюда, поскольку спектр L_γ дискретен (см. [1, лемма 2]), то оператор L_γ замкнут (см. [11, лемма 1.1.2]).

Определение 2. Будем говорить, что спектр T_0 *локализуется около лучей* $\arg \lambda = \alpha_k$ ($k = \overline{1,m}$), если для любого $\varepsilon > 0$

$$N(T_0, r) \sim \sum_{k=1}^{m} N\big(T_0, \alpha_k - \varepsilon, \alpha_k + \varepsilon, r\big), \quad r \to +\infty, \tag{2}$$

где $N(T,\eta,\zeta,r)$ и $N(T,r)$ — число собственных значений оператора T соответственно в секторе $\{\eta<\arg\lambda<\zeta,\ |\lambda|<r\}$ и в круге $\{|\lambda|<r\}$.

Используя условие (1), легко показать, что если $s'(0)$ и $s'(1)$ положительны, то все собственные значения оператора L_γ, за исключением конечного числа, лежат в угле $-2\alpha_1<\arg\lambda<-2\alpha_0$ (см. [1, лемма 2]). В [2, 3] показано, что спектр оператора L_γ локализуется (в смысле определения 2) около луча $\arg\lambda=0$ тогда и только тогда, когда функция q почти всюду на γ совпадает с угловым граничным значением (см. [9, гл. I, § 5]) некоторой функции Q, удовлетворяющей следующим условиям:

(TM1) Q мероморфна в области Ω, ограниченной кривой γ и отрезком $[0,1]$; ее полюсы могут скапливаться только к отрезку $[0,1]$, в окрестности каждого полюса z_k справедливо разложение

$$Q(z)=\frac{m_k(m_k-1)}{(z-z_k)^2}+\sum_{i=0}^{m_k-1}c_{ki}(z-z_k)^{2i}+(z-z_k)^{2m_k-1}r(z), \tag{3}$$

где $m_k\in\mathbb{N}$, c_{ki} — некоторые числа, функция $r(z)$ голоморфна в некоторой окрестности точки z_k;

(TM2) Q принадлежит пространству Смирнова (см. [9, гл. II, § 7]) $E_1(\omega)$ для любой области $\omega\subset\Omega$, не содержащей полюсов Q и такой, что $\overline{\omega}\cap[0,1]=\varnothing$.

Функцию q, удовлетворяющую в области Ω указанным условиям, для краткости будем называть *безмонодромной* в этой области. Из сказанного следует, что для оператора L_γ с потенциалом q, безмонодромным в Ω, справедлива формула

$$N(L_\gamma,r)\sim\frac{\sqrt{r}}{\pi},\quad r\to+\infty. \tag{4}$$

Существенность условия безмонодромности q во всей области Ω в некоторой степени подтверждается следующим примером. Если

$$q(z)=\frac{k(k+1)}{(z-a)^2},\quad a\in\Omega,\quad k\notin\mathbb{Z},$$

то собственные числа оператора L_γ распадаются на две серии (см. [1]):

$$\lambda_k^{(1)}\sim\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2,\quad \lambda_k^{(2)}\sim\left(\frac{\pi k}{1-a}\right)^2,\quad k\to+\infty, \tag{5}$$

так что

$$N(L_\gamma,r)\sim\frac{|P|}{\pi}\sqrt{r},\quad r\to+\infty, \tag{6}$$

где $|P|$ означает длину ломаной P, составленной из отрезков $[0,a]$ и $[a,1]$.

Из результатов работы Дэвиса [12] следует, что если q постоянна на дугах $\gamma_m=\{z=z(x),\ x_{m-1}<x<x_m\}$, $0=x_0<x_1<\dots<x_N=1$, так что в каждой точке

$$a_m=z(x_m),\quad m=\overline{1,N-1}, \tag{7}$$

терпит скачок, то спектр оператора L_γ разбивается на N серий $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^\infty$ $(m=\overline{1,N})$, имеющих асимптотику

$$\lambda_{mn}\sim\left(\frac{\pi n}{a_m-a_{m-1}}\right)^2,\quad n\to\infty. \tag{8}$$

Отсюда, в частности, следует формула (6), где P — ломаная с вершинами в точках $0,a_1,\dots,a_{N-1},1$. Отметим, что в рассматриваемом случае характеристическая функция спектра

$$\Phi(\lambda):=\varphi(1,\lambda), \tag{9}$$

где $\varphi(z,\lambda)$ — решение уравнения

$$-y''+qy=\lambda^2y, \tag{10}$$

удовлетворяющее условиям

$$\varphi(0,\lambda)=0,\quad \varphi'(0,\lambda)=1, \tag{11}$$

является квазиполиномом, поэтому формула (8) следует из результатов работы В. Б. Лидского и В. А. Садовничего (см. [6]), в которой для класса функций K, включающих в себя квазиполиномы, были получены формулы регуляризованных следов.

Цель настоящей работы — обобщение формулы (8) в двух направлениях:

(1) для любого разбиения

$$\gamma = \bigcup_{m=1}^{N} \gamma_m \ (N < \infty) \tag{12}$$

найти наиболее широкий класс функций $q_m = q\Big|_{\gamma_m}$, для которых верна формула (8);

(2) найти условия на функцию q, при которых спектр оператора L_γ разбивается на счетное число серий $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ $(m = 1, 2, \dots)$, для которых имеет место формула вида (8).

Основной результат работы составляют теоремы 1 и 2. В теореме 1 утверждается, что для справедливости формулы (8) достаточно, чтобы функция q_m была безмонодромна в области Ω_m $(m = \overline{1, N})$, ограниченной отрезком $[a_{m-1}, a_m]$ и дугой γ_m, имела там конечное число полюсов и удовлетворяла некоторым дополнительным условиям регулярности около границы Ω_m так, чтобы характеристическая функция Φ была функцией вполне регулярного роста (см. [4, гл. III]). В теореме 2 показано, что если каждая функция q_m удовлетворяет условиям теоремы 1 и при достаточно больших m голоморфна в области Ω_m, так что $q_m' \in E_2(\Omega_m)$ и функция q в каждой точке a_m терпит скачок, то формула (8) верна и при $N = \infty$, причем оценка остаточных членов в (8) равномерна по m, откуда будет следовать формула (6).

2. Формулировка основных результатов. Сначала договоримся о некоторых терминах и обозначениях.

1. Если G — односвязная область со спрямляемой границей, то
   (a) $M(G)$ — множество таких мероморфных в G функций q, что любое решение уравнения (10) при всех значениях λ однозначно в G (как известно [13], $q \in M(G)$ тогда и только тогда, когда функция q мероморфна в области G и в окрестности каждого полюса представляется в виде (3));
   (b) $M_0(G)$ — множество q из $M(G)$ с конечным числом полюсов;
   (c) $M_1(G)$ — множество q из $M_0(G)$, для которых $\tilde{q}$ (регулярная часть q) принадлежит пространству Смирнова $E_1(G)$.
2. Если a_m — точки на кривой γ, определяемые по формуле (7), то $\mathcal{M}(\gamma)$ — $2N$-угольник с вершинами в точках $\pm i(2A_m - 1)$, $m = \overline{0, N}$.
3. I — сопряженная диаграмма (см. [4, гл. I, § 20]) функции Φ (см. (9)).
4. Если P – ломаная с вершинами в точках 0, (7) и 1, $q_P \in L^1(P)$, то L_P — оператор, который определяется так же, как и L_γ при $\gamma = P$, $q = q_P$. Соответственно Φ_P — характеристическая функция спектра оператора L_P, I_P — сопряженная диаграмма функции Φ_P.
5. Если функция f кусочно непрерывна на кривой γ и $z_0 = z(t_0) \in \gamma$, то

$$\Delta f(z_0) := \begin{cases} f(0), & t_0 = 0, \\ f\big(z(t_0+0)\big) - f\big(z(t_0-0)\big), & 0 < t_0 < 1, \\ -f(1), & t_0 = 1. \end{cases} \tag{13}$$

6. Если β — незамкнутая кривая, то $\overset{\circ}{\beta} = \beta \backslash \{\text{концы } \beta\}$.

Всюду далее будем считать, что $\Omega_m \neq \varnothing$ при всех $m = \overline{1, N}$, т.е. $\mathcal{M}(\gamma)$ — невырожденный $2N$-угольник.

Как известно (см. [9, гл. III, п. 6.3]), если функция f принадлежит $E_1(G)$, где G — односвязная область со спрямляемой границей ∂G, то почти в каждой точке (относительно дуговой меры) границы ∂G функция f имеет угловое граничное значение. Отсюда, согласно определению класса $M_1(G)$, любая функция из $M_1(G)$ также имеет угловые граничные значения почти всюду на ∂G.

Если функция f принадлежит $E_1(G)$, то для некоторой дуги $\Gamma \subset \partial G$ запись $f \in W_p^m(\Gamma)$ будет означать, что функция f_Γ — угловое граничное значение f на Γ — принадлежит пространству Соболева $W_p^m(\Gamma)$.

Теорема 1. *При некотором разбиении* (12) *пусть* $q(z) = q_m(z)$, $z \in \overset{\circ}{\gamma}_m$, *где* $q_m \in L^1(\gamma_m)$. *Если* q_m *допускает такое мероморфное продолжение в область* Ω_m, *что*

$$q_m \in M_1(\Omega_m), \quad m = \overline{1, N}, \tag{14}$$

то имеет место равенство

$$\sigma(L_\gamma) = \sigma(L_P), \tag{15}$$

где оператор L_P *определяется по п. 4 с потенциалом* q_P, *равным почти всюду на* P *угловому граничному значению* q.

Если дополнительно к условиям (14)

$$q_m \in W_1^1([a_{m-1}, a_m]), \quad m = \overline{1, N}, \tag{16}$$

и

$$\Delta q(a_m) \neq 0, \quad m = \overline{1, N-1}, \tag{17}$$

то для спектра оператора L_γ *справедливо представление*

$$\sigma(L_\gamma) = \bigcup_{m=1}^{N} \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn}, \tag{18}$$

$$\lambda_{mn} \sim \left(\frac{\pi n}{d_m} + c_m + O\left(n^{-1}\right)\right)^2, \qquad m = \overline{2, N-1}, \quad n \to +\infty, \tag{19}$$

$$\lambda_{mn} \sim \left(\frac{\pi n}{d_m} + \frac{\sigma_m \ln n}{2d_m} + c_m + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^2, \quad m = 1, N, \quad n \to +\infty, \tag{20}$$

где $d_m = a_m - a_{m-1}$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_N = -1$, *коэффициенты* c_m *вычисляются явно.*

Теорема 2. *Пусть* $\{x_m\}_{m=0}^\infty$ — *такая возрастающая последовательность, что* $x_0 = 0$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = 1$, *и пусть* P — *ломаная с вершинами в точках* $a_m = z(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$. *Далее, пусть*

$$\gamma_m = \Big\{z = z(x),\ x \in [x_{m-1}, x_m]\Big\}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

и функции $q_m = q\Big|_{\gamma_m}$ *дополнительно к* (14), (16) *и* (17) *удовлетворяют условиям*

(1) *функции* q *и* q_P *принадлежат соответственно* $W_1^1(\gamma)$ *и* $W_1^1(P)$;

(2) *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\Delta q(a_k|$ *сходится.*

Тогда спектр оператора L_γ *допускает представление*

$$\sigma(T) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn}, \tag{21}$$

где λ_{mn} *имеет асимптотику* (20) *при* $m = 1$ *и асимптотику* (19) *при* $m \geqslant 2$.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 имеет место формула*

$$N(L_\gamma, r) \sim \frac{|P|}{\pi}\sqrt{r}, \quad r \to +\infty, \tag{22}$$

где $|P|$ — *длина ломаной* P *с вершинами в точках* $\{a_k\}_0^\infty$.

3. Лемма об интегральном представлении для характеристической функции спектра. Для доказательства теоремы 1 можно было бы воспользоваться известными (см., например, [2]) ВКБ-разложениями функции (9) при больших λ из сектора $-\alpha_1 < \arg\lambda < -\alpha_0$. Вместо этого мы получим интегральное представление (23) для функции Φ, из которого легко получатся формулы (18), (19). Кроме того, формула (23) сыграет важную роль и при доказательстве теоремы 2. Отметим, что в [3] в случае $N = 1$ при помощи аналогичной формулы было получено необходимое условие на q, при котором спектр оператора L_γ имеет вид (18), (19).

Как известно (см., например, [10, гл. I, теорема 1.5]), $\varphi(z,\lambda)$ при каждом фиксированном $z \in \gamma$ является четной целой функцией экспоненциального типа, так что Φ — четная целая функция экспоненциального типа.

Введем следующие обозначения: G_γ (G_P) — внешность контура Γ_γ (соответственно Γ_P), образованного двумя кривыми $\Gamma_\gamma^\pm = \{\pm(2t-1)i,\ t \in \gamma\}$ (соответственно $\Gamma_P^\pm = \{\pm(2t-1),\ t \in P\}$), $D_\gamma = \mathbb{C}\backslash\overline{G_\gamma}, D_P = \mathbb{C}\backslash\overline{G_P}$, $H_1(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю (см. [4, гл. I, § 20]) с функцией $\lambda\Phi(\lambda) - \sin\lambda$, $H(t) = H_1(2it)$.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $q \in L^1(\gamma)$, то сопряженная диаграмма функции $\Phi(\cdot)$ есть D_γ, функция $H(\cdot)$ аналитична в области G_γ, непрерывна на замыкании G_γ и абсолютно непрерывна на Γ_γ.*

(2) *Если $q_m = q\Big|_{\gamma_m}$ при некотором разбиении $\gamma = \bigcup\limits_{m=1}^{N} \gamma_m$ ($N \leqslant \infty$) удовлетворяет (14), то сопряженная диаграмма функции $\Phi(\cdot)$ есть D_P, функция $H(\cdot)$ аналитична в области G_P, непрерывна на замыкании G_P и абсолютно непрерывна на Γ_P.*

(3) *Если q удовлетворяет условиям теоремы 1 или 2, то для $\Phi(\cdot)$ справедливо представление*

$$\Phi(\lambda) = \frac{\sin\lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int\limits_P \sin\lambda(2s-1)Q(s)ds + \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda^4} + \frac{R(\lambda)}{\lambda^4}, \tag{23}$$

$$\Psi(\lambda) = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{N} \cos\lambda(2a_k - 1)A_k\Delta q(a_k), \tag{24}$$

$$A_k = \int\limits_P q dt - 2\int\limits_0^{a_k} q\, dt, \tag{25}$$

$$R(\lambda) = \int\limits_P \cos\lambda(2t-1)r dt, \quad r \in L^1(P). \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $h(\beta)$ — индикатор (см. [4, гл. I, § 15]) функции $\Phi(\lambda)$. Тогда (см. [4, гл. I, § 20])

$$H(t) = \int\limits_0^{\infty e^{i\beta}} e^{-2i\lambda t}(\lambda\Phi(\lambda) - \sin\lambda)d\lambda, \quad \operatorname{Im}\left(e^{i\beta}z\right) < -h(\beta)/2, \tag{27}$$

и, кроме того,

$$\lambda\Phi(\lambda) - \sin\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_C e^{2i\lambda t}H(t)dt,$$

где $C = \{t = 2i\tau :\ \tau \in C_1\}$, C_1 — любой контур, охватывающий сопряженную диаграмму функции $\lambda\Phi(\lambda) - \sin\lambda$. Следовательно,

$$\Phi(\lambda) = \frac{\sin\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\pi\lambda}\int\limits_C e^{2i\lambda t}H(t)dt. \tag{28}$$

С другой стороны, (см., например, [5, гл. I, § 2])

$$\varphi(z,\lambda) = \frac{\sin\lambda z}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^z \sin\lambda(z-t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt,$$

поэтому[1]

$$\lambda\Phi(\lambda) - \sin\lambda = \int\limits_P \sin\lambda(1-t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt.$$

Отсюда, полагая

$$F(\lambda) = \int\limits_P e^{i\lambda t}q(t)\varphi(t,\lambda)dt, \tag{29}$$

будем иметь

$$\lambda\Phi(\lambda) - \sin\lambda = \frac{1}{2i}\left(e^{i\lambda}F(-\lambda) - e^{-i\lambda}F(\lambda)\right). \tag{30}$$

Далее, пусть $h_F(\beta)$ — индикатор функции $F(\lambda)$. Положим

$$N(t) = \int\limits_0^{\infty e^{i\beta}} e^{-2i\lambda t}F(\lambda)d\lambda, \quad \operatorname{Im}\left(e^{i\beta}z\right) < -\frac{h_F(\beta)}{2}, \quad A(t) = \frac{1}{\pi}\left(N(t) + J(t)\right),$$

$$J(t) = \frac{1}{2i}\int\limits_P \frac{Q(s)}{s-t}ds, \qquad Q(s) = \int\limits_s^1 q\,d\tau, \qquad B(t) = A'(t).$$

Из равенства (27) при достаточно больших $|t|$ имеем

$$H(t) = H_0(t) + H_1(t), \tag{31}$$

где

$$H_0(t) = -\frac{1}{2}\left(\int\limits_P \frac{Q(s)ds}{2t+2s-1} + \int\limits_P \frac{Q(s)ds}{-2t+2s-1}\right), \tag{32}$$

$$H_1(t) = -\frac{\pi}{2i}\left[A(1/2-t) + A(1/2+t)\right]. \tag{33}$$

Обозначим через G_1 внешность контура $\Gamma_1 = P \cup P^*$, где P^* — образ ломаной P при повороте ее на угол π вокруг точки $1/2$. В [2, леммы 1–3] показано, что функция $A(\cdot)$ голоморфна в области G, непрерывна в ее замыкании и абсолютно непрерывна на границе Γ области G. Непосредственно проверяется, что точки $\pm(1+t)/2$ лежат вне G тогда и только тогда, когда t лежит вне G_1. Подставляя (30)–(33) в (28), получим

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \frac{\sin\lambda}{\lambda} + \Phi_0(\lambda) + \Phi_1(\lambda), \\ \Phi_k(\lambda) &= \frac{1}{\pi\lambda}\int\limits_C e^{2i\lambda t}H_k(t)dt, \quad k = 0, 1. \end{aligned} \tag{34}$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\Phi_0(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_P \sin\lambda(2s-1)Q(s)ds,$$

$$\Phi_1(\lambda) = \frac{1}{4\lambda^2}\int\limits_C e^{2i\lambda t}R(s)ds,$$

[1] Здесь и всюду далее запись $\int\limits_a^b$ означает интеграл по участку ломаной P, заключенной между точками a, b.

где

$$R(s) = B\left(\frac{1}{2} - t\right) - B\left(\frac{1}{2} + t\right). \tag{35}$$

Чтобы оценить $\Phi_1(\lambda)$, воспользуемся уравнением для B, полученным в [2]:

$$B(z) = B_0(z) - \int\limits_P Q(t)B(t, t - z)dt, \quad z \in \Gamma, \tag{36}$$

где

$$B_0(z) = -\frac{1}{2i}\int\limits_P Q(t)\int\limits_0^t \frac{Q(t,\tau)}{(\tau - t + z)^2}d\tau dt, \quad Q(t,\tau) = \int\limits_\tau^t q(s)ds.$$

Функция $B(z, s)$ определяется следующим образом:

$$F(z,\lambda) = \int\limits_0^t e^{i\lambda s}q(s)\varphi(s,\lambda)ds,$$

$$N(z,s) = \int\limits_0^{\infty e^{i\beta}} e^{-2i\lambda s}F(z,\lambda)d\lambda, \quad \operatorname{Im}\left(e^{i\beta}s\right) < -h_F(\beta)/2,$$

$$A(z,s) = \frac{1}{\pi}\big(N(z,s) + J(z,s)\big), \quad J(z,s) = \frac{1}{2i}\int\limits_0^z \frac{Q(z,r)}{r - s}dr, \quad B(z,s) = \frac{\partial}{\partial s}A(z,s)$$

и является решением уравнения (см. [2])

$$B(z,s) = B(z,s) - \int\limits_0^z Q(z,t)B(t, t - s + a)dt, \quad s \in G_z, \tag{37}$$

где

$$B_0(z,s) = -\frac{1}{2i}\int\limits_0^z Q(z,t)\int\limits_0^t \frac{Q(t,\tau)}{(\tau - t + s - a)^2}d\tau dt. \tag{38}$$

Интегрируя по частям, имеем

$$B_0(z) = \frac{1}{2i}\int\limits_P \frac{Q(t)Q(t,0)}{t - z}dt + \frac{1}{2i}\int\limits_P Q(t)\int\limits_0^t \frac{q d\tau}{\tau - t + z}dt. \tag{39}$$

Положим

$$\Phi_1(\lambda) = \frac{1}{4\lambda^2}(\Psi_1(\lambda) + \Psi_2(\lambda)), \quad \Psi_1(\lambda) = \int\limits_C e^{2i\lambda t}[B_0(1/2 - t) - B_0(1/2 + t)]dt. \tag{40}$$

Тогда

$$\Psi_1(\lambda) = -e^{i\lambda}I(-\lambda) - e^{-i\lambda}I(\lambda), \quad I(\lambda) = \int\limits_C e^{2i\lambda z}B_0(z)dz.$$

Из (39) непосредственными вычислениями находим

$$I(\lambda) = -\int\limits_P Q(t)Q(t,0)e^{2i\lambda t}dt + \int\limits_P Q(t)\int\limits_0^t q e^{2i\lambda(t-\tau)}d\tau dt.$$

Следовательно,

$$\Psi_1(\lambda) = 2\left[\int\limits_P Q(t)Q(t,0)\cos\lambda(2t-1)dt - \int\limits_P Q(t)\int\limits_0^t q\cos\lambda[2(t-\tau)-1]d\tau dt\right].$$

Интегрируя по частям, получим

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[\int\limits_P \sin\lambda(2t-1)q[Q(t,0)-Q(t)]dt + \int\limits_P q(t)\int\limits_0^t q(\tau)\sin\lambda[2(t-\tau)-1]d\tau dt\right].$$

Положим $\Delta q(0) = q(0)$ и в случае $N < \infty$ $\Delta q(1) = -q(1)$ (см. (13)). Из условий 1) и 2) следует, что оба интеграла в правой части последнего равенства можно проинтегрировать по частям еще раз. В результате будем иметь

$$\begin{gathered}\Psi_1(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2}\left[\sum_{k=0}^N(\cos\lambda(2a_k-1)A_k\Delta q(a_k)) + \omega(\lambda)\right],\\ A_k = \int\limits_P qdt - 2\int\limits_0^{a_k} qdt, \qquad (41)\\ \omega(\lambda) = \int\limits_P \cos\lambda(2t-1)rdt, \quad r\in L^1(P).\end{gathered}$$

Аналогично, используя уравнение (37) и равенство (38), проверяется, что в условиях теоремы

$$\Psi_2(\lambda) = \lambda^{-2}\int\limits_P\left(e^{2i\lambda t}f + e^{-2i\lambda t}g\right)dt, \quad f,g\in L^1(P). \qquad (42)$$

Из равенств (34), (40) – (42) следуют соотношения (23). Тем самым лемма доказана. □

4. Доказательства теорем 1 и 2. Сначала докажем теорему 1. Пусть $m = \overline{1,N}$, $N < \infty$. Предположим сначала, что в области Ω_m функция q_m полюсов не имеет. Согласно условию (14) $q_m \in E_1(\Omega_m)$. Поэтому по теореме Ф. и М. Риссов (см. [9, гл. III, п. 8.1]) любая ее первообразная Q_m голоморфна в Ω_m и непрерывна на $\overline{\Omega_m}$. Далее, поскольку y является решением (10) тогда и только тогда, когда $Y = (y, -y' + Q_m y)^T$ — решение системы

$$Y' = \begin{pmatrix} Q_m & -1\\ \lambda + Q_m^2 & -Q_m\end{pmatrix}Y, \qquad (43)$$

то любое решение уравнения (10) допускает аналитическое продолжение с кривой γ_m в область Ω_m, непрерывное вместе с производной вплоть до границы Ω_m. Следовательно, функция $\Phi(\lambda)$ не меняется при замене γ_m на отрезок $[a_{m-1}, a_m]$. Согласно условию (14) и теореме 1 из [2] это утверждение сохраняет силу и в случае, когда q_m в Ω_m имеет полюсы z_{mk}, $k = \overline{1,k_m}$, удовлетворяющие условию (3). Отсюда следует (15). Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что при дополнительных условиях (16) и (17) спектр оператора L_P представляется в виде (18), (19).

Введем числа $\beta_m = \arg(a_m - a_{m-1})$, $m = \overline{1,N}$, так, что $\alpha_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_N < \alpha_1$. Так как функция q суммируема на P, то по лемме 2 из [1] при любом $\varepsilon > 0$ оператор L_γ вне угла $-2\beta_N - \varepsilon \leqslant \arg\lambda \leqslant -2\beta_1 + \varepsilon$ может иметь лишь конечное число точек спектра. Поэтому достаточно изучить нули функции $\Phi(\lambda)$ внутри угла $-\beta_N - \varepsilon \leqslant \arg\lambda \leqslant -\beta_1 + \varepsilon$.

Если q удовлетворяет условиям теоремы 1, то, повторяя выкладки, проведенные при выводе представления (41), для второго члена в (23) находим

$$\int\limits_P \sin\lambda(2s-1)Q(s)ds = \frac{Q(0)}{2\lambda}\cos\lambda + \frac{1}{4\lambda^2}\sum_{k=0}^N \sin\lambda(2a_k-1)\Delta q(a_k) + \frac{1}{4\lambda^2}\int\limits_P \sin\lambda(2s-1)q'dt. \quad (44)$$

Введем функцию

$$\Phi_m(\lambda) = \frac{8i\lambda^3 e^{i\lambda(2a_m-1)}\Phi(\lambda)}{\Delta q(a_{m-1})}, \quad m = \overline{1,N}.$$

Из формул (23) и (44) следует, что для любого $m = \overline{1,N-1}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная $C(m,\varepsilon) > 0$, что

$$\Phi_m(\lambda) = e^{2i\lambda(a_m-a_{m-1})}\Big[1 + O\big(e^{-C(m,\varepsilon)|\lambda|}\big)\Big], \quad \lambda \to \infty,$$

равномерно по $\arg\lambda$ из $[-\beta_{m+1}+\varepsilon, -\beta_m-\varepsilon]$. Следовательно, при любом $m = \overline{1,N-1}$ и любом $\varepsilon > 0$ оператор L_γ в угле $-2\beta_{m+1}+\varepsilon \leqslant \arg\lambda \leqslant -2\beta_m-\varepsilon$ может иметь лишь конечное число собственных чисел. Поэтому спектр оператора L_γ может локализоваться (в смысле определения 2) только около лучей $\arg\lambda = -2\beta_m$, $m = \overline{1,N}$.

Пусть $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда из оценок (23) и (44) легко увидеть, что при каждом $m = \overline{2,N-1}$

$$\Phi_m(\lambda) = e^{2i\lambda(a_m-a_{m-1})} + \frac{\Delta q(a_m)}{\Delta q(a_{m-1})} + r_m(\lambda),$$

где $r_m(\lambda) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ равномерно по $|\arg\lambda + \beta_m| < \varepsilon$. Отсюда, используя теорему Руше (см., например, [7, гл. IV, § 3, п. 4]), получим (19). Формула (20) доказывается аналогично.

Поскольку при $N = \infty$ за счет дополнительных условий теоремы 2 оценки (23) и (44) сохраняют силу, то теорема 2 доказывается точно так же, как и теорема 1.

5. Доказательство теоремы 3. Пусть функция q удовлетворяет условиям теоремы 2. Обозначим через $n(r,\vartheta,\theta)$ число собственных значений оператора L_γ в секторе $\{|z| < r,\ \vartheta < \arg z < \theta\}$. Из формул (21) и (19), (20) следует, что предел

$$\Delta(\vartheta,\theta) = \lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\vartheta,\theta)}{\sqrt{r}}$$

существует при всех $-\pi < \vartheta < \theta \leqslant \pi$, за исключением счетного множества $\{-2\beta_m\}_1^\infty$. А именно, при любом $-2\beta_0 < \theta < \pi$ и $-2\beta_{M+1} < \vartheta < -2\beta_M$, $M = 0,1,\dots,$ имеем

$$\Delta(\vartheta,\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M}|a_m - a_{m-1}| = \frac{P_M}{\pi},$$

где $|P_M|$ означает длину ломаной с вершинами $a_0, a_1, \dots, a_M$. Отсюда следует, что спектр оператора L_γ представляет собой множество, имеющее относительно порядка 1/2 угловую плотность (см. [4, гл. II, § 1]). Таким же свойством (относительно порядка 1) обладает, очевидно, множество нулей функции Φ, откуда в силу четности Φ — целая функция с правильно распределенными корнями. Следовательно, угловая плотность $\Delta(\Phi,\vartheta,\theta)$ множества корней функции Φ внутри угла $\vartheta < \arg\lambda < \theta$ равна деленной на 2π длине дуги границы индикаторной диаграммы между точками опоры опорных прямых l_θ и l_ϑ, перпендикулярных к лучам $\arg\lambda = \theta$ и $\arg\lambda = \vartheta$. Согласно п. (2) леммы 1 сопряженной диаграммой функции Φ является D_P. Поэтому (см. [4, гл. I, § 20, теорема 33]) индикаторной диаграммой функции Φ является область I_P, которая получается из области D_P симметрией относительно оси абсцисс. Легко проверить, что опорные прямые $l_{-\beta_1}$ и $l_{-\alpha_1}$ пересекают область I_P в точках $-i$ и i соответственно, так что дуга границы I_P, соединяющая эти точки есть ломаная $\mathcal{P}$, которая получается из ломаной P растяжением в 2 раза, сдвигом, поворотом и симметрией; поэтому $|\mathcal{P}| = 2|P|$. Следовательно, $\Delta(\Phi,-\alpha_1,-\beta_1) = |P|$. Отсюда в силу равенства

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N(L_\gamma,r)}{\sqrt{r}} = \Delta(\Phi,-\alpha_1,-\beta_1)$$

следует утверждение теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишкин Х. К.* О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма—Лиувилля на кривой// Мат. заметки. — 2005. — *78*, № 1. — С. 72–84.
2. *Ишкин Х. К.* О критерии безмонодромности уравнения Штурма—Лиувилля// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 4. — С. 552–568.
3. *Ишкин Х. К.* Критерий локализации спектра оператора Штурма—Лиувилля на кривой// Алгебра и анализ. — 2016. — *28*, № 1. — С. 52–88.
4. *Левин Б. Я.* Распределения корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
5. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988.
6. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций// Функц. анал. прилож. — 1967. — *1*, № 2. — С. 52–59.
7. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. — М.: Наука, 1978.
8. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука. 1969.
9. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
10. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. — М.: ИЛ, 1960.
11. *Davies E. B.* Spectral theory and differential operators. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
12. *Davies E. B.* Eigenvalues of an elliptic system// Math. Z. — 2003. — *243*. — С. 719–743.
13. *Duistermaat J. J., Grünbaum F. A.* Differential equations in the spectral parameter// Commun. Math. Phys. — 1986. — *103*. — С. 177–240.

Х. К. Ишкин
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: `Ishkin62@mail.ru`

А. В. Резбаев
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: `aratyo@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 153 (2018). С. 94–107

УДК 517.984, 517.927.2

ОПЕРАТОРЫ, РЕЗОЛЬВЕНТЫ КОТОРЫХ ИМЕЮТ СВЕРТОЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ, И ИХ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

© 2018 г. **Б. Е. КАНГУЖИН**

Аннотация. В настоящей работе изучаются спектральные разложения по системе корневых элементов дифференциальных операторов второго порядка на отрезке, резольвенты которых имеют сверточное представление. Вначале доказано сверточное представление резольвент дифференциальных операторов второго порядка на отрезке с интегральными краевыми условиями. Затем по свертке, порождаемой исходным дифференциальным оператором, строится преобразование Фурье. Установлена связь между операцией свертки в исходном пространстве функций и операцией умножения в пространстве преобразований Фурье. В заключительной части изучен вопрос сходимости спектральных разложений, порождаемых исходным дифференциальным оператором. Приведены примеры сверток, порождаемые операторами.

Ключевые слова: свертка, спектральное разложение, резольвента, краевая задача, дифференциальный оператор, граничные формы.

AMS Subject Classification: 34B05, 34L05

1. Введение. В математической физике решение неоднородного уравнения $Au = f$ записывается в виде свертки двух функций $u = \varepsilon * f$, где ε — соответствующее фундаментальное решение (см. [1]). В данной работе решение неоднородного уравнения с параметром $Au - \lambda u = f$ записывается в виде свертки, причем каждому оператору соответствует своя индивидуальная формула свертки. Здесь и дальше под сверткой понимается билинейная (возможно, некоммутативная или неассоциативная) операция без правых аннуляторов. В случае, когда существует обратный оператор A^{-1}, свертка, связанная с линейным оператором A, не имеет делителей нуля. Если оператор A соответствует краевой задаче в ограниченной области, то свертка может зависеть от его граничных условий. К примеру, свертка, соответствующая оператору B_1 в функциональном пространстве $L_2(0,1)$, имеет вид

$$\left(f *_{B_1} g\right)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt + \frac{1}{h}\int_x^1 f(1+x-t)g(t)dt. \tag{1}$$

Здесь оператор B_1 соответствует краевой задаче

$$-i\frac{dy}{dx} = f(x), \quad 0 < x < 1, \qquad y(1) = hy(0).$$

Резольвента оператора B_1 имеет сверточное представление

$$\left(B_1 - \lambda I\right)^{-1} f(x) = \left(\varepsilon_\lambda *_{B_1} f\right)(x), \quad \text{где} \quad \varepsilon_\lambda(t) = ih\frac{e^{i\lambda t}}{h - e^{i\lambda}}.$$

Свертка $*_{B_1}$, определяемая по формуле (1), зависит от граничного параметра h.

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант 0757/ГФ4).

Более сложный пример свертки приведен в [6]. В гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$ определим оператор B_2, порожденный дифференциальным выражением

$$l(u) \equiv -\frac{d^2u(x)}{dx^2}, \quad 0 < x < 1,$$

с областью определения

$$D(B_2) = \Big\{ u \in W_2^2[0,1] : \ u(0) = 0, \ u'(0) = u'(1) \Big\},$$

спектральные свойства которого были подробно изучены в работе Н. И. Ионкина [3]. Свертка, порождаемая оператором B_2, задается формулой

$$(g *_{B_2} f)(x) = \frac{1}{2}\int_x^1 g(1+x-t)f(t)dt + \frac{1}{2}\int_{1-x}^1 g(x-1+t)f(t)dt + \\ + \int_0^x g(x-t)f(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^{1-x} g(1-x-t)f(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^x g(1+t-x)f(t)dt, \quad (2)$$

причем резольвента оператора B_2 имеет сверточное представление

$$(B_2 - \lambda I)^{-1} f(x) = (\varepsilon_\lambda *_{B_2} f)(x), \quad \text{где} \quad \varepsilon_\lambda(t) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda}-1)}.$$

В связи с тем, что граничные условия оператора B_2 достаточно сложны, свертка $*_{B_2}$ определяется по нетривиальной формуле (2).

В работах [4, 6, 10, 12] можно найти свертки, порождаемые дифференциальными операторами первого порядка с интегральными краевыми условиями. В работах М. В. Ружанского и его соавторов (см. [5, 11, 14, 15]) исследуются свертки, порождаемые

(a) операторами, корневые элементы которых образуют базис Рисса в соответствующем пространстве,

(b) б) базисами Рисса гильбертова пространства.

В отличие от вышеупомянутых работ [4,6,10,12], где выписаны явные формулы сверток, в работах М. В. Ружанского [5,11,14,15] свертки определяются в неявном виде с помощью специальных рядов. Заметим, что операторы, не удовлетворяющие условию (a), могут иметь свертки. К примеру, задаче Коши

$$-i\frac{dy}{dx} - \lambda y = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 0 \quad (3)$$

соответствует свертка

$$(g * f)(x) = \int_0^x g(x-t)f(t)dt,$$

т.е. решение задачи (3) имеет сверточное представление

$$y(x) = i\int_0^x e^{\lambda(x-t)}f(t)dt.$$

Построение явных формул сверток использует представление функций Грина. Обычно функция Грина $G(x,t)$ — двуместная функция, в то же время фундаментальное решение $\varepsilon(t)$ — одноместная функция. При выводе явной формулы свертки необходимо двуместную функцию $G(x,t)$ выразить линейно через одну одноместную $\varepsilon(t)$, при этом разрешается использовать операции интегрирования и дифференцирования. Реализация указанной идеи приводит к следующему результату.

Теорема 1 (сверточное представление резольвенты). *Пусть B — оператор, порождаемый дифференциальным выражением*

$$l(y) = -y''(x) + q(x)y(x), \quad 0 < x < 1,$$

на области определения

$$D(B) = \Big\{ y \in W_2^2[0,1] : \ U_1(y) = 0, \ U_2(y) = 0 \Big\},$$

где $U_1(\cdot), U_2(\cdot)$ — граничные линейные формы, $q(\cdot)$ — непрерывная на $[0,1]$ функция. Допустим, что линейные формы $U_1(\cdot)$, $U_2(\cdot)$ выбраны так, что в пространстве $L_2(0,1)$ существует B^{-1}. Тогда существуют такие двуместная билинейная операция $*_B$ и мероморфная по λ функция $k_\lambda(t)$, что резольвента оператора B имеет сверточное представление

$$(B - \lambda I)^{-1} f(x) = (k_\lambda *_B f)(x), \quad 0 < x < 1. \tag{4}$$

Теорему 1 удается распространить и на операторы, порождаемые дифференциальными выражениями высших порядков:

$$l(y) = y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) y^{(k)}(x), \quad 0 < x < 1,$$

где $p_k(x) \in C^k[0,1]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Когда $\operatorname*{res}\limits_{\lambda} k_\mu \in D(B)$ при $\lambda \in \sigma(B)$, то соответствующие свертки и их связь с множеством операторов, коммутирующих с оператором B, изучена в монографии [10], а вопросы базисности системы корневых элементов оператора B исследованы в [4]. В отличие от работ [4, 10], в данной работе не предполагается, что

$$\operatorname*{res}_{\lambda} k_\mu \in D(B), \quad \lambda \in \sigma(B).$$

К примеру, для оператора B_3, соответствующего периодической задаче

$$-y''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \qquad y(0) = y(1), y'(0) = y'(1),$$

свертка $*_{B_3}$ имеет вид

$$(f *_{B_3} g)(x) = \int\limits_0^x f(x-t)g(t)dt + \int\limits_x^1 f(t-x)g(t)dt + \int\limits_0^x f(1+t-x)g(t)dt + \int\limits_x^1 f(1+x-t)g(t)dt,$$

причем резольвента оператора B_3 имеет сверточное представление

$$(B_3 - \lambda I)^{-1} f(x) = (k_\lambda *_{B_3} f)(x), \quad \text{где} \quad k_\lambda(x) = -\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}(1 - \cos\sqrt{\lambda})}.$$

В данном случае $\sigma(B_3) = \big\{ (2\pi n)^2, \ n = 0, 1, \ldots \big\}$, и вычет $\operatorname*{res}\limits_{(2\pi n)^2} k_\mu(x)$ пропорционален функции $x \cos 2\pi n x + \dfrac{\sin 2\pi n x}{\pi n}$, которая непериодична. Таким образом, $\operatorname*{res}\limits_{(2\pi n)^2} k_\mu(x) \notin D(B_3)$.

Поскольку резольвента оператора B имеет сверточное представление (4), то из первого резольвентного тождества Гильберта вытекают следующие свойства свертки. Известно (см. [13]), что для всех $\lambda, \mu \in \rho(B)$ и всех $f \in L_2(0,1)$ верно тождество

$$(B - \lambda I)^{-1} f - (B - \mu I)^{-1} f = (\lambda - \mu)(B - \lambda I)^{-1}(B - \mu I)^{-1} f, \tag{5}$$

которое называют резольвентным тождеством Гильберта. Если операция $*_B$ ассоциативна и не имеет правых делителей нуля, то из (5) вытекает тождество для свертки $*_B$

$$k_\lambda(x) - k_\mu(x) = (\lambda - \mu)(k_\lambda *_B k_\mu)(x). \tag{6}$$

В частности, из (6) вытекает свойство коммутативности

$$k_\lambda *_B k_\mu = k_\mu *_B k_\lambda.$$

Если операция $*_B$ только ассоциативна, то из (5) вытекает более слабое соотношение

$$(k_\lambda - k_\mu - (\lambda-\mu)(k_\lambda *_B k_\mu)) *_B f = 0, \quad \forall f \in L_2(0,1).$$

Отсюда следует слабое коммутативное соотношение

$$(k_\lambda *_B k_\mu) *_B f = (k_\mu *_B k_\lambda) *_B f, \quad \forall f \in L_2(0,1).$$

Когда для свертки $*_B$ не всегда выполняется свойства ассоциативности, то из (5) вытекает еще более слабое коммутативное соотношение

$$k_\mu *_B (k_\lambda *_B f) = k_\lambda *_B (k_\mu *_B f), \quad \forall f \in L_2(0,1). \tag{7}$$

В то же время для $*_B$ в общем случае не исключается, что

$$h *_B (g *_B f) \neq g *_B (h *_B f) \tag{8}$$

при некоторых h, g и f. К примеру, неравенство (8) выполняется для $*_{B_3}$ при некоторых h, g и f, хотя тождество (7) сохраняется для всех

$$k_\lambda(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda}-1)}, \quad \lambda \neq (2\pi n)^2, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

В данной работе предполагается, что мероморфная функция $k_\lambda(x)$ из теоремы 1 имеет представление

$$k_\lambda(x) = \frac{\varphi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad 0 < x < 1, \tag{9}$$

где $\varphi(x,\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ — целые по λ функции. Также предполагается, что $\varphi(x,\lambda)$ является решением однородного уравнения

$$-\varphi''(x,\lambda) + q(x)\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda), \quad 0 < x < 1. \tag{10}$$

Это предположение не является ограничительным, так как из доказательства теоремы 1 можно убедиться в его справедливости. К примеру, в случае оператора B_1 имеем

$$k_\lambda(x) = \frac{e^{i\lambda x}}{1 - \frac{1}{ih}e^{i\lambda}},$$

т.е.

$$\varphi_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x}, \quad \Delta_1(\lambda) = 1 - \frac{1}{ih}e^{i\lambda}.$$

Операторам B_2 и B_3 соответствует одна и та же мероморфная функция

$$k_\lambda(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda}-1)}.$$

В данном случае

$$\varphi_{2,3}(x,\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}, \quad \Delta_{2,3}(\lambda) = \cos\sqrt{\lambda} - 1.$$

Для указанных примеров соотношения (9) и (10) выполняются. Заметим, что операторы B_2 и B_3 интересны тем, что все собственные значения, кроме одного, двукратны. Оператор B_3 самосопряжен, т.е. корневые подпространства состоят только из собственных функций. В то же время оператор B_2 не является самосопряженным и, следовательно, имеет бесконечное число присоединенных функций.

По свертке $*_B$ строится соответствующее преобразование Фурье, а затем устанавливаются связь между преобразованием Фурье от свертки и преобразованием Фурье сомножителей. В частности, в случае оператора B_2 подобные утверждения доказаны в [6]. Заметим, что наличие бесконечного числа присоединенных функции у оператора B_2 несколько усложняет операцию умножения в пространстве коэффициентов Фурье.

В заключительной части работы изучается вопрос сходимости спектральных разложений, порождаемых оператором B. Хорошо известно, что частичные суммы ряда Фурье имеют вид

$$S_R(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu|=R} (B-\mu I)^{-1} f(x) d\mu.$$

В нашем случае верно представление

$$S_R(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu|=R} (k_\mu *_B f)(x) d\mu = -\sum_{|\mu|<R} \left(\operatorname*{res}_{\lambda\in\sigma(B)} k_\mu *_B f \right)(x).$$

Таким образом, сверточное представление резольвенты $(B-\mu I)^{-1}$ приводит к интегральному представлению частичных сумм, и тем самым удается выписать аналог ядра Дирихле.

Реализация указанной идеи приводит к следующему результату. Согласно лемме 5 область определения $D(B)$ оператора B можно переписать в виде

$$D(B) = \left\{ y(x) \in W_2^2[0,1] : \ V_j^0(y) = \int\limits_0^1 l(y)\rho_j(x)dx, \ j=1,2 \right\};$$

здесь $V_j^0(\cdot)$ — двухточечные граничные формы

$$V_j^0(y) = \alpha_{jk_j} y^{(k_j)}(0) + \beta_{jk_j} y^{(k_j)}(1), \quad j=1,2, \quad 1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant 0.$$

Теорема 2. *Пусть функции $\rho_1(\cdot)$ и $\rho_2(\cdot)$ удовлетворяют условиям $\rho_j \in W^{2-k_j}[0,1]$, $\rho^{(s)}(0) = \rho^{(s)}(1) = 0$, $s = 0,\dots,1-k_j$, а граничные формы $V_1^0(\cdot)$, $V_2^0(\cdot)$ являются усиленно регулярными по Биркгофу краевыми формами. Тогда любая функция f из $L_2(0,1)$ разлагается в интеграл*

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{ia-\infty}^{ia+\infty} (k_\mu *_B f)(x), \tag{11}$$

где a — некоторое вещественное число. Интеграл (11) сходится в смысле нормы $L_2(0,1)$.

2. Сверточное представление резольвенты. В данном разделе исследуется представление резольвенты оператора B. Пусть B — оператор, порождаемый дифференциальным выражением

$$l(y) = -y''(x) + q(x)y(x), \quad 0<x<1,$$

на области определения

$$D(B) = \left\{ y \in W_2^2[0,1] : \ U_1(y)=0, \ U_2(y)=0 \right\},$$

где $U_1(\cdot)$, $U_2(\cdot)$ — граничные линейные формы, $q(\cdot)$ — непрерывная на $[0,1]$ функция.

Допустим, что линейные формы $U_1(\cdot), U_2(\cdot)$ выбраны так, что в пространстве $L_2(0,1)$ существует B^{-1}.

Граничные линейные формы выберем в виде

$$U_j(y) = y^{(j-1)}(0) - \int\limits_0^1 l(y) p_j(x) dx, \quad j=1,2, \tag{12}$$

где $p_1(\cdot)$, $p_2(\cdot)$ — некоторые функции из $L_2(0,1)$.

Если функции $p_j(x)$ являются решениями однородного уравнения

$$p_j''(x) = \overline{q(x)} p_j(x), \quad 0<x<1,$$

то указанные граничные формы запишутся в виде

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{1} \left(\alpha_{kj} y^{(k)}(0) + \beta_{kj} y^{(k)}(1) \right), \quad j=1,2, \tag{13}$$

где α_{kj}, β_{kj} — некоторые (возможно, комплексные) числа. Формы (13) представляют собой граничные двухточечные формы.

Хотя формы (12) не всегда являются граничными, тем не менее их, следуя работам [2, 7], называют граничными формами. Заметим (см. [2, 7]), что при таком выборе граничных форм $U_1(\cdot)$, $U_2(\cdot)$ оператор B имеет непрерывный обратный в пространстве $L_2(0,1)$.

Удобно ввести решения $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ однородного уравнения

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y, \quad 0<x<1,$$

с ненулевыми условиями Коши в нуле:

$$c(0,\lambda)=s'(0,\lambda)=1, \quad c'(0,\lambda)=s(0,\lambda)=0.$$

Согласно результатам монографии [8], резольвента оператора B записывается в виде

$$(B-\lambda I)^{-1}f(x)=\frac{H(x,f)}{\Delta(\lambda)}, \tag{14}$$

где

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(c) & U_1(s) \\ U_2(c) & U_2(s) \end{vmatrix}, \qquad g(x,t)=\begin{vmatrix} c(t) & s(t) \\ c(x) & s(x) \end{vmatrix}, \qquad H(x,f)=\begin{vmatrix} c(x) & s(x) & \int\limits_0^x g(x,t)f(t)dt \\ U_1(c) & U_1(s) & U_1\left(\int\limits_0^x g(x,t)f(t)dt\right) \\ U_2(c) & U_2(s) & U_2\left(\int\limits_0^x g(x,t)f(t)dt\right) \end{vmatrix}.$$

Наша цель — преобразовать операторную функцию $H(x,f)$ так, чтобы получить утверждение теоремы 1.

Перепишем $H(x,f)$ в следующем виде:

$$H(x,f)=U_{1\xi}U_{2\eta}\left(\widetilde{G}(x,\xi,\eta,f)\right), \tag{15}$$

где

$$\widetilde{G}(x,\xi,\eta,f)=\begin{vmatrix} c(x,\lambda) & s(x,\lambda) & \int\limits_0^x g(x,t)f(t)dt \\ c(\xi,\lambda) & s(\xi,\lambda) & \int\limits_0^\xi g(\xi,t)f(t)dt \\ c(\eta,\lambda) & s(\eta,\lambda) & \int\limits_0^\eta g(\eta,t)f(t)dt \end{vmatrix}.$$

Легко понять, что

$$\widetilde{G}(x,\xi,\eta,f)=g(\eta,\xi)\int\limits_0^x g(x,t)f(t)dt+g(x,\eta)\int\limits_0^\xi g(\xi,t)f(t)dt+g(\xi,x)\int\limits_0^\eta g(\eta,t)f(t)dt. \tag{16}$$

Вначале преобразуем функцию $g(\xi, x)$ к сверточному виду. Для этого вспомним (см. [8]), что решения $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ представимы в виде

$$c(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int\limits_0^x K_c(x,t)\cos\sqrt{\lambda}t\,dt, \tag{17}$$

$$c(x,\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int\limits_0^x K_s(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}dt, \tag{18}$$

где $K_c(x,t)$ и $K_s(x,t)$ — некоторые функции.

Учитывая представления (17) и (18), запишем функцию $g(x,\xi)$ в виде

$$\begin{aligned}
g(\xi,x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}(\xi - x)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^\xi K_s(\xi,\theta)\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x+\theta)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin\sqrt{\lambda}(\theta - x)}{\sqrt{\lambda}}\right]d\theta - {}&\\
-\frac{1}{2}\int\limits_0^x K_s(x,\theta)\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(\xi+\theta)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin\sqrt{\lambda}(\theta-\xi)}{\sqrt{\lambda}}\right]d\theta + {}&\\
+\frac{1}{2}\int\limits_0^x K_c(x,\xi)\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(\theta+\xi)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin\sqrt{\lambda}(\theta-\xi)}{\sqrt{\lambda}}\right]d\xi - {}&\\
-\frac{1}{2}\int\limits_0^\xi K_c(\xi,\theta)\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(\theta+x)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-\theta)}{\sqrt{\lambda}}\right]dx + {}&\\
+\frac{1}{2}\int\limits_0^\xi d\theta_2\int\limits_0^x K_c(x,\theta_1)K_s(x,\theta_2)\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(\theta_2+\theta_1)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin\sqrt{\lambda}(\theta_2-\theta_1)}{\sqrt{\lambda}}\right]d\theta_1 - {}&\\
-\frac{1}{2}\int\limits_0^\xi d\theta_2\int\limits_0^x K_c(\xi,\theta_2)K_s(x,\theta_1)\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}(\theta_1-\theta_2)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin\sqrt{\lambda}(\theta_1+\theta_2)}{\sqrt{\lambda}}\right]d\theta_1.&
\end{aligned}$$

Таким образом, функция $g(\xi,x)$ линейно выражается через функцию $\sin\sqrt{\lambda}t/\sqrt{\lambda}$. При этом разрешается использовать операцию интегрирования и умножения на фиксированные функции, не зависящие от λ. Теперь преобразуем произведение $g(\eta,\xi)g(x,t)$. Поскольку $g(\eta,\xi)$ и $g(x,t)$ линейно выражаются через функцию $\sin\sqrt{\lambda}t/\sqrt{\lambda}$, то их произведение $g(\eta,\xi)g(x,t)$ линейно выражается через функцию $\cos\sqrt{\lambda}t/\lambda$.

Из формулы (16), учитывая полученное утверждение о произведении $g(x,\eta)g(\xi,t)$, получаем, что функция $\widetilde{G}(x,\xi,\eta,f)$ также линейно выражается через $\cos\sqrt{\lambda}t/\lambda$. С другой стороны, $\widetilde{G}(x,\xi,\eta,f)$ линейно зависит от функции f. Следовательно, $\widetilde{G}(x,\xi,\eta,f)$ представляет билинейную функцию от f и $\cos\sqrt{\lambda}t/\lambda$.

Операторная функция $H(x,f)$ определяется по формуле (15). Подействуем граничной линейной формой $U_{2\eta}$ по переменной η на функцию $\widetilde{G}(x,\xi,\eta,f)$. При этом надо дифференцировать оператором $d^2/d\eta^2$ и умножать на функцию $q(\eta)$. При этом производную $\dfrac{d^2}{d\eta^2}\cos\sqrt{\lambda}(\eta+t)$ всегда можно заменить на производную $\dfrac{d^2}{dt^2}\cos\sqrt{\lambda}(\eta+t)$. Если по переменной t происходит интегрирование, то, применяя формулу интегрирования по частям, избавляемся от второй производной $\dfrac{d^2}{dt^2}\cos\sqrt{\lambda}(\eta+t)$. Если же вместо t записано x, то выражение $\dfrac{d^2}{dx^2}\cos\sqrt{\lambda}(\eta+x)$ означает двукратное дифференцирование по x. Таким образом, из формулы (15) следует, что операторная функция $H(x,f)$ представляет билинейную функцию от $\dfrac{\cos\sqrt{\lambda}t}{\lambda}$ и $f(t)$. При этом выражение «линейно выражается через $\dfrac{\cos\sqrt{\lambda}t}{\lambda}$» означает, что разрешается дифференцирование, интегрирование, умножение на функции, не зависящие от λ. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

3. Свертка и преобразование Фурье. Если свертка вводится по стандартной формуле

$$(f *_B g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

а преобразование Фурье согласно соотношению

$$F[\widehat{f}](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\xi x}dx,$$

то связь между сверткой и преобразованием Фурье задается следующим равенством:

$$F[f * g](\xi) = F[f](\xi) \cdot F[g](\xi). \tag{19}$$

Таким образом, операции свертки в исходном пространстве функции соответствует операция умножения в пространстве преобразований Фурье (см. [1]).

В данном разделе для свертки $*_B$ из теоремы 1, порождаемой оператором B, строится соответствующее преобразование Фурье и выписывается аналог равенства (19). Поскольку оператор B может иметь бесконечное число присоединенных элементов, то аналог соотношения (19) может несколько усложниться.

В данном пункте считается, что резольвента оператора B имеет следующее сверточное представление:

$$(B-\lambda I)^{-1} f(x) = (k_\lambda *_B f)(x), \tag{20}$$

где $k_\lambda = \varphi(x,\lambda)/\Delta(\lambda)$ — мероморфная функция от λ; здесь $\varphi(x,\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ — некоторые целые функции от λ. Также предполагаем, что $\varphi(x,\lambda)$ является решением однородного уравнения

$$-\varphi''(x,\lambda) + q(x)\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda), \quad 0 < x < 1.$$

Заметим, что билинейная операция $*_B$ из формулы (20) не зависит от λ.

В следующей лемме утверждается, что $*_B$ не может иметь делителей нуля.

Лемма 1. *Если при некотором $f \in L_2(0,1)$ верно равенство*

$$(k_\lambda *_B f)(x) = 0 \quad \textit{при} \quad \Delta(\lambda) \neq 0, \tag{21}$$

то $f \equiv 0$.

Доказательство. Так как $(k_\lambda *_B f)(x) = (B-\lambda I)^{-1} f(x)$, то равенство (21) переписывается в виде $(B-\lambda I)^{-1} f(x) = 0$. Действуя оператором $(B-\lambda I)$ на обе части последнего равенства, получим $f = 0$. Лемма 1 доказана. □

Замечание 1. *Равенство* (21) *на самом деле выполняется на всех функциях из подпространства*

$$\left\{ \sum_{j=1}^{N} c_j k_{\lambda_j}(x) : \ c_j \in \mathbb{C}, \ \Delta(\lambda_j) \neq 0 \right\}$$

и его замыкании.

Для произвольного λ из спектра $\sigma(B)$ оператора B введем функцию

$$u_{m_\lambda - 1,\lambda}(x) = -\operatorname*{res}_{\lambda} k_\mu(x),$$

где m_λ — алгебраическая кратность собственного значения λ.

Известно (см. [13]), что проектор $P_\lambda : L_2(0,1) \to \ker(B-\lambda I)^{m_\lambda}$ задается по формуле

$$P_\lambda f(x) = (u_{m_\lambda-1,\lambda} *_B f)(x). \tag{22}$$

Заметим, что корневое подпространство $\ker(B-\lambda I)^{m_\lambda}$ состоит из линейных комбинации собственных и присоединенных функций, соответствующих собственному значению $\lambda \in \sigma(B)$. Соотношение (22) означает, что все собственные и присоединенные функции из $\ker(B-\lambda I)^{m_\lambda}$ можно получить из одной-единственной функции $u_{m_\lambda-1,\lambda}(x)$. Правда, для этого надо применить некоторую сложную операцию $*_B$. Подобное представление встречается при восстановлении подпространства воспроизводящим ядром (см. [16]). В принципе, нет гарантии того, что $u_{m_\lambda-1,\lambda}(x) \in \ker(B-\lambda I)^{m_\lambda}$: в общем случае функция $u_{m_\lambda-1,\lambda}(x)$ может не принадлежать корневому подпространству $\ker(B-\lambda I)^{m_\lambda}$.

Через $B_{\max}$ будем обозначать оператор

$$B_{\max} y = -\frac{d^2y(x)}{dx^2} + q(x)y(x), \quad 0<x<1, \quad y(x) \in D(B_{\max}) \equiv W_2^2[0,1].$$

Для $\lambda \in \sigma(B)$ обозначим через $u_{m_\lambda-2,\lambda}(x), \ldots, u_{0,\lambda}(x)$ функции, определяемые по формуле

$$\begin{gathered} u_{m_\lambda-2,\lambda}(x) = B_{\max} u_{m_\lambda-1,\lambda}(x) - \lambda u_{m_\lambda-1,\lambda}(x), \\ \vdots \\ u_{m_{0,\lambda}}(x) = B_{\max} u_{1,\lambda}(x) - \lambda u_{1,\lambda}(x). \end{gathered}$$

Из формулы (22) следует справедливость включений

$$\begin{aligned} v_{m_\lambda-1,\lambda}(x) &:= \big(u_{m_\lambda-1,\lambda} *_B u_{m_\lambda-1,\lambda}\big)(x) \in \ker(B-\lambda I)^{m_\lambda}, \quad \lambda \in \sigma(B), \\ v_{m_\lambda-2,\lambda}(x) &:= \big(u_{m_\lambda-1,\lambda} *_B u_{m_\lambda-2,\lambda}\big)(x) \in \ker(B-\lambda I)^{m_\lambda}, \quad \lambda \in \sigma(B), \\ &\vdots \\ v_{0,\lambda}(x) &:= \big(u_{m_\lambda-1,\lambda} *_B u_{m_{0,\lambda}}\big)(x) \in \ker(B-\lambda I)^{m_\lambda}, \qquad \lambda \in \sigma(B). \end{aligned}$$

Лемма 2. *Система функций $v_{m_\lambda-1,\lambda}(x)$, $v_{m_\lambda-2,\lambda}(x)$, …, $v_{0,\lambda}(x)$ линейно независима тогда и только тогда, когда $v_{0,\lambda}(x)$ — ненулевой элемент пространства $L_2(0,1)$.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha_{m_\lambda-1,\lambda} v_{m_\lambda-1,\lambda}(x) + \alpha_{m_\lambda-2,\lambda} v_{m_\lambda-2,\lambda}(x) + \ldots + \alpha_{0,\lambda} v_{0,\lambda}(x) \equiv 0. \tag{23}$$

Поскольку

$$(B_{\max} - \lambda I)^{m_\lambda-1} v_{s,\lambda}(x) = 0, \quad s = 0,1,\ldots,m_\lambda-2,$$

то, применяя оператор $(B_{\max}-\lambda I)^{m_\lambda-1}$ к обеим частям равенства (23), получим

$$\alpha_{m_\lambda-1,\lambda} v_{0,\lambda}(x) \equiv 0.$$

Если $v_{0,\lambda}(x)$ — ненулевой элемент в $L_2(0,1)$, то $\alpha_{m_\lambda-1,\lambda} = 0$. Таким образом, соотношение (23) можно переписать в виде

$$\alpha_{m_\lambda-2,\lambda} v_{m_\lambda-2,\lambda}(x) + \ldots + \alpha_{0,\lambda} v_{0,\lambda}(x) \equiv 0. \tag{24}$$

Применяя оператор $(B_{\max}-\lambda I)^{m_\lambda-2}$ к обеим частям равенства (24), получим

$$\alpha_{m_\lambda-2,\lambda} v_{0,\lambda}(x) \equiv 0.$$

Отсюда $\alpha_{m_\lambda-2,\lambda} = 0$. Продолжая указанные рассуждения, находим

$$\alpha_{m_\lambda-1,\lambda} = 0, \quad \alpha_{m_\lambda-2,\lambda} = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_{0,\lambda}(x) = 0.$$

Лемма 2 доказана. □

Выпишем более детальные формулы для функций $u_{m_\lambda-1,\lambda}(x)$, $u_{m_\lambda-2,\lambda}(x)$, …, $u_{0,\lambda}(x)$. Для этого разложим функцию в окрестности $\mu=\lambda$ в ряд Тейлора

$$\frac{(\mu-\lambda)^{m_\lambda}}{\Delta(\mu)} = \alpha_0 + \alpha_1(\mu-\lambda) + \alpha_2(\mu-\lambda)^2 + \ldots, \tag{25}$$

где

$$\alpha_0^{-1} = \frac{1}{m_\lambda!}\Delta^{(m_\lambda)}(\mu) \neq 0.$$

Последнее неравенство означает, что λ — нуль функции $\Delta(\mu)$ кратности m_λ. Вспоминая определение функции $u_{m_\lambda-1,\lambda}(x)$, с учетом соотношения (25) получим формулу

$$u_{m_\lambda-1,\lambda}(x) = \sum_{s=0}^{m_\lambda-1} \alpha_s \frac{1}{(m_\lambda-s-1)!}\frac{d^{m_\lambda-s-1}}{d\lambda^{m_\lambda-s-1}}\varphi(x,\lambda).$$

Заметим, что функции

$$y_{m_\lambda-s-1}(x,\lambda) = \frac{1}{(m_\lambda-s-1)!}\frac{d^{m_\lambda-s-1}}{d\lambda^{m_\lambda-s-1}}\varphi(x,\lambda), \quad s = 0,1,\ldots,m_\lambda-1,$$

удовлетворяют уравнению

$$-\frac{d^2}{dx^2}y_s(x,\lambda) + q(x)y_s(x,\lambda) = \lambda y_s(x,\lambda) + y_s(x,\lambda),$$

где $y_{-1}(x,\lambda) \equiv 0$. В частности, верно равенство

$$-\frac{d^2}{dx^2}y_0(x,\lambda) + q(x)y_0(x,\lambda) = \lambda y_0(x,\lambda),$$

так как $y_0(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)$. С другой стороны, из определения функции $u_{0,\lambda}(x)$ вытекает

$$u_{0,\lambda}(x) = \alpha_0\varphi(x,\lambda).$$

Отсюда сразу же следует соотношение

$$v_{0,\lambda}(x) = \alpha_0\left(u_{m_\lambda-1,\lambda} *_B \varphi\right)(x).$$

Из последнего соотношения получаем неравенство

$$v_{0,\lambda}(x) \neq 0.$$

Так как $m_\lambda = \dim\ker\left((B-\lambda I)^{m_\lambda}\right)$, то согласно лемме 2 система $v_{m_\lambda-1,\lambda}(x)$, $v_{m_\lambda-2,\lambda}(x)$, …, $v_{0,\lambda}(x)$ образует базис подпространства $\ker\left((B-\lambda I)^{m_\lambda}\right)$. Поэтому для $f \in L_2(0,1)$ справедливо разложение

$$P_\lambda f(x) = C_{m_\lambda-1,\lambda}(f)v_{0,\lambda}(x) + C_{m_\lambda-2,\lambda}(f)v_{1,\lambda}(x) + \ldots + C_{0,\lambda}(f)v_{m_\lambda-1,\lambda}(x),$$

где линейные функционалы $C_{m_\lambda-1,\lambda}(f)$, …, $C_{0,\lambda}(f)$ представляют коэффициенты Фурье функции $f \in L_2(0,1)$ по системе $\Big\{\big(v_{0,\lambda}(x),\ v_{1,\lambda}(x),\ \ldots,\ v_{m_\lambda-1,\lambda}(x)\big),\ \lambda \in \sigma(B)\Big\}$. Следовательно, для произвольного элемента $f \in L_2(0,1)$ можно поставить в соответствие числовую последовательность

$$\Big\{\big(C_{0,\lambda}(f),\ \ldots,\ C_{m_\lambda-2,\lambda}(f),\ C_{m_\lambda-1,\lambda}(f)\big):\ \lambda \in \sigma(B)\Big\} \in \prod_{\lambda\in\sigma(B)} \mathbb{C}^{m_\lambda}.$$

Введем преобразование Фурье по формуле

$$f \to \hat{f} = \Big\{\big(C_{0,\lambda}(f),\ \ldots,\ C_{m_\lambda-2,\lambda}(f),\ C_{m_\lambda-1,\lambda}(f)\big):\ \lambda \in \sigma(B)\Big\}.$$

В пространстве числовых последовательностей $X := \prod\limits_{\lambda\in\sigma(B)} \mathbb{C}^{m_\lambda}$ введем свертку Коши по формуле

$$\xi *_X \eta = \mu,$$

где

$$\xi = \Big\{\big(\xi_{0,\lambda},\ \ldots,\ \xi_{m_\lambda-2,\lambda},\ \xi_{m_\lambda-1,\lambda}\big):\ \lambda \in \sigma(B)\Big\},$$

$$\eta = \Big\{\big(\eta_{0,\lambda},\ \ldots,\ \eta_{m_\lambda-2,\lambda},\ \eta_{m_\lambda-1,\lambda}\big):\ \lambda \in \sigma(B)\Big\},$$

$$\mu = \Big\{\big(\mu_{0,\lambda},\ \ldots,\ \mu_{m_\lambda-2,\lambda},\ \mu_{m_\lambda-1,\lambda}\big):\ \lambda \in \sigma(B)\Big\},$$

причем

$$\mu_{0,\lambda} = \xi_{0,\lambda}\eta_{0,\lambda}, \quad \mu_{1,\lambda} = \xi_{0,\lambda}\eta_{1,\lambda} + \xi_{1,\lambda}\eta_{0,\lambda}, \quad \ldots, \quad \mu_{m_\lambda-1,\lambda} = \sum_{j=0}^{m_\lambda-1} \xi_{j,\lambda}\eta_{m_\lambda-1-j,\lambda}.$$

В следующей лемме указана связь между $*_B$ и $*_X$.

Лемма 3. *Для любых функций* $f, g \in L_2(0,1)$ *справедливо равенство*

$$(g *_B f)^\wedge = \hat{g} *_X \hat{f}. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $f(x) = u_{m_\lambda-1,\lambda}(x)$. Тогда равенство

$$(u_{m_\lambda-1,\lambda} *_B g)^\wedge = \widehat{v_{m_\lambda-1,\lambda}} *_X \hat{g}$$

следует из следующей цепочки равенств:

$$(u_{m_\lambda-1,\lambda} *_B g)^\wedge = (P_\lambda g)^\wedge = \Big(C_{0,\lambda}(g),\ \ldots,\ C_{m_\lambda-2,\lambda}(g),\ C_{m_\lambda-1,\lambda}(g)\Big) =$$
$$= (1,0,\ldots,0) *_X \big(C_{0,\lambda}(g),\ \ldots,\ C_{m_\lambda-2,\lambda}(g),\ C_{m_\lambda-1,\lambda}(g)\big) = \widehat{v_{m_\lambda-1,\lambda}} *_X \hat{g}.$$

Пусть теперь $f(x) = u_{s,\lambda}(x)$; тогда

$$(u_{s,\lambda} *_B g)^\wedge = \Big((B_{\max} - \lambda I)^{m_\lambda-1-s} u_{m_\lambda-1,\lambda} *_B g\Big)^\wedge =$$
$$= \Big((B-\lambda I)^{m_\lambda-1-s}(u_{m_\lambda-1,\lambda} *_B g)\Big)^\wedge = \Big((B-\lambda I)^{m_\lambda-1-s} P_\lambda g\Big)^\wedge = \Big(P_\lambda (B-\lambda I)^{m_\lambda-1-s} g\Big)^\wedge =$$
$$= \Big(C_{0,\lambda}(B-\lambda I)^{m_\lambda-1-s} g),\ \ldots,\ C_{m_\lambda-2,\lambda}((B-\lambda I)^{m_\lambda-1-s} g),\ C_{m_\lambda-1,\lambda}(B-\lambda I)^{m_\lambda-1-s} g)\Big).$$

С другой стороны, справедливы соотношения

$$C_{m_\lambda-1,\lambda}\big((B-\lambda I)g\big) = C_{m_\lambda-2,\lambda}(g), \quad \ldots, \quad C_{1,\lambda}\big((B-\lambda I)g\big) = C_{0,\lambda}(g), \quad C_{0,\lambda}\big((B-\lambda I)g\big) = 0,$$

т.е. действие оператора $(B-\lambda I)$ эквивалентно сдвигу в пространстве последовательностей. Тогда действие оператора $(B-\lambda I)^{m_\lambda-1-s}$ соответствует сдвигу вправо на $(m_\lambda - 1 - s)$ позиции. Поэтому получаем равенство

$$(u_{s,\lambda} *_B g)^\wedge = \widehat{v_{s,\lambda}} *_X \hat{g}, \quad s = 0, 1, \ldots, m_\lambda - 1.$$

Таким образом, лемма 3 доказана для всех элементов базиса $v_{m_\lambda-1,\lambda}(x)$, $v_{m_\lambda-2,\lambda}(x)$, $\ldots, v_{0,\lambda}(x)$. Отсюда следует равенство (26) для всех элементов пространства. Лемма 3 доказана полностью. □

4. Спектральный анализ. В данном разделе проводится спектральный анализ в функциональном пространстве $L_2(0,1)$ оператора B, резольвента которого имеет сверточное представление

$$(B-\lambda I)^{-1} f(x) = (k_\lambda *_B f)(x),$$

где $*_B$ — билинейная ассоциативная операция из теоремы 1. Изучим вопрос интегрального представления частичных сумм рядов Фурье. Хорошо известно (см. [13]), что частичная сумма ряда Фурье имеет вид

$$S_R(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu|=R} (B-\mu I)^{-1} f(x) d\mu = \sum_{\substack{|\lambda|<R,\\ \lambda\in\sigma(B)}} P_\lambda f(x).$$

Используя сверточное представление резольвенты оператора B, получаем

$$S_R(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu|=R} (k_\mu *_B f)(x) d\mu. \tag{27}$$

Для произвольных функций f из $L_2(0,1)$ интегральное представление частичной суммы $S_R(f,x)$ требует довольно громоздких аналитических выкладок. В случае, когда $f(x) = k_\beta(x)$, т.е. когда $f(x)$ — решение однородного уравнения $l(f) = \beta f(x)$, интегральное представление $S_R(f,x)$

вытекает из соотношения (6). Как уже указывалось, чтобы выполнялось соотношение (6), надо потребовать ассоциативность и отсутствие правых делителей нуля у свертки $*_B$. В дальнейшем считаем, что свертка $*_B$ ассоциативна и не имеет правых делителей нуля. Итак, в соотношение (27) вместо $f(x)$ поставим функцию $k(x,\beta)$. Тогда из (6) получаем

$$S_R(k(\cdot,\beta);x) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\mu|=R}(k_\mu *_B k_\beta)(x)d\mu = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\mu|=R}\frac{k(x,\beta)-k(x,\mu)}{\beta-\mu}d\mu.$$

Так же, как в разделе 1, считаем, что выполнено представление (9); в таком случае частичная сумма, соответствующая функции $\varphi(x,\beta)$, примет вид

$$S_R(\varphi(\cdot,\beta);x) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\mu|=R}\frac{\varphi(x,\beta)\Delta(\mu)-\varphi(x,\mu)\Delta(\beta)}{(\beta-\mu)\Delta(\mu)}d\mu =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\mu|=R}\frac{\varphi(x,\beta)}{\beta-\mu}d\mu + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\mu|=R}\frac{\varphi(x,\mu)\Delta(\beta)}{(\beta-\mu)\Delta(\mu)}d\mu.$$

Дальше считаем, что $|\beta|<R$, поэтому получаем соотношение

$$S_R(\varphi(\cdot,\beta);x) = \varphi(x,\beta) + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\mu|=R}\frac{\varphi(x,\mu)\Delta(\beta)}{(\beta-\mu)\Delta(\mu)}d\mu.$$

Следовательно, при $f(x)=\varphi(x,\beta)$ для остаточного члена верно интегральное представление

$$Q_R(\varphi(\cdot,\beta);x) := S_R(\varphi(\cdot,\beta);x) - \varphi(x,\beta) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\mu|=R}\frac{\varphi(x,\mu)\Delta(\beta)}{(\beta-\mu)\Delta(\mu)}d\mu. \qquad (28)$$

Лемма 4. *Если свертка $*_B$ из теоремы* 1 *ассоциативна и не имеет правых делителей нуля, то для решений $\varphi(x,\beta)$ однородного уравнения $l(\varphi)=\beta\varphi$ остаточные члены Q_R ряда Фурье имеют интегральное представление* (28).

Прежде чем сформулировать теорему о спектральном разложении функции из $L_2(0,1)$ по системе корневых функций оператора B, укажем один способ нормировки граничных условий. Область определения оператора B определяется граничными формами (12). Набор граничных форм $U_1(\cdot)$, $U_2(\cdot)$, задаваемых формулами (12), заменим эквивалентным набором таких граничных форм $V_1(\cdot)$, $V_2(\cdot)$, что

$$\begin{gathered} D(B) = \Big\{y\in W_2^2[0,1]:\ V_1(y)=0,\ V_2(y)=0\Big\}, \\ V_j(y) = V_j^0(y) - \int\limits_0^1 l(y)\rho_j(x)dx, \quad j=1,2; \end{gathered} \qquad (29)$$

здесь двухточечные граничные формы

$$V_j^0(y) = \alpha_{jk_j}y^{(k_j)}(0) + \beta_{jk_j}y^{(k_j)}(1), \quad j=1,2,\ 1\geqslant k_1\geqslant k_2\geqslant 0,$$

выбраны так, что они составляют усиленно регулярные по Биркгофу граничные формы (см. [8, с. 66-67]. Такая замена граничных форм всегда возможна; это соответствует нормировке граничных условий (см. [8]).

Лемма 5. *Существуют такие функции $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ из $L_2(0,1)$, что выполняются соотношения* (29).

Доказательство. На самом деле лемма 5 следует из результатов [2]. Выберем граничные формы $V_1^0(\cdot)$, $V_2^0(\cdot)$ так, чтобы задача

$$-y''(x)+q(x)y(x)=0, \quad 0<x<1, \qquad V_1^0(y)=0, \quad V_2^0(y)=0$$

имела только нулевое решение. Такой выбор форм V_1^0, V_2^0 всегда возможен. Рассмотрим операторное уравнение

$$By = f(x), \quad 0 < x < 1. \tag{30}$$

Так как в пространстве $L_2(0,1)$ существует B^{-1} , то существует единственное решение уравнения (30)

$$y(x) = B^{-1} f(x). \tag{31}$$

Вычислим значения функционалов при $j = 1, 2$:

$$V_j^0(y) = V_j^0(B^{-1} f).$$

Функционал $V_j^0(B^{-1}\cdot)$ является линейным над пространством $L_2(0,1)$. Покажем, что $V_j^0(B^{-1}\cdot)$ — это непрерывный функционал. Действительно, из того, что $y \in D(B)$ следует выполнение равенств

$$y(0) = \int_0^1 f(x) p_1(x) dx, \quad y'(0) = \int_0^1 f(x) p_2(x) dx.$$

Таким образом, функционалы $y(0)$ и $y'(0)$ подчинены неравенствам

$$|y(0)| \leqslant \|f\|_{L_2} \|p_1\|_{L_2}, \quad |y'(0)| \leqslant \|f\|_{L_2} \|p_2\|_{L_2}. \tag{32}$$

С другой стороны, учитывая обозначения, введенные в разделе 2, имеем

$$y(x) = y(0)c(x) + y'(0)s(x) + \int_0^x g(x,t) f(t) dt,$$

$$y'(x) = y(0)c'(x) + y'(0)s'(x) + \int_0^x g'_x(x,t) f(t) dt.$$

Отсюда вытекает, что функционалы $y(1)$ и $y'(1)$ также подчинены неравенствам

$$|y(1)| \leqslant C\|f\|_{L_2}, \quad |y'(1)| \leqslant C\|f\|_{L_2}, \tag{33}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от $f(\cdot)$. Следовательно, функционалы $V_1^0(B^{-1}\cdot)$, $V_2^0(B^{-1}\cdot)$ согласно неравенствам (32), (33) и

$$\|B^{-1} f\|_{L_2} \leqslant C\|f\|_{L_2}$$

также ограничены в пространстве $L_2(0,1)$. Таким образом, функционалы $V_1^0(B^{-1}\cdot)$, $V_2^0(B^{-1}\cdot)$ являются линейными и ограниченными в $L_2(0,1)$. По теореме Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в $L_2(0,1)$ существуют такие функции ρ_1, ρ_2 из $L_2(0,1)$, что

$$V_j^0(B^{-1} \cdot f) = \int_0^1 f(x) \rho_j(x) dx, \quad j = 1, 2.$$

Таким образом, лемма 5 доказана. □

Основная теорема о разложении сформулирована во введении в виде теоремы 2.

Доказательство основной теоремы следует из утверждения А. А. Шкаликова (см. [9]) и следующих рассуждений.

Итак, согласно результатам [9] имеем

$$f(x) = \lim_{R_K \to \infty} \left(-\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu| = R_K} (B - \mu I)^{-1} f(x) d\mu \right),$$

где предполагается, что существует возрастающая последовательность $\{R_K\}$, $R_1 < R_2 < \ldots$. Так как по условию теоремы спектр оператора B принадлежит некоторой горизонтальной полосе $|\Im\mu| < h$ и согласно [8, лемма 1, с. 93] верна оценка

$$\left|G(x,s,\mu)\right| \leqslant \frac{M}{|\mu|^{1/2}}, \quad |\mu| = R_K,$$

то получаем предельное равенство (11). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
2. *Дезин А. А.* Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач/ Тр. МИАН. — М.: Наука, 2000. — *229*. — С. 3–175.
3. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием// Диффер. уравн. — 1977. — *13*, № 2. — С. 294–304.
4. *Кангужин Б. Е., Гани С. Н.* Свертки, порождаемые дифференциальными операторами на отрезке// Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. — 2004. — № 1. — С. 29–33.
5. *Кангужин Б. Е., Ружанский М. Е., Токмагамбетов Н. Е.* О сверткваx в гильбертовых пространствах. —Функц. анализ и его прил. Т.51. № 1. 2017. С. 77–80.
6. *Кангужин Б. Е., Токмагамбетов Н. Е.* Свертка, преобразование Фурье и пространства Соболева, порождаемые нелокальной задачей Ионкина// Уфим. мат. ж. — 2015. — *7*, № 4. — С. 80–92.
7. *Кокебаев Б. К., Отелбаев М., Шыныбеков А. Н.* К вопросам расширений и сужений операторов// Докл. АН СССР. — 1983. — *271*, № 6. — С. 1307–1313.
8. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
9. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1982. — № 6. — С. 12–21.
10. *Bozhinov N.* Convolutional representations of commutants and multipliers. — Sofia: Bulg. Acad. Sci., 1988.
11. *Delgado J., Ruzhansky M., Tokmagambetov N.* Schatten classes, nuclearity and nonharmonic analysis on compact manifolds with boundary// J. Math. Pures Appl. — 2017. — *107*. — C. 758–783.
12. *Kanguzhin B., Tokmagambetov N.* The Fourier transform and convolutions generated by a differential operator with boundary condition on a segment// в кн.: Fourier Analysis: Trends in Mathematics. — Springer-Verlag, 2014. — C. 235–251,.
13. *Riesz F., Sz.-Nagy B.* Functional analysis. — Dover, 1990.
14. *Ruzhansky M., Tokmagambetov N.* Nonharmonic analysis of boundary-value problems// Int. Math. Res. Notes. — 2016. — *12*. — C. 3548–3615.
15. *Ruzhansky M., Tokmagambetov N.* Very weak solutions of wave equation for Landau Hamiltonian with irregular electromagnetic field// Lett. Math. Phys. — 2-17. — *107*. — C. 591–618.
16. *Saitoh S., Sawano Y.* Theory of reproducing kernels and applications. — Springer, 2016.

Б. Е. Кангужин
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алма-Ата, Республика Казахстан
E-mail: kanbalta@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 153 (2018). С. 108–127

УДК 517.53

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА А. Ф. ЛЕОНТЬЕВА

© 2018 г. **К. Г. МАЛЮТИН**

Посвящается члену-корреспонденту АН СССР А. Ф. Леонтьеву

Аннотация. Рассматриваются задачи свободной интерполяции в пространствах целых и аналитических в верхней полуплоскости функций конечного порядка. Приведен обзор задач и основные результаты, относящиеся к таким задачам. Критерии разрешимости сформулированы как в терминах канонических произведений узлов интерполяции, так и в терминах меры, определяемой этими узлами.

Ключевые слова: свободная интерполяция, обобщенный ряд Лагранжа, целая функция, уточненный порядок, дивизор, каноническая функция, полуплоскость, мера Рисса, обобщенный ряд Джонса.

AMS Subject Classification: 30D15, 30H50

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В 1948 г. А. Ф. Леонтьев впервые рассмотрел задачу интерполяции в пространстве целых функций конечного ненулевого порядка, которая получила впоследствии название задачи свободной интерполяции. Эта работа послужила толчком для многочисленных исследований в пространствах целых и аналитических в различных областях функций. В дальнейшем, как и в работе А. Ф. Леонтьева, критерии разрешимости таких задач, как правило, формулировались в терминах канонических произведений (т.е. произведений Вейерштрасса в пространствах целых функций, произведений Неванлинны или Бляшке в пространствах функций аналитических в полуплоскости и т. п.) интерполируемых множеств. После работы Л. Карлесона (1958 г.), в которой была решена задача свободной интерполяции в пространстве функций аналитических и ограниченных в единичном круге, эти критерии стали дополняться различными критериями, формулируемыми в терминах меры, определяемой узлами интерполяции. Термин «свободная интерполяция» связан с тем, что на значения интерполирующей функции, принадлежащей данному пространству функций, накладываются наименьшие ограничения, которым обязательно должна удовлетворять любая функция из этого пространства. В настоящей работе рассматриваются задачи свободной интерполяции в пространствах целых и аналитических в верхней полуплоскости функций конечного порядка. Приведен обзор задач и основные результаты, относящиеся к таким задачам.

Критерии разрешимости сформулированы как в терминах канонических произведений узлов интерполяции, так и в терминах меры, определяемой этими узлами.

Классическая *задача интерполяции* состоит в отыскании функции F данного класса, принимающей в заданных точках $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *узлах интерполяции* — заданные значения $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$F(a_n) = b_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

При решении общей задачи интерполяции (1) обычно используется следующая процедура: строится интерполяционный ряд

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathcal{P}_n(z), \quad \mathcal{P}_n(a_k) = \delta_{nk},$$

где δ_{nk} — *символ Кронекера*. Если этот ряд сходится, то его сумма дает решение задачи (1).

В дальнейшем мы будем рассматривать интерполяционные задачи в различных пространствах целых функций и функций, аналитических в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, и всюду понимать сходимость интерполяционного ряда в смысле равномерной сходимости на каждом компакте.

Пусть $f(z)$ — целая функция,

$$M(f, r) = \max_{0 \leqslant \varphi < 2\pi} |f(re^{i\varphi})|.$$

Через $[\rho, \infty]$ обозначим пространство целых функций, порядок которых не превышает ρ, $\rho \geqslant 0$, т.е. таких, что

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ M(f, r)}{\ln r} \leqslant \rho.$$

В 1948 г. А. Ф. Леонтьев впервые рассмотрел задачу, получившую впоследствии название *задачи свободной интерполяции* (см. [20]): определить, каким условиям должна удовлетворять последовательность различных точек $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $|a_n| \uparrow \infty$, комплексной плоскости для того, чтобы по каждой последовательности чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей неравенству

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln |a_n|} \leqslant \rho, \quad \rho > 0, \tag{2}$$

можно было построить целую функцию $F(z)$ из пространства $[\rho, \infty]$, удовлетворяющую равенствам (1). Используя обобщенный ряд Лагранжа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n E(z) \varphi(z)}{(z - a_n) E'(a_n) \varphi(a_n)} \tag{3}$$

с $\varphi(z) = (z/a_n)^{S_n}$ (здесь $E(z)$ — каноническая функция, т.е. каноническое произведение Вейерштрасса, последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, S_n — последовательность натуральных чисел, обеспечивающая сходимость ряда (3) в пространстве $[\rho, \infty]$), А. Ф. Леонтьев доказал следующую теорему.

Теорема 1.1. *Для того чтобы задача* (1) *была разрешима в пространстве* $[\rho, \infty]$, $\rho > 0$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\ln |a_n|} \ln^+ \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} \leqslant \rho.$$

Ранее некоторые достаточные условия разрешимости задачи (1) в пространстве $[\rho, \infty]$ нашли М. Мурси и Э. Уинн (см. [55]) и А. Макинтайр и Р. Уилсон [52]. В [28] были найдены новые критерии разрешимости задачи (1) в пространстве $[\rho, \infty]$ в терминах распределения единичных масс в узлах интерполяции. В качестве характеристики такого распределения выбирается семейство функций

$$\Phi_z(\alpha) = \frac{(n_z(\alpha|z|) - 1)^+}{|z|^{\varrho(|z|)}},$$

где через $n_z(t)$ обозначено число точек последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ в круге $\{\zeta : \ |\zeta - z| \leqslant t\}$ ($a^+ = \max\{a, 0\}$). На основе результатов А. Ф. Леонтьева было доказано, что для разрешимости задачи (1) в пространстве $[\rho, \infty]$, необходимо и достаточно существование такого уточненного порядка[1] $\varrho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \varrho(r) \leqslant \rho$, что

$$\Phi_z(\alpha) \leqslant \frac{1}{\ln(1/\alpha)},$$

и чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} < \infty.$$

Заметим, что условие (2) является естественным необходимым условием разрешимости интерполяционной задачи (1) в пространстве $[\rho, \infty]$ и наименее ограничительным на значения b_n, поэтому такие задачи и называются задачами свободной интерполяции.

2. Задачи свободной интерполяции в пространствах целых функций конечного порядка

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением задач свободной интерполяции в пространствах целых функций конечного порядка, оставляя за рамками многочисленные исследования в пространствах целых функций, рост которых определяется различными весовыми функциями.

2.1. Задачи интерполяции в пространстве $[\rho, \infty]$. Пусть $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *дивизор*, т.е. множество различных комплексных чисел $\{a_n = r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ вместе с их кратностями $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$. По заданному дивизору D определим меру

$$\mu_D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \delta(z - a_n),$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака. Будем обозначать символом $C(z,t)$ замкнутый круг с центром в точке z радиуса t:

$$C(z,t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < t\} \leqslant t\}.$$

Определим семейство функций

$$\tilde{\Phi}_D(z, \alpha) = \Big(\mu_D(C(z, \alpha|z|)) - q_n\Big)^+,$$

где q_n — кратность ближайшей к z точки дивизора D (если таких точек несколько, то берем точку с наибольшей кратностью; если и таких несколько — любую из них, например, точку с наибольшей мнимой частью). Из формулы Коши для производных нетрудно получить следующее утверждение: если $f \in [\rho, \infty]$, то неравенство

$$|f^{(k-1)}(z)| \leqslant (k-1)! \exp[|z|^{\rho+\varepsilon}], \quad k \in \mathbb{N},$$

выполняется при фиксированном $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших z, $|z| > r_\varepsilon$. Это неравенство мотивирует введение следующего понятия.

Определение 2.1. Дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *интерполяционным* в пространстве $[\rho, \infty]$, если для любой последовательности комплексных чисел $b_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \ln^+ \sup_{1\leqslant k\leqslant q_n} \frac{|b_{n,k}|}{(k-1)!} \leqslant \rho,$$

существует функция $F \in [\rho, \infty]$, обладающая свойством

$$F(a_n)^{(k-1)} = b_{n,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, q_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

[1]Определение уточненного порядка см. ниже в п. 2.2.

Изучая задачу (4), обобщенный ряд Лагранжа (3) обычно заменяют рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(z)\left[\sum_{j=1}^{q_n}\frac{1}{(z-a_n)^j}\left(\sum_{k=0}^{q_n-j}\frac{b_{n,k+1}}{k!(q_n-k-j)!}\left[\frac{(z-a_n)^{q_n}}{E(z)}\right]^{(q_n-k-j)}_{z=a_n}\right)-h_n(z)\right], \tag{5}$$

в котором полиномы $h_n(z)$ выбираются таким образом, чтобы ряд сходился на компактах и его сумма принадлежала нужному пространству.

Одним из первых задачу (4) в пространстве $[\rho,\infty]$ рассмотрел М. Мурси (см. [54]) при некоторых специальных предположениях относительно узлов интерполяции. Случай кратной интерполяции был позже рассмотрен Г. П. Лапиным (см. [14]), который рассматривал только случай $\rho>0$ и получил критерии разрешимости задачи (4) в терминах канонических произведений типа А. Ф. Леонтьева. Задачу (4) Лапин рассматривал при следующих ограничениях на значения в узлах интерполяции:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln|a_n|}\ln^+\ln^+\sup_{1\leqslant k\leqslant q_n}|b_{n,k}|\leqslant\rho,$$

т.е. в такой постановке задача не является задачей свободной интерполяции.

Окончательно задача (4) в классе $[\rho,\infty]$, включая случай $\rho=0$, была решена в совместной работе К. Г. Малютина и О. А. Боженко [37].

Теорема 2.1 (см. [37]). *Следующие три утверждения эквивалентны.*

1. *Дивизор D является интерполяционным в классе $[\rho,\infty]$.*
2. *Каноническая функция $E_D(z)$ дивизора D удовлетворяет условию*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln|a_n|}\ln^+\ln^+\frac{q_n!}{|E_D^{(q_n)}(a_n)|}\leqslant\rho.$$

3. *Для любого $\varepsilon>0$ выполняются неравенства*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}<\infty,\quad \limsup_{n\to\infty}\frac{\ln q_n}{\ln|a_n|}\leqslant\rho,\quad \limsup_{z\to\infty}\frac{1}{\ln|z|}\ln^+\int_0^1\frac{\tilde\Phi_D(z,\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\leqslant\rho. \tag{6}$$

Заметим (см. [38]), что последнее неравенство в (6) эквивалентно следующему утверждению: существует такой уточненный порядок $\varrho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty}\varrho(r)\leqslant\rho$, что

$$\tilde\Phi_D(z,\alpha)\leqslant\frac{1}{|z|^{\varrho(|z|)}\ln(1/\alpha)}.$$

2.2. Интерполяция в пространстве $[\varrho(r),\infty)$. Если интерполируемая последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\ln^+|b_n|\leqslant K|a_n|^\rho$$

при некотором $K>0$, не зависящем от n, то задачу интерполяции (1) естественно рассматривать в пространстве таких целых функций $[\rho,\infty)$, что неравенство

$$\ln^+M(f,r)\leqslant K_f r^\rho$$

выполняется для всех $r\geqslant 1$ при некотором $K_f>0$, не зависящем от r. При нецелом $\rho>0$ А. Ф. Леонтьев доказал следующий критерий.

Теорема 2.2 (см. [21]). *Для того чтобы задача* (1) *была разрешима в пространстве* $[\rho,\infty)$ *при нецелом $\rho>0$, необходимо и достаточно, чтобы каноническая функция $E(z)$ последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяла условию*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|^\rho}\ln\frac{1}{|E'(a_n)|}<\infty.$$

Полностью, без ограничения на порядок $\rho>0$, А. Ф. Леонтьев решил эту задачу в классе $[\rho,\infty)$ в других терминах в [22].

Теорема 2.3 (А. Ф. Леонтьев). *Для того чтобы задача* (1) *была разрешима в пространстве* $[\rho, \infty)$ *при* $\rho > 0$*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие*:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{|a_n|^\rho} < \infty, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^\rho} \ln \frac{1}{\eta_n} < \infty,$$

где

$$\eta_n = \prod_{k\neq n} \left(1 - \frac{a_n}{a_k}\right), \quad (1-\delta)|a_n| < |a_k| < (1+\delta)|a_n|.$$

В более общем классе $[\varrho(r), \infty)$, где $\varrho(r)$ — уточненный порядок, задачу свободной интерполяции (1) решила О. С. Фирсакова.

Функция $\varrho(r)$, определенная на полуоси $(0, \infty)$, удовлетворяющая условию Липшица на любом сегменте $[a, b] \subset (0, \infty)$, называется *уточненным порядком в смысле Бутру*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$-\infty < \alpha = \liminf_{r\to\infty} \varrho(r) \leqslant \rho = \limsup_{r\to\infty} \varrho(r) \leqslant +\infty, \quad \lim_{r\to\infty} \varrho'(r) r \ln r = 0.$$

Если $\alpha = \rho \geqslant 0$, то функция $\varrho(r)$ называется *уточненным порядком в смысле Валирона* (часто просто уточненным порядком). В случае, если число ρ в определении уточненного порядка в смысле Валирона равно нулю, то уточненный порядок $\varrho(r)$ называется *нулевым уточненным порядком.* Функцию $r^{\varrho(r)}$ будем обозначать через $V(r)$. Далее будем рассматривать только случай уточненного порядка в смысле Валирона, не оговаривая это особо.

Пусть $\varrho(r)$ — уточненный порядок. Символом $[\varrho(r), \infty)$ обозначим пространство целых функций f, для которых выполняется неравенство

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(f, r)}{V(r)} < \infty.$$

О. С. Фирсакова (см. [45]) нашла критерии разрешимости задачи свободной интерполяции (1) в пространстве $[\varrho(r), \infty)$ при условии

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ |b_n|}{V(|a_n|)} < \infty,$$

в форме, аналогичной условиям теорем А. Ф. Леонтьева. По последовательности узлов интерполяции, удовлетворяющей условию

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{V(|a_n|)} < \infty, \tag{7}$$

строится присоединенная функция $L(z)$[1]. Присоединенная функция всегда существует, но не единственна.

О. С. Фирсакова доказала, что для того, чтобы задача (1) была разрешима в пространстве $[\varrho(r), \infty)$, необходимо, чтобы любая присоединенная функция $L(z)$ удовлетворяла условию

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|L'(a_n)|} < \infty, \tag{8}$$

и достаточно, чтобы некоторая присоединенная функция удовлетворяла условию (8).

На основе результатов А. Ф. Леонтьева и О. С. Фирсаковой в [28] были получены критерии разрешимости задачи (1) в пространстве $[\varrho(r), \infty)$ в терминах функции распределения единичных масс $\Phi_z(\alpha)$.

Теорема 2.4 (К. Г. Малютин). *Пусть* $\varrho(r)$ *— уточненный порядок,* $\lim_{r\to\infty} \varrho(r) = \rho > 0$*. Для того чтобы задача* (1) *была разрешима в пространстве* $[\varrho(r), \infty)$*, необходимо и достаточно,*

[1]Определение присоединенной функции см., например, в [19, гл. 4].

чтобы выполнялось условие (7) *и*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \int\limits_0^{1/2} \frac{\Phi_z(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha < \infty.$$

Как и в случае пространства $[\rho,\infty]$, формула Коши для производных обосновывает следующее определение.

Определение 2.2. Дивизор $D=\{a_n,q_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *интерполяционным* в пространстве $[\varrho(r),\infty)$, если для любой последовательности комплексных чисел $b_{n,k}$, $k=1,2,\dots,q_n$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{n\to\infty} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln^{+} \sup_{1\leqslant k\leqslant q_n} \frac{|b_{n,k}|}{(k-1)!} < \infty,$$

существует функция $F\in[\rho,\infty]$Ю обладающая свойством (4).

Г. П. Лапин применил методы А. Ф. Леонтьева к исследованию задачи кратной интерполяции (4) в пространстве $[\rho,\infty)$. В [15] им был получен критерий ее разрешимости в этом классе.

Теория кратной интерполяции в пространстве $[\varrho(r),\infty)$ получила свое дальнейшее развитие в работе А. В. Братищева и Ю. Ф. Коробейника [6], где впервые рассматривался случай нулевого уточненного порядка, который, однако, требует корректировки. Поэтому приведем результат А. В. Братищева и Ю. Ф. Коробейника для ненулевого уточненного порядка.

Теорема 2.5. *Пусть $\varrho(r)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{r\to\infty}\varrho(r)=\rho>0$. Для того чтобы дивизор D был интерполяционным в пространстве $[\varrho(r),\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (7) *и*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \max_{1\leqslant j\leqslant q_n} \left| \frac{1}{j!} \left[\frac{(z-a_n)^{q_n}}{\tilde{\eta}_n^{\delta}(z)} \right]_{z=a_n}^{(j-1)} \right| < \infty,$$

где

$$\tilde{\eta}_n^{\delta}(z) = \prod_{|a_k-a_n|<\delta|a_n|} \left(1-\frac{z}{a_k}\right)^{q_k}, \quad 0<\delta<1,$$

и δ фиксировано.

Задача простой интерполяции (1), в пространстве $[\varrho(r),\infty)$ в случае нулевого порядка была изучена в совместной работе О. А. Боженко, А. Ф. Гришина и К. Г. Малютина [3]. Результат А. В. Братищева и Ю. Ф. Коробейника был также дополнен геометрическим критерием. Пусть функция $N(t)$ определяется формулой

$$N(t) = \int\limits_0^t \frac{n(x)}{x}\, dx,$$

где через $n(x)$ обозначено число точек последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ в круге $\{\zeta : |z|\leqslant x\}$ (мы считаем, не ограничивая общности, что $0\notin\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, так как это ограничение в рамках рассматриваемых вопросов всегда легко снимается).

Теорема 2.6 (см. [3])**.** *Пусть $\varrho(r)$ — нулевой уточненный порядок, удовлетворяющий условию*

$$\sigma = \liminf_{r\to+\infty} \frac{V(r)}{\ln r} = +\infty.$$

Следующие утверждения эквивалентны.

1. *Дивизор D является интерполяционным в пространстве $[\varrho(r),\infty)$.*
2. *Выполняются следующие условия:*

(2.1) *справедливы неравенства*

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r)}{V(r)}<\infty,\quad \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{V(|a_n|)}\ln\frac{1}{|E'(a_n)|}<\infty,$$

где

$$E(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right);$$

(2.2) *для любого числа* $M>0$ *существует такая целая функция* $g\in[\varrho(r),\infty)$, *что для любого* n *в круге* $\{z:|z-a_n|<1/(1+|a_n|)\}$ *выполняется неравенство*

$$\ln|g(z)|\geqslant MV(|a_n|).$$

3. *Выполняется условие* (2.2) *и*

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r)}{V(r)}<\infty,\quad \sup_{z\in\mathbb{C}}\int\limits_0^{\delta}\frac{\Phi_z(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha<\infty,$$

где $\delta>0$ — *произвольное фиксированное число.*

Отметим, что в случае, когда $\lim\limits_{r\to\infty}\varrho(r)=\rho>0$ в теоремах, аналогичных теореме 2.6, нет аналога условия (2.2). Дело в том, что в этом случае, как показано в [28], условие (2.2) является следствием предыдущих условий. Однако, рассуждения из [28] не распространяются на случай, когда $\rho=0$. Поэтому в случае нулевого порядка появляется специфическое условие (2.2).

В последние десятилетия для исследования задач (1) и (4), кроме рядов (3) и (5), начал активно применяться метод Хермандера решения $\bar{\partial}$-проблемы, который ранее применялся в многомерном комплексном анализе. В исследовании задач (1) и (4) этот метод был впервые применен Б. Берндтссоном (см. [48]) и К. А. Бернстейном и Б. А. Тейлором (см. [49]). Обозначим через A_ϕ класс целых функций, в котором ищется решение задачи (4) и рост которых $|f(z)|\leqslant A\exp(B\phi(z))$ определяется некоторой субгармонической функцией $\phi(z)$ с некоторыми константами $A,B>0$. Функция $\phi(z)$ удовлетворяет условиям:

1) $\phi(z)\geqslant 0$,
2) $\ln(1+|z|^2)=O(\phi(z))$,
3) существуют такие константы $C,D>0$, что $\phi(\zeta)\leqslant C\phi(z)+D$ для всех $|\zeta-z|\leqslant 1$.

Класс A_ϕ при некоторой функции $\phi(z)$ может содержать функции бесконечного порядка. Очевидно, что в этом случае значения в узлах интерполяции должны удовлетворять неравенству

$$\sup_{n\to\infty}\frac{1}{\phi(a_n)}\ln^+\sup_{1\leqslant k\leqslant q_n}\frac{|b_{n,k}|}{(k-1)!}<\infty.$$

Были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи в виде критериев А. Ф. Леонтьева:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{\phi(a_n)}\ln\frac{q_n!}{|E^{(q_n)}(a_n)|}<\infty.$$

У. Сквайрс [56], отправляясь от результатов Бернстейна и Тейлора, получил эти критерии, как и в работе [28], в терминах функции $\Phi_z(\alpha)$.

2.3. Интерполяция в пространстве $[\varrho(r),h(\theta)]$**.** Пусть $\varrho(r)$ — уточненный порядок,

$$\lim_{r\to\infty}\varrho(r)=\rho>0.$$

Если $f(z)$ — голоморфная функция внутри угла $\alpha<\arg z<\beta$ и удовлетворяет в нем неравенству

$$\ln|f(z)|\leqslant M_1V(|z|)+M_2,$$

с некоторыми постоянными $M_1,M_2>0$, то функция

$$h_f(\theta)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{V(r)},\quad \theta\in(\alpha,\beta),$$

называется *индикатором Фрагмена—Линделёфа*, или *индикатором роста* функции f (при уточненном порядке $\varrho(r)$).

Пусть $h(\theta)$ — ρ-тригонометрически выпуклая функция на отрезке $[0, 2\pi]$. Символом $[\varrho(r), h(\theta)]$ будем обозначать класс целых функций f, индикатор которых не превосходит $h(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Через $[\varrho(r), h(\theta)]_r$ ($[\varrho(r), h(\theta)]_r \subset [\varrho(r), h(\theta)]$) будем обозначать класс целых функций f вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho(r)$ в смысле Левина—Пфлюгера (см. [17]), индикатор которых не превосходит $h(\theta)$.

В [16] Б. Я. Левин рассмотрел задачу интерполяции (1) с узлами, образующими регулярное множество (R-множество) с показателем $\varrho(r)$ (см. [17, §2, гл. 2]). В этом случае для существования целой функции $F \in [\varrho(r), h(\theta)]$, удовлетворяющей условиям интерполяции (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{\ln|b_n|}{V(|a_n|)} - h(\arg a_n)\right] \leqslant 0. \tag{9}$$

О. С. Фирсакова (см. [45]) обобщила результат Б. Я. Левина из [16] на случай множества узлов интерполяции, обладающих лишь свойством правильной распределенности. Она доказала, что в этом случае для любой последовательности чисел, удовлетворяющих условию (9), существует функция $F \in [\varrho(r), h(\theta)]$, решающая задачу (1), тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{V(|a_n|)}\ln\frac{1}{|E'(a_n)|} + h(\arg a_n)\right] \leqslant 0.$$

В [28] было показано, что это условие эквивалентно условию

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{z\in\mathbb{C}}\int\limits_0^\delta \frac{\Phi_z(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha = 0.$$

Наиболее законченный результат для пространств $[\varrho(r), h(\theta)]$ и $[\varrho(r), h(\theta)]_r$ принадлежит А. Ф. Гришину и А. М. Руссаковскому (см. [13]). Чтобы сформулировать их результат, введем следующее определение.

Определение 2.3. Дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^\infty$ называется *интерполяционным* в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]$ (в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]_r$), если для любой последовательности комплексных чисел $b_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{V|a_n|}\ln^+\sup_{1\leqslant k\leqslant q_n}\frac{|b_{n,k}|}{(k-1)!} - h(\arg a_n)\right] \leqslant 0,$$

существует функция $F \in [\varrho(r), h(\theta)]$ ($F \in [\varrho(r), h(\theta)]_r$), обладающая свойством (4).

Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$,

$$K_\sigma = \overline{\bigcup_{z\in K} C(z,\sigma)},$$

K^t — гомотетия компакта K с центром в точке $z = 0$ и с коэффициентом t. Обозначим через

$$d_D(K) = \lim_{\sigma\to 0}\limsup_{t\to\infty}\frac{\mu_D((K_\sigma)^t)}{V(t)}.$$

Введем также следующие обозначения. Если $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^\infty$ — дивизор, то $|D| = \bigcup\limits_n a_n$. Включение $D \subset D' = \{s_n, p_n\}_{n=1}^\infty$ означает, что $|D| \subset |D'|$, и если $a_n = s_n$, то $q_n \leqslant p_n$. Через D_f будем обозначать дивизор корней функции f.

Теорема 2.7 (см. [13])**.** *Пусть $\varrho(r)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{r\to\infty}\varrho(r) = \rho > 0$, $h(\theta)$ — 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая функция. Тогда следующие пять утверждений эквивалентны.*

1. *Дивизор D является интерполяционным в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]$.*

2. *Дивизор D является интерполяционным в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]_r$.*
3. *Существует такая функция $f \in [\varrho(r), h(\theta)]$, что $D \subset D_f$, причем*

$$\limsup_{\substack{a_n\to\infty\\ a_n\in|D|}} \left[\frac{1}{V(|a_n|)}\ln\left|\frac{q_n!}{f^{(q_n)}(a_n)}\right| + h(\arg a_n)\right] = 0. \tag{10}$$

4. *Существует такая функция $f \in [\varrho(r), h(\theta)]_r$, что $D \subset D_f = \{s_n, p_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем*

$$\limsup_{n\to\infty} \left[\frac{1}{V(|s_n|)}\ln\left|\frac{p_n!}{f^{(p_n)}(s_n)}\right| + h(\arg s_n)\right] = 0.$$

5. *Для любого компакта $K \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство $d_D(K) \leqslant \mu_H(K)$, где $\mu_H(K)$ — риссовская мера субгармонической функции $H(z) = h(\arg z)|z|^{\rho}$;*

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{1}{V(|z|)}\int_0^{\delta}\frac{\Phi_D(z,\alpha)}{\alpha}\,d\alpha = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{q_n\ln|a_n|}{V(|a_n|)} = 0.$$

Несколько ранее А. В. Братищев (см. [5]) и А. М. Руссаковский (см. [40, 41]) рассматривали частные случаи задачи (4) в пространствах $[\varrho(r), h(\theta)]$ и $[\varrho(r), h_1(\theta)]$, где $h_1(\theta)$ — ρ-тригонометрически выпуклая функция, которая, вообще говоря, отлична от $h(\theta)$. В [40, 41] было показано, что условие (10) является достаточным для разрешимости задачи (4) в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]$, а если функция $E(z)$ является функцией вполне регулярного роста — то и необходимым. А. В. Братищев нашел критерии разрешимости задачи (4) в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]$ при условии, что

$$\sup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{V|a_n|}\ln^{+}\sup_{1\leqslant k\leqslant q_n}\frac{|b_{n,k}|}{(k-1)!} - h_1(\arg a_n)\right] < 0,$$

а также в пространстве $[\varrho(r), h_1(\theta))$ для данных $b_{n,k}$, удовлетворяющих этому строгому неравенству.

Отметим, что сформулированная теорема Гришина—Руссаковского является в некотором смысле завершающим исследованием по задаче свободной интерполяции в пространствах $[\varrho(r), h(\theta)]$ и $[\varrho(r), h(\theta)]_r$. Однако остается следующая проблема.

Проблема. Рассмотреть задачу (4) в пространствах $[\varrho(r), h(\theta)]$ и $[\varrho(r), h(\theta)]_r$, когда $\varrho(r)$ — нулевой уточненный порядок.

3. Задачи свободной интерполяции в пространствах аналитических в полуплоскости функций конечного порядка

В этом разделе рассмотрены задачи свободной интерполяции в пространствах аналитических в полуплоскости функций конечного порядка. Замечательным является тот факт, что идеи А. Ф. Леонтьева о свободной интерполяции в пространствах целых функций нашли свое развитие в проблемах интерполяции в полуплоскости.

3.1. Интерполяция в H^{∞}. Немного отвлекаясь от заявленной проблематики, начнем с обсуждения ставшей уже классикой задачи свободной интерполяции в пространстве H^{∞} функций, аналитических и ограниченных в в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_+$ называется *интерполяционной последовательностью в пространстве* H^{∞}, если для всякой ограниченной последовательности комплексных чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует функция $F(z) \in H^{\infty}$, удовлетворяющая равенствам (1).

Необходимое и достаточное условие для интерполяционности последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве H^{∞} в терминах канонического произведения $E(z)$ (в данном случае произведения Бляшке с простыми нулями в точках a_n), аналогичное критериям А. Ф. Леонтьева, состоит в выполнении неравенства

$$\sup_n \frac{1}{\operatorname{Im} a_n |E'(a_n)|} \leqslant \frac{1}{\delta}$$

при некотором $\delta > 0$.

Этот результат принадлежит Л. Карлесону (см. [50]). В [50] был также получен геометрический критерий интерполяционности последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве H^{∞}: для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{n\neq k}\frac{a_n-a_k}{a_n-\bar a_k}\geqslant \delta'>0$$

и мера $\mu(z)=\sum\limits_n \operatorname{Im} a_n\delta(z-a_n)$ была мерой Карлесона, т.е. при всех $x\in\mathbb{R}$ и всех $h>0$

$$\mu((x,x+h)\times(0,h))\leqslant Ch,$$

где $C>0$ — некоторая константа, не зависящая от x и h.

Позднее появились многочисленные работы, посвященные задачам свободной интерполяции в пространстве H^{∞}. П. Джонс [51] указал совершенно элементарный способ решения в виде ряда, отличного от ряда (3).

В связи с кратной интерполяцией в H^{∞} отметим работу В. М. Мартиросяна [39].

3.2. Задачи интерполяции в пространстве $[\rho,\infty]^+$**.** Обозначим через $[\rho,\infty]^+$ пространство аналитических в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функций порядка $\rho>0$ в смысле эквивалентных между собой определений Говорова и Титчмарша (см. [9, гл. 1]). В [18] Б. Я. Левин и Нгуен Тхыонг Уен рассмотрели интерполяционную задачу (1) в пространстве $[\rho,\infty]^+$ функций порядка $\rho>1$ в полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Они показали, что для того, чтобы по каждой последовательности $\{b_n\}_1^{\infty}$, удовлетворяющей условию (2), можно было построить функцию из пространства $[\rho,\infty]^+$, удовлетворяющую равенствам (1), необходимо, чтобы при любом $\varepsilon>0$ сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\arg a_n)}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}<\infty \tag{11}$$

и

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln|a_n|}\ln^+\ln\frac{1}{\operatorname{Im} a_n|E'(a_n)|}\leqslant\rho, \tag{12}$$

и достаточно, чтобы выполнялось условие (11) и

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln|a_n|}\ln^+\ln\frac{1}{\operatorname{Im}^2 a_n|E'(a_n)|}\leqslant\rho, \tag{13}$$

где $E(z)$ — каноническое произведение Неванлинны (см. [9, гл. 1]) множества $\{a_n\}_1^{\infty}$. При этом дополнительно предполагалось, что множество $\{a_n\}_1^{\infty}$ имеет единственную точку сгущения на бесконечности (хотя это следует и из условия (13)). Условие (13) накладывает ограничение на скорость убывания $\operatorname{Im} a_n$, а именно, справедливо асимптотическое неравенство

$$\operatorname{Im} a_n>\exp(-|a_n|^{\rho+\varepsilon}),\quad \varepsilon>0,$$

которое позволило авторам строить решение задачи (1) в виде ряда (3).

Полностью задача простой свободной интерполяции в пространстве $[\rho,\infty]^+$, $\rho>1$, была решена в [27, 28]. Было показано, что условия (11), (12) и

$$\sup_n\frac{1}{\ln|a_n|}\ln^+\ln\frac{1}{\operatorname{Im} a_n|E'(a_n)|}<\infty$$

являются необходимыми и достаточными разрешимости задачи (1) в классе $[\rho,\infty]^+$. При этом узлы интерполяции могут иметь конечные предельные точки на вещественной оси.

Условия разрешимости интерполяционной задачи в пространстве $[\rho,\infty]^+$ были сформулированы также в терминах функции $\Phi_z^+(\alpha)$:

$$\Phi_z^+(\alpha)=\frac{n^+(C(z,\alpha|z|)\setminus a_n)}{V(|z|)},$$

где $n^+(G)=\sum\limits_{a_n\in G}\sin(\arg a_n)$, a_n — точка из $\{a_n\}_1^{\infty}$, ближайшая к z (если таких точек несколько — выбираем точку с наибольшей мнимой частью).

Для разрешимости задачи (1) в пространстве $[\rho,\infty]^+$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (11) и существовал такой уточненный порядок $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$, что

$$\Phi_z^+(\alpha)\leqslant\begin{cases}\dfrac{\alpha}{q}, & \alpha\geqslant q\sin(\arg z),\quad q\in(0,1),\\ \ln\dfrac{eq\sin(\arg z)}{\alpha}, & \alpha<q\sin(\arg z).\end{cases}$$

Задачу кратной интерполяции в пространстве $[\rho,\infty]^+$, $\rho>1$, при ограничениях, аналогичных ограничениям в [18], рассматривал Нгуен Тхыонг Уен (см. [43]). Как и ранее, были получены условия, необходимые и условия достаточные для ее разрешимости, которые различаются между собой. Работы, в которых бы рассматривалась задача кратной интерполяции в пространстве $[\rho,\infty]^+$ для случая $0\leqslant\rho\leqslant 1$, автору не известны.

Проблема. Рассмотреть задачу (4) в пространстве $[\rho,\infty]^+$ для случая $\rho\geqslant 0$.

3.3. Интерполяция в пространстве $[\varrho(r),\infty)^+$. Пусть $\varrho(r)$ — уточненный порядок,

$$\lim_{r\to\infty}\varrho(r)=\rho\geqslant 0.$$

Пусть функция f голоморфна в $\mathbb{C}_+$. Уточненный порядок $\varrho(r)$ называется *формальным порядком функции* f, если существует такая константа M, что для всех $z\in\mathbb{C}_+$ выполняется неравенство

$$\ln|f(z)|<MV(|z|).$$

Уточненный порядок $\varrho(r)$ называется *полуформальным порядком функции* f, если он является ее формальным порядком и выполняется условие Б. Я. Левина: существуют такие числа $q\in(0,1)$ и $\delta\in(0,\pi/2)$, что в каждой области

$$D(R,q,\delta)=\left\{z:\ qR<|z|<\frac{R}{q},\ \delta<\arg z<\pi-\delta\right\}$$

найдется точка z, в которой выполняется неравенство

$$\ln|f(z)|>-MV(|z|).$$

Это определение принадлежит А. Ф. Гришину.

Обозначим через $[\varrho(r),\infty)^+$ пространство функций, для которых $\varrho(r)$ является формальным порядком, а через $[\varrho(r),\infty)^+_h$ — пространство функций, для которых $\varrho(r)$ является полуформальным порядком. Ясно, что $[\varrho(r),\infty)^+_h\subset[\varrho(r),\infty)^+$. Заметим, что при $\rho>1$ пространства $[\varrho(r),\infty)^+_h$ и $[\varrho(r),\infty)^+$ совпадают. Различаются они, вообще говоря, при $0\leqslant\rho\leqslant 1$.

В работах [42, 44] Н. Т. Уен рассматривал задачи простой и кратной интерполяции в пространстве $[\rho,\infty)^+$ при $\rho>1$. Были получены как необходимые, так и достаточные условия для ее разрешимости в терминах канонического произведения Неванлинны, аналогичные критериям разрешимости задачи простой интерполяции в пространстве $[\rho,\infty]^+$, полученные в [18, 43]. Полностью задача простой свободной интерполяции в пространстве $[\varrho(r),\infty)^+$ при $\rho>1$ была решена в [27, 28]. Были найдены необходимые и достаточные условия ее разрешимости как в терминах канонического произведения Неванлинны, так и в терминах меры, определяемой узлами интерполяции.

Задачи кратной интерполяции в пространствах $[\varrho(r),\infty)^+$ и $[\varrho(r),\infty)^+_h$ при $\rho>0$ были решены в [31, 36].

Пусть $D=\{a_k,q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — дивизор, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}_+$. Введем обозначения $\Lambda_z=\min\{1;\operatorname{Im}z\}$, $\Lambda_n=\Lambda_{a_n}$. Пусть $f(z)\in[\rho(r),\infty)^+$. Из формулы Коши нетрудно получить неравенство

$$|f^{(k-1)}(z)|\leqslant\frac{(k-1)!}{\Lambda_z^{k-1}}\exp[MV(|z|)],\quad k\in\mathbb{N},$$

которое мотивирует следующее определение.

Определение 3.1. Дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *интерполяционным в пространстве* $[\varrho(r), \infty)^+$ (в пространстве $[\varrho(r), \infty)_h^+$), если для любой последовательности комплексных чисел $b_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию

$$\sup_n \frac{1}{V(|a_n|)} \sup_{1 \leqslant k \leqslant q_n} \ln^+ \frac{|b_{n,k}|\Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!} < \infty, \tag{14}$$

существует функция $F \in [\varrho(r), \infty)^+$ ($F \in [\varrho(r), \infty)_h^+$), обладающая свойством (4).

По заданному дивизору $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = r_n e^{i\theta_n}$, определим следующие меры:

$$\tilde{\mu}_D^+(G) = \sum_{a_n \in G} q_n \operatorname{Im} a_n, \quad \mu_D^+(G) = \sum_{a_n \in G \setminus C(0,1)} q_n \sin\theta_n + \tilde{n}_D^+(G \cap C(0,1))$$

Определим семейство функций

$$\Phi_D^+(z, \alpha) = \frac{\mu_D^+(C(z, \alpha|z|) \setminus \{a_n\})}{V(|z|)},$$

где a_n — точка носителя дивизора D, ближайшая к точке z (если таких точек несколько, то выбираем любую из них, например, у которой наибольшая мнимая часть).

Теорема 3.1 (К. Г. Малютин). *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Дивизор D является интерполяционным в пространстве $[\varrho(r), \infty)^+$.*
2. *Дивизор D является интерполяционным в пространстве $[\varrho(r), \infty)_h^+$.*
3. *Если $\rho = \lim\limits_{r\to\infty} \varrho(r)$ — нецелое, то каноническое произведение дивизора D удовлетворяет условию*

$$\sup_n \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{q_n!}{\Lambda_n^{q_n} |E^{(q_n)}(a_n)|} < \infty. \tag{15}$$

3′. *Если $\rho \geqslant 1$ — целое, то из утверждения* 1 *следует, что условие* (15) *выполняется для любой присоединенной функции*[1] *$E(z)$ дивизора D. Наоборот, если* (15) *выполняется хотя бы для одной присоединенной функции $E(z)$ дивизора D, то справедливо утверждение* 1.

4. *Выполняются следующие условия*:

(4.1) *при любом $\delta > 0$*

$$\sup_{z \in \mathbb{C}_+} \sin(\arg z) \int_0^{\delta} \frac{\Phi_D^+(C(z, \alpha)\, d\alpha}{\alpha(\alpha + \sin(\arg z))^2} < \infty; \tag{16}$$

(4.2) *имеет место неравенство*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{q_n}{V(|a_n|)} \ln \frac{2 \operatorname{Im} a_n}{\Lambda_n} < \infty; \tag{17}$$

(4.3) *при некотором $K > 0$, не зависящем от R, справедливо неравенство*

$$\mu_D^+(C(0, R)) \leqslant K V(R) \tag{18}$$

Задача кратной интерполяции в пространствах $[\varrho(r), \infty)^+$ и $[\varrho(r), \infty)_h^+$ для нулевого уточненного порядка $\varrho(r)$ (т.е. при $\rho = 0$) была решена в совместной работе О. А. Боженко и К. Г. Малютина [2]. В этом случае формулировка критериев ее разрешимости полностью аналогична формулировке последней теоремы, только вместо (18) требуется выполнение условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \operatorname{Im} a_n}{1 + |a_n|^2} < \infty.$$

[1] Определение присоединенной функции см. в [36].

Приведем формулу для интерполяционного ряда типа Джонса, который решает интерполяционную задачу (4) в пространстве $[\varrho(r),\infty)^+$. Введем обозначение

$$\alpha_{n,m}=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{i=0}^{q_n-m}\frac{1}{i!}\gamma_{n,q_n+1-m-i}b_{n,i+1},$$

где

$$\gamma_{n,k}=\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\frac{(z-a_n)^{q_n}}{E(z)}\bigg|_{z=a_n},\quad k=1,\dots,q_n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Перенумеровав точки дивизора D в случае необходимости, можно считать, что

$$\frac{\operatorname{Im}a_{n+1}}{1+r_{n+1}^2}\leqslant\frac{\operatorname{Im}a_n}{1+r_n^2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Положим

$$\alpha_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1+\bar{a_k}(z+i\Lambda_n)}{i(\bar{a_k}-z-i\Lambda_n)}\frac{\operatorname{Im}a_k}{(1+r_k^2)^{\frac{[\rho]+3}{2}}},\quad n=1,2,\dots.$$

Ряд, определяющий функции $\alpha_n(z)$, сходится равномерно в каждой области

$$D^n_{r,\delta}=\Big\{z:\ |z|\leqslant r,\ \operatorname{Im}z\geqslant-\Lambda_n+\delta,\ \delta>0\Big\}.$$

Для $\operatorname{Re}\alpha_n(z)$ справедлива оценка

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\operatorname{Im}a_k)^2}{(1+r_k^2)^{([\rho]+3)/2}}\frac{1}{|\bar a_k-z-i\Lambda_n|^2}\leqslant\operatorname{Re}\alpha_n(a_n)\leqslant M<\infty.$$

Положим далее

$$P_n(z)=\sum_{m=1}^{q_n}\alpha_{n,m}\left[\frac{\varphi_n(z)}{z-a_n}\right]^{(m-1)},$$

где

$$\varphi_n(z)=\left(\frac{1+z\bar a_n}{1+r_n^2}\right)^{S_n+[\rho]+3}\left(\frac{2\operatorname{Im}a_n}{z-\bar a_n}\right)^2\exp\big[\alpha_n(a_n)-\alpha_n(z)\big],$$

S_n — последовательность натуральных чисел, которая выбирается так, что ряд

$$F(z)=E(z)\sum_{n=1}^{\infty}P_n(z)$$

решает интерполяционную задачу (4) в пространстве $[\varrho(r),\infty)^+$.

Таким образом задача (4) в пространствах $[\varrho(r),\infty)^+$ и $[\varrho(r),\infty)^+_h$ решена полностью.

Заметим, что имеются многочисленные работы, в которых устанавливается связь между вопросами базисности и интерполяции в различных пространствах целых функций. Для пространств функций аналитических в полуплоскости, за исключением случая H^∞, такие задачи не рассматривались.

3.4. Интерполяция в пространстве $[\varrho(r),h(\theta)]^+$**.** Пусть $h(\theta)$ — ограниченная ρ-тригонометрически выпуклая функция на отрезке $[0,\pi]$, $\rho>0$, $\varrho(r)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{r\to\infty}\varrho(r)=\rho>0$. Обозначим через $[\varrho(r),h(\theta)]^+$ пространство функций $f\in[\varrho(r),\infty)^+$, индикатор $h_f(\theta)$ которых удовлетворяет неравенству $h_f(\theta)\leqslant h(\theta)$, $\theta\in(0,\pi)$. Через $[\varrho(r),h(\theta)]^+_r$ обозначим пространство таких функций $f\in[\varrho(r),\infty)^+$ вполне регулярного роста в смысле Гришина—Говорова в открытой полуплоскости $\mathbb{C}_+$, что $h_f(\theta)=h(\theta)$, $\theta\in(0,\pi)$. Если $h(\theta)$ — непрерывная на отрезке $[0,\pi]$ функция, то через $[\varrho(r),h(\theta)]^+$ (соответственно, $[\varrho(r),h(\theta)]^+_r$) обозначим пространство функций $f\in[\varrho(r),\infty)^+$, индикатор которых $h_f(\theta)$ удовлетворяет неравенству $h_f(\theta)\leqslant h(\theta)$ (соответственно, равенству $h_f(\theta)=h(\theta)$ и $f(z)$ — функция вполне регулярного роста в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbb{C}_+}$) при $\theta\in[0,\pi]$.

Интерполяционные задачи в пространствах $[\varrho(r), h(\theta)]^+$ (в пространствах $[\varrho(r), h(\theta)]_r^+$) различаются в зависимости от того, является ли функция $h(\theta)$ непрерывной на отрезке $[0, \pi]$ или имеет разрывы в точках 0 и π. Эти задачи были решены в [29, 30, 32–35].

Рассмотрим сначала задачу с непрерывным индикатором на отрезке $[0, \pi]$.

Определение 3.2. Пусть $h(\theta)$ — непрерывная ρ-тригонометрически выпуклая функция на отрезке $[0, \pi]$, $\rho > 0$, $\varrho(r)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{r\to\infty} \varrho(r) = \rho$. Дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^\infty$ называется *интерполяционным* в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]^+$ (в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]_r^+$), если для любой последовательности комплексных чисел $b_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условиям (14) и

$$\limsup_{|a_n|\to\infty} \left[\frac{1}{V(|a_n|)} \sup_{1\leqslant k\leqslant q_n} \ln^+ \frac{|b_{n,k}|\Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!} - h(\arg a_n) \right] \leqslant 0,$$

существует функция $F \in [\varrho(r), h(\theta)]^+$ ($F \in [\varrho(r), h(\theta)]_r^+$), обладающая свойством (4).

Естественность такого определения объясняется неравенствами Коши.

Для компакта K положим

$$d_D^+(K) = \lim_{\sigma\to 0} \limsup_{t\to\infty} \frac{\mu_D^+((K_\sigma)^t)}{V(t)}.$$

Если v — субгармоническая функция в $\mathbb{C}_+$, то обозначим через μ_v^+ ее неванлинновскую меру, т.е. $d\mu_v^+(z) = \sin\arg z\, d\mu_v(z)$, где μ_v — риссовская мера функции v.

Теорема 3.2 (К. Г. Малютин). *Пусть $\varrho(r)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{r\to\infty} \varrho(r) = \rho > 0$, $h(\theta)$ — непрерывная ρ-тригонометрически выпуклая функция на отрезке $[0, \pi]$. Тогда следующие пять утверждений эквивалентны.*

1. *Дивизор D является интерполяционным в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]^+$.*
2. *Дивизор D является интерполяционным в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]_r^+$.*
3. *Существует такая функция $f \in [\varrho(r), h(\theta)]^+$, что $D \subset D_f$, причем выполняются условия* (15) *и*
$$\lim_{a_n\to\infty a_n\in|D|} \left[\frac{1}{V(|a_n|)} \ln \left| \frac{q_n!}{\Lambda_n^{q_n} f^{(q_n)}(a_n)} \right| + h(\arg a_n) \right] = 0.$$
4. *Существует такая функция $f \in [\varrho(r), h(\theta)]_r$, что $D \subset D_f = \{s_n, p_n\}_{n=1}^\infty$, причем выполняются условия* (15) *и*
$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{V(|s_n|)} \ln \left| \frac{p_n!}{\Lambda_n^{p_n} f^{(p_n)}(s_n)} \right| + h(\arg s_n) \right] = 0.$$
5. *Справедливо следующее*:

(5.1) *для любого компакта K выполняется неравенство*
$$d_D(K) \leqslant \mu_H^+(K),$$
где $\mu_H^+(K)$ — неванлинновская мера субгармонической функции $H(z) = h(\arg z)|z|^\rho$;

(5.2) *выполняются соотношения* (16), (17), (18) *и*
$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{\substack{z\to\infty \\ z\in\mathbb{C}_+}} \sin(\arg z) \int\limits_0^\delta \frac{\Phi_D^+(C(z,\alpha))\, d\alpha}{\alpha(\alpha + \sin(\arg z))^2} = 0, \quad \lim_{|a_n|\to\infty} \frac{q_n}{V(|a_n|)} \ln \frac{2\operatorname{Im} a_n}{\Lambda_n} = 0.$$

Рассмотрим задачу интерполяции с ограниченным индикатором, который имеет разрывы в точках 0 и π.

Определение 3.3. Пусть $h(\theta)$ — ограниченная ρ-тригонометрически выпуклая функция на отрезке $[0, \pi]$, $\rho > 0$, $\varrho(r)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{r\to\infty} \varrho(r) = \rho$. Дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^\infty$ называется *интерполяционным* в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]^+$ (в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]_r^+$), если для любой последовательности комплексных чисел $b_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условиям (14) и

$$\limsup_{\substack{|a_n|\to\infty\\ \arg a_n\in[\varepsilon,\pi-\varepsilon]}} \left[\frac{1}{V(|a_n|)} \sup_{1\leqslant k\leqslant q_n} \ln^+ \frac{|b_{n,k}|\Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!} - h(\arg a_n)\right] \leqslant 0$$

для любого $\varepsilon > 0$, существует функция $F \in [\varrho(r), h(\theta)]^+$ ($F \in [\varrho(r), h(\theta)]_r^+$), обладающая свойством (4).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3 (К. Г. Малютин). *Пусть $\varrho(r)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{r\to\infty} \varrho(r) = \rho > 0$, $h(\theta)$ — ограниченная ρ-тригонометрически выпуклая функция на отрезке $[0, \pi]$. Тогда следующие пять утверждений эквивалентны.*

1. *Дивизор D является интерполяционным в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]^+$.*
2. *Дивизор D является интерполяционным в пространстве $[\varrho(r), h(\theta)]_r^+$.*
3. *Существует такая функция $f \in [\varrho(r), h(\theta)]^+$, что $D \subset D_f$, причем выполняются условия (15) и для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\substack{|a_n|\to\infty\\ \arg a_n\in[\varepsilon,\pi-\varepsilon]}} \left[\frac{1}{V(|a_n|)} \ln\left|\frac{q_n!}{\Lambda_n^{q_n} f^{(q_n)}(a_n)}\right| + h(\arg a_n)\right] = 0.$$

4. *Существует такая функция $f \in [\varrho(r), h(\theta)]_r$, что $D \subset D_f = \{s_n, p_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем выполняются условия (15) и для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\substack{|s_n|\to\infty\\ \arg s_n\in[\varepsilon,\pi-\varepsilon]}} \left[\frac{1}{V(|s_n|)} \ln\left|\frac{p_n!}{\Lambda_n^{p_n} f^{(p_n)}(s_n)}\right| + h(\arg s_n)\right] = 0.$$

5. *Справедливо следующее*:

(5.1) *для любого компакта K выполняется неравенство*

$$d_D(K) \leqslant \mu_H^+(K),$$

где $\mu_H^+(K)$ — неванлинновская мера субгармонической функции $H(z) = h(\arg z)|z|^{\rho}$;

(5.2) *выполняются соотношения* (16), (17),(18) *и для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{\substack{z\to\infty\\ \arg z\in[\varepsilon,\pi-\varepsilon]}} \sin(\arg z) \int\limits_0^{\delta} \frac{\Phi_D^+(C(z,\alpha))\,d\alpha}{\alpha(\alpha+\sin(\arg z))^2} = 0; \qquad \lim_{\substack{|a_n|\to\infty\\ \arg a_n\in[\varepsilon,\pi-\varepsilon]}} \frac{q_n}{V(|a_n|)} \ln\frac{2\operatorname{Im} a_n}{\Lambda_n} = 0.$$

Проблема. Рассмотреть задачу (4) в пространствах $[\varrho(r), h(\theta)]^+$ и $[\varrho(r), h(\theta)]_r^+$, когда $\varrho(r)$ — нулевой уточненный порядок.

4. Регулярные множества

Геометрические критерии интерполяционности множеств позволяют строить интерполяционные последовательности в различных классах целых и аналитических функций. Примеры интерполяционных в H^∞ множеств приведены в статье [7]. Б. Я. Левиным было введено понятие регулярного множества в комплексной плоскости [17, гл. 2]. Было доказано, что регулярные множества являются интерполяционными в классах $[\varrho(r), h(\theta)]$. В [1, 53] введено понятие слабо регулярных множеств в различных классах целых и аналитических в полуплоскости функций конечного порядка.

Пусть $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$, $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность различных точек в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Предположим, что точки отделены друг от друга, точнее, выполняется одно из следующих условий (C) или (C′):

(C) точки a_n расположены в середине углов с общей вершиной в начале координат, которые не пересекаются, причем для любых двух точек последовательности A, расположенных в середине одного из углов, выполняется условие

$$|a_{n+1}| - |a_n| \geqslant r_n = d|a_n|^{1-\rho(|a_n|)}$$

при некотором $d > 0$;

(C′) существует такое число $d > 0$, что кружки радиусов

$$r_n = d|a_n|^{1-\rho(|a_n|)/2}$$

с центрами в точках a_n не пересекаются.

Правильное множество A (см. [17, гл. 2]), удовлетворяющее одному из условий (C) или (C′), называется *регулярным множеством в смысле Левина*, или кратко R-множеством.

Множества, удовлетворяющие условию (C), играют важную роль в теории целых функций. В частности, они применяются для построения канонических произведений множеств (см. [23]).

Как и ранее, через $[\rho, \infty]$ обозначим пространство целых функций f порядка $\rho > 0$.

Последовательность a_n называется *слабо регулярной последовательностью при порядке* $\rho > 0$, или, точнее, $WR(\rho)$-*множеством*, если существует такой уточненный порядок $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) \leqslant \rho$, что выполняется одно из условий (C) или (C′), а также условие (7).

Аналогичное определение справедливо и для пространства $[\varrho(r), \infty)$.

Последовательность a_n называют *слабо регулярной последовательностью при уточненном порядке* $\rho(r)$, или точнее, $WR(\rho(r))$-*множеством*? если выполняется условие (7) и справедливо одно из условий (C) или (C′).

Предложение 1. *Предположим, что последовательность $A = \{a_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ является слабо регулярной при уточненном порядке $\rho(r)$. Тогда A — интерполяционная последовательность в пространстве $[\rho(r), \infty)$.*

Предложение 2. *Предположим, что последовательность $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ является слабо регулярной при порядке $\rho > 0$. Тогда A — интерполяционная последовательность в пространстве $[\rho, \infty]$.*

В [34, 35] рассматривались множества $A = \{a_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, удовлетворяющие следующему условию:

(C_+) при некотором $d > 0$ для точек множества A выполняется неравенство

$$|a_{n+1}| - |a_n| \geqslant r_n = d \sin \arg(a_n)\, |a_n|^{1-\rho(|a_n|)}.$$

Такие множества также используются для построения канонических произведений в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Введем следующее определение.

Последовательность $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$, $A \in \mathbb{C}_+$, называется *слабо регулярной последовательностью в* $\mathbb{C}_+$ *при уточненном порядке* $\rho(r)$ или, точнее, $WR^+(\rho(r))$-*множеством*, если выполняется один из следующих наборов условий (C'_+) или (C_+):

условия (C'_+):

(i) существует такое число $d > 0$, что круги радиусов

$$r_n = d(\sin(\arg a_n))^{1/2}|a_n|^{1-\frac{\rho(|a_n|)}{2}}$$

с центрами в точках a_n не пересекаются;

(ii) при некотором $K > 0$ выполняется неравенство

$$\mu_A^+(C(0, r)) \leqslant KV(r); \tag{19}$$

условия (C_+):

(i) среди точек множества A нет кратных и нет точек с одинаковыми модулями;

(ii) $A \cap C(0, 2) = \emptyset$;

(iii) выполняется неравенство (19);

(iv) существует такое число $d > 0$, что для всех точек a_n и a_k, принадлежащих A, из неравенства $|a_n| \geqslant |a_k|$ следует, что

$$|a_n| \geqslant |a_k| + \frac{d \operatorname{Im} a_k}{V(|a_k|)}.$$

Предложение 3. *Слабо регулярные последовательности в $\mathbb{C}_+$ при уточненном порядке $\rho(r)$ являются интерполяционными в пространстве $[\rho(r), \infty)^+$.*

Проблема. Рассмотреть регулярные множества для случая нулевого уточненного порядка $\rho(r)$.

5. Проблема Леонтьева

В теории функций комплексного переменного имеется большое число давно стоящих открытых проблем. Одной из таких проблем является проблема А. Ф. Леонтьева (см. [24]), возникшая в связи с вопросами разложения функций в ряды экспонент. Обобщение этой проблемы появляется при рассмотрении интерполяционной задачи в классе $[\rho(r), h(\theta)]$ целых функций с индикаторами при уточненном порядке $\rho(r)$ $(\to \rho > 0)$, не превосходящими заданную ρ-тригонометрически выпуклую на отрезке $[0, 2\pi]$ функцию $h(\theta)$. Кратко ее можно сформулировать следующим образом. Пусть $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность различных комплексных чисел и $E(z)$ — каноническое произведение (или присоединенная функция) последовательности A. Для разрешимости задачи свободной интерполяции в пространстве $[\rho(r), h(\theta)]$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left[\frac{1}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} + h(\arg_n)\right] = 0. \tag{20}$$

Условие (20) является также необходимым и достаточным для разрешимости интерполяционной задачи в пространстве $[\rho(r), h(\theta)]_r$ целых функций вполне регулярного роста. Естественно возникает вопрос: следует ли из условия (20), что множество A является правильно распределенным? Другими словами, следует ли из условия (20), что функция $E(z)$ является функцией вполне регулярного роста? Отметим, что А. Ф. Леонтьев сформулировал проблему для случая $\rho(r) \equiv 1$.

А. В. Братищев дал положительный ответ на этот вопрос в случае $0 \leqslant \rho < 1/2$ и отрицательный — в случае $\rho \geqslant 1/2$ (см. [4]). Однако в работе А. В. Братищева не была выписана явно последовательность A, для которой выполняется равенство (20) и которая не является правильно распределенной (фактически доказано лишь существование такой последовательности).

Ранее А. Ф. Гришин (см. [10–12]), используя построенную им теорию множеств регулярного роста целых функций, показал, что при выполнении условия (20) множество A может быть дополнено множеством $\tilde{A}$ так, что объединение $A \cup \tilde{A}$ является интерполяционным в пространстве $[\rho(r), h(\theta)]$ (в пространстве $[\rho(r), h(\theta)]_r$), правильно распределенным множеством. При этом доказательство А. Ф. Гришина носило конструктивный характер.

Таким образом, остается открытым вопрос: при каких при дополнительных ограничениях можно охарактеризовать правильную распределенность последовательности A, удовлетворяющую условию (20)? Частично ответ на этот вопрос получил В. Б. Шерстюков (см. [46,47]), рассмотревший классическую проблему А. Ф. Леонтьева, используя понятие индекса ω-конденсации (или весового индекса конденсации) последовательности A, введенного в 1990-х гг. А. М. Гайсиным (см. [8]) по правилу

$$\delta(\omega, A) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|E'(\lambda_n)|},$$

где $\omega(r)$ — положительная функция, определенная при $r \geqslant a$ с фиксированным $a > 0$ и удовлетворяющая некоторым стандартным условиям, принятым при рассмотрении аналогичного класса задач. В. Б. Шерстюков получил условие

$$\int_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2}\, dr < \infty,$$

достаточное для того, чтобы всякая положительная последовательность $A \subset \mathbb{R}$, имеющая конечную верхнюю плотность и конечный индекс ω-конденсации, была правильно распределенной.

Сформулируем проблему, аналогичную обобщенной проблеме А. Ф. Леонтьева, для полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Из теорем 3.2 и 3.3 следует, что если каноническое произведение Неванлинны $E(z)$ последовательности $A \subset \mathbb{C}_+$ без кратных точек удовлетворяет условиям

$$\sup_n \frac{1}{V(|a_n|)} \ln\left|\frac{1}{\Lambda_n E'(a_n)}\right| < \infty, \quad \lim_{|a_n|\to\infty} \left[\frac{1}{V(|a_n|)} \ln\left|\frac{1}{\Lambda_n E'(a_n)}\right| + h(\arg a_n)\right] = 0 \tag{21}$$

или условиям

$$\sup_n \frac{1}{V(|a_n|)} \ln\left|\frac{1}{\Lambda_n E'(a_n)}\right| < \infty, \quad \lim_{\substack{|a_n|\to\infty \\ \arg a_n \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]}} \left[\frac{1}{V(|a_n|)} \ln\left|\frac{1}{\Lambda_n E'(a_n)}\right| + h(\arg a_n)\right] = 0, \tag{22}$$

то она является интерполяционной в пространствах $[\varrho(r), h(\theta)]^+$ ($[\varrho(r), h(\theta)]^+_r$), где $h(\theta)$ — непрерывная (или ограниченная) ρ-тригонометрически выпуклая функция на отрезке $[0, \pi]$.

Проблема. Следует ли из условий (21) или условий (22), что последовательность A является правильно распределенной в полуплоскости $\mathbb{C}_+$?

Частично ответ на этот вопрос получен в [34,35], где показано, что в этом случае множество A может быть дополнено множеством $\tilde{A}$ так, что объединение $A \cup \tilde{A}$ является интерполяционным в пространствах $[\varrho(r), h(\theta)]^+$ ($[\varrho(r), h(\theta)]^+_r$), правильно распределенным множеством в полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Никакие другие работы, связанные с проблемой Леонтьева для полуплоскости, автору не известны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боженко О. А.* Слабо регулярные множества// Буковин. мат. ж. — 2013. — *1*, № 1-2. — С. 11–14.
2. *Боженко О. А., Малютин К. Г.* Задача кратной интерполяции в классе аналитических функций нулевого порядка в полуплоскости// Уфим. мат. ж. — 2014. — *6*, № 1. — С. 18–29.
3. *Боженко О. А., Гришин А. Ф., Малютин К. Г.* Интерполяционная задача в классе целых функций нулевого порядка// Изв. АН. Сер. мат. — 2015. — *79*, № 2. — С. 21–44.
4. *Братищев А. В.* К одной задаче А. Ф. Леонтьева// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 2. — С. 265–267.
5. *Братищев А. В.* Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — *48*, № 3. — С. 451–475.
6. *Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф.* Кратная интерполяционная задача в пространстве целых функций заданного уточненного порядка// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1976. — *40*, № 5. — С. 1102–1127.
7. *Виноградов С. А., Хавин В. П.* Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций. II// Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1976. — *56*. — С. 12–56.
8. *Гайсин А. М.* Об одной гипотезе Полиа// Изв. РАН. Сер. мат. — 1994. — *58*, № 2. — С. 73–92.
9. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. — М.: Наука, 1986.
10. *Гришин А. Ф.* О множествах регулярного роста целых функций. I// Теория функций, функц. анал. прилож. — 1983. — № 40. — С. 36–47.
11. *Гришин А. Ф.* О множествах регулярного роста целых функций. II // Теория функций, функц. анал. прилож. — 1984. — № 41. — С. 39–55.
12. *Гришин А. Ф.* О множествах регулярного роста целых функций. III // Теория функций, функц. анал. прилож. — 1984. — № 42. — С. 37–43.
13. *Гришин А. Ф., Руссаковский А. М.* Свободная интерполяция целыми функциями// Теория функций, функц. анал. прилож. — 1985. — № 44. — С. 32–42.
14. *Лапин Г. П.* Интерполирование в классе целых функций конечного порядка// Изв. вузов. Мат. — № 5. — 1959. — С. 146–153.
15. *Лапин Г. П.* О целых функциях конечного порядка, принимающих вместе с производными заданные значения в заданных точках// Сиб. мат. ж. — 1965. — *6*, № 6. — С. 1267–1280.
16. *Левин Б. Я.* О некоторых приложениях интерполяционного ряда Лагранжа к теории целых функции// Мат. сб. — 1940. — *8*, № 3. — С. 437–454.
17. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
18. *Левин Б. Я., Уен Н. Т.* Об интерполяционной задаче в полуплоскости в классе аналитических функции конечного порядка// Теория функций, функц. анал. прилож. — 1975. — № 22. — С. 77–85.

19. *Левин Б. Я., Ткаченко В. А.* Интерполирование целыми функциями// Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. мат. — М.: ВИНИТИ, 1991. — *85*. — С. 68–99.
20. *Леонтьев А. Ф.* Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка// Докл. АН СССР. — 1948. — № 5. — С. 785–787.
21. *Леонтьев А. Ф.* Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа// Докл. АН СССР. — 1949. — *66*, № 2. — С. 153–156.
22. *Леонтьев А. Ф.* К вопросу об интерполяции в классе целых функций конечного порядка// Мат. сб. — 1957. — *4*, № 1. — С. 81–96.
23. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
24. *Леонтьев А. Ф.* Представление функций рядами экспонент// Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1978. — *81*. — С. 255–257.
25. *Малютин К. Г.* Об интерполяционной задаче в полуплоскости в классе аналитических функций вполне регулярного роста/ Деп. в ВИНИТИ. — 1980. — № 1083.
26. *Малютин К. Г.* Интерполяционная задача в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа/ Деп. в ВИНИТИ. — 1980. — № 1620.
27. *Малютин К. Г.* Об интерполяционной задаче в полуплоскости в классе функций конечного порядка/ Деп. в ВИНИТИ. — 1980. — № 2219.
28. *Малютин К. Г.* Интерполяция голоморфными функциями/ Дис. канд. физ.-мат. наук. — Харьков: Харьков. гос. ун-т, 1980.
29. *Малютин К. Г.* Интерполяция правильных множеств в верхней полуплоскости// Докл. АН УССР. — 1981. — № 5. — С. 16–19.
30. *Малютин К. Г.* Интерполирование в полуплоскости обобщенными каноническими произведениями// Теория функций, функц. анал. прилож. — 1986. — № 45. — С. 84–96.
31. *Малютин К. Г.* Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа// Мат. сб. — 1993. — *184*, № 2. — С. 129–144.
32. *Малютин К. Г.* О множествах регулярного роста функций, аналитических в открытой полуплоскости// Укр. мат. ж. — 1994. — *46*, № 11. — С. 1486–1501.
33. *Малютин К. Г.* Задача кратной интерполяции в классе аналитических функций вполне регулярного роста в открытой полуплоскости// Мат. физ. анал. геом. — 1994. — *1*, № 3/4. — С. 469–478.
34. *Малютин К. Г.* О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. I// Изв. РАН. Сер. мат. — 1995. — *59*, № 4. — С. 125–154.
35. *Малютин К. Г.* О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. II// Изв. РАН. Сер. мат. — 1995. — *59*, № 5. — С. 103–126.
36. *Малютин К. Г.* Модифицированный метод Джонса для решения задач кратной интерполяции в полуплоскости// в кн.: Математический форум. Исследования по математическому анализу. — Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А. — 2009. — *3*. — С. 143–164.
37. *Малютин К. Г., Боженко О. А.* Задача кратной интерполяции в классе целых функций нулевого порядка// Тр. Ин-та мат. НАН Украины. — 2013. — *10*, № 4-5. — С. 412–423.
38. *Малютин К. Г., Студеникина Л. И.* Локально выпуклые пространства целых функций нулевого порядка, приложения к интерполяции// Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Мат. Физ. — 2017. — *46*, № 6. — С. 62–71.
39. *Мартиросян В. М.* Эффективное решение задачи кратной интерполяции в H^∞ применением метода биортогонализации М. М. Джрбашяна// Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. — 1981. — *16*. — С. 339–357.
40. *Руссаковский А. М.* Об интерполировании в классе целых функций, имеющих индикатор не выше данного. I// Теория функций, функц. анал. прилож. — 1982. — № 37. — С. 111–114.
41. *Руссаковский А. М.* Об интерполировании в классе целых функций, имеющих индикатор не выше данного. II// Теория функций, функц. анал. прилож. — 1984. — № 41. — С. 119–122.
42. *Уен Н. Т.* Интерполяционная задача в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа// Теория функций, функц. анал. прилож. — 1975. — № 24. — С. 106–127.
43. *Уен Н. Т.* Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка// Теория функций, функц. анал. прилож. — 1978. — № 29. — С. 109–117.
44. *Уен Н. Т.* Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа// Теория функций, функц. анал. прилож. — 1979. — № 31. — С. 119–129.
45. *Фирсакова О. С.* Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций// Докл. АН СССР. — 1958. — *120*, № 3. — С. 447–480.

46. *Шерстюков В. Б.* О регулярности роста канонических произведений с вещественными нулями// Мат. заметки. — 2007. — *82*, № 4. — С. 621–630.
47. *Шерстюков В. Б.* Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 9. — С. 139–180.
48. *Berndtsson B.* A note on Pavlov–Korevaar–Dixoninterpolation// Proc. Kon. Nederland. Acad. Welensch. Ser. A. — 1978. — *81*, № 4. — С. 409–411.
49. *Bernstein C. A., Taylor B. A.* A new look at interpolation theory for entire functions of one variable// Adv. Math. — 1979. — *33*. — С. 109–143.
50. *Carleson L.* An interpellation problem for bounded analytic functions// Am. J. Math. — 1958. — *80*. — С. 921–930.
51. *Jones P.* Carleson measures and the Pefferman–Stein decomposition of BMO(R)// Ann. Math. — 1980. — *111*. — С. 197–208.
52. *Macintyre A. J., Wilson R.* On the order of the interpolated integral functions// Quart. J. Math. — 1934. — *5*. — С. 211–220.
53. *Malyutin K. G., Bozhenko O. A.* Weakly regular sets// Istanb. Univ. Fen Fak. Mat. Fiz. Astron. Derg. (N.S.). — 2012-2013. — *4*. — С. 1–8.
54. *Mursi M.* Sur l'order de functions entierès définies par interpolation// Bull. Sci. Math. — 1949. — *73*. — С. 96–112.
55. *Mursi M., Winn E.* On the interpolated integral function of given order// Quart. J. Math. — 1933. — *4*. — С. 173–179.
56. *Squires W. A.* Geometric condition for universal interpolating in $\hat{\mathcal{E}}'$// Trans. Am. Math. Soc. — 1983. — *280*, № 1. — С. 401–413.

К. Г. Малютин
Юго-Западный государственный университет, Курск
E-mail: malyutinkg@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 153 (2018). С. 128–134

УДК 517.547.28

МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ С МЕДЛЕННЫМ РОСТОМ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕВАНЛИННЫ И БЫСТРЫМ РОСТОМ СФЕРИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2018 г. **Ш. А. МАХМУТОВ, М. С. МАХМУТОВА**

Аннотация. Мероморфные функции с заданным ростом сферической производной на комплексной плоскости описаны в терминах взаимного расположения a-точек функций. Полученный результат позволяет построить пример мероморфной функции в $\mathbb{C}$ с медленным ростом характеристики Неванлинны и произвольным ростом сферической производной. Кроме того, на основе универсальности дзета-функции Римана дана оценка роста сферической производной $\zeta(z)$.

Ключевые слова: мероморфная функция, сферическая производная, характеристика Неванлинны, дзета-функция Римана.

AMS Subject Classification: 30D30, 30D35

1. Введение и предварительные результаты. Согласно формуле Альфорса—Симидзу рост характеристики Неванлинны $T(r,f)$ мероморфной функции f на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ можно оценить в терминах роста сферической производной $f^\sharp(z) = \dfrac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$. Однако обратная оценка невозможна. В данной работе мы построим пример функции f, для которой $T(r,f) = O(\log^2 r)$ при $r \to \infty$ и с быстрым ростом $f^\sharp(z)$. Кроме того, мы покажем, что дзета-функция Римана имеет произвольно быстрый рост сферической производной, хотя известно, что $T(\zeta, r) = O(r \log r)$ при $r \to \infty$ (см. [14]).

Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица $\mathcal{L}$ на $[0,\infty)$ с постоянной α, $\alpha \leqslant 1$, т.е.

$$\alpha_r = \sup_{r \leqslant x < y} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} \right| \leqslant \alpha, \quad r > 0.$$

Условимся считать, что φ удовлетворяет условию $\mathcal{L}_0$, если

$$\lim_{r\to\infty} \alpha_r = 0.$$

Введем обозначение

$$D_\varphi(a,r) = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \ |z-a| \leqslant r\varphi(|a|) \Big\}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad r > 0.$$

Определение 1. Мероморфная на комплексной плоскости функция $f(z)$ называется *φ-Иосида функцией*, если

$$\limsup_{|z|\to\infty} \varphi(|z|) \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} < \infty. \tag{1}$$

Такие функции отнесем к классу $W_\varphi(\mathbb{C})$. Если $\varphi(x) = x^{2-p}$, $1 \leqslant p < \infty$, тогда получим классы $f \in W_p(\mathbb{C})$.

Класс W_1 известен как класс исключительных функций Жюлиа (см. [18]). Класс W_2 совпадает с классом (A) Иосиды (см. [21], а также [1, 3, 4, 6, 7, 10, 12, 13, 18, 20, 22]).

Работа выполнена при поддержке гранта IG/SCI/DOMS/16/02 университета Султана Кабуса.

О. Лехто доказал (см. [13]), что мероморфная на комплексной плоскости функция f, удовлетворяющая условию

$$\limsup_{|z|\to\infty} |z| \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} < \frac{1}{2}, \tag{2}$$

является рациональной функцией. Если $\varphi(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, то условие (1) равносильно нормальности семейства функций $\{f(a_n+\varphi(|a_n|)z)\}$ в $\mathbb{C}$ для любой последовательности комплексных чисел $\{a_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. В случае $\varphi(x) = x$ рассматривается нормальность семейства функций $\{f(a_n z)\}$ в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ для любой последовательности комплексных чисел $\{a_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ (см. [1]).

Мероморфные функции, которые не удовлетворяют условию (1), были описаны в терминах пикаровского поведения в окрестностях точек некоторых последовательностей.

Определение 2 (см. [1]). Последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$, называется *последовательностью M_φ-точек функции f*, если для любого положительного ε и любой подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ функция f принимает каждое значение из $\overline{\mathbb{C}}$ бесконечно часто, за возможным исключением, на множестве $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_\varphi(z_{n_k}, r)$.

Определение 3 (см. [1, 10]). Последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$, называется последовательностью *μ_φ-точек функции f*, если для любых монотоных положительных последовательностей $\{\varepsilon_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, и $\{\alpha_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, в каждом круге $D_\varphi(z_n, \varepsilon_n)$ функция f принимает все значения из $\overline{\mathbb{C}}$ за возможным исключением двух множеств E_n и G_n из $\overline{\mathbb{C}}$, хордальные диаметры которых меньше, чем α_n.

В случае $\varphi(x) = x^{2-p}$, $p \geqslant 1$, получим последовательности μ_p-точек и M_p-точек.

Последовательности M_1-точек мероморфных функций были введены Г. Жюлиа (см. [11]) как обощение теоремы Пикара. Мийю (см. [16, 17]) уточнил результат Жюлиа в случае аналитических функций и ввел понятие кругов наполнения, аналогичные тем, что определены для последовательностей μ-точек. Марти (см. [15]) обобщил понятие кругов наполнения на мероморфные функции. Отметим также, что Марти доказал (см. [15]), что для любой мероморфной функции $f(z)$, не являющейся исключительной в смысле Жюлиа, т.е.

$$\limsup_{|z|\to\infty} |z| \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = \infty, \tag{3}$$

любая последовательность точек $\{z_n\}$, на которой реализуется условие (3), является последовательностью центров кругов наполнения.

Существует непосредственная связь между понятиями последовательностей μ_φ-точек, M_φ-точек и ростом сферической производной.

Теорема 1 (см. [1, 10]). *Пусть функция f мероморфна на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. Следующие условия эквивалентны*:

(a) *$\{z_n\}$ является последовательностью M_φ-точек для f*;
(b) *$\{z_n\}$ является последовательностью μ_φ-точек для f*;
(c) *существует положительная последовательность $\{r_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, для которой*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in D_\varphi(z_n, r_n)} \varphi(|z|) \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = \infty.$$

Лемма 1 (см. [7]). *Если φ удовлетворяет условию $\mathcal{L}_0$, то для любого $r > 0$*

$$\lim_{|z|\to\infty} \sup_{w\in D_\varphi(z,r)} \frac{\varphi(|w|)}{\varphi(|z|)} = 1.$$

Лемма 2. *Пусть последовательности комплексных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют условиям*

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n - b_n|}{\varphi(|a_n|)} = 0,$$

а $f(z)$ — мероморфная функция в $\mathbb{C}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\chi(f(a_n), f(b_n)) > 0$, то $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ являются последовательностями M_φ-точек для f.

Доказательство. Допустим, что $\{a_n\}$ не является последовательностью M_φ-точек (μ_φ-точек) для f. Тогда согласно теореме 1 и лемме 1 существует положительная последовательность $\{r_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, для которой

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{z\in D_\varphi(a_n,r_n)}\varphi(|z|)f^{\#}(z) = M < \infty. \tag{4}$$

Пусть $\{b_n\}$ удовлетворяет условиям леммы. Тогда при $n\to\infty$ в силу леммы 1 и предположения (4) получим противоречие:

$$0 \nleftarrow \chi(f(a_n), f(b_n)) = \int\limits_{L(a_n,b_n)} f^{\#}(z)|dz| \leqslant \left|\int\limits_{a_n}^{b_n}\frac{\varphi(|z|)}{\varphi(|z|)}f^{\#}(z)|dz|\right| \lesssim \frac{M|b_n - a_n|}{\varphi(|a_n|)} \to 0.$$

Следовательно, $\{a_n\}$ является последовательностью M_φ-точек для f. Аналогично, $\{b_n\}$ также является последовательностью M_φ-точек для f (см. [1]). □

Лемма 3. *Для произвольных последовательностей комплексных чисел $\{x_m\}$, $\lim\limits_{m\to\infty}|x_m| = \infty$, и $\{y_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|y_n| = \infty$, и весовой функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию $\mathcal{L}_0$, следующие условия равносильны*:

$$\inf_{m,n}\frac{|x_m - y_n|}{\varphi(|x_m|)} = 0, \quad \inf_{m,n}\frac{|x_m - y_n|}{\varphi(|y_n|)} = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Допустим, что

$$\inf_{m,n}\frac{|x_m - y_n|}{\varphi(|x_m|)} = 0$$

и

$$\inf_{m,n}\frac{|x_m - y_n|}{\varphi(|y_n|)} = \delta > 0. \tag{6}$$

Тогда существуют такие подпоследовательности $\{x_{m_k}\}$ и $\{y_{n_k}\}$, что

$$\frac{|x_{m_k} - y_{n_k}|}{\varphi(|x_{m_k}|)} = \varepsilon_k \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty, \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{|x_{m_k} - y_{n_k}|}{\varphi(|y_{n_k}|)} \geqslant \delta > 0.$$

С другой стороны,

$$\frac{|x_{m_k} - y_{n_k}|}{\varphi(|y_{n_k}|)} = \frac{|x_{m_k} - y_{n_k}|}{\varphi(|x_{m_k}|)}\cdot\frac{\varphi(|x_{m_k}|)}{\varphi(|y_{n_k}|)} = \varepsilon_k\frac{\varphi(|x_{m_k}|)}{\varphi(|y_{n_k}|)}.$$

Так как φ удовлетворяет условию $\mathcal{L}_0$, то получаем

$$\left|1 - \frac{\varphi(|y_{n_k}|)}{\varphi(|x_{m_k}|)}\right| = \frac{|\varphi(|x_{m_k}|) - \varphi(|y_{n_k}|)|}{\varphi(|x_{m_k}|)} \leqslant \alpha\cdot\frac{||x_{m_k}| - |y_{n_k}||}{\varphi(|x_{m_k}|)} \leqslant \alpha\cdot\frac{|x_{m_k} - y_{n_k}|}{\varphi(|x_{m_k}|)} = \alpha\cdot\varepsilon_k \to 0$$

при $k\to\infty$. Отсюда следует, что

$$\frac{\varphi(|y_{n_k}|)}{\varphi(|x_{m_k}|)} = 1 + \beta_k, \quad \text{где} \quad \lim_{k\to\infty}\beta_k = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{|x_{m_k} - y_{n_k}|}{\varphi(|y_{n_k}|)} \leqslant \varepsilon_k(1+\beta_k), \quad \text{где} \quad \lim_{k\to\infty}\beta_k = 0, \quad \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0,$$

и, следовательно,

$$\inf_{m,n} \frac{|x_m - y_n|}{\varphi(|y_n|)} = 0,$$

что противоречит (6). □

2. Близость a-точек и рост сферической производной. В дальнейшем нам потребуется понятие φ-близости последовательностей точек $X = \{x_m\}$ и $Y = \{y_n\}$ в $\mathbb{C}$. Пусть

$$D_\varphi(X, Y) = \min\left\{\inf_{m,n} \frac{|x_m - y_n|}{\varphi(|x_m|)},\ \inf_{m,n} \frac{|x_m - y_n|}{\varphi(|y_n|)}\right\}.$$

Определение 4. Последовательности X и Y назовем *φ-близкими*, если $D_\varphi(X, Y) = 0$.

Для произвольных различных $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$ обозначим через $\{a_m\}$, $\{b_n\}$, $\{c_k\}$, $\{d_l\}$ решения соответствующих уравнений $f(z) = a$, $f(z) = b$, $f(z) = c$, $f(z) = d$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет условию $\mathcal{L}_0$. Мероморфная в $\mathbb{C}$ функция $f(z)$ удовлетворяет условию (1) тогда и только тогда, когда для произвольных $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$ никакие два множества среди $\{a_m\}$, $\{b_n\}$, $\{c_k\}$, $\{d_l\}$ не являются φ-близкими.*

Доказательство. Если хотя бы для трех значений из $\overline{\mathbb{C}}$ множества корней конечны, то f — рациональная функция, и выполняется оценка (3). Следовательно, f удовлетворяет условию (1).

Рассмотрим случай, когда хотя бы два из четырех множеств $\{a_m\}$, $\{b_n\}$, $\{c_k\}$, $\{d_l\}$ бесконечны.

Необходимость. Допустим, что для функции f выполняется условие $D_\varphi(\{a_m\}, \{b_n\}) = 0$. Тогда в силу леммы 2 последовательности $\{a_m\}$ и $\{b_n\}$ являются последовательностями M_φ-точек для f, и поэтому f не удовлетворяет условию (1), что противоречит нашему предположению.

Достаточность. Если f не удовлетворяет (1), то существует последовательность μ_φ-точек $\{z_n\}$ для f, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, и в силу определения 3 существует такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ в каждом круге $D_\varphi(z_n, \varepsilon_n)$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, найдутся корни уравнений $f(z) = a$ и $f(z) = b$. В каждом круге $D_\varphi(z_n, \varepsilon_n)$ возьмем a-точку a_n и b-точку b_n. Тогда

$$\frac{|a_n - z_n|}{\varphi(|z_n|)} < \varepsilon_n, \quad \frac{|b_n - z_n|}{\varphi(|z_n|)} < \varepsilon_n.$$

В силу леммы 3 получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n - b_n|}{\varphi(|a_n|)} = 0.$$

Последнее противоречит предположению, что a-точки и b-точки не являются φ-близкими. □

В случае $\varphi(x) = 1$ теорема 2 была доказана К. Иосидой (см. [21]), а для $\varphi(x) = x$ теорема 2 является частью теоремы Островского для исключительных функций Жюлиа (см. [5, 18]).

3. Исключительные функции Жюлиа. Напомним, что трансцендентная мероморфная функция f в $\mathbb{C}$ называется *исключительной функцией Жюлиа*, если семейство функций $\{f(az)\}$, $|a| \geqslant 1$, нормально в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ в смысле Монтеля.

В 1957 г. О. Лехто и К. Виртатнен доказали следующую теорему.

Теорема 3 (см. [12]). *Функция f является исключительной функцией Жюлиа тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\limsup_{|z|\to\infty} |z| f^{\#}(z) \leqslant K_f < \infty.$$

Из теоремы 3 следует, что исключительные функции Жюлиа имеют медленный рост характеристики Неванлинны

$$T(r, f) = O(\ln^2 r) \quad r \to \infty.$$

Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Величина

$$\delta(a,f)=\liminf_{r\to\infty}\frac{m(r,a,f)}{T(r,f)}=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,a,f)}{T(r,f)}$$

называется *неванлиновским дефектом* и

$$\Delta(a,f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{m(r,a,f)}{T(r,f)}=1-\liminf_{r\to\infty}\frac{N(r,a,f)}{T(r,f)}$$

называется *валироновским дефектом.* Очевидно, что $0\leqslant\delta(a,f)\leqslant\Delta(a,f)\leqslant 1$ (см. [2]).

Андерсон и Клуни (см. [6]) доказали, что для произвольной исключительной функции Жюлиа f неванлиновский дефект $\delta(a,f)$ равен нулю для любого $a\in\overline{\mathbb{C}}$.

Тода и Дзинно (см. [19]) улучшили результат Андерсона и Клуни и доказали, что для произвольной исключительной функции Жюлиа f валироновский дефект $\Delta(a,f)$ равен нулю для любого $a\in\overline{\mathbb{C}}$.

Примером исключительной функцией Жюлиа является функция

$$f(z)=\prod\left(1-\frac{z}{q^n}\right)\Big/\prod\left(1+\frac{z}{q^n}\right),$$

где $q>1$ (см. [20]). Отметим, что эта функция не имеет лучей Жюлиа. Долгое время ошибочно считалось, что исключительные функции Жюлиа не имеют лучей Жюлиа. Этот факт опровергла Дзинно. Она построила пример исключительной функцией Жюлиа, для которой каждый луч $\{z : \arg z=\theta\}$ является лучом Жюлиа (см. [22]). Ее пример основан на суперпозозиции логарифма (главная ветвь) и $\wp$-функции Вейерштрасса с иррациональным отношением периодов двоякопериодической функции.

Теорема 4. *Для произольной φ, удовлетворяющей условию $\mathcal{L}_0$, существует мероморфная функция f в $\mathbb{C}$ с медленным ростом $T(r,f)$, для которой*

$$\limsup_{|z|\to\infty}\varphi(|z|)\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\infty.$$

Доказательство. Возьмем последовательность комплексных чисел $\{a_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$, для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|}<\infty.$$

Для

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\Big/\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{a_k}\right)$$

характеристика Неванлинны $T(r,f)=O(\log^2 r)$ при $r\to\infty$.

Возьмем $a_k=2^k$ и $b_k=2^k+\varphi(2^k)/k$. Пусть

$$f_1(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\Big/\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{a_k}\right),\quad f_2(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_k}\right)\Big/\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{b_k}\right).$$

Тогда

$$F(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{a_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{a_k}\right)}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{b_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{b_k}\right)}$$

является функцией с медленным ростом характеристики Неванлинны (см. [2]), т.е. $T(r,F)=O(\log^2 r)$ при $r\to\infty$. Нули $\{a_k\}$, $\{-b_k\}$ и полюсы $\{-a_k\}$, $\{b_k\}$ функции F будут φ-близкими в смысле определения 4. Тогда в силу теоремы 2 получим, что

$$\limsup_{|z|\to\infty} \varphi(|z|)\frac{|F'(z)|}{1+|F(z)|^2} = \infty. \qquad \square$$

Отметим, что функции $f_j(z)$, $j = 1, 2$, являются исключительными функциями Жюлиа (см. [18, 20]). Отношение этих функций имеет медленный рост характеристики Неванлинны и быстрый рост сферической производной.

Следствие 1. *Произведение или отношение исключительных функций Жюлиа не обязательно является исключительной функцией Жюлиа.*

4. Рост сферической производной дзета-функции Римана. В этом разделе мы изучим рост сферической производной дзета-функции Римана

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Дзета-функция была введена Л. Эйлером в 1737 г. как функция действительной переменной. Б. Риман обобщил функцию на комплексную область.

Функцию ζ можно мероморфно продолжить на комплексную плоскость $\mathbb{C}$ таким образом, что 1 будет простым полюсом с вычетом $+1$.

Дзета-функция Римана имеет простые нули в точках $z = -2n$, $n = 1, 2, \ldots$. Согласно гипотезе Римана (см., например, [9]) нетривиальные нули функциии $\zeta(z)$ расположены на критической линии $\operatorname{Re} z = 1/2$.

Л. Лиао и С. С. Янг (см. [14]) получили оценку

$$T(\zeta, r) = \frac{r\log r}{\pi} + Br + O(\log^2 r), \quad r\to\infty, \qquad \text{где} \quad B \leqslant \frac{\pi - \log\pi - 1}{\pi},$$

т.е. дзета-функция Римана имеет рост $\rho(\zeta) = 1$ и тип $\sigma(\zeta) = \infty$.

С. М. Воронин в 1975 г. показал, что дзета-функции Римана обладает свойством универсальности.

Теорема 5 (см. [9])**.** *Дзета-функция Римана $\zeta(z)$ является универсальной функцией для функций, не имеющих нулей в фундаментальной полосе $S = \{z : 1/2 < \operatorname{Re} z < 1\}$. Иначе говоря, для каждой функции f, не имеющей нулей в полосе S, существует такая последовательность $\{\tau_n\}$ действительных чисел, $\tau_n \to \infty$, что*

$$\zeta(z + i\tau_n) \to f(z)$$

равномерно на компактных подмножествах полосы S.

П. Готье (см. [8]) применил свойство универсальности дзета-функции для того, чтобы показать, что $\zeta(z)$ имеет круги наполнения. Под кругами наполнения подразумеваются круги, центрами которых являются μ_2-точки функции $\zeta(z)$ (см. определение 3).

Теорема 6 (см. [8])**.** *Для каждого σ_0 в интервале $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$ на линии $\operatorname{Re} z = \sigma_0$ найдется последовательность точек, которая будет центрами кругов наполнения функции $\zeta(z)$.*

Используя универсальность дзета-функции Римана, П. Готье показал (см. [8]), что $\zeta(z)$ имеет последовательность μ_2-точек. В доказательстве не оговаривается вопрос о радиусах кругов наполнения. Рассматриваются круги вида $|z - z_k| < r_k$, где $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$. Доказательство Готье допускает рассмотрение радиусов кругов наполнения с весом $\varphi(z_k)$ для каждого круга с центром в z_k, где φ удовлетворяет условию $\mathcal{L}_0$. Отсюда следует, что центры кругов наполнения $\{z_k\}$ будут μ_φ-точками функции $\zeta(z)$. Тогда в силу теоремы 1 получаем, что существует положительная последовательность $\{r_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in D_\varphi(z_n, r_n)} \varphi(|z|)\zeta^{\#}(z) = \infty.$$

Последнее означает, что сферическая производная $\zeta(z)$ имеет быстрый рост сферической производной. Таким образом, мы обобщили результат П. Готье.

Теорема 7. *Для произвольной положительной функции φ, удовлетворяющей условию $\mathcal{L}_0$, и для каждого σ_0 в интервале $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$ на линии $\operatorname{Re} z = \sigma_0$ найдется последовательность μ_φ-точек функции $\zeta(z)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гаврилов В. И.* Поведение мероморфных функций в окрестности существенно особой точки// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1966. — *30*, № 4. — С. 767–788.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970.
3. *Махмутов Ш. А.* Распределение значений мероморфных функций класса W_p// Докл. АН СССР. — 1983. — *273*, № 5. — С. 1062–1066.
4. *Махмутов Ш. А.* Классы мероморфных функций, характеризуемые сферической производной// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 4. — С. 789–794.
5. *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. — М.-Л.: ОНТИ, 1936.
6. *Anderson J. M., Clunie J.* Slowly growing meromorphic functions// Comment. Math. Helv. — 1966. — *40.* — С. 267-–280.
7. *Aulaskari R., Makhmutov S., Rättyä J.* Weighted Yosida functions// Complex Var. Ellipt. Functions. — 2010. — *55*, № 1-3. — С. 167–172.
8. *Gauthier P. M.* Cercles de remplissage for the Riemann Zeta Function// Can. Math. Bull. — 2003. — *46*, № 1. — С. 95–97.
9. *Gauthier P. M.* Approximation of and by the Riemann Zeta Function// Comput. Methods Funct. Theory. — 2010. — *10*, № 2. — С. 603–638.
10. *Gavrilov V. I.* The behaviour of meromorphic functions in the neighborhood of an essential singularity/ Res. Report 2. — Bombay, India: Indian Institue of Technology, 1969. — С. 1–9.
11. *Julia G.* Leçons sur les Fonctions Uniformes à Point Singulier Essentiel Isolè. — Paris: Gauthier-Villars, 1924.
12. *Lehto O., Virtanen K. I.* Boundary behaviour and normal meromorphic functions// Acta Math. — 1957. — *97.* — С. 47–65.
13. *Lehto O.* The spherical derivative of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity// Comment. Math. Helv. — 1959. — *33.* — С. 196–205.
14. *Liao L., Yang C. C.* On some new properties of the gamma function and the Riemann zeta function// Math. Nachr. — 2003. — *257*, № 3. — С. 59-–66.
15. *Marty F.* Recherches sur la répartition des valeurs d'une fonction méromorphe// Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse. — 1931. — *23*, № 3. — С. 183–262.
16. *Milloux H.* Le théorème de M. Picard. Suites de fonctions holomorphes. Fonctions méromorphes et fonctions entieres// J. Math. Pures Appl. — 1924. — 9-e Sér., № 3. — С. 345–401.
17. *Milloux H.* Sur le théorème de M. Picard// Bull. Soc. Math. France. — 1925. — *53.* — С. 181–207.
18. *Schiff J. L.* Normal Families. — New York: Springer-Verlag, 1993.
19. *Toda N., Zinno T.* On Julia's exceptional functions// Proc. Jpn. Acad. — 1966. — *42.* — С. 1120–1121.
20. *Toda N.* Sur les directions de Julia et de Borel des fonctions algebroides// Nagoya Math. J. — 1969. — *34.* — С. 1–23.
21. *Yosida K.* On a class (A) of meromorphic functions// Proc. Phys.-Math. Soc. Jpn. — 1934. — *16.* — С. 227–235.
22. *Zinno T.* Some properties of Julia's exceptional functions and an example of Julia's exceptional functions with Julia's direction// Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI. — 1970. — *464.*

Ш. А. Махмутов
Университет Султана Кабуса, Маскат, Оман
E-mail: `makhm@squ.edu.om, shmakhm@gmail.com`

М. С. Махмутова
Университет Султана Кабуса, Маскат, Оман
E-mail: `marinam@squ.edu.om`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 153 (2018). С. 135–142

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

© 2018 г. **И. Х. МУСИН**

Аннотация. Изучается задача описания в терминах преобразования Лапласа функционалов сопряженного пространства для гильбертова пространства целых функций n переменных, построенного при помощи выпуклой функции в $\mathbb{C}^n$, зависящей от модулей переменных и растущей на бесконечности быстрее $a\|z\|$ для любого $a > 0$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, преобразование Лапласа, целые функции, выпуклые функции, преобразование Юнга—Фенхеля.

AMS Subject Classification: 32A15, 42B10, 46E10

1. Введение.

1.1. О проблеме. Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ — пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$, $d\mu_n$ — мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. Для $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\langle u, v\rangle := u_1v_1 + \dots + u_nv_n, \quad \operatorname{abs} u := (|u_1|, \dots, |u_n|),$$

$\|u\|$ — евклидова норма u.

Обозначим через $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ множество всех выпуклых функций $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, обладающих следующими свойствами:

1) $g(x) = g(\operatorname{abs} x)$, $x \in \mathbb{R}^n$;
2) сужение g на $[0, \infty)^n$ не убывает по каждой переменной;
3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{\|x\|} = +\infty$.

По функции $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ определим гильбертово пространство

$$F^2_\varphi = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : \ \|f\|_\varphi = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(\operatorname{abs} z)}\, d\mu_n(z) \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

со скалярным произведением

$$(f, g)_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\, \overline{g(z)}\, e^{-2\varphi(\operatorname{abs} z)}\, d\mu_n(z), \quad f, g \in F^2_\varphi.$$

Отметим, что для любого $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ функция $f_\lambda(z) = e^{\langle\lambda, z\rangle}$ (где $\lambda \in \mathbb{C}^n$) принадлежит F^2_φ. Поэтому для любого линейного непрерывного функционала S на пространстве F^2_φ корректно определена в $\mathbb{C}^n$ функция $\hat{S}(\lambda) = S(e^{\langle\lambda, z\rangle})$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, — преобразование Лапласа функционала S. $\hat{S}$ — целая функция (см. лемму 1).

Обозначим через $(F^2_\varphi)^*$ сопряженное пространство к пространству F^2_φ, через $\widehat{(F^2_\varphi)^*}$ — пространство преобразований Лапласа функционалов из $(F^2_\varphi)^*$.

Актуальной является задача описания пространства $\widehat{(F^2_\varphi)^*}$. Если $\varphi(x) = \|x\|^2/2$ (т.е. F^2_φ — пространство Фока), то $\widehat{(F^2_\varphi)^*} = F^2_\varphi$. Действительно, в этом случае проблема описания пространства

Работа выполнена при поддержке Российкого фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-01661) и Программы Президиума РАН (проект «Комплексный анализ и функциональные уравнения».

$(F^2_\varphi)^*$ в терминах преобразования Лапласа функционалов легко решается благодаря классическому представлению: для любого $f \in F^2_\varphi$

$$f(\lambda) = \pi^{-n} \int\limits_{\mathbb{C}^n} f(z)\, e^{\langle \lambda, \overline{z}\rangle - \|z\|^2}\, d\mu_n(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Для случая, когда $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ — радиальная функция, решение указанной задачи было получено В. В. Напалковым и С. В. Попеновым (см. [3, 5]).

Цель данной работы — найти условия на $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$, при выполнении которых пространство $\widehat{(F^2_\varphi)^*}$ преобразований Лапласа линейных непрерывных функционалов на F^2_φ совпадает с $F^2_{\varphi^*}$.

1.2. Обозначения и определения. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ введем его длину $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$; положим $\tilde{\alpha} := (\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_n + 1)$. Если $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, то

$$z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha_z := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}.$$

Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ и функции $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ положим

$$c_\alpha(\varphi) := \int\limits_{\mathbb{C}^n} |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n} e^{-2\varphi(\operatorname{abs} z)}\, d\mu_n(z).$$

Для функции u с областью определения, содержащей множество $(0, \infty)^n$, определим функцию $u[e]$ в $\mathbb{R}^n$ по правилу $u[e](x) = u(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех непрерывных функций $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{u(x)}{\|x\|} = +\infty$.

Преобразование Юнга—Фенхеля функции $u : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ — это функция $u^* : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, определяемая по формуле

$$u^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \big(\langle x, y\rangle - u(y)\big), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Если $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in E$, то $\operatorname{vd}(x, E)$ — «объемное расстояние», введенное в [7].

Если E — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, h — выпуклая функция в E, $\tilde{E} = \{y \in \mathbb{R}^n : h^*(y) < \infty\}$ и для каждого $y \in \tilde{E}$ через x_y обозначена произвольная точка E, для которой верно равенство

$$h^*(y) + h(x_y) - \langle x_y, y\rangle = 0,$$

то

$$D^{h,y} = \Big\{t \in \tilde{E} :\ h(x_y) + h^*(t) - \langle x_y, t\rangle \leqslant 1\Big\}, \quad y \in \tilde{E}.$$

1.3. Основной результат.

Теорема. *Пусть $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ и при некотором $K > 0$ для всех $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{K} \prod_{j=1}^n \alpha_j \leqslant \operatorname{vd}\left(2\alpha, D^{2\varphi[e], 2\alpha}\right) \operatorname{vd}\left(2\alpha, D^{2\varphi^*[e], 2\alpha}\right) \leqslant K \prod_{j=1}^n \alpha_j.$$

Тогда отображение $\mathcal{L} : S \in (F^2_\varphi)^* \to \hat{S}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $(F^2_\varphi)^*$ и $F^2_{\varphi^*}$.

Доказательство этой теоремы (см. п. 3.2) основано на использовании техники степенных рядов (ранее применявшейся при изучении этой проблемы в [3, 5] и аналогичной — в [4]), новых свойств преобразования Юнга–Фенхеля (см. п. 2.1) и одного результата об асимптотике многомерного интеграла Лапласа из [1] (см. также п. 2.2 и [7]).

2. Вспомогательные сведения и результаты.

2.1. О некоторых свойствах преобразования Юнга—Фенхеля. Легко убедиться в справедливости следующих двух утверждений.

Предложение 1. *Пусть $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $(u[e])^*(x) > -\infty$ для $x \in \mathbb{R}^n$, $(u[e])^*(x) = +\infty$ для $x \notin [0,\infty)^n$, $(u[e])^*(x) < +\infty$ для $x \in [0,\infty)^n$.*

Предложение 2. *Пусть $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\lim_{\substack{x\to\infty,\\ x\in[0,\infty)^n}} \frac{(u[e])^*(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Следующее утверждение доказано в [10, Proposition 3].

Предложение 3. *Пусть $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$ — выпуклая функция. Тогда*

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j \ln x_j - x_j), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in (0,\infty)^n.$$

Его можно усилить, пользуясь результатами Д. Асагры (см. [8, 9]).

Теорема 1 (см. [8])**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество. Для любой выпуклой функции $f : U \to \mathbb{R}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая вещественно аналитическая выпуклая функция $g : U \to \mathbb{R}$, что $f(x) - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x)$, $x \in U$.*

Таким образом, справедливо следующее утверждение (см. [9]).

Следствие 1 (см. [9])**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество. Для любой выпуклой функции $f : U \to \mathbb{R}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая бесконечно дифференцируемая выпуклая функция $g : U \to \mathbb{R}$, что $f(x) - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x)$, $x \in U$.*

Пользуясь предложением 3 и следствием 1, легко доказать следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — выпуклая функция. Тогда*

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j \ln x_j - x_j), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in (0,\infty)^n.$$

2.2. Асимптотика многомерного интеграла Лапласа. В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть E — выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^n$ и h — выпуклая функция в области E. Тогда*

$$\frac{1}{e(1+n!)\,\mathrm{vd}(y, D^{h,y})} e^{h^*(y)} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\langle x,y\rangle - h(x)}\,dx \leqslant \frac{e^2(1+n!)(2n)^n}{\mathrm{vd}(y, D^{h,y})} e^{h^*(y)}, \quad y \in \tilde{E}.$$

Здесь предполагается, что $h(x) = +\infty$ для $x \notin E$.

3. Описание сопряженного пространства.

3.1. Вспомогательные леммы. При доказательстве основной теоремы будут полезны следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$, S — линейный непрерывный функционал на F^2_φ. Тогда $\hat{S}$ — целая функция в $\mathbb{C}^n$, причем $(D^\alpha_\lambda \hat{S})(\lambda) = S(z^\alpha e^{\langle \lambda, z\rangle})$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$.*

Доказательство. Пусть λ_0 — произвольная точка из $\mathbb{C}^n$. Покажем, что функция $\hat{S}$ голоморфна в точке λ_0. Вначале отметим, что для любого $j = 1, \ldots, n$ функция $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto z_j e^{\langle z, \lambda_0\rangle}$ принадлежит пространству F^2_φ. Пользуясь линейностью функционала S, имеем

$$\hat{S}(\lambda_0 + h) - \hat{S}(\lambda_0) - \sum_{j=1}^{n} h_j S\big(z_j e^{\langle z,\lambda_0\rangle}\big) = S\Big(e^{\langle z,\lambda_0\rangle}\big(e^{\langle z,h\rangle} - 1 - \langle z, h\rangle\big)\Big). \tag{1}$$

В силу непрерывности линейного функционала S имеем

$$\Big|S\Big(e^{\langle z,\lambda_0\rangle}\big(e^{\langle z,h\rangle}-1-\langle z,h\rangle\big)\Big)| \leqslant \|S\|\,\Big\|e^{\langle z,\lambda_0\rangle}\Big(e^{\langle z,h\rangle}-1-\langle z,h\rangle\Big)\Big\|_{\varphi}, \qquad (2)$$

где $\|S\|$ — норма функционала S. Пользуясь неравенством

$$\big|e^t-1-t\big| \leqslant \frac{1}{2}|t|^2e^{|t|}, \quad t\in\mathbb{C},$$

имеем для всех $z,h\in\mathbb{C}^n$

$$\Big|e^{\langle z,\lambda_0\rangle}\big(e^{\langle z,h\rangle}-1-\langle z,h\rangle\big)\Big| \leqslant \frac{1}{2}\|z\|^2\|h\|^2\,e^{\|z\|\big(\|\lambda_0\|+\|h\|\big)}.$$

Отсюда, из равенства (1) и неравенства (2) следует, что

$$\hat{S}(\lambda_0+h)-\hat{S}(\lambda_0)-\sum_{j=1}^{n}h_jS(z_je^{\langle z,\lambda_0\rangle})=o(h), \quad h\to 0. \qquad (3)$$

Следовательно, $\hat{S}$ голоморфна в точке λ_0. Так как λ_0 — произвольная точка из $\mathbb{C}^n$, то $\hat{S}$ — целая функция в $\mathbb{C}^n$. Отметим еще, что из (3) следует, что

$$\frac{\partial\hat{S}}{\partial\lambda_j}(\lambda_0)=S\big(z_je^{\langle z,\lambda_0\rangle}\big), \quad j=1,\ldots,n.$$

Отсюда легко следует, $(D^{\alpha}_{\lambda}\hat{S})(\lambda_0)=S(z^{\alpha}e^{\langle z,\lambda_0\rangle})$ что для любого $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n_+$. □

Лемма 2. *Пусть $\varphi\in\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$. Тогда система $\{\exp\langle\lambda,z\rangle\}_{\lambda\in\mathbb{C}^n}$ полна в пространстве F^2_{φ}.*

Доказательство. Пусть S — такой линейный непрерывный функционал на пространстве F^2_{φ}, что $S(e^{\langle\lambda,z\rangle})=0$ для любого $\lambda\in\mathbb{C}^n$. Поскольку $(D^{\alpha}_{\lambda}\hat{S})(\lambda)=S(z^{\alpha}e^{\langle z,\lambda\rangle})$ для любого мультииндекса $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$, то из этого равенства получаем, что $S(z^{\alpha})=0$. Так как функция $\varphi(|z_1|,\ldots,|z_n|)$ — выпуклая в $\mathbb{C}^n$, то из результата Б. А. Тейлора о весовой аппроксимации целых функций полиномами (см. [11, Theorem 2]) следует, что полиномы плотны в F^2_{φ}. Значит, S — нулевой функционал. По следствию из теоремы Хана—Банаха получаем, что система $\{\exp\langle\lambda,z\rangle\}_{\lambda\in\mathbb{C}^n}$ полна в F^2_{φ}. □

Отметим, что система $\{z^{\alpha}\}_{|\alpha|\geqslant 0}$ ортогональна в F^2_{φ}. Кроме того, она полна в F^2_{φ}. Следовательно, система $\{z^{\alpha}\}_{|\alpha|\geqslant 0}$ — базис в F^2_{φ}.

Лемма 3. *Пусть*

$$f(z)=\sum_{|\alpha|\geqslant 0}a_{\alpha}z^{\alpha}\in F^2_{\varphi}.$$

Тогда

$$\sum_{|\alpha|\geqslant 0}\big|a_{\alpha}\big|^2c_{\alpha}(\varphi)<\infty, \quad \|f\|^2_{\varphi}=\sum_{|\alpha|\geqslant 0}\big|a_{\alpha}\big|^2c_{\alpha}(\varphi).$$

Обратно, пусть последовательность $(a_{\alpha})_{|\alpha|\geqslant 0}$ чисел $a_{\alpha}\in\mathbb{C}$ такова, что сходится ряд

$$\sum_{|\alpha|\geqslant 0}|a_{\alpha}|^2c_{\alpha}(\varphi).$$

Тогда

$$f(z)=\sum_{|\alpha|\geqslant 0}a_{\alpha}z^{\alpha}\in H(\mathbb{C}^n),$$

причем $f\in F^2_{\varphi}$.

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geqslant 0} a_\alpha z^\alpha$ — целая функция из класса F^2_φ. Тогда

$$\|f\|^2_\varphi = \int\limits_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2\, e^{-2\varphi(\operatorname{abs} z)}\, d\lambda(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^n} \sum_{|\alpha|\geqslant 0} a_\alpha z^\alpha \sum_{|\beta|\geqslant 0} \overline{a}_\beta\, \overline{z}^\beta\, e^{-2\varphi(\operatorname{abs} z)}\, d\mu_n(z) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\geqslant 0} |a_\alpha|^2 \int\limits_{\mathbb{C}^n} |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n}\, e^{-2\varphi(\operatorname{abs} z)}\, d\mu_n(z) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi).$$

Обратно, пусть ряд $\sum\limits_{|\alpha|\geqslant 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$ сходится. Отметим, что для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ и для любых положительных чисел $R_1, \ldots, R_n$ имеем

$$c_\alpha(\varphi) = (2\pi)^n \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty r_1^{2\alpha_1+1} \cdots r_n^{2\alpha_n+1}\, e^{-2\varphi(r_1,\cdots,r_n)}\, dr_1 \cdots dr_n \geqslant$$

$$\geqslant (2\pi)^n \int\limits_0^{R_1} \cdots \int\limits_0^{R_n} r_1^{2\alpha_1+1} \cdots r_n^{2\alpha_n+1}\, e^{-2\varphi(R_1,\cdots,R_n)}\, dr_1 \cdots dr_n =$$

$$= (2\pi)^n \frac{R_1^{2\alpha_1+2}}{2\alpha_1+2} \cdots \frac{R_n^{2\alpha_n+2}}{2\alpha_n+2}\, e^{-2\varphi(R_1,\cdots,R_n)}.$$

Отсюда получаем, что для любых $t \in \mathbb{R}^n$

$$c_\alpha(\varphi) \geqslant \frac{\pi^n}{\tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_n}\, e^{\langle 2\tilde{\alpha}, t\rangle - 2\varphi[e](t)}.$$

Следовательно,

$$c_\alpha(\varphi) \geqslant \frac{\pi^n}{\tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_n}\, e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})}.$$

Отсюда, пользуясь предложением **??**, получаем, что для любого $M > 0$ найдется такая постоянная $C_M > 0$, что $c_\alpha(\varphi) \geqslant C_M M^{|\alpha|}$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная $c_\varepsilon > 0$, что $|a_\alpha| \leqslant c_\varepsilon \varepsilon^{|\alpha|}$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. Значит, $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geqslant 0} a_\alpha z^\alpha$ — целая функция в $\mathbb{C}^n$. Легко видеть, что $f \in F^2_\varphi$. □

Лемма 4. *Пусть $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ имеем*

$$\frac{(2\pi)^n}{e(1+n!)\operatorname{vd}\left(2\tilde{\alpha}, D^{2\varphi[e],2\tilde{\alpha}}\right)}\, e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})} \leqslant c_\alpha(\varphi) \leqslant \frac{(4\pi n)^n e^2 (1+n!)}{\operatorname{vd}\left(2\tilde{\alpha}, D^{2\varphi[e],2\tilde{\alpha}}\right)}\, e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$. Тогда

$$c_\alpha(\varphi) = (2\pi)^n \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty r_1^{2\alpha_1+1} \cdots r_n^{2\alpha_n+1}\, e^{-2\varphi(r_1,\cdots,r_n)}\, dr_1 \cdots dr_n =$$

$$= (2\pi)^n \int\limits_{-\infty}^\infty \cdots \int\limits_{-\infty}^\infty e^{(2\alpha_1+2)t_1+\cdots+(2\alpha_n+2)t_n - 2\varphi[e](t_1,\ldots,t_n)}\, dt_1 \cdots dt_n,$$

т.е.

$$c_\alpha(\varphi) = (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\langle 2\tilde{\alpha}, t\rangle - 2\varphi[e](t)}\, dt.$$

Теперь, воспользовавшись теоремой 2, получим утверждение леммы. □

3.2. Доказательство теоремы. Покажем, что отображение $\mathcal{L}$ действует из $(F^2_\varphi)^*$ в $F^2_{\varphi^*}$. Пусть $S \in (F^2_\varphi)^*$. Согласно лемме 1 $\hat{S}$ — целая функция. Найдется такая функция $g_S \in F^2_\varphi$, что $S(f) = (f, g_S)_\varphi$, т.е.

$$S(f) = \int\limits_{\mathbb{C}^n} f(z)\, \overline{g_S(z)}\, e^{-2\varphi(\operatorname{abs} z)}\, d\mu_n(z), \quad f \in F^2_\varphi.$$

При этом $\|S\| = \|g_S\|_\varphi$. Если $g_S(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geqslant 0} b_\alpha z^\alpha$, то

$$\hat{S}(\lambda) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} \frac{c_\alpha(\varphi)\overline{b_\alpha}}{\alpha!}\lambda^\alpha, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Следовательно,

$$\|\hat{S}\|^2_{\varphi^*} = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} \left(\frac{c_\alpha(\varphi)|b_\alpha|}{\alpha!}\right)^2 c_\alpha(\varphi^*). \tag{4}$$

По лемме 4 для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ имеем

$$c_\alpha(\varphi) \leqslant \frac{(4\pi n)^n e^2 (1+n!)}{\operatorname{vd}(2\tilde{\alpha}, D^{2\varphi[e],2\tilde{\alpha}})}\, e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})}, \quad c_\alpha(\varphi^*) \leqslant \frac{(4\pi n)^n e^2 (1+n!)}{\operatorname{vd}(2\tilde{\alpha}, D^{2\varphi^*[e],2\tilde{\alpha}})}\, e^{2(\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha})}.$$

Следовательно

$$c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*) \leqslant \frac{(4\pi n)^{2n} e^4 (1+n!)^2}{\operatorname{vd}(2\tilde{\alpha}, D^{2\varphi[e],2\tilde{\alpha}})\operatorname{vd}(2\tilde{\alpha}, D^{2\varphi^*[e],2\tilde{\alpha}})}\, e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})+2(\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha})}$$

для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. Согласно предложению 4

$$(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha}) + (\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha}) = \sum_{j=1}^n ((\alpha_j+1)\ln(\alpha_j+1) - (\alpha_j+1))$$

для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$. Так как по формуле Стирлинга (см. [6, с. 792])

$$(m+1)\ln(m+1) - (m+1) = \ln\Gamma(m+1) - \ln\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\ln(m+1) - \frac{\theta}{12(m+1)}$$

для любого $m \in \mathbb{Z}_+$, где $\theta \in (0,1)$ зависит от m, то

$$(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha}) + (\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha}) = -n\ln\sqrt{2\pi} + \sum_{j=1}^n \left(\ln\Gamma(\alpha_j+1) + \frac{1}{2}\ln(\alpha_j+1) - \frac{\theta_j}{12(\alpha_j+1)}\right),$$

где $\theta_j \in (0,1)$ зависит от α_j. Тогда

$$\frac{e^{2((\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})+(\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha}))}}{\alpha!^2} = \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{j=1}^n (\alpha_j+1)e^{-\frac{\theta_j}{6(\alpha_j+1)}} \tag{5}$$

Таким образом,

$$\frac{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)}{\alpha!^2} \leqslant \frac{(2\pi)^n(2n)^{2n}e^4(1+n!)^2}{\operatorname{vd}(2\tilde{\alpha}, D^{2\varphi[e],2\tilde{\alpha}})\operatorname{vd}(2\tilde{\alpha}, D^{2\varphi^*[e],2\tilde{\alpha}})}\prod_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j.$$

Пользуясь условием на φ, получаем

$$\frac{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)}{\alpha!^2} \leqslant (2\pi)^n(2n)^{2n}e^4(1+n!)^2 K$$

для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. Отсюда и из (4), полагая $M = (2\pi)^n(2n)^{2n}e^4(1+n!)^2K$, получаем

$$\|\hat{S}\|^2_{\varphi^*} \leqslant M\sum_{|\alpha|\geqslant 0} c_\alpha(\varphi)|b_\alpha|^2 = M\|g_S\|^2_\varphi = M\|S\|^2.$$

Значит, $\hat{S} \in F^2_{\varphi^*}$. Кроме того, из последней оценки следует, что линейное отображение $\mathcal{L}$ действует из $(F^2_\varphi)^*$ в $F^2_{\varphi^*}$ непрерывно.

Отметим, что отображение $\mathcal{L}$ действует из $(F^2_\varphi)^*$ в $F^2_{\varphi^*}$ инъективно, поскольку по лемме 2 система $\{\exp\langle\lambda, z\rangle\}_{\lambda\in\mathbb{C}^n}$ полна в F^2_φ.

Покажем, что отображение $\mathcal{L}$ действует из $(F^2_\varphi)^*$ на $F^2_{\varphi^*}$ сюръективно. Пусть $G \in F^2_{\varphi^*}$. Пользуясь представлением целой функции G в виде ряда Тейлора

$$G(\lambda) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} d_\alpha \lambda^\alpha, \quad \lambda\in\mathbb{C}^n,$$

имеем

$$\|G\|^2_{\varphi^*} = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} |d_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi^*).$$

Для каждого $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$ определим числа $g_\alpha = \overline{d_\alpha}\alpha!/c_\alpha(\varphi)$ и рассмотрим вопрос о сходимости ряда $\sum\limits_{|\alpha|\geqslant 0} |g_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$. Имеем

$$\sum_{|\alpha|\geqslant 0} |g_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} \left|\frac{\overline{d_\alpha}\alpha!}{c_\alpha(\varphi)}\right|^2 c_\alpha(\varphi) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} \frac{\alpha!^2}{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)}|d_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi^*).$$

По лемме 4

$$c_\alpha(\varphi) \geqslant \frac{(2\pi)^n e^{2(\varphi[e])^*(\tilde\alpha)}}{e(1+n!)\,\mathrm{vd}(2\tilde\alpha, D^{2\varphi[e],2\tilde\alpha})}, \quad c_\alpha(\varphi^*) \geqslant \frac{(2\pi)^n e^{2(\varphi^*[e])^*(\tilde\alpha)}}{e(1+n!)\,\mathrm{vd}(2\tilde\alpha, D^{2\varphi^*[e],2\tilde\alpha})}$$

для любого $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$. Следовательно,

$$c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*) \geqslant \frac{(2\pi)^{2n} e^{2(\varphi[e])^*(\tilde\alpha)+2(\varphi^*[e])^*(\tilde\alpha)}}{e^2(1+n!)^2\,\mathrm{vd}(2\tilde\alpha, D^{2\varphi[e],2\tilde\alpha})\,\mathrm{vd}(2\tilde\alpha, D^{2\varphi^*[e],2\tilde\alpha})}$$

для любого $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$. Отсюда и из равенства (5) для любого $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n_+$ имеем

$$\frac{\alpha!^2}{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)} \leqslant \frac{e^{n+2}(1+n!)^2\,\mathrm{vd}(2\tilde\alpha, D^{2\varphi[e],2\tilde\alpha})\,\mathrm{vd}(2\tilde\alpha, D^{2\varphi^*[e],2\tilde\alpha})}{(2\pi)^n \prod\limits_{j=1}^n \tilde\alpha_j}.$$

Пользуясь условием на φ, получаем

$$\frac{\alpha!^2}{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)} \leqslant \frac{Ke^{n+2}(1+n!)^2}{(2\pi)^n}$$

для любого $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$. Следовательно, для рассматриваемого ряда имеем

$$\sum_{|\alpha|\geqslant 0} |g_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi) \leqslant \frac{Ke^{n+2}(1+n!)^2}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\geqslant 0} |d_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi^*) = \frac{Ke^{n+2}(1+n!)^2}{(2\pi)^n}\|G\|^2_{\varphi^*}. \tag{6}$$

Итак, ряд $\sum\limits_{|\alpha|\geqslant 0} |g_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$ сходится. Но тогда по лемме 3 функция $g(\lambda) = \sum\limits_{|\alpha|\geqslant 0} g_\alpha\lambda^\alpha$, $\lambda\in\mathbb{C}^n$, является целой, причем, в силу (6) g принадлежит F^2_φ и

$$\|g\|^2_\varphi \leqslant Ke^2(2e\pi)^n\|G\|^2_{\varphi^*}. \tag{7}$$

Определим функционал S на F^2_φ формулой

$$S(f) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\,\overline{g(z)}\,e^{-2\varphi(\operatorname{abs} z)}\,d\mu_n(z), \quad f\in F^2_\varphi.$$

Очевидно, S — линейный непрерывный функционал на F^2_φ, причем $\hat S = G$. Поскольку $\|S\| = \|g\|_\varphi$, то оценка (7) показывает, что обратное отображение $\mathcal{L}^{-1}$ непрерывно. Таким образом, $\mathcal{L}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $(F^2_\varphi)^*$ и $F^2_{\varphi^*}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башмаков Р. А., Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.* О геометрических характеристиках выпуклых функций и интегралах Лапласа// Уфим. мат. ж. — 2010. — *2*, № 1. — С. 3–16.
2. *Напалков В. В., Башмаков Р. А., Юлмухаметов Р. С.* Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций// Докл. РАН. — 2007. — *413*, № 1. — С. 20–22.
3. *Напалков В. В., Попенов С. В.* О преобразовании Лапласа функционалов в весовом пространстве Бергмана целых функций в $\mathbb{C}^n$// Докл. РАН. — 1997. — *352*, № 5. — С. 595–597.
4. *Напалков В. В., Юлмухаметов Р. С.* Весовые преобразования Фурье—Лапласа аналитических функционалов в круге// Мат. сб. — 1992. — *183*, № 11. — С. 139–144.
5. *Попенов С. В.* О преобразовании Лапласа функционалов в некоторых весовых пространствах Бергмана в $\mathbb{C}^n$// в сб.: Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. Т. 2. Комплексный анализ. — Уфа, 1996. — С. 125–132.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. — М.: Наука, 1970.
7. *Юлмухаметов Р. С.* Асимптотика многомерного интеграла Лапласа// в сб.: Исследования по теории приближений. — Уфа, 1989. — С. 132–137.
8. *Azagra D.* Global and fine approximation of convex functions// Proc. London Math. Soc. — 2013. — *107*, № 4. — С. 799–824.
9. *Azagra D.* Global approximation of convex functions/ e-print `arXiv:1112.1042v7`.
10. *Musin I. Kh.* On a space of entire functions rapidly decreasing on R^n and its Fourier transform// Concr. Oper. — 2015. — *2*, № 1. — С. 120–138.
11. *Taylor B. A.* On weighted polynomial approximation of entire functions// Pac. J. Math. — 1971. — *36*, № 2. — С. 523–539.

И. Х. Мусин
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр РАН, Уфа
E-mail: musin_ildar@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 153 (2018). С. 143–150

УДК 517.54

НЕОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ТОЧЕК РАЗРЫВА ВТОРОГО РОДА

© 2018 г. **А. Х. ФАТЫХОВ, П. Л. ШАБАЛИН**

Аннотация. В статье рассматривается неоднородная краевая задача Гильберта теории аналитических функций с бесконечным индексом и краевым условием для полуплоскости. Коэффициенты краевого условия непрерывны по Гельдеру всюду, кроме конечного числа особых точек, в которых аргумент функции коэффициентов имеет разрывы второго рода (степенного порядка с показателем меньше единицы). Получены формулы общего решения неоднородной задачи, рассмотрены вопросы существования и единственности решения. При исследовании решения применялся аппарат теории целых функций и геометрической теории функций комплексного переменного.

Ключевые слова: задача Гильберта, принцип Фрагмена—Линделефа, бесконечный индекс, целые функции.

AMS Subject Classification: 30E25, 35Q15

1. Постановка задачи. Пусть $E^+ = \{z : z = x + iy,\ 0 < y\}$ — верхняя полуплоскость в плоскости комплексного переменного z, $L = \partial E^+$. Рассмотрим краевую задачу Гильберта теории аналитических функций с краевым условием на вещественной оси:

$$a(t)\,\mathrm{Re}\,\Phi(t) - b(t)\,\mathrm{Im}\,\Phi(t) = c(t), \quad t \in L. \tag{1}$$

В классической постановке (коэффициенты и правая часть краевого условия непрерывны по Гельдеру) картина разрешимости задачи полностью описывается в терминах индекса задачи, т.е. деленного на 2π полного изменения аргумента функции $G(t) = a(t) - ib(t)$ (см. [4, с. 280], [9, с.155]). Та же картина наблюдается и в случае задачи с конечным числом точек разрыва первого рода коэффициентов (см. [4, с.466], [9, с.302]), и в случае счетного множества точек разрыва первого рода, если только удается вычислить индекс задачи (см. [12, 16]). Следует отметить, что задача Гильберта с разрывами первого рода коэффициентов краевого условия интересна разнообразными приложениями в некоторых математических (например, в проведенном И. Х. Сабитовым исследовании задачи Маркушевича, см. [10]) и физических (как при решении С. И. Безродных и В. И. Власовым математической модели процесса магнитного пересоединения плазмы, см. [3]) задачах. Принципиальным шагом в развитии краевых задач теории аналитических функций явилось рассмотрение задач с бесконечным индексом. Так называют краевые задачи, индекс которых не существует. Фундаментальные результаты по краевой задаче, индекс которой обращается в бесконечность, получил Н. В. Говоров (см. [5] и библиографические ссылки в этой работе). Проведенное Н. В. Говоровым глубокое исследование задачи Римана с краевым условием на гладком неограниченном разрезе и с завихрением (т.е. точкой разрыва второго рода у аргумента коэффициента краевого условия) степенного порядка на бесконечности, в результате которого были созданы аппарат и философия решения задач с не существующим в том или ином смысле индексом, послужило толчком к многочисленным публикациям. В качестве примеров приведем работы [2, 8, 11, 13, 15], в которых контуром служила вещественная ось, а двустороннее завихрение располагалось в бесконечно удаленной точке. Краевые задачи с многосторонним завихрением на бесконечности рассмотрены в [1, 14].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00282-а).

Мы впервые рассмотрим неоднородную задачу Гильберта для полуплоскости с конечным числом точек двустороннего завихрения. Здесь коэффициенты краевого условия неоднородной задачи Гильберта непрерывны по Гельдеру всюду на вещественной оси, кроме конечного числа особых точек $t_0 = \infty$ и t_j, $j = \overline{1,n}$, в которых аргумент функции коэффициентов ($\arg[a(t) - ib(t)]$) имеет разрывы второго рода степенного порядка.

Краевое условие задачи Гильберта запишем в виде

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\nu(t)}\Phi(t)\right] = \frac{c(t)}{|G(t)|}, \quad t \in L, \quad t \neq t_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L и функция $\nu(t) = \arg G(t)$ непрерывна на L всюду, кроме точек t_0, t_j, $j = \overline{1,n}$, в которых она имеет разрывы второго рода. Именно, справедливо представление

$$\nu(t) = \sum_{j=0}^{n} \nu_j(t) + \widetilde{\nu}(t), \quad \nu_0(t) = \begin{cases} \nu^- t^\rho, & t > 0, \\ \nu^+ |t|^\rho, & t < 0, \end{cases} \quad \nu_j(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\nu_j^-}{(t_j - t)^{\rho_j}}, & t < t_j, \\ \dfrac{\nu_j^+}{|t_j - t|^{\rho_j}}, & t_j < t, \end{cases} \quad j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

с некоторыми числами ν^+, ν^-, ν_j^+, ν_j^-, ρ, $0 < \rho < 1$, ρ_j, $0 < \rho_j < 1$, $j = \overline{1,n}$, причем $\widetilde{\nu}(t) \in H_L(\mu)$. Здесь $H_L(\mu)$ — класс функций $\widetilde{\nu}(t)$, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем μ на всем контуре L, включая бесконечно удаленную точку. Также считаем, что $|G(t)| \in H_L(\mu)$, $c(t) \in H_L(\mu)$.

Вначале получим формулу общего решения и исследуем разрешимость однородной задачи, т.е. определим функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в области E^+ по краевому условию:

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\nu(t)}\Phi(t)\right] = 0, \quad t \in L, \quad t \neq t_j, \quad j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Отметим, что общее решение и некоторые результаты по разрешимости однородной задачи Гильберта на окружности с конечным числом точек двустороннего завихрения получены в [17].

2. Решение однородной задачи. Для аналитического выделения особенностей функций (3) в точках t_j рассмотрим аналитические в области E^+ функции

$$P_j(z) + iQ_j(z) := \frac{l_j e^{i\alpha_j}}{(t_j - z)^{\rho_j}}, \quad j = \overline{1,n}, \qquad P_0(z) + iQ_0(z) := l e^{i\alpha} z^\rho, \tag{5}$$

где l_j, α_j — действительные постоянные, $l_j > 0$, $0 \leqslant \alpha_j < 2\pi$, $z = re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Эти функции на вещественной оси L принимают значения

$$P_j(t) + iQ_j(t) = \begin{cases} \dfrac{l_j e^{i\alpha_j}}{|t_j - t|^{\rho_j}}, & t < t_j, \\ \dfrac{l_j e^{i(\alpha_j + \pi\rho_j)}}{|t_j - t|^{\rho_j}}, & t > t_j, \end{cases} \qquad P_0(t) + iQ_0(t) = \begin{cases} l e^{i\alpha} t^\rho, & t > 0, \\ l e^{i(\alpha + \pi\rho)} |t|^\rho, & t < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Выберем числа l_j и α_j так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} l_j \cos(\alpha_j) = \nu_j^-, \\ l_j \cos(\alpha_j + \pi\rho_j) = \nu^+. \end{cases} \tag{7}$$

Из (7) выводим формулы

$$l_j \cos(\alpha_j) = \nu_j^-, \quad l_j \sin(\alpha_j) = \frac{\nu_j^- \cos(\pi\rho_j) - nu_j^+}{\sin(\pi\rho_j)}, \quad l_j = \frac{\sqrt{(\nu_j^-)^2 - 2\nu_j^- \nu_j^+ \cos(\pi\rho_j) + (\nu_j^+)^2}}{\sin(\pi\rho_j)}. \tag{8}$$

С учетом этих формул для вещественной и мнимой частей первой из функций (6) получим следующие представления:

$$P_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\nu_j^-}{(t_j - t)^{\rho_j}}, & t < t_j, \\ \dfrac{\nu_j^+}{|t_j - t|^{\rho_j}}, & t_j < t, \end{cases} \qquad Q_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\nu_j^- \cos(\pi\rho_j) - \nu_j^+}{(t_j - t)^{\rho_j} \sin(\pi\rho_j)}, & t < t_j, \\ \dfrac{\nu_j^- - \nu_j^+ \cos(\pi\rho_j)}{|t_j - t|^{\rho_j} \sin(\pi\rho_j)}, & t_j < t. \end{cases} \tag{9}$$

Формулы

$$P_0(t) = \begin{cases} \nu^- t^\rho, & 0 < t, \\ \nu^+ |t|^\rho, & t < 0, \end{cases} \qquad Q_0(t) = \begin{cases} \dfrac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} t^\rho, & 0 < t, \\ \dfrac{\nu_j^- - \nu_j^+ \cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)} |t|^\rho, & t < 0, \end{cases} \tag{10}$$

доказаны в [11, с. 85].

Теперь для непрерывной в силу (9), (10) функции

$$\hat{\nu}(t) = \nu(t) - \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \tag{11}$$

введем интеграл типа Коши

$$\Gamma(z) := \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\nu}(t) \frac{dt}{t - z} \tag{12}$$

и перепишем краевое условие однородной задачи (4) в виде

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\Gamma(t)} \exp\big\{ -ile^{i\alpha} t^\rho \big\} \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{ -i \frac{l_j e^{i\alpha_j}}{(t_j - t)^{\rho_j}} \right\} \Phi(t) \right] = 0, \tag{13}$$

где $\Gamma(t)$ — краевое значение на L аналитической в E^+ и непрерывной в $\overline{E^+}$ функции $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\nu}(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} + i\hat{\nu}(t). \tag{14}$$

Рассмотрим аналитическую в E^+ функцию

$$F(z) = ie^{-i\Gamma(z)} \exp\big\{ -ile^{i\alpha} z^\rho \big\} \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{ -i \frac{l_j e^{i\alpha_j}}{(t_j - z)^{\rho_j}} \right\} \Phi(z), \tag{15}$$

граничные значения которой в силу (13) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Im} F(t) = 0, \quad t \in L, \quad t \neq t_j. \tag{16}$$

Выразим из равенства (15) искомую функцию

$$\Phi(z) = -ie^{i\Gamma(z)} \exp\big\{ ile^{i\alpha} z^\rho \big\} \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{ i \frac{l_j e^{i\alpha_j}}{(t_j - t)^{\rho_j}} \right\} F(z). \tag{17}$$

Отметим, что если функция (17) является ограниченным в E^+ решением задачи (13) то, как следует из формулы (15), функция $F(z)$ имеет рост не больше, чем $C_1 e^{C_2/|z-t_j|^{\rho_j}}$, при подходе к исключительным точкам t_j, $j = \overline{1,n}$, и имеет рост не больше, чем $C_1 e^{C_2|z|^\rho}$, при подходе из E^+ к бесконечно удаленной точке, т.е. удовлетворяет неравенствам

$$\begin{cases} |F(z)| \leqslant C_1 e^{C_2/|t_j - z|^{\rho_j}}, & z \to t_j, \quad z \in E^+, \quad 0 < \rho_j < 1, \quad j = \overline{1,n}, \\ |F(z)| \leqslant C_1 e^{C_2|z|^\rho}, & z \to \infty, \quad z \in E^+, \quad 0 < \rho < 1. \end{cases} \tag{18}$$

Потребуем, чтобы граничные значения аналитической в E^+ функции $F(z)$ кроме условия (16) удовлетворяли еще неравенству

$$|F(t)| \leqslant C \exp\Big\{Q_0(t) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(t)\Big\}, \quad C = \mathrm{const}, \quad t \in L. \tag{19}$$

Далее нам понадобится следующий обобщенный принцип максимума аналитических функций (см., например, [6, p. 456-457]), который получается, если пересадить функцию из подобласти верхней полуплоскости, частью границы которой служит отрезок вещественной оси, содержащий ровно одну из исключительных точек t_j, в верхнюю полуплоскость так, чтобы исключительная точка перешла в бесконечно удаленную, и применить теорему Фрагмена—Линделефа. Именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если регулярная в полуплоскости E^+ функция $F(z)$ во всех точках границы области E^+, за исключением конечного их числа, удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{z\to t}} |F(z)| \leqslant C, \quad z \in E^+, \quad t \in L, \tag{20}$$

ограничена в E^+ или имеет рост не больше, чем $C_1 e^{C_2/|t_j - z|^{\rho_j}}$, $0 < \rho_j < 1$, при подходе к исключительным точкам t_j и $C_1 e^{C_2|z|^{\rho}}$, $0 < \rho < 1$, при подходе к бесконечно удаленной точке, то $|F(z)| \leqslant C_0$, $C_0 = \mathrm{const}$, во всей области E^+.

Поскольку в силу (19) всюду на L выполняется неравенство

$$|F(t)| e^{-Q_0(t)} \prod_{j=1}^{n} e^{-Q_j(t)} \leqslant C, \tag{21}$$

то по принципу максимума модуля функция (17) будет ограниченной в E^+.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Общее решение однородной краевой задачи в классе ограниченных в E^+ функций дается формулой* (17), *где $F(z)$ — произвольная аналитическая в E^+ функция, удовлетворяющая неравенствам* (18) *и на границе L — условиям* (16), (19).

3. Условия разрешимости задачи. Из теоремы 1 следует, что существование и число решений зависит от существования и множества функций $F(z)$, удовлетворяющих условиям (16), (18), (19).

Из формулы (10), неравенства (18) и леммы сразу следует, что если выполнены условия

$$\nu_j^- \cos(\pi\rho_j) - \nu_j^+ \leqslant 0, \quad \nu_j^- - \nu_j^+ \cos(\pi\rho_j) \leqslant 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{22}$$

то функция $F(z)$ ограничена по модулю в E^+, ее граничные значения в точках t_j имеют устранимые особенности, в силу условия (16) функция $F(z)$ может быть продолжена по симметрии через вещественную ось до аналитической во всей плоскости функции, которая по теореме Лиувилля является постоянной, а если хотя бы одно неравенство среди (22) строгое, то в силу формул (9) для функции $Q_j(t)$, и (10) в случае $Q_0(t)$ следует, что $F(z) \equiv 0$.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Однородная краевая задача* (13)

(a) *не имеет нетривиальных ограниченных решений, если выполнены условия* (22), *причем хотя бы одно из неравенств строгое*;

(b) *имеет единственное решение вида $\Phi(z) = -iAe^{\Gamma(z)}$, $A = \mathrm{const}$, $\mathrm{Im}\, A = 0$, если*

$$\nu_j^- \cos(\pi\rho_j) - \nu_j^+ = 0, \quad \nu_j^- - \nu_j^+ \cos(\pi\rho_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Теперь рассмотрим следующие однородные задачи Гильберта для полуплоскости E^+ с двусторонним завихрением степенного порядка в единственной точке:

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\nu_0(t)}\Phi_0(t)\right] = 0, \quad t \in L, \qquad \nu_0(t) = \begin{cases} \nu^- t^\rho, & t > 0, \\ \nu^+ |t|^\rho, & t < 0, \end{cases} \tag{23}$$

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\nu_j(t)}\Phi_j(t)\right] = 0, \quad t \in L,\ t \neq t_j, \quad \nu_j(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\nu_j^-}{(t_j - t)^{\rho_j}}, & t < t_j, \\ \dfrac{\nu_j^+}{|t_j - t|^{\rho_j}}, & t_j < t, \end{cases} \qquad j = \overline{1, n}. \tag{24}$$

Задача (23) подробно изучена в [11, с. 86]; формула общего решения имеет вид

$$\Phi_0(z) = -ie^{ile^{i\alpha}z^\rho} F_0(z), \tag{25}$$

где $F_0(z)$ — целая функция порядка не выше, чем ρ, удовлетворяющая условию $\operatorname{Im} F_0(t) = 0$, $t \in L$, и неравенству

$$|F_0(t)| \leqslant Ce^{Q_0(t)}, \quad C = \text{const}, \quad t \in L, \tag{26}$$

а величины l, α определяются из системы уравнений

$$l\cos(\alpha) = \nu^-, \quad l\cos(\alpha + \pi\rho) = \nu^+. \tag{27}$$

Для этой задачи выявлена полная картина разрешимости в классе ограниченных в верхней полуплоскости функций. Ниже нам понадобится следующее утверждение, являющееся частным случаем теоремы 2.4 из [11].

Теорема 3. *Пусть $\rho < 1/2$. Тогда однородная краевая задача* (23):

(a) *не имеет нетривиальных ограниченных решений, если*

$$\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ < 0 \quad \textit{либо} \quad \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) < 0;$$

(b) *имеет единственное решение вида*

$$\Phi_0(z) = -iAe^{-le^{i\alpha}z^\rho}, \quad A = \text{const}, \quad \operatorname{Im} A = 0,$$

если

$$\begin{cases} \nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ = 0, \\ \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) > 0 \end{cases} \quad \textit{либо} \quad \begin{cases} \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) = 0, \\ \nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0; \end{cases} \tag{28}$$

(c) *имеет бесконечное множество решений вида* (25), *где $F_0(z)$ — произвольная целая функция порядка $\rho_{F_0} \leqslant \rho$, принимающая на L вещественные значения и удовлетворяющая на границе условию* (26), *если*

$$\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0, \quad \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) > 0.$$

Частным случаем теоремы 2 из [18] является следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $1/2 \leqslant \rho < 1$.*

(a) *Если $\nu^- < 0$ или $\nu^+ > 0$, то однородная краевая задача* (23) *не имеет нетривиальных ограниченных в E^+ решений.*

(b) *Если $\nu^- \geqslant 0$, $\nu^+ \leqslant 0$, $(\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+)(\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)) < 0$, то однородная краевая задача* (23) *имеет бесконечное множество ограниченных решений, определяемых формулой* (25), *где $F_0(z)$ — произвольная целая функция порядка ρ, принимающая на L вещественные значения и удовлетворяющая на границе условию* (26).

(c) *Если $\nu^- \geqslant 0$, $\nu^+ \leqslant 0$, $(\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+)(\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)) \geqslant 0$, то однородная краевая задача* (23) *имеет бесконечное множество ограниченных решений, определяемых формулой* (25), *где $F_0(z)$ — произвольная целая функция порядка $\rho_{F_0} \leqslant \rho$, принимающая на L вещественные значения, а при $\rho_{F_0} = \rho$ удовлетворяющая на границе еще и условию* (26).

Замечание 1. Формула общего решения и картина разрешимости однородной задачи (24) получается из формул (25), (26) для решения задачи (23) и теорем 3, 4 при помощи конформного автоморфизма $\zeta_j(z) = 1/(t_j - z)$ полуплоскости.

В частности, общее решение задачи (24) представимо формулой

$$\Phi_j(z) = ie^{ile^{i\alpha_j}/(t_j - z)^{\rho_j}} F_j(z), \quad j = \overline{1, n}, \tag{29}$$

в которой имеем $F_j(z) = f_j \circ \zeta_j(z)$, где $f_j(\zeta)$ — целая функция порядка не выше ρ_j, удовлетворяющая на вещественной оси условию $\operatorname{Im} f_j(t) = 0$. Таким образом, учитывая еще (26), заключаем, что $F_j(z)$ — аналитическая в E^+ функция, ограниченная всюду, кроме полуокрестности точки t_j, в которой имеет рост не больше, чем $C_1 e^{C_2/|t_j - z|^{\rho_j}}$. Граничные значения этой функции удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Im} F_j(t) = 0, \quad |F_j(t)| \leqslant Ce^{Q_j(t)}, \quad C = \mathrm{const}, \quad t \in L. \tag{30}$$

Имея в виду утверждения теорем 3 и 4 и замечание 1, сформулируем следующий достаточный признак разрешимости задачи (13).

Теорема 5. *Задача* (13) *разрешима, если разрешимы задача* (23) *и задачи* (24) *для всех* $j = \overline{1, n}$.

Доказательство. Пусть задачи (23), (24) разрешимы. Это означает, что для каждого j, $j = \overline{0, n}$, в формуле общего решения (25) или (29) существует функция $F_j(z)$, аналитическая в E^+, удовлетворяющая условиям (30), непрерывная вплоть до границы за исключением точки t_j (∞, если $j = 0$), вблизи которой допускается рост не больше, чем $C_1 e^{C_2/|t_j - z|^{\rho_j}}$, ($C_1 e^{C_2|z|^{\rho_j}}$). Введем функцию

$$F(z) := \prod_{j=0}^{n} F_j(z). \tag{31}$$

Легко видеть, что в силу условий (30) определенная выше функция $F(z)$ удовлетворяет условиям (16), (18), (19); следовательно, формула (17) является содержательной, решение задачи (13) существует. □

4. Решение неоднородной задачи. С учетом введенных в п. 2 функций перепишем краевое условие (2) неоднородной задачи в виде

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\Gamma(t)} \exp\left\{-ile^{i\alpha}t^{\rho}\right\} \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{-i\frac{l_j e^{i\alpha_j}}{(t_j - t)^{\rho_j}}\right\} \Phi(t)\right] = \frac{c(t) \prod\limits_{j=0}^{n} e^{Q_j(t)}}{|G(t)| e^{\Gamma_0(t)}}. \tag{32}$$

Для нахождения частного решения этой задачи нам понадобится каноническое решение $\tilde{\Phi}(z)$ однородной задачи. Будем считать, что однородная задача (13) разрешима, так что задача (23) и задачи (24) для всех $j = \overline{1, n}$ имеют бесконечно много решений. В этой ситуации требуется найти частное решение задачи (13) по формуле (17) с функцией $\tilde{F}(z)$, удовлетворяющей условиям (16), (18), (19) и дополнительным ограничениям

$$\tilde{F}(t) \neq 0, \quad t \in L; \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{\prod\limits_{j=0}^{n} e^{Q_j(t)}}{\tilde{F}(t)} = m, \quad 0 < m < \infty; \qquad \frac{\prod\limits_{j=0}^{n} e^{Q_j(t)}}{\tilde{F}(t)} \in H_L(\mu). \tag{33}$$

При этом функцию $\tilde{F}(z)$ можно искать в виде

$$\tilde{F}(z) = \prod_{j=0}^{n} \tilde{F}_j(z), \tag{34}$$

где $\tilde{F}_0(z)$ — целая функция порядка ρ, входящая в формулу (25) для канонического решения задачи (23), т.е. удовлетворяющая дополнительно условиям

$$\tilde{F}_0(t) \neq 0, \quad t \in L; \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{e^{Q_0(t)}}{\tilde{F}_0(t)} \text{ существует}; \qquad \frac{e^{Q_0(t)}}{\tilde{F}_0(t)} \in H_L(\mu), \tag{35}$$

$\tilde{F}_j(z)$ — функция, входящая в формулу (29) для канонического решения задачи (24), дополнительно удовлетворяет условиям

$$\tilde{F}_j(t) \neq 0, \quad t \in L; \qquad \lim_{t\to t_j} \frac{e^{Q_j(t)}}{\tilde{F}_j(t)} \text{ существует}; \qquad \frac{e^{Q_j(t)}}{\tilde{F}_j(t)} \in H_L(\mu) \tag{36}$$

и $\tilde{F}_j(z) = \tilde{f}_j \circ \zeta_j(z)$, где $\tilde{f}_j(\zeta)$ — целая функция порядка ρ_j.

Построение функции $\tilde{F}_0(z)$ со свойствами (30), (35) подробно описано в [11, с. 96-106)]. Следуя этой работе по известным из (3) числам ν^-, ν^-, ρ найдем

$$\Delta = \frac{\sqrt{(\nu^-)^2 - 2\nu^-\nu^+\cos(\pi\rho) + (\nu^+)^2}}{2\pi}, \quad \theta\rho = \arccos\frac{\nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho)}{2\pi\Delta}, \quad 0 < \theta < \pi. \tag{37}$$

По последовательности нулей в верхней полуплоскости определим целую функцию

$$\tilde{F}_0(z) := \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r_k e^{i\theta}}\right)\left(1 - \frac{z}{r_k e^{-i\theta}}\right), \tag{38}$$

для которой через $n_0(\tau)$ обозначим число нулей в круге $|z| < \tau$. Если теперь потребовать выполнения условия

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{n_0(\tau)}{\tau^\rho} = \Delta, \tag{39}$$

то порядок этой целой функции будет равен ρ (см. [7, с.35]). Нужная плотность распределения нулей Δ будет гарантирована (см. [5, с. 127]), если положить

$$r_k = \left(\frac{2k-1}{2\Delta}\right)^{1/\rho} \quad \Rightarrow \quad n(\tau) = \left[\tau^\rho\Delta + \frac{1}{2}\right], \tag{40}$$

где символом $[a]$ обозначена целая часть числа a. Аналогично, по величинам ν_j^-, ν_j^-, ρ_j определим целую функцию $\tilde{f}_j(\zeta_j)$ порядка ρ_j для $j = \overline{1,n}$, затем определим функцию $\tilde{F}_j(z) := \tilde{f}_j \circ \zeta_j(z)$. Последняя будет удовлетворять условиям (30), (36). Далее находим $\tilde{F}(z)$, которая, очевидно, удовлетворяет условиям (16), (18), (19), (33). Подставив $\tilde{F}(z)$ в формулу (17), находим каноническое решение

$$\tilde{\Phi}(z) = -ie^{i\Gamma(z)}\exp\left\{ile^{i\alpha}z^\rho\right\}\prod_{j=1}^{n}\exp\left\{i\frac{l_j e^{i\alpha_j}}{(t_j - t)^{\rho_j}}\right\}\tilde{F}(z) \tag{41}$$

однородной задачи Гильберта (13).

Краевое условие неоднородной задачи (32) после деления на $\tilde{F}(t)$ и выделения в знаменателе левой части функции $\tilde{\Phi}(t)$ примет вид

$$\operatorname{Re}\left[-i\frac{\Phi(t)}{\tilde{\Phi}(t)}\right] = c_1(t), \quad c_1(t) := \frac{c(t)\prod\limits_{j=0}^{n} e^{Q_j(t)}}{|G(t)|e_0^\Gamma(t)\tilde{F}(t)}. \tag{42}$$

Будем искать частное решение неоднородной задачи, имеющее те же последовательности нулей, что и функция $\tilde{F}(z)$, и, следовательно, $\tilde{\Phi}(z)$. Поэтому отношение $\Phi(z)/\tilde{\Phi}(z)$ для искомой функции будет аналитической и ограниченной в полуплоскости функцией. Поскольку $c_1(t) \in H_L(\mu)$, функция $-i\Phi(z)/\tilde{\Phi}(z)$ представима по формуле Шварца для полуплоскости; следовательно,

$$\Phi(z) = -ie^{i\Gamma(z)}\exp\left\{ile^{i\alpha}z^\rho\right\}\prod_{j=1}^{n}\exp\left\{i\frac{l_j e^{i\alpha_j}}{(t_j - t)^{\rho_j}}\right\}\tilde{F}(z)\frac{1}{\pi}\int_L\frac{c_1(t)dt}{t - z}. \tag{43}$$

Последняя формула дает частное решение неоднородной краевой задачи (2), общее решение которой представимо в виде суммы общего решения соответствующей однородной задачи и данного частного решения. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Если каждая из задач* (23), (24), $j = \overline{1, n}$, *имеют бесконечное множество решений, то общее решение неоднородной краевой задачи* (2) *представляется как сумма функций* (17) *и* (43).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алехно А. Г.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом в случае многостороннего завихрения// Докл. АН БССР. — 1981. — *25*, № 8. — С. 681–684.
2. *Алехно А. Г.* Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка// Докл. НАН Беларуси. — 2009. — *53*, № 2. — С. 5–10.
3. *Безродных С. И., Власов В. И.* Задача Римана—Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2002. — *42*, № 3. — С. 277–312.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — Наука, М., 1977.
5. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. — М.: Наука, 1986.
6. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. — М.: Наука, 1968.
7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.
8. *Монахов В. Н., Семенко Е. В.* Краевые задачи с бесконечным индексом в пространствах Харди// Докл. АН СССР. — 1986. — *291*, № 3. — С. 544–547.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — Наука, М., 1968.
10. *Сабитов И. Х.* Об одной граничной задаче теории функций// Изв. отд. геол.-хим. и техн. наук АН Тадж. ССР. — 1961. — *4*, № 6. — С. 3–10.
11. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения. — Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2005.
12. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* Задача Гильберта. Случай бесконечного множества точек разрыва коэффициентов// Сиб. мат. ж. — 2008. — *49*, № 4. — С. 898–915.
13. *Сандрыгайло И. Е.* О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости// Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. — 1974. — *6*. — С. 16–23.
14. *Севрук А. Б.* Однородная краевая задача Гильберта с бесконечным индексом для кусочно аналитических функций// Вестник БГУ. Сер. 1. — 2010. — *1*. — С. 76–81.
15. *Толочко М. Э.* О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости// Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. — 1969. — *4*. — С. 52–59.
16. *Шабалин П. Л.* Один случай задачи Гильберта с особенностями коэффициентов// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информатика. — 20009. — *9*, № 1. — С. 58–68.
17. *Salimov R. B., Fatykhov A. Kh., Shabalin P. L.* Homogeneous Hilbert boundary value problem with several points of turbulence// Lobachevskii J. Math. — 2017. — *38*, № 3. — С. 414–419.
18. *Salimov R., Shabalin P.* Solvability of the Riemann–Hilbert boundary-value problem with a two-side curling at infinity point of order less than 1// Complex Var. Ell. Equ. — 2014. — *59*, № 12. — 1739–1757.

А. Х. Фатыхов
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
E-mail: vitofat@gmail.com

П. Л. Шабалин
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
E-mail: pavel.shabalin@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 153 (2018). С. 151–157

УДК 517.518.85

ПРИБЛИЖЕНИЕ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ПОЛИНОМА ЛАГРАНЖА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ СО СМЕЩЕНИЕМ АРГУМЕНТА

© 2018 г. **И. А. ШАКИРОВ**

Аннотация. В работе улучшены известные двусторонние оценки для констант Лебега двух классических тригонометрических интерполяционных полиномов Лагранжа. При этом в качестве аппарата их приближения использованы логарифмические функции со смещением аргумента.

***Ключевые слова*:** интерполяционный полином Лагранжа, остаточный член, константа Лебега, приближение константы Лебега логарифмическими функциями, экстремальная задача, элемент наилучшего приближения.

***AMS Subject Classification*:** 42A15

1. Введение. Работа имеет непосредственное отношение к теории равномерного приближения заданной функции $x = x(t) \in C_{2\pi}$, где $C_{2\pi} = \{x \in C[0, 2\pi] : x(0) = x(2\pi)\}$, классическими интерполяционными полиномами Лагранжа n-й степени:

$$\Phi_n^*(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} x(t_k)D_n^*(t_k - t), \qquad D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{2\operatorname{tg} 0.5u}, \qquad t_k = \frac{\pi k}{n}, \tag{1}$$

$$L_n(x,t) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} x(t_k)D_n(t_k - t), \quad D_n(u) = \frac{\sin(n+0.5)u}{2\sin 0.5u}, \quad t_k = \frac{2\pi k}{2n+1}, \tag{2}$$

определенными соответственно в четном и нечетном числе равноотстоящих узлов. При практическом использовании этих полиномов на первый план выходит вопрос об их скорости сходимости к интерполируемой функции $x(t)$, на что согласно общеизвестному фундаментальному неравенству (неравенству Лебега) влияют константы Лебега

$$\lambda_n^* \equiv \lambda^*(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg}\frac{2k+1}{4n}\pi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$\lambda_n \equiv \lambda(n) = \frac{1}{2n+1}\left(1 + 2\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cosec}\frac{2k+1}{4n+2}\pi\right) = \frac{1}{2n+1}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}\frac{2k-1}{4n+2}\pi\right). \tag{4}$$

Отметим, что аппроксимативные возможности полиномов (1), (2) и их алгебраических аналогов хорошо изучены в работах С. Н. Бернштейна, Л. Фейера, А. Н. Колмогорова, Г. Сеге, Г. Харди, А. Н. Турецкого, А. Зигмунда, Ю. Марцинкевича, И. П. Натансона, П. Эрдеша, А. Ф. Тимана, Т. Ривлина, В. К. Дзядыка, К. И. Бабенко, их многочисленных учеников и последователей.

В математической литературе более активно, по сравнению с (4), изучалось поведение константы (3). Эти интерполяционные характеристики первоначально оценивались как $O(\ln n)$, а затем для них были установлены оценки вида

$$A_1 + B_1 \ln n \leqslant \Lambda_n \leqslant A_2 + B_2 \ln n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\Lambda_n = \lambda_n^* \vee \lambda_n), \tag{5}$$

где A_k, B_k — некоторые известные, хотя и несколько грубо определенные, действительные числа. Здесь в основном последовательно улучшались верхние оценки, а нижние оценки проводились реже в связи с возникающими при этом техническими проблемами. Например, $\Lambda_n < 4 + \lg n$ (см. [4]), $\Lambda_n \leqslant 8 + (4/\pi)\ln n$ (см. [8]), $\Lambda_n \leqslant 4\sqrt{2} + (2/\pi)\ln n$ (см. [2]).

Коэффициенты, входящие в неравенство (5), многократно уточнялись. В [6] неравенство $\Lambda_n \leqslant 4/\pi + (2/\pi)\ln(2N/\pi)$ установлено в случае нечетного числа ($N = 2n+1$), а в [3, с. 106] — четного числа ($N = 2n$) узлов интерполяции. В монографии [1, с. 215] приводится оценка константы Лебега вида $\lambda_{2n-1} = (2/\pi)\ln n + 2(1-1/\pi)\theta_n$, $\theta_n \in (0,1)$, уточняющая поведение ограниченных констант, входящих в асимптотические равенства

$$\lambda_n^* = \frac{2}{\pi}\ln n + O^*(1), \quad N = 2n, \qquad \lambda_n = \frac{2}{\pi}\ln n + O(1), \quad N = 2n+1. \tag{6}$$

Первое из них было установлено еще в начале двадцатого века (1918 г.) С. Н. Бернштейном. Затем вопросы асимптотического поведения константы Лебега рассматривались во многих работах отечественных и зарубежных авторов (см. [1, с. 215], [5, с. 61], [7, с. 66], [8, с. 540], [10,12–15]). Из них следует, что для получения неулучшаемой двусторонней оценки вида (5) с вполне определенными константами необходимо

(i) изучить на монотонность остаточные члены

$$O_n^* \equiv O^*(n) = \lambda_n^* - \frac{2}{\pi}\ln n, \quad N = 2n, \qquad O_n \equiv O(n) = \lambda_n - \frac{2}{\pi}\ln n, \quad N = 2n+1; \tag{7}$$

(ii) установить их предельные значения

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\lambda_n^* - \frac{2}{\pi}\ln n\right] = \alpha_0, \quad N = 2n, \qquad \lim_{n\to+\infty}\left[\lambda_n - \frac{2}{\pi}\ln n\right] = \beta_0, \quad N = 2n+1. \tag{8}$$

Заметим, что в [11] значение α_0 установлено простым и отличным от [14] методом с использованием нового представление для константы Лебега λ_n^* (см. [9]).

Полное решение задач, связанных с соотношениями (6)–(8), обзор соответствующей литературы содержится в [10, 12, 14], согласно которым неулучшаемые двусторонние оценки для констант (3) и (4) нижеследующие:

$$\alpha_0 + \frac{2}{\pi}\ln n \leqslant \lambda_n^* \leqslant 1 + \frac{2}{\pi}\ln n, \quad \alpha_0 = \frac{2}{\pi}\left[\gamma + \ln\frac{8}{\pi}\right] = 0{,}962522826\ldots, \tag{9}$$

$$\beta_0 + \frac{2}{\pi}\ln n \leqslant \lambda_n \leqslant 5/3 + \frac{2}{\pi}\ln n, \quad \beta_0 = \frac{2}{\pi}\left[\gamma + \ln\frac{16}{\pi}\right] = 1{,}403794027\ldots, \tag{10}$$

где $n \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, $\gamma = 0{,}577215664\ldots$ — константа Эйлера. Равенства в верхних оценках достигаются только при значении аргумента $n = 1$, а в нижних — при $n = +\infty \in \overline{\mathbb{N}}$. Двойные неравенства (9), (10) позволяют без особых проблем указать для констант λ_n^*, λ_n элементы их наилучших приближений

$$\mu_n^* \equiv \mu^*(n) = \frac{2}{\pi}\ln n + \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{8}{\pi}, \quad \mu_n \equiv \mu(n) = \frac{2}{\pi}\ln n + \frac{5}{6} + \frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{16}{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

и решить экстремальные задачи

$$\inf_{b\in[0,2]}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\lambda_n^* - b - \frac{2}{\pi}\ln n\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\lambda_n^* - \mu_n^*\right| = \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{\pi} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{8}{\pi} = 0{,}018738586\cdots = \varepsilon^*, \tag{12}$$

$$\inf_{b\in[0,2]}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\lambda_n - b - \frac{2}{\pi}\ln n\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\lambda_n - \mu_n\right| = \frac{5}{6} - \frac{\gamma}{\pi} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{16}{\pi} = 0{,}131436319\cdots = \varepsilon, \tag{13}$$

где ε^*, ε — соответствующие элементам (11) наилучшие (дискретные) равномерные приближения констант Лебега (3), (4) логарифмическими функциями вида $y = y(n,b) = (2/\pi)\ln n + b$, $n \in \mathbb{N}$, $b \in [0,2]$.

В данной работе изучаются равномерные аппроксимации констант λ_n^*, λ_n вида

$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi}\ln(n+a) + b, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (a,b) \in \Omega = [0,1]\times[0,2] \subset \mathbb{R}^2, \tag{14}$$

содержащие в правой части (14) смещение a (сдвиг) аргумента n логарифмической функции, и оцениваются допущенные при этом погрешности. Рассматриваются более общие, чем (12) и (13), экстремальные задачи

$$E^* \overset{\text{def}}{=} \inf_{(a,b)\in\Omega} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\lambda_n^* - \frac{2}{\pi}\ln(n+a) - b\right|, \quad E \overset{\text{def}}{=} \inf_{(a,b)\in\Omega} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\lambda_n - \frac{2}{\pi}\ln(n+a) - b\right|, \tag{15}$$

которые в математической литературе ранее не исследовались. За пределами области Ω они не могут иметь решений, что немедленно следует из результатов ранее приведенных работ и правила воздействия сдвига аргумента функции на ее график.

Величины E^*, E имеют важное практическое значение и являются своего рода ориентиром (наилучшим приближением), позволяющим судить об аппроксимативных качествах выбранного каким-либо способом логарифмического приближения (14). Ниже для них получены достаточно строгие оценки сверху вида

$$E^* \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\lambda_n^* - \frac{2}{\pi}\ln(n+a^*) - b^*\right| = \theta^* = 0{,}008594791\ldots, \tag{16}$$

$$E \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\lambda_n - \frac{2}{\pi}\ln(n+a^0) - b^0\right| = \theta = 0{,}001151281\ldots, \tag{17}$$

где

$$a^* = \exp\left[\frac{\pi}{2}(1-\alpha_0)\right] - 1 = 0{,}060636294\ldots, \qquad b^* = \alpha_0 = 0{,}962522826\ldots, \tag{18}$$

$$a^0 = \exp\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{5}{3} - \beta_0\right)\right] - 1 = 0{,}511223181\ldots, \quad b^0 = \beta_0 = 1{,}403794027\ldots. \tag{19}$$

В (16), (17) качество приближения констант Лебега λ_n^*, λ_n по сравнению с (12), (13) заметно улучшено, что хорошо видно из следующих соотношений:

$$\frac{\varepsilon^*}{\theta^*} = 2{,}16\ldots, \quad \frac{\varepsilon}{\theta} = 114{,}16\ldots. \tag{20}$$

Однако задача определения наилучших пар вида $(a,b)\in\Omega$, обеспечивающих достижение величин E^* и E в (15), остается открытой.

2. Случай нечетного числа узлов интерполяции. Приведем определения классов функций, которые далее используем в ходе доказательства основных теорем.

Определение. Строго монотонную функцию $\phi = \phi(n)$, $n \in D = D(\phi) \subseteq \mathbb{N}$, дискретного аргумента, имеющую малое изменение δ области значений $R(\phi)$, назовем *функцией, имеющей малую монотонную вариацию*, а класс таких функций обозначим через $V_\delta^\pm$, где знак «+» выбирается в случае возрастания функции в области $D(\phi)$, а «−» — при ее убывании;

$$\delta = \delta(\phi) = \sup\{\phi(n) \mid n\in D\} - \inf\{\phi(n) \mid n \in D\}, \quad \delta \leqslant \delta_0 \quad (\delta_0 = \text{const}).$$

С целью сокращения изложения материала в следующем пункте данный случай изучим более подробно. Используя приближение константы Лебега λ_n логарифмической функцией с двумя параметрами вида

$$y \equiv \mu_n(a,b) = \frac{2}{\pi}\ln(n+a) + b, \quad n\in\mathbb{N}, \quad (a,b)\in\Omega, \tag{21}$$

ниже известный результат (13) улучшим более чем на два порядка (см. (20)). Возможность такого существенного улучшения качества приближения в этом случае связана с тем, что

1) эффективно используются свойства сдвига аргумента логарифмической функции;
2) остаточный член $O_n \in V_\delta^-$ (см. [10]) имеет сравнительно большую область значений и вариацию

$$R(O_n) = \left(\beta_0,\ \frac{5}{3}\right], \quad \delta = \delta(O_n) = \frac{5}{3} - \beta_0 = 0{,}262872639\ldots,$$

чем аналогичные характеристики для остаточного члена $O_n^* \in V_\delta^-$ (см. [12, с. 116]) вида

$$R(O_n^*) = (\alpha_0, 1], \quad \delta^* = \delta(O_n^*) = 1 - \alpha_0 = 0{,}037477174\ldots.$$

Теорема 1. *При приближенной замене константы Лебега логарифмической функцией вида*

$$\lambda_n \approx \mu_n(a^0, b^0), \quad n \in \mathbb{N}, \mu_n(a^0, b^0) \equiv \frac{2}{\pi} \ln(n + a^0) + b^0, \tag{22}$$

для величины допущенной равномерной (дискретной) погрешности имеем

$$\theta \stackrel{def}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \lambda_n - \frac{2}{\pi} \ln(n + a^0) - b^0 \right| = 0{,}001151281\ldots, \tag{23}$$

где коэффициенты a^0, b^0 определены в (19).

Доказательство. Если в (21) положим $a = 0$, то для константы Лебега λ_n уже имеет место неулучшаемая в своем классе двусторонняя оценка (10) и решена экстремальная задача (13).

Пусть параметр a меняется в области $D = (0, 1]$. Независимо от произвольно выбранных значений аргумента n и параметра b с ростом a, $a \in D$, значение функции (21) также возрастает, так как

$$\frac{\partial \mu_n(a, b)}{\partial a} = \frac{2}{\pi(n + a)} > 0 \quad \forall a \in D, b \in [0, 2], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Видно, что на этот процесс не влияет выбор параметра b, и с увеличением аргумента n скорость роста функции $\mu_n(a, b)$ стремится к нулю независимо от поведения параметра $a \in D$. Другими словами, при любых $b \in [0, 2]$ и $n \in \mathbb{N}$ в координатной системе yOn для функции (21) верна импликация

$$a_2 > a_1 \quad \Rightarrow \quad \mu_n(a_2, b) > \mu_n(a_1, b), \quad a_1, a_2 \in D. \tag{24}$$

Зафиксируем в (21) значение второго параметра $b = b_0 = \beta_0 = 1{,}403794027\ldots$. Нижнюю оценку из двойного неравенства (10) перепишем в виде

$$\mu_n(0, \beta_0) \leqslant \lambda(n), \quad n \in \overline{\mathbb{N}}, \tag{25}$$

в котором согласно(10) равенство достигается только при $n = +\infty \in \overline{\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n(0, \beta_0) = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n.$$

Учитывая свойство (24) функции $y = \mu_n(\alpha, \beta_0)$ и подбирая соответствующим образом параметр a, левую и правую части в (25) можно сделать совпадающими и при произвольно выбранном конечном значении аргумента $n = n_0$. Другими словами, равенство $\mu_n(\alpha, \beta_0) = \lambda(n)$ имеет место при $n = n_0$, если сдвиг аргумента a приближающей функции (21) равен

$$a(n_0) = \exp\left[\frac{\pi}{2}(\lambda_{n_0} - \beta_0)\right] - n_0, \quad n_0 \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

При этом для выпукло возрастающих функций $y = \mu_n\bigl[a(n_0), \beta_0\bigr]$, $n \in \mathbb{N}$, и $y = \lambda(n)$, $n \in \mathbb{N}$, имеем:

$$\beta_0 + \frac{2}{\pi} \ln[n + a(n_0)] < \lambda_n, \quad n \in \{1, 2, 3, \ldots, n_0 - 1\},$$
$$\beta_0 + \frac{2}{\pi} \ln[n + a(n_0)] = \lambda_n, \quad n = n_0,$$
$$\beta_0 + \frac{2}{\pi} \ln[n + a(n_0)] > \lambda_n, \quad n \in \{n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \ldots\}.$$

Полагая в них и в (26) $n = n_0 = 1$, получим

$$a^0 \equiv a(1) = \exp\left[\frac{\pi}{2}(\lambda_1 - \beta_0)\right] - 1 = 0{,}511223181\ldots, \tag{27}$$

$$\beta_0 + \frac{2}{\pi} \ln(1 + a^0) = \lambda_1, \quad n = 1, \qquad \beta_0 + \frac{2}{\pi} \ln(n + a^0) > \lambda_n, \quad n = 2, 3, 4, \ldots. \tag{28}$$

В итоге можем утверждать, что соответствующий приближенной формуле (22) остаточный член

$$\overline{O}_n \equiv \mu_n(a^0, \beta_0) - \lambda_n = \beta_0 + \frac{2}{\pi} \ln(n + a^0) - \lambda_n, \quad n \in \overline{\mathbb{N}}, \tag{29}$$

ведет себя следующим образом:

1) обращается в нуль на концах области определения:

$$\overline{O}_1 = \beta_0 + \frac{2}{\pi}\ln\Big\{1 + \exp\Big[\frac{\pi}{2}(\lambda_1 - \beta_0)\Big] - 1\Big\} - \lambda_n = \beta_0 + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}(\lambda_1 - \beta_0) - \lambda_1 = 0,$$

$$\overline{O}_\infty \equiv \lim_{n\to+\infty}\overline{O}_n = \lim_{n\to+\infty}\Big[\beta_0 + \frac{2}{\pi}\ln(n + a^0) - \lambda_n\Big] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\Big[\beta_0 + \frac{2}{\pi}\ln n - \lambda_n\Big] + \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}\ln\left(1 + \frac{a^0}{n}\right) = 0; \qquad (30)$$

2) представляется в виде разности двух неотрицательных, строго убывающих к нулю, имеющих одинаковые область значений и вариацию последовательностей $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, т.е.

$$\overline{O}_n = \left[\frac{2}{\pi}\ln\left(1 + \frac{a^0}{n}\right)\right] - \left[\lambda_n - \beta_0 - \frac{2}{\pi}\ln n\right] \equiv \tau_n - \nu_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$R(\tau_n) = R(\nu_n) = \big(0, \lambda_1 - \beta_0\big], \quad \delta(\tau_n) = \delta(\nu_n) = \lambda_1 - \beta_0 = 0{,}262872639\ldots;$$

3) при этом $(\overline{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ также является неотрицательной и сходящейся к нулю последовательностью (см. (27)–(30)).

Согласно известному алгоритму обоснования ограниченности сходящейся последовательности, после некоторых расчетов найдем:

$$\theta = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\lambda_n - \frac{2}{\pi}\ln(n + a^0) - b^0\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\overline{O}_n = \sup\big\{\overline{O}_1, \overline{O}_2, \overline{O}_3, \overline{O}_4, \overline{O}_5, \ldots\big\} =$$

$$= \sup\big\{0,\ 0{,}001119949\ldots,\ 0{,}001151281\ldots,\ 0{,}001048427\ldots,\ 0{,}000937741\ldots,\ \ldots\big\} =$$

$$= 0{,}001151281\ldots.$$

Справедливость соотношения (23) установлена, что и завершает доказательство теоремы. □

Теорема 2. *Для наилучшего приближения E справедлива оценка* (17).

Доказательство. Используя обозначения (19), принадлежность пары (a^0, b^0) области Ω и результат (23) предыдущей теоремы, получим:

$$E = \inf_{(a,b)\in\Omega}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\lambda_n - \frac{2}{\pi}\ln(n + a) - b\right| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\lambda_n - \frac{2}{\pi}\ln(n + a^0) - b^0\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\overline{O}_n = 0{,}001151281\ldots.$$

Теорема доказана. □

Замечание 1. Схема доказательства теоремы 1 позволяет утверждать, что приближенная формула (22) построена исходя из условия совпадения функции $y = \lambda_n = \lambda(n)$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$, и приближающей ее логарифмической функции $y = \mu_n(a^0, \beta_0)$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$, на концах области их определения.

Замечание 2. В приближенной формуле (22) качество приближения константы Лебега λ_n логарифмической функцией, содержащей сдвиг ее аргумента, по сравнению с известной формулой $\lambda_n \approx \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$ (см.(11), (13)), улучшено более чем на два порядка, что хорошо видно из соотношения $\varepsilon/\theta = 114{,}16\ldots$.

3. Случай четного числа узлов интерполяции. Вначале приведем геометрическую интерпретацию двустороннего неравенства (9) для константы Лебега λ_n^*. Все значения дискретной функции $y = \lambda_n^* = \lambda^*(n)$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$, рассматриваемой в координатной системе nOy, находятся в бесконечной полосе «шириной» $\delta^* = 1 - \alpha_0 = 0{,}037477174\ldots$, образованной логарифмическими функциями $y = \alpha_0 + (2/\pi)\ln n$, $y = 1 + (2/\pi)\ln n$. В этом случае вариация $\delta^* = \delta(O_n^*)$ остаточного члена O_n^* (см. (7)) заметно меньше соответствующего аналога $\delta = \delta(O_n)$:

$$\frac{\delta}{\delta^*} = \left(\frac{5}{3} - \beta_0\right)/(1 - \alpha_0) = 7{,}014\ldots.$$

Следовательно, на этот раз улучшение качества аппроксимации λ_n^* логарифмической функцией вида (21) следует ожидать не таким значительным, как в теореме 1 (см. также замечание 2).

Теорема 3. *В приближенной формуле*

$$\lambda_n^* \approx \mu_n^*, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mu_n^* \equiv \mu_n(a^*, b^*) = \frac{2}{\pi} \ln(n + a^*) + b^*, \tag{31}$$

в которой константа Лебега аппроксимируется вполне определенной логарифмической функцией вида (21), *для величины допущенной равномерной погрешности имеем*

$$\theta^* \stackrel{def}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \lambda_n^* - \frac{2}{\pi} \ln(n + a^*) - b^* \right| = 0{,}008594791\ldots, \tag{32}$$

где коэффициенты a^*, b^* *определены в* (18).

Доказательство. Схема обоснования данной теоремы аналогична теореме 1. Опуская подробности, приведем лишь существенные моменты ее доказательства. Если в (21) положим $a = 0$, то для константы λ_n^* имеют место известные соотношения (9) и (12).

Пусть $a \in (0,\, 1]$. Используя замечание 1, значения параметров a, b аппроксимирующей функции $y = \mu_n(a, b) = (2/\pi)\ln(n+a)+b$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$, определим из условия ее совпадения с $y = \lambda_n^* = \lambda^*(n)$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$, на концах их общей области определения, т.е. при $n = 1$ и $n = +\infty \in \overline{\mathbb{N}}$. С учетом (9) их совпадение в правой граничной точке (равенство в бесконечно удаленной точке) позволяет определить второй параметр b:

$$\mu_\infty(a, b) = \lambda_\infty^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{2}{\pi}\ln(n+a) + b - \lambda_n^*\right] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\ln n + \alpha_0 - \lambda_n^*\right) + \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) + \lim_{n\to+\infty}(b - \alpha_0) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad b = \alpha_0 = b^*$$

(см. (18)). В уточненном приближающем агрегате $y = (2/\pi)\ln(n + a) + \alpha_0$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$, искомый параметр a определим из условия ее совпадения с константой Лебега в левой граничной точке:

$$\mu_1(a, \alpha_0) = \lambda_1^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\pi}\ln(1+a) + \alpha_0 = \lambda_1^* \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1+a) = \frac{\pi}{2}(1-\alpha_0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a = a^* = \exp\left[\frac{\pi}{2}(1-\alpha_0)\right] - 1 = 0{,}060636294\ldots$$

(см. (18)).

В итоге для константы Лебега λ_n^* получим приближенную формулу (31) и соответствующий остаточный член:

$$O_n^* \equiv \mu_n(a^*, b^*) - \lambda_n^* = \frac{2}{\pi}\ln(n + a^*) + \alpha_0 - \lambda_n^*, \quad n \in \overline{\mathbb{N}}. \tag{33}$$

Остаточный член (33) обладает всеми свойствами 1)–3) ее аналога (29) и соответствующая ему неотрицательная последовательность $(O_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к нулю. Как и в предыдущем пункте, используя алгоритм обоснования ограниченности сходящейся последовательности, найдем указанное в (32) экстремальное значение:

$$\theta^* = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\lambda_n^* - \frac{2}{\pi}\ln(n+a^*) - b^*\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} O_n^* = \sup\left\{O_1^*, O_2^*, O_3^*, O_4^*, O_5^*, \ldots\right\} =$$

$$= \sup\left\{0,\ 0{,}008594791\ldots,\ 0{,}007993573\ldots,\ 0{,}006884312\ldots,\ 0{,}005942456\ldots,\ \ldots\right\} =$$

$$= 0{,}008594791\ldots.$$

Теорема доказана. □

Теорема 4. *Для наилучшего приближения E^* справедлива оценка* (16).

Доказательство. Используя обозначения(18), принадлежность пары $(a^*, b^*) \in \Omega$ и результат теоремы 3, получим:

$$E^* = \inf_{(a,b)\in\Omega} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \lambda_n^* - \frac{2}{\pi} \ln(n+a) - b \right| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \lambda_n^* - \frac{2}{\pi} \ln(n+a^*) - b^* \right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} O_n^* = 0.008594791\cdots .$$

Теорема доказана. □

Замечание 3. В приближенной формуле (31) качество приближения константы Лебега λ_n^* логарифмической функцией, содержащей сдвиг ее аргумента, по сравнению с известной формулой $\lambda_n^* \approx \mu_n^*$, $n \in \mathbb{N}$ (см. (11), (12)), улучшено более чем в два раза, что хорошо видно из соотношения $\varepsilon^*/\theta^* = 2{,}18\ldots$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
2. *Берман Д. Л.* К вопросу о наилучшей системе узлов параболической интерполяции// Изв. вузов. Мат. — 1963. — *4 (35)*. — С. 20–25.
3. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980.
4. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. — М-Л.: ГТТИ, 1934.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. — М.: Мир, 1965.
6. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1968.
7. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976.
8. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. — М-Л.: Гостехиздат, 1949.
9. *Шакиров И. А.* О влиянии выбора узлов лагранжевой интерполяции на точные и приближенные значения констант Лебега// Сиб. мат. ж. — 2014. — *55*, № 6. — С. 1404–1423.
10. *Шакиров И. А.* О предельном значении остаточного члена константы Лебега, соответствующей тригонометрическому полиному Лагранжа// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информатика. — 2016. — *16*, № 3. — С. 302–310.
11. *Шакиров И. А., Приходов И. О.* О константе Лебега полинома Лагранжа// в кн.: Актуальные направления научных исследований XIX века: теория и практика. Молодежный форум: технические и математические науки. 9–12 ноября 2015 г./ Сб. науч. тр. — Воронеж: ВГЛТУ им. Г. Ф. Морозова, 2015. — *8*, № 3 (19-3). — С. 448–452.
12. *Brutman L.* Lebesgue functions for polynomial interpolation. A survey// Ann. Numer. Math. — 1997. — *4*. — С. 111–127.
13. *Gunttner R.* Evaluation of Lebesgue constants// SIAM J. Numer. Anal. — 1980. — *17*, № 4. — С. 512–520.
14. *Rivlin T.* The Lebesgue constants for polynomial interpolation// в кн.: Functional Analysis and Its Applications (H. C. Garnier et al., eds.). — Berlin: Springer-Verlag, 1974. — С. 422–437.
15. *Vertesi P.* Optimal Lebesgue constants for Lagrange interpolation// SIAM J. Numer. Anal. — 1990. — *27*. — С. 1322–1331.

И. А. Шакиров
Набережночелнинский государственный педагогический университет
E-mail: iskander@tatngpi.ru