

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 150



Москва 2018

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

С. С. Акбаров (ВИНТИ РАН)

Е. С. Голод (МГУ им. М. В. Ломоносова)

А. Б. Жижченко (Отделение математических наук РАН)

Е. П. Кругова (ВИНТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Н. Х. Розов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

С. Е. Степанов (Финуниверситет при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Редактор-составитель:

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Научный редактор:

Е. П. Кругова (ВИНТИ РАН)

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 150

ГЕОМЕТРИЯ И МЕХАНИКА



Москва 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина (Д. В. Георгиевский, М. В. Шамолин)	3
О раскрасках 3-однородных гиперграфов в 3 цвета (И. А. Акользин)	26
Задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы с некоторыми приложениями к механике (М. У. Никабадзе)	40
Случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерной сферы (М. В. Шамолин)	78
Решение задачи диагностирования в случаях траекторных измерений с ошибкой и точных траекторных измерений (М. В. Шамолин)	88
Случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия (М. В. Шамолин)	110
Случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырёхмерного многообразия (М. В. Шамолин)	119
Вопросы качественного анализа в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой (М. В. Шамолин)	130



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 150 (2018). С. 3–25

УДК 517, 531.01

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
МГУ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА
«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ»
ИМ. ПРОФ. В. В. ТРОФИМОВА
ПОД РУКОВОДСТВОМ С. А. АГАФОНОВА,
Д. В. ГЕОРГИЕВСКОГО И М. В. ШАМОЛИНА

© 2018 г. Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Приведена краткая информация о заседаниях семинара в 2015–2016 гг.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

AMS Subject Classification: 58-xx, 70-xx

ЗАСЕДАНИЕ 326 (19 декабря 2014 г.)

Л. В. Фомин.

Ползучесть и длительная прочность стержней и пластин при растяжении и изгибе с учётом влияния агрессивной среды.

ЗАСЕДАНИЕ 327 (13 февраля 2015 г.)

Д. В. Георгиевский.

Уравнения совместности в напряжениях в многомерной упругой среде.

Путём приравнивания нулю всех компонент тензора несовместности Крёнера ранга $2n - 4$ либо дуального к нему тензора Римана выведены $n^2(n^2 - 1)/12$ независимых уравнений совместности в напряжениях в n -мерной изотропной упругой среде. Исследован вопрос об эквивалентности системы этих уравнений системам, следующим только из равенства нулю всех $n(n + 1)/2$ компонент тензора Риччи либо только одного инварианта кривизны. Показано, что ответ на этот вопрос зависит от размерности пространства. Выделены три случая: $n = 2$ (плоская задача теории упругости), $n = 3$ (пространственная задача теории упругости) и $n \geq 4$.

ЗАСЕДАНИЕ 328 (27 февраля 2015 г.)

С. А. Степин, В. В. Фуфаев.

Об одной модельной задаче Штурма—Лиувилля.

В случае потенциала, выраженного полиномом третьей степени, исследовано распределение собственных значений несамосопряженной задачи Штурма—Лиувилля, модельной по отношению к задаче Орра—Зоммерфельда. Изучена геометрическая структура конфигурации спектра в пределе исчезающей вязкости и получены локализационные формулы для собственных значений.

ЗАСЕДАНИЕ 329 (20 марта 2015 г.)

М. В. Шамолин.

Механические и топологические аналогии в многомерной динамике.

Получены новые случаи интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним. Проанализированы динамические системы, возникающие в динамике твердого тела и обнаружен ряд случаев полной интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Найдены некоторые обобщения на условия интегрируемости более общих классов неконсервативных динамических систем (в частности, динамика многомерного твердого тела). Получен целый спектр случаев полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них обнаруживаются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов). Обнаружены новые интегрируемые случаи движения твердого тела, в том числе в классической задаче о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды. Приводятся достаточные условия существования первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, для многопараметрических систем третьего порядка.

Имеют место следующие топологические и механические аналогии.

- (1) Движение закрепленного на обобщенном сферическом шарнире многомерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости).
- (2) Движение свободного многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи и при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости).
- (3) Сложное движение многомерного твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, а также находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости.

ЗАСЕДАНИЕ 330 (27 марта 2015 г.)

А. С. Семенов.

Задача о динамическом сжатии тонкого идеального жёсткопластического слоя.

Приведено сравнение асимптотических решений задач о течении идеального жёсткопластического материала между сближающимися жёсткими плитами в квазистатической (решение Прандтля) и существенно динамической постановках. Показано, что динамические слагаемые в уравнениях движения оказывают влияние прежде всего на асимптотики давления. Выявлены два малых безразмерных параметра, от соотношения которых зависят силовые режимы движения плит навстречу друг другу.

ЗАСЕДАНИЕ 331 (3 апреля 2015 г.)

В. А. Кадымов, Н. А. Белов, Е. Н. Сосенушкин.

Пластическое течение в тонком слое: аналитическое решение новой задачи и сравнение с экспериментом.

В докладе приведены и проанализированы результаты экспериментов по осадке и растеканию между сближающимися жесткими плитами тонких образцов из модельного материала, имеющих форму прямоугольника в плане. Течение ограничено неподвижными стенками штампа, которые расположены вдоль длинных сторон прямоугольных образцов. Выявлены количественные закономерности наблюдаемого течения; в частности, показано, что профиль (скоростей) перемещений является выпуклым в направлении течения, а не постоянным.

Представлены положения двумерной теории течения в тонком пластическом слое, предложенной А. А. Ильюшиным на основе осреднения по толщине слоя. Обсуждаются общая и упрощенная постановки краевой задачи с непроницаемыми и свободными границами. Показано, что результаты проведенных экспериментов принципиально невозможно описать с помощью решения задачи в упрощенной постановке. В рамках общей постановки найдено приближенное аналитическое решение задачи, которое хорошо согласуется с результатами эксперимента вдали от свободной границы и центральной части образца.

ЗАСЕДАНИЕ 332 (7 апреля 2015 г. (выездное))

С. А. Агафонов.

Устойчивость по Ляпунову: классические и современные концепции.

ЗАСЕДАНИЕ 333 (24 апреля 2015 г.)

Т. М. Мельник.

Изгиб стержня, неоднородного в поперечном сечении.

ЗАСЕДАНИЕ 334 (15 мая 2015 г.)

А. В. Архангельский.

Развитие идеи компактности в Московской математической школе.

ЗАСЕДАНИЕ 335 (22 мая 2015 г.)

Д. В. Георгиевский.

Одноосное растяжение тонкого жёсткопластического листа при наличии шейки.

Неодноосность напряжённого состояния и неоднородность поля скоростей вблизи области шейки при безынерционном пластическом растяжении тонких листов, прутков, тонкослойных оболочек давно нашли экспериментальное подтверждение. Предложено много математических моделей, описывающих различные аспекты эволюции шейки от её случайного образования вплоть до разрушения растягиваемого тела.

В работе с привлечением методики асимптотического интегрирования найдены поправки к одноосному полю напряжений и однородному полю скоростей в задаче о растяжении плоского тонкого жёсткопластического листа переменной толщины при задании скорости взаимного удаления торцов листа друг от друга. Используется приближение тонкого слоя с естественным малым геометрическим (асимптотическим) параметром, равным отношению средней толщины листа к его длине.

ЗАСЕДАНИЕ 336 в рамках XVII Международной конференции «DYNAMICAL SYSTEMS MODELING AND STABILITY INVESTIGATION» (29 мая 2015 г.).

1. *Д. В. Георгиевский.*

Эквивалентность систем уравнений совместности в напряжениях в $\mathbf{R}^n$.

Путём приравнивания нулю всех компонент тензора несовместности Крёнера ранга $2n - 4$ либо дуального к нему тензора Римана $\mathbf{R}^{\{4\}}(\varepsilon(\mathbf{x}))$ выведены $n^2(n^2 - 1)/12$ независимых уравнений совместности в напряжениях в n -мерной изотропной упругой среде:

$$2R_{rmst}(\varepsilon(\sigma(\mathbf{x}))) = \sigma_{rs,mt} + \sigma_{mt,rs} - \sigma_{ms,rt} - \sigma_{rt,ms} + \\ + \frac{\nu}{1+\nu} (\Theta_{,rt}\delta_{ms} + \Theta_{,ms}\delta_{rt} - \Theta_{,mt}\delta_{rs} - \Theta_{,rs}\delta_{mt}) = 0, \quad (1)$$

где запятая в индексе означает частное дифференцирование по соответствующей координате, ν — коэффициент Пуассона, присутствующий в обратном законе Гука:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} (-\nu\Theta\delta_{ij} + (1+\nu)\sigma_{ij}), \quad \Theta = \sigma_{kk}; \quad (2)$$

по повторяющимся два раза индексам ведётся суммирование от 1 до n .

Исследуется вопрос (см. [1–5]) об эквивалентности системы (1) другим известным в теории упругости системам уравнений совместности в напряжениях, следующим только из равенства

нулю всех $n(n+1)/2$ компонент тензора Риччи:

$$\Delta\sigma_{ms} + \frac{1+(3-n)\nu}{1+\nu}\Theta_{,ms} - \frac{\nu}{1+\nu}\Delta\Theta\delta_{ms} - \sigma_{mr,rs} - \sigma_{sr,rm} = 0 \quad (3)$$

либо только одного инварианта кривизны:

$$\Delta\Theta = \frac{1+\nu}{1+(2-n)\nu}\sigma_{mr,mr}. \quad (4)$$

Показано, что ответ на этот вопрос зависит от размерности пространства. Выделяются три случая: $n = 2$ (плоская задача теории упругости), $n = 3$ (пространственная задача теории упругости) и $n \geq 4$.

Библиография

1. *Бородачѣв Н. М.* Решения пространственной задачи теории упругости в напряжениях // Прикл. мех. — 2006. — 42, № 8. — С. 3–35.
2. *Георгиевский Д. В.* Общие решения не эквивалентных классической систем теории упругости в напряжениях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2012. — 6. — С. 26–32.
3. *Победра Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
4. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Levi-Civita symbols, generalized vector products, and new integrable cases in mechanics of multidimensional bodies // J. Math. Sci. — 2012. — 187, №. 3. — С. 280–299.
5. *Pobedrya B. E., Georgievskii D. V.* Equivalence of formulations for problems in elasticity theory in terms of stresses // Russ. J. Math. Phys. — 2006. — 13, №. 2. — С. 203–209.

2. М. В. Шамолин.

Обзор случаев интегрируемости в многомерной динамике неконсервативных систем.

Результаты работы являются развитием одной некоторой прикладной задачи из динамики твердого тела, где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [2]).

Как известно, понятие интегрируемости является, вообще говоря, достаточно расплывчатым. При его построении необходимо учитывать, в каком смысле оно понимается, в классе каких функций ищутся первые интегралы и т. д. В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Трансцендентность понимается здесь не в смысле теории элементарных функций (например, тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек в комплексной плоскости (см. [1]).

В ранних работах автора была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины. В более поздних работах автора плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай; при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. В дальнейшем автором была исследована динамическая часть уравнений движения различных динамически симметричных четырехмерных твердых тел, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску.

В данной работе результаты относятся к случаю, когда взаимодействие среды с n -мерным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$ -мерного диска; при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости (см. [1–3]).

Библиография

1. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
2. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
3. Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техн. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — М.: ВИНТИ, 2013. — 125. — С. 5–254.

ЗАСЕДАНИЕ 337 (5 июня 2015 г.)

В. В. Власов, Н. А. Раутман, Р. Перес Ортиз.

Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости.

ЗАСЕДАНИЕ 338 (26 июня 2015 г.)

М. В. Шамолин.

Многопараметрические системы маятникового типа.

Рассмотрен некоторый класс механических систем колебательного типа, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка, содержащими в качестве параметров классы допустимых функций, имеющими знакопеременную диссипацию и обладающими свойствами динамической симметрии. Изучаются свойства математических моделей таких систем в зависимости от функций.

Для некоторых классов маятниковых систем, правые части которых зависят от гладких функций, проведен качественный анализ, т.е. пространство рассматриваемых систем разбито на области с различным поведением траекторий на фазовом цилиндре квазискоростей. Изучены самостоятельные качественные проблемы, например, вопросы относительной грубости в пространстве правых частей динамических систем.

1. *Некоторые обобщения: системы, зависящие от функциональных классов.* Рассматривается класс динамических систем

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(a + b \cos x)y - (c + d \cos x) \sin x \quad (1)$$

с аналитической правой частью, где a, b, c, d — параметры, которые могут принимать любые значения из $\mathbf{R}$. Уравнения (1) являются частным случаем системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -h(x, p)y - q(x, p)$$

с позиционно-вязким трением, когда

$$h(x, p) = (a + b \cos x)y, \quad q(x, p) = (c + d \cos x) \sin x.$$

Рассмотрим следующую динамическую систему:

$$\dot{x} = y + \varepsilon \frac{F(x)}{\cos x}, \quad \dot{y} = -F(x), \quad (2)$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$, в правую часть которой входит функция $F(x)$ вида

$$F(x) = R(x)s(x), \quad (3)$$

где $R(x) \in \mathcal{R}$, $s(x) \in \Sigma$ (см. описания этих классов ниже). При $\varepsilon = 1$ система (2) была изучена в задаче о плоскопараллельном движении твердого тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы. Система вида (2) может быть получена из системы динамических уравнений третьего порядка для свободного твердого тела путем редукции к системе второго порядка на фазовом цилиндре; при этом $\varepsilon = 1$, переменная x имеет смысл угла атаки при движении свободного тела, а переменная y — угловой скорости. Кроме того, система вида (2) может быть получена из уравнения второго порядка для закрепленного твердого тела; при этом $\varepsilon = -1$, переменная x имеет смысл угла отклонения при движении закрепленного тела, а переменная y — угловой скорости.

Для качественного описания пары функций $R(x)$, $s(x)$ используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания. Вводимые классы достаточно широки: они состоят из 2π -периодических гладких функций (s — четная, а R — нечетная), удовлетворяющих следующим условиям: $R(x) > 0$ при $x \in (0, \pi)$, причем $R'(0) > 0$, $R'(\pi) < 0$ (класс функций $\mathcal{R}$); $s(x) > 0$ при $x \in (0, \pi/2)$, $s(x) < 0$ при $x \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (класс функций Σ). Как R , так и s меняют знак при замене x на $x + \pi$. В частности, аналитические функции типа функций Чаплыгина

$$R = R_0(x) = A \sin x \in \mathcal{R}, \quad s = s_0(x) = B \cos x \in \Sigma, \quad A, B > 0, \quad (4)$$

служат типичными представителями описанных выше классов.

В рассматриваемой динамической системе (2) возникает произведение (3). Из вышеперечисленных условий следует, что F — достаточно гладкая нечетная π -периодическая функция, удовлетворяющая следующим условиям: $F(x) > 0$ при $x \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$ (класс функций Φ).

В силу определения класса функций Φ можно сделать вывод, что правая часть системы (2) является гладкой вектор-функцией, поэтому саму систему (2) можно рассматривать на двумерном цилиндре $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \bmod 2\pi\}$.

Итак, в данном случае нам приходится исследовать динамическую систему, определенную с помощью пары функций, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

Система (2) эквивалентна системе

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = -F(x) + \varepsilon u \frac{d}{dx} g(x), \quad (5)$$

где $g(x) = F(x)/\cos x$ — гладкая функция.

В частности, при выполнении условий (4) система (5) примет вид аналитической системы:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = -AB \sin x \cos x + \varepsilon AB u \cos x, \quad (6)$$

и при $a = AB$, $b = -\varepsilon AB$, $u \leftrightarrow y$ совпадает с системой

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -ay \cos x - b \sin x \cos x.$$

Основной результат касается фазового портрета системы (5) для всех функций $F \in \Phi$.

Ранее было проведено полное исследование динамической системы (2) на фазовом цилиндре. Система (2) определена с помощью пространства функций Φ и имеет фазовый портрет, не меняющий своего топологического типа при варьировании функции F вдоль всего класса Φ .

Напомним также, что система вида (2) может быть получена из системы динамических уравнений третьего порядка для свободного твердого тела путем редукции к системе второго порядка на фазовом цилиндре; при этом $\varepsilon = 1$, переменная x имеет смысл угла атаки при движении свободного тела, а переменная y — угловой скорости. Также система вида (2) может быть получена из уравнения второго порядка для закрепленного твердого тела, при этом $\varepsilon = -1$, переменная x имеет смысл угла отклонения при движении закрепленного тела, а переменная y — угловой скорости.

2. Несохранение топологических особенностей фазовых портретов общей системы. Будем рассматривать более общую систему, чем система (2), а именно,

$$\dot{x} = y + A_1 \frac{F(x)}{\cos x}, \quad \dot{y} = A_2 F(x) - hy, \quad A_1 > 0, \quad A_2 < 0, \quad (7)$$

на фазовом цилиндре $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \bmod 2\pi\}$, в правую часть которой входит функция $F(x)$, пробегающая функциональный класс Φ . Система (7) была изучена в задаче о плоскопараллельном движении твердого тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы и дополнительного демпфирования со стороны среды.

Итак, в данном случае нам опять приходится исследовать динамическую систему, определенную с помощью функции, что значительно усложняет проведение качественного анализа. Система (7) эквивалентна

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = A_2 F(x) + u \frac{d}{dx} g(x) - h(u - g(x)), \quad (8)$$

где по-прежнему $g(x) = A_1 F(x) / \cos x$ — гладкая функция. В частности, при выполнении условий (4) ($F(x) = AB \sin x \cos x$ — функция типа функций Чаплыгина) система (7) примет вид аналитической:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = -AB \sin x \cos x + ABu \cos x - hu + hAB \sin x, \quad (9)$$

и при $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, $a = h$, $b = -AB$, $c = -hAB$, $d = AB$, $u \leftrightarrow y$ совпадает с системой (1).

Система частного вида (4) сохраняет все топологические особенности строения фазового портрета общей системы (5). Однако система (9) не обладает таким свойством по отношению к системе (7) по следующей причине. Пространство векторных полей систем вида (7) разбивается по крайней мере на два класса, в каждом из которых соответствующий фазовый портрет имеет определенный тип. По мере исследования системы (7) будет указано, для каких функций $F \in \Phi$ проводится качественный анализ.

3. Замечания об интегрируемости системы. У рассматриваемой системы при некоторых условиях существуют притягивающие и отталкивающие не только точки покоя, но и предельные циклы. Таким образом, если у системы (7) и существует первый интеграл на всем фазовом цилиндре, то он является разрывной функцией не только в отталкивающих и притягивающих точках, но и на целых замкнутых кривых.

Вопросы интегрируемости систем через конечную комбинацию элементарных функций в данной работе подробно не рассматриваются.

ЗАСЕДАНИЕ 339 (11 сентября 2015 г.)

Н. Л. Поляков.

О теоремах невозможности и возможности в теории принятия решений.

Теоремами невозможности принято называть утверждения, относящиеся к теории коллективного выбора (“social choice theory”) и утверждающие, что при тех или иных условиях не существует правила агрегирования индивидуальных систем предпочтений, которое обладает некоторыми естественными свойствами. Первым и самым известным результатом в этой области была теорема (парадокс) Эрроу (1950), устанавливающая отсутствие «хороших» правил агрегирования для рациональных систем предпочтений. Наиболее сильным обобщением теоремы Эрроу в настоящее время является, по-видимому, результат работы [1]. Как показывают исследования последних десятилетий, несуществование удовлетворительных правил агрегирования есть обычное явление для весьма широкого класса условий. Редкие нарушения этой закономерности называются теоремами возможности.

Доклад посвящен распространению результатов теории коллективного выбора на значительно более широкий класс моделей. А именно, вместо частной задачи построения коллективной функции выбора по индивидуальным функциям выбора участников, рассматривается задача агрегирования процедур принятия решений, т.е. произвольных функций из конечного множества Q (условий) в конечное множество A (решений). Ставится вопрос, какие симметричные (т.е. не зависящие от вида конкретных условий) множества процедур принятия решений могут сохраняться естественным правилом агрегирования.

Для получения ответа автор строит классификацию клонов правил агрегирования, сохраняющих какой-либо симметричный класс процедур принятия решений. Вне соображений мотивации, эта классификация есть описание решетки симметричных консервативных клонов с носителем A . Оказывается, каждый такой клон может быть представлен в виде пересечения четырех простейших клонов специального вида. Первый из них состоит из всех консервативных функций на множестве A , которые совпадают с некоторой проекцией на множестве последовательностей, содержащих не более r различных элементов множества A (для некоторого числа r). Второй состоит

из всех консервативных функций, удовлетворяющих условию 2-монотонности на множестве последовательностей, содержащих не более m различных элементов множества A (для некоторого числа m). Третий клон определяется устойчивым справа и слева отношением эквивалентности R : он состоит из всех консервативных функций, которые совпадают с некоторой проекцией на каждом классе эквивалентности отношения R . Наконец, четвертый клон определяется замкнутым относительно двойственности постовским классом Π функций, сохраняющих ноль и единицу; в него включаются все консервативные функции f , ограничения которых на каждое множество B_n , где B — двухэлементное подмножество множества A , а n — арность функции f , принадлежат клону с носителем B , который натурально эквивалентен классу Π .

Библиография

1. Поляков Н. Л., Шамолин М. В. Об одном обобщении теоремы Эрроу Докл. РАН. — 2014. — 456, № 2. — С. 143–145.

ЗАСЕДАНИЕ 340 (25 сентября 2015 г.)

А. Г. Галканов.

Критерий приводимости квадратичной формы к полному квадрату и его применения.

ЗАСЕДАНИЕ 341 (16 октября 2015 г.)

М. В. Шамолин.

Об интегрируемости динамических систем в элементарных функциях.

Изучаются вопросы наличия трансцендентных первых интегралов для некоторых классов систем с симметриями. При этом получены достаточные условия наличия в неавтономных однородных системах второго порядка первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями как в смысле теории элементарных функций, так и в смысле комплексного анализа, и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Результаты предлагаемой работы являются развитием предыдущих исследований, в том числе некоторой прикладной задачи из динамики твердого тела, где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Позднее данное обстоятельство позволило провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, которые обладали грубостью и сохранялись для систем более общего вида. Полная интегрируемость таких систем была связана с симметриями скрытого типа.

Как известно, понятие интегрируемости, вообще говоря, достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать, в каком смысле оно понимается (имеется в виду некий критерий, по которому делается вывод о том, что траектории рассматриваемой динамической системы устроены особенно «привлекательно и просто»), в классе каких функций ищутся первые интегралы и т. д.

В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Здесь трансцендентность понимается не только в смысле теории элементарных функций (например, тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки). При этом их необходимо формально продолжить в комплексную область.

Зададим вопрос: каковы возможности интегрирования в элементарных функциях следующей системы более общего вида в трехмерных фазовых областях:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{ax + by + cz + c_1 z^2/x + c_2 zy/x + c_3 y^2/x}{d_1 x + ey + fz}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{gx + hy + iz + i_1 z^2/x + i_2 zy/x + i_3 y^2/x}{d_1 x + ey + fz},\end{aligned}\tag{1}$$

имеющей особенность типа $1/x$? Другими словами, изучается вопрос существования первых интегралов для класса неавтономных однородных систем второго порядка. Вводя подстановки $y = ux$, $z = vx$, приведем систему (1) к виду

$$\begin{aligned} x \frac{dv}{dx} &= \frac{ax + bux + (c - d_1)vx + (c_1 - f)v^2x + (c_2 - e)vux + c_3u^2x}{d_1x + eux + fvx}, \\ x \frac{du}{dx} &= \frac{gx + (h - d_1)ux + ivx + i_1v^2x + (i_2 - f)vux + (i_3 - e)u^2x}{d_1x + eux + fvx}, \end{aligned} \quad (2)$$

которой поставим в соответствие следующее неавтономное уравнение с алгебраической правой частью:

$$\frac{dv}{du} = \frac{a + bu + cv + c_1v^2 + c_2vu + c_3u^2 - v[d_1 + eu + fv]}{g + hu + iv + i_1v^2 + i_2vu + i_3u^2 - u[d_1 + eu + fv]}.$$

Интегрирование последнего уравнения сводится к интегрированию уравнения в полных дифференциалах:

$$\begin{aligned} [g + (h - d_1)u + iv + i_1v^2 + (i_2 - f)uv + (i_3 - e)u^2]dv = \\ = [a + bu + (c - d_1)v + (c_1 - f)v^2 + (c_2 - e)uv + c_3u^2]du. \end{aligned} \quad (3)$$

Имеем, вообще говоря, 15-параметрическое семейство уравнений вида (3).

1. Некоторые случаи наличия рационального первого интеграла. В рассматриваемых случаях изучаемая неавтономная система второго порядка обладает полным набором (двумя) первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Оба первых интеграла являются, вообще говоря, трансцендентными функциями своих переменных с точки зрения комплексного анализа. При этом один из предъявляемых первых интегралов является рациональной однородной функцией — отношением $\frac{P_m(x, y, z)}{Q_m(x, y, z)}$ двух однородных полиномов $P_m(x, y, z)$, $Q_m(x, y, z)$ степени m .

2. Некоторые случаи наличия трансцендентного первого интеграла. Будем интегрировать уравнение (3) с интегрирующим множителем (последним множителем Якоби) следующего вида:

$$\varrho(u) = \frac{1}{u^s}, \quad s > 1, \quad s \neq 2, \quad s \neq 3.$$

Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества достаточно наложить 6 независимых соотношений:

$$g = 0, \quad i = 0, \quad i_1 = 0, \quad h = \frac{c + (s - 2)d_1}{s - 1}, \quad i_2 = \frac{2c_1 + (s - 3)f}{s - 1}, \quad i_3 = \frac{c_2 + (s - 3)e}{s - 2}. \quad (4)$$

Введем 9 параметров $\beta_1, \dots, \beta_9$ и рассмотрим их в качестве независимых:

$$\beta_1 = a, \quad \beta_2 = b, \quad \beta_3 = c, \quad \beta_4 = c_1, \quad \beta_5 = c_2, \quad \beta_6 = c_3, \quad \beta_7 = d_1, \quad \beta_8 = e, \quad \beta_9 = f. \quad (5)$$

Таким образом, уравнение (3) при выполнении групп условий (4), (5) сводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta_1 + \beta_2u + \beta_6u^2 + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_9)v^2 + (\beta_5 - \beta_8)uv}{(\beta_3 - \beta_7)u/(s - 1) + 2(\beta_4 - \beta_9)uv/(s - 1) + (\beta_5 - \beta_8)u^2/(s - 2)}, \quad (6)$$

а система (2) — к виду

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{\beta_1 + \beta_2u + \beta_6u^2 + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_9)v^2 + (\beta_5 - \beta_8)uv}{\beta_7 + \beta_8u + \beta_9v},$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{(\beta_3 - \beta_7)u/(s - 1) + 2(\beta_4 - \beta_9)uv/(s - 1) + (\beta_5 - \beta_8)u^2/(s - 2)}{\beta_7 + \beta_8u + \beta_9v},$$

после чего уравнение (6) интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций.

Действительно, получаем инвариантное соотношение

$$\frac{\frac{\beta_3 - \beta_7}{s-1}v + \frac{\beta_4 - \beta_9}{s-1}v^2 + \frac{\beta_5 - \beta_8}{s-2}uv + \frac{\beta_1}{s-1} + \frac{\beta_2}{s-2}u + \frac{\beta_6}{s-3}u^2}{u^{s-1}} = C_1 = \text{const},$$

а затем в координатах (x, y, z) — первый интеграл в виде

$$\frac{\frac{\beta_3 - \beta_7}{s-1}zx^{s-2} + \frac{\beta_4 - \beta_9}{s-1}z^2x^{s-3} + \frac{\beta_5 - \beta_8}{s-2}yzx^{s-3} + \frac{\beta_1}{s-1}x^{s-1} + \frac{\beta_2}{s-2}yx^{s-2} + \frac{\beta_6}{s-3}y^2x^{s-3}}{y^{s-1}} = C_1 = \text{const}. \quad (7)$$

Таким образом, можно сделать вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы третьего порядка, зависящей от 9 параметров:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 z^2/x + \beta_5 zy/x + \beta_6 y^2/x}{\beta_7 x + \beta_8 y + \beta_9 z}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{\beta_3 + (s-2)\beta_7}{s-1}y + \frac{2\beta_4 + (s-3)\beta_9}{s-1}\frac{zy}{x} + \frac{\beta_5 + (s-3)\beta_8}{s-2}\frac{y^2}{x}}{\beta_7 x + \beta_8 y + \beta_9 z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Теорема. Система третьего порядка $(s > 1, s \neq 2, s \neq 3)$

$$\dot{\alpha} = \beta_7 \sin \alpha + \beta_8 z_1 + \beta_9 z_2,$$

$$\dot{z}_2 = \beta_1 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_2 z_1 \cos \alpha + \beta_3 z_2 \cos \alpha + \beta_4 z_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_5 z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_6 z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\dot{z}_1 = \frac{\beta_3 + (s-2)\beta_7}{s-1}z_1 \cos \alpha + \frac{2\beta_4 + (s-3)\beta_9}{s-1}z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\beta_5 + (s-3)\beta_8}{s-2}z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

зависящая от 9 параметров $\beta_1, \dots, \beta_9$, рассмотренная на множестве

$$\left\{ \alpha \in \mathbb{R}^1 : 0 < \alpha < \pi \right\} \times \mathbb{R}^2 \{z_1, z_2\},$$

обладает, вообще говоря, трансцендентным первым интегралом, выражающимся через элементарные функции:

$$\frac{P_{s-1}(z_2, z_1, \sin \alpha)}{z_1^{s-1}} = C_1 = \text{const},$$

где

$$\begin{aligned} P_{s-1}(z_2, z_1, \sin \alpha) &= \frac{\beta_3 - \beta_7}{s-1}z_2 \sin^{s-2} \alpha + \frac{\beta_4 - \beta_9}{s-1}z_2^2 \sin^{s-3} \alpha + \frac{\beta_5 - \beta_8}{s-2}z_1 z_2 \sin^{s-3} \alpha + \\ &\quad + \frac{\beta_1}{s-1} \sin^{s-1} \alpha + \frac{\beta_2}{s-2}z_1 \sin^{s-2} \alpha + \frac{\beta_6}{s-3}z_1^2 \sin^{s-3} \alpha \end{aligned}$$

— однородная функция степени $s-1$ по совокупности переменных $(z_2, z_1, \sin \alpha)$.

Для нахождения дополнительного первого интеграла неавтономной системы (8) используется найденный первый интеграл (7), выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

3. Заключение. Рассмотренные в работе динамические системы относятся к системам с переменной диссипацией с нулевым средним по имеющейся периодической координате. Более того, такие системы часто обладают полным списком первых интегралов, выражающихся через элементарные функции. В работе в целом было приведено несколько случаев полной интегрируемости в динамике пространственного движения тела в неконсервативном поле. При этом мы имели дело с тремя, на первый взгляд, независимыми свойствами:

- (1) выделенный выше класс систем с отмеченными симметриями на касательном расслоении к сфере;
- (2) обладание этим классом систем переменной диссипацией с нулевым средним, что позволяет их рассматривать как «почти» консервативные системы;
- (3) в некоторых (пусть и достаточно маломерных) случаях обладание ими полным набором, вообще говоря, трансцендентных (с точки зрения комплексного анализа) первых интегралов.

Метод приведения исходных систем уравнений с правыми частями, содержащими полиномы от тригонометрических функций, к системам с полиномиальными правыми частями позволяет искать первые интегралы (или же доказывать их отсутствие) для систем более общего вида, а не только тех, которые обладают указанными симметриями.

ЗАСЕДАНИЕ 342 (23 октября 2015 г.)

Д. В. Георгиевский.

Обобщённое представление Галёркина для трансверсально изотропной теории упругости.

Для трансверсально изотропной линейно упругой среды описан алгоритм расщепления системы уравнения равновесия в перемещениях с объёмными силами, приводящий к трем не связанным уравнениям с некоторыми каноническими дифференциальными операторами четвертого порядка относительно трех компонент вектора перемещений. Показано, что в частном случае изотропии предложенный алгоритм математически эквивалентен известному в теории упругости представлению Галёркина.

ЗАСЕДАНИЕ 343 (30 октября 2015 г.)

Н. С. Стеценко.

Определение свойств линейно вязкоупругих материалов из специальных экспериментов.

В докладе рассматривается общая задача идентификации моделей линейной вязкоупругости, а именно, способы нахождения ядер релаксации из двух типов экспериментов: эксперимента, в котором деформация возрастает линейно до некоторого момента и затем выходит на постоянную, и эксперимента, в котором на начальном этапе деформация возрастает по кубическому закону, а затем вновь выходит на постоянную.

Проведено сравнение ядер релаксации, определенных двумя способами на основании данных этих двухзвенных экспериментов: методами, предложенными в [1, 2], и методом, в котором сразу делается предположение о представлении ядра релаксации отрезком ряда Прони. На конкретном примере показано хорошее совпадение ядер, определенных разными способами, при меньшей трудозатратности последнего. Аналитически и численно изучено выполнение «правила $10t_0$ », приведен пример модели линейно вязкоупругого материала и процесса деформации, для которого это правило не выполняется.

Библиография

1. *Lee S., Knauss W. G.* A note on the determination of relaxation and creep data from ramp tests// Mech. Time-Dependent Materials. — 2000. — 4, № 1. — С. 1–7.
2. *Stankiewicz A.* Identification of relaxation modulus of viscoelastic materials from non-ideal ramp-test histories—problem and method// ТЕКА Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. — 2013. — 13, № 1. — С. 169–176.

ЗАСЕДАНИЕ 344 (20 ноября 2015 г.)

С. В. Яблонский.

Вихревое течение в свободно подвешенных плёнках.

Впервые в ультратонких свободно подвешенных плёнках на основе смектических жидких кристаллов акустическим способом индуцировано вихревое течение. Обнаружены ряд особенностей вихревого течения, требующих объяснения. Во-первых, всегда появляется лишь чётное количество вихрей. Во-вторых, в квадратной рамке на частоте акустического возбуждения, соответствующей вырожденной моде, например, 2, 1 или 1, 2, можно индуцировать разное количество вихрей

(2 или 4) в зависимости от неоднородности акустического поля. Обнаружен порог возникновения вихревого течения. Данная работа выполнена благодаря новому методу визуализации макроскопического течения: наблюдением за дефектами на поверхности плёнки.

ЗАСЕДАНИЕ 345 (27 ноября 2015 г.)

А. Н. Емельянов.

Эффективные характеристики в моментной теории упругости.

ЗАСЕДАНИЕ 346 (11 декабря 2015 г.)

А. В. Хиженков.

О расщеплении уравнений микрополярной теории призматических тел.

ЗАСЕДАНИЕ 347 (12 февраля 2016 г.)

В. К. Ковальков.

Вопросы исследования свойств биологических тканей и органов.

ЗАСЕДАНИЕ 348 (19 февраля 2016 г.)

М. В. Шамолин.

Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам.

Во многих задачах многомерной динамики возникают механические системы с пространствами положений, являющимися сферами конечной размерности. Фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к сферам. Например, изучение пространственного (трехмерного) маятника на сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере. При этом динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Построение неконсервативного силового поля, действующего на закрепленное многомерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных закрепленных твердых тел, находящихся в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для многомерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле наличия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость в элементарных функциях некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к сферам размерности 2 и 3. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним и обобщают ранее рассмотренные.

1. Системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Рассмотрим системы вида

$$\dot{\alpha} = -z_2 + bg(\alpha), \quad \dot{z}_2 = F(\alpha) - z_1^2 f(\alpha), \quad \dot{z}_1 = z_1 z_2 f(\alpha), \quad (1)$$

$$\dot{\beta} = z_1 f(\alpha) \quad (2)$$

на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ к двумерной сфере $\mathbb{S}^2\{(\alpha, \beta_1) : 0 \leq \alpha \leq \pi, \beta \bmod 2\pi\}$.

Функции $F(\alpha)$, $g(\alpha)$ и $f(\alpha)$ — периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$, $b \geq 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — силовое поле. Первое уравнение системы (1) и уравнение (2) задают координаты z_1 , z_2 в касательном пространстве к сфере (являются кинематическими соотношениями). При этом система (1) является независимой подсистемой третьего порядка (ввиду цикличности переменной β).

Система (1), (2) также может быть представлена в маятниковом виде:

$$\ddot{\alpha} - bg'(\alpha)\dot{\alpha} + F(\alpha) - \dot{\beta}^2 \frac{1}{f(\alpha)} = 0, \quad \ddot{\beta} - bg(\alpha)f(\alpha)\dot{\beta} + \dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)} = 0.$$

При $b = 0$ система (1), (2) является консервативной и обладает полным набором первых интегралов:

$$F_1(z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi) d\xi = C_1 = \text{const},$$

$$F_2(z_1; \alpha) = z_1 \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi = C_2 = \text{const}, \quad F_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = C_3 = \text{const}.$$

При $b > 0$ система (1), (2) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним.

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (3)$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha}. \quad (4)$$

В случае (3) получаем класс систем, соответствующих пространственному движению динамически симметричного твердого тела на нулевом уровне циклического интеграла, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В случае (4) получаем класс систем, соответствующих движению материальной точки на сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (1), (2) описывает геодезический поток на двумерной сфере.

В случае (3) если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos \alpha$, то система (1) описывает пространственное движение твердого тела в силовом поле под действием следящей силы. В частности, если

$$F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha, \quad g(\alpha) = \sin \alpha, \quad (5)$$

то система (1), (2) описывает также пространственный (сферический) маятник, помещенный в поток набегающей среды, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

2. Случай (3). Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m \alpha \cos \alpha, \quad g(\alpha) = \sin^a \alpha, \quad m = 2a - 1, \quad m, a \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (5).

Теорема 1. В случае (6) система (1), (2) обладает полным набором (а именно, тремя), вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Таким образом, система

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - ab\dot{\alpha} \sin^{a-1} \alpha \cos \alpha + \sin^{2a-1} \alpha \cos \alpha - \dot{\beta}^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0, \\ \ddot{\beta} - b\dot{\beta} \sin^{a-1} \alpha \cos \alpha + \dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = 0 \end{cases}$$

обладает тремя, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.

3. Случай (4). Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \frac{\sin^{2k-1} \alpha}{\cos^{2k+1} \alpha}, \quad g(\alpha) = \frac{\sin^k \alpha}{\cos^k \alpha}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Теорема 2. В случае (7) система (1), (2) обладает полным набором (а именно, тремя), вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Таким образом, система

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - kb\dot{\alpha}\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + \frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha} - \dot{\beta}^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0, \\ \ddot{\beta} - b\dot{\beta}\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 0 \end{cases}$$

обладает тремя, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.

4. *Системы на касательном расслоении к трехмерной сфере.* Рассмотрим системы вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_3 + bg(\alpha), & \dot{z}_3 &= F(\alpha) - (z_1^2 + z_2^2)f(\alpha), \\ \dot{z}_2 &= z_2 z_3 f(\alpha) + z_1^2 f(\alpha) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, & \dot{z}_1 &= z_1 z_3 f(\alpha) - z_1 z_2 f(\alpha) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \\ \dot{\beta}_1 &= z_2 f(\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_1 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1}, \quad (9)$$

на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ к трехмерной сфере

$$\mathbb{S}^3\{(\alpha, \beta_1, \beta_2) : 0 \leq \alpha, \beta_1 \leq \pi, \beta_2 \bmod 2\pi\}.$$

Функции $F(\alpha)$, $g(\alpha)$ и $f(\alpha)$ — периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$, $b \geq 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — силовое поле. Первое и последнее уравнения системы (8) и уравнение (9) задают координаты z_1, z_2, z_3 в касательном пространстве к сфере (являются кинематическими соотношениями). При этом система (8) является независимой подсистемой пятого порядка (ввиду цикличности переменной β_2).

Система (8), (9) также может быть представлена в маятниковом виде:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - bg'(\alpha)\dot{\alpha} + F(\alpha) - \dot{\beta}_1^2 \frac{1}{f(\alpha)} - \dot{\beta}_2^2 \frac{\sin^2 \beta_1}{f(\alpha)} = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - bg(\alpha)f(\alpha)\dot{\beta}_1 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)} - \dot{\beta}_2^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - bg(\alpha)f(\alpha)\dot{\beta}_2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} = 0. \end{cases}$$

Для полного интегрирования системы (8), (9) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \rightarrow z, z_*, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1},$$

система принимает следующий вид:

$$\dot{\alpha} = -z_3 + bg(\alpha), \quad \dot{z}_3 = F(\alpha) - z^2 f(\alpha), \quad \dot{z} = z z_* f(\alpha), \quad (10)$$

$$\dot{z}_* = (\pm) z \sqrt{1 + z_*^2} f(\alpha) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \quad \dot{\beta}_1 = (\pm) \frac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha), \quad (11)$$

$$\dot{\beta}_2 = (\pm) \frac{z}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1}. \quad (12)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (10)–(12) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (10), один — системы (11), а также дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (12) (т.е. всего четыре).

При $b = 0$ система (8), (9) является консервативной и обладает полным набором первых интегралов:

$$\begin{aligned} F_1(z_3, z_2, z_1; \alpha) &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi) d\xi = C_1 = \text{const}, \\ F_2(z_2, z_1; \alpha) &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi = C_2 = \text{const}, \\ F_3(z_1; \alpha, \beta_1) &= z_1 \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi \cdot \sin \beta_1 = C_3 = \text{const}, \\ F_4(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= C_4 = \text{const}. \end{aligned}$$

При $b > 0$ система (8), (9) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним.

Выделим также два существенных случая (3) и (4) для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере.

В случае (3) имеем класс систем, соответствующих движению динамически симметричного четырехмерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В случае (4) имеем класс систем, соответствующих движению материальной точки на трехмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (8), (9) описывает геодезический поток на трехмерной сфере.

В случае (3) если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos \alpha$, то система (8), (9) описывает движение четырехмерного твердого тела в силовом поле под действием следящей силы. В частности, если выполнены условия (5), то система (8), (9) описывает также четырехмерный (обобщенный сферический) маятник в неконсервативном поле и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

5. Случай (3). Пусть выполнены условия (6) на силовое поле. В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (5).

Теорема 3. В случае (6) система (8), (9) обладает полным набором (а именно, четырьмя), вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Таким образом, система

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - ab\dot{\alpha} \sin^{a-1} \alpha \cos \alpha + \sin^{2a-1} \alpha \cos \alpha - \dot{\beta}_1^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \dot{\beta}_2^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1 \sin^{a-1} \alpha \cos \alpha + \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} - \dot{\beta}_2^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2 \sin^{a-1} \alpha \cos \alpha + \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} = 0, \end{cases}$$

обладает четырьмя, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.

6. Случай (4). Пусть выполнены условия (7) на силовое поле.

Теорема 4. В случае (8) система (8), (9) обладает полным набором (а именно, четырьмя), вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Таким образом, система

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - kb\dot{\alpha}\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + \frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha} - \dot{\beta}_1^2 \sin\alpha \cos\alpha - \dot{\beta}_2^2 \sin\alpha \cos\alpha \sin^2\beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dot{\beta}_2^2 \sin\beta_1 \cos\beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0, \end{cases}$$

обладает тремя, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.

В предыдущих работах автора уже рассматривались задачи о движении свободного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам. Данная работа присоединяет к данной задаче динамики твердого тела задачу о движении точки по сферам размерности 2 и 3 в неконсервативных силовых полях.

ЗАСЕДАНИЕ 349 (4 марта 2016 г.)

В. И. Ванько.

Моделирование колебаний проводов расщеплённой фазы.

ЗАСЕДАНИЕ 350 (11 марта 2016 г.)

А. А. Козырев.

Одномерные и двумерные редукции уравнений пограничного слоя.

Предложен метод нахождения редукций уравнений с частными производными (УЧП), являющийся развитием прямого метода Кларксона—Крускала. Этот метод более прост в использовании и позволяет эффективно искать редукции УЧП с меньшим числом независимых переменных и к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Проведена групповая классификация уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя. На основе результатов групповой классификации сделан вывод об отсутствии нестационарного аналога преобразования Степанова—Манглера.

Для уравнения стационарного плоского пограничного слоя найдены все редукции к ОДУ (одномерные редукции). Для уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя найдены все редукции к УЧП с двумя независимыми переменными (двумерные редукции) и к ОДУ (одномерные редукции). Показано, что исследуемые уравнения имеют редукции, не получаемые с помощью группового анализа.

Для уравнений стационарного плоского и осесимметричного пограничных слоев показана единственность преобразования Степанова—Манглера с точностью до преобразований эквивалентности.

ЗАСЕДАНИЕ 351 (18 марта 2016 г.)

Д. В. Георгиевский.

Тензорно нелинейные функции в теории определяющих соотношений: потенциальность и установочные эксперименты.

Рассмотрены изотропные квадратичные нелинейные тензор-функции, моделирующие в теории определяющих соотношений среды, в которых имеют место эффекты второго порядка, в частности, несоосность силового и кинематического тензоров. Интерес представляют тензор-функции, обладающие скалярным потенциалом и связывающие два симметричных девиатора второго ранга. В этом случае условия потенциальности проинтегрированы и показано, что в первый интеграл входят две произвольные функции квадратичного инварианта тензора-аргумента и одна произвольная функция его кубического инварианта. Проведено тензорно-нелинейное обобщение жестковязкопластической модели (двухконстантного тела Бингама).

Описана принципиальная схема установочных экспериментов для нахождения трех материальных функций тензорно-нелинейных определяющих соотношений в механике сплошной среды.

Данные материальные функции зависят от трех инвариантов напряженного состояния. Предлагается использовать длинные цилиндрические полые образцы, в которых можно осуществлять любую комбинацию следующих четырех реализуемых в эксперименте базисных напряженных состояний: одноосное растяжение, кручение, продольный сдвиг, всестороннее сжатие.

ЗАСЕДАНИЕ 352 (8 апреля 2016 г.)

В. И. Горбачев.

Инженерная теория сопротивления неоднородных стержней из композиционных материалов.

ЗАСЕДАНИЕ 353 (22 апреля 2016 г.)

С. А. Довбыш.

Квазислучайные движения и неинтегрируемость в системах с непрерывной группой симметрий.

Во многих известных задачах механики имеются циклические переменные; наличие такой переменной равносильно существованию однопараметрической группы симметрий. Между тем, обычно рассматривают динамику не исходной системы, а соответствующей приведённой системы, получаемой редукцией по группе симметрий (исключением циклической переменной). Типичный пример — классическая задача о движении тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой. Неинтегрируемость (отсутствие непостоянного аналитического первого интеграла) может быть вызвана существованием квазислучайных («хаотических», но детерминированных) движений. В настоящей работе получены простые конструктивно проверяемые условия, при выполнении которых квазислучайным движениям приведённой системы, получаемой редукцией по непрерывной группе симметрий, соответствуют движения с аналогичными свойствами в исходной системе, что гарантирует неинтегрируемость последней.

ЗАСЕДАНИЕ 354 (29 апреля 2016 г.)

В. В. Власов, А. В. Давыдов, Ю. А. Тихонов.

Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.

ЗАСЕДАНИЕ 355 (29 мая 2016 г.)

А. В. Аксенов.

Фундаментальное решение уравнений в перемещениях в трансверсально-изотропной теории упругости.

В [2] для трансверсально изотропной линейно-упругой среды система уравнений в перемещениях была редуцирована к системе из трех линейных неоднородных уравнений относительно трех компонент вектора перемещений. Однородным уравнениям соответствуют канонические линейные дифференциальные уравнения с частными производными четвертого порядка. Полученные канонические уравнения являются обобщением бигармонического уравнения, описывающего перемещения изотропной линейно-упругой среды. Для нахождения перемещений трансверсально изотропной линейно-упругой среды при наличии заданной объемной силы необходимо знать фундаментальные решения канонических уравнений.

Фундаментальные решения линейных уравнений математической физики зачастую являются инвариантными относительно преобразований, допускаемых исходным уравнением (см. [3]). Для построения фундаментального решения в настоящей работе используется алгоритм, предложенный автором в [1]. Алгоритм основан на использовании симметрий, допускаемых линейным дифференциальным уравнением с частными производными с дельта-функцией в правой части.

Основным результатом работы является построение в элементарных функциях инвариантного фундаментального решения уравнения трансверсально изотропной линейно-упругой среды.

Библиография

1. Аксенов А. В. Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Докл. РАН. — 1995. — 342, № 2. — С. 151–153.

2. *Георгиевский Д. В.* Обобщенное представление Галеркина для трансверсально изотропной линейно-упругой среды // Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 6. — С. 883–887.
3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

ЗАСЕДАНИЕ 356 (3 июня 2016 г.)

В. Путкарадзе.

О динамике трубок с жидкостью: геометрические методы, точные решения, вариационные интеграторы.

Разрабатывается трехмерная геометрически точная теория течения жидкости в гибкой трубе переменного поперечного сечения. Предлагаемый подход основан на редукции симметрий, точном геометрическом описании упругих стержней в сочетании с уравнениями движения жидкости и законом сохранения объема. Получены трехмерные уравнения движения, проведен анализ линейной устойчивости и показано, что построенная теория вводит важные поправки к ранее полученным результатам, как относительно согласованности длины волны, так и в эффектах, возникающих из динамического изменение поперечного сечения трубы. Получены и проанализированы несколько аналитических нелинейных решений уравнения типа бегущей волны в двумерном случае. Приведена вариационная дискретизация задачи как по пространственным, так и по временной переменной. Представлены также результаты экспериментов.

ЗАСЕДАНИЕ 357 (10 июня 2016 г.)

Д. Зенков.

Об уравнениях Гамеля для бесконечномерных механических систем.

Уравнения Эйлера—Лагранжа, будучи универсальными, не всегда эффективны для анализа механических систем. Например, при помощи этих уравнений затруднительно исследовать движение волчка Эйлера. В 1902 г. А. Пуанкаре систематически использовал подход Эйлера для систем на группах Ли. Г. Гамель в 1904 г. распространил результат Пуанкаре на конечномерные механические системы на произвольных конфигурационных пространствах. В работе представлен формализм Гамеля для бесконечномерных систем, таких как непрерывные среды с ограничениями на скорости, в виде обыкновенных дифференциальных уравнений на бесконечномерных многообразиях.

ЗАСЕДАНИЕ 358 (17 июня 2016 г.)

Э. Б. Завойчинская.

О критерии поэтапного усталостного разрушения металлов на различных масштабно-структурных уровнях при одноосном нагружении несимметричным циклом.

ЗАСЕДАНИЕ 359 (16 сентября 2016 г.)

А. В. Влахова.

Влияния разрушения на динамику систем с качением. Моделирование движений элементов промежуточного слоя между перекатывающимися телами.

ЗАСЕДАНИЕ 360, юбилейное, посвященное 50-летию профессора Д. В. Георгиевского (30 сентября 2016 г.).

Д. В. Георгиевский, Г. С. Тлюстангелов.

Экспоненциальные оценки возмущений жёсткопластического растекания-стока кольца.

Изучена эволюция во времени плоской картины малых возмущений, налагаемых на радиальное растекание либо сток кольца из несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса—Генки. На расширяющихся (сужающихся) границах кольца и в основном процессе, и в возмущенном приняты условия прилипания. С помощью метода интегральных соотношений, основанного на вариационных неравенствах в соответствующем комплекснозначном гильбертовом пространстве, линеаризованная задача в возмущениях сведена к одному соотношению для квадратичных функционалов, из которого выведены новые верхние

экспоненциальные оценки роста либо затухания кинематических возмущений. Показано, что угловые гармоники с разными номерами эволюционируют качественно неодинаково.

ЗАСЕДАНИЕ 361 (7 октября 2016 г.)

В. А. Титов.

Контроль бортовой микрогравитационной обстановки и продление сроков эксплуатации долговременной орбитальной станции.

К конструкциям долговременной орбитальной станции (ДОС) предъявляются противоречивые требования высокой надежности и массового совершенства. При длительной эксплуатации конструкционная надежность должна периодически подтверждаться оценками уровней внутренних силовых факторов в сечениях и остаточного прочностного ресурса, определяемого многократными режимами динамического нагружения. Достоверность оценок обеспечивается:

- (i) высокой степенью адекватности используемых динамических моделей конструкции ДОС своим натурным объектам;
- (ii) полнотой исходных данных по внешним силовым воздействиям на конструкцию ДОС.

Для оценок адекватности динамических моделей своим натурным объектам и идентификации внешних силовых воздействий применяются методы решения прямой и обратной задач динамического нагружения свободной конструкции с использованием фактической телеметрической информации о бортовых микроускорениях. Эти методы реализованы в рамках специального комплекса программно-математического обеспечения (ПМО). На основании практического опыта использования ПМО сформулированы рекомендации по контролю бортовой микрогравитационной обстановки и распространению ПМО при решении поставленных задач для перспективных ДОС.

ЗАСЕДАНИЕ 362 (14 октября 2016 г.)

Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, В. А. Кадымов.

Статическая и кинематическая модели механики деформируемого твердого тела.

Рассматриваются инвариантные характеристики напряженно-деформированного состояния, возникающего при выполнении различных операций обработки металлов давлением. При помощи тригонометрической формы представления напряжений и деформаций на девиаторной плоскости представлены статическая и динамическая модели, соответствующие напряженному и деформированному состояниям, где траектории главных напряжений и главных деформаций представляются дугами окружностей, что свидетельствует о немонотонности процессов изменения формы.

ЗАСЕДАНИЕ 363. Выездное заседание в Доме учёных России, посвящённое 80-летию со дня рождения академика Д. В. Аносова (21 октября 2016 г.).

ЗАСЕДАНИЕ 364 (11 ноября 2016 г.)

Д. А. Загора.

Об экспоненциальной устойчивости решений одной задачи для вязкоупругого тела.

В докладе рассмотрена задача о движениях вязкоупругого тела. Эта задача описывается уравнением гиперболического типа, возмущенным интегральным слагаемым с операторным ядром специального вида. Доказана теорема об экспоненциальной устойчивости решений однородного уравнения, а также утверждение о стабилизации решения.

ЗАСЕДАНИЕ 365 НАУЧНЫЕ ВЫСТУПЛЕНИЯ АСПИРАНТОВ НА ТЕМУ ГОТОВНОСТИ КАНДИДАТСКИХ ДИССЕРТАЦИЙ (18 ноября 2016 г.).

1. *А. Н. Емельянов.*

Метод осреднения в микрополярной теории упругости.

2. *Г. С. Тлюстангелов.*

Устойчивость радиально-вращательного растекания-стока кольца.

3. *А. У. Садрисламов.*

Численный анализ колебания газового пузырька вблизи резонансных частот.

ЗАСЕДАНИЕ 366 (9 декабря 2016 г.)

В. П. Сушицкий.

Устойчивость колебаний вязкоупругого стержня под действием периодически изменяющейся следящей силы в упругой среде.

Изучено поведение вязкоупругого стержня, находящегося под действием периодически изменяющейся следящей силы в упругой среде. Вязкоупругое поведение стержня представлено моделью Кельвина–Фойгта. Для исследования устойчивости стержня применен динамический метод, основанный на рассмотрении колебаний системы около исследуемого положения равновесия. Получено уравнение колебаний стержня, сведенное впоследствии к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, легко поддающейся анализу на устойчивость нулевого решения. При помощи пакета Wolfram Mathematica 8.0 с большой точностью получено критическое значение следящей силы, зависящее от прочностных и геометрических свойств стержня, а также от модуля упругости среды. Показано, что наличие упругой среды приведет лишь к увеличению частоты колебаний стержня и не скажется на значении критической силы.

ЗАСЕДАНИЕ 367 ВЫЕЗДНОЕ ЗАСЕДАНИЕ В РАМКАХ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «СИСТЕМЫ АНОСОВА И СОВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА» (МОСКВА, 19–23 ДЕКАБРЯ 2016 г.), ПОСВЯЩЕННОЙ 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ АКАДЕМИКА Д. В. АНОСОВА (22 декабря 2016 г.).

М. В. Шамолин.

Новые случаи интегрируемых систем с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере.

Работа посвящена новым случаям интегрируемости систем с диссипацией на касательном расслоении к конечномерной сфере. К такого рода задачам приводятся системы из динамики (маломерного или многомерного) твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил, а также задачи динамики точки в силовых полях на конечномерной сфере. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [1]). Обнаружены случаи интегрируемости уравнений движения в трансцендентных (в смысле классификации их особенностей) функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Как известно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удастся найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций. В данной работе получены новые случаи интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них обнаруживаются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств.

В качестве примера рассмотрим следующую систему уравнений порядка $2n - 3$:

$$\ddot{\xi} + b_* \dot{\xi} \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - \left[\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 \sin^2 \eta_1 + \dot{\eta}_3^2 \sin^2 \eta_1 \sin^2 \eta_2 + \dots + \dot{\eta}_{n-2}^2 \sin^2 \eta_1 \dots \sin^2 \eta_{n-3} \right] \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = 0, \quad (1a)$$

$$\ddot{\eta}_1 + b_* \dot{\eta}_1 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_1 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} - \left[\dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2 \sin^2 \eta_2 + \dot{\eta}_4^2 \sin^2 \eta_2 \sin^2 \eta_3 + \dots + \dot{\eta}_{n-2}^2 \sin^2 \eta_2 \dots \sin^2 \eta_{n-3} \right] \sin \eta_1 \cos \eta_1 = 0, \quad (1b)$$

$$\ddot{\eta}_2 + b_* \dot{\eta}_2 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_2 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2 \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} - \left[\dot{\eta}_3^2 + \dot{\eta}_4^2 \sin^2 \eta_3 + \dot{\eta}_5^2 \sin^2 \eta_3 \sin^2 \eta_4 + \dots + \dot{\eta}_{n-2}^2 \sin^2 \eta_3 \dots \sin^2 \eta_{n-3} \right] \sin \eta_2 \cos \eta_2 = 0, \quad (1c)$$

.....

$$\ddot{\eta}_{n-3} + b_* \dot{\eta}_{n-3} \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_{n-3} \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_{n-3} \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} + \dots + 2\dot{\eta}_{n-4} \dot{\eta}_{n-3} \frac{\cos \eta_{n-4}}{\sin \eta_{n-4}} - \dot{\eta}_{n-2}^2 \sin \eta_{n-3} \cos \eta_{n-3} = 0,$$

$$\ddot{\eta}_{n-2} + b_* \dot{\eta}_{n-2} \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_{n-2} \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_{n-2} \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} + \dots + 2\dot{\eta}_{n-3} \dot{\eta}_{n-2} \frac{\cos \eta_{n-3}}{\sin \eta_{n-3}} = 0,$$

где $b_* > 0$, описывающую закрепленный n -мерный маятник в неконсервативном поле сил. Переменная η_{n-2} является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства, являющимся касательным расслоением

$$T\mathbb{S}^{n-1} \{ \dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_{n-2}; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2} \} \quad (2)$$

к $(n - 1)$ -мерной сфере

$$\mathbb{S}^{n-1} \left\{ \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2} : 0 \leq \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-3} \leq \pi, \eta_{n-2} \bmod 2\pi \right\}.$$

Рассматриваемая система (1) является динамической системой с переменной диссипацией (см. [1–3]) на касательном расслоении (2).

Теорема. Система (1) на касательном расслоении (2) обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда рассматриваемые функции (первые интегралы) имеют существенно особые точки, соответствующие притягивающим или отталкивающим предельным множествам в фазовом пространстве системы.

Для полного интегрирования системы (1) необходимо знать, вообще говоря, $2n - 3$ независимых первых интегралов. Однако после некоторой замены переменных система (1) распадается

следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= -w_{n-1} - b_* \sin \xi, & w'_{n-1} &= \sin \xi \cos \xi - w_{n-2}^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ w'_{n-2} &= w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} w'_s &= d_s(w_{n-1}, \dots, w_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}) \frac{1 + w_s^2 \frac{\cos \eta_s}{\sin \eta_s}}{w_s}, \\ \eta'_s &= d_s(w_{n-1}, \dots, w_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}), \quad s = 1, \dots, n-3, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\eta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \dots, w_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}). \quad (5)$$

Видно, что в системе (3)–(5) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (3), $n-3$ независимых систем второго порядка (4) (после замены независимой переменной), а также уравнение (5) на η_{n-2} . Для полной интегрируемости системы (3)–(5) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3), по одному — для каждой из систем (4) (их общее число равно $n-3$) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (5) (т.е. всего n интегралов).

Один из первых интегралов системы (3) следующий:

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 + b_* w_{n-1} \sin \xi + \sin^2 \xi}{w_{n-2} \sin \xi} = C_1 = \text{const}, \quad (6)$$

а дополнительный первый интеграл системы (3) имеет следующий вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = G_2 \left(\sin \xi, \frac{w_{n-1}}{\sin \xi}, \frac{w_{n-2}}{\sin \xi} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (7)$$

Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (4) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (5). Указанные интегралы имеют следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \eta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin \eta_s} = C''_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n-3, \quad (8)$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, w_{n-4}; \eta_{n-4}, \eta_{n-3}, \eta_{n-2}) = \eta_{n-2} \pm \arctg \frac{C_{n-1} \cos \eta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2 \eta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C''_n = \text{const}; \quad (9)$$

при этом в левую часть равенства (9) вместо C_{n-2} , C_{n-1} необходимо подставить первые интегралы (8) при $s = n-4$, $n-3$.

Библиография

1. Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007.
2. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
3. Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техн. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — М.: ВИНТИ, 2013. — 125. — С. 4–254.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского, М. В. Шамолина, С. А. Агафонова // Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 16–45.

2. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — Тбилиси: Ин-т кибернетики НАН Грузии, 2009. — 62. — С. 3–15.
3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. Тбилиси: НАН Грузии, 2009. — 65. — С. 3–10.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского, М. В. Шамолина, С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — Тбилиси: НАН Грузии, 2012. — 76. — С. 3–10.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова// Совр. мат. прилож. — Тбилиси: НАН Грузии, 2015. — 88. — С. 3–24.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. Тбилиси: НАН Грузии, 2015. — 98. — С. 3–8.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — Тбилиси: Груз. техн. ун-т, 2016. — 100. — С. 3–11.

Д. В. Георгиевский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru



О РАСКРАСКАХ 3-ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРГРАФОВ В ТРИ ЦВЕТА

© 2018 г. И. А. АКОЛЬЗИН

Аннотация. В работе исследуется величина $m(n, r)$ в задаче Эрдеша—Хайнала. С помощью различных методов доказана оценка $27 \leq m(3, 3) \leq 35$.

Ключевые слова: гиперграф, раскраска, комбинаторика.

AMS Subject Classification: 05D99

СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные определения	26
2. Задача Эрдеша—Хайнала	26
3. Доказательство теоремы 3	29
Список литературы	39

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В работе исследуется классическая задача экстремальной комбинаторики — задача Эрдеша—Хайнала о раскрасках гиперграфов. Сначала напомним основные определения из теории гиперграфов.

Гиперграфом называется пара $H = (V, E)$, где V — некоторое (как правило, конечное) множество, называемое множеством *вершин гиперграфа*, а $E = E(H)$ — произвольная совокупность подмножеств множества V , называемых *ребрами гиперграфа*. Гиперграф H называется *n -однородным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. В частности, обычный граф без петель, кратных ребер и ориентации является 2-однородным гиперграфом.

Степенью вершины называется количество инцидентных ей ребер. *Раскраской множества вершин* гиперграфа $H = (V, E)$ называется отображение $\chi : V \rightarrow \mathbb{N}$. Будем говорить, что ребро $e \in E$ является *одноцветным* в χ , если для всех $u, v \in e$ выполняется равенство $\chi(u) = \chi(v)$. Также будем говорить, что ребро e *представляет* раскраску χ , если оно одноцветно в χ . Раскраска называется *правильной раскраской* вершин гиперграфа, если в ней каждое ребро этого гиперграфа не является одноцветным. *Хроматическим числом* $\chi(H)$ гиперграфа H называется минимальное количество цветов, требуемое для правильной раскраски вершин H .

Максимальным независимым множеством гиперграфа H называется максимальное по мощности подмножество вершин, в котором не содержится целиком ни одного ребра гиперграфа. Будем обозначать любое такое множество через $A(H)$, а для его мощности использовать обычное обозначение $|A(H)| = \alpha(H)$.

2. ЗАДАЧА ЭРДЕША—ХАЙНАЛА

2.1. Постановка задачи. Одной из центральных задач теории раскрасок гиперграфов является классическая задача Эрдеша—Хайнала (см. [7]). Она формулируется следующим образом: требуется найти величину $m(n)$, равную минимально возможному числу ребер гиперграфа в

классе n -однородных гиперграфов с хроматическим числом больше 2. Формально определение $m(n)$ можно записать так:

$$m(n) = \min \left\{ |E(H)| : H - n\text{-однородный гиперграф, } \chi(H) > 2 \right\}. \quad (1)$$

Нетрудно убедиться в том, что введенная величина конечна и удовлетворяет неравенству

$$m(n) \leq \binom{2n-1}{n}. \quad (2)$$

Это соотношение получается взятием множества вершин мощности $2n-1$ и множества всех его n -подмножеств n в качестве множества ребер. Ясно, что в любой двухцветной раскраске множества вершин обязательно найдется n -элементное одноцветное подмножество.

Задача естественным образом обобщается на случай произвольного числа цветов. Определим величину $m(n, r)$ следующим образом:

$$m(n, r) = \min \left\{ |E(H)| : H - n\text{-однородный гиперграф, } \chi(H) > r \right\}. \quad (3)$$

Из определения следует, что $m(n, 2) = m(n)$. Так же, как и $m(n)$, величина $m(n, r)$ конечна и справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1 (ср. неравенство (2)). *При любых значениях $n \geq 2$ и $r \geq 2$ справедливо неравенство*

$$m(n, r) \leq \binom{r(n-1)+1}{n}. \quad (4)$$

Более того, в случае графов, $n = 2$, неравенство (4) обращается в равенство (см. [1]).

Для нахождения простой нижней оценки воспользуемся следующим соображением: мощность множества всевозможных раскрасок вершин в точности равна r^v , в то время как каждое ребро является одноцветным в $r^{v-n} \cdot r$ раскрасках. Таким образом, для того, чтобы хроматическое число гиперграфа было больше r , необходимо как минимум $\left\lceil \frac{r^v}{r^{v-n+1}} \right\rceil = r^{n-1}$ ребер. Итак, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *При любых значениях $n \geq 2$ и $r \geq 2$ верно неравенство*

$$m(n, r) \geq r^{n-1}. \quad (5)$$

Существует много обобщений задачи Эрдеша–Хайнала, однако их рассмотрение выходит за рамки данной работы (см., например, обзоры [1, 9]).

2.2. Известные результаты. Первые нетривиальные оценки $m(n, r)$ были получены П. Эрдешем в 1963–64 гг. с помощью простых вероятностных методов (см. [5, 6]):

$$r^{n-1} \leq m(n, r) \leq \frac{e}{2} n^2 (r-1) r^{n-1} (\ln r) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (6)$$

В настоящее время существует большое количество различных асимптотических улучшений оценок (6) с помощью продвинутых вероятностных методов. Подробно с этими результатами можно ознакомиться в обзорах [1, 9]; мы отметим лишь некоторые из них.

Наилучшую известную на сегодняшний день нижнюю оценку для случая двух цветов получили Дж. Радхакришнан и А. Сринивасан в 2000 г. (см. [11]). Они показали, что

$$m(n) \geq 0,1 \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} 2^n. \quad (7)$$

Лучшей асимптотической оценкой в случае растущего параметра n при фиксированном числе цветов является оценка, полученная Д. Черкашиным и Я. Козиком.

Теорема 1 (см. [4]). *Если $r > 2$ фиксировано, а n растет, то*

$$m(n, r) = \Omega \left(\left(\frac{n}{\ln n} \right)^{(r-1)/r} r^{n-1} \right). \quad (8)$$

В случае, когда r , напротив, превосходит n , верна оценка, полученная Д. Шабановым.

Теорема 2 (см. [1]). *Если $r > n$, то выполняется неравенство*

$$m(n, r) = \Omega(n^{1/2}r^n). \quad (9)$$

Более сильные оценки, обобщающие (8) на случай большого числа цветов, получены в [2].

В настоящей работе исследуется величина $m(n, r)$ при малых n и r . На данный момент известны только первые три значения функции $m(n)$. Ясно, что $m(1) = 1$ и $m(2) = 3$. Нетрудно убедиться в том, что $m(3) = 7$. В этом случае ответ в задаче дает 3-однородный гиперграф $H = (V, E)$ с семью вершинами и семью ребрами, задаваемый точками плоскости Фано. Перечислим его ребра:

$$E = \left\{ \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 6, 7\}, \{2, 4, 6\} \right\}. \quad (10)$$

Как уже было сказано, для любых r при $n = 2$ неравенство в соотношении (4) обращается в равенство. При этом ни для каких $n > 2$ и $r \geq 2$, кроме $m(3, 2) = m(3)$, точные значения $m(n, r)$ не найдены. Дело в том, что никакие асимптотические результаты не дают разумных оценок именно при малых значениях. Поэтому обычно применяются методы, отличные от тех, которые используются для получения хороших асимптотических оценок.

Наиболее примечательна история исследования $m(4)$. Простые оценки (4) и (5) дают следующие ограничения данной величины: $8 \leq m(4) \leq 35$. Однако и верхняя, и нижняя оценки были значительно улучшены. Сначала Тофт (см. [14]) и Сеймур (см. [12]) независимо в 1975 г. показали, что $m(4) \leq 23$, затем в 1995 г. М. Гольдберг и Х. Рассел доказали (см. [8]) оценку $m(4) \geq 17$. Данный результат так и не был улучшен аналитически, однако проводились попытки определить данную величину с помощью компьютерного перебора. В результате в 2011 г. П. Остергард опубликовал статью [10], в которой утверждается, что $m(4) = 23$. Однако вопрос о том, насколько можно доверять такому доказательству, остается дискуссионным.

2.3. Формулировка новых результатов. В данной работе исследуется значение $m(3, 3)$. Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3. *Имеет место неравенство*

$$m(3, 3) \geq 27. \quad (11)$$

Следствие 1. *Выполнены неравенства*

$$m(4) \leq 23 < 27 \leq m(3, 3). \quad (12)$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 3, мы приведем ряд предварительных рассуждений, содержащих некоторые идеи получения нижних оценок числа ребер гиперграфов с большим хроматическим числом.

2.4. Простые оценки числа ребер в гиперграфах с большим хроматическим числом.

При исследовании малых значений параметров в проблеме Эрдеша—Хайнала обычно рассматривают значения следующей вспомогательной величины — $m_v(n, r)$ для различных v , где

$$m_v(n, r) = \min \left\{ |E(H)| : H - n\text{-однородный гиперграф, } \chi(H) > r, \right. \\ \left. |V(H)| = v, \forall u, w \in V \exists e \in E : (u, w) \in e \right\}. \quad (13)$$

Для того, чтобы понять, как в общем случае можно искать нетривиальные нижние оценки, сформулируем два утверждения.

Утверждение 3. *Для любых натуральных n и r выполняется равенство*

$$m(n, r) = \min_{v > r(n-1)} m_v(n, r). \quad (14)$$

Доказательство. В самом деле, допустим, что n -однородный гиперграф $H = (V, E)$ таков, что $\chi(H) > r$, $|E(H)| = m(n, r)$ и существует пара вершин $u, v \in V$, не лежащая ни в одном из ребер этого гиперграфа. Тогда эти две вершины можно «склеить» в одну, получив n -однородный гиперграф H' . Легко видеть, что существование правильной раскраски H' в r цветов означало бы существование подобной правильной раскраски и для H . Значит, $\chi(H') > r$. Более того, $|E(H')| = |E(H)| = m(n, r)$. Продолжая данную процедуру для H' и т. д., получим некоторый n -однородный гиперграф $\tilde{H}$, в котором любые две вершины соединены ребром, $\chi(\tilde{H}) > r$ и $|E(\tilde{H})| = m(n, r)$. Отсюда следует справедливость (14). $\square$

В задаче о величине $m_v(n, r)$ изучается класс гиперграфов, в которых каждая вершина соединена с каждой другой вершиной хотя бы одним ребром, что позволяет получить следующую простую лемму.

Лемма 1. Для любых $n \geq 2$ и $r \geq 2$ выполнено соотношение

$$m_v(n, r) \geq \left\lceil \frac{v}{n} \left\lceil \frac{v-1}{n-1} \right\rceil \right\rceil. \quad (15)$$

Доказательство. Пусть n -однородный гиперграф $H = (V, E)$ таков, что любые две вершины соединены ребром и $|V| = v$. Тогда степень каждой вершины H должна быть не менее $\left\lceil \frac{v-1}{n-1} \right\rceil$.

Значит, сумма степеней всех вершин должна быть не менее $v \left\lceil \frac{v-1}{n-1} \right\rceil$, откуда

$$|E(H)| \cdot n \geq v \left\lceil \frac{v-1}{n-1} \right\rceil.$$

Лемма 1 доказана. $\square$

Пусть C — некоторое множество раскрасок множества вершин n -однородного гиперграфа $H = (V, E)$ в r цветов, $e \in E$ — произвольное ребро. Обозначим через $R(C, e)$ множество раскрасок из C , которые представляются ребром e .

Утверждение 4. Для любого n -однородного гиперграфа $H = (V, E)$, удовлетворяющего условию $\chi(H) > r$, и любого множества C раскрасок вершин V выполнено неравенство

$$|E(H)| \geq \left\lceil \frac{|C|}{\max_{e \in E} |R(C, e)|} \right\rceil. \quad (16)$$

Сделаем важное замечание. Дело в том, что мы вольны фиксировать любое множество в качестве C , поэтому в данной работе будем пользоваться обозначением $C = (x_1, x_2, x_3)$, означающим, что в любой раскраске из C ровно x_1 вершин первого цвета, x_2 — второго и x_3 — третьего. Кроме того, будем использовать обозначение $C = (x_{11}, x_{12}, x_{13}) \oplus (x_{21}, x_{22}, x_{23})$, означающее, что в любой раскраске из множества C среди первых (по нумерации) $y_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13}$ вершин ровно x_{11} — первого цвета, x_{12} — второго и x_{13} — третьего. Аналогично определяется распределение цветов оставшихся $y_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23}$ вершин.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

3.1. Первые оценки. В первую очередь следует сказать про совсем тривиальные оценки рассматриваемой величины. Согласно соотношениям (4) и (5) имеем

$$9 \leq m(3, 3) \leq 35. \quad (17)$$

Сразу же видно, насколько тривиальная нижняя оценка отличается от сформулированной в теореме 3. Воспользуемся леммой 1 и выпишем результаты в таблицу 1.

Теперь воспользуемся утверждением 4. В качестве множества раскрасок C возьмем так называемые *равномерные раскраски* в три цвета, т.е. такие, в которых количество вершин одного цвета

ТАБЛИЦА 1. Применение леммы 1

v	7	8	9	10	11	12	13	14	15	≥ 16
$m(3, 3) \geq \left\lceil \frac{v}{3} \left\lceil \frac{v-1}{3-1} \right\rceil \right\rceil =$	7	11	12	17	19	24	26	33	35	43

ТАБЛИЦА 2. Применение равномерных раскрасок

v	7	8	9	10	11
$ U_v $	210	560	1680	4200	11550
$R(U_v, 3)$	6	20	60	210	630
$m(3, 3) \geq \left\lceil \frac{ U_v }{ R(U_v, 3) } \right\rceil =$	35	28	28	20	19

v	12	13	14	15	
$ U_v $	34650	90090	252252	756756	
$R(U_v, 3)$	1890	5670	16632	49896	
$m(3, 3) \geq \left\lceil \frac{ U_v }{ R(U_v, 3) } \right\rceil =$	19	16	16	16	

ТАБЛИЦА 3. Объединение обоих соображений

v	7	8	9	10	11	12	13	14	15	≥ 16
$m_v(3, 3) \geq$	35	28	28	20	19	24	26	33	35	43

может превосходить количество вершин другого цвета не более, чем на 1. Обозначим это множество через U_v . Кроме того, потребуем упорядоченности мощностей цветовых классов $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. С учетом этого можем записать соотношения

$$|U_v| = \binom{v}{x_1} \binom{v-x_1}{x_2}, \quad (18)$$

$$R(U_v, 3) = \binom{v-3}{x_2} \binom{v-3-x_2}{x_3} + \binom{v-3}{x_1} \binom{v-3-x_1}{x_3} + \binom{v-3}{x_1} \binom{v-3-x_1}{x_2}. \quad (19)$$

Подставим (18) и (19) в выражение (16) и запишем результаты в таблицу 2.

Совместим результаты таблиц 1 и 2 и запишем результат в таблицу 3.

Из таблицы 3 видно, что если удастся доказать соотношение $m_v(3, 3) \geq 27$ для $v = 10, 11, 12, 13$, то в силу утверждения 3 справедливость теоремы 3 будет установлена.

Итак, пусть $H = (V, E)$ — 3-однородный гиперграф, $\chi(H) > 3$, в котором любые две вершины соединены хотя бы одним ребром. Наша задача будет состоять в том, чтобы в случаях $v = |V| = 10, 11, 12, 13$ проверить неравенство $|E| \geq 27$.

Разделим множество гиперграфов $H = (V, E)$ на классы относительно размера их максимального независимого множества $\alpha(H)$. При этом будем считать, что $V = \{1, \dots, v\}$ и

$A(H) = \{1, \dots, \alpha(H)\}$ — максимальное независимое множество в H . Лемма 2 устанавливает верхнюю границу возможных значений $\alpha(H)$.

Лемма 2. Для любого гиперграфа $H = (V, E)$, удовлетворяющего условиям $|V| = v$ и $\chi(H) > 3$, верно неравенство

$$\alpha(H) < v - 4. \quad (20)$$

Доказательство. Предположим обратное, т.е. $\alpha(H) \geq v - 4$. Рассмотрим произвольную раскраску χ множества вершин V , для которой $\chi \in (v - x - y, 0, 0) \oplus (0, x, y)$, причем $x \leq 2$ и $y \leq 2$. Множество $A(H)$ не содержит ребер по определению, а другие два цветовых класса имеют мощность не более 2, т.е. не могут содержать ребер H . Таким образом, не существует ребра, представляющего χ . Противоречие с условием $\chi(H) > 3$ доказывает лемму. $\square$

С другой стороны, ясно, что если число ребер довольно мало, то у нас просто не может быть небольшого максимального независимого множества. Пусть дан t -однородный гиперграф $H = (V, E)$ с условиями $|V| = n$ и $\alpha(H) = k - 1$. Числом Турана $T(n, k, t)$ называется минимально возможное количество ребер в таком гиперграфе (см. [15]). Непосредственно из определения следует соотношение

$$|E(H)| \geq T(v, \alpha(H) + 1, 3). \quad (21)$$

Нам далее понадобятся некоторые обозначения. Каждое ребро e гиперграфа H может иметь мощность пересечения с максимальным независимым множеством $A(H)$, равную 0, 1 или 2. В зависимости от этого мы будем называть ребро e ребром нулевого, первого или второго типа и обозначать e^i , где $i = 0, 1, 2$ — тип ребра e . Тогда множество ребер i -го типа будем обозначать E^i .

Теперь мы перейдем непосредственно к рассмотрению отдельных возможных случаев.

3.2. Случай $v = 10$. Исследуем все допустимые значения $\alpha(H)$. Согласно лемме 2 имеет смысл рассматривать только $\alpha(H) < 6$.

Сначала введем величину $ms_v(n, r)$ — то же самое, что и $m(n, r)$, но с условием $|V| = v$. Несложно убедиться в том, что $ms_v(n, r) = \min_{w \leq v} m_w(n, r)$ (см. доказательство утверждения 3). Больше всего нас интересует значение этой величины при $v = 6, n = 3, r = 2$.

Лемма 3. $ms_6(3, 2) = 10$.

Доказательство. Пусть $H = (V, E)$ — 3-однородный гиперграф, $|V| = 6, \chi(H) > 2$. Рассмотрим все равномерные раскраски V в два цвета; их всего 20. При этом каждое ребро H представляет два из них. Согласно утверждению 4 $|E(H)| \geq 10$, т.е. $ms_6(3, 2) \geq 10$. С другой стороны, полный 3-однородный гиперграф на 5 вершинах не является 2-раскрашиваемым. У него 10 ребер, значит, $ms_6(3, 2) \leq 10$. $\square$

Случай 1.1. $\alpha(H) = 3$. В этом случае оценку на количество ребер дает неравенство (21): $|E(H)| \geq T(10, 4, 3)$. Для того, чтобы оценить значение $T(10, 4, 3)$, достаточно известного рекуррентного соотношения (см. [13]):

$$T(n, k, t) \geq \left\lceil \frac{n}{n-t} T(n-1, k, t) \right\rceil. \quad (22)$$

В качестве базы выберем некоторое известное значение. Например, воспользуемся следующим фактом (см. [13]):

$$T(n, k+1, 3) = \begin{cases} n-k, & 1 \leq \frac{n}{k} \leq \frac{3}{2}; \\ 3n-4k, & \frac{3}{2} \leq \frac{n}{k} \leq 2; \\ 4n-6k, & 2 \leq \frac{n}{k} \leq \frac{9}{4}, 4n-9k \neq -1; \\ 4n-6k+2, & 4n-9k = -1, 1, 2. \end{cases} \quad (23)$$

Из (23) следует, что $T(7, 4, 3) = 12$. Тогда последовательно применяя (22), получим результат $T(10, 4, 3) \geq 43$.

Случай 1.2. $\alpha(H) = 5$. Рассмотрим индуцированный гиперграф $H_A = (V_A, E_A)$, в котором $V_A = V(H) \setminus A(H)$, а E_A — такое подпространство в $E(H)$, что $e \subset V_A$ для каждого $e \in E_A$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. *Для любого 3-однородного гиперграфа $G = (U, F)$, удовлетворяющего условию $\chi(G) > 3$, выполняется соотношение*

$$|F^0| \geq ms_{|U_A|}(3, 2). \quad (24)$$

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно; тогда $\chi(G_A) \leq 2$. Иными словами, существует правильная раскраска множества U_A в два цвета. Тогда присвоив вершинам $A(G)$ третий цвет, получим правильную раскраску вершин U . $\square$

Рассмотрим множество раскрасок $C = (3, 1, 1) \oplus (1, 2, 2)$. Ясно, что ребра нулевого типа не представляют ни одной такой раскраски, поэтому их вообще рассматривать не требуется. Ясно, что

$$|C| = \binom{5}{3} \binom{2}{1} \binom{5}{1} \binom{4}{2} = 600.$$

Ребра первого типа представляют

$$2 \binom{4}{1} \binom{3}{1} = 24$$

раскраски из множества C , а ребра второго типа —

$$\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{4}{2} = 36.$$

Таким образом,

$$|E^1| + |E^2| \geq \left\lceil \frac{600}{36} \right\rceil = 17.$$

Отсюда следует, что

$$|E| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geq 27.$$

Случай 1.3. $\alpha(H) = 4$. Рассмотрим множество раскрасок $C = (2, 1, 1) \oplus (2, 2, 2)$. Как и в предыдущем случае, $\alpha(H) = 5$ и ни одно ребро из множества E^0 не представляет ни одной раскраски из C ; при этом $|E^0| \geq 10$ согласно утверждению 5. Нетрудно убедиться в том, что

$$|C| = \binom{4}{2} \binom{2}{1} \binom{6}{2} \binom{4}{2} = 1080.$$

Ребра первого типа представляют

$$\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{4}{2} + 2 \binom{3}{2} \binom{4}{2} = 72$$

раскраски, а ребра второго типа —

$$\binom{2}{1} \binom{5}{1} \binom{4}{2} = 60.$$

Кроме того, заметим, что каждая вершина H , не входящая в независимое множество $A(H)$, должна принадлежать хотя бы одному ребру второго типа, иначе ее можно было бы добавить в множество независимости, что противоречит условию его максимальности. Стало быть, H содержит хотя бы 6 ребер второго типа, представляющих при этом не более 360 раскрасок. В том случае, если $|E^2| \geq 7$, получаем

$$|E| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geq 10 + 7 + \left\lceil \frac{1080 - 360 - 60}{72} \right\rceil = 27.$$

Пусть $|E^2| = 6$. В силу того, что каждая пара вершин из $A(H)$ (всего 6 пар) и каждая вершина из $V \setminus A(H)$ должна быть покрыта ребром из E^2 (всего 6 вершин), получаем, что с точностью до перестановки вершин из $V \setminus A(H)$ множество E^2 имеет вид

$$E^2 = \left\{ \{w_1, w_2, w_5\}, \{w_1, w_3, w_6\}, \{w_1, w_4, w_7\}, \{w_2, w_3, w_8\}, \{w_2, w_4, w_9\}, \{w_3, w_4, w_{10}\} \right\}.$$

Кроме того, мы знаем, что каждая пара вершин должна быть соединена хотя бы одним ребром. Выпишем пары вершин, одна из которых лежит в независимом множестве, а другая — нет и которые еще не встречались среди набора ребер второго типа:

$$\left\{ \{w_1, w_8\}, \{w_1, w_9\}, \{w_1, w_{10}\}, \{w_2, w_6\}, \{w_2, w_7\}, \{w_2, w_{10}\}, \right. \\ \left. \{w_3, w_5\}, \{w_3, w_7\}, \{w_3, w_9\}, \{w_4, w_5\}, \{w_4, w_6\}, \{w_4, w_8\} \right\}.$$

Рассмотрим ребро первого типа, содержащее $\{w_1, w_8\}$. Пусть это будет ребро $e_1^1 = \{w_1, w_8, x\}$. Если $x \in \{w_5, w_6, w_7\}$, то существует ребро второго типа $e_1^2 = \{w_1, y, x\}$, где $y \in A(H)$. Тогда ребро e_1^1 представляет такую раскраску χ_2 , что $\chi_2(w) = 1$, $w \in \{w_1, y, x, w_8\}$. Ясно, что $\chi_2 \in C$, но χ_2 уже представлена соответствующим ребром e_1^2 . Тогда

$$|E| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geq 10 + 6 + 1 + \left\lceil \frac{720 - 71}{72} \right\rceil = 27.$$

Таким образом, если для некоторой конфигурации ребер E существует раскраска $\chi \in C$, представляемая более чем одним ребром первого типа, то можно проделать аналогичные рассуждения и убедиться в том, что $|E(H)| \geq 27$.

Пусть $x = w_9$; тогда $e_1^1 = \{w_1, w_8, w_9\}$. Теперь рассмотрим ребро $e_2^1 = \{w_2, w_6, z\}$. Если $z \notin \{w_8, w_9\}$, то ребра e_1^1 и e_2^1 представляют общую раскраску $\chi_3 \in C$, обладающую свойствами $\chi_3(w) = 2$ для $w \in e_1^1$ и $\chi_3(w) = 3$ для $w \in e_2^1$. В противном случае существует ребро $e_2^2 = \{w_2, p, z\} \in E^2$, которое вместе с e_2^1 представляет такую раскраску $\chi_4 \in C$, что $\chi_4(w) = 1$ для $w \in e_2^1 \cup e_2^2$.

Пусть $x = w_{10}$; тогда $e_1^1 = \{w_1, w_8, w_{10}\}$. Рассмотрим ребро $e_3^1 = \{w_3, w_5, q\}$. Если $q \notin \{w_8, w_{10}\}$, то ребра e_1^1 и e_3^1 представляют такую общую раскраску $\chi_5 \in C$, что $\chi_5(w) = 2$ для $w \in e_1^1$ и $\chi_5(w) = 3$ для $w \in e_3^1$. В противном случае существует ребро $e_3^2 = \{w_3, r, q\} \in E^2$, которое вместе с e_3^1 представляет такую раскраску $\chi_6 \in C$, что $\chi_6(w) = 1$ при $w \in e_3^1 \cup e_3^2$.

Таким образом, мы показали, что при любой конфигурации ребер найдется раскраска, представленная как минимум двумя ребрами первого типа. Поэтому справедлива оценка

$$|E| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geq 10 + 6 + 1 + \left\lceil \frac{720 - 71}{72} \right\rceil = 27.$$

Таким образом, $m_{10}(3, 3) \geq 27$. Рассмотрение случая $v = 10$ завершено.

3.3. Случай $v = 11$. Ясно, что $T(11, 4, 3) \geq T(10, 4, 3)$, поэтому рассматривать будем только значения $3 < \alpha(H) < 7$.

Случай 2.1. $\alpha(H) = 4$. Согласно (21), $|E(H)| \geq T(11, 5, 3)$, а точное значение $T(11, 5, 3)$ известно и равно 29 (см. [3]). Итак, в этом случае все доказано.

Случай 2.2. $\alpha(H) = 5$. Рассмотрим множество раскрасок $C = (1, 2, 2) \oplus (2, 2, 2)$. Как и в случае $v = 10$, ни одно ребро из множества E^0 не представляет ни одной раскраски из C ; при этом согласно утверждению 5 имеем $|E^0| \geq 10$. Нетрудно убедиться в том, что

$$|C| = \binom{5}{1} \binom{4}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2} = 2700.$$

Каждое ребро первого типа представляет

$$\binom{4}{2} \binom{4}{2} + 2 \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{4}{2} = 180$$

раскрасок. Каждое ребро второго типа представляет

$$2 \binom{3}{1} \binom{5}{2} \binom{3}{2} = 180$$

раскрасок. Рассмотрим множество независимости $A(H)$. Оно содержит $\binom{5}{2}$ пар вершин, каждая из которых должна быть включена в какое-либо ребро гиперграфа H . Каждое ребро второго типа содержит не более одной такой пары; стало быть, требуется взять как минимум 10 ребер второго типа. Множество ребер второго типа, содержащих все пары вершин независимого множества ровно один раз, обозначим через E_0^2 .

Рассмотрим следующую альтернативу. Допустим, что в множестве E_0^2 существует ребро, которое пересекается со всеми остальными ребрами из E_0^2 . Обозначим это ребро через $e_1^2 = \{w_1, w_2, w_6\}$. Рассмотрим пары вершин $\{w_3, w_4\}$, $\{w_3, w_5\}$, $\{w_4, w_5\}$; они должны быть также соединены ребрами, причем второго типа. По предположению они должны пересекаться с ребром e_1^2 , но пересечение возможно только по вершине w_6 . Таким образом, получились ребра

$$\{e_1^2 = \{w_1, w_2, w_6\}, e_2^2 = \{w_3, w_4, w_6\}, e_3^2 = \{w_3, w_5, w_6\}, e_4^2 = \{w_4, w_5, w_6\}\}.$$

Рассмотрим теперь пары вершин $u, w \in V(H)$, причем $u \in A(H)$, $w \in V(H) \setminus A(H)$. Количество таких пар равно

$$|A(H)| \cdot |V(H) \setminus A(H)| = 5 \cdot 6 = 30.$$

Ребра $e_1^2, \dots, e_4^2$ содержат пары $\{w_1, w_6\}$, $\{w_2, w_6\}$, $\{w_3, w_6\}$, $\{w_4, w_6\}$, $\{w_5, w_6\}$. Остается 25 пар, но каждое ребро первого или второго типа покрывает не более двух пар, а значит, потребуется взять еще как минимум $\left\lceil \frac{25}{2} \right\rceil = 13$, что в сумме с $|E^0|$ дает не менее 27 ребер.

Теперь предположим, что такого ребра не существует. Это означает, что каждое ребро из E_0^2 не пересекается хотя бы с еще одним ребром множества E_0^2 . Нетрудно убедиться в том, что любое множество E_0^2 , элементы которого удовлетворяют этому условию, можно разделить на два таких непересекающихся множества E_1^2 и E_2^2 , что $|E_1^2| \leq |E_2^2|$ и для любого $e \in E_2^2$ существует такое $e' \in E_1^2$, что $e \cap e' = \emptyset$. Для этого построим граф $G = (V', E')$, вершины которого соответствуют ребрам E_0^2 , а ребро между вершинами $u, w \in V'$ проводится в том случае, если ребра e_1^2, e_2^2 из множества E_0^2 , соответствующие вершинам u, w из множества V' , не имеют общих вершин из множества V . Разобьем граф G на компоненты связности $G = G_1 \sqcup \dots \sqcup G_m$, затем из каждой компоненты G_i выделим произвольное остовное дерево T_i . Поскольку T_i — связный двудольный граф, всегда возможно разделить его вершины на два множества таким образом, чтобы любая вершина одного множества была смежна хотя бы с одной вершиной другого множества. Для выполнения требуемых условий к множеству E_1^2 надо добавить ребра E_0^2 , соответствующие вершинам меньшей по мощности доли T_i для всех $i = 1, \dots, m$.

Как мы уже убедились ранее, каждое ребро $e^2 \in E^2$ представляет не более 180 раскрасок из C . В то же время при подсчете числа раскрасок, представляемых ребрами e_2^2 из множества E_2^2 , следует вычитать раскраски, общие с ребрами e_1^2 из множества E_1^2 . Общие раскраски появляются у ребер второго типа, не имеющих общих вершин. Число таких раскрасок для одной пары ребер составляет $2 \binom{4}{1} \binom{3}{1} = 24$. Таким образом, любые 10 ребер второго типа, содержащие все пары вершин независимого множества $A(H)$, в совокупности представляют не более

$$180 \cdot |E_1^2| + 156 \cdot |E_2^2| \leq 180 \cdot 5 + 156 \cdot 5 = 1680$$

раскрасок.

Докажем аналогичное утверждение для ребер первого типа. Допустим, что имеется ребро первого типа, которое пересекается со всеми ребрами из E_0^2 . Обозначим это ребро $e^1 = \{w_1, w_6, w_7\}$ и рассмотрим пары вершин $\{w_2, w_3\}$, $\{w_2, w_4\}$, $\{w_2, w_5\}$, $\{w_3, w_4\}$, $\{w_3, w_5\}$, $\{w_4, w_5\}$; они также должны быть соединены ребрами $e_1^2, \dots, e_6^2$. Эти ребра, в свою очередь, по условию должны пересекаться с ребром e^1 . Рассмотрим множество пар вершин $u, w \in V(H)$, причем $u \in A(H)$ и

$w \in \{w_8, w_9, w_{10}, w_{11}\}$. Таких пар имеется $|A(H)| \cdot 4 = 20$, каждое ребро $E(H)$ содержит не более двух таких пар; следовательно, потребуется взять еще как минимум 10 ребер. Таким образом, $|E(H)| \geq 10 + 1 + 6 + 10 = 27$. Таким образом, осталось показать, что $|E(H)| \geq 27$ и в случае, когда для каждого $e^1 \in E^1$ существует такое $e^2 \in E_0^2$, что $e^1 \cap e^2 = \emptyset$.

Ясно, что для каждого ребра $e^2 \in E^2 \setminus E_0^2$ найдется такое ребро $e_0^2 \in E_0$, что $|e^2 \cap e_0^2 \cap A(H)| = 2$. При этом e^2 и e_0^2 представляют множество общих раскрасок $C' \subset C$: $\chi(w) \in \{2, 3\}$, $w \in e^2 \cup e_0^2$. Нетрудно убедиться, что

$$|C'| = 2 \binom{3}{1} \binom{4}{2}.$$

Таким образом, любое ребро второго типа представляет не более 144 раскрасок, не представленных ребрами E_0 . В то же время для каждого ребра первого типа e^1 существует такое ребро второго типа $e^2 \in E_0^2$, что $e^1 \cap e^2 = \emptyset$. Несложно понять, что

$$|R(C, e^1) \cap R(C, e^2)| = 2 \binom{2}{1} \binom{3}{1} + 2 \binom{3}{2} = 18.$$

Таким образом, любое ребро первого типа представляет не более 162 раскрасок, не представленных ребрами E_0 . Отсюда следует, что

$$|E(H)| \geq 10 + 10 + \left\lceil \frac{2700 - 1680}{\max(144, 162)} \right\rceil = 27.$$

Рассмотрение случая завершено.

Случай 2.3. $\alpha(H) = 6$. Как и в случае $\alpha(H) = 5$, рассмотрим множество раскрасок $C = (2, 2, 2) \oplus (1, 2, 2)$. Кроме того, ни одно ребро из множества E^0 не представляет ни одной раскраски из C , при этом $|E^0| \geq 10$ согласно утверждению 5. Известно, что $|C| = 2700$; для каждого $e \in E^1 \cup E^2$ имеем $|R(C, e)| = 180$. Каждая пара вершин должна быть соединена ребром, в том числе и ребра из независимого множества, следовательно, потребуется взять не менее $\binom{6}{2} = 15$ ребер второго типа.

Предположим, что существует ребро второго типа, которое пересекается со всеми другими ребрами второго типа; обозначим его $\{w_1, w_2, w_7\}$. Теперь рассмотрим пары $\{w_3, w_4\}$, $\{w_3, w_5\}$, $\{w_3, w_6\}$, $\{w_4, w_5\}$, $\{w_4, w_6\}$, $\{w_5, w_6\}$; они также должны быть соединены ребрами второго типа:

$$\left\{ \{w_3, w_4, w_7\}, \{w_3, w_5, w_7\}, \{w_3, w_6, w_7\}, \{w_4, w_5, w_7\}, \{w_4, w_6, w_7\}, \{w_5, w_6, w_7\} \right\}.$$

Рассмотрим пары вершин $\{u, w\}$, где $u \in A(H)$, $w \in \{w_8, w_9, w_{10}, w_{11}\}$. Всего таких пар 24, каждое ребро содержит не более двух таких пар; следовательно, потребуется еще как минимум 12 ребер; итого $|E(H)| \geq 10 + 1 + 6 + 12 = 29$.

Осталось рассмотреть случай, когда для каждого $e_1^2 \in E^2$ существует такое $e_2^2 \in E^2$, что $e_1^2 \cap e_2^2 = \emptyset$. Нетрудно убедиться в том, что

$$|R(C, e_1^2) \cap R(C, e_2^2)| = 4 \binom{3}{1} + 2 \binom{3}{1} \binom{2}{1} = 24.$$

Как было установлено в п. 2.2, любое множество E^2 , элементы которого удовлетворяют этому условию, можно разделить на такие два непересекающихся множества E_1^2 и E_2^2 , что $|E_1^2| \leq |E_2^2|$ и для каждого $e \in E_2^2$ найдется такое $e' \in E_1^2$, что $e \cap e' = \emptyset$. Таким образом,

$$\left| \bigcup_{e^2 \in E^2} R(C, e^2) \right| \leq 180 \cdot |E_1^2| + 156 \cdot |E_2^2| \leq 180 \cdot 7 + 156 \cdot 8 = 2508.$$

Следовательно,

$$|E(H)| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geq 10 + \left\lceil \frac{2700 - 2508}{180} \right\rceil + 15 = 27.$$

Рассмотрение случая $v = 11$ завершено.

3.4. Случай $v = 12$. Поскольку выполняется неравенство $T(12, 5, 3) \geq T(11, 5, 3)$, будем рассматривать только значения $4 < \alpha(H) < 8$.

Случай 3.1. $\alpha(H) = 5$. Рассмотрим множество раскрасок $C = (3, 1, 1) \oplus (1, 3, 3)$. Рассмотрим различные возможные значения $|E^0|$; при этом $|E^0| \geq 7$ согласно утверждению 5.

Случай А. $|E^0| \geq 9$. В этом случае

$$\left| \{ \{u, w\} : u \in A(H), w \in H \setminus A(H) \} \right| = 35,$$

любое ребро $e \in E$ содержит не более двух таких пар. Тогда

$$|E(H)| \geq 9 + \left\lceil \frac{35}{2} \right\rceil = 27.$$

Случай Б. $|E^0| = 7$. В этом случае ребра E_0 образуют плоскость Фано. Введем обозначение

$$C_0 = \bigcup_{e^0 \in E^0} R(C, e^0)$$

и найдем мощность множества $\tilde{C} = C \setminus C_0$. На каждую раскраску множества $V \setminus A(H)$ приходится $\binom{5}{1} \binom{4}{1} = 20$ раскрасок множества $A(H)$. Число способов зафиксировать одно множество независимости $A_1(H_A)$ размера 3 в множестве $V \setminus A(H)$ равно $\binom{7}{3} - 7 = 28$. Число способов выбрать второе множество независимости $A_2(H_A)$ размера 3, с условием $A_1(H_A) \cap A_2(H_A) = \emptyset$ равно $\binom{4}{3} - 1 = 3$. Тогда все раскраски $\chi \in C$, обладающие свойствами $\chi(w_1) = 2$ при $w_1 \in A_1(H_A)$ и $\chi(w_2) = 3$ при $w_2 \in A_2(H_A)$, не представляются ребрами E_0 , поэтому входят в $\tilde{C}$. Поэтому $|\tilde{C}| = 20 \cdot 28 \cdot 3 = 1680$.

Найдем значение величины $|R(\tilde{C}, e^2)|$, $e^2 \in E^2$. Рассмотрим вершину $w = e^2 \cap (V \setminus A(H))$. Если e^2 представляет $\chi \in \tilde{C}$, то любое ребро $e^0 \in E^0$, лежащее в $V \setminus (A(H) \cup \{w\})$, должно быть неодноразноцветно в χ . Число равномерных раскрасок множества $V \setminus (A(H) \cup \{w\})$ в два цвета равно 20, каждое ребро нулевого типа одноцветно ровно в двух из них. В силу того, что степень w в E^0 равна трем, таких ребер ровно 4, причем никакие два из них не представляют одну и ту же раскраску. В итоге

$$|R(\tilde{C}, e^2)| = \binom{3}{2} \binom{2}{1} (20 - 4 \cdot 2) = 72.$$

Теперь найдем $|R(\tilde{C}, e^1)|$, $e^1 \in E^1$. Пусть вершины u и w таковы, что $\{u, w\} = e^1 \cap (V \setminus A(H))$. В силу свойств плоскости Фано существует единственное $e_0^0 \in E^0$, для которого $\{u, w\} \subset e_0^0$. Если e^1 представляет $\chi \in \tilde{C}$, то, во-первых, e_0^0 должно быть неодноразноцветно в χ , а во-вторых, каждое ребро $e^0 \in E^0$, лежащее в $V \setminus (A(H) \cup \{u, w\})$, должно быть неодноразноцветно в χ . Таких ребер всего 2; обозначим любое из них через e_1^0 . Поскольку в плоскости Фано любые две ребра пересекаются, то никакие два из этих условий не могут быть выполнены одновременно. Из этих рассуждений следует, что

$$|R(\tilde{C}, e^1)| = |R(C, e^1)| - |R(C, e^1) \cap R(C, e_0^0)| - 2|R(C, e^1) \cap R(C, e_1^0)|. \quad (25)$$

Найдем значения выражений, входящих в состав (25):

$$|R(C, e^1)| = 2 \binom{4}{1} \binom{5}{1} \binom{4}{1} = 160, \quad (26)$$

$$|R(C, e^1) \cap R(C, e_0^0)| = 2 \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 32, \quad (27)$$

$$|R(C, e^1) \cap R(C, e_1^0)| = 2 \binom{4}{1} \binom{2}{1} = 16. \quad (28)$$

Подставив значения выражений (26), (27) и (28) в (25), получим, что

$$|R(\tilde{C}, e^1)| = 160 - 32 - 2 \cdot 16 = 96.$$

С учетом ограничений $|E^2| \geq \binom{\alpha(H)}{2}$ и $|\tilde{C}| = 1680$, получаем

$$|E^1| + |E^2| \geq 10 + \left\lceil \frac{1680 - 72 \cdot 10}{\max(72, 96)} \right\rceil = 20.$$

Таким образом, $|E(H)| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geq 7 + 20 = 27$.

Случай В. $|E^0| = 8$. Для того, чтобы перейти к случаю восьми ребер нулевого типа, нам потребуется доказать два факта. Во-первых, что для каждого $e^0 \in E^0$ имеем

$$|R(\tilde{C}, e^0)| \leq 2 \binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 160.$$

Второй факт сформулируем в виде леммы.

Лемма 4. Пусть $H = (V, E)$ — 3-однородный гиперграф, удовлетворяющий условиям $|V| = 7$, $|E| = 8$, $\chi(H) > 2$. Тогда существуют такие ребра $e_1, \dots, e_7 \in E$, что набор $\{e_1, \dots, e_7\}$ изоморфен плоскости Фано.

Доказательство. Поскольку $ms_i(3, 2) > 8$ при $i < 7$, то для любого $u, w \in V$ существует такое $e \in E$, что $u, w \in e$. Из этого следует, что степень любой вершины не меньше 3, а всего вершин степени 3 не менее четырех. Выберем одну из таких вершин и обозначим ее w_1 . Она принадлежит ребрам $e_1 = \{w_1, w_2, w_3\}$, $e_2 = \{w_1, w_4, w_5\}$, $e_3 = \{w_1, w_6, w_7\}$. Еще одну вершину степени 3 обозначим w_3 ; допустим, что она принадлежит ребрам e_1 , $e_4 = \{w_3, w_4, w_5\}$, $e_5 = \{w_3, w_6, w_7\}$. Среди вершин w_4, w_5, w_6, w_7 хотя бы одна должна иметь степень 3, но каждая из них не соединена еще с тремя другими вершинами, а значит, ни одна не может иметь степень 3, противоречие. Тогда вершина w_3 принадлежит ребрам e_1 , $e_4 = \{w_3, w_4, w_6\}$, $e_5 = \{w_3, w_5, w_7\}$. Среди вершин w_4, w_5, w_6, w_7 хотя бы одна имеет степень 3; пусть это вершина w_4 , тогда она принадлежит ребрам e_2 , e_4 , $e_6 = \{w_2, w_4, w_7\}$. Рассмотрим такое множество раскрасок C , что

$$C = \left\{ \chi : \chi(w) = 1, w \in \{w_2, w_4, w_5\}, \chi(u) = 2, \text{ где } u \in \tilde{V} : \tilde{V} \subset \{w_1, w_3, w_6, w_7\}, |\tilde{V}| = 3 \right\}.$$

Нетрудно найти мощность множества C : $|C| = \binom{4}{3} = 4$. Кроме того, ни одно ребро из набора $\{e_1, \dots, e_6\}$ не представляет ни одной раскраски из C . Обозначим через F^i произвольное подмножество $F^i \subset E \setminus \{e_1, \dots, e_6\}$, обладающее тем свойством, что $|f^i \cap \{w_2, w_4, w_5\}| = i$ для каждого $f^i \in F^i$. Оценим число раскрасок множества C , представляемых ребрами различных типов: $|R(C, f^0)| = 1$, $|R(C, f^1)| = 0$, $|R(C, f^2)| = 1$, $|R(C, f^3)| = 4$. В то же время, если $e^3 = \{w_2, w_4, w_5\} \in E$, то ребра $e_1, \dots, e_6, f^3$ образуют плоскость Фано, т.е. лемма выполняется. С другой стороны, с учетом предыдущих результатов, можно установить истинность неравенства

$$|E^0| \geq |\{e_1, \dots, e_6\}| + \left\lceil \frac{|C|}{\max_{0 \leq i \leq 2} |R(C, f^i)|} \right\rceil = 10.$$

Результат противоречит условию $|E^0| \leq 8$ леммы. Лемма доказана. $\square$

Итак, случай В аналогичен случаю Б с той разницей, что $|E^0| = 8$, а $|R(\tilde{C}, e^0)| \leq 160$. Применив те же рассуждения, получим

$$|E(H)| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geq 8 + 10 + \left\lceil \frac{1680 - 160 - 720}{96} \right\rceil = 27.$$

Рассмотрение случая $\alpha(H) = 5$ завершено.

Случай 3.2. $\alpha(H) = 6$. В этом случае $|E^0| \geq 10$ согласно утверждению 5; в то же время

$$|E^1| + |E^2| \geq \left\lceil \frac{\alpha(H) \cdot (v - \alpha(H))}{2} \right\rceil = 18,$$

а значит, $|E(H)| \geq 10 + 18 = 28$.

Случай 3.3. $\alpha(H) = 7$. Аналогично случаю 3.2 имеем $|E^0| \geq 10$ и

$$|E^1| + |E^2| \geq \left\lceil \frac{\alpha(H) \cdot (v - \alpha(H))}{2} \right\rceil = 18,$$

что означает выполнение неравенства $|E(H)| \geq 28$.

Таким образом, мы показали, что $m_{12}(3, 3) \geq 27$. Рассмотрение случая $v = 12$ завершено.

3.5. Случай $v = 13$.

Случай 1. $\alpha(H) = 5$. Из неравенства (21) получаем $m_{13}(3, 3) \geq T(13, 6, 3)$. Согласно (23) имеем $T(11, 6, 3) = 16$. Последовательно подставляя значения в выражение (22), для случая $\alpha(H) = 5$ получим оценку $m_{13}(3, 3) \geq T(13, 6, 3) \geq 29$.

Случай 2. $\alpha(H) = 6$. Согласно утверждению 5, $|E^0| \geq 7$. В то же время

$$|E^1| + |E^2| \geq \left\lceil \frac{\alpha(H) \cdot (v - \alpha(H))}{2} \right\rceil = 21,$$

а значит, $|E(H)| \geq 7 + 21 = 28$.

Случай 3. $\alpha(H) = 7$. Аналогично предыдущему случаю, согласно утверждению 5 имеем $|E^0| \geq 10$ и

$$|E^1| + |E^2| \geq \left\lceil \frac{\alpha(H) \cdot (v - \alpha(H))}{2} \right\rceil = 21;$$

поэтому $|E(H)| \geq 10 + 21 = 31$.

Случай 4. $\alpha(H) = 8$. Как и раньше, $|E^0| \geq 10$ и

$$|E^1| + |E^2| \geq \left\lceil \frac{\alpha(H) \cdot (v - \alpha(H))}{2} \right\rceil = 20;$$

поэтому $|E(H)| \geq 10 + 20 = 30$.

Итак, приведенные рассуждения показывают истинность соотношения $m_{13}(3, 3) \geq 28$.

Улучшенные результаты содержатся в таблице 3, на основе которой составлена новая таблица 4.

ТАБЛИЦА 4. Применение полученных результатов

v	7	8	9	10	11	12	13	14	15	≥ 16
$m_v(3, 3) \geq$	35	28	28	27	27	27	28	33	35	43

Из таблицы 4 вытекает истинность утверждения теоремы 3 и следствия 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Райгородский А. М., Шабанов Д. А. Задача Эрдеша—Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы// Усп. мат. наук. — 2011. — 66, № 5. — С. 109–182.
2. Akolzin I. A., Shabanov D. A. Colorings of hypergraphs with large number of colors// Discr. Math. — 2016. — 339, № 12. — С. 3020–3031.
3. Boyer E. D., Kreher D. L., Radziszowski S. P., Sidorenko A. On $(n, 5, 3)$ -Turan systems// Ars Combinatoria. — 1994. — 37. — С. 13–31.
4. Cherkashin D., Kozik J. A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs// Random Struct. Algorithms. — 2015. — 47, № 3. — С. 407–413.
5. Erdős P. On a combinatorial problem, I// Nordisk Mat. Tidskrift. — 1963. — 11. — С. 5–10.
6. Erdős P. On a combinatorial problem, II// Acta Math. Acad. Sci. — 1964. — 15, № 3-4. — С. 445–447.
7. Erdős P., Hajnal A. On a property of families of sets// Acta Math. Acad. Sci. — 1961. — 12, № 1-2. — С. 87–123.
8. Goldberg M., Russell H. Toward computing $m(4)$ // Ars Combinatoria. — 1995. — 39. — С. 139–148.
9. Kostochka A. V. Color-critical graphs and hypergraphs with few edges: A survey// в кн.: More Sets, Graphs and Numbers (Győri E., Katona G. O. H., Lovász L., Fleiner T., eds.). — Bolyai Soc. Math. Stud. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2006. — 15. — С. 175–198.
10. Östergård P. R. J. On the minimum size of 4-uniform hypergraphs without property B// Discr. Appl. Math. — 2014. — 163, № 2. — С. 199–204.
11. Radhakrishnan J., Srinivasan A. Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring// Random Struct. Algorithms. — 2000. — 16, № 1. — С. 4–32.
12. Seymour P. D. A note on a combinatorial problem of Erdős and Hajnal// J. London Math. Soc. — 1974. — 8, № 2. — С. 681–682.
13. Sidorenko A. What we know and what we do not know about Turan numbers// Graphs and Combinatorics. — 1995. — 11. — С. 179–199.
14. Toft B. On color critical hypergraphs// Infinite and Finite Sets. — 1975. — 3. — С. 1445–1457.
15. Turán P. Research problems// Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Internat. Közl. — 1961. — 6. — С. 417–423.

И. А. АКОЛЬЗИН

Московский физико-технический институт

E-mail: iakolzin@gmail.com



ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕНЗОРНО-БЛОЧНОЙ МАТРИЦЫ С НЕКОТОРЫМИ ПРИЛОЖЕНИЯМИ К МЕХАНИКЕ

© 2018 г. М. У. НИКАБАДЗЕ

Аннотация. В работе поставлена и исследована задача на собственные значения симметричной тензорно-блочной матрицы любого четного ранга и любых размеров $m \times m$, $m \geq 1$. Приведены некоторые определения и теоремы, касающиеся тензорно-блочных матриц. Получены формулы, выражающие классические инварианты (входящие в характеристическое уравнение) тензорно-блочной матрицы любого четного ранга и размеров 2×2 через первые инварианты степеней той же тензорно-блочной матрицы. Получены и обратные формулы к последним. Построена полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов для тензорно-блочной матрицы любого четного ранга и размеров 2×2 . Сформулирована обобщенная задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы. Как частный случай рассмотрена тензорно-блочная матрица тензоров модулей упругости. Даны канонические представления удельной энергии деформации и определяющих соотношений. Дана классификация анизотропных микрополярных линейно-упругих сред, не обладающих центром симметрии.

Ключевые слова: задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы, тензорный столбец, собственный тензор, символ анизотропии (структуры) тензорно-блочной матрицы, символ анизотропии (структуры) материала.

AMS Subject Classification: 74B05

СОДЕРЖАНИЕ

1. О тензорах модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$	41
2. Задача на собственные значения и построение полной системы собственных тензорных столбцов симметрической тензорно-блочной матрицы	43
3. Некоторые приложения к механике	62
4. Задача на собственные значения и построение полной системы собственных тензоров для симметричного тензора четвертого ранга	72
5. Классификация микрополярных линейно-упругих анизотропных материалов без центра симметрии	73
Список литературы	75

Механические свойства линейно-упругого материала в классической теории упругости определяется тензором четвертого ранга (тензором модулей упругости), а в микрополярной линейной теории упругости в общем случае, когда материал не обладает центром симметрии в смысле упругих свойств — четырьмя тензорами. В последнем случае определяющие соотношения можно записать с помощью тензорно-блочной матрицы, состоящей из четырех тензоров модулей упругости. Поэтому для изучения свойств таких материалов встает вопрос об исследовании внутренней

Работа выполнена при поддержке гранта совместных исследований с соотечественниками Национального научного фонда им. Шота Руставели № DI-2016-41 (Грузия), а также Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00848-а).

структуры тензорно-блочной матрицы. Несмотря на то, что определяющие соотношения (обобщенный закон Гука) сформулированы давно, тензоры модулей упругости и тем более тензорно-блочная матрица пока еще недостаточно изучены, а при проектировании и создании композитных материалов, которые обладают высшей степени анизотропией, важно знать внутреннюю структуру тензоров модулей упругости и тензорно-блочной матрицы. Другими словами, если материал обладает центром симметрии, то важно определить собственные значения и собственные тензоры для тензоров модулей упругости, а если микрополярный материал не обладает центром симметрии в смысле упругих свойств, то для изучения физических свойств таких материалов нужно найти собственные значения и собственные тензорные столбцы тензорно-блочной матрицы тензоров модулей упругости. Следует отметить, что в микрополярной теории компоненты тензоров модулей упругости обладают меньшим числом свойств симметрии, чем компоненты тензора модулей упругости в классической теории. Кроме того, в микрополярной теории не все тензоры имеют одинаковые свойства. Этот факт, конечно, усложняет нахождение собственных значений и собственных тензоров для тензоров модулей упругости в микрополярной теории. Конечно, более сложным является задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы.

Собственные модули (значения) и собственные состояния (тензоры) для изотропного материала известны со времени Стокса (см. [7]). Для анизотропных материалов понятие собственных модулей и собственных состояний, под другими названиями, было введено Кельвином (см. [24, 44]) в середине прошлого века. Однако все это было надолго забыто и лишь примерно 30 лет назад исследователи вернулись к изучению этой проблемы. В частности, этой проблемой занимались Я. Рыхлевский [23, 24], Л. М. Минкевич [9], Л. А. Толоконников и Н. М. Матченко [25], К. С. Александров [1], К. Л. Лурье [6], А. И. Чанышев [28, 29], А. Ф. Ревуженко, А. И. Чанышев и Е. И. Шемякин [22], Н. И. Остросаблин [14–17] (см. также [30, 32, 33, 39–43] и др). Кроме того, заинтересованного читателя отсылаем к докторской диссертации Н. И. Остросаблина [17], в списке литературы которой приведены работы перечисленных выше исследователей и многое др., а также к докторской диссертации И. Н. Матченко [8] и работам автора [11, 12].

Следует отметить, что Н. И. Остросаблин довольно полно изучил внутреннюю структуру классического тензора модулей упругости, дал классификацию анизотропных классических упругих материалов, а также исследовал много других важных проблем, которые отражены в его докторской диссертации. Отметим также, что задачу о нахождении у тензора любого четного ранга собственных значений и собственных тензоров рассматривал И. Н. Векуа (см. [2], а также [10, 11]). Понятие собственных упругих состояний нашло применение в построении теории пластичности (см. [18, 20]) и теории течения (см. [19] и др). Работы по этой проблеме для микрополярных материалов, кроме [11, 12], автору не известны.

1. О ТЕНЗОРАХ МОДУЛЯ $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с тензорами модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и носящие вспомогательный характер при дальнейшем изложении материала. Здесь $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — множество действительных тензоров ранга $2p$, p — некоторое неотрицательное целое число, Ω — некоторая область n -мерного риманова пространства $\mathbb{R}^n$. Следовательно, $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_p(\Omega)$ (множество действительных тензоров ранга p) являются модулями над кольцом скаляров $\mathbb{R}_0(\Omega)$ (множество действительных тензоров нулевого ранга), т.е. $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_p(\Omega)$ представляют $\mathbb{R}_0(\Omega)$ -модуль (см. [2, 11, 13, 34, 36–38]). Тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ можно представить в различных мультибазисах. Например, если ${}^{2p}\mathbf{A}$ — тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, то он может иметь различные представления:

$${}^{2p}\mathbf{A} = A^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}^{j_1 j_2 \dots j_p} = A^{i \cdot}_{\cdot j} \mathbf{R}_i \mathbf{R}^j, \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} &= \mathbf{r}_{i_1} \mathbf{r}_{i_2} \dots \mathbf{r}_{i_p}, \quad \mathbf{R}^{j_1 j_2 \dots j_p} = \mathbf{r}^{j_1} \mathbf{r}^{j_2} \dots \mathbf{r}^{j_p}, \quad i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n}, \\ \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}^t &= \delta_s^t, \quad s, t = \overline{1, n}, \quad i = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}, \quad j = \{j_1, j_2, \dots, j_p\}, \\ \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}^j &= \delta_i^j, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad N = n^p; \end{aligned}$$

здесь δ_i^j — символ Кронекера, $\overset{p}{\otimes}$ — знак внутреннего p -произведения (см. [2, 11, 13, 34, 36–38]). Следовательно, $\mathbf{r}_s$ и $\mathbf{r}^t$ ($s, t = \overline{1, n}$) — биортонормальные системы базисов относительно скалярного произведения или внутреннего 1-произведения $\overset{1}{\otimes}$, $\mathbf{R}_i$ и $\mathbf{R}^j$ ($i, j = \overline{1, N}$) — биортонормальные системы мультибазисов или базисов модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ относительно операции внутреннего p -произведения (p -кратного внутреннего произведения).

Заметим, что в дальнейшем для тензоров модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ в зависимости от удобства применяются p -индексное и одноиндексное представления. Итак, если ${}^p\mathbf{U} \in \mathbb{R}_p(\Omega)$, то имеем

$${}^p\mathbf{U} = U_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}^{i_1 i_2 \dots i_p} = U^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = U_i \mathbf{R}^i = U^i \mathbf{R}_i, \quad i_1, i_2, \dots, i_p = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Отметим, что соотношениями (1.1) даны $(2p)$ -индексное и двуиндексное представления тензора ${}^{2p}\mathbf{A}$ модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. При этом в двуиндексном представлении ранг тензора сохраняется, что позволяет упростить связанные с ним выкладки. Отметим также, что нумерацию элементов множества числовых последовательностей $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$, $i_1, i_2, \dots, i_p = \overline{1, n}$, можно производить, например, следующим образом: если $i = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$, то

$$i = i_1 + \sum_{k=2}^p n^{k-1}(i_k - 1) \quad \text{или} \quad i = i_p + \sum_{k=1}^{p-1} n^k(i_{p-k} - 1), \quad i_1, i_2, \dots, i_p = \overline{1, n}.$$

Введем некоторые определения.

Определение 1.1. Тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, обозначаемый ${}^{2p}\mathbf{A}^T$ и определяемый формулой

$${}^{2p}\mathbf{A}^T = (A_{i,j}^i \mathbf{R}_i \mathbf{R}^j)^T = A_{i,j}^i \mathbf{R}^j \mathbf{R}_i = A_{i,j}^i \mathbf{R}_i \mathbf{R}^j = A^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{R}^{j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (1.2)$$

$$N = n^p, \quad i = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}, \quad j = \{j_1, j_2, \dots, j_p\}, \quad i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n},$$

называется *транспонированным* тензором к тензору ${}^{2p}\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$.

Определение 1.2. Тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, который равен своему транспонированному, называется *симметрическим*.

Определение 1.3. Тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, который коммутирует со своим транспонированным, называется *нормальным*.

На оснований определения 1.3 заключаем, что симметрический тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ является нормальным (см. ниже аналогичные приведенным выше определения для комплексных тензоров).

В модуле $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ помимо операций сложения тензоров и умножения на скаляр тензора можно вводить операции внутреннего p -произведения и внутреннего $(2p)$ -произведения (скалярного умножения) двух тензоров. Определим эти операции. Пусть ${}^{2p}\mathbf{A}$ и ${}^{2p}\mathbf{B}$ — два тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$.

Определение 1.4. *Внутренним p -произведением* тензоров ${}^{2p}\mathbf{A}$ и ${}^{2p}\mathbf{B}$ модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ называется тензор, обозначаемый ${}^{2p}\mathbf{A} \overset{p}{\otimes} {}^{2p}\mathbf{B}$, компоненты которого определяются следующим образом:

$$({}^{2p}\mathbf{A} \overset{p}{\otimes} {}^{2p}\mathbf{B})^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_p} = A^{i_1 i_2 \dots i_p}_{k_1 k_2 \dots k_p} B^{k_1 k_2 \dots k_p}_{j_1 j_2 \dots j_p}. \quad (1.3)$$

В силу (1.3), очевидно, имеем

$${}^{2p}\mathbf{A} \overset{p}{\otimes} {}^{2p}\mathbf{B} = A^{i_1 i_2 \dots i_p}_{k_1 k_2 \dots k_p} B^{k_1 k_2 \dots k_p}_{j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}^{j_1 j_2 \dots j_p}. \quad (1.4)$$

Из (1.3) видно, что при внутреннем p -произведении двух тензоров у каждого тензора, участвующего в этой операции, происходит p -кратное сокращение индексов. В этой связи во внутреннем p -произведении могут участвовать только те тензоры, ранг которых не меньше p . Кроме того, на основании (1.3) (см. также (1.4)) заключаем, что при внутреннем p -произведении тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ в результате получается тензор такого же ранга и типа, что и сомножители. Число p назовем *кратностью* внутреннего p -произведения. Если $p=0$, т.е. если при произведении тензоров не происходит сокращения индексов, то такое произведение называется *прямым произведением*.

В этом случае вместо ${}^{2p}\mathbf{A} \otimes {}^{2p}\mathbf{B}$ будем писать ${}^{2p}\mathbf{A} \otimes {}^{2p}\mathbf{AB}$. Если ${}^p\mathbf{B}$ и p — тензоры p -го ранга модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, то при внутреннем p -произведении этих тензоров часто будем опускать знак $\otimes$ и просто писать ${}^p\mathbf{A}^p\mathbf{AB}$ или $({}^p\mathbf{B}, {}^p)$. В этом случае внутреннее p -произведение назовем просто внутренним или скалярным произведением. Оно, конечно, выражается формулой

$${}^p\mathbf{A}^p\mathbf{AB} = ({}^p\mathbf{B}, {}^p) = A_{i_1 i_2 \dots i_p} B^{i_1 i_2 \dots i_p}. \quad (1.5)$$

Следовательно, аналогично (1.5) имеем

$${}^{2p}\mathbf{A} {}^{2p}\mathbf{B} = ({}^{2p}\mathbf{A}, {}^{2p}\mathbf{B}) = {}^{2p}\mathbf{A} \otimes {}^{2p}\mathbf{B} = A^{i_1 i_2 \dots i_p} {}_{j_1 j_2 \dots j_p} B_{i_1 i_2 \dots i_p} {}^{j_1 j_2 \dots j_p}.$$

Следует заметить, что если внутреннее произведение ${}^m\mathbf{A} {}^m\mathbf{B}$, где ${}^m\mathbf{A}$ и ${}^m\mathbf{B}$ — тензоры модуля $\mathbb{R}_m(\Omega)$, m — произвольное неотрицательное целое число, обращается в нуль для любого тензора ${}^m\mathbf{B}$, то ${}^m\mathbf{A} = 0$.

Определение 1.5. Два тензора ${}^m\mathbf{A}$ и ${}^m\mathbf{B}$ модуля $\mathbb{R}_m(\Omega)$, где m — произвольное неотрицательное целое число, называются *ортгоналными*, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $({}^m\mathbf{A}, {}^m\mathbf{B}) = {}^m\mathbf{A} \otimes {}^m\mathbf{B} = 0$.

Следует отметить, что в модуле $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ относительно введенной выше операции внутреннего p -произведения имеется единичный тензор. В самом деле, в модуле $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ единичным тензором $(2p)$ -го ранга является тензор

$${}^{2p}\mathbf{E} = \mathbf{r}_{i_1} \mathbf{r}_{i_2} \dots \mathbf{r}_{i_p} \mathbf{r}^{i_1} \mathbf{r}^{i_2} \dots \mathbf{r}^{i_p} = \mathbf{R}_i \mathbf{R}^i = g_i^j \mathbf{R}^i \mathbf{R}_j = g_{i_1}^{j_1} g_{i_2}^{j_2} \dots g_{i_p}^{j_p} \mathbf{r}^{i_1} \mathbf{r}^{i_2} \dots \mathbf{r}^{i_p} \mathbf{r}_{j_1} \mathbf{r}_{j_2} \dots \mathbf{r}_{j_p}, \quad (1.6)$$

$$i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Нетрудно доказать, что для любого тензора ${}^{2p}\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$

$${}^{2p}\mathbf{A} \otimes {}^{2p}\mathbf{E} = {}^{2p}\mathbf{E} \otimes {}^{2p}\mathbf{A} = {}^{2p}\mathbf{A}. \quad (1.7)$$

С помощью ${}^{2p}\mathbf{E}$ первый инвариант тензора ${}^{2p}\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ выражается формулой

$$I_1({}^{2p}\mathbf{A}) = {}^{2p}\mathbf{E} \otimes {}^{2p}\mathbf{A} = {}^{2p}\mathbf{A} \otimes {}^{2p}\mathbf{E} = ({}^{2p}\mathbf{E}, {}^{2p}\mathbf{A}) = A^{i_1 i_2 \dots i_p} {}_{i_1 i_2 \dots i_p}. \quad (1.8)$$

Определитель тензора равен определителю смешанных компонент этого тензора, т.е.

$$\det({}^{2p}\mathbf{A}) = \det(A^{i_1 i_2 \dots i_p} {}_{j_1 j_2 \dots j_p}) = \det(A^j_i), \quad (1.9)$$

$$i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad N = n^p.$$

Определитель тензора — инвариантная величина. Выражения для других классических инвариантов тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ легко получаются из приведенных ниже формул для инвариантов тензорно-блочной матрицы. Поэтому здесь с целью сокращения письма на этом останавливаться не будем; заинтересованного читателя отсылаем к работе [11].

2. ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ТЕНЗОРНЫХ СТОЛБЦОВ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ТЕНЗОРНО-БЛОЧНОЙ МАТРИЦЫ

В этом разделе рассмотрена задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы и построена полная система собственных тензорных столбцов симметрической тензорно-блочной матрицы, состоящей из четырех тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$.

Введем определение тензорно-блочной матрицы.

Определение 2.1. Блочная матрица, блоками которого являются тензоры (вообще говоря, различного ранга), называется *тензорно-блочной матрицей*.

Тензорно-блочную матрицу размеров $q \times m$ в общем случае можно представить в виде

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \dots & \mathbf{A}_{1m} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \dots & \mathbf{A}_{2m} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \dots & \mathbf{A}_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{q1} & \mathbf{A}_{q2} & \mathbf{A}_{q3} & \dots & \mathbf{A}_{qm} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где m и q — некоторые натуральные числа, а $\mathbf{A}_{kl}$, $k = \overline{1, q}$, $l = \overline{1, m}$ — произвольные тензоры, называемые *субтензорами* матрицы (2.1).

Определение 2.2. Матрица

$$\mathbb{M}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T & \mathbf{A}_{31}^T & \dots & \mathbf{A}_{q1}^T \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T & \mathbf{A}_{32}^T & \dots & \mathbf{A}_{q2}^T \\ \mathbf{A}_{13}^T & \mathbf{A}_{23}^T & \mathbf{A}_{33}^T & \dots & \mathbf{A}_{q3}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{1m}^T & \mathbf{A}_{2m}^T & \mathbf{A}_{3m}^T & \dots & \mathbf{A}_{qm}^T \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

называется *транспонированной* по отношению к (2.1) тензорно-блочной матрицей.

Определение 2.3. Тензорно-блочная матрица, которая совпадает со своей транспонированной, называется *симметрической*.

В дальнейшем представляет интерес изучить внутреннюю структуру такой тензорно-блочной матрицы (2.1), для которой $q = m$, а субтензоры являются тензорами одинакового четного ранга, например, модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, так как именно такие матрицы часто находят применение в приложении. В общем в виде такую матрицу можно записать в форме

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{R}^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{j_1 j_2 \dots j_p} = \mathbb{M}_i^j \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \dots & \mathbf{A}_{1m} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \dots & \mathbf{A}_{2m} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \dots & \mathbf{A}_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \mathbf{A}_{m3} & \dots & \mathbf{A}_{mm} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{A}_{kl} = A_{kl, j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}^{j_1 j_2 \dots j_p} = A_{kl, \cdot j}^{i \cdot} \mathbf{R}_i \mathbf{R}^j,$$

$$i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Заметим, что последовательность субтензоров $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}, \dots, \mathbf{A}_{mm}$ называется *главной диагональю* тензорно-блочной матрицы (2.3), а каждый тензор, стоящий на главной диагонали, называется *диагональным субтензором*. Заметим также, что матрица (2.3) состоит из квадратных тензоров, поэтому матрица ее компонент является квадратной.

Определение 2.4. Тензорно-блочная матрица, в которой диагональные субтензоры отличны от нуля, а остальные являются нулевыми тензорами, называется *тензорно-блочно-диагональной матрицей*.

На основании определения 2.4 заключаем, что тензорно-блочно-диагональная матрица имеет вид

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{mm} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Определение 2.5. Тензорно-блочная матрица, в которой все субтензоры ниже (выше) главной диагонали равны нулю, называется *верхней* или *правой* (соответственно, *нижней* или *левой*) тензорно-блочно-треугольной матрицей.

Правая и левая тензорно-блочно-треугольные матрицы представляются соответственно в форме

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \dots & \mathbf{A}_{1m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \dots & \mathbf{A}_{2m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} & \dots & \mathbf{A}_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{mm} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \mathbf{A}_{m3} & \dots & \mathbf{A}_{mm} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

В матрицах (2.4) и (2.5) символ $\mathbf{0}$ обозначает нулевой тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Этот символ применяется и в дальнейшем для обозначения нулевого тензора различного ранга с соответствующей оговоркой.

Нетрудно заметить, что компоненты матриц (2.3)–(2.5) при замене системы координат будут меняться так же, как и компоненты тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Кроме того, они состоят из m^2 тензоров; в этой связи будем их называть тензорно-блочной матрицей ранга $(2p)$ и размеров $m \times m$. Нетрудно убедиться в том, что множество таких тензорно-блочных матриц образует модуль над кольцом скаляров. Обозначим этот модуль через $\mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$; тогда можно написать $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$. Конечно, для модуля, состоящего из тензорно-блочных матриц ранга $(2p)$ и размеров $q \times m$ можно вводить обозначение $\mathbb{R}_{2p}^{q \times m}(\Omega)$. Заметим, что порядок матрицы компонент тензорно-блочной матрицы (2.3) равен mN , где $N = n^p$. В дальнейшем будем рассматривать тензорно-блочную матрицу вида (2.3) и будем считать, что она симметрична, т.е. верно равенство $\mathbb{M}^T \approx \mathbb{M}$, которое, очевидно, имеет место тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}_{ij} \approx \mathbf{A}_{ji}^T$.

Наряду с понятием тензорно-блочной матрицы целесообразно ввести в рассмотрение понятие тензорного столбца (тензорной строки).

Определение 2.6. Матрица-столбец (матрица-строка), элементами которого являются тензоры (вообще говоря, различного ранга), называется *тензорным столбцом* (*тензорной строкой*).

Тензорный столбец $\mathbb{U}$, элементами которого являются тензоры $\mathbf{U}_k = U_{k,i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}^{i_1 i_2 \dots i_p}$, $k = \overline{1, m}$, ранга p , очевидно, представится в виде

$$\mathbb{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_m)^T = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,i_1 i_2 \dots i_p} \\ U_{2,i_1 i_2 \dots i_p} \\ \vdots \\ U_{m,i_1 i_2 \dots i_p} \end{pmatrix} \mathbf{R}^{i_1 i_2 \dots i_p}. \quad (2.6)$$

Легко видеть, что тензорные столбцы вида (2.6) образуют модуль, который обозначим через $\mathbb{R}_p^{m \times 1}(\Omega)$; тогда можем написать, что $\mathbb{U} \in \mathbb{R}_p^{m \times 1}(\Omega)$. Конечно, тензорные строки вида $\mathbb{V} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_m)$ также образуют модуль, который обозначим через $\mathbb{R}_p^{1 \times m}(\Omega)$.

Очевидно, тензорная строка — транспонированный тензорный столбец, а тензорный столбец — транспонированная тензорная строка. В этой связи ниже в основном речь будем вести о тензорном столбце, имея в виду, что все сказанное в равной мере относится и к тензорной строке.

Введем еще определения, аналогичные приведенным выше для тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ (см. [2, 11–13, 35–38]).

Определение 2.7. Пусть $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ — два тензорных столбца вида (2.6). Величина, определяемая формулой

$$(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \mathbb{U}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{V} = \sum_{k=1}^m \mathbf{U}_k \overset{p}{\otimes} \mathbf{V}_k = \sum_{k=1}^m U_{k,i_1 i_2 \dots i_p} V_k^{i_1 i_2 \dots i_p}, \quad (2.7)$$

где $\overset{p}{\otimes}$ — внутреннее p -произведение, называется *скалярным произведением* тензорных столбцов $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$.

Определение 2.8. Два тензорных столбца $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ называются *ортгоналичными*, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \mathbb{U}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{V} = 0$.

Определение 2.9. Нормой тензорного столбца $\mathbb{U}$ вида (2.6) называется величина

$$\|\mathbb{U}\| = \sqrt{(\mathbb{U}, \mathbb{U})} = \sqrt{\mathbb{U}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}} = \sqrt{\sum_{k=1}^m \mathbf{U}_k \overset{p}{\otimes} \mathbf{U}_k} = \sqrt{\sum_{k=1}^m U_{k, i_1 i_2 \dots i_p} U_k^{i_1 i_2 \dots i_p}}. \quad (2.8)$$

Теперь задачу на собственные значения тензорно-блочной матрицы (2.3) можно сформулировать следующим образом.

Задача. Найти все тензорные столбцы

$$\mathbb{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_m)^T = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_m \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U} = \lambda \mathbb{U}, \quad (2.10)$$

где λ — скаляр.

Следует отметить, что соотношения (2.7), (2.8) и (2.10) содержат две операции: матричное произведение и внутреннее p -произведение. Заметим также, что уравнение (2.10) всегда имеет тривиальное решение $\mathbb{U} = \mathbb{O}$, где $\mathbb{O}$ — нулевой тензорный столбец, состоящий из m нулевых тензоров ранга p . Кроме того, легко видеть, что собственный тензорный столбец определяется с точностью до постоянного множителя, и в связи с этим его всегда можно нормировать, т.е. всегда можно считать, что решение уравнения (2.10) удовлетворяет условиям

$$\mathbb{U} \neq \mathbb{O}, \quad \|\mathbb{U}\| = \sqrt{\mathbb{U}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}} = \sqrt{\sum_{k=1}^m \mathbf{U}_k \overset{p}{\otimes} \mathbf{U}_k} = \sqrt{\sum_{k=1}^m U_{k, i_1 i_2 \dots i_p} U_k^{i_1 i_2 \dots i_p}} = 1.$$

Если для некоторого скаляра λ уравнение (2.10) имеет нетривиальное решение $\mathbb{U}$, то λ называется *собственным значением* (числом) тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}$, а $\mathbb{U}$ — *собственным тензорным столбцом*, соответствующим собственному значению λ . Так как $\mathbb{M}^T = \mathbb{M}$, то легко доказать, что

$$\mathbb{U}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} = \lambda \mathbb{U}^T,$$

т.е. $\mathbb{U}^T$ — собственная тензорная строка для $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$, соответствующая собственному значению λ .

Определение 2.10. Симметрическая тензорно-блочная матрица $\mathbb{M}$ называется *положительно определенной*, если образуемая по ней квадратичная форма $\mathbb{U}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}$ положительна для любого отличного от нуля тензорного столбца $\mathbb{U}$.

Очевидно, результаты исследования внутренней структуры тензорно-блочной матрицы, состоящей из четырех тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, легко обобщить на случай матрицы (2.3). В этой связи в дальнейшем ограничимся рассмотрением тензорно-блочной матрицы вида

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ — тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Из сказанного выше относительно (2.3) следует, что (2.11) — тензорно-блочная матрица модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$. В дальнейшем, если противное не будет оговорено, в основном будем иметь дело с тензорно-блочной матрицей модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$. Итак, в дальнейшем запись $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ означает, что $\mathbb{M}$ — тензорно-блочная матрица, состоящая из четырех тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ или тензорно-блочная матрица модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$. Очевидно, транспонированная с (2.11) тензорно-блочная матрица имеет вид (см. также (2.2))

$$\mathbb{M}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D}^T \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Далее приведем некоторые определения и теоремы из [11, 12] (см. также [13, 36–38]) для тензорно-блочной матрицы модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ (в [11–13] этот модуль обозначен через $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$), а также перефразируем приведенные выше определения подходящим образом к рассматриваемому случаю.

Определение 2.11. Тензорно-блочная матрица называется *левой* или *нижней* (соответственно, *правой* или *верхней*) *треугольной* [унитреугольной], если соответствующая ей блочная матрица матриц компонент составляющих тензоров — левая или нижняя (правая или верхняя) треугольная [унитреугольная] матрица.

В силу определения 2.11 матрица

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ — тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, является левой треугольной (унитреугольной) матрицей модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, если матрицы компонент $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ — левые треугольные (унитреугольные), а матрица

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{0}$ и $\mathbf{D}$ — тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, является правой треугольной (унитреугольной) матрицей модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, если матрицы компонент $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ — правые треугольные (унитреугольные) матрицы.

Определение 2.12. Матрица вида

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{0}$ и $\mathbf{D}$ — тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, называется *тензорно-блочно-диагональной* матрицей модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$.

Определение 2.13. *Определителем* тензорно-блочной матрицы называется определитель блочной матрицы смешанных компонент составляющих тензоров.

Определение 2.14. Тензорно-блочная матрица называется *невыврожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

На основании определения 2.11 заключаем, что если в (2.13) тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ — левые треугольные (унитреугольные), а $\mathbf{C}$ — квадратный тензор, то (2.13) — левая треугольная (унитреугольная) тензорно-блочная матрица. Кроме того, если в (2.14) тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ — правые треугольные (унитреугольные), а $\mathbf{B}$ — квадратный тензор, то (2.14) — правая треугольная (унитреугольная) тензорно-блочная матрица.

В дальнейшем аналогично тензорно-блочной матрицы представляет интерес рассмотрение тензорного столбца, состоящего из тензоров одинакового ранга из некоторого модуля (см. (2.6)). Например, если тензорно-блочная матрица имеет вид (2.11), то тензорный столбец (тензорная строка) можно представить в виде

$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{W}^T = (\mathbf{U}, \mathbf{V}), \quad (2.16)$$

где $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — тензоры модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, т.е.

$$\mathbf{U} = U^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = U^i \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{V} = V^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = V^i \mathbf{R}_i, \quad i_1, i_2, \dots, i_p = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Следовательно, аналогично тензорно-блочной матрице (2.11) можно сказать, что тензорный столбец (тензорная строка) (2.16) имеет ранг p и размеры 2×1 (1×2). Кроме того, легко усмотреть, что множество тензорных столбцов (тензорных строк) типа (2.16) над кольцом скаляров образует модуль, который обозначим через $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$. Неоднократно применяемая в дальнейшем

запись $W \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ означает, что W — тензорный столбец, составленный из двух тензоров модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ или просто W — тензорный столбец модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$. То же самое относится и к тензорным строкам. В частности, тензорная строка ранга p и размеров 1×2 — элемент модуля $\mathbb{R}_p^{1 \times 2}(\Omega)$.

Определение 2.15. Скалярным произведением двух тензорных столбцов $W_1 \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ и $W_2 \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ называется выражение

$$(W_1, W_2) = W_1^T \overset{p}{\otimes} W_2 = (U_1, V_1) \overset{p}{\otimes} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = U_1 \overset{p}{\otimes} U_2 + V_1 \overset{p}{\otimes} V_2. \quad (2.17)$$

Определение 2.16. Два тензорных столбца называются *ортгональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Определение 2.17. Нормой тензорного столбца $W \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ называется величина

$$\|W\| = \sqrt{(W, W)} = \sqrt{U \overset{p}{\otimes} U + V \overset{p}{\otimes} V}. \quad (2.18)$$

Определение 2.18. Тензорный столбец называется *нормированным*, если его норма равна единице.

Определение 2.19. Система тензорных столбцов $W_1, W_2, \dots, W_m$ называется *ортонормированной*, если выполняются условия

$$(W_k, W_l) = W_k^T \overset{p}{\otimes} W_l = \delta_{kl}, \quad k, l = \overline{1, m}.$$

Определение 2.20. Две системы тензорных столбцов $W_1, W_2, \dots, W_m$ и $W^1, W^2, \dots, W^m$, $1 \leq m \leq 2N$, модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ называются *биортонормальными*, если выполняются условия

$$(W_k, W^l) = W_k^T \overset{p}{\otimes} W^l = \delta_k^l, \quad k, l = \overline{1, m}, \quad 1 \leq m \leq 2N.$$

Заметим, что биортонормальную систему для данной линейно независимой системы тензорных столбцов можно построить таким же образом, как и для некоторой линейно независимой системы тензоров (см. [2, 11, 12, 35]). В частности, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Для всякой линейно независимой системы тензорных столбцов модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ существует биортонормальная система.

На доказательстве этой теоремы останавливаться не будем. Она доказывается совершенно аналогично подобной теореме для линейно независимой системы тензоров (см. [2, 11, 34]).

Определение 2.21. Симметричная тензорно-блочная матрица $M \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ называется *положительно определенной*, если образуемая из нее квадратичная форма

$$(W, M \overset{p}{\otimes} W) = W^T \overset{p}{\otimes} M \overset{p}{\otimes} W$$

положительна для любого отличного от нуля тензорного столбца $W \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$.

На основании определения 2.21 заключаем, что матрица компонент составляющих тензоров положительно-определенной тензорно-блочной матрицы положительно определена, откуда в свою очередь следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.2. Диагональные субтензоры положительно-определенной тензорно-блочной матрицы положительно определены.

2.1. Задача на собственные значения для $M \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$. Для некоторого $M \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ найти все тензорные столбцы $W \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнению

$$M \overset{p}{\otimes} W = \lambda W \quad (2.19)$$

где λ — скаляр.

Уравнение (2.19) всегда имеет тривиальное решение $W = \mathbb{O}$, где $\mathbb{O} \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ — нулевой тензорный столбец ($\mathbb{O} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})^T$). В дальнейшем, говоря о решении уравнения (2.19), будем иметь

в виду только нетривиальные решения $\mathbb{W} \neq \mathbb{O}$. Кроме того, поскольку собственный тензорный столбец определяется с точностью до постоянного множителя, то его всегда можно нормировать. Поэтому в дальнейшем, говоря о решении уравнения (2.19) (см. также (2.10)), будем иметь в виду *нетривиальные нормированные решения*.

Если для некоторого λ уравнение (2.19) имеет решение $\mathbb{W}$, то λ называется *собственным значением (числом)* тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, а $\mathbb{W} \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ — *собственным тензорным столбцом*, соответствующим собственному значению λ .

Естественно, можно рассматривать и следующую задачу: для некоторого $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ найти все тензорные строки

$$\mathbb{W}' = (\mathbf{U}', \mathbf{V}') \quad (2.20)$$

модуля $\mathbb{R}_p^{1 \times 2}(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} = \mu \mathbb{W}' \quad (2.21)$$

где μ — скаляр.

Если уравнение (2.21) для некоторого μ имеет нетривиальное решение $\mathbb{W}'$, то μ называется *собственным значением (числом)* тензорно-блочной матрицы (2.11), а $\mathbb{W}'$ — *собственной тензорной строкой*, соответствующей собственному значению μ .

Заметим, что в общем случае $\lambda = \mu$, а $\mathbb{W}' \neq \mathbb{W}^T$. Однако, если $\mathbb{M}^T = \mathbb{M}$, то $\mathbb{W}' = \mathbb{W}^T$. Вообще говоря, имеют место следующие утверждения.

Предложение 2.1. *Транспонированный (ая) собственный (ая) тензорный столбец (тензорная строка) тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}$ является собственной (ым) тензорной строкой (тензорным столбцом) транспонированной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}^T$.*

Предложение 2.2. *Если тензорно-блочная матрица $\mathbb{M}$ симметрическая ($\mathbb{M}^T = \mathbb{M}$), то транспонированный собственный (ая) тензорный столбец (тензорная строка) в то же время является собственной (ым) тензорной строкой (тензорным столбцом).*

Сформулируем еще несколько утверждений, касающихся собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы (см. [11–13, 36–38]).

Предложение 2.3. *Если λ и λ' — два различных собственных значения тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}$, то соответствующие им любые два собственных тензорных столбца $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'$ линейно независимы.*

Доказательство. Допустим противное: пусть $\mathbb{W} = \alpha \mathbb{W}'$, где α — скаляр. Тогда имеем

$$\lambda \mathbb{W} = \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \alpha \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}' = \alpha \lambda' \mathbb{W}' = \lambda' \mathbb{W}.$$

Так как $\mathbb{W} \neq \mathbb{O}$, то отсюда следует, что $\lambda = \lambda'$, противоречие. Предложение 2.3 доказано. $\square$

Теорема 2.3. *Собственные тензорные столбцы тензорно-блочной матрицы, соответствующие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.*

Теорема 2.3 доказывается при помощи предложения 2.3 методом математической индукции.

Теорема 2.4. *Если λ и λ' — два различных собственных значения симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}$, то соответствующие им любые два собственных тензорных столбца $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'$ ортогональны.*

Доказательство. На основании определения собственного тензорного столбца и предложения 2.2 имеем

$$\mathbb{W}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}' = \lambda \mathbb{W}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}' = \lambda(\mathbb{W}, \mathbb{W}') = \lambda' \mathbb{W}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}' = \lambda'(\mathbb{W}, \mathbb{W}').$$

Отсюда находим $(\lambda - \lambda')(\mathbb{W}, \mathbb{W}') = 0$. Так как $\lambda \neq \lambda'$, то из последнего равенства получим $(\mathbb{W}, \mathbb{W}') = 0$, что требовалось доказать. $\square$

Теорема 2.5. *Собственные тензорные столбцы симметрической тензорно-блочной матрицы, соответствующие попарно различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

Теорему 2.5 можно доказать при помощи теоремы 2.4 методом математической индукции.

Теорема 2.6. *Собственные значения положительно определенной симметричной тензорно-блочной матрицы положительны.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{W}$ — нормированный собственный тензорный столбец положительно определенной симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}$, соответствующий собственному значению λ . Тогда на основании определения 2.18 и предложения 2.2 имеем

$$0 < \mathbb{W}^T \otimes^p \mathbb{M} \otimes^p \mathbb{W} = \lambda \mathbb{W}^T \otimes^p \mathbb{W} = \lambda(\mathbb{W}, \mathbb{W}) = \lambda \|\mathbb{W}\|^2 = \lambda,$$

что требовалось доказать. $\square$

Нетрудно заметить, что уравнение (2.19) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} - \lambda \mathbf{E} \end{pmatrix} \otimes^p \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \iff (\mathbb{M} - \lambda \mathbb{E}) \otimes^p \mathbb{W} = \mathbf{0}, \quad (2.22)$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор (1.6) ранга $2p$, а $\mathbb{E}$ — единичная тензорно-блочная матрица вида

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i^j \mathbf{R}^i \mathbf{R}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & g_j^i \mathbf{R}_i \mathbf{R}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i^j & 0 \\ 0 & g_j^i \end{pmatrix} \mathbf{R}^i \mathbf{R}_j, \quad i, j = \overline{1, N}; \quad (2.23)$$

здесь $\mathbf{0}$ — нулевой тензор ранга $2p$.

Видно, что тензорное уравнение (2.22) представляет собой однородную систему $2N$ ($N = n^p$) уравнений относительно $2N$ неизвестных (компонент двух тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$), которая должна иметь нетривиальное решение. Для существования нетривиального решения системы уравнений (2.22) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е.

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} - \lambda \mathbf{E} \end{pmatrix} = 0 \iff \det(\mathbb{M} - \lambda \mathbb{E}) = 0. \quad (2.24)$$

Легко видеть, что (2.24) — алгебраическое уравнение степени $2N$ относительно λ , называемое *характеристическим уравнением* тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$. Если $\mathbb{M}$ — положительно определенная симметрическая тензорно-блочная матрица, то в силу теоремы 2.6 ее характеристическое уравнение (2.24) имеет $2N$ положительных корней (собственных значений), если каждый корень учитывать столько раз, какова его кратность.

Далее приведем еще некоторые определения и теоремы применительно к тензорно-блочной матрице (см. [11, 13, 36, 37]; аналогичные вопросы для матриц см. в [3]).

Определение 2.22. Действительная тензорно-блочная матрица называется *нормальной*, если она коммутирует со своей транспонированной.

На основании этого определения заключаем, что действительные симметрические, кососимметрические и ортогональные тензорно-блочные матрицы, а также единичная тензорно-блочная матрица суть нормальные тензорно-блочные матрицы.

Определение 2.23. Ортонормированная система собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, состоящая из $2N$ тензорных столбцов, называется *полной ортонормированной системой собственных тензорных столбцов*.

Определение 2.24. Будем говорить, что $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ — *тензорно-блочная матрица простой структуры*, если она имеет $2N$ линейно независимых собственных тензорных столбцов.

Предложение 2.4. *Тензорно-блочная матрица имеет простую структуру, если все корни ее характеристического уравнения различны между собой.*

Заметим, что обратное утверждение неверно, т.е. существуют тензорно-блочные матрицы простой структуры, характеристические уравнения которых имеют кратные корни, например, единичная тензорно-блочная матрица.

Теорема 2.7. *Действительная симметрическая (нормальная) тензорно-блочная матрица всегда имеет полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов.*

Заметим, что теорема 2.7 верна для любой действительной симметрической тензорно-блочной матрицы, а также для нормальной комплексной тензорно-блочной матрицы.

В силу теоремы 2.7 положительно определенная симметрическая тензорно-блочная матрица $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ всегда имеет полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов, а ее собственные значения на основании теоремы 2.6 положительны.

Обозначим через $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$, полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов положительно определенной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, отвечающие собственным значениям λ_k , $k = \overline{1, 2N}$. Тогда матрицу $\mathbb{M}$ можно представить в каноническом виде

$$\mathbb{M} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \mathbb{W}_k \mathbb{W}_k^T = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{V}_k \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k) = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k \\ \mathbf{V}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

где, конечно, имеют место условия ортонормированности

$$(\mathbb{W}_k, \mathbb{W}_l) = \mathbb{W}_k^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_l = \mathbf{U}_k \overset{p}{\otimes} \mathbf{U}_l + \mathbf{V}_k \overset{p}{\otimes} \mathbf{V}_l = \delta_{kl}, \quad k, l = \overline{1, 2N}. \quad (2.26)$$

Сравнивая (2.11) с (2.25), имеем

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k, \quad \mathbf{B} = \mathbf{C}^T = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k, \quad \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k. \quad (2.27)$$

Следует отметить, что размерности введенных выше модулей $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ равны $2N$ и $4N^2$ соответственно, тогда как размерности модулей $\mathbb{R}_p(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ равны N и N^2 соответственно. Следовательно, в модуле $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ существует $2N$ линейно независимых тензорных столбцов, образующих базис этого модуля, а в модуле $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ — $4N^2$ линейно независимых тензорно-блочных матриц, составляющих базис этого модуля. Из решения характеристического уравнения (2.24), например, для тензорно-блочной матрицы простой структуры $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ получаем $2N$ линейно независимых собственных тензорных столбцов, которые можно принять в качестве базиса модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$. Если $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ — симметрическая тензорно-блочная матрица, то ее полная система ортонормированных собственных тензорных столбцов будет ортонормированным базисом модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$. Значит, любой тензорный столбец модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ можно разложить по упомянутым выше базисам. Зная базис модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ (меньшей размерности), можно построить базис модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ (большой размерности) таким же образом, как с помощью базиса модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ можно построить базис модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ (см. [2, 11, 13, 34, 37]). В частности, для тензорного произведения тензорного столбца модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ на тензорную строку модуля $\mathbb{R}_p^{1 \times 2}(\Omega)$ получим тензорно-блочную матрицу модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$. Следовательно, если каждый тензорный столбец некоторого базиса модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ умножить тензорно на каждую из тензорных строк, получаемых транспонированием всех тензорных столбцов рассматриваемого базиса, то получим $4N^2$ тензорно-блочных матриц, составляющих базис модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$. Итак, если тензорные столбцы $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$, образуют, например, ортонормированный базис модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$, где в качестве $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$, можно рассматривать и полную систему ортонормированных собственных тензорных столбцов некоторой симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, то тензорно-блочные матрицы $\mathbb{W}_k \mathbb{W}_l^T$, $k, l = \overline{1, 2N}$, составят базис модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, и нетрудно убедиться в том, что единичная тензорно-блочная матрица $\mathbb{E} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ (см. также (2.23)) можно представить в виде

$$\mathbb{E} = \sum_{k=1}^{2N} \mathbb{W}_k \mathbb{W}_k^T = \sum_{k=1}^{2N} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{V}_k \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k) = \sum_{k=1}^{2N} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k \\ \mathbf{V}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k \end{pmatrix}; \quad (2.28)$$

если тензорные столбцы $\mathbb{Z}_k = (\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$, образуют некоторый базис модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$, а тензорные столбцы $\mathbb{Z}^l = (\mathbf{X}^l, \mathbf{Y}^l)^T$, $l = \overline{1, 2N}$, образуют биортонормальный базис, то тензорно-

блочные матрицы $\mathbb{Z}_k \mathbb{Z}^{lT}$, $k, l = \overline{1, 2N}$, будут служить базисом модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$; при этом единичная тензорно-блочная матрица $\mathbb{E} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ представится в виде

$$\mathbb{E} = \sum_{k=1}^{2N} \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}^{kT} = \sum_{k=1}^{2N} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_k \\ \mathbf{Y}_k \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{X}^k, \mathbf{Y}^k) = \sum_{k=1}^{2N} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_k \mathbf{X}^k & \mathbf{X}_k \mathbf{Y}^k \\ \mathbf{Y}_k \mathbf{X}^k & \mathbf{Y}_k \mathbf{Y}^k \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Заметим, что в последнем соотношении можно жонглировать индексами.

Зная представления (2.23), (2.28) и (2.29) единичной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{E} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, не доставляет труда дать каноническое представление тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ простой структуры, а также обратной к ней матрицы. Отметим, что представление обратной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}^{-1} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ можно получить также на основании доказываемой ниже теоремы. Прежде чем заниматься этими представлениями, напомним, что если $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ — невырожденная тензорно-блочная матрица, то существует единственная обратная к ней тензорно-блочная матрица $\mathbb{M}^{-1}$, удовлетворяющая соотношению (матрица компонент обратной тензорно-блочной матрицы — обратная к матрице компонент исходной тензорно-блочной матрицы)

$$\mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{M}^{-1} = \mathbb{M}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} = \mathbb{E}, \quad (2.30)$$

причем справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8. *Если $\mathbb{W}$ ($\mathbb{W}'$) — собственный тензорный столбец (соответственно, собственная тензорная строка) из модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ (соответственно, $\mathbb{R}_p^{1 \times 2}(\Omega)$) невырожденной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, соответствующий (-ая) собственному значению λ , то он (она) в то же время будет собственным тензорным столбцом (собственной тензорной строкой) обратной к $\mathbb{M}$ тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}^{-1}$, соответствующим (-ей) собственному значению λ^{-1} .*

Доказательство. Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ (соответственно, $\mathbb{W}' \in \mathbb{R}_p^{1 \times 2}(\Omega)$) — собственный тензорный столбец (собственная тензорная строка) невырожденной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, соответствующий (ая) собственному значению λ . Тогда имеем

$$\mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{W}, \quad \text{соответственно,} \quad \mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} = \lambda \mathbb{W}'. \quad (2.31)$$

Умножая обе части первого равенства (2.31) слева на $\mathbb{M}^{-1}$, в силу (2.30) получим

$$\mathbb{M}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{M}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} \iff \mathbb{E} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{M}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} \iff \mathbb{W} = \lambda \mathbb{M}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}.$$

Отсюда находим

$$\mathbb{M}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda^{-1} \mathbb{W}, \quad \mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{M}^{-1} = \lambda^{-1} \mathbb{W}', \quad (2.32)$$

где второе соотношение получено аналогично первому. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что если в теореме 2.8 заменить $\mathbb{W}'$ на $\mathbb{W}^T$, то получим аналогичную теорему для невырожденной симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$.

На основании теоремы 2.8 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.9. *Собственные (главные) значения обратной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}^{-1}$ равны обратным значениям собственных (главных) значений исходной невырожденной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}$, а собственные тензорные столбцы и строки $\mathbb{M}^{-1}$ и $\mathbb{M}$ совпадают.*

В силу теоремы 2.9 легко видеть, что для обратной к (2.25) тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}^{-1}$ имеет место представление

$$\mathbb{M}^{-1} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^{-1} \mathbb{W}_k \mathbb{W}_k^T = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{V}_k \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k) = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k \\ \mathbf{V}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Теперь нетрудно доказать следующую теорему для тензорно-блочных матриц $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$.

Теорема 2.10. Если $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ — тензорно-блочная матрица простой структуры, то она имеет полные системы [нормированных или ненормированных] собственных тензорных столбцов и тензорных строк, и если найдена полная система [нормированных или ненормированных] собственных тензорных столбцов (строк), а затем построена биортонормальная для нее система тензорных столбцов (строк), то транспонируя каждый тензорный столбец (каждую тензорную строку) в построенной биортонормальной системе тензорных столбцов (строк), получим полную систему тензорных строк (столбцов).

Докажем теорему 2.10 в том случае, когда найдена полная система ненормированных собственных тензорных столбцов для $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, так как остальные случаи доказываются аналогично. В частности, докажем следующую теорему.

Теорема 2.11. Если $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ — тензорно-блочная матрица простой структуры и $\mathbb{Z}_k = (\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$, — ее полная система собственных тензорных столбцов, соответствующая системе собственных значений λ_k , $k = \overline{1, 2N}$, а $\mathbb{Z}^l = (\mathbf{X}^l, \mathbf{Y}^l)^T$, $l = \overline{1, 2N}$, — биортонормальная для нее система тензорных столбцов, то система $\mathbb{Z}^{lT} = (\mathbf{X}^l, \mathbf{Y}^l)$, $l = \overline{1, 2N}$, является полной системой собственных тензорных строк, а тензорно-блочная матрица $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ имеет представление

$$\mathbb{M} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_k^T = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{X}_k \\ \mathbf{Y}_k \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{X}^k, \mathbf{Y}^k) = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{X}_k \mathbf{X}^k & \mathbf{X}_k \mathbf{Y}^k \\ \mathbf{Y}_k \mathbf{X}^k & \mathbf{Y}_k \mathbf{Y}^k \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Доказательство. Так как полная система собственных тензорных столбцов $\mathbb{Z}_k \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$, $k = \overline{1, 2N}$, тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ и биортонормальная для нее система тензорных столбцов $\mathbb{Z}^l$, $l = \overline{1, 2N}$, являются биортонормальными базисами модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$, то единичная тензорно-блочная матрица $\mathbb{E} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ имеет представление (2.29), с учетом которого получаем

$$\mathbb{M} = \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{E} = \sum_{k=1}^{2N} \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_k^T = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_k^T.$$

Таким образом,

$$\mathbb{M} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_k^T,$$

и справедливость представления (2.34) доказана.

Умножая теперь обе части последнего соотношения слева на $\mathbb{Z}^{lT}$ и учитывая биортонормальность систем $\mathbb{Z}_k$, $k = \overline{1, 2N}$, и $\mathbb{Z}^l$, $l = \overline{1, 2N}$, находим

$$\mathbb{Z}^{lT} \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \mathbb{Z}^{lT} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_k^T = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \delta_k^l \mathbb{Z}^{lT} = \lambda_l \mathbb{Z}^{lT}, \quad l = \overline{1, 2N};$$

это означает, что система $\mathbb{Z}^{lT}$, $l = \overline{1, 2N}$, — полная система собственных тензорных строк для $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$. Теорема доказана. $\square$

Имея для тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ представление (2.34), нетрудно доказать, что ее степень для любого целого числа α имеет вид

$$\mathbb{M}^\alpha = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^\alpha \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_k^T. \quad (2.35)$$

В частности, при $\alpha = -1$ и $\alpha = 0$ имеем

$$\mathbb{M}^{-1} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^{-1} \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_k^T, \quad \mathbb{E} = \mathbb{M}^0 = \sum_{k=1}^{2N} \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_k^T. \quad (2.36)$$

При $\alpha = 1$ из (2.35) следует (2.34). Первая формула (2.36) была доказана выше (см. теорему 2.9), вторую формулу (2.36) можно доказать непосредственно, а для остальных значений α справедливость (2.35) доказывается методом математической индукции.

Докажем вторую формулу (2.36). В силу (2.30), представлений для $\mathbb{M}$ (см. (2.34)) и $\mathbb{M}^{-1}$ (см. первую формулу (2.36)), биортонormalности систем $\mathbb{Z}_k$, $k = \overline{1, 2N}$, и $\mathbb{Z}^l$, $l = \overline{1, 2N}$, а также представления единичной тензорно-блочной матрицы (2.29) находим

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{M}^{-1} &= \sum_{k=1, l}^{2N} \lambda_k \lambda_l^{-1} \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}^{kT} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Z}_l \mathbb{Z}^{lT} = \sum_{k=1, l}^{2N} \lambda_k \lambda_l^{-1} \mathbb{Z}_k \delta_l^k \mathbb{Z}^{lT} = \\ &= \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \lambda_k^{-1} \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}^{kT} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^0 \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}^{kT} = \mathbb{M}^0 = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^0 \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}^{kT} = \sum_{k=1}^{2N} \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}^{kT} = \mathbb{E}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\mathbb{M}^0 = \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{M}^{-1} = \mathbb{E} = \sum_{k=1}^{2N} \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}^{kT}. \quad (2.37)$$

Аналогично (2.37) доказывается соотношение

$$\mathbb{M}^0 = \mathbb{M}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} = \mathbb{E} = \sum_{k=1}^{2N} \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}^{kT}.$$

Итак, справедливость второй формулы (2.36) доказана.

Запишем теперь характеристическое уравнение (2.24) в развернутом виде:

$$\lambda^{2N} - I_1(\mathbb{M})\lambda^{2N-1} + \dots + (-1)^s I_s(\mathbb{M})\lambda^{2N-s} + \dots + (-1)^{2N} I_{2N}(\mathbb{M}) = 0; \quad (2.38)$$

здесь $I_{2N}(\mathbb{M}) = \det \mathbb{M}$. Нетрудно доказать, что имеет место следующая теорема.

Теорема 2.12 (теорема Гамильтона—Кэли). *Всякая тензорно-блочная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению.*

В силу этой теоремы справедливо соотношение

$$\mathbb{M}^{2N} - I_1(\mathbb{M})\mathbb{M}^{2N-1} + \dots + (-1)^s I_s(\mathbb{M})\mathbb{M}^{2N-s} + \dots + (-1)^{2N} I_{2N}(\mathbb{M})\mathbb{E} = 0.$$

Теорема 2.12 доказывается аналогично теореме, приведенной в [11, гл. 2] (см. также [13, 34, 37, 38]).

Отметим, что инварианты тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ в уравнении (2.38) вычисляются аналогично инвариантам матрицы (см. [3, 4, 27]) или тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ (см. [11]) по формулам

$$S_k = I_k(\mathbb{M}) = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & s_{k-4} & s_{k-5} & \dots & s_1 & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & s_{k-4} & \dots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, 2N} \quad (2.39)$$

(см. [11–13, 36–38]), где $s_k = I_1(\mathbb{M}^k)$, $k = \overline{1, 2N}$, $\mathbb{M}^k = \underbrace{\mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \dots \overset{p}{\otimes} \mathbb{M}}_{k \text{ раз}}$, а первый инвариант для $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ определяется следующим образом:

$$I_1(\mathbb{M}) = I_1 \left(\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \right) = I_1(\mathbf{A} + \mathbf{D}) = I_1(\mathbf{A}) + I_1(\mathbf{D}). \quad (2.40)$$

Обратные к (2.39) соотношения представляются в виде (см. [11, 12])

$$s_k = I_1(\mathbb{M}^k) = \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2S_2 & S_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3S_3 & S_2 & S_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1)S_{k-1} & S_{k-2} & S_{k-3} & S_{k-4} & \dots & S_1 & 1 \\ kS_k & S_{k-1} & S_{k-2} & S_{k-3} & \dots & S_2 & S_1 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, 2N}. \quad (2.41)$$

Из (2.34) (см. также (2.25)) видно, что для задания тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, кроме $2N$ собственных значений λ_k , $k = \overline{1, 2N}$, необходимо задать $2N$ собственных тензорных столбцов $\mathbb{Z}_k$, $k = \overline{1, 2N}$. Заметим, что полная система собственных тензорных столбцов $\mathbb{Z}_k \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$, $k = \overline{1, 2N}$, и биортонормальная для нее система $\mathbb{Z}^l$, $l = \overline{1, 2N}$, в представлении $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ (см. (2.34)) удовлетворяют условиям биортонормальности (см. также (2.26))

$$(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}^l) = \mathbb{Z}_k^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{Z}^l = \mathbf{X}_k \overset{p}{\otimes} \mathbf{X}^l + \mathbf{Y}_k \overset{p}{\otimes} \mathbf{Y}^l = \delta_k^l, \quad k, l = \overline{1, 2N}. \quad (2.42)$$

Заметим также, что если построена полная система собственных тензорных столбцов $\mathbb{Z}_k \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$, $k = \overline{1, 2N}$, тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ простой структуры, то в силу теоремы 2.1 для нее всегда можно построить биортонормальную систему $\mathbb{Z}^l$, $l = \overline{1, 2N}$ (тензоры $\mathbb{Z}^l$, $l = \overline{1, 2N}$, определяются с помощью тензоров $\mathbb{Z}_k$, $k = \overline{1, 2N}$) и на основании теоремы 2.11 матрицу $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ можно представить в виде (2.34). В этой связи можно сказать, что в соотношениях (2.42) неизвестными являются собственные тензорные столбцы $\mathbb{Z}_k \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$, $k = \overline{1, 2N}$. Так как $\mathbb{Z}_k = (\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$, то полная система собственных тензорных столбцов $\mathbb{Z}_k$, $k = \overline{1, 2N}$, задается при помощи $4N^2$ компонент тензоров $\mathbf{X}_k$ и $\mathbf{Y}_k$ модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, $k = \overline{1, 2N}$. Нетрудно видеть, что число соотношений в (2.42) равно $4N^2$, однако независимыми являются лишь $N(2N + 1)$ соотношений.

Рассмотрим теперь симметрическую тензорно-блочную матрицу $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, которая в силу теоремы 2.7 всегда имеет полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов и представляется в виде (2.25), где не все λ_k , $k = \overline{1, 2N}$, положительны (в силу теоремы 2.6 они положительны для положительно определенной тензорно-блочной матрицы). Кроме того, выполняются условия ортонормированности (2.26). Наша цель заключается в построении полной ортонормированной системы собственных тензорных столбцов для симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ в явном виде.

2.2. Построение собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы.

Из (2.25) видно, что для задания симметрической (не обязательно положительно определенной) тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, кроме $2N$ собственных значений λ_k , $k = \overline{1, 2N}$, необходимо задать $2N$ собственных тензорных столбцов $\mathbb{W}_k$, $k = \overline{1, 2N}$, которые образуют полную ортонормированную систему и, следовательно, удовлетворяют условиям ортонормированности (2.26). Нетрудно заметить, что число независимых соотношений в (2.26) равно $(2N + 1)N$, которые связывают между собой $4N^2$ компонент собственных тензорных столбцов $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)$, $k = \overline{1, 2N}$. Итак, независимыми (свободными) остаются $(2N - 1)N$ компонент (параметров), с помощью которых следует построить полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$. Рассмотрим следующие тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{11} &= \mathbf{e}_s \mathbf{U}_s = U_{st} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_t, & \mathbf{Q}_{12} &= \mathbf{e}_s \mathbf{V}_s = V_{st} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_t, \\ \mathbf{Q}_{21} &= \mathbf{e}_s \mathbf{U}_{N+s} = U_{N+st} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_t, & \mathbf{Q}_{22} &= \mathbf{e}_s \mathbf{V}_{N+s} = V_{N+st} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_t, \quad s, t = \overline{1, 2N}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

где $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$, а $\mathbf{e}_s$, $s = \overline{1, N}$, — ортонормированный базис модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, т.е.

$$\mathbf{e}_s \overset{p}{\otimes} \mathbf{e}_t = \delta_{st}, \quad s, t = \overline{1, N}.$$

Далее с помощью тензоров (2.43) построим следующую матрицу модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$:

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Если тензорные столбцы $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$, удовлетворяют условиям ортонормированности (2.26), то, учитывая (2.28), (2.43) и (2.44), нетрудно доказать, что тензорно-блочная матрица $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ (см. (2.44)) удовлетворяет условиям

$$\mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^T = \mathbb{Q}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q} = \mathbb{E}. \quad (2.45)$$

В силу (2.45) заключаем, что $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ — ортогональная тензорно-блочная матрица.

Нетрудно заметить, что условия ортонормированности (2.26) эквивалентны тензорному соотношению

$$\mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^T = \mathbb{E}. \quad (2.46)$$

Таким образом, ортогональная тензорно-блочная матрица (2.44) модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ имеет $4N^2$ компонент, которые связаны между собой тензорным соотношением (2.46), равносильным $(2N+1)N$ соотношениям (2.26) и, следовательно, среди $4N^2$ компонент независимыми остаются $(2N-1)N$, с помощью которых следует построить полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$. Применим теорему о представлении невырожденного квадратного тензора любого четного ранга в виде произведения левого треугольного и правого унитарного тензоров (см. [11, 13, 37, 38]), которую для невырожденной квадратной тензорно-блочной матрицы можно сформулировать следующим образом (см. [11, 12, 36]).

Теорема 2.13. *Для того чтобы квадратную невырожденную тензорно-блочную матрицу модуля $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ можно было представить в виде произведения левого треугольного (унитарного) и правого унитарного (треугольного) тензорно-блочных матриц, необходимо и достаточно, чтобы определители всех ведущих главных субтензоров этой тензорно-блочной матрицы (субматриц матриц компонент) были отличны от нуля.*

Заметим, что имеет место более общая теорема, получаемая из теоремы 2.13, если в формулировке заменить $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ на $\mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$, где m — произвольное натуральное число.

Если применить теорему 2.13 к ортогональной тензорно-блочной матрице (2.44) модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, то можно записать

$$\mathbb{Q} = \mathbb{L} \overset{p}{\otimes} \mathbb{R}, \quad (2.47)$$

где левая треугольная тензорно-блочная матрица $\mathbb{L}$ и правая унитарная тензорно-блочная матрица $\mathbb{R}$ представляются в виде

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & 0 \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ 0 & \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Нетрудно видеть, что соответствующие тензорам $\mathbb{L}$, $\mathbf{L}_{11}$, $\mathbf{L}_{21}$, $\mathbf{L}_{22}$ и $\mathbb{R}$, $\mathbf{R}_{11}$, $\mathbf{R}_{12}$, $\mathbf{R}_{22}$ матрицы L , L_{11} , L_{21} , L_{22} и R , R_{11} , R_{12} , R_{22} имеют следующий вид:

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

$$L_{11} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{N-1,1} & l_{N-1,2} & l_{N-1,3} & \dots & l_{N-1,N-1} & 0 \\ l_{N,1} & l_{N,2} & l_{N,3} & \dots & l_{N,N-1} & l_{N,N} \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

$$L_{21} = \begin{pmatrix} l_{N+1,1} & l_{N+1,2} & l_{N+1,3} & \dots & l_{N+1,N-1} & l_{N+1,N} \\ l_{N+2,1} & l_{N+2,2} & l_{N+2,3} & \dots & l_{N+2,N-1} & l_{N+2,N} \\ l_{N+3,1} & l_{N+3,2} & l_{N+3,3} & \dots & l_{N+3,N-1} & l_{N+3,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{2N-1,1} & l_{2N-1,2} & l_{2N-1,3} & \dots & l_{2N-1,N-1} & l_{2N-1,N} \\ l_{2N,1} & l_{2N,2} & l_{2N,3} & \dots & l_{2N,N-1} & l_{2N,N} \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

$$L_{22} = \begin{pmatrix} l_{N+1,N+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{N+2,N+1} & l_{N+2,N+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{N+3,N+1} & l_{N+3,N+2} & l_{N+3,N+3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{2N-1,N+1} & l_{2N-1,N+2} & l_{2N-1,N+3} & \dots & l_{2N-1,2N-1} & 0 \\ l_{2N,N+1} & l_{2N,N+2} & l_{2N,N+3} & \dots & l_{2N,2N-1} & l_{2N,2N} \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

$$R_{11} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & \dots & r_{1,N-1} & r_{1,N} \\ 0 & 1 & r_{23} & r_{24} & \dots & r_{2,N-1} & r_{2,N} \\ 0 & 0 & 1 & r_{34} & \dots & r_{3,N-1} & r_{3,N} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & r_{4,N-1} & r_{4,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & r_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

$$R_{12} = \begin{pmatrix} r_{1,N+1} & r_{1,N+2} & r_{1,N+3} & r_{1,N+4} & \dots & r_{1,2N-1} & r_{1,2N} \\ r_{2,N+1} & r_{2,N+2} & r_{2,N+3} & r_{2,N+4} & \dots & r_{2,2N-1} & r_{2,2N} \\ r_{3,N+1} & r_{3,N+2} & r_{3,N+3} & r_{3,N+4} & \dots & r_{3,2N-1} & r_{3,2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N-1,N+1} & r_{N-1,N+2} & r_{N-1,N+3} & r_{N-1,N+4} & \dots & r_{N-1,2N-1} & r_{N-1,2N} \\ r_{N,N+1} & r_{N,N+2} & r_{N,N+3} & r_{N,N+4} & \dots & r_{N,2N-1} & r_{N,2N} \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

$$R_{22} = \begin{pmatrix} 1 & r_{N+1,N+2} & r_{N+1,N+3} & r_{N+1,N+4} & \dots & r_{N+1,2N-1} & r_{N+1,2N} \\ 0 & 1 & r_{N+2,N+3} & r_{N+2,N+4} & \dots & r_{N+2,2N-1} & r_{N+2,2N} \\ 0 & 0 & 1 & r_{N+3,N+4} & \dots & r_{N+3,2N-1} & r_{N+3,2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & r_{2N-1,2N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Далее, тензоры $\mathbf{L}_{11}$, $\mathbf{L}_{21}$, $\mathbf{L}_{22}$, $\mathbf{R}_{11}$, $\mathbf{R}_{12}$, $\mathbf{R}_{22}$ представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{11} &= \mathbf{e}_s \mathbf{l}_{s\cdot}, & \mathbf{L}_{21} &= \mathbf{e}_s \mathbf{m}_{s\cdot}, & \mathbf{L}_{22} &= \mathbf{e}_s \mathbf{l}_{N+s\cdot} \\ \mathbf{R}_{11} &= \mathbf{e}_s \mathbf{r}_{s\cdot}, & \mathbf{R}_{12} &= \mathbf{e}_s \mathbf{n}_{s\cdot}, & \mathbf{R}_{22} &= \mathbf{e}_s \mathbf{r}_{N+s\cdot}, \quad s = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{s\cdot} &= \sum_{t=1}^s l_{st} \mathbf{e}_t, & \mathbf{m}_{s\cdot} &= \sum_{t=1}^N l_{N+s,t} \mathbf{e}_t, & \mathbf{l}_{N+s\cdot} &= \sum_{t=1}^s l_{N+s,N+t} \mathbf{e}_t, \quad s = \overline{1, N}, \\ \mathbf{r}_{s\cdot} &= \mathbf{e}_s + \sum_{t=s+1}^N r_{st} \mathbf{e}_t, & s &= \overline{1, N-1}, & \mathbf{r}_{N\cdot} &= \mathbf{e}_N, & \mathbf{n}_{s\cdot} &= \sum_{t=1}^N r_{s,N+t} \mathbf{e}_t, \quad s = \overline{1, N}, \\ \mathbf{r}_{N+s\cdot} &= \mathbf{e}_s + \sum_{t=s+1}^N r_{N+s,N+t} \mathbf{e}_t, & s &= \overline{1, N-1}, & \mathbf{r}_{2N\cdot} &= \mathbf{e}_N. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Учитывая (2.44) и (2.48), из (2.47) получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} \otimes \mathbf{R}_{11} & \mathbf{L}_{11} \otimes \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} \otimes \mathbf{R}_{11} & \mathbf{L}_{21} \otimes \mathbf{R}_{12} + \mathbf{L}_{22} \otimes \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix}.$$

В свою очередь, отсюда находим

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{11} &= \mathbf{L}_{11} \overset{p}{\otimes} \mathbf{R}_{11}, & \mathbf{Q}_{12} &= \mathbf{L}_{11} \overset{p}{\otimes} \mathbf{R}_{12}, \\ \mathbf{Q}_{21} &= \mathbf{L}_{21} \overset{p}{\otimes} \mathbf{R}_{11}, & \mathbf{Q}_{22} &= \mathbf{L}_{21} \overset{p}{\otimes} \mathbf{R}_{12} + \mathbf{L}_{22} \overset{p}{\otimes} \mathbf{R}_{22}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

В силу (2.43), (2.56) и (2.57) из (2.58) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_s &= \sum_{t=1}^s l_{st} \mathbf{r}_t, & \mathbf{U}_{N+s} &= \sum_{t=1}^N l_{N+s,t} \mathbf{r}_t, & \mathbf{V}_s &= \sum_{t=1}^s l_{st} \mathbf{n}_t, \\ \mathbf{V}_{N+s} &= \sum_{t=1}^N l_{N+s,t} \mathbf{n}_t + \sum_{t=1}^s l_{N+s,N+t} \mathbf{r}_{N+t}, & s &= \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Отметим, что системы тензоров

$$\mathbf{r}_{1\cdot}, \mathbf{r}_{2\cdot}, \dots, \mathbf{r}_{N\cdot}; \quad \mathbf{r}_{N+1\cdot}, \mathbf{r}_{N+2\cdot}, \dots, \mathbf{r}_{2N\cdot}; \quad \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N.$$

в (2.59) линейно независимы по отдельности.

Введем в рассмотрение тензорные столбцы

$$\mathbb{T}_s = (\mathbf{r}_s, \mathbf{n}_s)^T, \quad s = \overline{1, N}, \quad \mathbb{T}_t = (\mathbf{0}, \mathbf{r}_t)^T, \quad t = \overline{N+1, 2N}, \quad (2.60)$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой тензор ранга p , а $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{n}_s$ и $\mathbf{r}_{N+s}$ задаются формулами (2.57).

Нетрудно доказать, что система тензорных столбцов $\mathbb{T}_s$, $s = \overline{1, 2N}$, линейно независима. Следовательно, линейно независимы и подсистемы $\mathbb{T}_s$, $s = \overline{1, N}$, и $\mathbb{T}_t$, $t = \overline{N+1, 2N}$, так же, как и любая подсистема линейно независимой системы $\mathbb{T}_s$, $s = \overline{1, 2N}$.

Легко видеть, что имеют место соотношения

$$\mathbb{W}_s = (\mathbf{U}_s, \mathbf{V}_s)^T = \sum_{t=1}^s l_{st} \mathbb{T}_t, \quad s = \overline{1, 2N}. \quad (2.61)$$

Из (2.61) следует, что полную ортонормированную систему тензорных столбцов $\mathbb{W}_s = (\mathbf{U}_s, \mathbf{V}_s)^T$, $s = \overline{1, 2N}$, можно получить с помощью процедуры ортонормирования Грама—Шмидта (см. [2, 3, 13, 34, 36–38]) из линейно независимой системы (2.60) тензорных столбцов $\mathbb{T}_s$, $s = \overline{1, 2N}$. В самом деле, проводя процесс ортогонализации и нормирования системы тензорных столбцов $\mathbb{T}_s$, $s = \overline{1, 2N}$, для коэффициентов l_{st} , $s = \overline{1, 2N}$, $t = \overline{1, s}$, в (2.61) после простых, но громоздких выкладок получим следующие выражения (см. [11, 12]):

$$l_{11} = \frac{d_0}{\pm \sqrt{d_0 d_1}}, \quad l_{mt} = \frac{S_{mt}^{(m)}}{\pm \sqrt{d_{m-1} d_m}}, \quad (2.62)$$

$$S_{mt}^{(m)} = (-1)^{m+t} S \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, t-1, & t, & t+1, \dots, m-1 \\ 1, 2, \dots, t-1, t+1, t+2, \dots, & m \end{matrix} \right), \quad m = \overline{2, N}, \quad t = \overline{1, m},$$

$$d_0 = 1, \quad d_m = \det S_m = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mm} \end{vmatrix}, \quad qqqs_{mt} = (\mathbb{T}_m, \mathbb{T}_t) = \mathbb{T}_m^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{T}_t, \quad m, t = \overline{1, 2N},$$

$$S_{mt}^{(m)} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1,t-1} & 0 & s_{1,t+1} & \dots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2,t-1} & 0 & s_{2,t+1} & \dots & s_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{t1} & s_{t2} & \dots & s_{t,t-1} & 0 & s_{t,t+1} & \dots & s_{tm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1,1} & s_{m-1,2} & \dots & s_{m-1,t-1} & 0 & s_{m-1,t+1} & \dots & s_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad m = \overline{1, 2N}, \quad t = \overline{1, m},$$

$$S \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, t-1, & t, & t+1, \dots, m-1 \\ 1, 2, \dots, t-1, t+1, t+2, \dots, & m \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1,t-1} & s_{1,t+1} & \dots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2,t-1} & s_{2,t+1} & \dots & s_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{t1} & s_{t2} & \dots & s_{t,t-1} & s_{t,t+1} & \dots & s_{tm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1,1} & s_{m-1,2} & \dots & s_{m-1,t-1} & s_{m-1,t+1} & \dots & s_{m-1,m} \end{vmatrix};$$

здесь $S_{mt}^{(m)}$ — алгебраическое дополнение элемента s_{mt} субматрицы $S_m = \text{matr}(s_{kl})$, $k, l = \overline{1, m}$, а $S \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, t-1, & t, & t+1, \dots, m-1 \\ 1, 2, \dots, t-1, t+1, t+2, \dots, & m \end{matrix} \right)$ — минор порядка $m-1$ определителя $\det S_m$, полученный удалением m -й строки и t -го столбца.

Учитывая (2.62), из (2.61) после несложных преобразований для искоемых собственных тензорных столбцов симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ получим следующие выражения:

$$\mathbb{W}_1 = \frac{1}{\pm \sqrt{d_0 d_1}} \mathbb{T}_1, \quad \mathbb{W}_m = \frac{1}{\pm \sqrt{d_{m-1} d_m}} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m-1} & \mathbb{T}_1 \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m-1} & \mathbb{T}_2 \\ s_{31} & s_{32} & \dots & s_{3m-1} & \mathbb{T}_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mm-1} & \mathbb{T}_m \end{vmatrix}, \quad m = \overline{2, 2N}. \quad (2.63)$$

Отметим, что с помощью формул (2.63) полная система собственных тензорных столбцов $\mathbb{W}_m \in \mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$, $m = \overline{1, 2N}$, симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ определяется посредством $(2N-1)N$ независимых параметров (компонент унитарной тензорно-блочной матрицы относительно произвольной системы координат (произвольного ортонормированного базиса n -мерного пространства). Очевидно, за счет выбора системы координат число независимых параметров в некоторых случаях можно уменьшить на несколько единиц. Ниже этот вопрос подробнее рассмотрен в частном случае; в общем случае на этом останавливаться не будем.

Отметим также, что в формулах (2.16), (2.17), (2.62) в [38] аналогичных (2.39), (2.41) и (2.63), допущены опечатки: в правых частях указанных формул круглые скобки (), обрамляющие матрицы, нужно надо заменить на знак определителя $|\cdot|$.

Таким образом, для описания внутренней структуры симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ достаточно вместо компонент составляющих тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T$ и $\mathbf{D}$ в какой-либо системе координат задать инвариантные характеристики, т.е. собственные значения λ_k , $k = \overline{1, 2N}$, и собственные тензорные столбцы $\mathbb{W}_m$, $m = \overline{1, 2N}$, которые определяются с помощью $(2N-1)N$ независимых параметров относительно произвольной системы координат, а относительно специально выбранной системы координат число независимых параметров в некоторых случаях можно уменьшить на несколько единиц. Заметим, что эти инвариантные характеристики должны служить для сравнения и классификации симметричных тензорно-блочных матриц модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$. В этой связи целесообразно ввести следующее определение.

Определение 2.25. Символ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, где k — число различных собственных значений тензорно-блочной матрицы, а α_i — кратность собственного значения λ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, называется *символом анизотропии (структуры)* тензорно-блочной матрицы.

В общем случае на классификации тензорно-блочных матриц останавливаться не будем. Однако ниже приведена классификация тензорно-блочных матриц модуля $\mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$, из которой ясно, как можно осуществить аналогичную классификацию тензорно-блочных матриц модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, а также модуля $\mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$, $m \geq 1$. Провести аналогичное исследование для симметричной тензорно-блочно-диагональной матрицы модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, как частного случая симметричной тензорно-блочной матрицы модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, не составляет большого труда.

2.3. Задача на собственные значения тензорно-блочной диагональной матрицы. Выше было установлено, что тензорно-блочная диагональная матрица $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$, $m \geq 1$, имеет вид (2.4), а матрица $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ как частный случай представляется в форме (2.15). Отметим, что, изучив внутреннюю структуру тензорно-блочной диагональной матрицы модуля $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, результаты исследования легко распространить на подобную ей матрицу модуля $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$ аналогично сказанному выше относительно матрицы (2.3). Поэтому с целью сокращения письма ограничимся рассмотрением матрицы (2.15).

Нетрудно видеть, что характеристическое уравнение тензорно-блочной диагональной матрицы (2.15) модуля $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ имеет вид

$$\det(\mathbb{M} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \lambda \mathbf{E} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E}) = 0. \quad (2.64)$$

На основании (2.64) заключаем, что число λ является собственным значением тензорно-блочной диагональной матрицы (2.15), тогда и только тогда, когда оно является собственным значением либо тензора $\mathbf{A}$, либо тензора $\mathbf{D}$. Другими словами, множество собственных значений тензорно-блочной диагональной матрицы (2.15) с учетом алгебраических кратных равно объединению множеств собственных значений субтензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$. Если (2.15) — положительно определенная тензорно-блочная диагональная матрица, то в силу теоремы 2.2 ее субтензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ также положительно определены, т.е. собственные значения как тензора $\mathbf{A}$, так и тензора $\mathbf{D}$ положительны. Вообще говоря, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.14. *Тензорно-блочная диагональная (тензорно-блочная треугольная) матрица модуля $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, положительно определена тогда и только тогда, когда ее субтензоры (диагональные субтензоры) положительно определены.*

Очевидно, поиск решений характеристического уравнения (2.64) равносильно поиску решений уравнений

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0, \quad \det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E}) = 0, \quad (2.65)$$

а объединение множеств корней уравнений (2.65) является множеством собственных значений тензорно-блочной диагональной матрицы (2.15). Видно, что каждое из уравнений (2.65) является уравнением степени N относительно λ ; в случае симметрической (положительно определенной) тензорно-блочной диагональной матрицы (2.15) оно имеет N вещественных (положительных) корней, если каждый корень учитывать столько раз, какова его кратность.

Обозначив через $\mathbb{W}_p$, $p = \overline{1, 2N}$, собственные тензорные столбцы тензорно-блочной диагональной матрицы $\mathbb{M}$ (см. (2.15)), соответствующие собственным значениям λ_p , $p = \overline{1, 2N}$, имеем

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{2N} \lambda_p \mathbb{W}_p \mathbb{W}_p^T. \quad (2.66)$$

Отметим, что теоремы для треугольной блочной матрицы, приведенные в [26], можно сформулировать применительно к треугольной тензорно-блочной, а также к тензорно-блочной диагональной матрице следующим образом.

Теорема 2.15. *Если число λ_k , $1 \leq k \leq N$, является собственным значением субтензора $\mathbf{A}$, но не является собственным значением субтензора $\mathbf{D}$, то собственный тензорный столбец $\mathbb{W}_k$ тензорно-блочной диагональной матрицы $\mathbb{M}$ (см. (2.15)), соответствующий собственному значению λ_k , имеет вид $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{0})^T$, где $\mathbf{U}_k$ — собственный тензор субтензора $\mathbf{A}$, соответствующий собственному значению λ_k , а $\mathbf{0}$ — нулевой тензор ранга p .*

Теорема 2.16. *Если число λ_m , $N+1 \leq m \leq 2N$, является собственным значением субтензора $\mathbf{D}$, но не является собственным значением субтензора $\mathbf{A}$, то собственный тензорный столбец $\mathbb{W}_m$ тензорно-блочной диагональной матрицы $\mathbb{M}$ (см. (2.15)), соответствующий собственному значению λ_m , имеет вид $\mathbb{W}_m = (\mathbf{0}, \mathbf{V}_m)^T$, где $\mathbf{V}_m$ — собственный тензор субтензора $\mathbf{D}$, соответствующий собственному значению λ_m , а $\mathbf{0}$ — нулевой тензор ранга p .*

Теорема 2.17. Если λ_k — общее собственное значение субтензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$, то собственный тензорный столбец $\mathbb{W}_k$ тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}$ (см. (2.15)), соответствующий собственному значению λ_k , имеет вид $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, где $\mathbf{U}_k$ и $\mathbf{V}_k$ — собственные тензоры субтензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ соответственно, отвечающие собственному значению λ_k .

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N$ — собственные значения и соответствующие им собственные тензоры субтензора $\mathbf{A}$, а $\mu_1, \dots, \mu_N$ и $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_N$ — собственные значения и соответствующие им собственные тензоры субтензора $\mathbf{D}$ и $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \cap \{\mu_1, \dots, \mu_N\} = \emptyset$, то в силу теорем 2.15 и 2.16 тензорно-блочную матрицу $\mathbb{M}$ (см. (2.66)) можно представить в виде

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} (\mathbf{U}_k, \mathbf{0}) + \sum_{l=1}^N \mu_l \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_l \end{pmatrix} (\mathbf{0}, \mathbf{V}_l) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_{l=1}^N \mu_l \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Из (2.67) находим

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k, \quad \mathbf{D} = \sum_{l=1}^N \mu_l \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l, \quad (2.68)$$

как и требуется. Заметим, что если

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_N \equiv \lambda, \quad \mu_1 = \dots = \mu_N \equiv \mu,$$

то тензоры (2.68) представляются в форме

$$\mathbf{A} = \lambda \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k = \lambda \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mu \sum_{l=1}^N \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l = \mu \mathbf{E}. \quad (2.69)$$

Учитывая (2.69), заключаем, что в рассматриваемом случае тензорно-блочная матрица примет вид

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu \mathbf{E} \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Если $\lambda = \mu$, то из (2.70) получим

$$\mathbb{M} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} = \lambda \mathbb{E}. \quad (2.71)$$

На основании (2.70) и (2.71) целесообразно ввести следующее определение.

Определение 2.26. Тензорно-блочная матрица, имеющая вид (2.70) (соответственно, (2.71)), называется изотропной (соответственно, идеально изотропной).

Не нарушая общности, допустим теперь, что среди собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ первые m совпадают, т.е. $\lambda_k = \mu_k$, $k = \overline{1, m}$, а собственные тензоры этих тензоров обозначим, как и выше, через $\mathbf{U}_k$ и $\mathbf{V}_k$, $k = \overline{1, N}$, соответственно. Тогда в силу теоремы 2.17 первые m собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$, отвечающие собственным значениям $\lambda_k = \mu_k$, $k = \overline{1, m}$, соответственно, будут иметь вид $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, $k = \overline{1, m}$. Следовательно, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ представятся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k = \sum_{k=1}^m \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k + \sum_{k=m+1}^N \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k, \\ \mathbf{D} &= \sum_{l=1}^N \mu_l \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l = \sum_{l=1}^m \mu_l \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l + \sum_{l=m+1}^N \mu_l \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l, \end{aligned}$$

а тензорно-блочную-диагональную матрицу $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ можно записать в форме

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{V}_k \end{pmatrix} (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k) + \sum_{k=m+1}^N \left[\lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} (\mathbf{U}_k, \mathbf{0}) + \mu_k \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_k \end{pmatrix} (\mathbf{0}, \mathbf{V}_k) \right].$$

Таким образом, из сказанного выше следует, что для изучения внутренней структуры тензорно-блочной-диагональной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ достаточно изучить задачу на собственные значения тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, которая довольно подробно изучалась в [11], поэтому не будем останавливаться на этой проблеме (см. также [13, 34, 37, 38]). Однако на основании проведенного выше исследования аналогичное исследование для симметричного тензора любого четного ранга можно получить как частный случай. В самом деле, для этого достаточно учесть, что если $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbf{W} \in \mathbb{R}_p(\Omega)$, то $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}^{1 \times 1}(\Omega) = \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbf{W} \in \mathbb{R}_p^{1 \times 1}(\Omega) = \mathbb{R}_p(\Omega)$, и в приведенных выше соотношениях тензорно-блочную матрицу модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ и тензорный столбец модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ заменить на тензоры модулей $\mathbb{R}_{2p}(\Omega) = \mathbb{R}_{2p}^{1 \times 1}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_p(\Omega) = \mathbb{R}_p^{1 \times 1}(\Omega)$ соответственно. Очевидно, в этом случае и тензорная строка заменяется тензором модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, т.е. нет необходимости вводить понятие тензорной строки.

Нетрудно обобщить изложенный выше материал на задачу на собственные значения для тензорно-блочной матрицы модуля $\mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$ (см. (2.3)). В самом деле, для этого достаточно в приведенных выше соотношениях тензорно-блочную матрицу модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ и тензорный столбец (соответственно, тензорную строку) модуля $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$ (соответственно, $\mathbb{R}_p^{1 \times 2}(\Omega)$) заменить на тензорно-блочную матрицу модуля $\mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$ и тензорный столбец (соответственно, тензорную строку) модуля $\mathbb{R}_p^{m \times 1}(\Omega)$ (соответственно, $\mathbb{R}_p^{1 \times m}(\Omega)$), а также изменить соответствующим образом индексы.

Отметим также, что нетрудно провести аналогичные исследования для обобщенных задач на собственные значения, которые можно сформулировать следующим образом: для некоторых $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$ и $\mathbb{N} \in \mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$ найти все тензорные столбцы $\mathbb{W} \in \mathbb{R}_p^{m \times 1}(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{N} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W},$$

где λ — скаляр, а m — произвольное фиксированное натуральное число.

3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ

3.1. Представления удельной энергии деформации и определяющих соотношений в линейной микрополярной теории упругости. Удельную энергию деформации и определяющие соотношения (ОС) в линейной микрополярной теории упругости анизотропного тела (см. [5, 21, 31]), не обладающего центром симметрии в смысле упругих свойств, при изотермических процессах можно записать соответственно в форме

$$\Phi(\underset{\sim}{\gamma}, \underset{\sim}{\kappa}) = \frac{1}{2} \left(A^{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + 2B^{ijkl} \gamma_{ij} \kappa_{kl} + D^{ijkl} \kappa_{ij} \kappa_{kl} \right) = \frac{1}{2} \left(\underset{\sim}{\gamma} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\gamma} + 2 \underset{\sim}{\gamma} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\kappa} + \underset{\sim}{\kappa} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\kappa} \right), \quad (3.1)$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underset{\sim}{\gamma}} = \underset{\sim}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\gamma} + \underset{\sim}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\kappa}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underset{\sim}{\kappa}} = \underset{\sim}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\gamma} + \underset{\sim}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\kappa}, \quad (3.2)$$

где $\underset{\sim}{\gamma} = \nabla \mathbf{u} - \underset{\sim}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ — тензор деформаций, $\underset{\sim}{\kappa} = \nabla \boldsymbol{\varphi}$ — тензор изгиба-кручения, $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор внутренних вращений, $\underset{\sim}{\mathbf{C}}$ — дискриминантный тензор третьего ранга, $\underset{\sim}{\mathbf{A}}^T = \underset{\sim}{\mathbf{A}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{D}}^T = \underset{\sim}{\mathbf{D}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{C}}^T = \underset{\sim}{\mathbf{B}}$ — материалыые тензоры четвертого ранга, называемые тензорами модулей упругости, $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ и $\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений, $\overset{2}{\otimes}$ — внутреннее 2-произведение.

Вводя в рассмотрение тензорные столбцы тензоров деформаций и изгиба-кручения и тензоров напряжений и моментных напряжений, а также тензорно-блочную матрицу тензоров модулей упругости

$$\underset{\sim}{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\gamma} \\ \underset{\sim}{\varkappa} \end{pmatrix}, \quad \left(\underset{\sim}{\mathbb{X}}^T = (\underset{\sim}{\gamma}, \underset{\sim}{\varkappa}) \right), \quad \underset{\sim}{\mathbb{Y}} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{P}} \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} \end{pmatrix}, \quad \left(\underset{\sim}{\mathbb{Y}}^T = (\underset{\sim}{\mathbf{P}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}) \right), \quad (3.3)$$

$$\underset{\approx}{\mathbb{M}} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathbf{A}} & \underset{\approx}{\mathbf{B}} \\ \underset{\approx}{\mathbf{C}} & \underset{\approx}{\mathbf{D}} \end{pmatrix}, \quad \left(\underset{\approx}{\mathbb{M}}^T = \underset{\approx}{\mathbb{M}} \right), \quad (3.4)$$

удельную энергию деформации и ОС можно записать в виде

$$2\Phi(\underset{\sim}{\gamma}, \underset{\sim}{\varkappa}) = \underset{\sim}{\mathbb{X}}^T \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbb{M}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{X}}, \quad \underset{\sim}{\mathbb{Y}} = \underset{\approx}{\mathbb{M}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{X}} \left(\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{P}} \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathbf{A}} & \underset{\approx}{\mathbf{B}} \\ \underset{\approx}{\mathbf{C}} & \underset{\approx}{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \overset{2}{\otimes} \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\gamma} \\ \underset{\sim}{\varkappa} \end{pmatrix} \right). \quad (3.5)$$

Если материал обладает центром симметрии в смысле упругих свойств, то $\underset{\approx}{\mathbf{B}} = \underset{\approx}{\mathbf{0}}$, где $\underset{\approx}{\mathbf{0}}$ — нулевой тензор четвертого ранга, и тензорно-блочная матрица тензоров модулей упругости (3.4) получит вид тензорно-блочно-диагональной матрицы

$$\underset{\approx}{\mathbb{M}} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathbf{A}} & \underset{\approx}{\mathbf{0}} \\ \underset{\approx}{\mathbf{0}} & \underset{\approx}{\mathbf{D}} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Следует отметить, что тензорные столбцы $\underset{\sim}{\mathbb{X}}$ и $\underset{\sim}{\mathbb{Y}}$ являются элементами модуля $\mathbb{R}_2^{2 \times 1}(\Omega)$, а тензорно-блочная матрица $\underset{\approx}{\mathbb{M}}$ — элементом модуля $\mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$ и, следовательно, все сказанное выше относительно $\underset{\approx}{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и $\underset{\approx}{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ в равной мере относится к $\underset{\approx}{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}_4(\Omega)$ и $\underset{\approx}{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$ соответственно (здесь в $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ через Ω обозначена некоторая область n -мерного пространства, а в $\mathbb{R}_4(\Omega)$ и $\mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$ через Ω обозначена некоторая область трехмерного пространства). В связи с этим на рассмотрении некоторых вопросов, относящихся к $\underset{\approx}{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}_4(\Omega)$ и $\underset{\approx}{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$, подробно останавливаться не будем. Необходимые соотношения будем выписывать, исходя из полученных выше аналогичных соотношений, а также будем ссылаться на сформулированные выше определения и теоремы, не перефразируя их. Отметим, что с целью облегчения чтения материала иногда приводятся соответствующие формулировки для рассматриваемого случая. Отметим также, что в дальнейшем изложении, как и выше в общем случае, для несимметричных тензоров второго ранга используются двухиндексные и одноиндексные, а для тензоров четвертого ранга — четырехиндексные и двухиндексные представления. Например, если $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ — тензор второго ранга, а $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — тензор четвертого ранга, то для них будем иметь представления

$$\underset{\sim}{\mathbf{P}} = P_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sum_{m=1}^9 P_m \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m = P_m \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij},$$

$$\underset{\approx}{\mathbf{A}} = A_{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = \sum_{m=1}^9 \sum_{n=1}^9 A_{mn} \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m \underset{\sim}{\mathbf{e}}_n = A_{mn} \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m \underset{\sim}{\mathbf{e}}_n, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad m, n = \overline{1, 9},$$

где $\underset{\sim}{\mathbf{e}}_m$, $m = \overline{1, 9}$, — тензоры ортонормированного базиса для тензора второго ранга относительно операции внутреннего 2-произведения, которые представляются в виде

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, & \underset{\sim}{\mathbf{e}}_2 &= \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, & \underset{\sim}{\mathbf{e}}_3 &= \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, & \underset{\sim}{\mathbf{e}}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2), \\ \underset{\sim}{\mathbf{e}}_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), & \underset{\sim}{\mathbf{e}}_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3), & \underset{\sim}{\mathbf{e}}_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2), \\ \underset{\sim}{\mathbf{e}}_8 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), & \underset{\sim}{\mathbf{e}}_9 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3), & \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{e}}_n &= \delta_{mn}, \quad m, n = \overline{1, 9}; \end{aligned}$$

как обычно, δ_{pq} — символ Кронекера.

Далее аналогично общему случаю рассмотрим задачу о нахождении собственных значений и собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы (3.4).

3.2. Задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы модуля $\mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$.

Найти все тензорные столбцы

$$\underset{\sim}{\mathbb{W}} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{u}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \quad \left(\underset{\sim}{\mathbb{W}}^T = (\underset{\sim}{\mathbf{u}}, \underset{\sim}{\mathbf{v}}) \right) \quad (3.7)$$

модуля $\mathbb{R}_2^{2 \times 1}(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\underset{\sim}{\mathbb{M}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{W}} = \lambda \underset{\sim}{\mathbb{W}} \quad \left[\left(\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{A}} & \underset{\sim}{\mathbf{B}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{C}} & \underset{\sim}{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \overset{2}{\otimes} \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{u}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{u}} + \underset{\sim}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{v}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{u}} + \underset{\sim}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \right) \right], \quad (3.8)$$

где λ — скаляр.

Левая часть (3.8) содержит две операции: матричное умножение тензорно-блочной матрицы $\underset{\sim}{\mathbb{M}}$ на тензорный столбец $\underset{\sim}{\mathbb{W}}$ и внутреннее 2-произведение (в квадратных скобках в развернутом виде выписаны левая часть (3.8) и результат этих операций). Заметим также, что уравнение (3.8) всегда имеет тривиальное решение $\underset{\sim}{\mathbb{W}} = \underset{\sim}{\mathbb{O}}$, где $\underset{\sim}{\mathbb{O}}$ — нулевой тензорный столбец второго ранга.

В дальнейшем, говоря о решении уравнения (3.8), будем иметь в виду только нетривиальное нормированное решение

$$\underset{\sim}{\mathbb{W}} \neq \underset{\sim}{\mathbb{O}}, \quad \|\underset{\sim}{\mathbb{W}}\| = \sqrt{\underset{\sim}{\mathbb{W}}^T \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{W}}} = \sqrt{\underset{\sim}{\mathbf{u}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{u}} + \underset{\sim}{\mathbf{v}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{v}}} = 1,$$

где $\|\underset{\sim}{\mathbb{W}}\|$ — норма тензорного столбца $\underset{\sim}{\mathbb{W}}$, а $(\underset{\sim}{\mathbb{W}}, \underset{\sim}{\mathbb{W}}) = \underset{\sim}{\mathbb{W}}^T \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{W}}$ — скалярное произведение тензорного столбца $\underset{\sim}{\mathbb{W}}$ на себя.

Если для некоторого скаляра λ уравнение (3.8) имеет нетривиальное решение $\underset{\sim}{\mathbb{W}}$, то λ называется собственным значением (числом) тензорно-блочной матрицы $\underset{\sim}{\mathbb{M}}$, а $\underset{\sim}{\mathbb{W}}$ — собственным тензорным столбцом, соответствующим собственному значению λ . Так как $\underset{\sim}{\mathbb{M}}^T = \underset{\sim}{\mathbb{M}}$, то легко доказать, что $\underset{\sim}{\mathbb{W}}^T \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{M}} = \lambda \underset{\sim}{\mathbb{W}}^T$.

Введем определение положительно определенной симметрической тензорно-блочной матрицы (ср. определение 2.21).

Определение 3.1. Симметрическая тензорно-блочная матрица $\underset{\sim}{\mathbb{M}} \in \mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$ называется *положительно определенной*, если порождаемая ею квадратичная форма $\underset{\sim}{\mathbb{W}}^T \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{M}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{W}}$ положительна для любого отличного от нуля вещественного тензорного столбца $\underset{\sim}{\mathbb{W}} \in \mathbb{R}_2^{2 \times 1}(\Omega)$.

Нетрудно заметить, что в силу положительной определенности удельной энергии деформации (см. [5, 31]) и определения 3.1 имеет место следующая теорема (ср. с теоремой 2.2).

Теорема 3.1. Тензорно-блочная матрица $\underset{\sim}{\mathbb{M}}$ тензоров модулей упругости положительно определена и, следовательно, тензоры модулей упругости (субтензоры) $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ и $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ положительно определены.

В дальнейшем приведенные выше соотношения для удельной энергии деформации и ОС будем считать записанными в безразмерных величинах, так как это всегда можно сделать.

Нетрудно видеть, что уравнение (3.8) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{A}} - \lambda \underset{\sim}{\mathbf{E}} & \underset{\sim}{\mathbf{B}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{C}} & \underset{\sim}{\mathbf{D}} - \lambda \underset{\sim}{\mathbf{E}} \end{pmatrix} \overset{2}{\otimes} \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{u}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{\mathbf{0}} \quad \left((\underset{\sim}{\mathbb{M}} - \lambda \underset{\sim}{\mathbb{E}}) \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{W}} = \underset{\sim}{\mathbf{0}} \right), \quad (3.9)$$

где $\underset{\approx}{\mathbf{E}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ — единичный тензор четвертого ранга относительно операции внутреннего 2-произведения, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $ij = 1, 2, 3$, а $\underset{\approx}{\mathbb{E}}$ — единичная тензорно-блочная матрица вида

$$\underset{\approx}{\mathbb{E}} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathbf{E}} & \underset{\approx}{\mathbf{0}} \\ \underset{\approx}{\mathbf{0}} & \underset{\approx}{\mathbf{E}} \end{pmatrix}.$$

Видно, что (3.9) представляет однородную систему 18 уравнений относительно 18 неизвестных (два несимметричных тензора $\underset{\approx}{\mathbf{u}}$ и $\underset{\approx}{\mathbf{v}}$), которая должна иметь нетривиальное решение. Для существования нетривиального решения системы уравнений (3.9) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е.

$$\det \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathbf{A}} - \lambda \underset{\approx}{\mathbf{E}} & \underset{\approx}{\mathbf{B}} \\ \underset{\approx}{\mathbf{C}} & \underset{\approx}{\mathbf{D}} - \lambda \underset{\approx}{\mathbf{E}} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - \lambda E & B \\ C & D - \lambda E \end{pmatrix} = 0 \quad \left(\det(\underset{\approx}{\mathbb{M}} - \lambda \underset{\approx}{\mathbb{E}}) = 0 \right), \quad (3.10)$$

где A, B, C, D и E — матрицы компонент тензоров $\underset{\approx}{\mathbf{A}}, \underset{\approx}{\mathbf{B}}, \underset{\approx}{\mathbf{C}}, \underset{\approx}{\mathbf{D}}$ и $\underset{\approx}{\mathbf{E}}$ соответственно относительно мультибазиса $\underset{\approx}{\mathbf{e}}_m \underset{\approx}{\mathbf{e}}_n$, $m, n = \overline{1, 9}$.

Очевидно, (3.10) — алгебраическое уравнение степени 18 относительно λ ; оно называется *характеристическим уравнением* тензорно-блочной матрицы $\underset{\approx}{\mathbb{M}}$. Так как в силу теоремы 3.1 тензорно-блочная матрица $\underset{\approx}{\mathbb{M}}$ положительно определена, то она с помощью правого унитарного преобразования переменных приводится к диагональной (канонической) матрице, диагональные элементы которой в силу теоремы Сильвестра положительны. Другими словами, алгебраическое уравнение (3.10) имеет 18 положительных корней (собственных значений), если каждый корень учитывать столько раз, какова его кратность. Занумеруем корни λ_p , $p = \overline{1, 18}$, уравнения (3.10) в порядке убывания:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{18} > 0. \quad (3.11)$$

В силу теоремы 2.7 положительно определенная симметрическая тензорно-блочная матрица $\underset{\approx}{\mathbb{M}}$ всегда имеет полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов. В рассматриваемом случае, очевидно, полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы (3.4), состоит из 18 тензорных столбцов. Обозначим через $\underset{\approx}{\mathbb{W}}_p = (\underset{\approx}{\mathbf{u}}_p, \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p)^T$, $p = \overline{1, 18}$, полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов положительно определенной симметричной тензорно-блочной матрицы (3.4), отвечающих собственным значениям λ_p , $p = \overline{1, 18}$, соответственно. Тогда матрицу (3.4) можно представить в следующем виде:

$$\underset{\approx}{\mathbb{M}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underset{\approx}{\mathbb{W}}_p \otimes \underset{\approx}{\mathbb{W}}_p^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p \\ \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p & \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p \otimes \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p & \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p \otimes \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p \\ \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p \otimes \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p & \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p \otimes \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

где, конечно, имеют место условия ортонормированности

$$(\underset{\approx}{\mathbb{W}}_p, \underset{\approx}{\mathbb{W}}_q) = \underset{\approx}{\mathbb{W}}_p^T \underset{\approx}{\mathbb{W}}_q = \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p \underset{\approx}{\mathbf{u}}_q + \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p \underset{\approx}{\mathbf{v}}_q = \delta_{pq}, \quad p, q = \overline{1, 18}. \quad (3.13)$$

Учитывая выражения для тензорно-блочной матрицы (3.3), из (3.12) получим

$$\underset{\approx}{\mathbf{A}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p, \quad \underset{\approx}{\mathbf{B}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}}^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p, \quad \underset{\approx}{\mathbf{D}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p. \quad (3.14)$$

Нетрудно доказать, что обратная к (3.12) тензорно-блочная матрица $\underset{\approx}{\mathbb{M}}^{-1}$ имеет вид

$$\underset{\approx}{\mathbb{M}}^{-1} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \underset{\approx}{\mathbb{W}}_p \underset{\approx}{\mathbb{W}}_p^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p & \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p \\ \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p \underset{\approx}{\mathbf{u}}_p & \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p \underset{\approx}{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Вообще говоря, для любого целого числа α будем иметь

$$\mathbb{M}_{\sim}^{\alpha} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{\alpha} \mathbb{W}_{\sim p} \mathbb{W}_{\sim p}^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{\alpha} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p & \mathbf{u}_p \mathbf{v}_p \\ \mathbf{v}_p \mathbf{u}_p & \mathbf{v}_p \mathbf{v}_p \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

В частности, из (3.16) при $\alpha = 0$ имеем

$$\mathbb{E}_{\sim} = \mathbb{M}_{\sim}^0 = \sum_{p=1}^{18} \mathbb{W}_{\sim p} \otimes \mathbb{W}_{\sim p}^T = \sum_{p=1}^{18} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{v}_p \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{u}_p & \mathbf{v}_p \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{18} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_p \otimes \mathbf{u}_p & \mathbf{u}_p \otimes \mathbf{v}_p \\ \mathbf{v}_p \otimes \mathbf{u}_p & \mathbf{v}_p \otimes \mathbf{v}_p \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Заметим, что в соотношениях (3.12) и (3.17) применяется знак прямого тензорного умножения $\otimes$, который, как было сказано выше, в других соотношениях опускается.

3.3. Представления удельной энергии деформации и определяющих соотношений с помощью собственных значений и собственных тензорных столбцов. Учитывая (3.8), из (3.5) получим

$$2\Phi(\boldsymbol{\gamma}_{\sim}, \boldsymbol{\varkappa}_{\sim}) = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \mathbb{X}_{\sim}^T \overset{2}{\otimes} \mathbb{W}_{\sim p} \mathbb{W}_{\sim p}^T \overset{2}{\otimes} \mathbb{X}_{\sim}, \quad \mathbb{Y}_{\sim} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \mathbb{W}_{\sim p} \mathbb{W}_{\sim p}^T \overset{2}{\otimes} \mathbb{X}_{\sim}. \quad (3.18)$$

Умножая обе части второго соотношения (3.18) скалярно на $\mathbb{W}_{\alpha}$ и учитывая (3.13), запишем определяющие соотношения в виде

$$(\mathbb{Y}_{\sim}, \mathbb{W}_{\alpha}) = \lambda_{\alpha} (\mathbb{X}_{\sim}, \mathbb{W}_{\alpha}) \left(\mathbb{Y}_{\sim}^T \overset{2}{\otimes} \mathbb{W}_{\alpha} = \lambda_{\alpha} \mathbb{X}_{\sim}^T \overset{2}{\otimes} \mathbb{W}_{\alpha} \right), \quad \alpha = \overline{1, 18}. \quad (3.19)$$

Формулы (3.19) представляю собой эквивалентные записи определяющих соотношений.

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_{\alpha} &= (\mathbb{X}_{\sim}, \mathbb{W}_{\alpha}) = \mathbb{X}_{\sim}^T \overset{2}{\otimes} \mathbb{W}_{\alpha} = \mathbb{W}_{\alpha}^T \overset{2}{\otimes} \mathbb{X}_{\sim} = \mathbf{u}_{\alpha} \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\gamma}_{\sim} + \mathbf{v}_{\alpha} \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\varkappa}_{\sim}, \\ \mathbb{Y}_{\alpha} &= (\mathbb{Y}_{\sim}, \mathbb{W}_{\alpha}) = \mathbb{Y}_{\sim}^T \overset{2}{\otimes} \mathbb{W}_{\alpha} = \mathbb{W}_{\alpha}^T \overset{2}{\otimes} \mathbb{Y}_{\sim} = \mathbf{u}_{\alpha} \overset{2}{\otimes} \mathbf{P}_{\sim} + \mathbf{v}_{\alpha} \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\mu}_{\sim}, \quad \alpha = \overline{1, 18}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Удельную энергию деформации (см. первое равенство (3.18)) и определяющие соотношения (3.19) можно представить в форме

$$2\Phi(\boldsymbol{\gamma}_{\sim}, \boldsymbol{\varkappa}_{\sim}) = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \mathbb{X}_{\sim}^2, \quad \mathbb{Y}_{\alpha} = \lambda_{\alpha} \mathbb{X}_{\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, 18}. \quad (3.21)$$

Умножая обе части первого равенства (3.20) слева тензорно на $\mathbb{W}_{\alpha}$, а затем суммируя полученные соотношения от 1 до 18, в силу (3.17) получим

$$\mathbb{X}_{\sim} = \sum_{\alpha=1}^{18} \mathbb{X}_{\alpha} \mathbb{W}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{18} \left(\mathbf{u}_{\alpha} \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\gamma}_{\sim} + \mathbf{v}_{\alpha} \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\varkappa}_{\sim} \right) \mathbb{W}_{\alpha}, \quad \mathbb{Y}_{\sim} = \sum_{\alpha=1}^{18} \mathbb{Y}_{\alpha} \mathbb{W}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{18} \left(\mathbf{u}_{\alpha} \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\gamma}_{\sim} + \mathbf{v}_{\alpha} \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\varkappa}_{\sim} \right) \mathbb{W}_{\alpha}; \quad (3.22)$$

вторая формула здесь написана по аналогии первой. Следует заметить, что формулы (3.22) представляют собой разложения тензорных столбцов $\mathbb{X}_{\sim}$ и $\mathbb{Y}_{\sim}$ по ортонормированному базису $\mathbb{W}_{\alpha}$, $\alpha = \overline{1, 18}$, а $\mathbb{X}_{\alpha}$ и $\mathbb{Y}_{\alpha}$ являются соответственно проекциями $\mathbb{X}_{\sim}$ и $\mathbb{Y}_{\sim}$ на $\mathbb{W}_{\alpha}$.

Учитывая первое равенство (3.20), из второго соотношения (3.18) получим следующие представления тензоров напряжений и моментных напряжений:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\sim} &= \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \mathbb{X}_{\sim} \mathbf{u}_p = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \left(\mathbf{u}_p \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\gamma}_{\sim} + \mathbf{v}_p \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\varkappa}_{\sim} \right) \mathbf{u}_p, \\ \boldsymbol{\mu}_{\sim} &= \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \mathbb{X}_{\sim} \mathbf{v}_p = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \left(\mathbf{u}_p \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\gamma}_{\sim} + \mathbf{v}_p \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\varkappa}_{\sim} \right) \mathbf{v}_p. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Нетрудно выписать обратные определяющие соотношения. В самом деле, например, из второго равенства (3.5) в силу (3.15) и второго равенства (3.21) находим

$$\mathbb{X} = \mathbb{M}^{-1} \overset{2}{\otimes} \mathbb{Y} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \mathbb{W}_p \mathbb{W}_p^T \overset{2}{\otimes} \mathbb{Y} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \mathbb{Y}_p \mathbb{W}_p, \quad \mathbb{X}_\alpha = \lambda_\alpha^{-1} \mathbb{Y}_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, 18}. \quad (3.24)$$

Учитывая второе равенство (3.20), из первого соотношения (3.24) аналогично (3.23) получаем

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\gamma} &= \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \mathbb{Y}_p \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \left(\underset{\sim}{\mathbf{u}}_p \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} \right) \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p, \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\kappa}} &= \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \mathbb{Y}_p \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \left(\underset{\sim}{\mathbf{u}}_p \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} \right) \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p. \end{aligned}$$

3.4. Построение собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы тензоров модулей упругости. Из формул (3.12) и (3.19) видно, что по существу нет необходимости решать уравнение 18-й степени (3.10), а следует просто матрицу $\mathbb{M}$ вида (3.4) представить по формуле (3.12) и использовать определяющие соотношения, записанные в виде (3.19). Из (3.12) видно, что для задания тензорно-блочной матрицы (3.4), кроме 18 собственных значений λ_p , $p = \overline{1, 18}$, называемых также *собственными модулями упругости*, необходимо задать 18 собственных тензорных столбцов $\mathbb{W}_p$, $p = \overline{1, 18}$, называемых также *собственными тензорными столбцами упругих состояний*. Построим эти собственные тензорные столбцы упругих состояний в явном виде. Прежде всего отметим, что условия ортонормированности (3.13) представляют 171 соотношение, связывающие между собой 324 компоненты тензорных столбцов $\mathbb{W}_p = (\underset{\sim}{\mathbf{u}}_p, \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p)^T$, $p = \overline{1, 18}$. Итак, свободными (независимыми) остаются 153 компоненты (параметра), с помощью которых следует построить собственные тензорные столбцы тензорно-блочной матрицы (3.4). С этой целью рассмотрим следующие тензоры четвертого ранга:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mathbf{W}}_{11} &= \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m \underset{\sim}{\mathbf{u}}_m = u_{mn} \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m \underset{\sim}{\mathbf{e}}_n, & \underset{\sim}{\mathbf{W}}_{12} &= \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m \underset{\sim}{\mathbf{v}}_m = v_{mn} \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m \underset{\sim}{\mathbf{e}}_n, \\ \underset{\sim}{\mathbf{W}}_{21} &= \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m \underset{\sim}{\mathbf{u}}_{9+m} = u_{9+mn} \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m \underset{\sim}{\mathbf{e}}_n, & \underset{\sim}{\mathbf{W}}_{22} &= \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m \underset{\sim}{\mathbf{v}}_{9+m} = v_{9+mn} \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m \underset{\sim}{\mathbf{e}}_n, \end{aligned} \quad (3.25)$$

с помощью которых построим тензорно-блочную матрицу

$$\underset{\sim}{\mathbb{W}} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{W}}_{11} & \underset{\sim}{\mathbf{W}}_{12} \\ \underset{\sim}{\mathbf{W}}_{21} & \underset{\sim}{\mathbf{W}}_{22} \end{pmatrix}, \quad \left(\underset{\sim}{\mathbb{W}}^T = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{W}}_{11}^T & \underset{\sim}{\mathbf{W}}_{21}^T \\ \underset{\sim}{\mathbf{W}}_{12}^T & \underset{\sim}{\mathbf{W}}_{22}^T \end{pmatrix} \right). \quad (3.26)$$

Легко доказать, что тензорно-блочная матрица (3.26) удовлетворяет соотношениям

$$\underset{\sim}{\mathbb{W}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{W}}^T = \underset{\sim}{\mathbb{W}}^T \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{W}} = \underset{\sim}{\mathbb{E}}. \quad (3.27)$$

На основании (3.27) заключаем, что $\underset{\sim}{\mathbb{W}}$ — ортогональная тензорно-блочная матрица модуля $\mathbb{R}_4^{2 \times 2}$. Кроме того, легко проверить, что соотношения (3.13) эквивалентны равенству

$$\underset{\sim}{\mathbb{W}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{W}}^T = \underset{\sim}{\mathbb{E}}. \quad (3.28)$$

Таким образом, тензорно-блочная матрица (3.26) имеет 324 компоненты, которые связаны между собой тензорным соотношением (3.28), равносильным 171 соотношению (3.13) и, следовательно, среди 324 компонент независимыми остаются 153 компоненты (параметра), с помощью которых следует построить собственные тензорные столбцы тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}$. В этой связи, применяя теорему 2.13 к ортогональной тензорно-блочной матрице (3.26), можем написать

$$\underset{\sim}{\mathbb{W}} = \underset{\sim}{\mathbb{L}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{R}}, \quad (3.29)$$

$$R_{12} = \begin{pmatrix} r_{110} & r_{111} & r_{112} & r_{113} & r_{114} & r_{115} & r_{116} & r_{117} & r_{118} \\ r_{210} & r_{211} & r_{212} & r_{213} & r_{214} & r_{215} & r_{216} & r_{217} & r_{218} \\ r_{310} & r_{311} & r_{312} & r_{313} & r_{314} & r_{315} & r_{316} & r_{317} & r_{318} \\ r_{410} & r_{411} & r_{412} & r_{413} & r_{414} & r_{415} & r_{416} & r_{417} & r_{418} \\ r_{510} & r_{511} & r_{512} & r_{513} & r_{514} & r_{515} & r_{516} & r_{517} & r_{518} \\ r_{610} & r_{611} & r_{612} & r_{613} & r_{614} & r_{615} & r_{616} & r_{617} & r_{618} \\ r_{710} & r_{711} & r_{712} & r_{713} & r_{714} & r_{715} & r_{716} & r_{717} & r_{718} \\ r_{810} & r_{811} & r_{812} & r_{813} & r_{814} & r_{815} & r_{816} & r_{817} & r_{818} \\ r_{910} & r_{911} & r_{912} & r_{913} & r_{914} & r_{915} & r_{916} & r_{917} & r_{918} \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

$$R_{22} = \begin{pmatrix} 1 & r_{1011} & r_{1012} & r_{1013} & r_{1014} & r_{1015} & r_{1016} & r_{1017} & r_{1018} \\ 0 & 1 & r_{1112} & r_{1113} & r_{1114} & r_{1115} & r_{1116} & r_{1117} & r_{1118} \\ 0 & 0 & 1 & r_{1213} & r_{1214} & r_{1215} & r_{1216} & r_{1217} & r_{1218} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1314} & r_{1315} & r_{1316} & r_{1317} & r_{1318} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1415} & r_{1416} & r_{1417} & r_{1418} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1516} & r_{1517} & r_{1518} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1617} & r_{1618} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1718} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Нетрудно заметить, что левый треугольный тензор $\mathbf{L}_{\approx 11}$, квадратный тензор $\mathbf{L}_{\approx 21}$ и левый треугольный тензор $\mathbf{L}_{\approx 22}$, а также правый унитреугольный тензор $\mathbf{R}_{\approx 11}$, квадратный тензор $\mathbf{R}_{\approx 12}$ и правый унитреугольный тензор $\mathbf{R}_{\approx 22}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\approx 11} &= \mathbf{e}_p \mathbf{l}_{p\cdot}, & \mathbf{L}_{\approx 21} &= \mathbf{e}_p \mathbf{m}_{p\cdot}, & \mathbf{L}_{\approx 22} &= \mathbf{e}_p \mathbf{l}_{9+p\cdot}, \\ \mathbf{R}_{\approx 11} &= \mathbf{e}_p \mathbf{r}_{p\cdot}, & \mathbf{R}_{\approx 12} &= \mathbf{e}_p \mathbf{n}_{p\cdot}, & \mathbf{R}_{\approx 22} &= \mathbf{e}_p \mathbf{r}_{9+p\cdot}, \end{aligned} \quad p = \overline{1, 9}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{l}_{p\cdot} = \sum_{q=1}^p l_{pq} \mathbf{e}_q, \quad \mathbf{m}_{p\cdot} = \sum_{q=1}^9 r_{9+pq} \mathbf{e}_q, \quad \mathbf{l}_{p\cdot} = \sum_{q=1}^p l_{9+p9+q} \mathbf{e}_q, \quad p = \overline{1, 9}, \quad (3.39a)$$

$$\mathbf{r}_{p\cdot} = \mathbf{e}_p + \sum_{q=p+1}^9 r_{pq} \mathbf{e}_q, \quad p = \overline{1, 8}, \quad \mathbf{r}_{9\cdot} = \mathbf{e}_9, \quad \mathbf{n}_{p\cdot} = \sum_{q=1}^9 r_{p9+q} \mathbf{e}_q, \quad p = \overline{1, 9}, \quad (3.39b)$$

$$\mathbf{r}_{9+p\cdot} = \mathbf{e}_p + \sum_{q=p+1}^9 r_{9+p9+q} \mathbf{e}_q, \quad p = \overline{1, 8}, \quad \mathbf{r}_{18\cdot} = \mathbf{e}_9. \quad (3.39c)$$

Учитывая (3.26) и (3.30), из (3.29) получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} \otimes \mathbf{R}_{11} & \mathbf{L}_{11} \otimes \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} \otimes \mathbf{R}_{11} & \mathbf{L}_{21} \otimes \mathbf{R}_{12} + \mathbf{L}_{22} \otimes \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{11} &= \mathbf{L}_{11} \otimes \mathbf{R}_{11}, & \mathbf{W}_{12} &= \mathbf{L}_{11} \otimes \mathbf{R}_{12}, \\ \mathbf{W}_{21} &= \mathbf{L}_{21} \otimes \mathbf{R}_{11}, & \mathbf{W}_{22} &= \mathbf{L}_{21} \otimes \mathbf{R}_{12} + \mathbf{L}_{22} \otimes \mathbf{R}_{22}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Учитывая (3.25), (3.38) и (3.39), из (3.40) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_p &= \sum_{m=1}^p l_{pm} \mathbf{r}_{m\cdot}, & \mathbf{v}_p &= \sum_{m=1}^p l_{pm} \mathbf{n}_{m\cdot}, & \mathbf{u}_{9+p} &= l_{9+pq} \mathbf{r}_{\cdot q}, \\ \mathbf{v}_{9+p} &= l_{9+pq} \mathbf{n}_{\cdot q} + \sum_{m=1}^p l_{9+p9+m} \mathbf{r}_{9+m\cdot}, & p &= \overline{1, 9}, & q &= \overline{1, 9}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Нетрудно доказать, что системы тензоров $\mathbf{r}_p$, $p = \overline{1, 18}$, и $\mathbf{u}_q$, $q = \overline{1, 9}$ (см. (3.39) и (3.41)), линейно независимы по отдельности. Введем в рассмотрение тензорные столбцы

$$\mathbb{T}_m = (\mathbf{r}_m, \mathbf{n}_m)^T, \quad m = \overline{1, 9}, \quad \mathbb{T}_n = (\mathbf{0}, \mathbf{r}_n)^T, \quad n = \overline{10, 18}, \quad (3.42)$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой тензор второго ранга, а $\mathbf{r}_m$, $\mathbf{n}_m$ и $\mathbf{r}_{9+m}$, $m = \overline{1, 9}$, задаются формулами (3.39).

Легко доказать, что система тензорных столбцов $\mathbb{T}_p$, $p = \overline{1, 18}$, линейно независима. Конечно, линейно независимы и подсистемы $\mathbb{T}_m$, $m = \overline{1, 9}$, и $\mathbb{T}_n$, $n = \overline{10, 18}$, как и любая подсистема системы $\mathbb{T}_p$, $p = \overline{1, 18}$. Далее нетрудно показать, что в силу (3.41) и (3.42) имеют место соотношения

$$\mathbb{W}_p = (\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p)^T = \sum_{q=1}^p l_{pq} \mathbb{T}_q, \quad p = \overline{1, 18}. \quad (3.43)$$

Из (3.43) видно, что ортонормированная система тензорных столбцов $\mathbb{W}_p = (\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p)^T$, $p = \overline{1, 18}$, можно получить с помощью процедуры ортонормирования Грама—Шмидта (см. [2, 3, 11, 13, 34, 36–38]) из линейно независимой системы тензорных столбцов $\mathbb{T}_p$, $p = \overline{1, 18}$ (см. (3.42)). В самом деле, проводя процедуру ортонормирования системы тензорных столбцов $\mathbb{R}_p$, $p = \overline{1, 18}$, для коэффициентов l_{pq} , $p = \overline{1, 18}$, $q = \overline{1, p}$, после простых, но громоздких вычислений получим следующие выражения:

$$l_{11} = \frac{d_0}{\pm \sqrt{d_0 d_1}}, \quad l_{pk} = \frac{S_{pk}^{(p)}}{\pm \sqrt{d_{p-1} d_p}}, \quad S_{pk}^{(p)} = (-1)^{p+k} S \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, k-1, & k, & k+1, \dots, p-1 \\ 1, 2, \dots, k-1, k+1, k+2, \dots, & p \end{matrix} \right), \quad (3.44)$$

где $p = \overline{2, 9}$, $k = \overline{1, p}$,

$$d_0 = 1, \quad d_p = \det S_p = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pp} \end{vmatrix}, \quad s_{pq} = \mathbb{T}_p^T \otimes^2 \mathbb{T}_q, \quad p, q = \overline{1, 18},$$

$$S_{pk}^{(p)} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1,k-1} & 0 & s_{1,k+1} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2,k-1} & 0 & s_{2,k+1} & \dots & s_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k1} & s_{k2} & \dots & s_{k,k-1} & 0 & s_{k,k+1} & \dots & s_{kp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p-1,1} & s_{p-1,2} & \dots & s_{p-1,k-1} & 0 & s_{p-1,k+1} & \dots & s_{p-1,p} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad p = \overline{1, 18}, k = \overline{1, p},$$

$$S \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, k-1, & k, & k+1, \dots, p-1 \\ 1, 2, \dots, k-1, k+1, k+2, \dots, & p \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1,k-1} & s_{1,k+1} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2,k-1} & s_{2,k+1} & \dots & s_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k1} & s_{k2} & \dots & s_{k,k-1} & s_{k,k+1} & \dots & s_{kp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p-1,1} & s_{p-1,2} & \dots & s_{p-1,k-1} & s_{p-1,k+1} & \dots & s_{p-1,p} \end{vmatrix},$$

$S_{pk}^{(p)}$ — алгебраическое дополнение элемента s_{pk} субматрицы $S_p = (s_{mn})$, $m, n = \overline{1, p}$, а $S \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, k-1, & k, & k+1, \dots, p-1 \\ 1, 2, \dots, k-1, k+1, k+2, \dots, & p \end{matrix} \right)$ — минор порядка $p-1$ в определителе $\det S_p$, полученный удалением p -й строки и k -го столбца.

Учитывая (3.44), из (3.43) после несложных преобразований для собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}$ получим следующие выражения:

$$\mathbb{W}_{\tilde{1}} = \frac{1}{\pm \sqrt{d_0 d_1}} \mathbb{T}_{\tilde{1}}, \quad \mathbb{W}_p = \frac{1}{\pm \sqrt{d_{p-1} d_p}} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p-1} & \mathbb{T}_{\tilde{1}} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p-1} & \mathbb{T}_{\tilde{2}} \\ s_{31} & s_{32} & \dots & s_{3p-1} & \mathbb{T}_{\tilde{3}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pp-1} & \mathbb{T}_{\tilde{p}} \end{vmatrix}, \quad p = \overline{2, 18}. \quad (3.45)$$

Заметим, что с помощью формул (3.45) собственные тензорные столбцы $\mathbb{W}_{\tilde{p}} \in \mathbb{R}_2^{2 \times 1}(\Omega)$, $p = \overline{1, 18}$, тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$ определяются с помощью 153 независимых параметров (компонент унитарной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{R} \in \mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$) относительно произвольной системы координат (произвольного базиса $\mathbf{e}_p$, $p = 1, 2, 3$). Очевидно, за счет выбора системы координат число независимых параметров можно уменьшить. Это зависит от типа корней характеристического уравнения, например, тензора $\mathbf{r}_1$. Если все три корня характеристического уравнения тензора $\mathbf{r}_1$ просты и вещественны, или среди корней имеются два комплексно сопряженных корня, или если характеристическое уравнение имеет трехкратный корень, то во всех этих случаях число независимых параметров уменьшается на 6 и становится равным 147.

Заметим также, что в [38] в формулах [38] (2.16), (2.17), (2.62), аналогичных (2.39), (2.41) и (3.45), допущены опечатки: в правых частях этих формул круглые скобки (), обрамляющие матрицы, нужно заменить на знак определителя $|\cdot|$.

Таким образом, для описания механических свойств микрополярного материала, не обладающего центром симметрии в смысле упругих свойств, достаточно вместо компонент тензоров модулей упругости $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T$ и $\mathbf{D}$ в какой-либо системе координат задать инвариантные характеристики тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}$ (см. (3.4)), т.е. собственные значения $\lambda_k > 0$, $k = \overline{1, 18}$, и собственные тензорные столбцы $\mathbb{W}_p$, $p = \overline{1, 18}$, которые определяются с помощью 153 независимых параметров относительно произвольной системы координат, а относительно специально выбранной системы координат — посредством 147 независимых параметров. Заметим, что эти инвариантные характеристики должны служить для сравнения и классификации микрополярных линейно-упругих анизотропных материалов, не обладающих центром симметрии в смысле упругих свойств. Следовательно, провести аналогичное исследование для микрополярного материала, обладающего центром симметрии в смысле упругих свойств, как частного случая микрополярного материала, не обладающего центром симметрии, не представляет большого труда. Для классического линейно-упругого материала, как было сказано выше, аналогичное исследование проводил Н. И. Остроаблин (см. [14–17]).

3.5. Микрополярный материал с центром симметрии. В этом случае $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T = \mathbf{0}$, поэтому определяющие соотношения (3.2) и удельную энергию деформации (3.1) можно записать в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \otimes \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\mu} = \mathbf{D} \otimes \boldsymbol{\varkappa} \quad (3.46)$$

$$2\Phi(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}) = \mathbb{X}^T \otimes \mathbb{M} \otimes \mathbb{X} = \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{A} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varkappa} \otimes \mathbf{D} \otimes \boldsymbol{\varkappa} \quad (3.47)$$

а матрица (3.3) примет вид тензорно-блочно-диагональной матрицы (3.6). Тогда, аналогично уравнениям (2.65), характеристическое уравнение для (3.6) эквивалентно следующим уравнениям:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0, \quad \det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E}) = 0. \quad (3.48)$$

Видно, что каждое из уравнений (3.48) является уравнением девятой степени относительно λ и имеет девять положительных корней, если каждый корень учитывать столько раз, какова его кратность. Упорядочим корни $\lambda_1, \dots, \lambda_9$ первого из уравнений (3.48) и корни $\lambda_{10}, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{18}$ второго уравнения в невозрастающем порядке:

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_9 > 0, \quad \lambda_{10} \geq \dots \geq \lambda_{18} > 0. \quad (3.49)$$

В дальнейшем будем рассматривать такие материалы, для которых выполняется условие

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9\} \cap \{\lambda_{10}, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{18}\} = \emptyset, \quad (3.50)$$

т.е. уравнения (3.48) не имеют общих корней (хотя, вообще говоря, такая ситуация возможна).

Обозначая через $\mathbb{W}_p$, $p = \overline{1, 18}$, собственные тензорные столбцы тензорно-блочной диагональной матрицы $\mathbb{M}$ (см. (3.6)), соответствующие собственным значениям λ_p , $p = \overline{1, 18}$, можем записать

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \mathbb{W}_p \mathbb{W}_p^T. \quad (3.51)$$

Все, что было сказано в п. 2.3, остается в силе и в рассматриваемом случае. В частности, из формул п. 2.3 получим соответствующие формулы для данного случая, если положить $N = 9$; в этой связи выписывать эти формулы не будем. Отметим только, что при рассматриваемой анизотропии материала с центром симметрии тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ обычно имеют соответствующую этой анизотропии одинаковую структуру. Например, в случае изотропного материала все эти тензоры изотропны, в случае трансверсально изотропного материала все тензоры трансверсально изотропны и т. д. Если это так, очевидно, для классификации микрополярных упругих анизотропных материалов, обладающих центром симметрии в смысле упругих свойств, достаточно рассматривать, например, тензор $\mathbf{A}$, ибо при данной анизотропии материала тензор $\mathbf{D}$ имеет такую же структуру, что и тензор $\mathbf{A}$. Однако, по мнению автора, тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ могут иметь и различные структуры.

Таким образом, из сказанного выше следует, что при изучении внутренней структуры тензорно-блочной диагональной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$ достаточно рассматривать задачу на собственные значения, например, тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_4(\Omega)$.

4. ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ТЕНЗОРОВ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА ЧЕТВЕРТОГО РАНГА

Все, что было сказано выше для тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, остается в силе и для тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_4(\Omega)$. В частности, соотношения для $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_4(\Omega)$ получатся из соответствующих соотношений для $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, если область Ω считать трехмерной, $\mathbf{A}$ заменить на $\mathbf{A}$ и положить $n = 3$, $p = 2$ и $N = 9$. Конечно, и из проведенного выше исследования относительно $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$ аналогичное исследование для симметричного тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_4(\Omega)$ можно проводить как частный случай. В самом деле, для этого, как было это сказано выше в общем случае, достаточно учитывать, что если $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_4(\Omega)$ и $\mathbf{W} \in \mathbb{R}_2(\Omega)$, то $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_4^{1 \times 1}(\Omega) = \mathbb{R}_4(\Omega)$ и $\mathbf{W} \in \mathbb{R}_2^{1 \times 1}(\Omega) = \mathbb{R}_2(\Omega)$, и в приведенных выше соотношениях тензорно-блочную матрицу модуля $\mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$ и тензорный столбец модуля $\mathbb{R}_2^{2 \times 1}(\Omega)$ заменить на тензоры модулей $\mathbb{R}_4(\Omega) = \mathbb{R}_4^{1 \times 1}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_2(\Omega) = \mathbb{R}_2^{1 \times 1}(\Omega)$ соответственно. Очевидно, в этом случае и тензорная строка заменяется тензором модуля $\mathbb{R}_2(\Omega)$, т.е. нет необходимости вводить понятие тензорной строки. Достаточно подробное изложение задачи на собственные значения для тензора любого четного ранга см. в [38].

5. КЛАССИФИКАЦИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ ЛИНЕЙНО-УПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ БЕЗ ЦЕНТРА СИММЕТРИИ

Введем определение символа анизотропии (структуры) микрополярных линейно-упругих материалов без центра симметрии.

Определение 5.1. Символ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, где k — число различных собственных значений тензорно-блочной матрицы тензоров модулей упругости, а α_i — кратность собственного значения λ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, называется *символом анизотропии (структуры)* микрополярных линейно-упругих материалов, не обладающих центром симметрии.

Нетрудно заметить, что в этом случае имеет место соотношение

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 18, \quad 1 \leq \alpha_i \leq 18 - (k - 1) = 19 - k, \quad i = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq 18.$$

Имеется 18 классов (групп); каждый класс содержит несколько подклассов (подгрупп). Ниже перечислены все классы при данной классификации. Для каждого класса приводится символ анизотропии. Для некоторых материалов дано представление тензорно блочной матрицы. Число материалов в каждом классе выражается соответствующим биномиальным коэффициентом.

5.1. Символ анизотропии состоит из одного элемента.

$$\{\alpha\}, \quad \alpha = 18, \quad \lambda \equiv \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{18}.$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^0 = 1$. Тензорно-блочная матрица $\mathbb{M}$ имеет представление

$$\mathbb{M} \underset{\approx}{=} \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \mathbb{W}_p \mathbb{W}_p^T = \lambda \sum_{p=1}^{18} \mathbb{W}_p \mathbb{W}_p^T = \lambda \mathbb{E}.$$

5.2. Символ анизотропии состоит из двух элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 17, \quad m = 1, 2;$$

$$\{1, 17\}, \{2, 16\}, \{3, 15\}, \{4, 14\}, \{5, 13\}, \{6, 12\}, \{7, 11\}, \{8, 10\},$$

$$\{9, 9\}, \{10, 8\}, \{11, 7\}, \{12, 6\}, \{13, 5\}, \{14, 4\}, \{15, 3\}, \{16, 2\}, \{17, 1\}.$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^1 = 17$. Тензорно-блочная матрица $\mathbb{M}$, соответствующая, например, материалу $\{1, 17\}$, имеет вид

$$\mathbb{M} \underset{\approx}{=} \lambda_1 \mathbb{W}_1 \mathbb{W}_1^T + \lambda_2 \sum_{p=2}^{18} \mathbb{W}_p \mathbb{W}_p^T = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbb{W}_1 \mathbb{W}_1^T + \lambda_2 \mathbb{E}.$$

5.3. Символ анизотропии состоит из трех элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 16, \quad m = 1, 2, 3;$$

$$\{1, 1, 16\}, \{1, 2, 15\}, \{1, 3, 14\}, \{1, 4, 13\}, \{1, 5, 12\}, \{1, 6, 11\}, \{1, 7, 10\}, \{1, 8, 9\},$$

$$\{1, 9, 8\}, \{1, 10, 7\}, \{1, 11, 6\}, \{1, 12, 5\}, \{1, 13, 4\}, \{1, 14, 3\}, \{1, 15, 2\}, \{1, 16, 1\};$$

$$\{2, 1, 15\}, \{2, 2, 14\}, \{2, 3, 13\}, \{2, 4, 12\}, \{2, 5, 11\}, \{2, 6, 10\}, \{2, 7, 9\}, \{2, 8, 8\},$$

$$\{2, 9, 7\}, \{2, 10, 6\}, \{2, 11, 5\}, \{2, 12, 4\},$$

$$\{2, 13, 3\}, \{2, 14, 2\}, \{2, 15, 1\};$$

$$\{3, 1, 14\}, \dots, \{3, 14, 1\}; \dots;$$

$$\{15, 1, 2\}, \{15, 2, 1\}; \{16, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^2 = 136$. Например, для материала $\{1, 1, 16\}$ тензорно-блочная матрица $\mathbb{M}$ представляется в форме

$$\mathbb{M} \underset{\approx}{=} \lambda_1 \mathbb{W}_1 \mathbb{W}_1^T + \lambda_2 \mathbb{W}_2 \mathbb{W}_2^T + \lambda_3 \sum_{p=3}^{18} \mathbb{W}_p \mathbb{W}_p^T = (\lambda_1 - \lambda_3) \mathbb{W}_1 \mathbb{W}_1^T + (\lambda_2 - \lambda_3) \mathbb{W}_2 \mathbb{W}_2^T + \lambda_3 \mathbb{E}.$$

В связи с тем, что остальные классы анизотропии содержат большое число материалов, не имеет смысла выписывать их. Поэтому ниже для остальных классов укажем лишь символ анизотропии и соответствующее число материалов.

5.4. Символ анизотропии состоит из четырех элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 15, \quad m = 1, 2, 3, 4;$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^3 = 680$.

5.5. Символ анизотропии состоит из пяти элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 14, \quad m = \overline{1, 5};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^4 = 2380$.

5.6. Символ анизотропии состоит из шести элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_6 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 13, \quad m = \overline{1, 6};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^5 = 6188$.

5.7. Символ анизотропии состоит из семи элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_7\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_7 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 12, \quad m = \overline{1, 7};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^6 = 12376$.

5.8. Символ анизотропии состоит из восьми элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_8\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_8 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 11, \quad m = \overline{1, 8};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^7 = 19448$.

5.9. Символ анизотропии состоит из девяти элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_9\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_9 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 10, \quad m = \overline{1, 9};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^8 = 24310$.

5.10. Символ анизотропии состоит из десяти элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{10}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{10} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 9, \quad m = \overline{1, 10};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^9 = 24310$.

5.11. Символ анизотропии состоит из 11 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{11}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{11} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 8, \quad m = \overline{1, 11};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^{10} = 19448$.

5.12. Символ анизотропии состоит из 12 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{12}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{12} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 7, \quad m = \overline{1, 12};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^{11} = 12376$.

5.13. Символ анизотропии состоит из 13 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{13}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{13} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 6, \quad m = \overline{1, 13};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^{12} = 6188$.

5.14. Символ анизотропии состоит из 14 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{14}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{14} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 5, \quad m = \overline{1, 14};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^{13} = 2380$.

5.15. Символ анизотропии состоит из 15 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{15}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{15} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 4, \quad m = \overline{1, 15};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^{14} = 680$.

5.16. Символ анизотропии состоит из 16 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{16}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{16} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 3, \quad m = \overline{1, 16};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^{15} = 136$.

5.17. Символ анизотропии состоит из 17 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{17}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{17} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 2, \quad m = \overline{1, 17};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^{16} = 17$.

5.18. Символ анизотропии состоит из 18 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{18}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{18} = 18, \quad \alpha_m = 1, \quad m = \overline{1, 18};$$

всего число таких материалов равно $C_{17}^{17} = 1$.

Общее число всех анизотропных микрополярных линейно-упругих не обладающих центром симметрии материалов равно

$$\sum_{k=0}^{17} C_{17}^k = 2^{17} = 131072.$$

Следует заметить, что более подробная классификация анизотропных материалов должна производиться в зависимости от вида собственных тензоров тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$ или от вида $\mathbb{R} \in \mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров К. С. Упругие свойства анизотропных сред/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат наук. — М.: Ин-т кристаллографии АН СССР, 1967.
2. Векуа И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. — М.: Наука, 1978.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974.
5. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М.: Наука, 1976.
6. Лурье К. А. Некоторые задачи оптимального изгиба и растяжения упругих пластин// Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. — 1979. — № 6. — С. 86–93.
7. Ляв А. Математическая теория упругости. — М.-Л.: ОНТИ, 1935.
8. Матченко И. Н. Собственные упругие и пластические состояния анизотропных сред/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — Тула: Тульск. гос. ун-т, 2004.
9. Минкевич Л. М. Представление тензоров упругости и податливости через собственные тензоры// в кн.: Вопросы динамики механических систем виброударного действия. — Новосибирск: НЭТИ, 1973. — С. 107–110.
10. Никабадзе М. У. К задаче о нахождении у тензора четного ранга собственных значений и собственных тензоров// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 2008. — № 4. — С. 77–94.
11. Никабадзе М. У. Некоторые вопросы тензорного исчисления с приложениями к механике/ Деп. в ВИНТИ РАН 05.08.13. — №231-B2013.
12. Никабадзе М. У. К построению собственных тензорных столбцов в микрополярной линейной теории упругости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2014. — № 1. — С. 30–39.
13. Никабадзе М. У. О некоторых вопросах тензорного исчисления с приложениями к механике// Совр. мат. Фундам. напр. — 2015. — 55. — С. 3–194.
14. Остросаблин Н. И. О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния// Динамика сплошной среды. — Новосибирск: Ин-т гидромеханики им. М. А. Лаврентьева СО АН СССР, 1984. — № 66. — С. 113–125.

15. *Остросаблин Н. И.* О структуре тензора модулей упругости и классификация анизотропных материалов// Ж. прикл. мех. техн. физ. — 1986. — № 4. — С. 127–135.
16. *Остросаблин Н. И.* Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний// Динамика сплошной среды. — Новосибирск: Ин-т гидромеханики им. М. А. Лаврентьева СО АН СССР, 1986. — № 75. — С. 113–125.
17. *Остросаблин Н. И.* Анизотропия и общие решения уравнений линейной теории упругости/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — Новосибирск: Ин-т гидромеханики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2000.
18. *Победря Б. Е.* Теория пластичности анизотропных материалов// Прикладные проблемы прочности и пластичности/ Всесоюз. межвуз. сб. — Горький, 1984. — № 26. — С. 110–115.
19. *Победря Б. Е.* Теория течения анизотропной среды// Прочность, пластичность и вязкоупругость материалов и конструкций. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. — С. 101–108.
20. *Победря Б. Е.* О теории пластичности трансверсально-изотропных материалов// Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. — 1990. — № 3. С. 96–101.
21. *Победря Б. Е.* О теории определяющих соотношений в механике деформируемого твердого тела// в кн.: Проблемы механики. К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского/ Сб. статей. Под ред. Д. М. Климова. — М.: Физматлит, 2003. — С. 635–657.
22. *Ревузенко А. Ф., Чанышев А. И., Шемякин Е. И.* Математические модели упругопластических тел// в кн.: Актуальные проблемы вычислительной математики и математическое моделирование. — Новосибирск: Наука, 1985. — С. 108–119.
23. *Рыхлевский Я.* «SEINOSSTTUV»: Математическая структура упругих тел/ Препринт № 217. — М.: ИПМ АН СССР, 1983.
24. *Рыхлевский Я.* О законе Гука// Прикл. мат. мех. — 1984. — 48, № 3. — С. 420–435.
25. *Толоконников Л. А., Матченко Н. М.* О представлениях предельных условий для начально анизотропных тел// Пробл. прочности. — 1974. — № 3. — С. 54–56.
26. *Уоткинс Д. С.* Основы матричных вычислений. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
27. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Задачи по высшей алгебре. — СПб.: Лань, 1999.
28. *Чанышев А. И.* О пластичности анизотропных сред// Ж. прикл. мех. техн. физ. — 1984. — № 2. — С. 149–151.
29. *Чанышев А. И.* К решению задач о предельных нагрузках для жесткопластического анизотропного тела// Ж. прикл. мех. техн. физ. — 1984. — № 5. — С. 151–154.
30. *Chen Shaoting* New concepts of elasticity theory and an application// Acta Mech. Sinica. — 1984. — 16, № 3. — С. 259–274.
31. *Eringen A. C.* Microcontinuum field theories. 1. Foundation and solids. — N.Y.: Springer-Verlag, 1999.
32. *Mehrabadi M. M., Cowin S. C.* Eigentensors of linear anisotropic elastic materials// Quart. J. Mech. Appl. Math. — 1990. — 43, № 1. — С. 15–41.
33. *Mehrabadi M. M., Cowin S. C.* Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. Corrigendum// Quart. J. Mech. and Appl. Math. — 1991. — 44. — С. 333.
34. *Nikabadze M. U.* On some problems of tensor calculus, I// J. Math. Sci. — 2009. — 161, № 5. — С. 668–697.
35. *Nikabadze M. U.* On some problems of tensor calculus, II// J. Math. Sci. — 2009. — 161, № 5. — С. 698–733.
36. *Nikabadze M. U.* Eigenvalue problems of a tensor and a tensor-block matrix (TMB) of any even rank with some applications in mechanics// в кн.: *Altenbach H., Forest S. (eds.)* Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials. — Adv. Struc. Mat. — Springer, 2016. — 42. — С. 279–317.
37. *Nikabadze M. U.* Topics on tensor calculus with applications to mechanics// J. Math. Sci. — 2017. — 225, № 1. — С. 1–194.
38. *Nikabadze M. U.* Eigenvalue problem for tensors of even rank and its applications in mechanics// J. Math. Sci. — 2017. — 221, № 2. — С. 174–204.
39. *Sutcliffe S.* Spectral decomposition of the elasticity tensor// J. Appl. Mech. ASME. — 1992. — 59, № 4. — С. 762–773.
40. *Theocaris P. S.* The compliance fourth-rank tensor for the transtropic material and its spectral decomposition// Proc. Natl. Acad. Athens. — 1989. — 61, № 1. — С. 80–100.
41. *Theocaris P. S., Philippidis T. P.* Elastic eigenstates of a medium with transverse isotropy// Arch. Mech. Stosov. — 1989. — 41, № 5. — С. 717–724.
42. *Theocaris P. S., Philippidis T. P.* Variational bounds on the eigenangle ω of transversely isotropic materials// Acta Mech. — 1990. — 85, № 1-2. — С. 13–26.
43. *Theocaris P. S., Philippidis T. P.* Spectral decomposition of compliance and stiffness fourth-rank tensors suitable for orthotropic materials// Z. Angew. Math. Mech. — 1991. — 71, № 3. — С. 161–171.

44. *Todhunter I., Pearson K.* A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to Lord Kelvin. Vol. II. Saint-Venant to Lord Kelvin. Part II. — New York: Dover, 1960.

М. У. Никабадзе

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: munikabadze@yandex.ru



СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЫ

© 2018 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем, возникающих как в динамике многомерного твердого тела, так и в динамике точки, движущейся по многомерной сфере. При этом рассматриваемые силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним и обобщают ранее рассмотренные. Приводятся примеры использования методики интегрирования диссипативных систем для систем на касательном расслоении к двумерным поверхностям вращения.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

AMS Subject Classification: 70G60

Введение. В динамике систем со многими степенями свободы часто возникают системы, пространства положений которых являются сферами конечной размерности, а фазовые пространства, следовательно, — касательные расслоения к этим сферам. Так, например, изучение n -мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n - 1)$ -мерной сфере. При этом динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [17, 19]).

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики свободного n -мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле также породили системы на касательном расслоении к $(n - 1)$ -мерной сфере. При этом исследование проводилось начиная с систем при отсутствии силового поля и продолжалось системами при наличии неконсервативных силовых полей с дополнительными группами симметрий (см. [14, 19]).

Построение неконсервативного силового поля, действующего на многомерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных твердых тел, находящихся в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для многомерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного силового поля (ср. с [1, 2, 8, 15, 16, 22]).

Естественным образом в рассматриваемый класс задач помещается классическая задача о движении материальной точки по поверхности многомерной сферы, вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [4, 5]).

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем, возникающих как в динамике многомерного твердого тела, так и в динамике точки, движущейся по многомерной сфере. При этом рассматриваемые силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним и являются обобщением ранее рассмотренных случаев.

1. Системы на касательном расслоении к $(n-1)$ -мерной сфере. Рассмотрим следующую систему (1), (2) порядка $2(n-1)$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_{n-1} + bg(\alpha), \\ \dot{z}_{n-1} = F(\alpha) - (z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2)f(\alpha), \\ \dot{z}_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}f(\alpha) + (z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2)f(\alpha), \\ \dot{z}_{n-3} = z_{n-3}z_{n-1}f(\alpha) - z_{n-3}z_{n-2}f(\alpha)\frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - (z_1^2 + \dots + z_{n-4}^2)f(\alpha)\frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \\ \dots \\ \dot{z}_1 = z_1 f(\alpha) \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} z_{n-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\}, \\ \dot{\beta}_1 = z_{n-2}f(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = -z_{n-3}f(\alpha)\frac{1}{\sin \beta_1}, \\ \dots \\ \dot{\beta}_{n-2} = (-1)^{n+1} z_1 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3}}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = z_{n-2}f(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = -z_{n-3}f(\alpha)\frac{1}{\sin \beta_1}, \\ \dots \\ \dot{\beta}_{n-2} = (-1)^{n+1} z_1 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3}}, \end{cases} \quad (2)$$

на касательном расслоении $T^*\mathbb{S}^{n-1}\{z_{n-1}, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$ -мерной сферы

$$\mathbb{S}^{n-1}\{(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) : 0 \leq \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-3} \leq \pi, \beta_{n-2} \bmod 2\pi\}.$$

Функции $F(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$, $b \geq 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — силовое поле. Первое уравнение системы (1) и система (2) задают координаты в касательном пространстве к сфере (являются обобщенными кинематическими соотношениями). При этом система (1), (2) без последнего уравнения является независимой подсистемой порядка $2n-3$ (ввиду цикличности переменной β_{n-2}).

Система (1), (2) также может быть представлена в маятниковом виде

$$\ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}g'(\alpha) + F(\alpha) - \left[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 + \dots + \dot{\beta}_{n-2}^2 \sin^2 \beta_1 \dots \sin^2 \beta_{n-3} \right] \frac{1}{f(\alpha)} = 0,$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1 g(\alpha) f(\alpha) + \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 \left[\frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)} \right] - \\ - \left[\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_2 \sin^2 \beta_3 + \dots + \dot{\beta}_{n-2}^2 \sin^2 \beta_2 \dots \sin^2 \beta_{n-3} \right] \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2 g(\alpha) f(\alpha) + \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 \left[\frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)} \right] + 2\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \\ - \left[\dot{\beta}_3^2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_3 + \dot{\beta}_5^2 \sin^2 \beta_3 \sin^2 \beta_4 + \dots + \dot{\beta}_{n-2}^2 \sin^2 \beta_3 \dots \sin^2 \beta_{n-3} \right] \sin \beta_2 \cos \beta_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_3 - b\dot{\beta}_3 g(\alpha) f(\alpha) + \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 \left[\frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)} \right] + 2\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + 2\dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - \\ - \left[\dot{\beta}_4^2 + \dot{\beta}_5^2 \sin^2 \beta_4 + \dot{\beta}_6^2 \sin^2 \beta_4 \sin^2 \beta_5 + \dots + \dot{\beta}_{n-2}^2 \sin^2 \beta_4 \dots \sin^2 \beta_{n-3} \right] \sin \beta_3 \cos \beta_3 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

.....

Замечание 1. В случае (5), если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos \alpha$, то система (1), (2) описывает движение свободного n -мерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы (см. [14, 17]). В частности, если

$$F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha, \quad g(\alpha) = \sin \alpha, \quad (7)$$

то система (1), (2) описывает также закрепленный n -мерный маятник на обобщенном сферическом шарнире, помещенный в поток набегающей среды, заполняющей n -мерное пространство (см. [14]), и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [13]). Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим предельным множествам системы (1), (2) (см. [12]).

Для полного интегрирования системы (1), (2) необходимо знать, вообще говоря, $2n - 3$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных в касательном пространстве

$$(z_{n-1}, z_{n-2}, \dots, z_2, z_1) \rightarrow (w_{n-1}, w_{n-2}, \dots, w_2, w_1), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} w_{n-1} &= z_{n-1}, \quad w_{n-2} = w = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}, \quad w_{n-3} = \frac{z_2}{z_1}, \\ w_{n-4} &= \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad \dots, \quad w_2 = \frac{z_{n-3}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2}}, \end{aligned} \quad (9)$$

система (1), (2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_{n-1} + bg(\alpha), \\ \dot{w}_{n-1} = F(\alpha) - w_{n-2}^2 f(\alpha), \\ \dot{w}_{n-2} = w_{n-2} w_{n-1} f(\alpha), \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_k = d_k \frac{\sqrt{1 + w_k^2} \cos \beta_k}{w_k \sin \beta_k}, \\ \dot{\beta}_k = d_k, \quad k = 1, \dots, n-3, \end{cases} \quad (11)$$

$$\dot{\beta}_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1 f(\alpha) \frac{1}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \dots \sin \beta_{n-3}}, \quad (12)$$

где $Z_1(w_1, \dots, w_{n-1}) \equiv z_1$ в силу замены (8), d_k , $k = 1, \dots, n-3$, — некоторые гладкие функции на своей области определения.

Видно, что для полной интегрируемости системы (10)–(12) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (10), по одному для систем (11) (т.е. $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (12) (т.е. всего n).

3. Случай (5). Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m \alpha \cos \alpha, \quad g(\alpha) = \sin^a \alpha, \quad m = 2a - 1, \quad m, a \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (7).

Теорема 1. В случаях (5), (13) система (1), (2) обладает полным набором (n штук), вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.

Следствие 1. Система (3) при условиях (5), (13) обладает n , вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin \alpha, \quad z_i = u_i \tau^a, \quad i = 1, 2,$$

то поиск одного из первых интегралов $\Phi_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_1$ системы (10) приведет к уравнению Абеля (см. [6])

$$[(a+1)u_2 - ab]u_1 du_2 = [1 - u_1^2 + au_2^2 - abu_2] du_1, \quad (14)$$

общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл $\Phi_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_2$ системы (10) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{(b - u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + au_2^2 - abu_2}. \quad (15)$$

Первые интегралы для систем (11) имеют вид

$$\Phi_k(w_k; \beta_k) = \frac{\sqrt{1 + w_k^2}}{\sin \beta_k} = C_k = \text{const}, \quad k = 1, \dots, n-3, \quad (16)$$

а дополнительный первый интеграл $\Phi_n(w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = C_n$, «привязывающий» уравнение (12), найдется из равенства

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}} = -\frac{1}{z_{n-3} \sin \beta_{n-3}}. \quad (17)$$

Используя первый интеграл (16) при $k = n-3, n-4$, окончательно получим

$$\Phi_n(w_{n-4}, w_{n-3}; \beta_{n-4}, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \beta_{n-2} \pm \arctg \frac{C_{n-1} \cos \beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2 \beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \text{const}. \quad (18)$$

В частности, при $a = 1$ равенство (14) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_{n-1}}{\sin \alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin \alpha}\right) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - bw_{n-1} \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_{n-2} \sin \alpha} = C_1 = \text{const}.$$

4. Случай (6). Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \frac{\sin^{2k-1} \alpha}{\cos^{2k+1} \alpha}, \quad g(\alpha) = \frac{\sin^k \alpha}{\cos^k \alpha}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Теорема 2. В случаях (6), (19) система (1), (2) обладает полным набором (n штук), вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.

Следствие 2. Система (3) при условиях (6), (19) обладает n (вообще говоря, трансцендентными) независимыми первыми интегралами.

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin \alpha, \quad z_i = u_i \left(\frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} \right)^k, \quad i = 1, 2,$$

то поиск одного из первых интегралов $\Phi_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_1$ системы (10) приведет к уравнению Абеля (14) (только с подстановкой $a \leftrightarrow k$), общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл $\Phi_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_2$ системы (10) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau(1 - \tau^2)} = \frac{(b - u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + ku_2^2 - kbu_2}.$$

Первые интегралы для систем (11) имеют вид (16), а дополнительный первый интеграл $\Phi_n(w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = C_n$, «привязывающий» уравнение (12), найдется из равенства (17); при этом, используя первый интеграл (16) при $k = n-3, n-4$, окончательно получим его в виде (18).

В частности, при $k = 1$ равенство (14) ($a \leftrightarrow k$) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_{n-1} \cos \alpha}{\sin \alpha}, \frac{w_{n-2} \cos \alpha}{\sin \alpha}\right) = \frac{(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) \cos^2 \alpha - bw_{n-1} \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha}{w_{n-2} \sin \alpha \cos \alpha} = C_1 = \text{const}.$$

5. О поверхностях вращения. Выше были приведены два содержательных примера (5) и (6) для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на n -мерной сфере, для которых получены случаи интегрируемости динамических систем с диссипацией. Остановимся далее (для простоты для случая $n = 2$) на применении только что рассмотренной методики для двумерных поверхностей вращения.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) задана поверхность вращения следующим уравнением:

$$\rho = \rho(z). \quad (20)$$

Уравнения геодезических линий на данной поверхности имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_2(\alpha)\dot{\beta}^2 = 0, \\ \ddot{\beta} + \Gamma_3(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$\Gamma_1(\alpha) = \frac{\rho'(\alpha)\rho''(\alpha)}{1 + \rho'^2(\alpha)}, \quad \Gamma_2(\alpha) = \frac{\rho(\alpha)\rho'(\alpha)}{1 + \rho'^2(\alpha)}, \quad \Gamma_3(\alpha) = 2\frac{\rho'(\alpha)}{\rho'(\alpha)}, \quad (22)$$

$\alpha = z, \beta = \varphi$.

Введем новые кинематические соотношения:

$$\dot{\alpha} = f_1(\alpha)z_2, \quad \dot{\beta} = f_2(\alpha)z_1, \quad (23)$$

в результате чего система (21), (22) переписывается в виде

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = f_1(\alpha)z_2, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2 \left\{ -\Gamma_1(\alpha)f_1(\alpha) - f_1'(\alpha) \right\} + z_1^2 \left\{ \frac{-\Gamma_2(\alpha)f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} \right\}, \\ \dot{z}_1 = z_2z_1 \left\{ -\Gamma_3(\alpha)f_1(\alpha) - f_2'(\alpha)\frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)} \right\}, \end{cases} \quad (24)$$

$$\dot{\beta} = f_2(\alpha)z_1, \quad (25)$$

где уравнение (25) отделяется в системе четвертого порядка (24), (25).

Достаточными условиями существования первого интеграла

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = \text{const} \quad (26)$$

из (4) для системы (24), (25) является выполнение двух групп условий:

$$\begin{cases} \Gamma_1(\alpha)f_1(\alpha) + f_1'(\alpha) = 0, \\ \frac{\Gamma_2(\alpha)f_2^3(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} + \Gamma_3(\alpha)f_2(\alpha) + f_2'(\alpha) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Уравнения (27) имеют следующие решения:

$$f_1(\alpha) = \frac{A_1}{\sqrt{1 + \rho'^2(\alpha)}}, \quad f_2(\alpha) = \frac{A_1}{\rho(\alpha)\sqrt{A_2A_1^2\rho^2(\alpha) - 1}}, \quad A_2 > 0, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

Выбрав функции $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ в качестве решений (28), перепишем систему (24), (25) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 \frac{A_1}{\sqrt{1 + \rho'^2(\alpha)}}, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2 \Gamma(\alpha), \\ \dot{z}_1 = z_2z_1 \Gamma(\alpha), \end{cases} \quad (29)$$

$$\dot{\beta} = z_1 \frac{A_1}{\rho(\alpha)\sqrt{A_2A_1^2\rho^2(\alpha) - 1}}, \quad (30)$$

где

$$\Gamma(\alpha) = \frac{A_1 \rho'(\alpha)}{\rho(\alpha) \sqrt{1 + \rho'^2(\alpha)} (A_2 A_1^2 \rho^2(\alpha) - 1)}. \quad (31)$$

Введя теперь в систему (29), (30) консервативное силовое поле $F(\alpha)$ и диссипацию $g(\alpha)$, $b > 0$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 f_1(\alpha) + b g(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F(\alpha) - z_1^2 \Gamma(\alpha), \\ \dot{z}_1 = z_2 z_1 \Gamma(\alpha), \end{cases} \quad (32)$$

$$\dot{\beta} = z_1 f_2(\alpha). \quad (33)$$

Для интегрирования системы (32), (33) поставим в соответствие системе третьего порядка (32) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dz_2}{d\alpha} = \frac{F(\alpha) - \Gamma(\alpha) z_1^2}{z_2 f_1(\alpha) + b g(\alpha)}, \\ \frac{dz_1}{d\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha) z_1 z_2}{z_2 f_1(\alpha) + b g(\alpha)}. \end{cases} \quad (34)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z_k = u_k \frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}, \quad k = 1, 2, \quad (35)$$

приводим систему (34) к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} + \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \right]' u_2 = \frac{F(\alpha) - \Gamma(\alpha) \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \right]^2 u_1^2}{-u_2 g(\alpha) + b g(\alpha)}, \\ \frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \frac{du_1}{d\alpha} + \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \right]' u_1 = \frac{\Gamma(\alpha) \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \right]^2 u_1 u_2}{-u_2 g(\alpha) + b g(\alpha)}, \end{cases} \quad (36)$$

что почти всюду эквивалентно

$$\begin{cases} \frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{F_3(\alpha) - \Gamma(\alpha) \frac{g(\alpha)}{f_1^2(\alpha)} u_1^2 - \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \right]' u_2^2 - b \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \right]' u_2}{u_2 + b}, \\ \frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \frac{du_1}{d\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha) \frac{g(\alpha)}{f_1^2(\alpha)} u_1 u_2 - \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \right]' u_1 u_2 - b \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \right]' u_1}{u_2 + b}, \end{cases} \quad (37)$$

где $F_3(\alpha) = F(\alpha)/g(\alpha)$.

Теперь для интегрирования системы (37) потребуем выполнения следующих двух условий:

(i) для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma(\alpha) \frac{g(\alpha)}{f_1^2(\alpha)} = \kappa \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \right]'; \quad (38)$$

(ii) для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$F_3(\alpha) = \lambda \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \right]'. \quad (39)$$

Действительно, при выполнении условий (38) и (39) система (37) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b u_2}{(\kappa - 1) u_1 u_2 - b u_1}. \quad (40)$$

Уравнение (40) имеет вид уравнения Абеля (см. [6, 9–11]). В частности, при $\kappa = -1$ оно обладает первым интегралом

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 - bu_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (41)$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\Theta_1(z_2, z_1; \alpha) = \frac{-z_2^2 f_1^2(\alpha) - z_1^2 f_1^2(\alpha) - bz_2 g(\alpha) f_1(\alpha) + \lambda g^2(\alpha)}{z_1 g(\alpha) f_1(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (42)$$

Аналогичным образом находятся два других первых интеграла (см. [17]). В частности, свойство (38) переписывается в следующем виде:

$$g(\alpha) = \frac{A_1 A_3}{\sqrt{1 + \rho^2(\alpha)}} \left| \frac{\rho^2(\alpha)}{A_2 A_1^2 \rho^2(\alpha) - 1} \right|^{-1/2\kappa} = C_1 = \text{const}, \quad (43)$$

где $A_1 \neq 0$, $A_2 > 0$, $A_1, A_2, A_3, \kappa \in \mathbb{R}$.

6. Заключение. В предыдущих работах автора [18–20] уже рассматривались задачи о движении свободного n -мерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к $(n - 1)$ -мерной сфере. Данная работа присоединяет к данной задаче динамики многомерного твердого тела задачу о движении точки по n -мерной сфере в неконсервативных силовых полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // Докл. АН СССР. — 1986. — 287, № 5. — С. 1105–1108.
2. Веселов А. П. Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $\text{so}(4)$ // Докл. АН СССР. — 1983. — 270, № 6. — С. 1298–1300.
3. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Совр. мат. прилож. — 2016. — 100. — С. 3–11.
4. Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа // Докл. АН СССР. — 1984. — 219, № 2. — С. 228–237.
5. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
7. Локишин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Маятниковые системы с динамической симметрией // Совр. мат. прилож. — 2016. — 100. — С. 76–133.
8. Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела // Функци. анал. прилож. — 1976. — 10, № 4. — С. 93–94.
9. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
10. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // в кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
11. Чаплыгин С. А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
12. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
13. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
14. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
15. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
16. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.

17. Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Итоги науки и техн. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — М.: ВИНТИ, 2013. — 125. — С. 5–254.
18. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
19. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
20. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
21. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
22. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам// Докл. РАН. — 2016. — 471, № 5. — С. 547–551.
23. Шамолин М. В. Четырехмерное твердое тело-маятник в неконсервативном поле// Мат. междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна-2016» — Воронеж, 2016. — С. 433–436.
24. Шамолин М. В. Интегрируемые системы в динамике на касательном расслоении к сфере// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2016. — № 2. — С. 25–30.
25. Шамолин М. В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
26. Шамолин М. В. Первые интегралы динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела// Устойчивость и колебания нелинейных систем управления/ Мат. XIII Междунар. конф., Москва, 1–3 июня 2016 г. — М., 2016. — С. 421–423.
27. Шамолин М. В. Первые интегралы динамических систем с диссипацией на касательном расслоении конечномерной сферы// Геометрический анализ и его приложения/ Мат. III Междунар. школы-конф., Волгоград, 30 мая–3 июня 2016 г. — Волгоград, 2016. — С. 217–222.
28. Шамолин М. В. Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2016. — 470, № 3. — С. 288–292.
29. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к сфере// Пробл. мат. анализ. — 2016. — 86. — С. 139–151.
30. Шамолин М. В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника на двумерной плоскости// Совр. мат. прилож. — 2016. — 100. — С. 36–57.
31. Шамолин М. В. Трансцендентные первые интегралы динамических систем на касательном расслоении к сфере// Совр. мат. прилож. — 2016. — 100. — С. 58–75.
32. Шамолин М. В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в трехмерном пространстве// Вестн. СамГУ. Естественнауч. сер. — 2016. № 3-4. — С. 75–97.
33. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
34. Шамолин М. В. Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Ч. 1// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и ее прилож. Тематич. обз. — 2017. — 134. — С. 6–128.
35. Шамолин М. В. Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Ч. 2// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и ее прилож. Тематич. обз. — 2017. — 135. — С. 3–93.
36. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и ее прилож. Тематич. обз. — 2017. — 137. — С. 104–117.
37. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// «Математическая теория оптимального управления»/ Мат. междунар. конф., посвящ. 90-летию акад. Р. В. Гамкрелидзе, Москва, 1–2 июня 2017 г. — М.: Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, 2017. — С. 124–127.
38. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
39. Shamolin M. V. Integrability in elementary functions of certain classes of nonconservative systems// Advances in Mathematics and Computer Science and Their Applications/ Proc. 7th Eur. Conf. on Applied Mathematics and Informatics (AMATHI'16), Venice, Italy, January 29–31, 2016. — Math. Comput. Sci. Engin. Ser. — Seoul: WSEAS Press, 2016. — 57. — С. 50–58.

- 40. *Shamolin M. V.* Cases of integrability corresponding to the motion of a pendulum in the three-dimensional space// Proc. XLIV Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» Dedicated to the 30th Anniversary of IPME RAS, St. Petersburg, June 27–July 2, 2016. — St. Petersburg, 2016. — С. 375–387.
- 41. *Shamolin M. V.* Cases of integrability corresponding to the motion of a pendulum in the three-dimensional space// Proc. Global Conference on Applied Physics and Mathematics, Rome, July 25–27, 2016. — Rome, 2016.
- 42. *Shamolin M. V.* First integrals of variable dissipation dynamical systems in rigid body dynamics// Int. Conf. «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems» (Pyatnitskiy's Conference), Moscow, 1–3 June 2016. — IEEE, 2016. — С. 1–4.
- 43. *Shamolin M. V.* Cases of integrability corresponding to the motion of a pendulum in the four-dimensional space// Proc. XLV Summer School-Conf. «Advanced Problems in Mechanics», St. Petersburg, June 22–27, 2017. — Saint Petersburg, 2017. — С. 401–413.

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ В СЛУЧАЯХ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С ОШИБКОЙ И ТОЧНЫХ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2018 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления, имеющих модульную структуру и конечный набор возможных неисправностей, сводится к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: задаче контроля (установлению критерия наличия неисправности в системе) и задаче диагностирования (поиску произошедшей неисправности). Показана принципиальная осуществимость решения задачи дифференциальной диагностики в случае точных траекторных измерений и траекторных измерений с ошибкой на уровне математических моделей.

Ключевые слова: диагностика, система управления, летательный аппарат, опорная неисправность, диагностическое пространство, задача контроля, задача диагностирования.

AMS Subject Classification: 62G05, 68U01

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	88
1. Задача диагностирования (случай точных траекторных измерений)	89
2. Случай траекторных измерений с ошибкой	101
3. Статистическое решение задачи дифференциальной диагностики	106
Заключение	108
Список литературы	108

ВВЕДЕНИЕ

Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта в любой точке внутри данной поверхности контроля (см. [1, 2, 15]).

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации можно выбрать поверхность контроля.

Задачу диагностирования будем решать, выполняя слежение за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики осуществлялся во время движения объекта, был выполнен в течение весьма краткого интервала времени, например за полупериод или четверть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. Эти обстоятельства не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00848-а).

1. ЗАДАЧА ДИАГНОСТИРОВАНИЯ (СЛУЧАЙ ТОЧНЫХ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ)

Рассмотрим динамическую систему, движение которой может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f_0(x, t), \quad (1.1)$$

где $x(t)$, $f_0(x, t)$ — n -мерные вектор-функции. Начальные условия уравнения (1.1) будем считать принадлежащими некоторой ограниченной области. Кроме того, предположим, что функция $f_0(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения уравнений (1.1) в некоторой области пространства $\mathbb{R}^{n+1}(x, t)$.

Пусть осуществлен синтез управления, причем его структура и параметры выбраны таким образом, что уравнения (1.1) описывают желаемое движение, т.е. движение $x(t)$, близкое к некоторой программной траектории $x_*(t)$. Такую схему принято называть *исправной*.

Конечному набору опорных невырожденных неисправностей (см. [3, 14]) из класса возможных поставим в соответствие набор обыкновенных дифференциальных уравнений того же порядка (только конечного):

$$x' = f_j(x, t), \quad j = 1, \dots, l. \quad (1.2)$$

Здесь $f_j(x, t)$ — известные вектор-функции, соответствующие той или иной неисправности.

Модели (1.1) и (1.2) принадлежат одному фазовому пространству и отличаются лишь своей структурой. Если в заранее не известный момент времени происходит одна из возможных неисправностей, то траектория системы (1.1) изменяется и непрерывно продолжается траекторией одной из систем (1.2). Набор моделей (1.1) и (1.2) невырожден, и их можно рассматривать объединенными:

$$x' = f_j(x, t), \quad j = 0, \dots, l. \quad (1.3)$$

В системе (1.1) могут возникать неисправности, не предусмотренные априорным набором (1.2). Такие неисправности могут появляться, например, в окрестностях *опорных неисправностей*; это значит, что функции в правых частях уравнений (1.3) могут содержать элементы с неполной информацией. Недоопределенность описания возникает в связи с тем, что законы изменения некоторых элементов в (1.3) могут отличаться от законов, предусмотренных в классе возможных неисправностей, и эти законы неизвестны.

Для описания систем, содержащих элементы с неполной информацией, используют дифференциальные включения (см. [4, 13, 17]):

$$x' \in F(x, t), \quad (1.4)$$

где вектор x характеризует отклонение системы (1.1) от состояния, предписанного целью управления, а через $F(x, t)$ обозначено множество скоростей (1.3):

$$F(x, t) \in f_j(x, t), \quad f = 0, \dots, l, \quad (1.5)$$

в частности, таких, которые априори неизвестны, но могут возникнуть и принадлежать, например, сферам влияния скоростей опорных систем (1.3).

Под решением дифференциального включения (1.4), (1.5) [5] будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, удовлетворяющую соотношению $x' \in F(x(t), t)$ при всех t на рассматриваемом интервале времени и соотношению $x(t_0) \in \Xi$.

Достаточные условия существования и единственности таких решений для систем с фазовыми ограничениями приводятся в [6, 7].

Заметим, наконец, что если в рассматриваемой системе (1.1) произойдет неисправность, не предусмотренная априорным списком опорных неисправностей (1.2), то эта неисправность также должна быть обнаружена как одна из опорных неисправностей, или сообщение о такой ситуации будет являться одним из возможных выходов работы алгоритма, решающего задачу диагностирования. В принципиальном плане важнее знать, в каком датчике произошла неисправность, чем какая конкретно неисправность произошла в данном датчике.

Процесс анализа траекторий систем (1.3) после выхода фазовой траектории вектора контроля $y(t)$ на поверхность контроля π_k , т.е. процесс, решающий задачу диагностирования, назовем *алгоритмом диагностирования*.

Перейдем к постановке задачи и построению алгоритмов диагностирования.

В дальнейшем будем считать, что время диагностирования τ задано и таково, что $\tau_0 < \tau < T_0$. Для этого случая сформулируем и докажем теорему, которая дает возможность построить алгоритмы диагностирования.

Введем в рассмотрение вектор

$$z(t) = (x_{d_1}, \dots, x_{d_q}) = (z_1, \dots, z_q), \quad q = 1, \dots, n, \quad (1.6)$$

компоненты которого являются подмножеством компонент фазового вектора состояния $x(t)$, причем размерность множества компонент вектора контроля $y(t)$ не превышает размерность подмножества компонент вектора $z(t)$, т.е. $m \leq q$. Будем предполагать, что вектор $z(t)$ таков, что характер функции $f_j(x, t)$ проявляется в поведении компонент этого вектора. Вектор $z(t)$ назовем *вектором диагностирования*.

Задача диагностирования может быть сформулирована следующим образом.

Пусть известны невырожденные дифференциальные уравнения (1.3), поверхность контроля π_k , момент времени τ_0 выхода вектора контроля на π_k и значение фазового вектора $x(\tau_0)$. Требуется по измерению фазового вектора $x(t)$ в некоторые последующие после выхода на π_k моменты времени t_k на интервале $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$ с помощью вектора диагностирования $z(t)$ однозначно определить номер j функции $f_j(x, t)$ из (1.3); здесь τ — малый промежуток времени, $\tau_0 + \tau < T_0$.

Таким образом, по информации о выходе системы на поверхность контроля и в результате слежения за последующей траекторией объекта необходимо определить номер j возникшей в системе управления объектом неисправности из априорного списка в l неисправностей.

Перейдем теперь к более детальной формализованной постановке задачи и результатам, которые следуют из этой постановки. При этом начнем с рассмотрения случая $q = n$.

Введем следующие обозначения. Через $x_j(t)$ будем обозначать точку траектории j -й системы (1.3). Обозначение $x(t)$ будем применять в рассуждениях, относящихся ко всем системам, или как общее обозначение точки траектории, когда ее принадлежность той или иной системе (1.3) не установлена, т.е. при описании действительного состояния рассматриваемой системы.

Примем за начало отсчета времени момент выхода $x(t)$ на поверхность π_k . Введем некоторое натуральное число N . Будем производить траекторные измерения в следующие моменты времени:

$$\tau_0 = 0, \quad t_1 = \frac{\tau}{N}, \quad t_2 = \frac{2\tau}{N}, \quad \dots, \quad t_N = \tau.$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_{0j} &= x_j(0), & x_{1j} &= x_j\left(\frac{\tau}{N}\right), & x_{2j} &= x_j\left(\frac{2\tau}{N}\right), & \dots, & x_{Nj} &= x_j(\tau), \\ x_0 &= x(0), & x_1 &= x\left(\frac{\tau}{N}\right), & x_2 &= x\left(\frac{2\tau}{N}\right), & \dots, & x_N &= x(\tau). \end{aligned}$$

Предположим, что произошла неисправность, траектория системы вышла на π_k и далее, в течение времени τ , мы получили значения $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$. Требуется проверить полную систему l гипотез: j -я гипотеза, $j = 0, \dots, l$, — это утверждение о том, что траектория $x(t)$ есть траектория j -й системы (1.3), т.е. $x \equiv x_j$ при условии $x_{0j} = x_0$.

Рассмотрим следующий функционал от $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N, x_{1j}, \dots, x_{Nj}$:

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^n (x_{is} - x_{ijs})^2, \quad j = 0, \dots, l. \quad (1.7)$$

Здесь x_{is} — s -я компонента вектора состояния $x(t)$, измеренная в момент времени t_i , $i = 1, \dots, N$, x_{ijs} — s -я компонента вектора состояния в момент времени t_i , полученная в результате интегрирования системы (1.3) с f_j в правой части.

Для каждого j и N на интервале $[0, \tau]$ функционал S_j^N имеет свое значение, т.е. является переменной величиной, заданной на множестве функций и зависящей от выбора одной или нескольких функций.

Сформулируем теперь предельную теорему для случая точных траекторных измерений.

Теорема 1.1. *Для невырожденного конечного набора систем обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$x' = f_j(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \in X^0, \quad j = 0, \dots, l, \quad (1.8)$$

дифференциального включения $x' \in F(x, t) \in f_j(x, t)$ и всех j найдутся такие наборы чисел S_j^N , M_j , S_j и $\bar{N}$, что для $N > \bar{N}$ с помощью функционала S_j^N из (1.7), который запишем в виде

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N (x_i - x_{ij})^2, \quad j = 0, \dots, l, \quad (1.9)$$

возникшая в процессе движения в неизвестный момент времени на интервале $[t_0, T_0]$ неисправность, удовлетворяющая критерию контроля, будет диагностирована однозначно как одна из систем (1.8) с номером j , если

$$S_j^N \leq M_j : \quad M_j(N) = \frac{\max S_j^N}{\{x_0 \in X^0 : x_0 \in \pi_k\}} = o\left(\frac{1}{N}\right) \quad (1.10)$$

или если

$$S_j^N = S_j : \quad S_j = \min_{\mu} S_{\mu}^N. \quad (1.11)$$

Доказательство. Запишем функционал (1.9) в приращениях, сохраняя для него прежнее обозначение:

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N (\Delta_i x - \Delta_i x_j)^2, \quad (1.12)$$

где $\Delta_i x = |x_i - x_{i-1}|$ — измеренное приращение действительной траектории рассматриваемой системы, $\Delta_i x_j = |x_{ij} - x_{i-1j}|$ — вычисленное приращение ожидаемой траектории j -й системы (1.3) от начального значения x_{i-1j} .

Предположим сначала, что величины $\Delta_i x_j$, $i = 1, \dots, N$, $j = 0, \dots, l$, представляются своими точными значениями. Тогда, если j -я гипотеза верна, то, как нетрудно видеть, $S_j^N \equiv 0$, поэтому мы отбрасываем все гипотезы с такими номерами μ , что $S_{\mu}^N \neq 0$. Очевидно, что мы не можем отбросить в этом случае верную гипотезу.

Но предположение о том, что в нашем распоряжении могут быть точные значения $\Delta_i x_{jk}$, не оправдано. Мы располагаем только величинами $x_0, x_1, \dots, x_N$, а также правыми частями систем (1.3). Следовательно, мы можем организовать лишь приближенное нахождение величин $\Delta_i x_{jk}$ путем численного интегрирования систем (1.3). Мы располагаем на i -м шаге начальным условием x_{i-1} и ищем приращения решения j -й системы за один шаг.

В теории численных решений дифференциальных уравнений рассматриваются одношаговые процессы и даются приближенные формулы для $\Delta_i x_{jk}$ с оценками погрешностей. Общая одношаговая формула для j -й системы (1.3) (см. [8, 9]) имеет вид

$$\Delta_i x_j = x_{ij} - x_{i-1j} \cong h \Phi_j(x_{i-1j}, h) \quad (1.13)$$

с точностью до $o(h^p)$, где h — длина шага (в нашем случае $h = \tau/N$), а $\Phi_j(x_{i-1}, h)$ — вектор-функция от x_{i-1} и h , зависящая, кроме того, от правой части f_j системы; p — натуральное число, зависящее от вида Φ_j .

Подставляя в (1.12) приближенные выражения (1.13) для $\Delta_i x_{jk}$ и полагая $h = \tau/N$, получим

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \left(\Delta_i x - \frac{\tau}{N} \left| \Phi_j \left(x_{i-1}, \frac{\tau}{N} \right) \right| \right)^2, \quad j = 0, \dots, l. \quad (1.14)$$

Пусть $x \equiv x_j$; тогда (1.14) будет иметь вид

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \left(\Delta_i x_j - \frac{\tau}{N} \left| \Phi_j \left(x_{i-1j}, \frac{\tau}{N} \right) \right| \right)^2, \quad j = 0, \dots, l. \quad (1.15)$$

Заметим, что величины S_j^N в этом случае будут функциями точек выхода x_{0j} на поверхность π_k . Действительно, все x_{ij} , $i = 1, \dots, N$, принадлежат траектории $x_j(t)$, $t \in [0, T]$, которая определяется начальным условием x_{0j} .

Предположим, что Φ_j , $j = 0, \dots, l$, ограничены и непрерывны по совокупности координат x и h , что затем будет выполняться при конкретных Φ_j . Предположим также, что функции в (1.15), а именно, $S_j^N = S_j^N(x_0)$, $j = 0, \dots, l$, монотонно сходятся к нулю при $N \rightarrow \infty$ в каждой фиксированной точке поверхности π_k . Это предположение также будет выполняться, когда мы рассмотрим конкретные Φ_j .

Из этих предположений сразу следует ограниченность и непрерывность $S_j^N(x_0)$ на поверхности π_k . Отсюда следует, что существует конечное значение

$$M_j(N) = \max_{x_0 \in \pi_k} S_j^N(x_0). \quad (1.16)$$

Из монотонной сходимости к нулю $S_j^N(x_0)$ при $N \rightarrow \infty$ в каждой точке поверхности контроля и непрерывности $S_j^N(x_0)$ на этой поверхности следует сходимость $M_j(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, $j = 0, \dots, l$.

Зададимся определенным N . Пусть траектория x вышла на поверхность контроля, то есть произошла неисправность. Проверяем j -ю гипотезу, $j = 1, \dots, l$, формируя (1.14).

Очевидно, если j -я гипотеза верна, то $S_j^N \leq M_j$, поэтому отбрасываем все гипотезы с такими номерами μ , для которых $S_\mu^N > M_\mu$. В этом случае мы не можем отбросить верную гипотезу.

Таким образом, за счет того, что отбрасываются гипотезы о возможности некоторых неисправностей, мы, вообще говоря, сужаем априорный набор возможных неисправностей до апостериорного набора. При условии j -й неисправности величина S_j^N есть функция точек поверхности контроля, а M_j — константы, поэтому в каждой точке поверхности определен размер апостериорного набора. Обозначим его $l_j(x)$, $x \in \pi_k$.

После того, как в общем случае построен алгоритм диагностирования при точных траекторных измерениях, приведем обычно применяемые на практике одношаговые формулы Эйлера:

$$\Phi_j \left(x_{i-1}, \frac{\tau}{N} \right) = f_j(x_{i-1}), \quad p = 1. \quad (1.17)$$

Если подставить формулы Эйлера (1.17) в (1.14), то величины S_j^N будут характеризовать равномерно вдоль всей траектории j -й системы то, насколько разнятся поля направлений j -й и μ -й систем.

Наконец, получим некоторые результаты, необходимые для доказательства предельной теоремы.

Вновь рассмотрим выражения (1.15). Из (1.13) следует, что

$$S_j^N(x_{0j}) = \sum_{i=1}^N \left(\bar{\sigma} \left(\left(\frac{\tau}{N} \right)^p \right) \right)^2 = \sum_{i=1}^N o \left(\left(\frac{\tau}{N} \right)^{2p} \right) = o \left(\frac{1}{N^{2p-1}} \right).$$

Положим $2p - 1 = \nu$; тогда

$$S_j^N(x_{0j}) = o \left(\frac{1}{N^\nu} \right)$$

для любой точки $x_{0j} \in \pi_k$ при $N \rightarrow \infty$. Это значит, что

$$N^\nu S_j^N(x_{0j}) \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

При доказательстве сходимости $M_j(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ мы требовали, чтобы в каждой точке поверхности контроля была сходимость $S_j^N(x_{0j}) \rightarrow 0$, монотонная при $N \rightarrow \infty$. Сейчас мы потребуем, чтобы в каждой точке поверхности контроля последовательность $\{N^\nu S_j^N(x_{0j})\}$,

$N = 1, 2, \dots$, начиная с некоторого $N > N_0$, одного для всей поверхности контроля, сходилась к нулю монотонно при $N \rightarrow \infty$. Заметим, что величины $N^\nu S_j^N(x_{0j})$ непрерывны на поверхности контроля.

Известно, что последовательность непрерывных на компакте функций, монотонно сходящаяся к нулю в каждой точке, сходится к нулю равномерно на этом компакте.

Заметим, что рассмотренные выше поверхность контроля π_k , сфера контроля, эллипсоид контроля, трубка контроля являются ограниченными замкнутыми множествами, т.е. являются компактными.

Итак, $\{N^\nu S_j^N(x_{0j})\}$, $N = 1, 2, \dots$, — последовательность непрерывных на поверхности контроля функций, монотонно сходящаяся к нулю в каждой точке поверхности. По указанной выше теореме $N^\nu M_j(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, и, так как

$$N^\nu M_j(N) = \max_{x_{0j} \in \pi_k} (N^\nu S_j^N(x_{0j})),$$

то стремление $N^\nu M_j(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ означает, что $M_j(N) = o(N^{-\nu})$, где $\nu = 2p - 1$, $p \geq 1$. Поэтому условие (1.10) теоремы $M_j(N) = o(N^{-1})$ всегда выполнено.

Заметим далее, что на траектории μ -й ($\mu = 0, \dots, l$) системы (1.3) при $j \neq \mu$

$$\Delta_i x_\mu = \frac{\tau}{N} f_\mu(x_{i-1\mu}) + o\left(\frac{\tau}{N}\right), \quad \frac{\tau}{N} \Phi_j\left(x_{i-1\mu}, \frac{\tau}{N}\right) = \frac{\tau}{N} f_j(x_{i-1\mu}) + o\left(\frac{\tau}{N}\right).$$

Подставим эти выражения в (1.15). Получим:

$$\begin{aligned} S_j^N &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\tau}{N} |f_\mu(x_{i-1\mu})| - \frac{\tau}{N} |f_j(x_{i-1\mu})| + o\left(\frac{\tau}{N}\right) \right)^2 = \\ &= \frac{\tau}{N} \sum_{i=1}^N \left(|f_\mu(x_{i-1\mu})| - |f_j(x_{i-1\mu})| + o(1) \right)^2 \frac{\tau}{N}. \end{aligned}$$

Суммы

$$\sum_{i=1}^N \left(|f_\mu(x_{i-1\mu})| - |f_j(x_{i-1\mu})| + o(1) \right)^2 \frac{\tau}{N}$$

сходятся при $N \rightarrow \infty$ к интегралам

$$I_{\mu,j}(x_{0\mu}) = \int_{x_{0\mu}}^{x_\mu(\tau)} \left(|f_\mu(x_\mu)| - |f_j(x_\mu)| \right)^2 dx_\mu,$$

для которых, в силу невырожденности уравнений (1.3), найдется такое $\varepsilon > 0$, что $I_{\mu,j}(x_{0\mu}) > \varepsilon$ для любых $\mu, j = 0, \dots, l$, $\mu \neq j$ при любом $x_{0\mu} \in \pi_k$.

Таким образом, показано, что

$$S_j^N(x_{0\mu}) \cong \frac{c_{\mu j}}{N},$$

где $c_{\mu j}$ — некоторые константы, удовлетворяющие условию $c_{\mu j} > \varepsilon \tau$, т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N S_j^N(x_{0\mu}) = c_{\mu j} > \varepsilon \tau$$

для всех $x_{0\mu} \in \pi_k$.

Так как к тому же $M_j(N) = o(N^{-1})$, найдется такое N_1 , что неравенство

$$S_j^N(x_{0\mu}) > \frac{\varepsilon \tau}{N} > M_j(N) \quad (1.18)$$

будет выполняться для всех $N > N_1$, всех $\mu \neq j$ и всех $x_{0\mu} \in \pi_k$. Это означает, что все j -е гипотезы при $j \neq \mu$ будут отвергаться, и будет выполняться только неравенство

$$S_\mu^N(x_{0\mu}) \leq M_\mu, \quad \mu = j,$$

т.е. $l_\mu(x_{0\mu}) = 1$.

Таким образом, в случае точных траекторных измерений возникшая в системе неисправность из априорного списка неисправностей будет однозначно отфильтровываться.

Процедура диагностирования неисправности сводится к следующему.

Алгоритм 1.1. В процессе функционирования объекта после выхода его траектории на поверхность контроля π_k в соответствии с функционалом диагностирования (1.7), (1.9), формируются числа S_j^N , и каждое S_j^N сравнивается с заранее подобранными константами M_j . Если $S_j^N \leq M_j$, то j -я система (1.3) включается в апостериорный набор l_j , в противном случае — исключается. Теорема утверждает, что, таким образом, номер функционального состояния объекта (неисправности) из известного списка может быть диагностирован однозначно, т.е. $l_j = 1$.

Прежде чем изложить методику априорного счета параметров алгоритма 1.1, рассмотрим доказательство второй части (1.11) теоремы. В силу непрерывности функционала S_j^N оно очевидно вытекает из доказательства первой части теоремы.

Действительно, пусть S_j^N удовлетворяет условию (1.11). Возьмем $\bar{N} = \max_j N_j$, где N_j — такое число траекторных измерений для j -й системы (1.3), что для всех $N > N_j$ выполняется оценка (1.18). Тогда при любых $N > \bar{N}$ условия

$$S_j^N > \frac{\varepsilon\tau}{N} > M_j(N)$$

выполняются для всех упомянутых j .

Пусть произошла μ -я неисправность, т.е. действительная траектория является одной из списочных и $S_j = \min_{\mu} S_{\mu}^N$. Тогда

$$S_j > M_{\mu} \quad \text{для } \mu \neq j, \quad S_j \leq M_{\mu} \quad \text{для } \mu = j.$$

Таким образом, и в случае $S_j = \min_{\mu} S_{\mu}^N$ теорема верна, и в пределе на интервале $[0, \tau]$ можно диагностировать все системы (1.3) из априорного списка.

На этапе проектирования процесс предварительного выбора N на уровне математических моделей и программ может быть осуществлен следующим образом (алгоритм 1.2).

Алгоритм 1.2. После выхода траектории объекта на поверхность контроля π_k для всевозможных j из списка заранее известных неисправностей объекта (1.3) и $N = 1$ составляются числа S_j^N , из которых выбирается наименьшее S_{j_1} . Номер j_1 , соответствующий наименьшему S_j , указывает номер случившейся неисправности. Затем вычисляется S_j^N для $N = 2$ и определяется j_2 . При равенстве $j_1 = j_2$ неисправность в объекте считается правильно определенной, и алгоритм заканчивает работу. В противном случае, т.е. если $j_1 \neq j_2$, вычисляется S_j^N для $N = 3$ и производится сравнение j_2 и j_3 и т. д.

Если τ не ограничено заранее сверху, то при осуществлении этого процесса может быть определен момент времени τ ($\tau = Nh$) окончания диагностирования.

Таким образом, теорема доказана. Кроме того, сформулированы алгоритмы, позволяющие диагностировать неисправности, предусмотренные априорным списком неисправностей. Однако в силу непрерывности происходящих процессов при работе алгоритмов и в силу определений окрестностей влияния, введенные в [10], удовлетворяющие критерию контроля неисправности, возникшие и развивающиеся в окрестностях списочных неисправностей, т.е. неисправностей, близких списочным, возможно ведущих к ним, но не являющихся ими, будут диагностироваться с помощью предлагаемых алгоритмов как соответствующие списочные неисправности, близкие к происшедшим. Поэтому можно считать теорему доказанной полностью. $\square$

Теорема позволила сформулировать два алгоритма диагностирования. Первый из этих алгоритмов требует запоминания констант.

Рассмотрим методику априорного счета этих констант и параметров алгоритма 1.1.

Параметрами алгоритма диагностирования являются M_j , N , l_j , а также вероятность отбросить верную гипотезу, т.е. вероятность ложного срабатывания λ . Непосредственно для алгоритма диагностирования требуются только M_j и N . Эти параметры рассчитываются заранее и вносятся

в вычислитель на объекте. Что же касается параметров λ и l_j , то они являются показателями эффективности алгоритма.

Заметим, что задача аналитического нахождения в общем виде приемлемых констант N , M_j , $j = 0, \dots, l$, обеспечивающих заданную величину λ и l_j , крайне трудна уже в случае линейных систем (1.3). В то же время для конкретных систем (1.3) выбор N , нахождение M_j , подсчет оценок для λ и l_j с высокой заданной точностью можно проводить на ЭВМ методом статистических испытаний Монте-Карло, т.е. построением искусственной вероятностной модели, обладающей свойствами изучаемого процесса.

Очевидно, что функции S_j^N , $j = 0, \dots, l$ (см. (1.7)), зависят от реализации начального положения $x_0 \in X^0$, т.е. являются неотрицательными случайными величинами; $l_j(x_0)$, $x_0 \in \pi_k$, также можно рассматривать как функции случайных точек выхода траектории j -й системы на поверхность контроля, т.е. $l_j(x_0)$ также являются случайными величинами. Если ввести функцию плотности $P_j(\zeta)$, $\zeta \geq 0$ случайных величин S_j^N , то M_j будет параметром этой функции:

$$\int_{M_j}^{+\infty} P_j(\zeta) d\zeta = \lambda.$$

Имея это в виду, сформулируем задачу априорного определения параметров M_j и N (см. [10,11]).

Пусть даны j -я система (1.3), поверхность контроля π_k и вероятность ложного срабатывания λ . Требуется для любых случайным образом выбранных начальных условий $x_0 \in X^0$ определить такие M_j и N , чтобы с вероятностью, не превышающей λ , выполнялось неравенство $S_j^N > M_j$, т.е. вероятность противоположного события

$$P\{S_j^N \leq M_j\} > 1 - \lambda$$

и при этом $l_j = 1$.

Будем моделировать на компьютере j -ю неисправность ($j = 1, \dots, l$) следующим образом. С помощью датчика случайных чисел реализуем начальную точку траектории j -й системы. Далее, интегрируя эту систему до поверхности контроля π_k и на отрезке времени $[0, \tau]$ за поверхностью, получим точки $x_{0j}, x_{1j}, \dots, x_{Nj}$. Накладывая на эти точки некоторый нормально распределенный шум, получим требуемые нам точки для формирования чисел S_j^N . Производя независимую выборку j -х неисправностей, мы будем получать и независимую выборку чисел S_j^N .

Объем выборки чисел S_j^N обозначим через γ , а оценку M_j по выборке объема γ — через $\overline{M}_j$. Проводя очередную реализацию, будем полагать $\overline{M}_j$ равным такому S_j^N из получившейся выборки, при котором отношение δ/γ , где δ — количество точек, для которых выполнено неравенство $S_j^N > M_j$, наименее уклонялось от λ .

Оценкой $\bar{\lambda}$ для λ примем δ/γ . Асимптотически, по теореме Бернулли, при $\gamma \rightarrow \infty$ имеем оценки $\bar{\lambda} = \delta/\gamma \rightarrow \lambda$ и $\overline{M}_j \rightarrow M_j$.

По интегральной теореме Муавра—Лапласа вероятность β того, что частота δ/γ отклонится от вероятности λ не более, чем на α , приближенно равна

$$\beta = P\left\{\left|\frac{\delta}{\gamma} - \lambda\right| \leq \alpha\right\} \cong \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda(1-\lambda)}}} e^{-x^2/2} dx \quad (1.19)$$

(см. [12,13]).

Задавшись приемлемыми α и β из (1.19), можно найти соответствующий объем выборки γ . При этом оценка $\overline{M}_j$ будет удовлетворять требуемой от $\bar{\lambda} = \delta/\gamma$ точности.

Итак, с требуемой к $\bar{\lambda}$ точностью найдем $\overline{M}_j$. В алгоритме в качестве λ и M_j будем применять их оценки $\bar{\lambda}$ и $\overline{M}_j$.

Таким образом, определив M_j и имея вместо λ близкую к ней вероятность отбросить верную гипотезу $\bar{\lambda}$, возьмем выборку j -х неисправностей объема γ_1 . Она даст нам выборку $l_j(x_0)$. Обозначим через $l_j^k(x_{0j})$, $k = 1, \dots, \gamma_1$, k -ю реализацию $l_j(x_{0j})$.

За оценку $\bar{l}_j$ среднего l_j примем

$$\bar{l}_j = \frac{1}{\gamma_1} \sum_{k=1}^{\gamma_1} l_j^k(x_{0j}),$$

а за оценку $\bar{\sigma}_j$ среднеквадратического отклонения σ_j примем

$$\bar{\sigma}_j = \left[\frac{1}{\gamma_1} \sum_{k=1}^{\gamma_1} (\bar{l}_j - l_j^k(x_{0j}))^2 \right]^{1/2};$$

при этом $\bar{l}_j$ является случайной величиной. Известно, что математическое ожидание оценки $\bar{l}_j$ удовлетворяет уравнению $M(\bar{l}_j) = l_j$, а дисперсия оценки $\bar{l}_j$ (см. [1, 14]) такова:

$$M((\bar{l}_j - l_j)^2) = \frac{\sigma_j^2}{\gamma_1}.$$

Согласно центральной предельной теореме, если γ_1 велико (достаточно $\gamma_1 > 30$) и величины $l_j^k(x_0)$, $k = 1, \dots, \gamma_1$, не коррелированы, то $\bar{l}_j$ подчиняется нормальному распределению с математическим ожиданием l_j и среднеквадратическим отклонением $\frac{\bar{\sigma}_j}{\sqrt{\gamma_1}}$. Следует заметить, что величина σ_j нам неизвестна, но приближенно (при больших γ_1) заменим ее оценкой $\bar{\sigma}_j$ и будем считать среднеквадратическое отклонение оценки $\bar{l}_j$ равным $\bar{\sigma}_j/\sqrt{\gamma_1}$. Таким образом, можно записать оценку для l_j в виде $\bar{l}_j \pm \frac{\bar{\sigma}_j}{\sqrt{\gamma_1}}$ (см. [15]).

Итак, задавшись N (например, $N = 1$) и λ , с требуемой точностью можно найти M_j ($j = 1, \dots, l$), λ и l_j . Если найденные l_j нас не устраивают, то можно увеличить N и произвести подсчет сначала. Продолжая процесс и опираясь на тот факт, что $l_j = 1$ при $N \rightarrow \infty$, можно найти такое N , при котором $l_j = 1$.

Можно поступить несколько иначе. Для каждой из систем (1.3) найти свои N_j и M_j , удовлетворяющие условию $l_j = 1$. Тогда для любого $N > \max_j N_j$ будет обеспечено условие $l_j = 1$.

Таким образом, для случая точных траекторных измерений теорема полностью доказана.

Рассмотрим далее обобщения, для которых условия теоремы не нарушаются.

1. Пусть заданы уравнения (1.8) и вектор $z(t)$ диагностирования (1.6). В этом случае вместо функционала (1.7) можно использовать функционал

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^q (z_{ijs} - z_{is})^2, \quad q < n. \quad (1.20)$$

В поведении компонент вектора диагностирования $z(t)$ проявляется характер функций $f_j(x, t)$, $j = 1, \dots, l$; поэтому, очевидно, теорема и обусловленные ею алгоритмы диагностирования остаются справедливыми и при диагностике с помощью функционала (1.20). Доказательство теоремы для этого случая легко продублировать.

В связи с доказательством этой части теоремы сделаем два уточняющих замечания.

Замечание 1.1. Рассмотрим функционал (1.20), который запишем в следующем виде (индекс N для простоты опускаем):

$$S_j^d = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2, \quad j = 1, \dots, l, \quad q < n,$$

и аналогичный функционал

$$S_j^\Delta = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (\Delta_{ijk} - \Delta_{ik})^2,$$

в котором, подобно теореме,

$$\Delta_{ik} = |z_{ik} - z_{i-1k}|, \quad \Delta_{ijk} = |z_{ijk} - z_{i-1jk}|.$$

После возведения в квадрат и элементарных преобразований получим

$$S_j^\Delta = S_j^d + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ijk} - z_{ik}| \cdot | - z_{i-1jk} + z_{i-1k} |.$$

Вторая и третья суммы в выражении для S_j^Δ положительны, и из сходимости S_j^Δ следует сходимость S_j^d .

Замечание 1.2. Пусть j -я неисправность может быть диагностирована с помощью функционала S_j^d , то есть существует число M_j , такое что $S_j^d \leq M_j$ и $S_j^d > M_j$ для некоторого $J \neq j$. Покажем, что тогда эта неисправность может быть диагностирована и с помощью функционала S_j^Δ , в котором теперь $\Delta_{ik} = z_{ik} - z_{i-1k}$, с числом $\overline{M}_j = 4M_j$.

Действительно,

$$\begin{aligned} S_j^\Delta &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{i-1jk} - (z_{ik} - z_{i-1k}))^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik} - (z_{i-1jk} - z_{i-1k}))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})(z_{i-1jk} - z_{i-1k}) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ijk} - z_{ik}| \cdot |z_{i-1jk} - z_{i-1k}| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 = 4S_j^d. \end{aligned}$$

Таким образом, из сходимости S_j^d к числу, меньшему M_j , следует сходимость S_j^Δ к числу, меньшему $4M_j$, и, тем самым, диагностирование j -й неисправности.

2. Если время диагностирования τ заранее не задано, то для каждой из систем (1.3) по изложенной процедуре можно выбрать свои N_j , M_j и τ_j такие, при которых $l_j = 1$. В этом случае для любых $N > \max_j N_j$ и $\tau > \max_j \tau_j$ будет выполнено условие $l_j = 1$, т.е. диагностирование неисправностей при выбранных N и τ будет осуществляться однозначно.

Можно ставить задачу о выборе минимального τ .

3. За исходную точку начала процесса диагностирования в предыдущем выбиралась точка выхода траектории вектора контроля на поверхность контроля, т.е. сначала решалась задача о наличии неисправности, а затем задача диагностирования. Алгоритм диагностирования включался только на поверхности контроля. Нас не интересовало поведение системы внутри поверхности контроля. Траектории систем с неисправностями из априорного списка на рассматриваемом интервале времени встречаются с поверхностью контроля. Такой подход не всегда бывает эффективным способом решения задачи о наличии неисправности в системе. Это проявляется в тех случаях, когда необходимо рассматриваются неисправности, не ведущие к нарушению устойчивости системы. Траектории систем с такими неисправностями могут не выходить на поверхность контроля достаточно длительное время или не выходить на нее вообще. Поэтому в некоторых случаях целесообразно отказаться от использования поверхности контроля и строить алгоритмы непрерывной экспресс-диагностики. Суть такой диагностики состоит в том, что алгоритм диагностирования периодически включается в определенные моменты времени и работает на определенном временном интервале. Моменты включения алгоритма диагностирования и интервалы времени его работы могут вырабатываться заранее или в процессе движения объекта.

Рассмотренные выше алгоритмы диагностирования решают задачу диагностики систем управления и при непрерывной экспресс-диагностике как в случае диагностики только опорных неисправностей, так и таких, которые могут возникнуть в их окрестностях и не предусмотрены априорным списком!

4. Как уже отмечалось, набор функций $f_j(x, t)$ в (1.3) может содержать элементы с неполной информацией. Недоопределенность описания возникает в связи с тем, что законы изменения некоторых элементов в (1.3) могут отличаться от законов, предусмотренных в классе возможных неисправностей, и эти законы неизвестны.

В [1, 2, 15] даны определение и математическое моделирование окрестностей опорных неисправностей. Эти окрестности являются областями влияния опорных неисправностей в том смысле, что будут близкими траектории вектора состояния объекта с опорной неисправностью и с неисправностью, происшедшей в окрестности опорной неисправности. Если окрестности опорных неисправностей для данного датчика пересекаются, то большее влияние на неисправность, происшедшую в области пересечения окрестностей, будет у той опорной неисправности, у которой наблюдается большая близость траекторий.

В этом смысле не предусмотренные опорным списком неисправности, происшедшие в окрестностях опорных неисправностей, можно с помощью рассмотренных алгоритмов диагностировать как опорные неисправности. Алгоритмы не выявят конкретно происшедшую неисправность, а диагностируют одну из опорных неисправностей, в достаточно малой окрестности которой произошла конкретная неисправность.

5. Рассмотрим другие функционалы, близкие к (1.7) и решающие задачу диагностирования динамических управляемых систем в аналогичных или несколько отличных от уже рассмотренных условиях.

Предположим, что произошла неисправность, траектория вышла на поверхность контроля π_k и далее, в течение времени τ получены значения $x_0, x_1, \dots, x_N$. Надо проверить полную систему l возможных ситуаций: j -я ситуация ($j = 1, \dots, l$) — это утверждение о том, что траектория $x(t)$ есть траектория j -й системы (1.2), т.е. $x \equiv x_j$ при условии $x_{0j} = x_0$.

Рассмотрим следующие l функционалов $\Delta_1 x_j, \dots, \Delta_N x_j$ (см. (1.11)) от $x_0, x_1, \dots, x_N$:

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n |x_{ik} - x_{i-1k} - \Delta_i x_{jk}|^2, \quad j = 1, \dots, l, \quad (1.21)$$

где $\Delta_i x_{jk}$ — приращение решения j -й системы (1.2) от начального значения x_{i-1} на отрезке времени

$$\frac{(i-1)\tau}{N} \leq t \leq \frac{i\tau}{N}.$$

Смысл функционала (1.21) состоит в следующем. Проверяя j -ю возможную ситуацию на каждом шаге, происходит сравнение (в смысле квадратического отклонения) действительных и ожидаемых приращений x , т.е. S_j^N характеризует среднеквадратическое отклонение ожидаемой траектории от траектории, реализующейся в действительности. Иначе говоря, с помощью функционала (1.21) осуществляется сравнение полей направления действительной и ожидаемых траекторий динамической управляемой системы (1.1).

Функционалы (1.7), (1.12) и (1.21) близки между собой, удовлетворяют условиям предельной теоремы диагностирования и, с помощью вытекающих из нее алгоритмов, конструктивно решают задачу диагностики динамических управляемых систем в случае достаточной малости ошибок траекторных измерений.

Сказанное распространяется и на случай меньшей размерности вектора диагностирования (1.6), т.е. на случай, когда

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ijk} - z_{ik}|^2, \quad q < n, \quad (1.22)$$

или

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ik} - z_{i-1k} - \Delta_i z_{jk}|^2, \quad q < n, \quad (1.23)$$

поскольку компоненты вектора диагностирования несут достаточную информацию о характере функций f_j , $j = 1, \dots, l$, в правых частях уравнений (1.2).

Суммируемые разности в функционалах (1.7), (1.12) и (1.21)–(1.23) в случае достаточно малых расхождений действительной и ожидаемой траекторий могут оказаться малыми. Это усиливается квадратичной формой рассматриваемых функционалов. В некоторых случаях поэтому целесообразно иметь дело с видоизмененным функционалом. Выпишем такой функционал, сохранив прежнее обозначение, для случая (1.21):

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n |x_{ijk} - x_{i-1k} - \Delta_i x_{jk}|^2, \quad j = 1, \dots, l. \quad (1.24)$$

Отметим, однако, следующее. В (1.24) фактически осуществляется численное дифференцирование измеренных значений на каждом шаге и суммирование модулей отклонений. Даже если ошибки измерений (шумы) малы, при суммировании модулей отклонений может получиться значительная случайная ошибка.

Вместо сумм (1.24), в которых производится суммирование модулей полей направлений, рассмотрим суммы самих отклонений

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n (\bar{x}_{ik} - \bar{x}_{i-1k} - \Delta_i x_{jk}), \quad (1.25)$$

где $\bar{x}$ — измеренные значения действительной (в дальнейшем обозначается индексом g) траектории динамической управляемой системы.

Функционал (1.25), как будет показано далее, с точностью до малых ошибок сводится к интегралу по траекториям

$$J_{gj} = \int_{\tau_0}^{\tau} (f_g(x(t)) - f_j(x(t))) dt, \quad (1.26)$$

и разделение траекторий с помощью функционала (1.25) будет осуществляться однозначно.

В дальнейшем перейдем к более детальной оценке погрешности метода полей направлений в случае траекторных измерений с ошибкой.

В заключение настоящего раздела отметим, что можно в функционалах использовать нормированные величины. Например (см. (1.20)),

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ijk} - z_{ik}|^2 \frac{1}{z_{ik}^2}.$$

Исходя из вышесказанного, можно сформулировать расширенную постановку задачи диагностирования, решение которой осуществимо с помощью предложенных алгоритмов.

Рассмотрим управляемый объект, движение которого описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$x' = F(x, u, t) = f_0(x, t), \quad x_0 \in X^0, \quad (1.27)$$

где x — n -мерный вектор, характеризующий отклонение системы от режима, предписанного целью управления, X^0 — ограниченное множество начальных условий. Относительно управлений $u(t) = \|u_\nu(t)\|_{\nu=1}^m$ будем предполагать, что они принимают значения из ограниченной замкнутой области U , т.е.

$$u(t) \in U. \quad (1.28)$$

Цель управления будет формализоваться тождеством

$$x(t) \equiv 0. \quad (1.29)$$

Рассмотрим далее функцию Ляпунова $\nu(x, t) > 0$ и пару

$$\{\nu(x, t); u(x, t)\}. \quad (1.30)$$

Пара (1.30) позволяет синтезировать допустимое управление (1.28), доставляющее асимптотическую устойчивость решению (1.29) нелинейной системы (1.27).

Пусть известен конечный набор

$$H = \|H_j\|_{j=1}^l \quad (1.31)$$

возможных опорных невырожденных неисправностей в системе управления объектом (1.27) и, стало быть, известен соответствующий набор функций управления

$$u = \|u_j\|_{j=1}^l. \quad (1.32)$$

Функции (1.32) не изменяют фазового пространства системы (1.27), отличаются той или иной неисправностью (1.31) и не обязательно удовлетворяют в области параметров системы (1.27) условиям асимптотической устойчивости решения (1.29), определяемые функцией $\nu(\nu, t)$ в (1.30). Управления (1.32) могут не принадлежать (1.28).

Конечному набору управлений (1.32) поставим в соответствие набор систем дифференциальных уравнений

$$x' = f_j(x, t), \quad j = 1, \dots, l, \quad (1.33)$$

где $f_j(x, t)$ — соответствующие неисправностям (1.31) известные вектор-функции размерности $(n \times 1)$, отличные друг от друга и от функции $f_0(x, t)$ в (1.27). Модели (1.27) и (1.33) принадлежат одному фазовому пространству и отличаются лишь структурой. Если в заранее неизвестный момент времени функция $f_0(x, t)$ в правой части уравнения (1.27) заменяется на одну из функций $f_j(x, t)$ из (1.33), то траектория системы (1.27) непрерывно продолжается одной из траекторий систем (1.33).

Объединим уравнения (1.27) и (1.33):

$$x' = f_j(x, t), \quad x_0 \in X^0, \quad j = 0, \dots, l. \quad (1.34)$$

Введем в рассмотрение вектор

$$z(t) = (x_{d_1}, \dots, x_{d_q}) \equiv (z_1, \dots, z_q), \quad q = 1, \dots, n, \quad (1.35)$$

компоненты которого являются измеряемым подмножеством компонент фазового вектора состояния системы $x(t)$ и, в соответствии с (1.35), функционал

$$S^j = \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{s=1}^q (z_{ijs} - z_{is})^2, \quad q = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, l, \quad (1.36)$$

где z_{ijs} — значение s -й компоненты вектора $z(t)$ в момент $t_i = 1, \dots, N_j$, полученное в результате интегрирования системы (1.34) с f_j в правой части, z_{is} — значение s -й компоненты вектора $z(t)$, измеренное в момент времени t_i , N_j — минимальное число измерений компонент вектора $z(t)$, необходимое и достаточное (для данного шага h интегрирования j -й системы (1.34) для диагностирования j -й неисправности).

Расширенную задачу диагностирования можно сформулировать следующим образом.

Пусть известны невырожденные уравнения (1.33), поверхность контроля π_k , некоторое функциональное состояние системы $x(\tau_0)$ в момент τ_0 выхода ее траектории на поверхность контроля, структура вектора (1.35) и функционала (1.36). Требуется выбрать вектор $z(t)$, содержащий минимальное подмножество измеряемых компонент фазового вектора состояния $x(t)$ и такой, чтобы с помощью функционала

$$S_j = \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^q (z_{ijs} - z_{is})^2, \quad N = \max_j N_j, \quad (1.37)$$

любая возникшая неисправность из априорного опорного списка (1.31) или происшедшая в ее окрестности $O = \|O_j\|_{j=1}^l$ и обусловившая выход вектора контроля $z(t)$ на поверхность контроля π_k , была однозначно диагностирована как одна из функций f_j в (1.33), т.е. номер j функции f_j в

правой части уравнений (1.31) (вне зависимости от того, какая неисправность произошла: предусмотренная опорным списком или в его окрестности) был однозначно определен за минимально возможное время $\tau - \tau_0$.

Иначе говоря, после выхода фазовой траектории системы в момент времени τ_0 на поверхность контроля π_k путем последующего слежения за внешней траекторией системы с помощью функционала (1.37) возникшие неисправности из заданного списка и их окрестностей должны быть однозначно диагностированы за минимально возможное время τ .

При реализации непрерывной экспресс-диагностики необходимо вместо уравнений (1.33) рассматривать уравнения (1.34).

В проведенном вычислительном эксперименте на электронно-вычислительной машине показана реализация решения расширенной задачи диагностирования.

Перейдем теперь к более детальной оценке погрешности метода полей направлений в случае траекторных измерений с ошибкой.

2. СЛУЧАЙ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С ОШИБКОЙ

До сих пор рассматривалась задача диагностики систем управления для случая точных траекторных измерений. На практике решение задачи контроля и поиска неисправностей сопровождается наличием случайных возмущений и, в частности, случайных возмущений, накладываемых на вектор диагностирования, который формируется из измеряемых координат вектора состояния. Задача контроля для случая траекторных измерений с шумом сформулирована и решена в [1, 2] с достаточной полнотой. Сформулируем некоторые промежуточные результаты, которые показывают, что и задача диагностирования в случае траекторных измерений с шумом может быть решена однозначно. Сначала, в рамках теоремы диагностирования (см. [1, 15, 16]), дадим оценку погрешности в случае траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю.

Полученные оценки справедливы и в случае, если в рассмотрение вводится вектор диагностирования $z(t)$, составленный из измеряемых координат вектора состояния.

Мы не будем останавливаться на доказательстве полученных оценок при выборе числа измерений фазовых траекторий на интервале времени $[0, \tau]$: это сравнительно просто можно сделать в рамках доказательства теоремы диагностирования. Сразу перейдем к рассмотрению общего подхода в диагностике в случае траекторных измерений с шумом.

Рассмотрим несколько видоизмененный функционал (1.23), который для простоты запишем в виде

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N |\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1} + \Delta_i x_j|, \quad j = 0, \dots, l, \quad (2.1)$$

где $\Delta_i x_j$ описывается общей одношаговой формулой

$$\Delta_i x_j = h \Phi_j(\bar{x}_{i-1}, h) \quad (2.2)$$

и, как наиболее простой, формулой Эйлера

$$\Phi_j(\bar{x}_{i-1}, h) = f_j(\bar{x}_{i-1}). \quad (2.3)$$

Для измеренных значений введем обозначения

$$\bar{x}(t) = x(t) + \xi(t), \quad (2.4)$$

где $x(t)$ — действительное положение системы в момент времени t , а $\xi(t)$ — ошибки измерений, ограниченные по модулю заданными функциями времени $\zeta(t)$:

$$|\xi(t)| \leq \zeta(t). \quad (2.5)$$

В соответствии с (2.2)–(2.4) составим суммы (2.1) в виде

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N \left| x_i - x_{i-1} + \xi_i - \xi_{i-1} - h f_j(x_{i-1} + \xi_{i-1}) \right|. \quad (2.6)$$

В выражении (2.6) функции f_j , $j = 0, \dots, l$, разложим в ряд

$$f_j(x_{i-1} + \xi_{i-1}) = f_j(x_{i-1}) + \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \xi_{i-1}, \quad (2.7)$$

где ξ_{i-1}^* лежит на отрезке прямой, соединяющей точки x_{i-1} и $x_{i-1} + \xi_{i-1}$.

Сумму (2.6) с учетом (2.7) запишем в виде

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N \left| x_i - x_{i-1} - h f_j(x_{i-1}) + \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right|, \quad (2.8)$$

где E — единичная матрица.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением формулы Эйлера (2.3). Учтем следующее приближение в разложении в ряд Тейлора и оценим его влияние на сумму (2.8), то есть оценим долю произведенного выше усечения. Имеем:

$$x_i - x_{i-1} = h f_g(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2} f'_g(x(t)) \Big|_{t=t_i^*}, \quad (2.9)$$

где t_i^* — некоторая точка между t_{i-1} и t_i .

Подставим (2.9) в (2.8). Тогда

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N \left| h \left(f_g(x_{i-1}) - f_j(x_{i-1}) \right) + \frac{h^2}{2} f'_g(x(t)) \Big|_{t_i^*} + \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right|. \quad (2.10)$$

Рассмотрим далее два случая.

1. Пусть j совпадает с действительным функциональным состоянием рассматриваемого объекта, т.е. $j = g$. В этом случае

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N \left| \frac{h^2}{2} f'_g(x(t)) \Big|_{t_i^*} + \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right|. \quad (2.11)$$

Функции f_j дифференцируемы и имеют все непрерывные частные производные при любом $j = 0, \dots, l$. Поэтому, используя теорему о дифференцировании сложной функции, учитывая определение нормы матрицы и линейность отображения, задаваемого матрицей, получим следующую оценку для величины $|f'_g(x(t))|$:

$$\left| \frac{df_g(x(t))}{dt} \Big|_{t_i^*} \right| = \left| \frac{\partial f_g}{\partial t} \Big|_{x_i^*} \right| = \left| \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{x_i^*} f_g(x_i^*) \right| \leq \max_{x \in D^*} \left(\left| \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_x \right| |f_g(x)| \right) \leq L_g < \infty$$

и оценку для члена, представляющего ошибку усечения:

$$\left| \frac{h^2}{2} f'_g(x(t)) \Big|_{t_i^*} \right| \leq \frac{h^2}{2} L_g. \quad (2.12)$$

Здесь x_i^* — некоторая точка траектории, соответствующая моменту времени $t = t_i^*$, D^* — замкнутая область, содержащая все отрезки траектории от τ_0 до τ ,

$$L_g = \max_{x \in D^*} |f'_g(x)|.$$

Дадим теперь оценку ошибки измерения. Так как величины $|f_g|$ и $\|\partial f_g / \partial x\|$ ограничены в D^* , то ошибка измерения оценивается следующим образом:

$$\left| h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right| \leq h \left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\|_{D^*} \xi_{i-1} \leq h l_g \zeta_{\max}, \quad \zeta_{\max} = \max_{[0, \tau]} \zeta(t). \quad (2.13)$$

Максимум

$$l_g = \max_{x \in D^*} \left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\|$$

существует, так как D^* — замкнутая область и f_g — регулярная функция. Во всяком случае,

$$\left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\| \leq \sqrt{\sum_{k,p} \left| \frac{\partial f_{gk}}{\partial x_p} \right|^2}.$$

В силу (2.13) будет ограниченной ошибка одного шага измерения

$$\begin{aligned} \left| \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right| &\leq |\xi_i| + \left| \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right| \leq \\ &\leq |\xi_i| + |\xi_{i-1}| + hl_g \zeta_{\max} \leq 2\zeta_{\max} + hl_g \zeta_{\max}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В силу (2.12) и (2.14) получим оценку суммы (2.11) (так как $Nh = \tau$):

$$S_{gj} \leq N \frac{h^2}{2} L_g + 2N\zeta_{\max} + Nhl_g \zeta_{\max} = \frac{\tau}{2} L_g h + 2\tau \zeta_{\max} \frac{1}{h} + \tau l_g \zeta_{\max}. \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что в рассматриваемом случае $S_{gj} \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$ из-за накопления модулей ошибки измерения, а при $h \rightarrow 0$ слагаемое $\tau l_g \zeta_{\max}$ ошибки измерения составляет все меньшую и меньшую часть S_{gj} .

2. Пусть номер системы j не совпадает с действительным функциональным состоянием объекта, то есть $j \neq g$. В этом случае, в соответствии с (2.10),

$$\left| h \left(f_g(x_{i-1}) - f_j(x_{i-1}) \right) + \frac{h^2}{2} f'_g(x) \Big|_{t_i^*} \right| \leq hL_{gj} + \frac{h^2}{2} L_g$$

и, значит,

$$S_{gj} \leq NhL_{gj} + N \frac{h^2}{2} L_g + 2N\zeta_{\max} + Nhl_g \zeta_{\max} = \tau L_{gj} + \frac{\tau}{2} L_g h + 2\tau \zeta_{\max} \frac{1}{h} + \tau l_g \zeta_{\max}, \quad (2.16)$$

где

$$L_{gj} = \max_{x \in D^*} |f_g(x) - f_j(x)|.$$

Таким образом, и в этом случае за счет накопления ошибки измерения в (2.16) величина $S_{gj} \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$. Ошибка усечения в случае $j \neq g$ стремится к $\tau(L_{gj} + l_g \zeta_{\max})$.

Так как ошибка измерения стремится к ∞ при $N \rightarrow \infty$, а ошибка усечения при $N \rightarrow \infty$ составляет все меньшую и меньшую часть S_{gj} , то при $h \rightarrow 0$ вероятность разделения действительной траектории объекта с происшедшей неисправностью и траекторий j систем стремится к нулю.

Возникает задача о выборе такого наименьшего $h = h^*$, при котором еще возможно разделение траекторий. В соответствии с (2.15),

$$\min_h S_{gj} = \min_h \tau \left(\frac{1}{2} L_g h + 2 \frac{\zeta_{\max}}{h} + l_g \zeta_{\max} \right) = \tau \left(\sqrt{\frac{\zeta_{\max}}{L_g}} + \sqrt{\frac{L_g}{\zeta_{\max}}} + l_g \zeta_{\max} \right)$$

достигается при

$$h = \bar{h} = 2 \sqrt{\frac{\zeta_{\max}}{L_g}}.$$

Значение наилучшего $N = N^*$ будет, соответственно, равно

$$N = \bar{N} = 2\tau \sqrt{\frac{L_g}{\zeta_{\max}}}.$$

Таким образом, и в случае траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю известной функцией времени, можно для каждого $j = 1, \dots, l$, в соответствии с (2.1), найти такие величины

$$S_{gj}, \quad M_j^* = \max_{x_0^j \in \pi_k^j} S_{gj}, \quad h_j^* = \min_h S_{hj}, \quad N_j^*, \quad \tau_j^*,$$

что траектории систем с номерами $j = 1, \dots, l$ с помощью алгоритмов диагностирования, сформулированных в [15, 16], будут разделяться однозначно.

Вместо сумм (2.1), в которых производится суммирование модулей отклонений полей направлений, будем рассматривать суммы самих отклонений. Составим следующие суммы:

$$\begin{aligned} S_{gj} &= \sum_{i=1}^N \left(\overline{x_i} - \overline{x_{i-1}} - h f_j(\overline{x_{i-1}}) \right) = (\overline{x_N} - \overline{x_0}) - \sum_{i=1}^N h f_j(\overline{x_{i-1}}) = \\ &= (x_N - x_0) + (\xi_N - \xi_0) - \sum_{i=1}^N h \left(f_j(x_{i-1}) + \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right) = \\ &= \left(x_N - x_0 - \sum_{i=1}^N h f_j(x_{i-1}) \right) + \left(\xi_N - \xi_0 - \sum_{i=1}^N h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right). \quad (2.17) \end{aligned}$$

Величина $\sum_{i=1}^N h f_j(x_{i-1})$ в (2.17) есть интегральная сумма. Разлагая ее на каждом из интервалов времени $[t_{i-1}, t_i]$ в ряд Тейлора и затем суммируя, получим

$$\sum_{i=1}^N h f_j(x_{i-1}) = \int_{\tau_0}^{\tau} f_j(x(t)) dt - \sum_{i=1}^N \frac{h^2}{2} \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^{**}} f_j(x_{i-1}^*),$$

где x_{i-1}^{**} — набор некоторых N «средних точек».

Следовательно, возвращаясь к (2.17), получим

$$\begin{aligned} S_{gj} &= \left(x_N - x_0 - \int_{\tau_0}^{\tau} f_j(x(t)) dt + \sum_{i=1}^N \frac{h^2}{2} \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^{**}} f_j(x_{i-1}^*) \right) + \left(\xi_N - \xi_0 - \sum_{i=1}^N h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right) = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau} \left(f_g(x(t)) - f_j(x(t)) \right) dt + \sum_{i=1}^N \frac{h^2}{2} \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^{**}} f_j(x_{i-1}^*) + \left(\xi_N - \xi_0 - \sum_{i=1}^N h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right). \quad (2.18) \end{aligned}$$

Так как $|f_j|$ и $\|\partial f_j / \partial x\|$ ограничены, то ошибка усечения (в случае $j = g$) в (2.18) стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, а ошибка измерения ограничена. Ошибка измерения с уменьшением h (так же, как и с уменьшением N) будет уменьшаться.

При $j \neq g$ ошибка измерения остается того же порядка, ошибка усечения при $h \rightarrow 0$ стремится к

$$I_{gj} = \int_{\tau_0}^{\tau} \left(f_g(x(t)) - f_j(x(t)) \right) dt. \quad (2.19)$$

Таким образом,

$$S_{gj} = I_{gj} + \bar{\zeta}.$$

Если $I_{gj} \gg \bar{\zeta}$, то разделение траекторий с помощью функционала (2.19) и сформулированных ранее алгоритмов будет осуществляться однозначно.

Рассмотрим далее случай траекторных измерений с шумом. До сих пор предполагалось, что ошибка измерения $\xi(t)$ в (2.4) ограничена по модулю заданной функцией времени (2.5). Предположим теперь, что эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с дисперсией σ^2 . Оценим дисперсию случайной ошибки измерения:

$$\begin{aligned} D \left(\xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right) &= D \xi_i + D \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \leq \\ &\leq \sigma^2 + \sigma^2 (1 + h l_g)^2 \geq 2\sigma^2. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Таким образом, средняя ошибка одного шага измерения имеет порядок $\sigma\sqrt{2}$. Учитывая (2.12) и (2.20), можно провести следующую оценку:

$$S_{gg} \leq \sum_{i=1}^N |x_i - x_{i-1} - hf_g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^N \left| \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right| \cong \\ \cong N \left(\frac{h^2}{2} L_g + \sigma\sqrt{2} \right) = \tau \left(\frac{1}{2} L_g h + \frac{1}{h} \sigma\sqrt{2} \right). \quad (2.21)$$

Выражение (2.21) показывает, что $S_{gg} \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$.

В случае $j \neq g$, в соответствии с (2.10), можно провести оценку следующего вида:

$$S_{gj} \cong NhL_{gj} + N \frac{h^2}{2} L_g + N\sigma\sqrt{2 + 2hl_g + h^2 l_g^2} = \tau L_{gj} + \frac{1}{2} \tau h L_g + \frac{1}{h} \tau \sigma \sqrt{2 + 2hl_g + h^2 l_g^2}. \quad (2.22)$$

Таким образом, и в этом случае за счет накопления случайной ошибки измерения $S_{gj} \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$.

Ошибка усечения при этом стремится к τL_{gj} . Так как средняя ошибка измерения стремится к бесконечности при $N \rightarrow \infty$, а ошибка усечения при $N \rightarrow \infty$ составляет все меньшую и меньшую часть S_{gj} , то при $h \rightarrow 0$ вероятность разделения траекторий систем стремится к нулю.

Выберем такое наименьшее $h = h^*$, при котором еще возможно разделение траекторий. Оценим порядок наилучшего $h = h^*$. Минимум

$$S_{gg} \cong \min_h \tau \left(\frac{h}{2} L_g + \frac{1}{h} \sigma\sqrt{2} \right) = \tau \sqrt{2\sqrt{2}\sigma L_g}$$

достигается при

$$h = h^* \cong \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\sigma}{L_g}}.$$

Соответственно, порядок наилучшего N таков:

$$N = N^* \cong \tau \sqrt{\frac{L_g}{2\sqrt{2}\sigma}}.$$

Таким образом, дана оценка для наилучших значений $h = h^*$, $N = N^*$ и, значит, $\tau = \tau^*$. Если при этих наилучших значениях ошибка усечения достаточно мала, то диагностика неисправностей с помощью функционалов (2.1) и, значит, функционалов (2.8) в случае траекторных измерений с шумом позволяет получить в некотором смысле наилучший апостериорный набор возникших неисправностей.

Если раньше, как показано в случае точных траекторных измерений, пользуясь в алгоритмах диагностирования константами M_j или S_g , мы не могли отбросить верную гипотезу, то в случае траекторных измерений с шумом при любом выборе констант алгоритма диагностирования всегда будет существовать такая возможность.

Зададимся достаточно малой ненулевой допустимой вероятностью ε . Для разделения траекторий выберем константы M_j такие, что для любой траектории j -й системы

$$P\{S_{jj} \geq M_j\} < \varepsilon.$$

Иначе говоря, вероятность ложного срабатывания должна находиться в допустимых границах. При этом в случае траекторных измерений с шумом будем пользоваться теми же алгоритмами диагностирования, что и в случае точных траекторных измерений.

Перейдем теперь к рассмотрению метода интегралов в случае траекторных измерений с шумом. Как уже отмечалось, ошибка усечения в (2.18) ($j = g$) не превосходит $\tau \frac{h}{2} L_g$, и эта ошибка стремится к нулю при $h \rightarrow 0$. Средняя ошибка обусловлена суммой

$$h \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \xi_{i-1}$$

и, по теореме о сложении дисперсий независимых случайных величин, будет меньше или равна $h\sigma\sqrt{N}l_g$, а, следовательно, средняя ошибка измерения не будет превышать величины

$$\sigma\sqrt{2} + h\sigma\sqrt{N}l_g = \sigma\sqrt{2} + \sigma\sqrt{\tau h}l_g \quad (2.23)$$

и будет стремиться к $\sigma\sqrt{2}$ при $h \rightarrow 0$.

Формула (2.23) показывает, что средняя ошибка измерения зависит от постоянного слагаемого $\sigma\sqrt{2}$ и от $\sigma\sqrt{\tau h}l_g$. С уменьшением h ошибка, обусловленная шумом, уменьшается, и можно ожидать, что при

$$h < \frac{1}{\tau l_g^2}$$

будут достигаться достаточно хорошие результаты по разделению систем.

В случае $j \neq g$, как показывает выражение (2.18) для S_{gj} , ошибка измерения остается того же порядка, а ошибка усечения при $h \rightarrow 0$ стремится к интегралу (2.19). При $N \rightarrow \infty$ величина $S_{gg} \rightarrow \bar{\bar{\zeta}}$, где $\bar{\bar{\zeta}}$ — случайная величина, распределенная по нормальному закону с дисперсией $2\sigma^2$, а $S_{gj} \rightarrow I_{gj} + \bar{\bar{\zeta}}$. Если I_{gj} значительно больше дисперсии случайной величины $\bar{\bar{\zeta}}$, то разделение траекторий систем с помощью интеграла (2.19) в случае траекторных измерений с шумом будет осуществляться с высокой точностью. Константы M_j могут быть найдены, исходя из условия

$$P\{|S_{jj}| \geq M_j\} < \varepsilon.$$

3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКИ

В предыдущем разделе, в рамках доказательства предельной теоремы, была показана возможность диагностики динамических управляемых систем в случае траекторных измерений с ошибкой ограниченной по модулю заданной функцией времени и в случае, если эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с дисперсией σ^2 . Показано, что в этих случаях можно указать «наилучшее» число необходимых траекторных измерений, при которых возможно разделение траекторий неисправных систем, то есть точное определение происшедшей в системе неисправности.

Покажем теперь, что с помощью предложенных алгоритмов можно осуществить диагностику динамических управляемых систем в случае траекторных измерений с шумом, исходя из более общих вероятностных представлений (см. [15]).

В соответствии с (1.2) рассмотрим уравнения

$$x' = f_j(x, t), \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.1)$$

Предположим, что в момент $t = 0$ произошла j -я неисправность, т.е. в правой части (3.1) присутствует одна из функций $f_j(x, t)$, причем это может быть любая f_j , $j = 1, \dots, l$, с равной вероятностью.

Предположим, что доступен наблюдению вектор

$$z(t) = x(t) + \xi(t),$$

где $x(t)$ — вектор состояния системы, а $\xi(t)$ — случайный процесс типа нормального белого шума с нулевым средним значением и ограниченным спектром $W(\omega)$:

$$W(\omega) = \begin{cases} M_0, & |\omega| \leq \Delta; \\ 0, & |\omega| > \Delta. \end{cases} \quad (3.2)$$

Величина $\xi(t)$ является ошибкой измерения вектора состояния системы $x(t)$.

На основе анализа наблюдаемого суммарного сигнала $z(t)$ можно вычислить распределение $P_z(x)$ для всех возможных значений сигнала $x(t)$. Распределение $P_z(x)$ называют распределением обратных вероятностей, так как оно указывает на то, каковы вероятности тех или иных значений причины x , если известно вызванное этой причиной следствие z .

На основе анализа этого распределения принимается решение о том, каково было значение сигнала $x(t)$, т.е. в нашем случае — каков был номер правой части системы (3.1), решением которой является вектор x . Будем обозначать решение системы (3.1) с правой частью $f_j(x, t)$ буквой x

с индексом j . Номер j может быть определен, например, на основе принципа максимальной обратной вероятности, т.е. в качестве j принимается номер решения x_j , для которого вероятность $P_z(x_j)$ имеет наименьшее значение.

Вероятность $P_z(x)$ находится из соотношений

$$P(x, z) = P(x)P_x(z) = P(z)P_z(x),$$

где $P(x, z)$ — совместная вероятность двух случайных функций x и z , $P_x(z)$ — условная вероятность z при заданном x , $P(z)$ — безусловная вероятность z . Тогда, заменяя $1/P(z)$ на постоянную K (так как нас интересует зависимость $P_z(x)$ при данном измеренном z), получим

$$P_z(x) = KP(x)P_x(z).$$

Постоянная K определяется из условия нормировки

$$\int_{A_x} P_z(x) dx = 1,$$

где A_x — область всех возможных значений x .

Величины $P(x) = P(x_j) = 1/l$ (где l — число возможных правых частей (3.1)) априорно известны. Требуется найти зависимость $P_x(z)$ от x при данном измеренном z .

При данном $x_j(t)$ вероятность реализации $z(t)$ равна вероятности реализации $\xi_j(t) = z(t) - x_j(t)$. Считая $\xi_j(t)$ и $x_j(t)$ статистически независимыми, получим

$$P_x(z) = F(\xi_j) = \frac{1}{(2\pi M)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{M_0} \int_{\tau_0}^{\tau} \xi_j^2(t) dt \right\}.$$

Здесь $M_0 = M/(2\Delta)$ — единичная интенсивность шума (3.2), M — средняя интенсивность, $N = [\Delta(\tau - \tau_0)]$ (квадратные скобки в данном случае означают взятие целой части числа), где Δ — ширина спектра, $\tau - \tau_0$ — время определения номера j (время диагностирования).

Таким образом,

$$P_x(z) = \frac{1}{(2\pi M)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{M_0} \int_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt \right\}.$$

Тогда

$$P_z(x_j) = \frac{K}{l} \frac{1}{(2\pi M)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{M_0} \int_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt \right\}. \quad (3.3)$$

В силу того, что K и l постоянны, величина $(2\pi M)^N$ в (3.3) при конкретном $\xi(t)$ и заданном $\tau - \tau_0$ также постоянна; нахождение максимума обратной вероятности сводится к нахождению максимума величины

$$\exp \left\{ -\frac{1}{M_0} \int_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt \right\}$$

или, что то же самое, к нахождению минимума

$$\int_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt \quad (3.4)$$

(так как $M_0 = \text{const}$ при фиксированных M и Δ).

При помощи теоремы Котельникова о разложении случайной функции величина (3.4) может быть сведена от интеграла к сумме.

Действительно, так как время диагностирования $\tau - \tau_0$ задано и характеристики шума $\xi(t)$ известны (в частности, известна ширина спектра Δ), то по теореме Котельникова (см. [14, 15]) существует такое число $N = [\Delta(\tau - \tau_0)]$, что N значений $\xi_j(t_i)$, $i = 1, \dots, N$, $t_i = i/\Delta$, являются некоррелированными (а при нашем предположении о нормальности белого шума и статистически

независимыми) координатами процесса $\xi_j(t)$, и на конечном интервале времени (τ_0, τ) применимо разложение вида

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \xi_j^2(t) dt = \sum_{i=1}^N \xi_j^2(t_i). \quad (3.5)$$

Моменты времени t_i в (3.5) являются моментами измерений вектора $z(t)$ в процессе функционирования системы. Для тех же моментов времени t_i в бортовом вычислителе по модели объекта вычисляются все векторы состояний $\bar{x}_j$, $j = 1, \dots, l$. Решающее правило определения номера j правой части (3.1) сформулируем теперь следующим образом.

На интервале времени (τ_0, τ) для всех возможных значений номеров j правой части (3.1) формируются суммы

$$S_j = \sum_{i=1}^N (z(t) - \bar{x}_j(t))^2. \quad (3.6)$$

Число j , для которого значение S_j минимально, указывает номер правой части (3.1), т.е. номер случившейся в системе неисправности.

Таким образом, в результате статистического решения задачи дифференциальной диагностики при траекторных измерениях с шумом получен алгоритм диагностики, аналогичный алгоритму, который влечет теорема 1.1, а также функционал диагностики (3.6), который в теореме вводился априори, то есть получено замкнутое детерминированное решение задачи дифференциальной диагностики: получен функционал, решающий задачу, и указано правило его минимизации.

Полученный алгоритм верен и в случае, если вектор $z(t)$ содержит подмножество $d < n$ измеряемых координат фазового вектора состояния $x(t)$, несущее информацию о характере функций $f_j(x, t)$, $j = 1, \dots, l$, в правых частях уравнений (3.1).

Если динамическая управляемая система подвержена внутренним и внешним воздействиям шумов, и математическая модель движения этой системы так или иначе описывает эти шумы, то диагностика управления такой системой также может быть осуществлена с помощью полученного алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что в случае траекторных измерений с ошибкой предельная теорема перестает быть справедливой, однако при этом можно указать такое «наилучшее» число необходимых траекторных измерений координат вектора диагностирования, при котором предложенные функционал и алгоритм диагностирования работают и позволяют однозначно идентифицировать неисправности, возникающие в условиях шумов.

Исходя из более общих представлений, показано, что в случае траекторных измерений с шумом диагностика неисправностей осуществима и сводится к предлагаемому функционалу и алгоритму диагностирования (см. [18]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисенко И. Т. К вопросу о дифференциальной теории восстановления. Некоторые вопросы управления и устойчивости механических систем // Науч. тр. Ин-та механики МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: Изд-во МГУ, 1973. — № 22. — С. 101–108.
2. Борисенко И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундам. прикл. мат. — 1999. — 5, № 3. — С. 775–790.
3. Борисенко И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 29–31.
4. Жуков В. П. О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // Автомат. телемех. — 1994. — № 3. — С. 24–36.
5. Корноушенко Е. К., Пылаев Н. К. Передаточные числа и диагностирование линейных систем // Докл. АН СССР. — 1988. — 300, № 3. — С. 559–561.
6. Мироновский Л. А. Функциональное диагностирование линейных динамических систем // Автомат. телемех. — 1979. — № 8. — С. 120–128.

7. *Окунев Ю. М., Парусников Н. А.* Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
8. *Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В.* Диагностика некоторой системы прямого управления из теории летательных аппаратов// Междунар. конф. «Области применения и новые технологии преподавания математики и ИКТ»/ Гянджа, Азербайджан, 5-6 июня 2014 г. — Гянджа, 2014. — Ч. I. — С. 18–22.
9. *Чикин М. Г.* Системы с фазовыми ограничениями// Автомат. телемех. — 1987. № 10. — С. 38–46.
10. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Экзамен, 2007.
11. *Шамолин М. В.* Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение// Электрон. модел. — 2009. — 31, № 1. — С. 97–115.
12. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой// Электрон. модел. — 2009. — 31, № 3. — С. 73–90.
13. *Шамолин М. В.* Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электрон. модел. — 2009. — 31, № 4. — С. 55–66.
14. *Шамолин М. В.* Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электрон. модел. — 2010. — 32, № 1. — С. 45–52.
15. *Шамолин М. В.* Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электрон. модел. — 2010. — 32, № 5. — С. 31–44.
16. *Шамолин М. В.* Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электрон. модел. — 2011. — 33, № 3. — С. 121–126.
17. *Шамолин М. В., Шебаршов Д. В.* Методы решения основной задачи дифференциальной диагностики/ Деп. в ВИНТИ 12.05.99, № 1500-B99. — М., 1999.
18. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — 114, № 1. — С. 976–1024.

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru



СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ТРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2018 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к трехмерным многообразиям (систем с тремя степенями свободы). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

AMS Subject Classification: 70G60

В задачах динамики систем с тремя степенями свободы пространства положений являются трехмерные многообразия. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение четырехмерного твердого тела-маятника (обобщенного сферического маятника) в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий (см. [15, 17]). В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [12, 17]).

Известен также класс задач о движении точки по трехмерной поверхности; при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой объемлющего четырехмерного пространства. В ряде случаев в системах с переменной диссипацией также удастся найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил (см. [14, 15, 18]).

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к трехмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией (см. [12, 15, 17]) и обобщают ранее рассмотренные.

1. Уравнения геодезических при замене координат. Как известно, в случае трехмерного риманова многообразия M^3 с координатами (α, β) , $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, и аффинной связностью $\Gamma_{jk}^i(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T^*M^3\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $x = (x^1, x^2, x^3)$, имеют следующий вид (дифференцирование выполняется по натуральному параметру):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^3 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^3 . Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^3 R^{ij}(x)z_j, \quad (2)$$

которую можно обратить:

$$z_j = \sum_{i=1}^3 T_{ji}(x)\dot{x}^i,$$

при этом R^{ij} , T_{ji} , $i, j = 1, 2, 3$, — функции от x^1, x^2, x^3 , а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^3 .

Справедливы тождества

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^3 \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^3 T_{ji}\ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^3 T_{ji,k}\dot{x}^k, \quad (3)$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j, i, k = 1, 2, 3.$$

Подставляя в (3) уравнения (1), имеем:

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^3 T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^3 T_{ij}\Gamma_{pq}^j\dot{x}^p\dot{x}^q; \quad (4)$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i = 1, 2, 3$, нужно подставить формулы (2).

Другими словами, равенство (4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^3 Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k \Big|_{(2)} = 0, \quad (5)$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^3 T_{is}(x)\Gamma_{jk}^s(x) - T_{ij,k}(x). \quad (6)$$

Предложение 1. Система (1) в той области, где $\det R(x) \neq 0$, эквивалентна составной системе (2), (4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе уравнений (2), (4) зависит как от замены переменных (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma_{jk}^i(x)$.

2. Достаточно общий случай. Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_3, \\ \dot{\beta}_1 &= z_2 f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 &= z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \end{aligned} \quad (7)$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1 , z_2 , z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических (в частности, на поверхностях вращения):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

(см. [1, 2]), т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (7) уравнения (4) примут вид

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_3 - \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_1 z_2, \\ \dot{z}_2 &= \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_3 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) z_1^2, \\ \dot{z}_3 &= \Gamma_{11}^\alpha f_1^2(\alpha) z_2^2 + \Gamma_{22}^\alpha f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2,\end{aligned}\tag{9}$$

и уравнения (8) почти всюду эквивалентны составной системе (7), (9) на многообразии $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Для полного интегрирования системы (7), (9) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов.

Предложение 2. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$\begin{cases} 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0, \end{cases}\tag{10}$$

то система (7), (9) имеет аналитический первый интеграл вида

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1^2 = \text{const}.\tag{11}$$

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ системы (10) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (11) для системы (7), (9) уравнений геодезических (8). Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для систем при отсутствии силового поля, или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (10) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (7) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha);\tag{12}$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из (10):

$$2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) g^2(\beta_1) \equiv 0.\tag{13}$$

Таким образом, функцию $g(\beta_1)$ будем брать в зависимости от коэффициентов связности, а вот ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3. *Если выполнены свойства (12), (13), при этом справедливы равенства*

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha),\tag{14}$$

то система (7), (9) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const},\tag{15}$$

где

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}.$$

Предложение 4. *Если выполнено свойство (12), при этом справедливо равенство*

$$\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1),\tag{16}$$

а также второе равенство из (14) ($\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha)$), то система (7), (9) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_3(z_1; \alpha, \beta_1) = z_1 \Phi_0(\alpha) \Phi(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad (17)$$

где

$$\Phi(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}.$$

Предложение 5. Если выполнены условия (12), (13), (14), (16), то система (7), (9) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_4(z_2, z_1; \beta) = \beta_2 \pm \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2 \Phi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const}, \quad (18)$$

где после взятия интеграла (18) вместо постоянных C_2, C_3 нужно подставить соответственные левые части равенств (15), (17).

При вышеперечисленных условиях система (7), (9) обладает полным набором (четырьмя) независимых первых интегралов вида (11), (15), (17), (18).

3. Уравнения движения на касательном расслоении к трехмерному многообразию в потенциальном силовом поле. Теперь несколько модифицируем систему (7), (9) при условиях (12), (13), (14), (16), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (19). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3, \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) f^2(\alpha) z_2^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2, \\ \dot{z}_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_3 - \Gamma_{22}^1(\beta_1) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2, \\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_3 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha) z_1 z_2, \\ \dot{\beta}_1 = z_2 f(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \quad (19)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\beta_1) \dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 = 0. \end{cases}$$

Предложение 6. Если выполнены условия предложения 2, то система (19) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad F_1(\alpha) = 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a) da. \quad (20)$$

Предложение 7. Если выполнены условия предложений 3, 4, то система (19) имеет два гладких первых интеграла вида (15), (17).

Предложение 8. Если выполнены условия предложения 5, то система (19) имеет первый интеграл вида (18).

При вышеперечисленных условиях система (19) обладает полным набором (четырьмя) независимых первых интегралов вида (20), (15), (17), (18).

4. Уравнения движения на касательном расслоении к двумерному многообразию в силовом поле с диссипацией. Теперь усложним систему (19) и получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha)z_2^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_1^2, \\ \dot{z}_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \Gamma_{22}^1(\beta_1)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_1^2, \\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha)z_1 z_2, \\ \dot{\beta}_1 = z_2 f(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = z_1 f(\alpha)g(\beta_1), \end{cases} \quad (21)$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\beta_1)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 = 0. \end{cases}$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (21) при условии (13), а также при выполнении равенств

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha). \quad (22)$$

Введем также (по аналогии с (13)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (10):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \quad (23)$$

Для полного ее интегрирования необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \rightarrow z, z_*, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1},$$

система (21) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)z^2, \\ \dot{z} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z z_3, \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_* = \pm z \sqrt{1 + z_*^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \frac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha), \end{cases} \quad (25)$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm \frac{z}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha)g(\beta_1). \quad (26)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (24)–(26) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (24), один — системы (25), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (26) (т.е. всего четыре).

Теорема 1. Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \quad (27)$$

Тогда система (21) при выполнении равенств (13), (22), (23) обладает полным набором (четырьмя) независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (24) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dz_3}{d\alpha} = \frac{F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)z^2}{-z_3 + bg(\alpha)}, \\ \frac{dz}{d\alpha} = \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]zz_3}{-z_3 + bg(\alpha)}. \end{cases} \quad (28)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z_3 = u_3\delta(\alpha), \quad z = u\delta(\alpha), \quad (29)$$

приводим систему (28) к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\frac{du_3}{d\alpha} + \delta'(\alpha)u_3 = \frac{F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\delta^2(\alpha)u^2}{-u_3\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \delta(\alpha)\frac{du}{d\alpha} + \delta'(\alpha)u = \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\delta^2(\alpha)uu_3}{-u_3\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \quad (30)$$

что, учитывая (23), почти всюду эквивалентно системе

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\frac{du_3}{d\alpha} = \frac{F_3(\alpha) + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u^2 + \delta'(\alpha)u_3^2 - b\delta'(\alpha)u_3}{-u_3 + b}, \\ \delta(\alpha)\frac{du}{d\alpha} = \frac{-\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)uu_3 + \delta'(\alpha)uu_3 - b\delta'(\alpha)u}{-u_3 + b}, \end{cases} \quad (31)$$

где $F_3(\alpha) = F(\alpha)/\delta(\alpha)$.

После выполнения условий (27) система (31) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_3}{du} = \frac{\lambda + \kappa u^2 + u_3^2 - bu_3}{(1 - \kappa)uu_3 - bu}. \quad (32)$$

Уравнение (32) имеет вид уравнения Абеля (см. [3]). В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет первый интеграл

$$\frac{u_3^2 + u^2 - bu_3 + \lambda}{u} = C_1 = \text{const}, \quad (33)$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(z_3, z; \alpha) = G_1\left(\frac{z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{z}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{z_3^2 + z^2 - bz_3\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (34)$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (24) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (33) при $u \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_3 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \quad (35)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geq 0, \quad (36)$$

и фазовое пространство системы (24) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (35).

Таким образом, в силу соотношения (33) первое уравнение системы (31) при условиях (23) и при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)} \frac{du_3}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_3 + u_3^2) - C_1U_1(C_1, u_3)}{-u_3 + b}, \quad (37)$$

где

$$U_1(C_1, u_3) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_3^2 - bu_3 + \lambda)} \right\}; \quad (38)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (36). Тогда дополнительный первый интеграл для системы (24) имеет вид

$$\Theta_2(z_3, z; \alpha) = G_2 \left(\delta(\alpha), \frac{z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{z}{\delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const} \quad (39)$$

и при $\kappa = -1$ он находится из квадратуры

$$\ln |g(\alpha)| = \int \frac{(b - u_3) du_3}{2(\lambda - bu_3 + u_3^2) - C_1 \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_3^2 - bu_3 + \lambda)} \right\} / 2},$$

где $u_3 = z_3/\delta(\alpha)$. При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 необходимо подставить левую часть равенства (34). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (34), (39) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первый интеграл для системы (25) имеет вид

$$\Theta_3(z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \text{const}; \quad (40)$$

функция $\Phi(\beta_1)$ — вид (17). Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (26), находится по аналогии с (18):

$$\Theta_4(z_*; \beta) = \beta_2 \pm \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3^2 \Phi^2(b) - 1}} db = C_4 = \text{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо C_3 необходимо подставить левую часть равенства (40).

5. Строение первых интегралов для систем с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π , то система (24) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [4, 12, 15, 17]). При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (20), (15). В силу (27)

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a) da \cong z^2 + z_3^2 + \lambda \delta^2(\alpha), \quad (41)$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом, в силу (23) и (27)

$$\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\} \simeq z \delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (42)$$

где $\simeq$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (41), (42) (или (20), (15)) также является первым интегралом системы (24) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$z^2 + z_3^2 - bz_3 \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha) \quad (43)$$

и (42) по отдельности не является первым интегралом системы (24). Однако отношение функций (43), (42) является первым интегралом системы (24) (при $\kappa = -1$) при любом b .

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. [5, 6, 9, 12, 15]).

6. Заключение. По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (44)$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha}. \quad (45)$$

Случай (44) соответствует классу систем, описывающих движение динамически симметричного четырехмерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [7, 8, 13, 14]). Случай (45) соответствует классу систем, описывающих движение материальной точки на трехмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [10, 11, 18]). В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на трехмерной сфере. В случае (44), если $\delta(\alpha) = F(\alpha) \cos \alpha$, то система описывает пространственное движение четырехмерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы (см. [12, 15–17]). В частности, если $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, то система описывает также обобщенный четырехмерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [12–14, 17]).

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.
2. Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа // Докл. АН СССР. — 1984. — 219, № 2. — С. 228–237.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
4. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
5. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // в кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
6. Чаплыгин С. А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
7. Шамолин М. В. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1993. — № 1. — С. 68–71.
8. Шамолин М. В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Усп. мат. наук. — 1997. — 52, № 3. — С. 177–178.
9. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
10. Шамолин М. В. Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 2000. — 371, № 4. — С. 480–483.
11. Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007.
12. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
13. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
14. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.

15. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техн. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — М.: ВИНТИ, 2013. — 125. — С. 5–254.
16. *Шамолин М. В.* Моделирование движения твердого тела в сопротивляющейся среде и аналогии с вихревыми дорожками // Мат. модел. — 2015. — 27, № 1. — С. 33–53.
17. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
18. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // Докл. РАН. — 2016. — 471, № 5. — С. 547–551.

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru



СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2018 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. В работе показана интегрируемость классов динамических систем на касательных расслоениях к четырехмерным многообразиям (систем с четырьмя степенями свободы). При этом силовые поля обладают переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные. Работа продолжает аналогичные исследования, проведенные ранее, для систем на касательных расслоениях многообразий размерности 2 и 3.

Ключевые слова: многомерная динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

AMS Subject Classification: 70G60

Во многих задачах динамики возникают системы с пространством положений, являющимся четырехмерным гладким многообразием. Их фазовыми пространствами естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Например, изучение пятимерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий (см. [11, 14, 15]). В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают диссипацией переменного знака, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по гладкой четырехмерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пространства. В ряде случаев в системах с силовым полем с диссипацией также удастся найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Необходимо отметить, что полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил (ср. с [1–3, 6]).

В предлагаемой работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к гладкому четырехмерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2 и 3 см. [12, 13, 19]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы. Как известно, в случае четырехмерного гладкого риманова многообразия M^4 с координатами (α, β) , $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, и аффинной связностью $\Gamma_{jk}^i(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (1)$$

где $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $\beta_3 = x^4$, $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$.

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^4 . Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^4 R^{ij}(x)z_j, \quad (2)$$

которую почти всюду можно обратить:

$$z_j = \sum_{i=1}^4 T_{ji}(x)\dot{x}^i;$$

при этом R^{ij} , T_{ji} , $i, j = 1, \dots, 4$, — функции от x^1, x^2, x^3, x^4 , а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^4 .

Справедливы следующие тождества:

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^4 \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^4 T_{ji}\ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^4 T_{ji,k}\dot{x}^k, \quad (3)$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad i, j, k = 1, \dots, 4.$$

Подставляя в (3) уравнения (1), имеем

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^4 T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^4 T_{ij}\Gamma_{pq}^j\dot{x}^p\dot{x}^q; \quad (4)$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i = 1, \dots, 4$, надо подставить формулы (2).

Другими словами, равенство (4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^4 Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k|_{(2)} = 0, \quad (5)$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^4 T_{is}(x)\Gamma_{jk}^s(x) - T_{ij,k}(x). \quad (6)$$

Предложение 1. Система (1) в области, где $\det R(x) \neq 0$, эквивалентна составной системе (2), (4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе уравнений (2), (4) зависит как от замены переменных (2) касательного пространства (т.е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma_{jk}^i(x)$.

2. Достаточно общий случай. Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = -z_4, \quad \dot{\beta}_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad \dot{\beta}_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \quad (7)$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, z_2, z_3, z_4 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются

следующие классы уравнений геодезических (в частности, на сфере, более общих поверхностях вращения):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

(см. [3, 4, 7]); остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (7) уравнения (4) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_1 z_3 - \\ & - \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2, \\ \dot{z}_2 = & \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_2 z_3 - \\ & - \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = & \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 - \\ & - \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \end{aligned}$$

$$\dot{z}_4 = \Gamma_{11}^{\alpha} f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma_{22}^{\alpha} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma_{33}^{\alpha} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2,$$

и уравнения (8) почти всюду эквивалентны составной системе (7), (9) на касательном расслоении $T_* M^4 \{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Для полного интегрирования системы (7), (9) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно будет меньше, что будет показано во второй половине статьи при изучении систем с диссипацией.

Предложение 2. Если всюду на своей области определения справедлива система равенств

$$\begin{cases} 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0, \end{cases} \quad (10)$$

то система (7), (9) имеет аналитический первый интеграл вида

$$\Phi_1(z_4, \dots, z_1) = z_1^2 + \dots + z_4^2 = C_1^2 = \text{const}. \quad (11)$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (11) «не заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (10) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных, вырождающиеся в обыкновенные). В работе будет применен подход, позволяющий с помощью решения системы (10) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ системы (10) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (11) для системы (7), (9) уравнений геодезических (8). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (10) нам не потребуется. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (7) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f_3(\alpha) = f(\alpha); \quad (12)$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (10):

$$\begin{cases} 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)h^2(\beta_2) \equiv 0. \end{cases} \quad (13)$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ зависят от коэффициентов связности в силу системы (13), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут приведены ниже.

Предложение 3. Если выполнены свойства (12), (13) и при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \quad (14)$$

то система (7), (9) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \\ \Phi_0(\alpha) &= f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Предложение 4. Если выполнены условия предложения 3, условие

$$g_1(\beta_1) = g_2(\beta_1) = g(\beta_1) \quad (16)$$

и при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \quad (17)$$

то система (7), (9) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \\ \Psi_1(\beta_1) &= g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Предложение 5. Если выполнены условия предложений 3, 4 и при этом справедливо равенство

$$\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_3(\beta_2), \quad (19)$$

то система (7), (9) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_4(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = z_1 \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) = C_4 = \text{const},$$

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{20}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db \right\}. \quad (20)$$

Предложение 6. Если выполнены условия предложений 3, 4, 5, то система (7), (9) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_5(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Phi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}, \quad (21)$$

где после взятия интеграла (21) вместо постоянных C_3 и C_4 нужно подставить левые части равенств (18) и (20) соответственно.

Набор первых интегралов (11), (15), (18), (20), (21) является полным набором независимых первых интегралов системы (7), (9) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (21) не так прост. В принципе, он может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (21) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [5, 10]).

3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы. Теперь, несколько модифицировав систему (7), (9) при условиях (12)–(14), (16), (17), (19), получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует достаточно гладкий коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (22). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\dot{\alpha} = -z_4, \quad (22a)$$

$$\dot{z}_4 = F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma_{22}^\alpha f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \quad (22b)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = & \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 - \\ & - \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \end{aligned} \quad (22c)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_2 z_3 - \\ & - \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2, \end{aligned} \quad (22d)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_1 z_3 - \\ & - \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2, \end{aligned} \quad (22e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_3 f(\alpha), \quad (22f)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1), \quad (22g)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \quad (22h)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 = 0. \end{cases}$$

Предложение 7. Если выполнены условия предложения 2, то система (22) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_1(z_4, \dots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \dots + z_4^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad F_1(\alpha) = 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a) da. \quad (23)$$

Предложение 8. Если выполнены условия предложений 3, 4, 5, то система (22) имеет три гладких первых интеграла вида (15), (18), (20).

Предложение 9. Если выполнены условия предложения 6, то система (22) имеет первый интеграл вида (21).

Набор первых интегралов (23), (15), (18), (20), (21) является полным набором независимых первых интегралов системы (22) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (21) по-прежнему не так прост. Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (21) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [10]).

4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы. Теперь, усложнив систему (22), получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\dot{\alpha} = -z_4 + b\delta(\alpha), \quad (24a)$$

$$\dot{z}_4 = F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma_{22}^\alpha f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \quad (24b)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = & \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 - \\ & - \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \end{aligned} \quad (24c)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_2 z_3 - \\ & - \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2, \end{aligned} \quad (24d)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_1 z_3 - \\ & - \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2, \end{aligned} \quad (24e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_3 f(\alpha), \quad (24f)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1), \quad (24g)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \quad (24h)$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 - b\dot{\beta}_3\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0. \end{cases}$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (24) при условиях (12), (13), (16), а также при выполнении равенств

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1) = \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \quad (25)$$

Введем по аналогии с (13) ограничение на функцию $f(\alpha)$, состоящее в том, что она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (10):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \quad (26)$$

Для полного интегрирования системы (24) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}},$$

система (24) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)w_3^2, \\ \dot{w}_3 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] w_3 w_4, \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2 = \pm w_3 \sqrt{1 + w_2^2} f(\alpha) g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right], \\ \dot{\beta}_2 = \pm \frac{w_2 w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}} f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \pm w_3 \sqrt{1 + w_1^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \frac{w_1 w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \quad (29)$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm \frac{w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2). \quad (30)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (27)–(30) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (27), по одному — для систем (28) и (29) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (30) (т.е. всего пять).

Теорема 1. Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства

$$\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \quad (31)$$

Тогда система (24) при выполнении условий (12), (13), (16), (25), (26) обладает полным набором (пятью) независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (27) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dw_4}{d\alpha} = \frac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)w_3^2}{-w_4 + b\delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_3}{d\alpha} = \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]w_3w_4}{-w_3 + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \quad (32)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_4\delta(\alpha), \quad w_3 = u_3\delta(\alpha), \quad (33)$$

приводим систему (32) к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\frac{du_4}{d\alpha} + \delta'(\alpha)u_4 = \frac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta^2(\alpha)u_3^2}{-u_4\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \delta(\alpha)\frac{du_3}{d\alpha} + \delta'(\alpha)u_3 = \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\delta^2(\alpha)u_3u_4}{-u_4\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \quad (34)$$

что почти всюду эквивалентно системе

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\frac{du_4}{d\alpha} = \frac{F_3(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_3^2 + \delta'(\alpha)u_4^2 - b\delta'(\alpha)u_4}{-u_4 + b}, \\ \delta(\alpha)\frac{du_3}{d\alpha} = \frac{-\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_3u_4 + \delta'(\alpha)u_3u_4 - b\delta'(\alpha)u}{-u_4 + b}, \end{cases} \quad (35)$$

где $F_3(\alpha) = F(\alpha)/\delta(\alpha)$.

А после выполнения условий (31) система (35) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_4}{du_3} = \frac{\lambda + \kappa u_3^2 + u_4^2 - bu_4}{(1 - \kappa)u_3u_4 - bu_3}. \quad (36)$$

Уравнение (36) имеет вид уравнения Абеля (см. [5]). В частности, при $\kappa = -1$ оно обладает первым интегралом

$$\frac{u_4^2 + u_3^2 - bu_4 + \lambda}{u_3} = C_1 = \text{const}, \quad (37)$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = G_1\left(\frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (38)$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (27) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (37) при $u_3 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_4 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_3 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \quad (39)$$

Ясно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geq 0, \quad (40)$$

и фазовое пространство системы (23) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (39).

Таким образом, в силу соотношения (37) первое уравнение системы (35) при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)} \frac{du_4}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_4 + u_4^2) - C_1U_1(C_1, u_4)}{-u_4 + b}, \quad (41)$$

где

$$U_1(C_1, u_4) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_4^2 - bu_4 + \lambda)} \right\}; \quad (42)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (40).

Тогда дополнительный первый интеграл для системы (27) имеет вид

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2 \left(\delta(\alpha), \frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}; \quad (43)$$

при $\kappa = -1$ он находится из квадратуры

$$\ln |g(\alpha)| = \int \frac{(b - u_4) du_4}{2(\lambda - bu_4 + u_4^2) - C_1 \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_4^2 - bu_4 + \lambda)} \right\} / 2},$$

где $u_4 = w_4/\delta(\alpha)$. При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 необходимо подставить левую часть равенства (38). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (38), (43) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (28) и (29) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2; \quad (44)$$

вид функций $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, определен в (18), (20). Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (30), находится по аналогии с (21):

$$\Theta_5(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const};$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных C_3, C_4 необходимо подставить соответствующие левые части равенства (44).

5. Замечание о структуре первых интегралов систем с диссипацией. Если α — 2π -периодическая координата, то система (27) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [16–18]). Более того, при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (23), (15). В силу (31)

$$\Phi_1(z_4, \dots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \dots + z_4^2 + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a) da \cong w_4^2 + w_3^2 + \lambda \delta^2(\alpha), \quad (45)$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом в силу (26) и (31)

$$\Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\} \simeq w_3 \delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (46)$$

где $\simeq$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (45), (46) (или (23), (15)) также является первым интегралом системы (27) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 - bw_4 \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha) \quad (47)$$

и (46) по отдельности первым интегралом системы (27) не является, в то время как отношение функций (47), (46) является первым интегралом системы (27) (при $\kappa = -1$) при любом b .

Вообще, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. [10]).

6. Заключение. По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$(a) \quad f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (b) \quad f(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha}. \quad (48)$$

В случае (48)(a) имеем класс систем, соответствующих движению динамически симметричного пятимерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [16–18]). Случай (??) соответствует классу систем, описывающих движение материальной точки на четырехмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на четырехмерной сфере. В случае (48), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos \alpha$, то система описывает пространственное движение пятимерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы (см. [8, 9, 11]). В частности, если $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, то система описывает также обобщенный пятимерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [16–18]).

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым *нетривиальным* случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

Автор выражает искреннюю благодарность академику В. В. Козлову за поддержку при обсуждении полученных результатов, а также проф. А. В. Михалеву за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // Докл. АН СССР. — 1986. — 287, № 5. — С. 1105–1108.
2. Веселов А. П. Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$ // Докл. АН СССР. — 1983. — 270, № 6. — С. 1298–1300.
3. Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа // Докл. АН СССР. — 1984. — 219, № 2. — С. 228–237.
4. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
6. Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела // Функц. анализ. прилож. — 1976. — 10, № 4. — С. 93–94.
7. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
8. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // в кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
9. Чаплыгин С. А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
10. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
11. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
12. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
13. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
14. Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техн. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — М.: ВИНТИ, 2013. — 125. — С. 5–254.

15. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // *Фундам. прикл. мат.* — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
16. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле // *Докл. РАН.* — 2015. — 460, № 2. — С. 165–169.
17. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле // *Докл. РАН.* — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
18. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // *Докл. РАН.* — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
19. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // *Докл. РАН.* — 2016. — 471, № 5. — С. 547–551.

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru



ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СРЕДОЙ

© 2018 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Исследуется задача о пространственном свободном торможении твердого тела в сопротивляющейся среде; при этом предполагается, что однородное осесимметричное тело взаимодействует со средой лишь через переднюю часть своей внешней поверхности, имеющей форму плоского круглого диска. Ранее при простейших предположениях о силах воздействия со стороны среды показана невозможность колебаний с ограниченной амплитудой. При этом точное аналитическое описание силомоментных характеристик воздействия среды на диск отсутствует. По этой причине используется прием «погружения» данной задачи в более широкий класс задач. Это позволяет получить относительно полное качественное описание движения тела. Для исследуемых динамических систем удастся получить частные решения, а также семейства фазовых портретов в трехмерном пространстве квазискоростей, состоящие из счетного множества траекторно неэквивалентных портретов с различными нелинейными качественными свойствами.

Ключевые слова: твердое тело, сопротивляющаяся среда, качественный анализ, численный анализ.

AMS Subject Classification: 70G60

1. Модельные предположения и уравнения движения. Рассмотрим задачу о пространственном движении однородного осесимметричного твердого тела массы m , часть поверхности которого имеет форму плоского круглого диска, взаимодействующего со средой по законам струйного обтекания (см. [4, 9, 13]). Пусть остальная часть поверхности тела размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края диска, и не испытывает воздействия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа однородных круговых цилиндров в жидкость (см. [3, 6, 13]).

Предположим, что касательные силы к диску отсутствуют. Тогда сила $\mathbf{S}$, приложенная к телу со стороны среды, не меняет своей ориентации относительно тела (направлена по нормали к диску) и квадратична по скорости его центра (рис. 1). Предполагается также, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления (воздействия) среды.

При выполнении вышеперечисленных условий среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения: тело способно совершать поступательное движение в направлении его оси симметрии, т.е. перпендикулярно плоскости диска. При этом точка N приложения силы $\mathbf{S}$ воздействия среды совпадает с геометрическим центром D диска. При возмущении режима прямолинейного поступательного торможения вектор скорости $\mathbf{v}$ точки D , вообще говоря, отклоняется от оси геометрической симметрии на некоторый угол α (угол атаки). При этом точка N приложения силы сопротивления $\mathbf{S}$ смещается от центра диска на величину $DN = R_1$ и лежит в плоскости, образованной вектором $\mathbf{v}$ и осью симметрии тела. Последние рассуждения

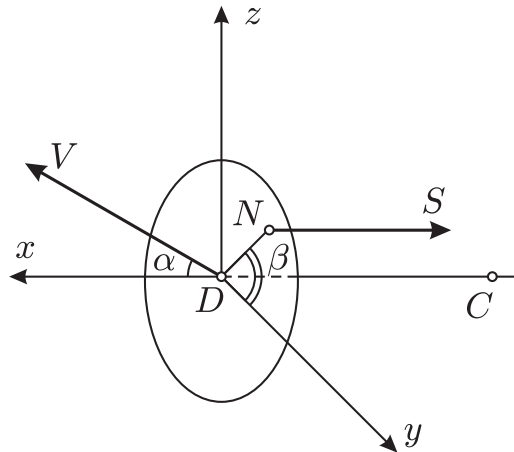


Рис. 1. Начало координат — седло

проистекают из того, что пластина, установленная в набегающем потоке под углом к его направлению, поворачивается так, что, в конце концов, устанавливается перпендикулярно к потоку, а значит, набегающий поток сообщает ей определенный вращающий момент (см. [17]).

Свяжем с телом правую систему координат $Dxyz$ (рис. 1) и направим ось Dx вдоль оси геометрической симметрии тела. Оси Dy и Dz жестко свяжем с круглым диском, образовав правую систему координат. Компоненты вектора угловой скорости Ω в системе $Dxyz$ будем обозначать через $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$. Тензор инерции динамически симметричного тела во введенных связанных осях $Dxyz$ имеет диагональный вид: $\text{diag}\{I_1, I_2, I_2\}$.

Воспользуемся гипотезой квазистационарности и для простоты предположим, что величина R_1 определяется, по крайней мере, углом атаки α , измеряемым между вектором скорости $\mathbf{v}$ центра диска D и прямой Dx . Таким образом, $DN = R_1(\alpha, \dots)$. Кроме того, примем величину S силы сопротивления в виде

$$S = s_1(\alpha)v^2, \quad v = |\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_D|.$$

Для удобства дальнейшего описания вместо коэффициента сопротивления $s_1(\alpha)$ введем вспомогательную знакопеременную функцию $s(\alpha)$ по следующему правилу:

$$s_1(\alpha) = s(\alpha) \text{sign} \cos \alpha \geq 0.$$

Таким образом, пара функций $R_1(\alpha, \dots)$ и $s(\alpha)$ определяет воздействие среды на диск при данных модельных предположениях.

Возникновение сопротивления при ускоренном движении также легко понять и с точки зрения закона сохранения энергии. В самом деле, если бы сопротивление при таком движении не возникало и, таким образом, не требовалось бы силы для преодоления этого сопротивления, то присоединенная масса не могла бы накапливать и кинетическую энергию. В действительности же полное сопротивление почти всех тел значительно больше всегда неизбежного сопротивления трения (см. [5, 17]). Как известно, причина этого в том, что при движении таких тел образуются поверхности раздела и вихри, которые и являются основной причиной сопротивления. Они препятствуют смыканию потока позади обтекаемого тела (как в нашем случае) и объясняют несимметричное распределение давления на поверхности тела; кроме того, для их образования требуются затраты энергии (см. [5]).

Для описания положения тела в пространстве выберем декартовы координаты (x_0, y_0, z_0) точки D и три угла (θ, ψ, ϕ) , которые определяются подобно навигационным углам. Поворот от системы $Dx_0y_0z_0$ к системе $Dxyz$ представим в виде композиции трех поворотов. При этом векторы, имеющие некоторые координаты в базисе (e_x, e_y, e_z) , получают новые координаты в базисе $(e_{x_0}, e_{y_0}, e_{z_0})$.

Такое преобразование будет задано в базисе (e_x, e_y, e_z) матрицей

$$T = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi & -\cos \psi \sin \phi & \sin \psi \\ \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \sin \psi \cos \phi & \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \psi \sin \phi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \phi - \cos \theta \sin \psi \cos \phi & \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix},$$

и фазовое состояние системы характеризуется двенадцатью величинами: $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}; x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \phi$. При этом сферические координаты (v, α, β) конца вектора $\mathbf{v}_D$ скорости точки D (при этом угол β равен углу yDN) и компоненты угловой скорости $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$ связаны с переменными $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}, \theta, \psi, \phi)$ неинтегрируемыми соотношениями (см. [13]). Но мы будем определять фазовое состояние системы через функции $v, \alpha, \beta, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z; x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \phi$, а первые шесть величин рассматривать в качестве квазискоростей системы.

Кинетическая энергия тела и сила воздействия среды не зависят от положения тела в пространстве. Поэтому координаты $(x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \phi)$ являются циклическими. Это приводит к отделению динамической части уравнений движения от их кинематической части (см. [13, 14]).

В силу теорем о движении центра масс (в проекциях на оси $Dxyz$) и об изменении кинетического момента (относительно этих же осей), получаем динамическую часть дифференциальных уравнений движения, рассматриваемую в шестимерном фазовом пространстве квазискоростей (σ — расстояние DC):

$$\begin{cases} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega_y v \sin \alpha \sin \beta_1 - \Omega_z v \sin \alpha \cos \beta_1 + \sigma(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) = -\frac{s(\alpha)v^2}{m}, \\ \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_z v \cos \alpha - \\ \quad - \Omega_x v \sin \alpha \sin \beta_1 - \sigma \Omega_x \Omega_y - \sigma \dot{\Omega}_z = 0, \\ \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \Omega_x v \sin \alpha \cos \beta_1 - \\ \quad - \Omega_y v \cos \alpha - \sigma \Omega_x \Omega_z + \sigma \dot{\Omega}_y = 0, \\ I_1 \dot{\Omega}_x = 0, \\ I_2 \dot{\Omega}_y + (I_1 - I_2) \Omega_x \Omega_z = -z_N(\alpha, \dots) s(\alpha) v^2, \\ I_2 \dot{\Omega}_z + (I_2 - I_1) \Omega_x \Omega_y = y_N(\alpha, \dots) s(\alpha) v^2, \quad R_1^2(\alpha, \dots) = y_N^2(\alpha, \dots) + z_N^2(\alpha, \dots), \end{cases} \quad (1)$$

где $(0, y_N, z_N)$ — координаты точки N в системе $Dxyz$.

В дальнейшем для формальной интерпретации неподвижных точек системы (1), влияющих на классификацию ее многомерных фазовых портретов, дополним ее следующими кинематическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{1}{\cos \psi} [\Omega_x \cos \phi - \Omega_y \sin \phi], & \psi' &= \Omega_x \sin \phi + \Omega_y \cos \phi, \\ \phi' &= \Omega_z + \frac{\sin \psi}{\cos \psi} [\Omega_y \sin \phi - \Omega_x \cos \phi], & \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \cos \beta \\ v \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Системы (1) и (2) вместе образуют полную систему для описания пространственного движения в среде твердого тела под действием силы сопротивления в условиях квазистационарности.

2. Погружение рассматриваемой задачи в более общий класс задач. Система (1) содержит функции $y_N(\alpha, \dots)$, $z_N(\alpha, \dots)$, $s(\alpha)$, явный вид которых, даже для такой простой формы, как диск, аналитически описать довольно затруднительно. По этой причине (как и в [13, 14]) используется прием погружения данной задачи в более широкий класс задач, учитывающий лишь качественные свойства функций $y_N(\alpha, \dots)$, $z_N(\alpha, \dots)$, $s(\alpha)$.

Будем считать выполненными следующие предположения:

$$y_N \left(\alpha, \beta, \frac{\Omega_z}{v} \right) = R(\alpha) \cos \beta - h_1 \frac{\Omega_z}{v}, \quad z_N \left(\alpha, \beta, \frac{\Omega_y}{v} \right) = R(\alpha) \sin \beta + h_1 \frac{\Omega_y}{v}; \quad (3)$$

при этом воздействие среды на тело моделируется двумя функциями $R(\alpha)$, $s(\alpha)$, (при $h_1 = 0$ см. также [12]).

Опорным для нас является результат С. А. Чаплыгина, который для плоскопараллельного обтекания пластины бесконечной длины получил функции $R(\alpha)$, $s(\alpha)$ в аналитическом виде (см. [8]):

$$R(\alpha) = R_0(\alpha) = A \sin \beta \in \mathfrak{R}, \quad A > 0; \quad s(\alpha) = s_0(\alpha) = B \cos \beta \in \Sigma, \quad B > 0. \quad (4)$$

Этот результат позволяет построить функциональные классы $\{R\}$, $\{s\}$.

Сочетая (4) с экспериментальной информацией о свойствах струйного обтекания, формально введем классы функций воздействия среды. Они состоят из достаточно гладких 2π -периодических функций ($R(\alpha)$ — нечетная, а $s(\alpha)$ — четная), удовлетворяющих следующим условиям: $R(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $R'(0) > 0$, $R'(\pi) < 0$ (класс функций $\{R\} = \mathfrak{R}$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{s\} = \Sigma$). Как R , так и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$. Таким образом,

$$R \in \mathfrak{R}, \quad (5)$$

$$s \in \Sigma. \quad (6)$$

Из перечисленных условий следует, что $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$ — достаточно гладкая нечетная π -периодическая функция, удовлетворяющая следующим условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{F\} = \Phi$). Таким образом,

$$F \in \Phi. \quad (7)$$

В частности, аналитическая функция

$$F = F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in \Phi \quad (8)$$

является типичным представителем класса функций Φ .

В связи с отмеченной в [3, 12–14] неустойчивостью пространственного прямолинейного поступательного торможения можно поставить следующий вопрос: существуют ли угловые колебания оси симметрии тела конечной (ограниченной) амплитуды (в частности, автоколебания)?

Сформулируем этот вопрос в более общем виде: существует ли такая пара функций $R(\alpha)$ и $s(\alpha)$ воздействия среды, чтобы для некоторого решения динамической части уравнений движения выполнялось бы ограничение $0 < \alpha(t) < \alpha^* < \pi/2$, начиная с некоторого момента времени $t = t_1$?

Конечно, с практической точки зрения важен анализ динамических уравнений лишь в окрестности прямолинейного поступательного торможения, поскольку при некоторых углах атаки происходит замык боковой поверхности, и настоящая модель воздействия среды на тело перестает быть достоверной. Но, во-первых, для тел с боковой поверхностью различной формы величины критических углов атаки, вообще говоря, различны и неизвестны. Поэтому приходится исследовать весь диапазон углов. Во-вторых, исходная система (1) является механической системой с переменной диссипацией (см. [7, 13, 14, 16]). Это побуждает нас проводить нелинейный анализ, и вторая часть данной работы представляет самостоятельный методический интерес.

3. Приведенные динамические уравнения. Как уже отмечалось, выбор фазовых переменных позволяет рассматривать систему динамических уравнений шестого порядка в качестве независимой. Более того, сохраняется компонента продольной составляющей угловой скорости:

$$\Omega_x = \Omega_{x0} = \text{const}. \quad (9)$$

Ниже ограничимся рассмотрением движения тела без собственного вращения, т.е. при $\Omega_{x0} = 0$.

Введем следующие обозначения:

$$z_1 = \Omega_y \cos \beta + \Omega_z \sin \beta, \quad z_2 = \Omega_z \cos \beta - \Omega_y \sin \beta, \quad z_i = Z_i n_0 v, \quad i = 1, 2,$$

$$\langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad A = \frac{\partial y_N}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial z_N}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial z_N}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=\pi/2}, \quad B = s(0).$$

Тогда систему (1) в случаях (3), (9) при $\Omega_{x0} = 0$ можно преобразовать к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (10)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0} F(\alpha) \cos \alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_2 s(\alpha) \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{m n_0} \sin \alpha, \quad (11)$$

$$Z_2' = \frac{F(\alpha)}{I_2 n_0^2} - Z_2 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_1^2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0} Z_2 s(\alpha), \quad (12)$$

$$Z_1' = -Z_1 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_1 Z_2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0} Z_1 s(\alpha), \quad (13)$$

$$\beta' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha},$$

где

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_2 s(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m n_0} \cos \alpha,$$

выбирая в дальнейшем безразмерные параметры $\mu_1, \mu_2 = b, \mu_3 = H_1$ следующим образом:

$$\mu_1 = 2 \frac{B}{m n_0}, \quad b = \sigma n_0, \quad H_1 = \frac{B h_1}{I_2 n_0}.$$

Уравнения (10)–(13) образуют замкнутую подсистему четвертого порядка, а уравнения (11)–(13) – третьего.

В дальнейшем иногда для простоты мы будем рассматривать систему (10)–(13) при выполнении «опорных» условий (4) (или (8)). При некоторых естественных условиях она отражает основные топологические свойства разбиения на траектории фазового пространства более общей системы (10)–(13) при условии (5), (6) (или (7)). Полученная таким образом «опорная» система примет вид аналитической:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (14)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \mu_2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \mu_2 \mu_3 Z_2 \cos^2 \alpha + \frac{\mu_1}{2} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (15)$$

$$Z_2' = \sin \alpha \cos \alpha - Z_2 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) - (1 + \mu_2 \mu_3) Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \mu_3 Z_2 \cos \alpha, \quad (16)$$

$$Z_1' = -Z_1 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) + (1 + \mu_2 \mu_3) Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \mu_3 Z_1 \cos \alpha, \quad (17)$$

где

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{\mu_1}{2} \cos^2 \alpha - \mu_2 \mu_3 Z_2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

4. Об устойчивости прямолинейного поступательного движения. Исследуем устойчивость ключевого режима — невозмущенного движения — по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости, т.е. по отношению к переменным α, Z_1, Z_2 . Другими словами, исследуем устойчивость тривиального решения независимой системы третьего порядка (11)–(13) (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат, что возможно).

Предложение 1. Плоскость

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : Z_1 = 0\} \quad (18)$$

является интегральной для системы (11)–(13).

Более того, после формальной подстановки $Z_1 = 0$ в систему (11)–(13) оставшиеся два уравнения на α, Z_2 образуют систему, описывающую динамику плоскопараллельного движения тела (см. [13, 14]).

Таким образом, на плоскость (18) укладывается фазовый портрет из плоской динамики. Более того, плоскость (18) разделяет трехмерное фазовое пространство на две части:

$$(i) \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \alpha < \pi, Z_1 > 0\}, \quad (ii) \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \alpha < \pi, Z_1 < 0\}, \quad (19)$$

в каждой из которых движение происходит самостоятельно, но не произвольно друг от друга, поскольку в системе присутствует симметрия (27) (см. ниже).

Последние факты говорят о том, что систему (11)–(13) достаточно исследовать в полуограниченном слое (19)(i), хотя полноценным фазовым пространством его считать нельзя.

Важным следствием последних замечаний является возможность использования функции

$$V_1(\alpha, Z_1) = Z_1 \sin \alpha \quad (20)$$

в качестве функции Ляпунова (Четаева) в полуограниченном слое (19)(i), поскольку в нем данная функция положительно определена.

Теорема 1. *Функция (20) является для системы (11)–(13) функцией Ляпунова (Четаева), т.е. ее производная в силу системы (11)–(13) отрицательно определена при $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$ и положительно определена при $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$.*

Следствие 1. *При $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$ система (11)–(13) имеет в начале координат (после доопределения правых частей в нем) притягивающую особую точку, а при $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$ — отталкивающую.*

Действительно, производная функции (20) в силу системы (11)–(13) представляется в виде

$$(\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)Z_1\alpha + o(\alpha^2 + Z_1^2 + Z_2^2).$$

В частности, аналогичная теорема справедлива и для систем вида (15)–(17), взятой для функций Чаплыгина воздействия среды (см. [8]).

В качестве примера, применительно к задаче о движении однородных круговых цилиндров, можно заключить, что указанная асимптотическая устойчивость имеет место при выполнении следующего неравенства:

$$\sigma k + \frac{2I_2}{mD} < hD,$$

где D — диаметр цилиндра, σ — расстояние DC , а k и h — безразмерные параметры воздействия воды на цилиндр (см. [15]), или

$$\sigma Dk + 2r_1^2 < hD^2,$$

где r_1 — радиус инерции цилиндра (см. также [13–15]).

Заметим также, что в случае пространственного движения полученные системы имеют неопределенность в начале координат, что вызвано вырожденностью сферических координат конца вектора $\mathbf{v}_D$ скорости центра D переднего диска (кавитатора) и преодолевается доопределением правых частей динамических систем.

Важно вспомнить, что эксперимент о движении в воде однородных круговых цилиндров, проведенный в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова, подтвердил, что при моделировании воздействия среды на твердое тело необходимо учитывать также дополнительный параметр, вносящий в систему диссипацию (в нашем случае $h = h_1$). При этом неустойчивость простейшего движения тела — прямолинейного поступательного торможения — используется в методических целях, а именно, для определения неизвестных параметров воздействия среды на твердое тело в условиях квазистационарности (см. [3, 6]).

При изучении класса торможений тела с конечными углами атаки главным вопросом является нахождение таких условий, при которых существуют автоколебания в конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения. Возникает, таким образом, необходимость полного нелинейного исследования.

Начальным этапом такого исследования явилось пренебрежение демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело. На функциональном языке это означает предположение о том, что динамические функции, определяющие воздействие среды, зависят лишь от одного параметра — угла атаки (т.е. $h_1 = 0$ в формулах (3)). Динамические системы, возникающие при таком нелинейном описании, носят характер систем с переменной диссипацией. Поэтому появляется необходимость создания численно-аналитической методики исследования таких систем (см. также [7, 13, 14, 16]).

Динамика твердого тела, взаимодействующего со средой, — как раз та область, где обычно возникают либо системы с переменной диссипацией с ненулевым средним (задача о свободном торможении твердого тела), либо системы, в которых потеря энергии в среднем за период может обращаться в нуль (задача о движении твердого тела в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы). В работе используется такая методика, благодаря которой удастся до конца исследовать некоторые модельные задачи о пространственном движении твердого тела.

При качественном описании взаимодействия тела со средой по причине использования экспериментальной информации о свойствах струйного обтекания возникает определенный разброс в моделировании силомоментных характеристик. Это делает естественным введение определения относительной грубости (относительной структурной устойчивости) и доказательство такой грубости для исследуемых систем (см. [7, 13, 14]). При этом многие из рассматриваемых систем получаются просто (абсолютно) грубыми по Андронову—Понтрягину в обычном смысле.

Учет демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело при некоторых условиях приводит к положительному ответу на главный вопрос: при движении тела в среде с конечными углами атаки в принципе возможно возникновение устойчивых автоколебаний.

5. Некоторые частные решения. Нелинейный анализ начнем с выделения неподвижных точек рассматриваемых динамических систем.

От системы (10)–(13) отделилась подсистема третьего порядка (11)–(13), неподвижные точки которой могут являться проекциями неособых фазовых траекторий системы четвертого порядка (10)–(13). Поэтому вопрос о неподвижных точках разбивается на два: для системы (10)–(13) в четырехмерном фазовом пространстве и для укороченной системы (11)–(13) в ее трехмерном фазовом пространстве. Как будет показано ниже, у нее существуют положения равновесия, которые заполняют одномерные многообразия.

У исходной системы (1) существуют частные решения следующего вида:

$$v(t) = \frac{v^0}{1 + v^0 \kappa t}, \quad v^0 = v(0), \quad \alpha(t) \equiv \pi k, \quad k = 0, 1, \quad \Omega_x \equiv \Omega_y(t) \equiv \Omega_z(t) \equiv 0, \quad \beta = \beta(t),$$

которые формально пропадают после ее приведения к нормальному виду. Такое преобразование приводит к эквивалентной системе, если доопределить систему (11)–(13) по непрерывности около точек $(\alpha, Z_2, Z_1) = (\pi k, 0, 0)$, $k = 0, 1$, становящимися ее неподвижными точками.

После доопределения системы (11)–(13) на множестве $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \alpha \leq \pi, Z_1 \geq 0\}$ существуют следующие изолированные неподвижные точки:

$$\alpha = \pi k, \quad k = 0, 1, \quad Z_1 = Z_2 = 0. \quad (21)$$

При $k = 0$ неподвижная точка (21) совпадает с началом координат и соответствует прямолинейному поступательному торможению.

Неподвижные точки системы (10)–(13) порождаются аналогичным образом соответствующими неподвижными точками системы (1), не приведенной к нормальному виду. Система (21) задает точки, в которые из четырехмерного пространства в трехмерное ортогонально проектируются частные решения системы (10)–(13) следующего вида $(\langle' \rangle = d/dq)$:

$$v(q) = v^0 \exp \left\{ -\frac{B}{m n_0} q \right\}, \quad v^0 = v(0), \quad \alpha(q) \equiv \pi k, \quad k = 0, 1, \quad Z_1(q) \equiv Z_2(q) \equiv 0.$$

Кроме того, у системы (11)–(13) существуют неизолированные неподвижные точки, которые заполняют окружность, задаваемую уравнениями:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \left(Z_2 - \frac{1}{2\mu_2} \right)^2 + Z_1^2 = \frac{1}{4\mu_2^2}. \quad (22)$$

Система (22) задает в фазовом пространстве системы (11)–(13) неподвижные точки, в которые проектируются целые многообразия неподвижных точек системы (10)–(13).

Неподвижные точки, заданные системой (22), не имеют физического смысла, поскольку около них построенная модель вырождается, так как при $\alpha = \pi/2$ сила воздействия среды формально обращается в нуль. Однако именно эти точки позволяют получить классификацию счетного

множества неэквивалентных глобальных фазовых портретов системы (11)–(13). Различия в типах таких портретов наблюдается как раз вблизи неподвижных точек, заданных системой (22). Поэтому уделим формальному изучению таких неподвижных точек необходимое внимание.

Ввиду простоты нахождения неподвижных точек (21), (22), а также в случае (21) явной механической интерпретации стационарных движений, соответствующих этим точкам, будем называть их тривиальными неподвижными точками.

Определение 1. Нетривиальными неподвижными точками системы (11)–(13) будем называть неподвижные точки, не лежащие на плоскостях

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : Z_2 \sin \alpha \cos \alpha = 0\}.$$

Дадим формальную интерпретацию нетривиальной неподвижной точки «опорной» системы (15)–(17) при $h_1 = 0$, взятой для простоты выкладок. Плоскость (18) является интегральной для данной системы. Портрет, лежащий на этой плоскости, — фазовый портрет системы (она получится в случае $Z_1 = 0$) из динамики плоскопараллельного движения тела (см. [13, 14]). Нетривиальные неподвижные точки находятся в явном виде из следующей системы:

$$Z_2 = \frac{\mu_2}{2} \sin \alpha, \quad Z_1^2 = \left[1 - \frac{\mu_2^2}{4}\right] \sin^2 \alpha, \quad \mu_2 < 2, \quad \cos \alpha = -\frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

При $\mu_2 > 2$ нетривиальные неподвижные точки лежат на интегральной плоскости (18) и соответствуют динамике плоскопараллельного движения.

Таким образом, у системы (1) при условиях (4) и $\Omega_{x0} = 0$ существуют частные решения вида

$$\begin{cases} v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 \kappa t}, & v_0 = v(0), \quad \kappa > 0, \\ \alpha(t) \equiv \alpha_0 \neq \pi k, & k = 0, 1, \quad \alpha_0 = \alpha(0), \\ \beta(t) = \beta_0 + \frac{\dot{\beta}_0}{v_0 \kappa} \ln(1 + v_0 \kappa t), & \beta_0 = \beta(0), \quad \dot{\beta}_0 = \dot{\beta}(0), \\ \Omega_y(t) \equiv \frac{1}{1 + v_0 \kappa t} [\Omega_{y0} \cos \beta(t) - \Omega_{z0} \sin \beta(t)], \\ \Omega_z(t) \equiv \frac{1}{1 + v_0 \kappa t} [\Omega_{y0} \sin \beta(t) + \Omega_{y0} \cos \beta(t)]. \end{cases}$$

Неизолированные неподвижные точки системы четвертого порядка будут заданы следующими соотношениями с положительным параметром v_1 :

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \left(Z_2 - \frac{1}{2\mu_2}\right)^2 + Z_1^2 = \frac{1}{4\mu_2^2} v = v_1. \quad (23)$$

Система (23) задает в четырехмерном фазовом пространстве системы (10)–(13) одномерное многообразие (окружность), сплошь заполненное неподвижными точками.

Неподвижные точки системы (14)–(17) (впрочем как и (10)–(13)) играют важную роль в классификации глобальных фазовых портретов системы (15)–(17) ((10)–(13)). Поэтому проведем их формальную интерпретацию.

В соответствии с (23) рассмотрим частное решение системы (10)–(13):

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad v = v_0, \quad \Omega_y = \Omega_{y0}, \quad \Omega_z = \Omega_{z0}.$$

Кинематические соотношения

$$\dot{\theta} = -\frac{\Omega_{y0}}{\cos \psi} \sin \phi, \quad \dot{\psi} = \Omega_{y0} \cos \phi, \quad \dot{\phi} = \Omega_{z0} + \frac{\Omega_{y0}}{\cos \psi} \sin \phi \sin \psi, \quad (24)$$

полученные из (2), допускают отделение независимой подсистемы второго порядка (в виде двух последних уравнений), обладающей аналитическим первым интегралом.

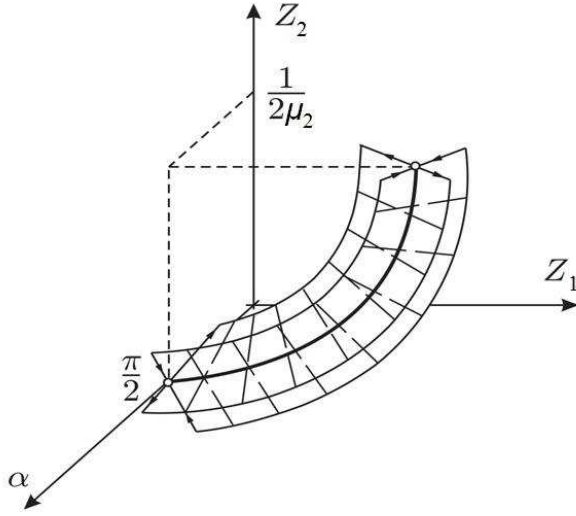


Рис. 2

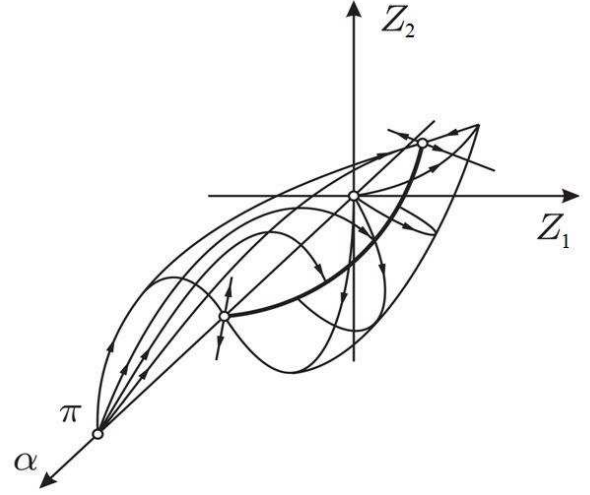


Рис. 3

Предложение 2. Система (24) обладает первым интегралом вида

$$\Omega_{y0} \sin \phi \cos \psi - \Omega_{z0} \sin \psi = C_1 = \text{const}, \quad (25)$$

который означает, что сохраняется проекция на ось Ox_0 абсолютной угловой скорости твердого тела.

В силу предложения 2 и двух последних уравнений из (24), которые образуют независимую систему второго порядка, угол находится из равенства

$$\sin \phi = \pm \frac{\Omega_{y0} \sqrt{\Omega_{y0}^2 + \Omega_{z0}^2 - C_1^2}}{\Omega_{y0}^2 + \Omega_{z0}^2} \sin \left\{ \sqrt{\Omega_{y0}^2 + \Omega_{z0}^2} (t + C_2) \right\} - \frac{C_1 \Omega_{z0}}{\Omega_{y0}^2 + \Omega_{z0}^2}, \quad (26)$$

где $C_2 = \text{const}$.

Тождества (24), (25) позволяют определить зависимость угла ϕ (а затем и θ) от времени через конечную комбинацию элементарных функций. В силу (2) на исследуемых фазовых траекториях выполнено равенство

$$\dot{x}_0 = -v_0 \cos \psi \sin \phi = \frac{v_0}{\Omega_{y0}} \left[-C_1 - \Omega_{z0} \sin \psi \right],$$

а, в силу (26),

$$\dot{x}_0 = \frac{v_0}{\Omega_{y0}} \left[A_1 \mp A_2 \sin(A_3 t + A_4) \right]; \quad A_k = A_k(\Omega_{y0}, \Omega_{z0}, C_1, C_2), \quad k = 1, \dots, 4.$$

Таким образом, при $C_1 = 0$ координата x_0 периодически меняется со временем. Аналогично определяются величины y_0 и z_0 .

6. Симметрии фазового пространства динамической системы и начало топологического анализа. Выше уже были введены безразмерные параметры: μ_1, μ_2, μ_3 . Будем рассматривать систему (15)–(17) при $\sigma n_0 < 2$.

Предложение 3.

1. Неизолированные неподвижные точки, заполняющие окружность (22) при $Z_2 < 1/2\mu_2$, в каждой перпендикулярной к ней площадке являются седлами (рис. 2), а при $Z_2 > 1/2\mu_2$ — притягивающими.
2. Изолированная неподвижная точка (21) при $k = 0$ является отталкивающей (рис. 3).
3. Изолированная неподвижная точка (21) при $k = 1$ является отталкивающей, если $\mu_2 < \mu_1$, и притягивающей, если $\mu_2 > \mu_1$.

В силу отделения от системы четвертого порядка независимой подсистемы третьего порядка, фазовые траектории системы (10)–(13) в четырехмерном фазовом пространстве лежат на поверхностях, являющихся трехмерными цилиндрами. В частности, если во всем фазовом пространстве существует полный набор первых интегралов системы (10)–(13), то один из них является функцией переменных (α, Z_1, Z_2) , а поэтому задает семейство цилиндров в $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$.

Фазовый портрет системы (10)–(13) в четырехмерном фазовом пространстве удобнее строить с помощью фазового портрета системы (11)–(13) в трехмерном фазовом пространстве. Исследуемое векторное поле геометрически устроено так, что становится возможным «поднятие» фазовых траекторий из трехмерного в четырехмерное фазовое пространство.

Поскольку $v > 0$, то движение возможно лишь в области $W = \{(\alpha, Z_1, Z_2, v) \in \mathbb{R}^4 : v > 0\}$. Если формально сделать замену переменных в области W по формуле $p = \ln v$, то полученное векторное поле в четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4\{\alpha, Z_1, Z_2, v\}$ не зависит от p и однозначно ортогонально проектируется на все семейство плоскостей $\{(\alpha, Z_1, Z_2, v) \in \mathbb{R}^4 : p = \text{const}\}$. При этом неподвижные точки системы (11)–(13) в пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ по-прежнему совпадают с объединением или проекций многообразий особых точек, или проекций неособых фазовых траекторий области W .

Для любых $F \in \Phi, s \in \Sigma$ векторное поле системы (11)–(13) обладает свойством центральной симметрии относительно точек $\pi k, 0, 0$, $k = 0, 1$, т.е. в координатах (α, Z_1, Z_2) векторное поле меняет направление при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ Z_1, Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -Z_1, -Z_2 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1.$$

Как уже отмечалось, плоскость (18) является интегральной, а векторное поле системы обладает следующей симметрией: его α - и Z_2 -составляющие сохраняются, а Z_1 -составляющая меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ Z_1, Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -Z_1, Z_2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Для дальнейшего анализа введем определения семейства трехмерных слоев:

$$\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\};$$

при этом $\Pi_{(0, \pi/2)} = \Pi$, $\Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)} = \Pi'$. Заметим, что фактическим фазовым пространством системы (11)–(13) является множество $\Pi_{(0, \pi)} \cap \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : Z_1 > 0\}$.

7. Классификация фазовых портретов системы в трехмерном пространстве для некоторой области параметров. Изучим те динамические системы вида (11)–(13), при которых нетривиальные неподвижные точки существуют лишь вне интегральной плоскости (18) (т.е. выполнено условие $\sigma n_0 < 2$).

Далее, в общем пространстве $\{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_1 > 0, \mu_2 > 0\}$ физических параметров системы (11)–(13) в основном будем изучать лишь область

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} \geq \frac{\sigma F(\alpha)}{I_2 \sin \alpha} \forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \sigma n_0 < 2 \right\}. \quad (28)$$

При этом выполнены условия (5)–(7) (или, в частности, (4)).

Типичная топологическая классификация тривиальных неподвижных точек была приведена выше. Для проведения полной классификации фазовых портретов приведем ряд утверждений, решающих многие актуальные вопросы качественного характера.

Используя методы многомерных топографических систем Пуанкаре и систем сравнения (см. [11]) можно доказать следующие предложения.

Предложение 4. Все фазовые траектории, начинающиеся в слое $\Pi_{(0, \pi/2)}$, либо за конечное время покидают этот слой, либо стремятся к седловидным неизолированным неподвижным точкам, лежащим на окружности (22) (см. также предложение 3).

Предложение 5. У системы (11)–(13) траектории, уходящие на бесконечность, существуют лишь на интегральной плоскости (18). Их α - и ω -предельными множествами являются бесконечно удаленные точки $(+0, 0, +\infty)$ и $(\pi - 0, 0, +\infty)$ данной плоскости.

Задача отыскания периодических траекторий в фазовом пространстве, стягиваемых по слою $\Pi_{(0,\pi)}$ в точку, в общей постановке достаточно сложна, однако в области рассматриваемых параметров справедливо следующее утверждение.

Предложение 6. У систем вида (11)–(13) в области параметров (28) не существует замкнутых характеристик, т.е. замкнутых кривых, составленных из траекторий векторного поля системы (11)–(13).

Основным вопросом классификации (трехмерных) портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющихся (в данном случае неизолированных) седел.

Предложение 7.

1. Устойчивые сепаратрисы в слое Π для точек (22) при $Z_2 < 1/2\mu_2$ имеют в качестве α -предельных множеств начало координат (рис. 3).
2. В области параметров (28) сепаратрисы, входящие в точки (22) при $Z_2 < 1/2\mu_2$ в слое Π' , имеют в качестве α -предельного множества точку $(\pi, 0, 0)$ (рис. 3).

Рассмотрим вопрос о поведении сепаратрис, выходящих из точек (22) при $Z_2 < 1/2\mu_2$. Для этого дадим (аналогично [13, 14]) определение индексу сепаратрисного поведения для данной системы.

Определение 2. Индекс сепаратрисного поведения isr — это неотрицательное целое число I , определяемое следующим образом: $\text{isr} = I$, если

- (i) существуют сепаратрисы, выходящие из точек (22) при $Z_2 < 1/2\mu_2$ в слой Π , которые имеют в качестве ω -предельного множества точки (22) при $Z_2 > 1/2\mu_2$;
- (ii) сепаратрисы охватывают окружность (22) и I раз уходят в область $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : Z_2 < 0\}$;
- (iii) не существует сепаратрис, охватывающих окружность (22) и $I + 1$ раз уходящих в область $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : Z_2 < 0\}$.

Теорема 2. Для любого isr из области определения существует точка из пространства параметров (28) системы (11)–(13), для которой в фазовом пространстве системы реализуется поведение рассматриваемых сепаратрис в соответствии с определением 2, которое, таким образом, корректно.

Теорема доказывается методами многомерной теории монотонных векторных полей (см. [10]). Монотонность понимается относительно параметра $\mu^* = 2s^*/(m\eta_0)$, где $s^* = \max_{\alpha \in \mathbb{R}} |s(\alpha)|$ (ср. также с аналогичными результатами из динамики плоскопараллельного движения; см. [1, 2]).

Благодаря основной теореме можно провести полную классификацию фазовых портретов системы (11)–(13), когда ее параметры пробегает область (28). Таких неэквивалентных портретов существует счетное множество.

Для проведения полной классификации портретов остается исследовать сепаратрисы, выходящие из точек (22) при $Z_2 < 1/2\mu_2$ в слой Π' . Такие сепаратрисы могут иметь предельное множество, которое в полупространстве (19)(i) имеет седловой тип с одним притягивающим собственным направлением и двумя отталкивающими. Одна устойчивая ветвь имеет в качестве α -предельного множества точку $(\pi, 0, 0)$. Неустойчивые же направления, на которые «натягивается» целая плоскость, имеют в качестве предельных множеств притягивающие точки (22) при $Z_2 > 1/2\mu_2$, а также бесконечно удаленную точку (см. предложение 5).

На рис. 4, 5 изображены некоторые фрагменты фазовых портретов системы (11)–(13), которые являются неэквивалентными ($\text{isr} = 0$ на рис. 4; $\text{isr} = 2$ на рис. 5).

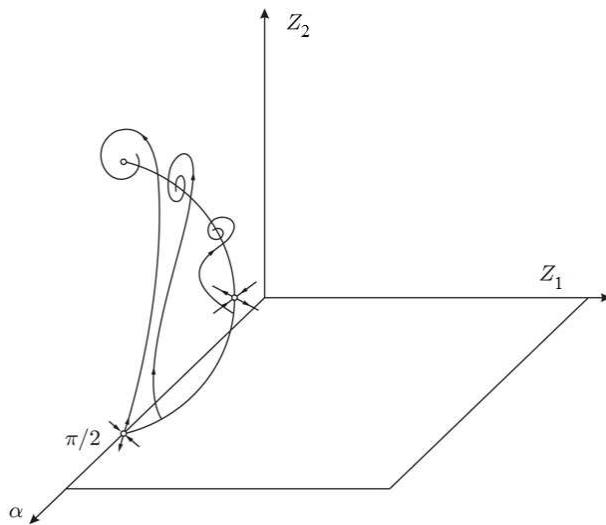


Рис. 4

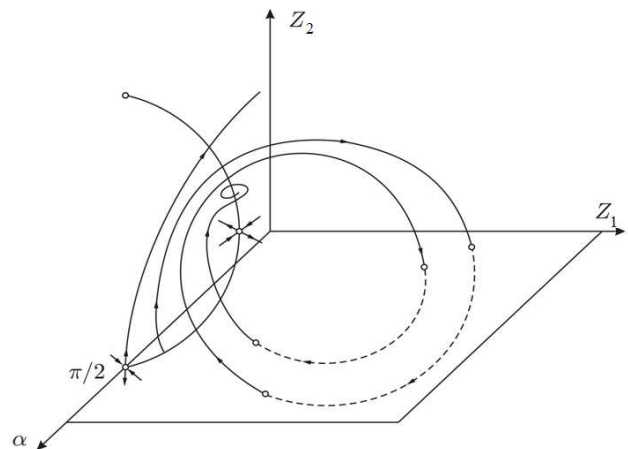


Рис. 5

8. Заключение. При квазистационарном описании взаимодействия среды с телом, когда функции воздействия среды $y_N(\alpha, \dots)$ и $z_N(\alpha, \dots)$ зависят лишь от угла атаки (т.е. при простейшем предположении), для любой допустимой тройки функций $y_N(\alpha, \dots)$, $z_N(\alpha, \dots)$ и $s(\alpha)$ воздействия среды прямолинейное поступательное движение неустойчиво. Опираясь на предложение 4, дающее ответ на вопрос о поведении траекторий в слое $\Pi_{(0, \pi/2)}$, можно сделать важный вывод: почти все траектории редуцированного трехмерного фазового пространства, лежащие в области $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \alpha < \pi/2, Z_1 > 0\}$, за конечное время покидают данную область. В частности, не существует простых и сложных предельных циклов в этой области. При этом использовались как качественные, так и численные методы исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика продольного и бокового движения. — М.: Машиностроение, 1969.
2. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1988.
3. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995ю — 3. — С. 23–27.
4. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.
5. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. — М.: ИЛ, 1949.
6. Самсонов В. А., Шамолин М. В., Ерошин В. А., Макаришин В. М. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании / Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4396. — М.: Ин-т механики МГУ, 1995.
7. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
8. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // в кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
9. Чаплыгин С. А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
10. Шамолин М. В. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1993. — № 1. — С. 68–71.
11. Шамолин М. В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Усп. мат. наук. — 1997. — 52, № 3. — С. 177–178.
12. Шамолин М. В. Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 2000. — 371, № 4. — С. 480–483.

13. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007.
14. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
15. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 5052. — М.: Ин-т механики МГУ, 2010.
16. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Итоги науки и техн. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — М.: ВИНТИ, 2013. — 125. — С. 5–254.
17. *Шамолин М. В.* Моделирование движения твердого тела в сопротивляющейся среде и аналогии с вихревыми дорожками// Мат. модел. — 2015. — 27, № 1. — С. 33–53.

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru