

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 149



Москва 2018

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

С. С. Акбаров (ВИНТИ РАН)

Е. С. Голод (МГУ им. М. В. Ломоносова)

А. Б. Жижченко (Отделение математических наук РАН)

Е. П. Кругова (ВИНТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Н. Х. Розов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

С. Е. Степанов (Финуниверситет при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Редактор-составитель:

Л. М. Эннеева (Институт прикладной математики и автоматизации,
Республика Кабардино-Балкария, г. Нальчик)

Научный редактор:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 149

МАТЕРИАЛЫ
МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ»
КАБАРДИНО-БАЛКАРИЯ, НАЛЬЧИК,
17–21 МАЯ 2017 г.



Москва 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Условия положительности операторов с разностными ядрами в рефлексивных пространствах (<i>С. Н. Асхабов</i>)	3
Нелокальная краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка в области его гиперболичности (<i>Ж. А. Балкизов</i>)	14
Краевая задача со смещением для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования (<i>Л. Х. Гадзова</i>)	25
Задача Жевре для нагруженного смешанно-параболического уравнения с дробной производной (<i>С. Х. Гекжиева</i>)	31
О свойствах целой функции, обобщающей функцию Райта (<i>Л. Л. Карашева</i>)	38
Краевые задачи для волнового уравнения дробного порядка (<i>М. А. Керефов, Б. М. Керефов</i>)	44
Краевые задачи для ультрапараболических и квазиультрапараболических уравнений с меняющимся направлением эволюции (<i>А. И. Кожанов</i>)	56
Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения третьего порядка с оператором Аллера в главной части (<i>Р. Х. Макаова</i>)	64
Задачи оптимального управления для линейных вырожденных дробных уравнений (<i>М. В. Плеханова</i>)	72
О стабилизации решений задачи Коши для дробного диффузионно-волнового уравнения (<i>А. В. Псху</i>)	84
Задача Римана—Гильберта для эллиптических систем первого порядка на плоскости с по- стоянными старшими коэффициентами (<i>А. П. Солдатов, О. В. Чернова</i>)	95
Неоднородное эволюционное уравнение дробного порядка в секториальном случае (<i>В. Е. Федоров, Е. А. Романова</i>)	103
Краевая задача для нагруженного уравнения гипербола-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности (<i>К. У. Хубиев</i>)	113
Построение функций Ляпунова для линейных стохастических стационарных систем второго порядка (<i>М. М. Шумафов, В. Б. Тлячев</i>)	118
Обратная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром (<i>Т. К. Юлдашев</i>)	129



УСЛОВИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ С РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ В РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2018 г. С. Н. АСХАБОВ

Аннотация. При помощи методов теории дискретного и интегрального преобразований Фурье найдены необходимые и достаточные условия положительности линейных дискретных, интегральных и интегродифференциальных операторов с разностными ядрами в пространствах ℓ_p и L_p при $1 < p < \infty$. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: положительный оператор, оператор свертки, обобщенный оператор типа потенциала, сингулярный оператор, интегродифференциальный оператор.

AMS Subject Classification: 47G10, 47G20

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. Дискретные, интегральные и интегродифференциальные операторы свертки	4
3. Сингулярные интегральные и интегродифференциальные операторы в $L_p(\varrho)$	8
Список литературы	12

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие положительного оператора тесно связано с понятием положительно определенной (по Бохнеру) функции, играющим основополагающую роль в гармоническом анализе и других разделах современной математики (см. [12, с. 176]). Свойство положительности дискретных, интегральных и интегродифференциальных операторов нашло широкое применение при исследовании соответствующих как линейных, так и нелинейных уравнений в различных банаховых пространствах (см., например, монографии [1, 2, 5, 8, 15, 21] и приведенную в них библиографию).

В данной работе изучаются линейные дискретные, интегральные и интегродифференциальные операторы с разностными ядрами в вещественных пространствах ℓ_p и L_p (случаи комплексных и весовых пространств особо оговариваются). Найдены необходимые и достаточные условия их положительности, приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Напомним некоторые определения и введем необходимые обозначения. Пусть X — вещественное банахово пространство, а X^* — сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. Если X — гильбертово пространство, то $\langle y, x \rangle$ совпадает со скалярным произведением (y, x) . Линейный оператор A , действующий из X в X^* , называется *положительным* в пространстве X , если для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\langle Ax, x \rangle \geq 0$.

Как обычно, через $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначаются соответственно множества всех действительных, целых и натуральных чисел, а через $p' = p/(p-1)$ — сопряженное с p число.

2. ДИСКРЕТНЫЕ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СВЕРТКИ

2.1. Дискретные операторы свертки в ℓ_p . Обозначим через ℓ_p , $p \geq 1$, банахово пространство, состоящее из всех таких вещественных числовых последовательностей $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi_k|^p < \infty \text{ при } p < \infty, \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi_k| < \infty \text{ при } p = \infty.$$

Рассмотрим дискретный оператор свертки H , определяемый по правилу $H\varphi = h * \varphi$, где

$$(H\varphi)_n = (h * \varphi)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} \cdot \varphi_k, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 2.1. Пусть $1 \leq p \leq 2$ и $h \in \ell_s$, $1 \leq s \leq \min(2, p'/2)$. Для того чтобы дискретный оператор свертки H был положительным в пространстве ℓ_p , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\widehat{h}_c(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cos(k\theta) \geq 0 \quad \forall \theta \in [0, \pi]. \quad (1)$$

Доказательство теоремы 2.1 основано на следующем равенстве (см. [1, с. 247]):

$$\langle Hu, u \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}_c(\theta) \cdot |\widehat{u}(\theta)|^2 d\theta \quad \forall u \in \ell_p, \quad \text{где} \quad \widehat{u}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \exp(in\theta).$$

Широкий класс ядер, удовлетворяющих условию (1), предоставляет следующий пример.

Пример 2.1. Если ядро $h = \{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ представимо в виде

$$h_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{n+k} \cdot g_k, \quad \text{где} \quad g = \{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell_1,$$

то $h \in \ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $h_{-n} = h_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ и $\widehat{h}_c(\theta) \geq 0$ при всех $\theta \in [0, \pi]$.

Аналог теоремы 2.1 имеет место для комплексных пространств ℓ_p (см. [1, с. 263]) и операторов более общего вида. Следующая теорема относится к случаю комплексных пространств ℓ_p .

Теорема 2.2. Пусть $1 < p < \infty$ и ядро $h \in \ell_1$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \widehat{h}(\theta) = \operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \exp(ik\theta) \geq 0 \quad \forall \theta \in (-\pi, \pi).$$

Если $b \in \ell_{\infty}$ при $1 < p \leq 2$ и $b \in \ell_{2p/(p-2)}$ при $2 < p < \infty$, то дискретный оператор свертки B , определяемый правилом

$$(Bu)_n = \bar{b}_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k h_{n-k} u_k, \quad n \in \mathbb{Z},$$

является положительным в пространстве ℓ_p , причем

$$\operatorname{Re} \langle Bu, u \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \widehat{h}(\theta) \cdot |\widehat{b}u(\theta)|^2 d\theta \quad \forall u \in \ell_p.$$

2.2. Интегральные операторы свертки в $L_p(-\pi, \pi)$ и $L_p(\mathbb{R})$. Рассмотрим в вещественном пространстве Лебега $L_p(-\pi, \pi)$, состоящем из 2π -периодических функций, оператор свертки

$$(Ku)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)u(t) dt,$$

где ядро $h(x)$ — функция, 2π -периодически продолженная на отрезок $[-2\pi, 2\pi]$.

Теорема 2.3. Пусть $1 < p < \infty$ и

$$\begin{cases} h(x) \in L_{p'/2}(-\pi, \pi), & \text{если } 1 < p \leq 2, \\ h(x) \in L_1(-\pi, \pi), & \text{если } 2 < p < \infty. \end{cases} \quad (2)$$

Для того чтобы оператор свертки K был положительным в пространстве $L_p(-\pi, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнялось условие

$$h_c(k) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos(kt) dt \geq 0. \quad (3)$$

Доказательство. Достаточность. Из условия (2) следует (см. [3]), что оператор K действует непрерывно из $L_p(-\pi, \pi)$ в $L_{p'}(-\pi, \pi)$. Докажем, что он является положительным. Используя формулу свертки изображений и обобщенное равенство Парсеваля (см. [1, с. 99]), имеем

$$\langle Ku, u \rangle = 2\pi h_c(0) \cdot |u_0|^2 + 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} h_c(k) \cdot |u_k|^2 \quad \forall u(x) \in L_p(-\pi, \pi), \quad (4)$$

где

$$u_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \exp(-ikx) dx. \quad (5)$$

Из равенства (4) непосредственно вытекает, что оператор K является положительным, если $h_c(k) \geq 0$ при всех $k = 0, 1, 2, \dots$, т.е. если выполнено условие (3). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть оператор K положителен, т.е. $\langle Ku, u \rangle \geq 0$ для всех $u(x) \in L_p(-\pi, \pi)$. Нужно доказать, что в этом случае выполняется условие (3). Допустим противное, что условие (3) не выполняется, т.е. существует такое неотрицательное целое число k_0 , что $h_c(k_0) < 0$.

Если $k_0 = 0$, т.е. $h_c(0) < 0$, то выбрав функцию $u(x) = 1$ по формуле (5), получим, что $u_0 = 1$ и $u_k = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу равенства (4), $\langle Ku, u \rangle = 2\pi \cdot h_c(0) < 0$, что противоречит положительности оператора K .

Если $k_0 \in \mathbb{N}$, то выберем функцию $u(x) = \sin(k_0 x)$. В этом случае по формуле (5) имеем

$$u_0 = 0, \quad u_{-k_0} = \frac{i}{2}, \quad u_{k_0} = -\frac{i}{2}, \quad u_k = 0 \text{ при } k \neq \pm k_0. \quad (6)$$

Используя равенства (6), по формуле (4) получаем $\langle Ku, u \rangle = \pi \cdot h_c(k_0) < 0$, что противоречит положительности оператора K . Необходимость, а вместе с ней и теорема, доказаны. $\square$

Простейшими примерами функций, удовлетворяющих условию (3), являются $\cos x$, $\sin x$ и их линейные комбинации. Более интересен и содержателен следующий пример (ср. [9, с. 46]).

Пример 2.2. Если функция $h(x)$ неотрицательна и выпукла вниз в интервале $(-\pi, \pi)$, то $h_c(k) \geq 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$, т.е. выполняется условие (3).

Следующая теорема является аналогом теоремы 2.3.

Теорема 2.4. Пусть $1 < p \leq 2$ и $h(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{p'/2}(\mathbb{R})$. Для того, чтобы интегральный оператор свертки

$$(Hu)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t)u(t) dt$$

был положительным в $L_p(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $x \in [0, \infty)$ выполнялось условие

$$\hat{h}_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos(xt) dt \geq 0. \quad (7)$$

Доказательство основано на [1, (10.4)]:

$$\langle Hu, u \rangle = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_c(x) \cdot |\hat{u}(x)|^2 dx \quad \forall u(x) \in L_2(\mathbb{R}),$$

где (см. [1, с. 29])

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N u(t) \exp(-ixt) dt \quad (\text{предел в среднем квадратичном}).$$

Замечание 2.1. Интересно отметить, что известные из теории приближений ядра Абеля—Пуассона, Вейерштрасса, Фейера и другие, а также многие функции, представляющие собой плотности распределения вероятностей, удовлетворяют условию (7) (подробнее см. [1, с. 67]).

Теорема 2.5. Пусть $1 < p \leq 2$ и ядро $h(x)$ представимо в виде

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x+t) \cdot g(t) dt, \quad g(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{p'/2}(\mathbb{R}).$$

Тогда оператор свертки H является положительным в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, причем

$$\langle Hu, u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x+t) \cdot u(t) dt \right]^2 dx \quad \forall u(x) \in L_p(\mathbb{R}).$$

Рассмотрим, наконец, в вещественном пространстве $L_p(0,1)$ интегральный оператор типа свертки (обобщенный оператор типа потенциала), введенный А. М. Нахушевым (см. [8]):

$$(P_{01}^\varphi u)(x) = \int_0^1 \varphi(|x-t|) u(t) dt, \quad x \in [0,1].$$

Будем предполагать (см. [2]), что $\varphi(x) \in \Omega(0,1]$, т.е. $\varphi(x)$ — такая непрерывная невозрастающая выпуклая вниз в промежутке $(0,1]$ функция, что

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \geq 0.$$

Частными случаями оператора P_{01}^φ являются потенциал Рисса и логарифмический потенциал (подробнее см. [3, с. 653]).

Теорема 2.6. Пусть $1 < p < \infty$ и ядро $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in L_{p'/2}(0,1) \cap \Omega(0,1], & \text{если } 1 < p \leq 2, \\ \varphi(x) &\in L_1(0,1) \cap \Omega(0,1], & \text{если } 2 < p < \infty. \end{aligned}$$

Тогда оператор типа свертки P_{01}^φ является положительным в пространстве $L_p(0,1)$, причем

$$\langle P_{01}^\varphi u, u \rangle = \frac{a_0}{2} \left(\int_0^1 u(x) dx \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left| \int_0^1 u(x) \exp(i\pi n x) dx \right|^2 \geq 0 \quad \forall u(x) \in L_p(0,1),$$

где

$$a_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos(\pi n x) dx.$$

Заметим, что в силу [3, лемма 1] коэффициенты $a_n \geq 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Следует отметить, что в случае $p = 2$ и более жестких ограничениях на функцию $\varphi(x)$ (дифференцируемость и неотрицательность) теорема 2.6 ранее была доказана в [8].

2.3. Интегродифференциальные операторы свертки. В отличие от предыдущего пункта, относящегося к интегральным операторам свертки, ниже будет установлено, что положительность интегродифференциального оператора свертки эквивалентна требованию, чтобы синус-преобразование (а не косинус-преобразование) Фурье его ядра было неотрицательным.

Теорема 2.7. Пусть $1 < p < \infty$ и $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$. Для того чтобы интегродифференциальный оператор свертки

$$(Tu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u'(t) dt$$

был положительным в классе

$$M_p(-\pi, \pi) = \left\{ u(x) : u(x) \in L_p(-\pi, \pi), u'(x) \in L_{p'}(-\pi, \pi) \right\},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\hat{h}_s(k) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cdot \sin(k \cdot t) dt \geq 0 \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$ — произвольная функция. Так как $u'(x) \in L_{p'}(-\pi, \pi)$, то в силу неравенства Юнга для сверток оператор T действует из $M_p(-\pi, \pi)$ в $L_{p'}(-\pi, \pi)$. Докажем его положительность. Используя формулу свертки изображений, имеем

$$(Tu)(x) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot u'_k \cdot \exp(ikx), \quad (9)$$

где

$$h_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot \exp(-ikx) dx, \quad u'_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u'(x) \cdot \exp(-ikx) dx.$$

Заметив, что $u'_k = iku_k$, из (9) получаем

$$(Tu)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_k \cdot \exp(ikx), \quad \text{где } T_k = 2\pi i k h_k u_k. \quad (10)$$

Используя сначала равенство Парсеваля (см. [12, с. 158]), а затем равенство (10), с учетом вещественности функции $u(x)$ получаем

$$\langle Tu, u \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (Tu)(x) \cdot \overline{u(x)} dx = 4\pi^2 i \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{-1} k h_k |u_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k h_k |u_k|^2 \right]. \quad (11)$$

Так как

$$|u_{-k}|^2 = |u_k|^2, \quad h_k - h_{-k} = -\frac{1}{\pi} \hat{h}_s(k),$$

то из равенства (11) вытекает соотношение

$$\langle Tu, u \rangle = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \hat{h}_s(k) |u_k|^2. \quad (12)$$

Из формулы (12) видно, что оператор T является положительным, если $\hat{h}_s(k) \geq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, т.е. если выполнено условие (8). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $\langle Tu, u \rangle \geq 0$ для всех $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$, т.е. оператор T является положительным. Нужно доказать, что тогда выполняется условие (8). Допустим, что это условие не выполняется, т.е. существует такое число $k_0 \in \mathbb{N}$, что $\hat{h}_s(k_0) < 0$. Выберем функцию $u(x) = \cos(k_0 x)$ и вычислим ее коэффициенты Фурье:

$$u_{-k_0} = u_{k_0} = \frac{1}{2}, \quad u_k = 0 \quad \text{при всех } k \neq \pm k_0. \quad (13)$$

По формуле (12), учитывая равенства (13), получаем $\langle Tu, u \rangle = \pi k_0 \hat{h}_s(k_0) < 0$, что противоречит положительности оператора T . Необходимость, а вместе с ней и теорема, доказаны. $\square$

Примером функции, удовлетворяющей условию (8), может служить убывающая функция. Именно, если в качестве основного интервала взять $(0, 2\pi)$, то легко показать (см. [12, с. 46]), что $\hat{h}_s(k) \geq 0$, если функция $h(x)$ убывает в интервале $(0, 2\pi)$.

Следующая теорема является аналогом теоремы 2.7.

Теорема 2.8. Пусть $1 < p < \infty$ и $h(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Для того чтобы интегродифференциальный оператор свертки

$$(Tu)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t)u'(t) dt$$

был положительным в классе

$$M_p(\mathbb{R}) = \left\{ u(x) : u(x) \in L_p(\mathbb{R}), u'(x) \in L_{p'}(\mathbb{R}) \right\},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\hat{h}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \sin(xt) dt \geq 0 \quad \text{при всех } x \in [0, \infty). \quad (14)$$

Доказательство теоремы 2.8 основано на равенстве

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) u'(t) dt \right) u(x) dx = 2\sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{h}_s(x) x |\hat{u}(x)|^2 dx, \quad (15)$$

где

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-ixt) dt,$$

справедливом для любой бесконечно дифференцируемой функции $u(x)$, финитной на оси $\mathbb{R}$.

В связи с равенством (15) заметим, что если $u(x) \in M_p(\mathbb{R})$, то $u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Примером ядра $h(x)$, удовлетворяющего условию (14), может служить $h(x) = x/(x^2 + 1)^2$, для которого $\hat{h}_s(x) = \sqrt{\pi/8} x \exp(-x)$.

3. СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В $L_p(\varrho)$

В данном разделе в весовых вещественных пространствах Лебега $L_p(\varrho)$ рассматриваются сингулярные интегральные и интегродифференциальные операторы, в которых интеграл понимается в смысле главного значения по Коши—Лебегу. При этом, если не оговорено иное, под $\varrho(x)$ понимается произвольная неотрицательная почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля измеримая (по Лебегу) на отрезке $[a, b]$ функция. Обозначим через $L_p(\varrho)$, $1 < p < \infty$, множество всех измеримых на отрезке $[a, b]$ функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{p, \varrho} = \left(\int_a^b \varrho(x) |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Известно (см. [10]), что $L_p(\varrho)$ — рефлексивное банахово пространство и сопряженным с ним является пространство $L_{p'}(\varrho^{1-p'})$.

3.1. Сингулярные интегральные операторы с ядрами Гильберта и Коши. Скажем, что функция $k(x, s)$ принадлежит классу Гельдера H_δ , если она определена на $[a, b] \times [a, b]$ и удовлетворяет условию Гельдера:

$$|k(x_1, s_1) - k(x_2, s_2)| \leq M \cdot \left\{ |x_1 - x_2|^\delta + |s_1 - s_2|^\delta \right\}, \quad \text{где } M > 0, \delta \in (0, 1].$$

Рассмотрим в пространстве $L_p(a, b)$ сингулярный интегральный оператор с ядром Коши:

$$(\mathbb{K}u)(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{k(x, s) u(s)}{s - x} ds, \quad \text{где } k(x, s) \in H_\delta.$$

В работе Б. В. Хведелидзе [10] отмечено, что оператор $\mathbb{K}$ действует из $L_p(a, b)$ в $L_p(a, b)$ и ограничен при любых $p > 1$ и $\delta \in (0, 1]$ (подробное доказательство приведено в [2]). Кроме того, для любых $u(x) \in L_p(a, b)$ и $v(x) \in L_{p'}(a, b)$ справедливо равенство М. Рисса (см. [10, с. 30]):

$$\int_a^b \left(\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{k(x, s) u(s)}{s - x} ds \right) v(x) dx = \int_a^b \left(\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{k(x, s) v(x)}{s - x} dx \right) u(s) ds. \quad (16)$$

Если $k(x, s) = k(s, x)$, то равенство (16) можно кратко записать в виде

$$\langle \mathbb{K}u, v \rangle = -\langle u, \mathbb{K}v \rangle \quad \forall u(x) \in L_p(a, b), v(x) \in L_{p'}(a, b). \quad (17)$$

Из равенства (17) вытекает следующее важное свойство оператора $\mathbb{K}$.

Лемма 3.1. Если функция $k(x, s)$ удовлетворяет условиям

$$k(x, s) \in H_\delta, \quad 0 < \delta \leq 1, \quad \text{и} \quad k(x, s) = k(s, x), \quad (18)$$

то для всех $u(x) \in L_2(a, b)$ справедливо равенство

$$(\mathbb{K}u, u) = 0. \quad (19)$$

Остановимся подробнее на равенстве (19) в частном случае, когда $k(x, s) = 1$. В 1995 г. Е. О. Tuck рассмотрел выражение (здесь мы придерживаемся обозначений его работы [24])

$$I = \int_{-1}^1 p(x) \left(\int_{-1}^1 \frac{p(y)}{x - y} dy \right) dx.$$

Поскольку это выражение напоминает квадратичную форму с антисимметричным ядром, то следовало бы ожидать, считает Tuck, что $I = 0$. Однако контрпример $p(x) = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$ (см. [24]) показывает, что это не всегда так, поскольку для такой функции $I = \pi^2 \neq 0$. Высказав ряд предположений, Tuck отметил, что ему не удалось выяснить, в каких случаях $I = 0$ и в каких $I \neq 0$. Ответ на этот вопрос имеет, как отмечено в [24], важное значение при решении задач аэродинамики, в которых I измеряет так называемую силу «всасывания подвижной кромки», а $p(x)$ означает давление на «тонкой аэродинамической поверхности».

Обсуждение вопросов, поднятых в [24], было продолжено в 1995–1997 гг. в [18, 17, 14]. В частности, В. Mclean (см. [18]) и Е. R. Love (см. [17]) показали, что $I = 0$, если $p(x) \in L_2(-1, 1)$ (заметим, что контрпример $p(x) = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$, предложенный в [24], не принадлежит пространству $L_2(-1, 1)$). Кроме того, А. D. Fitt в [14] разобрал три задачи гидродинамики, в анализе которых существенно используется равенство $I = 0$.

Следует отметить, что ответ на вопрос о том, в каком случае $I = 0$, был ранее дан в окончательном виде в монографии А. И. Гусейнова и Х. Ш. Мухтарова [5] (1980 г.), причем в [5], как и в статьях [18, 17], при доказательстве используется равенство М. Рисса при $k(x, s) = 1$.

Важно подчеркнуть, что сингулярные операторы, подобные $\mathbb{K}$, с ядрами вида

$$\frac{\sin(s - x)}{s - x}, \quad \frac{b(x)w(s) - b(s)w(x)}{s - x} \sqrt{\psi(x)\psi(s)}$$

встречаются во многих разделах современной математики, например, таких, как теория вероятностей, детерминанты Фредгольма, дифференциальные уравнения, матричные модели (так называемые модели случайно-матричного типа) и других (см. [19, 22, 11]). В частности, сингулярный оператор S с такими ядрами возникает в известной формуле (см. [13])

$$E(n, J) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \det(1 - \lambda S) \Big|_{\lambda=1}$$

для широкого класса ортогональных полиномиальных случайных матричных моделей эрмитовых $(N \times N)$ -матриц, а также в уравнении Пенлеве пятого рода для величины

$$\sigma(s, \lambda) = -s \frac{d}{ds} \log \det(1 - \lambda S).$$

Указанные формулы занимают центральное место в статье С. Трасу и Н. Widom [22], отмеченной в [13] среди выдающихся публикаций по теории вероятностей и математической физике. Работы С. Трасу и Н. Widom в этом направлении были удостоены приза Винера (см. [20]). Поэтому изучение подобных сингулярных операторов представляет несомненный научный интерес.

Рассмотрим в этой связи сингулярный оператор (см. [2, с. 34])

$$(\Psi u)(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{[b(x)w(s) + b(s)w(x)]k(x, s)u(s)}{s - x} ds,$$

где $k(x, s)$ удовлетворяет условию (18), а функции $b(x)$, $w(x)$ таковы, что

$$\begin{aligned} b(x), w(x) &\in L_{2p/(p-2)}(\varrho^{-2/(p-2)}) && \text{при } 2 < p < \infty, \\ b(x)\varrho^{-1/2}(x), w(x)\varrho^{-1/2}(x) &\in L_\infty(a, b) && \text{при } p = 2. \end{aligned} \quad (20)$$

Теорема 3.1. Пусть $p \geq 2$ и выполнены условия (18) и (20). Тогда сингулярный оператор Ψ является положительным в пространстве $L_p(\varrho)$, причем $\langle \Psi u, u \rangle = 0$ для всех $u(x) \in L_p(\varrho)$.

Интересно отметить, что условие (18) не является необходимым для положительности оператора $\mathbb{K}$. Например, для сингулярного оператора

$$(K_s u)(x) = \int_{-1}^1 \frac{\sin(s - x) \cdot u(s)}{s - x} ds,$$

у которого $k(x, s) = \sin(s - x) \neq k(s, x)$, в случае пространства $L_2(-1, 1)$ выполняется равенство (см. [21] и [2, с. 85])

$$(K_s u, u) = \|\hat{u}\|_2^2, \quad \text{где} \quad \hat{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 u(t) \exp(ixt) dt,$$

т.е. оператор K_s является положительным в пространстве $L_2(-1, 1)$.

Аналог теоремы 3.1 справедлив и для сингулярного оператора с ядром Гильберта (см. [2, с. 60])

$$(\Phi u)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [b(x) \cdot w(s) + b(s) \cdot w(x)] k(x, s) u(s) \operatorname{ctg} \frac{s - x}{2} ds.$$

Заметим также, что для сингулярного оператора

$$(H_s u)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(s - x) u(s) \operatorname{ctg} \frac{s - x}{2} ds$$

в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ справедливо равенство (см. [2, с. 61])

$$(H_s u, u) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} u(x) dx \right)^2 + \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot u(x) dx \right)^2 + \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot u(x) dx \right)^2 \right],$$

т.е. оператор H_s является положительным в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$.

Используя положительность операторов Ψ и Φ , в [2] методом монотонных (по Браудеру—Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений для различных классов нелинейных сингулярных интегральных уравнений, как в случае вещественных, так и в случае комплексных весовых пространств Лебега.

3.2. Сингулярные интегродифференциальные операторы. Интерес к сингулярным интегродифференциальным операторам вызван их многочисленными и разнообразными приложениями в гидро- и аэродинамике (уравнение Прандтля «крыла самолета»), теории упругости и автоматического управления, в области устойчивых процессов с независимыми приращениями и других. В работах Х. М. Когана [6, 7] в связи с решением одной вариационной задачи был изучен сингулярный интегродифференциальный оператор с ядром Коши

$$(Tu)(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u'(s)}{s-x} ds$$

как оператор, действующий из $L_2(-1, 1)$ в $L_2(-1, 1)$ с областью определения

$$D(T) = \left\{ u(x) : u(x) \in AC[-1, 1], u(-1) = u(1) = 0, \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} u'^2(x) dx < \infty \right\},$$

где $AC[-1, 1]$ есть множество всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций. В [7] доказано, что оператор T положителен. В работе М. Шлайфа [23] установлено, что

$$(Tu, u) \geq \int_{-1}^1 \frac{u^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \forall u(x) \in D(T).$$

Эти результаты допускают обобщение на случай сингулярного интегродифференциального оператора вида

$$(\mathbb{B}u)(x) = -\frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[b(s) \cdot u(s)]'}{s-x} ds, \quad b(x) \in AC[-1, 1],$$

рассматриваемого в пространстве Лебега $L_p(\varrho)$, $p \geq 2$, со степенным весом $\varrho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, с областью определения

$$D(\mathbb{B}) = \left\{ u(x) : u(x) \in AC[-1, 1], u(-1) = u(1) = 0, u'(x) \in L_{p'}(\sigma) \right\},$$

где $\sigma(x) = (1-x^2)^{(p'-1)/2}$. При этих условиях оператор $\mathbb{B}$ является положительным, причем

$$\langle \mathbb{B}u, u \rangle \geq \int_{-1}^1 \frac{[b(x) \cdot u(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \forall u(x) \in D(\mathbb{B}).$$

Рассмотрим сингулярный интегродифференциальный оператор с ядром Гильберта

$$(Gu)(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u'(s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds$$

как оператор, действующий из пространства вещественных 2π -периодических функций $L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(-\pi, \pi)$, с областью определения

$$D(G) = \left\{ u(x) : u(x) \in AC[-\pi, \pi], u(-\pi) = u(\pi) = 0, \int_{-\pi}^{\pi} |u'(x)|^{p'} dx < \infty \right\},$$

где $AC[-\pi, \pi]$ — множество всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций.

Теорема 3.2. *Сингулярный интегродифференциальный оператор с ядром Гильберта G является положительным оператором, причем*

$$\langle Gu, u \rangle = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + b_n^2) \quad \forall u(x) \in D(G), \quad (21)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cdot \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cdot \sin(nx) dx.$$

Доказательство. Пусть $u(x) \in D(G)$. Так как функция $u(x)$ абсолютно непрерывна, то справедливо соотношение (см. [4, с. 87])

$$u'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n (b_n \cos(nx) - a_n \sin(nx)).$$

Поэтому, используя известное представление сопряженной функции $\bar{u}(x)$ (см. [4, с. 573]), приходим к соотношению

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u'(s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds \sim \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Но тогда в силу равенства Парсеваля (см. [4, с. 218]) справедливо равенство (21), из которого непосредственно вытекает, что оператор G является положительным. $\square$

В заключение отметим, что большое число других примеров положительных операторов с разностными ядрами приведено в [1, 2, 8, 16, 21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки. — М.: Физматлит, 2009.
2. Асхабов С. Н. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Лебега. — Грозный: Чечен. гос. ун-т, 2013.
3. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега // Мат. заметки. — 2015. — 97, № 5. — С. 643–654.
4. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: ГИФМЛ, 1961.
5. Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. — М.: Наука, 1980.
6. Коган Х. М. Об одном сингулярном интегродифференциальном уравнении // Усп. мат. наук. — 1965. — 20, № 3 (123). — С. 243–244.
7. Коган Х. М. Об одном сингулярном интегродифференциальном уравнении // Диффер. уравн. — 1967. — 3, № 2. — С. 278–293.
8. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
9. Харди Г. Х., Рогозинский В. В. Ряды Фурье. — М.: Физматгиз, 1959.
10. Хведелидзе Б. В. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Тр. Тбилис. мат. ин-та АН Груз. ССР. — 1956. — 23. — С. 3–158.
11. Цегельник В. В. Гамильтонианы, ассоциированные с третьим и пятым уравнениями Пенлеве // Теор. мат. физ. — 2010. — 162, № 1. — С. 69–74.
12. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. — М.: Мир, 1985.

13. *Babbitt D. G., Kister J. E.* (eds). Features reviews in *Mathematical Reviews* 1995–1996. Reviews of outstanding recent books and papers. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc. — 1996.
14. *Fitt A. D.* When Tuck's double integral which should (?) vanish does// *Austr. Math. Soc. Gazette.* — 1997. — 24, № 1. — С. 22–25.
15. *Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O.* Volterra integral and functional equations. — Cambridge–New York: Cambridge Univ. Press, 1990.
16. *Junghanns P., Wolfersdorf L. V.* On the monotonicity of some singular integral operators// *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2012. — 35, № 8. — С. 1275–1288.
17. *Love E. R.* Tuck's double integral which should (?) vanish but doesn't// *Austr. Math. Soc. Gazette.* — 1996. — 23, № 1. — С. 912.
18. *McLean B.* A double integral that usually vanishes// *Austr. Math. Soc. Gazette.* — 1995. — 22, № 3. — С. 114–115.
19. *Mehtra M. L.* Random matrices. — Boston: Academic Press, 1991.
20. 2007 Wiener Prize// *Notices of the AMS.* — 2007. — 54, № 4. — С. 525–526.
21. *Porter D., Stirling D.* Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications. — Cambridge Univ. Press, 1990.
22. *Tracy C. A., Widom H.* Fredholm determinants, differential equations and matrix models// *Commun. Math. Phys.* — 1994. — 163, № 2. — 33–72.
23. *Schleiff M.* Untersuchungen einer linearen singularen Integrodifferentialgleichung der Tragflugeltheorie// *Wiss. Z. Univ. Halle. Math.-nat. Reihe.* — 1968. — 17. — С. 981–1000.
24. *Tuck E. O.* A double integral that should (?) vanish but doesn't// *Austr. Math. Soc. Gazette.* — 1995. — 22, № 2. — С. 58.

С. Н. Асхабов

Чеченский государственный педагогический университет, г. Грозный;

Чеченский государственный университет, г. Грозный

E-mail: askhabov@yandex.ru



НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ ЕГО ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ

© 2018 г. Ж. А. БАЛКИЗОВ

Аннотация. В работе исследована нелокальная краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка в области его гиперболичности, содержащая производные второго порядка в граничных условиях. Получены достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи. Для доказательства теоремы единственности решения используется метод Трикоми. Решение задачи выписано в явном виде.

Ключевые слова: вырождающееся гиперболическое уравнение первого рода, уравнение с кратными характеристиками, уравнение параболо-гиперболического типа третьего порядка, смешанная краевая задача, нелокальная краевая задача, аналог задачи Трикоми, метод Трикоми, интегральное уравнение Вольтерра второго рода, интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

AMS Subject Classification: 35M10, 35M13

1. Введение. На евклидовой плоскости точек (x, y) рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + a(-y)^{(m-2)/2} u_x, & y < 0, \\ u_{xxx} - u_y + bu_x, & y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $u = u(x, y)$ — искомая функция; $m, a, b = \text{const}$, причем $m > 0$, $|a| \leq m/2$.

Уравнение (1) при $y < 0$ совпадает с вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода (см. [32])

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} + a(-y)^{(m-2)/2} u_x = 0, \quad (2)$$

а при $y > 0$ — уравнением третьего порядка с кратными характеристиками (см. [12])

$$u_{xxx} - u_y + bu_x = 0. \quad (3)$$

Уравнение (2) является уравнением гиперболического типа с параболическим вырождением первого рода вдоль прямой $y = 0$. При $m = 2$ уравнение (2) переходит в уравнение Бицадзе—Лыкова (см. [11, 22, 23]), а при $a = 0$ из уравнения (2) приходим к уравнению Геллерстедта, которое, как показано в [24], находит применение в задаче определения формы прорези плотины. Частным случаем уравнения (2) также является уравнение Трикоми, являющееся теоретической основой околосвуковой газовой динамики (см. [9, 33]). В [32] выписано решение задачи Коши для уравнения (2) при $|a| \leq m/2$. Исследованию первой и второй задач Дарбу для уравнения (2) посвящена [17]. В [18] исследован критерий непрерывности решения задачи Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения вида (2).

Уравнение (3) совпадает с линеаризованным уравнением Кортевега—де Фриза (см. [35]), имеющим важные применения в вопросах распространения нелинейных волн в слабодиспергирующих средах (см. [19]). Уравнение (3) по классификации, приведенной в [23] относится к уравнению параболического типа, а в [12] такие уравнения названы уравнениями третьего порядка с кратными характеристиками. В [34] методами теории потенциалов и интегрального преобразования Лапласа была изучена краевая задача для уравнения (3), которая в настоящее время называется

задачей Каттабрига. С помощью фундаментальных решений, полученных в [34, 12] была построена функция Грина задачи Каттабрига для уравнения (3) и получены оценки фундаментальных решений и их производных различных порядков. С помощью функции Грина здесь же выписано решение задачи Каттабрига для уравнения (3) в замкнутом виде. Различные локальные и нелокальные краевые задачи в том числе краевые задачи с интегральными граничными условиями для общих уравнений третьего порядка с кратными характеристиками исследованы в [1, 16, 21].

Для модельного уравнения параболо–гиперболического типа третьего порядка с оператором Геллерстедта в области гиперболичности в [28] была исследована нелокальная внутреннекраевая задача со смещением с операторами Сайго в граничных условиях. Исследованию аналога задачи Трикоми для уравнения параболо–гиперболического типа третьего порядка с оператором Геллерстедта в области гиперболичности посвящена [2]. Краевые задачи для уравнения параболо–гиперболического типа третьего порядка с оператором Геллерстедта в области гиперболичности, когда в параболическом уравнении присутствуют слагаемые с младшими производными от искомой функции и сама искомая функция изучены в [3]. В терминах функции Миттаг–Леффлера в [4] в явном виде выписано решение одной нелокальной задачи для уравнения (1) при $b = 0$. Нелокальные краевые задачи для уравнений параболо–гиперболического типа второго и третьего порядков с кратными характеристиками, когда на границе области параболичности задаются граничные условия типа условий Франкля, а на границе области гиперболичности задается граничное условие, связывающее значения дробных производных от искомого решения в двух точках, лежащих на граничных характеристиках из разных семейств, исследовались в [5, 6, 7, 13, 14, 20, 28, 29, 30].

В связи с выше изложенным возникает необходимость поиска корректно поставленных краевых задач, сформулированных одновременно для вырождающихся гиперболических уравнений и уравнений высших порядков с кратными характеристиками. В данной работе исследована нелокальная краевая задача для уравнения параболо–гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка в области его гиперболичности, содержащая производные второго порядка в граничных условиях. Среди ранних работ, тесно примыкающих по тематике к данной статье (см., например, [10, 15]), где на корректность исследованы задача сопряжения модельных и общих уравнений параболического и гиперболического типов по временной переменной и изучены структурные и качественные свойства их решений.

2. Постановка задачи. Уравнение (1) в данной работе рассматривается в конечной односвязной области Ω , ограниченной при $y > 0$ отрезками AA_0 , A_0B_0 , B_0B прямых $x = 0$, $y = h$, $x = r$ соответственно, а при $y < 0$ характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = r$$

уравнения (2), выходящими из точек $A = (0, 0)$ и $B = (r, 0)$, соответственно, и пересекающимися в точке $C = (r/2, y_c)$, $y_c = -[(m+2)r/4]^{2/(m+2)}$. Обозначим через $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$ гиперболическую часть области Ω , а через $\Omega_2 = \Omega \cap \{y > 0\}$ — ее параболическую часть.

Определение 1. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем решение $u = u(x, y)$ этого уравнения из класса $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_2)$, $u_{xxx}, u_y \in C(\Omega_1)$, причем функция $\nu(x) = \lim_{y \rightarrow 0} u_y(x, y)$ может обращаться в бесконечность порядка ниже единицы при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow r$.

В данной работе исследуется следующая задача.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) из класса $u_x, u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup \overline{AA_0} \cup \overline{BB_0})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\left. \begin{aligned} u_{xx}(0, y) + \alpha(y)u(0, y) &= \varphi_1(y), \\ u_{xx}(r, y) + \beta(y)u(r, y) &= \varphi_2(y), \\ u_x(0, y) - \gamma(y)u_x(r, y) &= \varphi_3(y), \end{aligned} \right\} \quad 0 < y < h, \quad (4)$$

$$u|_A = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq r/2, \quad (5)$$

где $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $\gamma(y)$, $\varphi_i(y)$, $i = \overline{1, 3}$, заданные непрерывные на $[0, h]$ функции, а $\psi(x)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая на $[0, r/2]$ функция.

3. Теорема единственности решения.

Теорема 1. Пусть коэффициенты $\alpha(y), \beta(y), \gamma(y), b$ задачи (1), (4), (5) таковы, что

$$2\alpha(y) \leq b \leq 2\beta(y), \quad -1 \leq \gamma(y) \leq 1 \quad \text{для всех } y \in [0, h], \quad (6)$$

$$\left[\alpha(0)(\beta(0) - b) + \beta(0)\gamma(0)(\alpha(0) - b) \right] E_{1/2}(|b|r^2; 1) \neq \left[\alpha(0)\gamma(0)(\beta(0) - b) + \beta(0)(\alpha(0) - b) \right], \quad (7)$$

где

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/\rho)}$$

— функция Миттаг—Леффлера (см. [36]). Тогда решение задачи 1 единственно в области Ω .

Доказательство. Пусть $u = u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1) и выполнены условия

$$\lim_{y \rightarrow -0} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \tau(x), \quad \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \nu(x). \quad (8)$$

Тогда, переходя в уравнении (1) к пределу при $y \rightarrow +0$, с учетом обозначений (8) и условий (4), получим фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из параболической части Ω_2 области Ω на линию $y = 0$:

$$\nu(x) = \tau'''(x) + b\tau'(x), \quad 0 < x < r, \quad (9)$$

$$\tau''(0) + \alpha(0)\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau''(r) + \beta(0)\tau(r) = \varphi_2(0), \quad \tau'(0) - \gamma(0)\tau'(r) = \varphi_3(0). \quad (10)$$

Лемма 1. Для однородной задачи, соответствующей задаче (9), (10), при условиях теоремы 1 справедливо неравенство

$$I = \int_0^r \tau(x)\nu(x)dx \leq 0. \quad (11)$$

Доказательство. Действительно, из соотношения (9) с учетом однородных нелокальных краевых условий (10) ($\varphi_i(0) = 0$, $i = \overline{1, 3}$) имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^r \tau(x)\nu(x)dx = \int_0^r \tau(x) \left[\tau'''(x) + b\tau'(x) \right] dx = \left[\tau(x)\tau''(x) - \frac{1}{2}\tau'^2(x) + \frac{b}{2}\tau^2(x) \right] \Big|_0^r = \\ &= \left[\frac{b}{2} - \beta(0) \right] \tau^2(r) + \left[\alpha(0) - \frac{b}{2} \right] \tau^2(0) + \frac{\gamma^2(0) - 1}{2} (\tau')^2(r) \leq 0. \quad \square \end{aligned}$$

Используя представления решения задачи Коши с условиями (6) для уравнения (2), получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{B}(\alpha, \beta) \int_0^1 \tau \left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1) \right] t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1} dt + \\ &+ \frac{y}{B(1-\alpha, 1-\beta)} \int_0^1 \nu \left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1) \right] t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta} dt, \quad |a| < \frac{m}{2}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \tau \left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} \right] + \\ &+ \frac{2y}{m+2} \int_0^1 \nu \left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1) \right] (1-t)^{-\beta} dt, \quad a = \frac{m}{2}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$u(x, y) = \tau \left[x - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} \right] + \frac{2y}{m+2} \int_0^1 \nu \left[x - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} (2t-1) \right] (1-t)^{-\alpha} dt, \quad a = -\frac{m}{2}. \quad (14)$$

При граничном условии (5) в работе [5] найдены соответствующие фундаментальные соотношения между искомыми функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x) = \gamma_1 D_{0x}^{-\alpha-\beta} \tau'(t) - \frac{\gamma_2}{2} x^\alpha D_{0x}^{-\beta} \psi' \left(\frac{t}{2} \right), \quad |a| < \frac{m}{2}, \quad (15)$$

$$\nu(x) = \gamma_3 D_{0x}^{-\beta} \tau'(t) - \frac{\gamma_3}{2} D_{0x}^{-\beta} \psi' \left(\frac{t}{2} \right), \quad a = \frac{m}{2}, \quad (16)$$

$$\nu(x) = -(2-2\alpha)^{-\alpha} x^\alpha \psi' \left(\frac{x}{2} \right), \quad a = -\frac{m}{2}, \quad (17)$$

где

$$\alpha = \frac{m-2, a}{2(m+2)}, \quad \beta = \frac{m+2a}{2(m+2)},$$

$$\gamma_1 = \frac{2\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{[2(1-\alpha-\beta)]^{(\alpha+\beta)}\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \gamma_3 = \frac{2}{(2-2\beta)^\beta\Gamma(1-\beta)}.$$

Здесь

$$D_{cx}^\delta \varphi(t) = \frac{\operatorname{sgn}(x-c)}{\Gamma(-\delta)} \int_c^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{\delta+1}}$$

при $\delta < 0$ и

$$D_{cx}^\delta \varphi(t) = \operatorname{sgn}^{[\delta]+1}(x-c) \frac{\partial^{[\delta]+1}}{\partial x^{[\delta]+1}} D_{cx}^{\delta-[\delta]-1} \varphi(t)$$

при $\delta > 0$ — оператор дробного (в смысле Римана—Лиувилля) интегродифференцирования порядка $|\delta|$ с началом в точке c (см. [23]). Подробное исследование свойств оператора $D_{cx}^\alpha \varphi(t)$ приведены в [23, 24, 31].

При $\psi(x) \equiv 0$ из соотношений (15), (16), (17) для различных значений a получаем соответствующие равенства

$$\nu(x) = \gamma_1 D_{0x}^{-\alpha-\beta} \tau'(t) = \gamma_1 D_{0x}^{1-\alpha-\beta} \tau(t), \quad |a| < \frac{m}{2}, \quad (18)$$

$$\nu(x) = \gamma_3 D_{0x}^{-\beta} \tau'(t) = \gamma_3 D_{0x}^{1-\beta} \tau(t), \quad a = \frac{m}{2}, \quad (19)$$

$$\nu(x) = 0, \quad a = -\frac{m}{2}. \quad (20)$$

Воспользуемся следующим свойством положительности оператора $D_{ax}^\delta \varphi(t)$ дробного интегродифференцирования (в смысле Римана—Лиувилля) порядка $\delta \in [0, 1]$ (см. [24]).

Лемма 2. Для любого $\delta \in [0, 1]$ и любой функции $\varphi = \varphi(x) \in A_0^\delta[a, b]$, где $A_0^\delta[a, b]$ — это множество всех функций $\varphi(x)$, имеющих абсолютно непрерывный на $[a, b]$ дробный интеграл порядка $1 - \delta$, который обращается в нуль при $x = a$, скалярное произведение которого равно

$$\left(\varphi, D_{ax}^\delta \varphi \right)_0 = \int_a^b \varphi(x) D_{ax}^\delta \varphi(t) dx \geq 0, \quad (21)$$

причем $\left(\varphi, D_{ax}^\delta \varphi \right)_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \equiv 0$.

С учетом леммы 2 из соотношения (18) при $|a| < m/2$ имеем следующее неравенство

$$I = \int_0^r \tau(x)\nu(x)dx = \gamma_1 \int_0^r \tau(x)D_{0x}^{1-\alpha-\beta}\tau(t)dx \geq 0. \quad (22)$$

Аналогичное неравенство с учетом леммы 2 получается из (19) и при $a = m/2$, а при $a = -m/2$ из (20) приходим к равенству $I = 0$. Из неравенств (9) и (22) при $-m/2 < a \leq m/2$ следует равенство

$$I = \int_0^r \tau(x)\nu(x)dx = 0,$$

которое, в силу леммы 2, может иметь место в том и только в том случае, когда $\tau(x) \equiv 0$. При этом из соотношений (18) и (19) следует, что $\nu(x) \equiv 0$ и, стало быть, $u(x, y) \equiv 0$ области Ω_1 как решение однородной задачи Коши для уравнения (2) (формулы (12) и (13)). Если же $a = -m/2$, то при выполнении условия (7) теоремы единственности 1 решение однородной задачи

$$\tau'''(x) + b\tau'(x) = 0, \quad 0 < x < r, \quad (23)$$

$$\tau''(0) + \alpha(0)\tau(0) = 0, \quad \tau''(r) + \beta(0)\tau(r) = 0, \quad \tau'(0) - \gamma(0)\tau'(r) = 0 \quad (24)$$

не может отличаться от тривиального. При этом из формулы (14) следует, что и в этом случае $u(x, y) \equiv 0$ области Ω_1 .

Покажем далее, что и задача нахождения регулярного в области Ω_2 решения уравнения (3), удовлетворяющего однородным граничным условиям, соответствующим условиям (4) и однородному начальному условию $u(x, 0) = 0$ при условиях теоремы 1 не может иметь решений, отличных от тривиального. В области Ω_2 рассмотрим однородную задачу.

Задача 2. Найти регулярное в области Ω_2 решение $u = u(x, y)$ уравнения

$$Lu = u_{xxx} - u_y + bu_x = 0, \quad b = \text{const}$$

из класса $u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup AA_0 \cup BB_0)$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq r$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u_{xx}(0, y) + \alpha(y)u(0, y) &= 0, & u_{xx}(r, y) + \beta(y)u(r, y) &= 0, \\ u_x(0, y) - \gamma(y)u_x(r, y) &= 0, & 0 < y < h, \end{aligned}$$

где $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $\gamma(y)$ — заданные функции из класса $C[0, h]$.

Допустим, что задача 2 имеет нетривиальное решение $u = u(x, y) \neq 0$. Следуя работам [1, 16, 25] положим

$$u(x, y) = v(x, y) \exp(\mu y), \quad \mu = \text{const}. \quad (25)$$

При этом относительно функции $v = v(x, y)$ получаем уравнение

$$L_\mu v = v_{xxx} - v_y + bv_x - \mu v = 0 \quad (26)$$

с начальными и краевыми условиями при $0 \leq x \leq r$, $0 < y < h$:

$$\begin{cases} v(x, 0) = 0, \\ v_{xx}(0, y) + \alpha(y)v(0, y) = 0, \\ v_{xx}(r, y) + \beta(y)v(r, y) = 0, \\ v_x(0, y) - \gamma(y)v_x(r, y) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Так как, по предположению, функция $u = u(x, y)$ является нетривиальным решением однородной задачи 2, то как следует из (25), задача (26)–(27) тоже будет иметь нетривиальное решение $v = v(x, y) \neq 0$.

Пусть $\Omega_{2\varepsilon}$ — это область, определенная неравенствами

$$\Omega_{2\varepsilon} = \left\{ (x, y) : \varepsilon < x < r - \varepsilon, \varepsilon < y < h - \varepsilon, \varepsilon > 0 \right\}.$$

В области $\Omega_{2\varepsilon}$ рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} 2(v, L_\mu v)_0 &= \int_{\Omega_{2\varepsilon}} 2v L_\mu v dx dy = \int_{\Omega_{2\varepsilon}} 2v (v_{xxx} - v_y + bv_x - \mu v) dx dy = \\ &= \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (2vv_{xx} - v_x^2 + bv^2) - \frac{\partial}{\partial y} (v^2) \right] dx dy - 2\mu \int_{\Omega_{2\varepsilon}} v^2 dx dy = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Применяя к равенству (28) формулу Грина, получим

$$2(v, L_\mu v)_0 = \int_{\Gamma_\varepsilon} (2vv_{xx} - v_x^2 + bv^2) dy + v^2 dx - 2\mu \int_{\Omega_{1\varepsilon}} v^2 dx dy = 0, \quad (29)$$

где Γ_ε — граница области $\Omega_{1\varepsilon}$. Переходя в равенстве (29) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая в полученном равенстве однородные граничные условия (27), приходим к равенству

$$\begin{aligned} 2(v, L_\mu v)_0 &= \int_0^h [2\alpha(y) - b] v^2(0, y) dy + \int_0^h [b - 2\beta(y)] v^2(r, y) dy - \\ &\quad - \int_0^r v^2(x, h) dx - \int_0^h [\gamma^2(y) - 1] v_x^2(r, y) dy - 2\mu \int_{\Omega_1} v^2 dx dy = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Выбирая значение параметра μ положительным и пользуясь условиями (6) теоремы 1, легко заметить, что левая часть равенства (30) становится строго отрицательной, что невозможно, если $v(x, y) \neq 0$ всюду в $\overline{\Omega}_2$. Тогда, согласно (25), $u(x, y) \equiv 0$ всюду в $\overline{\Omega}_2$.

Таким образом, решение $u(x, y)$ однородной задачи 1 тождественно равно нулю всюду в $\overline{\Omega}$, т.е. если выполнены условия (6), (7) теоремы 1, то решение задачи 1 для уравнения (1) единственно в требуемом классе. Теорема 1 доказана. $\square$

4. Теорема существования.

Теорема 2. При условиях (6), (7) решение задачи 1 существует.

Действительно, исключая из фундаментальных соотношений (9) и (15) искомую функцию $v(x)$, приходим к нелокальной краевой задаче (10) для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\tau'''(x) + b\tau'(x) - \gamma_1 D_{0x}^{1-\alpha-\beta} \tau(t) = -\gamma_2 x^\alpha D_{0x}^{1-\beta} \psi\left(\frac{t}{2}\right), \quad 0 < x < r. \quad (31)$$

Поддействуем на уравнение (31) оператором D_{0x}^{-3} . В результате решение обыкновенного дифференциального уравнения (31) эквивалентно редуцируется к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\tau(x) + \int_0^x \left[b(x-t) - \frac{\gamma_1}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} (x-t)^{\alpha+\beta+1} \right] \tau(t) dt = \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 x + c_3 - \frac{\gamma_2}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt, \quad (32)$$

где $f(x) = x^\alpha D_{0x}^{1-\beta} \psi(t/2)$, c_1, c_2, c_3 — пока неизвестные постоянные.

Уравнение (32) относится к классу уравнений Вольтерра второго рода типа свертки. Следуя [26], перепишем уравнение (32) в следующем виде:

$$\tau(x) + b[x * \tau(x)] - \frac{\gamma_1}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} [x^{\alpha+\beta+1} * \tau(x)] = \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 x + c_3 - \gamma_2 \left[\frac{x^2}{2} * f(x) \right], \quad (33)$$

где

$$g_1(x) * g_2(x) = \int_0^x g_1(x-t)g_2(t)dt = \int_0^x g_1(t)g_2(x-t)dt$$

— свертка функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$.

Пусть $\tau(x)$ и $f(x)$ в уравнении (33) являются функциями оригиналами и пусть

$$\tau(x) \doteq g(p), \quad f(x) \doteq F(p).$$

Тогда, применяя к уравнению (33) преобразование Лапласа, используя свойство линейности и теорему умножения, приходим к следующему уравнению относительно $g(p)$

$$g(p) \left[1 + \frac{b}{p^2} - \frac{\gamma_1}{p^{\alpha+\beta+2}} \right] = \frac{c_1}{p^3} + \frac{c_2}{p^2} + \frac{c_3}{p} - \frac{\gamma_2}{p^3} F(p),$$

откуда

$$g(p) = \frac{c_1 + c_2 p + c_3 p^2 - \gamma_2 F(p)}{p^3 \Delta(p)}, \quad (34)$$

где $\Delta(p) = 1 + bp^{-2} - \gamma_1 p^{-\alpha-\beta-2}$.

Заметим, что для достаточно больших значений p имеет место равенство

$$\int_0^\infty e^{-\Delta(p)s} ds = -\frac{1}{\Delta(p)} e^{-\Delta(p)s} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\Delta(p)}.$$

С учетом этого, равенство (34) перепишется в следующей форме

$$\begin{aligned} g(p) &= [c_1 p^{-3} + c_2 p^{-2} + c_3 p^{-1} - \gamma_2 F(p) p^{-3}] \cdot \int_0^\infty e^{-\Delta(p)s} ds = \\ &= c_1 \int_0^\infty p^{-3} e^{-\Delta(p)s} ds + c_2 \int_0^\infty p^{-2} e^{-\Delta(p)s} ds + c_3 \int_0^\infty p^{-1} e^{-\Delta(p)s} ds - \gamma_2 \int_0^\infty p^{-3} e^{-\Delta(p)s} F(p) ds. \end{aligned} \quad (35)$$

Найдем теперь обратное преобразование Лапласа. Прежде всего заметим (см. [37]), что

$$p^{-\mu} e^{zp^{-\beta}} \doteq x^{\mu-1} \phi(\beta, \mu; zx^\beta),$$

где

$$\phi(\xi, \eta; z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n! \Gamma(n\xi + \eta)}.$$

Функция $\phi(\xi, \eta; z)$ впервые была введена Е. М. Райтом в [38], а в [8] функция $\phi(\xi, \eta; z)$ была названа функцией Райта. Определения и основные свойства функции Райта и функции типа Райта приведены в [8, 27, 37, 38].

Пользуясь формулой

$$g_1(p)g_2(p) \doteq q_1(x) * q_2(x)$$

(обратная теорема умножения), из (35) находим

$$\begin{aligned} \tau(x) &= c_1 \int_0^\infty e^{-s} \left[x^{1/2} \phi \left(2, \frac{3}{2}; -bsx^2 \right) \right] * \left[x^{1/2} \phi \left(\alpha + \beta + 2, \frac{3}{2}; \gamma_1 sx^{\alpha+\beta+2} \right) \right] ds + \\ &\quad + c_2 \int_0^\infty e^{-s} \left[\phi \left(2, 1; -bsx^2 \right) \right] * \left[\phi \left(\alpha + \beta + 2, 1; \gamma_1 sx^{\alpha+\beta+2} \right) \right] ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_3 \int_0^\infty e^{-s} \left[x^{-1/2} \phi \left(2, \frac{1}{2}; -bsx^2 \right) \right] * \left[x^{-1/2} \phi \left(\alpha + \beta + 2, \frac{1}{2}; \gamma_1 s x^{\alpha+\beta+2} \right) \right] ds - \\
& - \gamma_2 \left\{ f(x) * \int_0^\infty e^{-s} \left[x \phi \left(2, 2; -bsx^2 \right) * \phi \left(\frac{5}{2}, 1; \gamma_1 s x^{5/2} \right) \right] ds \right\}. \quad (36)
\end{aligned}$$

Обозначая, как и в [26]

$$G_m^\mu(x; \lambda_1, \lambda_2; \beta_1, \beta_2) = \int_0^\infty e^{-s} \left[x^{\mu_1-1} \phi \left(\beta_1, \mu_1; z_1 x^{\beta_1} \right) * x^{\mu_2-1} \phi \left(\beta_2, \mu_2; z_2 x^{\beta_2} \right) \right],$$

представление (36) перепишется в следующей форме

$$\begin{aligned}
\tau(x) = & c_1 G_2^3(x; -b, \gamma_1; 2, \alpha + \beta + 2) + c_2 G_2^2(x; -b, \gamma_1; 2, \alpha + \beta + 2) + \\
& + c_3 G_2^1(x; -b, \gamma_1; 2, \alpha + \beta + 2) - \gamma_2 \int_0^x G_2^3(x-t; -b, \gamma_1; 2, \alpha + \beta + 2) f(t) dt. \quad (37)
\end{aligned}$$

Функция $G_m^\mu(x)$ обладает свойствами (см. [26]):

$$D_{0x}^\nu G_m^\mu(t; \mathbf{a}; \mathbf{b}) = G_m^{\mu-\nu}(t; \mathbf{a}; \mathbf{b}), \quad \mu > \nu; \quad (38)$$

$$G_m^\mu(x; \mathbf{a}; \mathbf{b}) = \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} + \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{-\beta_i} G_m^\mu(t; \mathbf{a}; \mathbf{b}). \quad (39)$$

Найдем значения неизвестных c_1, c_2, c_3 , входящих в (37). Пользуясь свойствами (38), (39) функции $G_m^\mu(x; \mathbf{a}; \mathbf{b})$, из представления (37) находим

$$\begin{aligned}
\tau'(x) = & c_1 G_2^2(x; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + c_2 G_2^1(x; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + \\
& + c_3 \left[-b G_2^2(x; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + \gamma_1 G_2^{\alpha+\beta+2}(x; \mathbf{a}; \mathbf{b}) \right] - \gamma_2 \int_0^x G_2^2(x-t; \mathbf{a}; \mathbf{b}) f(t) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau''(x) = & c_1 G_2^1(x; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + c_2 \left[-b G_2^2(x; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + \gamma_1 G_2^{\alpha+\beta+2}(x; \mathbf{a}; \mathbf{b}) \right] + \\
& + c_3 \left[-b G_2^1(x; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + \gamma_1 G_2^{\alpha+\beta+1}(x; \mathbf{a}; \mathbf{b}) \right] - \gamma_2 \int_0^x G_2^1(x-t; \mathbf{a}; \mathbf{b}) f(t) dt,
\end{aligned}$$

где $\mathbf{a} = (-b, \gamma_1)$, $\mathbf{b} = (2, \alpha + \beta + 2)$

Из условия $\tau(0) = \psi(0)$ сразу находим, что $c_3 = \psi(0)$. Удовлетворяя (37) последним двум условиям из (10), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned}
& c_1 [\alpha(0) G_2^3(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + G_2^1(r; \mathbf{a}; \mathbf{b})] + c_2 [(\alpha(0) - b) G_2^2(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + \gamma_1 G_2^{\alpha+\beta+2}(r; \mathbf{a}; \mathbf{b})] = \\
& = \varphi_2(0) - \psi(0)(b - \alpha(0)) G_2^1(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) - \gamma_1 \psi(0) G_2^{\alpha+\beta+1}(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + \\
& + \gamma_2 \int_0^r G_2^1(r-t; \mathbf{a}; \mathbf{b}) f(t) dt + \gamma_2 \alpha(0) \int_0^r G_2^1(r-t; \mathbf{a}; \mathbf{b}) f(t) dt, \quad (40a)
\end{aligned}$$

$$c_1\gamma(0)G_2^2(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + c_2 [\gamma(0)G_2^1(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) - 1] = \gamma_2\gamma(0) \int_0^r G_2^2(r-t; \mathbf{a}; \mathbf{b})f(t)dt + \\ + \gamma(0)\psi(0) [bG_2^2(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) - \gamma_1G_2^{\alpha+\beta+2}(r; \mathbf{a}; \mathbf{b})] - \varphi_3(0). \quad (40b)$$

Решая систему (40), находим $c_1 = \Delta_1/\Delta$, $c_2 = \Delta_2/\Delta$, где

$$\Delta = [\alpha(0)G_2^3(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + G_2^1(r; \mathbf{a}; \mathbf{b})] [\gamma(0)G_2^1(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) - 1] - \\ - \gamma(0) [(\alpha(0) - b)G_2^2(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + \gamma_1G_2^{\alpha+\beta+2}(r; \mathbf{a}; \mathbf{b})] G_2^2(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}),$$

$$\Delta_1 = f_1 [\gamma(0)G_2^1(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) - 1] - \gamma(0)f_2G_2^2(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}),$$

$$\Delta_2 = f_2 [\alpha(0)G_2^3(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + G_2^1(r; \mathbf{a}; \mathbf{b})] - f_1 [(\alpha(0) - b)G_2^2(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + \gamma_1G_2^{\alpha+\beta+2}(r; \mathbf{a}; \mathbf{b})],$$

$$f_1 = \varphi_2(0) - \psi(0)(b - \alpha(0))G_2^1(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) - \gamma_1\psi(0)G_2^{\alpha+\beta+1}(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) + \\ + \gamma_2 \int_0^r G_2^1(r-t; \mathbf{a}; \mathbf{b})f(t)dt + \gamma_2\alpha(0) \int_0^r G_2^1(r-t; \mathbf{a}; \mathbf{b})f(t)dt,$$

$$f_2 = \gamma(0)\psi(0) [bG_2^2(r; \mathbf{a}; \mathbf{b}) - \gamma_1G_2^{\alpha+\beta+2}(r; \mathbf{a}; \mathbf{b})] + \gamma_2\gamma(0) \int_0^r G_2^2(r-t; \mathbf{a}; \mathbf{b})f(t)dt - \varphi_3(0),$$

причем $\Delta \neq 0$ в силу доказанной выше теоремы 1.

Подставляя найденные значения неизвестных c_1 , c_2 , c_3 в общее решение (37), находим искомую функцию $\tau = \tau(x)$ в случае, когда $-m/2 < |a| \leq m/2$.

Если $a = -m/2$, то из соотношений (9) и (17) приходим к следующей задаче относительно $\tau(x)$

$$\tau'''(x) + b\tau'(x) = -(2 - 2\alpha)^{-\alpha}x^\alpha\psi'\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 < x < r, \quad (41)$$

$$\tau''(0) + \alpha(0)\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau''(r) + \beta(0)\tau(r) = \varphi_2(0), \quad \tau'(0) - \gamma(0)\tau'(r) = \varphi_3(0). \quad (42)$$

Решение задачи (41)–(42) дается формулой

$$\tau(x) = -(2 - 2\alpha)^{-\alpha} \int_0^r G(x, \xi)\xi^\alpha\psi'\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi + \\ + \left[\frac{x^2}{2} - b \int_0^r \xi G(x, \xi)d\xi - \frac{br\gamma(0)}{1 - \gamma(0)} \int_0^r G(x, \xi)d\xi + \frac{\gamma(0)rx}{1 - \gamma(0)} \right] \varphi_1(0) + \\ + \left[\frac{x}{1 - \gamma(0)} - \frac{b}{1 - \gamma(0)} \int_0^r G(x, \xi)d\xi \right] \varphi_3(0) + \left[1 - \frac{\alpha(0)x^2}{2} \int_0^r G(x, \xi)d\xi - \right. \\ \left. - b\alpha(0) \int_0^r \xi G(x, \xi)d\xi + \frac{br\alpha(0)\gamma(0)}{1 - \gamma(0)} \int_0^r G(x, \xi)d\xi - \frac{\alpha(0)\gamma(0)rx}{1 - \gamma(0)} \right] A_1,$$

где

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \sqrt{|b|x}E_{1/2}(|b|x^2; 2) A_2 + \left[1 + E_{1/2}(|b|x^2; 2) - \frac{b}{\alpha(0)} \right] A_3, & 0 \leq x < \xi, \\ \sqrt{|b|x}E_{1/2}(|b|x^2; 2) A_2 + \left[1 + E_{1/2}(|b|x^2; 2) - \frac{b}{\alpha(0)} \right] A_3 + \\ + \frac{1}{b}E_{1/2}(|b|(x - \xi)^2; 2) - \frac{1}{b}, & \xi < x \leq r, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{[2 + \beta(0)r^2 - 2\gamma(0) + \gamma(0)\beta(0)r^2]\varphi_1(0) + 2[\gamma(0) - 1]\varphi_2(0) + 2\beta(0)r\varphi_3(0)}{2\alpha(0) - 2\beta(0) + 2\beta(0)\gamma(0) - 2\alpha(0)\gamma(0) + \alpha(0)\beta(0)r^2 + \alpha(0)\beta(0)\gamma(0)r^2}, \\
A_2 &= -\frac{\gamma(0)\sqrt{|b|}rE_{1/2}(|b|r^2; 2)f_3 + \left[\frac{\beta(0)(\alpha(0) - b)}{\alpha(0)} + (\beta(0) - b)E_{1/2}(|b|r^2; 1)\right]f_4}{\left[\alpha(0)(\beta(0) - b) + \beta(0)\gamma(0)(\alpha(0) - b)\right]E_{1/2}(|b|r^2; 1) - \alpha(0)\gamma(0)(\beta(0) - b) - \beta(0)(\alpha(0) - b)}, \\
A_3 &= \frac{(\beta(0) - b)\sqrt{|b|}rE_{1/2}(|b|r^2; 2)f_4 - [1 - \gamma(0)E_{1/2}(|b|r^2; 1)]f_3}{\left[\alpha(0)(\beta(0) - b) + \beta(0)\gamma(0)(\alpha(0) - b)\right]E_{1/2}(|b|r^2; 1) - \alpha(0)\gamma(0)(\beta(0) - b) - \beta(0)(\alpha(0) - b)}, \\
f_3 &= \frac{\beta(0)}{b} - \frac{\beta(0) - b}{b}E_{1/2}(|b|(r - \xi)^2; 1), \quad f_4 = \frac{\gamma(0)}{b}\sqrt{|b|}(r - \xi)E_{1/2}(|b|(r - \xi)^2; 2).
\end{aligned}$$

По найденному значению $\tau(x)$ можно найти и функцию $\nu(x)$ из фундаментальных соотношений (9), (15), (16), (17). После того как функции $\tau = \tau(x)$ и $\nu = \nu(x)$ найдены, решение задачи 1 в области Ω_1 определяется как решение задачи Коши (8) для уравнения (2) и выписывается как (12), (13) или (14), а в области Ω_2 приходим к задаче нахождения регулярного решения уравнения (3), удовлетворяющего условиям (4) и $u(x, 0) = \tau(x)$, которая исследована в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдиназаров С. Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. — 1981. — 17, № 1. — С. 3–12.
2. Балкизов Ж. А. Аналог задачи Трикоми для уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка с оператором Геллерстедта в области гиперболичности // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. — 2014. — 16, № 2. — С. 20–27.
3. Балкизов Ж. А. Краевые задачи для уравнения смешанного типа третьего порядка с оператором Геллерстедта в гиперболической части // Известия Кабардино-Балкарского государственного университета. — 2011. — 1, № 1. — С. 21–33.
4. Балкизов Ж. А. Нелокальная краевая задача для модельного уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. — 2015. — 17, № 4. — С. 9–20.
5. Балкизов Ж. А. Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2016. — № 1. — С. 5–10.
6. Балкизов Ж. А. Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Владикавказ. мат. ж. — 2016. — 18, № 2. — С. 19–30.
7. Балкизов Ж. А. Первая краевая задача для уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка в области гиперболичности // Уфим. мат. ж. — 2017. — 9, № 2. — С. 25–39.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. — М.: Наука, 1967.
9. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. — М.: Иностранная литература, 1961.
10. Бэсихатлов Х. Г., Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Доклады Академии наук СССР. — 1968. — 183, № 2. — С. 261–264.
11. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. — М.: изд. АН СССР, 1959.
12. Джусураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. — Ташкент: ФАН, 1979.
13. Елеев В. А., Кумыкова С. К. О некоторых краевых задачах со смещением на характеристиках для смешанного уравнения гипербола-параболического уравнения // Укр. мат. ж. — 2000. — 52, № 5. — С. 716–717.
14. Елеев В. А., Кумыкова С. К. Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. — 2010. — № 5 (37). — С. 5–14.

15. Золина Л. А. О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа// Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 1966. — 6, № 6. — С. 991–1001.
16. Иргашев Ю. Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками// Сборник научных трудов «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения». Ташкент: ФАН. — 1976. — С. 17–31.
17. Кальменов Т. Ш. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения// Дифференц. уравнения. — 1971. — 27, № 1. — С. 178–181.
18. Кальменов Т. Ш. Критерий непрерывности решения задачи Гурса для одного вырождающегося уравнения// Дифференц. уравнения. — 1972. — 8, № 1. — С. 41–54.
19. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. — М.: Наука, 1973.
20. Килбас А. А., Репин О. А. Задача со смещением для парабола-гиперболического уравнения// Дифференц. уравнения. — 1998. — 34, № 6. — С. 799–805.
21. Лукина Г. А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортвега-де Фриза// Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. — 2011. — № 17. — С. 52–61.
22. Лыков А. В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло и массообмена// Инженерно-физический журнал. — 1965. — 9, № 3. — С. 287–304.
23. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.
24. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
25. Нахушев А. М. К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гипербола-параболического типа// Дифференц. уравнения. — 1978. — 14, № 1. — С. 56–73.
26. Псху А. В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка// Мат. сборник. — 2011. — 202, № 4. — С. 111–122.
27. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
28. Репин О. А., Кумыкова С. К. Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами// Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2012. — 29, № 4. — С. 17–25.
29. Репин О. А., Кумыкова С. К. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками// Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2011. — 25, № 4. — С. 25–36.
30. Салахитдинов М. С., Бердышев А. С. О некоторых нелокальных краевых задачах для смешанного парабола-гиперболического уравнения// Известия АН УзССР. Сер. физ.-мат. науки. — 1982. — № 4. — С. 25–31.
31. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: «Наука и техника», 1987.
32. Смирнов М. М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. — Минск: Вышэйшая школа, 1977.
33. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. — М.: Наука, 1973.
34. Cattabriga L. Annali della scuola normale Superici di pisa e mat. — 1959. — 13, № 2. — P. 163.
35. Korteweg D. J., De Vries G. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves// Philosophical Magazine. — 1895. — 39. — P. 422–443.
36. Mittag-Leffler M. G. Sur la fonction nouvelle $E_{\frac{1}{\alpha}}(x)$ // C. R. Acad. Sci., Paris. — 1903. — 137. — P. 554–558.
37. Wright E. M. The generalized Bessel function of order greater than one// Quart. J. Math. Oxford Ser. — 1940. — 11. — P. 36–48.
38. Wright E. M. On the coefficient of power series having exponential singularities// J. London Math. Soc. — 1933. — P. 71–79.

Ж. А. Балкизов

Институт прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН, г. Нальчик
E-mail: giraslan@yandex.ru



КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

© 2018 г. Л. Х. ГАДЗОВА

Аннотация. В работе исследуется краевая задача с локальным смещением для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования, связывающим значение искомого решения на концах рассматриваемого интервала со значениями во внутренних точках.

Ключевые слова: оператор дробного дифференцирования, производная Капуто, краевая задача.

AMS Subject Classification: 34A08

1. Введение и постановка задачи. В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^m \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad (1)$$

где $\alpha_j \in]1, 2[$, $\lambda, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m$, $\partial_{0x}^{\gamma} u(x)$ — регуляризованная дробная производная (производная Капуто, см. [8, с. 11]):

$$\partial_{0x}^{\gamma} u(x) = D_{0x}^{\gamma-n} u^{(n)}(x), \quad n-1 < \gamma \leq n, \quad (2)$$

где D_{0x}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования порядка γ в смысле Римана—Лиувилля (см. [8, с. 9]) по переменной x , определяемый следующим образом:

$$D_{0x}^{\gamma} u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_0^x u(t)(x-t)^{-\gamma-1} dt, & \gamma < 0, \\ u(x), & \gamma = 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\gamma-n} u(x), & n-1 < \gamma \leq n, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка исследовались многими авторами, более подробную библиографию по этому вопросу можно найти в [8, 10, 14, 15, 20]. Существенный вклад в изучение дифференциальных уравнений дробного порядка внесли авторы работ [6, 7, 17]. Уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования исследовались в работах [12, 13]. В [18] численным методом рассматривается уравнение с оператором Капуто дискретно распределенного порядка. Априорные оценки дифференциальных и разностных задач с оператором дискретно распределенного порядка получены в [16]. Также отметим работу [1], в которой исследовалась краевая задача со смещением для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна—Нерсесяна. Для

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00462-А).

уравнения (1) решены задачи Дирихле и Неймана, построены соответствующие функции Грина и исследованы вопросы о вещественных собственных значениях рассматриваемых задач [2–4].

В последние годы существенно возрос интерес к краевым задачам для дифференциальных уравнений дробного порядка. Это обусловлено приложениями, которые обнаруживаются в физике и математическом моделировании фрактальных сред (см. [8, 9, 15, 19]).

В работе исследуется нелокальная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования; частным случаем исследуемой задачи является двухточечная краевая задача.

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x)$, имеющую абсолютно непрерывную производную первого порядка на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющую уравнению (1) для всех $x \in]0, 1[$.

Задача 1. Найти регулярное решение уравнения (1) в интервале $]0, 1[$, удовлетворяющее условиям

$$u(0) = u_0, \quad (3)$$

$$u(1) - \sum_{k=1}^n a_k u(x_k) = u_1, \quad x_k \in]0, 1[, \quad (4)$$

где u_0, u_1, a_k — заданные действительные числа.

Случай $n = 1$ был рассмотрен в [5].

2. Основной результат. Примем следующие обозначения (см. [11]):

$$G_m^\mu(x) = G_m^\mu(x; \nu_1, \dots, \nu_m; \gamma_1, \dots, \gamma_m) \equiv \int_0^\infty e^{-t} S_m^\mu(x; \nu_1 t, \dots, \nu_m t; \gamma_1, \dots, \gamma_m) dt,$$

$$\nu_1 = -\frac{\lambda}{\beta_1}, \quad \nu_j = -\frac{\beta_j}{\beta_1}, \quad \gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_j = \alpha_1 - \alpha_j, \quad j = \overline{2, m},$$

$$S_m^\mu(x; z_1, \dots, z_m; \gamma_1, \dots, \gamma_m) = (h_1 * h_2 * \dots * h_m)(x).$$

Через

$$(g * h)(x) = \int_0^x g(x-t)h(t)dt$$

обозначается свертка Лапласа функций $g(x)$ и $h(x)$, $h_j = h_j(x) \equiv x^{\mu_j-1} \phi(\gamma_j, \mu_j; z_j x^{\gamma_j})$, а через

$$\phi(a, b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(ak + b)}$$

— функция Райта (см. [21]); $x > 0$, $z_i \in \mathbb{R}$, $\gamma_j > 0$, $\mu_j > 0$, $\mu = \sum_{j=1}^m \mu_j$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, t) = \frac{1}{\beta_1} \left[G_m^{\alpha_1}(x-t)H(x-t) - G_m^{\alpha_1}(1-t) \frac{(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))}{\rho} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n a_k G_m^{\alpha_1}(x_k - t)H(x_k - t) \frac{(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))}{\rho} \right], \quad (5) \end{aligned}$$

где

$$\rho = (1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(1)) - \sum_{k=1}^n a_k (x_k + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x_k)),$$

$$H(x-t) = \begin{cases} 1, & x \geq t, \\ 0, & x < t, \end{cases} \quad \text{— функция Хевисайда.}$$

Теорема 1. *Предположим, что функция $f(x) \in C]0, 1[$ представима в виде*

$$f(x) = D_{0x}^{\alpha_1-2} g(x), \quad g(x) \in L[0, 1],$$

и выполняется условие $\rho \neq 0$. Тогда существует регулярное решение задачи (1), (3), (4), определяемое равенством

$$u(x) = \int_0^1 \mathbf{F}(x, t) f(t) dt + u_0 \left[\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_1-1} \mathbf{F}(x, t) \right]_{t=0} - u_1 \left[\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_1-1} \mathbf{F}(x, t) \right]_{t=1}. \quad (6)$$

Решение задачи (1), (3), (4) единственно тогда и только тогда, когда $\rho \neq 0$.

Доказательство. Докажем, что функция $u(x)$, определяемая равенством (6), является решением задачи (1), (3), (4). Для доказательства нам понадобятся следующие равенства для функции $G_m^\mu(x)$ (см. [11]):

$$G_m^\mu(x) = O(x^{\mu-1}) \text{ при } x \rightarrow 0, \quad (7)$$

$$D_{0x}^\nu G_m^\mu(x) = G_m^{\mu-\nu}(x), \text{ если } \mu > \nu, \quad (8)$$

$$G_m^\mu(x) - \sum_{j=1}^m \nu_j D_{0x}^{-\gamma_j} G_m^\mu(x) = \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, \quad \mu > 0, \quad (9)$$

а также следующее утверждение, доказанное в [3].

Лемма 1. *Пусть*

$$f(x) \in C]0, 1[, \quad f(x) = D_{0x}^{\alpha_1-2} g(x), \quad g(x) \in L[0, 1].$$

Если $u(x)$ — регулярное решение уравнения (1), то оно представимо в виде

$$u(x) = \frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(x) + u(0) \left(1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x) \right) + u'(0) \left(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x) \right). \quad (10)$$

Функция, определенная равенством (10), является регулярным решением уравнения (1).

В частности, из (9) следует формула

$$\sum_{j=1}^m \beta_j G_m^{\mu-\gamma_j}(x) + \lambda G_m^\mu(x) = \frac{\beta_1 x^{\mu-\alpha_1-1}}{\Gamma(\mu - \alpha_1)}, \quad \mu > \alpha_1 \quad (11)$$

(см. [4]). Воспользовавшись представлением (10), находим неизвестную константу $u'(0)$. Для начала ищем значение выражения (10) при $x = 1$:

$$u(1) = \frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(1) + u(0) \left(1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(1) \right) + u'(0) \left(1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(1) \right).$$

Теперь найдем значение выражения (10) при $x = x_k$:

$$u(x_k) = \frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(x_k) + u(0) \left(1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x_k) \right) + u'(0) \left(x_1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x_k) \right).$$

Подставляя полученные равенства в условие (4), имеем

$$\frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(1) - \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(x_k) + u_0 \tau + u'(0) \rho = u_1,$$

где

$$\tau = \left(1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(1) \right) - \sum_{k=1}^n a_k \left(1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x_k) \right).$$

Отсюда

$$u'(0) = \frac{1}{\rho} \left[u_1 - \frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(1) + \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(x_k) - u_0 \tau \right].$$

После элементарных преобразований, подставляя найденное значение в (10), получаем представление решения задачи (1), (3) и (4) в виде

$$u(x) = \frac{1}{\beta_1} \int_0^1 f(t) \left[G_m^{\alpha_1}(x-t)H(x-t) - G_m^{\alpha_1}(1-t) \frac{(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))}{\rho} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n a_k G_m^{\alpha_1}(x_k-t)H(x_k-t) \frac{(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))}{\rho} \right] dt + \\ + u_0 \left[(1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)) - (x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x)) \frac{\tau}{\rho} \right] + u_1 \frac{(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))}{\rho}.$$

Из последнего соотношения с учетом обозначения (5) и равенств

$$\left[\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_1-1} \mathbf{F}(x, t) \right]_{t=1} = \frac{(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))}{\rho}, \\ \left[\sum_{j=1}^m \beta_j D_{1t}^{\alpha_1-1} \mathbf{F}(x, t) \right]_{t=0} = \frac{(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))}{\rho} \left[G_m^1(1) - \sum_{k=1}^n a_k G_m^1(x_k) \right] - G_m^1(x) = \\ = (1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)) - \frac{(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))\tau}{\rho}$$

получаем представление решения (6).

Нам понадобится следующее утверждение (см. [3]).

Лемма 2. Пусть функция $f(x) \in C[0, 1]$ представима в виде

$$f(x) = D_{0x}^{\alpha_1-2} g(x), \quad g(x) \in L[0, 1].$$

Тогда справедливо равенство

$$\left[\sum_{j=1}^m \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} + \lambda \right] \frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(x) = f(x).$$

Используя лемму 2, покажем, что функция $u(x)$, определяемая равенством (6), является решением задачи (1), (3), (4):

$$\sum_{j=1}^m \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = \sum_{j=1}^m \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} \left\{ \frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(x) - \frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(1) \frac{(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))}{\rho} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(x_k) \frac{(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))}{\rho} + u_1 \frac{(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))}{\rho} + \right. \\ \left. + u_0 \left[(1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)) - (x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x)) \frac{\tau}{\rho} \right] \right\} + \\ + \lambda \left\{ \frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(x) + \frac{(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))}{\rho} \left[u_1 - \frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(1) \right] + \right. \\ \left. + u_0 \left[(1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)) - (x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x)) \frac{\tau}{\rho} \right] + \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{\beta_1} (f * G_m^{\alpha_1})(x_k) \frac{(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))}{\rho} \right\} = f(x).$$

Проверяя теперь выполнение краевых условий (принимая во внимание (7), (8) и (9)), получаем

$$u(0) = u_0 (1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(0)) = u_0 \sum_{j=1}^m \nu_1 G_m^{\alpha_1-\alpha_j+1}(0) = u_0.$$

Аналогично,

$$u(1) - \sum_{k=1}^n a_k u(x_k) = u_1 + u_0 \left[(1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(1)) - (1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(1)) \frac{\tau}{\rho} - \sum_{k=1}^n a_k \left((1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x_k)) - (x_k + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x_k)) \frac{\tau}{\rho} \right) \text{Bigg} \right] = u_1.$$

Следовательно, решение удовлетворяет краевым условиям (3), (4) и функция $u(x)$, определяемая равенством (6), является решением поставленной задачи.

Далее, покажем, что решение задачи (1), (3), (4) единственно в том и только в том случае, если $\rho \neq 0$.

Пусть функция $u(x)$ является решением задачи с однородными условиями (3) и (4) ($u_0 = u_1 = 0$) для однородного уравнения (1) и допустим, что $u'(0) = a$. Тогда в силу леммы 1 функция

$$u(x) = a(x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x))$$

является решением однородного уравнения (1). Удовлетворив полученное представление условию (4), получаем равенство

$$a \left[(1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(1)) - \sum_{k=1}^n a_k (x_k + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x_k)) \right] = a\rho = 0. \quad (12)$$

При $\rho \neq 0$ заключаем, что $a = 0$, а значит, $u(x) \equiv 0$. Следовательно, в силу линейности, решение исследуемой задачи единственно. При $\rho = 0$ равенство (12) имеет место для любых значений a ; значит, оно определяет бесконечное множество нетривиальных решений однородной задачи (1), (3), (4). Поэтому при $\rho = 0$ решение задачи не единственно. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богатырева Ф. Т. Краевая задача со смещением для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования Джрбашьяна—Нерсесяна // Диффер. уравн. — 2014. — 50, № 2. — С. 160–166.
2. Гадзова Л. Х. Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. Акад. наук. — 2013. — 15, № 2. — С. 36–39.
3. Гадзова Л. Х. Задачи Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Диффер. уравн. — 2015. — 51, № 12. — С. 1580–1586.
4. Гадзова Л. Х. Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Владикавказ. мат. ж. — 2016. — 18, № 3. — С. 22–30.
5. Гадзова Л. Х. Нелокальная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования // Изв. Кабардино-Балкарск. науч. центра РАН. — 2017. — 75, № 1. — С. 12–18.
6. Джрбашьян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. — 1968. — 3, № 1. — С. 3–28.
7. Джрбашьян М. М. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма—Лиувилля // Изв. АН Арм. ССР. — 1970. — 5, № 2. — С. 71–96.
8. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
9. Нахушев А. М., Тхакахов Р. Б. О континуальных аналогах реологических уравнений состояния и логистическом законе изменения вязкоупругих свойств полимера // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. Акад. наук. — 1995. — 1, № 2. — С. 6–11.
10. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М: Наука, 2005.
11. Псху А. В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сб. — 2011. — 202, № 4. — С. 111–122.
12. Псху А. В. Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования // Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 12. — С. 1682–1694.
13. Псху А. В. Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования // Sib. Electr. Math. Rep. — 2016. — 13. — С. 1078–1098.

14. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск.: Наука и техника, 1987.
15. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
16. *Alikhanov A.* Numerical methods of solutions of boundary-value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation// *Appl. Math. Comput.* — 2015. — 268, № 1. — С. 529–541.
17. *Barrett J. H.* Differential equations of non-integer order// *Can. J. Math.* — 1954. — 6, № 4. — С. 529–541.
18. *Gongsheng Li, Chunlong Sun, Xianzheng Jia, Dianhu Du.* Numerical solution to the multi-term time fractional diffusion equation in a finite domain// *Numer. Math. Theory Meth. Appl.* — 2016. — 9, № 3. — С. 337–357.
19. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations/ North-Holland Math. Stud. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 204.
20. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. — Academic Press, 1999.
21. *Wright E. M.* On the coefficients of power series having exponential singularities// *J. London Math. Soc.* — 1933. — 8, № 29. — С. 71–79.

Л. Х. Гадзова

Институт прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН, г. Нальчик
E-mail: macaneeva@mail.ru



ЗАДАЧА ЖЕВРЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО СМЕШАННО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2018 г. С. Х. ГЕККИЕВА

Аннотация. В работе рассматривается задача Жевре для нагруженного параболического уравнения с прямым и обратным ходом времени в неограниченной области. Вопрос разрешимости задачи редуцируется к вопросу разрешимости обобщенного уравнения Абеля в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера.

Ключевые слова: задача Жевре, нагруженное уравнение, оператор дробного дифференцирования Римана—Лиувилля, функция типа Райта, уравнение Абеля, условие Гельдера.

AMS Subject Classification: 35M12

1. Введение. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени имеют множество различных применений, например, описывают процессы распространения тепла в неоднородных средах, взаимодействия фильтрационных потоков, массопереноса вблизи поверхности летательного аппарата, описания сложных течений вязкой жидкости. В качестве возможных приложений следует также указать задачи расчета теплообменников, в которых используется принцип противотока.

Первыми работами, посвященными параболическим уравнениям с меняющимся направлением эволюции, были работы М. Жевре (см., например, [16]). Краевые задачи для уравнений смешанно-параболического типа рассмотрены в [5–8, 11] и других работах. Монография С. А. Терсенова [15] посвящена также теории линейных уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени, основным методом исследования которых является теория сингулярных уравнений, позволяющая рассматривать задачи при общих линейных условиях склеивания. Вопрос единственности задачи Жевре для смешанного уравнения диффузии дробного порядка рассматривался Е. А. Зарубиным в [4].

Следует отметить, что в основе математических моделей нелокальных физико-биологических фрактальных процессов лежат, как правило, нагруженные дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка (см. [9]). В монографии А. М. Нахушева [9] приведена подробная библиография по нагруженным уравнениям, в том числе по различным применениям нагруженных уравнений, как метода исследования задач математической биологии, математической физики, математического моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошных сред с памятью.

Смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения дробного порядка, содержащего след от искомого решения, были объектом исследования в [3]. Вопрос существования решения задачи Жевре для параболического уравнения с дробной производной с прямым и обратным ходом времени в прямоугольной области исследовался в [2].

В настоящей работе рассматривается задача Жевре для нагруженного уравнения дробной диффузии с прямым и обратным ходом времени в неограниченной области.

2. Постановка задачи и полученные результаты. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) + \lambda u(0, t) = \begin{cases} D_{0y}^\alpha u(x, y), & x > 0, \\ D_{hy}^\alpha u(x, y), & x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

где $\lambda = \text{const}$, $0 < \alpha < 1$, D_{st}^ν — оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля порядка ν (см. [10]).

Пусть $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup AB$, где

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= \{(x, y) : 0 < x < \infty, \quad 0 < y < h\}, \\ \Omega^- &= \{(x, y) : -\infty < x < 0, \quad 0 < y < h\}, \\ AB &= \{(0, y) : 0 < y < h\}. \end{aligned}$$

Задача 1. Найти функцию

$$u(x, y) = \begin{cases} u^+(x, y), & x \in \Omega^+, \\ u^-(x, y), & x \in \Omega^-, \end{cases}$$

удовлетворяющую уравнению (1) в областях Ω^+ , Ω^- , начальным условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u^+(x, y) = \varphi_1(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow h} D_{hy}^{\alpha-1} u^-(x, y) = \varphi_2(x), \quad -\infty < x < 0, \quad (3)$$

условиям сопряжения

$$u^+(0, y) = u^-(0, y), \quad u_x^+(0, y) = u_x^-(0, y), \quad 0 < y < h,$$

и аналогу условия Тихонова (см. [12]):

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y^{1-\alpha} u(x, y) \exp\left(-\sigma |x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0, \quad \sigma = \text{const} > 0.$$

Здесь $y^{1-\alpha} u$, u_{xx} , $u_y \in C(\Omega)$; функции $u(x, y)$, $u_x(x, y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ограничены для $y > 0$; $\varphi_1(x) \in C[0, \infty)$, $\varphi_2(x) \in C(-\infty, 0]$ — заданные функции.

Пусть существует решение $u(x, y)$ задачи 1 и

$$\tau(y) = u(0, y), \quad (4)$$

$$u_x(0, y) = \nu(y). \quad (5)$$

Воспользуемся общим представлением решения диффузионно-волнового уравнения [12].

Пусть функция $G(x, y, \xi, \eta)$ вместе с условиями (1)–(3), сформулированными для функции v [11, т. 4.3.1], удовлетворяет условиям:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} G_\xi(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} G(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} G_\xi(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad (6)$$

а функция $u^+(x, y)$ является решением краевой задачи для уравнения (1), то есть вместе с условиями [11, т. 4.3.1] удовлетворяет краевым условиям (2), (5). Учитывая (2), (5), (6) и ограниченность функций $u(x, y)$ и $u_x(x, y)$, а также воспользовавшись представлением решения смешанной задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля (см. [3]), получим представление решения уравнения (1) в области Ω^+ , удовлетворяющее условиям (2), (5), в виде

$$u^+(x, y) = - \int_0^y G^+(x, y, 0, \eta) \nu(\eta) d\eta + \int_0^\infty G^+(x, y, \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi - \lambda \int_0^y \int_0^\infty \tau(\eta) G^+(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (7)$$

$$G^+(x, y, \xi, \eta) = \frac{(y - \eta)^{\beta-1}}{2} \left[e_{1,\beta}^{1,\beta} \left(-\frac{|x - \xi|}{(y - \eta)^\beta} \right) + e_{1,\beta}^{1,\beta} \left(-\frac{|x + \xi|}{(y - \eta)^\beta} \right) \right],$$

где $e_{1,\beta}^{1,\beta}(z)$ — функция типа Райта (см. [12]), $\beta = \alpha/2$.

При $x \rightarrow 0$ для функции $\tau(y) = u(0, t)$ получим интегральное уравнение

$$\tau(y) - \lambda \int_0^y \tau(\eta) K_1(y, \eta) d\eta = F_1(y) \quad (8)$$

с ядром

$$K_1(y, \eta) = (y - \eta)^{\beta-1} k_1(y, \eta), \quad k_1(y, \eta) = - \int_0^\infty e_{1,\beta}^{1,\beta} \left(-\frac{|\xi|}{(y - \eta)^\beta} \right) d\xi,$$

и правой частью

$$F_1(y) = - \int_0^y G^+(0, y, 0, \eta) \nu(\eta) d\eta + \int_0^\infty G^+(0, y, \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi.$$

Нетрудно видеть, что в области Ω^- искомое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3)–(5), допускает представление

$$u^-(x, y) = \int_y^h G^-(x, y, 0, \eta) \nu(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^0 G^-(x, y, \xi, 0) \varphi_2(\xi) d\xi - \lambda \int_y^h \int_{-\infty}^0 \tau(y) G^-(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (9)$$

где $G^-(x, y, \xi, \eta) = G^+(-x, h - y, -\xi, h - \eta)$. Из (9) получим

$$\nu(y) - \int_y^h G_x^-(0, y, 0, \eta) \nu(\eta) d\eta = F_2(y), \quad (10)$$

где

$$F_2 = - \int_{-\infty}^0 G_x^-(0, y, \xi, 0) \varphi_2(\xi) d\xi - \lambda \int_y^h \int_{-\infty}^0 \tau(y) G_x^-(0, y, \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

При $x \rightarrow 0$ из (7) и (9), принимая во внимание, что $u^+(0, y) = u^-(0, y)$, получим

$$\begin{aligned} & - \int_0^y G^+(0, y, 0, \eta) \nu(\eta) d\eta + \int_0^\infty G^+(0, y, \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi - \lambda \int_0^y \int_0^\infty \tau(y) G^+(0, y, \xi, \eta) d\xi d\eta = \\ & = \int_y^h G^-(0, y, 0, \eta) \nu(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^0 G^-(0, y, \xi, 0) \varphi_2(\xi) d\xi - \lambda \int_y^h \int_{-\infty}^0 \tau(y) G^-(0, y, \xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (11)$$

Итак, вопрос существования задачи 1 эквивалентно редуцирован к вопросу существования системы интегральных уравнений (8), (10) и (11).

Пусть $H_1(y, \eta)$ — резольвента ядра $K_1(y, \eta)$, а $H_2(y, \eta)$ — резольвента ядра $G_x^-(0, y, 0, \eta)$. Тогда единственные решения уравнений Вольтерра (8) и (10) представимы в виде

$$\begin{aligned} \tau(y) = & - \int_0^y G^+(0, y, 0, \eta) \nu(\eta) d\eta + \int_0^\infty G^+(0, y, \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi + \\ & + \lambda \int_0^y H_1(y, \eta) \left\{ - \int_0^y G^+(0, y, 0, \eta) \nu(\eta) d\eta + \int_0^\infty G^+(0, y, \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi \right\} d\eta, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \nu(y) = & - \int_{-\infty}^0 G_x^-(0, y, \xi, 0) \varphi_2(\xi) d\xi - \lambda \int_y^h \int_{-\infty}^0 \tau(y) G_x^-(0, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & + \int_y^h H_2(y, \eta), \eta \left\{ - \int_{-\infty}^0 G_x^-(0, y, \xi, 0) \varphi_2(\xi) d\xi - \lambda \int_y^h \int_{-\infty}^0 \tau(y) G_x^-(0, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \right\} d\eta. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу (12) и (13) из равенства (11) получим обобщенное уравнение Абеля, которое можно редуцировать к сингулярному интегральному уравнению нормального типа.

Пусть в уравнении (1) $\lambda = 0$ и $\Omega_2 = \Omega_2^+ \cup \Omega_2^- \cup AB$, где

$$\begin{aligned} \Omega_2^+ &= \{(x, y) : 0 < x < \infty, \quad 0 < y < h\}, \\ \Omega_2^- &= \{(x, y) : -\infty < x < 0, \quad \text{quad} 0 < y < h\}, \\ AB &= \{(0, y) : 0 < y < h\}. \end{aligned}$$

Задача 2. Найти такую функцию $u(x, y)$, что

$$u(x, y) = \begin{cases} u^+(x, y), & (x, y) \in \Omega_2^+, \\ u^-(x, y), & (x, y) \in \Omega_2^- \end{cases}$$

со свойствами

1) Функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$u_{xx}(x, y) = \begin{cases} D_{0y}^\alpha u(x, y), & x > 0, \\ D_{hy}^\alpha u(x, y), & x < 0, \end{cases} \quad (14)$$

в областях Ω_2^+ , Ω_2^- и начальным условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u^+(x, y) = \varphi_1(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (15)$$

$$\lim_{y \rightarrow h} D_{hy}^{\alpha-1} u^-(x, y) = \varphi_2(x), \quad -\infty < x < 0; \quad (16)$$

2) на границе раздела AB областей Ω_2^+ , Ω_2^- выполняются условия сопряжения

$$u^+(0, y) = u^-(0, y), \quad u_x^+(0, y) = u_x^-(0, y), \quad 0 < y < h;$$

3) $y^{1-\alpha} u(x, y)$, u_{xx} , $u_y \in C(\Omega_2)$, функции $u(x, y)$, $u_x(x, y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ограничены для $y > 0$, $\varphi_1(x) \in C[0, \infty)$, $\varphi_2(x) \in C(-\infty, 0]$.

Пусть существует решение $u(x, y)$ задачи 2 и $\tau(y) = u(0, y)$, $u_x(0, y) = \nu(y)$.

Лемма 1. Пусть $\varphi_1(x) \in C[0, \infty)$, $\nu(y) \in C[0, \infty)$ и выполняется условие согласования $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} \nu(y) = \varphi_1(0)$. Тогда существует единственное решение уравнения

$$D_{0y}^\alpha u(x, y) = u_{xx}(x, y), \quad (17)$$

удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \varphi_1(x), \quad (18)$$

$$u_x(0, y) = \nu(y) \quad (19)$$

и такое, что $y^{1-\alpha} u(x, y) \in C[0, \infty)$; u_{xx} , $u_y \in C[0, \infty)$, а функции $u(x, y)$, $u_x(x, y)$ ограничены для $0 < x < \infty$, $y > 0$. Решение представимо в виде

$$u^+(x, y) = - \int_0^y G^+(x, y, 0, \eta) \nu(\eta) d\eta + \int_0^\infty G^+(x, y, \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi, \quad (20)$$

$$G^+(x, y, \xi, \eta) = \frac{(y - \eta)^{\beta-1}}{2} \left[e_{1,\beta}^{1,\beta} \left(-\frac{|x - \xi|}{(y - \eta)^\beta} \right) + e_{1,\beta}^{1,\beta} \left(-\frac{|x + \xi|}{(y - \eta)^\beta} \right) \right]. \quad (21)$$

Доказательство. Воспользуемся общим представлением решения диффузионно-волнового уравнения [12].

Теорема 1. Пусть функция $v = v(x, y, \xi, \eta)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) В области D_y при фиксированных $(x, y) \in D$ функция v является решением уравнения

$$L^* \equiv v_{\xi\xi}(x, y, \xi, \eta) - D_{y\eta}^\alpha v(x, y, \xi, \eta) = 0;$$

2) для любой функции $g(x) \in C[x_1, x_2]$, $0 \leq x_1 < x_2 \leq a$ выполняется соотношение

$$\lim_{\eta \rightarrow y} \int_{x_1}^{x_2} g(\xi) D_{y\eta}^{\alpha-1} v(x, y, \xi, \eta) d\xi = g(x), \quad x_1 < x < x_2;$$

3) функция v непрерывна в $\bar{D} \times \bar{D}_y \setminus \{y = \eta\}$ и для любых точек $(x, y) \in D$ и $(\xi, \eta) \in D_y$ выполняется неравенство

$$|v(x, y, \xi, \eta)| < k(y - \eta)^{\delta-1},$$

где k — константа, зависящая только от области D . Функция $u(x, y)$ такова, что $y^{1-\alpha}u(x, y) \in C(\bar{D})$, u_{xx} , $u_y \in C(D)$ и $u(x, y)$ является решением уравнения

$$Lu(x, y) \equiv u_{xx}(x, y) - D_{0y}^\alpha u = f(x, y)$$

и удовлетворяет краевому условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (22)$$

Тогда для функции $u(x, y)$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \int_0^y \left[v(x, y, a, \eta) u_\xi(a, \eta) - v(x, y, 0, \eta) u_\xi(0, \eta) - v_\xi(x, y, a, \eta) u(a, \eta) + \right. \\ & \left. + v_\xi(x, y, 0, \eta) u(0, \eta) \right] d\eta + \int_0^a \tau(\xi) v(x, y, \xi, 0) d\xi - \int_0^a \int_0^y v(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$D = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}, \quad 0 < a, b < \infty, \quad D_y = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < a, 0 < \eta < y\}.$$

Пусть функция $G(x, y, \xi, \eta)$ вместе с условиями (1)–(3), сформулированными для функции v [11, т.4.3.1], удовлетворяет условиям:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} G_\xi(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} G(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} G_\xi(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad (24)$$

а функция $u^+(x, y)$ является решением краевой задачи для уравнения (17), т.е. вместе с условиями [11, теорема 4.3.1] удовлетворяет краевым условиям (18), (19). Учитывая (18), (19), (24) и ограниченность функций $u(x, y)$ и $u_x(x, y)$, получаем, что при $a \rightarrow \infty$

$$u^+(x, y) = - \int_0^y G(x, y, 0, \eta) u_\xi(0, \eta) d\eta + \int_0^\infty G(x, y, \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi. \quad (25)$$

Воспользовавшись свойствами функции типа Райта (см. (10)), можно показать, что $G(x, y, \xi, \eta)$ совпадает с функцией (21), а выражение (20) определяет решение уравнения (17), удовлетворяющее условиям (18), (19) в заданном классе функций.

Нетрудно видеть, что в области Ω_2^- искомое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (16), (19), допускает представление

$$u^-(x, y) = \int_y^h G^-(x, y, 0, \eta) \nu(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^0 G^-(x, y, \xi, 0) \varphi_2(\xi) d\xi, \quad (26)$$

где

$$G^-(x, y, \xi, \eta) = G^+(-x, h - y, -\xi, h - \eta).$$

Принимая во внимание, что $u^+(0, y) = u^-(0, y)$, из (25) и (26) при $x \rightarrow 0$ получим интегральное уравнение

$$\int_0^h \frac{\nu(\eta) d\eta}{|y - \eta|^{1-\beta}} = f(y), \quad (27)$$

где

$$f(y) = 2\Gamma(\beta) \left[\int_0^\infty G^+(0, y, \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^0 G^-(0, y, \xi, 0) \varphi_2(\xi) d\xi \right].$$

Уравнение Карлемана (27) имеет единственное решение в классе функций, представимых в виде (см. [1])

$$\nu(y) = \frac{\nu^*(y)}{y^{1-\varepsilon}(h-y)^{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

где $\nu^*(y)$ — гильдерова на $[0, h]$ функция, при условии, что $f(y)$ представима в виде

$$f(y) = \frac{f^*(y)}{y^{1-\beta-\varepsilon_1}(h-y)^{1-\beta-\varepsilon_2}}, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1 - \beta, \quad 0 < \varepsilon_2 < 1 - \beta,$$

где $f^*(y) \in C([0, h])$, и гильдерова порядка $\lambda > \beta$ вне концов $y = 0, y = h$:

$$|f^*(y) - f^*(y + \omega)| \leq c(y)|\omega|^\lambda, \quad \lambda > \beta, \quad y, y + \omega \in (0, h),$$

$c(y)$ может расти при $y \rightarrow 0, y \rightarrow h$, но так, что

$$c(x) \leq Cy^{-\beta}(h-y)^{-\beta}, \quad C = \text{const}.$$

Решение имеет вид (см. [1])

$$\nu(y) = AD_{0y}^\beta f(\eta) - \frac{A \sin \beta \pi}{\pi} D_{0y}^\beta Z(\eta) \frac{d}{d\eta} \int_0^\eta \frac{d\tau}{(\eta - \tau)^{1-\beta}} \int_\tau^h \frac{f(s) ds}{Z(s)(s - \tau)^\beta},$$

где

$$A = \Gamma(1 - \beta) \frac{\sin \beta \pi}{4\pi \cos^2 \beta \pi / 2}, \quad Z(\eta) = \left(\frac{h - \eta}{\eta} \right)^{\beta/2}.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
2. Геккиева С. Х. Задача Жевре для смешанно-параболического уравнения с дробной производной // Изв. Кабардино-Балкар. науч. центра РАН. — 2017. — 76, № 2. — С. 38–43.
3. Геккиева С. Х. Смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения // Науч. ведомости БелГУ. Сер. Мат.ЁФиз. — 2016. — 42, № 6 (227). — С. 32–35.
4. Зарубин Е. А. О единственности задачи Жевре для смешанного уравнения диффузии дробного порядка // Современные методы в теории краевых задач / Материалы Воронеж. весенней мат. школы «Понтрягинские чтения–XV». — Воронеж, 2004. — С. 93–94.
5. Керетов А. А. Задача Жевре для одного смешанно-параболического уравнения // Диффер. ур-я. — 1977. — 13, № 1. — С. 76–83.
6. Керетов А. А. Об одной краевой задаче Жевре для параболического уравнения со знакопеременным разрывом первого рода у коэффициента при производной по времени // Диффер. ур-я. — 1974. — 10, № 1. — С. 69–77.
7. Кислов Н. В., Червяков А. В. Краевая задача с меняющимся направлением времени // Вестн. МЭИ. — 2002. — № 6. — С. 62–67.
8. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006.
9. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 2012.
10. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.

11. Попов С. В. О первой краевой задаче для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Динам. сплошной среды. — 1991. — 102. — С. 100–113.
12. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
13. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
14. Сербина Л. И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. — М.: Наука, 2007.
15. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. — Новосибирск: Наука, 1985.
16. Gevrey M. Sur les equations aux derives partielles du type parabolique // J. Math. App. — 1913. — 9, № 6. — С. 305–475.

С. Х. Геккиева

Институт прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН, г. Нальчик

E-mail: gekkieva_s@mail.ru



О СВОЙСТВАХ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ, ОБОБЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИЮ РАЙТА

© 2018 г. Л. Л. КАРАШЕВА

Аннотация. В работе исследованы свойства одной целой функции, обобщающей функцию Райта. Найдены различные представления, получены оценка и формулы дифференцирования.

Ключевые слова: целая функция, функция Райта, специальная функция.

AMS Subject Classification: 33E20, 33E99

1. Введение. Рассмотрим функцию

$$\Theta_{n,\alpha}(z; \mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell,n} \frac{z^{\ell}}{\ell! \Gamma\left(\mu - \frac{\alpha\ell}{2n}\right)}, \quad (1)$$

где

$$C_{\ell,n} = \frac{\sin \frac{(1+\ell)\pi}{2}}{\sin \frac{(1+\ell)\pi}{2n}}.$$

Нетрудно заметить, что при $\ell+1$ кратном $2n$ и числитель, и знаменатель $C_{\ell,n}$ обращаются в нуль и

$$C_{2nk-1,n} = \lim_{\zeta \rightarrow \pi k} \frac{\sin \zeta n}{\sin \zeta} = n(-1)^{k(n+1)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Кроме этого,

$$\frac{\sin \zeta n}{\sin \zeta} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\zeta(2k-n+1)}, \quad (2)$$

откуда очевидно, что

$$|C_{\ell,n}| \leq n \text{ для всех } \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Следовательно, ряд (1) определяет целую функцию переменной $z \in \mathbb{C}$, зависящую от параметров $n \in \mathbb{N}$, $\alpha < 2n$ и $\mu \in \mathbb{C}$.

Функция вида (1) при $n = 1$ совпадает с функцией Райта (см. [9])

$$\Theta_{1,\alpha}(z; \mu) = \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \mu; z\right),$$

в терминах которой выписывается фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения (см. [7]).

Основной интерес к изучению функции (1) связан с тем, что с помощью этой функции выражается фундаментальное решение уравнения (см. [3]):

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} u(x, t) + (-1)^n \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = f(x, t), \quad (3)$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}$ — дробная производная порядка α . Отметим также, что в терминах функции (1) может быть выражено фундаментальное решение параболического уравнения высокого порядка и в случае целого $\alpha < 2n$.

Данная работа посвящена исследованию свойств функции (1), в частности, для нее получены представления в виде суммы функций Райта, несобственного интеграла, H -функции Фокса, контурного интеграла, а также оценка и формулы целочисленного и дробного дифференцирования.

2. Представление в терминах функции Райта. При любых $z \in \mathbb{C}$ и $\alpha < 1$ для функции $\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)$ справедливо следующее представление:

$$\Theta_{n,\alpha}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{(2k-n+1)\pi}{2n}} \phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, \mu; z e^{i \frac{(2k-n+1)\pi}{2n}}\right), \quad (4)$$

где $\phi(\alpha, \beta; z)$ — функция Райта (см. [9]).

Используя соотношение (2), функцию $\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)$ перепишем в виде

$$\begin{aligned} \Theta_{n,\alpha}(z; \mu) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{(2k-n+1)(1+\ell)\pi}{2n}} \frac{z^{\ell}}{\ell! \Gamma\left(\mu - \frac{\alpha\ell}{2n}\right)} = \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{(2k-n+1)\pi + \ell(2k-n+1)\pi}{2n}} \frac{z^{\ell}}{\ell! \Gamma\left(\mu - \frac{\alpha\ell}{2n}\right)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{(2k-n+1)\pi}{2n}} \frac{(z e^{i \frac{(2k-n+1)\pi}{2n}})^{\ell}}{\ell! \Gamma\left(\mu - \frac{\alpha\ell}{2n}\right)}. \end{aligned}$$

Учитывая представление функции Райта в виде ряда, последнее равенство запишем в виде

$$\Theta_{n,\alpha}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{(2k-n+1)\pi}{2n}} \phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, \mu; z e^{i \frac{(2k-n+1)\pi}{2n}}\right).$$

Таким образом, доказано равенство (4).

3. Представление в виде косинус-преобразования Фурье. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$; тогда для функции $\Theta_{n,\alpha}(x; \mu)$ справедливо следующее представление:

$$\Theta_{n,\alpha}(x; \mu) = \frac{2n}{\pi} \int_0^{\infty} E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\omega^{2n}; \mu + \frac{\alpha}{2n}\right) \cos(x\omega) d\omega, \quad (5)$$

где $E_{\frac{1}{\alpha}}(-\omega^{2n}; \mu)$ — функция типа Миттаг-Леффлера (см. [2, с. 117]).

Применяя преобразование Меллина к правой части (5), имеем

$$\begin{aligned} \frac{2n}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\omega^{2n}; \mu + \frac{\alpha}{2n}\right) \cos(x\omega) x^{s-1} d\omega dx = \\ = \frac{2n}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^{-s} E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\omega^{2n}; \mu + \frac{\alpha}{2n}\right) d\omega \int_0^{\infty} x^{s-1} \cos x, dx. \quad (6) \end{aligned}$$

Вычислим интегралы из последнего равенства. В первом интеграле в правой части равенства (6) сделаем замену $\omega^{2n} = y$ и, используя таблицу преобразований Меллина (см. [4, с. 280]), получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \omega^{-s} E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\omega^{2n}; \mu + \frac{\alpha}{2n}\right) d\omega &= \frac{1}{2n} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2n} - \frac{s}{2n} - 1} E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-y; \mu + \frac{\alpha}{2n}\right) dy = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n} - \frac{s}{2n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{s}{2n}\right)}{2n \Gamma\left(\mu + \frac{\alpha s}{2n}\right)} \quad \text{при } \alpha < 2, \quad 0 < \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2n} - \frac{s}{2n}\right) < 1. \end{aligned}$$

При вычислении второго интеграла из (6) воспользуемся формулой дополнения (см. [6])

$$\Gamma(\zeta) \Gamma(1 - \zeta) = \frac{\pi}{\sin \pi \zeta} \quad (7)$$

и таблицей преобразований Меллина (см. [1, с. 279])

$$\int_0^\infty x^{s-1} \cos x \, dx = \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} = \Gamma(s) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi s}{2} \right) = \frac{\pi \Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{s}{2})} \quad \text{при } 0 < \operatorname{Re} s < 1.$$

Таким образом, перепишем равенство (6) в виде

$$\begin{aligned} \frac{2n}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\omega^{2n}; \mu + \frac{\alpha}{2n} \right) \cos(x\omega) x^{s-1} d\omega dx = \\ = \frac{\Gamma(s) \Gamma(\frac{1}{2n} - \frac{s}{2n}) \Gamma(1 - \frac{1}{2n} + \frac{s}{2n})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}) \Gamma(\mu + \frac{\alpha s}{2n})}, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1, \alpha < 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Применяя к равенству (8) обратное преобразование Меллина, получим

$$\frac{2n}{\pi} \int_0^\infty E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\omega^{2n}; \mu + \frac{\alpha}{2n} \right) \cos(x\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s) \Gamma(\frac{1}{2n} - \frac{s}{2n}) \Gamma(1 - \frac{1}{2n} + \frac{s}{2n})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}) \Gamma(\mu + \frac{\alpha s}{2n})} x^{-s} ds, \quad (9)$$

где $0 < \gamma < 1$. Учитывая (7), равенство (9) перепишем в виде

$$\frac{2n}{\pi} \int_0^\infty E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\omega^{2n}; \mu + \frac{\alpha}{2n} \right) \cos(x\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s) \sin \frac{1-s}{2} \pi}{\Gamma(\mu + \frac{\alpha s}{2n}) \sin \frac{1-s}{2n} \pi} x^{-s} ds. \quad (10)$$

По теореме Коши о вычетах из равенства (10), учитывая, что подынтегральная функция имеет полюсы первого порядка в точках $s = -l$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, получим представление (1) функции $\Theta_{n,\alpha}(x; \mu)$ в виде ряда. Следовательно, доказано равенство (5).

4. Представление через H -функцию Фокса. Пусть $\mu \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $|\arg z| < \frac{2-\alpha}{4n}\pi$; тогда для функции $\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)$ справедливо следующее представление:

$$\Theta_{n,\alpha}(z; \mu) = H_{3,3}^{2,1} \left[z \left| \begin{array}{ccc} (1 - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}) & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (\mu, \frac{\alpha}{2n}) \\ (0, 1) & (1 - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}) & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \right. \right], \quad (11)$$

где функция Фокса (см. [8]) имеет вид

$$\begin{aligned} H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{array}{c} (a_1, \alpha_1), \dots, (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1), \dots, (b_q, \beta_q) \end{array} \right. \right] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \mathcal{H}(s) z^{-s} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)} z^{-s} ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Из равенства (9) и определения H -функции Фокса (12) имеем

$$\begin{aligned} \Theta_{n,\alpha}(z; \mu) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s) \Gamma(\frac{1}{2n} - \frac{s}{2n}) \Gamma(1 - \frac{1}{2n} + \frac{s}{2n})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}) \Gamma(\mu + \frac{\alpha s}{2n})} (s) z^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathcal{H}_{3,3}^{2,1}(s) z^{-s} ds = \\ &= H_{3,3}^{2,1} \left[z \left| \begin{array}{ccc} (1 - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}) & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (\mu, \frac{\alpha}{2n}) \\ (0, 1) & (1 - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}) & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \right. \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, получено представление функции $\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)$ в виде H -функции Фокса (11).

5. Представление в виде контурного интеграла. Для любых $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{R}$, для функции $\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)$ справедливо следующее представление:

$$\Theta_{n,\alpha}(z; \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \omega\pi)} e^y y^{-\mu} F_n \left(zy^{\frac{\alpha}{2n}} \right) dy, \quad (13)$$

где

$$F_n(\chi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell,n} \frac{\chi^\ell}{\ell!}. \quad (14)$$

Так как для функции $F_n(\chi)$ справедливо неравенство

$$|F_n(\chi)| \leq n e^{|\chi|},$$

используя интегральное представление Ханкеля (см. [6])

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \omega\pi)} e^p p^{-z} dp, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $1/2 < \omega \leq 1$, через $\gamma(r, \omega\pi)$ обозначен контур Ханкеля, состоящий из дуги окружности $|p| = r$, $|\arg p| \leq \omega\pi$ и двух лучей $\arg p = \omega\pi$ и $\arg p = -\omega\pi$, $|p| \geq r$, и меняя порядок суммирования и интегрирования, учитывая обозначение (14), из (1) можно получить интегральное представление функции $\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)$ в виде (13).

6. Формула дифференцирования. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $\alpha < 2n$ и $\mu \in \mathbb{C}$ справедливо соотношение

$$\frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \Theta_{n,\alpha}(z; \mu) = (-1)^{n+1} \Theta_{n,\alpha}(z; \mu - \alpha), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (15)$$

Воспользовавшись формулой дифференцирования функции Райта [9]

$$\frac{d^m}{dz^m} \phi(-\alpha, \beta; z) = \phi(-\alpha, \beta - m\alpha; z), \quad m \in \mathbb{N}$$

и представлением функции $\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)$ в виде (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \Theta_{n,\alpha}(z; \mu) &= \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{(2k-n+1)\pi}{2n}} \phi \left(-\frac{\alpha}{2n}, \mu; ze^{i \frac{(2k-n+1)\pi}{2n}} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{(2k-n+1)\pi}{2n} (1+2n)} \phi \left(-\frac{\alpha}{2n}, \mu - \alpha; ze^{i \frac{(2k-n+1)\pi}{2n}} \right) = (-1)^{n+1} \Theta_{n,\alpha}(z; \mu - \alpha). \end{aligned}$$

Следовательно, доказана справедливость формулы (15).

7. Формула дробного дифференцирования. Напомним, что оператор дробного (в смысле Римана—Лиувилля) интегродифференцирования порядка α с началом в точке 0 определяется соотношением

$$D_{0x}^\alpha \varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), & \alpha = 0, \\ \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{0x}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(t), & \alpha > 0, \end{cases}$$

(см. [5, с. 28]), где $[\alpha]$ — целая часть числа $\alpha \in \mathbb{R}$, которая удовлетворяет неравенствам $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$.

Для функции $\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)$ при $z > 0$, $\mu > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$D_{0y}^\gamma y^{\mu-1} \Theta_{n,\alpha} \left(-zy^{-\frac{\alpha}{2n}}; \mu \right) = y^{\mu-\gamma-1} \Theta_{n,\alpha} \left(-zy^{-\frac{\alpha}{2n}}; \mu - \gamma \right). \quad (16)$$

Пользуясь равенством (5) и соотношениями

$$D_{st}^\alpha |t-s|^{\mu-1} E_{\frac{1}{\beta}}(\lambda|t-s|^\beta; \mu) = |t-s|^{\mu-\alpha-1} E_{\frac{1}{\beta}}(\lambda|t-s|^\beta; \mu-\alpha),$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}}(z, \mu) = -\sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu-\alpha k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad \pi \geq |\arg z| \geq \alpha_1 \pi, \quad \alpha \in (0; 2), \alpha_1 \in \left(\frac{\alpha}{2}; \alpha\right)$$

(см. [6]), легко показать, что

$$\begin{aligned} D_{0y}^\gamma y^{\mu-1} \Theta_{n,\alpha}(-zy^{-\frac{\alpha}{2n}}; \mu) &= \frac{2n}{\pi} D_{0y}^\gamma y^{\mu-1} \int_0^\infty E_{\frac{1}{\alpha}}(-\omega^{2n}; \mu + \frac{\alpha}{2n}) \cos(-zy^{-\frac{\alpha}{2n}} \omega) d\omega = \\ &= \frac{2n}{\pi} D_{0y}^\gamma y^{\mu+\frac{\alpha}{2n}-1} \int_0^\infty E_{\frac{1}{\alpha}}(-\omega^{2n} y^\alpha; \mu + \frac{\alpha}{2n}) \cos(-z\omega) d\omega = \\ &= \frac{2n y^{\mu+\frac{\alpha}{2n}-\gamma-1}}{\pi} \int_0^\infty E_{\frac{1}{\alpha}}(-\omega^{2n} y^\alpha; \mu + \frac{\alpha}{2n} - \gamma) \cos(-z\omega) d\omega = \\ &= \frac{2n y^{\mu-\gamma-1}}{\pi} \int_0^\infty E_{\frac{1}{\alpha}}(-\omega^{2n}; \mu + \frac{\alpha}{2n} - \gamma) \cos(-zy^{-\frac{\alpha}{2n}} \omega) d\omega = \\ &= y^{\mu-\gamma-1} \Theta_{n,\alpha}(-zy^{-\frac{\alpha}{2n}}; \mu - \gamma). \end{aligned}$$

Таким образом, получено равенство (16).

8. Оценка. Для функции $\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)$ при $z > 0$ справедливо неравенство

$$|\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)| \leq C \left(z^{\frac{2n}{2n-\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}-\mu} \exp\left(-\sigma z^{\frac{2n}{2n-\alpha}}\right), \quad (17)$$

где

$$\sigma = \left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right) \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}} \cos \frac{1-n}{2n-\alpha} \pi,$$

C — некоторая положительная постоянная, не зависящая от z .

Используя представление (4) функции $\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)$

$$\Theta_{n,\alpha}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{(2k-n+1)\pi}{2n}} \phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, \mu; ze^{i\frac{(2k-n+1)\pi}{2n}}\right)$$

и асимптотическое разложение функции Райта (см. [10])

$$\phi(-\rho, \delta; -y) = Y^{\frac{1}{2}-\delta} e^{-Y} \left[\sum_{m=0}^{M-1} A_m Y^{-m} + O(Y^{-M}) \right], \quad y \rightarrow \infty,$$

где $\rho \in (0, 1)$, $Y = (1-\rho)\rho^{\rho/(1-\rho)}y^{1/(1-\rho)}$, коэффициенты A_m зависят от δ и ρ , для любого действительного z будем иметь

$$|\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)| \leq A_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left| Y^{\frac{1}{2}-\mu} \exp(-Y) \right| \leq A_0 \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right) \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}} z^{\frac{2n}{2n-\alpha}} \right]^{\frac{1}{2}-\mu} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \exp(-Y) \right|, \quad (18)$$

где

$$Y = \left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right) \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}} \left(ze^{\frac{2k+1-n}{2n}\pi i}\right)^{\frac{2n}{2n-\alpha}}.$$

С учетом того, что

$$\operatorname{Re} Y = \left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right) \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}} z^{\frac{2n}{2n-\alpha}} \cos \frac{2k+1-n}{2n-\alpha} \pi,$$

неравенство (18) примет вид

$$|\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)| \leq A_0 \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right) \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}} z^{\frac{2n}{2n-\alpha}} \right]^{\frac{1}{2}-\mu} \times \\ \times \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left[- \left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right) \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}} z^{\frac{2n}{2n-\alpha}} \cos \frac{2k+1-n}{2n-\alpha} \pi \right].$$

Учитывая, что степень экспоненты в последнем неравенстве принимает минимальное значение, которое равно

$$\left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right) \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}} z^{\frac{2n}{2n-\alpha}} \cos \frac{1-n}{2n-\alpha} \pi \quad \text{при } k=0 \text{ и } k=n-1,$$

будем иметь

$$|\Theta_{n,\alpha}(z; \mu)| \leq C \left(z^{\frac{2n}{2n-\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}-\mu} \exp \left(-\sigma z^{\frac{2n}{2n-\alpha}} \right),$$

где

$$\sigma = \left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right) \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}} \cos \frac{1-n}{2n-\alpha} \pi,$$

а C — не зависящая от z положительная константа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. Том 1. — М.: Наука, 1969.
2. Джрбациян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966.
3. Карашева Л. Л. Задача Коши для параболического уравнения высокого порядка с производной Римана—Лиувилля по временной переменной // Докл. Адыг. Междунар. АН. — 2013. — 15, № 2. — С. 40–43.
4. Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). — М.: Наука, 1978.
5. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.
6. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
7. Псху А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — 73, No 2. — С. 141–182.
8. Kilbas A. A., Megumi Saigo H-transforms: theory and applications // Anal. Methods Special Funct. — 2004. — 9.
9. Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. — 1933. — 8, № 29. — С. 71–79.
10. Wright E. M. The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math., Oxford Ser. — 1940. — 11. — С. 36–48.

Л. Л. Карашева

Институт прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН, г. Нальчик
E-mail: k.liana86@mail.ru



КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2018 г. М. А. КЕРЕФОВ, Б. М. КЕРЕФОВ

Аннотация. В работе рассмотрено нелокальное волновое уравнение с переменным коэффициентом в прямоугольной области. Исследованы первая и третья краевые задачи в дифференциальной форме, а также метод прямых для решения в разностной форме. Получено решение системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами для волнового уравнения дробного порядка, возникающих при использовании метода прямых.

Ключевые слова: нелокальное волновое уравнение, производная дробного порядка, метод прямых, априорная оценка.

AMS Subject Classification: 35L99

1. Введение. При математическом моделировании сплошных сред с памятью возникают уравнения, описывающие новый тип волнового движения, занимающего промежуточное положение между обычной диффузией и классическими волнами (см. [7, 8]). Имеются в виду дифференциальные уравнения дробного порядка, которые являются основой большинства математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов в средах с фрактальной геометрией. В монографии [9] приведена подробная библиография по уравнениям в частных производных дробного порядка, в частности, рассматривается диффузионно-волновое уравнение. Методом разделения переменных диффузионно-волновое уравнение исследовалось в [3]. Априорные оценки решения краевых задач для диффузионно-волнового уравнения с дробной производной Капуто получены в [1].

Данная работа посвящена изучению краевых задач для волнового уравнения с дробной производной Римана—Лиувилля.

2. Третья краевая задача в дифференциальной форме.

Задача 1. В области $Q_T = (0, \ell) \times (0, T]$ рассмотрим следующую краевую задачу:

$$D_{0t}^{\alpha+1}u = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + f(x, t), \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\begin{cases} k(0, t)u_x(0, t) - \beta_1 u(0, t) = 0, \\ k(\ell, t)u_x(\ell, t) + \beta_2 u(\ell, t) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$D_{0t}^{\alpha}u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad D_{0t}^{\alpha-1}u(x, t)|_{t=0} = u_1(x). \quad (3)$$

Здесь $0 < \alpha < 1$, D_{0t}^{γ} — оператор дробного дифференцирования Римана—Лиувилля порядка γ .

Назовем *регулярным решением* уравнения (1) в области Q_T функцию $u = u(x, t)$ из класса

$$D_{0t}^{\alpha-1}u(x, t), D_{0t}^{\alpha}u(x, t) \in C(\bar{Q}_T), \quad u_{xx}(x, t), D_{0t}^{\alpha+1}u(x, t) \in C(Q_T),$$

которая удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $(x, t) \in Q_T$ (см. [9, с. 103]).

В случае, когда коэффициент уравнения (1) является постоянной величиной, решение задачи (1)–(3) можно найти методом разделения переменных [7, с. 221].

Допустим существование регулярного решения задачи (1)–(3); тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть

$$\begin{aligned} k_x(x, t), k_t(x, t), f(x, t) &\in C(\bar{Q}_T), \quad u_0(x), u_1(x) \in C[0, l], \\ \beta_1, \beta_2 &\geq 0, \quad \beta_1 + \beta_2 > 0, \quad 0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2, \\ 0 < m_1 &\leq k_x(x, t) \leq m_2, \quad k_t \leq 0 \end{aligned}$$

всюду на $\bar{Q}_T$ и пусть выполнено условие

$$u_1(0) = u_1'(0) = u_1(l) = u_1'(l) = 0.$$

Тогда для решения задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка

$$\left\| D_{0t}^\alpha u \right\|_0^2 \leq M(t) \left(\|f\|_{2, Q_t}^2 + \|u_1'(x)\|_0^2 + \|u_1''(x)\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2 \right). \quad (4)$$

Доказательство. Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$, полагая

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_1(x),$$

так что $v(x, t)$ представляет собой отклонение функции $u(x, t)$ от известной функции $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_1(x)$.

С учетом соотношения

$$D_{0t}^{\alpha+1} t^{\alpha-1} = 0$$

(см. [9, с. 15]) имеем

$$D_{0t}^{\alpha+1} v - (kv_x)_x = f(x, t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (k_x u_1'(x) + k u_1''(x)).$$

Итак, функция $v(x, t)$ определяется как решение уравнения

$$D_{0t}^{\alpha+1} v - (kv_x)_x = F(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} k(0, t)v_x(0, t) - \beta_1 v(0, t) = 0, \\ k(l, t)v_x(l, t) + \beta_2 v(l, t) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

и начальными условиями

$$\begin{aligned} D_{0t}^\alpha v(x, t) \Big|_{t=0} &= D_{0t}^\alpha \left(u(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_1(x) \right) \Big|_{t=0} = u_0(x) - \frac{u_1(x)}{\Gamma(\alpha)} D_{0t}^\alpha t^{\alpha-1} \Big|_{t=0} = u_0(x), \\ D_{0t}^{\alpha-1} v(x, t) \Big|_{t=0} &= D_{0t}^{\alpha-1} \left(u(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_1(x) \right) \Big|_{t=0} = u_1(x) - \frac{u_1(x)}{\Gamma(\alpha)} D_{0t}^{\alpha-1} t^{\alpha-1} \Big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$F(x, t) = f(x, t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (k_x u_1'(x) + k u_1''(x)).$$

Получим априорную оценку в терминах дробной производной Римана—Лиувилля, для чего умножим уравнение (5) скалярно на $D_{0t}^\alpha v$:

$$\left(D_{0t}^{\alpha+1} v, D_{0t}^\alpha v \right) - \left((kv_x)_x, D_{0t}^\alpha v \right) = (F, D_{0t}^\alpha v), \quad (7)$$

где

$$(u, v) = \int_0^l uv \, dx, \quad (u, u) = \|u\|_0^2.$$

Преобразуем слагаемые тождества (7) с учетом (6) следующим образом:

$$\begin{aligned} (D_{0t}^{\alpha+1}v, D_{0t}^\alpha v) &= \int_0^l \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t \frac{v(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx = \\ &= \int_0^l \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t \frac{v(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx = \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (D_{0t}^\alpha v)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha v\|_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((kv_x)_x, D_{0t}^\alpha v) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l (kv_x)_x \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{v(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ kv_x(x, t) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{v(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \Big|_0^l - \int_0^l kv_x(x, t) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{v_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \right\} = \\ &= kv_x(l, t) D_{0t}^\alpha v(l, t) - kv_x(0, t) D_{0t}^\alpha v(0, t) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kv_x(x, t) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{v_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx = \\ &= -\beta_2 v(l, t) D_{0t}^\alpha v(l, t) - \beta_1 v(0, t) D_{0t}^\alpha v(0, t) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kv_x(x, t) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{v_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx, \end{aligned}$$

$$(F, D_{0t}^\alpha v) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \|D_{0t}^\alpha v\|_0^2.$$

С учетом полученных неравенств из (7) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha v\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kv_x(x, t) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{v_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx + \beta_2 v(l, t) D_{0t}^\alpha v(l, t) + \\ + \beta_1 v(0, t) D_{0t}^\alpha v(0, t) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \|D_{0t}^\alpha v\|_0^2. \quad (8) \end{aligned}$$

Проинтегрируем (8) по τ от 0 до t :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|D_{0t}^\alpha v\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t d\tau \int_0^l kv_x(x, \tau) \frac{d}{dt} \int_0^\tau \frac{v_x(x, \tau_1) d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^\alpha} dx + \\ + \frac{\beta_2}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \nu(l, \tau) \frac{d}{dt} \int_0^\tau \frac{v(l, \tau_1) d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^\alpha} d\tau + \frac{\beta_2}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \nu(0, \tau) \frac{d}{dt} \int_0^\tau \frac{v(0, \tau_1) d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^\alpha} d\tau \leq \\ \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_{2, Q_t}^2 + \varepsilon \int_0^t \|D_{0t}^\alpha v(x, \tau)\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \|D_{0t}^\alpha v(x, 0)\|_0^2, \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$\|F\|_{2, Q_t}^2 = \int_0^t \|F(x, \tau)\|_0^2 d\tau.$$

Усилим неравенство (9), учитывая положительность интегралов в левой части последнего неравенства (см. [5]). В результате получим

$$\frac{1}{2} \|D_{0t}^\alpha v\|_0^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_{2,Q_t}^2 + \varepsilon \int_0^t \|D_{0t}^\alpha v(x, \tau)\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \|u_0(x)\|_0^2$$

или

$$\|D_{0t}^\alpha v\|_0^2 \leq 2\varepsilon \int_0^t \|D_{0t}^\alpha v(x, \tau)\|_0^2 d\tau + \Phi(t), \quad (10)$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \|F\|_{2,Q_t}^2 + \|u_0(x)\|_0^2.$$

Введем обозначение

$$y(t) = \int_0^t \|D_{0t}^\alpha v(x, \tau)\|_0^2 d\tau;$$

тогда неравенство (10) примет вид

$$\frac{dy}{dt} \leq 2\varepsilon y(t) + F(t).$$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма Гронуолла—Беллмана (см. [6, с. 112]).

Лемма 1. Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0, T]$ неравенству

$$\frac{dy}{dt} \leq c_1(t)y(t) + c_2(t),$$

где $c_i(t)$ — суммируемые на $[0, T]$ неотрицательные функции. Тогда

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \exp\left(\int_0^t c_1(\tau) d\tau\right) \left[y(0) + \int_0^t c_2(\xi) \exp\left(-\int_0^\xi c_1(\tau) d\tau\right) d\xi \right] \leq \\ &\leq \exp\left(\int_0^t c_1(\tau) d\tau\right) \left[y(0) + \int_0^t c_2(\tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Применяя лемму, получаем

$$\|D_{0t}^\alpha v\|_{2,Q_t}^2 \leq \exp(2\varepsilon t) t \Phi(t),$$

откуда следует оценка

$$\|D_{0t}^\alpha v\|_0^2 \leq M(t) \left(\|F\|_{2,Q_t}^2 + \|u_0(x)\|_0^2 \right).$$

Возвращаясь к $u(x, t)$, получаем априорную оценку (4).

Если $f = u_0 = u_1 = 0$, из (4) получаем

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^t \frac{u(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = 0. \quad (11)$$

С помощью обобщенной формулы Ньютона—Лейбница (см. [9, с. 15]) из (11) имеем

$$\begin{aligned} D_{0t}^{-\alpha} D_{0t}^\alpha u(x, t) &= u(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t), \\ u(x, t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_1(x) = 0, \end{aligned}$$

откуда следует единственность решения задачи (1)—(3). $\square$

3. Метод прямых для решения третьей краевой задачи. Будем решать задачу (1)–(2) с начальными условиями

$$D_{0t}^\alpha u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (12)$$

методом прямых (см. [2]). Получим приближенное решение в виде системы функций, представляющих искомое решение вдоль прямых $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$. Будем предполагать, что решение рассматриваемой задачи обладает требуемой по ходу изложения гладкостью. Разобьем отрезок $[0, l]$ точками $x_i = ih$, $h = l/N$, и заменим производные по переменной на разностные производные

$$\begin{aligned} (k(x, t)u_x)_x &\sim (a(x, t)u_{\bar{x}})_x = \frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right), \\ a(x_i, t) &= k(x_i - 0.5h, t) = k_{i-\frac{1}{2}}(t). \end{aligned}$$

Тогда для сеточной функции $y(x_i, t)$ получим следующую систему уравнений метода прямых:

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha+1} y(x_i, t) &= \frac{1}{h} \left[a_{i+1} \frac{y_{i+1}(t) - y_i(t)}{h} - a_i \frac{y_i(t) - y_{i-1}(t)}{h} \right] + \varphi(x_i, t), \\ \varphi(x_i, t) &= \varphi(x_i, t) + O(h^2), \quad a_i \geq c > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ D_{0t}^\alpha y(x_i, 0) &= u_0(x_i), \quad D_{0t}^{\alpha-1} y(x_i, 0) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $y_i(t) = y(x_i, t)$. При этом (13) дает аппроксимацию уравнения с точностью h^2 . Аппроксимируем условия (2) на решении u уравнения (1) с порядком $O(h^2)$, для чего рассмотрим сначала простейшую аппроксимацию краевого условия при $x = 0$:

$$a_1 y_{x,0} = \beta_1 u(0, t),$$

и вычислим погрешность аппроксимации, подставив в это условие $y = z + u$:

$$a_1 z_{x,0} = \beta_1 z_0 - \nu_1, \quad \nu_1 = a_1 u_{x,0} - \beta_1 u_0.$$

Учитывая, что

$$a_1 = k_0 + 0.5hk'_0 + O(h^2), \quad u_{x,0} = u'_0 + 0.5hu''_0 + O(h^2)$$

получаем

$$\nu_1 = (a_1 u'_0 - \beta_1 u_0) + \frac{h}{2} (k, u')'_0 + O(h^2) = \frac{h}{2} ((k, u')'_0) + O(h^2).$$

Так как u есть решение исходной дифференциальной задачи, то получим

$$\nu_1 = 0.5h \left(D_{0t}^\alpha u_0 - f(0, t) \right) + O(h^2).$$

Отсюда следует, что краевое условие

$$D_{0t}^{\alpha+1} y_0 = \frac{1}{0.5h} (a_1 y_{x,0} - \beta_1 y_0) + \varphi^-, \quad \varphi^- = f_0,$$

имеет второй порядок аппроксимации на решении задачи.

Аналогично получается разностное краевое условие второго порядка аппроксимации при $x = 1$:

$$D_{0t}^{\alpha+1} y_N = \frac{1}{0.5h} (a_1 y_{\bar{x},N} - \beta_1 y_N) + \varphi^+, \quad \varphi^+ = f_N.$$

Таким образом, исходной дифференциальной задаче (1), (2), (12), рассматриваемой в области $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$, ставится в соответствие следующая система уравнений дробного порядка метода прямых:

$$D_{0t}^{\alpha+1} y = \bar{A}y + \Phi, \quad (14)$$

$$\bar{\Lambda}y = \begin{cases} \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x, & x \in \omega_h, \\ \Lambda^- = h^{-1}(a_1 y_{\bar{x},1} - \tilde{\beta}_1 y_0), & x = 0, \\ \Lambda^+ = h^{-1}(a_1 y_{\bar{x},N} - \tilde{\beta}_1 y_N), & x = 1, \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} \varphi, & x = \omega_h, \\ \varphi^-, & x = 0, \\ \varphi^+, & x = 1, \end{cases}$$

с начальными данными

$$D_{0,t}^\alpha y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad D_{0,t}^{\alpha-1} y(x_i, 0) = 0, \quad (15)$$

где

$$\omega_h = \{x_i = ih : i = 1, 2, \dots, N-1\}, \quad \tilde{\beta}_1 = \beta_1, \quad \tilde{\beta}_2 = \beta_2, \quad \varphi^- = f_0, \quad \varphi^+ = f_N.$$

4. Априорная оценка для системы разностных уравнений. Для решения системы (14), (15) получим априорную оценку. При оценке системы разностных уравнений будем предполагать, что $k(x, t)$, $f(x, t)$, $u_0(x)$ имеют нужное по ходу изложения число производных. Умножим (14) скалярно на $Y = D_{0,t}^\alpha y(x_i, \tau)$. В результате получим тождество

$$(D_{0,t}^{\alpha+1} y, Y) = ((ay_{\bar{x}})_x, Y) + (\varphi, Y). \quad (16)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в (16):

$$(D_{0,t}^{\alpha+1} y, Y) = \sum_{i=1}^{N-1} D_{0,t}^{\alpha+1} y_i D_{0,t}^\alpha y_i h = \sum_{i=1}^{N-1} D_{0,t}^{\alpha+1} y(x_i, \tau) D_{0,t}^\alpha y(x_i, \tau) h = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{N-1} D_{0,t}^\alpha y_i D_{0,t}^\alpha y_i h = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|Y\|_0^2,$$

$$((ay_{\bar{x}})_x, Y) = -((ay_{\bar{x}}, Y_{\bar{x}}]) - \tilde{\beta}_1 Y_0^2 - \tilde{\beta}_2 Y_N^2,$$

$$(\varphi, Y) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2 + \varepsilon \|Y\|_0^2,$$

где

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad (y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}, \quad \|y\|] = \sqrt{(y, y]}.$$

С учетом полученных соотношений из (16) получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|Y\|_0^2 + \sum_{i=1}^N ay_{\bar{x}} Y_{\bar{x}} h - \tilde{\beta}_1 Y_0^2 - \tilde{\beta}_2 Y_N^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2 + \varepsilon \|Y\|_0^2. \quad (17)$$

Проинтегрируем последнее равенство по τ от 0 до t :

$$\|Y\|_0^2 + 2 \int_0^t \sum_{i=1}^N ay_{\bar{x}} Y_{\bar{x}} h d\tau \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \|\varphi\|_0^2 d\tau + 2\varepsilon \int_0^t \|Y\|_0^2 d\tau + \|Y(x_i, 0)\|_0^2. \quad (18)$$

Учитывая положительность интеграла в левой части неравенства (18),

$$\int_0^t \sum_{i=1}^N ay_{\bar{x}} Y_{\bar{x}} h d\tau = \int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} a D_{0,t}^\alpha y_{\bar{x}}(x_i, \tau) y_{\bar{x}}(x_i, \tau) h d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \left(\int_0^t a D_{0,t}^\alpha y_{\bar{x}}(x_i, \tau) y_{\bar{x}}(x_i, \tau) d\tau \right) h \geq 0,$$

получим

$$\|Y\|_0^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \|\varphi\|_0^2 d\tau + 2\varepsilon \int_0^t \|Y\|_0^2 d\tau + \|Y(x_i, 0)\|_0^2. \quad (19)$$

Отсюда следует

$$\|Y\|_0^2 \leq 2\varepsilon \int_0^t \|Y\|_0^2 d\tau + F_1(t),$$

где

$$F_1(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \|\varphi\|_{2,Q_t}^2 + \|u_0\|_0^2.$$

На основании леммы Гронуолла–Беллмана из (19) окончательно находим

$$\|Y\|_0^2 \leq M (\|\varphi\|_{2,Q_t}^2 + \|u_0\|_0^2).$$

Из полученной априорной оценки вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка (14) с начальными условиями (15) справедлива априорная оценка*

$$\|D_{0t}^\alpha y(x_i, \tau)\|_0^2 \leq M (\|\varphi\|_{2,Q_t}^2 + \|u_0\|_0^2),$$

где $M > 0$ — число, не зависящее от h .

5. Метод прямых для решения первой краевой задачи. Для волнового уравнения дробного порядка (1) в области Q_T для случая, когда $k(x, t) = 1$, в [4] методом энергетических неравенств получена априорная оценка решения первой краевой задачи с начальными условиями (3) и граничными условиями

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (20)$$

Как и в случае третьей краевой задачи, решая задачу (1), (20), (12) методом прямых, получим приближенное решение в виде системы функций, представляющих искомое решение вдоль прямых $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h = l/N$. Будем предполагать, что решение рассматриваемой задачи обладает требуемой по ходу изложения гладкостью. Тогда для сеточной функции $y(x_i, t)$ получим следующую систему уравнений метода прямых:

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha+1} y(x_i, t) &= \frac{1}{h} \left[a_{i+1} \frac{y_{i+1}(t) - y_i(t)}{h} - a_i \frac{y_i(t) - y_{i-1}(t)}{h} \right] + \varphi(x_i, t), \\ \varphi(x_i, t) &= \varphi(x_i, t) + O(h^2), \quad a_i \geq c > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0(t) &= y_N(t) = 0, \quad D_{0t}^\alpha y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad D_{0t}^{\alpha-1} y(x_i, 0) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

или

$$\begin{aligned} &\frac{5}{6} D_{0t}^{\alpha+1} y(x_i, t) + \frac{1}{12} (D_{0t}^{\alpha+1} y(x_{i+1}, t) + D_{0t}^{\alpha+1} y(x_{i-1}, t)) = \\ &= \frac{1}{h} \left[a_{i+1} \frac{y_{i+1}(t) - y_i(t)}{h} - a_i \frac{y_i(t) - y_{i-1}(t)}{h} \right] + \frac{5}{6} \varphi(x_i, t) + \\ &+ \frac{1}{12} (\varphi(x_{i-1}, t) + \varphi(x_{i+1}, t)) + O(h^4), \\ &y_0(t) = y_N(t) = 0, \quad D_{0t}^\alpha y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad D_{0t}^{\alpha-1} y(x_i, 0) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $y_i(t) = y(x_i, t)$, $a_i \geq c > 0$, $i = 1, 2, \dots, N-1$. При этом (21) дает аппроксимацию уравнения с точностью h^2 , а (22) — с точностью h^4 .

Для решения системы (21) можно получить следующую априорную оценку:

$$\|Y\|_0^2 \leq M (\|\varphi\|_{2,Q_t}^2 + \|u_0\|_0^2),$$

откуда следует сходимость решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка (21) со скоростью $O(h^2)$.

6. Решение системы разностных уравнений, возникающих при решении методом прямых. Рассмотрим однородную систему уравнений, соответствующую системе (21) при $a_k = 1, k = 1, 2, \dots, N - 1$:

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha+1} y &= \frac{1}{h^2} [(y_{k+1}(t) - 2y_k(t) + y_{k-1}(t))], \\ y_0(t) &= y_N(t) = 0, \\ D_{0t}^{\alpha} y(x_i, 0) &= u_0(x_i), \quad D_{0t}^{\alpha-1} y(x_i, 0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Частные решения этой системы будем искать в виде

$$y_k(t) = \gamma(k)\nu(t).$$

Подставляя в систему (23) последнее равенство, получим

$$\begin{aligned} \gamma(k) D_{0t}^{\alpha+1} \nu(t) &= \frac{1}{h^2} \nu(t) [\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)], \quad k = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \gamma(0) &= 0, \quad \gamma(N) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{D_{0t}^{\alpha+1} \nu(t)}{\nu(t)} = \frac{\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)}{h^2 \gamma(k)} = -\delta^2 = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (24)$$

Для отыскания $\gamma(k)$ получим однородное разностное уравнение

$$\gamma(k+1) - [2 - h^2 \delta^2] \gamma(k) + \gamma(k-1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (25)$$

с граничными условиями

$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma(N) = 0. \quad (26)$$

Нетривиальные решения задачи (25), (26) возможны лишь при значениях

$$\delta = \delta_s^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi s}{2N} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi s x_s}{2l}, \quad s = 0, 1, \dots, N - 1,$$

которым соответствуют собственные функции

$$\gamma_s(k) = c \sin \frac{\pi s x_k}{l}.$$

Из уравнения (24) также имеем

$$D_{0t}^{\alpha+1} v(t) + \delta^2 v(t) = 0,$$

общее решение которого имеет вид (см. [7, с. 221])

$$v_s(t) = a_s \Gamma(\alpha + 1) t^{\alpha} E_{1/(\alpha+1)}(-\delta_s^2 t^{\alpha+1}; \alpha + 1) + b_s \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} E_{1/(\alpha+1)}(-\delta_s^2 t^{\alpha+1}; \alpha),$$

где

$$E_{1/\gamma}(z; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\gamma n + \mu)}$$

— функция типа Миттаг-Леффлера.

Итак, мы имеем $N - 1$ частных решений однородной линейной системы (23), которые между собой линейно независимы, и, следовательно, общее решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \sum_{s=1}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi s}{l} x_k\right) \times \\ &\times \left(a_s \Gamma(\alpha + 1) t^{\alpha} E_{1/(\alpha+1)}(-\delta_s^2 t^{\alpha+1}, \alpha + 1) + b_s \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} E_{1/(\alpha+1)}(-\delta_s^2 t^{\alpha+1}, \alpha) \right), \end{aligned} \quad (27)$$

где a_s, b_s — произвольные постоянные,

$$\delta_s^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{2l} x_s.$$

Аналогично можно получить общее решение однородной системы, соответствующей системе (22):

$$y_k(t) = \sum_{s=1}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi s}{l} x_k\right) \times \\ \times \left(c_s \Gamma(\alpha + 1) t^\alpha E_{1/(\alpha+1)}(-\delta_s'^2 t^{\alpha+1}, \alpha + 1) + d_s \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} E_{1/(\alpha+1)}(-\delta_s'^2 t^{\alpha+1}, \alpha) \right), \quad (28)$$

где c_s, d_s — произвольные постоянные,

$$\delta_s'^2 = \frac{24}{h^2 \left(5 + \cos \frac{\pi}{l} x_s \right)} \sin^2 \frac{\pi}{2l} x_s.$$

Таким образом, общее решение системы (21) имеет вид

$$y = y_k^1 + y_k(t),$$

где y_k^1 — частное решение неоднородной системы (21), а $y_k(t)$ — общее решение (27) соответствующей однородной системы (23).

7. Тестовый пример. Рассмотрим пример построения методом прямых приближенного решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha+1} u &= u_{xx} + e^{-t} \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leq T, \\ D_{0t}^\alpha u(x, t)|_{t=0} &= 0, \quad D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t)|_{t=0} = 0, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Разделим отрезок $[0, \pi]$ на шесть частей и проведем через точки деления прямые. Таким образом, приближенные значения решения $u_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, 6$, ищутся на прямых $x = \pi k/6$, $k = 0, 1, \dots, 6$. Для отыскания $u_k(t)$ имеем систему уравнений (21), аппроксимирующую наше уравнение с точностью порядка h^2 , или систему (22) — с точностью h^4 .

Как известно (см. [7, с. 222]), точное решение первой краевой задачи с однородными краевыми условиями для уравнения (29) имеет вид

$$u(x, t) = 2\alpha \Gamma(\alpha) \int_0^\pi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\xi) \sin(nx) D_{0t}^{-(\alpha+1)} E_{1/(\alpha+1)} \left[-n^2(t-\eta)^{\alpha+1}; \alpha + 1 \right] e^{-\eta} \sin \xi \right\} d\xi.$$

Для сравнения и наглядности будем вычислять точные и приближенные значения решения задачи на заданных прямых, при различных значениях порядка производной α с точностью аппроксимации порядка h^2 и h^4 .

Для реализации решения этой задачи на компьютере использовалась среда программирования «Microsoft Visual Studio C#», а также ядро вычислительной системы Mathematica 9 фирмы Wolfram Research.

Результаты моделирования приведены на рис. 1–4:

- (i) рис. 1: $\alpha = 1/10$, $t = 1$ на прямых $x_k = k\pi/6$, $k = 0, 1, \dots, 6$, с точностью аппроксимации порядка h^2 ;
- (ii) рис. 2: $\alpha = 9/10$, $t = 5$;
- (iii) рис. 3: точные и приближенные решения при $\alpha = 1/2$, $t = 4$ на прямых с точностью h^2 ;
- (iv) рис. 4: $\alpha = 1/2$, $t = 4$, с точностью h^4 .

На рисунках график, отмеченный синим цветом — точное решение, а график, отмеченный красным цветом — приближенное решение.

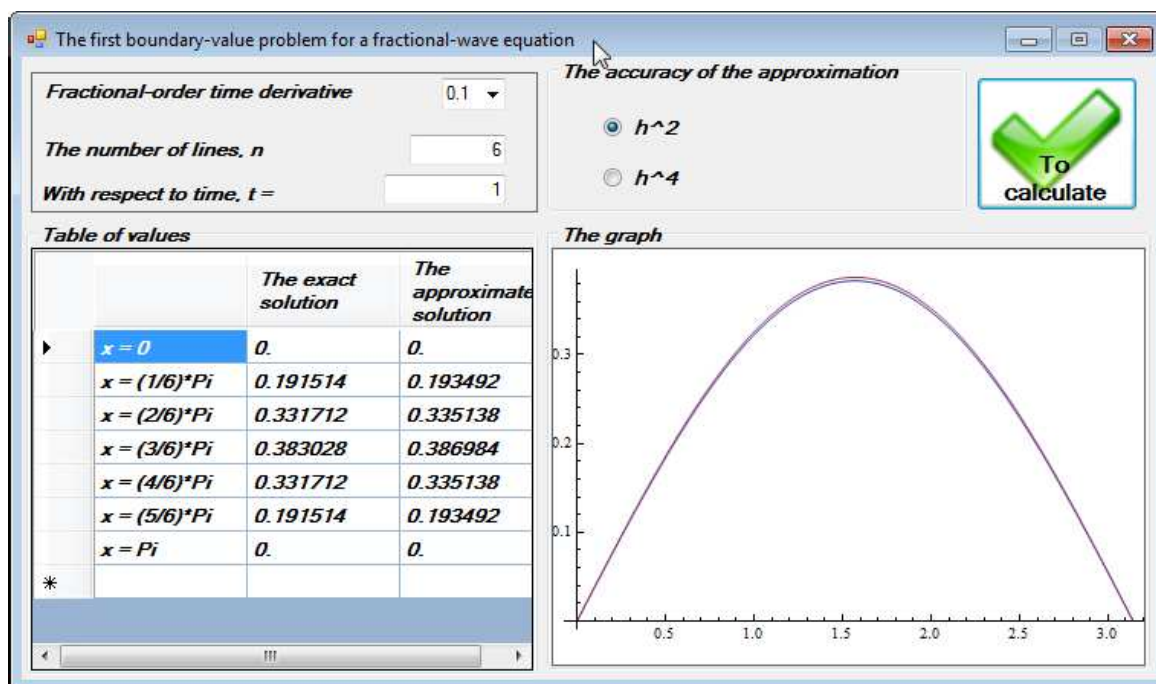


Рис. 1

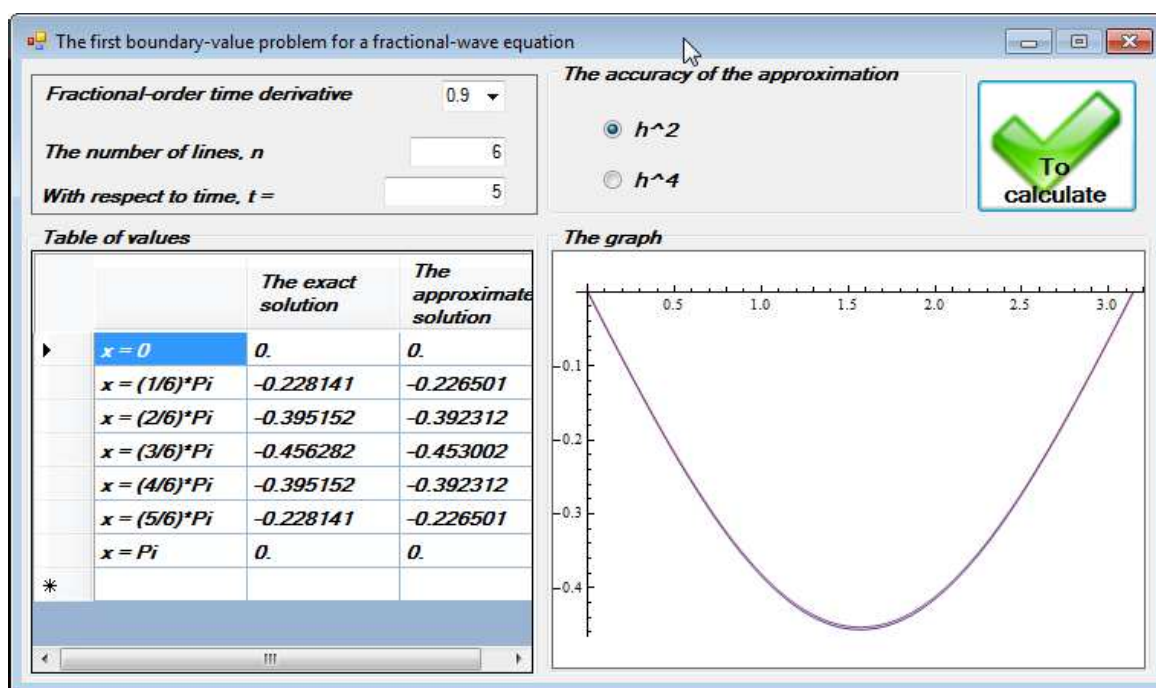


Рис. 2

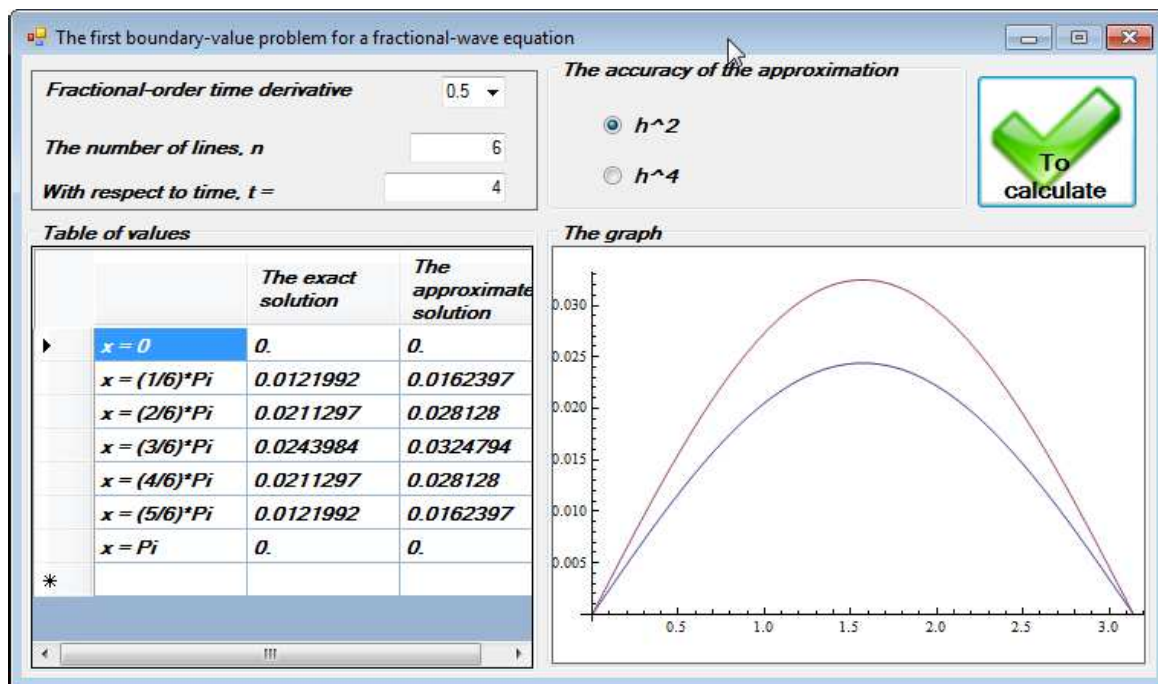


Рис. 3

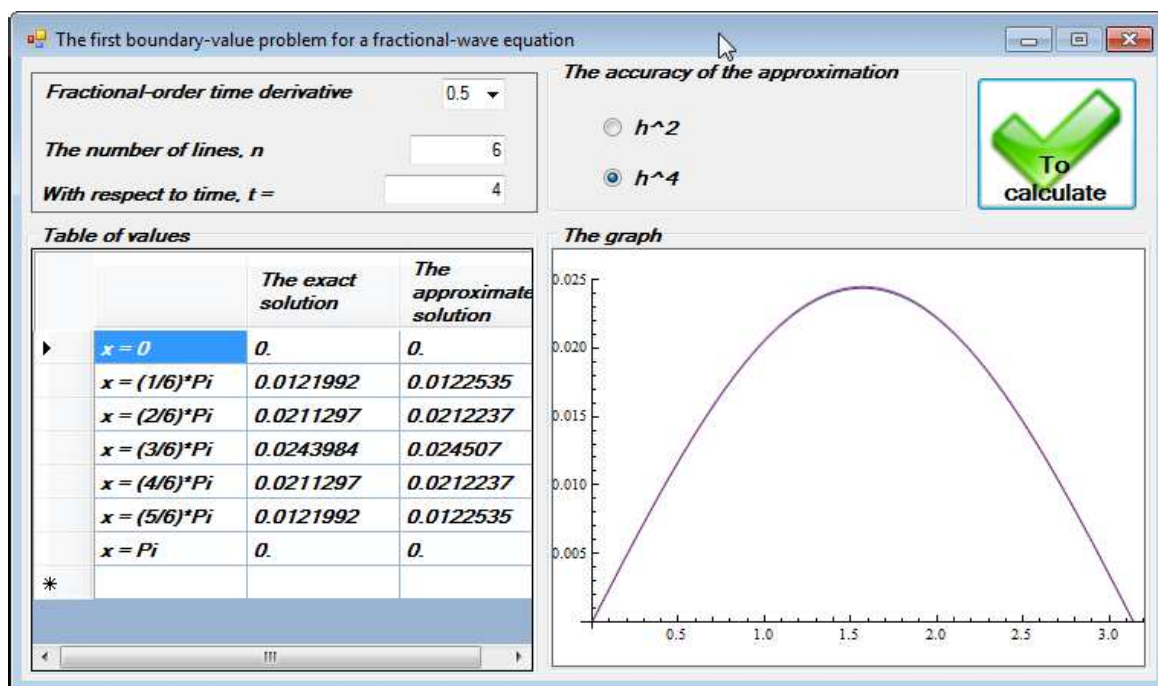


Рис. 4

8. Заключение. В работе рассмотрены краевые задачи для волнового уравнения с дробной производной Римана—Лиувилля. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки в терминах дробной производной для решения нелокального волнового уравнения с переменными коэффициентами в дифференциальной и разностной трактовках. Получено решение системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами, возникающей при использовании метода прямых.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Диффер. уравн. — 2010. — 46, № 5. — С. 658–664.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. — ГИФМЛ, 1962.
3. Гекжиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени // Докл. Адыг. Междунар. АН. — 1994. — 1, № 1. — С. 16–19.
4. Керемов М. А. Первая краевая задача для нелокального волнового уравнения // Науч. ведомости БелГУ. Сер. мат. Физ. — 2016. — 42, № 6 (227). — С. 20–23.
5. Кумыкова С. К. Об одной краевой задаче для уравнения $\text{sign}|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ // Диффер. уравн. — 1976. — 12, № 1. — С. 79–88.
6. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
7. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
8. Олемской А. И., Флат А. Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // Усп. физ. наук. — 1993. — 163, — № 12. — С. 1–50.
9. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.

М. А. Керемов

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик

E-mail: kerefov@mail.ru

Б. М. Керемов

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик

E-mail: kerefov-1997@mail.ru



КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ И КВАЗИУЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ

© 2018 г. А. И. КОЖАНОВ

Аннотация. Изучается разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения

$$h(t)u_t + (-1)^m D_a^{2m+1} u - \Delta u + c(x, t, a)u = f(x, t, a);$$
$$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < t < T, \quad 0 < a < A, \quad D_a^k = \frac{\partial^k}{\partial a^k},$$

с функцией $h(t)$, произвольным образом меняющей знак на отрезке $[0, T]$. Доказаны теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений.

Ключевые слова: ультрапараболические уравнения, неклассические дифференциальные уравнения нечетного порядка, меняющие направление эволюции, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

AMS Subject Classification: 35M99, 35K70

1. Введение. В [2] изучалась разрешимость краевых задач для некоторых дифференциальных уравнений с двумя временными переменными и с меняющимся направлением эволюции. Более точно, изучались уравнения

$$h(x)u_t + (-1)^m \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial a^{2m+1}} - u_{xx} + c(x, t, a)u = f(x, t, a), \quad m — \text{целое неотрицательное число} \quad (1)$$

с функцией $h(x)$, $xh(x) > 0$ при $x \neq 0$. Для этих уравнений были доказаны теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений задачи Жевре (см. [7]) или задачи Фикера (см. [8, 4]). В настоящей работе будут изучаться уравнения, подобные уравнениям (1), но с функцией h , зависящей от переменной t , и с переменной x , пробегаящей не одномерный интервал, а ограниченную область из пространства $\mathbb{R}^n$. Уточним также, что смена направления эволюции в изучаемых в настоящей работе уравнениях может происходить не однократно, как в уравнениях (1), а сколько угодно раз, и что функция $h(t)$ может обращаться в нуль на множестве положительной меры.

Прежде чем переходить к содержательной части работы, заметим следующее. Во-первых, для ультрапараболических уравнений (при $m = 0$) с меняющимся направлением эволюции разрешимость краевых задач изучалась в [5], но при этом рассматривались лишь модельные ситуации, и характер смены направления эволюции отличался от того, который будет представлен в настоящей работе. Во-вторых, квазиультрапараболические уравнения (уравнение (1) в случае $m > 0$) с меняющимся направлением эволюции, определяющимся функцией $h(t)$, ранее не изучались.

2. Постановка задач. Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно-дифференцируемой) границей Γ , T и A — заданные положительные числа, Q — цилиндр пространства $\mathbb{R}^{n+2}$ переменных (x, t, a) : $Q = \Omega \times (0, T) \times (0, A)$. Далее, пусть $h(t)$, $c(x, t, a)$ и $f(x, t, a)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $a \in [0, A]$, и пусть

m — заданное целое неотрицательное число. Для неотрицательного целого числа k через D_a^k будем обозначать производную $\frac{\partial^k}{\partial a^k}$. Наконец, через L обозначим дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t, a)$ определяется равенством

$$Lv = h(t)v_t + (-1)^m D_a^{2m+1}v - \Delta v + c(x, t, a)v.$$

Рассмотрим 8 краевых задач:

I. Найти такую функцию $u(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lu = f(x, t, a), \quad (2)$$

что для нее выполняются условия

$$u(x, t, a)|_{(x,t,a) \in \Gamma \times (0,T) \times (0,A)} = 0, \quad (3)$$

$$D_a^k u(x, t, a)|_{a=0} = 0, \quad k = 0, \dots, m, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

$$D_a^k u(x, t, a)|_{a=A} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T). \quad (5)$$

II. Найти такую функцию $u(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (2), что для нее выполняются условия (3)–(5), а также условие

$$u(x, t, a)|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad a \in (0, A). \quad (6)$$

III. Найти функцию $u(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (3)–(5), а также условие

$$u(x, t, a)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad a \in (0, A). \quad (7)$$

IV. Найти функцию $u(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (3)–(5), а также условия (6) и (7).

V. Найти функцию $u(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (3) и (4), а также условие

$$D_a^k u(x, t, a)|_{a=A} = 0, \quad k = m+1, \dots, 2m, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T). \quad (8)$$

VI. Найти функцию $u(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (2) и такую, что для нее выполняются условия (3), (4), (6) и (8).

VII. Найти функцию $u(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (2) и такую, что для нее выполняются условия (3), (4), (7) и (8).

VIII. Найти функцию $u(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (2) и такую, что для нее выполняются условия (3), (4), (6)–(8).

Определим необходимое ниже функциональное пространство. Именно, определим линейное пространство $V_{2,l,p}$ (l и p — целые неотрицательные числа) как множество функций из пространства $L_2(Q)$, имеющих обобщенные по С. Л. Соболеву производные по переменным $x_i, i = 1, \dots, n$, до второго порядка включительно, по переменной t до порядка l включительно, и по переменной a до порядка p включительно, причем все эти производные также являются элементами пространства $L_2(Q)$. Определим норму в этом пространстве:

$$\|v\|_{V_{2,l,p}} = \left(\int_Q \left[v^2 + \sum_{i,j=1}^n v_{x_i x_j}^2 + \left(\frac{\partial^l v}{\partial t^l} \right)^2 + (D_a^p v)^2 \right] dx dt da \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В дальнейшем символом $V_{2,l,p}$ будем обозначать описанное выше линейное пространство с данной нормой; очевидно, что это нормированное пространство будет банаховым пространством.

3. Разрешимость краевых задач I–IV. Пусть функция $w(x)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W} \frac{1}{2}(\Omega)$. Тогда будет выполняться неравенство

$$d_0 \int_Q w^2 dx \leq \sum_{i=1}^n \int_Q w_{x_i}^2 dx, \quad (9)$$

в котором число d_0 положительно и определяется лишь областью Ω . Это неравенство и само число d_0 понадобятся ниже.

Доказательство разрешимости краевых задач I–IV будет основано на методе регуляризации и методе продолжения по параметру.

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$h(t) \in C^1([0, T]), \quad c(x, t, a) \in C^{2m+1}(\overline{Q}); \quad (10)$$

$$h(0) \leq 0, \quad h(T) \geq 0; \quad 2[c(x, t, a) + d_0] - h'(t) \geq c_1 > 0, \quad (11)$$

$$2[c(x, t, a) + d_0] + h'(t) \geq c_2 > 0 \text{ при } (x, t, a) \in \overline{Q}. \quad (12)$$

Тогда для любой функции $f(x, t, a)$ ($f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t, a) \in L_2(Q)$, $D_a^k f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $k = 1, \dots, 2m+1$) $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = 0$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = 0, \dots, m$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = A$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = 0, \dots, m-1$, краевая задача I имеет решение $u(x, t, a)$, притом $u(x, t, a) \in V_{2,1,2m+1}$.

Доказательство. Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$-\varepsilon(u_{tt} + D_a^{2(2m+1)}u) + Lu = f(x, t, a) \quad (13)$$

и такую, что для нее выполняются условия (3)–(5), а также условия

$$u_t(x, t, a)|_{t=0} = u_t(x, t, a)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad a \in (0, A), \quad (14)$$

$$D_a^k u(x, t, a)|_{a=0} = 0, \quad k = 2m+1, \dots, 3m, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (15)$$

$$D_a^k u(x, t, a)|_{a=A} = 0, \quad k = 2m+1, \dots, 3m+1, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T). \quad (16)$$

Покажем, что при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x, t, a)$ пространству $L_2(Q)$ краевая задача (13)–(16), (3)–(5) будет разрешима в пространстве $V_{2,2,2(2m+1)}$.

Пусть λ есть число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\varepsilon(-u_{tt} + D_a^{2(2m+1)}u) - \Delta u + \lambda [h(t)u_t + (-1)^m D_a^{2m+1}u + cu] = f(x, t, a) \quad (17)$$

и такую, что для нее выполняются условия (3)–(5), (14)–(16). Согласно теореме о методе продолжения по параметру (см. [6, гл. III, § 14]), эта задача будет разрешима в пространстве $V_{2,2,2(2m+1)}$ при всех λ из отрезка $[0, 1]$ (а значит и при $\lambda = 1$), если

а) Для всевозможных решений $u(x, t, a)$ краевой задачи (17), (3)–(5), (14)–(16) из пространства $V_{2,2,2(2m+1)}$ выполняется равномерная по λ априорная оценка

$$\|u\|_{V_{2,2,2(2m+1)}} \leq R_0 \|f\|_{L_2(Q)}; \quad (18)$$

а) Краевая задача (120), (3)–(5), (14)–(16) разрешима в пространстве $V_{2,2,2(2m+1)}$ при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x, t, a)$ пространству $L_2(Q)$.

Покажем, что для задачи (17), (3)–(5), (14)–(16) выполняется первый пункт.

Умножим уравнение (17) на функцию $u(x, t, a)$ и проинтегрируем по цилиндру Q . Применяя формулу интегрирования по частям и используя условия (3)–(5), (14)–(16), получим равенство

$$\varepsilon \int_Q \left[u_t^2 + (D_a^{2m+1}u)^2 \right] dx dt da + \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i}^2 dx dt da +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (D_a^m u(x, t, A))^2 dx dt + \lambda \int_Q \left(c - \frac{1}{2} h' \right) u^2 dx dt da + \\
& + \frac{\lambda}{2} h(T) \int_0^A \int_{\Omega} u^2(x, T, a) dx da - \frac{\lambda}{2} h(0) \int_0^A \int_{\Omega} u^2(x, 0, a) dx da = \int_Q f u dx dt da. \quad (19)
\end{aligned}$$

Из этого равенства, неравенства (9), условий (11) и (12), а также из неравенства Юнга вытекает первая априорная оценка

$$\int_Q \left[u^2 + u_t^2 + (D_a^{2m+1} u)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right] dx dt da \leq N_1 \int_Q f^2 dx dt da \quad (20)$$

постоянная N_1 в которой определяется числом ε и областью Ω . На следующем шаге умножим уравнение (17) на функцию $-u_{tt}(x, t, a)$ и проинтегрируем по цилиндру Q . Вновь применяя формулу интегрирования по частям и используя условия (3)–(5), (14)–(16), получим равенство

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_Q \left[u_{tt}^2 + (D_a^{2m+1} u_t)^2 \right] dx dt da + \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t}^2 dx dt da + \\
& + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (D_a^m u_t(x, t, A))^2 dx dt + \lambda \int_Q \left(c + \frac{1}{2} h' \right) u_t^2 dx dt da = \\
& = \lambda \int_Q c_t u u_t dx dt da - \int_Q f u_{tt} dx dt da. \quad (21)
\end{aligned}$$

Вновь используя неравенство (9), условие (12) и неравенство Юнга, используя также оценку (20), из данного равенства выведем оценку

$$\int_Q \left[u_{tt}^2 + (D_a^{2m+1} u_t)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2 \right] dx dt da \leq N_2 \int_Q f^2 dx dt da \quad (22)$$

постоянная N_2 в которой определяется функцией $c(x, t, a)$, областью Ω и числом ε .

Умножив уравнение (17) вначале на функцию $-D_a^{2(2m+1)} u(x, t, a)$, затем на функцию $-\Delta u(x, t, a)$, интегрируя по цилиндру Q , применяя формулу интегрирования по частям, используя неравенство Юнга, второе основное неравенство для эллиптических операторов (см. [6]), а также неравенства (20) и (22), получим, что для решений $u(x, t, a)$ краевой задачи (17), (3)–(5), (14)–(16) выполняется оценка

$$\int_Q \left[(D_a^{2(2m+1)} u)^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 \right] dx dt da \leq N_3 \int_Q f^2 dx dt da \quad (23)$$

постоянная N_3 в которой определяется функцией $c(x, t, a)$, областью Ω и числом ε .

Оценки (20), (22) и (23) означают, что для решений $u(x, t, a)$ краевой задачи (17), (3)–(5), (14)–(16) выполняется оценка (18).

Итак, для краевой задачи (17), (3)–(5), (14)–(16) выполняется пункт а). Выполнение пункта б) для этой задачи очевидно, поскольку краевая задача (13), (3)–(5), (14)–(16) представляет собой задачу с данными на всей границе для квазиэллиптического уравнения с постоянными коэффициентами, разрешимость которой в пространстве $V_{2,2(2m+1)}$ нетрудно показать с помощью классического метода Фурье; сходимость рядов, представляющих решение этой задачи и его производные, очевидным образом вытекает из оценок (20), (22) и (23).

Как уже говорилось выше, выполнение пунктов а) и б) для задачи (17), (3)–(5), (14)–(16) означает, что краевая задача (13), (3)–(5), (14)–(16) имеет решение $u(x, t, a)$, принадлежащее пространству $V_{2,2,2(2m+1)}$. Покажем, что для функции $u(x, t, a)$ имеют место априорные оценки, равномерные по ε .

Прежде всего заметим, что из равенств (19) и (21), условий (11) и (12), а также из неравенства Юнга вытекает, что для решения $u(x, t, a)$ краевой задачи (13), (3)–(5), (14)–(16) выполняется оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_Q \left[u_{tt}^2 + (D_a^{2m+1}u)^2 + (D_a^{2m+1}u_t)^2 \right] dx dt da + \\ + \int_Q \left[u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2 \right] dx dt da \leq N_4 \int_Q [f^2 + f_t^2] dx dt da \quad (24) \end{aligned}$$

постоянная N_4 в которой определяется лишь функцией $c(x, t, a)$ и областью Ω (уточним, что при получении этой оценки во втором слагаемом правой части равенства (21) выполнено интегрирование по частям).

Умножим уравнение (13) на функцию $-D_a^{2(2m+1)}u(x, t, a)$ и проинтегрируем по цилиндру Q . Применяя формулу интегрирования по частям и используя краевые условия (3)–(5), (14)–(16), а также условия теоремы на функцию $f(x, t, a)$, нетрудно получить равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_Q \left[(D_a^{2m+1}u_t)^2 + (D_a^{2(2m+1)}u)^2 \right] dx dt da - \frac{1}{2} \int_Q h'(t) (D_a^{2m+1}u)^2 dx dt da + \\ + \sum_{i=1}^n \int_Q (D_a^{2m+1}u_{x_i})^2 dx dt da + \int_Q D_a^{2m+1}u D_a^{2m+1}(cu) dx dt da = \\ = \int_Q D_a^{2m+1}f D_a^{2m+1}u dx dt da. \quad (25) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое левой части (25) нетрудно преобразовать в виде

$$\begin{aligned} \int_Q D_a^{2m+1}u D_a^{2m+1}(cu) dx dt da = \int_Q c (D_a^{2m+1}u)^2 dx dt da + \\ + \sum_{k=1}^{2m+1} C_{2m+1}^k \int_Q D_a^k c D_a^{2m+1-k}u D_a^{2m+1}u dx dt da, \end{aligned}$$

где C_{2m+1}^k — биномиальные коэффициенты. Следовательно, от равенства (25) можно перейти к неравенству

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_Q \left[(D_a^{2m+1}u_t)^2 + (D_a^{2(2m+1)}u)^2 \right] dx dt da + \\ + \int_Q \left(c - \frac{1}{2}h'(t) + d_0 \right) (D_a^{2m+1}u)^2 dx dt da + \\ + \frac{h(T)}{2} \int_0^A \int_\Omega [D_a^{2m+1}u(x, T, a)]^2 dx da - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{h(0)}{2} \int_0^A \int_{\Omega} [D_a^{2m+1} u(x, 0, a)]^2 dx da \leq \int_Q |D_a^{2m+1} f| |D_a^{2m+1} u| dx dt da + \\
 + \sum_{k=1}^{2m+1} C_{2m+1}^k \int_Q |D_a^{2m+1-k} u| |D_a^{2m+1} u| dx dt da. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга, а также неравенство

$$\int_Q (D_a^{2m+1-k} u)^2 dx dt da \leq \delta_0 \int_Q (D_a^{2m+1} u)^2 dx dt da + C(\delta_0, T) \int_Q u^2 dx dt da,$$

в котором δ_0 есть произвольное положительное число (см., например, [3]), подбирая далее число δ_0 малым, и, наконец, используя оценку (24), получим, что следствием (26) будет оценка

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \int_Q (D_a^{2(2m+1)} u)^2 dx dt da + \int_Q (D_a^{2m+1} u)^2 dx dt da \leq \\
 \leq N_5 \int_Q [f^2 + (D_a^{2m+1} f)^2] dx dt da, \quad (27)
 \end{aligned}$$

постоянная N_5 в которой определяется функцией $c(x, t, a)$, областью Ω и числом T .

Оценок (24) и (27) уже вполне достаточно для предельного перехода. Пусть $u^\varepsilon(x, t)$ есть решение краевой задачи (13), (3)–(5), (14)–(16) из пространства $V_{2,2,2(2m+1)}$. Вследствие свойства рефлексивности гильбертова пространства существуют последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ положительных чисел, последовательность $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^\infty$ из семейства $\{u^\varepsilon(x, t)\}$ решений задач (13), (3)–(5), (14)–(16) с $\varepsilon = \varepsilon_m$, и функция $u(x, t)$, притом при $m \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_m &\rightarrow 0, \\
 u_m(x, t, a) &\rightarrow u(x, t, a) \text{ слабо в пространстве } L_2(Q), \\
 u_{mt}(x, t, a) &\rightarrow u_t(x, t, a) \text{ слабо в пространстве } L_2(Q), \\
 \Delta u_m(x, t, a) &\rightarrow \Delta u(x, t, a) \text{ слабо в пространстве } L_2(Q), \\
 \varepsilon_m u_{mtt}(x, t, a) &\rightarrow 0 \text{ слабо в пространстве } L_2(Q), \\
 \varepsilon_m D_a^{2(2m+1)} u_m(x, t, a) &\rightarrow 0 \text{ слабо в пространстве } L_2(Q).
 \end{aligned}$$

Очевидно, что для предельной функции $u(x, t, a)$ выполняется включение $u(x, t, a) \in V_{2,1,2m+1}$, и что для нее выполняются уравнение (2) и краевые условия (3)–(5). Следовательно, функция $u(x, t, a)$ будет искомым решением краевой задачи I. $\square$

Теорема 2. Пусть выполняются условия (10) и (12), а также условие

$$h(0) > 0, \quad h(T) \geq 0. \quad (28)$$

Тогда для любой такой функции $f(x, t, a)$, что $f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f(x, t, a) = 0$ при $t = 0$, $x \in \Omega$, $a \in (0, A)$, $D_a^k f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $k = 1, \dots, 2m+1$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = 0$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = 0, \dots, m$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = A$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = 0, \dots, m-1$, краевая задача II имеет решение $u(x, t, a)$, притом $u(x, t, a) \in V_{2,1,2m+1}$.

Доказательство. Вновь воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (13), также для нее выполняются условия (3)–(6), (16), (17), а также условие

$$u_t(x, t, a)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad a \in (0, A). \quad (29)$$

Используя метод продолжения по параметру (как и при доказательстве теоремы 1), нетрудно установить, что эта задача при выполнении условий теоремы для любого фиксированного числа ε и для функции $f(x, t, a)$, принадлежащей пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x, t, a)$, принадлежащее пространству $V_{2,2,2(2m+1)}$. Далее, для решения $u(x, t, a)$ краевой задачи (13), (3)–(6), (16), (17), (29) будут выполняться равномерная по ε оценки (24) и (27). Эти оценки позволяют найти последовательность $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^\infty$, сходящуюся к решению краевой задачи II, причем предельная функция будет принадлежать пространству $V_{2,1,2m+1}$ и тем самым будет представлять собой требуемое решение. $\square$

Теорема 3. Пусть выполняются условия (10) и (12), а также условие

$$h(0) \leq 0, \quad h(T) < 0. \quad (30)$$

Тогда для любой такой функции $f(x, t, a)$, что $f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f(x, t, a) = 0$ при $t = T$, $x \in \Omega$, $a \in (0, A)$, $D_a^k f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $k = 1, \dots, 2m + 1$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = 0$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = 0, \dots, m$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = A$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = 0, \dots, m - 1$, краевая задача III имеет такое решение $u(x, t, a)$, что $u(x, t, a) \in V_{2,1,2m+1}$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (10) и (12), а также условие

$$h(0) > 0, \quad h(T) < 0. \quad (31)$$

Тогда для любой такой функции $f(x, t, a)$, что $f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f(x, t, a) = 0$ при $t = 0$, $x \in \Omega$, $a \in (0, A)$, $D_a^k f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $k = 1, \dots, 2m + 1$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = 0$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = 0, \dots, m$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = A$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = 0, \dots, m - 1$, краевая задача IV имеет такое решение $u(x, t, a)$, что $u(x, t, a) \in V_{2,1,2m+1}$.

Доказательство теорем 3 и 4 проводится вполне аналогично доказательству теорем 1 и 2, только вместо условия (15) в регуляризованной задаче, соответствующей теореме 3, задается условие

$$u_t(x, t, a)|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad a \in (0, A),$$

в регуляризованной же задаче, соответствующей теореме 4, используются условия (6) и (7).

4. Разрешимость краевых задач V–VIII. Доказательство разрешимости данных краевых задач проводится вполне аналогично доказательству разрешимости краевых задач I–IV, отличие состоит лишь в том, что в соответствующих регуляризованных задачах используются иные краевые условия, и меняются условия на функцию $f(x, t, a)$.

Теорема 5. Пусть выполняются условия (10)–(12). Тогда для любой такой функции $f(x, t, a)$, что $f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t, a) \in L_2(Q)$, $D_a^k f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $k = 1, \dots, 2m + 1$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = 0$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = 0, \dots, m$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = A$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = m + 1, \dots, 2m$, краевая задача V имеет такое решение $u(x, t, a)$, что $u(x, t, a) \in V_{2,1,2m+1}$.

Доказательство. Для положительного числа ε рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (14) и такую, что для нее выполняются условия (3)–(5), (15), (17), а также условие

$$D_a^k u(x, t, a)|_{a=A} = 0, \quad k = 3m + 1, \dots, 4m \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T). \quad (32)$$

Для решений $u(x, t, a)$ этой задачи при фиксированном ε имеют место оценки (20), (22) и (23). Как и ранее, наличие этих оценок обеспечивает существование функции $u(x, t, a)$, принадлежащей пространству $V_{2,2,2(2m+1)}$ и являющейся решением задачи (13), (3)–(5), (15), (16), (32).

Далее, для функции $u(x, t, a)$ имеют место равномерные по ε оценки (22) и (25). Из этих оценок возможность выбора из семейства $\{u^\varepsilon(x, t, a)\}$ последовательности, сходящейся к требуемому решению. $\square$

Теорема 6. Пусть выполняются условия (10), (12) и (28). Тогда для любой функции $f(x, t, a)$, притом $f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f(x, t, a) = 0$ при $t = 0$, $x \in \Omega$, $a \in (0, A)$, $D_a^k f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $k = 1, \dots, 2m + 1$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = 0$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$

при $a = A$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = m + 1, \dots, 2m$, краевая задача VI имеет такое решение $u(x, t, a)$, что $u(x, t, a) \in V_{2,1,2m+1}$.

Теорема 7. Пусть выполняются условия (10), (12) и (30). Тогда для любой такой функции $f(x, t, a)$, что $f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f(x, t, a) = 0$ при $t = T$, $x \in \Omega$, $a \in (0, A)$, $D_a^k f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $k = 1, \dots, 2m + 1$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = 0$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = 0, \dots, m$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = A$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = m + 1, \dots, 2m$, краевая задача VII имеет такое решение $u(x, t, a)$, что $u(x, t, a) \in V_{2,1,2m+1}$.

Теорема 8. Пусть выполняются условия (10), (12) и (31). Тогда для любой такой функции $f(x, t, a)$, что $f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t, a) \in L_2(Q)$, $f(x, t, a) = 0$ при $t = 0$, $t = T$, $x \in \Omega$, $a \in (0, A)$, $D_a^k f(x, t, a) \in L_2(Q)$, $k = 1, \dots, 2m + 1$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = 0$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = 0, \dots, m$, $D_a^k f(x, t, a) = 0$ при $a = A$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $k = m + 1, \dots, 2m$, краевая задача VIII имеет такое решение $u(x, t, a)$, что $u(x, t, a) \in V_{2,1,2m+1}$.

Доказательство теорем 6–8 проводится вполне аналогично доказательству теорем 2–4.

5. Комментарии и дополнения.

- 1) Вопрос о единственности решений краевых задач I–VIII выше не обсуждался. Вместе с тем очевидно, что при выполнении условий теорем 1–8 решение соответствующих краевых задач в пространстве $V_{2,1,2m+1}$ может быть только одно. Этот факт нетрудно установить, анализируя равенство

$$\int_Q Luu \, dx \, dt = \int_Q fu \, dx \, dt.$$

- 2) Оператор Лапласа в уравнении (2) вполне можно заменить общим линейным эллиптическим оператором второго порядка, или же — линейным эллиптическим оператором четного порядка (с заданием естественных дополнительных краевых условий на боковой поверхности).
- 3) Граничное условие (3) в краевых задачах I–VIII также можно пошевелить — заменить, например, условием третьей краевой задачи. Уточним лишь, что не для всех краевых условий можно использовать неравенство (9), и тогда в (12) необходимо считать $d_0 = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
2. Кожанов А.И., Потапова С.В. Задача сопряжения для дифференциальных уравнений нечетного порядка с двумя временными переменными и с меняющимся направлением эволюции // Доклады РАН. — 2017. — 474, № 6. — С. 661–664.
3. Ладыженская О.А., Уралъцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
4. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. — М.: МГУ, 2010.
5. Син А.З. Исследование начально-краевых задач для некоторых модельных ультрапараболических уравнений. — Хабаровск: ТОГУ, 2014.
6. Треногин В.А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
7. Gevrey M. Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique // J. Math. Appl. — 1913. — 9, № 6. — P. 305–478.
8. Fichera G. On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order. Boundary Problems. Differential Equations. — Wisconsin: Univ. of Wisconsin Press. Madison, 1960.

А. И. Кожанов

Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

E-mail: kozhanov@math.nsc.ru



КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ АЛЛЕРА В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© 2018 г. Р. Х. МАКАОВА

Аннотация. Для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения третьего порядка с оператором Аллера в главной части исследуется краевая задача. Доказана теорема существования и единственности решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: краевая задача, гиперболическое уравнение третьего порядка, уравнение Аллера.

AMS Subject Classification: 35L25, 35L80

1. Введение. В евклидовой плоскости точек (x, y) рассмотрим уравнение вида

$$0 = \begin{cases} u_y - au_{xx} - bu_{xy}, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} - c(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

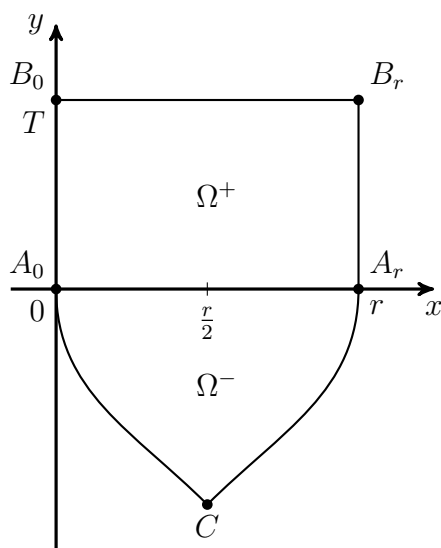
где a, b, m — заданные положительные числа, $|c| \leq m/2$, $u = u(x, y)$ — искомая действительная функция независимых переменных x и y .

Уравнение (1) при $y > 0$ совпадает с уравнением Аллера (см. [19]):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right), \quad (2)$$

а при $y < 0$ — с вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода (см. [11]):

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} - c(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x = 0. \quad (3)$$



Пусть $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$. Через Ω^- обозначим область, ограниченную характеристиками уравнения (3):

$$A_0C : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0,$$

$$A_rC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = r,$$

выходящими из точек $A_0 = (0, 0)$, $A_r = (r, 0)$ и пересекающимися в точке $C = \left(r/2, -[(m+2)r/4]^{2/(m+2)} \right)$ и $A_0A_r = \{(x, 0) : 0 < x < r\}$.

Пусть $B_0 = (0, T)$, $B_r = (r, T)$ и

$$A_0B_0 = \{(0, y) : 0 < y < T\},$$

$$A_rB_r = \{(r, y) : 0 < y < T\},$$

$$\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup (A_0A_r).$$

Известно (см. [13]), что при определенных допущениях уравнение (2) описывает движение почвенной влаги и его решение интерпретируется как влажность почвы с коэффициентом диффузивности a и коэффициентом влагопроводности b в точке x почвенного слоя $0 \leq x \leq r$ в

момент времени $y \in [0, T]$ (см. [8]). Хотя уравнение (2) является уравнением гиперболического типа, некоторые исследователи его относят к уравнениям псевдопараболического типа (см. [20]). Решению различных локальных, нелокальных и смешанных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка посвящены [3, 14, 15, 16, 18, 20].

Уравнение (3) является уравнением гиперболического типа и при $m = 2$ его называют уравнением Бицадзе—Лыкова (см. [9]). При $c = 0$ уравнение (3) переходит в уравнение Геллерстедта, которое находит применение к отысканию оптимальной формы плотины прорези (см. [7]). В [5, 6] были изучены первая и вторая задачи Дарбу для уравнения (3). Исследованию различных краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений посвящены [1, 2, 11].

В данной работе ставится и исследуется вопрос однозначной разрешимости краевой задачи для уравнения (1).

2. Постановка задачи и полученный результат. Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем такую функцию $u = u(x, y)$, что $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^-)$, $u_{xx}, u_{xxy} \in C(\Omega^+)$, $u_{xx}(x, 0), u_{xxy}(x, 0) \in L_1(A_0 A_r)$ и удовлетворяющую уравнению (1).

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1) из класса u_x (где $u_x \in C(\overline{A_0 B_0} \cup \overline{A_r B_r})$), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u_x(0, y) = \nu(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (4)$$

$$u_x(r, y) = \nu_r(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (5)$$

$$u|_{A_0 C} = h(x), \quad 0 \leq x \leq r/2, \quad (6)$$

где $\nu(y), \nu_r(y) \in C^1[0, T]$, $h(x) \in C^3[0, r]$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Регулярное решение задачи (4)–(6) для уравнения (1) существует и оно единственно.

Доказательство. Сначала докажем единственность решения. Положим

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (7)$$

$$u_y(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq r. \quad (8)$$

Из (2), переходя к пределу при $y \rightarrow +0$ с учетом (7) и (8), находим функциональное соотношение между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принесенное из области Ω^+ на линию $y = 0$ в виде

$$\psi(x) - a\varphi''(x) - b\psi''(x) = 0. \quad (9)$$

Проинтегрировав равенство (9) дважды в пределах от 0 до x , получим

$$a\varphi(x) + b\psi(x) - \int_0^x (x - \xi)\psi(\xi)d\xi = a\varphi(0) + b\psi(0) + [a\varphi'(0) + b\psi'(0)]x. \quad (10)$$

Пользуясь формулой нахождения производной по заданному направлению из общего курса дифференциального исчисления (см. [12]), запишем следующую формулу для функции $h(x)$:

$$h'(x) = u_y(x, y)y_x + u_x(x, y), \quad \text{для всех } (x, y) \in A_0 C. \quad (11)$$

Для любых точек $(x, y) \in A_0 C$ из (11) получаем, что

$$u_y(x, y) = \left[u_x \left(x, - \left(\frac{m+2}{2} x \right)^{\frac{2}{2+m}} \right) - h'(x) \right] \left(\frac{m+2}{2} x \right)^{\frac{m}{2+m}}. \quad (12)$$

Так как $u_y(x, 0) \in L_1(A_0 A_r)$, то из формулы (12) верно, что $u_y(0, 0) = \psi(0) = 0$. Тогда с учетом условий согласования: $\varphi(0) = h(0)$, $\varphi'(0) = \nu(0)$, $\psi'(0) = \nu'(0)$, равенство (10) можно переписать в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{a} D_{0x}^{-2} \psi(\xi) - \frac{b}{a} \psi(x) + h(0) + \left[\nu(0) + \frac{b}{a} \nu'(0) \right] x. \quad (13)$$

Здесь D_{0x}^γ — оператор дробного интегриродифференцирования в смысле Римана—Лиувилля по переменной x порядка γ с началом в точке 0 и с концом в точке x , определяемый следующим образом (см. [7]):

$$\begin{aligned} D_{0x}^\gamma v(\xi, y) &= \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_0^x \frac{v(\xi, y) d\xi}{|x - \xi|^{\gamma+1}}, \quad \gamma < 0; \\ D_{0x}^\gamma v(\xi, y) &= \frac{\partial^n}{\partial x^n} D_{0x}^{\gamma-n} v(\xi, y), \quad n-1 < \gamma \leq n, \quad n = 1, 2, \dots; \\ D_{0x}^\gamma v(\xi, y) &= v(x, y), \quad \gamma = 0, \end{aligned}$$

$\Gamma(z)$ — гамма функция Эйлера.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^r u(x, 0) u_y(x, 0) dx = \int_0^r \varphi(x) \psi(x) dx. \quad (14)$$

Из (13) и (14), при однородных краевых условиях (4)–(6), получим

$$I = \frac{1}{a} \int_0^r \psi(x) \int_0^x (x - \xi) \psi(\xi) d\xi dx - \frac{b}{a} \|\psi(x)\|_0^2, \quad (15)$$

где $\|f\|_0^2 = \int_0^r f^2(x) dx$ — норма в $L_2[0, r]$.

Интеграл стоящий в правой части равенства (15) перепишем в виде

$$(\psi, D_{0x}^{-2} \psi)_0 = \int_0^r (r - x) \psi(x) dx \int_0^r \psi(x) dx - \int_0^r \left(\int_0^x \psi(\xi) d\xi \right)^2 dx, \quad (16)$$

где $(f, g)_0 = \int_0^r f(x) g(x) dx$ — есть скалярное произведение в пространстве $L_2[0, r]$.

Далее, проинтегрируем уравнение (2) в пределах от 0 до r , при этом учитывая (4) и (5), имеем

$$\int_0^r u_y(x, y) dx = \int_0^r \frac{\partial}{\partial x} \left[a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] dx = a \nu_r(y) + b \nu'_r(y) - a \nu(y) - b \nu'(y).$$

Отсюда, когда условия (4) и (5) однородные находим, что

$$\int_0^r u_y(x, y) dx = 0, \quad 0 \leq y \leq T. \quad (17)$$

Следовательно, из (16) с учетом условия (17) получаем следующую оценку

$$(\psi, D_{0x}^{-2} \psi)_0 = -\left\| \int_0^x \psi(\xi) d\xi \right\|_0^2 \leq 0,$$

при подстановке которой, из (15) верно

$$I = -\frac{b}{a} \|\psi(x)\|_0^2 - \frac{1}{a} \left\| \int_0^x \psi(\xi) d\xi \right\|_0^2 \leq 0. \quad (18)$$

Для того, чтобы получить соотношение между $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принесенное из области Ω^- на линию $y = 0$, выпишем решение задачи Коши (7), (8) для уравнения (3) (см. [11]):

$$u(x, y) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 \varphi \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt + \\ + \frac{y}{B(1-\alpha, 1-\beta)} \int_0^1 \psi \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] t^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt, \quad |c| < \frac{m}{2}, \quad (19)$$

$$u(x, y) = \varphi \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \right] + \\ + \frac{2y}{m+2} \int_0^1 \psi \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] (1-t)^{-\beta} dt, \quad c = \frac{m}{2}, \quad (20)$$

$$u(x, y) = \varphi \left[x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \right] + \\ + \frac{2y}{m+2} \int_0^1 \psi \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (1-2t) \right] (1-t)^{-\frac{m}{m+2}} dt, \quad c = -\frac{m}{2}, \quad (21)$$

$$\alpha = \frac{m-2c}{2(m+2)}, \quad \beta = \frac{m+2c}{2(m+2)},$$

$B(\gamma, z)$ — бета функция.

Учитывая условие (6), перепишем (19)–(21) в виде:

$$h\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^{1-\alpha-\beta}\Gamma(\alpha)}{B(\alpha, \beta)} D_{0x}^{-\alpha} \left[\xi^{\beta-1} \varphi(\xi) \right] - \\ - \frac{\Gamma(1-\beta)}{B(1-\alpha, 1-\beta)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{\frac{2}{m+2}} D_{0x}^{\beta-1} \left[\xi^{-\alpha} \psi(\xi) \right], \quad |c| < \frac{m}{2}, \quad (22)$$

$$h\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x) - \frac{\Gamma(1-\beta)}{2} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{-\beta} D_{0x}^{\beta-1} \psi(\xi), \quad c = \frac{m}{2}, \quad (23)$$

$$h\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(0) - \frac{1}{2} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{-\alpha} D_{0x}^{-1} \left[\xi^{-\alpha} \psi(\xi) \right], \quad c = -\frac{m}{2}. \quad (24)$$

Для любой функции $v(x) \in L_1[0, r]$ справедливы следующие свойства дробного интегродифференцирования с одинаковыми началами (см. [9]):

$$D_{0x}^{\alpha} D_{0\xi}^{-\beta} v(s) = D_{0x}^{\alpha-\beta} v(\xi), \quad 0 < \alpha \leq \beta; \\ D_{0x}^{\alpha} \xi^{\alpha+\beta} D_{0\xi}^{\beta} v(s) = x^{\beta} D_{0x}^{\alpha+\beta} \xi^{\alpha} v(\xi), \quad \beta < 0, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

с применением которых, из (22)–(24) функция $\psi(x)$ выражается следующим образом:

$$\psi(x) = \frac{c_2}{c_1} D_{0x}^{1-\alpha-\beta} \varphi(x) - \frac{x^\alpha}{c_1} D_{0x}^{1-\beta} h\left(\frac{x}{2}\right), \quad |c| < \frac{m}{2}, \quad (25)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{c_3} D_{0x}^{1-\beta} \varphi(x) - \frac{1}{c_3} D_{0x}^{1-\beta} h\left(\frac{x}{2}\right), \quad c = \frac{m}{2}, \quad (26)$$

$$\psi(x) = -\frac{x^\alpha}{2c_4} h'\left(\frac{x}{2}\right), \quad c = -\frac{m}{2}, \quad (27)$$

$$c_1 = \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}} \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad c_2 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)},$$

$$c_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{-\beta} \Gamma(1-\beta), \quad c_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{-\alpha}.$$

Подставляя найденные значения (25)–(27) функции $\psi(x)$ при $h(x) = 0$, из (14) имеем:

$$I = \frac{c_2}{c_1} \int_0^r \varphi(x) D_{0x}^{1-\alpha-\beta} \varphi(\xi) dx, \quad |c| < \frac{m}{2}, \quad (28)$$

$$I = \frac{1}{c_3} \int_0^r \varphi(x) D_{0x}^{1-\beta} \varphi(\xi) dx, \quad c = \frac{m}{2}, \quad (29)$$

$$I = 0, \quad c = -\frac{m}{2}. \quad (30)$$

Известно (см. [9]), что для любой функции $v(x)$, имеющей абсолютно непрерывный на $[0, r]$ дробный интеграл порядка $1 - \gamma$ с началом в точке 0 и с концом в точке x , который обращается в нуль при $x = 0$ верно, что для любого $\gamma \in [0, 1[$ скалярное произведение $(v, D_{0x}^\gamma v)_0 \geq 0$ и $(v, D_{0x}^\gamma v)_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$. Следовательно, из (28) и (29) имеем, что $I \geq 0$. С другой стороны из (18) получили, что $I \leq 0$. Следовательно $I = 0$ при $-m/2 < c \leq m/2$, которое имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = 0$. Тогда, как видно, из (25) и (26) функция $\psi(x) = 0$. При $c = -m/2$ из (18) и (30) следует, что $\psi(x) = 0$ и тогда из (13) получаем, что и $\varphi(x) = 0$. При этом из формул (19)–(21) имеем, что $u(x, y) \equiv 0$ в области Ω^- .

В области Ω^+ задача для уравнения (2) совпадает со второй краевой задачей для уравнения Аллера, решение которого выписывается в виде (см. [4])

$$u(x, y) = \int_0^r [\varphi(\xi) - b\varphi''(\xi)] G(x, y; \xi, 0) d\xi +$$

$$+ \int_0^y G(x, y; r, \eta) [a\nu_r(\eta) + b\nu'_r(\eta)] d\eta - \int_0^y G(x, y; 0, \eta) [a\nu(\eta) + b\nu'(\eta)] d\eta, \quad (31)$$

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{r} + \frac{2}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + b\mu_n} e^{-\frac{a\mu_n}{1+b\mu_n}(y-\eta)} \cos(\sqrt{\mu_n}\xi) \cos(\sqrt{\mu_n}x), \quad \mu_n = \left(\frac{\pi n}{r}\right)^2.$$

При однородных условиях (4), (5) и (7) из представления (31) находим, что $u(x, y) \equiv 0$ в области Ω^+ . Таким образом, однородная задача соответствующей задаче (4)–(6) для уравнения (1) имеет только тривиальное решение, откуда следует единственность решения исследуемой задачи.

Перейдем к доказательству существования решения исследуемой задачи. Из (22)–(24) верно, что

$$\varphi(x) = \frac{c_1}{c_2} D_{0x}^{\alpha+\beta-1} \psi(\xi) + \frac{x^{1-\beta}}{c_2} D_{0x}^{\alpha} \xi^{\alpha+\beta-1} h\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad |c| < \frac{m}{2}; \quad (32)$$

$$\varphi(x) = c_3 D_{0x}^{\beta-1} \psi(\xi) + h\left(\frac{x}{2}\right), \quad c = \frac{m}{2}; \quad (33)$$

$$\varphi(0) = c_4 D_{0x}^{-1} \xi^{-\alpha} \psi(\xi) + h\left(\frac{x}{2}\right), \quad c = -\frac{m}{2}. \quad (34)$$

Исключая функцию $\varphi(x)$ из (13) и соотношений (32)–(34), относительно функции $\psi(x)$ получим следующие равенства

$$\psi(x) + \frac{ac_1}{bc_2} D_{0x}^{\alpha+\beta-1} \psi(\xi) - \frac{1}{b} D_{0x}^{-2} \psi(\xi) = F_{\alpha}(x), \quad |c| < \frac{m}{2}, \quad (35)$$

$$\psi(x) + \frac{a}{bc_3} D_{0x}^{\beta-1} \psi(\xi) - \frac{1}{b} D_{0x}^{-2} \psi(\xi) = F_0(x), \quad c = \frac{m}{2}, \quad (36)$$

$$\psi(x) = -\frac{x^{\alpha}}{2c_4} h'\left(\frac{x}{2}\right), \quad c = -\frac{m}{2}, \quad (37)$$

где

$$F_{\alpha}(x) = \frac{a}{b} h(0) + \left[\frac{a}{b} \nu(0) + \nu'(0) \right] x - \frac{ax^{1-\beta}}{bc_2} D_{0x}^{\alpha} \xi^{\alpha+\beta-1} h\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Уравнения (35) и (36) представляют собой уравнения Вольтерра второго рода типа свертки. Следовательно при $F_{\alpha}(x), F_0(x) \in L_1[0, r]$ они имеют единственные решения.

В силу представления оператора дробного интегрирования, перепишем уравнение (35) в виде

$$\psi(x) + \frac{ac_1}{bc_2} \left(\psi(x) * x^{-\alpha-\beta} \right) - \frac{1}{b} (\psi(x) * x) = (x * f_{\alpha}(x)). \quad (38)$$

Здесь $(f(x) * g(x)) = \int_0^r f(x - \xi) g(\xi) d\xi$ — есть свертка Лапласа функций $f(x)$ и $g(x)$, $f_{\alpha}(x) = D_{0x}^2 F_{\alpha}(\xi)$.

Пусть $\Psi(p)$ и $F_{\alpha}^*(p)$ являются изображениями функций $\psi(x)$ и $f_{\alpha}(x)$: $\psi(x) \doteq \Psi(p)$, $f_{\alpha}(x) \doteq F_{\alpha}^*(p)$. Применяя преобразование Лапласа, из (38) находим

$$\Psi(p) = \frac{F_{\alpha}^*(p)}{\Delta(p)p^2}, \quad (39)$$

$$\Delta(p) = 1 + \frac{ac_1}{bc_2 p^{1-\alpha-\beta}} - \frac{1}{bp^2}.$$

Так как при достаточно больших значениях p имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} e^{-\Delta(p)t} dt = \frac{1}{\Delta(p)},$$

то равенство (39) можно переписать в виде

$$\Psi(p) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\Delta(p)t}}{p^2} F_{\alpha}^*(p) dt. \quad (40)$$

Найдем обратное преобразование Лапласа к уравнению (40). Для этого воспользуемся известной формулой $x^k \phi(\gamma, k; zx^{\gamma}) \doteq p^{-k} e^{zp^{-\gamma}}$ (см. [17]):

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \left[f_{\alpha}(x) * \phi\left(1 - \alpha - \beta; 1; -\frac{ac_1}{bc_2} tx^{1-\alpha-\beta}\right) * \phi\left(2; 1; \frac{1}{b} tx^2\right) \right] dt, \quad (41)$$

где

$$\phi(\gamma, k; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n! \Gamma(n\gamma + k)} - \text{функция Райта.}$$

Воспользовавшись обозначениями, введенными в [10], получим:

$$G_n^k \equiv G_n^k(x; \lambda_1, \dots, \lambda_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \int_0^{\infty} e^{-t} S_n^k(x; \lambda_1 t, \dots, \lambda_n t; \gamma_1, \dots, \gamma_n) dt,$$

$$S_n^k(x; \lambda_1 t, \dots, \lambda_n t; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = (h_1 * h_2 * \dots * h_n)(x),$$

$$h_i = h_i(x) = x^{k_i-1} \phi(\gamma_i, k_i; \lambda_i t x^{\gamma_i}), \quad i = \overline{1, n}; \quad k = \sum_{i=1}^n k_i,$$

решение (41) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \left[f_{\alpha}(x) * S_2^2 \left(x; -\frac{ac_1}{bc_2} t, \frac{1}{b} t; 1 - \alpha - \beta, 2 \right) \right] dt = \\ &= \int_0^x F_{\alpha}''(\xi) G_2^2 \left(x - \xi; -\frac{ac_1}{bc_2}, \frac{1}{b}; 1 - \alpha - \beta, 2 \right) d\xi. \end{aligned} \quad (42)$$

При $\alpha = 0$ из (42) получаем решение уравнения (36) в виде

$$\psi(x) = \int_0^x F_0''(\xi) G_2^2 \left(x - \xi; -\frac{ac_1}{b}, \frac{1}{b}; 1 - \beta, 2 \right) d\xi. \quad (43)$$

Из (13), (32) и (33) при подстановке формул (37), (42) и (43) функция $\varphi(x)$ находится однозначно. Следовательно, после нахождения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, решение задачи (4)–(6) для уравнения (2) в области Ω^+ находится по формуле (31), а в области Ω^- решение задачи Коши для уравнения (3) выписывается по одной из формул (19)–(21). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балкизов Ж. А. Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Владикавказ. мат. ж. — 2016. — 18, № 2. — С. 19–30.
2. Балкизов Ж. А. Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2016. — № 1. — С. 5–10.
3. Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. ур.-ия. — 1982. — 18, № 2. — С. 280–285.
4. Макаова Р. Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана—Лиувилля // Доклады Адыгской Междунар. АН. — 2015. — 17, № 3. — С. 35–38.
5. Кальменов Т. Ш. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. ур.-ия. — 1971. — 7, № 1. — С. 178–181.
6. Кальменов Т. Ш. О задаче Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. ур.-ия. — 1974. — 10, № 1. — С. 59–68.
7. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
8. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 2012.
9. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.
10. Псху А. В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Математический сборник. — 2011. — 202, № 4. — С. 111–122.
11. Смирнов М. М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. — Минск: Вышэйшая школа, 1977.
12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: 1. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
13. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. — М.: Наука, 1976.

14. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах// Дифференц. ур.-ия. — 1982. — 18, № 4. — С. 689–699.
15. *B. D. Coleman, R. J. Duffin, V. J. Mizel* Instability, Uniqueness, and Nonexistence Theorems for the Equation on a Strip// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1965. — 19. — С. 100–116.
16. *D. Colton* Pseudoparabolic Equations in One Space Variable// Journal of Differ. Equations. — 1972. — 12, № 3. — С. 559–565.
17. *E. M. Wright* The generalized Bessel function of order greater than one// Quart. J. Math. Oxford Ser. — 1940. — 11. — С. 36–48.
18. *G. I. Barenblatt, Iu. P. Zheltov, I. N. Kochina* Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]// PMM. — 1960. — 24, № 5. — С. 852–864.
19. *M. Hallaire* L'eau et la productions vegetable. — Institut National de la Recherche Agronomique, 1964.
20. *R. E. Showalter, T. W. Ting* Pseudoparabolic partial differential equations// SIAM J. Math. Anal. — 1970. — 1, № 1. — С. 1–26.

Р. Х. Макаова

Институт прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН, г. Нальчик
E-mail: makaova.ruzanna@mail.ru



ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2018 г. М. В. ПЛЕХАНОВА

Аннотация. В работе исследованы задачи оптимального управления для линейного вырожденного эволюционного уравнения, не разрешимого относительно дробной производной Герасимова—Капуто. Получены условия разрешимости задач распределенного управления с различными функционалами качества. Применение абстрактных результатов продемонстрировано на примере задачи управления для системы уравнений гравитационно-гироскопических волн.

Ключевые слова: оптимальное управление, вырожденное эволюционное уравнение, дифференциальное уравнение дробного порядка, производная Капуто.

AMS Subject Classification: 49J20, 34G10, 35R11

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	72
2. Сильное решение неоднородной задачи Коши для линейного уравнения дробного порядка	73
3. Распределённое управление для линейного невырожденного уравнения	75
4. Распределённое управление для линейного вырожденного уравнения	77
5. Задача управления для системы гравитационно-гироскопических волн	80
Список литературы	82

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию разрешимости задачи оптимального управления для линейного уравнения в банаховых пространствах

$$\begin{aligned}LD_t^\alpha x(t) &= Mx(t) + f(t) + Bu(t), \quad t \in (t_0, T), \\x^{(k)}(t_0) &= x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \\u &\in \mathcal{U}_\partial, \\J(x, u) &\rightarrow \inf.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — линейный и непрерывный оператор, действующий из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — линейный замкнутый оператор, плотно определенный в $\mathcal{X}$ и действующий в $\mathcal{Y}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$, где $\mathcal{U}$ — также банахово пространство, $f : (t_0, T) \rightarrow \mathcal{Y}$ — заданная функция, $\mathcal{U}_\partial$ — множество допустимых управлений, J — функционал качества. Уравнение (1.1) относится к классу вырожденных относительно дробной производной Герасимова—Капуто D_t^α ($m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$), поскольку предполагается наличие нетривиального ядра у оператора L : $\ker L \neq \{0\}$.

Активное развитие дробного исчисления, связанное с его возможностями в моделировании сложных процессов, привело к многочисленным исследованиям дифференциальных уравнений с

дробной производной (см., например, [5, 7, 10, 14] и ссылки там же). Реже встречаются работы, посвящённые задачам оптимального управления для уравнений дробного порядка (отметим [9, 12]). При этом, как правило, рассматриваются уравнения, разрешимые относительно старшей производной по времени. Таковыми не являются многие неклассические уравнения и системы уравнений математической физики, к примеру, квазистационарная система уравнений фазового поля, уравнения движения жидкости Кельвина—Фойгта, система уравнений Соболева и др. В работах автора исследуются вопросы разрешимости начально-краевых задач и задач оптимального управления для не разрешимых относительно производной по времени уравнений как целого (см. [15, 16, 19]), так и дробного порядка (см. [3, 4, 13, 17, 18]) с различными функционалами качества.

Наличие нетривиального ядра оператора L приводит к невозможности выразить функцию состояния через функцию управления без существенных ограничений на последнюю. Ослабить ограничения на управления позволяет подход, при котором решение задачи понимается как пара состояние-управление. Функционал качества минимизируется на множестве допустимых пар, состоящем из функций управления из множества допустимых управлений и соответствующих функций состояния, разрешающих начальную задачу в сильном смысле.

Применение абстрактных результатов продемонстрировано на примере задачи управления для системы уравнений гравитационно-гироскопических волн.

2. СИЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Для $\beta > 0$, $t > 0$ определим функции $g_\beta(t) = t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$, где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция в точке β . Для удобства будем использовать обозначение $\tilde{g}_\beta(t) = g_\beta(t - t_0)$. Пусть $z \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$ для некоторого $T > t_0$ и банахова пространства $\mathcal{Z}$. Дробный интеграл Римана—Лиувилля порядка $\beta > 0$ определяется следующим образом:

$$J_t^\beta z(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} z(s) ds, \quad t > t_0.$$

Дробная производная Римана—Лиувилля порядка $\alpha > 0$ определяется как

$${}^R D_t^\alpha z(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} z(t),$$

где $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, $D_t^m = \frac{d^m}{dt^m}$ — обычная производная целого порядка. Дробная производная Герасимова—Капуто (см. [1, 11]) порядка $\alpha > 0$ для функции $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ определена как

$$D_t^\alpha z(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(z(t) - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0) g_{k+1}(t - t_0) \right),$$

если существует выражение в правой части этого равенства. В частности, это верно для $z \in C^m([t_0, T]; \mathcal{Z})$, и тогда производную Герасимова—Капуто можно переписать в эквивалентном виде

$$D_t^\alpha z(t) = J_t^{m-\alpha} D_t^m z(t).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.1)$$

для неоднородного дифференциального уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t) \quad (2.2)$$

где $\alpha > 0$, m — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $m \geq \alpha$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $f : (t_0, T) \rightarrow \mathcal{Z}$ при заданном $T > 0$. Сильным решением задачи (2.1), (2.2) назовём функцию $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, для которой

$$J_t^{m-\alpha} \left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1} \right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z}),$$

выполняются условия (2.1) и равенство (2.2) почти всюду на (t_0, T) .

Доказательства следующих теорем можно найти в [3, 4].

Теорема 2.1. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $f \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$. Тогда при любых $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, существует единственное сильное решение задачи (2.1), (2.2); при этом оно имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(A(t - t_0)^\alpha) z_k + \int_{t_0}^t (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(A(t - s)^\alpha) f(s) ds.$$

Здесь и далее

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$$

— функция Миттаг-Лёффлера.

Следствие 2.1. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $f \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда единственное сильное решение z задачи (2.1), (2.2) удовлетворяет неравенству

$$\|z\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})} \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + a_m \|f\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Z})}$$

при некоторых константах $a_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots, m$.

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. L -Резольвентным множеством и L -спектром оператора M называются соответственно множества

$$\rho^L(M) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X}) \right\}, \quad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M).$$

Очевидно, что если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$, то $\rho^L(M) = \emptyset$. Введем обозначения

$$R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}.$$

Оператор M называется (L, σ) -ограниченным, если L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M является ограниченным множеством. В случае (L, σ) -ограниченности оператора M проекторы на пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно можно задать в виде

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}),$$

где γ — некоторый замкнутый гладкий контур в комплексной плоскости, ограничивающий область, содержащую весь L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M . Введем обозначения

$$\mathcal{X}^0 = \ker P, \quad \mathcal{X}^1 = \operatorname{im} P, \quad \mathcal{Y}^0 = \ker Q, \quad \mathcal{Y}^1 = \operatorname{im} Q.$$

Тогда

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1.$$

Через M_k (соответственно, L_k) будем обозначать сужение оператора M (соответственно, L) на $D_{M_k} = \mathcal{X}^k \cap D_M$ (соответственно, на $\mathcal{X}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 2.2 (см. [20, с. 90-91]). Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда

- (i) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $M_0 \in Cl(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$.

Введем обозначения $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $G = M_0^{-1} L_0$. При $p \in \mathbb{N}_0$ оператор M называется (L, p) -ограниченным, если он (L, σ) -ограничен, $G^p \neq \mathbb{O}$, $G^{p+1} = \mathbb{O}$.

Рассмотрим задачу Коши

$$x^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2.3}$$

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + f(t), \quad t \in (t_0, T), \tag{2.4}$$

Сильным решением задачи Коши (2.3), (2.4) называется функция $x \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Y}) \cap L_q(t_0, T; D_M)$, для которой

$$J_t^{m-\alpha} \left(x - \sum_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1} \right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Y}),$$

при этом выполняются условия (2.3) и для почти всех $t \in (t_0, T)$ выполняется равенство (2.4).

Теорема 2.3. Пусть оператор M является (L, p) -ограниченным, а также выполнены условия $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $f \in L_q(t_0, T; \mathcal{Y})$,

$$(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I - Q)f \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X}), \quad D_t^\alpha (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I - Q)f \in L_q(t_0, T; \mathcal{X}),$$

при $k = 0, 1, \dots, p$,

$$\sum_{k=0}^p D_t^l \Big|_{t=t_0} (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I - Q)f(t) = -(I - P)x_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1.$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (2.3), (2.4); при этом оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (t - t_0)^k X_{\alpha, k+1}(t - t_0) x_k + \int_{t_0}^t (t - s)^{\alpha-1} X_{\alpha, \alpha}(t - s) L_1^{-1} Q f(s) ds - \\ - \sum_{k=0}^p (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I - Q)f(t).$$

Здесь

$$X_{\alpha, \beta}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) E_{\alpha, \beta}(\mu t^\alpha) d\mu.$$

3. РАСПРЕДЕЛЁННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО НЕВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Сначала коротко сформулируем некоторые общие результаты теории управления (см. [8]), которые в дальнейшем будем использовать.

Пусть $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{V}$ — линейные нормированные пространства, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{U}$ — рефлексивные банаховы пространства, причём $\mathfrak{Y}_1$ непрерывно вложено в $\mathfrak{Y}$. Рассмотрим следующую задачу управления:

$$\mathfrak{L}(y, u) + \mathfrak{F}_0 = 0, \quad (3.1)$$

$$u \in \mathfrak{U}_{\partial}, \quad (3.2)$$

$$J(y, u) \rightarrow \inf. \quad (3.3)$$

Здесь $\mathfrak{U}_{\partial}$ — непустое, замкнутое, выпуклое подмножество пространства управлений $\mathfrak{U}$, функционал стоимости $J(y, u)$ — выпуклый, полунепрерывный снизу и ограниченный снизу на $\mathfrak{Y} \times \mathfrak{U}_{\partial}$, линейный оператор $\mathfrak{L} : \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$ непрерывен, $\mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{V}$ — заданный вектор.

Множеством $\mathfrak{W}$ допустимых пар (y, u) задачи (3.1)–(3.3) называется множество пар $(y, u) \in \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U}$, удовлетворяющих соотношениям (3.1), (3.2), для которых $J(y, u) < \infty$.

Предполагается выполнение условия нетривиальности (т.е. $\mathfrak{W} \neq \emptyset$) и коэрцитивность функционала J , означающая, что для любого $R > 0$ множество $\{(y, u) \in \mathfrak{W} : J(y, u) \leq R\}$ ограничено в $\mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U}$.

Решением задачи (3.1)–(3.3) называется пара $(\hat{y}, \hat{u}) \in \mathfrak{W}$, для которой

$$J(\hat{y}, \hat{u}) = \inf_{(y, u) \in \mathfrak{W}} J(y, u).$$

Теорема 3.1 (см. [8]). Пусть выполнены все условия, сформулированные в данном разделе. Тогда задача (3.1)–(3.3) имеет решение $(\hat{y}, \hat{u}) \in \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U}_{\partial}$. Если функционал J является строго выпуклым на $\mathfrak{Y} \times \mathfrak{U}_{\partial}$, то это решение единственно.

Пусть $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}$ — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})$, $f : (t_0, T) \rightarrow \mathcal{Z}$. Рассмотрим задачу управления

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t) + Bu(t), \quad t \in (t_0, T), \quad (3.4)$$

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.5)$$

$$u \in \mathcal{U}_\partial, \quad (3.6)$$

$$J(z, u) \rightarrow \inf, \quad (3.7)$$

где $\mathcal{U}_\partial$ — множество допустимых управлений, J — функционал качества, $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leq m$.

Решения задачи (3.4), (3.5) будем искать в пространстве

$$\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \equiv \left\{ z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z}) : J_t^{m-\alpha} \left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1} \right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z}) \right\}.$$

Лемма 3.1 (см. [3]). $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$ является банаховым пространством с нормой

$$\|z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})} = \|z\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})} + \|D_t^\alpha z\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Z})}.$$

При $q(m-\alpha) > 1$ пространство Соболева $W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z})$ непрерывно вложено в $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$.

Введем в рассмотрение непрерывный оператор $\gamma_0 : C([t_0, T]; \mathcal{Z}) \rightarrow \mathcal{Z}$, $\gamma_0 x = x(t_0)$. Естественно, он является непрерывным и на пространстве $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$, т.е. $\gamma_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}); \mathcal{Z})$.

Множество пар (z, u) будем называть множеством допустимых пар $\mathfrak{W}$ задачи (3.4)–(3.7), если $z \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$ — сильное решение задачи (3.4), (3.5) с $u \in \mathcal{U}_\partial$ и $J(z, u) < \infty$. Задача (3.4)–(3.7) заключается в нахождении пар $(\hat{z}, \hat{u}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующих функционал качества:

$$J(\hat{z}, \hat{u}) = \inf_{(z, u) \in \mathfrak{W}} J(z, u).$$

Теорема 3.2. Пусть $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $f \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$, $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, в банахово пространство $\mathfrak{Y} \subset L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$ непрерывно вложено $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$, функционал качества J — выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathfrak{Y} \times L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, коэрцитивный на пространстве $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует решение $(\hat{z}, \hat{u}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (3.4)–(3.7). Если функционал J является строго выпуклым на $\mathfrak{Y} \times L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, то решение задачи (3.4)–(3.7) единственно.

Доказательство. По теореме 2.1 существует единственное сильное решение задачи (3.4), (3.5) при любых $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $u \in \mathcal{U}_\partial$. Поэтому множество допустимых пар $\mathfrak{W}$ непусто. Положим

$$\mathfrak{Y}_1 = \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}), \quad \mathfrak{U} = L_q(t_0, T; \mathcal{U}), \\ \mathfrak{V} = L_q(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{Z}^m, \quad \mathfrak{F} = -(f, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) \in \mathfrak{V};$$

Введем линейный оператор

$$\mathfrak{L} : \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{L}(z, u) = (D_t^\alpha z - Az - Bu, \gamma_0 z, \gamma_0 z^{(1)}, \dots, \gamma_0 z^{(m-1)}).$$

Непрерывность оператора $\mathfrak{L}$ следует из неравенств

$$\begin{aligned} & \left\| \left(D_t^\alpha z - Az - Bu, \gamma_0 z, \gamma_0 z^{(1)}, \dots, \gamma_0 z^{(m-1)} \right) \right\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{Z}^m} \leq \\ & \leq C_1 \left(\|z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})} + \|u\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})} + \|z\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})} \right) \leq 2C_1 \|(z, u)\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathfrak{U}}. \end{aligned}$$

По теореме 3.1 получим требуемое. $\square$

Выбор пространства $\mathfrak{Y}$ при применении теоремы 3.2 определяется видом функционала J . Проиллюстрируем это на следующих примерах.

Пример 3.1. Для функционала

$$J_q(z, u) = \|z - z_d\|_{W_q^l(t_0, T; \mathcal{Z})}^q + \delta \|u - u_d\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})}^q \rightarrow \inf \quad (3.8)$$

при $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $z_d \in W_q^l(t_0, T; \mathcal{Z})$, $u_d \in L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, $\delta > 0$ докажем следующее утверждение.

Следствие 3.1. Пусть $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $f \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$, $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует решение $(\hat{z}, \hat{u}) \in \mathcal{Q}_{\alpha, q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (3.4)–(3.6), (3.8). Если $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}$ — гильбертовы пространства, а $q = 2$, то решение задачи (3.4)–(3.6), (3.8) единственно.

Доказательство. Возьмем $\mathfrak{Y} = W_q^l(t_0, T; \mathcal{Z})$ и проверим выполнение условий теоремы 3.2. Имеем в силу уравнения (3.4) и следствия 2.1

$$\begin{aligned} \|z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha, q}(t_0, T; \mathcal{Z})} + \|u\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})} &= \|z\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})} + \|D_t^\alpha z\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Z})} + \|u\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})} \leq \\ &\leq C_1 \|z\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})} + \|f\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Z})} + C_2 \|u\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})} \leq \\ &\leq C_3 \left(\|f\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Z})} + \|u\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})} + \sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} \right) \leq C_4 (J(z, u) + C_5)^{1/q} + C_6. \end{aligned}$$

Отсюда следует коэрцитивность функционала на $\mathfrak{Y}_1 \times \mathcal{U}$.

Если $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}$ — гильбертовы пространства, функционал J_2 из (3.8) является строго выпуклым как квадрат нормы в гильбертовом пространстве $W_2^l(t_0, T; \mathcal{Z}) \times L_2(t_0, T; \mathcal{U})$. По теореме 3.1 получим единственность решения задачи (3.4)–(3.6), (3.8). $\square$

Пример 3.2. Рассмотрим задачу с терминальным функционалом

$$J_0(z, u) = \|z(T) - z_d\|_{\mathcal{Z}}^2 + \delta \|u - u_d\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})}^q \rightarrow \inf \quad (3.9)$$

при $z_d \in \mathcal{Z}$, $u_d \in L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, $\delta > 0$.

Замечание 3.1. Функционал $J_0(z) = \|z(T) - z_d\|_{\mathcal{Z}}^2$ с заданным $z_d \in \mathcal{Z}$, очевидно, является выпуклым на пространстве $C([t_0, T]; \mathcal{Z})$.

Следствие 3.2. Пусть $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $f \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$, $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует решение $(\hat{z}, \hat{u}) \in \mathcal{Q}_{\alpha, q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (3.4)–(3.6), (3.9).

Доказательство. Возьмем $\mathfrak{Y} = \mathcal{Q}_{\alpha, q}(t_0, T; \mathcal{Z})$. Выпуклость функционала J_0 следует из замечания 3.1, его коэрцитивность доказывается, как и для следствия 3.1, с помощью следствия 2.1. $\square$

4. РАСПРЕДЕЛЁННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — (L, p) -ограниченный оператор, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$, $f : (t_0, T) \rightarrow \mathcal{Y}$. Рассмотрим задачу

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + f(t) + Bu(t), \quad t \in (t_0, T), \quad (4.1)$$

$$x^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4.2)$$

$$u \in \mathcal{U}_\partial, \quad (4.3)$$

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad (4.4)$$

где $\mathcal{U}_\partial$ — множество допустимых управлений, J — функционал качества, $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leq m$.

Принимая во внимание вид уравнения (4.1), решения будем искать в пространстве

$$\mathcal{Z}_{\alpha,q} = \left\{ x \in L_q(t_0, T; D_M) \cap C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X}) : \right. \\ \left. J_t^{m-\alpha} \left(x - \sum_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1} \right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{X}) \right\}, \quad q > 1.$$

Лемма 4.1 (см. [3]). $\mathcal{Z}_{\alpha,q}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}} = \|x\|_{L_q(t_0, T; D_M)} + \|x\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})} + \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{X})}.$$

Множество пар (x, u) будем называть множеством допустимых пар $\mathfrak{W}$ задачи (4.1)–(4.4), если $x \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}$ — сильное решение задачи (4.1), (4.2) с управлением $u \in \mathcal{U}_\partial$ и $J(x, u) < \infty$. Задача оптимального управления (4.1)–(4.4) состоит в нахождении пар $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующих функционал качества

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \inf_{(x, u) \in \mathfrak{W}} J(x, u).$$

Теорема 4.1. Пусть $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M является (L, p) -ограниченным,

$$f \in L_q(t_0, T; \mathcal{Y}), \quad (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I - Q)f \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X}), \\ D_t^\alpha (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I - Q)f \in L_q(t_0, T; \mathcal{X}) \quad \text{при } k=0, 1, \dots, p,$$

$\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество в $L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, содержащее u_0 , для которого

$$(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I - Q)Bu_0 \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X}), \\ D_t^\alpha (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I - Q)Bu_0 \in L_q(t_0, T; \mathcal{X}) \quad \text{при } k = 0, 1, \dots, p,$$

$x_k \in \mathcal{X}$ при $k = 0, 1, \dots, m-1$, при этом выполняются условия

$$\sum_{k=0}^p D_t^k \Big|_{t=0} (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I - Q)(f(t) + Bu_0(t)) = -(I - P)x_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1;$$

$\mathcal{Z}_{\alpha,q}$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathfrak{Y} \subset L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$; функционал качества J является выпуклым, ограниченным снизу и полунепрерывным снизу на $\mathfrak{Y} \times L_q(t_0, T; \mathcal{U})$ и коэрцитивным на $\mathcal{Z}_{\alpha,q} \times L_q(t_0, T; \mathcal{U})$. Тогда существует решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q} \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (4.1)–(4.4). Если функционал J является строго выпуклым на $\mathfrak{Y} \times L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, то решение задачи (4.1)–(4.4) единственно.

Доказательство. По теореме 2.3 существует сильное решение задачи (4.1), (4.2) при $u = u_0 \in \mathcal{U}_\partial$, поэтому множество $\mathfrak{W}$ непусто. Положим

$$\mathfrak{Y}_1 = \mathcal{Z}_{\alpha,q}, \quad \mathfrak{U} = L_q(t_0, T; \mathcal{U}), \quad \mathfrak{V} = L_q(t_0, T; \mathcal{Y}) \times \mathcal{X}^m, \quad \mathfrak{F} = -(f, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}).$$

Введем линейный оператор

$$\mathfrak{L} : \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{L}(x, u) = \left(LD_t^\alpha x - Mx - Bu, \gamma_0 x, \gamma_0 x^{(1)}, \dots, \gamma_0 x^{(m-1)} \right);$$

его непрерывность линейного оператора следует из неравенств

$$\left\| \left(LD_t^\alpha x - Mx - Bu, \gamma_0 x, \gamma_0 x^{(1)}, \dots, \gamma_0 x^{(m-1)} \right) \right\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Y}) \times \mathcal{X}^m} \leq \\ \leq C_1 \left(\|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}} + \|u\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})} + \|x\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})} \right) \leq C_2 \|(x, u)\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q} \times L_q(t_0, T; \mathcal{U})}.$$

По теореме 3.1 получим требуемое утверждение. $\square$

Рассмотрим функционал

$$J(x, u) = \|x - x_d\|_{W_q^l(t_0, T; \mathcal{X})}^q + \delta \|u - u_d\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{U})} \rightarrow \inf \quad (4.5)$$

с $x_d \in W_q^l(t_0, T; \mathcal{X})$, $u_d \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{U})$, $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $\delta > 0$.

Следствие 4.1. Пусть $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, оператор M является $(L, 0)$ -ограниченным,

$$f \in L_q(t_0, T; \mathcal{Y}), \quad (I - Q)f \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X}), \quad D_t^\alpha(I - Q)f \in L_q(t_0, T; \mathcal{X}),$$

$\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{U})$, содержащее u_0 , причем

$$M_0^{-1}(I - Q)Bu_0 \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X}), \quad D_t^\alpha M_0^{-1}(I - Q)Bu_0 \in L_q(t_0, T; \mathcal{X}),$$

и выполняются условия

$$D_t^l \Big|_{t=t_0} M_0^{-1}(I - Q)(f(t) + Bu_0(t)) = -(I - P)x_l, \quad l = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Тогда существует решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q} \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (4.1)–(4.3), (4.5) при $l \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$.

Доказательство. Возьмем пространства $\mathfrak{U} = \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{U})$, $\mathfrak{Y} = W_q^l(t_0, T; \mathcal{X})$ и докажем коэрцитивность функционала J в пространстве $\mathcal{Z}_{\alpha,q} \times \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{U})$. Имеем

$$\begin{aligned} \|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}} + \|u\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{U})} &\leq \\ &\leq C_1 \|x\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})} + C_2 \|u\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{U})} + \|f\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Y})} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k \|x_k\|_{\mathcal{X}} + C_3 \|u\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{U})} + C_4 \|f\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Y})} + C_5 \|(I - Q)f\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Y})} \leq \\ &\leq C_6 J(x, u) + C_7, \end{aligned}$$

откуда следует требуемое. По теореме 4.1 утверждения данного следствия верно. $\square$

Пусть задан функционал

$$J(x, u) = \|x - x_d\|_{W_q^l(t_0, T; \mathcal{X})}^q + \delta \|u - u_d\|_{W_q^m(t_0, T; \mathcal{U})}^q \rightarrow \inf \quad (4.6)$$

при $x_d \in W_q^l(t_0, T; \mathcal{X})$, $l \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$, $u_d \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{U})$, $\delta > 0$.

Следствие 4.2. Пусть $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, оператор M является $(L, 0)$ -ограниченным,

$$f \in L_q(t_0, T; \mathcal{Y}), \quad (I - Q)f \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X}), \quad D_t^\alpha(I - Q)f \in L_q(t_0, T; \mathcal{X}),$$

$\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $W_q^m(t_0, T; \mathcal{U})$, содержащее u_0 , причем

$$M_0^{-1}(I - Q)Bu_0 \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X}), \quad D_t^\alpha M_0^{-1}(I - Q)Bu_0 \in L_q(t_0, T; \mathcal{X})$$

и выполняются условия

$$D_t^l \Big|_{t=t_0} M_0^{-1}(I - Q)(f(t) + Bu_0(t)) = -(I - P)x_l, \quad l = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Тогда существует решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q} \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (4.1)–(4.3), (4.6). Если $q = 2$, а $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ — гильбертовы пространства, то решение задачи (4.1)–(4.3), (4.6) единственно.

Для доказательства требуется выбрать пространства $\mathfrak{U} = W_q^m(t_0, T; \mathcal{U})$, $\mathfrak{Y} = W_q^l(t_0, T; \mathcal{X})$ и показать коэрцитивность функционала J на $\mathcal{Z}_{\alpha,q} \times \mathfrak{U}$.

Аналогичным образом найдём условия разрешимости для задачи с терминальным функционалом качества

$$J_0(x, u) = \|x(T) - x_d\|_{\mathcal{X}}^2 + \delta \|u - u_d\|_{W_q^m(t_0, T; \mathcal{U})}^q \rightarrow \inf \quad (4.7)$$

при $x_d \in \mathcal{X}$, $u_d \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{U})$, $\delta > 0$.

Следствие 4.3. Пусть $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, оператор M является $(L, 0)$ -ограниченным,

$$f \in L_q(t_0, T; \mathcal{Y}), \quad (I - Q)f \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X}), \quad D_t^\alpha(I - Q)f \in L_q(t_0, T; \mathcal{X}),$$

$\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $W_q^m(t_0, T; \mathcal{U})$, содержащее u_0 , причем

$$M_0^{-1}(I - Q)Bu_0 \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X}), \quad D_t^\alpha M_0^{-1}(I - Q)Bu_0 \in L_q(t_0, T; \mathcal{X})$$

и выполняются условия

$$D_t^l \Big|_{t=0} M_0^{-1}(I - Q)(f(t) + Bu_0(t)) = -(I - P)x_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1.$$

Тогда существует решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q} \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (4.1)–(4.3), (4.7).

5. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГРАВИТАЦИОННО-ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ВОЛН

Пусть $d = 3$. Рассмотрим систему уравнений

$$D_t^\alpha v - [v, \bar{\omega}] + \rho_0^{-1}r + g\rho_0^{-1}e_3\rho_1 = f, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (5.1)$$

$$D_t^\alpha \rho_1 - 2\beta\rho_0 v_3 = h, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (5.2)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (5.3)$$

снабженную начальными условиями

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x, 0) = \varphi_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad x \in \Omega, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial^k \rho_1}{\partial t^k}(x, 0) = \psi_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad x \in \Omega, \quad (5.5)$$

и краевым условием

$$\langle v, n \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (5.6)$$

При $\alpha = 1$ она описывает малые колебания идеальной несжимаемой равномерно вращающейся относительно вертикальной оси Ox_3 жидкости, которая экспоненциально стратифицирована (см. [2]), т.е. её плотность в невозмущенном состоянии равна $\rho_0(x_3) = Ae^{-2\beta x_3}$, $A, \beta > 0$. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей. Вектор-функции скорости жидкости $v = (v_1, v_2, v_3)$, градиента динамического давления $r = (r_1, r_2, r_3) = (p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3})$ и вызванного движением жидкости изменения плотности ρ_1 неизвестны. Заданы векторы $e_3 = (0, 0, 1)$, $\bar{\omega} = \omega e_3 = (0, 0, \omega)$, где ω — удвоенная угловая скорость, g — ускорение свободного падения, а также единичный вектор внешней нормали $n = (n_1, n_2, n_3)$ к границе $\partial\Omega$ области Ω . Как и прежде, m — наименьшее натуральное число, превосходящее число $\alpha > 0$.

Пусть $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$, $\mathbb{H}_\sigma$ — замыкание линейал/а $\mathfrak{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{H}_\pi$ — его ортогональное дополнение в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

Определим оператор $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma; \mathbb{L}_2)$ по правилу $Bz = [z, \bar{\omega}]$, где $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$, $P_3 \in \mathcal{L}(\mathbb{L}_2; L_2(\Omega))$ — проектор на ось Ox_3 : $P_3(z_1, z_2, z_3) = z_3$; $E_3 \in \mathcal{L}(L_2(\Omega); \mathbb{L}_2)$ — оператор умножения функции на e_3 : $E_3 z = (0, 0, z)$. Будут использоваться также операторы из $\mathbb{L}_2$ в $\mathbb{L}_2$ умножения вектор-функции на заданную гладкую функцию, например, ρ_0 или ρ_0^{-1} , которые будут обозначаться символами самих функций.

Уравнение несжимаемости (5.3) и краевое условие (5.6) заменим уравнением

$$\Pi v(\cdot, t) = 0, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad (5.7)$$

(см. [6] по этому поводу). Оно означает, что скорость v заведомо ищется в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$. Поскольку $r \in \mathbb{H}_\pi$ — градиент динамического давления, возьмем

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 \times L_2(\Omega) = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times L_2(\Omega), \quad (5.8)$$

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Sigma B & \mathbb{O} & -g\Sigma\rho_0^{-1}E_3 \\ \Pi B & -\rho_0^{-1}I & -g\Pi\rho_0^{-1}E_3 \\ 2\beta\rho_0 P_3 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}). \quad (5.9)$$

Лемма 5.1. Пусть пространства и операторы заданы формулами (5.8), (5.9). Тогда оператор M является $(L, 0)$ -ограниченным, проекторы имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \rho_0 \Pi B & \mathbb{O} & -\frac{g}{\mu} \rho_0 \Pi E_3 \rho_0^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mu L - M &= \begin{pmatrix} \mu - \Sigma B & \mathbb{O} & g \Sigma E_3 \rho_0^{-1} \\ -\Pi B & \rho_0^{-1} & g \Pi E_3 \rho_0^{-1} \\ -2\beta \rho_0 P_3 & \mathbb{O} & \mu \end{pmatrix}, \\ (\mu L - M)^{-1} &= \begin{pmatrix} D^{-1} & \mathbb{O} & -\frac{g}{\mu} D^{-1} \Sigma E_3 \rho_0^{-1} \\ \rho_0 \Pi \left(B - \frac{2\beta g}{\mu} E_3 P_3 \right) D^{-1} & \rho_0 & A_{23} \\ \frac{2\beta}{\mu} \rho_0 P_3 D^{-1} & \mathbb{O} & \frac{1}{\mu} - \frac{2\beta g}{\mu^2} \rho_0 P_3 D^{-1} \Sigma E_3 \rho_0^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$A_{23} = \frac{g}{\mu} \rho_0 \Pi \left(\frac{2\beta g}{\mu} E_3 P_3 D^{-1} \Sigma - B D^{-1} \Sigma - 1 \right) E_3 \rho_0^{-1}, \quad D = \mu - \Sigma B + \frac{2\beta g}{\mu} \Sigma E_3 P_3.$$

Оператор $D^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)$ существует при $|\mu| > \max\{1, |\omega| + 2\beta g\}$, поскольку

$$\|\Sigma B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)} = |\omega|, \quad \|\Sigma E_3 P_3\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)} = 1.$$

Все остальные операторы в полученном выражении для $(\mu L - M)^{-1}$ ограничены. Поэтому оператор M является (L, σ) -ограниченным. При этом

$$\begin{aligned} R_\mu^L(M) &= \begin{pmatrix} D^{-1} & \mathbb{O} & -\frac{g}{\mu} D^{-1} \Sigma E_3 \rho_0^{-1} \\ \rho_0 \Pi \left(B - \frac{2\beta g}{\mu} E_3 P_3 \right) D^{-1} & \mathbb{O} & A_{23} \\ \frac{2\beta}{\mu} \rho_0 P_3 D^{-1} & \mathbb{O} & \frac{1}{\mu} - \frac{2\beta g}{\mu^2} \rho_0 P_3 D^{-1} \Sigma E_3 \rho_0^{-1} \end{pmatrix}, \\ L_\mu^L(M) &= \begin{pmatrix} D^{-1} & \mathbb{O} & -\frac{g}{\mu} D^{-1} \Sigma E_3 \rho_0^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \frac{2\beta}{\mu} \rho_0 P_3 D^{-1} & \mathbb{O} & \frac{1}{\mu} - \frac{2\beta g}{\mu^2} \rho_0 P_3 D^{-1} \Sigma E_3 \rho_0^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Используя определения проекторов P и Q и теорию вычетов, получим равенства (5.10). Так как $L(I - P) = \mathbb{O}$, оператор M является $(L, 0)$ -ограниченным. $\square$

Теперь, ссылаясь на теорему 2.3, получим следующий результат.

Теорема 5.1. Пусть $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $f = (f_1, f_2, f_3) \in L_q(0, T; \mathbb{L}_2)$, $h \in L_q(0, T; L_2(\Omega))$. Тогда для любых $\varphi_k \in \mathbb{H}_\sigma$, $\psi_k \in L_2(\Omega)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, задача (5.1), (5.2), (5.4), (5.5), (5.7) имеет единственное сильное решение на $(0, T)$.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$D_t^\alpha v - [v, \bar{w}] + \rho_0^{-1} r + g \rho_0^{-1} e_3 \rho_1 - u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (5.11)$$

$$D_t^\alpha \rho_1 - 2\beta \rho_0 v_3 + w = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (5.12)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (5.13)$$

$$\|u\|_{W_q^m(0, T; \mathbb{L}_2)} + \|w\|_{W_q^m(0, T; L_2(\Omega))} \leq R, \quad (5.14)$$

$$J_q(v, r, \rho_1, u, w) = \|v - v_d\|_{L_q(0, T; \mathbb{H}_\sigma)}^q + \|r - r_d\|_{L_q(0, T; \mathbb{H}_\pi)}^q + \|\rho_1 - \rho_{1d}\|_{L_q(0, T; L_2(\Omega))}^q + \\ + \delta \|u - u_d\|_{W_q^m(0, T; \mathbb{L}_2)}^q + \delta \|w - w_d\|_{W_q^m(0, T; L_2(\Omega))}^q \rightarrow \inf, \quad (5.15)$$

снабжённую условиями (5.4), (5.5), (5.6). Результат о разрешимости задачи управления получим, выбрав $\mathcal{U} = \mathbb{L}_2 \times L_2(\Omega)$.

Теорема 5.2. Пусть $\alpha > 0$, $\delta \geq 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$. Тогда для любых $\varphi_k \in \mathbb{H}_\sigma$, $\psi_k \in L_2(\Omega)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, существует решение $(\hat{v}, \hat{r}, \hat{\rho}_1, \hat{u}, \hat{w}) \in \mathcal{Z}_{\alpha, q} \times \mathcal{U}_\delta$ задачи (5.4)–(5.6), (??)–(5.15). При $\delta > 0$, $q = 2$ решение задачи (5.4)–(5.6), (??)–(5.15) единственно.

Доказательство. Здесь $\mathcal{U}_\delta$ — множество пар функций $(u, w) \in \mathbb{L}_2 \times L_2(\Omega)$, удовлетворяющих условию (5.14). Отметим при этом, что поскольку оператор M в данной задаче ограничен, то $\mathcal{Z}_{\alpha, q} = \mathcal{Q}_{\alpha, q}(0, T; \mathcal{X})$.

Утверждение теоремы при $\delta > 0$ вытекает из следствия 4.2. Единственность решения при $q = 2$ следует из того, что используемые здесь пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{U}$ в таком случае гильбертовы.

В случае $\delta = 0$ учитывается ограниченность множества $\mathcal{U}_\delta$ допустимых управлений в соответствующей задаче без учёта затрат на управление. Единственность решения при этом надо исследовать отдельно. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // Прикл. мат. мех. — 1948. — 12. — С. 529–539.
2. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
3. Плеханова М. В. Разрешимость задач управления для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Челяб. физ.-мат. ж. — 2017. — 2, № 1. — С. 53–66.
4. Плеханова М. В. Сильные решения нелинейного вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка // Сиб. ж. чистой и прикл. мат. — 2016. — 16, № 3. — С. 61–74.
5. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
6. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — 18. — С. 3–50.
7. Учайкин В. В. Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
8. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
9. Agrawal O. P. A quadratic numerical scheme for fractional optimal control problems // J. Dynam. Syst. Measurement Control. — 2008. — 130, № 1. — С. 011010.
10. Bajlekova E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / Ph.D. thesis. — Eindhoven: Eindhoven Univ. of Technology, 2001.
11. Caputo M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent, II // Geophys. J. Roy. Astronom. Soc. — 1967. — 13. — С. 529–539.
12. Debbouche A., Torres D. F. M. Sobolev-type fractional dynamic equations and optimal multi-integral controls with fractional nonlocal conditions // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2015. — 18. — С. 95–121.
13. Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., Plekhanova M. V. Equations in Banach spaces with a degenerate operator under a fractional derivative // Differ. Equations. — 2015. — 51, № 10. — С. 1360–1368.
14. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam–Boston–Heidelberg: Elsevier Science Publ., 2006.
15. Plekhanova M. V. Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations // J. Comput. Appl. Math. — 2017. — 312. — С. 39–46.

16. *Plekhanova M. V.* Mixed control problem for the linearized quasi-stationary phase field system of equations// *Mat. Sci. Forum.* — 2016. — 845. — С. 170–173.
17. *Plekhanova M. V.* Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative// *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2017. — 40, № 17. — С. 6138–6146.
18. *Plekhanova M. V.* Sobolev-type equations of time-fractional order with periodical boundary conditions// *Int. Conf. on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2016).* AIP Conf. Proc. — 2016. — 1759. — С. 020101-1–020101-4.
19. *Plekhanova M. V.* Strong solutions of quasilinear equations in Banach spaces not solvable with respect to the highest-order derivative// *Discr. Contin. Dynam. Syst. Ser. S.* — 2016. — 9, № 3. — С. 833–847.
20. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev-Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht–Boston: VSP, 2003.

М. В. Плеханова

Челябинский государственный университет;

Южно-Уральский государственный университет

(национальный исследовательский университет), г. Челябинск

E-mail: mariner79@mail.ru



О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДРОБНОГО ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2018 г. А. В. ПСХУ

Аннотация. Исследуются вопросы поведения решения задачи Коши для дробного диффузионно-волнового уравнения при больших значениях временной переменной. Найдены достаточные условия стабилизации в классе функций быстрого роста, а также необходимые и достаточные условия стабилизации к нулю в случае асимптотически неотрицательных начальных функций.

Ключевые слова: дробное диффузионно-волновое уравнение, стабилизация решения, задача Коши, дробная производная, оператор Джрбашьяна–Нерсесяна.

AMS Subject Classification: 35R11, 35B40

1. Введение. В верхней полуплоскости $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, y) = 0, \quad 0 < \alpha < 2, \quad (1)$$

где $\partial^\alpha / \partial y^\alpha$ — дробная производная порядка α с началом в точке $y = 0$.

Будем говорить, что решение уравнения (1) *стабилизируется* в точке $x \in \mathbb{R}$ (соответственно, *равномерно на компакте* $K \subset \mathbb{R}$; *равномерно во всем пространстве*), если существует конечный предел

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y)$$

в точке x (равномерный относительно $x \in K$; равномерный относительно $x \in \mathbb{R}$).

Начало исследований вопросов стабилизации решений параболических уравнений положено в [10, 18]. Так, в [18] исследован вопрос о стабилизации решения краевой задачи в полуполосе для уравнения теплопроводности, возникшей в связи с одной прикладной задачей в теории тепла. В [10] найдены условия существования решений типа бегущей волны у квазилинейного параболического уравнения и сходимости к ним решений задачи Коши при неограниченном возрастании времени. Эта задача возникла в связи с приложениями в биологии.

Впоследствии данное направление активно развивалось и на сегодняшний день имеет обширную библиографию. Укажем работы [1–6, 9], дающие представление о существующих подходах к исследованию вопросов стабилизации решений начальных и краевых задач для параболических уравнений и систем, а также содержащие обзоры работ по данной проблематике.

Укажем также работы [14, 15, 21–23, 25–29, 33], посвященные теории дробных диффузионных и волновых уравнений. Отметим работу [26], в которой исследуется асимптотическое поведение решений дробного диффузионно-волнового уравнения. Различные вопросы приложений дробного исчисления и теории дробных дифференциальных уравнений в физике и моделировании освещены, например, в [12, 17, 19, 20, 24].

Цель данной работы — поиск условий, обеспечивающих стабилизацию решений дробного диффузионно-волнового уравнения. В частности, найдены достаточные условия (теорема 3) стабилизации решения задачи Коши для уравнения (1), а также необходимые и достаточные условия стабилизации (к нулю) в классе асимптотически неотрицательных функций (теорема 4).

2. Дробное дифференцирование. Дробное дифференцирование в данной работе задается посредством оператора дробного дифференцирования Джрбашяна—Нерсесяна (см. [8]). Оператор Джрбашяна—Нерсесяна с началом в точке $y = a$, ассоциированный с последовательностью

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}, \quad 0 < \gamma_k \leq 1,$$

порядка α ,

$$\alpha = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_m - 1,$$

определяется соотношением

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial(y-a)^\alpha} = D_{ay}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}} \equiv D_{ay}^{\gamma_m-1} D_{ay}^{\gamma_{m-1}} \dots D_{ay}^{\gamma_0}, \quad (2)$$

где $D_{ay}^{\gamma_m-1}$ и $D_{ay}^{\gamma_k}$ — дробные интеграл и производные Римана—Лиувилля.

Оператор дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля с началом в точке $y = a$ порядка $\gamma \in \mathbb{R}$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} D_{ay}^\gamma h(y) &= \frac{\text{sign}(y-a)}{\Gamma(-\gamma)} \int_a^y |y-t|^{-\gamma-1} h(t) dt, & \gamma < 0; \\ D_{ay}^0 h(y) &= h(y); \\ D_{ay}^\gamma &= \text{sign}^n(y-a) \frac{\partial^n}{\partial y^n} D_{ay}^{\gamma-n}, & n-1 < \gamma \leq n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3)$$

При определенных наборах $\{\gamma_k\}$ оператор Джрбашяна—Нерсесяна обращается в производную Римана—Лиувилля

$$D_{ay}^\alpha = D_{ay}^{\{\alpha-m+1, 1, \dots, 1\}}$$

или в производную Капуто

$$\partial_{ay}^\alpha = D_{ay}^{\{1, 1, \dots, 1, \alpha-m+1\}}.$$

Поэтому исследование уравнений с оператором (2) позволяет не рассматривать отдельно задачи для уравнений с производными Римана—Лиувилля и производными Капуто. Соответствующие результаты являются частными случаями утверждений, полученных для уравнений с оператором Джрбашяна—Нерсесяна.

Далее нам понадобятся следующие свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования Римана—Лиувилля (см. [8] и [25, § 2.1]): закон композиции

$$D_{ay}^\delta D_{ay}^\varepsilon h(y) = D_{ay}^{\delta+\varepsilon} h(y), \quad \delta \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \leq 0, \quad (4)$$

формула дробного дифференцирования (интегрирования) степенных функций:

$$D_{ay}^\delta \frac{|y-a|^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} = \frac{|y-a|^{\mu-\delta-1}}{\Gamma(\mu-\delta)}, \quad \delta \in \mathbb{R}, \quad \mu \geq 0, \quad (5)$$

и формула дробного интегрирования по частям:

$$\int_a^b g(y) D_{ay}^\delta h(y) dy = \int_a^b h(y) D_{by}^\delta g(y) dy, \quad \delta \leq 0, \quad a < b \leq \infty. \quad (6)$$

3. Функция Райта. Функция Райта определяется с помощью ряда (см. [31, 32])

$$\phi(a, b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(an+b)}, \quad a > -1. \quad (7)$$

Для любых $a > -1$ и $b \in \mathbb{C}$ ряд (7) определяет целую функцию переменного $z \in \mathbb{C}$.

Для функции Райта справедливо асимптотическое разложение (см. [32])

$$\phi(-\beta, \mu; -y) = Y^{1/2-\mu} e^{-Y} \left[\sum_{k=0}^{M-1} A_k Y^{-k} + O(Y^{-M}) \right], \quad y \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где $\beta \in (0, 1)$, $Y = (1 - \beta)\beta^{\beta/(1-\beta)}y^{1/(1-\beta)}$, а коэффициенты A_k зависят только от β и μ .

Имеют место формула дробного дифференцирования функции Райта (см. [14, с. 25])

$$D_{0y}^{\delta} y^{\mu-1} \phi(-\beta, \mu; -cy^{-\beta}) = y^{\mu-\delta-1} \phi(-\beta, \mu - \delta; -cy^{-\beta}), \quad 0 < \beta < 1, \quad c > 0, \quad \mu, \delta \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Для функций Райта верна формула свертки (см. [14, с. 30])

$$\begin{aligned} \int_0^y (y-t)^{\mu-1} \phi(-\beta, \mu; -\xi(y-t)^{-\beta}) t^{\nu-1} \phi(-\beta, \nu; -\eta t^{-\beta}) dt = \\ = y^{\mu+\nu-1} \phi(-\beta, \mu + \nu; -(\xi + \eta)y^{-\beta}), \quad 0 < \beta < 1, \quad \xi, \eta > 0, \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (10)$$

Известно также (см. [7, 14, 30]), что

$$\int_0^{\infty} t^{\delta-1} \phi(-\beta, \mu; -t) dt = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta\beta + \mu)}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0, \quad (11)$$

$$\phi(-\beta, \mu; -y) > 0, \quad 0 < \beta < 1, \quad \mu \geq 0, \quad y > 0. \quad (12)$$

Сформулируем и докажем еще одно необходимое для дальнейшего свойство функции Райта.

Лемма 1. Пусть $\beta \in (0, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$ и $\xi, y > 0$. Для любого $\delta \geq 0$ справедливо равенство

$$D_{\infty\xi}^{-\delta} \left[y^{\mu-1} \phi\left(-\beta, \mu; -\frac{\xi}{y^{\beta}}\right) \right] = y^{\mu+\delta\beta-1} \phi\left(-\beta, \mu + \delta\beta; -\frac{\xi}{y^{\beta}}\right). \quad (13)$$

Доказательство. Действительно, в силу определения (3), с учетом (10) и (11) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(\delta) D_{\infty\xi}^{-\delta} \left[y^{\mu-1} \phi\left(-\beta, \mu; -\frac{\xi}{y^{\beta}}\right) \right] &= y^{\mu-1} \int_0^{\infty} \eta^{\delta-1} \phi\left(-\beta, \mu; -\frac{\xi + \eta}{y^{\beta}}\right) d\eta = \\ &= \int_0^{\infty} \eta^{\delta-1} \int_0^y (y-t)^{\mu-1} \phi\left(-\beta, \mu; -\xi(y-t)^{-\beta}\right) t^{-1} \phi\left(-\beta, 0; -\eta t^{-\beta}\right) dt d\eta = \\ &= \int_0^y t^{\delta\beta-1} (y-t)^{\mu-1} \phi\left(-\beta, \mu; -\xi(y-t)^{-\beta}\right) dt \int_0^{\infty} \eta^{\delta-1} \phi(-\beta, 0; -\eta) d\eta = \\ &= \Gamma(\delta) D_{0y}^{-\delta\beta} \left[y^{\mu-1} \phi\left(-\beta, \mu; -\frac{\xi}{y^{\beta}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание (9), получаем (13). $\square$

4. Задача Коши. Особенностью уравнений с оператором Джрбашяна—Нерсесяна является то, что требуемое число начальных данных связано, вообще говоря, не с порядком дифференцирования (как, например, в случае с производной Римана—Лиувилля или производной Капуто), а с числом элементов в последовательности $\{\gamma_k\}_0^m$, с которой оператор ассоциирован.

Так, задача Коши для уравнения

$$\left(D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, y) = 0 \quad (14)$$

ставится следующим образом: найти регулярное решение уравнения (14) в области $\mathbb{R} \times (0, T)$, $0 < T \leq \infty$, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}} u(x, y) = \tau_k(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (15)$$

где $\tau_k(x)$ — заданные функции.

Под регулярным решением уравнения (14) в области $\mathbb{R} \times (0, T)$ понимается такая функция $u(x, y)$, что $y^{1-\gamma_0} u(x, y) \in C(\mathbb{R} \times [0, T])$; $u(x, y)$ имеет непрерывные производные по переменной

x до второго порядка; функции $D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}} u(x, y)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, как функции переменной $y \in [0, T)$ абсолютно непрерывны при каждом фиксированном x ; функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (14) во всех точках области.

Известно (см. [15]), что задача Коши (14), (15) имеет единственное решение в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А. Н. Тихонова

$$|y^{1-\gamma_0} u(x, y)| \leq C(\rho) \exp(\rho |x|^{2/(2-\alpha)}), \quad (16)$$

для любого положительного ρ , где $C(\rho)$ — положительная постоянная, зависящая только от ρ , и ее решение с помощью функции Райта (7) может быть представлено в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} y^{\mu_k - \beta - 1} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_k(\xi) \phi\left(-\beta, \mu_k - \beta; -\frac{|x - \xi|}{y^\beta}\right) d\xi; \quad (17)$$

здесь и далее

$$\beta = \frac{\alpha}{2}, \quad \mu_k = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_k. \quad (18)$$

После несложных преобразований решение задачи Коши (17) может быть записано в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} y^{\mu_k - \beta - 1} \int_0^\infty [\tau_k(x + \xi) + \tau_k(x - \xi)] \phi\left(-\beta, \mu_k - \beta; -\frac{\xi}{y^\beta}\right) d\xi.$$

Последнее может быть переписано в терминах преобразования Б. Станковича (см. [13, 14, 16]):

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} A_y^{\beta, \mu_k - \beta} [\tau_k(x + y) + \tau_k(x - y)], \quad (19)$$

где

$$A_y^{\beta, \mu} \tau(y) = (A_y^{\beta, \mu} \tau)(y) \equiv y^{\mu-1} \int_0^\infty \tau(\xi) \phi\left(-\beta, \mu; -\frac{\xi}{y^\beta}\right) d\xi. \quad (20)$$

Таким образом, вопрос о стабилизации решения задачи Коши может быть редуцирован к вопросу о поведении образов преобразования $A_y^{\beta, \mu}$ от начальных функций $\tau_k(x + y)$ и $\tau_k(x - y)$.

Заметим, что если $\alpha = 1$ ($\beta = 1/2$) и $\mu = 1/2$ (случай уравнения диффузии), то

$$A_y^{1/2, 1/2} \tau(y) = \frac{1}{\sqrt{y\pi}} \int_0^\infty \tau(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4y}\right) d\xi.$$

Поэтому интеграл (20) будем называть *обобщенным интегралом Пуассона*.

5. Интегральные средние. Условия стабилизации параболических уравнений, как правило, формулируются в терминах интегральных средних от начальных функций. В частности, в терминах средних Чезаро—Рисса (см. [6]):

$$S_R^\delta f(x) = \left[\int_{|x-\xi| < R} f(\xi) \left(1 - \frac{|x-\xi|}{R}\right)^\delta d\xi \right] / \left[\int_{|x-\xi| < R} \left(1 - \frac{|x-\xi|}{R}\right)^\delta d\xi \right].$$

Нетрудно заметить, что средние Чезаро—Рисса можно записать с помощью дробных интегралов Римана—Лиувилля:

$$S_R^\delta f(x) = \frac{\delta + 1}{2R^{\delta+1}} \int_0^R [f(x + \xi) + f(x - \xi)] (R - \xi)^\delta d\xi = \frac{\Gamma(\delta + 2)}{2R^{\delta+1}} D_{0R}^{-\delta-1} [f(x + R) + f(x - R)].$$

Для рассматриваемого в данной работе случая удобно ввести оператор усреднения

$$T_y^{\delta, \nu} f(y) = \Gamma(\nu + 1) y^{-\nu} D_{0y}^{-\delta} f(y) \quad (21)$$

(в нижнем индексе указана переменная, по которой проводится усреднение). Очевидно,

$$S_R^\delta f(x) = \frac{1}{2} T_R^{\delta+1, \delta+1} [f(x+R) + f(x-R)].$$

Далее, через $\mathcal{S}^{\delta, \nu}$ будем обозначать множество функций $f(y)$, непрерывных на $[0, \infty)$, для которых существует конечный предел величины $T_y^{\delta, \nu} f(y)$ при $y \rightarrow \infty$, т.е.

$$\mathcal{S}^{\delta, \nu} = \left\{ f(y) \in C[0, \infty) : \lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{\delta, \nu} f(y) = l < \infty \right\}.$$

Для функции двух переменных $f(x, y)$ запись $f(x, y) \in \mathcal{S}_M^{\delta, \nu}$ будет означать существование конечного предела

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{\delta, \nu} f(x, y) = l < \infty,$$

равномерного относительно $x \in M \subset \mathbb{R}$.

Будем также писать $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{0,0}$ и $\mathcal{S}_M = \mathcal{S}_M^{0,0}$; в этом случае $\mathcal{S}_M$ означает множество функций $f(x, y)$, стабилизирующихся при $y \rightarrow \infty$ равномерно относительно $x \in M$.

Докажем ряд свойств оператора $T_y^{\delta, \nu}$.

Лемма 2. Пусть $\delta \geq 0$ и $\nu > -1$. Тогда для любого $\gamma > 0$ справедливы включения

$$\mathcal{S}^{\delta, \nu} \subset \mathcal{S}^{\delta+\gamma, \nu+\gamma}, \quad \mathcal{S}_M^{\delta, \nu} \subset \mathcal{S}_M^{\delta+\gamma, \nu+\gamma}.$$

Если при этом $f(y) \in \mathcal{S}^{\delta, \nu}$ ($f(x, y) \in \mathcal{S}_M^{\delta, \nu}$), то

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{\delta+\gamma, \nu+\gamma} f = \lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{\delta, \nu} f.$$

Доказательство. В силу определения (21), закона композиции для дробного интеграла Римана—Лиувилля (4) и формулы дробного интегрирования степенных функций (5) имеем

$$\begin{aligned} T_y^{\delta+\gamma, \nu+\gamma} f(y) &= \frac{\Gamma(\nu+\gamma+1)}{y^{\nu+\gamma}} D_{0y}^{-\gamma} D_{0y}^{-\delta} f(y) = \frac{\Gamma(\nu+\gamma+1)}{\Gamma(\nu+1)y^{\nu+\gamma}} D_{0y}^{-\gamma} y^\nu T_y^{\delta, \nu} f(y) = \\ &= \frac{\Gamma(\nu+\gamma+1)}{y^{\nu+\gamma} \Gamma(\nu+1) \Gamma(\gamma)} \int_0^y t^\nu (y-t)^{\gamma-1} [T_t^{\delta, \nu} f(t) - T_y^{\delta, \nu} f(y)] dt + T_y^{\delta, \nu} f(y). \end{aligned}$$

Обозначим первое слагаемое правой части последнего равенства через I . Для доказательства леммы, очевидно, достаточно показать, что

$$\lim_{y \rightarrow \infty} I = 0 \tag{22}$$

при условии $f(y) \in \mathcal{S}^{\delta, \nu}$.

Пусть $F(t) = T_t^{\delta, \nu} f(t)$. Перепишем I в виде

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Gamma(\nu+\gamma+1)}{y^{\nu+\gamma} \Gamma(\nu+1) \Gamma(\gamma)} \int_0^y t^\nu (y-t)^{\gamma-1} [F(t) - F(y)] dt = \\ &= \frac{\Gamma(\nu+\gamma+1)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\gamma)} \left(\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^1 \right) s^\nu (1-s)^{\gamma-1} [F(sy) - F(y)] ds = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Для всякой функции $f(y)$ из $\mathcal{S}^{\delta, \nu}$ и произвольного положительного ε , в силу определения (21) оператора $T_y^{\delta, \nu}$, справедливо неравенство

$$|T_y^{\delta, \nu} f(y)| \leq C (1 + y^{-\nu}), \tag{23}$$

где $C = C(\delta, \nu)$. (Здесь и далее буквой C обозначены положительные постоянные, каждый раз, вообще говоря, разные; в случае необходимости в скобках указаны параметры, от которых они могут зависеть.) Если $f(y) \in \mathcal{S}^{\delta, \nu}$, то из неравенства (23) следует, что

$$|I_1| \leq C \int_0^\varepsilon s^\nu (1-s)^{\gamma-1} [1 + s^{-\nu} + y^{-\nu}] ds \leq C\varepsilon (1 + y^{-\nu}) \quad (24)$$

для любого произвольного положительного ε . При этом константа C не зависит от ε и y .

Далее, оценим I_2 . Пусть

$$\omega_\varepsilon(y) = \sup_{s > \varepsilon} |F(sy) - F(y)|. \quad (25)$$

Тогда

$$|I_2| \leq C \int_\varepsilon^1 s^\nu (1-s)^{\gamma-1} |F(sy) - F(y)| ds \leq C\omega_\varepsilon(y). \quad (26)$$

Если $f(y) \in \mathcal{S}^{\delta, \nu}$ и $\varepsilon > 0$, то

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \omega_\varepsilon(y) = 0. \quad (27)$$

Поэтому из неравенства (26) следует, что

$$\lim_{y \rightarrow \infty} I_2 = 0$$

для любого положительного ε . Вместе с неравенством (24), в силу произвольности выбора ε , последнее означает справедливость предельного соотношения (22). Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. Пусть $\delta \geq 0$, $\nu > \delta - 1$, функции $f(y)$ и $g(y)$ непрерывны на $[0, \infty)$ и для некоторого $R > 0$ имеет место равенство

$$f(y) = g(y) \quad \text{для всех } y \geq R.$$

Тогда пределы

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{\delta, \nu} f(y), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{\delta, \nu} g(y)$$

существуют или не существуют одновременно. В случае существования они равны:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{\delta, \nu} f(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{\delta, \nu} g(y).$$

Доказательство. В случае $\delta = 0$ утверждение леммы очевидно. Пусть $\delta > 0$. Из условий леммы для достаточно больших значений y следуют неравенства

$$\left| T_y^{\delta, \nu} f(y) - T_y^{\delta, \nu} g(y) \right| \leq \frac{\Gamma(\nu+1)}{y^\nu \Gamma(\delta)} \int_0^R (y-t)^{\delta-1} |f(t) - g(t)| dt \leq C y^{-\nu} \int_0^R (y-t)^{\delta-1} dt \leq C R y^{\delta-\nu-1}.$$

Таким образом,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left[T_y^{\delta, \nu} f(y) - T_y^{\delta, \nu} g(y) \right] = 0.$$

Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

6. Стабилизация обобщенного интеграла Пуассона. Докажем два утверждения, касающиеся стабилизации обобщенного интеграла Пуассона. Первое из них устанавливает достаточные условия стабилизации.

Теорема 1. Пусть $0 < \beta < 1$, $\delta \geq 0$, $\mu < 1 + \beta\delta$, $\nu = \frac{1-\mu}{\beta} + \delta - 1$, функция $f(y) \in C[0, \infty)$ и удовлетворяет условию

$$|f(y)| \leq C(\rho) \exp\left(\rho y^{1/(1-\beta)}\right) \quad (28)$$

для любого $\rho > 0$. Если $f(y) \in \mathcal{S}^{\delta, \nu}$, то $A_y^{\beta, \mu} f(y) \in \mathcal{S}$ и

$$\lim_{y \rightarrow \infty} A_y^{\beta, \mu} f(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{\delta, \nu} f(y).$$

Доказательство. Принимая во внимание формулу интегрирования функции Райта (13) и формулу дробного интегрирования по частям (6), преобразуем $A_y^{\beta, \mu} f(y)$:

$$\begin{aligned} A_y^{\beta, \mu} f(y) &= \int_0^\infty f(\xi) y^{\mu-1} \phi\left(-\beta, \mu; -\frac{\xi}{y^\beta}\right) d\xi = \\ &= \int_0^\infty f(\xi) D_{\infty\xi}^{-\delta} \left[y^{\mu-\beta\delta-1} \phi\left(-\beta, \mu - \beta\delta; -\frac{\xi}{y^\beta}\right) \right] d\xi = y^{\mu-\beta\delta-1} \int_0^\infty \phi\left(-\beta, \mu - \beta\delta; -\frac{\xi}{y^\beta}\right) D_{0\xi}^{-\delta} f(\xi) d\xi = \\ &= \int_0^\infty \phi(-\beta, \mu - \beta\delta; -t) t^{\frac{1-\mu}{\beta} + \delta - 1} \left[\xi^{\frac{\mu-1}{\beta} - \delta + 1} D_{0\xi}^{-\delta} f(\xi) \right]_{\xi=ty^\beta} dt. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\nu = \frac{1-\mu}{\beta} + \delta - 1$, а также формулу (11), обозначив $T_\xi^{\delta, \nu} f(\xi)$ через $F(\xi)$, получим

$$A_y^{\beta, \mu} f(y) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty \phi(-\beta, \mu - \beta\delta; -t) t^\nu [F(ty^\beta) - F(y^\beta)] dt + F(y^\beta).$$

Представим первое слагаемое правой части в виде суммы, разбив промежуток интегрирования на $(0, \varepsilon)$ и (ε, ∞) , и обозначим соответствующие слагаемые через I_1 и I_2 . Очевидно, для доказательства теоремы нужно показать, что включение $f(y) \in \mathcal{S}^{\delta, \nu}$ влечет равенство

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (I_1 + I_2) = 0. \quad (29)$$

Покажем это. Принимая во внимание неравенство (23) для больших значений y получаем

$$|I_1| \leq C \int_0^\varepsilon |\phi(-\beta, \mu - \beta\delta; -t)| t^\nu \left[1 + t^{-\nu} y^{-\nu\beta} + y^{-\nu\beta} \right] dt \leq C\varepsilon. \quad (30)$$

Для I_2 , учитывая асимптотику функции Райта (8), имеем

$$|I_2| \leq C\omega_\varepsilon(y),$$

где $\omega_\varepsilon(y)$ определяется равенством (25). С учетом (27) это означает, что

$$\lim_{y \rightarrow \infty} I_2 = 0.$$

Принимая во внимание (30) и произвольность выбора ε , отсюда получаем равенство (29). Теорема доказана. $\square$

Далее покажем, что вопрос о стабилизации обобщенного интеграла Пуассона решается одинаково для функций, отличающихся лишь на ограниченном множестве.

Лемма 4. Пусть $0 < \beta < 1$, $\mu < 1$, функции $f(y)$ и $g(y)$ непрерывны на $[0, \infty)$, удовлетворяют неравенству (28) и $f(y) = g(y)$ для всех $y \geq R$ при некотором $R > 0$. Включение

$$A_y^{\beta, \mu} f(y) \in \mathcal{S}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$A_y^{\beta, \mu} g(y) \in \mathcal{S}.$$

Кроме того, если $A_y^{\beta, \mu} f(y) \in \mathcal{S}$, то

$$\lim_{y \rightarrow \infty} A_y^{\beta, \mu} f(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} A_y^{\beta, \mu} g(y).$$

Доказательство. В силу определения преобразования $A_y^{\beta, \mu}$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \left| A_y^{\beta, \mu} f(y) - A_y^{\beta, \mu} g(y) \right| &\leq y^{\mu-1} \int_0^R \left| \phi \left(-\beta, \mu; -\frac{\xi}{y^\beta} \right) [f(\xi) - g(\xi)] \right| d\xi \leq \\ &\leq C y^{\mu+\beta-1} \int_0^{Ry^{-\beta}} |\phi(-\beta, \mu; -t)| dt \leq C y^{\mu-1}, \quad C = C(R, \beta, \mu), \end{aligned}$$

из которой следует, что

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left[A_y^{\beta, \mu} f(y) - A_y^{\beta, \mu} g(y) \right] = 0$$

при $\mu < 1$. Это доказывает утверждение леммы. $\square$

Лемма 5. Пусть $0 < \beta < 1$, $\mu < 1$, функция $f(y)$ непрерывна на $[0, \infty)$, удовлетворяет неравенству (28), и $f(y) \geq 0$ для всех $y \geq R$ при некотором $R > 0$. Тогда

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} A_y^{\beta, \mu} f(y) \geq 0.$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$A_y^{\beta, \mu} f(y) = y^{\mu-1} \left(\int_0^R + \int_R^\infty \right) \phi \left(-\beta, \mu; -\frac{\xi}{y^\beta} \right) f(\xi) d\xi = I_1 + I_2.$$

Для I_1 имеем

$$|I_1| \leq y^{\mu-1} \int_0^R \left| \phi \left(-\beta, \mu; -\frac{\xi}{y^\beta} \right) f(\xi) \right| d\xi \leq C y^{\mu-1}.$$

Поэтому $\lim_{y \rightarrow \infty} I_1 = 0$ и следовательно, в силу положительности функции Райта,

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} A_y^{\beta, \mu} f(y) = \liminf_{y \rightarrow \infty} I_2 \geq 0.$$

Лемма доказана. $\square$

В следующей теореме указаны необходимые и достаточные условия стабилизации $A_y^{\beta, \mu} f(y)$ в классе асимптотически неотрицательных функций.

Теорема 2. Пусть $0 < \beta < 1$, $0 < \mu < 1$, $\delta \geq 1$, $\nu = \frac{1-\mu}{\beta} + \delta - 1$; функция $f(y) \in C[0, \infty)$, $f(y) \geq 0$ для всех $y \geq R$ при некотором $R > 0$ и выполнено неравенство (28). Тогда

$$\lim_{y \rightarrow \infty} A_y^{\beta, \mu} f(y) = 0 \tag{31}$$

в том и только в том случае, когда

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{\delta, \nu} f(y) = 0. \tag{32}$$

Доказательство. Достаточность условия (32) для выполнения (31) следует из теоремы 1.

Докажем необходимость. Пусть $g(y) = \max\{0, f(y)\}$. Очевидно, $g(y) \geq 0$ для всех $y \geq 0$ и $f(y) = g(y)$ для всех $y \geq R$. Принимая во внимание положительность функции Райта (см. (12)), получаем

$$0 \leq \left[T_z^{1, \frac{1-\mu}{\beta}} g(z) \right]_{z=y^\beta} \leq y^{\mu-1} \int_0^{y^\beta} g(\xi) d\xi \leq C y^{\mu-1} \int_0^{y^\beta} g(\xi) \phi\left(-\beta, \mu; -\frac{\xi}{y^\beta}\right) d\xi \leq C A_y^{\beta, \mu} g(y),$$

где $C = C(\beta, \mu)$. В силу леммы 4

$$\lim_{y \rightarrow \infty} A_y^{\beta, \mu} g(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} A_y^{\beta, \mu} f(y) = 0$$

Таким образом, предельное соотношение (31) влечет равенство

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left[T_z^{1, \frac{1-\mu}{\beta}} g(z) \right]_{z=y^\beta} = 0$$

и, следовательно, равенство

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{1, \frac{1-\mu}{\beta}} g(y) = 0.$$

Отсюда, в силу леммы 3, следует соотношение

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{1, \frac{1-\mu}{\beta}} f(y) = 0.$$

Из последнего, с помощью леммы 2, приходим к (32). Теорема доказана. $\square$

7. Стабилизация решений задачи Коши. Пусть функция $u(x, y)$ — решение в полуплоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ задачи (14), (15). Как и выше, β и μ_k определены равенствами (18) и, кроме того, $\zeta_k = \mu_{m-1} - \mu_k$. Как известно (см. [15, теорема 2]), следующие условия обеспечивают существование и единственность решения задачи (14), (15), в классе функций, удовлетворяющих условию быстрого роста (16):

$$\gamma_m + \gamma_0 > 1; \quad (33)$$

$$\tau_{m-1}(x) \in C(\mathbb{R}), \quad \text{если } \gamma_m = 1; \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tau_k(x) \in C^{0, \eta}(\mathbb{R}), \quad \eta > \frac{\zeta_k}{\beta}, \quad \text{если } \zeta_k < \beta, \\ \tau_k(x) \in C^{1, \eta}(\mathbb{R}), \quad \eta > \frac{\zeta_k - \beta}{\beta}, \quad \text{если } \beta \leq \zeta_k < \alpha; \end{aligned} \quad 0 \leq k \leq m-2; \quad (35)$$

$$|\tau_k(x)| \leq C(\rho) \exp\left(\rho|x|^{2/(2-\alpha)}\right), \quad 0 \leq k \leq m-1. \quad (36)$$

Здесь, как обычно, через $C^{p, \varepsilon}$ обозначено пространство функций, имеющих непрерывные производные до порядка p , удовлетворяющие условию Гельдера с показателем ε .

Теорема 3. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (14), (15), выполнены условия (33)–(36), а параметры δ_k и ν_k определяются из условий $\delta_k \geq 0$, $\nu_k = \frac{1 - \mu_k}{\beta} + \delta_k$ и $\mu_k < 1 + \beta(\delta_k + 1)$ для всех $k = 0, 1, \dots, m-1$. Если

$$\tau_k(x+y) + \tau_k(x-y) \in \mathcal{S}_M^{\delta_k, \nu_k}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

то

$$u(x, y) \in \mathcal{S}_M,$$

причем

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{\delta_k, \nu_k} [\tau_k(x+y) + \tau_k(x-y)].$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из представления (19) и теоремы 1. $\square$

Теорема 4. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (14), (15), выполнены условия (33)–(36), а параметры δ_k и ν_k удовлетворяют условиям $\delta_k \geq 1$, $\nu_k = \frac{1 - \mu_k}{\beta} + \delta_k$ и $\beta < \mu_k < 1 + \beta$ для всех $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Пусть также для некоторого R

$$\tau_k(x) \geq 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq R, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Равенство

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0 \tag{37}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T_y^{\delta_k, \nu_k} [\tau_k(x + y) + \tau_k(x - y)] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1. \tag{38}$$

Доказательство. Достаточность условий (38) следует из теоремы 3. Для доказательства необходимости заметим, что в силу леммы 5 из (37) с учетом представления (19) следует, что

$$\lim_{y \rightarrow \infty} A_y^{\beta, \mu_k - \beta} [\tau_k(x + y) + \tau_k(x - y)] = 0$$

для каждого $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Отсюда, принимая во внимание теорему 2, получаем (38). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольперт А. И. О распространении волн, описываемых нелинейными параболическими уравнениями // в кн.: Петровский И. Г. Избранные труды. Дифференциальные уравнения и теория вероятностей. — М.: Наука, 1987. — С. 333–358.
2. Гуцин А. К., Михайлов В. П., Михайлов Ю. А. О равномерной стабилизации решения второй смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка // Мат. сб. — 1985. — 128 (170), № 2 (10). — С. 147–168.
3. Денисов В. Н. О стабилизации средних по времени от решения задачи Коши для параболического уравнения // Диффер. уравн. — 1988. — 24, № 1. — С. 44–54.
4. Денисов В. Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 4. — С. 145–212.
5. Денисов В. Н., Жиков В. В. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Мат. заметки. — 1985. — 37, № 6. — С. 834–850.
6. Денисов В. Н., Репников В. Д. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Диффер. уравн. — 1984. — 20, № 1. — С. 20–41.
7. Джрбашян М. М., Багян Р. А. б интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функцией Миттаг-Леффлера // Докл. АН СССР. — 1975. — 223, № 6. — С. 1297–1300.
8. Джрбашян М. М., Нерсисян А. Б. Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН Арм. ССР. Мат. — 1968. — 3, № 1. — С. 3–28.
9. Дрожжников Ю. Н. Стабилизация решений обобщенной задачи Коши для ультрапараболического уравнения // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1969. — 33, № 2. — С. 368–378.
10. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Мат. мех. — 1937. — 1, № 6. — С. 1–26.
11. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка // Диффер. уравн. — 1990. — 26, № 4. — С. 660–670.
12. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
13. Псху А. В. Интегральное преобразование с функцией Райта в ядре // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. АН. — 2002. — 6, № 1. — С. 35–47.
14. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
15. Псху А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — 73, № 2. — С. 141–182.
16. Станковић Б. О једној класи сингуларних интегралних једначина // Зборник радова САН. — Мат. ин-т САН, 1955. — 43, № 4. — С. 81–130.
17. Тарасов В. Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. — М., Ижевск: Ижевский ин-т комп. иссл., 2011.

18. *Тихонов А. Н.* Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных// Бюлл. МГУ. Мат. мех. — 1938. — 1, № 9. — С. 1–49.
19. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
20. *Atanacković T. M., Pilipović S., Stanković B., Zorica D.* Fractional Calculus with Applications in Mechanics. — London, Hoboken: ISTE, Wiley, 2014.
21. *Eidelman S. D., Kochubei A. N.* Cauchy problem for fractional diffusion equations// J. Differ. Equations. — 2004. — 199, № 2. — С. 211–255.
22. *Fujita Ya.* Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation, I// Osaka J. Math. — 1990. — 27, № 2. — С. 309–321.
23. *Fujita Ya.* Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation, II// Osaka J. Math. — 1990. — 27, № 4. — С. 797–804.
24. *Hilfer R., ed.* Applications of Fractional Calculus in Physics. — Singapore: World Scientific, 2000.
25. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations/ North-Holland Math. Stud. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 204.
26. *Kochubei A. N.* Asymptotic properties of solutions of the fractional diffusion-wave equation// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2014. — 17, № 3. — С. 881–896.
27. *Mainardi F.* The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation// Appl. Math. Lett. — 1996. — 9, № 6. — С. 23–28.
28. *Luchko Yu., Gorenflo R.* Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order// Fract. Calc. Appl. Anal. — 1998. — 1, № 1. — С. 63–78.
29. *Schneider W. R., Wyss W.* Fractional diffusion and wave equations// J. Math. Phys. — 1989. — 30, № 1. — С. 134–144.
30. *Stanković B.* On the function of E. M. Wright// Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. — 1970. — 10, № 24. — С. 113–124.
31. *Wright E. M.* On the coefficients of power series having exponential singularities// J. London Math. Soc. — 1933. — 8, № 29. — С. 71–79.
32. *Wright E. M.* The generalized Bessel function of order greater than one// Quart. J. Math. Oxford Ser. — 1940. — 11, № 1. — С. 36–48.
33. *Wyss W.* The fractional diffusion equation// J. Math. Phys. — 1986. — 27, № 11. — С. 2782–2785.

А. В. Псху

Институт прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН, г. Нальчик
E-mail: pskhu@list.ru



ЗАДАЧА РИМАНА—ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2018 г. А. П. СОЛДАТОВ, О. В. ЧЕРНОВА

Аннотация. В конечной области D комплексной плоскости, ограниченной гладким контуром Γ для эллиптической системы первого порядка с постоянными старшими коэффициентами

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x} + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z),$$

где постоянные матрицы $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{l \times l}$ и $(l \times l)$ -матричные коэффициенты a, b принадлежат классу Гельдера $C^\mu(D)$, $0 < \mu < 1$ и заданной $(l \times l)$ -матрицы-функции $C \in C^\mu(\Gamma)$ рассматривается краевая задача Римана—Гильберта

$$\operatorname{Re} CU^+ = f,$$

где $+$ означает граничное значение функции U на Γ . Установлено, что в классе $U \in C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D)$ эта задача фредгольмова и ее индекс дается формулой

$$\kappa = - \sum_{j=1}^m \frac{1}{\pi} [\arg \det G]_{\Gamma_j} + (2 - m)l.$$

Ключевые слова: эллиптические системы, задача Римана—Гильберта, формула индекса, фредгольмов оператор.

AMS Subject Classification: 35Jxx, 58J10, 58J20

Рассмотрим в конечной области D комплексной плоскости, ограниченной гладким контуром Γ , эллиптическую систему первого порядка

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U}{\partial y} + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad z \in D,$$

где постоянные матрицы $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{l \times l}$ и $(l \times l)$ -матричные коэффициенты a, b принадлежат классу Гельдера $C^\mu(D)$, $0 < \mu < 1$. Условие эллиптичности заключается в том, что обе матрицы A_j обратимы и матрица $A = -A_2^{-1}A_1$ не имеет вещественных собственных значений. Умножая систему на A_2^{-1} и переходя к новым обозначениям, ее всегда можно записать в форме

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x} + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z). \quad (1)$$

Удобно множество собственных значений матрицы A представить в виде объединения $\sigma_1 \cup \overline{\sigma}_2$, где оба множества σ_1, σ_2 лежат в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \nu > 0$ и $\overline{\sigma}_2 = \{\bar{\nu}, \nu \in \sigma_2\}$. Тогда матрицу A можно привести к следующей жордановой форме:

$$\tilde{B}^{-1}A\tilde{B} = \tilde{J}, \quad \tilde{J} = \operatorname{diag}(J_1, \overline{J}_2), \quad (2)$$

где $J_k \in \mathbb{C}^{l_k \times l_k}$, $k = 1, 2$, составлена из клеток Жордана с собственными значениями $\nu \in \sigma_k$. Конечно, $l = l_1 + l_2$ и случаи $l_1 = 0$ или $l_2 = 0$, когда одно из множеств σ_k пусто, не исключаются.

Таким образом, в этом представлении собственные значения матрицы J_k образуют множество σ_k . Соответственно (2) удобно и матрицу $\tilde{B}$ записать в блочном виде

$$\tilde{B} = (B_1, \overline{B}_2), \quad B_k \in \mathbb{C}^{l \times l_k}. \quad (3)$$

Исходя из заданной $(l \times l)$ -матрицы-функции $C \in C^\mu(\Gamma)$, рассмотрим для системы (1) краевую задачу Римана—Гильберта

$$\operatorname{Re} CU^+ = f, \quad (4)$$

где $+$ означает граничное значение функции U на Γ . Предполагая, что $F \in C^\mu(\overline{D})$ и $f \in C^\mu(\Gamma)$, эту задачу естественно рассматривать в классе классических решений $U \in C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D)$ системы (1).

В пространстве правых частей $(F, f) \in C^\mu(\overline{D}) \times C^\mu(\Gamma)$ задачи введем билинейную форму

$$\langle (F, f), (\tilde{F}, \tilde{f}) \rangle = \int_D \operatorname{Re} [F(z)\tilde{F}(z)] d_2z + \int_\Gamma f(t)\tilde{f}(t) d_1t, \quad (5)$$

где d_2z и d_1t означают, соответственно, элементы площади и длины дуги, а обозначение $F\tilde{F}$ для векторов $F = (F_1, \dots, F_l)$ и $\tilde{F}$ понимается сумма $F_1\tilde{F}_1 + \dots + F_l\tilde{F}_l$; аналогичный смысл имеет $f\tilde{f}$.

Основной результат статьи состоит в установлении критерия фредгольмовости задачи (1), (4) в классе $U \in C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D)$ и формулы ее индекса. Фредгольмовость здесь понимается в следующем смысле: пространство X решений однородной задачи (т.е. задачи с правыми частями $F = 0$ и $f = 0$) конечномерно и существует такое конечномерное подпространство $\tilde{X} \subseteq C^\mu(\overline{D}) \times C^\mu(\Gamma)$, что условия ортогональности

$$\langle (F, f), (\tilde{F}, \tilde{f}) \rangle = 0, \quad (\tilde{F}, \tilde{f}) \in \tilde{X},$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи. При этом разность

$$\varkappa = \dim X - \dim \tilde{X}$$

определяет индекс задачи.

Теорема 1. Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$ и $C \in C^\nu(\Gamma)$, $\mu < \nu < 1$, так что в обозначениях (3) матрица-функция $G(t) = (C(t)B_1, \overline{C(t)B}_2)$ принадлежит классу $C^\nu(\Gamma)$. Тогда условие

$$\det G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \quad (6)$$

необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (1), (4) в классе $C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D)$, а ее индекс дается формулой

$$\varkappa = - \sum_{j=1}^m \frac{1}{\pi} [\arg \det G]_{\Gamma_j} + (2 - m)l, \quad (7)$$

где $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ — простые контуры, составляющие Γ , и приращение $[]_{\Gamma_j}$ вдоль Γ_j берется в направлении, оставляющем область D слева.

Если дополнительно $C \in C^{1,\nu}(\Gamma)$, то любое решение $U \in C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D)$ задачи с правой частью $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ в действительности принадлежит $C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Доказательство. В соответствии с (2) запишем вектор-функцию $\tilde{\phi} = \tilde{B}^{-1}U$ в виде пары $(\phi_1, \overline{\phi}_2)$ с l_k -векторами ϕ_k . Тогда при этой подстановке (1) переходит в систему

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} - \tilde{J} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \tilde{a}(z)\tilde{\phi}(z) + \tilde{b}(z)\overline{\tilde{\phi}(z)} = \tilde{f}^1(z)$$

с коэффициентами $\tilde{a} = \tilde{B}^{-1}a\tilde{B}$, $\tilde{b} = \tilde{B}^{-1}b\tilde{B}$ и правой частью $\tilde{f}^1 = \tilde{B}^{-1}F$. Перепишем ее в покомпонентном блочном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + a_{11}\phi_1 + a_{12}\overline{\phi}_2 + b_{11}\overline{\phi}_1 + b_{12}\phi_2 &= f_1^1, \\ \frac{\partial \overline{\phi}_2}{\partial y} - \overline{J}_2 \frac{\partial \overline{\phi}_2}{\partial x} + a_{21}\overline{\phi}_1 + a_{22}\phi_2 + b_{21}\phi_1 + b_{22}\overline{\phi}_2 &= \overline{f}_2^1, \end{aligned}$$

где $(a_{ij}) = \tilde{a}$, $(b_{ij}) = \tilde{b}$ — блочные матрицы и $(f_1^1, \bar{f}_2^1) = \tilde{f}^1$. Заменяя второе уравнение этой системы комплексно сопряженным, в результате для вектора $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ получим систему

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} + c\phi + d\bar{\phi} = f^1 \quad (8)$$

с блочно-диагональной матрицей $J = \text{diag}(J_1, J_2)$, правой частью $f^1 = (f_1^1, f_2^1) \in C^\mu(\bar{D})$ и коэффициентами

$$c = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in C^\mu(\bar{D}).$$

Поскольку $U = \tilde{B}\tilde{\phi} = B_1\phi_1 + \bar{B}_2\bar{\phi}_2$, при этой подстановке краевое условие (4) перейдет в

$$\text{Re } G\phi^+ = f^0, \quad (9)$$

где для единообразия с (8) функция f обозначена f^0 .

Задача (8), (9) для этой системы (в предположении простого контура Γ) изучена в [9]. Соответствующие рассуждения этой статьи с незначительными изменениями проходят и для рассматриваемого случая составного контура. Имея в виду вопросы гладкости решения задачи, удобно эти рассуждения кратко воспроизвести.

Исходя из матричного обозначения $z_J = x \cdot 1 + y \cdot J$, для $z = x + iy \in \mathbb{C}$, введем интегральный оператор типа Коши

$$(I^0\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (t - z)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad z \in D,$$

где по отношению к точке $t = t_1 + it_2$ на кривой dt_J означает комплексный матричный дифференциал $dt_1 1 + dt_2 J$ и контур Γ ориентирован положительно по отношению к D , и сингулярный оператор Коши

$$(S^0\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} (t - t_0)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma,$$

где $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ — вещественная l -вектор-функция.

По терминологии [11] функция $\phi = I^0\psi$ является J -аналитичной в области D , т.е. удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Эта система при $J = i$ переходит в классическую систему Коши—Римана. Как показано в [11], все основные факты теории аналитических функций, связанные с интегральной формулой Коши, распространяются и на решения системы (14).

Согласно [6] интегральный оператор $I^0 : C^\mu(\Gamma) \rightarrow C^\mu(\bar{D})$ ограничен и справедлива формула Сохоцкого—Племеля

$$2(I^0\varphi)^+(t_0) = \varphi(t_0) + (S^0\varphi)(t_0), \quad t_0 \in \Gamma. \quad (11)$$

Очевидно, в случае скалярной матрицы $J = i$ оператор S^0 переходит в классический сингулярный оператор Коши, который обозначим S . Как показано в [6], в принятом предположении $\Gamma \in C^{1,\nu}$ разность $S^0 - S$ является оператором, компактным в пространстве $C^\mu(\Gamma)$, и все основные результаты классической теории сингулярных операторов (см. [4]) распространяются и на оператор

$$2N^0\varphi = \text{Re } [G(\varphi + S^0\varphi)], \quad (12)$$

действующий в пространстве вещественных l -вектор-функций $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$.

Таким образом, этот оператор фредгольмов тогда и только тогда, когда выполнено условие (6), и его индекс дается формулой

$$\text{ind } N^0 = -\frac{1}{\pi} [\arg \det G]_{\Gamma}. \quad (13)$$

Введем далее интегральные операторы по области

$$(I^1\varphi)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_D (t-z)_J^{-1} \varphi(t) d_2 t, \quad z \in D,$$

$$(S^1\varphi)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_D (t-z)_J^{-2} \varphi(t) d_2 t, \quad z \in D.$$

Последний интеграл здесь сингулярный и понимается в соответствующем смысле. Легко проверяется необходимое условие существования этого интеграла:

$$\int_{\mathbb{T}} \xi_J^{-2} d_1 \xi = 0,$$

где $\mathbb{T}$ означает единичную окружность. Отметим, что в силу четности функции ξ_J^{-2} выполняется и условие

$$\int_{\mathbb{T}^+} \xi_J^{-2} d_1 \xi = 0, \quad (14)$$

где $\mathbb{T}^+$ означает любую полуокружность.

Как показано в [3], для $\varphi \in C^\mu(\overline{D})$ функция $I^1\varphi$ непрерывно дифференцируема в области D , причем справедливы формулы

$$\frac{\partial(I^1\varphi)}{\partial x} = \sigma_1\varphi + S^1\varphi, \quad \frac{\partial(I^1\varphi)}{\partial y} = \sigma_2\varphi + JS^1\varphi, \quad (15)$$

с некоторыми матрицами $\sigma_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$, связанными соотношением $\sigma_2 = J\sigma_1$. В частности,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - J \frac{\partial}{\partial x} \right) I^1\varphi = 0. \quad (16)$$

В силу (14) к сингулярному интегральному оператору S^1 можно применить теорему 3.5.1 из [8], согласно которой этот оператор ограничен в $C^\mu(\overline{D})$. С учетом (15) отсюда следует, что оператор $I^1 : C^\mu(\overline{D}) \rightarrow C^{1,\mu}(\overline{D})$ ограничен.

Рассмотрим класс функций

$$\phi \in C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D), \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} - J \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi \in C^\mu(\overline{D}). \quad (17)$$

Очевидно, любое решение $\phi \in C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D)$ уравнения (8) автоматически принадлежит этому классу.

Пусть для определенности контур Γ_m охватывает остальные контуры $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{m-1}$. Утверждается, что любая функция $\phi \in C^\mu(\overline{D})$ единственным образом представима в виде

$$\phi = I^1\varphi^1 + I^0\varphi^0 + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l, \quad (18)$$

с некоторыми комплексной l -вектор-функцией $\varphi^1 \in C^\mu(\overline{D})$ и вещественной вектор-функцией $\varphi^0 \in C^\mu(\Gamma)$, удовлетворяющей условиям

$$\int_{\Gamma_j} \varphi(t) d_1 t = 0, \quad 1 \leq j \leq m-1. \quad (19)$$

В самом деле, положим

$$\varphi^1 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - J \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi$$

и пусть $\phi^0 = \phi - I^1\varphi^1$. Тогда в силу (16) функция ϕ^0 является J -аналитической в области D , т.е. удовлетворяет уравнению (10), и принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Поэтому дело сводится к представлению

$$\phi^0 = I^0\varphi^0 + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l,$$

с условиями (19) на вещественную плотность φ , которое установлено в [6] (см. также [7]).

Пользуясь представлением (18) и формулой Сохоцкого—Племеля (11), задачу (8), (9) можем эквивалентным образом редуцировать к системе операторных уравнений

$$N^1\varphi^1 + N^{10}\varphi^0 + i(c-d)\xi = f^1, \quad N^{01}\varphi^1 + N^0\varphi^0 - (\operatorname{Im} G)\xi = f^0, \quad (20)$$

где в дополнение к (12) для краткости введено обозначение

$$\begin{aligned} N^1\varphi^1 &= \varphi^1 + c(I^1\varphi^1) + d(\overline{I^1\varphi^1}), \\ N^{10}\varphi^0 &= c(I^1\varphi^0) + d(\overline{I^1\varphi^0}), \quad N^{01}\varphi^1 = \operatorname{Re} G(I^1\varphi^1)^+. \end{aligned}$$

Эта система рассматривается относительно набора $(\varphi^1, \varphi^0, \xi)$, подчиненного условиям (19). В краткой форме по отношению к $\varphi = (\varphi^1, \varphi^0)$ ее можем записать одним уравнением

$$N\varphi + T\xi = f \quad (21)$$

с правой частью $f = (f^1, f^0)$ и операторными матрицами

$$N = \begin{pmatrix} N^1 & N^{10} \\ N^{01} & N^0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} ic - id \\ -\operatorname{Im} G \end{pmatrix}.$$

Очевидно, пространство $C^\mu(\overline{D}) \times C^\mu(\Gamma) \times \mathbb{R}^l$ является расширением пространства $C^\mu(\overline{D}) \times C^\mu(\Gamma)$ на l измерений, поэтому на основании известных свойств фредгольмовых операторов (см. [5]) операторы (N, T) и N фредгольмово эквивалентны и их индексы связаны соотношением

$$\operatorname{ind}(N, T) = \operatorname{ind} N + l. \quad (22)$$

С другой стороны, условие (19) выделяет в пространстве $C^\mu(\Gamma)$ замкнутое подпространство ко-размерности $l(m-1)$, поэтому из тех же соображений индекс $\varkappa$ системы (19), (20) связан с индексом оператора (N, T) соотношением

$$\varkappa = \operatorname{ind}(N, T) - l(m-1). \quad (23)$$

Рассмотрим подробнее операторы, фигурирующие в (20). Условимся писать $N_1 \sim N_2$, если разность $N_1 - N_2$ является компактным оператором. Вспоминая, что оператор I^1 компактен в $C^\mu(\overline{D})$, можем написать $N^1 \sim 1$, $N^{01} \sim 0$, и, следовательно,

$$N \sim M = \begin{pmatrix} 1 & N^{1,0} \\ 0 & N^0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Пусть выполнено условие (6). Тогда, как отмечено выше, оператор N^0 фредгольмов и его индекс дается формулой (13). В частности, существует его регуляризатор, т.е. ограниченный в $C^\mu(\Gamma)$ оператор R^0 со свойством $R^0 N^0 \sim N^0 R^0 \sim 1$. Но тогда непосредственно проверяется, что оператор

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -N^{1,0}R^0 \\ 0 & R^0 \end{pmatrix}$$

служит регуляризатором к оператору M и, следовательно, оператор M фредгольмов. Отсюда следует, что оператор N фредгольмов, а вместе с ним фредгольмова и исходная задача (1), (4).

Обратно, пусть задача (1), (4) фредгольмова, так что фредгольмов и оператор N , а вместе с ним и M . Пусть R — регуляризатор последнего оператора, записанный в блочном виде

$$R = \begin{pmatrix} R^1 & R^{10} \\ R^{01} & R^0 \end{pmatrix}$$

Тогда из соотношений $MR \sim MR \sim 1$ непосредственно следует, что $N^0 R^0 \sim R^0 N^0 \sim 1$, так что оператор N^0 фредгольмов. Как было отмечено выше, в свою очередь отсюда следует справедливость условия (6).

Чтобы установить формулу индекса (7), введем оператор $M(t)$, зависящий от параметра $0 \leq t \leq 1$, который получается заменой N^{10} на tN^{10} в определении (24) оператора M . Те же соображения показывают, что оператор $M(t)$ также фредгольмов. Поскольку он непрерывно зависит

от t , его индекс не зависит от t и, в частности,

$$\operatorname{ind} M = \operatorname{ind} M(0) = \operatorname{ind} N^0.$$

Отсюда $\operatorname{ind} N = \operatorname{ind} N^0$, что совместно с (13) и (22), (23) завершает доказательство формулы индекса (7).

Обратимся к последнему утверждению теоремы и предположим, что функция C , а вместе с ней и G принадлежат $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Тогда для $f^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ во втором уравнении (20) слагаемые $N^{01}\varphi^1$ и $(\operatorname{Im} G)\xi$ также принадлежат $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Таким образом, функция $\varphi^0 \in C^\mu(\Gamma)$ удовлетворяет уравнению $N^0\varphi^0 = g$ с правой частью $g \in C^{1,\mu}(\Gamma)$. Как показано в [1], в этом случае $\varphi^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$. Согласно формуле дифференцирования интеграла типа Коши $\phi = I^0\varphi$, установленной в [8], функция $I^0\varphi^0$ принадлежит $C^{1,\mu}(\overline{D})$, так что в представлении (18) и функция ϕ принадлежит этому классу, а вместе с ней этим свойством обладает и решение $U = B_1\phi_1 + B_2\phi_2$ исходной задачи (1), (4). $\square$

Заметим, что в силу последнего утверждения теоремы при выполнении условия (6) задача (1), (4) является фредгольмовой и в классе $C^{1,\mu}(\overline{D})$ с тем же индексом.

Случай эллиптической системы

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x} + a(z)U(z) = F(z) \quad (25)$$

с вещественными коэффициентами $A \in \mathbb{R}^{2l \times 2l}$ и $a(z)$ может быть рассмотрен совершенно аналогично. В этом случае собственные значения матрицы A составляют множество $\sigma \cup \overline{\sigma}$, где $\sigma \subseteq \{\nu, \operatorname{Im} \nu > 0\}$. Соответственно, соотношения (2), (3) принимают вид

$$\tilde{B}^{-1}A\tilde{B} = \tilde{J}, \quad \tilde{J} = \operatorname{diag}(J, \overline{J}), \quad \tilde{B} = (B, \overline{B}), \quad B \in \mathbb{C}^{2l \times l}.$$

Аналогом задачи Римана—Гильберта здесь служит краевое условие

$$CU^+ = f \quad (26)$$

с $(l \times 2l)$ -матрицей $C(t)$, $t \in \Gamma$. Соответственно аналогом теоремы 1 служит следующий результат (с тем же доказательством).

Теорема 2. Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$ и $(l \times 2l)$ -матрица C принадлежит классу $C^\nu(\Gamma)$, $\mu < \nu < 1$, так что в обозначениях (3) имеем $G(t) = C(t)B \in C^\nu(\Gamma)$. Тогда условие (6) необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (25), (26) в классе $C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D)$, и ее индекс дается формулой (7).

Если дополнительно $C \in C^{1,\nu}(\Gamma)$, то любое решение $U \in C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D)$ задачи с правой частью $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ в действительности принадлежит $C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Отметим, что в несколько более широких классах теорема 2 установлена Б. Боярским в [2] (см. также [10]).

До сих пор область D предполагалась конечной, т.е. лежала внутри некоторого круга. Теперь рассмотрим случай, когда область D по-прежнему ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$ и бесконечна, т.е. содержит внешность некоторого круга. В этом случае все простые контуры Γ_j , $1 \leq j \leq m$, составляющие Γ , равноправны. Для простоты удобно считать, что точка $z = 0$ лежит вне $\overline{D}$.

Все рассуждения будут вестись в весовом пространстве Гельдера $C_\delta^\mu(\overline{D}, \infty)$, $\delta \in \mathbb{R}$, со степенным поведением $O(|z|^\delta)$ на бесконечности, введенном в [8]. Напомним кратко его определение. Пространство $C_0^\mu(\overline{D}, \infty)$ состоит из всех ограниченных функций $\varphi(z)$, $z \in D$, с конечной нормой $|\varphi| = |\varphi|_0 + \{\varphi\}_\mu$, где

$$|\varphi|_0 = \sup_{z \in D} |\varphi(z)|, \quad \{\varphi\}_\mu = \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|z_1|^\mu |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu}.$$

Это пространство является банаховой алгеброй по умножению, и весовое пространство C_δ^μ получается из C_0^μ умножением на $|z|^\delta$ (с перенесенной нормой). Пространство $C_\delta^{1,\mu}(\overline{D}, \infty)$ по определению состоит из функций $\varphi \in C_\delta^\mu(\overline{D}, \infty) \cap C^1(D)$, частные производные которых лежат в классе

$C_{\delta-1}^\mu(\overline{D}, \infty)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \in C_{\delta-1}^\mu(\overline{D}, \infty).$$

Рассмотрим уравнение (1) в бесконечной области D в классе

$$C_\lambda^\mu(\overline{D}, \infty) \cap C^1(D), \quad -1 < \lambda < 0, \quad (27)$$

предполагая, что

$$a, b \in C_{-1-\varepsilon}^\mu(\overline{D}, \infty), \quad F \in C_{\lambda-1}^\mu(\overline{D}, \infty) \quad (28)$$

с некоторым $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим операторы I^0 и I^1 , определенные выше. В рассматриваемом случае функция $(I^0 \varphi)(z)$ в окрестности ∞ имеет разложение

$$(I^0 \varphi)(z) = \sum_{k \leq -1} c_k z_J^k, \quad c_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t_J^{-k-1} dt_j \varphi(t),$$

и поскольку $-1 < \lambda < 0$, оператор $I^0 C^\mu(\Gamma) \rightarrow C_\lambda^\mu(\overline{D}, \infty)$ ограничен. Соответствующие свойства оператора I^1 выделим особо.

Теорема 3. Оператор I^1 ограничен при действии $C_{\lambda-1}^\mu(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_\lambda^\mu(\overline{D}, \infty)$ и компактен при действии $C_{\lambda-1}^\mu(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_{\lambda+\varepsilon}^\mu(\overline{D}, \infty)$, $\varepsilon > 0$. При этом любая функция ϕ из класса

$$\phi \in C_\lambda^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D), \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} - J \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi \in C_{\lambda-1}^\mu(\overline{D}),$$

единственным образом представима в виде

$$\phi = I^0 \varphi^0 + I^1 \varphi^1$$

с вещественной вектор-функцией $\varphi^0 \in C^\mu(\Gamma)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{\Gamma_j} \varphi(t) d_1 t = 0, \quad 1 \leq j \leq m,$$

и комплексной вектор-функцией $\varphi^1 \in C_{\lambda-1}^\mu(\overline{D}, \infty)$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы об ограниченности оператора $I^1 : C_{\lambda-1}^\mu(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_\lambda^\mu(\overline{D}, \infty)$ устанавливается аналогично тому, как это сделано в [8]. В [8] также установлено, что сингулярный оператор S^1 ограничен в пространстве $C_{\lambda-1}^\mu(\overline{D}, \infty)$. Отсюда с учетом (16) и отмеченного в [8] свойства компактности вложения

$$C_{\delta-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon}(\overline{D}, \infty) \subseteq C_\delta^\mu(\overline{D}, \infty), \quad \varepsilon > 0,$$

следует утверждение теоремы о компактности оператора I^1 .

Вторая часть теоремы устанавливается совершенно аналогично случаю конечной области. $\square$

С помощью теоремы 3, следуя схеме доказательства теоремы 1, приходим к справедливости следующего результата.

Теорема 4. Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$, C — классу $C^\nu(\Gamma)$, $\mu < \nu < 1$, и $G = (CB_1, \overline{CB}_2)$. Тогда в предположении (28) условие (6) необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (1), (4) в классе (27), а ее индекс дается формулой

$$\kappa = - \sum_{j=1}^m \frac{1}{\pi} [\arg \det G]_{\Gamma_j} - ml.$$

Если дополнительно $C \in C^{1,\nu}(\Gamma)$, то любое решение U задачи из этого класса с правой частью $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ в действительности принадлежит $C_\lambda^{1,\mu}(\overline{D}, \infty)$.

Аналогичным образом формулируется и аналог теоремы 2 для системы (1) с вещественными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абаполова Е. А., Солдатов А. П. К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре // Науч. ведомости БелГУ. — 2010. — № 5 (76), вып. 18. — С. 6–20.
2. Боярский Б. В. Теория обобщенного аналитического вектора // Ann. Polon. Math. — 1965. — 17, № 3. — С. 281–320.
3. Ващенко О. В., Солдатов А. П. Интегральное представление решений обобщенной системы Бельтрами // Науч. ведомости БелГУ. Сер. «Информатика и прикладная математика». — 2006. — вып. 6, 1 (21). — С. 3–6.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
5. Пале Р. Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. — М.: Мир, 1970.
6. Солдатов А. П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1991. — 55, № 5. — С. 1070–1100.
7. Солдатов А. П. Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису // Совр. мат. прилож. — 2010. — 67. — С. 99–102.
8. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I // Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — 63, № 1. — С. 1–189.
9. Солдатов А. П., Чернова О. В. Задача Римана—Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера // Науч. ведомости БелГУ. — 2009. — № 13 (68), вып. 17/2. — С. 115–121.
10. Gilbert R. P., Buchanan J. L. First-Order Elliptic Systems: A Function Theoretic Approach. — New York: Academic Press, 1983.
11. Soldatov A. P. Hyperanalytic functions and their applications // J. Math. Sci. — 2006. — 132, № 6. — С. 827–882.

А. П. Солдатов

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН

E-mail: soldatov48@gmail.com

О. В. Чернова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: volga@mail.ru



НЕОДНОРОДНОЕ ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В СЕКТОРИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

© 2018 г. В. Е. ФЕДОРОВ, Е. А. РОМАНОВА

Аннотация. В работе доказана однозначная разрешимость задачи Коши для линейного неоднородного уравнения в банаховом пространстве, разрешенного относительно дробной производной Гerasимова—Капуто. Предполагается, что оператор при искомой функции в уравнении порождает экспоненциально ограниченное аналитическое в секторе, содержащем положительную полуось, семейство разрешающих операторов соответствующего однородного уравнения. Получен вид решения исследуемой задачи Коши. Общие результаты использованы при исследовании однозначной разрешимости одного класса начально-краевых задач для уравнений в частных производных, разрешимых относительно дробной производной Гerasимова—Капуто по времени, содержащего в простейшем случае начально-краевые задачи для дробного диффузионного или диффузионно-волнового уравнения.

Ключевые слова: дробная производная Гerasимова—Капуто, эволюционное уравнение, аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов, начально-краевая задача, диффузионно-волновое уравнение.

AMS Subject Classification: 35R11, 34G10

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	103
2. Разрешающие операторы	104
3. Неоднородная задача Коши	106
4. Один класс начально-краевых задач	109
Список литературы	112

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $A : D_A \rightarrow \mathfrak{Z}$ — линейный замкнутый оператор с областью определения D_A , плотной в банаховом пространстве $\mathfrak{Z}$. Для уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $\alpha > 0$, D_t^α — дробная производная Гerasимова—Капуто (см. [2, 11]), $f : [0, T] \rightarrow \mathfrak{Z}$, $T \in (0, \infty]$, рассмотрим задачу Коши

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2)$$

При $\alpha = 1$ одним из важнейших является случай существования аналитической в содержащем положительную полуось секторе полугруппы операторов, разрешающей уравнение $\dot{z}(t) = Az(t)$ (см. [3, 5, 6]). Оператор A , порождающий такую полугруппу, называется *секториальным* (см. [4]). Условия, обобщающие секториальность, т.е. условия существования экспоненциально ограниченного аналитического в секторе разрешающего семейства операторов однородного уравнения (1), сформулированы в [10, теорема 2.14] как следствие более общей теоремы о разрешимости эволюционных интегральных уравнений (см. см. [15, теорема 2.1] и [12]). Однако эти работы не

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (постановление № 211 от 16.03.2013 г., соглашение № 02.А03.21.0011) и Министерства образования и науки РФ (задание № 1.6462.2017/БЧ).

содержат результатов об однозначной разрешимости и виде решения задачи Коши для неоднородного уравнения (1), (2). Именно этим вопросам посвящена данная работа.

Полученные результаты позволили исследовать один класс начально-краевых задач для уравнений в частных производных, разрешимых относительно дробной производной Герасимова—Капуто по времени. Простейшими представителями этого класса являются начально-краевые задачи для дробного диффузионного или диффузионно-волнового уравнения, которые другими методами исследовалось многими авторами (см., например, обзор в [13]).

Отметим, что если оператор A порождает экспоненциально ограниченное разрешающее семейство операторов однородного уравнения (1) при $\alpha > 2$, то он является ограниченным (см. [10, теорема 2.6]), и исследование задачи (1), (2) существенно упрощается. В случае же $\alpha = 2$ соответствующие результаты получены ранее методами теории косинус оператор-функций (см. обзор [1]). Поэтому далее будет рассматриваться только случай $\alpha \in (0, 2)$.

2. РАЗРЕШАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\mathfrak{Z}$ — банахово пространство. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ банахово пространство линейных непрерывных операторов из $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{Z}$. Множество линейных замкнутых операторов с плотной в $\mathfrak{Z}$ областью определения, действующих в $\mathfrak{Z}$, будем обозначать $\mathcal{Cl}(\mathfrak{Z})$.

Для $\beta > 0$ введем обозначение $g_\beta(t) = t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$, $t > 0$, и

$$J_t^\beta h(t) = (g_\beta * h)(t) = \int_0^t g_\beta(t-s)h(s)ds = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}h(s)ds.$$

Пусть $\alpha > 0$, m — наименьшее целое число, большее или равное α , D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Герасимова—Капуто, т.е.

$$D_t^\alpha f(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)g_{k+1}(t) \right).$$

Пусть $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Для оператора $A \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{Z})$, $\alpha \in (0, 2)$, рассмотрим уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (3)$$

Напомним, что область определения D_A линейного замкнутого оператора A , снабженная нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} = \|\cdot\|_{\mathfrak{Z}} + \|A \cdot\|_{\mathfrak{Z}}$, является банаховым пространством, которое также будем обозначать символом D_A . Функция $z \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; D_A) \cap C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{Z})$, для которой

$$g_{m-\alpha} * \left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(0)g_{k+1} \right) \in C^m(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{Z}),$$

называется *решением* уравнения (3), если для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ выполняется равенство (3).

Множество операторов $\{Z(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ называется *разрешающим семейством операторов* для уравнения (3), если выполняются следующие условия:

- (i) отображение $Z(\cdot)$ сильно непрерывно на $\overline{\mathbb{R}}_+$, $Z(0) = I$;
- (ii) для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ имеем $Z(t)[D_A] \subset D_A$, $Z(t)Az_0 = AZ(t)z_0$ при любом $z_0 \in D_A$;
- (iii) для каждого $z_0 \in D_A$ функция $Z(t)z_0$ является решением задачи Коши $z(0) = z_0$, $z^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, для уравнения (3).

Обозначим через $\rho(A)$ резольвентное множество оператора A . В обозначениях работы [10] оператор $A \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{Z})$ принадлежит классу операторов $\mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, если существует разрешающее семейство операторов $\{Z(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ для уравнения (3), допускающее аналитическое продолжение в сектор $\Sigma_{\theta_0} \equiv \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0 - \pi/2, t \neq 0\}$ и для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ найдется такая константа $C(a, \theta)$, что для всех $t \in \Sigma_\theta$ выполняется неравенство $\|Z(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leq C(a, \theta)e^{a \operatorname{Re} t}$. Согласно теореме 2.14 из [10] (см. также более общую теорему 2.1 из [15]) $A \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha \in (0, 2)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- (i) при всех $\lambda \in S_{a_0, \theta_0} \equiv \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$ выполняется $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;
(ii) для любых $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ найдется такая константа $K = K(a, \theta) > 0$, что при всех $\mu \in S_{a, \theta}$

$$\|R_{\mu^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leq \frac{K(a, \theta)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu - a)|},$$

где $R_{\mu^\alpha}(A) = (\mu^\alpha I - A)^{-1}$ — резольвента оператора A в точке μ^α .

Будем писать $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\alpha > 0$, если для оператора A выполняются условия (i) и (ii) из предыдущего абзаца. Таким образом, в силу теоремы 2.14 из [10] имеем $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0) = \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha \in (0, 2)$. Введем обозначение $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Лемма 2.1. Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\Gamma = \partial S_{a_0+1, \theta_0}$. Тогда семейства операторов

$$\left\{ Z_{\alpha, \beta}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-\beta} (\mu^\alpha I - A)^{-1} e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}) : t \in \mathbb{R}_+ \right\}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

аналитически продолжимы в сектор $\Sigma_{\theta_0} = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta_0 - \pi/2, \tau \neq 0\}$. При этом для любых $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$, существует такая константа $C_{n, \beta} = C_{n, \beta}(a, \theta)$, что при всех $\tau \in \Sigma_\theta = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \pi/2, \tau \neq 0\}$

$$\|Z_{\alpha, \beta}^{(n)}(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq \frac{C_{n, \beta}(a, \theta) e^{a \operatorname{Re} \tau}}{|\tau|^{n+1-\beta}}. \quad (4)$$

Доказательство. Возьмем контур

$$\Gamma = \Gamma_\varepsilon = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \mu = \varepsilon - |x| - ix \operatorname{tg} \theta_0, x \in \mathbb{R} \right\}, \quad \varepsilon > a_0, \quad (5)$$

лежащий в S_{a_0, θ_0} . Для краткости введем обозначение $-\operatorname{tg} \theta_0 = h > 0$. Нетрудно видеть, что в определении операторов $Z_{\alpha, \beta}(t)$ контур Γ_ε можно заменить контуром Γ_{ε_1} с другим $\varepsilon_1 > a_0$.

Интегралы

$$G_k^\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{k+\alpha-\beta} R_{\mu^\alpha}(A) e^{\mu \tau} d\mu, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

сходятся равномерно по параметру $\tau \in B_R(0) \cap [\Sigma_\theta \setminus B_r(0)]$, где $B_r(0) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < r\}$, $0 < r < R$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$. Пусть $a \in (a_0, \varepsilon)$. Положив $\tau = b + ic$, получим неравенство

$$\|G_k^\tau\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leq \frac{K(a, \theta)}{2\pi} \int_{\Gamma} |\mu|^{k+1-\beta} |\mu - a|^{-1} |e^{\mu \tau}| |d\mu|.$$

Используя симметрию контура Γ , его параметризацию (5) и тот факт, что сразу для всех $b + ic \in \Sigma_\theta \setminus B_r(0)$ выполняется неравенство $-b - hc \leq -c_3 < 0$, получим

$$\begin{aligned} \|G_k^\tau\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} &\leq \frac{K(a, \theta) \sqrt{1+h^2}}{\pi} \int_0^\infty ((\varepsilon - x)^2 + h^2 x^2)^{(k+1-\beta)/2} ((\varepsilon - a - x)^2 + h^2 x^2)^{-1/2} e^{(\varepsilon-x)b-hcx} dx \leq \\ &\leq \frac{K(a, \theta) e^{\varepsilon R} \sqrt{1+h^2}}{\pi} \int_0^\infty ((\varepsilon - x)^2 + h^2 x^2)^{(k+1-\beta)/2} ((\varepsilon - a - x)^2 + h^2 x^2)^{-1/2} e^{-c_3 x} dx. \end{aligned}$$

Для любого $\tau \in \Sigma_{\theta_0}$ имеем $\tau \in B_R(0) \cap [\Sigma_\theta \setminus B_r(0)]$ при некотором $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, достаточно малом $r > 0$ и достаточно большом $R > 0$. Следовательно, упомянутая равномерная сходимость влечет бесконечную дифференцируемость $Z_{\alpha, \beta}(\tau)$ внутри сектора Σ_{θ_0} , и равенства $Z_{\alpha, \beta}^{(k)}(\tau) = G_k^\tau$ выполняются при всех $k \in \mathbb{N}_0$.

При $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $\delta = \theta_0 - \theta$, $\varepsilon > a > a_0$, $-\varepsilon \cos \theta_0 > a$, $k \in \mathbb{N}_0$ возьмем контур

$$\Gamma_2 = \left\{ \nu \in \mathbb{C} : \nu = \varepsilon - |x| - ix \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right), x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Для любого $\tau \in \Sigma_\theta$ построим контур $\Gamma_\tau = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \nu\tau^{-1}, \nu \in \Gamma_2\}$. Легко увидеть, что $\Gamma_\tau \subset S_{a_0, \theta_0}$. Действительно, для $\mu \in \Gamma_\tau$

$$|\arg(\mu - a)| = |\arg(\nu\tau^{-1})| = |\arg \nu - \arg \tau| \leq |\arg \nu| + |\arg \tau| < \theta_0.$$

С помощью рассуждений, аналогичных использованным выше, легко показать сходимость интегралов

$$\int_{\Gamma_\tau} \mu^{k+\alpha-\beta} R_{\mu^\alpha}(A) e^{\mu\tau} d\mu = \int_{\Gamma} \mu^{k+\alpha-\beta} R_{\mu^\alpha}(A) e^{\mu\tau} d\mu = 2\pi i Z_{\alpha, \beta}^{(k)}(\tau),$$

поскольку $\mu\tau = a\tau + \nu$, $|\arg \nu| = \pi/2 + \delta \in (\pi/2, \pi)$. Равенство интегралов при этом следует из аналитичности подынтегральных выражений на множестве S_{a_0, θ_0} .

При $\beta \leq k+1$

$$\begin{aligned} \|Z_{\alpha, \beta}^{(k)}(\tau)\|_{\mathcal{L}(3)} &\leq \frac{K(a, \theta)}{2\pi} \int_{\Gamma_\tau} |\mu|^{k+1-\beta} \frac{|e^{\mu\tau}|}{|\mu - a|} |d\mu| \leq \frac{K(a, \theta) e^{a \operatorname{Re} \tau}}{2\pi} \int_{\Gamma_{\tau-a}} (|\lambda| + a)^{k+1-\beta} \frac{|e^{\lambda\tau}|}{|\lambda|} |d\lambda| \leq \\ &\leq \frac{K(a, \theta) e^{a \operatorname{Re} \tau}}{2\pi} \left(1 - \frac{a}{\varepsilon \cos \theta_0}\right)^{k+1-\beta} \int_{\Gamma_{\tau-a}} |\lambda|^{k-\beta} |e^{\lambda\tau}| |d\lambda|. \end{aligned}$$

В случае $\beta > k+1$ имеем

$$\begin{aligned} \|Z_{\alpha, \beta}^{(k)}(\tau)\|_{\mathcal{L}(3)} &\leq \frac{K(a, \theta) e^{a \operatorname{Re} \tau}}{2\pi} \int_{\Gamma_{\tau-a}} (|\lambda| - a)^{k+1-\beta} \frac{|e^{\lambda\tau}|}{|\lambda|} |d\lambda| \leq \\ &\leq \frac{K(a, \theta) e^{a \operatorname{Re} \tau}}{2\pi} \left(1 + \frac{a}{\varepsilon \cos \theta_0}\right)^{k+1-\beta} \int_{\Gamma_{\tau-a}} |\lambda|^{k-\beta} |e^{\lambda\tau}| |d\lambda|. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной $\lambda = \nu\tau^{-1}$, и правая часть последнего неравенства в каждом из случаев примет вид соответственно

$$\frac{K(a, \theta) e^{a \operatorname{Re} \tau}}{2\pi |\tau|^{k+1-\beta}} \left(1 \pm \frac{a}{\varepsilon \cos \theta_0}\right)^{k+1-\beta} \int_{\Gamma_2} |\nu|^{k-\beta} |e^\nu| |d\nu| = \frac{C_{k, \beta}(a, \theta) e^{a \operatorname{Re} \tau}}{|\tau|^{k+1-\beta}},$$

где

$$C_{k, \beta}(a, \theta) = \frac{K(a, \theta)}{2\pi} \max \left\{ \left(1 - \frac{a}{\varepsilon \cos \theta_0}\right)^{k+1-\beta}, \left(1 + \frac{a}{\varepsilon \cos \theta_0}\right)^{k+1-\beta} \right\} \int_{\Gamma_2} |\nu|^{k-\beta} |e^\nu| |d\nu|.$$

□

Замечание 2.1. Как известно, разрешающим семейством операторов уравнения (3) является $\{Z_{\alpha, 1}(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$, где $Z_{\alpha, 1}(0) = I$ (см. [10]).

3. НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА КОШИ

Рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (6)$$

для неоднородного линейного уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

где $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ в банаховом пространстве $\mathfrak{Z}$, $f : [0, T] \rightarrow \mathfrak{Z}$ при заданном $T > 0$. Решением задачи (6), (7) называется такая функция $z \in C([0, T]; D_A) \cap C^{m-1}([0, T]; \mathfrak{Z})$, что

$$g_{m-\alpha} * \left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(0) g_{k+1} \right) \in C^m([0, T]; \mathfrak{Z})$$

и выполняются равенства (6) и (7) при всех $t \in [0, T)$.

Теорема 3.1. Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $f \in C([0, T]; D_A)$. Тогда при любых $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, существует единственное решение задачи (6), (7). При этом оно имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{\alpha, k+1}(t) z_k + \int_0^t Z_{\alpha, \alpha}(t-s) f(s) ds.$$

Доказательство. Для $w_0 \in D_A$ рассмотрим отображение из $\overline{\mathbb{R}}_+$ в пространство $\mathfrak{Z}$, задаваемое равенством

$$w_\beta(t) = Z_{\alpha, \beta}(t) w_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-\beta} R_{\mu^\alpha}(A) w_0 e^{\mu t} d\mu.$$

Для $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (m-1, m)$, $\beta \in \{1, 2, \dots, m\}$, $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $\beta \neq k+1$, имеем

$$\begin{aligned} w_\beta^{(k)}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{k-\beta} (\mu^\alpha I - A) R_{\mu^\alpha}(A) w_0 e^{\mu t} d\mu + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{k-\beta} A R_{\mu^\alpha}(A) w_0 e^{\mu t} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{k-\beta} R_{\mu^\alpha}(A) A w_0 e^{\mu t} d\mu. \end{aligned}$$

При $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $\varepsilon > a > a_0$, $t \in [0, 1]$ норма последнего интеграла ограничивается сверху выражением

$$\frac{K(a, \theta) e^\varepsilon}{\pi} \sqrt{1+h^2} \int_0^\infty [(\varepsilon - a - x)^2 + h^2 x^2]^{-1/2} [(\varepsilon - x)^2 + h^2 x^2]^{(k-\alpha-\beta+1)/2} dx \|Aw_0\|_{\mathfrak{Z}}.$$

Последний интеграл сходится, так как $k+1 < \alpha+1 < \alpha+\beta$. Следовательно,

$$w_\beta^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{k-\beta} R_{\mu^\alpha}(A) A w_0 d\mu. \quad (8)$$

Проинтегрируем функцию $\mu^{k-\beta} R_{\mu^\alpha}(A) A w_0$ по части Γ , попадающей в круг $B_R(\varepsilon) \equiv \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \varepsilon| \leq R\}$, дополненной правой частью Γ_R окружности $\partial B_R(\varepsilon)$ до замкнутого контура. В силу сходимости интеграла (8) интеграл по части контура Γ , внешней по отношению к кругу $B_R(\varepsilon)$, стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, и

$$\left\| \int_{\Gamma_R} \mu^{k-\beta} R_{\mu^\alpha}(A) A w_0 d\mu \right\|_{\mathfrak{Z}} \leq \frac{2\pi R c}{R^{\alpha+\beta-k}} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

В результате $w_\beta^{(k)}(0) = 0$, $\beta \in \{1, 2, \dots, m\}$, $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $\beta \neq k+1$.

Аналогичным образом при $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $\beta = k+1$ получим

$$\begin{aligned} w_{k+1}^{(k)}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-1} w_0 e^{\mu t} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-1} R_{\mu^\alpha}(A) A w_0 e^{\mu t} d\mu = w_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-1} R_{\mu^\alpha}(A) A w_0 e^{\mu t} d\mu, \\ w_{k+1}^{(k)}(0) &= w_0. \end{aligned}$$

Через $\mathfrak{L}[f]$ обозначим преобразование Лапласа функции f , а символом $\mathfrak{L}^{-1}[F]$ — обратное преобразование Лапласа функции F . При $\operatorname{Re} \lambda > a$ выберем $\varepsilon \in (a, \operatorname{Re} \lambda)$; тогда при $\beta > 0$

$$\mathfrak{L}[w_\beta](\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-\beta} R_{\mu^\alpha}(A) e^{\mu t} w_0 d\mu dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu^{\alpha-\beta} R_{\mu^\alpha}(A) w_0}{\lambda - \mu} d\mu = \lambda^{\alpha-\beta} R_{\lambda^\alpha}(A) w_0. \quad (9)$$

Используя свойства преобразования Лапласа для производной Герасимова—Капуто (см. [14]), при $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ получим

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[D^\alpha w_{k+1}] &= \lambda^\alpha \mathfrak{L}[w_{k+1}] - \sum_{l=0}^{m-1} \lambda^{\alpha-l-1} w_{k+1}^{(l)}(0) = \\ &= \lambda^{2\alpha-k-1} R_{\lambda^\alpha}(A) w_0 - \lambda^{\alpha-k-1} w_0 = \lambda^{\alpha-k-1} A R_{\lambda^\alpha}(A) w_0 = \mathfrak{L}[A w_{k+1}]\end{aligned}$$

в $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \varepsilon\}$, где

$$A w_{k+1} = A \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1} R_{\mu^\alpha}(A) w_0 e^{\mu t} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1} R_{\mu^\alpha}(A) A w_0 e^{\mu t} d\mu.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{m-1} Z_{\alpha, k+1}(t) z_k$$

при $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ является решением задачи Коши (6) для однородного уравнения $D_t^\alpha z(t) = A z(t)$.

Введем обозначение

$$Z_f(t) = \int_0^t Z_{\alpha, \alpha}(t-s) f(s) ds.$$

Рассуждая, как прежде, докажем, что $Z_{\alpha, \alpha}^{(k)}(0) = 0$ при $\alpha > 1$, $k = 0, 1, \dots, m-2$. Действительно, при $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\|Z_{\alpha, \alpha}^{(k)}(t)\|_{\mathcal{L}(3)} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\mu|^k \|R_{\mu^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(3)} |e^{\mu t}| |d\mu| \leq \\ &\leq c e^\varepsilon \int_0^\infty [(\varepsilon - a - x)^2 + h^2 x^2]^{-1/2} [(\varepsilon - x)^2 + h^2 x^2]^{(k-\alpha+1)/2} dx,\end{aligned}$$

$$\left\| \int_{\Gamma_R} R_{\mu^\alpha}(A) d\mu \right\|_{\mathcal{L}(3)} \leq \frac{2\pi R c}{R^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$$

так как $\alpha - k > 1$. Здесь Γ_R — тот же контур, что и в доказательстве леммы 2.1. Таким образом, для $\alpha > 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$

$$Z_f^{(k)}(t) = \int_0^t Z_{\alpha, \alpha}^{(k)}(t-s) f(s) ds.$$

Отметим также, что в силу неравенства (4)

$$\|Z_f^{(m-1)}(t)\| \leq t \max_{s \in [0, t]} \|Z_{\alpha, \alpha}^{(m-1)}(s)\|_{\mathcal{L}(3)} \max_{s \in [0, t]} \|f(s)\|_3 \leq t^{\alpha+1-m} e^{at} \|f\|_{C([0, t]; 3)} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0+.$$

Доопределим $Z_{\alpha, \alpha}$ и f нулем вне полуинтервала $[0, T)$ с конечным $T > 0$; тогда $Z_f = Z_{\alpha, \alpha} * f$ является сверткой, поэтому

$$\mathfrak{L}[Z_f] = \mathfrak{L}[Z_{\alpha, \alpha}] \mathfrak{L}[f] = R_{\lambda^\alpha}(A) \mathfrak{L}[f]$$

в $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ в силу (9). Кроме того,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[D^\alpha Z_f] &= \lambda^\alpha \mathfrak{L}[Z_f - \sum_{l=0}^{m-1} \lambda^{\alpha-l-1} Z_f^{(l)}(0)] = \lambda^\alpha R_{\lambda^\alpha}(A) \mathfrak{L}[f] = \\ &= A R_{\lambda^\alpha}(A) \mathfrak{L}[f] + \mathfrak{L}[f] = R_{\lambda^\alpha}(A) \mathfrak{L}[A f] + \mathfrak{L}[f] = \mathfrak{L}[A Z_f] + \mathfrak{L}[f],\end{aligned}$$

так как $f \in C([0, T]; D_A)$; следовательно, $Z_f \in C([0, T]; D_A)$, $AZ_f = Z_{Af}$.

Таким образом, Z_f является решением задачи Коши (6) с $z_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для неоднородного уравнения (7), и $\sum_{k=0}^{m-1} Z_{\alpha, k+1}(t)z_k + Z_f(t)$ — решение задачи (6), (7).

Если существует два решения $\hat{z}_1$ и $\hat{z}_2$ задачи (6), (7), то их разность $z = \hat{z}_1 - \hat{z}_2$ является решением задачи Коши (6) с $z_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$. Используя преобразование Лапласа обеих частей однородного уравнения, получим $\mathfrak{L}[D^\alpha z] = \lambda^\alpha \mathfrak{L}[z] = A\mathfrak{L}[z]$, поэтому $\mathfrak{L}[z] \equiv 0$ в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > a_0\}$, так как $A \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$. Таким образом, $z(t) \equiv 0$. $\square$

4. ОДИН КЛАСС НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Пусть заданы многочлены

$$P_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i, \quad Q_{n_1}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n_1} d_j \lambda^j,$$

$c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, n_1$, $c_n, d_{n_1} \neq 0$, $n < n_1$. Пусть, кроме того, $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, а пучок операторов $\Lambda, B_1, B_2, \dots, B_r$ регулярно эллиптичен (см. [7, с. 454]); здесь

$$(\Lambda v)(x) = \sum_{|q| \leq 2r} a_q(x) D_x^q v(x), \quad a_q \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

$$(B_l v)(x) = \sum_{|q| \leq r_l} b_{lq}(x) D_x^q v(x), \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, 2, \dots, r,$$

$D_x^q = D_{x_1}^{q_1} D_{x_2}^{q_2} \dots D_{x_s}^{q_s}$, $D_{x_i}^{q_i} = \partial^{q_i} / \partial x_i^{q_i}$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_s) \in \mathbb{N}_0^s$. Пусть линейный оператор $\Lambda_1 : D_{\Lambda_1} \rightarrow L_2(\Omega)$, действующий по правилу $\Lambda_1 u = \Lambda u$, замкнут, имеет плотную в $L_2(\Omega)$ область определения $D_{\Lambda_1} = H_{\{B_l\}}^{2r}(\Omega) \equiv \{v \in H^{2r}(\Omega) : (B_l u)(x) = 0, x \in \partial\Omega, l = 1, 2, \dots, r\}$, самосопряжен, имеет ограниченный справа спектр. В таком случае спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 является дискретным, вещественным и сгущается к $-\infty$ (см. [7]). Пусть $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Λ_1 , занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^\alpha P_n(\Lambda)u(x, t) = Q_{n_1}(\Lambda)u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (10)$$

$$B_l \Lambda^k u(x, t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_1 - 1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (11)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad \dots, \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}(x, 0) = u_{m-1}(x), \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

где $\alpha \in (0, 2)$, m — наименьшее натуральное число, большее или равное α .

Лемма 4.1. Пусть $\alpha \in (1, 2)$ и выполняются условия

$$\exists \theta_1 \in (\pi/2, \pi) \quad \exists a_0 > 1 \quad \forall \mu \in S_{a_0, \theta_1} \quad \mu^\alpha \in \rho(A),$$

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall \mu \in S_{a_0, \theta_1} \quad \|R_{\mu^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(3)} \leq \frac{C_1}{|\mu^\alpha - a_0|}.$$

Тогда существует такое $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$, что $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Доказательство. Имеем $\min\{|\mu| : \mu \in S_{a_0, \theta_0}\} = a_0 \sin \theta_0$. При $\alpha > 1$ возьмем θ_0 достаточно близким $\pi/2$ и получим неравенства

$$\sin \theta_0 > a_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad \sin^\alpha \theta_0 > a_0^{1-\alpha}, \quad 0 < 1 - \frac{a_0^{1-\alpha}}{\sin^\alpha \theta_0} = 1 - \frac{a_0}{(a_0 \sin \theta_0)^\alpha} \leq 1 - \frac{a_0}{|\mu|^\alpha}$$

при всех $\mu \in S_{a_0, \theta_0}$.

С другой стороны при $s = \sup \{ |1 - a_0/\mu| : \mu \in S_{a_0, \theta_0} \}$ возьмем

$$C = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{a_0}{(a_0 \sin \theta_0)^\alpha} \right) > 0$$

и получим при $\mu \in S_{a_0, \theta_0}$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a_0}{|\mu|^\alpha} &\geq 1 - \frac{a_0}{(a_0 \sin \theta_0)^\alpha} \geq C \left| 1 - \frac{a_0}{\mu} \right| = C \frac{|\mu - a_0|}{|\mu|}, \\ |\mu - a_0 \mu^{1-\alpha}| &= |\mu| |1 - a_0 \mu^{-\alpha}| \geq |\mu| \left| 1 - \frac{a_0}{|\mu|^\alpha} \right| \geq C |\mu - a_0|, \\ \frac{1}{|\mu^\alpha - a_0|} &= \frac{1}{|\mu^{\alpha-1}| |\mu - a_0 \mu^{1-\alpha}|} \leq \frac{C^{-1}}{|\mu^{\alpha-1}| |\mu - a_0|}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что при $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $\mu \in S_{a, \theta}$ неравенство $|\mu - a_0| \geq (a - a_0) \sin \theta$ очевидно, поэтому

$$|\mu - a| \leq |\mu - a_0| + a - a_0 \leq \left(1 + \frac{1}{\sin \theta_0} \right) |\mu - a_0|, \quad \frac{1}{|\mu - a_0|} \leq \frac{1 + \frac{1}{\sin \theta_0}}{|\mu - a|}.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.2. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и выполняются условия

$$\begin{aligned} \exists \theta_1 \in (\pi/2, \pi) \quad \exists a_0 \in (0, 1) \quad \forall \mu \in S_{a_0, \theta_1} \quad \mu^\alpha \in \rho(A), \\ \exists C_1 > 0 \quad \forall \mu \in S_{a_0, \theta_1} \quad \|R_{\mu^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leq \frac{C_1}{|\mu^\alpha - a_0|}. \end{aligned}$$

Тогда существует такое $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$, что $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Доказательство. При θ_0 , достаточно близко к $\pi/2$, получим неравенство $\sin^\alpha \theta_0 > a_0^{1-\alpha}$. Остается повторить доказательство предыдущей леммы. $\square$

Замечание 4.1. Заметим, что условия леммы 4.2 ограничительнее, чем в лемме 4.1, поскольку величину a_0 всегда можно увеличить и сделать больше 1, но не уменьшить.

Положим

$$\mathfrak{Z} = \left\{ v \in H^{2rn}(\Omega) : B_l \Lambda^k v(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad x \in \partial\Omega \right\}, \quad (13)$$

$$D_A = \left\{ v \in H^{2rn_1}(\Omega) : B_l \Lambda^k v(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_1-1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad x \in \partial\Omega \right\}. \quad (14)$$

При условии, что существует оператор $[P_n(\Lambda)]^{-1} : L_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{Z}$, определим в пространстве (13) оператор $Az = [P_n(\Lambda)]^{-1} Q_{n_1}(\Lambda)z$ с областью определения (14).

Теорема 4.1. Пусть $n_1 > n$, $(-1)^{n_1-n}(d_{n_1}/c_n) < 0$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ не содержит корней многочлена $P_n(\lambda)$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$. Тогда для $\alpha \in [1, 2)$ существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, что $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Если, кроме того, $\max_{k \in \mathbb{N}} \{Q_{n_1}(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)\} < 1$, то $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha \in (0, 1)$.

При этом $\sigma(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = Q_{n_1}(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)\}$ для любого $\alpha \in (0, 2)$.

Доказательство. Так как $P_n(\lambda_k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, то существует обратный оператор

$$[P_n(\Lambda)]^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{P_n(\lambda_k)} : L_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{Z},$$

непрерывность которого нетрудно показать.

Последовательность $\{\mu_k \in \mathbb{R} : \mu_k = Q_{n_1}(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)\}$ стремится к $-\infty$ в силу условий $n_1 > n$, $(-1)^{n_1-n}(d_{n_1}/c_n) < 0$, и $\mu_k \sim (d_{n_1}/c_n)\lambda_k^{n_1-n}$ при $k \rightarrow \infty$. При $\alpha \in (1, 2)$ возьмем $\varepsilon < \pi/\alpha - \pi/2$,

$\theta_1 = \pi/\alpha - \varepsilon$, $a = \max_{k \in \mathbb{N}} \{Q_{n_1}(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)\} \in \mathbb{R}$, $a_0 = \max\{2, a\}$. Для всех $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{\mu_k : k \in \mathbb{N}\}$ существует оператор

$$(\mu I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu - Q_{n_1}(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)} : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Z}.$$

При всех $z \in \mathfrak{Z}$, $\mu \in S_{a_0, \theta_1}$

$$\|(\mu^\alpha I - A)^{-1} z\|_{\mathfrak{Z}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_k^{2n}) |\langle z, \varphi_k \rangle|^2}{|\mu^\alpha - Q_{n_1}(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)|^2} \leq \frac{\sin^{-2}(\alpha\varepsilon) \|z\|_{\mathfrak{Z}}^2}{|\mu^\alpha - a_0|^2},$$

так как

$$|\arg(\mu^\alpha)| < \alpha\theta_1 < \pi, \quad |\mu^\alpha - Q_{n_1}(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)| \geq |\mu^\alpha - a_0| \sin(\alpha\varepsilon).$$

В силу леммы 4.1 получим требуемое.

Для $\alpha \in (0, 1)$ возьмем $\theta_1 \in (\pi/2, \pi)$, $a = \max_{k \in \mathbb{N}} \{Q_{n_1}(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)\} \in (-\infty, 1)$, $a_0 = \max\{1/2, a\} \in (0, 1)$; тогда для каждого $\mu \in S_{a_0, \theta_1}$ имеем

$$|\arg(\mu^\alpha)| < \theta_1 < \pi, \quad |\mu^\alpha - Q_{n_1}(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)| \geq |\mu^\alpha - a_0| \sin(\alpha\theta_1).$$

Рассуждения, аналогичные доказательству в предыдущем случае, и ссылка на лемму 4.2 приводят к требуемому результату.

Случай $\alpha = 1$ доказывается аналогично, напрямую, без ссылки на лемму. $\square$

Теорема 4.2. Пусть $n_1 > n$, $(-1)^{n_1-n}(d_{n_1}/c_n) < 0$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ не содержит корней многочлена $P_n(\lambda)$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $f \in C([0, T]; D_A)$. Тогда для $\alpha \in [1, 2)$ при любых $u_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, существует единственное решение задачи (10)–(12). В случае $\alpha \in (0, 1)$ задача (10)–(12) имеет единственное решение при произвольных $u_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, если выполняется дополнительное условие $\max_{k \in \mathbb{N}} \{Q_{n_1}(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)\} < 1$.

Доказательство. Задача (10)–(12) уже редуцирована к задаче (6), (7) в пространстве (13) с оператором A , свойства которого изучены в предыдущей теореме. Из теорем 3.1, 4.1 следует требуемое. $\square$

Замечание 4.2. Отметим, что без ограничения $P_n(\lambda_k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, в случае $n_1 \leq n$ однозначная разрешимость задачи (10)–(12) исследовалась в [8], а в случае $n_1 > n$ – в [9].

Пример 4.1. При $n = 0$, $P_0(\lambda) = 1$, $n_1 = 1$, $Q_1(\lambda) = \lambda$ из теоремы 4.2 следует однозначная разрешимость начально-краевой задачи

$$D_t^\alpha u(x, t) = \Lambda u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (15)$$

$$B_l u(x, t) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (16)$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0) = u_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad x \in \Omega, \quad (17)$$

при любых $u_k \in L_2(\Omega)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $f \in C([0, T]; H_{\{B_l\}}^{2r})$.

Если взять $r = 1$, $\Lambda = \Delta = \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ u , например, $B_1 = I$, то из (15)–(17) получим начально-краевую задачу для дробного диффузионного или диффузионно-волнового уравнения (см. в [13] обзор результатов об уравнениях такого вида).

Пример 4.2. При $P_1(\lambda) = 2 + \lambda$, $Q_2(\lambda) = \lambda + \lambda^2$, $s = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $r = 1$, $A = \partial^2/\partial x^2$, $B_1 = I$ получим $\lambda_k = -k^2$, $\varphi_k(x) = \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$. В таком случае задача (10)–(12) имеет вид

$$D_t^\alpha \left(2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times [0, T], \quad (18)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = u''(0, t) = u''(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (19)$$

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l}(x, 0) = u_l(x), \quad l = 0, 1, \dots, m-1, \quad x \in (0, \pi). \quad (20)$$

Нетрудно вычислить, что

$$\max_{k \in \mathbb{N}} \frac{k^4 - k^2}{2 - k^2} = 0 < 1.$$

Поэтому если $u_l \in H_0^4(0, \pi) \equiv \{v \in H^4(0, \pi) : v(0) = v(\pi) = v''(0) = v''(\pi) = 0\}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, и $f \in C([0, T]; H_0^4(0, \pi))$, то по теореме 4.2 существует единственное решение задачи (18)–(20) при $\alpha \in (0, 2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1990. — 28. — С. 87–202
2. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // Прикл. мат. мех. — 1948. — 12. — С. 529–539.
3. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
4. Клемент Ф., Хейманс Х., Ангелент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б. Однопараметрические полугруппы. — М.: Мир, 1992.
5. Костин В. А. К теореме Соломяка–Иосиды для аналитических полугрупп // Алгебра и анализ. — 1999. — 11, № 1. — С. 118–140.
6. Соломяк М. З. Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха // Докл. АН СССР. — 1958. — 122, № 5. — С. 766–769.
7. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
8. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Плеханова М. В. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Диффер. уравн. — 2015. — 51, № 10. — С. 1367–1375.
9. Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. ж. чист. прикл. мат. — 2016. — 16, № 2. — С. 93–107.
10. Bajlekova E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / Ph.D. thesis. — Eindhoven: Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001.
11. Caputo M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent, II // Geophys. J. Astron. Soc. — 1967. — 13. — С. 529–539.
12. Da Prato G., Iannelli M. Linear abstract integrodifferential equations of hyperbolic type in Hilbert spaces // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1980. — 62. — С. 191–206.
13. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam–Boston–Heidelberg: Elsevier, 2006.
14. Podlubny I. Fractional Differential Equations. — San Diego, Boston: Academic Press, 1999.
15. Prüss J. Evolutionary Integral Equations and Applications. — Basel: Springer-Verlag, 1993.

В. Е. Федоров

Челябинский государственный университет;

Шадринский государственный педагогический университет;

Южно-Уральский государственный университет

(национальный исследовательский университет), г. Челябинск

E-mail: kar@csu.ru

Е. А. Романова

Челябинский государственный университет

E-mail: linux_21@mail.ru



КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЕМ ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ ЕГО ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ

© 2018 г. К. У. ХУБИЕВ

Аннотация. В работе исследована краевая задача для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности. Доказана теорема существования и единственности решения задачи, выписано представление решения.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, уравнение смешанного типа, гиперболо-параболическое уравнение, краевая задача.

AMS Subject Classification: 35M10, 35M12

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1 u(x_1, y) = 0, & y > 0, \\ u_x + u_y + cu + \lambda_2 u(x_2, y) = 0, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной отрезками AA_1 , BB_1 , A_1B_1 прямых $x = 0$, $x = r$, $y = T > 0$ соответственно при $y > 0$, характеристиками $AA_2 : x - y = 0$, $BB_2 : x - y = r$ уравнения (1) и отрезком A_2B_2 прямой $y = x_2 - r$ при $y < 0$; $x_1 \in [0, r]$, $x_2 \in [0, r]$; $\lambda_1, \lambda_2, c = \text{const}$.

Нагруженные уравнения смешанного типа играют весьма важную роль в теории тепломассопереноса в составных средах с фрактальной организацией и памятью (см. [10, с. 95]). К краевым задачам для уравнений вида (1) при $y > 0$ сводятся многие задачи, связанные с прогнозированием и регулированием уровня грунтовых вод (см. [10, с. 95]), задачи описания процесса распространения тепла в одномерной ограниченной среде, в которой имеется источник тепла, мощность которого пропорциональна значению температуры (см. [7]). При $y < 0$ уравнение (1) является нагруженным односкоростным уравнением переноса, в математической биологии при $\lambda_2 = 0$ оно известно как уравнение МакКендрика (см. [11, с. 179]). Уравнение

$$u_x + u_y + c(x, y)u + \sum_{i=1}^m c_i(x, y)u(x_i, y) = 0,$$

частным случаем которого является уравнение (1) при $y < 0$, описывает динамику замкнутой популяции особей в случае, когда из популяции в каждый момент времени y изменяется количество особей возрастов $x_1, x_2, \dots, x_m$ (см. [11, с. 244]). В [9] уравнением (1) при $y < 0$ описывается динамика возрастной структуры лимитированной популяции.

Краевые задачи для нагруженных уравнений с частными производными исследовались в работах многих авторов (см. например, [6, 10] и библиографию там же). В настоящее время теория краевых задач для нагруженных уравнений смешанного типа продолжает интенсивно развиваться. Краевые задачи для модельных нагруженных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа и эллипτικο-гиперболического типа с нагруженным слагаемым $\lambda u(x, 0)$ и вырождением порядка в области его гиперболичности как в ограниченной, так и в неограниченной областях исследованы в [10, с. 159, 176]. Там же исследованы внутреннекраевые задачи для уравнений смешанного гиперболо-параболического типа с характеристической и нехарактеристической нагрузками

и их связь с аналогом задачи Трикоми (см. [10, с. 165]). В [2] исследован эффект влияния «нагрузки» $\lambda u_x(x, 0) + \mu u_y(0, y)$ на корректную постановку начально-краевых задач для существенно нагруженного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Отметим также работы (например, [1, 3–5, 8, 12–19]), в которых исследуются локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного и гиперболического типов второго и третьего порядков в различных областях. В этой работе для модельного нагруженного уравнения смешанного гипербола-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности (1) исследуется краевая задача в ограниченной области.

Через Ω_1 и Ω_2 обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно, а через J — интервал $0 < x < r$ прямой $y = 0$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u(x, y)$, принадлежащую классу $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_x^2(\Omega_1)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(r, y) = \varphi_r(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (2)$$

где $\varphi_0(y), \varphi_r(y)$ — заданные непрерывные функции.

Здесь надо отметить, что при $\lambda_2 = 0$ (то есть в гиперболической части области задается ненагруженное уравнение, или уравнение с нагруженным слагаемым $\lambda_2 u(x, 0)$) решение можно найти в полуполосе D^- , ограниченной характеристиками AA_2, BB_2 уравнения (1) и отрезком прямой $y = 0$. А в случае уравнения (1) область будет ограничиваться еще и отрезком прямой $y = x_2 - r$.

2. Соотношения между $u(x, 0)$ и $u_y(x, 0)$ на линии изменения типа. Пусть существует решение $u(x, y)$ задачи (1)–(2). Введем обозначения $\tau(x) = u(x, 0)$, $\nu(x) = u_y(x, 0)$. Тогда

$$\tau(0) = \varphi_0(0), \quad \tau(r) = \varphi_r(0), \quad (3)$$

причем $\tau(x) \in C(\bar{J}) \cap C^1(J)$, $\nu(x) \in C(J)$.

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y \rightarrow +0$, получаем, что $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB будут связаны следующим соотношением, принесенным из области Ω_1 :

$$\tau''(x) - \nu(x) + \lambda_1 \tau(x_1) = 0. \quad (4)$$

Также переходя к пределу при $y \rightarrow -0$, в Ω_2 получим

$$\tau'(x) + \nu(x) + c\tau(x) + \lambda_2 \tau(x_2) = 0. \quad (5)$$

Из (4), (5) получаем нагруженное дифференциальное уравнение

$$\tau''(x) + \tau'(x) + c\tau(x) = f, \quad (6)$$

где $f = -\lambda_1 \tau(x_1) - \lambda_2 \tau(x_2)$. Решение задачи (3) для уравнения (6) представимо в виде

$$\tau(x) = \int_0^r G(x, \xi) f d\xi + G_\xi(x, r) \varphi_r(0) - G_\xi(x, 0) \varphi_0(0), \quad (7)$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина задачи (6), (3), имеющая вид

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\exp([\xi - x]/2) \operatorname{sh}(p\xi) \operatorname{sh}(p[x - r])}{p \operatorname{sh}(pr)}, & 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{\exp([\xi - x]/2) \operatorname{sh}(px) \operatorname{sh}(p[\xi - r])}{p \operatorname{sh}(pr)}, & x \leq \xi \leq r; \end{cases}$$

где $p = \sqrt{1 - 4c}/2$, $pr \neq \pi n$ ($c \neq \pi^2 n^2 / r^2 + 1/4$), $n = 1, 2, \dots$

Здесь надо отметить, что $G(x, \xi)$ является действительнзначной функцией, зависящей от комплексного числа p .

Учитывая, что $f = \text{const}$, из (7) легко получить

$$\tau(x) = \alpha(x)f + \beta(x), \quad (8)$$

где

$$\alpha(x) = \frac{4 \operatorname{sh}(pr) - 4e^{-x/2} \operatorname{sh}(p[r-x]) - 4e^{(r-x)/2} \operatorname{sh}(px)}{(1-4p^2) \operatorname{sh}(pr)},$$

$$\beta(x) = \frac{e^{(r-x)/2} \operatorname{sh}(px)}{\operatorname{sh}(pr)} \varphi_r(0) + \frac{e^{-x/2} \operatorname{sh}(p[r-x])}{\operatorname{sh}(pr)} \varphi_0(0).$$

Заметим, что при $c \equiv 0$

$$\alpha(x) = \frac{x(1-e^{-r}) - r(1-e^{-x})}{1-e^{-r}}, \quad \beta(x) = \frac{1-e^{-x}}{1-e^{-r}} \varphi_r(0) + \frac{e^{-x} - e^{-r}}{1-e^{-r}} \varphi_0(0).$$

Устремляя $x \rightarrow x_1$ и $x \rightarrow x_2$, при выполнении условия

$$1 + \lambda_1 \alpha(x_1) + \lambda_2 \alpha(x_2) \neq 0 \quad (9)$$

из (8) найдем нагруженные слагаемые:

$$\tau(x_1) = \frac{[1 + \lambda_2 \alpha(x_2)] \beta(x_1) - \lambda_2 \alpha(x_1) \beta(x_2)}{1 + \lambda_1 \alpha(x_1) + \lambda_2 \alpha(x_2)}, \quad \tau(x_2) = \frac{[1 + \lambda_1 \alpha(x_1)] \beta(x_2) - \lambda_1 \alpha(x_2) \beta(x_1)}{1 + \lambda_1 \alpha(x_1) + \lambda_2 \alpha(x_2)}.$$

Таким образом, после нахождения $\tau(x_i)$ ($i = 1, 2$) функция $\tau(x)$ полностью определяется формулой (7).

Здесь отметим, что условие (9) не пусто. Например, при $c \leq 1/4$, $\lambda_1 \leq 0$, $\lambda_2 \leq 0$ или $c > 1/4$, $\lambda_1 \leq 0$, $\lambda_2 \leq 0$ и $r \leq 2\pi/\sqrt{4c-1}$ оно всегда выполняется. Если $x_1 = x_2 = x_0$, то условие (9) примет вид

$$1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \alpha(x_0) \neq 0.$$

которое, например, всегда выполняется при $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$ и $c \leq 1/4$ или $c > 1/4$, $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$ и $r \leq 2\pi/\sqrt{4c-1}$.

3. Решение задачи в области гиперболичности. Решение задачи Коши для уравнения (1) в Ω_2 имеет вид

$$u(x, y) = \tau(x-y)e^{-cy} - \lambda_2 \int_0^y u(x_2, \eta) e^{c(\eta-y)} d\eta. \quad (10)$$

При $x \rightarrow x_2$ из (10) получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $u(x_2, y)$:

$$u(x_2, y) + \lambda_2 \int_0^y e^{c(\eta-y)} u(x_2, \eta) d\eta = e^{-cy} \tau(x_2 - y), \quad (11)$$

решение которого задается формулой

$$u(x_2, y) = e^{-cy} \left[\tau(x_2 - y) - \lambda_2 \int_0^y e^{\lambda_2(\eta-y)} \tau(x_2 - \eta) d\eta \right]. \quad (12)$$

Подставляя (7) и (12) в (10), получим решение задачи (1)–(2) в Ω_2 в явном виде.

4. Решение задачи в параболической части области. Смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности с нагруженным слагаемым $\lambda u(0, y)$ в Ω_1 была исследована в [7].

Если $\varphi_0(y), \varphi_r(y) \in C[0, T]$, то регулярное решение уравнения (1) в области Ω_1 , удовлетворяющее условиям (2) и условию

$$u(x, 0) = \tau(x) \quad (13)$$

представимо в следующем виде (см. [11, с. 267]):

$$u(x, y) = \int_0^y \varphi_0(\eta) \Gamma_\xi(x, y; 0, \eta) d\eta - \int_0^y \varphi_r(\eta) \Gamma_\xi(x, y; r, \eta) d\eta + \\ + \int_0^r \tau(\xi) \Gamma(x, y; \xi, 0) d\xi + \lambda_1 \int_0^y \int_0^r u(x_1, \eta) \Gamma(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (14)$$

где $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, имеющая вид

$$\Gamma(x, y; \xi, \eta) = [4\pi(y - \eta)]^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[\frac{(x - \xi + 2rn)^2}{4(\eta - y)} \right] - \exp \left[\frac{(x + \xi + 2rn)^2}{4(\eta - y)} \right] \right\}.$$

При $x \rightarrow x_1$ из (14) получим следующее интегральное уравнение Вольтерра II рода относительно функции $u(x_1, y)$:

$$u(x_1, y) - \lambda_1 \int_0^y Q(y, \eta) u(x_1, \eta) d\eta = F(x_1, y), \quad (15)$$

где

$$Q(y, \eta) = Q(x_1, y; r, \eta) = \int_0^r \Gamma(x_1, y; \xi, \eta) d\xi, \\ F(x_1, y) = \int_0^y \varphi_0(\eta) \Gamma_\xi(x_1, y; 0, \eta) d\eta - \int_0^y \varphi_r(\eta) \Gamma_\xi(x_1, y; r, \eta) d\eta + \int_0^r \tau(\xi) \Gamma(x_1, y; \xi, 0) d\xi.$$

Уравнение (15) имеет единственное решение в классе непрерывных функций. После того, как найдена функция $u(x_1, y)$, решение задачи (1)–(2) в области Ω_1 задается формулой (14).

5. Теорема существования и единственности решения задачи. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\varphi_0(y), \varphi_r(y) \in C[0, T]$, и выполняется условие (9). Тогда задача (1)–(2) имеет, и притом единственное решение, которое в Ω_2 задается формулой (10), в Ω_1 представимо в виде (14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллаев О. Х. Нелокальная задача для нагруженного уравнения смешанного типа с интегральным оператором // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2016. — 20, № 2. — С. 220–240.
2. Аттаев А. Х. О некоторых задачах для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2016. — № 4-1(16). — С. 9–14.
3. Аттаев А. Х. Задача Гурса для нагруженного вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка с оператором Геллерстедта в главной части // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2016. — 20, № 1. — С. 7–21.
4. Балтаева У. И., Исломов И. Б. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка // Уфим. мат. ж. — 2011. — 3, № 3. — С. 15–25.
5. Балтаева У. И. О некоторых краевых задачах для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка с действительными параметрами // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьютер. науки. — 2012. — 3. — С. 3–12.
6. Джениалиев М. Т., Рамазанов М. И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Гылым, 2010.
7. Дикинов Х. Ж., Кереев А. А., Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Диффер. уравн. — 1976. — 12, № 1. — С. 177–179.

8. *Елеев В. А.* О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных уравнений второго и третьего порядка// Диффер. уравн. — 1994. — 30, № 2. — С. 230–237.
9. *Кайгермазов А. А., Кудиева Ф. Х.* Об одной математической модели динамики возрастной структуры// Естественные и математические науки в современном мире. — 2014. — № 25. — С. 17–26.
10. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применения. — М.: Наука, 2012.
11. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.
12. *Сабитов К. Б.* Начально-граничная задача для нагруженного уравнения парабола-гиперболического типа// Докл. Адыг. Междунар. АН. — 2009. — Т. 11, № 1. — С. 66–73.
13. *Сабитов К. Б., Мелишева Е. П.* Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области// Изв. вузов. Мат. — 2013. — № 7. — С. 62–76.
14. *Сабитов К. Б.* Начально-граничная задача для парабола-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 6. — С. 31–42.
15. *Тарасенко А. В.* О разрешимости нелокальной задачи для нагруженного парабола-гиперболического уравнения// Изв. вузов. Мат. — 2013. — № 1. — С. 73–81.
16. *Хубиев К. У.* Об одном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного гипербола-параболического типа с производной при нагрузке// Докл. Адыг. Междунар. АН. — 2009. — 11, № 2. — С. 58–60.
17. *Хубиев К. У.* Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения гипербола-параболического типа с дробной производной при нагрузке// Докл. Адыг. Междунар. АН. — 2015. — 17, № 3. — С. 54–59.
18. *Хубиев К. У.* Принцип максимума для характеристически нагруженного уравнения парабола-гиперболического типа// Владикавказ. мат. ж. — 2016. — № 4 (18). — С. 80–85.
19. *Хубиев К. У.* Аналог задачи Трикоми для характеристически нагруженного уравнения гипербола-параболического типа с переменными коэффициентами// Уфим. мат. ж. — 2017. — 9, № 2. — С. 94–103.

К. У. Хубиев

Институт прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН, г. Нальчик
E-mail: khubiev_math@mail.ru



ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2018 г. М. М. ШУМАФОВ, В. Б. ТЛЯЧЕВ

Аннотация. Построены функции Ляпунова для линейных стохастических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. На их основе сформулированы необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом двумерных линейных стационарных систем. Приведены аналитические выражения бифуркационного значения интенсивности белого шума, действующего на параметры системы. В качестве примера рассмотрено уравнение упругих колебаний в среде, коэффициенты которого подвержены случайному возмущению «белым шумом».

Ключевые слова: устойчивость, функции Ляпунова, линейные стохастические дифференциальные системы, гауссовский процесс белого шума.

AMS Subject Classification: 93D05, 93E15

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод функций Ляпунова или прямой метод Ляпунова, первоначально предложенный А. М. Ляпуновым (см. [2]) для исследования общей задачи об устойчивости движения и позднее развитый в работах многочисленных авторов, оказался чрезвычайно общим и мощным. Хорошо известно, какую важную роль играют функции Ляпунова в теории устойчивости детерминированных систем. Значение этого метода далеко не исчерпывается возможностью установления факта устойчивости или неустойчивости исследуемой системы. Удачно построенная функция Ляпунова позволяет установить и другие свойства исследуемой системы, например, ограниченность решений, диссипативность системы, конвергентность решений, существование или отсутствие периодических решений и многое другое.

Работы [5, 6] дали мощный толчок в развитии метода функций Ляпунова для теории стохастических дифференциальных уравнений. Методом стохастических функций Ляпунова были доказаны общие теоремы, устанавливающие основные качественные свойства, прежде всего, свойство устойчивости стохастических систем. В этих работах метод функций Ляпунова для детерминированных систем был перенесен на стохастический случай. Тем самым был сделан первый шаг в построении качественной теории стохастических дифференциальных уравнений.

Заметим, что во всех формулировках теорем, доказанных в указанных выше работах, для установления того или иного качественного свойства рассматриваемой системы априори предполагается существование функции ляпуновского типа: если существует функция Ляпунова с требуемыми свойствами, то рассматриваемая система обладает тем или иным свойством (устойчивости, диссипативности и т. д.). При этом основная проблема, как и в детерминистической теории, связана с построением подходящей функции Ляпунова для исследуемой системы в заданной области фазового пространства. До настоящего времени проблема построения удачной функции Ляпунова как для детерминистических, так и для стохастических систем полностью не решена: не существует общих методов построения функций Ляпунова. Для детерминистических систем имеется лишь некоторый набор приемов и методов построения функций Ляпунова, описание которых можно найти, например, в [1, 3, 7].

Целью настоящей работы является построение стохастических функций Ляпунова для линейных однородных стационарных систем 2-го порядка, коэффициенты которых возмущены гауссовским белым шумом.

Польза от функций Ляпунова для линейных систем состоит в том, что, во-первых, с их помощью получаются необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом; во-вторых, они являются, как правило, «опорными» при построении функций Ляпунова для нелинейных систем; в-третьих, они служат как бы «эталонными» функциями Ляпунова, позволяющими во многих случаях усмотреть ценность построенной функции Ляпунова для сложной нелинейной динамической системы. Кроме того, построенные стохастические функции Ляпунова могут быть использованы при исследовании устойчивости нелинейных систем по первому приближению.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную стационарную однородную систему, возмущенную белым шумом:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (a + e\dot{\xi}(t))x(t) + (b + f\dot{\xi}(t))y(t), \\ \dot{y}(t) = (c + g\dot{\xi}(t))x(t) + (d + h\dot{\xi}(t))y(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — скалярные функции от t , $t \in [0, +\infty)$, $\dot{\xi}(t)$ — гауссовский процесс белого шума единичной интенсивности, a, b, c, d, e, f, g, h — вещественные константы.

Систему (2.1) будем понимать как систему стохастических уравнений в смысле Ито:

$$\begin{cases} dx(t) = (ax(t) + by(t))dt + (ex(t) + fy(t))d\xi(t), \\ dy(t) = (cx(t) + dy(t))dt + (gx(t) + hy(t))d\xi(t), \end{cases} \quad (2.2)$$

где $x(t) = x(t, \omega)$, $y(t) = y(t, \omega)$ — случайные процессы, $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ — винеровский процесс, ω — элементарное событие, $dx(t)$, $dy(t)$ и $d\xi(t)$ — стохастические дифференциалы процессов $x(t)$, $y(t)$ и $\xi(t)$ в смысле Ито, соответственно. Предполагается, что задано вероятностное пространство (Ω, Σ, P) , где Ω — пространство элементарных событий, Σ — σ -алгебра подмножеств из Ω , P — вероятностная мера на Σ .

Для детерминированных линейных стационарных систем способ построения функций Ляпунова в виде однородных форм степени m описан в [2]. В [1, 8] построены функции Ляпунова в виде квадратичных форм для линейных детерминированных систем.

Возможность применения описанного в [2] приема построения функций Ляпунова для стохастического случая была отмечена в [4]. В [5] доказана общая теорема, устанавливающая необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости четного порядка ($p = 2, \dots$) линейных стохастических систем в терминах существования функции Ляпунова в виде однородных форм степени p .

Наша задача состоит в построении функций Ляпунова в виде квадратичных форм для двумерных линейных стохастических систем (2.2) и установлении критериев экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом. Во избежание громоздких выражений мы будем рассматривать случай, когда только два из коэффициентов e, f, g и h «случайной части» системы (2.2) отличны от нуля, а остальные равны нулю, то есть когда только два из коэффициентов a, b, c, d соответствующей детерминированной системы возмущаются белым шумом.

3. ПОСТРОЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

На основе результатов, полученных в [5], можно построить следующий алгоритм построения функций Ляпунова в виде квадратичных форм для системы (2.2).

1. Выбрать произвольную положительно определенную квадратичную форму $W(x, y)$: $W(x, y) > 0$ для всех $(x, y) \neq (0, 0)$.

2. Составить уравнение $LV(x, y) = -W(x, y)$ для определения квадратичной функции $V(x, y)$, где L — производящий дифференциальный оператор процесса, определяемого системой (2.2):

$$L = (ax + by)\frac{\partial}{\partial x} + (cx + fy)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[(ex + fy)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(ex + fy)(gx + hy) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (gx + hy)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]. \quad (3.1)$$

3. Приравнять коэффициенты при x^2 , y^2 и xy в левой и правой части равенства $LV = -W$, и из полученной системы линейных уравнений найти коэффициенты искомой формы $V(x, y)$.
4. С помощью критерия Сильвестра выписать в виде алгебраических неравенств необходимые и достаточные условия положительной определенности формы V .

Замечание 3.1. В п. 1 описанного алгоритма вместо положительно определенной формы $W(x, y)$ можно брать неотрицательно определенную форму: $W(x, y) \geq 0$. Тогда $LV \leq 0$.

Согласно приведенному алгоритму построим функции Ляпунова в случаях, когда какие-либо два из коэффициентов e, f, g, h «случайной» части системы (2.2) отличны от нуля, а остальные два равны нулю. Из всех шести возможных случаев достаточно рассмотреть следующие четыре случая:

- I. $e \neq 0, f \neq 0, g = h = 0$;
- II. $e \neq 0, g \neq 0, f = h = 0$;
- III. $e \neq 0, h \neq 0, f = g = 0$;
- IV. $f \neq 0, g \neq 0, e = h = 0$.

Оставшиеся два случая ($g \neq 0, h \neq 0, e = f = 0$ и $f \neq 0, h \neq 0, e = g = 0$) сводятся соответственно к случаям I и II переобозначением переменных x и y , $x \leftrightarrow y$, и соответствующих коэффициентов.

Случай I: $e \neq 0, f \neq 0, g = h = 0$. Зададимся произвольной квадратичной формой $W(x, y) = \alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2$ и найдем квадратичную форму $V(x, y) = \mu x^2 + 2\rho xy + \nu y^2$, удовлетворяющую равенству $LV = -W$, где L — оператор (3.1). Приравняв коэффициенты при x^2 , y^2 и xy в левой и правой частях последнего равенства, получим следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов μ, ρ и ν :

$$\begin{cases} (2a + e^2)\mu + 2c\rho = -\alpha, \\ (b + ef)\mu + (a + d)\rho + c\nu = -\gamma, \\ f^2\mu + 2b\rho + 2d\nu = -\beta. \end{cases} \quad (3.2)$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta_{e,f} = \begin{vmatrix} 2a + e^2 & 2c & 0 \\ b + ef & a + d & c \\ f^2 & 2b & 2d \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

Решив систему (3.2) по формуле Крамера в предположении, что $\Delta \neq 0$, после подстановки найденных коэффициентов μ, ρ, ν в форму V получим

$$V(x, y) = -\frac{1}{\Delta_{e,f}} \left\{ x^2 + \begin{vmatrix} \alpha & 2c & 0 \\ \gamma & a + d & c \\ \beta & 2b & 2d \end{vmatrix} + 2xy \begin{vmatrix} 2a + e^2 & \alpha & 0 \\ b + ef & \gamma & c \\ f^2 & \beta & 2d \end{vmatrix} + y^2 \begin{vmatrix} 2a + e^2 & 2c & \alpha \\ b + ef & a + d & \gamma \\ f^2 & 2b & \beta \end{vmatrix} \right\}.$$

Отсюда имеем

$$V(x, y) = \frac{1}{\Delta_{e,f}} \begin{vmatrix} 0 & x^2 & 2xy & y^2 \\ \alpha & 2a + e^2 & 2c & 0 \\ \gamma & b + ef & a + d & c \\ \beta & f^2 & 2b & 2d \end{vmatrix}, \quad (3.4)$$

где $\Delta_{e,f}$ определяется из (3.3). В (3.4) α, β и γ — свободные параметры. Выберем значения параметров α, β и γ такими, чтобы $\alpha > 0, \gamma^2 < \alpha\beta$ (тогда $LV = -W(x, y) < 0$ для всех $(x, y) \neq (0, 0)$)

или $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma^2 \leq \alpha\beta$ (тогда $LV = -W(x, y) \leq 0$ для всех (x, y)). Затем потребуем, чтобы коэффициенты квадратичной формы (3.4) удовлетворяли критерию Сильвестра положительной определенности формы (3.4). Тогда формула (3.4) будет определять трехпараметрическое семейство стохастических функций Ляпунова для системы (2.2) ($e \neq 0$, $f \neq 0$, $g = h = 0$). Удобно в качестве функции Ляпунова брать функцию

$$V_1(x, y) = (\operatorname{sgn} \Delta_{e,f}) \Delta_{e,f} V(x, y).$$

Тогда

$$LV_1(x, y) = -(\operatorname{sgn} \Delta_{e,f}) \Delta_{e,f} W(x, y).$$

Совершенно аналогично можно построить соответствующие стохастические функции Ляпунова и для случаев II–IV.

Случай II: $e \neq 0$, $g \neq 0$, $f = h = 0$:

$$V(x, y) = \frac{1}{\Delta_{e,g}} \begin{vmatrix} 0 & x^2 & 2xy & y^2 \\ \alpha & 2a + e^2 & 2(c + eg) & g^2 \\ \gamma & b & a + d & c \\ \beta & 0 & 2b & 2d \end{vmatrix}, \quad (3.5)$$

где

$$\Delta_{e,g} = \begin{vmatrix} 2a + e^2 & 2(c + eg) & g^2 \\ b & a + d & c \\ 0 & 2b & 2d \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Случай III: $e \neq 0$, $h \neq 0$, $f = g = 0$:

$$V(x, y) = \frac{1}{\Delta_{e,h}} \begin{vmatrix} 0 & x^2 & 2xy & y^2 \\ \alpha & 2a + e^2 & 2c & 0 \\ \gamma & b & a + d + eh & c \\ \beta & 0 & 2b & 2d + h^2 \end{vmatrix}, \quad (3.7)$$

где

$$\Delta_{e,h} = \begin{vmatrix} 2a + e^2 & 2c & 0 \\ b & a + d + eh & c \\ 0 & 2b & 2d + h^2 \end{vmatrix}.$$

Случай IV: $f \neq 0$, $g \neq 0$, $e = h = 0$:

$$V(x, y) = \frac{1}{\Delta_{f,g}} \begin{vmatrix} 0 & x^2 & 2xy & y^2 \\ \alpha & 2a & 2c & g^2 \\ \gamma & b & a + d + fg & c \\ \beta & f^2 & 2b & 2d \end{vmatrix}, \quad (3.8)$$

где

$$\Delta_{f,g} = \begin{vmatrix} 2a & 2c & g^2 \\ b & a + d + fg & c \\ f^2 & 2b & 2d \end{vmatrix}.$$

Подчинив параметры α , β и γ условиям $\alpha > 0$, $\gamma^2 < \alpha\beta$ или $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma^2 \leq \alpha\beta$ и затем потребовав выполнение условий критерия Сильвестра положительной определенности этих форм, получим соответствующие стохастические функции Ляпунова.

Замечание 3.2. Для случаев $g \neq 0$, $h \neq 0$, $e = f = 0$ и $f \neq 0$, $h \neq 0$, $e = g = 0$ соответствующие функции Ляпунова получаются из формул (3.4) и (3.5) с помощью замен: $x \leftrightarrow y$, $a \leftrightarrow d$, $b \leftrightarrow c$, и $e \rightarrow h$, $f \rightarrow g$ (в первом случае), $e \rightarrow h$, $g \rightarrow f$ (во втором случае) соответственно.

Аналогично можно построить стохастические функции Ляпунова в виде квадратичных форм, когда три из четырех коэффициентов e , f , g , h , а также и все четыре коэффициента отличны от нуля. При отсутствии «флуктуационных» членов ($e = f = g = h = 0$) функции (3.4), (3.5), (3.7), (3.8) превращаются в соответствующие функции Ляпунова для детерминированной части системы (см. [1, с. 37–38]).

4. ПРИМЕР: ЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + (k + \sigma_2 \dot{\xi}(t))\dot{x} + (\omega^2 + \sigma_1 \dot{\xi}(t))x = 0, \quad (4.1)$$

где $k, \omega, \sigma_1, \sigma_2$ — вещественные константы, $\dot{\xi}(t)$ — белый шум.

Уравнение (4.1) описывает линейную колебательную систему с собственной частотой колебаний $\omega > 0$ и с трением, пропорциональным скорости ($k > 0$ — коэффициент пропорциональности), которые подвержены воздействию белого шума интенсивности σ_1 и σ_2 , соответственно.

Вводя обозначение $\dot{x} = y$, перепишем (4.1) в виде системы стохастических уравнений Ито:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -(\omega^2 x(t) + ky(t))dt - (\sigma_1 x(t) + \sigma_2 y(t))d\xi(t). \end{cases} \quad (4.2)$$

Система (4.2) — частный случай системы (2.2): $e = f = 0$, $g = \sigma_1$, $h = \sigma_2$. Переобозначением $x \leftrightarrow y$ этот случай сводится к рассмотренному выше случаю I: $e \neq 0$, $f \neq 0$. Поэтому в силу (3.4) будем иметь

$$V(x, y) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & y^2 & 2xy & x^2 \\ \alpha & \sigma_2^2 - 2k & 2 & 0 \\ \gamma & \sigma_1\sigma_2 - \omega^2 & -k & 1 \\ \beta & \sigma_1^2 & -2\omega^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad (4.3)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_2^2 - 2k & 2 & 0 \\ \sigma_1\sigma_2 - \omega^2 & -k & 1 \\ \sigma_1^2 & -2\omega^2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

В (4.3) α, β и γ — свободные параметры. Выбирая α, β и γ , удовлетворяющим условиям $\alpha > 0$, $\gamma^2 < \alpha\beta$ или $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma^2 \leq \alpha\beta$, и подчинив параметры ω^2, k, σ_1 и σ_2 системы (4.2) условиям критерия Сильвестра положительной определенности, будем иметь стохастическую функцию Ляпунова (4.3), (4.4).

Выпишем стохастические функции Ляпунова, соответствующие значениям параметров $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ для случаев

- (a) $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0$;
- (b) $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0$;
- (c) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

В случае (a) имеем ($\alpha := 1, \beta := 1, \gamma := 0$):

$$V(x, y) = \frac{k^2 + \omega^2(\omega^2 + 1) + k\sigma_1^2/2}{2k\omega^2 - \sigma_1^2}x^2 + \frac{2k + \sigma_1^2}{2k\omega^2 - \sigma_1^2}xy + \frac{\omega^2 + 1}{2k\omega^2 - \sigma_1^2}y^2. \quad (4.5)$$

Для функции (4.5) имеем $LV = -x^2 - y^2$. Квадратичная форма (4.5) положительно определена тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\sigma_1^2 < 2k\omega^2. \quad (4.6)$$

Функция (4.5) при выполнении условия (4.6) является стохастической функцией Ляпунова для системы (4.2) в случае (a): $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0$.

При $\omega^2 = k = 1$ и $\sigma_1^2 < 2$ формула (4.5) определяет стохастическую функцию Ляпунова, построенную в [5] методом частного интегрирования с использованием формулы Дынкина.

В случае (b) имеем ($\alpha := 1, \beta := 1, \gamma := 0$):

$$V(x, y) = \left(\frac{\omega^2 + 1}{2k - \sigma_2^2} + \frac{k}{2\omega^2} \right) x^2 + \frac{1}{\omega^2} xy + \frac{\omega^2 + 1}{\omega^2(2k - \sigma_2^2)} y^2. \quad (4.7)$$

Для (4.7) $LV = -x^2 - y^2$. Форма (4.7) положительно определена тогда и только тогда, когда

$$\sigma_2^2 < 2k. \quad (4.8)$$

Функция (4.7) при выполнении неравенства (4.8) определяет стохастическую функцию Ляпунова для системы (4.2) в случае (b): $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0$.

В случае (с) имеем ($\alpha := 1, \beta := 1, \gamma := 0$):

$$V(x, y) = \frac{1}{2(\sigma^2(\omega^2 + 1) - 2k\omega^2)} \left\{ 2[(\omega^2 + 1)\sigma^2 - \omega^4 - \omega^2 - k^2]x^2 - 4kxy - 2(\omega^2 + 1)y^2 \right\}. \quad (4.9)$$

Для (4.9) $LV = -x^2 - y^2$. Можно показать, что квадратичная форма (4.9) положительно определена тогда и только тогда, когда

$$\sigma^2 < \frac{2k\omega^2}{\omega^2 + 1}. \quad (4.10)$$

Таким образом, формула (4.9) определяет стохастическую функцию Ляпунова при выполнении условия (4.10).

5. УСЛОВИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

С помощью построенных в разделе 3 функций Ляпунова можно получить необходимые и/или достаточные условия стохастической устойчивости тривиального решения ($x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$) системы (2.2). Мы рассмотрим устойчивость по вероятности и экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом.

Отметим, что для линейных стационарных систем *асимптотическая* и *экспоненциальная* устойчивость в среднем квадратическом *эквивалентны* между собой, и из них следует асимптотическая устойчивость по вероятности (в целом).

Условия стохастической устойчивости, даваемые ниже при отсутствии «флуктуационных» членов превращаются в необходимые и достаточные условия Рауса—Гурвица для детерминированной части системы (2.2).

Сначала сформулируем условия устойчивости для уравнения возмущенного линейного осциллятора (4.1).

Используя функции Ляпунова (4.5), (4.7) и (4.9) в силу общих теорем из [5, 6] получим следующее утверждение.

Предложение 5.1. *Тривиальное решение ($x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$) системы (4.2) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда выполнены неравенства:*

- (а) (4.6) в случае (а), т.е. $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0$;
- (б) (4.8) в случае (б), т.е. $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0$;
- (с) (4.10) в случае (с), т.е. $\sigma_1 = \sigma_2$.

Кроме того, для каждого числа $m > 0$ и для любого решения $(x(t), y(t))$ с начальными условиями $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, где $(x_0, y_0) \in \{(x, y) : V(x, y) < m\}$, справедливо соотношение $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ с вероятностью не меньшей, чем $1 - (V(x_0)/m)$, где V — функция, заданная (4.3), или (4.5), или (4.9), соответствующая случаям (а), (б), (с).

Замечание 5.1. В силу произвольности числа m имеем $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$ с вероятностью 1.

Теперь сформулируем условия устойчивости для системы (2.2). Рассмотрим два случая:

1. один из коэффициентов e, f, g, h «случайной» части системы (2.2) отличен от нуля, а остальные равны нулю, и
2. два отличных от нуля коэффициента равны между собой, а остальные два равны нулю.

Случай 1: один из коэффициентов «случайной» части системы (2.2) отличен от нуля, а остальные равны нулю.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть в системе (2.2) $e \neq 0, f = g = h = 0$. Тогда тривиальное решение ($x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$) системы (2.2) устойчиво по вероятности, если выполнены неравенства*

- (1) $a + d < 0, ad - bc > 0, b \neq 0$;
- (2) $e^2 < \frac{2(a + d)(bc - ad)}{d^2 + (ad - bc)}$.

Кроме этого, любое решение $(x(t), y(t))$ системы (2.2) обладает следующим свойством:

$$(x(t), y(t)) \rightarrow \{(x, y) : x = 0\} \quad \text{с вероятностью 1.}$$

Доказательство. Возьмем в качестве стохастической функции Ляпунова функцию

$$V_e(x, y) = -\frac{\Delta_{e,f=0}}{2} V(x, y),$$

где $V(x, y)$ — функция (3.4), в которой положено $f = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$ и

$$\Delta_{e,f=0} = 2 \left[2(a+d)(ad-bc) + e^2(d^2 + ad - bc) \right]. \quad (5.1)$$

Имеем

$$V_e(x, y) = (ad - bc)x^2 + (dx - by)^2. \quad (5.2)$$

Для функции (5.2) имеет место равенство

$$LV_e(x, y) = \frac{1}{2} \Delta_{e,f=0} x^2. \quad (5.3)$$

Из условий (1) и (2) теоремы 5.1 следует положительная определенность формы (5.2) и неотрицательность функции (5.3). Теперь утверждение теоремы 5.1 следует из результатов работ [5, 6]. $\square$

Замечание 5.2. Условие (2) теоремы 5.1 дает оценку интенсивности белого шума сверху, при которой возмущенная система (2.2) остается устойчивой по вероятности. Правая часть условия (2) есть нижняя граница «бифуркационного» значения интенсивности белого шума.

Условия устойчивости в среднем квадратическом системы (2.2) в случае $e \neq 0$, $f = g = b = 0$ даются следующей теоремой.

Теорема 5.2. Пусть в системе (2.2) $e \neq 0$, $f = g = h = 0$. Тогда для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом тривиального решения $(x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0)$ системы (2.2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$(1) \quad a + d < 0, \quad ad - bc > 0;$$

$$(2a) \quad \text{при } c \neq 0$$

$$e^2 < \min \left\{ \frac{2(a+d)(bc-ad)}{d^2 + (ad-bc)}, \frac{p + \sqrt{p^2 + c^2 q}}{c^2} \right\};$$

где

$$p = (a+d)(c^2 + d^2 + ad - bc) - 2c(ac + bd), \quad q = 4(ad - bc) [(a+d)^2 + (b-c)^2]; \quad (5.4)$$

$$(2b) \quad \text{при } c = 0: \quad e^2 < -2a, \quad a < 0.$$

При этом любое решение $(x(t), y(t))$ системы (2.2) обладает свойством

$$x(t) \rightarrow 0, \quad y(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad \text{с вероятностью 1.}$$

Утверждение теоремы 5.2 устанавливается с помощью стохастической функции Ляпунова

$$V_e(x, y) = \left[c^2 + d^2 + (ad - bc) \right] x^2 + 2 \left(ac + bd + c \frac{e^2}{2} \right) xy + \left[a^2 + b^2 + (ad - bc) + (a + d) \frac{e^2}{2} \right] y^2. \quad (5.5)$$

Функция (5.5) получается из (3.4), если положить $f = 0$, $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$ и умножить на $-\Delta_{e,f=0}/2$, где $\Delta_{e,f=0}$ есть (5.1). Для (5.5) имеем

$$LV_e = \left(\frac{\Delta_{e,f=0}}{2} \right) (x^2 + y^2).$$

Из условий (1), (2a), (2b) теоремы 5.2 следует, что $V_e(x, y) > 0$ и $LV_e(x, y) < 0$ для любой точки $(x, y) \neq (0, 0)$. Теперь остается сослаться на соответствующие теоремы из [5, 6].

Замечание 5.3. Неравенства (2а) и (2b) в условии (2) теоремы 5.2 дают бифуркационные значения интенсивности шума e^2 .

Следующие две теоремы дают условия стохастической устойчивости для случая $f \neq 0$, $e = g = h = 0$.

Теорема 5.3. Пусть в системе (2.2) $f \neq 0$, $e = g = h = 0$. Тогда для устойчивости по вероятности тривиального решения $(x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0)$ системы (2.2) достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- (1) $a + d < 0$, $ad - bc > 0$, $c \neq 0$;
- (2) $f^2 < [2(a + d)(bc - ad)]/c^2$.

При этом любое решение $(x(t), y(t))$ системы (2.2) обладает свойством

$$(x(t), y(t)) \rightarrow \{(x, y) : y = 0\} \quad \text{при } t \rightarrow \infty \text{ с вероятностью } 1.$$

Утверждение теоремы 5.3 доказывается с помощью стохастической функции Ляпунова

$$V_f(x, y) = (cx - ay)x^2 + (ad - bc)y^2, \quad (5.6)$$

получаемой из (3.4), если положить $e = 0$, $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$ и умножить полученное выражение на $-\Delta_{e=0,f}/2$, где

$$\Delta_{e=0,f} = 2c^2 f^2 + 4(a + d)(ad - bc). \quad (5.7)$$

Из условий (1) и (2) теоремы 5.3 следует, что форма (5.6) положительно определена и $LV = \Delta_{e=0,f} y^2/2 \leq 0$ для всех (x, y) .

Теорема 5.4. Пусть в системе (2.2) выполнены условия $f \neq 0$, $e = g = h = 0$. Тогда нулевое решение $(x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0)$ системы (2.2) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (1) $a + d < 0$, $ad - bc > 0$;
- (2) $e^2 < \min \left\{ \frac{2(a + d)(bc - ad)}{c^2}, \frac{-p + \sqrt{p^2 + c^2 q}}{c^2} \right\}$, если $c \neq 0$, где p и q определены формулами (5.4). (Если $c = 0$, то условие (2) отсутствует.)

Кроме этого, любое решение $(x(t), y(t))$ системы (2.2) обладает свойством

$$x(t) \rightarrow 0, \quad y(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \text{ с вероятностью } 1.$$

Доказательство. Теорема 5.4 доказывается аналогично теореме 5.2 с использованием функции Ляпунова (3.4), где $e = 0$ и $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$, и последующей ссылкой на соответствующие теоремы из [5, 6]. При этом в качестве стохастической функции Ляпунова $V_f(x, y)$ можно взять

$$V_f(x, y) = \left[c^2 + d^2 + (ad - bc) \right] x^2 + 2 \left(ac + bd - \frac{cf^2}{2} \right) xy + \left[a^2 + b^2 + (ad - bc) - (a + d) \frac{f^2}{2} \right] y^2. \quad (5.8)$$

Для функции (5.8) имеем $LV_f = \Delta_{e=0,f}(x^2 + y^2)$, где $\Delta_{e=0,f}$ задается формулой (5.7). Условия (1) и (2) теоремы 5.4 эквивалентны неравенствам $V_f > 0$ для всех $(x, y) \neq 0$ и $\Delta_{e=0,f} < 0$. Это доказывает теорему 5.4. $\square$

Следствие 5.1. При $c = 0$ стохастическая система (2.2) ($f \neq 0$, $e = g = h = 0$) устойчива в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда соответствующая детерминированная система ($f = 0$) асимптотически устойчива (в целом).

Замечание 5.4. Правая часть неравенства в условии (2) теоремы 5.4 дает бифуркационное значение интенсивности белого шума.

Оставшиеся два случая $g \neq 0$, $e = f = h = 0$ и $h \neq 0$, $e = f = g = 0$ сводятся к рассмотренным выше случаям заменой $x \leftrightarrow y$, $a \leftrightarrow d$, $b \leftrightarrow c$, $c \leftrightarrow b$, $d \leftrightarrow a$ и соответственно $g \rightarrow f$ в первом случае и $h \rightarrow e$ — во втором.

Случай 2: два коэффициента «случайной» части системы отличны от нуля, остальные два равны нулю. Чтобы избежать громоздких выражений, ограничимся случаем равенства отличных от нуля коэффициентов.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.5. Пусть в системе (2.2) выполнены условия $e = f \neq 0$, $g = h = 0$. Тогда для устойчивости нулевого решения $(x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0)$ системы (2.2) достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

- (1) $a + d < 0$, $ad - bc > 0$, $c \neq 0$;
- (2) $e^2 < \min \left\{ \frac{2(a+d)(bc-ad)}{(ad-bc) + (c-d)^2}, (d-a-2c) + \sqrt{(a+d)^2 + 4c(a-d+c-b)} \right\}$.

При этом любое решение $(x(t), y(t))$ системы (2.2) обладает свойством

$$(x(t), y(t)) \rightarrow \{(x, y) : y = 0\} \quad \text{с вероятностью 1.}$$

Для доказательства теоремы 5.5 используется стохастическая функция Ляпунова

$$V(x, y) = c^2 x^2 - 2c(2a + c^2)xy + \left[a^2 + (ad - bc) + \frac{e^2}{2}(a + d - 2c) \right] y^2, \quad (5.9)$$

получающаяся из (3.4) при $f = e$, $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$ и умножением на $-\Delta_{e,f=e}$, где

$$\Delta_{e,f=e} = 4(a+d)(ad-bc) + 2e^2[(ad-bc) + (c-d)^2]. \quad (5.10)$$

Для функции (5.9) имеем $LV = (\Delta_{e,f=e}/2)y^2$. Из условий теоремы следует, что $V(x, y) > 0$ для всех $(x, y) \neq 0$ и $LV \leq 0$ для всех (x, y) . Остается сослаться на соответствующие теоремы из [5, 6].

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия устойчивости в среднем квадратическом.

Теорема 5.6. Пусть в системе (2.2) выполнены условия $e = f \neq 0$, $g = h = 0$. Тогда нулевое решение $(x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0)$ системы (2.2) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда выполнены следующие неравенства:

- (1) $a + d < 0$, $ad - bc > 0$;
- (2a) $e^2 < \min \left\{ \frac{2(a+d)(bc-ad)}{(ad-bc) + (c-d)^2}, \frac{p + \sqrt{p^2 + 4d^2q}}{2d^2} \right\}$, если $d \neq 0$, где

$$p = (b-c)(b^2 + c^2 + ad - bc) - 2d(ac + bd), \quad q = (ad - bc)[(a+d)^2 + (b-c)^2];$$
- (2b) $e^2 < \min \left\{ \frac{2ab}{c-b}; \frac{(-b)[a^2 + (b-c)^2]}{(c-b)^2} \right\}$, если $d = 0$ и $b < 0$, $c > 0$ (если $b > 0$, $c < 0$, то условие (2b) отсутствует).

Кроме того, любое решение $(x(t), y(t))$ системы (2.2) обладает свойством

$$x(t) \rightarrow 0, \quad y(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty \text{ с вероятностью 1.}$$

Теорема 5.6 доказывается с помощью стохастической функции Ляпунова

$$V(x, y) = (c^2 + d^2 + ad - bc)x^2 + 2(de^2 + ac + bd)xy + (a^2 + b^2 + ad - bc + (b-c)e^2)y^2, \quad (5.11)$$

которая получается из (3.4), если положить $f = e$, $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$, и полученное выражение умножить на $(-\Delta_{e,f=e}/2)$, где $\Delta_{e,f=e}$ определяется формулой (5.10). Для (5.11) имеем $LV = (\Delta_{e,f=e}/2)(x^2 + y^2)$. Условия теоремы 5.6 эквивалентны неравенствам $V > 0$ и $LV < 0$ для всех $(x, y) \neq (0, 0)$. Теперь справедливость утверждения теоремы 5.6 вытекает из соответствующих теорем из [5, 6].

Замечание 5.5. Правые части неравенств в условиях (2a) и (2b) теоремы 5.6 дают бифуркационное значение интенсивности белого шума.

Следующие теоремы дают достаточные условия устойчивости по вероятности.

Теорема 5.7. Пусть в системе (2.2) выполнены условия $g = e \neq 0$, $f = h = 0$. Тогда для устойчивости по вероятности тривиального решения $(x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0)$ системы (2.2) достаточно выполнение следующих неравенств:

$$(1) \ a + d < 0, \ ad - bc > 0, \ b \neq 0;$$

$$(2) \ e^2 < \frac{2(a+d)(bc-ad)}{(ad-bc) + (b-d)^2}.$$

При этом любое решение $(x(t), y(t))$ системы (2.2) обладает свойством

$$(x(t), y(t)) \rightarrow \{(x, y) : y = 0\} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty \text{ с вероятностью } 1.$$

Для доказательства теоремы 5.7 используется стохастическая функция Ляпунова (5.2).

Следующая теорема относится к случаю $h = e \neq 0$, $f = g = 0$.

Теорема 5.8. Пусть в системе (2.2) выполнены условия $h = e \neq 0$, $f = g = 0$. Тогда тривиальное решение $(x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0)$ системы (2.2) устойчиво по вероятности, если

$$(1) \ a + d < 0, \ ad - bc > 0, \ c \neq 0;$$

$$(2) \ e^2 < \min\{E_1, E_2\}, \text{ где } E_1, E_2 - \text{наименьшие (положительные) корни уравнений}$$

$$\lambda^2 + 2(a+d)\lambda + 4(ad-bc) = 0,$$

$$\lambda^3 + 3(a+d)\lambda^2 + 2[(a+d)^2 + 2(ad-bc)]\lambda + 4(a+d)(ad-bc) = 0$$

соответственно при условии $(a+d)^2 \geq 4(ad-bc)$. (Если $(a+d)^2 < 4(ad-bc)$, то первое уравнение не имеет вещественных корней, и следовательно, E_1 отсутствует.)

Кроме этого, любое решение обладает свойством

$$(x(t), y(t)) \rightarrow \{(x, y) : y = 0\} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty \text{ с вероятностью } 1.$$

Теорема 5.8 доказывается с помощью стохастической функции Ляпунова

$$V(x, y) = 2c^2x^2 - 2c(2a + e^2)xy + [2(a^2 + ad - bc) + e^4 + (3a + d)e^2]y^2.$$

Следующая теорема относится к случаю $g = f \neq 0$, $e = h = 0$.

Теорема 5.9. Пусть в системе (2.2) выполнены условия $g = f \neq 0$, $e = h = 0$. Тогда для устойчивости по вероятности тривиального решения $(x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0)$ системы (2.2) достаточно выполнение следующих неравенств:

$$(1) \ a + d < 0, \ ad - bc > 0;$$

$$(2a) \ d < 0, \ f^2 < \min\{E_1, E_2, E_3\}, \text{ где } E_1 = [d^2 + (ad - bc)]/(-d), \text{ а } E_2 \text{ и } E_3 - \text{наименьшие положительные корни уравнений}$$

$$\lambda^3 + (a+d)\lambda^2 - 2(b^2 + c^2 + 2ad)\lambda + 4(a+d)(bc - ad) = 0, \quad (5.12)$$

$$2d\lambda^3 + [c^2 + 2d^2 + 2(ad - bc) + 2d(a+d)]\lambda^2 +$$

$$+ 2[(a+d)(d^2 + ad - bc) - 4bd(b+c)]\lambda - 4b^2(ad - bc) = 0 \quad (5.13)$$

соответственно (уравнения (5.12) и (5.13) могут не иметь положительных корней: в этом случае E_1 и/или E_3 отсутствуют);

$$(2b) \ d > 0, \ f^2 < \min\{E_2, E_3\} \text{ (уравнение (5.12) может не иметь положительных корней: тогда отсутствует } E_2).$$

Кроме этого любое решение обладает свойством

$$(x(t), y(t)) \rightarrow \{(x, y) : x = 0\} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty \text{ с вероятностью } 1.$$

Доказательство. Доказательство теоремы 5.9 проводится с использованием стохастической функции Ляпунова

$$V(x, y) = 2[d^2 + (ad - bc) + df^2]x^2 - 2(2bd - cf^2)xy + [2b^2 - (a+d)f^2 - f^4]y^2. \quad (5.14)$$

Функция (5.14) получена из (3.8) при $g = f$, $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, умножением на $-\Delta_{f,g=f}$, где

$$\Delta_{f,g=f} = 4(a+d)(ad-bc) - f^6 - (a+d)f^4 + 2(2ad + b^2 + c^2)f^2.$$

Для (5.14) имеем $LV = \Delta_{f,g=fx^2}$. Из условий теоремы 5.9 следуют неравенства $V(x, y) > 0$ для всех $(x, y) \neq 0$ и $LV \leq 0$ для всех (x, y) . Ссылки на соответствующие теоремы из [5, 6] завершают доказательство теоремы 5.9. $\square$

Замечание 5.6. Правые части неравенств в условиях (2) и (2а), (2b) в теоремах 5.8 и 5.9 дают нижние границы бифуркационного значения интенсивности f^2 белого шума.

Оставшиеся два случая $h = f \neq 0, e = g = 0$ и $h = g \neq 0, e = f = 0$ сводятся к рассмотренным случаям $g = e \neq 0, f = h = 0$ и $f = e \neq 0, g = h = 0$ заменой $x \leftrightarrow y, a \leftrightarrow d, b \leftrightarrow c$, и $h \rightarrow e, f \rightarrow g, g := e$ в первом случае и $h \rightarrow e, g \rightarrow f, f := e$ во втором.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье построены стохастические функции Ляпунова в виде квадратичных форм для двумерных линейных стационарных систем дифференциальных уравнений, параметры которых возмущены белым шумом. На основе построенных стохастических функций Ляпунова получены необходимые и/или достаточные условия устойчивости по вероятности, экспоненциальной (асимптотической) устойчивости в среднем квадратическом рассматриваемых систем. Даны оценки нижних границ бифуркационных значений интенсивности белого шума, при которых детерминированная система остается асимптотически устойчивой. В случае устойчивости в среднем квадратическом эти оценки точные. В качестве примера рассматривается уравнение линейного осциллятора с трением, когда трение и собственная частота подвержены воздействию белого шума. Сформулированы необходимые и достаточные условия устойчивости в среднем квадратическом возмущенного уравнения линейного осциллятора. Построенные стохастические функции Ляпунова могут послужить «опорными» при построении функций Ляпунова для двумерных нелинейных систем стохастических дифференциальных уравнений. Полученные условия могут быть полезными при исследовании вопросов стохастической устойчивости по первому приближению двумерных нелинейных систем в окрестности положения равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения / В сб.: Ляпунов А. М. Собрание сочинений. Т. 2. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 7–263.
3. Donalson D. D. Lyapunov's Direct Method in the Analysis of Nonlinear Control Systems. — New York: McGraw-Hill, 1965.
4. Kats I. Ya., Krasovskii N. N. On the stability of systems with random parameters // J. Appl. Math. Mech. — 1960. — 24, № 5. — С. 1225–1246.
5. Khasminskii R. Z. Stochastic Stability of Differential Equations. — Heidelberg–Dordrecht–London–New York: Springer-Verlag, 2012.
6. Kushner H. J. Stochastic Stability and Control. — New York–London: Academic Press, 1967.
7. Liao X., Wang L. Q., Yu P. Stability of Dynamical Systems. — Amsterdam: Elsevier, 2007.
8. Oksendal B. Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2010.

М. М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, Майкоп

E-mail: magomet_sh@mail.ru

В. Б. Тлячев

Адыгейский государственный университет, Майкоп

E-mail: stvb2006@rambler.ru



ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БУССИНЕСКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

© 2018 г. Т. К. ЮЛДАШЕВ

Аннотация. Рассмотрены вопросы об однозначной разрешимости обратной краевой задачи по восстановлению источника и граничного режима для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром. Развита метод вырожденного ядра в случае обратной краевой задачи для рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка. При помощи метода сжимающих отображений доказана однозначная разрешимость задачи. Установлен критерий устойчивости решения по функциям восстановления.

Ключевые слова: обратная краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение типа Буссинеска, вырожденное ядро, однозначная разрешимость.

AMS Subject Classification: 35R30

1. Постановка задачи. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению прямых и обратных задач для уравнений, не имеющих аналогов в классической математической физике. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводятся к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков (см. [2, 6, 29]). Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков рассматривались в работах многих авторов, в частности, в [7, 8, 12, 14, 22, 23, 28, 30]. Изучению различных задач для уравнений в частных производных четвертого порядка посвящено большое количество работ (см., например, [1, 3, 4, 10, 15, 17, 19–21]). Дифференциальные уравнения в частных производных типа Буссинеска имеют много приложений в математической физике (см. [18]).

Теория обратных задач представляет собой активно развивающееся направление современной теории дифференциальных уравнений. Изучению обратных задач посвящено большое количество работ (см. [5, 9, 11, 13, 24, 25]). Метод вырожденного ядра для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных разрабатывался в [26, 27].

В настоящей работе предлагается метод изучения обратной краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска четвертого порядка с вырожденным ядром.

В области Ω рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 U(t, x)}{\partial t^2 \partial x^2} - \mu \int_0^T K(t, s) \frac{\partial^2 U(s, x)}{\partial x^2} ds = \eta(t) \beta(x) + f\left(x, \beta(x), \int_0^T H(\theta) U(\theta, x) d\theta\right) \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$U(t, x)|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad U(t, x)|_{t=T} = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega_l, \quad (2)$$

$$U(t, x)|_{x=0} = U(t, x)|_{x=l} = 0, \quad t \in \Omega_T \quad (3)$$

и дополнительными условиями

$$\int_0^T \Theta(s)U(s, x)ds = \psi(x), \quad x \in \Omega_l, \quad (4)$$

$$U_t(t, x)|_{t=T} = r(x), \quad x \in \Omega_l, \quad (5)$$

где $\eta(t) \in C(\Omega_T)$, $f(x, \beta, \gamma) \in C(\Omega_l \times R \times R)$, $\beta(x) \in C(\Omega_l)$ — первая функция восстановления, $H(t) \in C(\Omega_T)$, $\varphi_2(x)$ — вторая функция восстановления,

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^m a_i(t)b_i(s), \quad 0 < a_i(t), \quad b_i(s) \in C(\Omega_T), \quad \psi(x) \in C(\Omega_l),$$

$$0 < \int_0^T |\Theta(s)|ds < \infty,$$

$$\begin{aligned} \psi(x)|_{x=0} = \psi(x)|_{x=l} = 0, \quad \varphi_k(x) \in C^3(\Omega_l), \quad \varphi_k(x)|_{x=0} = \varphi_k(x)|_{x=l} = 0, \quad k = 1, 2, \\ r(x) \in C(\Omega_l), \quad \Omega = \Omega_T \times \Omega_l, \quad \Omega_T = [0, T], \quad \Omega_l \equiv [0, l], \quad 0 < T < \infty, \quad 0 < l < \infty, \end{aligned}$$

μ — действительный спектральный параметр. Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

Определение 1. Решением обратной краевой задачи (1)–(5) называется тройка функций $\{U(t, x) \in C^{2,2}(\Omega), \beta(x) \in C(\Omega_l), \varphi_2(x) \in C(\Omega_l)\}$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2)–(5).

2. Сведение задачи к системе из счетного числа нелинейных интегральных уравнений. Решение данной задачи ищем в виде ряда Фурье:

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\vartheta_n(x), \quad (6)$$

где $\vartheta_n(x) = \sqrt{2/l} \sin \lambda_n x$ — собственные функции спектральной задачи

$$\vartheta''(x) + \lambda^2 \vartheta(x) = 0, \quad \vartheta(0) = \vartheta(l) = 0, \quad 0 < \lambda,$$

и образуют полную систему ортонормированных функций $\{\vartheta_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_2(\Omega_l)$, а $\lambda_n = n\pi/l$ — соответствующие собственные значения, $n = 1, 2, \dots$

Согласно предположению

$$\beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \vartheta_n(x), \quad (7)$$

$$f(x, \beta(x), \gamma(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\cdot) \vartheta_n(x), \quad (8)$$

где

$$\beta_n = \int_0^l \beta(y) \vartheta_n(y) dy, \quad f_n(\cdot) = \int_0^l f \left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \vartheta_k(y), \int_0^T H(s) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(s) \vartheta_k(y) ds \right) \vartheta_n(y) dy.$$

Подставляя ряды (6)–(8) в уравнение (1), с учетом того, что $\vartheta_n''(x) = -\lambda_n^2 \vartheta_n(x)$, получим следующую счетную систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_n''(t) + \mu \tau_n \int_0^T \sum_{i=1}^m a_i(t) b_i(s) u_n(s) ds = \frac{\eta(t) \beta_n}{1 + \lambda_n^2} + \frac{f_n(\cdot)}{1 + \lambda_n^2}, \quad (9)$$

где

$$\tau_n = \frac{\lambda_n^2}{1 + \lambda_n^2}, \quad u_n(t) = \int_0^l U(t, y) \vartheta_n(y) dy.$$

Введя обозначение

$$c_{in} = \int_0^T b_i(s) u_n(s) ds, \quad (10)$$

уравнение (9) перепишем в виде

$$u_n''(t) = -\mu \tau_n \sum_{i=1}^m a_i(t) c_{in} + \frac{\eta(t) \beta_n}{1 + \lambda_n^2} + \frac{f_n(\cdot)}{1 + \lambda_n^2}. \quad (11)$$

Граничные условия (2) для уравнения (11) запишем в виде

$$u_n(0) = \varphi_{1n}, \quad u_n(T) = \varphi_{2n},$$

где

$$\varphi_{kn} = \int_0^l \varphi_k(y) \vartheta_n(y) dy, \quad k = 1, 2.$$

Тогда путем интегрирования по t и использования свойства функции Грина из (11) получаем

$$u_n(t) = h_n(t) - \mu \sum_{i=1}^m q_{in}(t) c_{in} + \frac{p(t)}{1 + \lambda_n^2} \beta_n + \frac{\xi(t)}{1 + \lambda_n^2} f_n(\cdot), \quad (12)$$

где

$$h_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right) \varphi_{1n} + \frac{t^2}{T^2} \varphi_{2n}, \quad G(t, s) = \begin{cases} t(T-s), & t < s, \\ s(T-t), & s < t, \end{cases}$$

$$\xi(t) = \int_0^t G(t, s) ds, \quad p(t) = \int_0^t G(t, s) \eta(s) ds, \quad q_{in}(t) = \tau_n \int_0^t G(t, s) a_i(s) ds, \quad i = \overline{1, m}.$$

Подстановка выражения (12) в (10) дает счетную систему алгебраических уравнений (ССАУ)

$$c_{in} + \mu \sum_{j=1}^m A_{ijn} c_{jn} = B_{in}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (13)$$

где

$$A_{ijn} = \int_0^T b_i(s) q_{jn}(s) ds \neq 0$$

и

$$B_{in} = \int_0^T b_i(s) \left[h_n(s) + \frac{p(s)}{1 + \lambda_n^2} \beta_n + \frac{\xi(s)}{1 + \lambda_n^2} f_n(\cdot) \right] ds. \quad (14)$$

Система (13)) однозначно разрешима при любых конечных B_{in} , если выполняется следующее условие:

$$\Delta_n(\mu) = \begin{vmatrix} 1 + \mu A_{11n} & \mu A_{12n} & \dots & \mu A_{1mn} \\ \mu A_{21n} & 1 + \mu A_{22n} & \dots & \mu A_{2mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu A_{m1n} & \mu A_{m2n} & \dots & 1 + \mu A_{mmn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (15)$$

Определитель $\Delta_n(\mu)$ представляет собой многочлен относительно μ степени не выше m . Уравнение $\Delta_n(\mu) = 0$ имеет не более m различных корней. Эти корни являются собственными числами

ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Другие значения μ являются регулярными, при которых условие (15) выполняется. Для регулярных значений μ система (13) имеет единственное решение при ненулевой конечной правой части. В настоящей работе для таких регулярных значений параметра μ устанавливается однозначная разрешимость поставленной обратной задачи (1)–(5).

Сначала решения системы (13) запишем в виде

$$c_{in} = \frac{\Delta_{in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (16)$$

где

$$\Delta_{in}(\mu) = \begin{vmatrix} 1 + \mu A_{11n} & \dots & \mu A_{1(i-1)n} & B_{1n} & \mu A_{1(i+1)n} & \dots & \mu A_{1mn} \\ \mu A_{21n} & \dots & \mu A_{2(i-1)n} & B_{2n} & \mu A_{2(i+1)n} & \dots & \mu A_{2mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu A_{m1n} & \dots & \mu A_{m(i-1)n} & B_{mn} & \mu A_{m(i+1)n} & \dots & 1 + \mu A_{mmn} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_{in}(\mu)$ присутствует B_{in} . В свою очередь, в составе B_{in} находятся неизвестные функции $U(t, x)$, $\beta(x)$ и $\varphi_2(x)$. Чтобы вывести их за знак определителя, выражение в (14) запишем в следующем виде:

$$B_{in} = B_{1in} + B_{2i}\varphi_{2n} + B_{3in}\beta_n(\mu) + B_{4in}f_n(\cdot),$$

где

$$B_{1in} = \varphi_{1n} \int_0^T \left(1 - \frac{s^2}{T^2}\right) b_i(s) ds, \quad B_{2i} = \int_0^T \frac{s^2}{T^2} b_i(s) ds, \\ B_{3in} = \frac{1}{1 + \lambda_n^2} \int_0^T b_i(s) p(s) ds, \quad B_{4in} = \frac{1}{1 + \lambda_n^2} \int_0^T \xi(s) b_i(s) ds.$$

В этом случае, согласно свойству определителя имеем

$$\Delta_{in}(\mu) = \Delta_{1in}(\mu) + \varphi_{2n}\Delta_{2in}(\mu) + \beta_n(\mu)\Delta_{3in}(\mu) + f_n(\cdot)\Delta_{4in}(\mu),$$

где

$$\Delta_{kin}(\mu) = \begin{vmatrix} 1 + \mu A_{11n} & \dots & \mu A_{1(i-1)n} & B_{k1n} & \mu A_{1(i+1)n} & \dots & \mu A_{1mn} \\ \mu A_{21n} & \dots & \mu A_{2(i-1)n} & B_{k2n} & \mu A_{2(i+1)n} & \dots & \mu A_{2mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu A_{m1n} & \dots & \mu A_{m(i-1)n} & B_{kmn} & \mu A_{m(i+1)n} & \dots & 1 + \mu A_{mmn} \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, 4}.$$

Тогда формула (16) переписывается в виде

$$c_{in} = \frac{\Delta_{1in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)} + \varphi_{2n} \frac{\Delta_{2in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)} + \beta_n(\mu) \frac{\Delta_{3in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)} + f_n(\cdot) \frac{\Delta_{4in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (12), получаем следующее выражение:

$$u_n(t, \mu) = Q_n(t, \mu) + \varphi_{2n}P_n(t, \mu) + \beta_n(\mu)W_n(t, \mu) + f_n(\cdot)\Phi_n(t, \mu), \quad (18)$$

где

$$Q_n(t, \mu) = \bar{h}_n(t) - \mu \sum_{i=1}^m q_{in}(t) \frac{\Delta_{1in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}, \quad \bar{h}_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right) \varphi_{1n}, \\ P_n(t, \mu) = \frac{t^2}{T^2} - \mu \sum_{i=1}^m q_{in}(t) \frac{\Delta_{2in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}, \quad W_n(t, \mu) = \frac{p(t)}{1 + \lambda_n^2} - \mu \sum_{i=1}^m q_{in}(t) \frac{\Delta_{3in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}, \\ \Phi_n(t, \mu) = \frac{\xi(t)}{1 + \lambda_n^2} - \mu \sum_{i=1}^m q_{in}(t) \frac{\Delta_{4in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}.$$

Подставляя (18) в ряд Фурье (6), получаем формальное решение прямой краевой задачи (1)–(3):

$$U(t, x, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \left\{ Q_n(t, \mu) + \varphi_{2n} P_n(t, \mu) + \beta_n(\mu) W_n(t, \mu) + f_n(\cdot) \Phi_n(t, \mu) \right\}. \quad (19)$$

Для определения первой функции восстановления воспользуемся условием (4):

$$\begin{aligned} \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \left\{ \int_0^T \Theta(s) Q_n(s, \mu) ds + \right. \\ \left. + \varphi_{2n} \int_0^T \Theta(s) P_n(s, \mu) ds + \beta_n(\mu) \int_0^T \Theta(s) W_n(s, \mu) ds + f_n(\cdot) \int_0^T \Theta(s) \Phi_n(s, \mu) ds \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \beta_n(\mu) = \alpha_{1n}(\mu) - \alpha_{2n}(\mu) \varphi_{2n} - \alpha_{3n}(\mu) \times \\ \times \int_0^l f \left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\mu) \vartheta_k(y), \int_0^T H(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta, \mu) \vartheta_k(y) d\theta \right) \vartheta_n(y) dy, \quad (20) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{1n}(\mu) = \frac{\psi_n - \int_0^T \Theta(s) Q_n(s, \mu) ds}{\int_0^T \Theta(s) W_n(s, \mu) ds}, \quad \alpha_{2n}(\mu) = \frac{\int_0^T \Theta(s) P_n(s, \mu) ds}{\int_0^T \Theta(s) W_n(s, \mu) ds}, \\ \alpha_{3n}(\mu) = \frac{\int_0^T \Theta(s) \Phi_n(s, \mu) ds}{\int_0^T \Theta(s) W_n(s, \mu) ds}, \quad \psi_n = \int_0^l \psi(y) \vartheta_n(y) dy. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^T \Theta(t) W_n(t, \mu) dt \neq 0 \quad \forall t \in \Omega_T.$$

Подставляя (20) в (18), получаем

$$\begin{aligned} u_n(t, \mu) = F_n(t, \mu) + \varphi_{2n} D_n(t, \mu) + E_n(t, \mu) \times \\ \times \int_0^l f \left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\mu) \vartheta_k(y), \int_0^T H(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta, \mu) \vartheta_k(y) d\theta \right)' \vartheta_n(y) dy, \quad (21) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_n(t, \mu) &= Q_n(t, \mu) + \alpha_{1n}(\mu) W_n(t, \mu), \\ D_n(t, \mu) &= P_n(t, \mu) - \alpha_{2n}(\mu) W_n(t, \mu), \\ E_n(t, \mu) &= \Phi_n(t, \mu) - \alpha_{3n}(\mu) W_n(t, \mu). \end{aligned}$$

Подставляя (21) в ряд Фурье (6), получаем

$$U(t, x, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \left\{ F_n(t, \mu) + \varphi_{2n} D_n(t, \mu) + E_n(t, \mu) \times \right. \\ \left. \times \int_0^l f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\mu) \vartheta_k(y), \int_0^T H(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta, \mu) \vartheta_k(y) d\theta\right) \vartheta_n(y) dy \right\}. \quad (22)$$

Воспользуемся условием (5). Тогда из 22 следует

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \left\{ F'_n(t, \mu) + \varphi_{2n} D'_n(t, \mu) + E'_n(t, \mu) \times \right. \\ \left. \times \int_0^l f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\mu) \vartheta_k(y), \int_0^T H(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta, \mu) \vartheta_k(y) d\theta\right) \vartheta_n(y) dy \right\}.$$

Отсюда находим формулу для определения второй функции восстановления:

$$\varphi_{2n} = \chi_{1n}(\mu) - \chi_{2n}(\mu) \int_0^l f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\mu) \vartheta_k(y), \int_0^T H(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta, \mu) \vartheta_k(y) d\theta\right) \vartheta_n(y) dy, \quad (23)$$

где

$$\chi_{1n}(\mu) = \frac{r_n - F'_n(T, \mu)}{D'_n(T, \mu)}, \quad \chi_{2n}(\mu) = \frac{E'_n(T, \mu)}{D'_n(T, \mu)}, \quad r_n = \int_0^l r(y) \vartheta_n(y) dy.$$

Нетрудно убедиться, что $D'_n(T, \mu) \neq 0$.

Подставляя (23) в (21), для основной неизвестной функции окончательно получаем

$$u_n(t, \mu) \equiv I_{1n}(\mu; \beta_n, u_n) = g_{1n}(t, \mu) + g_{2n}(t, \mu) \times \\ \times \int_0^l f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\mu) \vartheta_k(y), \int_0^T H(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta, \mu) \vartheta_k(y) d\theta\right) \vartheta_n(y) dy, \quad (24)$$

где

$$g_{1n}(t, \mu) = F_n(t, \mu) + \chi_{1n}(\mu) D_n(t, \mu), \quad g_{2n}(t, \mu) = E_n(t, \mu) - \chi_{2n}(\mu) D_n(t, \mu).$$

Теперь, подставляя (23) в (20), для первой функции восстановления получаем окончательную формулу

$$\beta_n(\mu) \equiv I_{2n}(\mu; \beta_n, u_n) = \sigma_{1n}(\mu) - \sigma_{2n}(\mu) \times \\ \times \int_0^l f\left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\mu) \vartheta_k(y), \int_0^T H(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta, \mu) \vartheta_k(y) d\theta\right) \vartheta_n(y) dy, \quad (25)$$

где

$$\sigma_{1n}(\mu) = \alpha_{1n}(\mu) - \alpha_{2n}(\mu) \chi_{1n}(\mu), \quad \sigma_{2n}(\mu) = \alpha_{2n}(\mu) \chi_{2n}(\mu) - \alpha_{3n}(\mu).$$

Итак, согласно (24) и (25) имеем две счетных системы нелинейных интегральных уравнений:

$$u_n(t, \mu) \equiv I_{1n}(\mu; \beta_n, u_n), \quad \beta_n(\mu) \equiv I_{2n}(\mu; \beta_n, u_n). \quad (26)$$

3. Однозначная разрешимость системы интегральных уравнений. Нам понадобятся следующие банаховы пространства:

- 1) пространство $B_2(T)$ последовательностей непрерывных функций $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке Ω_T с нормой

$$\|u(t)\|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{t \in \Omega_T} |u_n(t)| \right)^2} < \infty;$$

- 2) координатное гильбертово пространство ℓ_2 числовых последовательностей $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ с нормой

$$\|\varphi\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^2} < \infty;$$

- 3) пространство $L_2(\Omega_l)$ суммируемых с квадратом функций на отрезке Ω_l с нормой

$$\|\vartheta(x)\|_{L_2(\Omega_l)} = \sqrt{\int_0^l |\vartheta(y)|^2 dy} < \infty.$$

Теорема 1. Пусть выполняется условие (15), а также следующие условия:

- (i) $\omega_i = \|g_i(t, \mu)\|_{B_2(T)} < \infty$, $i = 1, 2$;
- (ii) $\varepsilon_i = \|\sigma_i(\mu)\|_{\ell_2} < \infty$, $i = 1, 2$;
- (iii) $M_0 = \|f(x, \beta, \gamma)\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty$, $M_1 = \int_0^T |H(t)| dt < \infty$;
- (iv) $|f(x, \beta_1, \gamma_1) - f(x, \beta_2, \gamma_2)| \leq w_1(x)|\beta_1 - \beta_2| + w_2(x)|\gamma_1 - \gamma_2|$, $0 < w_i(x)$, $i = 1, 2$;
- (v) $\rho = \delta_0 \max \{\varepsilon_2; \omega_2\} < 1$, где $\delta_0 = \max \{\|w_1(x)\|_{L_2(\Omega_l)}; M_1\|w_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)}\}$,

то система (26) имеет единственную пару решений. Эту пару решений можно найти методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} \beta_n^0(\mu) &= \sigma_{1n}(\mu), & \beta_n^{j+1}(\mu) &\equiv I_{2n}(\mu; \beta_n^j, u_n^j), \\ u_n^0(t, \mu) &= g_{1n}(t, \mu), & u_n^{j+1}(t, \mu) &\equiv I_{1n}(\mu; \beta_n^j, u_n^j), \end{aligned} \quad j = 1, 2. \quad (27)$$

Доказательство. Для нулевых приближений из (27) имеем

$$\|\beta^0(\mu)\|_{\ell_2} \leq \varepsilon_1, \quad \|u^0(t, \mu)\|_{B_2(T)} \leq \omega_1. \quad (28)$$

Применяя неравенства Гельдера и Бесселя, с учетом условий теоремы из (27) получаем оценки для первых разностей:

$$\begin{aligned} \|\beta^1(\mu) - \beta^0(\mu)\|_{\ell_2} &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[|\sigma_{2n}(\mu)| \int_0^l |f(y, \beta^0, \gamma^0) \vartheta_n(y)| dy \right]^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_{2n}(\mu)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l |f(y, \beta^0, \gamma^0)| |\vartheta_n(y)| dy \right]^2} \leq \\ &\leq \varepsilon_2 \|f(x, \beta^0, \gamma^0)\|_{L_2(\Omega_l)} = \varepsilon_2 M_0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
\|u^1(t, \mu) - u^0(t, \mu)\|_{B_2(T)} &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} \left[\left| g_{2n}(t, \mu) \right| \int_0^l \left| f(y, \beta^0, \gamma^0 bbb) \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \leq \\
&\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} |g_{2n}(t, \mu)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| f(y, \beta^0, \gamma^0) \right| |\vartheta_n(y)| dy \right]^2} \leq \\
&\leq \omega_2 \|f(x, \beta^0, \gamma^0)\|_{L_2(\Omega_l)} = \omega_2 M_0. \quad (30)
\end{aligned}$$

Применяя неравенства Гельдера и Бесселя, из (27) находим оценки

$$\begin{aligned}
&\|\beta^{j+1}(\mu) - \beta^j(\mu)\|_{\ell_2} \leq \\
&\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_{2n}(\mu)|^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left(w_1(y) \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k^j(\mu) - \beta_k^{j-1}(\mu)| |\vartheta_k(y)| + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + w_2(y) \int_0^T |H(\theta)| \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^j(\theta, \mu) - u_k^{j-1}(\theta, \mu)| |\vartheta_k(y)| d\theta \right) |\vartheta_n(y)| dy \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \varepsilon_2 \left[\int_0^l \left(w_1(y) \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k^j(\mu) - \beta_k^{j-1}(\mu)| |\vartheta_k(y)| + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + w_2(y) \int_0^T |H(\theta)| \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^j(\theta, \mu) - u_k^{j-1}(\theta, \mu)| |\vartheta_k(y)| d\theta \right)^2 dy \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \varepsilon_2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k^j(\mu) - \beta_k^{j-1}(\mu)| \int_0^l w_1(y) |\vartheta_k(y)| dy + \right. \\
&\quad \left. + M_1 \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^j(t, \mu) - u_k^{j-1}(t, \mu)| \int_0^l w_2(y) |\vartheta_k(y)| dy \right]. \quad (31)
\end{aligned}$$

Далее, применяя неравенства Минковского, Гельдера и Бесселя, из (31) получаем

$$\begin{aligned}
&\|\beta^{j+1}(\mu) - \beta^j(\mu)\|_{\ell_2} \leq \\
&\leq \varepsilon_2 \left[\left\| \beta^j(\mu) - \beta^{j-1}(\mu) \right\|_{\ell_2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l w_1(y) |\vartheta_k(y)| dy \right]^2} + \right. \\
&\quad \left. + M_1 \left\| u^j(t, \mu) - u^{j-1}(t, \mu) \right\|_{B_2(T)} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l w_2(y) |\vartheta_k(y)| dy \right]^2} \right] \leq \\
&\leq \varepsilon_2 \left[\left\| \beta^j(\mu) - \beta^{j-1}(\mu) \right\|_{\ell_2} \|w_1(x)\|_{L_2(\Omega_l)} + M_1 \left\| u^j(t, \mu) - u^{j-1}(t, \mu) \right\|_{B_2(T)} \|w_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} \right] \leq \\
&\leq \delta_0 \varepsilon_2 \left[\left\| \beta^j(\mu) - \beta^{j-1}(\mu) \right\|_{\ell_2} + \left\| u^j(t, \mu) - u^{j-1}(t, \mu) \right\|_{B_2(T)} \right], \quad (32)
\end{aligned}$$

где

$$\delta_0 = \max \left\{ \|w_1(x)\|_{L_2(\Omega_l)}; M_1 \|w_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} \right\}.$$

Аналогично оценкам (31) и (32) получаем и следующую оценку:

$$\|u^{j+1}(t, \mu) - u^j(t, \mu)\|_{B_2(T)} \leq \delta_0 \omega_2 \left[\|\beta^j(\mu) - \beta^{j-1}(\mu)\|_{\ell_2} + \|u^j(t, \mu) - u^{j-1}(t, \mu)\|_{B_2(T)} \right]. \quad (33)$$

Из (32) и (33) получаем

$$\begin{aligned} \|\beta^{j+1}(\mu) - \beta^j(\mu)\|_{\ell_2} + \|u^{j+1}(t, \mu) - u^j(t, \mu)\|_{B_2(T)} &\leq \\ &\leq \rho \left[\|\beta^j(\mu) - \beta^{j-1}(\mu)\|_{\ell_2} + \|u^j(t, \mu) - u^{j-1}(t, \mu)\|_{B_2(T)} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

В силу последнего условия теоремы из оценки (34) следует, что операторы в правой части (26) являются сжимающими. Из оценок (28)–(30) и (34) заключаем, что для операторов в правой части (26) существует единственная пара неподвижных точек (см., например, [16, с. 389–401]). Следовательно, система (26) имеет единственное решение, состоящее из функций $\bar{u}(t, \mu) \in B_2(T)$, $\bar{\beta}(\mu) \in \ell_2$. Кроме того, справедливы оценки скорости сходимости:

$$\begin{aligned} \|\bar{\beta}^{j+1}(\mu) - \bar{\beta}(\mu)\|_{\ell_2} &\leq M_0 (\omega_2 + \varepsilon_2) \frac{\rho^{j+1}}{1 - \rho}, \\ \|\bar{u}^{j+1}(t, \mu) - \bar{u}(t, \mu)\|_{B_2(T)} &\leq M_0 (\omega_2 + \varepsilon_2) \frac{\rho^{j+1}}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

4. Разрешимость обратной задачи.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и пара функций $\bar{u}(t, \mu) \in B_2(T)$, $\bar{\beta}(\mu) \in \ell_2$ является единственным решением системы нелинейных интегральных уравнений (26). Тогда обратная задача (1)–(5) однозначно разрешима.

Доказательство. Подставляя решение $\bar{u}(t, \mu) \in B_2(T)$, $\bar{\beta}(\mu) \in \ell_2$ системы (26) в (6) и (7), имеем

$$\begin{aligned} \beta(x, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\mu) \vartheta_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) &\left[\sigma_{1n}(\mu) - \right. \\ &\left. - \sigma_{2n}(\mu) \int_0^l f \left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\beta}_k(\mu) \vartheta_k(y), \int_0^T H(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k(\theta, \mu) \vartheta_k(y) d\theta \right) \vartheta_n(y) dy \right], \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} U(t, x, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, \mu) \vartheta_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) &\left[g_{1n}(t, \mu) + \right. \\ &\left. + g_{2n}(t, \mu) \int_0^l f \left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\beta}_k(\mu) \vartheta_k(y), \int_0^T H(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k(\theta, \mu) \vartheta_k(y) d\theta \right) \vartheta_n(y) dy \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Используя неравенства Минковского и оценки (28)–(30) для рядов (35) и (36), получим оценки

$$\begin{aligned} |\beta(x, \mu)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\vartheta_n(x)| \left| \sigma_{1n}(\mu) - \sigma_{2n}(\mu) \int_0^l f(y, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) \vartheta_n(y) dy \right| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 M_0) < \infty, \\ |U(t, x, \mu)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\vartheta_n(x)| \left| g_{1n}(t, \mu) + g_{2n}(t, \mu) \int_0^l f(y, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) \vartheta_n(y) dy \right| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} (\omega_1 + \omega_2 M_0) < \infty. \end{aligned}$$

Подставляя решение $\bar{u}(t, \mu) \in B_2(T)$, и $\bar{\beta}(\mu) \in \ell_2$ системы (26) в (23), определим вторую функцию восстановления $\varphi_2(\mu) \in \ell_2$:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2n}(\mu) \vartheta_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \left[\chi_{1n}(\mu) - \right. \\ \left. - \chi_{2n}(\mu) \int_0^l f \left(y, \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\beta}_k(\mu) \vartheta_k(y), \int_0^T H(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k(\theta, \mu) \vartheta_k(y) d\theta \right) \vartheta_n(y) dy \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Нетрудно убедиться, что ряд (37) сходится. Теорема доказана. $\square$

5. Устойчивость решения по функциям восстановления.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 1. Если пара функций $\bar{u}(t, \mu) \in B_2(T)$, $\bar{\beta}(\mu) \in \ell_2$ является единственным решением системы нелинейных интегральных уравнений (26) и $\varphi_2(\mu) \in \ell_2$ — вторая функция восстановления, то решение уравнения (1) $U(t, x, \mu)$ непрерывно зависит от функций восстановления $\beta(x, \mu)$ и $\varphi_2(x)$.

Доказательство. Пусть $U_1(t, x, \mu)$ и $U_2(t, x, \mu)$ — два различных решения краевой задачи (1)–(3), соответствующие двум различным значениям функций восстановления $\varphi_{21}(x)$ и $\varphi_{22}(x)$, $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$ соответственно. Предположим, что

$$\|\bar{\varphi}_{21} - \bar{\varphi}_{22}\|_{\ell_2} < \delta_1, \quad \|\bar{\beta}_1(\mu) - \bar{\beta}_2(\mu)\|_{\ell_2} < \delta_2, \quad 0 < \delta_k = \text{const}, \quad k = 1, 2.$$

С учетом этого, из (18) имеем

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_1(t, \mu) - \bar{u}_2(t, \mu)\|_{B_2(T)} &\leq \|\bar{\varphi}_{21} - \bar{\varphi}_{22}\|_{\ell_2} \|P(t, \mu)\|_{B_2(T)} + \|\bar{\beta}_1(\mu) - \bar{\beta}_2(\mu)\|_{\ell_2} \|W(t, \mu)\|_{B_2(T)} + \\ &+ \delta_0 \|\Phi(t, \mu)\|_{B_2(T)} \left(\|\bar{\beta}_1(\mu) - \bar{\beta}_2(\mu)\|_{\ell_2} + \|\bar{u}_1(t, \mu) - \bar{u}_2(t, \mu)\|_{B_2(T)} \right) < \\ &< N_1 + N_2 \|\bar{u}_1(t, \mu) - \bar{u}_2(t, \mu)\|_{B_2(T)}, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$N_1 = \delta_1 \|P(t, \mu)\|_{B_2(T)} + \delta_2 \left[\|W(t, \mu)\|_{B_2(T)} + \delta_0 \|\Phi(t, \mu)\|_{B_2(T)} \right], \quad N_2 = \delta_0 \|\Phi(t, \mu)\|_{B_2(T)}.$$

По условию теоремы $1 - N_2 > 0$. Поэтому из (38) получаем, что

$$\|\bar{u}_1(t, \mu) - \bar{u}_2(t, \mu)\|_{B_2(T)} < \frac{N_1}{1 - N_2}. \quad (39)$$

С учетом оценок (38) и (39) получаем оценку

$$\begin{aligned} |U_1(t, x, \mu) - U_2(t, x, \mu)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_{1n}(t, \mu) - u_{2n}(t, \mu)| |\vartheta_n(x)| < \\ &< \sqrt{\frac{2}{l}} \left(N_1 + N_2 \|\bar{u}_1(t, \mu) - \bar{u}_2(t, \mu)\|_{B_2(T)} \right) < \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{N_1}{1 - N_2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Положив

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{N_1}{1 - N_2}$$

из (40) получаем утверждение теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абзалимов Р. Р., Салыхова Е. В. Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвертого порядка с разделенными краевыми условиями// Изв. вузов. Сер. мат. — 2008. — 11. — С. 3–11.
2. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. — М.: Наука, 2006.
3. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2010. — 12, № 3. — С. 37–42.
4. Бурыченко Е. А. О размерности ядра задачи Дирихле для уравнений четвертого порядка// Диффер. уравн. — 2015. — 51, № 4. — С. 472–480.
5. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. — М.: МГУ, 1994.
6. Замышляева А. А. Математические модели соболевского типа высокого порядка// Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. мат. модел. программ. — 2014. — 7, № 2. — С. 5–28.
7. Каримов Ш. Т. Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя// Изв. вузов. Сер. мат. — 2017. — 8. — С. 27–41.
8. Кошанов Б. Д., Солдатов А. П. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 12. — С. 1666–1681.
9. Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Линейные операторы и некорректные задачи. — М.: Наука, 1991.
10. Мамедов И. Г. Фундаментальное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения четвертого порядка с негладкими коэффициентами// Владикавказ. мат. ж. — 2010. — 12, № 1. — С. 17–32.
11. Мегралиев Я. Т. Об одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода// Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2013. — 19, № 1. — С. 226–235.
12. Похожаев С. И. О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка// Мат. сб. — 1982. — 117, № 2. — С. 251–265.
13. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984.
14. Скрыпник И. В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. — Киев: Наукова думка, 1973.
15. Смирнов М. М. Модельные уравнения смешанного типа четвертого порядка. — Л.: ЛГУ, 1972.
16. Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
17. Турбин М. В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель—Балкли// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. физ. мат. — 2013. — 2. — С. 246–257.
18. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
19. Шабров С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. физ. мат. — 2015. — 2. — С. 168–179.
20. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — 51, № 9. — С. 1703–1711.
21. Юлдашев Т. К. О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением// Вест. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. Мех. Физ. — 2011. — 10 (227). — С. 40–48.
22. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — 52, № 1. — С. 112–123.
23. Юлдашев Т. К. Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени// Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. мат. мех. физ. — 2013. — 5, № 1. — С. 69–75.
24. Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка// Вест. Самар. гос. ун-та. Сер. естественнауч. — 2013. — 1. — С. 58–66.
25. Юлдашев Т. К. Об обратной задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2014. — 1. — С. 153–163.
26. Юлдашев Т. К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2015. — 9. — С. 74–79.
27. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром// Диффер. уравн. — 2017. — 53, № 1. — С. 101–110.
28. Юлдашева А. В. Об одной задаче для квазилинейного уравнения четного порядка// Дифференциальные уравнения. Математическая физика/ Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — М.: ВИНТИ РАН, 2017. — 140. — С. 43–49.

29. *Benney D. J., Luke J. C.* Interactions of permanent waves of finite amplitude// J. Math. Phys. — 1964. — 43. — С. 309–313.
30. *Karimov Sh. T.* Multidimensional generalized Erdélyi–Kober operator and its application to solving Cauchy problems for differential equations with singular coefficients// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2015. — 18, № 4. — С. 845–861.

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный университет науки и технологий

им. М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com